

01174



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO FACULTAD DE INGENIERÍA

INFLUENCIA DE LA DISTRIBUCIÓN INICIAL DE
PRESIÓN NO-UNIFORME EN PRUEBAS DE
VARIACIÓN DE PRESIÓN

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA
(PETROLERA)**

PRESENTA:

ANTONIO SAMPAYO TRUJILLO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RODOLFO G. CAMACHO VELÁZQUEZ



MÉXICO, D. F.

7/3/2000

2000



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatorias:

*A Dios, quien con su presencia en todo
Momento me ha fortalecido cada día más*

A mis padres:

*Ing. Emilio V. Sampayo Luna y
Profra. Lucila Trujillo Amaya*

*Por haberme dado la vida y de quienes
estoy profundamente orgulloso.*

A mi hermano:

Ing. Emilio Sampayo Trujillo

Con cariño

A la memoria de mis abuelos:

Antonio y Lucila

A la tierra que me vio nacer:

Cerro Azul, Ver.

AGRADECIMIENTOS

Al *Dr. Rodolfo G. Camacho Velázquez* por el apoyo que siempre me ha brindado.
Le doy las gracias por sus enseñanzas y consejos.

A mis sinodales: *Dr. Fernando Samaniego Verduzco, Dr. Luis Macias Chapa, Dr. Daniel García Gavito y Dr. Francisco García Hernández* por sus sugerencias y opiniones a esta tesis.

A una gran institución educativa: La UNAM, en especial a la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería por la formación académica que me ha brindado.

CONTENIDO

	Pág.
RESUMEN	i
ABSTRACT	ii
LISTA DE FIGURAS	iii
LISTA DE TABLAS	vi
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO II. REVISIÓN DE LITERATURA	4
II.1 Pruebas de decremento	4
II.2 Pruebas de incremento	7
II.3 Trabajos previos relacionados con el tema	10
CAPÍTULO III. DESARROLLO DEL TEMA	22
III.1 Modelo físico y consideraciones	22
III.2 .1 Sistemas infinitos homogéneos	23
III.2.2 Sistemas infinitos con doble porosidad	30
III.2.3 Sistemas cerrados homogéneos	31
III.2.4 Sistemas cerrados con doble porosidad	33
III.3. Problema inverso	33

CAPÍTULO IV. DISCUSIÓN DE RESULTADOS	35
IV.1 Influencia de la distribución inicial de presión no-uniforme	35
IV.2 Resultados para sistemas infinitos	36
IV.2.1 Yacimientos homogéneos	37
IV.2.2 Yacimientos fracturados	50
IV.3 Resultados para sistemas cerrados	59
IV.4 Influencia de la distribución inicial de presión no-uniforme en una prueba real (análisis de una prueba real considerando la existencia de una distribución inicial no-uniforme.	65
 CAPÍTULO V. CONCLUSIONES	 71
 NOMENCLATURA	 73
 REFERENCIAS	 74
 APÉNDICE A: SOLUCIÓN. YACIMIENTO INFINITO Y HOMOGÉNEO	 79
 APÉNDICE B: SISTEMA CERRADO (YACIMIENTO HOMOGÉNEO)	 91
 APÉNDICE C: MÉTODO DE BACKUS Y GILBERT (Problema Inverso)	 94

RESUMEN

El presente trabajo es un estudio sobre la influencia de la distribución inicial de presión no-uniforme en pruebas de variación de presión. A la fecha todos los métodos existentes en la literatura consideran una distribución inicial de presión en todo el yacimiento uniforme; sin embargo, esta hipótesis no siempre se puede justificar.

En esta tesis se presentan soluciones analíticas que consideran una distribución inicial de presión no-uniforme con diferentes condiciones de frontera interna y externa. Estas soluciones se obtuvieron por medio de los métodos de Transformada de Laplace y Funciones de Green. Como formas de representación alternas de las ecuaciones diferenciales se obtienen ecuaciones integrales, las cuales relacionan la función de presión inicial no-uniforme con la respuesta en el pozo. La solución de estas ecuaciones representa problemas inversos que se resuelven por medio del método de Backus y Gilbert.

Se presentan casos de estudio relacionados con la respuesta de presión para yacimientos homogéneos y naturalmente fracturados con diferentes distribuciones iniciales de presión no-uniformes. Se muestra una buena correlación entre las soluciones teóricas, obtenidas con el método antes mencionado y numéricas, obtenidas con un simulador de diferencias finitas.

Para los sistemas radiales se encontró, que durante el periodo de flujo transitorio no se genera la línea recta semilogarítmica. También durante el periodo de flujo dominado por frontera, con frontera exterior de no flujo, se observó que existe una caída de presión adicional debida a la influencia de la distribución inicial de presión no-uniforme. Para estudiar este efecto (pseudodaño) se obtuvo una expresión analítica.

ABSTRACT

Most of the procedures available in the literature for well tests analysis assume a uniform initial pressure distribution. In this work the influence of a non-uniform initial condition in pressure data is presented.

Several solutions, which consider a non-uniform initial distribution and different conditions at the inner and outer boundaries, are presented. These solutions were obtained by using a combination of Laplace transformation and Green's function methods. Integral equations relating the well response to the initial distribution function are obtained. These equations, which represent inverse problems, are solved recursively by using Backus and Gilbert solution.

Numerical experiments of the pressure response in homogeneous and naturally fractured reservoirs with different initial pressure distributions are presented. The theory and numerical results are compared and found good agreement demonstrating the applicability of the proposed method.

For radial systems it is found that the semilogarithmic straight line is not generally evident during the transient period. Also during the boundary dominated flow period, with no-flow outer boundary, it is found that an additional pressure drop is present for the case of a non-uniform initial distribution. An expression for this additional pseudo-skin is provided.

LISTA DE FIGURAS

Figura II.1	Perfil calculado para la variación de la permeabilidad inversa, comparada con la real. Según Oliver (1992)	20
Figura III.1	p_{wD} vs t_D para un sistema radial infinito con almacenamiento y daño mecánico. Distribución de Presión Inicial Uniforme	28
Figura IV.1	Influencia de la Distribución Inicial de Presión, en la respuesta de presión para un decremento	38
Figura IV.2	Influencia del perfil de distribución inicial. Ecs. IV.2-IV.3, en la respuesta de presión para un decremento	40
Figura IV.3	Influencia del perfil de distribución inicial. Ec. IV.4, en la respuesta de presión para un decremento	41
Figura IV.4	Obtención de los perfiles de distribución inicial, Ecs. IV.2-IV.4, empleando datos sin ruido durante el periodo transitorio de la respuesta de presión para decremento	45
Figura IV.5	Cálculo del perfil inicial, Ec. IV.1, empleando datos con y sin ruido en el periodo transitorio, para una prueba de decremento.	46

Figura IV.6	Cálculo de los perfiles iniciales. Ecs. IV.2-IV.4, empleando datos con ruido durante el periodo transitorio, para una prueba de decremento	48
Figura IV.7	Influencia del perfil no-uniforme para un incremento que sigue a un decremento de duración desconocida	49
Figura IV.8	Influencia de la distribución inicial de presión, a partir de un periodo previo de producción. Yacimientos Fracturados	52
Figura IV.9	Influencia del perfil de distribución inicial. Ecs. IV.2 - IV.3, en la respuesta de presión para un decremento. Yacimientos Fracturados	53
Figura IV.10	Influencia del perfil de distribución inicial Ec. IV.4, en la respuesta de presión para un decremento. Sistemas Naturalmente Fracturados	54
Figura IV.11	Cálculo del perfil inicial, Ecs. IV.2 – IV.4, empleando datos sin ruido durante el periodo de flujo transitorio, para un decremento. Sistemas naturalmente fracturados	55
Figura IV.12	Cálculo del perfil inicial, Ec. IV.1, empleando datos con y sin ruido en el periodo transitorio, para una prueba de decremento. Sistemas naturalmente fracturados	57
Figura IV.13	Cálculo de perfiles iniciales, Ecs. IV.2 – IV.4, empleando datos con ruido durante el periodo transitorio. Prueba de decremento. Yacimientos naturalmente fracturados	58

Figura IV.14	Influencia del perfil de distribución inicial. Ecs. IV.2-IV.3, en la respuesta de presión para un decremento	60
Figura IV.15	Influencia del perfil de distribución Inicial. Ec. IV.4, en la respuesta de presión para un decremento. Yacimientos homogéneos	61
Figura IV.16	Influencia del perfil de distribución inicial. Ecs. IV.2-IV.3, en la respuesta de presión para un decremento	62
Figura IV.17	Influencia del perfil de distribución inicial. Ec. IV.4, en la respuesta de presión para un decremento. Sistemas naturalmente fracturados	63
Figura IV.18	Influencia del perfil inicial no-uniforme en pruebas de Interferencia, $r = 3967.7$ ft	66
Figura IV.19	Función de primera derivada para las pruebas de interferencia	66
Figura IV.20	Prueba 19. Libro de Horne (1998). Interpretación ambigua	67
Figura IV.21	Función de distribución no-uniforme. Prueba 19 (Horne). Caso a	69
Figura IV.22	Función de distribución de presión no-uniforme. Prueba 19 (Horne). Caso b	69

LISTA DE TABLAS

Tabla IV.1 Comparación entre las ordenadas al origen calculadas y gráficas	59
Tabla IV.2 Determinación de la presión media p , considerando influencia de la distribución inicial de presión no-uniforme en una prueba real	70

*Capítulo**I*

INTRODUCCIÓN

Durante una prueba de presión, se obtiene la respuesta del yacimiento ante una perturbación. Esta respuesta puede llegar a ser grande o pequeña, dependiendo de las características y propiedades del yacimiento en estudio, por lo tanto la interpretación de una prueba de presión es un problema inverso. Dicha interpretación requiere de la solución matemática del problema. El propósito del análisis de una prueba es estimar ciertos parámetros que caracterizan al yacimiento. La importancia de conocer la presión en el yacimiento es debido a que este parámetro indica que tanto potencial energético posee el yacimiento; lo que permite predecir el periodo de tiempo en que la producción puede ser sostenida. La respuesta de un yacimiento ante una perturbación, como es una prueba de presión, está gobernada por parámetros tales como la permeabilidad, daño mecánico, coeficiente de almacenamiento, distancias a las fronteras, heterogeneidades, etc.

A la fecha todos los métodos de análisis de pruebas de presión consideran que la distribución inicial de presión en el yacimiento es uniforme. Sin embargo esta hipótesis no siempre puede justificarse. Para una prueba de incremento se sabe que la respuesta de presión está controlada por la distribución de presión al momento de cierre (Camacho-Velázquez y Raghavan, 1989; Raghavan, 1993). Por lo tanto, se esperaría que la respuesta para un decremento estuviera afectada por una condición de distribución inicial no uniforme, la cual estaría dada por la producción previa tanto del mismo pozo como de los pozos vecinos.

La determinación de la distribución inicial de presión por medio de datos de presión en el pozo constituye un problema inverso. *La motivación esencial de la presente tesis es demostrar que la distribución inicial de presión no uniforme en el yacimiento influye en la respuesta de presión, así como la determinación de esta distribución.*

El estudio de la ecuación de difusión ha sido objeto de numerosas publicaciones a lo largo de la historia de la física. Dicha ecuación se ha estudiado principalmente con el fin de conocer la distribución de temperaturas que se tiene al someter placas, cascarones, recipientes, y otros elementos ante diversas condiciones de temperatura. Carslaw y Jaeger (1959) presentaron una solución analítica para el problema de conducción de calor en flujo radial, con una condición inicial de temperatura arbitraria empleando el método de separación de variables. Por otro lado Ozisik (1989) también presenta en forma similar la solución de la ecuación de difusión en coordenadas radiales, y hace mención al caso específico que se tiene cuando la distribución inicial de temperatura es constante. Dicho desarrollo fue publicado por Masters (1955). En esta referencia se encuentran tabulados los valores de la respuesta para una temperatura inicial constante. Las soluciones a la ecuación de difusión antes citadas quedan en términos de una ecuación integral de Fredholm de primera clase. La solución al problema directo es bien comportada ya que al involucrar el kernel (núcleo) de calor que es un término exponencial con signo negativo, hace que la solución converja sin tener muchas dificultades. Sin embargo, si se plantea el proceso inverso, que sería encontrar la distribución inicial que provocó dichos efectos, el término exponencial se convierte en positivo, lo cual trae como consecuencia problemas en la estabilidad de la solución. Se dice que cuando ocurre lo anterior se trata de un problema retrógrado de la ecuación de calor que es exponencialmente inestable (Engl, 1995).

Para encontrar la solución a este tipo de problemas inversos se han planteado en la literatura los métodos clásicos de regularización (Tikhonov, 1963), que en términos

generales aproximan un problema mal comportado por medio de una familia de problemas bien comportados. A finales de los años sesentas se publicó un método alternativo para la solución de problemas inversos enfocados al campo de la geofísica (Backus y Gilbert, 1968). El método propuesto por Backus y Gilbert (1968) involucra la minimización y optimización de la función objetivo bajo un conjunto de restricciones.

Recientemente, Oliver (1990) presentó un artículo referente a la estimación de la distribución radial de permeabilidades a través de datos de presión. Este problema inverso se resolvió por medio de la aplicación del método de Backus y Gilbert (1968).

La presente tesis tiene como objetivos específicos:

- a) Observar la influencia de la distribución inicial de presión en datos de pruebas de presión.
- b) Validar soluciones analíticas al problema.
- c) Obtener la distribución inicial de presiones a través de datos en pozo.

En este trabajo se desarrollan soluciones analíticas para los casos en estudio, incluyendo yacimientos homogéneos y fracturados, mediante el uso de la transformada de Laplace y Funciones de Green. Estos métodos de solución llevan a obtener soluciones en base a ecuaciones integrales de Fredholm de primera clase, las cuales se resuelven numéricamente por medio de la aplicación del método de Backus y Gilbert (1968).

Los resultados en la presente tesis se obtienen para el caso de un pozo penetrando totalmente la formación situado en el centro de un yacimiento circular produciendo líquido ligeramente compresible, en condiciones de régimen laminar. Se analizaron los sistemas infinito y cerrado.

Capítulo II

REVISIÓN DE LITERATURA

La simulación del comportamiento de yacimientos emplea modelos numéricos que permiten la determinación de las condiciones óptimas de explotación. Entre la información que se necesita proporcionar a estos modelos, están las propiedades petrofísicas y heterogeneidades de la roca almacenadora, así como la naturaleza de entrada de fluidos, como agua y gas al sistema.

Las técnicas de análisis de pruebas de presión se desarrollaron a finales de los años 30's y principios de los 40's. La existencia de numerosas publicaciones en esta área se debe a que el comportamiento de la presión de un pozo es relativamente fácil de obtener y la información que del análisis e interpretación del mismo se deriva, tiene una gran utilidad en la práctica.

Entre los primeros métodos de análisis de pruebas de presión se pueden mencionar: 1) Método de Theis-Horner (1935), 2) Método de Muskat (1937), y 3) Método de Miller-Dyes-Hutchinson (1950). El primero y tercero de los métodos antes citados se emplean más frecuentemente que el segundo.

II.1 PRUEBAS DE DECREMENTO

Una prueba de decremento consiste en una serie de mediciones de la presión del fondo del pozo para condiciones en que el gasto del pozo es constante. Si el gasto no es constante, la prueba de presión, puede analizarse tomando en cuenta la variación del gasto de fondo, como ejemplo se tiene el método de Odeh y Jones (1965). Las pruebas de decremento son

de gran utilidad ya que no se interrumpe la producción, además de ser un método alternativo para comprobar los resultados obtenidos de pruebas de incremento. Dado que estas pruebas de presión empiezan generalmente bajo condiciones estáticas de presión en el yacimiento, pueden llevarse a cabo en pozos que han permanecido cerrados por un tiempo para llevar trabajos de reacondicionamiento.

El análisis de las pruebas de decremento de presión está basado en soluciones de la ecuación de difusión que describe el flujo radial de un fluido de compresibilidad constante. Se supone que el medio poroso es isotrópico y homogéneo, otra hipótesis importante es suponer que *la presión existente en el yacimiento antes de abrir el pozo es p_i en todas las posiciones dentro del yacimiento*. Al tiempo cero el pozo empieza a producir con un gasto constante. La presión adimensional en un punto cualquiera del yacimiento está dada por la siguiente expresión:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{kh(p_i - p_{r,t})}{141.2q\mu B} \quad \text{II.1}$$

donde p_D , es una presión adimensional, que depende del tipo de yacimiento que se tenga, finito o infinito y de las condiciones de frontera; r_D es la distancia radial adimensional y t_D es el tiempo adimensional. Soluciones analíticas de esta presión adimensional, p_D , se encuentran reportadas en la literatura para los casos más comunes.

Para la presión en el pozo, la ecuación II.1 se puede escribir en la forma siguiente:

$$p_D(1, t_D) = p_{wD} = \frac{kh(p_i - p_{wf})}{141.2q\mu B} \quad \text{II.2}$$

El comportamiento de la presión de un pozo produciendo a gasto constante localizado en un yacimiento infinito puede aproximarse por la solución de línea fuente, así:

$$\frac{kh(p_i - p_{wf})}{141.2q\mu B} = -\frac{1}{2} E_i \left(-\frac{\phi\mu c_t r_w^2}{0.001056kt} \right) \quad \text{II.3}$$

Esta ecuación también es válida para la descripción de la presión de un pozo localizado en un yacimiento finito para tiempos menores al que debe transcurrir para que el efecto de la frontera exterior afecte la producción del pozo y para $t_D > 25$.

Para valores de $t_D > 70$, se puede emplear la aproximación logarítmica para la integral exponencial, y así, la ecuación II.2 se puede escribir como:

$$\frac{kh(p_i - p_{wf})}{141.2q\mu B} = -\ln \left(-\frac{\gamma\phi\mu c_t r_w^2}{0.001056kt} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{II.4}$$

donde la constante de Euler $\gamma = 1.78$.

Si se incluye el efecto del daño de la formación y además, se expresa esta ecuación en unidades prácticas en el sistema inglés, se tiene:

$$p_{wf} = p_i - 162.52 \frac{q\mu B}{kh} \left\{ \log \frac{kt}{\phi\mu c_t r_w^2} - 3.23 + 0.87s \right\} \quad \text{II.5}$$

donde s , representa el factor de daño de la formación y \log se refiere al logaritmo de base 10.

En la ecuación II.5 se observa que durante el periodo transitorio de una prueba de decremento, se debe obtener una línea recta, si se gráfica la presión de fondo del pozo

contra el logaritmo de base 10 del tiempo de flujo del pozo. De la pendiente de esta recta se puede obtener la capacidad de flujo de la formación:

$$kh = \frac{162.52q\mu B}{m} \quad \text{II.6}$$

De la ecuación II.5 se puede obtener una expresión para el factor de daño de la formación:

$$s = 1.151 \left\{ \frac{p_i - p_{1 \text{ hora}}}{m} - \log \frac{k}{\phi \mu c_t r_w^2} - 3.93 \right\} \quad \text{II.7}$$

donde $p_{1 \text{ hora}}$ es la presión para $t=1$ hora leída en la porción recta de la curva de decremento o de su extrapolación.

Para tiempos cortos se tienen desviaciones de los datos de presión de la porción recta, los cuales se deben a varios factores, entre ellos, las variaciones en el gasto del pozo durante el periodo en que no se alcanzan condiciones de estabilización del gasto instantáneas; el efecto del almacenamiento de fluidos en el pozo, el efecto del daño en la formación, etc. Si se trata de un yacimiento finito, eventualmente la producción del pozo se verá afectada por los límites del yacimiento, y en consecuencia, a partir de este tiempo se presentarán de nuevo desviaciones en los datos de presión correspondientes a la porción recta de la curva de presión. Los datos de presión obtenidos a partir de este tiempo se utilizan en las pruebas de límite del yacimiento, *con los que se estima el volumen de drenaje del pozo.*

II.2 PRUEBAS DE INCREMENTO

Una prueba de incremento consiste en realizar mediciones de presión de fondo del pozo, p_{ws} , para tiempos Δt después de que se cerró el pozo. Para llevar a cabo esta prueba es necesario que el pozo produzca a gasto constante q por un periodo de tiempo anterior al cierre. En caso de que el gasto no sea constante, se puede emplear el principio de superposición para tomar en consideración esta variación.

Las pruebas de incremento tienen varios objetivos, entre ellos, determinar la capacidad de flujo de la formación productora, la presión promedio del yacimiento, los límites del yacimiento, heterogeneidades del yacimiento, etc.

El análisis de las pruebas de incremento se basa en el principio de superposición. Se supone que el pozo produce continuamente con un gasto q para todo tiempo $(t + \Delta t)$. En el tiempo t se supone que un segundo pozo localizado en la misma posición que el anterior empieza a inyectar fluidos con un gasto $-q$, en consecuencia, para tiempos mayores que t , el gasto neto debido a los dos pozos es nulo. Los dos métodos más comúnmente empleados para el análisis de pruebas de incremento son: 1) Método de Theis-Horner (1935) y 2) Miller, Dyes y Hutchinson (1950).

La caída de presión para tiempos después de que se ha cerrado el pozo puede obtenerse mediante la aplicación del principio de superposición:

$$p_i - p_{ws} = (\text{caída de presión al tiempo } t + \Delta t \text{ causada por el gasto } q) + (\text{caída de presión al tiempo } \Delta t \text{ causada por el gasto } -q) \quad \text{II.8}$$

Esta ecuación puede escribirse empleando la ecuación II.7, simplificando y expresando en unidades de campo en el sistema inglés se obtiene:

$$p_{ws} = p_i - 162.52 \frac{q\mu B}{kh} \log\left(\frac{t + \Delta t}{\Delta t}\right) \quad \text{II.9}$$

Si se grafica la presión registrada durante el periodo de flujo transitorio en el pozo cerrado, p_{ws} , contra el logaritmo de $(t + \Delta t) / \Delta t$, se obtiene una línea recta. El valor absoluto de la pendiente de la curva, m , es igual al coeficiente del logaritmo que interviene en la ecuación II.9. Entonces la capacidad de la formación está dada por:

$$kh = \frac{162.52q\mu B}{m} \quad \text{II.10}$$

Al igual que en caso de pruebas de decremento, para tiempos cortos y largos se tienen desviaciones de los datos de presión en la porción recta de la curva de incremento. Si la porción recta de la curva de incremento se extrapola para un tiempo de cierre del pozo Δt infinito, se obtiene una presión p^* . En el caso de un yacimiento infinito, con un solo pozo en el centro, $p^*=p_i$, donde p_i es la presión inicial en el yacimiento. En el caso de yacimientos infinitos con más de un pozo y yacimientos finitos, p^* es menor que la presión inicial después de que la masa contenida en el yacimiento ha disminuido.

Matthews, Brons y Hazebroek (1954) presentaron un método para determinar la presión promedio del área de drene de un pozo, a partir de datos de una prueba de incremento de presión.

El método de Miller, Dyes y Hutchinson (1950), para el análisis de pruebas de incremento se basa en la solución de la ecuación de difusión para yacimientos finitos. Este método supone que el pozo ha alcanzado condiciones de flujo pseudoestacionarias antes del cierre. Para efectuar el análisis de presiones, se grafica la presión del pozo cerrado, p_{ws} , contra $\log \Delta t$. La capacidad de la formación y el factor de daño se obtienen empleando las expresiones correspondientes al método de Theis-Horner.

Para la obtención de la presión promedio del volumen del yacimiento drenado por el pozo, Miller, Dyes y Hutchinson (1950) presentan una gráfica en función de una presión adimensional, p_D , y de un tiempo adimensional de cierre Δt_{DA} , para yacimientos cuya frontera exterior presenta una presión constante, igual a la inicial. La presión y el tiempo están dados por las expresiones siguientes:

$$P_D = \frac{kh(\bar{p} - p_{ws})}{141.2q\mu B} \quad \text{II.11}$$

$$\Delta t_{DA} = \frac{0.000264k\Delta t}{\phi\mu c_t A} \quad \text{II.12}$$

Se entra a estas curvas teóricas con el valor de Δt_{DA} calculado para un tiempo de cierre Δt que esté comprendida en la porción recta de la curva de incremento y así se obtiene el valor de P_{DMDH} de la curva correspondiente de acuerdo al tipo de frontera exterior del yacimiento. A partir de este valor de presión adimensional se obtiene la presión promedio.

Todos los métodos expuestos anteriormente consideran una distribución de presión inicial uniforme en el yacimiento. Sin embargo, esta hipótesis no siempre se puede justificar. Por ejemplo en el caso donde se tenga un yacimiento con más de un pozo, debido a la producción previa del pozo de prueba o de pozos vecinos; se genera un perfil de distribución de presión en el yacimiento, por lo cual al analizar una prueba del pozo en cuestión, esta tendrá como condición inicial de presión un cierto perfil que ya no es uniforme (constante), de aquí la relevancia de este estudio y por lo cual la principal motivación de este trabajo.

II.3. TRABAJOS PREVIOS RELACIONADOS CON EL TEMA

En la literatura técnica la mayoría de los procedimientos para el análisis de pruebas de presión consideran una distribución de presión uniforme en el yacimiento, tal como los métodos antes descritos. Recientemente, Oliver (1990, 1992) presentó un par de artículos relacionados con el tema, pero considerando una distribución radial de permeabilidades en el yacimiento.

Por otro lado en el área de la ingeniería de transferencia de calor, se ha estudiado la ecuación de difusión para obtener la distribución de temperaturas en sólidos. Carslaw y

Jaeger (1959) así como Ozisik (1989), han estudiado la ecuación de calor sometida a una condición inicial de temperatura arbitraria, tal como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 \leq r < \infty, t > 0 \quad \text{II.13}$$

$$T(t = 0) = F(r) \quad \text{II.14}$$

y sujeta a la condición de que la temperatura permanece finita en $r = 0$.

Mediante la aplicación del método de separación de variables los autores muestran que la solución para la función tiempo-variable está dada por $\exp(-\alpha\beta^2 t)$, donde β es la variable de separación. La función de variable espacial $R_o(\beta, r)$ es la solución de la siguiente ecuación

$$\frac{d^2 R_o}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_o}{dr} + \beta^2 R_o = 0 \quad \text{en } 0 \leq r < \infty \quad \text{II.15}$$

Sujeta a la condición de que $R_o(\beta, r)$ permanece finita en $r = 0$. La solución a la ecuación II.15, la cual es finita en $r = 0$, es:

$$R_o(\beta, r) = J_o(\beta r) \quad \text{II.16}$$

Entonces, la solución completa para $T(r, t)$ se construye de la siguiente manera:

$$T(r, t) = \int_{\beta=0}^{\infty} c(\beta) e^{-\alpha\beta^2 t} J_o(\beta r) d\beta \quad \text{II.17}$$

J_o es la función de Bessel de primera especie y orden cero y $c(\beta) = \beta \int_{r'=0}^{\infty} r' J_o(\beta r') F(r') dr'$.

La aplicación de la condición inicial conduce a:

$$F(r) = \int_{\beta=0}^{\infty} c(\beta) J_0(\beta r) d\beta \quad 0 \leq r < \infty \quad \text{II.18}$$

Esta es una expansión de la función $F(r)$ definida en el intervalo mostrado, en términos de la función de Bessel. Finalmente la solución al problema está dada por la ecuación II.19.

$$T(r,t) = \frac{1}{2\alpha t} \int_{r'=0}^{\infty} r' \exp\left(-\frac{r^2 + r'^2}{4\alpha t}\right) F(r') I_0\left(\frac{rr'}{2\alpha t}\right) dr' \quad \text{II.19}$$

El esquema de solución planteado anteriormente lo expone Ozisik (1989) y analiza el caso específico en que la distribución inicial de temperatura es un valor constante.

$$F(r) = \begin{cases} T_0, & 0 < r < b \\ 0, & r > b \end{cases} \quad \text{II.20}$$

bajo esta condición, la solución II.19 toma la siguiente forma:

$$\frac{T(r,t)}{T_0} = \frac{1}{2\alpha t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\alpha t}\right) \int_{r'=0}^b r' \exp\left(-\frac{r'^2}{4\alpha t}\right) I_0\left(\frac{rr'}{2\alpha t}\right) dr' \quad \text{II.21}$$

A este resultado se le conoce como la función P, la cual ha sido numéricamente evaluada y los resultados se muestran en forma tabulada (Masters, 1955).

