



69

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES**

**CUAUTITLAN**

**“CONTROL DE CONVERTIDORES ESTATICOS DE  
CORRIENTE DIRECTA-CORRIENTE DIRECTA”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

P R E S E N T A:

DANIEL NORIEGA PINEDA

ASESOR: DR. GERARDO RENE ESPINOSA PEREZ

282216

CUAUTITLAN IZCALLI, EDO. DE MEX.

2000



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVANZADA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN  
UNIDAD DE LA ADMINISTRACION ESCOLAR  
DEPARTAMENTO DE EXAMENES PROFESIONALES

U. N. A. M.  
FACULTAD DE ESTUDIOS  
SUPERIORES CUAUTITLÁN

ASUNTO VOTOS APROBATORIOS

DR. JUAN ANTONIO MONTARAZ CRESPO  
DIRECTOR DE LA FES CUAUTITLÁN  
P R E S E N T E

AT'N. Q. Ma del Carmen García Mijares  
Jefe del Departamento de Exámenes  
Profesionales de la FES Cuautitlán

Con base en el art. 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos la TESIS

"Control de convertidores estáticos de corriente directa a  
corriente directa"

que presenta el pasante: Daniel Noriega Pineda

con número de cuenta 9016055-8 para obtener el TITULO de:  
Ingeniero Mecánico Electricista

Considerando que dicha tesis reúne los requisitos necesarios para ser discutida en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO

A T E N T A M E N T E

"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"

Cuautitlán Izcalli, Edo. de Méx., a 22 de Junio de 2000

PRESIDENTE	ING. Nicolás Calva Tapia	
VOCAL	ING. José Ubaldo Ramírez Urizar	
SECRETARIO	DR. Gerardo René Espinosa Pérez	
PRIMER SUPLENTE	ING. Aurelio Velázquez Roque	
SEGUNDO SUPLENTE	ING. Julio César Vázquez Fuentes	

## AGRADECIMIENTOS

### A MIS PADRES

David (q.e.d.) y Gumara quienes con su amor y sacrificio me mostraron el camino correcto.

### A MIS HERMANOS

Espero que con este trabajo les pueda transmitir el espíritu de lucha y dedicación en todas sus metas.

A mis familiares y amigos que de una u otra forma me alentaron para la elaboración de este trabajo. A todos mis compañeros de la DEPFI que colaboraron en la culminación del presente trabajo y, en forma especial, al Dr. Gerardo por aceptar ser mi director de tesis.

## CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b>	iii
I.1 Antecedentes y motivación	iii
I.2 Formulación del problema	v
I.3 Revisión Bibliográfica	vi
I.4 Organización de la tesis	vii
<b>Capítulo 1. Los Reguladores Conmutados CD-CD</b>	1
1.1 Introducción	1
1.2 Topologías Básicas	2
1.3 El Diodo de Liberación (freewheeling)	9
1.4 Modulación por Ancho de Pulso (PWM)	12
<b>Capítulo 2. El Regulador Boost</b>	18
2.1 Análisis básico	18
2.2 El Modelo de Espacio de Estado	22
2.2.1 El Espacio de Estado Promedio y Linealización	25
2.3 El Modelo Continuo Euler-Lagrange (EL)	25
2.3.1 Sistemas Eléctricos Euler-Lagrange	26
2.3.1.1 Determinación de las Variables de Estado	26
2.3.1.2 Funciones de Energía	29
2.3.1.3 Ecuaciones de equilibrio	36
2.4 Linealización del Modelo de Espacio de Estado	44
<b>Capítulo 3. Esquemas de Control</b>	48
3.1 Introducción	49
3.2 Control por Retroalimentación de Voltaje (CRV)	49
3.2.1 Estabilidad en lazo cerrado	53
3.3 Control Basado en Pasividad (CBP)	55
3.3.1 Diseño de Control mediante Lyapunov	59
3.3.2 Regulación por Voltaje	63
3.3.3 Regulación por Corriente	65

## Contenido

<b>Capítulo 4. Implantación de los Esquemas de Control</b>	68
4.1 Diseño del prototipo	69
4.2 Validación del Modelo de Espacio de Estado	72
4.2.1 Resultados	76
4.3 Implantación Física de los Esquemas de control	79
4.3.1 El Controlador CRV	80
4.3.2 El Controlador CBP	80
<b>Capítulo 5. Resultados Experimentales</b>	83
5.1 Respuesta Transitoria	83
5.2 Respuesta ante una perturbación en la carga	90
5.3 Discusión	94
<b>Conclusiones</b>	95
<b>Apéndice A. Análisis de Lyapunov</b>	97
A.1 Conceptos Preliminares	97
A.2 El Teorema de Lyapunov	102
<b>Apéndice B. Introducción a dSPACE</b>	104
B.1 Características Técnicas	105
B.2 Interface en el Tiempo Real	106
<b>Referencias</b>	112

# **INTRODUCCIÓN**

## **I.1 Antecedentes y motivación**

En el campo de la electrónica de potencia es común tratar con sistemas que conmutan en el tiempo mediante el uso de dispositivos que actúan como interruptores. Este proceso de conmutación puede ser controlado ya sea por un sistema externo o bien mediante un arreglo basado en el comportamiento del sistema dado. Esta última característica le confiere a estos procesos propiedades no-lineales que dificultan el análisis matemático de los mismos. En los últimos 20 años los avances realizados por la teoría de control no-lineal la han convertido en una disciplina más rigurosa y de mayor aplicación. El rigor alcanzado se debe a la incorporación de poderosas herramientas analíticas en el área. Por otro lado, la amplia aplicabilidad es una consecuencia de nuevas formulaciones que capturan mejor los problemas prácticos y entregan soluciones matemáticas en forma analítica.

En general, a pesar de los avances realizados en la teoría de control no-lineal, la transición total hacia una aplicación práctica está lejos de ser completa ya que muchos de los logros alcanzados han sido desarrollados considerando sistemas muy generales con representaciones en el espacio de estado, por lo que desprecian las estructuras naturales impuestas por el carácter físico de las mismas. Por lo anterior, el desarrollo de una teoría para el control de sistemas no-lineales debe incorporar, en un nivel fundamental, la estructura física de los mismos y en particular, el manejo de conversión y disipación de energía.

Algunos autores como Sira-Ramirez, R. Ortega, Gerardo Escobar, S. R. Sanders y Verghese C. (ver referencias [13], [16] y [17]), han abandonado el objetivo de controlar sistemas descritos por la generalidad de ecuaciones diferenciales no-lineales, restringiendo su atención en aquellos sistemas caracterizados por ecuaciones

## Introducción

diferenciales no-lineales que reflejan el comportamiento físico de los mismos, es decir, entidades matemáticas que tienen al menos un elemento correspondiente en el mundo físico.

