



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

2000
FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

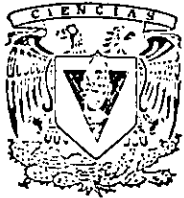
UN ESTUDIO COMBINATORIO DEL
HEXAGRAMA MISTICO DE PASCAL

T E S I S

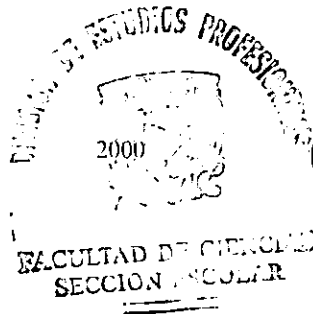
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A:
GABRIELA FRIAS VILLEGAS



DIRECTOR DE TESIS:
DR. RODOLFO SAN AGUSTIN CHI.



282327



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

UN ESTUDIO COMBINATORIO DEL HEXAGRAMA MISTICO DE PASCAL

realizado por Gabriela Frias Villegas

con número de cuenta 9450382-9 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dr. Rodolfo San Agustín Chf

Propietario Dr. Emilio Luis Riera

Propietario Dr. Adalberto García Maynez y Cervantes

Suplente Dra. Martha Gabriela Araujo Pardo

Suplente Mat. Laura Pastrana Ramírez

Hector Méndez L.

Consejo Departamental de Matemáticas

DR. HECTOR MENDEZ LANGO

***UN ESTUDIO COMBINATORIO
DEL HEXAGRAMA MISTICO DE
PASCAL***

Gabriela Frías Villegas

*A la memoria de mi abuelo
Anselmo Villegas Rentería (el Pelón).*

AGRADECIMIENTOS

A mis papas porque este trabajo es tan suyo como mío y por su apoyo en todos sentidos. A mi mamá por prestarme sus libros aún antes de saber leer y a mi papá por leer esta tesis con todo cuidado y ayudarme con las correcciones. Gracias por todo.

A los demás miembros de mi familia: Jorge, Alejandro, Perla e Ivalú por su apoyo y compañía durante el tiempo que trabajé en esta tesis.

A mis amigos por darme ánimos.

A Luis por estar cerca estos últimos meses, a Emilio por su ayuda con los subíndices, a Daniel por sus consejos, a Mariana por siempre estar al pendiente, a Iliana, Ana Paula y Yaocí por los cafés domingueros, a Maritza por tantos años juntas, a Alina y Fabiola por estar siempre ahí y a Héctor por ser mi compañero de estudios durante toda la carrera.

Muy especialmente a Luis y Ana Paula por su ayuda con los dibujos de esta tesis.

Quiero agradecer a Rodolfo San Agustín Chí, asesor de este trabajo su paciencia y apoyo durante la realización del mismo.

Y a Emilio Lluis, Gabriela Araujo, Adalberto García-Maynez y Laura Pastrana sus opiniones, que mejoraron grandemente el contenido y la forma de esta tesis.

CONTENIDO

INTRODUCCION.....	2
1. HISTORIA DEL HEXAGRAMA MISTICO DE PASCAL.....	3
2. CONSTRUCCION DEL HEXAGRAMA MISTICO DE PASCAL.....	6
2.1 RECTAS DE PASCAL.....	7
2.2 PUNTOS DE STEINER.....	10
2.3 PUNTOS DE KIRKMAN.....	15
2.4 RECTAS DE CAYLEY.....	19
2.5 RECTAS DE PLÜCKER.....	23
2.6 PUNTOS DE SALMON.....	27
3. REPRESENTACIÓN DEL HEXAGRAMA MÍSTICO DE PASCAL EN $S(K_6)$	31
3.0 UNA JERARQUÍA NATURAL EN EL HEXAGRAMA.....	31
3.1 RECTAS DE PASCAL.....	35
3.2 PUNTOS DE STEINER.....	37
3.3 PUNTOS DE KIRKMAN.....	41
3.4 RECTAS DE CAYLEY.....	44
3.5 RECTAS DE PLÜCKER.....	45
3.6 PUNTOS DE SALMON.....	46
APENDICE A CONFIGURACIONES EN $P^2(\mathbb{R})$	50
APENDICE B TEORIA DE DISEÑOS.....	52
APENDICE C TEORIA DE GRAFICAS.....	53
APENDICE D REDES GEOMETRICAS.....	57
BIBLIOGRAFIA.....	58

INTRODUCCION

Recordemos primeramente que seis puntos ordenados cíclicamente en $P^2(\mathbb{R})$, el plano proyectivo sobre el campo real \mathbb{R} , definen un hexágono en ese plano. En 1840, el matemático francés Blaise Pascal, encontró la condición necesaria y suficiente para que esos puntos estén en una cónica, ésta es, que las intersecciones de lados opuestos de dicho hexágono estén alineadas. Con este teorema Pascal implicó, tal vez sin saberlo, la construcción de la configuración del hexagrama místico.

El propósito de esta tesis es realizar un estudio combinatorio de dicha configuración en el espacio proyectivo sobre el campo real.

Para tal fin, en primer lugar estudié las notas de Salmon contenidas en su libro Conic Sections (ver Salmon [1]), en las que hace un recuento de los resultados conocidos hasta 1879 acerca del hexagrama místico de Pascal.

El estudio de la configuración, tal y como lo explica Salmon en sus notas, depende en gran medida de la elección de una notación adecuada y de una selección muy cuidadosa de los elementos a considerar en cada etapa de la construcción. Esto hace que su seguimiento sea muy intrincado.

Por esta razón, me pareció importante realizar y estudiar una representación del hexagrama místico en $S(K_6)$, la red de subgráficas de K_6 .

Tal representación me permitió estudiar los resultados que aparecen en las notas de Salmon desde un enfoque más moderno, el cual simplifica notablemente, por un lado, la obtención de varios de ellos y, por el otro, la notación asociada a los elementos del hexagrama místico.

El presente trabajo está conformado por tres capítulos, cuyo contenido es el siguiente:

1. Dedicué el primer capítulo a reseñar brevemente la historia del hexagrama místico, lo cual me pareció importante tomando en cuenta la gran cantidad de contribuciones que se han hecho al respecto y, aunque no podré hablar de todas, mencionaré las más relevantes para este trabajo.
2. En el segundo capítulo reconstruí el hexagrama místico determinado por seis puntos en el plano proyectivo real, siguiendo las notas de Salmon (ver Salmon [1]). Cabe mencionar que, aunque en éstas se hace un recuento de los teoremas que se conocían hasta esa época acerca del hexagrama, hay varias demostraciones que no aparecen detalladas y que decidí estudiar cuidadosamente en este capítulo.
3. En la última parte de este trabajo hice una representación del hexagrama místico en la red de subgráficas de K_6 , apoyándome fuertemente en la construcción dada en el capítulo 2. También estudié nuevamente algunos teoremas, ya mencionados en ese capítulo, cuyas demostraciones resultan mucho más simples en el contexto de la red de subgráficas de K_6 .

CAPITULO 1

HISTORIA DEL HEXAGRAMA MISTICO DE PASCAL

En este capítulo desarrollaré una pequeña parte de la historia de la configuración del hexagrama místico de Pascal y haré un resumen de los resultados más importantes asociados a ésta.

1.1 Breve reseña histórica

Como mencioné en la introducción, el Teorema de Pascal establece la condición para que seis puntos en un plano proyectivo sean canónicos, esta es:

Un hexágono está inscrito en una cónica si y sólo si las intersecciones de lados correspondientes están alineadas.

De acuerdo con George Salmon, en las notas de su libro Conic Sections (ver Salmon [1]), Jacob Steiner fue el primero que dirigió la atención de los geómetras a la figura obtenida al unir de todas las formas posibles seis puntos en una cónica y demostró que las rectas de Pascal concurren por ternas en 20 puntos a los que llamaremos *puntos de Steiner*. Los teoremas de Steiner fueron corregidos por Julius Plücker, quien extendió el resultado de Steiner probando que las rectas de Pascal también concurren por ternas en 60 puntos, distintos a los puntos de Steiner, que llamaremos puntos de Kirkman. Tiempo después por Sir. Arthur Cayley y el reverendo T. P. Kirkman continuaron con el estudio del hexagrama, extendiendo los resultados anteriores.

Giussepe Veronese también se interesó por la configuración y contribuyó al estudio de ésta con el llamado “Teorema de la descomposición” (ver Veronese [4]), el cual dice textualmente:

<<Le sesanta rette di Pascal p e di sessanta punti di Kirkman K formano sei figure π , di dieci punti K posti tre a tre sopra le dieci rette corrispondenti p .>>

Este resultado es sorprendente, tomando en cuenta la complejidad de la figura, pues postula que la configuración de Puntos de Kirkman y rectas de Pascal se descompone en 6 configuraciones arguesianas (Ver Apéndice A). Veronese llamó *figuras* a estas configuraciones.

Después de estas contribuciones, la figura fue olvidada por varios años y en el Siglo XX hubo pocas aportaciones al estudio de ésta.

Una de esas aportaciones se debe a Rodolfo San Agustín Chí, en su tesis doctoral (ver San Agustín [2]).

En este texto, San Agustín generalizó la construcción de la configuración al plano

proyectivo sobre un campo k de característica distinta de dos y cardinalidad suficientemente grande; a continuación, caracterizó de forma invariante al hexagrama místico de Pascal mediante una representación fiel en la red de subgráficas de K_6 y LK_6 respectivamente.

Finalmente, dio una representación algebraica, proyectivamente invariante, asociando subgrupos de S_6 a los elementos de la configuración.

En el siguiente apartado mencionaremos los resultados más importantes asociados a los elementos del hexagrama de Pascal, antes de estudiarlos con mayor profundidad en el capítulo 2.

1.2 Resultados importantes.

Las notas de Salmon (ver Salmon [1]) son una recopilación de los resultados más importantes, conocidos en su época, acerca del hexagrama místico de Pascal.

A continuación hago un recuento de algunos de ellos, los cuáles estudiaré con mayor detalle en el capítulo 2.

Llamaremos *hexagrama místico de Pascal* (para abreviar *hexagrama*) asociado a una cónica fija C y a 6 puntos en ella, a la configuración que se empieza a construir con 60 rectas de Pascal en el plano proyectivo real, como describiré en el capítulo 2.

Observemos que, si ordenamos cíclicamente dichos seis puntos, de cualquier modo posible, obtenemos un hexágono.

1. Sabemos, por el teorema de Pascal, que las intersecciones de lados opuestos de dicho hexágono se encuentran en una recta a la que llamaremos *recta de Pascal*.

Hay 60 rectas de Pascal en el hexagrama místico (ver Salmon [1]).

2. Steiner probó que las rectas de Pascal concurren por ternas en 20, puntos que llamaremos de *Steiner* (ver Salmon [1]).

3. Poco tiempo después, Julius Plücker demostró que los puntos de Steiner se encuentran alineados de cuatro en cuatro, en 15 rectas que llamaremos de *Plücker* (ver San Agustín [2]).

4. El reverendo T. P. Kirkman probó que las rectas de Pascal concurren por ternas en 60 puntos, los que llamaremos puntos de *Kirkman* (ver Salmon [1]).

5. Posteriormente, Sir Arthur Cayley probó que los puntos de Kirkman están alineados en 20 rectas, a las que llamaremos rectas de *Cayley* (ver San Agustín [2]).

6. Por último, Salmon probó que las rectas G concurren de 4 en 4 en 15 puntos, a los que llamaremos puntos de *Salmon* (ver San Agustín [2]).

Por su parte Hesse encontró las siguientes relaciones (ver Salmon [1]).

Relación 1: Hay 60 puntos de Kirkman y 60 rectas de Pascal y hay una cierta correspondencia biyectiva entre las rectas de Pascal y los puntos de Kirkman.

Relación 2: Hay 20 puntos de Steiner a través de cada uno de los cuales pasan tres rectas de Pascal y una recta de Cayley. Hay 20 rectas de Cayley en cada una de las cuáles hay tres puntos de Kirkman y un punto de Steiner. También, hay una cierta correspondencia biyectiva entre los puntos de Steiner y las rectas de Cayley.

Relación 3: Así como las 20 rectas de Cayley pasan de 4 en 4 por 15 puntos de Salmon, los puntos de Steiner están alineados de 4 en 4, en 15 rectas de Plücker. Hay una cierta correspondencia biyectiva entre los puntos de Salmon y las rectas de Plücker.

San Agustín propone, en su tesis doctoral (ver San Agustín [2]), los nombres de:

1. **Configuración Inglesa**, para aquella formada por los puntos de Salmon y las rectas de Cayley

2. **Configuración Alemana**, para la que esta formada por puntos de Steiner y rectas de Plücker.

3. **Configuración Básica**, para el sistema que consiste en los puntos de Kirkman y las rectas de Pascal.

CAPITULO 2

CONSTRUCCION DEL HEXAGRAMA MISTICO DE PASCAL

Como mencioné anteriormente, Salmon (ver Salmon [1]), hizo una recopilación de los teoremas más importantes relacionados con la configuración del hexagrama místico de Pascal y los métodos para obtenerlos. La mayor parte de ellos se obtiene a partir de los principios básicos de la combinatoria, junto con los dos teoremas fundamentales siguientes y sus recíprocos:

Teorema 2.0.0: *Si dos triángulos son tales que las líneas que unen vértices correspondientes se encuentran en un punto (el centro de homología de los dos triángulos), las intersecciones de lados correspondientes estarán en una línea recta (su eje).*

Este teorema se conoce como teorema de Desargues (Fig. 1).

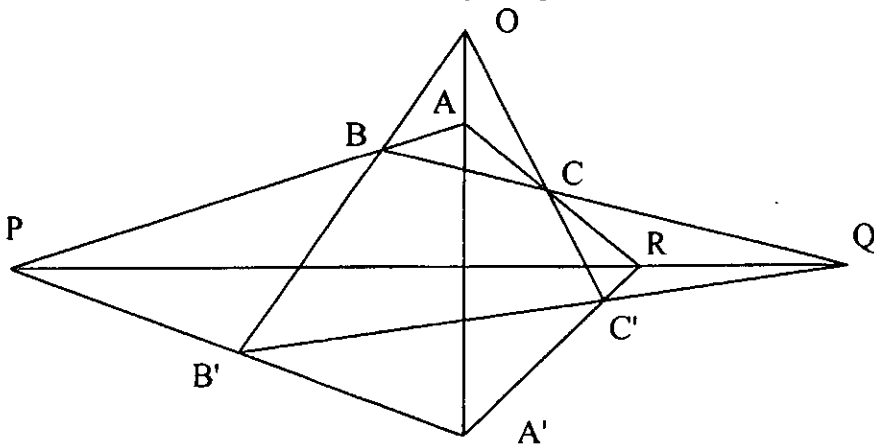


Fig.1: Las intersecciones de lados correspondientes de los triángulos ABC y A'B'C', están alineadas.

Teorema 2.0.1: *Si las intersecciones de lados opuestos de tres triángulos son para cada par los mismos tres puntos en una línea recta, los centros de homología del primero y el segundo, el segundo y el tercero, y el tercero y el primero, estan en una línea recta.*

Recíproco del Teorema 2.0.0: *Si dos triángulos son tales que las intersecciones de sus lados correspondientes están alineadas, entonces las líneas que unen vértices correspondientes se encuentran en un punto.*

Recíproco del Teorema 2.0.1: *Si las rectas que unen vértices correspondientes de tres triángulos son para cada par las mismas, entonces los ejes del primero y el segundo, el segundo y el tercero, y el tercero y el primero, son concurrentes.*

CONSTRUCCIÓN DEL HEXAGRAMA MISTICO DE PASCAL

En este capítulo estudiaré la construcción del hexagrama basándome en las notas de Salmon (Ver Salmon [1]). Haré un análisis de dicho escrito y agregaré algunos puntos que Salmon mencionó, pero no detalló en sus notas.

En general, seis puntos en un plano proyectivo determinan un hexágono, una vez que se les ha ordenado cíclicamente. Es decir, partimos de uno de ellos, pasamos al siguiente y así consecutivamente hasta llegar al último de los puntos para, finalmente, regresar al primero. Con ello es posible, entonces, identificar a los diversos elementos del hexágono determinado de esa manera; por ejemplo sus pares de lados y vértices opuestos, sus ternas de lados, etc.

Llamaré *hexagrama místico de Pascal*, para abreviar *hexagrama*, asociado a una cónica fija C y a 6 puntos en ella, a la configuración que se empieza a construir con 60 rectas de Pascal en el plano proyectivo real, como describiré a continuación.

Para hacer la construcción del hexagrama determinado por seis puntos en una cónica C usaré la notación siguiente:

Si P_1, P_2, \dots, P_6 son 6 puntos no ordenados en $P^2(\mathbb{R})$.

1. (a, b, c, d, e, f) denotará un ordenamiento cíclico sin repetición de los puntos P_1, P_2, \dots, P_6 .
2. Una palabra $abcdef$ denotará al hexágono determinado por el ordenamiento (a, b, c, d, e, f) .
3. ab denotará a la recta que pasa por el punto a y el punto b .
4. (ab, de) denota al punto de intersección de las rectas ab y de .

2.1 Rectas de Pascal

Sean P_1, \dots, P_6 , 6 puntos no ordenados en una cónica C en $P^2(\mathbb{R})$, a los que llamaremos *puntos P* del hexagrama y, sea (a, b, c, d, e, f) , un ordenamiento cíclico sin repetición de dichos puntos (Fig.2).

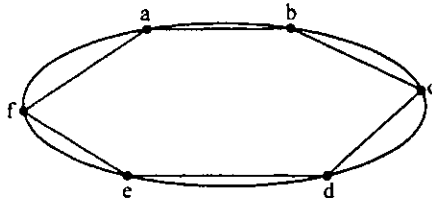


Fig. 2.: Hexágono determinado por un ordenamiento cíclico de seis puntos en la cónica.

Definición 2.1.1: Un lado fundamental del hexagrama determinado por P_1, \dots, P_6 es cada una de las rectas determinadas por los pares no ordenados $P_i P_j$ de dichos puntos (Fig.3).

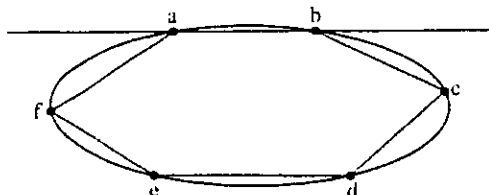


Fig. 3: La recta ab , es un ejemplo de un lado fundamental del hexagrama.