Este resultado podría interpretarse, para el caso de análisis de pruebas de presión cuando se produce un pozo después de un cierre prolongado donde $p(r)$ es la presión media para toda posición radial en el yacimiento.

De la solución dada por la ecuación II.21, se puede observar que se trata de una ecuación integral de primera clase. Es importante mencionar que las ecuaciones integrales surgen

en los problemas de ingeniería, física, química y biología. Estas ecuaciones se obtienen como formas alternas de representación de las ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones integrales surgen de diferentes orígenes y aplicaciones, tales como problemas de frontera y condiciones iniciales. En base a lo anterior, las técnicas de solución para ecuaciones integrales son diversas y en el caso de las ecuaciones integrales de Fredholm de primera clase, no se puede hablar de un esquema de solución, ya que depende en gran medida de los orígenes de dicha ecuación y de la forma del kernel presente en ella.

En términos generales una ecuación integral presenta la siguiente forma:

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad \text{II.22}$$

En cuanto a la estructura de una ecuación integral, se puede decir que la función desconocida está dada por $u(t)$ y aparece bajo el signo de la integral tanto para las ecuaciones de Fredholm como para las de Volterra de primera clase; como es el caso de la ec. II.22.

En las ecuaciones integrales de Fredholm, la integral tiene como límites de integración valores fijos, mientras que en las ecuaciones de Volterra, al menos un límite es variable, y generalmente es el límite superior de la integral. Principalmente existen cuatro métodos para obtener la solución a una ecuación integral. Casi todos los métodos se basan en el hecho de encontrar la solución en forma numérica.

Es frecuente en el estudio de fenómenos físicos encontrar problemas que estén descritos por el estudio de una ecuación integrodiferencial, es decir, una ecuación en la cual la función incógnita $u(t)$ de la ecuación II.22 se encuentra bajo los signos de derivada e integral, un ejemplo de una ecuación integrodiferencial sería:

$$u'(t) + u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad \text{II.23}$$

Un método que es especialmente útil en el caso de ecuaciones integrales de primera clase, es el de aplicar una transformada integral para invertir la ecuación, tal como las transformadas de Fourier, Hankel, Laplace, o la transformada K. Desafortunadamente en los problemas de conducción de calor, debido a la presencia del kernel o núcleo de calor en el problema directo, cuando se aplica alguna de estas transformadas integrales para invertir la ecuación, se obtiene una solución en términos de una función exponencial con argumento positivo, lo cual trae como consecuencia una alta inestabilidad en la solución. Debido a lo anterior se aplican los métodos de regularización (Tikhonov, 1963) para obtener una solución a este tipo de ecuaciones de calor.

En el caso de las ecuaciones integrales de segunda clase, se pueden aplicar los métodos de Neumann, Liouville, Volterra, Fredholm, Hilbert y Schmidt (Wing, 1991). Mientras que para las ecuaciones integrodiferenciales se puede hacer uso de alguna transformación y definir una nueva función incógnita para solucionar el problema así transformado.

Otro trabajo publicado en referencia a la ecuación de calor fue el de Chang y colaboradores (1973). Este trabajo versa principalmente sobre el uso de Funciones de Green para la solución de problemas de conducción de calor en medios isotrópicos y anisotrópicos. Aquí se hace mención a la dificultad de encontrar una *solución analítica* a los problemas de conducción de calor en un medio anisotrópico.

Por medio de la aplicación de Funciones de Green, las ecuaciones diferenciales se transforman en ecuaciones integrales. Estas ecuaciones son particularmente útiles para la solución de problemas inversos, los cuales se discutirán más adelante en la presente tesis.

Chang y colaboradores (1973), con el fin de ilustrar el método e investigar la singularidad en la solución y los efectos en medios anisotrópicos analizan con detalle tres sistemas con y sin esquinas y con y sin condiciones de frontera continuas: para un prisma cuadrado, un cilindro circular sólido y un cilindro con un hueco excéntrico. Los autores de este trabajo fundamentalmente se basan en la solución del problema directo de la ecuación de calor. Esta clase de problemas son bien comportados debido a que convergen sin ninguna dificultad. Ahora bien, si se considera que se conoce la respuesta de temperaturas en un sólido y se desea encontrar la distribución inicial de temperaturas que originó esa respuesta en dicho sólido, se estaría tratando con un problema retrógrado de la ecuación de calor, los cuales presentan grandes dificultades numéricas en su solución, lo cual es similar al problema que se trata de resolver en esta tesis.

Para resolver la ecuación diferencial, en este trabajo se aplica primero el método de la transformada de Laplace y posteriormente Funciones de Green, obteniéndose una solución general al problema similar a la ec. II.19. Cabe hacer mención que este tipo de problemas de conducción de calor también pueden ser resueltos por medio de la transformada de Hankel, la cual es particularmente útil para la solución de ecuaciones diferenciales en coordenadas radiales.

Las conclusiones más relevantes a las que llegan Chang y colaboradores (1973) son:

- Que existen muchas ventajas de emplear el método de Funciones de Green.
- La solución numérica de las ecuaciones integrales requiere de menor esfuerzo que las ecuaciones diferenciales (refiriéndose al problema directo)
- Esto se cumple particularmente para el caso de dominios irregulares con condiciones de frontera complicadas.

Recientemente, Oliver (1990) presentó un artículo referente a la respuesta de presión para un pozo ubicado en un yacimiento infinito con una pequeña variación espacial en permeabilidad. El punto de partida de este estudio se basa en la solución general de

presión de un pozo produciendo a gasto constante. Esta ecuación se expresa en términos de una ecuación integral:

$$P_D = P_{DO} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G(r, t_D) \int_{-\pi}^{+\pi} \left[1 - \frac{1}{k_D(r, \theta)} \right] d\theta dr \quad \text{II.24}$$

donde, p_{DO} es la respuesta de presión para un yacimiento homogéneo, $G(r_D, t_D)$ es la función de peso para la permeabilidad variable, y $k_D(r_D, \theta)$ es una distribución arbitraria de permeabilidad adimensional. En este artículo solo se presenta la solución al problema directo de la ecuación integral II.24. Es evidente que el encontrar la solución al problema inverso para la distribución de la permeabilidad radial es equivalente a resolver la ecuación integral de Fredholm de primera clase.

La solución para la distribución de la permeabilidad desconocida puede obtenerse a través del uso de Funciones de peso, por medio de la discretización de la ecuación integral de primera clase, convirtiéndose este en un sistema de ecuaciones lineales para la permeabilidad a diferentes radios de estudio.

Es importante conocer la variación de las funciones de peso, ya que la forma de estas funciones permite determinar el grado de suavizado en la gráfica semilogarítmica y su pendiente en términos de la distribución de permeabilidades. La solución presentada por Oliver muestra que si la permeabilidad se estima de la pendiente semilogarítmica a un tiempo t , entonces mucha de la información de permeabilidad proviene de la región del

yacimiento centrada a $r = 0.015 \left(\frac{\bar{k}t}{\phi\mu c_t} \right)^{1/2}$. Por lo tanto, menos del 1% del valor

estimado de permeabilidad se obtiene de la región exterior para radios mayores a

$$r = 0.038 \left(\frac{\bar{k}t}{\phi\mu c_t} \right)^{1/2}$$
 , lo que concuerda con los radios de investigación estimados por otros autores.

Para la solución de este problema Oliver se basa en que el problema es el obtener la respuesta de presión de un pozo produciendo a gasto constante en un yacimiento con una distribución en permeabilidad $k_D(r_D, \theta)$. Se considera flujo monofásico y un fluido ligeramente compresible; los efectos de almacenamiento y daño mecánico son despreciables. La ecuación de difusión en términos de variables adimensionales es:

$$\nabla \cdot [k_D(r_D, \theta) \nabla p_D] = \partial p_D / \partial t_D \quad \text{II.25}$$

El gasto en el pozo se considera constante, por lo tanto las condiciones de frontera son:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} k_D(r_D, \theta) r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} d\theta = -1, \quad r_D = 1 \quad \text{II.26}$$

$$\frac{\partial p_D}{\partial \theta} = 0, \quad r_D = 1 \quad \text{II.27}$$

La permeabilidad se puede escribir como la suma de una permeabilidad promedio y una variación del valor constante. Oliver supone en este análisis que la variación de la permeabilidad es mucho menor en magnitud que la permeabilidad promedio y entonces:

$$k_D(r_D, \theta) = [1 - \epsilon f(r_D, \theta)]^{-1} \quad \text{II.28}$$

donde $f(r_D, \theta)$ es $O(1)$ y la relación de la variación de permeabilidades, ϵ , es pequeña. La solución a este problema se encuentra por medio de aplicación de la Transformada de Laplace y una expansión en potencias de ϵ . Los detalles de la solución los presenta Oliver (1990).

El planteamiento expuesto en este artículo ignora los efectos de almacenamiento y daño mecánico. La aproximación para tiempos grandes permite obtener una solución analítica para la función de peso. En este artículo se expone el hecho de que a través de la función de peso, la cual representa el valor estimado de la permeabilidad promedio, la integral bajo la curva es una medida de la contribución de la permeabilidad estimada.

Posteriormente, Oliver (1992) publicó un trabajo referente a la *estimación de la distribución de la permeabilidad radial a través de datos de presión*. El método se aplicó a tres ejemplos: variación de la permeabilidad en un yacimiento compuesto, variación de la porosidad en un yacimiento compuesto y variación de la permeabilidad con datos inexactos. El método propuesto en este artículo para la solución del problema inverso presenta ciertas ventajas con relación a otros debido a que considera que la estimación de la distribución de la permeabilidad se puede llevar a cabo sin dividir el yacimiento en zonas de permeabilidad constante.

En este trabajo se muestra que es posible obtener la función de permeabilidad por medio del algoritmo de Backus y Gilbert (1968) para la solución del problema inverso. Las consideraciones que se emplean en el desarrollo del método son que para una pequeña variación en la permeabilidad, la respuesta de presión se puede expresar de la siguiente manera:

$$p_i = \int_1^{\infty} G_i(r, t_i) F(r) dr \quad \text{II.29}$$

donde,

$$F(r) = 1 - \frac{1}{k_D(r)} \quad \text{II.30}$$

y

$$k_D = \frac{k(r)}{\bar{k}} \quad \text{II.31}$$

p_i , es la presión al tiempo t_i ,

$G_i(r)$, representa funciones de influencia que especifican la influencia de la permeabilidad en las presiones medidas,

k , es la permeabilidad promedio

El planteamiento de solución aquí propuesto por Oliver consiste en estimar la función $F(r)$. El método mas comúnmente empleado para la solución de estos problemas es el de considerar que $F(r)$ es constante durante ciertos intervalos, en tal caso se obtiene un sistema de ecuaciones lineales dado por la siguiente ecuación integral de Fredholm de primera clase:

$$p_i = \sum_{j=1}^M F(r_j) \int_{r_j}^{r_{j+1}} G_i(r) dr, \quad i = 1, n. \quad \text{II.32}$$

Por medio del método de Backus y Gilbert (1968), se puede estimar la distribución de la permeabilidad $F(r)$ que se observa en la ecuación II.29.

Uno de los objetivos de una prueba de presión es el de estimar la permeabilidad de la formación. En este caso, es el de estimar la distribución $F(r)$ desconocida, la cual se le conoce en la literatura como la distribución de permeabilidad inversa. Basado en la ec. II.29, se plantea la posibilidad de construir una combinación lineal del kernel, G_i , tal que la suma sea una aproximación de la función delta de Dirac (Tarantola, 1987):

$$\sum_{i=1}^n c_i G(r) \approx \delta(r - r_0) \quad \text{II.33}$$

La combinación lineal resultante de los datos proporciona un estimado de la variación de la permeabilidad.

$$F(r_0) = \sum_{i=1}^n c_i p_i \quad \text{II.34}$$

El método de Backus y Gilbert (1968) considera ciertas restricciones, las cuales resultan útiles para encontrar los multiplicadores de Lagrange definidos por la serie de valores de c .

Este método se aplicó a los casos antes descritos y para el caso de permeabilidad variable se consideró un valor de permeabilidad promedio de 1500 md por lo tanto se tiene que $F(r) = 1 - 1500/k(r)$. Entonces se obtuvo la gráfica II.1, en la cual se observan los puntos que fueron calculados empleando el método de Backus y Gilbert contra una distribución de permeabilidades supuesta mostrada por las líneas continuas. Se puede observar buena correlación entre los resultados numéricos al aplicar el método de Backus y Gilbert con la permeabilidad real.

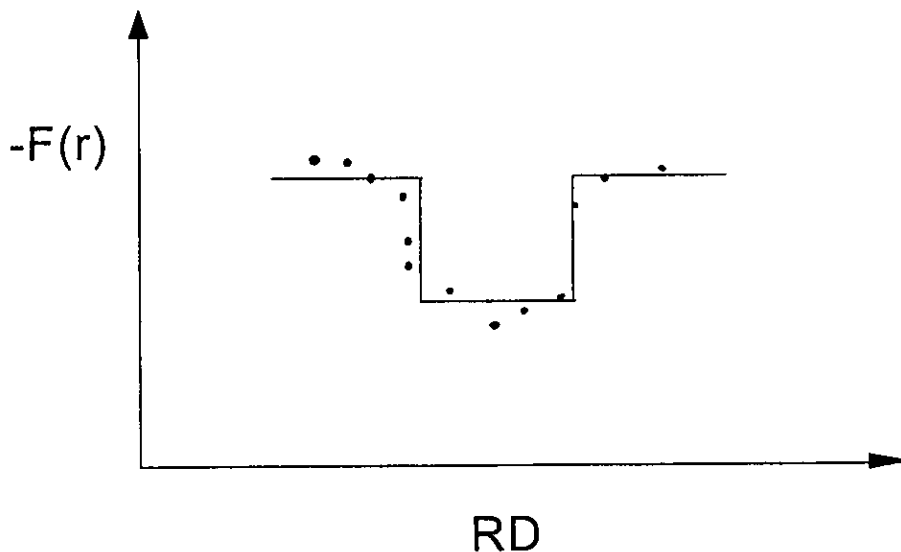


Fig. II.1. Perfil calculado para la variación de la permeabilidad inversa, comparada con la real. Según Oliver (1992).

Como se mencionó anteriormente, este método se aplicó a otros dos casos más: permeabilidad variable-datos inexactos y porosidad variable.

El propósito de este estudio es el poder caracterizar mejor a los yacimientos. La teoría aplicada aquí toma en cuenta que la distribución de permeabilidad es función de la posición radial en el yacimiento.

En este artículo, el método de Backus y Gilbert considera un modelo que obtiene la distribución de la permeabilidad radial, y en el planteamiento se consideró un fluido ligeramente compresible, gasto constante, variación pequeña de la permeabilidad, porosidad constante, y espesor constante del yacimiento.

El análisis de pruebas de presión, tal como se mencionó al inicio del presente capítulo se basa en la solución de la ecuación de difusión. Como se sabe la condición inicial que se maneja en el planteamiento para la solución de la ecuación de difusión considera una *distribución inicial de presión uniforme en el yacimiento*. Con la revisión de la literatura que se mostró anteriormente se establecieron los puntos de partida y justificación de los objetivos específicos de la presente tesis.

En los capítulos subsecuentes se mostrará el desarrollo del tema así como los resultados obtenidos y las conclusiones acerca del presente trabajo.

*Capítulo**III*

*DESARROLLO DEL TEMA***III.1. Modelo físico y consideraciones**

En los capítulos precedentes se establecieron los objetivos de la presente tesis así como una revisión de los trabajos previos relacionados con el tema, haciendo énfasis en que a la fecha, los métodos para el análisis de pruebas de presión consideran que la distribución inicial de presión en el yacimiento es uniforme.

Dentro de la revisión de la literatura se citaron referencias que sirven como base para la solución de las ecuaciones integrales, las cuales surgen de resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales (ecuación de difusión) que se estudiarán más adelante

En este capítulo se presentará el desarrollo matemático así como la conceptualización física del problema y las consideraciones hechas para el planteamiento del mismo al considerar que la distribución inicial de presión en el yacimiento no es uniforme.

Para llevar a cabo el análisis de una prueba de presión es necesaria la solución de la ecuación de difusión, la cual gobierna el comportamiento físico del fenómeno en estudio.

Las consideraciones hechas en el desarrollo de la presente tesis se muestran a continuación:

- La ecuación de Darcy es aplicable
- La porosidad, permeabilidad, viscosidad y compresibilidad son constantes
- El análisis se lleva a cabo para yacimientos homogéneos y fracturados, así como para sistemas infinitos y cerrados
- Se considera flujo monofásico
- Los efectos de gravedad y térmicos son despreciables

Los resultados que se muestran en la presente tesis consideran a un pozo en el centro de un yacimiento circular, penetrando totalmente la formación.

Tal como se mencionó anteriormente, para analizar una prueba de presión es necesario establecer el planteamiento del problema físico a través de la formulación matemática del mismo. Para ello se puede decir que la ecuación de difusión en términos de variables adimensionales nos proporciona las bases necesarias para entender el fenómeno.

III.2.1 Sistemas Infinitos Homogéneos

La ecuación de difusión en coordenadas radiales se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \quad \text{III.1}$$

$$p_D = \frac{kh(p_{ref} - p)}{141.2q_{ref}\mu B} \quad \text{III.2}$$

La distancia y el tiempo adimensional se definen de la forma convencional.

con $p_{ref} = \lim_{r \rightarrow \infty} p(r)$ y q_{ref} es cualquier gasto de referencia.

La condición inicial de presión no-uniforme en el yacimiento está dada por la siguiente expresión:

$$p_D(r_D, 0) = p_{iD}(r_D) \quad \text{III.3}$$

Si se consideran los efectos de almacenamiento y daño mecánico, la condición de frontera queda de la siguiente manera:

$$C_D \frac{dp_{wD}}{dt_D} - \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 1 \quad \text{III.4}$$

$$p_{wD} = \left[p_D - s \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} \quad \text{III.5}$$

y la condición de frontera externa:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0 \quad \text{III.6}$$

Para resolver estos problemas, resulta útil la aplicación de los métodos de la transformada de Laplace y Funciones de Green.

si $\alpha = \sqrt{u}$, entonces :

$$\frac{d^2 p_D}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{dp_D}{dr_D} - \alpha^2 p_D + p_{iD}(r_D) = 0 \quad \text{III.7}$$

Transformando las condiciones de frontera interna y externa:

$$C_D[u p_{wD} - p_{wD}(0)] - \left(\frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = \frac{1}{u} \quad \text{III.8}$$

$$p_{wD} = \left[p_D - s \frac{dp_D}{dr_D} \right]_{r_D=1} \quad \text{III.9}$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, u) = 0 \quad \text{III.10}$$

$$C_D u \left[\bar{p}_D(1, u) - s \left(\frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} \right] - C_D [p_D(1) - s p_D'(1)] - \left(\frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = \frac{1}{u} \quad \text{III.11}$$

Aplicando el método de Funciones de Green, se obtiene la respuesta de presión adimensional durante el periodo de flujo transitorio en el espacio de Laplace:

$$\bar{p}_{wD}(u, r_D) = - \int_1^{\infty} G(\xi, 1) \xi p_{iD}(\xi) d\xi + h(u) G(1, 1) - s \left\{ - \int_1^{\infty} \left[G_{r_D}(\xi, r_D) \right]_{r_D} \xi p_{iD}(\xi) d\xi + h(u) \left[G_{r_D}(1, r_D) \right]_{r_D=1} \right\} \quad \text{III.12}$$

donde:

$$h(u) = \frac{C_D [p_{iD}(1) - s p_{iD}'(1)] + \frac{1}{u}}{-C_D u s - 1} \quad \text{III.13}$$

Esta expresión representa la solución convencional, es decir para el caso en que la distribución inicial de presión en el yacimiento es uniforme; excepto por la presencia de los términos integrales.

La derivación en forma detallada para este sistema se muestra en el Apéndice A de la presente tesis.

Si se substituye la Función de Green en la ecuación de arriba (ec. III.12), la determinación de la distribución inicial de presión es equivalente a resolver la ecuación integral de Freedholm de primera clase, es decir:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{t_D} L^{-1}(-\theta[I_1(\alpha)K_0(\alpha) + K_1(\alpha)I_0(\alpha)] \\
 & \quad \{[K_0(\alpha) - I_0(\alpha)\theta]/\alpha - s[K_1(\alpha) + I_1(\alpha)\theta]\}^{-1}) \tau \cdot p_{wD}(t_D - \tau) d\tau + \\
 & + L^{-1} \left[\frac{h(u) \left[K_0(\alpha)/\alpha + sK_1(\alpha) \right] \left[I_0(\alpha) - K_0(\alpha)/\theta \right]}{\{[K_0(\alpha) - I_0(\alpha)\theta]/\alpha - s[K_1(\alpha) + I_1(\alpha)\theta]\}^{-1}} \right] = \int_1^{\infty} \frac{1}{2t_D} e^{-\frac{\xi^2}{4t_D}} \xi p_{iD}(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

III.14

donde:

$$\alpha = \sqrt{u}$$

$$\theta = \frac{\frac{C_D u}{-C_D u s - 1} K_0(\alpha) - \alpha K_1(\alpha)}{\alpha I_1(\alpha) + \frac{C_D u}{-C_D u s - 1} I_0(\alpha)}$$

I_0 y I_1 ; son Funciones modificadas de Bessel de primera especie y orden 0 y 1 respectivamente.

K_0 y K_1 ; son funciones modificadas de Bessel de segunda especie y orden 0 y 1 respectivamente.

u ; es la variable de Laplace.

L^{-1} ; denota la transformada de inversa de Laplace.

Analizando el caso particular en que $p_{iD}=0$ para toda posición radial r_D , y se considera además que los efectos de almacenamiento y daño mecánico no son nulos, la ecuación III.12 queda de la siguiente manera:

$$p_{wD} = \frac{K_0(\sqrt{u}) + s\sqrt{u}K_1(\sqrt{u})}{u[C_D u(K_0(\sqrt{u}) + s\sqrt{u}K_1(\sqrt{u})) + \sqrt{u}K_1(\sqrt{u})]} \quad \text{III.15}$$

la cual es la solución dada por Agarwal y colaboradores (1970).

Como se puede observar la solución antes citada se encuentra en el espacio de Laplace, lo cual hace necesario la aplicación de un algoritmo numérico que permita obtener la respuesta p_{wD} en el espacio real (tiempo), ya que la transformada inversa de Laplace analítica no existe. Para obtener este tipo de soluciones se aplica el algoritmo de Stehfest (1970). Los resultados de aplicar el algoritmo antes citado para invertir la ecuación III.14, se muestran en la figura III.1 en escala log-log, en ella se observa la influencia que tienen el daño y el coeficiente de almacenamiento en la respuesta de presión. Todas las soluciones para $C_D > 0$ presentan una pendiente igual a la unidad para tiempos cortos, confirmando la validez de la ecuación: $p_{wD}(t_D) = \frac{t_D}{C_D}$, la cual establece

que en una gráfica de Δp vs. t se debería tener una línea recta de pendiente unitaria en escala log-log.

Para el caso en que $C_D=0$ con $p_{iD} \neq 0$, la solución dada por la ecuación III.13 queda como:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{1}{\sqrt{u}K_1(\sqrt{u})} \left[\int_1^{\infty} K_0(\sqrt{u}\xi)\xi p_{iD}(\xi) d\xi + \frac{K_0(\sqrt{u})}{u^{\frac{3}{2}}K_1(\sqrt{u})} + \frac{s}{u} \right] \quad \text{III.16}$$

Ahora bien para el caso específico en que la distribución inicial de presión en el yacimiento sea constante:

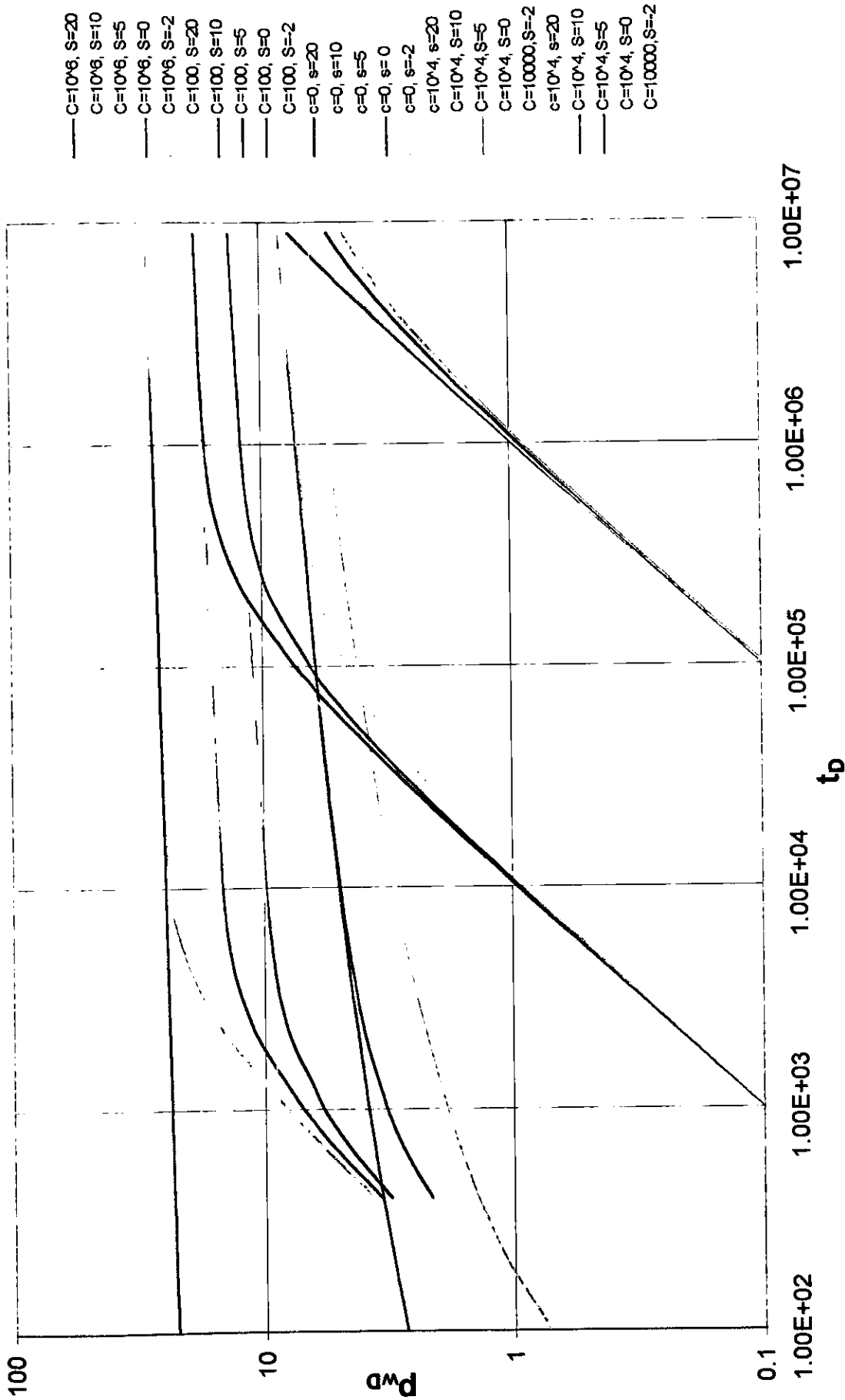


Fig. III.1. p_{wD} vs t_D para un sistema radial infinito con almacenamiento y daño mecánico. Distribución de Presión Inicial Uniforme

$$p_{wD} = \frac{p_{iD}}{u} + \frac{K_0(\sqrt{u})}{u^{3/2} K_1(\sqrt{u})} + \frac{s}{u} \quad \text{III.17}$$

Como puede ser el caso de producción después de un cierre prolongado, donde $p(r) = p$ para toda posición radial en el yacimiento. Desde luego la definición de p_{wD} de la ecuación III.16 debe darse en términos de p y no de p_i .