Los reguladores conmutados de Corriente Directa-Corriente Directa son una clase de sistemas no-lineales que, por la sencillez de sus topologías básicas, poseen características muy importantes para un análisis de control. Estas características son las siguientes:

- La acción conmutativa de los interruptores que conforman a dichos interruptores les confieren propiedades no continuas en sus comportamientos internos.
- La facilidad de medir y retroalimentar la señal de salida así como otras señales importantes, de voltaje y de corriente, que se generan en estos reguladores.
- La conmutabilidad de estos sistemas depende de una señal de control en los interruptores, la cual provoca que estos convertidores se comporten en forma no-lineal.

Para el análisis de este tipo de sistemas, se han desarrollado diversos trabajos (ver [11], [13], [14], [16], [17] y [20]), en los cuales estos sistemas son vistos como "transformadores de energía", esto es, un dispositivo que recibe cierta cantidad de energía y libera otra cantidad de ella de acuerdo a ciertas restricciones de balance de energía. Un método que ha probado ser muy útil para obtener esta clase de modelos se conoce como el método variacional de Euler-Lagrange.

En un principio la aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange era exclusiva para el desarrollo de modelos para los sistemas mecánicos. No fue hasta que Meisel ([5], 1966), las empleó para el análisis de sistemas electromecánicos y, posteriormente, Wellstead ([19], 1979), las aplicó para el estudio de sistemas de diferentes naturalezas. Aunque estas ecuaciones no cubren la generalidad de los sistemas existentes, pueden manejar una clase mucho más grande de sistemas que aquellos métodos de modelado que dependen de la naturaleza del sistema. Otra característica importante de las ecuaciones de Lagrange consiste en su capacidad de manejar la existencia de fuerzas

## **Introducción**

disipativas en el comportamiento de los sistemas físicos. La importancia de esto radica en que el fenómeno de disipación de energía separa a los sistemas físicos de todas aquellas estructuras generales de ecuaciones diferenciales dinámicas.

El segundo método de Lyapunov (denominado también como el método directo de Lyapunov), fue presentado en 1892 por A.M. Lyapunov para determinar la estabilidad de sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias, sin embargo este método se ha tornado en una útil herramienta para el diseño de retroalimentación de sistemas. Muchas han sido las técnicas que se han basado en la idea del diseño de control retroalimentado mediante funciones de Lyapunov, ya que este método garantiza la estabilidad y convergencia hacia un punto o una trayectoria de equilibrio. Una de estas técnicas, conocida como control basado en pasividad, ha sido recientemente explotada en [13] y [16] para el control de los sistemas reguladores conmutados como una propuesta de desarrollo analítico realizable.

La motivación de este trabajo es implantar en un sistema físico la estrategia de control dada en [16] con el fin de validarla y demostrar con ello que los métodos de control obtenidos mediante la explotación de las características generales de los sistemas Euler-Lagrange tienen significado físico.

## **1.2 Formulación del problema**

En los últimos años, el avance de la electrónica ha permitido la aparición de un sin número de aparatos eléctricos de poco tamaño y bajo consumo de potencia. Esto ha originado que el estudio los reguladores conmutados CD-CD, más concretamente del regulador elevador de voltaje (Boost), se incremente con el fin de buscar diseños de control que permitan alcanzar la máxima eficiencia de estos sistemas, así como un comportamiento más robusto ante perturbaciones en algunos de los parámetros de estos sistemas. Debido principalmente a la naturaleza no lineal de este tipo de sistemas y a lo fácil que resulta medir y retroalimentar las señales de salida, desde un principio el control que se practica sobre estos sistemas consiste en el proceso de medir y comparar señales de voltaje con el fin de generar un control PWM. Es decir, mediante el uso del conocimiento práctico se implementan diversas estrategias de control que después son

## **Introducción**

justificadas matemáticamente. Por lo tanto, el problema del control de reguladores conmutados de potencia es un ejemplo claro del distanciamiento entre los resultados propuestos por la teoría de control y la implementación práctica de los mismos. Según parece, la razón principal de este hecho es la falta de interés por parte de la comunidad teórica hacia la implantación física de sus proposiciones, lo que ocasiona que muchas veces no sea posible que la comunidad aplicada entienda o de una interpretación física de estas soluciones.

Por lo anterior, recientemente se ha estado tomando la convicción de solucionar los problemas de control no-lineal desde un punto de vista físico utilizando la naturaleza Euler-Lagrange de los sistemas que se estudien. Este proceso de análisis consiste en lo siguiente: Dado un sistema modelado por las ecuaciones Euler-Lagrange, se define otro sistema dinámico (la dinámica deseada), la cual satisface para todo tiempo la salida deseada. Entonces se diseña una ley de control que garantice que la dinámica del sistema a controlar converja a la dinámica deseada, lo que implica que la salida del primero tienda también a la salida deseada. La ley de control basada en la pasividad del sistema es expuesta en [16] y cumple teóricamente con lo arriba expuesto, por ello este trabajo se centra en la validación de este método de control mediante su implantación física en un regulador conmutado Boost, realizándose también un comparativo del desempeño de este sistema bajo la acción del control basado en pasividad contra el comportamiento del mismo sistema físico bajo el control de una señal reguladora PWM.

### **I.3 Revisión Bibliográfica**

La búsqueda de estrategias de control para sistemas reguladores de potencia se ha dividido en dos corrientes, una establecida desde mucho tiempo atrás por investigadores aplicados, y otra mucho más reciente desarrollada por la comunidad de teoría de control. En general, la primera se caracteriza por el uso de métodos para el diseño de controladores que prueban su eficacia en implementaciones directas en lugar de argumentos matemáticos rigurosos. Debido a esta razón, la estructura de los nuevos controladores propuestos parecen recaer más en la experiencia del diseñador que en un análisis estructurado del sistema, lo que provoca la falta de una metodología básica para

## **Introducción**

desarrollar nuevas ideas. La presente tesis no busca seguir esta tendencia por lo que se refiere al lector interesado a los trabajos [3], [6] y [11] y a las referencias en ellos para su ilustración.

La segunda tendencia busca el desarrollo de esquemas de control desde un punto de vista de teoría de control, es decir estableciendo pruebas matemáticas formales de cada resultado obtenido. Lo importante de este enfoque es que el regulador bajo estudio es visto desde un punto de vista no-lineal y se pretende aplicar técnicas de control generales desarrolladas para esta clase de sistemas. Los desarrollos hasta ahora alcanzados en el control de sistemas conmutados tienen como base principal el análisis mediante el segundo método de Lyapunov, a partir del cual se han venido formando diferentes propuestas de control tales como el control por pasividad [16], el control por modos deslizantes [Sira-Ramirez, 1987], y el control adaptativo [Romeo O. y Sira-Ramirez, 1996], entre otros.