Proposición 2.1.1: Hay 15 lados fundamentales en el hexagrama.

Demostración: En cada lado fundamental del hexagrama hay 2 puntos P y cada punto P está en 5 lados fundamentales. Además, sabemos que hay 6 puntos P en la cónica C . Por lo tanto, hay: $\frac{(6)(5)}{2} = \frac{30}{2} = 15$ lados fundamentales en el hexagrama místico de Pascal. \square

Cada recta fundamental del hexagrama (por ejemplo ab) es intersectada por otras 14 rectas fundamentales: por 4 en a , por 4 en b , y por 6 más en puntos distintos a los puntos P (por ejemplo en el punto (ab,cd) , el cual es intersección de la recta ab y la recta cd). Llamaremos a estos nuevos puntos de intersección **puntos fundamentales** del hexagrama.

Observación 2.1.1: Cada hexágono $abcdef$ tiene asociados tres puntos fundamentales: (ab,de) , (bc,ef) y (cd,fa) , los cuales son las intersecciones de sus lados opuestos.

Proposición 2.1.2: Hay 45 puntos fundamentales en el hexagrama determinado por los puntos P_1, \dots, P_6 en $P^2(\mathbb{R})$.

Demostración: Hay 6 puntos fundamentales en cada recta fundamental del hexagrama, cada punto fundamental pertenece a 2 rectas fundamentales y hay 15 rectas fundamentales.

Por lo tanto hay $\frac{(15)(6)}{2} = \frac{90}{2} = 45$ puntos fundamentales en el hexagrama. \square

Como mencioné anteriormente, Pascal encontró la condición necesaria y suficiente para que 6 puntos en un plano proyectivo real estén sobre una cónica no singular C . Para seis puntos a, b, c, d, e, f en una cónica C en $P^2(\mathbb{R})$, la condición de Pascal es la siguiente:

Teorema 2.1.1 (Pascal): Los puntos (ab,de) , (cd,fa) y (bc,ef) , son colineales.

Definición 2.1.2: Llamaremos **recta de Pascal** del hexágono $abcdef$ a la recta de alineación de los puntos (ab,de) , (cd,fa) y (bc,ef) del teorema 2.1.1 y la denotaremos

indistintamente de los dos modos siguientes: $abc\bar{d}\bar{e}\bar{f}$ y $\left. \begin{matrix} ab & de & ef \\ de & fa & bc \end{matrix} \right\} (Fig. 4).$

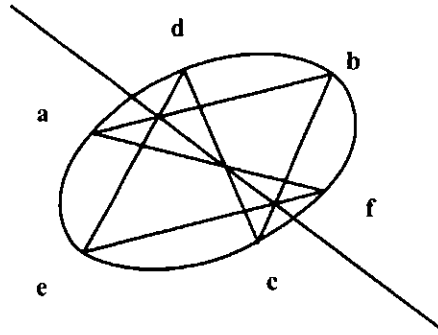


Fig. 4: Recta de Pascal que contiene las intersecciones de lados opuestos del hexágono $abcdef$.

Observemos que cada orden cíclico posible de los 6 puntos P determina una recta de Pascal y que la notación de la definición 2.1.2 nos permite denotar una recta de Pascal de varias maneras equivalentes.

Observación 2.1.2: $abc\bar{d}\bar{e}\bar{f}$ denota la recta de Pascal asociada al hexágono $abcdef$, pero el orden inverso $fedcba$ determina el mismo hexágono, estrictamente hablando. Así podemos denotar a la recta $abc\bar{d}\bar{e}\bar{f}$ como $fedcba$. De igual modo observemos que, $abcdef$, $bcdefa$, $cdefab$, $defabc$, $efabcd$ y $fabcde$ determinan el mismo orden cíclico de los puntos a, b, c, d, e y f , y por lo tanto a el mismo hexágono. Así $bcdef\bar{a}$, $cdef\bar{ab}$, $d\bar{ef}abc$, $ef\bar{abcd}$ y $f\bar{abcde}$ son otras maneras de denotar a la recta $abc\bar{d}\bar{e}\bar{f}$. Esta notación se debe a San Agustín (ver San Agustín [2]).

Observación 2.1.3: La recta de Pascal

$$\left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{matrix} \right\} \quad (A)$$

que esta asociada al hexágono $abcdef$, puede denotarse en forma de matriz de varias maneras distintas: observemos que cada una de las columnas de la matriz A corresponde a alguno de los tres puntos fundamentales (ab, de) , (cd, fa) y (ef, bc) que pertenecen a la

recta de Pascal $\left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{matrix} \right\}$. Por lo tanto, podemos denotar a la recta de Pascal

$\left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{matrix} \right\}$ con una matriz que contenga las tres columnas de la matriz A en cualquier

orden posible (por ejemplo la matriz $\left. \begin{matrix} cd & ab & ef \\ fa & de & bc \end{matrix} \right\}$), así como una matriz que contenga los renglones de la matriz A en cualquier orden posible (por ejemplo la matriz $\left. \begin{matrix} de & fa & bc \\ ab & cd & ef \end{matrix} \right\}$).

Esta notación se debe a Salmon (ver Salmon [1]).

Proposición 2.1.3: La recta de Pascal $\left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{matrix} \right\}$ contiene 3 puntos fundamentales del hexagrama.

Demostración: La recta de Pascal $\left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{matrix} \right\}$, determinada por el hexágono $abcdef$, contiene al menos tres puntos fundamentales del hexagrama, éstos son las intersecciones de los lados opuestos del hexágono $abcdef$: (ab, de) , (cd, fa) y (bc, ef) .

A lo más hay 3 puntos fundamentales en la recta, pues si hubiera más, estos corresponderían a los lados opuestos de algún hexágono determinado por un ordenamiento distinto de los puntos P . \square

Proposición 2.1.4: Hay 60 rectas de Pascal en el hexagrama.

Demostración: Cada recta de Pascal corresponde a un ordenamiento cíclico sin repetición de los 6 puntos P . Observemos que aunque hay $6!=720$ formas de ordenar sin omisión ni repetición seis elementos dados en abstracto, solo hay $\frac{720}{6} = 120$ formas de ordenarlos cíclicamente.

Mas aún, cualquiera de estos ordenamientos, junto con su ordenamiento inverso (por ejemplo: $abcded$ y $fedcba$) determinan el mismo hexágono, por lo que 6 puntos en una cónica en $P^2(\mathbb{R})$ determinan solamente $\frac{120}{2} = 60$ hexágonos. Como cada hexágono determina una recta de Pascal, hay 60 rectas de Pascal en el hexagrama. \square

Proposición 2.1.5: Hay 4 rectas de Pascal incidentes con cada punto fundamental del hexagrama.

Demostración: Sabemos que hay 60 rectas de Pascal en el hexagrama, que en cada una de ellas hay 3 puntos fundamentales y que hay en total 45 puntos fundamentales. Por lo tanto, pasan $\frac{(60)(3)}{45} = 4$ rectas de Pascal por cada punto fundamental del hexagrama. \square

2.2 Puntos de Steiner.

A continuación probaremos un resultado de Steiner, que nos proporciona otro elemento de primera importancia en el hexagrama.

Teorema (Steiner) 2.2.1: Las rectas de Pascal $\left. \begin{matrix} ab & de & cf \\ cd & fa & be \end{matrix} \right\}$, $\left. \begin{matrix} cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{matrix} \right\}$ y $\left. \begin{matrix} ef & bc & ad \\ ab & de & cf \end{matrix} \right\}$ son concurrentes.

Demostración: Consideremos los triángulos cuyos lados son respectivamente:

$$ab \quad cd \quad ef \quad (\Delta_1)$$

$$de \quad fa \quad bc \quad (\Delta_2)$$

Y cuyos vértices son respectivamente:

$$A := (ab, cd), \quad B := (cd, ef), \quad C := (ef, ab)$$

$$A' := (de, fa), \quad B' := (fa, bc), \quad C' := (bc, de)$$

Las intersecciones de lados correspondientes de Δ_1 y Δ_2 están en la recta de Pascal

$$\left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{matrix} \right\}$$

(ver Fig.5).

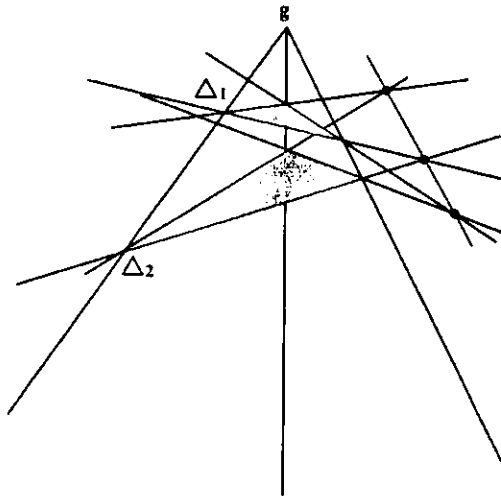


Fig. 5: Triángulos Δ_1 y Δ_2

CAPITULO 2: CONSTRUCCIÓN DEL HEXAGRAMA MISTICO

Entonces, por el reciproco del Teorema 2.0.0, las rectas de Pascal

$$\left. \begin{array}{l} ab \ de \ cf \\ cd \ fa \ be \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} cd \ fa \ be \\ ef \ bc \ ad \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \left. \begin{array}{l} ef \ bc \ ad \\ ab \ de \ cf \end{array} \right\},$$

que unen vértices correspondientes de los triángulos Δ_1 y Δ_2 , son concurrentes. \square

Definición 2.1.2: El punto de concurrencia de las rectas de Pascal $\left. \begin{array}{l} ab \ de \ cf \\ cd \ fa \ be \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{l} cd \ fa \ be \\ ef \ bc \ ad \end{array} \right\}$ y $\left. \begin{array}{l} ef \ bc \ ad \\ ab \ de \ cf \end{array} \right\}$, del teorema 2.2.1, es un **punto de Steiner** del hexagrama (ver Fig.6) y lo denotaremos con la matriz:

$$\left. \begin{array}{l} ab \ de \ cf \\ cd \ fa \ be \\ ef \ bc \ ad \end{array} \right\} \quad (g)$$

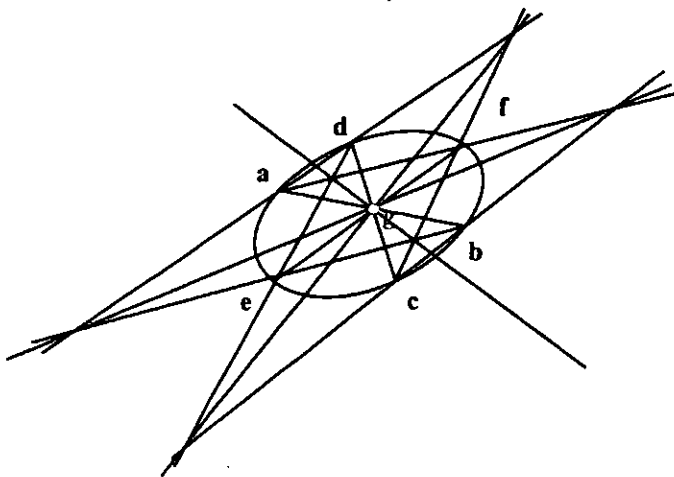


Fig.6: Punto de Steiner de las rectas $\left. \begin{array}{l} ab \ de \ cf \\ cd \ fa \ be \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{l} cd \ fa \ be \\ ef \ bc \ ad \end{array} \right\}$ y $\left. \begin{array}{l} ef \ bc \ ad \\ ab \ de \ cf \end{array} \right\}$.

Observación 2.2.1: Estudiemos ahora la matriz $\left. \begin{array}{l} ab \ de \ cf \\ cd \ fa \ be \\ ef \ bc \ ad \end{array} \right\}$ asociada al punto de Steiner del teorema 2.2.1. Observamos que en cada una de las tres columnas y los tres renglones

CAPITULO 2: CONSTRUCCIÓN DEL HEXAGRAMA MISTICO

que la componen, encontramos las 6 letras a, b, c, d, e y f sin omisión ni repetición.

Notemos también que, debido a la observación 2.1.2, una matriz B asociada a algún punto de Steiner puede escribirse de modo equivalente con una matriz que tenga las mismas columnas que B en cualquier orden posible o los mismos renglones que B en cualquier orden posible. Por ejemplo, las matrices

$$\left. \begin{array}{ccc} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{ccc} de & ab & cf \\ fa & cd & be \\ bc & ef & ad \end{array} \right\} \text{ y } \left. \begin{array}{ccc} cd & fa & be \\ ab & de & cf \\ ef & bc & ad \end{array} \right\}$$

denotan al mismo punto de Steiner.

Observemos que este arreglo de la notación muestra que sólo hay un punto de Steiner en cada recta de Pascal, pues al tomar cualquier recta de Pascal podemos encontrar el punto de Steiner que pertenece a ella completando cada una de las tres columnas con las dos letras faltantes en cada caso y solamente hay un modo de obtener un punto de Steiner de esa

manera. Por ejemplo, la recta $\left. \begin{array}{ccc} ab & de & cf \\ cd & fa & be \end{array} \right\}$ contiene al punto de Steiner $\left. \begin{array}{ccc} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{array} \right\}$,

que puede encontrarse del modo mencionado anteriormente.

A continuación estudiaré un teorema, también probado por Steiner, a partir del cual encontramos un nuevo punto que tiene una estrecha relación con el punto de Steiner del teorema 2.2.1.

Teorema 2.2.2 (Steiner): Las rectas de Pascal $\left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{ccc} de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{array} \right\}$,
 $\left. \begin{array}{ccc} ab & cd & ef \\ cf & be & ad \end{array} \right\}$ son concurrentes.

Demostración: Consideremos los tres triángulos cuyos lados son respectivamente:

$$ab \quad cd \quad ef \quad (\Delta_1)$$

$$de \quad fa \quad bc \quad (\Delta_2)$$

$$ef \quad be \quad ad \quad (\Delta_3)$$

Las rectas que unen vértices correspondientes de los triángulos Δ_1 y Δ_2 , Δ_2 y Δ_3 y Δ_1 y Δ_3 , respectivamente son en todos los casos las tres rectas de Pascal

$$\left. \begin{array}{ccc} ab & de & cf \\ cd & fa & be \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{ccc} cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{array} \right\} \text{ y } \left. \begin{array}{ccc} ef & bc & ad \\ ab & de & cf \end{array} \right\}$$

CAPITULO 2: CONSTRUCCIÓN DEL HEXAGRAMA MISTICO

Por el recíproco del Teorema 2.0.1, los ejes de los triángulos Δ_1 y Δ_2 , Δ_1 y Δ_3 y Δ_2 y Δ_3 , son concurrentes. Estos son las rectas de Pascal

$$\left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{matrix} \right\}, \quad \left. \begin{matrix} de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{matrix} \right\} \quad \text{y} \quad \left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ cf & be & ad \end{matrix} \right\}. \quad \square$$

Proposición 2.2.1: El punto de concurrencia de las rectas de Pascal $\left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{matrix} \right\}$,

$\left. \begin{matrix} de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{matrix} \right\}$ y $\left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ cf & be & ad \end{matrix} \right\}$ del teorema 2.2.2, es un punto de Steiner.

Demostración: Si consideramos los triángulos

$$\begin{matrix} ab & & de & & cf & & (\Delta_1') \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & cd & & ef & & bc & (\Delta_2') \end{matrix}$$

y realizamos con ellos la construcción dada para los triángulos Δ_1 y Δ_2 del teorema 2.2.1, encontramos el punto de intersección de las rectas de Pascal

$$\left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \end{matrix} \right\}, \quad \left. \begin{matrix} de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{matrix} \right\} \quad \text{y} \quad \left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ cf & be & ad \end{matrix} \right\},$$

que unen vértices correspondientes de los triángulos Δ_1' y Δ_2' . Este es el punto de Steiner

$$\left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{matrix} \right\} \quad (g')$$

□

Observación 2.2.2: El punto g del teorema 2.2.1 y el punto g' del teorema 2.2.2 están estrechamente relacionados entre sí. Primeramente observemos que la matriz

$$\left. \begin{matrix} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{matrix} \right\}, \quad \text{asociada al punto } g, \text{ es la matriz transpuesta de la matriz } \left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{matrix} \right\},$$

asociada a g' . Observemos también que, mientras el punto g es el punto de concurrencia de las rectas que unen vértices correspondientes de los triángulos Δ_1, Δ_2 y Δ_3 , el punto g' es el punto de concurrencia de los ejes de los triángulos Δ_1 y Δ_2 , Δ_2 y Δ_3 y Δ_2 y Δ_3 .

Steiner probó que los puntos mencionados anteriormente, son conjugados armónicos respecto a nuestra cónica original C .

Los puntos de Steiner g y g' tienen también propiedades importantes, de naturaleza

combinatoria, que estudiaré en el capítulo 3.

Proposición 2.2.2: Hay 20 puntos de Steiner en el hexagrama.

Demostración: Hay un punto de Steiner en cada recta de Pascal. en cada punto de Steiner concurren 3 rectas de Pascal y sabemos que hay 60 rectas de Pascal.

Por lo tanto, tenemos $\frac{60}{3} = 20$ puntos de Steiner en el hexagrama. \square

2.3 Puntos de Kirkman

Kirkman también estudió las rectas de Pascal y encontró que ciertas ternas se intersectan en un nuevo tipo de puntos, genéricamente distintos a los puntos de Steiner, a los que llamaremos puntos de Kirkman.

Teorema (Kirkman) 2.3.1: Las rectas de Pascal $\left. \begin{matrix} ab & ce & df \\ cd & bf & ae \end{matrix} \right\}, \left. \begin{matrix} cd & bf & ae \\ ef & ac & bd \end{matrix} \right\}^y$
 $\left. \begin{matrix} ef & ac & bd \\ ab & df & ce \end{matrix} \right\}$ son concurrentes.