Para un incremento que sigue a un decremento de duración desconocida, la condición de frontera interna es:

$$C_D \frac{dp_{wD}}{dt_D} - \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 0 \quad \text{III.18}$$

después del cierre, siguiendo el mismo procedimiento, la solución A-30 sigue siendo válida, y considerando despreciable el efecto de almacenamiento ($C_D=0$), en lugar de la ecuación III.15, se tiene:

$$\bar{p}_{wD} = \int_0^\infty B_2 K_0(\alpha\xi) \xi p_{iD}(\xi) d\xi + s \int_0^\infty [G_{r_D}(\xi, r_D)]_{r_D=1} \xi p_{iD}(\xi) d\xi \quad \text{III.19}$$

donde

$$B_2 = \frac{K_0(\alpha r_D) - I_0(\alpha r_D)\theta}{\theta \alpha r_D [I_1(\alpha r_D)K_0(\alpha r_D) + K_1(\alpha r_D)I_0(\alpha r_D)]} \quad \text{III.20}$$

De la ecuación anterior se observa que lo que controla la respuesta de incremento cuando $C_D=0$, es el perfil de presión al momento del cierre.

Una prueba de incremento, en la cual el periodo previo de producción se desconoce, se puede tratar como una prueba de decremento con una distribución inicial de presión desconocida. En este caso, el tiempo de inicio es el tiempo de cierre. Para el caso en que los efectos de almacenamiento y daño sean despreciables, se obtiene:

$$p_{wD}(\Delta t_D) = \left[\int_1^{\infty} L^{-1} \left[\frac{K_o(\alpha\xi)}{\alpha K_1(\alpha)} \right] \xi p_{iD}(\xi) d\xi \right] \quad \text{III.21}$$

Esta ecuación confirma el hecho de que la distribución de presión al momento del cierre controla la respuesta de presión para una prueba de incremento (Camacho-Velázquez y Raghavan, 1989; Raghavan, 1993).

III.2.2 Sistemas Infinitos con doble porosidad

En el Apéndice A de la presente tesis, se muestran las consideraciones realizadas para el estudio de la ecuación de difusión, estableciendo el uso de la formulación propuesta por Warren y Root (1963). La ecuación de difusión en el espacio de Laplace está dada como sigue:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{jD}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{p}_{jD}}{dr_D} - \alpha^2 \bar{p}_{jD} - g(r_D, u) = 0 \quad \text{III.22}$$

donde:

$$\alpha = \sqrt{uf(u)}, \text{ y}$$

$$g(r_D, u) = -\{\lambda[p_{jD}(r_D)\omega + p_{imD}(r_D)(1-\omega)] + \omega u(1-\omega)p_{jD}(r_D)\} \{\lambda + u(1-\omega)\}^{-1}$$

Las ecuaciones A-59 – A67, muestran una explicación más clara en relación a las condiciones de frontera e inicial que se consideraron.

Durante el periodo de flujo transitorio, la respuesta de presión adimensional está dada por la ecuación que a continuación se muestra:

$$p_{wD} = \int_1^{\infty} G(\xi, 1) \xi g(\xi, u) d\xi + h(u)G(1, 1) - s \left\{ \int_1^{\infty} \left[G_{r_D}(\xi, r_D) \right]_{r_D=1} \xi g(\xi, u) d\xi + h(u) \left[G_{r_D}(1, r_D) \right]_{r_D=1} \right\}$$

III.23

Si se considera el caso especial en que la distribución de presión inicial en la matriz sea la misma que en la fractura: $p_{iM}(r_D) = p_{iFD}(r_D)$, entonces la definición de $g(r_D, u)$, se convierte en:

$$g(\xi, u) = -p_{iFD}(\xi) f(u) \quad \text{III.24}$$

donde:

$$f(u) = \{\lambda + \omega u(1 - \omega)\} \{\lambda + u(1 - \omega)\}^{-1}$$

III.2. 3 Sistemas cerrados Homogéneos

El procedimiento seguido para derivar las ecuaciones III.1-III.5, continúa siendo válido. Cambiando la condición de frontera III.6, a una de no flujo:

$$\left. \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right|_{r_D=r_{eD}} = 0 \quad \text{III.25}$$

Empleando de igual manera que en el caso de yacimientos infinitos, la transformada de Laplace y Funciones de Green, tal como se presenta en los Apéndices A y B de este trabajo, y considerando la condición de frontera de no-flujo, se obtiene el mismo problema adjunto que para el caso de sistemas infinitos con la siguiente condición de frontera adjunta:

$$G_{\xi}(r_{De}, r_D) = 0$$

III.26

La solución para la presión adimensional queda de la siguiente manera:

$$p_{wD} = - \int_1^{r_{eD}} G(\xi, 1) \xi p_{iD}(\xi) d\xi + h(u)G(1, 1) - s$$

$$\left\{ - \int_1^{r_{eD}} \left[G_{r_D}(\xi, r_D) \right]_{r_D=1} \xi p_{iD}(\xi) d\xi + h(u) \left[G_{r_D}(1, r_D) \right]_{r_D=1} \right\}$$

III.27

Esta solución se reduce a la propuesta por van Everdingen y Hurst (1949) para el caso en que $p_{iD}(r_D)=0$,

$$\bar{p}_{wD} = \left[K_1(\alpha r_{eD}) I_0(\alpha) + I_1(\alpha r_{eD}) K_0(\alpha) \right] / (u \alpha)$$

$$\left[I_1(\alpha r_{eD}) K_1(\alpha) - K_1(\alpha r_{eD}) I_1(\alpha) \right]^{-1}$$

III.28

La aproximación para tiempos grandes de la ecuación B-8 (Apéndice B)

$$\bar{p}_{wD} = - \int_1^{r_{eD}} (A_2 I_0(\alpha \xi) + B_2 K_0(\alpha \xi))_{r_D=1} \xi p_{iD}(\xi) d\xi - \frac{1}{u} \left[A_1 I_0(\alpha) + B_1 K_0(\alpha) \right]_{r_D=1}$$

expresión que nos indica que debido a la presencia de una distribución inicial de presión no-uniforme en el yacimiento, existe un pseudodaño adicional en la respuesta dado por el término integral de la ecuación III.27, que se muestra a continuación:

$$\bar{p}_{wD} \approx \frac{2}{\alpha^2 r_{eD}^2} \int_1^{r_{eD}} \xi p_{iD}(\xi) d\xi + \frac{2}{\alpha^4 r_{eD}^2} + \frac{1}{\alpha^2} \left[\ln(r_{eD}) - \frac{3}{4} \right]$$

III.29

De tal forma que para el caso de yacimientos homogéneos, $\alpha = \sqrt{u}$, Así: el pseudodaño adicional en la respuesta está dado por:

$$pseudodaño \approx \frac{2}{r_{cD}^2} \int_1^{r_{rD}} \xi p_{i,D}(\xi) d\xi \quad \text{III.30}$$

III.2.4 Sistemas cerrados con doble porosidad

En el Apéndice B, se muestra de manera detallada la derivación para sistemas cerrados, así como también las aproximaciones empleadas para las funciones modificadas de Bessel. En lo correspondiente al caso de sistemas cerrados considerando doble porosidad, según Warren y Root (1963), se siguió el mismo criterio que para sistemas infinitos considerando las mismas definiciones de las funciones $g(\xi, u)$, $f(u)$ y $\alpha^2 = uf(u)$. Se obtiene un problema adjunto similar que para el caso de sistemas cerrados homogéneos, lo único que cambia es la definición de la función α . Por lo tanto las ecuaciones B-1 a B-13 mostradas en el Apéndice B siguen siendo válidas.

III.3 Problema inverso

En el desarrollo del presente capítulo, se han obtenido soluciones que describen el comportamiento en tiempo de los sistemas infinitos y cerrados, considerando que estos pueden ser medios homogéneos o fracturados al considerar que en ellos existe una función de distribución inicial de presión no-uniforme en el yacimiento; la cual pudo haberse generado por la producción previa de los pozos que se encuentran en el mismo yacimiento en estudio. De las soluciones III.12, 13, 15, 19 y 25, se puede observar que se trata de ecuaciones integrales de Fredholm de primera clase (Porter y Stirling, 1990; Wing y Zahrt, 1991).

El problema directo a la ecuación de difusión, como es el caso de la ecuación III.13, se trata de un problema bien comportado (Beck y Clair, 1977; Engl, 1995), debido a que aparece en el kernel de la ecuación (lado derecho) el núcleo de calor con signo negativo. Este signo en el kernel hace que esta solución sea bien comportada debido a que en los extremos de la forma de la función se tienen valores muy pequeños que hacen que el producto de otra función por ella converja sin mayor dificultad numérica. Por otro lado si

se piensa en el proceso inverso; es decir si se conoce la respuesta de presión en tiempo y se desea conocer la distribución que generó dicha respuesta en el yacimiento, aparecerá en el kernel la función exponencial con signo positivo, lo cual hará que el proceso numérico tenga severas dificultades. Cuando dicho proceso se presenta, se dice que se trata de un problema retrógrado de la ecuación de calor o difusión que es exponencialmente inestable (Beck y Clair, 1977; Engl, 1995).

Para obtener una solución numérica a este tipo de problemas, en la literatura (Bakus y Gilbert, 1968; Beck y Clair, 1977; Engl, 1995; Porter y Stirling, 1990) aparecen métodos que tratan de aproximar la solución mediante una serie de funciones matemáticas bien comportadas bajo ciertas restricciones numéricas y de optimización. En el apéndice C de esta tesis se muestra el método de Backus y Gilbert (1968) para problemas inversos. Dicho planteamiento matemático fue aplicado por Oliver (1990, 1992) para obtener la función de distribución de permeabilidades a través de datos de pruebas de presión.

En el capítulo siguiente se presentará la influencia que tiene la distribución inicial de presión no uniforme en pruebas de presión (problema directo), así como la solución a las ecuaciones integrales de Fredholm de primera clase por medio de la aplicación del método de Backus y Gilbert (1968).

Capítulo

IV

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El presente capítulo tiene como objetivo discutir las soluciones analíticas presentadas en el capítulo anterior, para lo cual se mostrarán en forma gráfica los resultados obtenidos. En primer término se discutirán los resultados referentes al caso de sistemas infinitos, citando también la solución a la ecuación integral mencionada en el capítulo tres, es decir la determinación de la distribución de presión inicial en el yacimiento a partir de datos de pruebas de presión, posteriormente se presentarán los resultados correspondientes a sistemas cerrados y finalmente el análisis de una prueba de presión con datos reales correspondientes a una interpretación “ambigua” según Horne (1998).

IV.1. Influencia de la distribución inicial de presión no-uniforme

Para estudiar la influencia de la distribución de presión inicial no-uniforme en la respuesta para pruebas de decremento, se emplearon las siguientes distribuciones iniciales; las cuales se pueden generar en el yacimiento debido a la producción previa del mismo pozo en estudio o de otros pozos que se encuentran en el yacimiento.

$$P_{iD1}(r_D) = \begin{cases} -\frac{1}{2} [E_i(a_1 r_D^2)] & ; \quad 1 \leq r_D \leq r_{D1} \\ 0 & ; \quad r_{D1} \leq r_D \end{cases} \quad \text{IV.1}$$

$$P_{iD2}(r_D) = \begin{cases} a_2(r_{D1} - r_D) & ; \quad 1 \leq r_D \leq r_{D1} \\ 0 & ; \quad r_{D1} \leq r_D \end{cases} \quad \text{IV.2}$$

$$p_{iD3}(r_D) = \begin{cases} a_3 r_D (r_D + r_{D1}) + a_4; & 1 \leq r_D \leq r_{D1} \\ 0 & ; r_{D1} \leq r_D \end{cases} \quad \text{IV.3}$$

$$p_{iD4}(r_D) = a_5 e^{-b r_D} \quad \text{IV.4}$$

donde:

a_j , b , y r_{D1} son constantes. En la presente tesis se consideraron los siguientes valores: $a_1 = -1.6155 \times 10^{-8}$ (homogéneos); $a_1 = -1.54271 \times 10^{-7}$ (fracturados), $a_2 = 0.7377$, $a_3 = 7.377 \times 10^{-6}$, $a_4 = 1605.43605$, $a_4 = 4426.3456$, $b = 0.0009$, $r_{D1} = 10^4$.

De las distribuciones iniciales dadas por las ecuaciones IV.1-IV.4 se puede observar que algunas de ellas son funciones decrecientes de la posición radial; en términos de variables adimensionales, mientras que otra es una función creciente. Por lo tanto en variables reales se invierten las situaciones consideradas.

Primeramente, se presentarán los resultados correspondientes a los sistemas infinitos, haciendo mención al caso de la solución a la ecuación integral; es decir resolver el problema inverso, determinando la distribución inicial de presión a partir de datos de pruebas de presión.

IV.2 Resultados para sistemas Infinitos.

En lo que sigue se presentan los resultados al considerar una distribución inicial de presión no-uniforme en el yacimiento, correspondientes a los sistemas infinitos, tanto para yacimientos homogéneos como naturalmente fracturados.

IV.2.1 Yacimientos Homogéneos

Durante el periodo de flujo transitorio, la respuesta de presión en el espacio de Laplace, está dada por la ecuación IV.5. La derivación detallada de la siguiente expresión se muestra en el Apéndice A de la presente tesis.

$$\bar{p}_{wD} = - \int_1^\infty G(\xi, 1) \xi p_{iD}(\xi) d\xi + h(u) G(1, 1) - s \left\{ - \int_1^\infty \left[G_{r_D}(\xi, r_D) \right]_{r_D=1} \xi p_{iD}(\xi) d\xi + h(u) \left[G_{r_D}(1, r_D) \right]_{r_D=1} \right\}$$

IV.5

donde,

u es la variable de Laplace

$$h(u) = \frac{C_D [p_{iD}(1) - s p_{iD}'(1)] + \frac{1}{u}}{-C_D u s - 1}$$

$$G(\xi, r_D) = \left\{ \begin{array}{ll} A_1 I_0(\alpha \xi) + B_1 K_0(\alpha \xi) & ; 1 \leq \xi < r_D \\ A_2 I_0(\alpha \xi) + B_2 K_0(\alpha \xi) & ; r_D < \xi \leq \infty \end{array} \right\}$$

Tal como se puede observar, la expresión anterior representa la solución convencional, excepto por la presencia de los términos integrales, los cuales involucran la distribución inicial de presión no-uniforme en el yacimiento.

En la figura IV.1 se presentan las respuestas de presión para el caso de una prueba de decremento a gasto constante despreciando los efectos de almacenamiento y daño, con una distribución inicial de presión no-uniforme dada por la ecuación IV.1, por ejemplo antes de esta prueba de decremento hubo un periodo de producción previo. La línea con

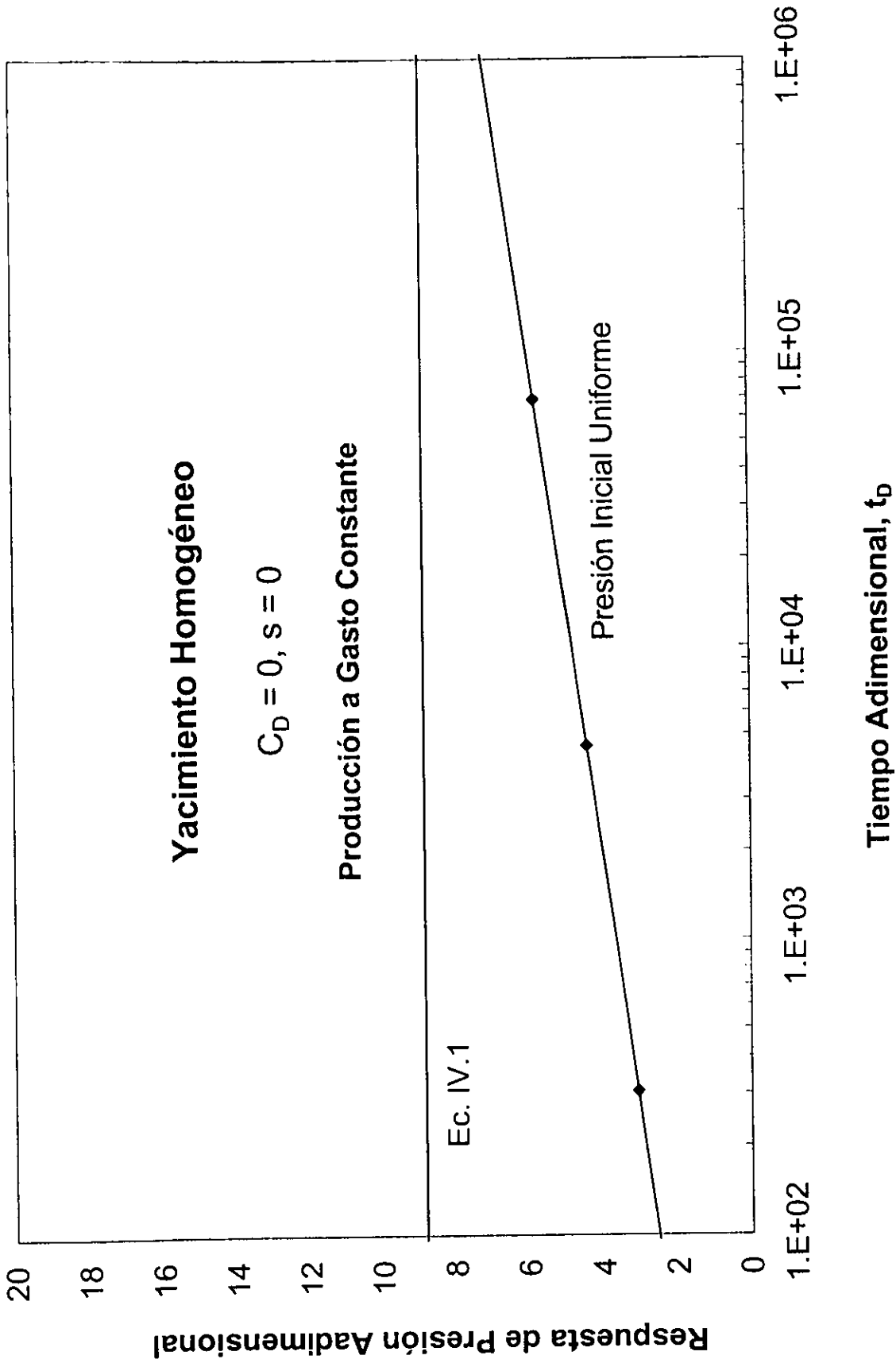


Fig. IV.1. Influencia de la Distribución Inicial de Presión, en la Respuesta de Presión para un decremento, Ec. IV.1

rombos corresponde a la respuesta convencional de presión, o sea considerando una distribución inicial de presión uniforme en el yacimiento. Esta convención se empleará en la presente tesis. De esta figura se puede observar que durante el periodo de flujo transitorio, la respuesta en el pozo, correspondiente a la función de presión no-uniforme, no presenta la misma línea recta semilogarítmica que caracteriza normalmente a la respuesta de presión para el caso de una función de distribución inicial uniforme. Es importante mencionar que la diferencia de presión que existe entre la presión inicial considera (5704.8 psia) y la presión al tiempo inicial que corresponde a la respuesta de decremento es de aproximadamente 12 psia. Debido a esta pequeña diferencia de presión se observa la existencia de una ordenada al origen y pendiente diferentes.

Las figuras IV.2 y IV.3 muestran otros casos de producción a gasto constante para un yacimiento con $r_{eD} = 10000$, con distribuciones iniciales de presión no uniforme dadas por las ecuaciones IV.2-IV.4. En estas figuras también se observa que, durante el periodo de flujo transitorio ($t_D < 3.1 \times 10^7$) no presenta la línea recta semilogarítmica para ninguno de los casos.

Tal como se mencionó en el capítulo 3, así como en el Apéndice A de esta tesis, mediante la substitución de la Función de Green en la ecuación IV.5, la determinación de la distribución inicial de presión es equivalente a resolver la siguiente ecuación de Fredholm de primera clase:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{t_D} L^{-1}(-\theta [I_1(\alpha)K_0(\alpha) + K_1(\alpha)I_0(\alpha)] \\
 & \quad \{[K_0(\alpha) - I_0(\alpha)\theta] / \alpha - s[K_1(\alpha) + I_1(\alpha)\theta]\}^{-1})_{\tau} + p_{wD}(t_D - \tau) d\tau + \\
 & + L^{-1} \left[\frac{h(u) [K_0(\alpha) / \alpha + sK_1(\alpha) [I_0(\alpha) - K_0(\alpha) / \theta]]}{\{[K_0(\alpha) - I_0(\alpha)\theta] / \alpha - s[K_1(\alpha) + I_1(\alpha)\theta]\}^{-1}} \right] = \int_1^{\infty} \frac{1}{2t_D} e^{-\frac{\xi^2}{4t_D}} \xi p_{iD}(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

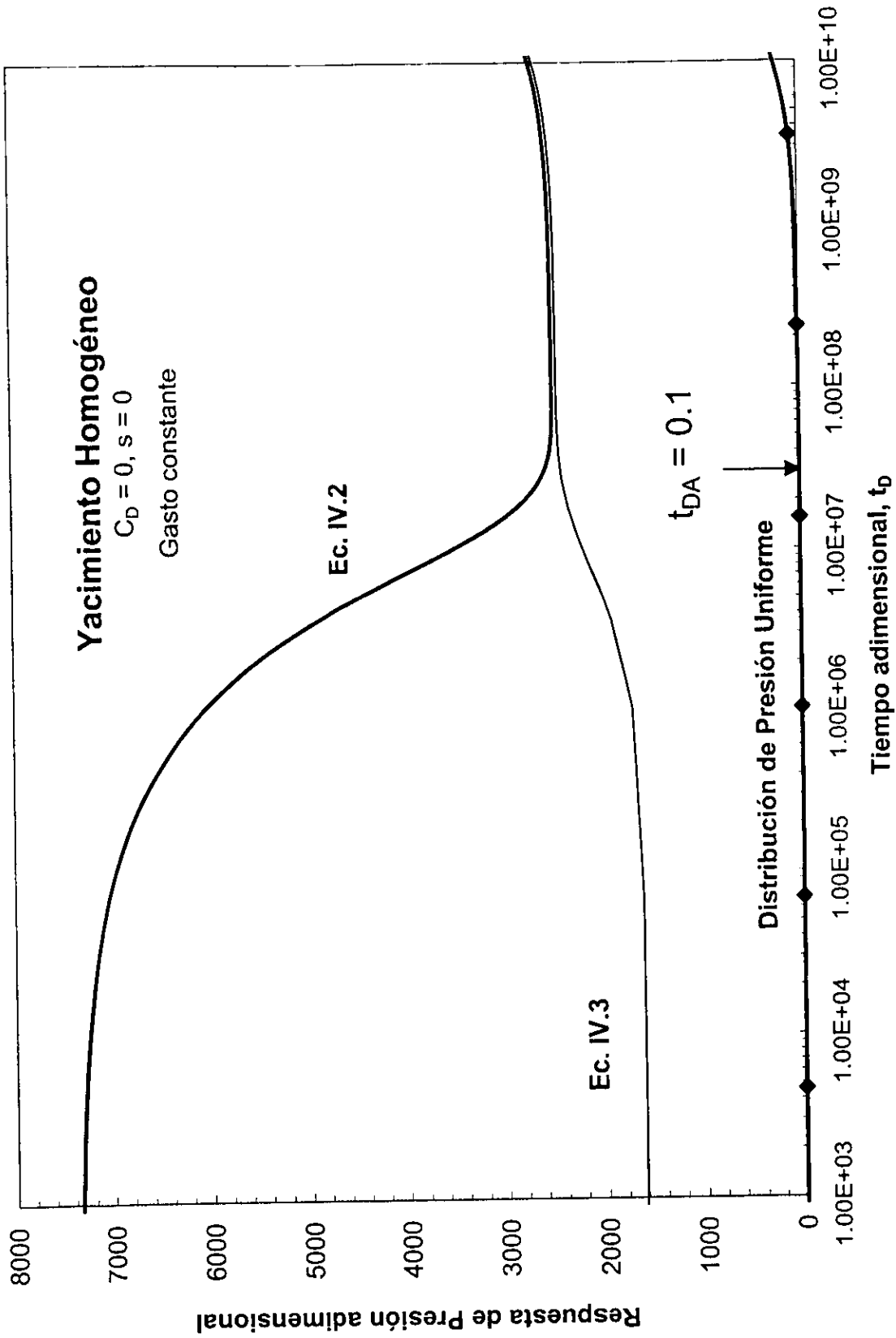


Fig. IV.2. Influencia del perfil de distribución Inicial. Ecs. IV.2-IV.3, en la respuesta de presión para un decremento.

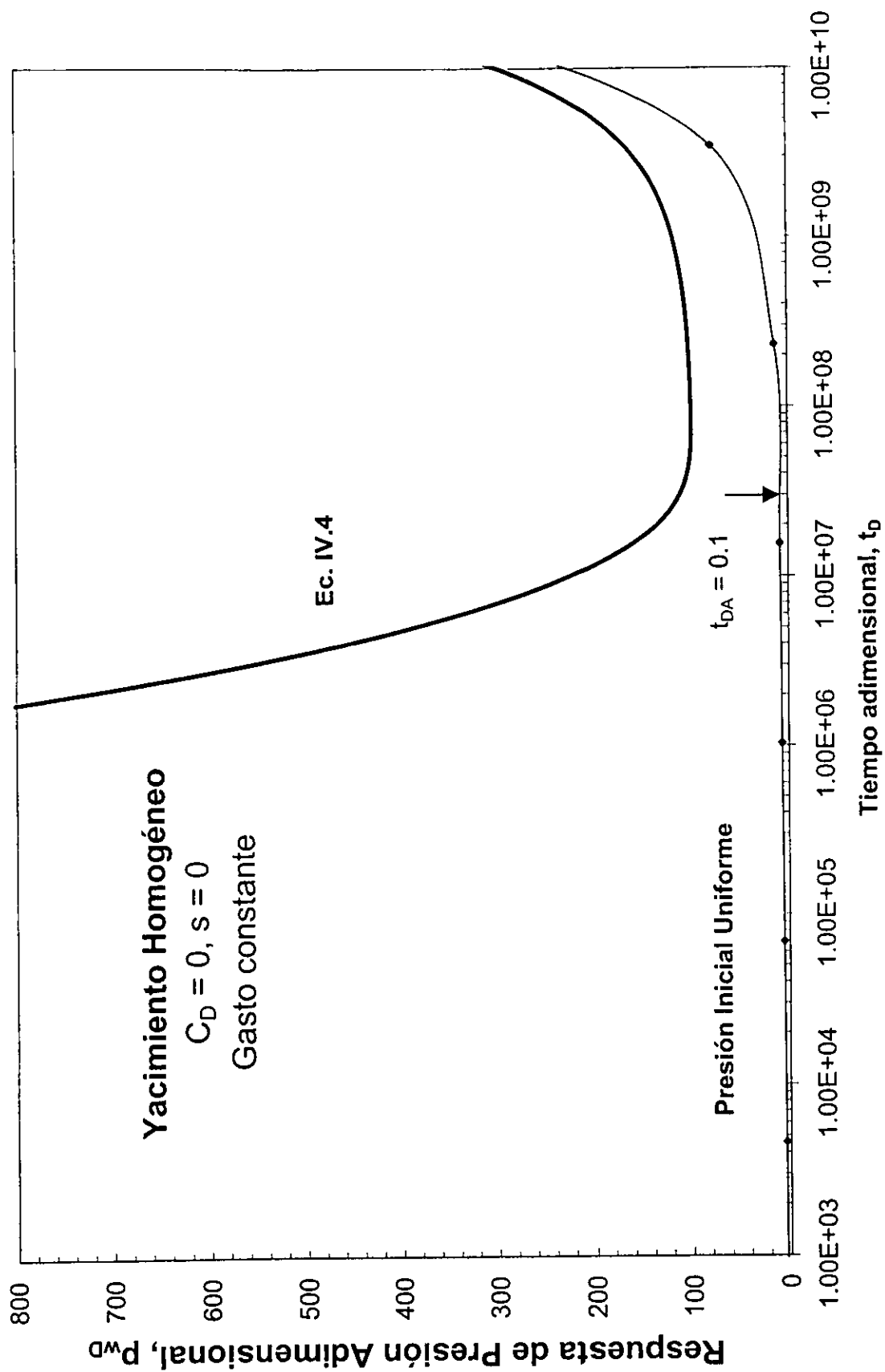


Fig. IV.3. Influencia del perfil de distribución Inicial. Ec. IV.4, en la respuesta de presión para un decremento.