### **1.4 Organización de la tesis**

En el capítulo 1 se presenta una introducción a las estructuras básicas de los reguladores conmutados CD-CD, así como también se describe el proceso de regulación mediante señales PWM. En el capítulo 2 se estudia más a fondo las características y propiedades del regulador Boost en específico. Posteriormente se da una introducción a los sistemas Euler-Lagrange con el fin de poder obtener un modelo en la representación de espacio de estado del regulador Boost. Finalmente, dado que el análisis del control por medio de señales PWM se simplifica mediante el manejo de ecuaciones lineales, en el último apartado se deriva un modelo linealizado también en la forma de espacio de estado. En el capítulo 3 se presentan los esquemas de control PWM y el control basado en pasividad. El capítulo 4 resume la forma en que los esquemas de control se implantaron, así como las características de diseño consideradas. En este capítulo también se muestran los procesos de simulación previos a los experimentos.

El capítulo 5 está compuesto por los resultados experimentales tanto para el comportamiento transitorio del sistema como para la reacción del mismo ante perturbaciones en la carga. Finalmente, en el apéndice A se ofrece una breve

## **Introducción**

introducción a lo que es el segundo método de Lyapunov, mientras que en el apéndice B se explican los procedimientos básicos para el manejo de la tarjeta de interfaz, entre el sistema regulador Boost y una computadora personal, para la adquisición de datos y la implantación de los esquemas de control expuestos.

# CAPÍTULO 1

## LOS REGULADORES CONMUTADOS DE CORRIENTE DIRECTA-CORRIENTE DIRECTA

### 1.1 Introducción

Los reguladores de corriente directa-corriente directa (CD-CD), son dispositivos encargados de controlar el flujo de energía entre dos sistemas de corriente directa. Su uso más general es en fuentes de poder para equipos electrónicos en los cuales toman un voltaje de corriente directa, generalmente de un convertidor de corriente alterna a corriente directa, y lo transforman en uno o varios voltajes de CD requeridos por el sistema donde se utilicen. A su vez, estos reguladores pueden ser empleados en baterías de potencia y en control de velocidad en motores de CD. Como se verá más adelante, un convertidor de CD-CD se puede considerar como una fuente de CD reductora o elevadora de voltaje.

Este trabajo centra su atención en los reguladores conmutados de alta frecuencia, los cuales son circuitos de potencia donde los dispositivos semiconductores que los componen conmutan a una frecuencia más alta comparada a las variaciones en la forma de onda de entrada y con la forma de onda de salida del regulador.

En el presente capítulo se presentan las estructuras y las ecuaciones que rigen a los reguladores conmutados básicos de CD-CD. Además se incluye una breve introducción al concepto de la Modulación por Ancho de Pulso (PWM), ya que este juega un papel muy importante en el funcionamiento y control de dichos reguladores.

## 1.2 Topologías básicas

La forma más simple de representar un regulador de CD-CD se muestra en la Fig. 1.1 . El interruptor abre y cierra a una frecuencia de conmutación  $1/T$ , donde el tiempo de "encendido" o conducción del interruptor durante el periodo  $T$  se define como  $uT$ , y  $u$  es un parámetro que representa el *tiempo de trabajo* o *razón de cambio* del interruptor. Matemáticamente

$$u = (\text{tiempo de encendido}) * (\text{frecuencia de conmutación})$$

Por lo cual toma valores en el rango continuo  $(1, 0)$ . En forma similar, el tiempo de "apagado" o no conducción, se expresa como  $(1-u)T$  ya que es el complemento del tiempo de trabajo. El voltaje de carga resultante,  $V_2$ , es una versión truncada de la entrada ya que esta formada por una serie de pulsos con una amplitud  $V_1$  y un promedio, o valor en CD, de  $uV_1$ . Sin embargo este valor viene acompañado de una importante cantidad de rizo, que se encuentra presente no solo en el voltaje de carga sino también en la corriente de entrada  $i_1$ . Es importante señalar que las altas frecuencias contenidas en el rizo pueden causar tanto conducción como radiación de interferencias con otros aparatos electrónicos .

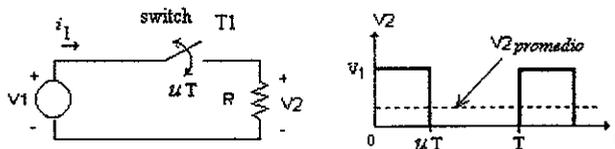


Fig. 1.1 Forma simple de un regulador CD-CD conmutado

## Capítulo 1 Los Reguladores Conmutados de Corriente Directa-Corriente Directa

La Fig. 1.2 (a) muestra un regulador conectado a dos sistemas donde las terminales de entrada/salida poseen un voltaje y una corriente en CD con los valores simbólicos mostrados. Sobre la base de dicha figura es posible determinar algunas características que dicho sistema debe cumplir :

- El interior de ' la caja ' debe producir las variables de salida libres de pulsaciones o rizo.
- La diferencia entre los voltajes de entrada y salida,  $V_1 - V_2$ , debe cambiar a través de un elemento conectado entre dichos voltajes, (elemento serie).
- A su vez, la caja debe contener un elemento en paralelo para compensar la diferencia entre las corrientes de entrada y de salida,  $I_2 - I_1$ . Esta conexión mínima de elementos se muestra en la Fig.1.2(b).
- Idealmente, en el interior de la caja no hay pérdida de energía.

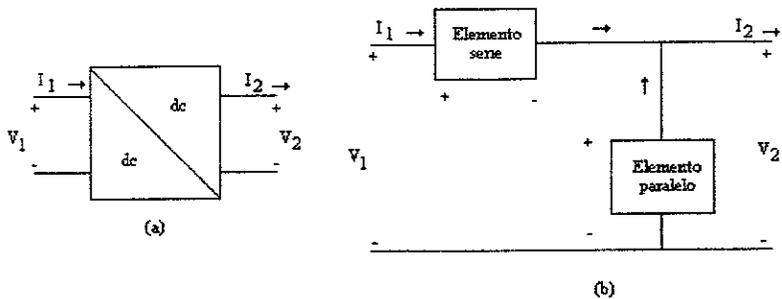


Fig. 1.2. (a) regulador conectando dos sistemas CD (b) Topología básica necesaria para un regulador CD-CD

Por lo anterior se requiere, en el circuito, de un dispositivo que pueda soportar tanto un valor promedio de voltaje como un valor promedio de corriente diferentes de cero, este dispositivo es un interruptor. Además deben controlarse estos valores promedio de sus variables mediante la variación de la relación entre sus tiempos de encendido y apagado. El problema con el uso de interruptores son los propios elementos en serie y paralelo ya que los valores instantáneos en la corriente de entrada y en el voltaje de salida serán diferentes de sus valores promedios.