Demostración: Consideremos los dos triángulos

$$\begin{matrix} ab & & cd & & ef & & (\Delta_1) \\ \\ ab & ce & df \} & cd & bf & ae \} & ef & hd & ac \} \\ de & bf & ae \} & af & ce & bd \} & bc & ue & df \} \end{matrix} \quad (\Delta_2)$$

Las intersecciones de lados correspondientes de Δ_1 y Δ_2 , están en la recta de Pascal

$$\left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & af & bc \end{matrix} \right\}.$$

Entonces, por el recíproco del teorema 2.2.0, las rectas de Pascal

$$\left. \begin{matrix} ab & ce & df \\ cd & bf & ae \end{matrix} \right\}, \left. \begin{matrix} cd & bf & ae \\ ef & ac & bd \end{matrix} \right\} \text{ y } \left. \begin{matrix} ef & ac & hd \\ ab & df & ce \end{matrix} \right\},$$

que unen vértices correspondientes de Δ_1 y Δ_2 , son concurrentes. \square

Definición 2.3.1: Llamaremos **punto de Kirkman del hexagrama**, al punto de concurrencia

de las tres rectas de Pascal $\left. \begin{matrix} ab & ce & df \\ cd & bf & ae \end{matrix} \right\}, \left. \begin{matrix} cd & bf & ae \\ ef & ac & bd \end{matrix} \right\}^y \left. \begin{matrix} ef & ac & bd \\ ab & df & ce \end{matrix} \right\}$ del teorema

2.3.1 (Ver Fig.7) y lo denotaremos con la matriz:

CAPITULO 2: CONSTRUCCIÓN DEL HEXAGRAMA MISTICO

$$\left. \begin{array}{l} ab \quad ce \quad df \\ cd \quad bf \quad ae \\ ef \quad ac \quad bd \end{array} \right\} \quad (h_1)$$

Observación 2.3.1: La notación de los puntos de Kirkman difiere de la de los puntos de Steiner, en que sólo una de las columnas verticales contiene las seis letras a,b,c,d,e,f sin omisión o repetición.

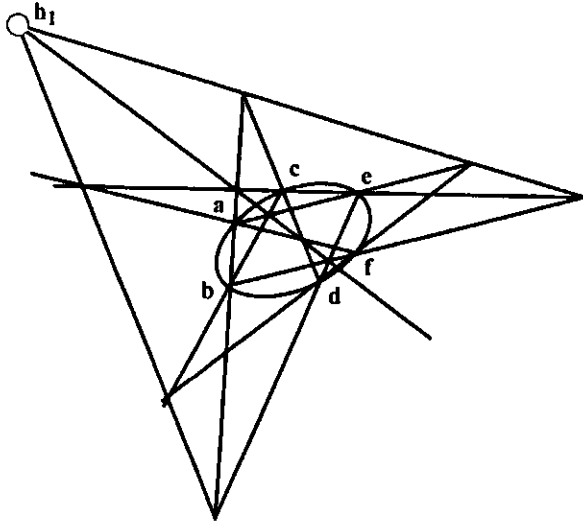


Fig. 7: Punto de Kirkman de las rectas $\left. \begin{array}{l} ab \quad ce \quad df \\ cd \quad bf \quad ae \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} cd \quad bf \quad ae \\ ef \quad ac \quad bd \end{array} \right\}$ y $\left. \begin{array}{l} ef \quad ac \quad bd \\ ab \quad df \quad ce \end{array} \right\}$.

A continuación haré una observación interesante acerca de los triángulos usados en el teorema 2.3.1, para encontrar las rectas que concurren en un punto de Kirkman.

Observación 2.3.2: Tomemos las tres rectas que concurren en el punto de Kirkman del teorema 2.3.1. Estas son las tres rectas de Pascal:

$$T := \left. \begin{array}{l} ab \quad ce \quad df \\ cd \quad bf \quad ae \end{array} \right\} \quad Q := \left. \begin{array}{l} cd \quad bf \quad ae \\ ef \quad ac \quad bd \end{array} \right\} \quad R := \left. \begin{array}{l} ef \quad ac \quad bd \\ ab \quad df \quad ce \end{array} \right\}$$

Tomemos los puntos fundamentales en cada una de las rectas de Pascal. Llamemos T_i, Q_i y R_i a los puntos fundamentales sobre la rectas T, Q y R respectivamente:

$$\begin{array}{lll} T_0 := (ab, cd) & Q_0 := (cd, ef) & R_0 := (ef, ab) \\ T_1 := (ce, bf) & Q_1 := (ae, bd) & R_1 := (ac, df) \end{array}$$

$$T_2 := (df, ae) \quad Q_2 := (bf, ac) \quad R_2 := (bd, ce)$$

(ver Fig.8).

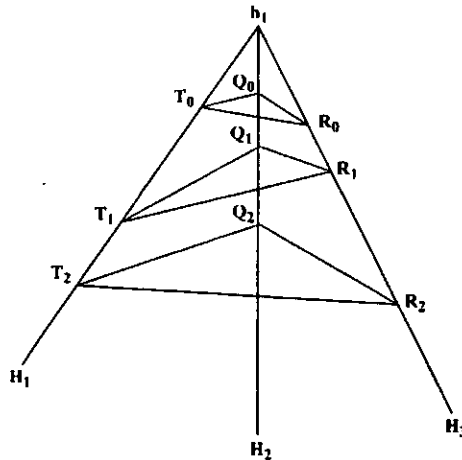


Fig. 8: Los triángulos $T_0Q_0R_0, T_1Q_1R_1, T_2Q_2R_2$

Notemos que los únicos triángulos de la forma $T_iQ_jR_k$ con $i, j, k \in \{1,2,3\}$, tales que sus lados estén formados por rectas de Pascal, son $T_1Q_1R_1$ y $T_2Q_2R_2$. Además, el triángulo $T_0Q_0R_0$ es el único triángulo que se puede formar con los puntos recién definidos, de modo que todos sus lados son lados fundamentales del hexagrama místico determinado por los puntos P_1, \dots, P_6 .

La siguiente proposición sólo esta mencionada en las notas de Salmon (ver Salmon [1]), pero la demostración no fue detallada, por lo cual decidí detallarla en este trabajo.

Proposición 2.3.1: *En cada recta de Pascal hay tres puntos de Kirkman.*

Demostración: Sea P una recta de pascal cualquiera; sin perdida de generalidad podemos suponer que

$$P := \left. \begin{array}{ccc} ab & ce & df \\ cd & bf & ae \end{array} \right\}.$$

Sabemos, por el teorema 2.3.1, que la recta P concurre junto con otras dos rectas de Pascal en el punto de Kirkman

$$h_1 := \left. \begin{array}{ccc} ab & ce & df \\ cd & bf & ae \\ ef & ac & bd \end{array} \right\}$$

Ahora, consideremos los triángulos

CAPITULO 2: CONSTRUCCIÓN DEL HEXAGRAMA MISTICO

$$\begin{array}{ccc}
 ad & ce & bf & (\Delta_1') \\
 \left. \begin{array}{l} ab \quad cd \quad ef \\ cf \quad be \quad ad \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} ab \quad df \quad ce \\ fc \quad ae \quad bd \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} cd \quad ae \quad bf \\ be \quad df \quad ac \end{array} \right\} & (\Delta_2')
 \end{array}$$

Las intersecciones de lados correspondientes de Δ_1' y Δ_2' están en la recta de Pascal $\left. \begin{array}{l} ad \quad ce \quad bf \\ ef \quad bd \quad ac \end{array} \right\}$; entonces, por el recíproco del teorema 2.0.0. las rectas

$$\left. \begin{array}{l} ab \quad ce \quad df \\ cd \quad bf \quad ae \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} ae \quad cd \quad bf \\ cf \quad eb \quad ad \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \left. \begin{array}{l} ab \quad df \quad ec \\ fc \quad be \quad ad \end{array} \right\},$$

que unen vértices correspondientes de estos triángulos, son concurrentes y, por el teorema 2.3.1, concurren en el punto de Kirkman:

$$h_2 := \left. \begin{array}{l} ab \quad ce \quad df \\ cd \quad bf \quad ae \\ fc \quad ad \quad be \end{array} \right\}$$

Ahora, repitamos la construcción anterior con los triángulos:

$$\begin{array}{ccc}
 df & ae & bc & (\Delta_1'') \\
 \left. \begin{array}{l} ab \quad ce \quad df \\ de \quad bf \quad ac \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} cd \quad bf \quad ae \\ fa \quad ce \quad bd \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} ab \quad cd \quad ef \\ de \quad fa \quad cb \end{array} \right\} & (\Delta_2'')
 \end{array}$$

Las intersecciones de lados correspondientes de Δ_1'' y Δ_2'' están en la recta de Pascal $\left. \begin{array}{l} df \quad ae \quad cb \\ ce \quad bd \quad ef \end{array} \right\}$, entonces, por el recíproco de Teorema 2.0.1 y por el teorema 2.3.1, las rectas

$$\left. \begin{array}{l} df \quad ae \quad cb \\ cd \quad bd \quad ef \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} ab \quad df \quad ce \\ de \quad bc \quad fa \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \left. \begin{array}{l} bf \quad cd \quad ea \\ de \quad fa \quad bc \end{array} \right\},$$

que unen vértices correspondientes de estos triángulos, concurren en el punto de Kirkman:

$$h_3 := \left. \begin{array}{l} ab \quad ce \quad df \\ cd \quad bf \quad ae \\ fc \quad ad \quad be \end{array} \right\}$$

Por lo tanto, hemos encontrado tres puntos de Kirkman h_1 , h_2 , y h_3 que pertenecen a la recta de Pascal

$$P := \left. \begin{array}{l} ab \quad ce \quad df \\ cd \quad bf \quad ae \end{array} \right\}.$$

Proposición 2.3.2: Hay 60 puntos de Kirkman en el hexagrama.

Demostración: Sabemos que hay 60 rectas de Pascal en el hexagrama. cada recta de Pascal contiene 3 puntos de Kirkman y en cada punto de Kirkman concurren tres rectas de Pascal.

Por lo tanto, hay $\frac{(60)(3)}{60} = 60$ rectas de Pascal en el hexagrama. \square

Entonces, obtenemos la extensión de Kirkman del Teorema de Steiner:

Las rectas de Pascal concurren de tres en tres, no sólo en los 20 puntos de Steiner sino también en otros 60 puntos de Kirkman.

Hesse encontró una correspondencia entre los puntos de Kirkman y las rectas de Pascal (Ver Salmon [1]):

Correspondencia 1: Tomemos la recta de Pascal $abcdef$, la cual esta determinada por las intersecciones de lados correspondientes del hexágono $abcdef$.

Sabemos que en la configuración del hexagrama místico de Pascal hay 15 rectas fundamentales. Si quitamos las 6 rectas que determinan el hexágono anterior, nos quedan 9 rectas fundamentales. Tomando estas 9 rectas $ae, ad, ac, fb, fc, fd, eb, ec, db$, hay solamente tres maneras de formar hexágonos con ellas los cuáles, a su vez, determinan a las tres rectas de Pascal $abcdef, \bar{a}b\bar{c}\bar{d}\bar{e}\bar{f}$ y $afcbde$.

Es fácil ver que las rectas $\bar{a}b\bar{c}\bar{d}\bar{e}\bar{f}$, $abdcfe$ y $ac\bar{b}\bar{d}\bar{e}$ concurren en el punto de Kirkman

$$\left. \begin{array}{lll} ab & cd & ef \\ ed & af & bc \\ cf & ae & bd \end{array} \right\} .$$

La correspondencia dada por Hesse, asigna el punto $\left. \begin{array}{lll} ab & cd & ef \\ ed & af & bc \\ cf & ae & bd \end{array} \right\}$ a la recta $abcdef$.

Esta correspondencia nos proporcionará propiedades combinatorias interesantes acerca de los puntos de Kirkman, las cuáles estudiaremos en el capítulo 3.

2.4 Rectas de Cayley.

En 1846, Cayley probó que los puntos de Kirkman están alineados por ternas en veinte rectas distintas a las rectas de Pascal, a las que llamaremos rectas de Cayley.

En esta sección estudiaremos dicho resultado.

CAPITULO 2: CONSTRUCCIÓN DEL HEXAGRAMA MISTICO

Teorema 2.4.1: Los puntos de Kirkman de $\left. \begin{array}{l} ab \ ce \ df \\ de \ bf \ ac \\ cf \ ae \ bd \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{l} ae \ cd \ bf \\ bd \ af \ ce \\ ac \ be \ df \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{l} ac \ bd \ ef \\ df \ ae \ hc \\ ce \ hf \ ad \end{array} \right\}$ y el

punto de Steiner de $\left. \begin{array}{l} ab \ cd \ ef \\ af \ bc \\ cf \ be \ ad \end{array} \right\}$ están alineados .

Demostración: Tomemos los triángulos

$$ab \qquad cd \qquad ef \qquad (\Delta_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} ab \ ce \ df \\ de \ bf \ ac \end{array} \right\} \qquad \left. \begin{array}{l} cd \ bf \ ae \\ af \ ce \ bd \end{array} \right\} \qquad \left. \begin{array}{l} ef \ bd \ ac \\ bc \ ae \ df \end{array} \right\} \qquad (\Delta_4)$$

$$\left. \begin{array}{l} ab \ ce \ df \\ de \ bf \ ac \end{array} \right\} \qquad \left. \begin{array}{l} cd \ bf \ ae \\ be \ ac \ df \end{array} \right\} \qquad \left. \begin{array}{l} ef \ bd \ ac \\ ad \ ce \ bf \end{array} \right\} \qquad (\Delta_5)$$

Las rectas que unen vértices correspondientes de Δ_1 y Δ_5 , son las mismas que unen vértices correspondientes de Δ_1 y Δ_4 ; es decir, las rectas de Pascal:

$$\left. \begin{array}{l} ab \ ce \ df \\ cd \ bf \ ae \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} cd \ bf \ ae \\ ef \ ac \ bd \end{array} \right\} \quad y \quad \left. \begin{array}{l} ef \ ac \ bd \\ ab \ df \ ce \end{array} \right\}.$$

Por el teorema 2.3.1 sabemos que éstas concurren en el punto de Kirkman

$$\left. \begin{array}{l} ab \ ce \ df \\ cd \ bf \ ae \\ ef \ ac \ bd \end{array} \right\}.$$

Eso implica, que los triángulos Δ_1 , Δ_4 y Δ_5 están en perspectiva, con centro de perspectiva

en el punto de Kirkman $\left. \begin{array}{l} ab \ ce \ df \\ cd \ bf \ ae \\ ef \ ac \ bd \end{array} \right\}$.

Entonces, por el recíproco del teorema 2.0.2, las intersecciones de lados correspondientes de los triángulos Δ_4 y Δ_5 , que son los puntos de Kirkman

$$\left. \begin{array}{l} ab \quad ce \quad df \\ de \quad bf \quad ac \\ cf \quad ae \quad bd \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} ab \quad cd \quad bf \\ bd \quad af \quad ce \\ ac \quad be \quad df \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \left. \begin{array}{l} ac \quad bd \quad ef \\ df \quad ae \quad bc \\ ce \quad bf \quad ad \end{array} \right\}.$$

están alineadas. Esta recta de alineación es el eje de Δ_4 y Δ_5 .

Por otro lado, por el recíproco del Teorema 2.0.1, el eje de Δ_4 y Δ_5 debe pasar por la intersección de los ejes de Δ_1 y Δ_4 y Δ_1 y Δ_5 , es decir, por el punto de Steiner

$$\left. \begin{array}{l} ab \quad cd \quad ef \\ de \quad af \quad bc \\ cf \quad be \quad ad \end{array} \right\}.$$

Por lo tanto, los puntos de Kirkman $\left. \begin{array}{l} ab \quad ce \quad df \\ de \quad bf \quad ac \\ cf \quad bd \quad ad \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{l} ae \quad cd \quad bf \\ bd \quad af \quad ce \\ ac \quad be \quad df \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{l} ac \quad bd \quad ef \\ df \quad ae \quad bc \\ ce \quad df \quad ad \end{array} \right\}$

y el punto de Steiner $\left. \begin{array}{l} ab \quad cd \quad ef \\ de \quad af \quad bc \\ cf \quad be \quad ad \end{array} \right\}$ están alineados. \square

Definición 2.4.1: La recta de alineación de los puntos $\left. \begin{array}{l} ab \quad ce \quad df \\ de \quad bf \quad ac \\ cf \quad bd \quad ad \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{l} ae \quad cd \quad bf \\ bd \quad af \quad ce \\ ac \quad be \quad df \end{array} \right\}$,

$\left. \begin{array}{l} ac \quad bd \quad ef \\ df \quad ae \quad bc \\ ce \quad df \quad ad \end{array} \right\}$ y $\left. \begin{array}{l} ab \quad cd \quad ef \\ de \quad af \quad bc \\ cf \quad be \quad ad \end{array} \right\}$, del Teorema 2.4.1, se denomina **recta de Cayley del hexagrama**.

Observación 2.4.1: La matriz asociada al punto de Steiner $\left. \begin{array}{l} ab \quad cd \quad ef \\ de \quad af \quad bc \\ cf \quad be \quad ad \end{array} \right\}$, del Teorema

2.4.1, se puede formar tomando las columnas completas de los puntos de Kirkman

$\left. \begin{array}{l} ab \quad ce \quad df \\ de \quad bf \quad ac \\ cf \quad bd \quad ad \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{l} ae \quad cd \quad bf \\ bd \quad af \quad ce \\ ac \quad be \quad df \end{array} \right\}$, $\left. \begin{array}{l} ac \quad bd \quad ef \\ df \quad ae \quad bc \\ ce \quad df \quad ad \end{array} \right\}$ alineados con él en la recta de Cayley.

El siguiente teorema aparece en el trabajo de Veronesse titulado *Nuovi Teoremi sull Hexagramum Misticum* (ver G. Veronesse [7]), pero la demostración dada a continuación se debe a San Agustín (ver San Agustín [2]).

Teorema 2.4.2: Los tres puntos de Kirkman, asociados de acuerdo a la correspondencia 2 a las rectas de Pascal que concurren en un punto de Steiner g , están sobre la recta G que también pasa por el punto de Steiner g' , conjugado de g .

Demostración: Sea K un punto de Kirkman y sean p, q y r las tres rectas de Pascal que pasan por K . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$p := abc\bar{d}\bar{e}\bar{f} \quad q := ac\bar{d}\bar{f}\bar{e}\bar{b} \quad \text{y} \quad r := ac\bar{h}\bar{e}\bar{d}\bar{f}\bar{b}.$$

Sobre cada una de estas tres rectas se hallan tres puntos fundamentales del hexagrama. de acuerdo a la tabla siguiente, donde la notación se ha elegido de tal forma que los puntos T_i están sobre la recta p , los puntos Q_i sobre la recta q y, finalmente, los puntos R_i están sobre la recta r .

$$\begin{aligned} T_0 &:= (af, dc) & Q_0 &:= (be, dc) & R_0 &:= (af, be) \\ T_1 &:= (bc, ef) & Q_1 &:= (df, ab) & R_1 &:= (ac, ed) \\ T_2 &:= (de, ba) & Q_2 &:= (ef, ac) & R_2 &:= (bc, df) \end{aligned}$$

Nótese que el triángulo $T_0Q_0R_0$ es el único, de entre los que se pueden formar con los puntos recién definidos, cuyos lados son todos lados fundamentales del hexagrama místico determinado por los puntos P_1, \dots, P_6 .