Donde $\alpha^2 = u$. Se puede observar de la ecuación IV.6 que se trata de una ecuación integral que tiene en su kernel el núcleo de calor. Este tipo de ecuaciones integrales ha constituido un amplio campo de estudio en la física y las matemáticas. Los problemas directos de la ecuación de difusión parten de la suposición de conocer la distribución inicial de presión y en base en esa función se obtiene la respuesta de presión contra tiempo. Si por el contrario, se conoce la respuesta de presión contra tiempo de una prueba de presión, y se desea conocer la función de distribución inicial que provocó esa respuesta, se estaría hablando de un problema inverso de la ecuación de difusión. El problema inverso de conducción de calor es mucho más difícil de resolver analíticamente que el caso de problemas directos (Beck y Clair, 1977). El problema inverso IV.6, es decir el conocimiento de la distribución inicial no-uniforme p_{1D} constituye uno de los muchos problemas matemáticamente mal comportados que se pueden presentar en la física. Tales problemas son extremadamente sensitivos a pequeños errores en las mediciones (Beck y Clair, 1977). En base a lo anterior se puede afirmar que el problema inverso IV.6 es un problema mal comportado debido a que presenta severas dificultades numéricas en su solución. En el presente trabajo se exploró la solución de este problema mediante el planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales para encontrar la función de distribución inicial, es decir se discretizaron las integrales mostradas en dicha ecuación de tal forma que se tuviera un sistema de ecuaciones algebraicas. Este camino de solución no fue exitoso, debido a que para pequeñas variaciones de los datos hubo grandes variaciones en la solución; es decir se trata de un problema exponencialmente inestable. Esto se manifestó mediante la tremenda oscilación de los valores para cada una de las posiciones radiales en estudio, cambiando de valores muy grandes a valores negativos.

Otro de los caminos que también se exploró fue el de plantear la solución a través de la deconvolución, pero tampoco se tuvo éxito alguno, aunque las oscilaciones de los valores buscados (solución de las ecuaciones) no presentaron la enorme variación que en el caso previamente discutido. En el capítulo dos de la presente tesis se mencionan algunos

aspectos concernientes a la solución analítica y numérica a estas ecuaciones de conducción de calor.

En la presente tesis se empleó el método de Backus y Gilbert (1968), el cual previamente Oliver (1990, 1992) exploró mediante la aplicación de este método para obtener la distribución radial de permeabilidades a través de datos de pruebas de presión. Este método se aplica para obtener la solución a una ecuación integral de primera clase. Así que para los casos de ecuaciones integrales de segunda clase o bien las ecuaciones integrodiferenciales, este método no es aplicable.

Una prueba de incremento de presión, en la cual el periodo previo de producción se desconoce, se puede tratar como una prueba de decremento con una distribución inicial de presión desconocida. En este caso, el tiempo de inicio de la prueba es el tiempo al momento del cierre del pozo. Para el caso en que el efecto de almacenamiento no esté presente, de la ecuación A-33 del Apéndice A se obtiene que:

$$P_{wD}(\Delta t_D) = \left[\int_1^{\infty} L^{-1} \left[\frac{K_0(\alpha\xi)}{\alpha K_1(\alpha)} \right] \xi p_{iD}(\xi) d\xi \right] \quad \text{IV.7}$$

De nueva cuenta se observa que esta expresión es una ecuación integral de Fredholm de primera clase. Esta ecuación confirma el hecho de que la distribución de presión al momento del cierre controla la respuesta de incremento (Camacho-Velázquez y Raghavan, 1989; Raghavan, 1993).

Las ecuaciones IV.6 y IV.7 se resolvieron aplicando el método de Backus y Gilbert (1968), obteniendo los multiplicadores de Lagrange para generar la función, tal como lo plantea Oliver (1992). La transformada inversa de Laplace de estas ecuaciones se obtuvo mediante la aplicación del algoritmo numérico de Stehfest (1970).

Empleando los datos correspondientes a los casos presentados en las figuras IV.2 y IV.3, se obtuvieron las distribuciones iniciales de presión que se muestran en la figura IV.4. Los perfiles iniciales se presentan con líneas con símbolos, mientras que los obtenidos por medio del método de Backus y Gilbert (1968) con símbolos. De esta figura se puede observar que existe muy buena correlación entre los valores calculados de la función inicial por medio de BG y los valores reales para las distribuciones iniciales representadas por las ecuaciones IV.2 y IV.3, sin embargo cuando se emplea la ecuación IV.4 como distribución de presión inicial, los resultados presentan buena correlación hasta aproximadamente una distancia adimensional de $r_D = 1800$, y a medida que la posición radial se incrementa, los resultados tienden a perder correlación.

Para el caso de la función de distribución inicial de presión dada por la ecuación IV.1, se aprecian buenos resultados (ver figura IV.5). Es importante mencionar que con el fin de evaluar de manera adecuada el valor de presión a una distancia dada, los datos de presión transitorios deben de incluir tiempos para los cuales el radio de investigación a esos tiempos sea mayor que el que especifica la posición radial. Aquí se emplearon datos de presión correspondientes al periodo de flujo transitorio. Si se incluyen datos durante el periodo de flujo dominado por frontera, la solución a la ecuación integral (Método de Backus y Gilbert) tiende a perder exactitud, esto se debe al concepto de radio de investigación que es aquel al cual ha viajado la onda de depresionamiento causada por la producción del pozo a un tiempo t ; este concepto se relaciona con el tiempo al que se alcanzan condiciones de flujo pseudoestacionario. También es importante mencionar que para determinar la distribución inicial de presión es necesario tener valores estimados de los parámetros del yacimiento y del pozo.

Con el fin de evaluar el desempeño del algoritmo de Backus y Gilbert (1968), se añadió ruido blanco Gaussiano a la respuesta de presión.

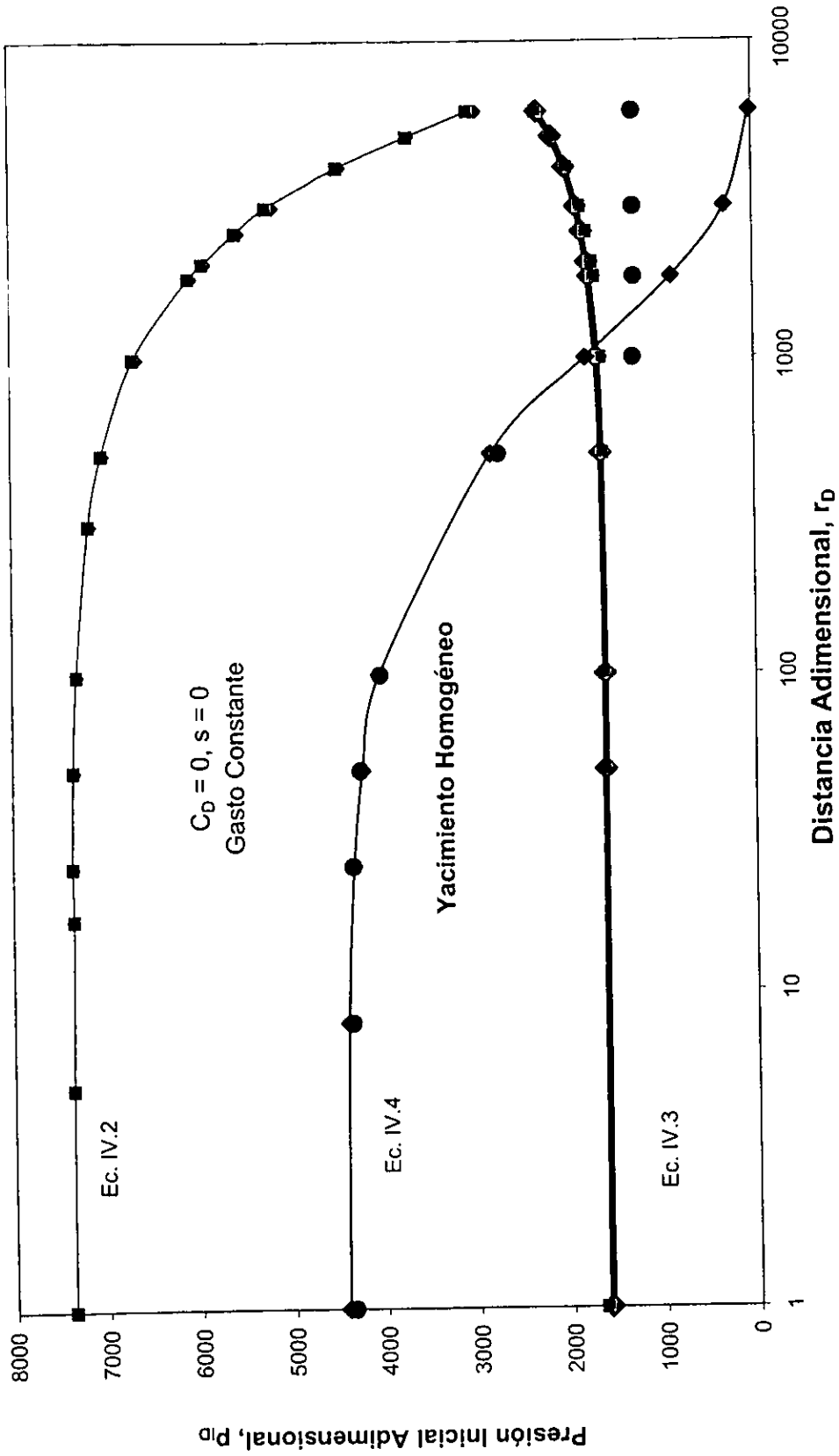


Fig. IV.4. Obtención de los perfiles de Distribución Inicial, Ecs. IV.2 - IV.4, empleando datos sin ruido durante el periodo Transitorio de la respuesta de presión para decremento.

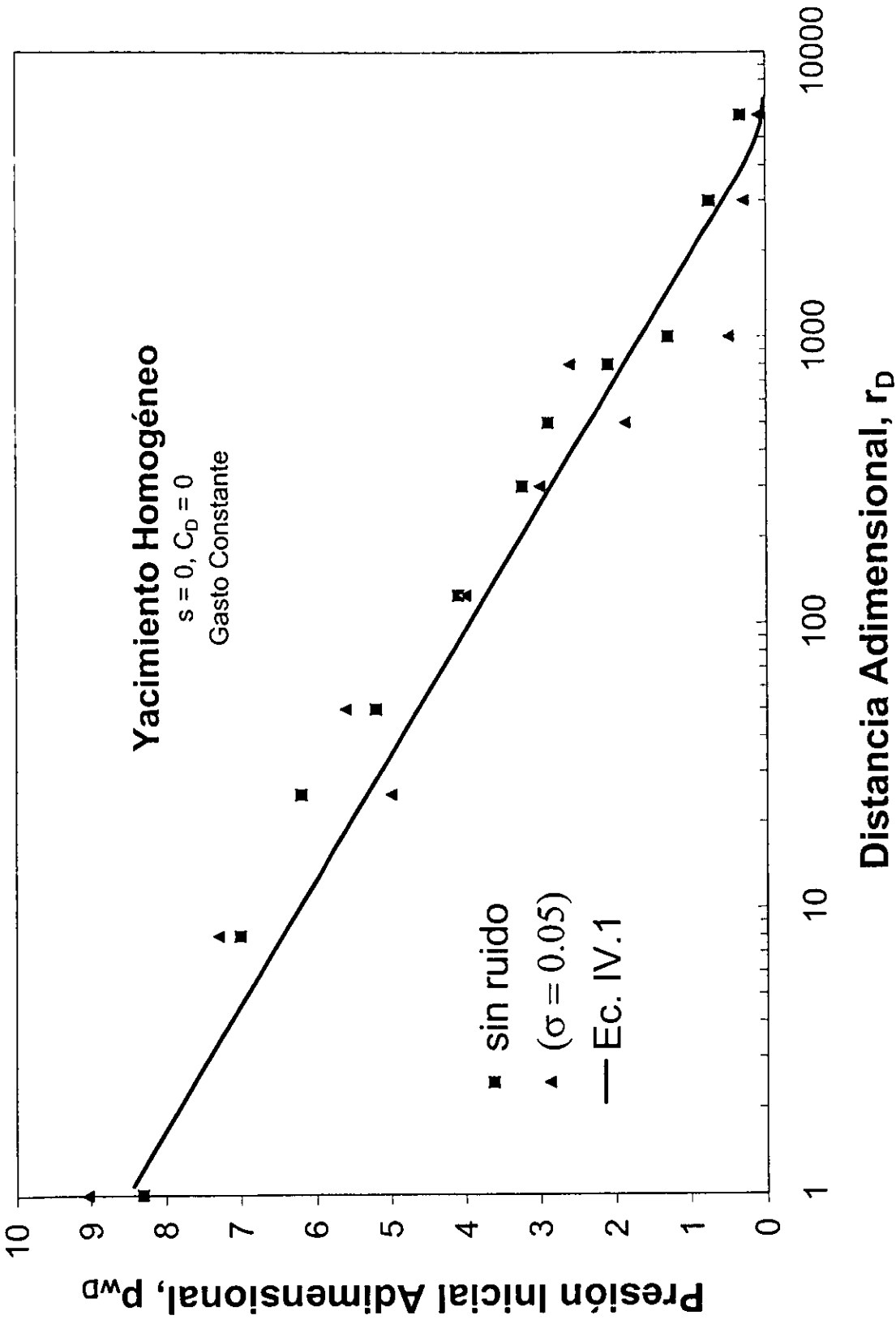


Fig. IV.5. Cálculo del Perfil Inicial, Ec. IV.1, empleando datos con y sin ruido en el periodo Transitorio, para una prueba de decremento.

La figura IV.6 muestra las comparaciones de los perfiles de presión con la distribución inicial de presión mostrada en las figuras IV.2-IV.3. Aquí se puede observar que los perfiles de distribución obtenidos cuando se consideró la presencia de ruido aleatorio de 5% de desviación estándar, presentan mayores desviaciones con respecto al perfil real, que cuando se consideraron datos libres de ruido. Por lo tanto se esperaría que con datos reales de una prueba de presión, los cuales contienen presencia de ruido, tal como ruido blanco y errores por truncamiento, el método de Backus y Gilbert se comportaría en cierta medida mal a menos que se empleara alguna técnica de filtrado como la propuesta por González-Tamez y Camacho-Velázquez (1999) o la función integral propuesta por Blasingame y colaboradores (1989).

El problema de obtener o reproducir la distribución inicial de presión a partir de datos con presencia de ruido está relacionado con la solución de ecuaciones integrales de Fredholm de primera clase con kernel cuadráticamente integrable. Este tipo de ecuaciones integrales son extremadamente sensitivas a perturbaciones de alta frecuencia (Wing y Zahrt, 1991).

Con el fin de observar el comportamiento del método de Backus y Gilbert (1968) para el caso de una prueba de incremento que sigue a un decremento de duración desconocida (ver Apéndice A de este trabajo), se llevó a cabo la simulación de este proceso. Así de esta manera es posible trabajar con la ecuación IV.7 y validar la solución analítica. Al igual que en los casos anteriormente comentados, aquí se obtuvo la transformada inversa de Laplace por medio del algoritmo de Stehfest (1970). La solución a esta ecuación integral de Fredholm se llevó a cabo de manera numérica aplicando el método de Backus y Gilbert (1968).

En la figura IV.7, se puede observar el perfil de distribución al momento del cierre en línea continua con rombos, mientras que los cuadros muestran el perfil de distribución al momento de cierre obtenido mediante la aplicación del algoritmo de Backus y Gilbert (1968). Se puede observar de esta figura que los resultados presentan muy buena

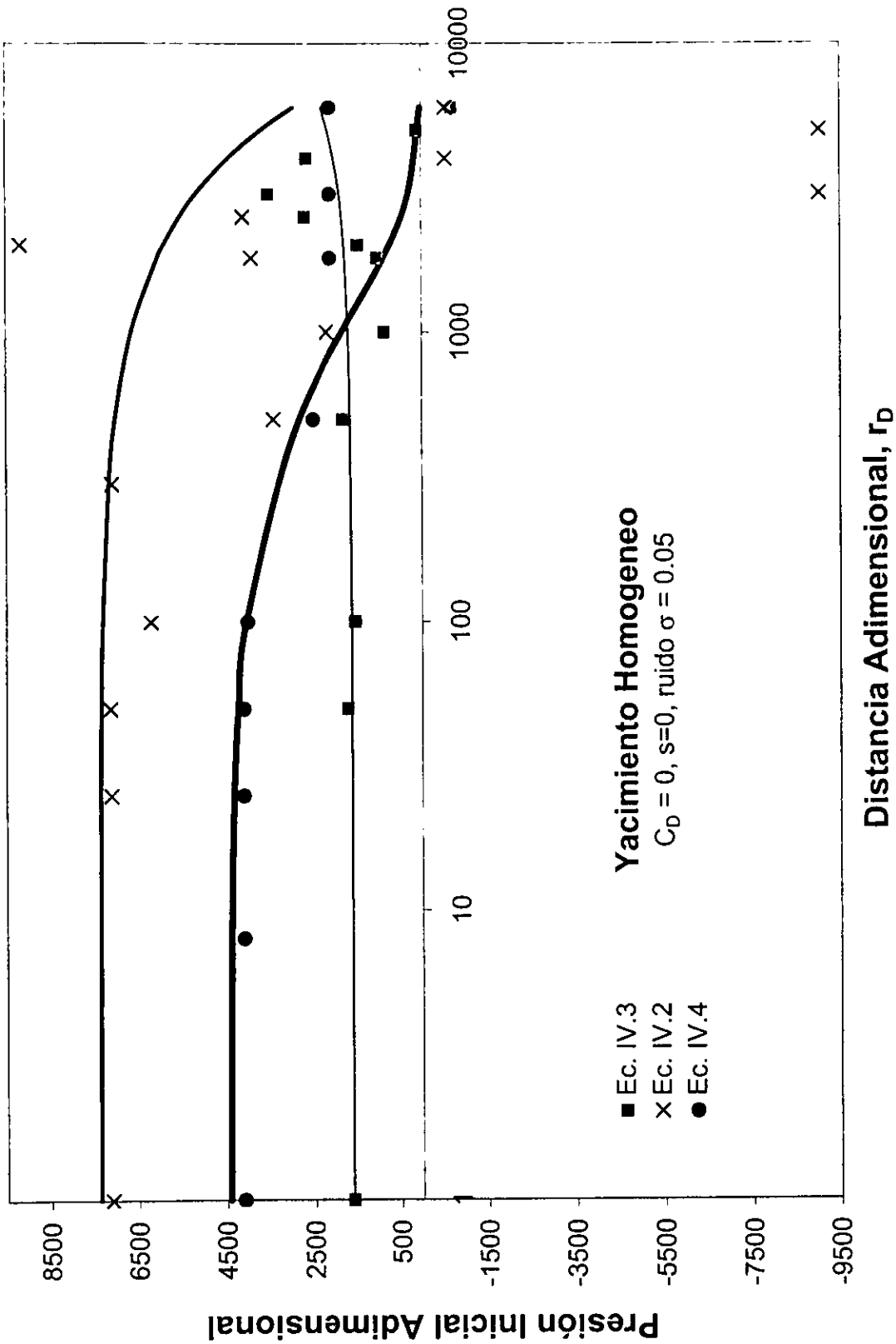


Fig. IV.6. Cálculo de los Perfiles Iniciales. Ecs. IV.2 - IV.4, empleando datos con ruido durante el periodo Transitorio, para una prueba de decremento.

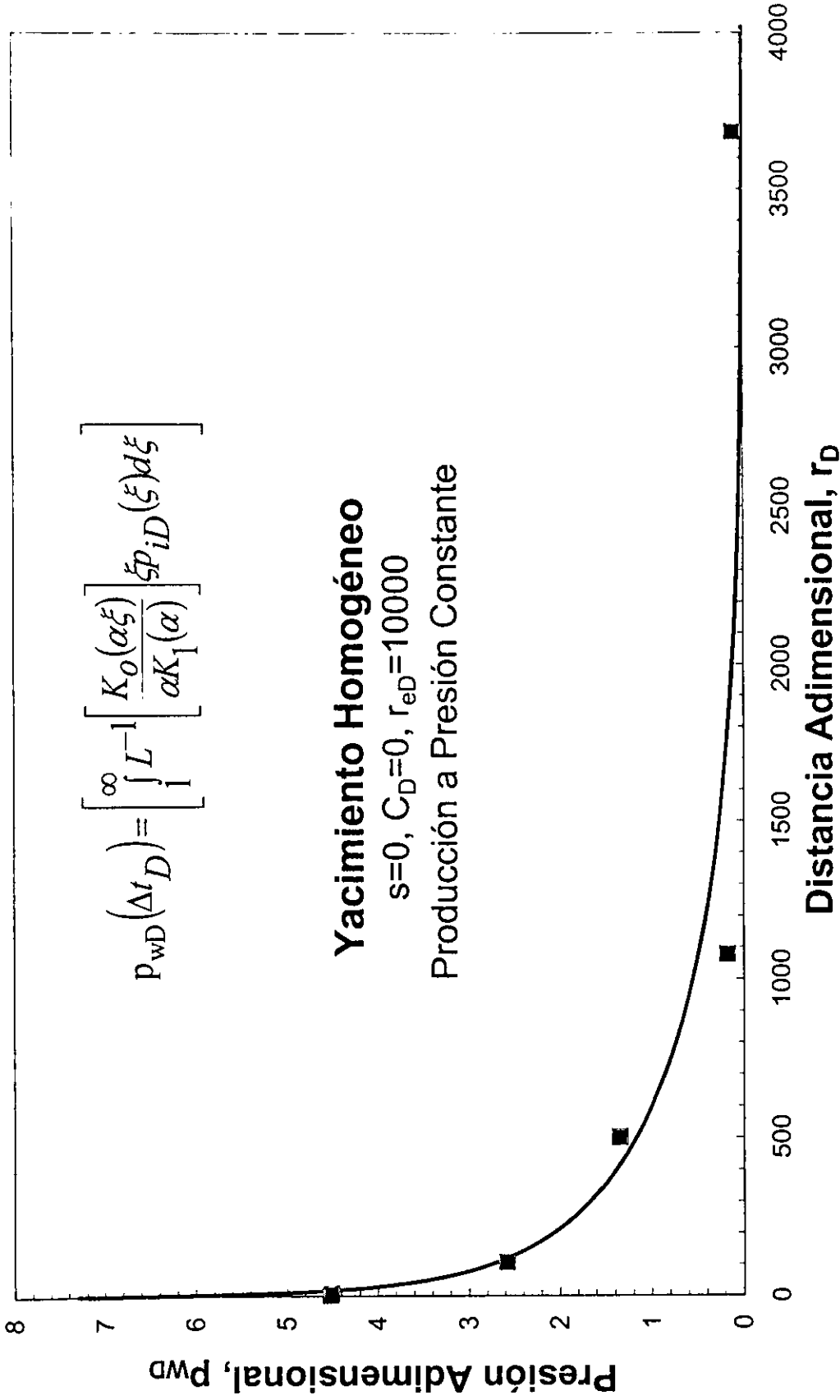


Fig. IV.7. Influencia del Perfil no-Uniforme para un incremento que sigue a un decremento de duración descontinua

correlación tanto para distancias radiales pequeñas como para valores grandes de la distancia. Con ello se confirma la hipótesis mencionada por los siguientes autores: Camacho-Velázquez y Raghavan (1989) y Raghavan (1993) respecto a que la respuesta de presión para una prueba de incremento está controlada por el perfil de distribución de presión al momento del cierre.

IV.2.2. Yacimientos Fracturados

Como ya se mencionó en el capítulo anterior, la formulación empleada para la derivación de la respuesta de presión en el caso de yacimientos fracturados fue la de Warren y Root (1963) , aunque la metodología es aplicable para cualquier otra formulación de este tipo de yacimientos. En base a este planteamiento (ver Apéndice A) se obtuvo que la respuesta de presión durante el periodo transitorio, está dada por la siguiente expresión en el espacio de Laplace:

$$\bar{p}_{wD} = \int_1^\infty G(\xi,1) \xi g(\xi,u) d\xi + h(u)G(1,1) - s \left\{ \int_1^\infty [G_{rD}(\xi,r_D)]_{r_D=1} \xi g(\xi,u) d\xi + h(u)[G_{rD}(1,r_D)]_{r_D=1} \right\}$$

IV.8

donde:

$$g(\xi,u) = -\{\lambda[p_{ifD}(\xi)\omega + p_{imD}(\xi)(1-\omega)] + \omega u(1-\omega)p_{ifD}(\xi)\} \{\lambda + u(1-\omega)\}^{-1}$$

IV.9

Tal como es de esperarse, si se comparan las soluciones IV.5 y IV.8, se puede observar que la obtención del perfil de distribución inicial de presión depende altamente del tipo de heterogeneidad presente en la formación. Esto hace más difícil la determinación de esta función inicial.

Para el caso especial en que: $p_{ifD}(r_D) = p_{imD}(r_D)$, la ecuación IV.9 se reduce a:

$$g(\xi, u) = -p_{ifD}(\xi) f(u) \quad \text{IV.10}$$

donde,

$$f(u) = \{\lambda + \omega u(1 - \omega)\} \{\lambda + u(1 - \omega)\}^{-1}$$

Que podría ser el caso cuando el periodo de flujo homogéneo se alcance durante un periodo transitorio de producción previo.

La figura IV.8 presenta la respuesta de presión en el pozo correspondiente a una prueba de decremento en donde previamente hubo una historia de producción. Este caso es similar al presentado en la figura IV.1. En las figuras IV.9 y IV.10 se presentan las respuestas de presión en el pozo para los mismos casos de distribuciones iniciales de presión empleados en las figuras IV.2 y IV.3. En las figuras IV.8, IV.9 y IV.10 no se aprecia el comportamiento característico de las líneas rectas paralelas separadas por un periodo de transición que caracterizan a los sistemas naturalmente fracturados. De hecho, comparando las figuras correspondientes a los casos de yacimientos homogéneos, se puede observar que la influencia de la distribución inicial de presión en el yacimiento obscurece la presencia de este tipo de heterogeneidad presente en el yacimiento.

La figura IV.11 muestra una comparación entre los perfiles de distribución real y el estimado por medio del algoritmo de BG, correspondientes a las respuestas de presión de la figura IV.9 y IV.10. Se puede observar buena correlación entre los perfiles calculados y los reales para el caso de la distribución dada por la ecuación IV.3 para toda distancia radial; pero cuando se emplearon las ecuaciones IV.2 y IV.4, se obtuvieron buenos resultados únicamente hasta una distancia aproximada de 1800 y 200 respectivamente.