## Capítulo 1 Los Reguladores Conmutados de Corriente Directa-Corriente Directa

Para resolver esto se requiere de un filtro pasabajos. Esto es, asumiendo que el voltaje de entrada no contiene rizo, se encontrará que la corriente de entrada si contiene una buena cantidad de perturbaciones causadas por la conmutación de los interruptores, y aunque la corriente de salida debe estar libre de rizados, el voltaje de salida estará conmutando constantemente.

El primer paso para filtrar el voltaje de salida es colocando un capacitor en paralelo con la carga de salida, en este caso la resistencia  $R$ . Sin embargo, no puede conmutarse el voltaje de entrada en el capacitor sin obtener una corriente infinita, por ello se usa un inductor como un medio no disipativo de limitar el valor de la corriente de entrada, ver Fig.1.3. Esto genera un nuevo problema, no se puede interrumpir instantáneamente la corriente en el inductor dado que resultaría en un voltaje infinito. Por consiguiente, si se abre un interruptor para permitir que el voltaje en el capacitor conmute, entonces se requerirá que el segundo interruptor se mantenga cerrado para permitir que la corriente de entrada se mantenga circulando a través del inductor. Hay muchas maneras de lograr un conexionado que permita realizar lo anterior, pero primero se tratará el problema de la corriente finita, en el cual, de acuerdo a la Fig. 1.3, los casos en los que se encuentre un interruptor entre el nodo 1 y la referencia, el nodo 2 y la referencia o bien entre el nodo 1 y 2 no deben darse, lo anterior se evita conectando el inductor entre los nodos en las combinaciones anteriores, ver Fig. 1.4. Además, resulta que estas son las únicas tres combinaciones posibles para la implementación de los interruptores, por lo que pueden desarrollarse tres tipos de topologías básicas a partir de estas.

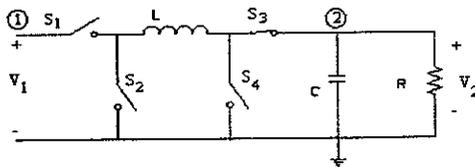


Fig 1.3 Regulador básico de CD-CD con filtro pasabajos

Capítulo 1 Los Reguladores Conmutados de Corriente Directa-Corriente Directa

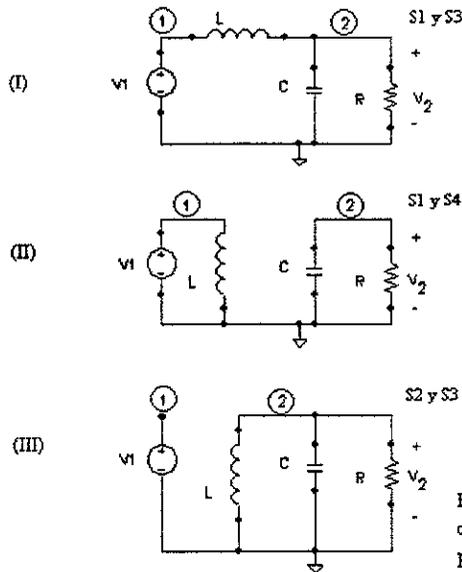


Fig. 1.4 . Las tres posibles condiciones de conmutación para reguladores CD-CD

Estas topología básica pueden conformarse de acuerdo a las siguientes combinaciones derivadas de la Fig.1.4

- a) Primera configuración: condiciones I y III .
- b) Segunda configuración: condiciones I y II .
- c) Tercera configuración: condiciones II y III .

Note que para cada una de las condiciones en la Fig.1.4, el inductor L se encuentra en diferentes ramas del circuito evitando las restricciones ya mencionadas. Ahora, los interruptores  $S_1$  y  $S_2$  Fig. 1.3, no deben estar encendidos al mismo tiempo, aunque si pueden permanecer simultáneamente apagados (esto ocurre cuando  $i_L = 0$ ), lo que resultaría en una tercera condición degenerativa para cada convertidor. En esta condición la carga se encuentra literalmente fuera del control de los interruptores y se dice que se encuentra en un Modo de Conducción Discontinua . En este trabajo solo se

## Capítulo 1 Los Reguladores Conmutados de Corriente Directa-Corriente Directa

considera para los análisis el Modo de Conducción Continua, o bien,  $S_1$  y  $S_2$  no se encuentran apagados al mismo tiempo

Para obtener el voltaje de salida  $V_2$  se empleará la restricción de una corriente finita tal que el voltaje promedio del inductor,  $v_{L(\text{pro})}$ , debe ser cero durante un ciclo de conmutación en el inductor. En la Fig. 1.5 se muestran los estados de conducción de los interruptores  $S_1$  y  $S_2$  durante un ciclo de trabajo para el regulador mostrado en la Fig.1.3.

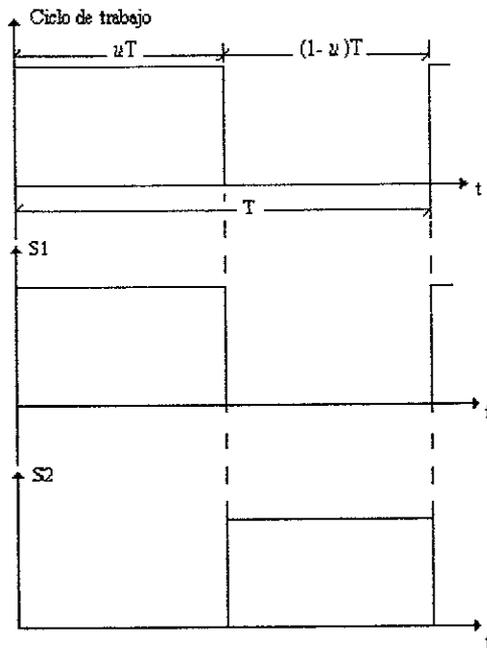


Fig. 1.5 Gráfico que muestra el comportamiento de los Interruptores  $S_1$  y  $S_2$  durante un ciclo de trabajo

## Capítulo 1 Los Reguladores Conmutados de Corriente Directa-Corriente Directa

Cuando el interruptor S1 se encuentre en el estado de conducción  $uT$ , el inductor L permanecerá conectado de acuerdo a alguna de las condiciones de conmutación de la Fig.1.4. En el momento en que el interruptor S1 se abra y el interruptor S2 conduzca durante el tiempo  $(1-u)T$ , entonces la manera en que el inductor L se encuentre conectado en el circuito no corresponderá a la condición dada durante  $uT$  sino que cambiará a alguna de las dos condiciones de conmutación restantes. Por lo anterior, el voltaje en el inductor estará condicionado a los estados de conmutación de los interruptores y debe cumplir entonces con la siguiente ecuación

$$V_{L1} u + V_{L2} (1 - u) = 0 \quad (1.1)$$

donde

$$V_L = \begin{cases} V_{L1} & S_1 \text{ ON} / S_2 \text{ OFF} \\ V_{L2} & S_1 \text{ OFF} / S_2 \text{ ON} \end{cases}$$