Además, todos los lados de los triángulos $T_1Q_1R_1$ y $T_0Q_0R_0$ son rectas de Pascal (y esta vez también son las únicas posibilidades) del mismo hexagrama.

Así, los ejes de perspectiva de los pares de triángulos $T_0Q_0R_0$ y $T_1Q_1R_1$, así como $T_0Q_0R_0$ y $T_2Q_2R_2$ son, respectivamente,

$$r_2 := \bar{f}a\bar{e}b\bar{d}\bar{c} \quad \text{y} \quad r_1 := \bar{a}\bar{f}b\bar{e}c\bar{d}$$

Por otra parte, para el par de triángulos $T_1Q_1R_1$ y $T_2Q_2R_2$, se tienen las propiedades siguientes:

1. Las intersecciones de sus pares correspondientes son los puntos de Kirkman K_1, K_2 y K_3 determinados de acuerdo al teorema 2.3.1.
2. Cada uno de esos puntos corresponde, de acuerdo a la correspondencia 1, a una cierta recta de Pascal.

Explícitamente, en la tabla siguiente tenemos, en orden descendente en cada columna, uno de los puntos K_i correspondientes a la propiedad (1), las rectas de Pascal que los definen y, finalmente, la recta de Pascal correspondiente a la propiedad (2).

K_1	K_2	K_3
$abc\bar{d}\bar{e}\bar{f}$	$\bar{f}d\bar{e}b\bar{a}\bar{c}$	$ac\bar{b}\bar{d}\bar{e}\bar{f}$
$\bar{a}\bar{b}\bar{f}e\bar{d}\bar{c}$	$bc\bar{a}\bar{d}\bar{f}\bar{e}$	$e\bar{d}\bar{f}a\bar{b}\bar{c}$

$aedfbc$	$bcfeda$	$acefdb$
$fadbec$	$afhdce$	$daebfc$

Estas rectas de Pascal concurren en un punto de Steiner g , de acuerdo al teorema 2.2.2. Finalmente, los ejes de perspectiva r_1 y r_2 concurren conjuntamente con la recta de Cayley G en g' , el punto de Steiner conjugado de g , de acuerdo a la observación 2.2.2.

Correspondencia 2: El teorema nos proporciona una correspondencia biyectiva entre los puntos de Steiner y las rectas de Cayley, asociando la recta G al punto g , donde G es la recta de Cayley del teorema 2.4.2 y g el punto de Steiner, conjugado al punto de Steiner g' , que pertenece a ella.

Proposición 2.4.1: Hay 20 rectas de Cayley en el hexagrama.

Demostración: La correspondencia 2 nos proporciona una correspondencia biyectiva entre las rectas de Cayley y los puntos de Steiner.

Hay 20 puntos de Steiner en el hexagrama; por lo tanto, también hay 20 rectas de Cayley. \square

A continuación daré una segunda demostración para la proposición 2.4.1, esta vez tomando en cuenta que la configuración, a nivel de rectas de Cayley y puntos de Kirkman, es un sistema de Steiner $S(2,3,60)$ (ver apéndice B). Consideré importante incluir esta demostración como una manera de contrastar los metodos de demostración que he utilizado a lo largo de este capítulo, con un método mas moderno de hacer el conteo.

Demostración: Si tomamos las rectas de Cayley como bloques y los puntos de Kirkman como puntos, obtenemos un sistema de Steiner $S(2,3,60)$, donde

- (1) $P = 60$
- (2) $B = 3$ para todo $B \in \mathcal{B}$
- (3) Para cualquier conjunto T de 2 puntos, hay exactamente 1 bloque incidente con todos los puntos en T .

Entonces, para este diseño $b = \frac{(60)(1)}{3} = 20$. Por lo tanto hay 20 rectas de Cayley en el sistema de Steiner y por consecuencia en la configuración del hexagrama místico de Pascal.

2.5 Rectas de Plücker.

Poco después de que Steiner probó que las rectas de Pascal concurren por ternas en 20 puntos de Steiner, Julius Plücker demostró que éstos se hallan alineados en 15 rectas que llamaremos *rectas de Plücker*.

Salmon mencionó este resultado en sus notas (ver Salmon [1]), pero la demostración no aparece completamente detallada.

Para probar que hay 4 puntos de Steiner alineados en una recta de Plücker, seguiré los siguientes pasos:

- 1) Tomaré un punto de Kirkman k y las tres rectas de Pascal s , t y w que concurren en él.

- 2) Tomare dos triángulos Δ_1 y Δ_2 en perspectiva, con centro de perspectiva en k y vértices en las rectas de Pascal s , t y w .
- 3) Demostraré que las intersecciones de los lados correspondientes de Δ_1 y Δ_2 son tres puntos de Steiner g_1 , g_2 y g_3 que están alineados sobre una recta l_1 .
- 4) Repetiré los pasos 1, 2 y 3 para un punto de Kirkman k . Encontraré 2 triángulos Δ_1' y Δ_2' , tales que las intersecciones de sus lados correspondientes sean los tres puntos de Steiner g_2 , g_3 y g_4 alineados sobre una recta l_2 .
- 5) Observaré que los puntos g_2 y g_3 se encuentran al mismo tiempo en l_1 y en l_2 y, como sabemos que por cualesquiera dos puntos en $P^2(\mathbb{R})$ pasa una única recta, entonces $l_1 = l_2$ y los puntos g_1 , g_2 , g_3 y g_4 , están alineados.

Teorema 2.5.1: Los puntos de Steiner $\left. \begin{matrix} be & cd & af \\ ac & bf & de \\ df & ae & bc \end{matrix} \right\}$, $\left. \begin{matrix} be & cd & af \\ cf & ae & bd \\ ad & bf & ce \end{matrix} \right\}$, $\left. \begin{matrix} be & cd & af \\ df & ab & ce \\ ac & ef & bd \end{matrix} \right\}$ y

$\left. \begin{matrix} be & cd & af \\ cf & ab & de \\ ad & ef & bc \end{matrix} \right\}$ están alineados.

Demostración: Tomemos tres rectas de Pascal que concurren en un punto de Kirkman, por ejemplo:

$$s := \left. \begin{matrix} ab & ce & df \\ de & bf & ac \end{matrix} \right\} \quad t := \left. \begin{matrix} de & hf & ac \\ cf & ae & bd \end{matrix} \right\} \quad w := \left. \begin{matrix} cf & ae & bd \\ ab & df & ce \end{matrix} \right\}$$

que concurren en el punto de Kirkman $k := \left. \begin{matrix} ab & ce & df \\ de & bf & ac \\ cf & ae & bd \end{matrix} \right\}$.

Podemos formar un triángulo tomando un punto fundamental en cada una de estas rectas, cuyos vértices son (df, ac) , (bf, ae) , (bd, ce) y cuyos lados son las rectas de Pascal

$$\left. \begin{matrix} ab & bf & de \\ df & ae & cb \end{matrix} \right\} \quad \left. \begin{matrix} bf & ce & ad \\ ae & bd & cf \end{matrix} \right\} \quad \left. \begin{matrix} bd & ac & ef \\ ce & df & ab \end{matrix} \right\} \quad (\Delta_1)$$

Ahora, tomemos en cada una de las rectas de Pascal s , t y w un punto de Kirkman que encontraremos al aumentar el renglón $af \ cd \ be$ a la matriz asociada a cada una de ellas. Es decir, tomamos los puntos de Kirkman

$$\left. \begin{matrix} ab & ce & df \\ de & bf & ac \\ af & cd & be \end{matrix} \right\} \quad \left. \begin{matrix} de & bf & ac \\ cf & ae & bd \\ af & cd & be \end{matrix} \right\} \quad \left. \begin{matrix} cf & ae & bd \\ ab & df & ce \\ af & cd & be \end{matrix} \right\}$$

A continuación, formemos un triángulo cuyos vértices sean dichos puntos y cuyos lados sean las rectas de Pascal que pasan por pares de ellos, es decir, las rectas:

CAPITULO 2: CONSTRUCCIÓN DEL HEXAGRAMA MISTICO

$$\left. \begin{array}{ccc} ac & bf & de \\ be & cd & af \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{ccc} cf & ae & bd \\ be & cd & af \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{ccc} df & ab & ce \\ be & cd & af \end{array} \right\} \quad (\Delta_2)$$

Por construcción, las rectas que unen vértices correspondientes de Δ_1 y Δ_2 concurren en el punto de Kirkman $k := \left. \begin{array}{ccc} ab & ce & df \\ de & bf & ac \\ cf & ae & bd \end{array} \right\}$. Entonces, por el teorema 2.0.0 las intersecciones de sus lados correspondientes están alineadas (Fig.9). Estas intersecciones son los tres puntos de Steiner:

$$\left. \begin{array}{ccc} be & cd & af \\ ac & bf & de \\ df & ae & bc \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{ccc} be & cd & af \\ cf & ae & bd \\ ad & hf & ce \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{ccc} cf & ae & bd \\ ab & df & ce \\ af & cd & be \end{array} \right\} \quad (I_1)$$

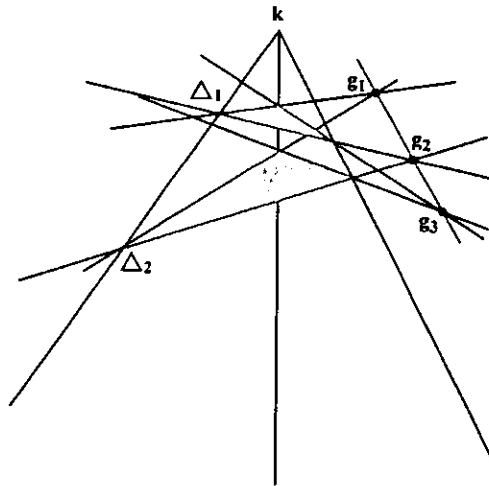


Fig.9: Triángulos Δ_1 y Δ_2 y g_1, g_2 y g_3 , los puntos de intersección de sus lados correspondientes

Tomemos ahora las tres rectas de Pascal

$$n := \left. \begin{array}{ccc} cf & ae & bd \\ ab & df & ce \end{array} \right\} \quad m := \left. \begin{array}{ccc} ad & ef & bc \\ cf & bd & ae \end{array} \right\} \quad p := \left. \begin{array}{ccc} ad & ef & bc \\ ce & ab & df \end{array} \right\}$$

que concurren en un punto de Kirkman $k' := \left. \begin{array}{ccc} cf & ae & bd \\ ab & df & ce \\ ad & bc & ef \end{array} \right\}$ y repetamos con ellas el

procedimiento seguido anteriormente con las rectas de Pascal s, t y w .

Formemos un triángulo, tomando un punto fundamental en cada uno de ellas, cuyos vértices sean (bd, ce) , (ef, ab) y (cf, ad) , y cuyos lados sean las rectas de Pascal

$$\left. \begin{array}{l} cf \quad ae \quad bd \\ be \quad cd \quad af \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} cf \quad ae \quad bd \\ be \quad cd \quad af \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} cf \quad ae \quad bd \\ be \quad cd \quad af \end{array} \right\} \quad (\Delta_1)$$

Ahora, tomemos en cada una de las rectas de Pascal m, n y p un punto de Kirkman, que encontraremos al aumentar el renglón $af \quad cd \quad be$ a la matriz asociada cada una de ellas. Formemos un triángulo cuyos vértices sean estos puntos y cuyos lados sean las rectas de Pascal

$$\left. \begin{array}{l} cf \quad ae \quad bd \\ be \quad cd \quad af \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} cf \quad ae \quad bd \\ ad \quad bf \quad ce \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} ad \quad ef \quad bc \\ be \quad cd \quad af \end{array} \right\} \quad (\Delta_2)$$

Por el teorema 2.0.0 las intersecciones de lados correspondientes de Δ_1 y Δ_2 , que son los

puntos de Steiner $g_2 := \left. \begin{array}{l} be \quad cd \quad af \\ cf \quad ae \quad bd \\ ad \quad bf \quad ce \end{array} \right\}$, $g_3 := \left. \begin{array}{l} be \quad cd \quad af \\ df \quad ab \quad ce \\ ac \quad ef \quad bd \end{array} \right\}$ y $g_4 := \left. \begin{array}{l} be \quad cd \quad af \\ cf \quad ab \quad de \\ ad \quad ef \quad bc \end{array} \right\}$ están

alineadas (Fig. 10). Llamemos l_2 a la recta de alineación de estos puntos.

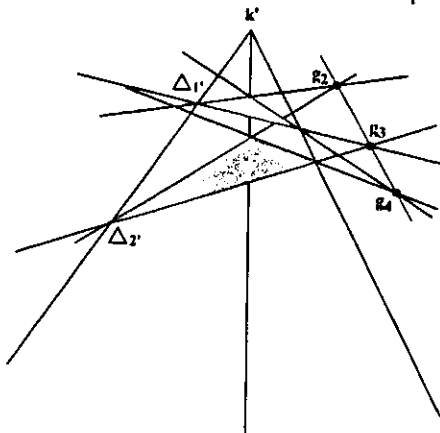


Fig. 10: Triángulos Δ_1 y Δ_2 y g_2, g_3 y g_4 , los puntos de intersección de sus lados correspondientes

Observemos que los puntos de Steiner g_2 y g_3 pertenecen, simultáneamente, a l_1 y a l_2 . Como en $P^2(\mathbb{R})$ hay una única recta que pasa por dos puntos cualquiera, entonces $l_1 := l_2$ y

$$\text{los puntos } g_1 := \begin{pmatrix} be & cd & af \\ ac & bf & de \\ df & ae & bc \end{pmatrix}, g_2 := \begin{pmatrix} be & cd & af \\ cf & ae & bd \\ ad & bf & ce \end{pmatrix}, g_3 := \begin{pmatrix} be & cd & af \\ df & ab & ce \\ ac & ef & bd \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$g_4 := \begin{pmatrix} be & cd & af \\ cf & ab & de \\ ad & ef & bc \end{pmatrix} \text{ están alineados. } \square$$

Definición 2.5.1: Llamaremos *recta de Plücker del hexagrama*, a la *recta de alineación de*

$$\text{los puntos de Steiner } g_1 := \begin{pmatrix} be & cd & af \\ cf & ae & bd \\ ad & bf & ce \end{pmatrix}, g_2 := \begin{pmatrix} be & cd & af \\ cf & ae & bd \\ ad & bf & ce \end{pmatrix}, g_3 := \begin{pmatrix} be & cd & af \\ df & ab & ce \\ ac & ef & bd \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$g_4 := \begin{pmatrix} be & cd & af \\ cf & ab & de \\ ad & ef & bc \end{pmatrix} \text{ del teorema 2.5.1.}$$

Observación 2.5.1: Los puntos $g_1 := \begin{pmatrix} be & cd & af \\ cf & ae & bd \\ ad & bf & ce \end{pmatrix}, g_2 := \begin{pmatrix} be & cd & af \\ cf & ae & bd \\ ad & bf & ce \end{pmatrix},$

$g_3 := \begin{pmatrix} be & cd & af \\ df & ab & ce \\ ac & ef & bd \end{pmatrix}$ y $g_4 := \begin{pmatrix} be & cd & af \\ cf & ab & de \\ ad & ef & bc \end{pmatrix}$, son todos los puntos de Steiner que pueden

formarse de tal modo que el renglón $be \ cd \ af$ pertenezca a su matriz asociada.

Proposición 2.5.2: Hay 15 rectas de Plücker en la configuración del Hexagrama Místico de Pascal.

Demostración: Hay solamente 15 maneras de hacer ternas de pares de los puntos a, b, c, d, e, f , de tal modo que no haya omisiones ni repeticiones de ninguna de las 6 letras; es decir, combinaciones de la forma de la forma $be \ cd \ af$. Por la observación 2.5.1, los cuatro puntos g_1, g_2, g_3 y g_4 comparten únicamente el renglón $be \ cd \ af$ y son las únicas posibilidades de puntos de Steiner que lo contengan.

Así, hay 15 maneras posibles de formar cuartetos de puntos de Steiner que compartan un renglón del modo anterior. Por lo tanto, hay 15 rectas de Plücker en el hexagrama. \square

2.6 Puntos de Salmon

En 1846, Salmon probó que las rectas de Cayley concurren de cuatro en cuatro en 15 puntos, a los que llamaremos *puntos de Salmon*. Aunque mencionó este resultado en sus notas (ver Salmon [1]), no incluyó la demostración, por lo cuál, la demostración que

CAPITULO 2: CONSTRUCCIÓN DEL HEXAGRAMA MISTICO

veremos a continuación fue tomada de la tesis doctoral de San Agustín (ver San Agustín [2]).

Teorema 2.6.1: *Las rectas de Cayley asociadas, de acuerdo a la Correspondencia 2 a cuatro puntos de Steiner alineados de acuerdo al Teorema 2.5.1. son concurrentes.*

Demostración: Consideremos una recta de Pascal, digamos

$$p := abcdef$$

Y los tres puntos fundamentales que la determinan:

$$(ab, de), (bc, ef) \text{ y } (cd, fa).$$

Por cada uno de estos puntos pasan, además de p , otras tres rectas de Pascal, lo cuál se explica en la siguiente tabla:

(ab,de)	(bc,ef)	(cd,fa)
bacdef	abcdfe	abdcef
abcedf	acbdef	fbcdea
bacdef	acbdfe	fbdcea

Así, los triángulos

$$\Delta_1 := (bacdef, abcdfe, abdcef) \text{ y } \Delta_2 := (abcdfe, acbdef, fbcdea)$$

están en perspectiva por pares, entonces las intersecciones de lados correspondientes se intersectan sobre la recta p .

Es decir, las rectas de Cayley mencionadas (que son las que unen pares de vértices correspondientes de dichos triángulos) son concurrentes. Si repetimos el proceso, ahora con la recta

$$p' := abfdec$$

obtenemos análogamente los triángulos

$$\Delta_1' := (abcedf, chadfe, ceabfd) \text{ y } \Delta_2' := (abcedf, acbdef, fbcdea)$$

para los cuales se aplica el mismo resultado.