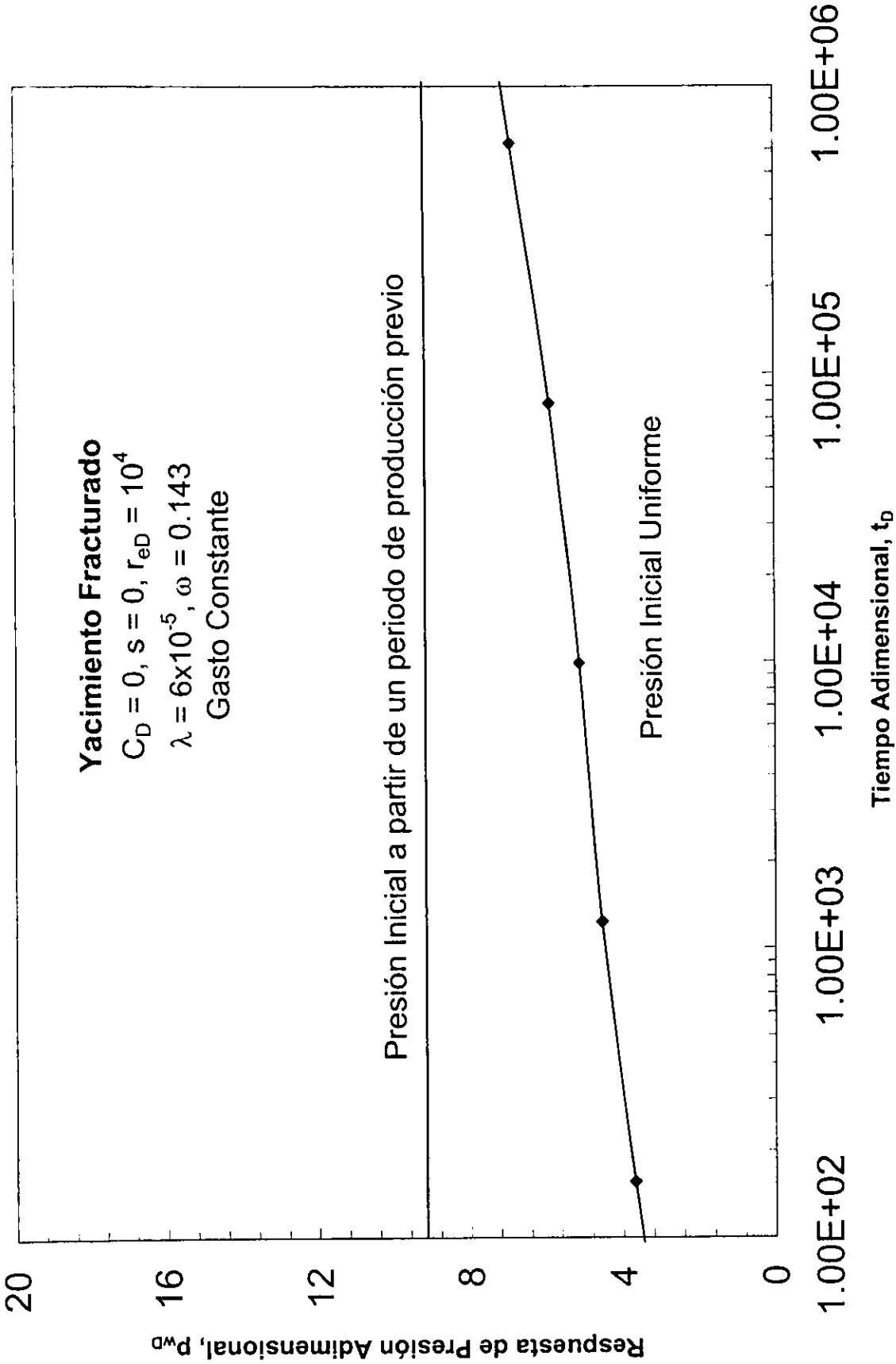


Fig. IV.8 Influencia de la Distribución Inicial de Presión, a partir de un periodo previo de producción

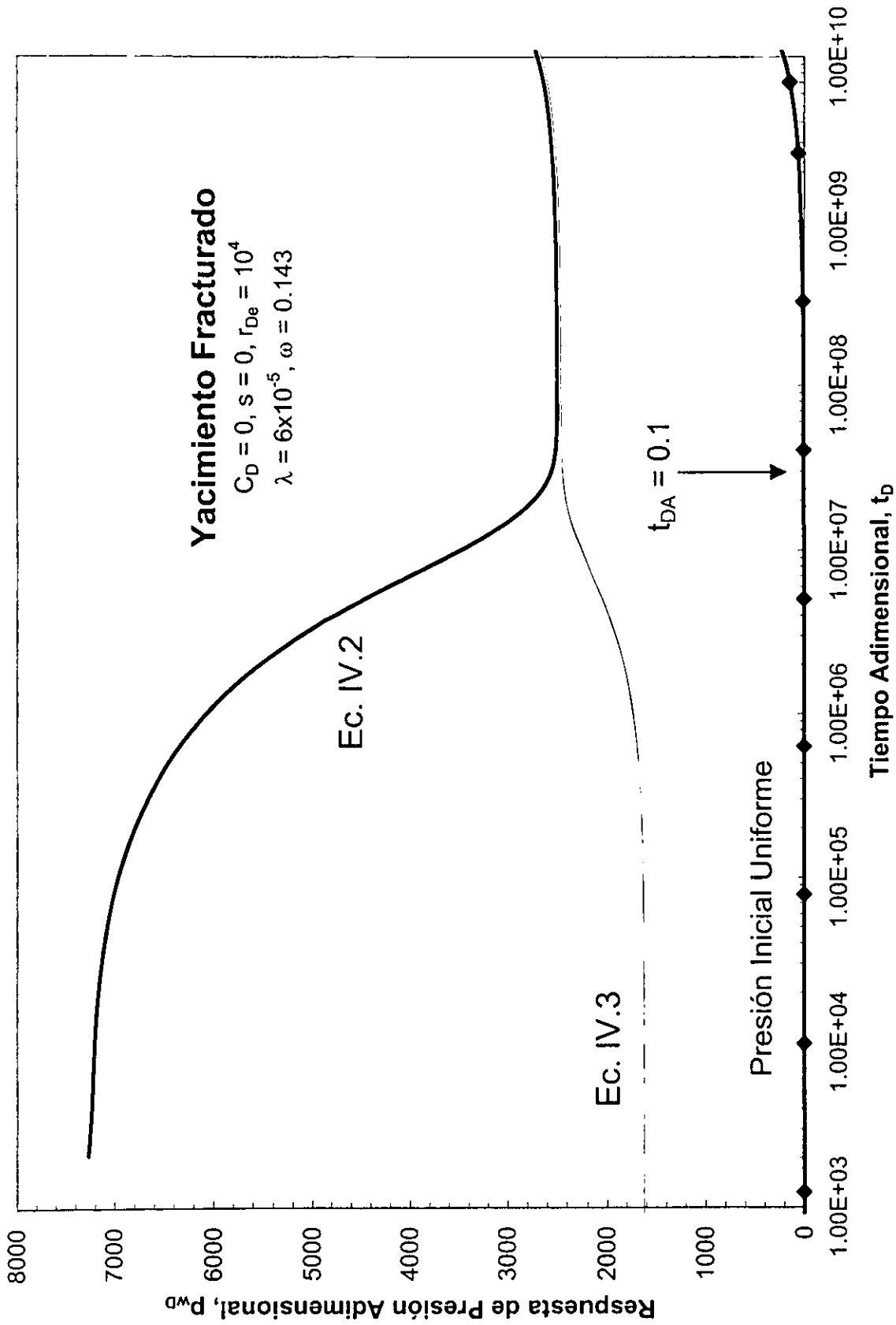


Fig. IV.9. Influencia del perfil de distribución Inicial. Ecs. IV.2-IV.3, en la respuesta de presión para un decremento.

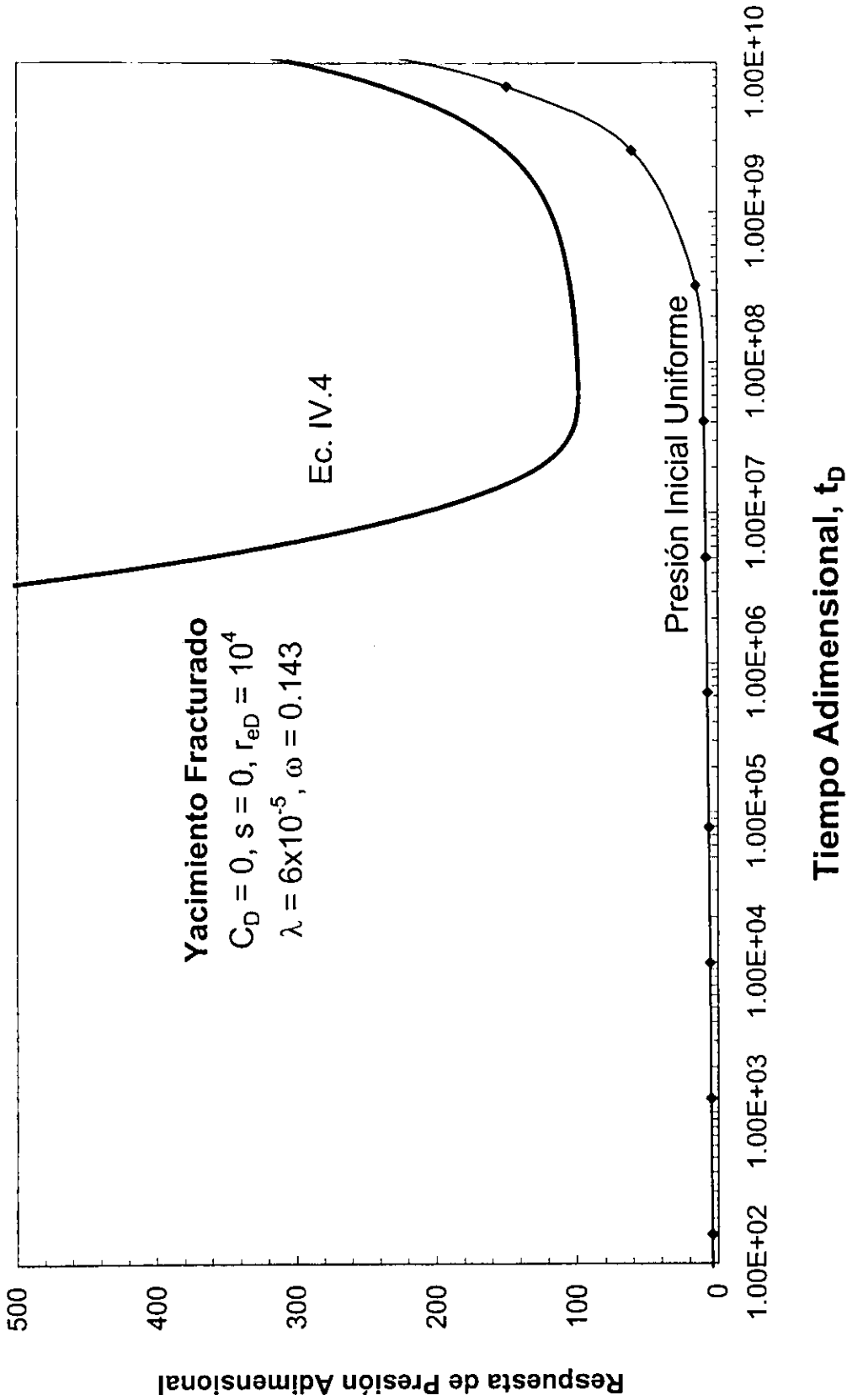


Fig. IV.10. Influencia del perfil de distribución Inicial. Ec. IV.4, en la respuesta de presión para un decremento. Sistemas Naturalmente Fracturados.

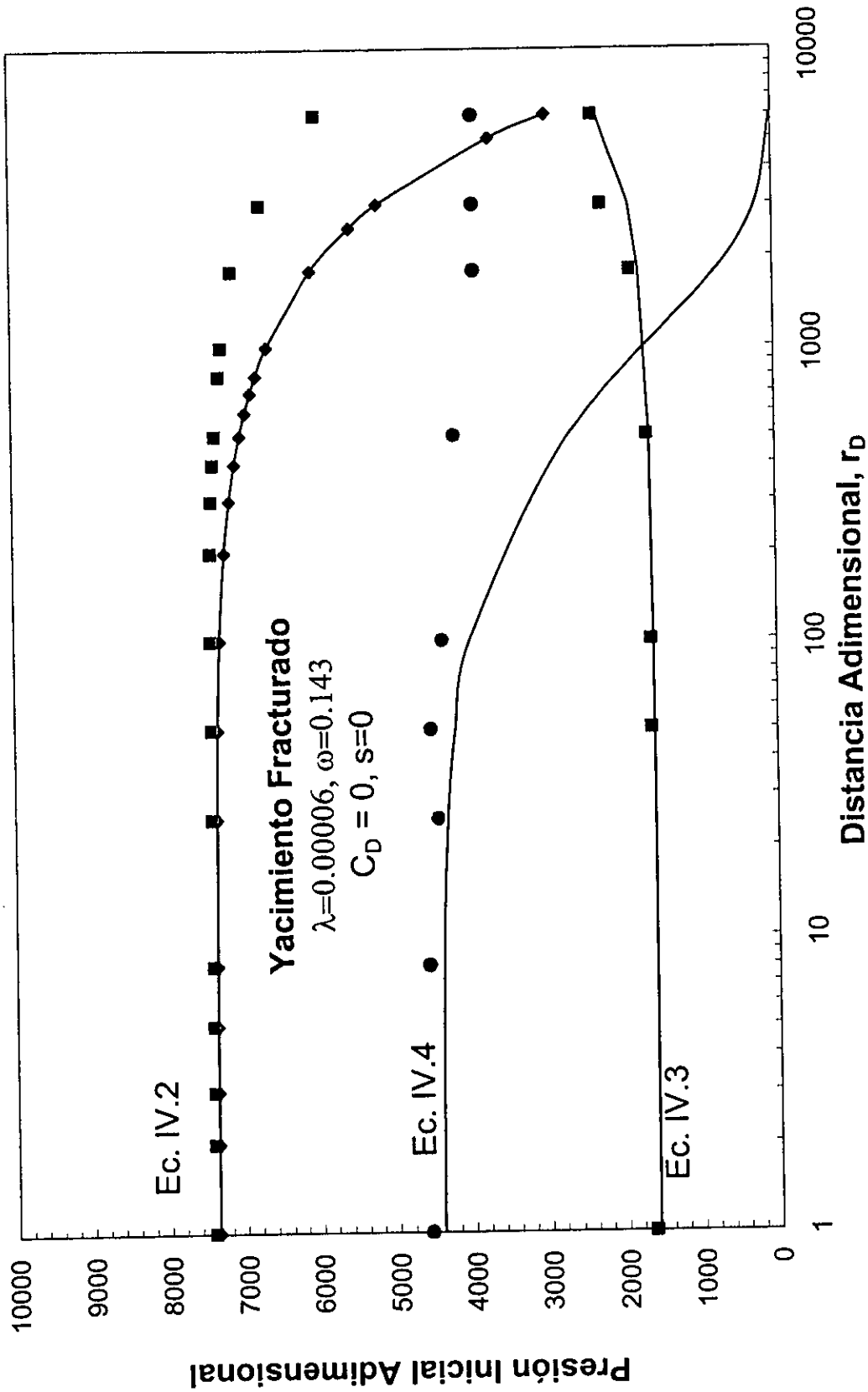


Fig. IV.11. Cálculo del Perfil Inicial, Ecs. IV.2 - IV.4, empleando datos sin ruido durante el periodo de flujo Transitorio, para un decremento.

Para el caso de la distribución inicial de presión dada por la ecuación IV.1, se obtuvieron buenos resultados para todas las posiciones radiales (ver figura IV.12).

Un análisis de las gráficas IV.4 – IV.5 y IV.11 –IV. 12, muestra que existe una diferencia entre los perfiles calculados por medio del método de Backus y Gilbert debido a la influencia del kernel implícito en la ecuación integral de Fredholm de primera clase.

Si se agrega ruido a los datos de presión mostrados en las figuras IV.8, IV.9 y IV.10, se obtienen los resultados que se muestran en las figuras IV.12 y IV.13. y nuevamente, la presencia de ruido en los datos de presión deterioran el desempeño del algoritmo de Backus y Gilbert. Una forma de poder mejorar el desempeño del método de Backus y Gilbert es el de agregar a la ecuación C-5, en la parte de la sumatoria

$$\sum_{i=1}^n c_i w_{ik} + c_{n+1} w_k(1) = B_k(r_o) \text{ un término que considere el ruido aleatorio en la respuesta de}$$

presión:
$$\sum_{i=1}^n \left(c_i w_{ik} + c_i \frac{\sigma^2}{\gamma} \right) + c_{n+1} w_k(1) = B_k(r_o),$$
 pero este proceso lo que hace en un

momento dado es por ejemplo subir o trasladar todos los puntos del perfil obtenido, estos puntos subirían o bajarían según el factor γ , el cual dependiendo de la magnitud de los datos de presión puede variar en forma muy amplia. Por lo tanto el traslado de estos puntos en la función inicial de presión, sería en forma proporcional, debido a la dependencia lineal que existe; es decir que todos los puntos son linealmente dependientes. Por ejemplo para que los puntos negativos que se muestran en la figura IV.6 pudieran subir y coincidir con los valores reales de la función, todos los demás puntos que se ajustan bien tendrían que subir también de manera proporcional no habiendo por lo tanto una correlación entre los puntos con valor positivo, debido a la mencionada dependencia lineal. Por lo tanto este criterio expuesto por Oliver (1992) podría funcionar siempre y cuando las desviaciones entre los valores reales y calculados no fueran tan grandes.

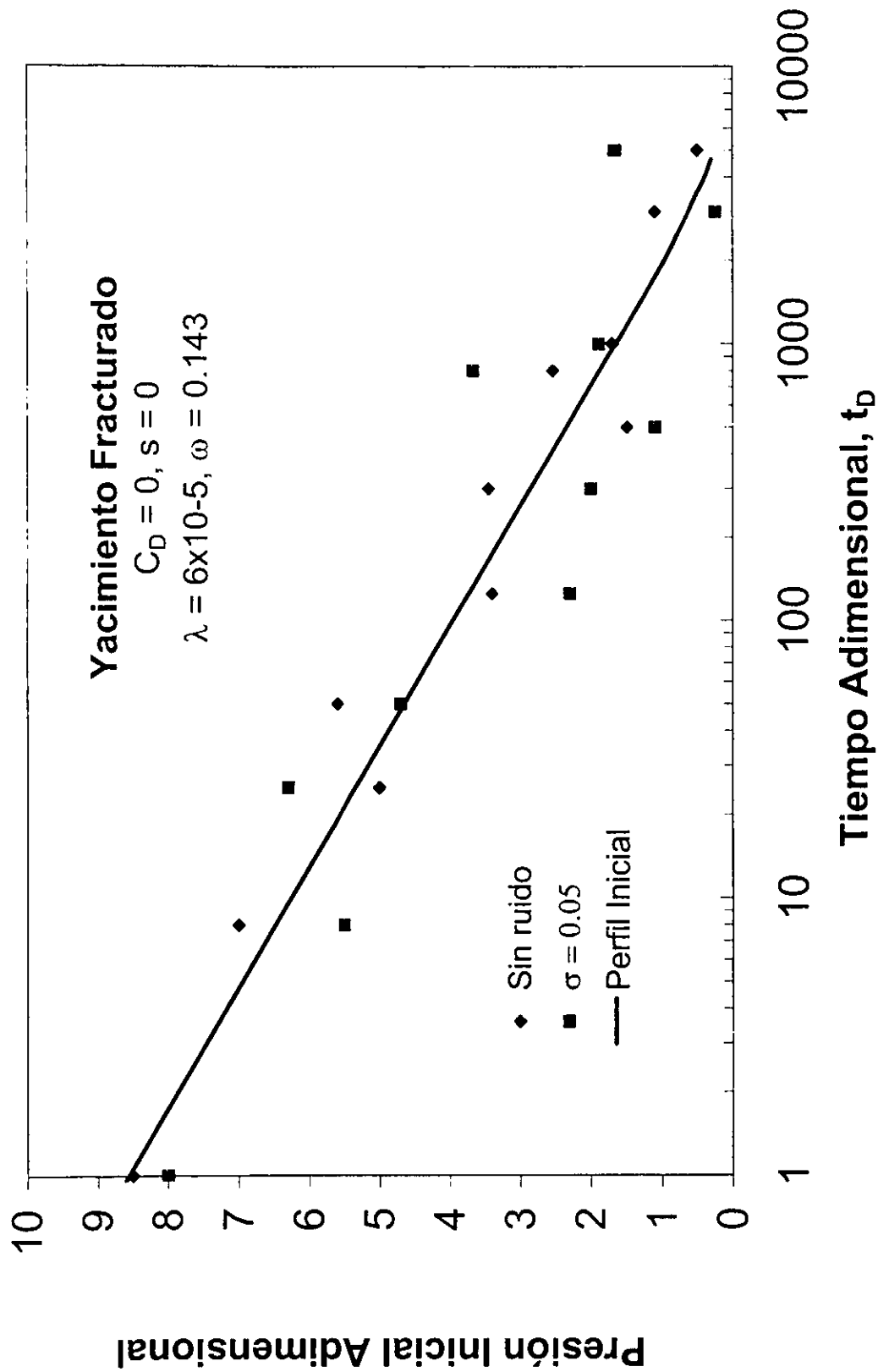


Fig. IV.12. Cálculo del Perfil Inicial, Ec. IV.1, empleando datos con y sin ruido en el periodo Transitorio, para una prueba de decremento.

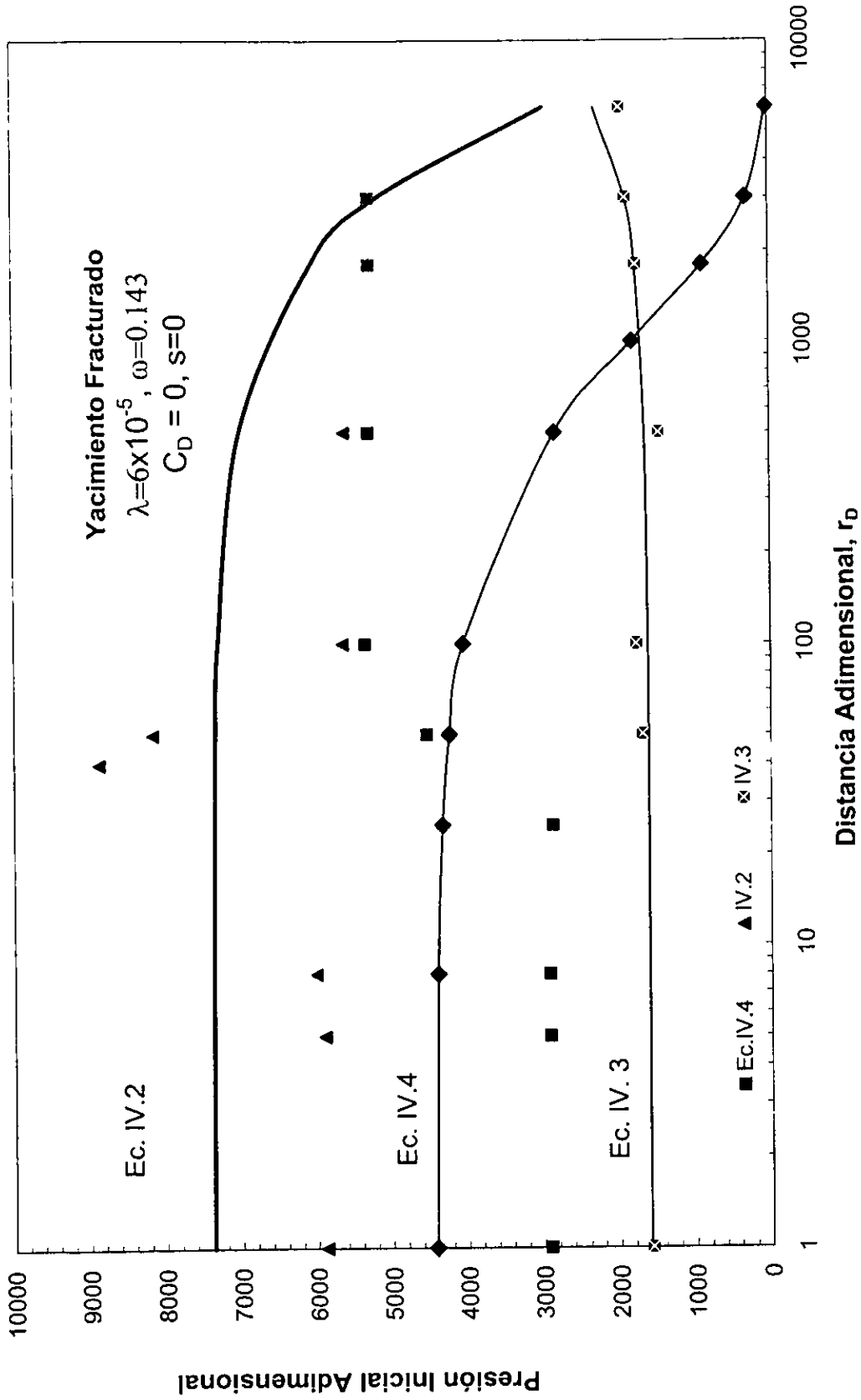


Fig. IV.13. Cálculo de Perfiles Iniciales, Ecs. IV.2 - IV.4, empleando datos con ruido durante el periodo Transitorio. Prueba de decremento.

IV.3 Resultados para sistemas cerrados.

Mediante el empleo de los resultados mostrados en el Apéndice B, la aproximación para tiempos grandes (para valores pequeños de la variable de Laplace) en ambos casos: yacimientos homogéneos y fracturados, correspondiente a gasto constante, se puede escribir de la siguiente forma:

$$p_{wD} \approx \frac{2}{\alpha^2 r_{eD}^2} \int_1^{r_{eD}} \xi p_{iD}(\xi) d\xi + \frac{2}{\alpha^4 r_{eD}^2} + \frac{1}{\alpha^2} \left[\ln(r_{eD}) - \frac{3}{4} \right] + s \quad \text{IV.11}$$

Esta expresión manifiesta que durante el periodo de flujo pseudoestacionario, se observará en una gráfica cartesiana una línea recta con la misma pendiente, que si se tuviera el caso de una distribución inicial uniforme en el yacimiento, pero con un pseudodaño adicional en la respuesta, dado por el término integral de la ecuación IV.11. Las figuras IV.14, IV.15, IV.16 y IV.17 confirman este hecho. Estas gráficas presentan el comportamiento de las respuestas de presión para tiempos grandes considerando varias distribuciones iniciales de presión no-uniforme en el yacimiento. Se puede observar que en todos los casos se obtiene una línea a tiempos grandes para los sistemas homogéneos y fracturados. En la tabla IV.1 se muestra una comparación entre la ordenada al origen obtenida en estas gráficas contra los valores calculados en forma analítica por medio de la expresión IV.11.

Función de distribución Inicial no-uniforme	Ordenada al origen	Lado derecho - $2\pi t_{DA}$
Ecuación	Figs. IV.14, 15, 16 y 17	Ecuación IV.11
IV.2	2500	2459
IV.3	2495	2466.09
IV.4	99.3	109.158

Tabla IV.1. Comparación entre las ordenadas al origen calculadas y gráficas

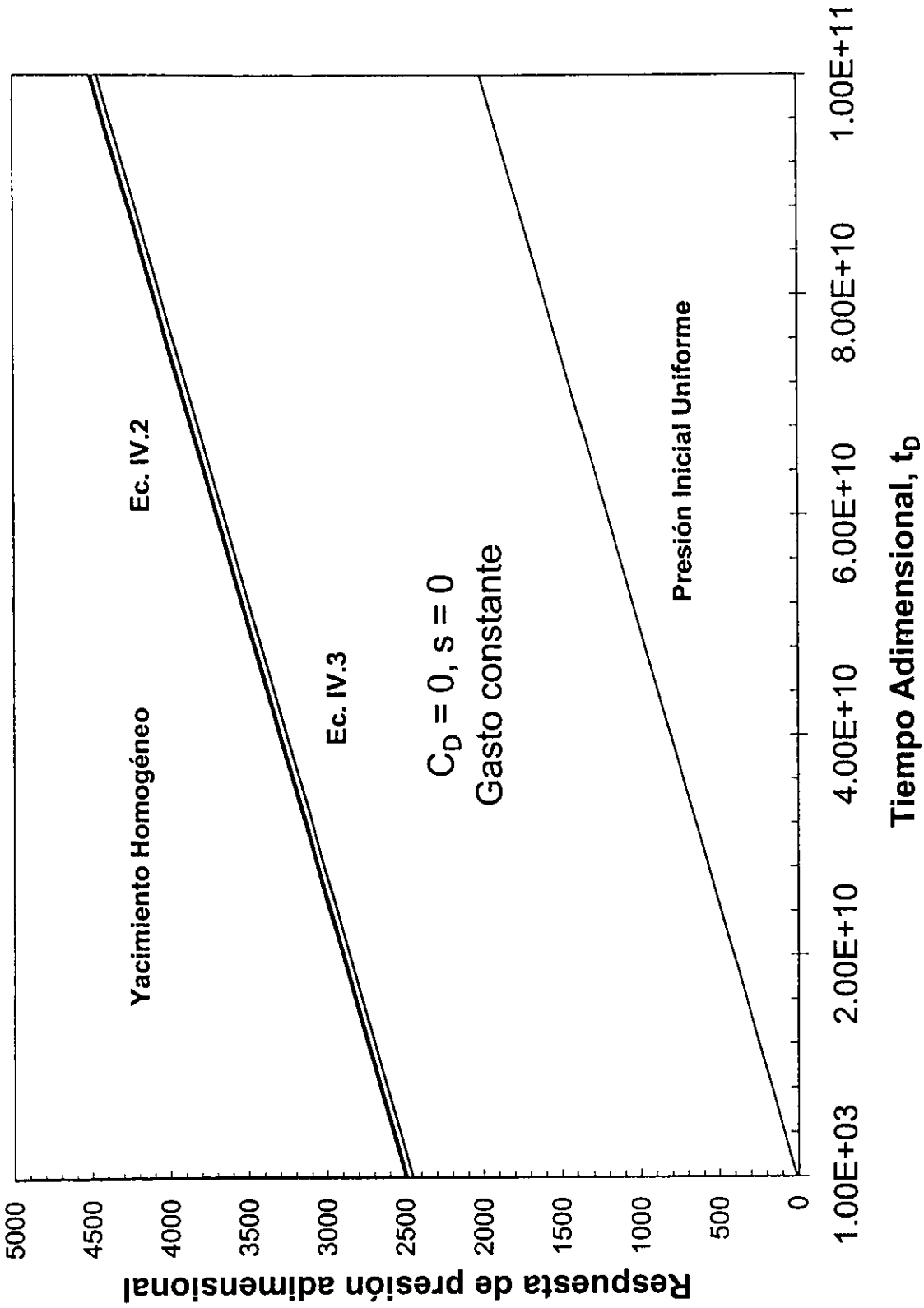


Fig. IV.14. Influencia del perfil de distribución Inicial. Ecs. IV.2 - IV.3, en la respuesta de presión para un decremento.