Aplicando esta ecuación en cada una de las configuraciones ya mencionadas tenemos:

a) Primera configuración (I y III)

Para la condición I el valor del voltaje se define como  $v_{L(\text{pro.})} = V_1 - V_2$ , mientras que para la condición III se tiene que  $v_{L(\text{pro.})} = V_2$ , por lo que la ecuación (1.1) cambia a

$$(V_1 - V_2) u - V_2 (1 - u) = 0 \quad (1.2)$$

o equivalentemente

$$V_2 = uV_1 \quad (1.3)$$

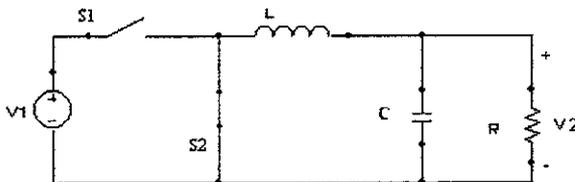


Fig 1.6 Circuito Buck básico

**Capítulo 1 Los Reguladores Conmutados de Corriente Directa-Corriente Directa**

Nótese que  $V_2 < V_1$ , ya que  $0 < u < 1$  por lo que este tipo de regulador es conocido como *regulador reductor* o *regulador Buck*. Su circuito característico se muestra en la Fig. 1.6

b) Segunda configuración (I y II)

De acuerdo a las condiciones I y II, el voltaje promedio en el inductor esta dado por

$$V_1 u + (V_1 - V_2)(1 - u) = 0 \quad (1.4)$$

de donde

$$V_2 = \frac{V_1}{1 - u} \quad (1.5)$$

En este caso  $V_2 > V_1$ , por lo cual se le conoce como *regulador elevador* o *regulador Boost*. Su circuito característico puede verse en la Fig. 1.7

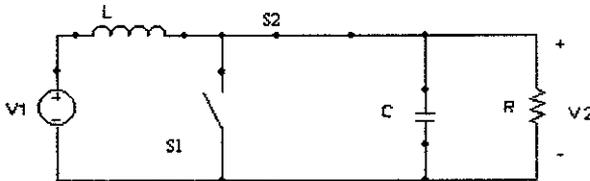


Fig. . 1.7 Circuito característico del regulador Boost

c) Tercera configuración (II y III)

Para la última configuración, o topología, se tiene que, de acuerdo a las condiciones II y III

$$V_1 u + V_2 (1 - u) = 0 \quad (1.6)$$

por lo que

$$V_2 = \frac{u V_1}{1 - u} \quad (1.7)$$

## Capítulo 1 Los Reguladores Conmutados de Corriente Directa-Corriente Directa

Donde la polaridad de  $V_2$  es contraria a la polaridad de  $V_1$ . En este ultimo caso debe notarse lo siguiente

$$\begin{aligned} |V_2| &> V_1 && \text{si } u > 0.5 \\ |V_2| &< V_1 && \text{si } u < 0.5 \end{aligned}$$

por ello, este tipo de regulador es conocido como **regulador Buck-Boost**. El circuito característico para este tipo de regulador se muestra a continuación

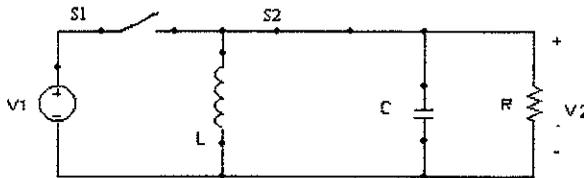


Fig 1.8 Circuito básico Buck-Boost

En la presente tesis se consideró para el desarrollo de los análisis y pruebas al regulador Boost, por ello, en el siguiente capítulo se hace un análisis más profundo del mismo.

### 1.3 El diodo de liberación (freewheeling)

Para una corriente de inductor mayor a cero, solo se necesita un interruptor unidireccional controlado, como por ejemplo un transistor, para la implementación práctica de estos reguladores. El segundo interruptor puede ser un diodo, ya que este puede ser naturalmente conmutado por el transistor. Para entender esto, primero se debe analizar un arreglo básico en sistemas de potencia conocido como *diodo de liberación*,  $D_m$ . En la Fig.1.9 se muestra este arreglo característico cuyo funcionamiento es el siguiente:

Cuando el interruptor  $S$  se cierra en un tiempo  $t_1$  se establece una corriente  $i$  en la carga  $RL$  gracias a la conducción de  $D_1$ , mientras que el diodo  $D_m$  se abrirá por la acción del

Capítulo 1 Los Reguladores Conmutados de Corriente Directa-Corriente Directa

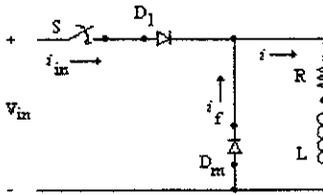


Fig. 1.9 Circuito con diodo de liberación  $D_m$ .

voltaje de entrada  $V_m$ . Cuando el interruptor  $S$  se abre de nuevo, la trayectoria de la corriente es establecida por el inductor. Este principio permite que el circuito pueda ser separado y analizado en dos subcircuitos diferentes dependiendo de la posición del interruptor. Para el subcircuito uno o *modo uno de operación*, en el cual el interruptor se encuentra cerrado, se tiene el circuito equivalente mostrado en la Fig.1.10, donde la corriente es

$$i_1 = \frac{V_m}{R} \left( 1 - e^{-tR/L} \right) \quad (1.8)$$

Cuando  $S$  se abre (último instante de este modo de operación), la corriente es

$$i_1(t = t_1) = \frac{V_m}{R} \left( 1 - e^{-t_1 R/L} \right) \quad (1.9)$$

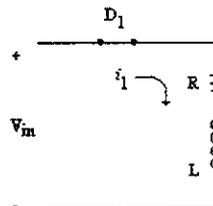


Fig. 1.10 Circuito equivalente para el Modo 1

## Capítulo 1 Los Reguladores Conmutados de Corriente Directa-Corriente Directa

Donde  $i_1$  es la corriente circulante durante este modo de operación. Si  $t_1$  es lo suficientemente largo, entonces la corriente  $i_1$  habrá alcanzado su estado estacionario.

$$I_1 = \frac{V_m}{R} \quad (1.10)$$

El *modo dos de operación* comienza cuando el interruptor S se abre y la corriente polariza directamente al diodo de liberación. Redefiniendo el tiempo original en el que inicia este subcircuito, el cual se muestra en la Fig. 1.11, la corriente  $i_2$  se define a partir de

$$0 = L \frac{di_2}{dt} + R i_2 \quad (1.11)$$

donde las condiciones iniciales son  $i_2(t=0) = i_1$ , por lo que la corriente está determinada por

$$i_2 = i_1 = i_1 e^{-tR/L} \quad (1.12)$$

Se observa que la corriente decaerá exponencialmente a cero en el tiempo  $t = t_2$  siempre que  $t_2 \gg L/R$  tal como se ve en la gráfica de la Fig. 1.12. El principio anterior se emplea en el desarrollo de los reguladores ya que cuando el transistor actúa como el interruptor S, el diodo en los circuitos reguladores se apaga.