Ya que cada uno de estos dos triángulos comparten un lado con alguno de los dos triángulos anteriores (incluyendo los vértices correspondientes), los centros de perspectiva coinciden. Es decir, tenemos cuatro rectas de Cayley concurrentes. \square

Definición 2.6.1: *El punto de concurrencia del teorema 2.6.1 es llamado punto de Salmon del hexagrama místico de Pascal.*

Observación 2.6.2: *Las cuatro rectas de Cayley, cuyos puntos de Steiner asociados por la correspondencia 2 tienen, en la notación de la definición 2.1.2, una columna vertical en*

CAPITULO 2: CONSTRUCCIÓN DEL HEXAGRAMA MISTICO

común, pasarán por el mismo punto de Salmon.

A continuación, veremos una correspondencia entre los puntos de Salmon y las rectas de Plücker propuesta por Hesse. La referencia a esta correspondencia aparece en [2].

Correspondencia 3 (Hesse): Podemos asignar a cada recta de Plücker un único punto de Salmon, del modo siguiente:

1. Tomemos una recta de Plücker l .
2. Tomemos las 4 rectas de Cayley, asociadas por la Correspondencia 2 a cada uno de los puntos de Steiner que pertenecen a la recta l .
3. Si i es el punto de Salmon de concurrencia de las rectas de Cayley anteriores, éste será el punto de Salmon asociado a la recta l .

Proposición: *Hay 15 puntos de Salmon en el hexagrama místico de Pascal.*

Demostración: La correspondencia 3 nos proporciona una correspondencia biyectiva entre los puntos de Salmon y las rectas de Plücker. Por la proposición 2.5.2 sabemos que hay 15 rectas de Plücker en el hexagrama, por lo tanto hay 15 puntos de Salmon. \square

Con los puntos de Salmon he terminado la construcción del hexagrama místico de Pascal. Como pudimos observar en este capítulo, la construcción del hexagrama resulta sumamente intrincada usando los métodos propuestos por Salmon (ver Salmon [1]), pues depende de la elección cuidadosa de los elementos a considerar en cada caso y de un conocimiento profundo de la notación.

A continuación, haré un recuento de los resultados más importantes que fueron probados en este capítulo:

El hexagrama místico de Pascal, consta de los siguientes elementos:

- 1) 60 rectas de Pascal, las cuales concurren por ternas en 20 puntos de Steiner y en 60 puntos de Kirkman.
- 2) 20 puntos de Steiner, cada uno de los cuáles pertenece a una recta de Cayley y a 3 rectas de Pascal.
- 3) 60 puntos de Kirkman, cada uno de los cuáles pertenece a 3 rectas de Pascal y a una recta de Cayley.
- 4) 20 rectas de Cayley, a cada una de las cuáles pertenecen 3 puntos de Kirkman y un punto de Steiner.
- 5) 15 rectas de Plücker, cada una de las cuáles esta formada por 4 puntos de Steiner.
- 6) 15 puntos de Salmon, a través de cada uno de los cuáles pasan 4 rectas de Cayley.

Por último, recordemos las correspondencias de Hesse para algunos pares de elementos del hexagrama.

CAPITULO 2: CONSTRUCCIÓN DEL HEXAGRAMA MISTICO

Correspondencia 1: Asignamos a la recta de Pascal $abcdef$ el punto de Kirkman formado por los 9 lados fundamentales que no pertenecen al hexágono $abcdef$. Esto es, el punto de

$$\text{Kirkman } \left. \begin{array}{l} ad \quad bf \quad ce \\ eb \quad ac \quad df \\ fc \quad bd \quad ed \end{array} \right\}.$$

Correspondencia 2: Asignamos a la recta de Cayley, formada por los puntos de Kirkman

$$\left. \begin{array}{l} ab \quad ce \quad df \\ de \quad bf \quad ac \\ cf \quad bd \quad ad \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} ae \quad cd \quad bf \\ bd \quad af \quad ce \\ ac \quad be \quad df \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} ac \quad bd \quad ef \\ df \quad ae \quad bc \\ ce \quad df \quad ad \end{array} \right\} \text{ y el punto de Steiner } g := \left. \begin{array}{l} ab \quad cd \quad ef \\ de \quad af \quad bc \\ cf \quad be \quad ad \end{array} \right\}, \text{ el punto de Steiner } \left. \begin{array}{l} ab \quad de \quad cf \\ cd \quad af \quad be \\ ef \quad bc \quad ad \end{array} \right\} \text{ conjugado a } g.$$

Correspondencia 3: Asignamos a la recta de Plücker formada por los puntos de Steiner g_i

$$:= \left. \begin{array}{l} be \quad cd \quad af \\ cf \quad ae \quad bd \\ ad \quad bf \quad ce \end{array} \right\}, g_2 := \left. \begin{array}{l} be \quad cd \quad af \\ cf \quad ae \quad bd \\ ad \quad bf \quad ce \end{array} \right\}, g_3 := \left. \begin{array}{l} be \quad cd \quad af \\ df \quad ab \quad ce \\ ac \quad ef \quad bd \end{array} \right\} \text{ y } g_4 := \left. \begin{array}{l} be \quad cd \quad af \\ cf \quad ab \quad de \\ ad \quad ef \quad bc \end{array} \right\}, \text{ el punto}$$

de Salmon que se encuentra del modo siguiente:

1. Llamemos l a la recta de Plücker anterior.
2. Sean G_1, G_2, G_3 y G_4 , las rectas de Cayley asociadas por la correspondencia 1, a los puntos de Steiner g_1, g_2, g_3 y g_4 respectivamente.
3. Si i es el punto de concurrencia de G_1, G_2, G_3 y G_4 , éste será el punto asociado a la recta l .

CAPITULO 3

Representación del hexagrama místico de Pascal en $S(K_6)$.

Como pudimos observar en el capítulo 2 de esta tesis, la construcción del hexagrama, usando la notación y métodos de Salmon, resulta sumamente intrincada.

El problema de encontrar una notación más adecuada, nos sugiere la idea de representar los elementos del hexagrama en algún otro contexto.

En este capítulo estudiaré una representación del hexagrama en la red de subgráficas de K_6 , la gráfica completa con 6 vértices, propuesta por San Agustín en [2].

Este nuevo enfoque me permitirá, por una parte, simplificar las demostraciones de varios teoremas que fueron probados en el capítulo 2, y por otra proponer una nueva notación más simple. En este capítulo usaré varios conceptos básicos de teoría de gráficas, todos los cuales se encuentran definidos en el apéndice C de esta tesis.

Para continuar con el estudio del hexagrama, estructuraré sus elementos en distintos niveles del modo que explicaré en el siguiente apartado.

3.0 Una jerarquía natural en el hexagrama.

A continuación estudiaremos los elementos del hexagrama en distintos niveles. Para esto, definiremos una estructura en las clases de elementos, a la que llamaremos *jerarquía*, tomando en cuenta:

- a. El orden con que se construyen los elementos y el tipo de elementos que se consideran para dicha construcción.
- b. La restricción de las operaciones \wedge (ínfimo) y \vee (supremo) de la red geométrica de subespacios de $P^2(\mathbb{R})$ a la estructura de incidencia del hexagrama.

Por otro lado, por la definición de jerarquía que daremos a continuación, dichas operaciones estarán definidas parcialmente sobre los diversos elementos del hexagrama.

Esta estructura también cumplirá con las siguientes dos propiedades:

1. Cada recta está determinada por dos cualesquiera de sus puntos y dualmente,
2. Cada punto está determinado por dos cualesquiera rectas cualesquiera que pasan por él.

Además, los elementos de un cierto nivel de la jerarquía cubren a los elementos del nivel anterior que los definen.

En primer lugar definiremos la jerarquía para las rectas de Pascal y los puntos de Kirkman.

Definición 3.0.0: Definiremos la jerarquía en las clases de rectas de Pascal y puntos de Kirkman como una estructura de 2 niveles donde los puntos de Kirkman cubren a las rectas de Pascal del nivel anterior que, por el teorema 2.3.1, son incidentes con ellos (ver Fig. 11).

Por esta definición, el punto de Kirkman $\left. \begin{matrix} ab & ce & df \\ cd & bf & ae \\ ef & ac & bd \end{matrix} \right\}$ del teorema 2.3.1 cubre a las rectas de Pascal $\left. \begin{matrix} ab & ce & df \\ cd & bf & ae \end{matrix} \right\}$, $\left. \begin{matrix} cd & bf & ae \\ ef & ac & bd \end{matrix} \right\}$ y $\left. \begin{matrix} ef & ac & bd \\ ab & df & ce \end{matrix} \right\}$ que son incidentes con él.

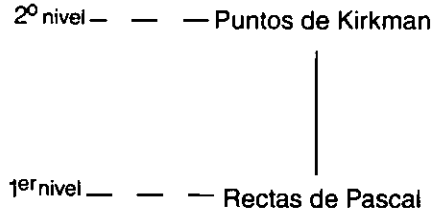


Fig. 11: Jerarquía de las clases de rectas de Pascal y puntos de Kirkman..

Análogamente, extenderemos la definición de la jerarquía a las clases de puntos de Steiner, rectas de Plücker, rectas de Cayley y puntos de Salmon, tomando en cuenta las propiedades que enumeramos anteriormente y la construcción de los elementos en el capítulo 2. Estableceremos los niveles de dicha estructura a través del diagrama de la figura 12.

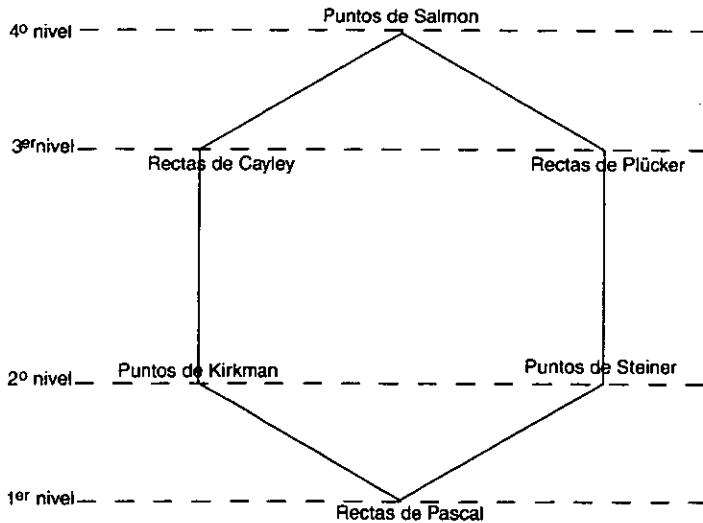


Fig. 12: Jerarquía de los elementos del hexagrama.

Notación 3.0.1: HM denotará a los elementos del hexagrama místico de Pascal, junto con la estructura jerárquica definida en la figura 11.

Notación 3.0.2: $S(K_6)$ denotará a la red de subgráficas de K_6 (ver apéndice D), con **supremo** dado por la unión conjuntista de dos de sus elementos $a \vee b := a \cup b$ e **ínfimo** dado por la intersección conjuntista de dos de sus elementos denotada por $a \wedge b := a \cap b$.

A continuación relacionaré los elementos del hexagrama con ciertas subgráficas de K_6 , la gráfica completa con 6 vértices, respetando la estructura jerárquica del hexagrama definida en la figura 12, de la forma siguiente:

Construiremos una representación

$$\varphi: HM \rightarrow S(K_6)$$

con las propiedades siguientes:

I. Los puntos de cada nivel de HM estarán asociados con el supremo de las gráficas asociadas a las rectas en el nivel anterior que los definen y, análogamente, las rectas de cada nivel del hexagrama estarán asociadas con el supremo de las gráficas de los puntos del nivel anterior que las definen.

II. Es biyectiva al actuar en clases, es decir, asocia clases distintas de elementos de $S(K_6)$ a clases distintas de elementos de HM y es biyectiva al actuar una vez que se le restringe a cada una de estas clases.

Observación 3.0.0: De la construcción obtendremos que la representación φ preserva las propiedades 1 y 2 de la jerarquía de la figura 12, del modo siguiente:

1. Cada recta está determinada por cualesquiera dos de sus puntos, es decir, si tomamos cualesquiera dos puntos en la configuración, digamos P_1 y P_2 que definen alguna recta R

$$\varphi(P_1) \vee \varphi(P_2) = \varphi(R)$$

2. Análogamente, si tomamos dos rectas cualesquiera R_1 y R_2 que se intersectan en un punto P , se cumple que

$$\varphi(R_1) \wedge \varphi(R_2) = \varphi(P)$$

Observación 3.0.1: Por otro lado observemos que φ no es compatible con los ordenes parciales involucrados.

Por ejemplo, si G es la recta de Cayley del teorema 2.4.1 y H la recta de Pascal \overline{abcdef} tenemos que, aunque $H \leq G$ en la jerarquía de la figura 12, no ocurre que $\varphi(H) \leq \varphi(G)$ pues $\varphi(H) \cong C_6$ y $\varphi(G) \cong 2K_3$.

Observemos que esto sucede porque al pedir que φ preserve la estructura jerárquica de HM ,

CAPITULO 3. REPRESENTACION DEL HEXAGRAMA MISTICO EN $S(K_6)$

el supremo de dos elementos no siempre coincide con la unión conjuntista de sus gráficas asociadas.

Sin embargo, he preferido que ϕ preserve la estructura jerárquica de HM , aun a expensas de la preservación de los ordenes parciales involucrados para reflejar de una manera mas cabal la estructura natural del hexagrama.

Para ilustrar este punto he decidido incluir un esquema que representa las clases de elementos de $S(K_6)$, asociadas a clases de elementos de HM a través de ϕ (Fig. 13). Los símbolos \vee y \wedge de color negro, que corresponden al supremo e ínfimo en $S(K_6)$ (ver Notación 3.0.2), representan el tipo de operación que fue usada para definir a los elementos de cada clase, a partir ciertos elementos de la clase anterior, como explicaremos a lo largo de este capítulo. Sin embargo, para que la representación ϕ preserve las propiedades I y II de la jerarquía de HM , en realidad estaremos hablando de las operaciones de supremo e ínfimo en el sentido de los símbolos \vee y \wedge de color rojo.

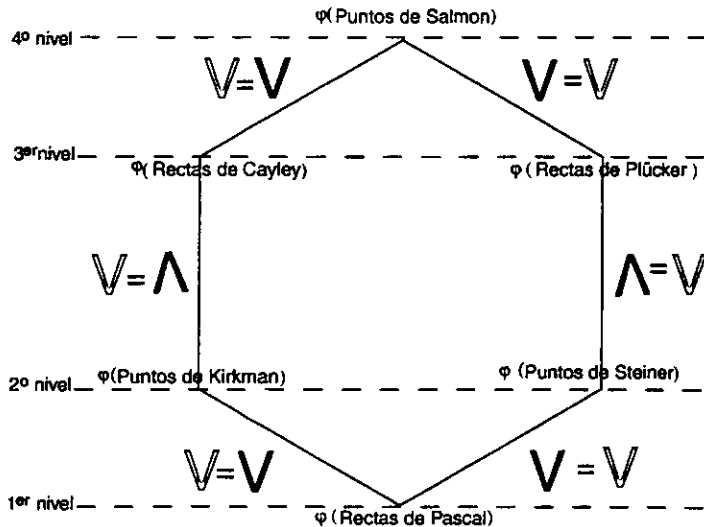


Fig. 13: Estructura de la representación de HM en $S(K_6)$.

Nota: La correspondencia entre rectas de Plücker y puntos de Salmon, que aparece en el diagrama de la figura 13 no será probada en este trabajo.

Procedamos pues a definir ϕ como sigue: tomemos los primeros elementos que construye Salmon en sus notas, esto es las rectas de Pascal.

3.1 Rectas de Pascal

Definición 3.1.1: Asociemos a las rectas de Pascal de la definición 2.1.2 una subgráfica de K_6 , del modo siguiente: subemos que las rectas de Pascal están definidas por las intersecciones de lados opuestos del hexágono determinado por algún ordenamiento de los puntos P_1, P_2, \dots, P_6 . A cada una de estas rectas de Pascal le asignamos la subgráfica de K_6 formada por los lados de dicho hexágono. Por ejemplo, a la recta \overline{abcdef} le asignamos la gráfica con aristas $[ab, bc, cd, de, ef, fa]$ (ver Fig. 14). Es decir, tenemos la siguiente relación a nivel de rectas de Pascal:

$$\varphi : abcdef \rightarrow [ab, bc, cd, de, ef, fa]$$

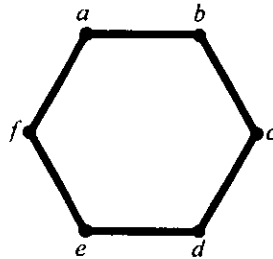


Fig. 14: Subgráfica de K_6 asociada a la recta de Pascal \overline{abcdef} .

Observación 3.1.0: $\varphi(abcdef)' = [ae, bd, cf, be, ad, bf, ac, ec, fd] \cong K_3 \square K_2$

Proposición 3.1.1: Sea \mathcal{P} el conjunto de las rectas de Pascal y \mathcal{C}_6 el conjunto de las subgráficas de K_6 de tipo C_6 . La asignación

$$\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}_6$$

es biyectiva.

Demostración: Para toda $G \in \mathcal{C}_6$ existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $\varphi^{-1}(G) = P$, donde P es la recta de Pascal determinada por el hexágono que tiene el mismo orden de los vértices de G .

Por lo tanto φ es suprayectiva.

Por otro lado, sean $G_1, G_2 \in \mathcal{C}_6$ y $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$. Supongamos que

$$G_1 = \varphi^{-1}(P_1) \neq \varphi^{-1}(P_2) = G_2.$$

Entonces, los vértices de G_1 y G_2 tienen ordenamientos cíclicos distintos, cada uno de los cuáles genera 3 puntos fundamentales. Si éstos estuvieran alineados tendríamos una recta de Pascal con 6 puntos fundamentales. \square

Definición 3.1.2: A partir de la asignación de la proposición 3.1.1 podemos extender la definición de φ , como sigue:

por ser K_6 una gráfica perfecta (ver definición C.8 apéndice C), los lados de cualquier

subgráfica de tipo C_6 en K_6 se pueden descomponer en 2 1-factores ajenos. Por lo tanto, la gráfica $\varphi(abcdef)$ es realmente

$$\varphi(ab, cd, ef) \vee \varphi(bc, de, fa).$$

La siguiente proposición ya fue probada en el capítulo 2 (proposición 2.1.4), pero daré una nueva demostración usando la asignación φ .