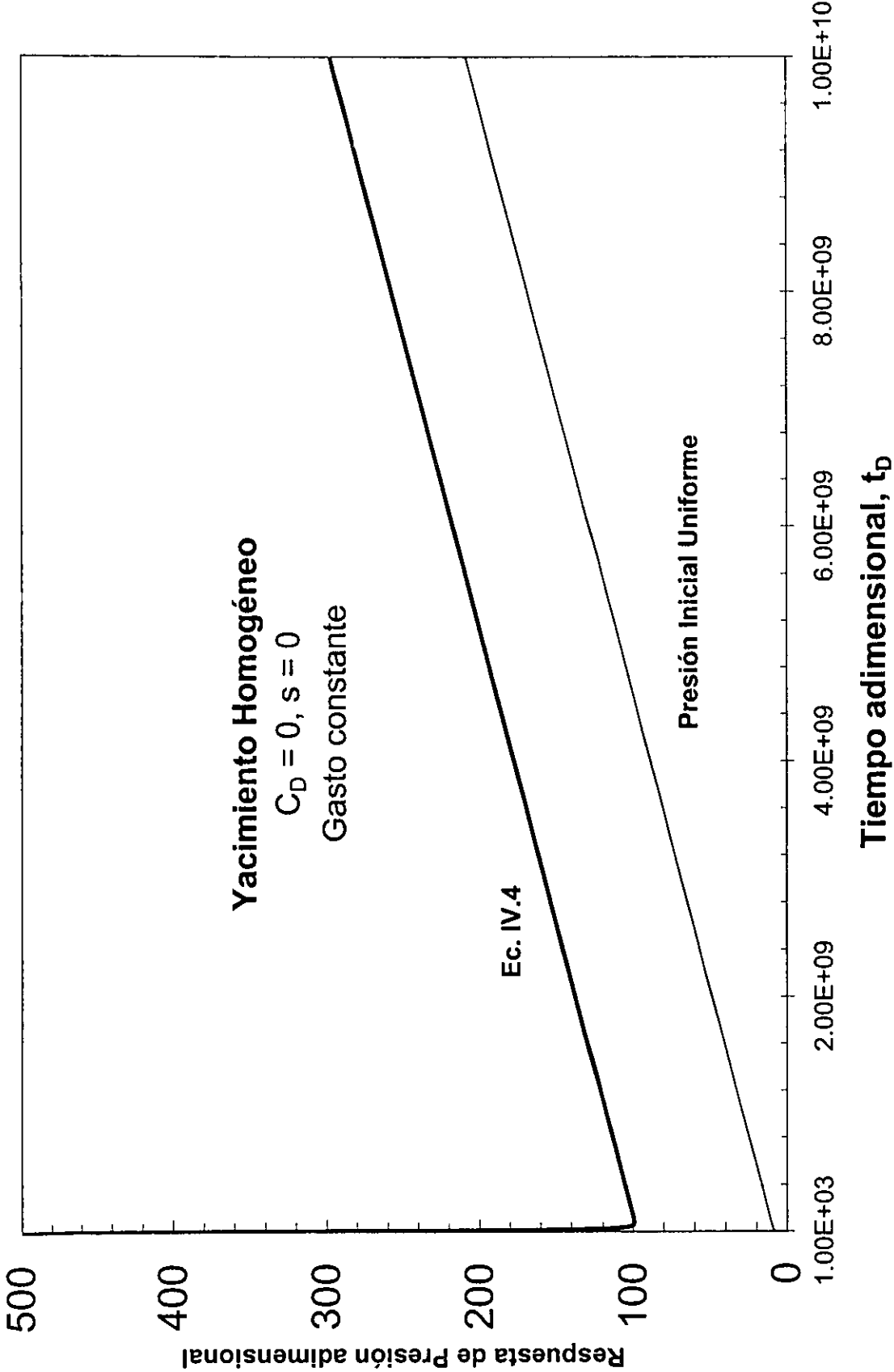


Fig. IV.15. Influencia del perfil de distribución Inicial. Ec. IV.4, en la respuesta de presión para un decremento.

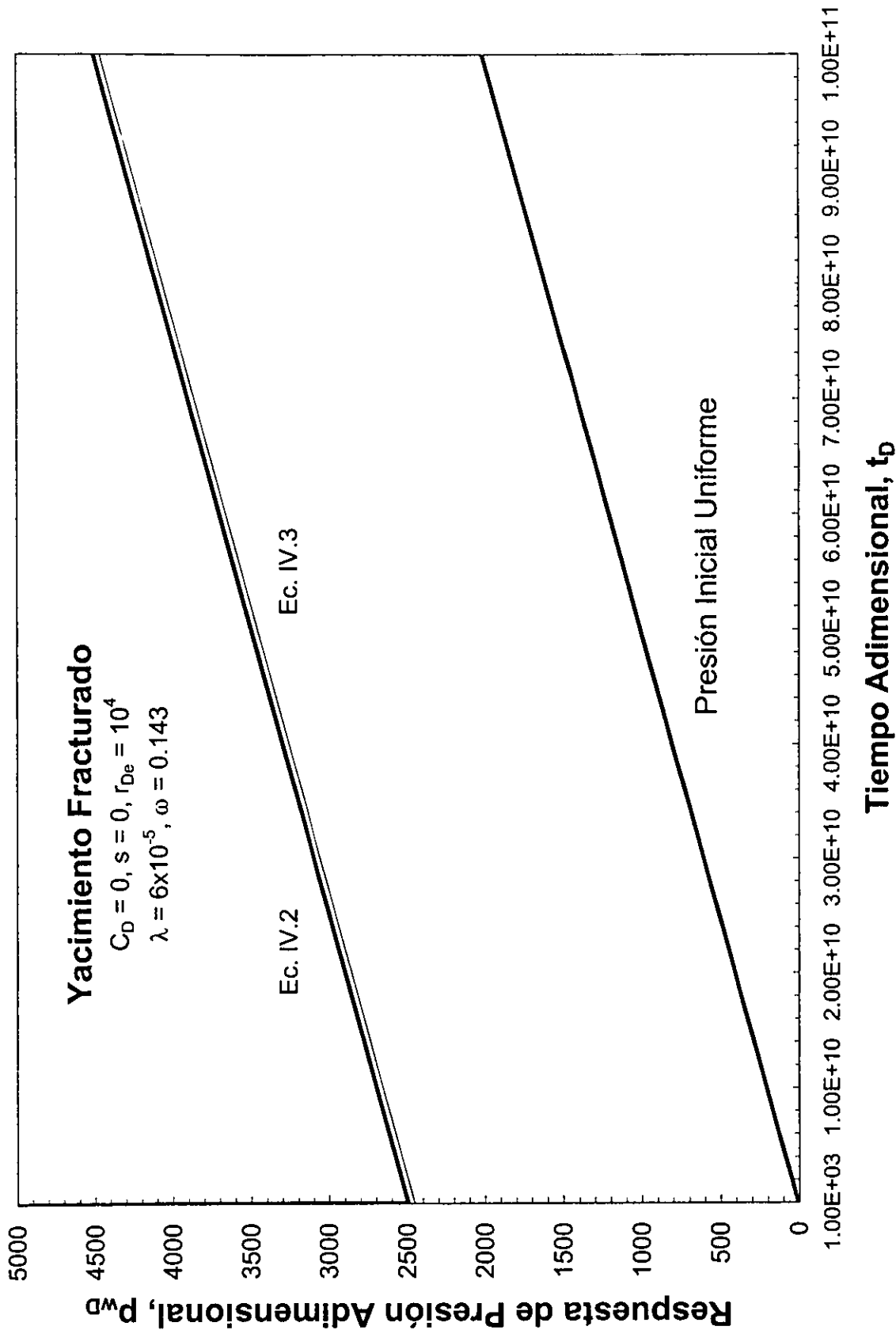


Fig. IV.16. Influencia del perfil de distribución Inicial. Ecs. IV.2-IV.3, en la respuesta de presión para un decremento.

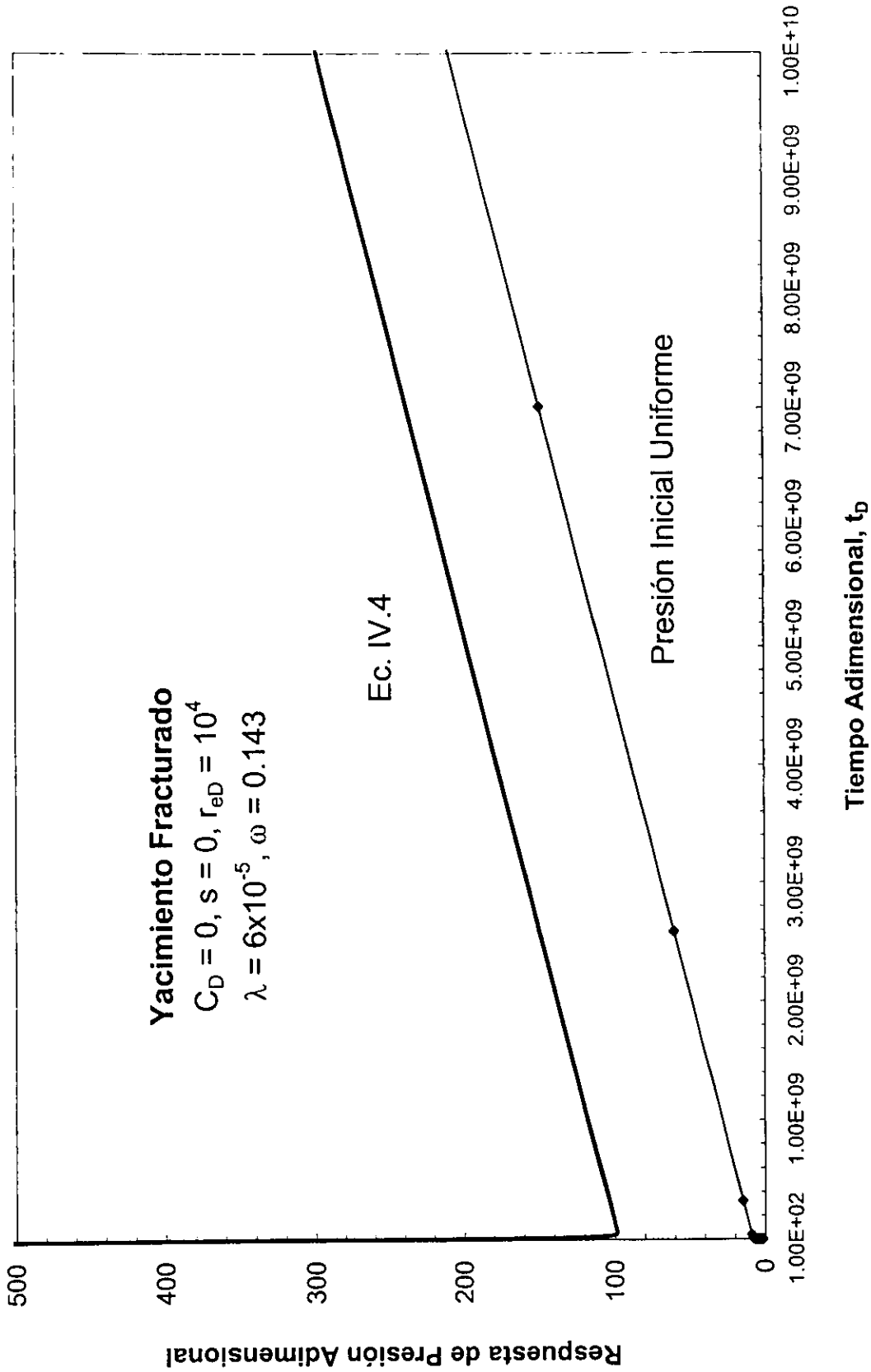


Fig. IV.17. Influencia del perfil de distribución Inicial. Ec. IV.4, en la respuesta de presión para un decremento. Sistemas Naturalmente Fracturados.

A continuación se presentará una reflexión con relación al caso de pruebas de interferencia. Como es bien sabido, las pruebas de interferencia difieren de las pruebas convencionales de incremento y decremento en que en dichas pruebas se emplea un pozo, mientras que en las de interferencia se usa más de un solo pozo. Uno de ellos (pozo activo) produce mientras que en el otro (pozo de observación) se monitorean los cambios en la presión causados por la operación del primero. La ventaja de las pruebas de interferencia radica en que un área mucho mayor del yacimiento se estudia, proporcionando valores estimados de las propiedades del yacimiento entre los pozos. Además, las pruebas de interferencia son poco susceptibles a los factores que complican una prueba de incremento o de decremento, como los son el factor de daño y el coeficiente de almacenamiento del pozo. Aunque una prueba de interferencia emplea el mismo modelo de flujo radial como si fuera un solo pozo, una diferencia surge del hecho relacionado con el efecto de la distancia radial a la cual la presión es medida. El comportamiento supuesto de la presión para un yacimiento infinito homogéneo obedece el siguiente comportamiento de la función integral exponencial:

$$p_D = -\frac{1}{2} E_i \left(-\frac{r_D^2}{4t_D} \right) \quad \text{IV.12}$$

en donde para $r_D = 1$ (en el pozo) sigue un comportamiento que es muy cercano al $\log(t)$. Sin embargo, en una prueba de interferencia r_D puede ser grande, dando origen a valores de t_D/r_D^2 que serán pequeños. En la presente tesis se muestra el efecto que tiene la distribución inicial de presión no-uniforme al considerar un pozo de observación colocado en un yacimiento circular con un radio exterior de 5000 pies a una distancia de 3967.7 pies. Este comportamiento de presión se muestra en la figura IV.18. En esta figura se presenta la distribución de presión dada por la integral exponencial (considerando la ec. IV.12), que es el caso con el que se trabaja normalmente, mientras que los símbolos indican la distribución de presión que se tiene si se considera una historia de producción previa dada por las ecuaciones IV.1-IV.4 a la distancia de 3967.7 pies. Se puede apreciar

que para los casos de las ecuaciones IV.2 y IV.3 se presentan mayores diferencias de presión con respecto al hecho de considerar la integral exponencial en el pozo de observación a 3967.7 pies. Inclusive se observa que antes del periodo de flujo dominado por efectos de frontera se tiene una caída de presión para todos los casos, aunque en esta gráfica debido a efectos visuales de la escala en la que se presenta, sólo se puede apreciar de manera notable para los casos IV.2 y IV.3.

Con el fin de mostrar este efecto de la distribución de presión no-uniforme para las pruebas de interferencia, se obtuvo la función de primera derivada que se muestra en la figura IV.19. En ella se acentúan más estas variaciones existentes en la distribución de presión no-uniforme en el yacimiento. Al mostrar estas gráficas se estaría observando que la influencia de la distribución de presión no-uniforme afecta la estimación de la presión promedio en un área de drene del pozo en particular.

IV.4. Influencia de la distribución inicial de presión no-uniforme en una prueba real (análisis de una prueba real considerando la existencia de una distribución inicial no-uniforme)

Hasta el momento todas las pruebas de presión analizadas en el presente trabajo corresponden a datos sintéticos. Uno de los objetivos principales de la presente tesis y con el fin de validar las soluciones analíticas al problema y la aplicación del método de inversión empleado, es el de analizar una prueba de presión con datos de campo reales. Para lograr este objetivo se planteó el análisis de la prueba de presión 19 del libro de Horne (1998). Esta es una prueba de incremento seguida por un largo periodo de producción. El periodo de producción fue prolongado, y se desconoce su duración, así que la prueba se analizará mediante el uso de la ecuación IV.7. En el análisis de datos sintéticos se obtuvo muy buena correlación entre el perfil de distribución de presión al momento del cierre y el obtenido de aplicar el método numérico de Backus y Gilbert (1968). Esta prueba según lo reportado por Horne (1998), representa una respuesta de presión “ambigua”, debido a que puede ser ajustada empleando varios modelos. Es importante recordar que todos los modelos disponibles en la literatura hasta la fecha

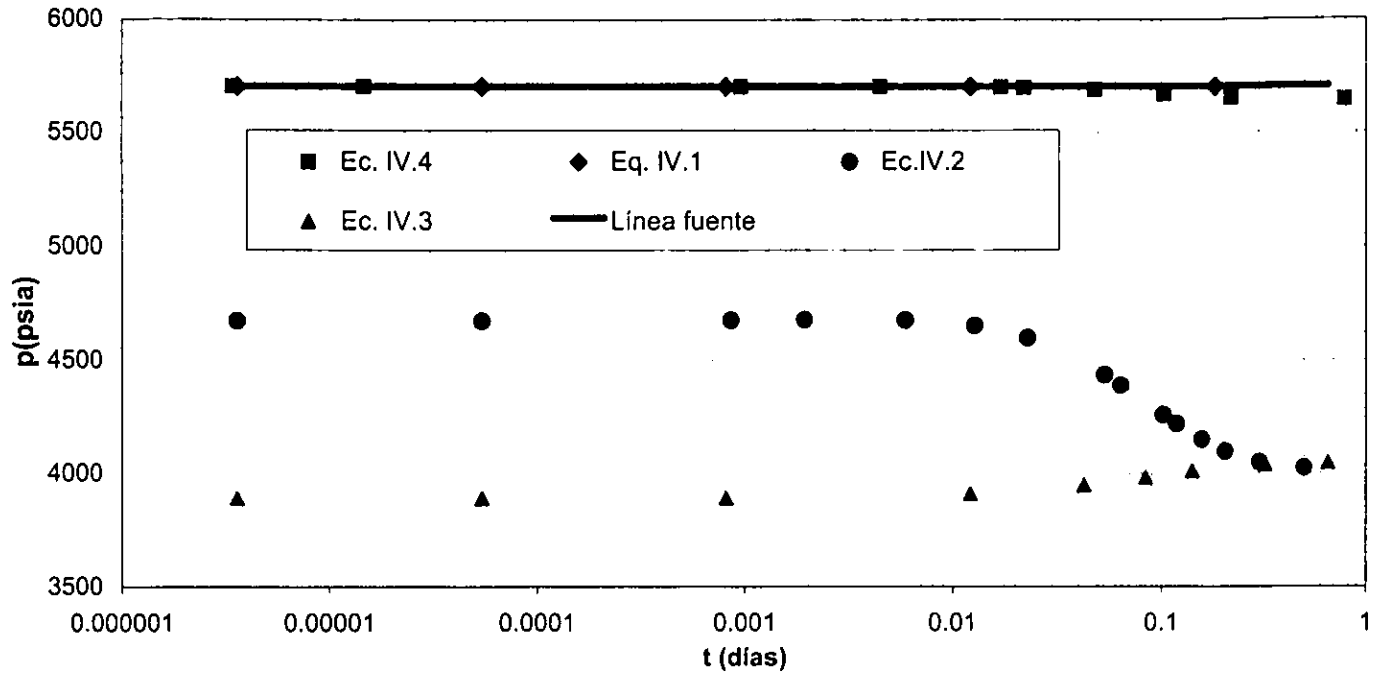


Fig. IV.18. Influencia del Perfil Inicial no-Uniforme en Pruebas de Interferencia $r = 3967.7$ pies

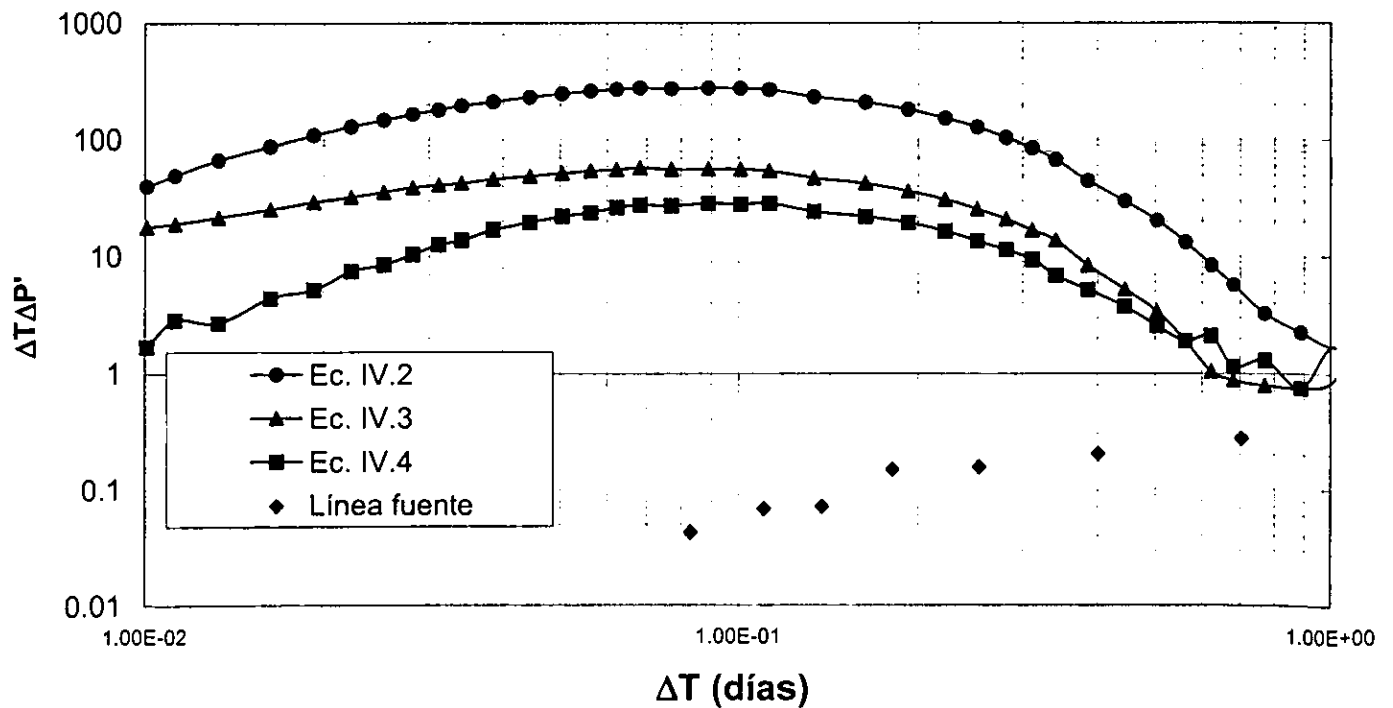


Fig. IV.19. Función de Primera Derivada para las Pruebas de Interferencia

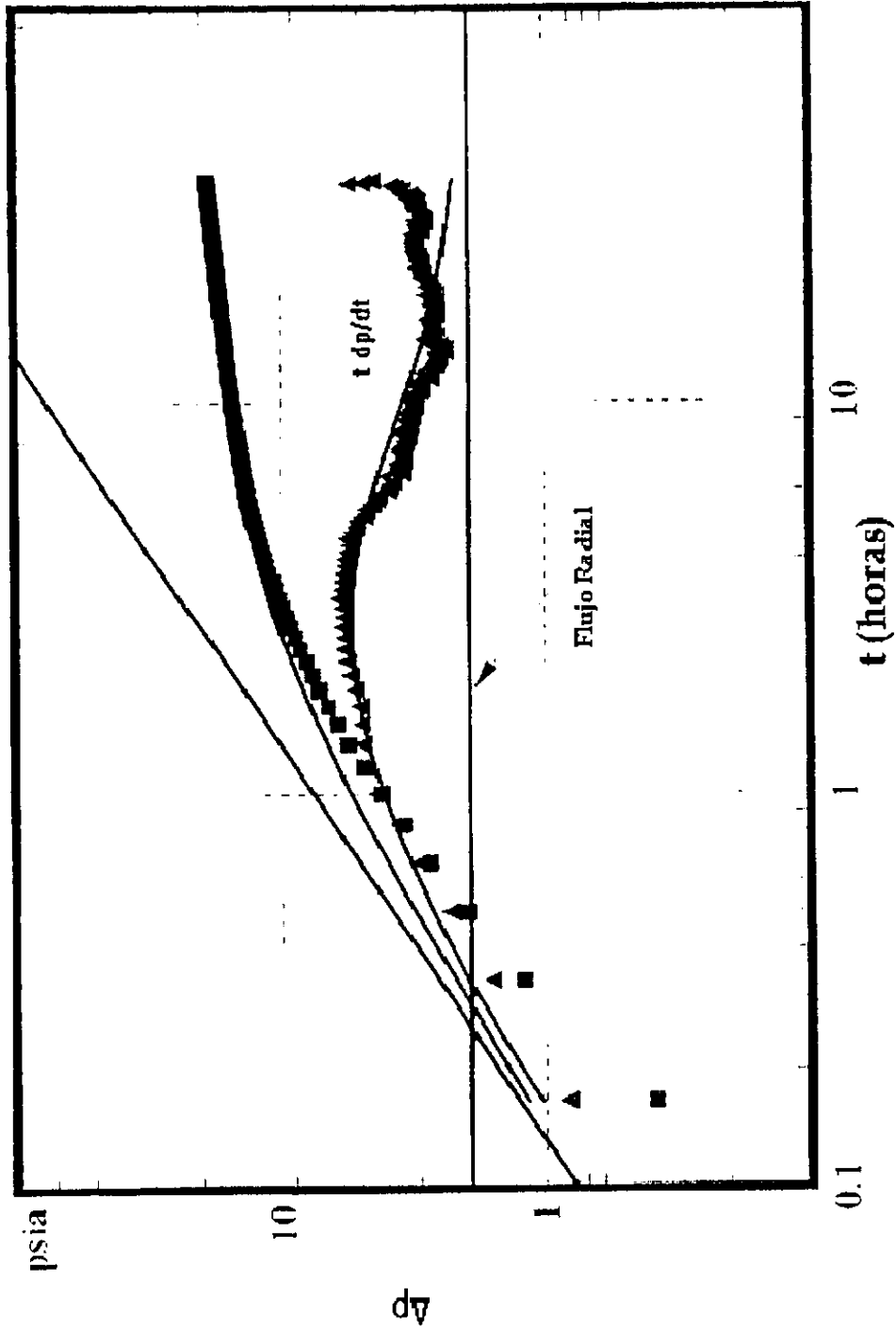


Fig. IV. 20. Prueba 19. Libro de Horne (1998). Interpretación ambigua.

consideran una distribución inicial de presión uniforme en el yacimiento, aquí se va a analizar considerando el efecto de la distribución de presión no-uniforme. En la figura IV.20 se muestran los datos de presión contra tiempo para esta prueba, así como la función de primera derivada. Como se puede observar el efecto de almacenamiento se hace presente hasta aproximadamente un tiempo de 5 horas, por lo que para esta prueba se considerarán valores de tiempo superiores a 5 horas con sus correspondientes valores de presión.