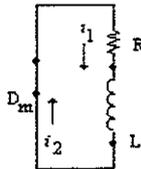


Fig 1.11 Circuito equivalente para el Modo 2 de operación

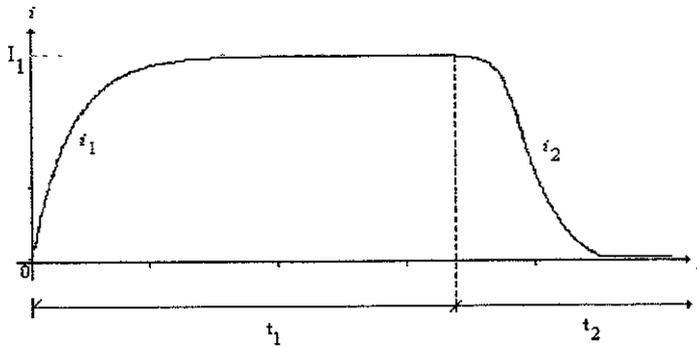


Fig 1.12. Gráfico que muestra el comportamiento de la corriente  $i$

Posteriormente el diodo es forzado a conducir cuando la corriente  $i_L > 0$ . Los arreglos transistor-diodo resultantes se muestran en la Fig.1.13 donde se emplean transistores NPN en forma arbitraria, y se considera al tiempo de trabajo  $u$  como el tiempo de encendido en el interruptor controlado  $S_1$ .

Estos tres circuitos básicos son considerados de segundo orden en el sentido de que cada uno incluye un inductor y un capacitor. Esto es, para cualquier condición dada del interruptor, dos ecuaciones diferenciales independientes de primer orden son requeridas para describir el comportamiento total del circuito. Este control es ejecutado mediante la variación del tiempo de trabajo como se analizará en el siguiente apartado.

#### 1.4 Modulación por ancho de pulso (PWM)

El control electrónico de las topologías básicas de los reguladores anteriores se consigue mediante la modulación del tiempo de trabajo  $u$  en el interruptor de control  $S_1$ . De esta manera el tiempo de trabajo de  $S_1$  se define como la relación entre el tiempo de encendido,  $t_{ON}$ , y el periodo de conmutación  $1/f$ , de acuerdo con la siguiente ecuación

$$u = t_{ON} f = \frac{t_{ON}}{t_{ON} + t_{OFF}} \quad (1.13)$$

Capítulo 1 Los Reguladores Conmutados de Corriente Directa-Corriente Directa

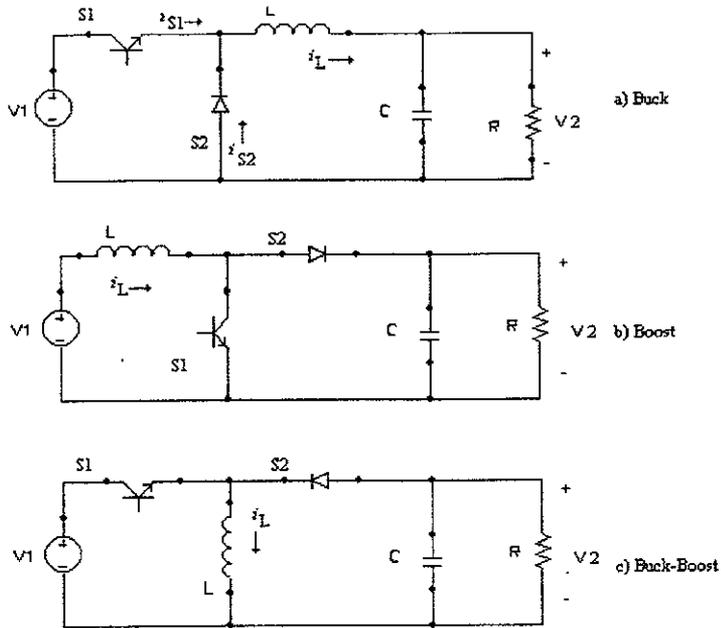


Fig 1.13 Reguladores básicos usando el arreglo transistor NPN -Diodo.

Donde  $t_{OFF}$  es el tiempo durante el cual el interruptor  $S_1$  permanece abierto. Puede observarse que  $u$  se modula mediante la variación de  $t_{ON}$ , o de  $t_{OFF}$ , o ambos. La técnica para modular la duración o (ancho) del pulso de  $t_{ON}$  y/o  $t_{OFF}$  se logra mediante un circuito de control externo a la entrada de control de  $S_1$  y se conoce como *modulación por ancho de pulso* o PWM por sus siglas en ingles (Pulse-Width Modulation). Los reguladores conmutados pueden clasificarse ya sea como de *frecuencia variable* o como *frecuencia fija*. Los reguladores que se encuentran dentro de la primera clasificación pueden ser de tres tipos: a)  $t_{ON}$  se mantiene fijo y  $t_{OFF}$  variable, b)  $t_{ON}$  se mantiene variando y  $t_{OFF}$  fijo, c) se varían tanto a  $t_{ON}$  como a  $t_{OFF}$ . Naturalmente, los controladores de frecuencia fija deben tener variando a  $t_{ON}$  y a  $t_{OFF}$  a la vez que el período  $T$  se mantiene constante.

## Capítulo 1 Los Reguladores Conmutados de Corriente Directa-Corriente Directa

En este trabajo se emplea el control PWM con frecuencia fija por dos razones; la primera se debe a la facilidad y bajo costo con que se puede implantar un controlador de este tipo mediante el uso de circuitos integrados, mas específicamente, mediante el uso del circuito TL 494 de Motorola, el cual es un controlador PWM en modo conmutado. La segunda razón se debe a que este tipo de control permite minimizar las emisiones degenerativas de estos reguladores debidas a la conmutación.