Proposición 3.1.2: Hay 60 rectas de Pascal en el hexagrama místico.

Demostración: Por la definición 3.1.1, sabemos que si P es una recta de Pascal, $\varphi(P) \cong C_6$. Por ser K_6 una gráfica perfecta (definición C.8, apéndice C), cualquier gráfica de tipo C_6 es la unión de dos 1-factores disjuntos. Por la proposición C.1 del apéndice C, sabemos que hay 15 1-factores en K_6 y si fijamos cualquiera de éstos, hay 8 1-factores disjuntos a él. Así tenemos $\frac{(15)(8)}{2} = 60$ gráficas de tipo C_6 no isomorfas, cada una asociada a alguna recta de Pascal. Por lo tanto, hay 60 rectas de Pascal en el hexagrama. \square

Proposición 3.1.3: Hay 15 lados fundamentales en la configuración del hexagrama místico de Pascal.

Demostración: A partir de la definición de φ nivel de rectas de Pascal, es claro que podemos asignarle a cada lado fundamental de la configuración una arista de la gráfica completa K_6 , pero K_6 tiene 15 aristas, por lo tanto hay 15 lados fundamentales en el hexagrama. \square

Proposición 3.1.4: Hay 45 puntos fundamentales en el hexagrama místico de Pascal.

Demostración: Por la proposición 3.1.4 podemos asignar a cada punto fundamental dos aristas no adyacentes en la gráfica completa K_6 . Sabemos que en K_6 hay 15 aristas, y cada arista es disjunta con otras 6, por lo tanto hay $\frac{(15)(6)}{2} = 45$ pares de aristas disjuntas, es decir, hay 45 puntos fundamentales en el hexagrama. \square

El siguiente resultado fue probado en la proposición 2.1.5, pero la demostración en este contexto se simplifica notablemente.

Proposición 3.1.5: Hay 4 rectas de Pascal que pasan por cada punto fundamental del hexagrama.

Demostración: Como discutimos anteriormente, por medio de φ asignamos pares de aristas disjuntas de K_6 a puntos fundamentales del hexagrama, por ejemplo $\varphi(ab, de) = [ab, de]$. Para encontrar cuantas rectas de Pascal pasan por cada punto fundamental, nos fijamos en cuantos seis ciclos podemos formar de tal modo que en ellos la arista ab sea lado opuesto de la arista de . Es fácil ver que sólo hay cuatro maneras de formar dicho seis ciclo (Ver Fig. 15). \square

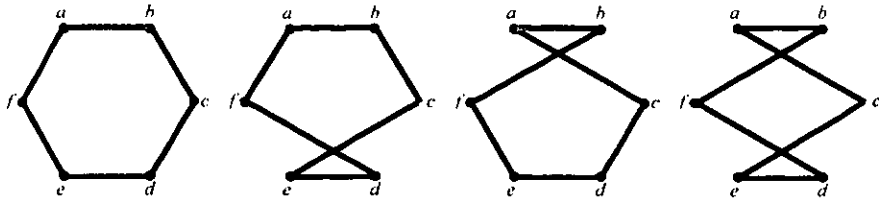


Fig. 15: Distintas maneras de formar un 6-ciclo, de tal modo que ab y de sean lados opuestos.

3.2 Puntos de Steiner.

En primer lugar, observemos que si C_1 , C_2 y C_3 son subgráficas de K_6 de tipo C_6 , entonces la unión de C_1 , C_2 y C_3 es una gráfica de tipo $2K_3$ y $(C_1 \cup C_2 \cup C_3)' \cong K_{3,3}$. De esto, obtenemos la siguiente:

Definición 3.2.0: Sabemos que las rectas de Pascal $abedcf$, $cdafeb$ y $efcbad$, concurren

$$\text{en un punto de Steiner } g := \left. \begin{array}{l} ab \quad de \quad cf \\ cd \quad fa \quad be \\ ef \quad bc \quad ad \end{array} \right\} \text{ (teorema 2.2.1).}$$

Por lo tanto, definimos la gráfica asociada al punto de Steiner g , como $\varphi(g) = \varphi(abedcf) \vee \varphi(cdafeb) \vee \varphi(efcbad) = [ab, be, ed, dc, cf, fa, ad, bc, fe]$, donde $\varphi(g)$ es una gráfica de tipo $K_{3,3}$ (Ver Fig. 16).

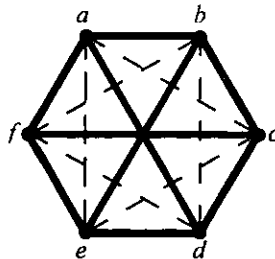


Fig. 16: Gráfica asociada al punto de Steiner $\left. \begin{array}{l} ab \quad de \quad cf \\ cd \quad fa \quad be \\ ef \quad bc \quad ad \end{array} \right\}$.

Observación 3.2.0: La gráfica $(\varphi g)' := [ac, ce, ea, bf, fd, db] \cong 2K_3$.

Proposición 3.2.1: La asignación φ , a nivel de puntos de Steiner, es suprayectiva.

Demostración: Si tomamos 6 aristas en K_6 , tales que formen dos triángulos ajenos en vértices, las aristas restantes formarán tres gráficas de tipo C_6 , cuyas rectas de Pascal asociadas concurren en un punto de Steiner. (Ver Fig. 17)¹

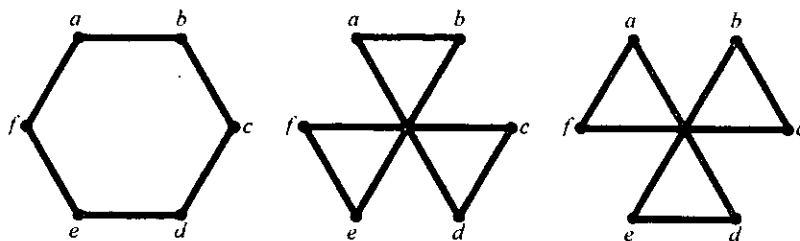


Fig. 17: Hexágonos asociados a las rectas de Pascal que concurren en el punto de Steiner de la definición 3.2.0.

Proposición 3.2.2: La asignación φ a nivel de puntos de Steiner es 2 a 1.

Demostración: La gráfica $\varphi(g) := [ab, be, ed, dc, cf, fa, ad, bc, fe] \cong K_{3,3}$ asociada al punto de Steiner de la proposición 3.2.0, puede descomponerse en dos ternas distintas: T_1 (ver Fig. 18) y T_2 (ver Fig. 19), de 1-factores disjuntos.

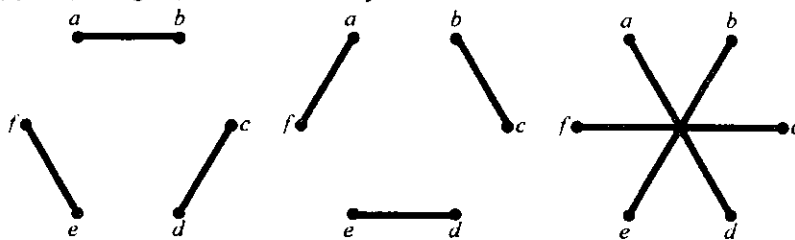


Fig. 18: Terna T_1 de 1-factores disjuntos en aristas, cuya unión es la gráfica $[ab, be, ed, dc, cf, fa, ad, bc, fe]$.

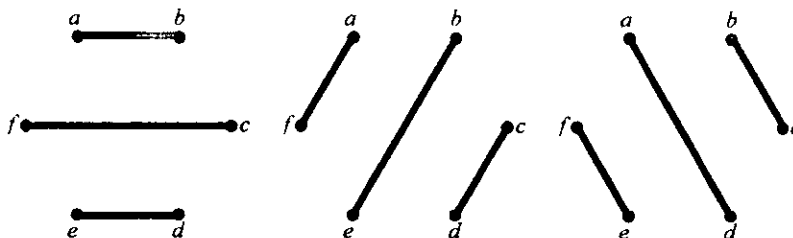


Fig. 19: Terna T_2 de 1-factores, cuya unión es la gráfica $[ab, be, ed, dc, cf, fa, ad, bc, fe]$.

¹ Para esto hay 2 posibilidades, las cuales corresponden a los puntos de Steiner g (de la teorema 2.2.1) y al punto de Steiner g' (del teorema 2.2.2).

Si combinamos por pares los 1-factores de cualquiera de estas 2 ternas, obtenemos 3 gráficas de tipo C_6 , las cuales a su vez corresponden a tres rectas de Pascal en cada caso. (Ver Fig. 20 y Fig. 21)

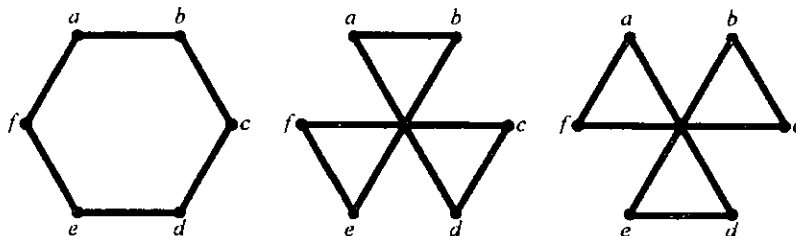


Fig. 20: Hexágonos asociados a las rectas de Pascal formadas por pares de 1-factores de la terna T_1 .

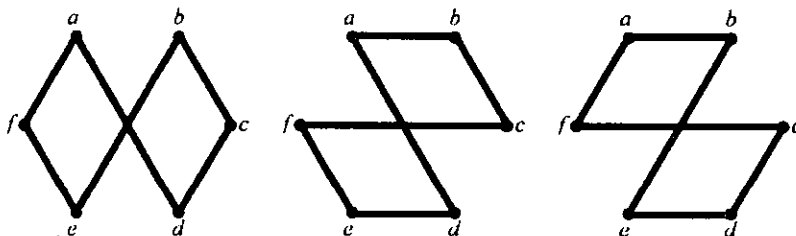


Fig. 21: Hexágonos asociados a las rectas de Pascal formadas por pares de 1-factores de la terna T_2 .

Como las rectas de Pascal formadas por la terna T_1 y las rectas de Pascal formadas por la terna T_2 son distintas, entonces los puntos de concurrencia de estas dos ternas de rectas de Pascal corresponden a 2 puntos de Steiner g y g' distintos.

Por lo tanto, la función a nivel de puntos de Steiner es 2 a 1. \square

Observación 3.2.1: Los dos puntos de Steiner asociados a la gráfica $[ab, be, ed, dc, cf, fa, ad, bc, fe]$ de la definición 3.2.0, son los puntos de Steiner

$$g := \left. \begin{matrix} ab & de & cf \\ cd & fa & be \\ ef & bc & ad \end{matrix} \right\} \text{(punto de Steiner del teorema 2.2.1) } \text{ y } g' := \left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & fa & bc \\ cf & be & ad \end{matrix} \right\} \text{(punto de Steiner del teorema 2.2.2.)}$$

que son conjugados armónicos respecto a nuestra cónica original C .

La observación 3.2.1 es sumamente interesante, pues nos hace notar que dos puntos de Steiner, conjugados respecto a nuestra cónica original C , están relacionados también en el contexto de $S(K_6)$

Observación 3.2.2: Por la proposición 3.2.1 podemos extender la definición de φ como sigue: sabemos que la gráfica $\varphi(g):=[ab, be, ed, dc, cf, fa, ad, bc, fe] \cong K_{3,3}$ asociada al punto de Steiner de la proposición 3.2.0. puede descomponerse en dos ternas distintas: T_1 (ver Fig.18) y T_2 (ver Fig.19), de 1-factores disjuntos. Entonces, la gráfica $\varphi(g)$ puede verse como supremo de ternas de 1-factores ajenos de los dos modos siguientes.

$$\varphi(g)=\varphi(ab, fc, ed) \vee \varphi (af, be, cd) \vee \varphi (ad, be, cf)$$

$$\varphi(g)=\varphi(ab, fe, cd) \vee \overset{y}{\varphi (af, bc, ed)} \vee \varphi (ad, fc, be)$$

Observación 3.2.3: Sea \mathcal{T} es el conjunto de ternas de 1-factores ajenos, donde la unión de los 1-factores cada terna $t \in \mathcal{T}$ es una gráfica de tipo $K_{3,3}$ y \mathcal{ST} es el conjunto de puntos de Steiner del hexagrama. Por la observación 3.2.2 y la proposición 3.2.1, la asignación

$$\varphi : \mathcal{ST} \rightarrow \mathcal{T}$$

es biyectiva.

Observación 3.2.4: De observación 3.2.3 obtenemos que, dada la gráfica asociada a cualquier punto de Steiner St y una de sus descomposiciones en 1-factores ajenos, podemos determinar exactamente que rectas de Pascal concurren en el. Estas son las rectas de Pascal cuyas gráficas asociadas están formadas por pares de dichos 1-factores ajenos.

El siguiente conteo fue realizado en la proposición 2.2.2, pero lo estudiaré nuevamente en este contexto para ilustrar la importancia de la asignación φ .

Proposición 3.2.3: Hay 20 puntos de Steiner en el hexagrama.

Demostración: Sea St un punto de Steiner del hexagrama. Observemos que el complemento de $\varphi(St)$ es una subgráfica de K_6 (definición 3.2.0), que consta de 2 triángulos ajenos en aristas (Fig.22).

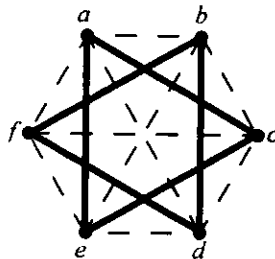


Fig. 22: Gráfica complementaria de $\varphi(St)$.

Veamos que hay 20 maneras de formar un par de triángulos de ese tipo, pues hay

$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$ maneras de formar ternas de vértices en K_6 y, al tomar una terna, la segunda queda determinada. Además, cualquiera de esas dos ternas determina el mismo par de triángulos, por lo tanto hay $\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 2} = 10$ ternas de triángulos ajenos en aristas; esto es, hay 10 maneras de formar gráficas de tipo $2K_3$ y, por lo tanto, 10 maneras de formar $\varphi((St)') \cong \varphi(St) \cong K_{3,3}$. Pero, por la proposición 3.2.2 sabemos que cada gráfica de tipo $2K_3 \cong \varphi(St)$ corresponde a 2 puntos de Steiner conjugados. Por lo tanto, hay 20 puntos de Steiner en el hexagrama místico de Pascal. \square

Observación 3.2.5: Si P_1, P_2, P_3 son las rectas de Pascal que concurren en un punto de Steiner St , entonces $\varphi(P_i) \vee \varphi(P_j) = \varphi(St) \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$.

3.3 Puntos de Kirkman.

Sabemos que las rectas de Pascal \overline{abfdce} , \overline{acdbfe} y \overline{acefdb} , concurren en un punto de Kirkman (teorema 2.3.1).

Consideremos la gráfica $\varphi(\overline{abfdce}) \vee \varphi(\overline{acdbfe}) \vee \varphi(\overline{acefdb})$, la cuál es el complemento del hexágono $acfebd$, osea, una gráfica producto de la forma $K_3 \square K_2$ (ver definición C.9, apéndice C). Si h es el punto de Kirkman en el que concurren las rectas de Pascal \overline{abfdce} , \overline{acdbfe} y \overline{acefdb} , entonces $\varphi(h) := [ab, bf, fd, dc, ce, ea, bd, ef, ac]$. (Ver Fig. 23)

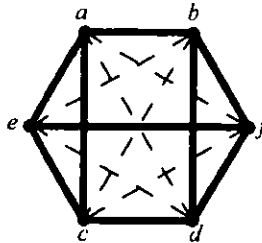


Fig. 23: Gráfica asociada al punto de Kirkman h .

Proposición 3.3.1: Sea \mathcal{K} el conjunto de los puntos de Kirkman y $\mathcal{K}_2 \square \mathcal{K}_3$ conjunto de las subgráficas de K_6 de tipo $K_2 \square K_3$. La asignación

$$\varphi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_2 \square \mathcal{K}_3$$

es biyectiva.

Demostración: Para toda $G \in \mathcal{K}_2 \square \mathcal{K}_3$ existe $k \in \mathcal{K}$ tal que $\varphi^{-1}(G) = k$, donde k es el punto de Kirkman en el que concurren las rectas de Pascal, cuyas gráficas asociadas son todas las gráficas de tipo C_6 que se pueden formar con las aristas de G . Por lo tanto, φ es suprayectiva.

Por otro lado, sean $G_1, G_2 \in \mathcal{K}_2 \square \mathcal{K}_3$ y $k_1, k_2 \in \mathcal{K}$. Supongamos que

$$G = \varphi^{-1}(k_1) \neq \varphi^{-1}(k_2) = G_2.$$

Entonces, las graficas G_1 y G_2 serian la unión de 2 ternas distintas de 1-factores ajenos. Por lo tanto, k_1 y k_2 serian dos puntos de Kirkman distintos. (Ver Fig. 24). \square

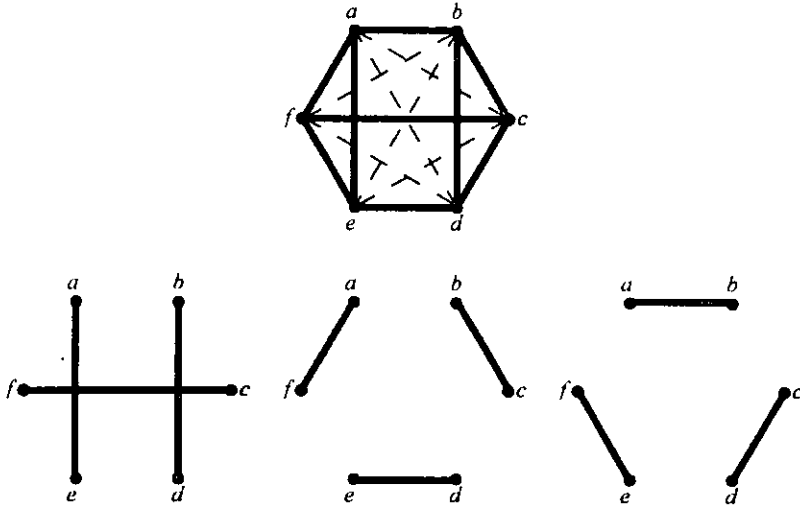


Fig. 24: El punto de Kirkman h y su descomposición en 1-factores ajenos.