Tal como se mencionó en párrafos previos, los datos de presión reales presentan ruido que afecta los datos de presión y por lo tanto el kernel implícito en la ecuación integral a resolver. Para evitar al máximo que estos datos afecten la solución numérica de la ecuación integral de Fredholm de primera clase, se filtraron los datos de presión según lo propuesto por González-Tamez y Camacho-Velázquez (1999). Esto se pensó adecuado en base a que en los primeros intentos de aplicar el método de Backus y Gilbert para solucionar el problema se tenían grandes oscilaciones en los resultados; es decir valores grandes y negativos para puntos correspondientes a posiciones radiales muy cercanas. Una vez que se filtraron los datos de presión se procedió a aplicar el algoritmo de BG y a obtener las distribuciones de presión que se muestran en las figuras IV.21 y IV.22. En ellas se puede observar que el perfil de distribución de presión es una función decreciente de la posición radial en ambos casos. Es decir que en términos de presiones reales (en psia por ejemplo) estas distribuciones serían funciones crecientes de la posición radial y correspondería a el perfil de presión al momento del cierre. Como se sabe, un yacimiento es un sistema físico que tiene memoria, por lo tanto este perfil afecta la respuesta de presión.

El perfil correspondiente a la figura IV.21 se obtuvo al considerar valores de tiempo comprendidos en el rango un poco después al término del periodo de flujo dominado por almacenamiento (caso a), mientras que el correspondiente a la figura IV.22 (caso b) se determinó con valores comprendidos entre 7 horas y 27 horas aproximadamente, debido a

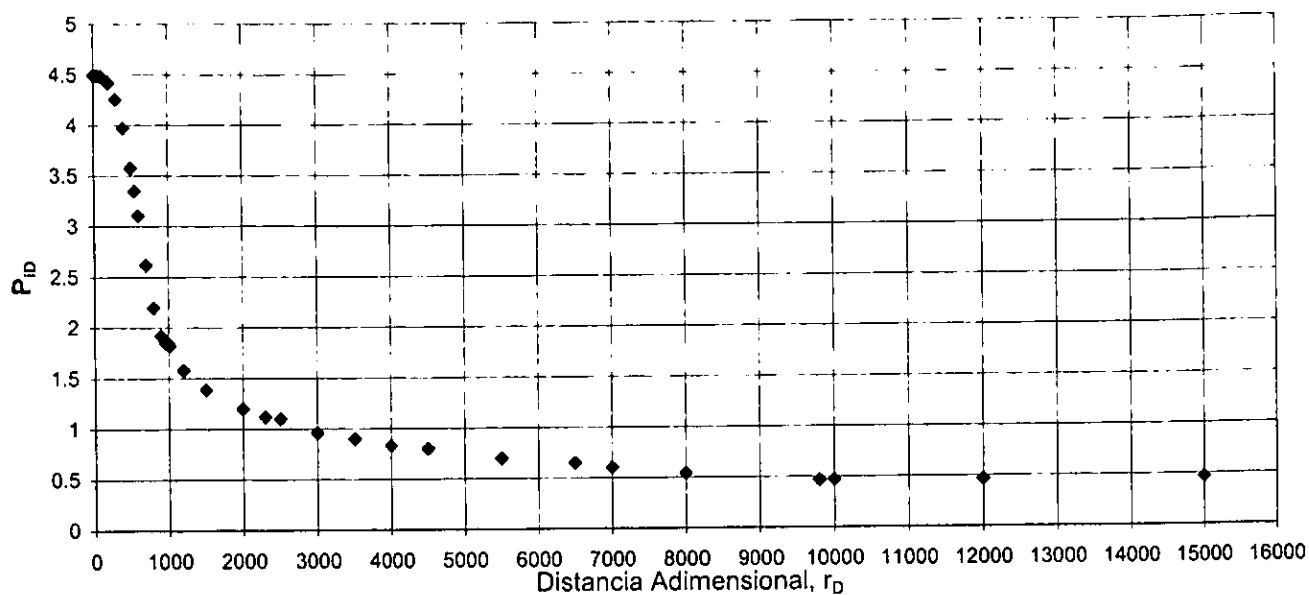


Fig. IV.21. Función de distribución no-Uniforme. Prueba 19 (Horne), caso a

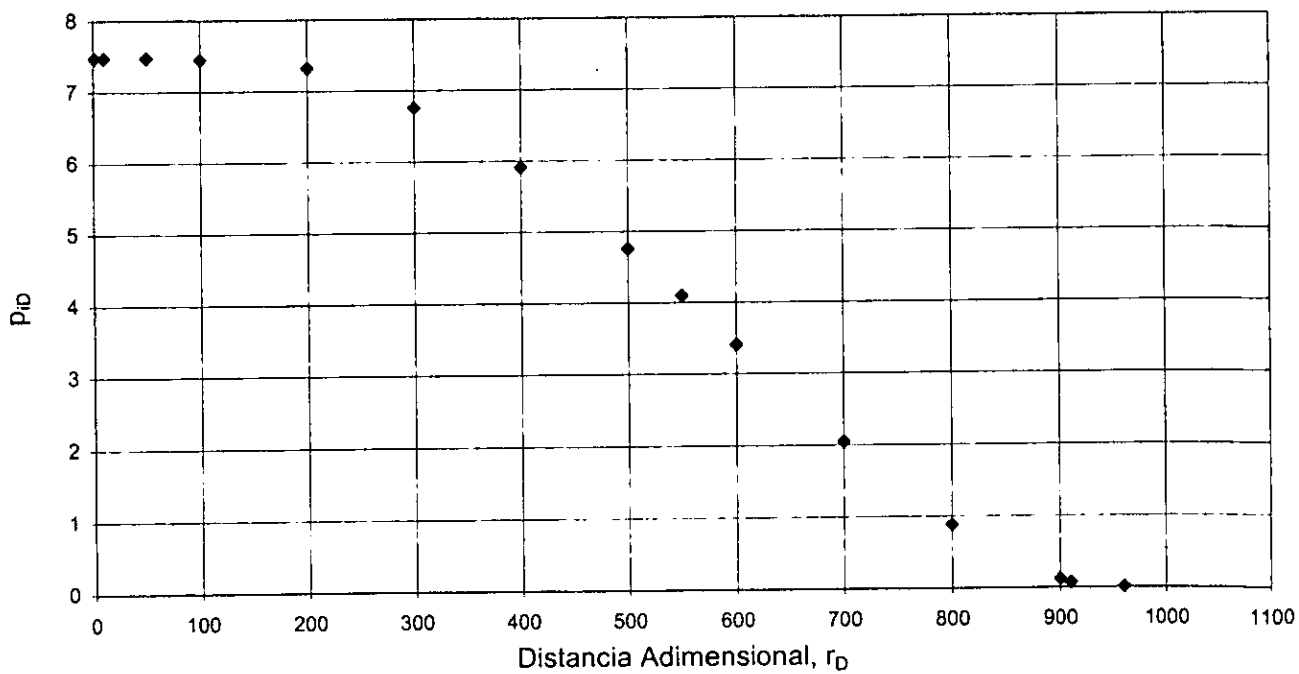


Fig. IV.22. Función de Distribución de Presión no-Uniforme. Prueba 19 (Horne), caso b

que como se observa en la función de primera derivada mostrada en la figura IV.20 a partir de 29 horas se aprecia una forma rara de la función derivada que probablemente sea debido a la presencia de alguna heterogeneidad en el yacimiento. En ambas figuras (IV.21 y IV.22) se aprecia una forma decreciente de presión con respecto a la posición radial. En base a esta distribución inicial de presión no-uniforme, es posible obtener la presión promedio asociada a un área de drene del pozo.

Se sabe por definición que la presión promedio es:

$$\bar{p} = \frac{\int_{r_w}^{r_e} p dV}{\int_{r_w}^{r_e} dV} \tag{IV.13}$$

y también que $dV = 2\pi r h \phi dr$, por lo tanto la ecuación IV.13 se puede expresar de la siguiente forma:

$$\bar{p} = \frac{2}{(r_e^2 - r_w^2)} \int_{r_w}^{r_e} p r dr \tag{IV.14}$$

de esta manera es posible estimar la presión media \bar{p} asociada a un área de drene de un pozo. En base a la distribución de presión no-uniforme mostrada en las figuras IV.21 y IV.22 se obtuvieron los valores de presión media a una distancia de 410 pies correspondiente a una distancia adimensional de $r_D = 1000$. Según información proporcionada en el libro de Horne (1998), el valor de la presión inicial es de 1680 psia.

En base a la figura	Distancia radial	\bar{p} (psia)
IV.21	410 ft ($r_D = 1000$)	1670.84
IV.22	410 ft ($r_D = 1000$)	1667.69

Tabla IV.2. Determinación de la presión media \bar{p} , considerando influencia de la distribución inicial de presión no-uniforme en una prueba real.

Capítulo V

CONCLUSIONES

Una hipótesis clave que se aplica para el análisis de pruebas de presión, es el de considerar que existe una distribución inicial de presión uniforme en el yacimiento. Este trabajo presenta un enfoque distinto en este aspecto, es decir se considera la influencia de una distribución inicial de presión arbitraria en el yacimiento en el análisis de pruebas de presión para sistemas homogéneos y con doble porosidad.

En base a los resultados presentados en este trabajo se concluye que:

- La distribución de presión inicial no-uniforme afecta la forma de los datos, de tal forma que dichos datos no se podrían analizar por medio de los modelos convencionales para yacimientos (con distribución inicial uniforme).
- La determinación del perfil inicial de presión por medio del método de Backus y Gilbert, es influenciada por la forma del perfil de presión inicial y el kernel implícito en la ecuación integral, es decir por la presencia de heterogeneidades.
- La determinación de la distribución de presión inicial, al aplicar el método de Backus y Gilbert sufre un deterioro en presencia de ruido.

- Durante el periodo de flujo pseudoestacionario, se observa una línea recta en escala cartesiana para el caso en estudio, pero con una diferencia en la ordenada al origen. Se determinó la expresión para calcular ese pseudodaño por el efecto de la distribución inicial de presión no uniforme.
- De acuerdo a las gráficas presentadas, en relación al pseudodaño por influencia de la distribución de presión no-uniforme, se puede afirmar que en el caso de una prueba de límite de yacimiento, cuyo objetivo es alcanzar condiciones de flujo pseudoestacionario; es decir la determinación del volumen poroso V_p ; no se tendrán errores en cuanto al cálculo de este parámetro, ya que el pseudodaño afecta a la ordenada al origen produciendo un desplazamiento de la recta. Por lo tanto la pendiente será la misma que si se obtiene considerando la distribución de presión uniforme. Este es un resultado importante ya que las pruebas de límite mínimo o económico, tienen como objetivo confirmar la existencia de un volumen mínimo de hidrocarburos, necesario para la explotación económica del yacimiento.
- Para el caso de pruebas de incremento que siguen a un decremento de duración desconocida, como el caso de la prueba con datos reales analizada aquí, se puede obtener un parámetro importante que es la presión promedio en un área de drene de un pozo, esto a partir de la aplicación del algoritmo de Backus y Gilbert determinando la función de distribución no-uniforme. Esto implica que si se emplearan los métodos convencionales para la estimación de la presión promedio, como los de Horner y MBH se tendría que contar con el valor del tiempo de producción, el cual no necesariamente se conoce.

NOMENCLATURA

- a_j, b = parámetros de la función de distribución de presión inicial
 B_i = doble Integración de los datos del kernel
 C = coeficiente de almacenamiento adimensional
 h = espesor del yacimiento
 $I_\nu(x)$ = función modificada de Bessel de primera especie y de orden ν
 k = permeabilidad, md
 $K_\nu(x)$ = función modificada de Bessel de segunda especie y de orden ν
 p_D = presión adimensional
 q = gasto de producción, STB/D
 r_D = distancia radial adimensional
 s = factor de daño adimensional
 t_D = tiempo adimensional
 u = variable de Laplace
 $W_i(r)$ = Integral de los datos del kernel
 ϕ = porosidad, adimensional
 γ = parámetro característico de suavizado del modelo con datos inexactos
 λ = parámetro de flujo de interporosidad para estado pseudoestacionario
 μ = viscosidad cp
 σ = desviación estándar
 ω = relación de almacenamiento en el sistema de fracturas

Subíndices

- D = dimensionalidad
 f = fractura
 i = inicial
 m = matriz
 w = pozo

REFERENCIAS

- Abramowitz, M., y Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards (1964).
- Agarwal, R.G., Al-Hussainy, R., y Ramey, H.J., Jr.: "An Investigation of Wellbore Storage and Skin Effect in Unsteady Liquid Flow-I. Analytical Treatment", *Soc. Pet. Eng.* (September 1970) 279-290.
- Backus GE, y Gilbert J.F., 1968 "The resolving power of gross earth data", *Geophys. J.R. Astron. Soc.* 16. 169-205
- Blasingame, T.A., Johnston, J.L., y Lee, W.J.: "Type curve Analisis Using the Pressure Integral Method," SPE 18799 (1989).
- Beck, J., Blackwell, B., y St. Clair, C., *Inverse Heat Conduction*, Wiley-Interscience Publication", 1977
- Boyce, William E. y DiPrima, Richard, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Editorial Limusa., 1993
- Camacho, V., R.G.: *Well Performance Under Solution Gas Drive*, Ph.D. Dissertation, University of Tulsa, Tulsa, Oklahoma (1987)

- Camacho-V., R.G., y Raghavan, R.: "Performance of Wells in Solution-Gas-Drive Reservoirs," *SPEFE* (December 1989) 611-620.
- Camacho, V., R.G. y Raghavan, R.: "Well-Test Analisis in Solution-Gas-Drive Systems for Fractured Reservoirs," *SPEFE* (March 1994) 15-12.
- Carslaw, H.S., y Jaeger, J.C.: *Conduction of Heat in Solids*, 2nd Edition Clarendon Press, Oxford, (1959).
- Chang, Y.P., Kang, C.S. y Chen, D.J., *Int. Journal of Heat and Mass Transfer* 16, 1905-1918, 1973.
- Chow, V.T.: "On the determination of Transmissibility and Storage Coefficients from Pumping Test Data," *Trans. Am. Geophys. Un.* 33 (1952) 397-404.
- Earlougher, R.C., Jr.: *Advances in Well Test Analysis*, Monografía 5, SPE, Dallas, Texas, 1977
- Engl, H., *Inverse Problems*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 1995
- Feitosa, G. et al.: "Determination of Permeability Distribution From Well-Test Pressure Data," *JPT* (July 1994) 607
- Finsterle, S. y Pruess, K.: "Solving the estimation-identification problem in two-phase flow modeling," *WRR*, Vol. 31, No.4 (April 1995) 913

González-T., F. y Camacho-V., R.G.: "Truncation De-noising in Transient Pressure Tests," SPE 56422, presentado en SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas, 3-6 de Octubre de 1999.

Horne, R. N.: *Modern Well Test Analysis*, Petroway Inc., Palo Alto, California, (1998).

Kuo, M.C.T.: "Predicting Pressure Distribution in Irregularly Shaped Bounded Reservoirs," SPERE (February 1990) 87.

Masters, Joseph I., *Journal of Chemical Physics*, Vol. 23, 1865-1874, 1955.

Matthews, C.S., Brons, F. y Hazebroek, P.: "A Method for Determination of Average Pressure in a Bounded Reservoir", *Trans. AIME*, 1954, 201.

Miller, C.C., Dyes, A.B. y Hutchinson, C.A., Jr.: "The Estimation of Permeability and Reservoir Pressure from Bottom-Hole Pressure Build-Up Characteristics", *Trans. AIME*, 1950, 189.

Muskat, M.: "Use of Data on the Buildup of Bottom-Hole Pressures," *Trans., AIME* (1937) 123, 44-48.

Odeh, A.S. y Jones, L.G.: "Pressure Drawdown Analysis, Variable Rate Case", *J. Pet. Tech.*, Agosto, 1965.

Oliver, D.S.: "The Averaging Process in Permeability Estimation From Well-Test Data," SPEFE (Sept. 1990) 319.

Oliver, D.S.: "Estimation of Radial Permeability Distribution From Well-Data," SPEFE (Dec.1992) 290.

Ozisik, M.N., *Boundary Value Problems of Heat conduction*, International Textbook, Scranton, Pa, 1968; Dover, New York, 1989.

Ozkan, E. y Raghavan R.S.: "Some Strategies to Apply the Stehfest Algorithm for a Tabulated Set of Numbers," SPEJ (September 1997) 363

Porter, D., y Stirling, D., *Integral equations*, Cambridge Texts in Applied Mathematics., 1990.

Raghavan, R.: *Well Test Analysis*, Prentice Hall Petroleum Engineering Series, Englewood Cliffs, New Jersey, (1993) 59, 502-505.

Sampayo-Trujillo, Antonio y Camacho-Velázquez, Rodolfo: "Influence of Nonuniform Initial Pressure Distribution in Well Test Data". International Petroleum Conference and Exhibition in Mexico (Feb. 2000), 59012.

Stehfest, H.: "Algorithm 368 Numerical Inversion of Laplace Transforms", Communications of the ACM (Jan. 1970) 47-49.

Tarantola, A., *Inverse Problem Theory*, Ed. Elsevier., 1987.

Theis, C.V.: "The Relationship between the Lowering of Piezometric Surface and the Rate and Duration of Discharge Using Ground-Water Storage," *Trans.* AUG (1935) 519

Tikhonov, A.N., *Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 151 (1963), 501-504, Soviet Math. Dokl. 4 (1963), 1035-1038.

van Everdingen, A.F., y Hurst, W.: "The application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs," *Trans. AIME* **186** (1949) 305-324

Warren , J.E. y Root, P.J.: "Behavior of Naturally Fractured Reservoirs," *SPEJ* (Sept. 1963) 245-55; *Trans. AIME*, **228**.

Wing, G.M., y Zahrt, J.D., *A primer on Integral Equations of the First Kind*, SIAM, Philadelphia, 1991.

Apéndice
A

ESTRATEGIA DE INVESTIGACIÓN
ESTRATEGIA DE INVESTIGACIÓN
ESTRATEGIA DE INVESTIGACIÓN

**SOLUCIÓN
YACIMIENTO INFINITO Y
HOMOGÉNEO**

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D}$$

$$a) P_D(r_D, 0) = p_{iD}(r_D), \quad 1 < r_D < \infty$$

$$b) \lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0$$

$$c) C_D \frac{dP_{wD}}{dt_D} - \left(\frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 1$$

$$d) P_{wD} = \left[P_D - s \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right]_{r_D=1}$$

Usando la Transformada de Laplace:

$$\frac{d^2 \bar{p}_D}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} - u\bar{p}_D + p_{iD}(r_D) = 0$$

si $\alpha = \sqrt{u}$, entonces :

$$\frac{d^2 \bar{p}_D}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{dp_D}{dr_D} - \alpha^2 \bar{p}_D + p_{iD}(r_D) = 0 \quad \text{A-2}$$

La solución del problema homogéneo es:

$$\bar{p}_{DH} = AI_o(\alpha r_D) + BK_o(\alpha r_D) = AI_o(\sqrt{u} r_D) + BK_o(\sqrt{u} r_D) \quad \text{A-3}$$

Por lo tanto la solución del problema no-homogéneo se obtiene como sigue:

Transformando las condiciones de frontera interna y externa:

$$C_D [u \bar{p}_{wD} - p_{wD}(0)] - \left(\frac{dp_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = \frac{1}{u} \quad \text{A-4}$$

$$\bar{p}_{wD} = \left[\bar{p}_D - s \frac{dp_D}{dr_D} \right]_{r_D=1} \quad \text{A-5}$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{p}_D(r_D, u) = 0 \quad \text{A-6}$$

Substituyendo A-5 en A-4

$$C_D u \left[\bar{p}_D(1, u) - s \left(\frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} \right] - C_D \left[p_D(t_D = 0) - s \frac{dp_D}{dr_D} \right]_{r_D=1} - \left(\frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = \frac{1}{u} \quad \text{A-7}$$

usando la condición inicial en A-7,

$$C_D u \left[\bar{p}_D(1, u) - s \left(\frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} \right] - C_D [p_{iD}(1) - s p_{iD}'(1)] - \left(\frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = \frac{1}{u} \quad \text{A-8}$$

Usando el método de Funciones de Green para resolver el problema:

$$L\bar{p}_D = \frac{d}{dr_D} \left(r_D \frac{dp_D}{dr_D} \right) - \alpha^2 \bar{p}_D = -r_D p_{iD}(r_D) \tag{A-9}$$

Integrando por partes A-9,

$$\int_1^\infty GL\bar{p}_D d\xi = \left[\xi \bar{p}_D G - p_D \xi G_\xi \right]_1^\infty + \int_1^\infty \left[\bar{p}_D (\xi G_\xi)_\xi - \alpha^2 G \xi \bar{p}_D \right] d\xi \tag{A-10}$$

Así, la Función de Green debe de satisfacer:

$$\begin{aligned} L^* &= (\xi G_\xi)_\xi - \alpha^2 G \xi = \delta(\xi - r_D) \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} G \xi &= 0, \quad [G_\xi + i(u)G]_{\xi=1} = 0 \\ i(u) &= \frac{C_D u}{-C_D u s - 1} \\ h(u) &= \frac{C_D [p_{iD}(1) - sp_{iD}'(1)] + \frac{1}{u}}{-C_D u s - 1} \end{aligned} \tag{A-11}$$

o bien dividiendo el intervalo en dos partes tal que: $L^*G=0$ en cada parte:

$$G(\xi, r_D) = \begin{cases} A_1 I_0(\alpha \xi) + B_1 K_0(\alpha \xi) & ; 1 \leq \xi < r_D \\ A_2 I_0(\alpha \xi) + B_2 K_0(\alpha \xi) & ; r_D < \xi \leq \infty \end{cases} \tag{A-12}$$

usando las condiciones de frontera y conociendo que :

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} I_0(\alpha \xi) = \infty ; \lim_{\xi \rightarrow \infty} K_0(\alpha \xi) = 0$$

Se tiene que:

$$A_2 = 0 \tag{A-13}$$

$$A_1 (\alpha I_0'(\alpha) + B_1 \alpha (-K_1(\alpha))) + i(u) (A_1 I_0(\alpha) + B_1 K_0(\alpha)) = 0 \tag{A-14}$$

Integrando la ecuación A-11, con los límites señalados:

$$\xi G_{\xi} \Big|_{r_D^-}^{r_D^+} - \alpha^2 \int_{r_D^-}^{r_D^+} \xi G d\xi = 1 \quad \text{A-15}$$

requiriendo la condición de continuidad:

$$G(r_D^-, r_D) = G(r_D^+, r_D) \quad \text{A-16}$$

$$\text{de A-15: } \xi G_{\xi} \Big|_{r_D^-}^{r_D^+} = 1 \quad \text{A-17}$$

usando A-12 en A-16 y A-17:

$$A_1 I_o(\alpha r_D) + B_1 K_o(\alpha r_D) = B_2 K_o(\alpha r_D) \quad \text{A-18}$$

$$-r_D [A_1 \alpha I_o'(\alpha r_D) + B_1 \alpha (-K_o(\alpha r_D))] - r_D B_2 \alpha K_1(\alpha r_D) = 1 \quad \text{A-19}$$

resolviendo en forma simultánea las 3 ecuaciones: para A_1 , B_1 , B_2 , se obtiene:

$$A_1 = \frac{-B_1 (i(u) K_o(\alpha) - \alpha K_1(\alpha))}{\alpha I_o'(\alpha) + i(u) I_o(\alpha)} = -B_1 \theta \quad \text{A-20}$$

usando A-20 en A-18 y A-19;

$$B_1 [K_o(\alpha r_D) - I_o(\alpha r_D) \theta] = B_2 K_o(\alpha r_D) \quad \text{A-21}$$

$$B_1 [-\alpha K_1(\alpha r_D) - \alpha I_o'(\alpha r_D) \theta] + B_2 \alpha K_1(\alpha r_D) = -\frac{1}{r_D} \quad \text{A-22}$$

de A-21 se obtiene:

$$B_2 = \frac{B_1 [K_o(\alpha r_D) - I_o(\alpha r_D) \theta]}{K_o(\alpha r_D)} \quad \text{A-23}$$

substituyendo en A-22:

$$B_1 = \frac{K_o(\alpha r_D)}{\theta \alpha r_D [I_1(\alpha r_D) K_o(\alpha r_D) + K_1(\alpha r_D) I_o(\alpha r_D)]} \quad \text{A-24}$$

de A-20 y A-23:

$$A_1 = -\frac{K_o(\alpha r_D)}{\alpha r_D [I_1(\alpha r_D) K_o(\alpha r_D) + K_1(\alpha r_D) I_o(\alpha r_D)]} \quad \text{A-25}$$

$$B_2 = \frac{K_o(\alpha r_D) - I_o(\alpha r_D) \theta}{\theta \alpha r_D [I_1(\alpha r_D) K_o(\alpha r_D) + K_1(\alpha r_D) I_o(\alpha r_D)]} \quad \text{A-26}$$

Así de A-10;

$$\bar{p}_D(u, r_D) = \int_1^\infty G(-\xi p_{iD}(\xi)) d\xi + h(u) G(1, r_D) \quad \text{A-27}$$

donde:

$$h(u) = \frac{C_D [p_{iD}(1) - s p_{iD}'(1)] + \frac{1}{u}}{-C_D u s - 1} \quad \text{A-28}$$

y

$$G(\xi, r_D) = \left\{ \begin{array}{ll} A_1 I_o(\alpha \xi) + B_1 K_o(\alpha \xi) & ; 1 \leq \xi \leq r_D \\ B_2 K_o(\alpha \xi) & ; r_D \leq \xi \leq \infty \end{array} \right\} \quad \text{A-29}$$

con A_1 , B_1 y B_2 dados por A-25, A-24 y A-26, respectivamente.