El proceso de control mediante PWM puede explicarse sobre la base del sistema mostrado en la Fig.1.14, dicho sistema consiste en un regulador Buck controlado por medio de su voltaje de salida. Este control puede implantarse, en forma básica, mediante un reloj ajustable para establecer la frecuencia de conmutación, un amplificador de error de voltaje, un generador de diente de sierra sincronizado con el reloj, y un comparador de voltaje que compara la señal de error de voltaje con el diente de sierra. La salida de este comparador es la señal mediante la cual se controla la conmutación del transistor que actúa como el interruptor 1.

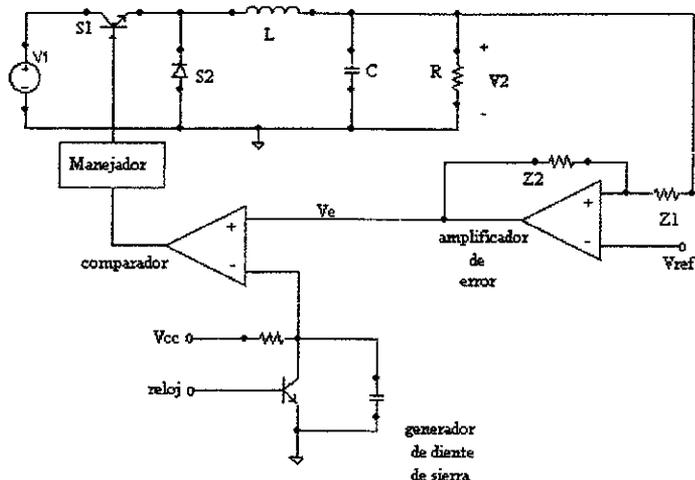


Fig 1.14 Esquema básico para el control PWM de un regulador Buck

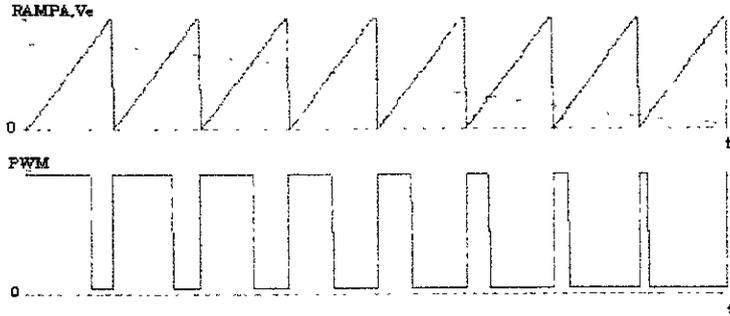


Fig 1 15 Señal PWM para el circuito de la Fig.1.10

El ancho del pulso  $t_{ON}$  de la señal PWM es el tiempo entre el cual la pendiente positiva del diente de sierra es menor a la señal de error de voltaje, como se muestra en la Fig.1.15. Si  $v_e$  es la señal de rizo de la amplitud de la señal de error de voltaje, cuyas variaciones son muy lentas en comparación con la frecuencia de conmutación, y  $V_p$  es la amplitud de voltaje de la señal de diente de sierra, entonces el tiempo de trabajo puede aproximarse mediante la siguiente expresión continua

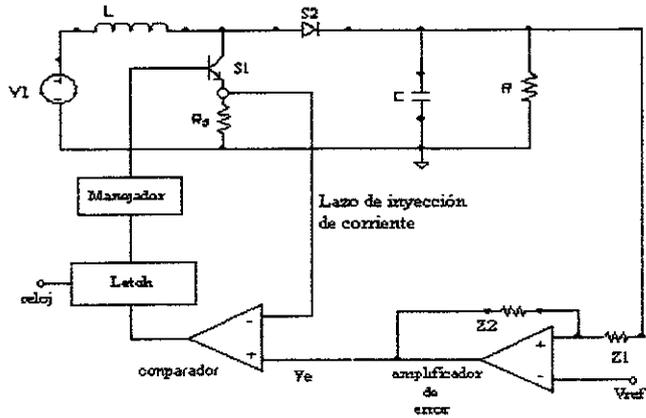
$$u = \frac{v_e}{V_p} \quad (1.14)$$

Una salida de voltaje menor a la diseñada produce un alto error de voltaje  $y$ , por lo tanto, una prolongada duración del pulso  $t_{on}$ , lo que, a su vez, resulta en un incremento en la salida de voltaje. Este tipo de control PWM es conocido frecuentemente como *controlador en modo de voltaje* dado que sólo se emplea información de voltaje para implantarlo. El empleo de información de corriente, junto con información de voltaje (retroalimentación de estados), representa una mayor ventaja en el control de los reguladores conmutados. La manera más común de adicionar información de corriente al circuito, es empleando una señal análoga, pero derivada, de las variaciones en la señal

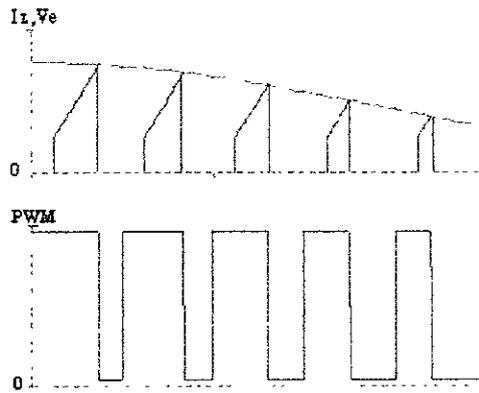
de corriente en uno de los inductores en lugar de la señal de diente de sierra; esto debido a que la componente ondulatoria de estas corrientes son muy aproximadas a este tipo de señales. Un voltaje proporcional a la forma de estas corrientes puede obtenerse ya sea mediante una resistencia de valor despreciable, un transformador, o mediante un sensor de corriente de efecto Hall. Dado que sólo se requiere de la parte con pendiente positiva de la señal de corriente, el sensor de corriente puede colocarse en serie con el interruptor  $S_1$ . Este tipo de control recibe diferentes nombres como control en *modo corriente* o control por *programación corriente*, sin embargo, y sobre la base de lo anterior, el termino control por *inyección de corriente* es el mas apropiado ya que implica que la información de voltaje esta complementada con la información de corriente, en tanto que los nombres anteriores dan a entender que esta última información sustituye a la primera.

Un circuito básico, así como las gráficas características, se muestra en la Fig. 1.16 para un regulador Boost. En un determinado ciclo de operación, el pulso  $t_{ON}$  coincide con el pulso de reloj, mientras que el tiempo  $t_{OFF}$  coincidirá con el tiempo en que el voltaje análogo de la corriente en el interruptor alcanza al voltaje de error  $v_e$ . Así, el control por inyección de corriente es preferible por sobre el control en modo de voltaje, sin embargo, en términos prácticos, es más difícil implementar el segundo método que el primero.