Observación 3.3.0: Si tomamos tres rectas de Pascal P_1, P_2 y P_3 que concurren en un punto de Kirkman h , por ejemplo $\overline{abf\bar{d}ce}$, $\overline{acdbf\bar{e}}$ y $\overline{acef\bar{d}b}$, se preservan las propiedades del plano proyectivo de estas rectas bajo la asignación φ , en el sentido de que $\varphi(P_i) \vee \varphi(P_j) = \varphi(h)$ para cualquiera $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Es decir, la unión de los hexágonos asociados bajo φ a cada una de las rectas P , es la gráfica asociada a h .

Observación 3.3.1: Sea $H := \overline{abcdef}$ una recta de Pascal. Si tomamos $\varphi(H)$, el complemento de la subgráfica de tipo C_6 en K_6 , obtenemos una gráfica de tipo $\mathcal{K}_2 \square \mathcal{K}_3$, cuyos lados forman tres hexágonos que corresponden a las tres rectas de Pascal que concurren en el punto de Kirkman de la proposición 3.3.1. (Fig. 25)

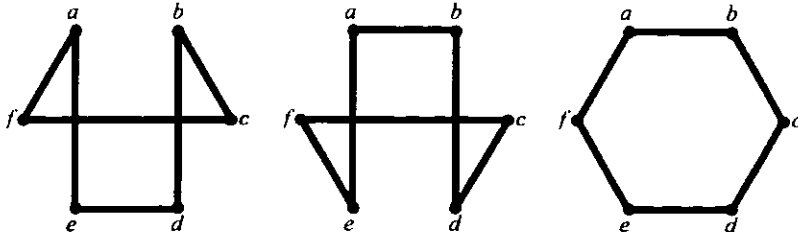


Fig. 25: Hexágonos correspondientes a las rectas de Pascal que concurren en el punto de Kirkman H.

Observación 3.3.2: Como vimos en la observación 3.3.1 anterior, el complemento de la gráfica asociada a un punto de Kirkman es un 6 ciclo, así que la *correspondencia 1* entre puntos de Kirkman y rectas de Pascal se representa en este contexto como la correspondencia de cada una de las subgráficas de tipo $K_2 \square K_3$, con su complemento (un 6-ciclo).

La siguiente proposición ya fue probada en el capítulo 2 (proposición 2.3.1), pero su demostración es interesante en este contexto.

Proposición 3.3.2: Hay 60 puntos de Kirkman en el hexagrama místico de Pascal.

Demostración: Como ya vimos, hay una correspondencia biyectiva entre los puntos de Kirkman y las gráficas de tipo $K_2 \square K_3$. Como el complemento de estas subgráficas es una gráfica de tipo C_6 sabemos que hay 60 de ellas, también hay 60 puntos de Kirkman en el hexagrama. \square

La siguiente proposición ya fue probada en el capítulo 2 (proposición 2.3.1), pero su demostración se simplifica en este contexto.

Proposición 3.3.3: Hay 3 puntos de Kirkman en cada recta de Pascal.

Demostración: Tomemos la recta de Pascal \overline{abfdce} , sabemos por la definición 3.1.1, que $\varphi(\overline{abfdce}) = [ab, bf, fd, dc, ce, ea]$.

Para obtener la gráfica asociada a algún punto de Kirkman que esté en dicha recta, tomamos $\varphi(\overline{abfdce})$ y completamos la gráfica para que sea una gráfica del tipo $K_2 \square K_3$, para esto necesitamos agregar un 1-factor consistente en 2 diagonales cortas y una larga. Pero hay tres maneras de hacerlo. Las gráficas resultantes corresponden (de acuerdo a la proposición 2.3.2), a los tres puntos de Kirkman que están en la recta de Pascal \overline{abfdce} (Fig.26). \square

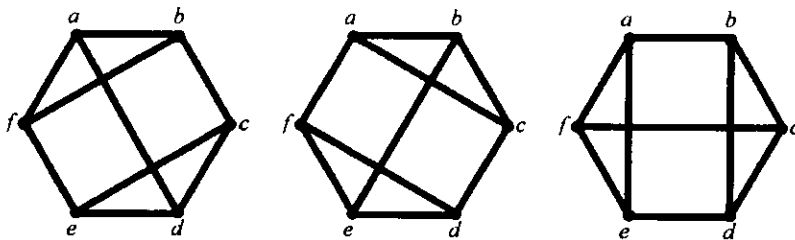


Fig. 26: Gráficas asociadas a los puntos de Kirkman sobre la recta de Pascal \overline{abfdce} .

Observación 3.3.3: Si P_1, P_2, P_3 son las rectas de Pascal que concurren en un punto de Kirkman K , entonces $\varphi(P_i) \vee \varphi(P_j) = \varphi(K) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$.

3.4 Rectas de Cayley.

Definición 3.4.1: Si los puntos de Kirkman $K_1 := \left. \begin{matrix} ab & ce & df \\ de & bf & ac \\ cf & ae & bd \end{matrix} \right\}$, $K_2 := \left. \begin{matrix} ae & cd & bf \\ bd & af & ce \\ ac & be & df \end{matrix} \right\}$.

$K_3 := \left. \begin{matrix} ac & bd & ef \\ df & ae & bc \\ ce & bf & ad \end{matrix} \right\}$ y el punto de Steiner $St := \left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & af & bc \\ cf & be & ad \end{matrix} \right\}$ están alineados en la recta de

Cayley del teorema 2.4.1, a la que llamaremos recta G , entonces

$$\varphi(G) := \varphi(K_1) \wedge \varphi(K_2) \wedge \varphi(K_3) \wedge \varphi(St).$$

Esto es, la gráfica asociada a G esta dada por las intersecciones de las gráficas asociadas a los puntos K_1 , K_2 , K_3 y St que están sobre ella.

Por lo tanto, $\varphi(G) = [ac, ce, ea, bd, df, fb]$, la cual es una gráfica del tipo $2K_3$. (ver Fig. 27)

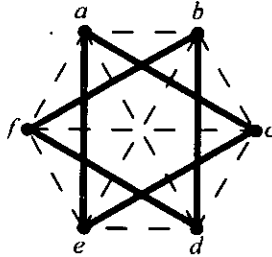


Fig. 27: Gráfica asociada a la recta de Cayley G .

Observación 3.4.1: Sea G la recta de Cayley de la definición 3.4.1. Observemos que $\varphi(G) := \varphi(St)'$, donde St es el punto de Steiner que pertenece a ella.

Definición 3.4.2: La gráfica asociada a la recta G de la definición 3.4.1 nos sugiere una nueva notación para las rectas de Cayley. Si G es la recta donde se encuentran los puntos

$$K_1 := \left. \begin{matrix} ab & ce & df \\ de & bf & ac \\ cf & ae & bd \end{matrix} \right\}, K_2 := \left. \begin{matrix} ae & cd & bf \\ bd & af & ce \\ ac & be & df \end{matrix} \right\}, K_3 := \left. \begin{matrix} ac & bd & ef \\ df & ae & bc \\ ce & bf & ad \end{matrix} \right\} \text{ y } St := \left. \begin{matrix} ab & cd & ef \\ de & af & bc \\ cf & be & ad \end{matrix} \right\},$$

podemos denotar a G del modo siguiente:

$$G := [ac, ce, ea, bd, df, fb]$$

Proposición 3.4.0: La asignación φ , a nivel de rectas de Cayley, es suprayectiva.

Demostración: Cada gráfica J , de tipo $2K_3$, esta asociada a partir de φ a la recta de Cayley

que contiene el punto de Steiner g , tal que $\varphi(g)' := J$ (Observación 3.4.1).
 Por lo tanto, la función es suprayectiva.

Proposición 3.4.1: *La asignación φ , a nivel de rectas de Cayley, es 2 a 1.*

Demostración: φ asocia a cada recta de Cayley una gráfica de tipo $2K_3$, la cual consta de seis aristas de K_6 , tales que formen dos triángulos ajenos en vértices. Las aristas restantes formarán una gráfica de tipo $K_{3,3}$. Pero, como mencionamos en la proposición 3.2.2, cada gráfica de este tipo esta asociada a dos puntos de Steiner distintos. Por lo tanto, φ asocia a cada gráfica de tipo $2K_3$ dos rectas de Cayley distintas; por lo tanto la función es 2 a 1 a nivel de rectas de Cayley. \square

Proposición 3.4.2: *Hay 20 rectas de Cayley en el hexagrama.*

Demostración: Como ya vimos en la demostración de la proposición 3.2.1, hay 10 subgráficas de K_6 del tipo $2K_3$ y cada una de estas corresponde a 2 rectas de Cayley. Por lo tanto, hay 20 rectas de Cayley en el hexagrama. \square

Proposición 3.4.3: *La correspondencia 2 entre rectas de Cayley y puntos de Steiner, se puede ver en este contexto como la correspondencia entre la gráfica $K_{3,3}$ y su complementaria.*

Observación 3.4.2.: Si h_1, h_2 y h_3 son tres puntos de Kirkman que pertenecen a la recta de Cayley G , entonces $\varphi(h_i) \wedge \varphi(h_j) = \varphi(G)$ para todo $i, j \in \{1,2,3\}$.

3.5 Rectas de Plücker.

A continuación veremos la definición de φ a nivel de las rectas de Plücker.

Definición 3.5.1: Si los puntos de Steiner $g_1 := \left. \begin{matrix} be & cd & af \\ ac & bf & de \\ df & ae & bc \end{matrix} \right\}$, $g_2 := \left. \begin{matrix} be & cd & af \\ cf & ae & bd \\ ad & bf & ce \end{matrix} \right\}$,

$g_3 := \left. \begin{matrix} be & cd & af \\ df & ab & ce \\ ac & ef & bd \end{matrix} \right\}$ y $g_4 := \left. \begin{matrix} be & cd & af \\ cf & ab & de \\ ad & ef & bc \end{matrix} \right\}$ alineadas en la recta de Plücker (a la que

llamaremos **Pl**) del teorema 2.5.1, entonces definimos

$$\varphi(Pl) = \varphi(g_1) \wedge \varphi(g_2) \wedge \varphi(g_3) \wedge \varphi(g_4) = [af, cd, be]$$

(Fig. 28).

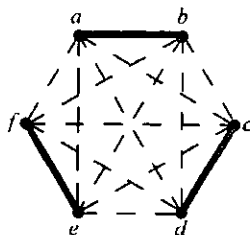


Fig. 28: Gráfica asociada a una recta de Plücker.

Observación 3.5.0: $\varphi(P_l)' = [ae, af, ed, bd, bc, be, ad, cf, bf, fd, ac, ec] \cong K_{2,2,2}$

Observación 3.5.1: Si g_1, g_2, g_3, g_4 son 4 puntos de Steiner que pertenecen a una recta de Plücker l , entonces $\varphi(g_i) \wedge \varphi(g_j) = \varphi(l)$ para $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Proposición 3.5.1: Sea \mathcal{PL} el conjunto de las rectas de Plücker y \mathcal{F} el conjunto de los 1-factores de K_6 . La asignación

$$\varphi: \mathcal{PL} \rightarrow \mathcal{F}$$

es biyectiva.

Demostración: Para toda $G \in \mathcal{F}$ existe $P \in \mathcal{PL}$ tal que $\varphi^{-1}(G) = P$, donde P es la recta de Plücker que contiene a los 4 puntos de Steiner cuyas gráficas asociadas contienen el 1-factor G . Por lo tanto, φ es suprayectiva.

Por otro lado, sean $G_1, G_2 \in \mathcal{F}$ y $P_1, P_2 \in \mathcal{PL}$. Supongamos que

$$G_1 = \varphi^{-1}(P_1) \neq \varphi^{-1}(P_2) = G_2.$$

Entonces G_1 y G_2 son 1-factores distintos de K_6 , que tienen asociadas rectas de Plücker P_1 y P_2 . Las gráficas asociadas a puntos de Steiner que pertenecen a P_1 comparten a G_2 . Como G_1 no es isomorfa a G_2 , entonces $P_1 \neq P_2$. Entonces la función es inyectiva y, por lo tanto, biyectiva. \square

Proposición 3.5.2: Hay 15 rectas de Plücker en el hexagrama místico de Pascal.

Demostración: Por la asignación φ sabemos que a cada recta de Plücker le corresponde un 1-factor.

Por la proposición C.1 del apéndice C, sabemos que hay 15 1-factores en K_6 . Por lo tanto, hay 15 rectas de Plücker en el hexagrama místico de Pascal. \square

3.6 PUNTOS DE SALMON.

Finalmente, para obtener el valor de φ en los puntos de Salmon observamos lo siguiente:

1. Tomemos las rectas de Cayley que concurren en un punto de Salmon (teorema 2.6.1).
2. Mediante la correspondencia 2, del capítulo 2, tomamos el punto de Steiner que está en

cada recta de Cayley; Por ejemplo, los puntos de Steiner $g_1 := \left. \begin{matrix} ab & fe & cd \\ ce & db & af \\ fd & ac & eb \end{matrix} \right\}$,
 $g_2 := \left. \begin{matrix} ac & ed & bf \\ df & be & ab \\ be & af & dc \end{matrix} \right\}$ y $g_3 := \left. \begin{matrix} ab & df & ce \\ ef & bc & ad \\ dc & ae & bf \end{matrix} \right\}$, cuyas rectas de Cayley asociadas concurren en un punto de Salmon.

3. Mediante la correspondencia φ obtenemos las gráficas correspondientes a cada una de estas rectas de Cayley, es decir, las gráficas complementarias de $\varphi(g_1)$, $\varphi(g_2)$ y $\varphi(g_3)$, que son, respectivamente:

$$[ad, de, ea, bc, cf, fb], [ab, bd, da, ce, ef, fc] \text{ y } [ac, ce, ea, bd, df, fb].$$

4. Si S es el punto de Salmon en que concurren las tres rectas de Cayley mencionadas, entonces $\varphi(S)$ debe ser la unión de dichas gráficas de tipo $2K_3$. Esta unión es la gráfica $[ab, bc, ca, de, ef, fd, bd, da, ce, fc, ea, fb]$, la cual es una gráfica tripartita de tipo $K_{2,2,2}$, por lo tanto, $\varphi(S) = [ab, bc, ca, de, ef, fd, bd, da, ce, fc, ea, fb]$. (ver Fig. 29)

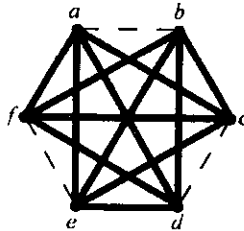


Fig. 29: Gráfica asociada al punto de Salmon.

Proposición 3.6.0: Hay 15 puntos de Salmon en el hexagrama místico de Pascal.

Demostración: La gráfica $(S) = [ab, bc, ca, de, ef, fd, bd, da, ce, fc, ea, fb]$, es el complemento del 1-factor $[af, be, cd]$.

Pero sabemos que hay 15 1-factores, cada uno de los cuáles es complemento de una gráfica de tipo $K_{2,2,2}$ asociada a un punto de Salmon.

Por lo tanto, hay 15 puntos de Salmon en el hexagrama místico de Pascal. \square

Observación 3.6.0: La correspondencia 3 se ve en este contexto, como la correspondencia de una gráfica de tipo $K_{3,3,3}$ y su gráfica complementaria (un 1-factor).

Observación 3.6.1: Si G_1, G_2 y G_3 son tres rectas de Cayley que concurren en el punto de Salmon S , entonces $\varphi(G_i) \wedge \varphi(G_j) = \varphi(S)$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

CAPITULO 3. REPRESENTACION DEL HEXAGRAMA MISTICO EN $S(K_6)$

A través de φ hemos asociado seis tipos de subgráficas de K_6 a los elementos más importantes del hexagrama místico de Pascal. (Fig. 30)

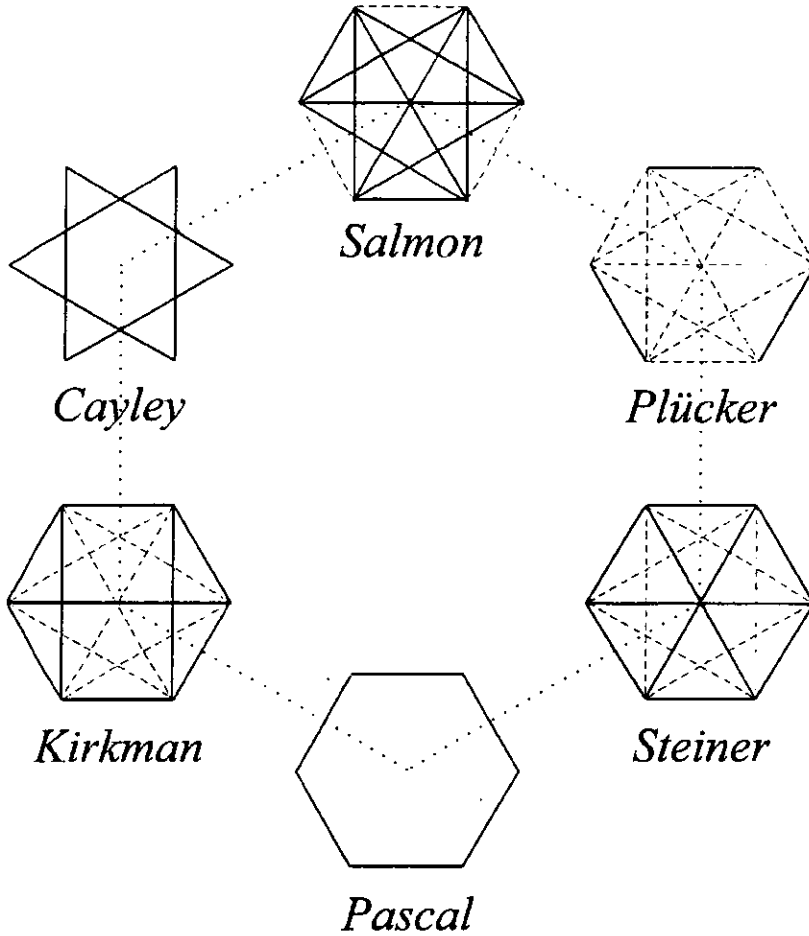


Fig. 30: Gráficas asociadas a los distintos elementos del hexagrama místico de Pascal.

Por último, mencionaré algunas relaciones encontradas por Hesse, que anteriormente discutí en el capítulo 2, esta vez en el contexto de $S(K_6)$.

Relación 1: Hay 60 subgráficas $\varphi(H)=C_6$ asociadas a rectas de Pascal y hay 60 subgráficas

$\varphi(h)=K_2 \square K_3$ asociadas a puntos de Kirkman. La correspondencia 1 en este contexto se da por gráficas complementarias.