Usando A-27 en A-5:

$$\bar{p}_{wD}(u, r_D) = -\int_1^\infty G(\xi, 1) \xi p_{iD}(\xi) d\xi + h(u) G(1, 1) - s \left\{ -\int_1^\infty h(u) [G_{r_D}(1, r_D)]_{r_D=1}^\infty \xi p_{iD}(\xi) d\xi + \right\} \quad \text{A-30}$$

Si el almacenamiento y el daño son nulos, entonces:

$$g(u)=1/u, \quad h(u)=-1/u \quad \text{e} \quad i(u)=0, \quad \text{así de A-20:}$$

$$\theta = -\frac{K_1(\alpha)}{I_1(\alpha)} \tag{A-31}$$

por lo tanto usando A-24, A-25, A-26 y A-9 en A-30:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{1}{\alpha K_1(\alpha)} \left[\frac{K_0(\alpha)}{\alpha^2} + \int_1^\infty K_0(\alpha\xi)\xi p_{iD}(\xi) d\xi \right] \tag{A-32}$$

Cuando $p_{iD}(r_D)=0$ para toda r_D , distribución de presión uniforme con almacenamiento y daño no nulos:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{wD} = & \frac{-[I_0(\alpha)K_0(\alpha) + K_0(\alpha)K_1(\alpha)/\theta]}{u(C_Dsu + 1)\alpha[I_1(\alpha)K_0(\alpha) + K_1(\alpha)I_0(\alpha)]} + \\ & + \frac{s}{u(C_Dsu + 1)} \left\{ \frac{I_0(\alpha)\alpha K_1(\alpha) - K_0(\alpha)\alpha K_1(\alpha)/\theta}{\alpha[I_1(\alpha)K_0(\alpha) + K_1(\alpha)I_0(\alpha)]} + \frac{I_0(\alpha)}{\alpha} (-K_0(\alpha)) \left[r_D(I_1(\alpha r_D)K_0(\alpha r_D) + \right. \right. \\ & \left. \left. K_1(\alpha r_D)I_0(\alpha r_D)) \right]^{-1} \right\}_{r_D=1} + \frac{K_0(\alpha)}{\alpha\theta} K_0(\alpha) \left[r_D(I_1(\alpha r_D)K_0(\alpha r_D) + \right. \\ & \left. K_1(\alpha r_D)I_0(\alpha r_D)) \right]^{-1} \Big|_{r_D=1} \end{aligned} \tag{A-33}$$

donde:

$$\begin{aligned} & \left\{ r_D(I_1(\alpha r_D)K_0(\alpha r_D) + K_1(\alpha r_D)I_0(\alpha r_D)) \right\}^{-1} \Big|_{r_D=1} = \\ & = \frac{-I_0K_0 - K_1I_0 - \alpha I_0K_0 + I_1K_0 + \alpha I_1K_1 + K_0I_0\alpha + K_1I_0 - \alpha K_1I_1}{(I_1K_0 + K_1I_0)^2} = 0 \end{aligned} \tag{A-34}$$

substituyendo A-34 en A-33;

$$\bar{p}_{wD} = \frac{[I_0(\alpha)K_0(\alpha) + K_0(\alpha)K_0(\alpha)/\theta]}{u(C_Dsu + 1)\alpha[I_1(\alpha)K_0(\alpha) + K_1(\alpha)I_0(\alpha)]} + \frac{s}{u(C_Dsu + 1)} \left\{ \frac{I_0(\alpha)K_1(\alpha) - K_0(\alpha)K_1(\alpha)/\theta}{[I_1(\alpha)K_0(\alpha) + K_1(\alpha)I_0(\alpha)]} \right\} = \frac{\left[\frac{K_0(\alpha)}{\alpha} + sK_1(\alpha) \right] \left[I_0(\alpha) - \frac{K_0(\alpha)}{\theta} \right]}{u(C_Dsu + 1)[I_1(\alpha)K_0(\alpha) + K_1(\alpha)I_0(\alpha)]}$$

A-35

$$\theta = \frac{-\frac{C_Du}{-C_Dus - 1} K_0(\alpha) - \alpha K_1(\alpha)}{\alpha I_1(\alpha) + \frac{C_Du}{-C_Dus - 1} I_0(\alpha)}$$

A-36

substituyendo A-36 en A-35 y $\alpha=u^{1/2}$:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{K_0(\sqrt{u}) + s\sqrt{u}K_1(\sqrt{u})}{u[C_Du(K_0(\sqrt{u}) + s\sqrt{u}K_1(\sqrt{u})) + \sqrt{u}K_1(\sqrt{u})]}$$

A-37

la cual es la solución para $p_{iD}(r_D)=0$ para toda r_D , dada por Agarwal y colaboradores (1970).

Cuando el almacenamiento es nulo y la distribución de presión inicial no es nula, se tiene:

$$\theta = -\frac{K_1(\alpha)}{I_1(\alpha)}$$

A-38

de la ecuación A-30,

$$\bar{p}_{wD} = \left\{ -B_2 \int_1^\infty K_0(\alpha\xi) \xi p_{iD}(\xi) d\xi \right\}_{r_D=1} - \left\{ \frac{A_1 I_0(\alpha) + B_1 K_0(\alpha)}{u} \right\}_{r_D=1} - s \left\{ - \int_1^\infty \frac{\partial B_2}{\partial r_D} K_0(\alpha\xi) \xi p_{iD}(\xi) d\xi - \frac{1}{u} \left[I_0(\alpha) \frac{\partial A_1}{\partial r_D} + K_0(\alpha) \frac{\partial B_1}{\partial r_D} \right] \right\}_{r_D=1}$$

A-39

considerando A-25,

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = \left[-\frac{K_0(\alpha r_D)}{\alpha} \left\{ [r_D (I_1(\alpha r_D) K_0(\alpha r_D) + K_1(\alpha r_D) I_0(\alpha r_D))]^{-1} \right\}' \right]_{r_D=1} + \frac{K_1(\alpha)}{I_1(\alpha)K_0(\alpha) + K_1(\alpha)I_0(\alpha)}$$

A-40

Substituyendo A-34 en A-40:

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial r_D}\right)_{r_D=1} = \frac{K_1(\alpha)}{I_1(\alpha)K_0(\alpha) + K_1(\alpha)I_0(\alpha)} \quad \text{A-41}$$

considerando A-24 y A-41 (en base a A-38):

$$\left(\frac{\partial B_1}{\partial r_D}\right)_{r_D=1} = \frac{I_1(\alpha)}{I_1(\alpha)K_0(\alpha) + K_1(\alpha)I_0(\alpha)} \quad \text{A-42}$$

considerando A-26 y A-41:

$$\left(\frac{\partial B_2}{\partial r_D}\right)_{r_D=1} = \frac{-K_1(\alpha) + K_1(\alpha)}{I_1(\alpha)K_0(\alpha) + K_1(\alpha)I_0(\alpha)} = 0 \quad \text{A-43}$$

Substituyendo A-41, A-42, A-43 y A-24, A-25, A-26 en A-39:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{1}{\sqrt{u}K_1(\sqrt{u})} \left[\int_1^{\infty} K_0(\sqrt{u}\xi) \xi p_{iD}(\xi) d\xi + \frac{K_0(\sqrt{u})}{u^{\frac{3}{2}}K_1(\sqrt{u})} + \frac{s}{u} \right] \quad \text{A-44}$$

CASOS ESPECIALES:

Si $p_{iD}(\xi)=\text{constante}$, entonces:

$$\bar{p}_{wD} = \frac{p_{iD}}{u} + \frac{K_0(\sqrt{u})}{u^{\frac{3}{2}}K_1(\sqrt{u})} + \frac{s}{u} \quad \text{A-45}$$

Para un incremento que sigue a un decremento de duración desconocida

La condición de frontera interna es:

$$C_D \frac{dp_{wD}}{dt_D} - \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D}\right)_{r_D=1} = 0 \quad \text{A-46}$$

siguiendo la misma derivación que para el caso de un yacimiento homogéneo-Infinito

$$\frac{d^2 \bar{p}_D}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{dp_D}{dr_D} - up_D + p_{iD}(r_D) = 0 \quad \text{A-47}$$

transformando A-46 y considerando: $p_{wD} = \bar{p}_D - s \left(\frac{dp_D}{dr_D} \right)_{r_D=1}$

$$C_D u \left[\bar{p}_D(1, u) - s \left(\frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} \right] - C_D [p_{iD}(1) - sp_{iD}] - \left(\frac{dp_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = 0 \quad \text{A-48}$$

$$\bar{p}_D(1, u) C_D u + \left(\frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} [-C_D u s - 1] = C_D [p_{iD}(1) - sp_{iD}] = \tilde{g}(u) \quad \text{A-49}$$

$$\left. \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right|_{r_D=1} = \frac{\tilde{g}(u) - \bar{p}_D|_{\xi=1} C_D u}{-C_D u s - 1} \quad \text{A-50}$$

Por lo tanto:

$$\tilde{h}(u) = \frac{C_D [p_{iD}(1) - sp_{iD}(1)]}{-C_D u s - 1} \quad \text{A-51}$$

La solución A-30 sigue siendo válida, y considerando despreciable el efecto de almacenamiento ($C_D=0$)

$$\bar{p}_{wD} = \int_1^\infty B_2 K_0(\alpha \xi) \xi p_{iD}(\xi) d\xi + s \int_1^\infty [G_{r_D}(\xi, r_D)]_{r_D=1} \xi p_{iD} d\xi \quad \text{A-52}$$

De la ecuación anterior se observa que lo que controla la respuesta de incremento cuando $C_D=0$, es el perfil al momento del cierre.

$$\bar{p}_{wD} = \int_1^\infty \frac{K_0(\sqrt{u} \xi) \xi p_{iD}}{\sqrt{u} K_1(\sqrt{u})} d\xi + s \int_1^\infty \frac{\partial B_2}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} K_0(\sqrt{u}) \xi p_{iD}(\xi) d\xi \quad \text{A-53}$$

Se observa que no hay dependencia del daño.

Ahora bien si se substituye A-27 en A-5

$$p_{wD} = - \left\{ \int_1^{r_D} (A_1 I_o(\alpha \xi) + B_1 K_o(\alpha \xi)) \xi p_{iD}(\xi) d\xi + \int_{r_D}^{\infty} B_2 K_o(\alpha \xi) \xi p_{iD}(\xi) d\xi \right\}_{r_D=1} +$$

$$+ \tilde{h}(u) [A_1 I_o(\alpha) + B_1 K_o(\alpha)]_{r_D=1} - s \left\{ - \frac{d}{dr_D} \left[\int_1^{r_D} (A_1 I_o(\alpha \xi) + B_1 K_o(\alpha \xi)) \xi p_{iD} d\xi + \int_{r_D}^{\infty} B_2 K_o(\alpha \xi) \xi p_{iD} d\xi \right]_{r_D=1} + \right.$$

$$\left. \tilde{h}(u) \frac{d}{dr_D} [A_1 I_o(\alpha) + B_1 K_o(\alpha)]_{r_D=1} \right\}$$

A-54

$$\bar{p}_{wD} = - \int_1^{\infty} B_2 K_o(\alpha \xi) p_{iD}(\xi) d\xi + \tilde{h}(u) [A_1 I_o(\alpha) + B_1 K_o(\alpha)]_{r_D=1} +$$

$$+ s \left\{ [A_1 I_o(\alpha r_D) + B_1 K_o(\alpha r_D)] r_D p_{iD}(r_D) + \int_1^{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} [(A_1 I_o(\alpha \xi) + B_1 K_o(\alpha \xi)) \xi p_{iD}(\xi)] d\xi - \right.$$

$$\left. - B_2 K_o(\alpha r_D) r_D p_{iD}(r_D) + \int_{r_D}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r_D} [B_2 K_o(\alpha \xi) \xi p_{iD}(\xi)] d\xi \right\}_{r_D=1} -$$

$$- s \tilde{h}(u) \frac{d}{dr_D} [A_1 I_o(\alpha) + B_1 K_o(\alpha)]_{r_D=1}$$

A-55

Si $C_D=0$, entonces: $\tilde{h}(u) = 0, i(u) = 0$, y $\theta = - \frac{K_1(\alpha)}{I_1(\alpha)}$.

Substituyendo A-24 a la A-26 y de la A-41 a la A-43 en la ecuación anterior:

$$\bar{p}_{wD} = \int_1^{\infty} \frac{K_o(\alpha \xi) \xi p_{iD}}{\alpha K_1(\alpha)} d\xi + \frac{s}{\alpha} \left\{ - \frac{K_o(\alpha)}{K_1(\alpha)} p_{iD}(1) + \frac{K_o(\alpha)}{K_1(\alpha)} p_{iD}(1) \right\}$$

A-56

dado que el segundo término de la ecuación anterior es cero, se tiene:

$$\bar{p}_{wD}(\Delta t_D) = \int_1^{\infty} \frac{K_o(\alpha \xi) \xi p_{iD}}{\alpha K_1(\alpha)} d\xi; \quad p_{wD}(\Delta t_D) = \left[\int_1^{\infty} L^{-1} \left[\frac{K_o(\alpha \xi)}{\alpha K_1(\alpha)} \right] \xi p_{iD}(\xi) d\xi \right]$$

A-57

Esto indica que lo único que controla la respuesta de presión es la distribución de presión inicial al momento del cierre (Camacho-Velázquez y Raghavan, 1989; Raghavan, 1993).

Para el caso en que $C_D \neq 0$:

$$\bar{p}_{wD} = - \left\{ \frac{[K_o(\alpha) - I_o(\alpha)\theta/\alpha - s[K_1(\alpha) + I_1(\alpha)\theta]]}{\theta[I_1(\alpha)K_o(\alpha) + K_1(\alpha)I_o(\alpha)]} \right\} \int K_o(\alpha\xi) \xi p_{iD}(\xi) d\xi - \bar{h}(u) \left\{ \frac{K_o(\alpha)[I_o(\alpha) - K_o(\alpha)/\theta] + sK_1(\alpha)[I_o(\alpha) - K_o(\alpha)/\theta]}{\alpha[I_1(\alpha)K_o(\alpha) + K_1(\alpha)I_o(\alpha)]} \right\} \quad \text{A-58}$$

Sistema con doble porosidad (formulación de Warren y Root, 1963)

Las ecuaciones de continuidad para el sistema de fracturas y bloques de matriz están dadas por:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right) = \omega \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} - \lambda(p_{mD} - p_{fD}) \quad \text{A-59}$$

$$(1 - \omega) \frac{\partial p_{mD}}{\partial t_D} = -\lambda(p_{mD} - p_{fD}) \quad \text{A-60}$$

con las condiciones iniciales:

$$p_{fD}(t_D = 0, r_D) = p_{ifD}(r_D) \quad \text{A-61}$$

$$p_{mD}(t_D = 0, r_D) = p_{imD}(r_D) \quad \text{A-62}$$

La transformada de Laplace de las ecuaciones A-59 y A-60 es como se muestra:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{fD}}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{p}_{fD}}{dr_D} - uf(u) \bar{p}_{fD} - g(r_D, u) = 0 \quad \text{A-63}$$

$$\text{con:} \quad f(u) = \{\lambda + \omega u(1 - \omega)\} \{\lambda + u(1 - \omega)\}^{-1} \quad \text{A-64}$$

y

$$g(\xi, u) = -\{\lambda[p_{ifD}(\xi)\omega + p_{imD}(\xi)(1-\omega)] + \omega u(1-\omega)p_{ifD}(\xi)\} \{\lambda + u(1-\omega)\}^{-1} \tag{A-65}$$

El mismo problema adjunto se obtiene para este caso con la función α dada por: $\sqrt{uf(u)}$.

Por lo tanto, se obtiene la misma solución que la ecuación A-29 con la función $g(\xi, u)$ en lugar de $-p_{iD}(\xi)$, y la misma función $h(u)$. Por lo tanto las ecuaciones obtenidas para la solución del sistema infinito y homogéneo siguen siendo válidas.

Las mismas condiciones de frontera interna y externa se aplicaron para el sistema de fracturas, de tal forma que durante el periodo de flujo transitorio, la respuesta de presión adimensional está dada por:

$$\bar{p}_{wD} = \int_1^\infty G(\xi, 1) \xi g(\xi, u) d\xi + h(u)G(1, 1) - s \tag{A-66}$$

$$\left\{ \int_1^\infty [G_{rD}(\xi, r_D)]_{r_D=1} \xi g(\xi, u) d\xi + h(u)[G_{rD}(1, r_D)]_{r_D=1} \right\}$$

Para el caso específico en que la distribución inicial de presión en la matriz sea igual a la de la fractura: $p_{iD}(r_D) = p_{imD}(r_D)$, entonces la ecuación A-63 se reduce a:

$$g(\xi, u) = -p_{ifD}(\xi)f(u) \tag{A-67}$$

que representa el caso en que el periodo de flujo homogéneo se alcanzó durante un periodo previo de flujo transitorio (Camacho y Raghavan, 1994).

Apéndice

B

SISTEMA CERRADO (YACIMIENTO HOMOGÉNEO)

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D}$$

$$a) P_D(r_D, 0) = p_{iD}(r_D), \quad 1 < r_D < r_{De}$$

$$b) \left. \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right|_{r_D=r_{De}} = 0$$

$$c) C_D \frac{dP_{wD}}{dt_D} - \left(\frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = 1$$

$$d) P_{wD} = \left[P_D - s \frac{\partial P_D}{\partial r_D} \right]_{r_D=1}$$

Empleando los métodos de Funciones de Green y Transforma de Laplace, de igual forma como se planteó en el Apéndice A. Considerando una frontera externa de no flujo, se obtiene el mismo problema adjunto con una condición de frontera externa dada por:

$$G_\xi(r_{De}, r_D) = 0 \tag{B-1}$$

La solución del problema adjunto para este caso está dada por:

$$G(\xi, r_D) = \begin{cases} A_1 I_0(\alpha\xi) + B_1 K_0(\alpha\xi); & 1 \leq \xi \leq r_D \\ A_2 I_0(\alpha\xi) + B_2 K_0(\alpha\xi); & r_D \leq \xi \leq r_{eD} \end{cases} \quad (B-2)$$

Donde A_1 , A_2 , B_1 , y B_2 están dadas por:

$$A_1 = -[K_1(\alpha r_{eD})I_0(\alpha r_D) + K_0(\alpha r_D)I_1(\alpha r_{eD})]\theta/(\alpha r_D) \\ \{[K_1(\alpha r_{eD}) + \theta I_1(\alpha r_{eD})][K_1(\alpha r_D)I_0(\alpha r_D) + K_0(\alpha r_D)I_1(\alpha r_D)]\}^{-1} \quad (B-3)$$

$$A_2 = K_1(\alpha r_{eD})[K_0(\alpha r_D) - I_0(\alpha r_D)\theta]/(\alpha r_D) \\ \{[K_1(\alpha r_{eD}) + \theta I_1(\alpha r_{eD})][K_1(\alpha r_D)I_0(\alpha r_D) + K_0(\alpha r_D)I_1(\alpha r_D)]\}^{-1} \quad (B-4)$$

$$B_1 = [K_1(\alpha r_{eD})I_0(\alpha r_D) + K_0(\alpha r_D)I_1(\alpha r_{eD})]/(\alpha r_D) \\ \{[K_1(\alpha r_{eD}) + \theta I_1(\alpha r_{eD})][K_1(\alpha r_D)I_0(\alpha r_D) + K_0(\alpha r_D)I_1(\alpha r_D)]\}^{-1} \quad (B-5)$$

$$B_2 = I_1(\alpha r_{eD})[K_0(\alpha r_D) - I_0(\alpha r_D)\theta]/(\alpha r_D) \\ \{[K_1(\alpha r_{eD}) + \theta I_1(\alpha r_{eD})][K_1(\alpha r_D)I_0(\alpha r_D) + K_0(\alpha r_D)I_1(\alpha r_D)]\}^{-1} \quad (B-6)$$

La solución para la presión adimensional está dada por:

$$\bar{p}_{wD} = - \int_1^{r_{eD}} G(\xi, 1) \xi p_{iD}(\xi) d\xi + h(u)G(1, 1) - s \\ \left\{ - \int_1^{r_{eD}} \left[G_{r_D}(\xi, r_D) \right]_{r_D=1} \xi p_{iD}(\xi) d\xi + h(u) \left[G_{r_D}(1, r_D) \right]_{r_D=1} \right\} \quad (B-7)$$

Substituyendo la Función de Green en la ecuación (B-7), para el caso de almacenamiento y daño mecánico nulos y producción a gasto constante, se obtiene:

$$\bar{p}_{wD} = - \int_1^{r_{eD}} (A_2 I_0(\alpha\xi) + B_2 K_0(\alpha\xi))_{r_D=1} \xi p_{iD}(\xi) d\xi - \\ - \frac{1}{u} [A_1 I_0(\alpha) + B_1 K_0(\alpha)]_{r_D=1} \quad (B-8)$$

la cual se reduce a la solución dada por van Everdingen y Hurst (1949) para el caso de $p_{iD}(r_D)=0$;

$$\bar{p}_{wD} = \frac{[K_1(\alpha r_{eD})I_0(\alpha) + I_1(\alpha r_{eD})K_0(\alpha)]/(u\alpha)}{[I_1(\alpha r_{eD})K_1(\alpha) - K_1(\alpha r_{eD})I_1(\alpha)]^{-1}} \quad (\text{B-9})$$

La aproximación para tiempos grandes de la ecuación (B-8) se puede obtener al despreciar los términos de orden $u^{3/2}$ y aproximando las funciones de Bessel tal como lo sugiere van Everdingen y Hurst (1949). Las aproximaciones para las funciones Bessel empleadas en el presente desarrollo son las siguientes:

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + O(x^4) \quad (\text{B-10})$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + O(x^5) \quad (\text{B-10})$$

$$K_0(x) = -\left(\ln \frac{x}{2} + \gamma\right) + \frac{x^2}{4} \left[1 - \left(\gamma + \ln \frac{x}{2}\right)\right] + O(x^4 \ln x) \quad (\text{B-11})$$

$$K_1(x) = \frac{1}{x} \left[1 + \frac{x^2}{2} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma - \frac{1}{2}\right)\right] + O(x^3 \ln x) \quad (\text{B-12})$$

obteniendo la expresión (B-13):

$$\bar{p}_{wD} \approx \frac{2}{\alpha^2 r_{eD}^2} \int_1^{r_{eD}} \xi \bar{p}_{iD}(\xi) d\xi + \frac{2}{\alpha^4 r_{eD}^2} + \frac{1}{\alpha^2} \left[\ln(r_{eD}) - \frac{3}{4} \right] + s \quad (\text{B-13})$$

Sistema con doble porosidad.

El mismo problema adjunto se obtiene para el caso de la función α dada por: $\sqrt{uf(u)}$. Por lo tanto, las ecuaciones (B-1) a (B-13) son válidas para el sistema de doble porosidad con la función $g(\xi, u)$ en lugar de: $-p_{iD}(\xi)$, y la misma función $h(u)$, la ecuación (A-28), con $p_{iD}(\xi)$.

*Apéndice**C*

***MÉTODO DE BACKUS Y GILBERT
(PROBLEMA INVERSO)***

Un problema inverso es aquel que surge de fenómenos físicos y que se plantea de la misma manera que un problema directo pero en forma invertida. Los problemas inversos corresponden a la determinación de las causas de los efectos observados.

El tipo de problema directo que se maneja frecuentemente, es aquel que consiste en determinar el efecto “y” de una causa “x” cuando un modelo matemático K es conocido: $Kx = y$. Para este tipo de problema matemático se considera que el operador K es conocido y continuo, por lo tanto existe un efecto único “y” para cada causa “x” y pequeños cambios en “x” traen como consecuencia pequeñas variaciones en la respuesta “y”. En el problema directo se considera la existencia, unicidad y estabilidad en la solución; sin embargo, en los problemas inversos ninguna de estas condiciones puede tomarse como garantía de la solución. Esto da origen al estudio y métodos de inversión matemáticos para obtener la solución óptima al problema.

Se dice que un problema inverso es mal comportado si la solución no es única o si no es una función continua de los datos, por ejemplo, si una perturbación arbitrariamente pequeña de los datos causa grandes variaciones en la solución. Este es el caso de los problemas inversos o retrógrados de calor, presentando un núcleo mal comportado (exponencialmente mal comportado, Engl, 1995) tal como el problema presentado en esta tesis.

Existen diversos métodos para solucionar este tipo de problemas, tales como la regularización de Tikonov (1963) y la descomposición en valores singulares. El método empleado en el presente trabajo fue el de Backus y Gilbert (1968). Este es un método alternativo a los clásicos mencionados en párrafos precedentes. El método de Backus y Gilbert (1968) considera la minimización de un criterio de optimalidad bajo ciertas restricciones.

La alternativa de Backus y Gilbert (1968) resulta particularmente conveniente aplicarla a ecuaciones integrales de primera clase (Chang y colaboradores, 1973), tales como:

$$p(t) = \int_1^{\infty} G(\xi, t) p_{iD}(\xi) d\xi \quad \text{C-1}$$

donde se conoce la respuesta $p(t)$ y se sabe que el kernel $G(\xi, t)$ es conocido y continuo donde lo que se desea conocer es la distribución $p_{iD}(\xi)$ que provocó la respuesta $p(t)$. Como se puede observar se trata de una ecuación integral de Fredholm de primera clase (Porter y Stirling, 1990).

Partiendo de lo establecido por Backus y Gilbert (1968), para problemas relacionados con la Geofísica y posteriormente extendido este planteamiento por Oliver (1992) al problema de la determinación radial de permeabilidades a partir de datos de presión, se muestra a continuación el desarrollo que se llevó a cabo para la estimación de la distribución inicial presión estudiada en el presente trabajo.

El objetivo principal de este desarrollo es el de estimar la función de distribución inicial de presión no-uniforme, $p_{iD}(\xi)$ que afecta a la respuesta de presión. Una manera es construir combinaciones lineales del kernel, G_i , tales que la suma sea una aproximación a la función Delta de Dirac es considerar c_1, \dots, c_N que sean constantes de tal forma que:

$$\sum_{i=1}^n c_i G_i(r) \approx \delta(r - r_o) \tag{C-2}$$

La combinación lineal resultante de los datos proporciona una estimación de la distribución inicial de presión no-uniforme en el yacimiento,

$$\begin{aligned} \langle F(r_o) \rangle &= \sum_{i=1}^n c_i p(t) \\ &= \int_1^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n c_i G_i(r) \right] p_{iD}(r) dr \\ &\approx \int_1^{\infty} [\delta(r - r_o)] p_{iD}(r) dr \\ &= p_{iD}(r_o) \end{aligned} \tag{C-3}$$

Procediendo de la manera en que Backus y Gilbert (1968) lo plantean, se puede construir una combinación lineal de los datos:

$$\begin{aligned} \langle p_{iD}(r_o) \rangle &= \sum_{i=1}^n c_i p_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i W_i(1) p_{iD}(1) + \sum_{i=1}^n c_i \int_1^{\infty} W_i(r) p_{iD}'(r) dr \end{aligned} \tag{C-4}$$

Las restricciones establecidas para este método son las siguientes (Backus y Gilbert, 1968):

$$\sum_{i=1}^n c_i w_{ik} + c_{n+1} w_k(1) = B_k(r_o) \tag{C-5}$$

$$\sum_{i=1}^n c_n w_k(1) = 1 \tag{C-6}$$

Para $k=1, n$ y $k=n+1$ respectivamente.

A la primera de estas restricciones establecidas en este problema se le conoce como la restricción de energía de la función de transferencia, mientras que a la segunda como la restricción unimodular. Estas restricciones se añaden con el fin de que el método de BG converja.

Los factores de peso para el método de Backus y Gilbert (1968) se calculan de la siguiente manera:

$$w_i(r) = \int_r^{\infty} G_i(r) dr \quad \text{C-7}$$

$$B_i(r_o) = \int_1^{r_o} w_i(r) dr \quad \text{C-8}$$

$$w_{ij}(r) = \int_1^{\infty} w_i(r) w_j(r) dr \quad \text{C-9}$$

si por ejemplo, $k=3, n=3$ el sistema a resolver quedará como sigue:

$$c_1 w_{11} + c_2 w_{21} + c_3 w_{31} + c_4 w_1(1) = B_1(r_o) \quad \text{C-10}$$

$$c_1 w_{12} + c_2 w_{22} + c_3 w_{32} + c_4 w_2(1) = B_2(r_o) \quad \text{C-11}$$

$$c_1 w_{13} + c_2 w_{23} + c_3 w_{33} + c_4 w_3(1) = B_3(r_o) \quad \text{C-12}$$

$$c_1 w(1) + c_2 w_2(1) + c_3 w_3(1) + 0 = 1 \quad \text{C-13}$$

En forma generalizada el sistema a resolver será:

$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} & w_{31} & \cdots & w_{n1} & w_1(1) \\ w_{12} & w_{22} & w_{32} & \cdots & w_{n2} & w_2(1) \\ w_{13} & w_{23} & w_{33} & \cdots & w_{n3} & w_3(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{1n} & \cdots & \cdots & \cdots & w_{nn} & w_n(1) \\ w_1(1) & \cdots & \cdots & \cdots & w_n(1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(r_0) \\ B_2(r_0) \\ B_3(r_0) \\ \vdots \\ B_n(r_0) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la solución del sistema anterior, encontrando los multiplicadores de Lagrange dados por los valores de c_i , nos ayudará a encontrar los valores de presión adimensional para cada una de las posiciones radiales estudiadas en el yacimiento.

El mal comportamiento del problema inverso o retrógrado de la ecuación de calor, desde el punto de vista físico está asociado directamente con la segunda ley de la termodinámica, la cual establece que el proceso de conversión de la energía térmica a trabajo es un proceso con pérdidas. En otras palabras esto indica que en un sistema termodinámico no se puede extraer más trabajo del suministrado a través del calor aplicado al sistema; es decir que es imposible que exista una transformación cuyo único resultado final fuese convertir en trabajo el calor extraído de una fuente que estuviese siempre a la misma temperatura.