Relación 2: Hay 20 subgráficas de tipo $K_{3,3}$ asociadas a puntos de Steiner y hay 20 subgráficas de tipo $2K_3$ asociadas a rectas de Cayley. La correspondencia 2 en este contexto se da por gráficas complementarias.

Relación 3: Hay 15 1-factores asociados a rectas de Plücker y 15 gráficas de tipo $K_{3,3}$ asociadas a puntos de Salmon. La correspondencia 3 en este contexto se da por gráficas complementarias.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

APENDICE A

CONFIGURACIONES EN $P^2(\mathbb{R})$.

Definición A1: Una configuración en el plano proyectivo, es un sistema de v puntos y b rectas ordenadas de modo que :

- (i) a través de cada punto del sistema pasa un número fijo de rectas del sistema, y
- (ii) cada línea del sistema contiene exactamente π puntos del sistema.

Algo que uno nota, en un curso de geometría proyectiva, inmediatamente de la definición, es la siguiente ecuación fundamental:

$$v\pi = br \tag{1}$$

Mas aún, uno nota que esta propiedad, siendo puramente combinatoria, también se aplica a otro tipo de estructuras, que estudiaremos en el **apéndice B**, llamadas **Diseños de Bloques**. De hecho, v , π y r son los símbolos que usualmente se utilizan para denotar a los parámetros de un diseño regular.

Y tomando en cuenta (1), podemos hablar del $1-(v,\pi,r)$ diseño asociado a la configuración.

Usualmente se asigna el símbolo de Coxeter

$$\begin{pmatrix} v & \pi \\ r & b \end{pmatrix} \tag{2}$$

a dicha configuración y, si el número de puntos es igual al número de rectas en el sistema, es decir, $v = b$, también podemos denotar la configuración con el símbolo (v_π) .

A.1 Algunas configuraciones importantes asociadas al hexagrama místico de Pascal.

A continuación mencionaré algunas configuraciones importantes asociadas al *hexagrama místico de Pascal*.

Configuración de Desargues

Al tomar los vértices de los dos triángulos en perspectiva junto con su centro de homología, la recta de alineación de las intersecciones de lados correspondientes, obtenemos una configuración con 10 puntos, 10 rectas, 3 puntos en cada recta y tres rectas en cada punto, con el símbolo $\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$, llamada configuración de Desargues (Fig.A1).

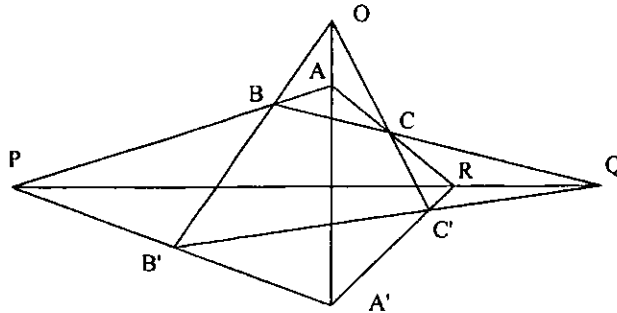


Fig. A.1: Configuración de Desargues.

Las siguientes configuraciones deben su nombre a San Agustín en [2].

Configuración básica.

La configuración básica es aquella que consta de los puntos de Kirkman y las rectas de Pascal.

Esta configuración consta de 60 puntos de Kirkman y 60 rectas de Pascal. Cada recta de Pascal tiene tres puntos y por cada punto pasan tres rectas. Esta es una configuración del tipo (60_3) .

Configuración Alemana.

Los elementos de esta configuración son puntos de Steiner y rectas de Plücker. Sabemos que hay 20 puntos de Steiner en el hexagrama místico de Pascal, así como 15 rectas de Plucker.

Cada recta de Plucker contiene 4 puntos de Steiner y por cada punto de Steiner pasan tres rectas de Plucker.

Por lo tanto, la configuración alemana es una configuración de tipo $\begin{pmatrix} 20 & 3 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$.

Configuración inglesa.

Esta configuración consta de puntos de Kirkman y rectas de Cayley. Sabemos que hay 60 puntos de Kirkman en la configuración, así como 20 rectas de Cayley. Cada recta de Cayley contiene tres puntos de Kirkman y por cada punto de Kirkman pasan tres rectas de Cayley.

Por lo tanto, la configuración inglesa es una configuración del tipo $\begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

APENDICE B

TEORIA DE DISEÑOS

En este apartado daremos una pequeña introducción a una importante área de la combinatoria, que se conoce como *Teoría de Diseños*.

El objeto más general que se estudia en esta teoría es la llamada *estructura de incidencia*.

Esta es una terna $S=(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{I})$, donde:

- (1) \mathbf{P} es un conjunto, cuyos elementos se llaman *puntos*.
- (2) \mathbf{B} es un conjunto, cuyos elementos se llaman *bloques*.
- (3) \mathbf{I} es una relación de incidencia entre \mathbf{P} y \mathbf{B} (i.e. $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{P} \times \mathbf{B}$).

Los elementos de \mathbf{I} se llaman *banderas*.

Si $(\mathbf{p}, \mathbf{B}) \in \mathbf{I}$, entonces decimos que el punto \mathbf{p} y el bloque \mathbf{B} son incidentes. Permitimos que dos bloques sean incidentes con el mismo subconjunto de puntos de \mathbf{P} . En este caso hablamos de "*bloques repetidos*". Si esto no pasa, entonces el diseño se llama *diseño simple* y entonces podemos considerar a los bloques como subconjuntos de \mathbf{P} . En este trabajo solamente usaremos esta clase de diseños. Entonces, podemos reemplazar la notación $(\mathbf{p}, \mathbf{B}) \in \mathbf{I}$ por $\mathbf{p} \in \mathbf{B}$ y podemos hablar de que el punto \mathbf{p} "pertenece al bloque \mathbf{B} ", en lugar de "es incidente con \mathbf{B} ".

Se acostumbra denotar la cardinalidad de \mathbf{P} por v , y la cardinalidad de \mathbf{B} por b . Entonces, la estructura de incidencia es un conjunto de v puntos y una colección de b no necesariamente distintos subconjuntos del conjunto de puntos.

En este trabajo estaremos especialmente interesados en ciertas estructuras de incidencia muy regulares llamadas "*t-diseños*". Sean v, k, t y λ enteros con $v \geq k \geq t \geq 0$ y $\lambda \geq 1$. Un *t-diseño* en v puntos, con bloques de tamaño k e índice λ es una estructura de incidencia $D=(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{I})$ con:

- (1) $P = v$,
- (2) $B = k$ para todo $B \in \mathbf{B}$
- (3) Para cualquier conjunto \mathbf{T} de t puntos, hay exactamente λ bloques incidentes con todos los puntos en \mathbf{T} .

Entonces todos los bloques tienen el mismo tamaño y todo t -subconjunto del conjunto de puntos esta contenido en el mismo número de bloques. Hay dos notaciones comúnmente usadas para este tipo de diseños, éstas son:

$t-(v, k, \lambda)$ y $S_\lambda(v, k, t)$. Usaremos ambas.

Un *Sistema de Steiner* $S(t, k, v)$ es un t -diseño con $\lambda = 1$, y quitamos el índice en la notación.

APENDICE C

TEORIA DE GRAFICAS.

A continuación, daré una pequeña introducción a la teoría de gráficas. Los resultados y definiciones que daré a continuación, fueron usados principalmente en el capítulo 3 de este trabajo.

Definición C.1: Una *gráfica* G se define como un par (X, U) , donde

- (1) X es un conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de elementos llamados *vértices*, y
- (2) U es una *familia* (u_1, u_2, \dots, u_n) de elementos del producto cartesiano llamados *aristas*.

Si $u = (x, y) \in U$, decimos que x es adyacente con y .

Denotaremos a la gráfica G con una lista de sus aristas dentro de un paréntesis cuadrado [...]. Por ejemplo, a la gráfica G_1 de la figura la denotaremos como $[ab, cd, ef]$ (Ver Fig. C.1).

El *complemento* G' , de una gráfica G con n vértices, es una gráfica simple con conjunto de vértices V tal que dos vértices son adyacentes en G' si y sólo si no son adyacentes en G .

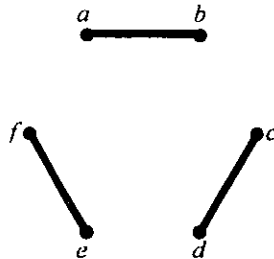


Fig. C.1: Gráfica $[ab, cd, ef]$.

Definición C.2: Una *subgráfica* de una gráfica G , es una gráfica en la que todos sus vértices y aristas están en G . Si G_1 es una subgráfica de G , entonces G es una *supergráfica* de G_1 . Una *subgráfica generadora*, de G es una subgráfica que contiene todos los vértices de G .

Definición C.3: Una *gráfica completa* K_p , es aquella en la que cualquier par de sus p vértices son adyacentes.

Una gráfica completa con n vértices, tiene $\binom{n}{2}$ aristas.

Definición C.4: Una *gráfica n-partita* G , es aquella en la que se puede dar una partición de sus vértices en n subconjuntos V_1, V_2, \dots, V_n tal que cada arista de G tiene un extremo en V_i otro en V_j donde $i \neq j$ y $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tal partición (V_1, V_2, \dots, V_n) se llama *n-partición*

Definición C.5: Una *gráfica n-partita completa* es una gráfica con *n-partición* (V_1, V_2, \dots, V_n) , donde cada vértice de V_i es adyacente con cada vértice de V_j para cualquier $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Si $|V_1| = a_1, |V_2| = a_2, \dots, |V_n| = a_n$, tal gráfica se denota K_{a_1, a_2, \dots, a_n} .

También llamamos *bipartita* a una gráfica 2-partita y *tripartita* a una 3-partita.

Definición C.6: Un *camino* en una gráfica G es una sucesión alternada de vértices y aristas $u_1, x_1, u_2, x_2, \dots, x_{n-1}, u_n$ empezando y terminando con vértices, en la cuál cada arista es incidente con los vértices que la preceden y la suceden, respectivamente.

Este camino une a u_0 con u_n , y puede también denotarse como u_1, u_2, \dots, u_n . Es *cerrado* si $u_0 = u_n$ y es *abierto* de lo contrario.

Si el camino es cerrado lo llamamos *ciclo*. Denotamos por C_n la gráfica que consiste de un ciclo con n puntos. En esta tesis trabajaré con ciclos en los que las aristas u_1, u_2, \dots, u_n sean distintas.

Definición C.7: Un *factor* de una gráfica G , es una subgráfica generadora de G que no es completamente desconexa. Decimos que G es la suma de factores G_i , si es su unión disjunta en aristas y tal unión es llamada una *factorización* de G . Un *n-factor* es regular de grado n . Si G es la suma de n -factores, su unión es llamada una *n-factorización* y G es *n-factorizable*.

Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ el conjunto de vértices de la gráfica completa K_6 . Un *1-factor* de K_6 es un conjunto de tres aristas disjuntas (Fig.C.2).

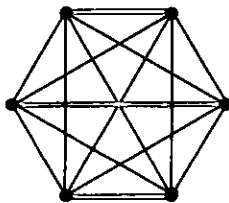


Fig. C.2: Las aristas coloreadas son un ejemplo de un 1-factor de K_6 .

Proposición C.1: Hay 15 1-factores distintos en K_6 .

Demostración: Para formar un 1-factor en K_6 hay 15 maneras de escoger la primera arista (pues K_6 tiene 15 aristas), pero tres de ellas nos determinan el mismo 1-factor (Ver Fig.4).

Por otro lado, hay 6 maneras de escoger la segunda arista (de entre las 6 aristas disjuntas a la primera que habíamos tomado), pero 2 de estas aristas pertenecen al mismo 1-factor.

Por lo tanto, hay $\binom{15}{3} \binom{6}{2} = 15$ 1-factores distintos.

Una *1-factorización* de K_6 (para abreviar, *factorización*), es una partición de las 15 aristas en 1-factores (Fig. C.3).

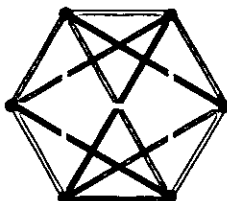


Fig. C.3: Los distintos colores indican 1-factores en una factorización de K_6 .

Definición C.8: Se dice que una gráfica es *perfecta* si la unión de cualquiera dos 1-factores distintos forman un ciclo. En K_6 cualquier ciclo formado por 1-factores ajenos es hamiltoniano.

Teorema C.1: Hay seis diferentes factorizaciones de K_6 siendo dos cualquiera isomorfas. Dos 1-factores distintos están contenidos en una única factorización.

Demostración: Dos factores disjuntos de K_6 forman de un ciclo de longitud par, necesariamente un 6 ciclo, pues la gráfica es perfecta.

Un factor disjunto de esos dos consiste en las tres diagonales largas del hexágono, o en dos diagonales cortas y una larga (Ver Fig. C4).

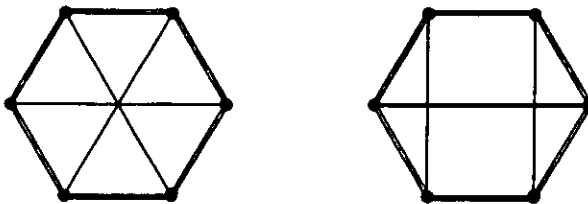


Fig. C.4: Las aristas negras indican las únicas dos posibilidades, de 1-factores disjuntos por aristas, de un 6-ciclo de K_6 .

Como hay 3 diagonales largas y 2 diagonales cortas en un hexágono, los factores restantes para completar la factorización tienen que ser los 2 del segundo tipo. Esto prueba la unicidad bajo isomorfismo.

Ahora bien, para obtener el número de factorizaciones posibles, observamos que hay 15 maneras de tomar un primer 1-factor. Cada arista de K_6 pertenece a 3 1-factores distintos y cada 1-factor tiene 3 aristas. Observemos también que al fijar un 1-factor, podemos

encontrar 8 1-factores disjuntos a él.

Por lo tanto, hay $15(8)$ pares de 1-factores disjuntos.

Ahora, cada factorización contiene $(5)(4) = 20$ de estos pares pues, cada 1-factor está apareado con los 4 restantes, entonces hay $\frac{(15)(8)}{(5)(4)} = \frac{120}{20} = 6$ factorizaciones posibles.

Para la última definición consideraremos 2 gráficas G_1 y G_2 con conjuntos ajenos de vértices V_1 y V_2 y conjuntos de aristas X_1 y X_2 , respectivamente.

Definición C.9: El *producto* de dos gráficas G_1 y G_2 se define como una gráfica $G_1 \square G_2$ cuyo conjunto de vértices es $V_1 \times V_2$ y tal que dos vértices $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ que pertenecen a $V_1 \times V_2$ son adyacentes si y sólo si se cumple alguna de las condiciones siguientes:

- 1) $u_1 = v_1$ y u_2 es adyacente con v_2 .
- 2) $u_2 = v_2$ y u_1 es adyacente con v_1 .

APENDICE D

REDES GEOMETRICAS

A continuación definiré el concepto de red geométrica (geometric lattice), que usé en el capítulo 3.

Una red L (lattice) es un conjunto parcialmente ordenado con la propiedad de que cada subconjunto finito $S \subseteq L$ tiene un ínfimo (o máxima cota inferior), esto es, un elemento b en L tal que

$$\forall a \in S [b \leq a] \text{ y } (\forall a \in S [c \leq a]) \Rightarrow c \leq b$$

igualmente, tiene un supremo (o mínima cota superior), esto es, un elemento b en L tal que

$$\forall a \in S [b \geq a] \text{ y } (\forall a \in S [c \geq a]) \Rightarrow c \geq b.$$

El supremo y el ínfimo de un conjunto de dos elementos $S = \{x, y\}$ se denotan, respectivamente, por $x \wedge y$ y $x \vee y$. Es fácil ver que \wedge y \vee son operaciones binarias asociativas y conmutativas, más aún, si todos los subconjuntos de dos elementos de algún conjunto tienen supremos e ínfimos, entonces cada subconjunto finito tiene un supremo y un ínfimo.

Las redes que consideraremos tienen la propiedad de que no tienen cadenas infinitas. Estas redes tienen un (único) último elemento (que denotaremos por O_L), pues la condición de que no tengan cadenas infinitas nos permite encontrar un elemento minimal m y cualquier elemento minimal es mínimo, pues si $m > a$, entonces $m \wedge a$ sería menor que m . Similarmente, hay un único elemento maximal I_L .

Para elementos a y b de un conjunto parcialmente ordenado, decimos que a cubre a b y escribimos $a \triangleleft b$ cuando $a > b$ pero no existe un elemento c tal que $a > c > b$.

Una **red geométrica** es una red L tal que no tiene cadenas infinitas y tal que:

- 1) L es **atómica**, esto es, cada elemento de L es una unión de puntos de L , y
- 2) L es **semimodular**, esto es, si a y b son distintos y los dos cubren a c en L , entonces $a \vee b$ cubre tanto a a como a b .

En este trabajo estaremos interesados en $S(K_6)$, donde $S(K_6)$ denotará a la red de subgráficas sin vértices aislados de K_6 con la unión conjuntista de dos de sus elementos $a \cup b := a \vee b$ desempeñando el papel de supremo y la intersección de $a \cap b := a \wedge b$ como el ínfimo de dichos elementos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. Salmon, *Conic Sections*. Chelsea 1879
- [2] R. San Agustín, *Dos representaciones del Hexagrama Místico de Pascal*. Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias, México 1996.
- [3] P. J. Cameron y J.H. Van Lint, *Designs, Graphs, Codes and their Links*. LMS Student Texts 22. Cambridge University Press, 1991.
- [4] J. H. Van Lint y R. M. Wilson, *A course in combinatorics*. Cambridge University Press, 1992.
- [5] O. Veblen y J. W. Young; *Projective geometry*.(2 vols.) Ginn & Co., 1917.
- [6] P. Samuel; *Projective Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [7] G. Veronese, *Nuovi Teoremi sull Hexagramum Misticum*. Memoria dei Reale academie dei Lincei I (1877) p.p. 649-703
- [8] H. Cárdenas y R. San Agustín, *On Veronese's decomposition Theorem and the outer automorphism of S_6* . J. Of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computation. Por aparecer.
- [9] R. San Agustín, *Two representations of the Mystic Hexagram configuration*. Por aparecer.
- [10] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, 1969.