Capítulo 1 Los Reguladores Conmutados de Corriente Directa-Corriente Directa



(a)



(b)

Fig 1.16 (a) Control por inyección de corriente para el regulador Boost, (b) Señal PWM correspondiente

# CAPÍTULO 2

## EL REGULADOR BOOST

En el capítulo 1 se presentó un análisis muy general de las topologías básicas de los reguladores conmutados CD-CD, sin embargo, debido a que el presente trabajo de tesis se concentra en un estudio basado en el regulador elevador de voltaje, o regulador Boost, este capítulo se enfoca en un análisis más detallado de su comportamiento. En el apartado 2.2 se deriva una representación matemática de este regulador que, al resultar ser no lineal y no continua, es linealizada en el apartado 2.4. Con este fin, en el apartado 2.3 se introduce el método variacional de Euler-Lagrange el cual es un método empleado principalmente en el análisis de sistemas no lineales y, recientemente, de sistemas no continuos.

### 2.1 Análisis básico

Dado que la presente tesis centra su atención en el regulador Boost, es necesario conocer más a fondo el comportamiento de esta topología. Para ello se considera un circuito básico en la Fig.2.1, el cual, y al igual que en el caso del circuito con diodo de liberación, es posible dividirlo en dos subcircuitos o *modos de operación*, dependiendo de la acción de los interruptores  $S_1$  y  $S_2$ .

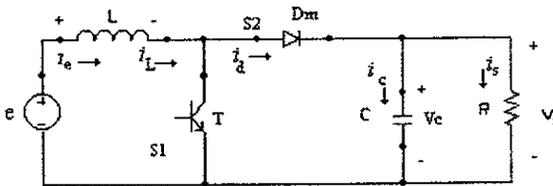


Fig.2.1 Circuito básico del regulador Boost

## Capítulo 2 El regulador Boost

La primera modalidad de operación, o Modo 1 para simplificar, inicia cuando el transistor T conduce en el tiempo inicial  $t=0$ . La corriente  $i_e$  circula, junto con una pequeña señal de rizo debida a la conmutación de T, a través de L y de T. Al mismo tiempo, el capacitor C y la resistencia de carga R se encuentran aislados del resto del circuito debido a que el diodo Dm permanece abierto, por lo cual el subcircuito equivalente es como se muestra en la Fig.2.2

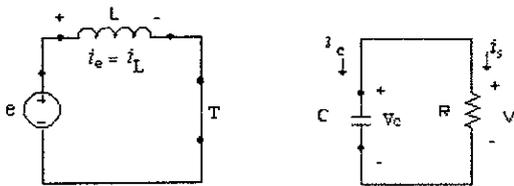


Fig. 2.2 Circuito equivalente para el Modo 1 de operación

El Modo 2 de operación inicia cuando T deja de conducir en el tiempo  $t = t_1$ . La corriente que fluyó a través del transistor ahora fluye a través de los elementos L, Dm, C y R. Al mismo tiempo, la corriente almacenada en el inductor, durante el Modo 1, decaerá hasta que T vuelva a cerrarse. De esta forma la energía almacenada en el inductor será transmitida a la carga. El circuito resultante se muestra en la Fig. 2.3

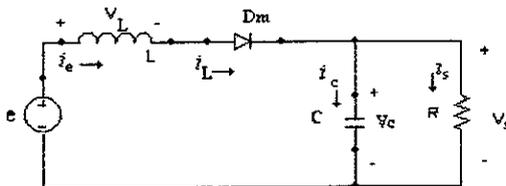


Fig. 2.3 Circuito equivalente para el Modo 2 de operación

## Capítulo 2 El regulador Boost

Durante el Modo 1 de operación, el voltaje en el inductor se define como

$$e = L \frac{di_L}{dt} \quad (2.1)$$

Reagrupando términos e integrando en ambos lados de la igualdad para un intervalo de tiempo de  $t_0$  a  $t_1$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{L} e dt = \int_{i_0}^{i_1} di_L \quad (2.2)$$

donde al resolver las integrales se tiene que la corriente en el inductor varía en forma continua

$$i_1 - i_0 = \frac{t_1 - t_0}{L} e \quad (2.3)$$

Para el Modo 2 de operación, el voltaje en el inductor se define como

$$L \frac{di_L}{dt} = e - V_s \quad (2.4)$$

Así:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} (e - V_s) \quad (2.5)$$

Durante el intervalo de tiempo  $t_1 - t_2$ , el inductor descarga la corriente almacenada en el circuito hasta alcanzar la magnitud de  $i_0$ , entonces:

$$\frac{i_0 - i_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{L} (e - V_s) \quad (2.6)$$

## Capítulo 2 El regulador Boost

Reagrupando convenientemente tenemos que

$$\frac{-(i_1 - i_0)}{t_2 - t_1} = -\frac{1}{L}(V_s - e) \quad (2.7)$$

Redefiniendo los intervalos de tiempo de tal forma que  $(t_1 - t_0) = t_{\text{ON}}$  y  $(t_2 - t_1) = t_{\text{OFF}}$  y aplicando la ecuación (1.13), entonces los tiempos de encendido y apagado se determinarán como

$$\begin{aligned} t_{\text{ON}} &= u\Gamma \\ t_{\text{OFF}} &= (1-u)\Gamma \end{aligned} \quad (2.8)$$

por lo cual las ecuaciones (2.3) y (2.7) cambiarán a la siguiente forma:

$$\frac{i_1 - i_0}{u\Gamma} = \frac{1}{L}e \quad (2.9)$$

$$\frac{i_1 - i_0}{(1-u)\Gamma} = \frac{1}{L}(V_s - e) \quad (2.10)$$

despejando el término  $i_1 - i_0$  en las ecuaciones (2.9) y (2.10) e igualando

$$\frac{u\Gamma}{L}e = \frac{(1-u)\Gamma}{L}(V_s - e)$$

de donde el voltaje de salida  $V_s$  se determina por

$$V_s = \frac{e}{(1-u)} \quad (2.11)$$

Igualdad que coincide con la ecuación (1.5) obtenida en el capítulo anterior. A partir de este resultado se observa que para el valor  $u=0$  se tiene que  $V_s = e$ , mientras que, para

## Capítulo 2 El regulador Boost

$u=1$ ,  $V_s = \infty$ , por lo que el voltaje de salida será mayor o igual al voltaje de entrada tal como se esperaba.

### 2.2 El modelo de Espacio de Estado

Todos los reguladores vistos en el Capítulo 1 son sistemas que poseen dos características de análisis, a saber:

- I. Debido a su naturaleza conmutativa, son sistemas no continuos, y
- II. Ya que las ecuaciones fundamentales están en función del parámetro  $u$ , los sistemas no son lineales con respecto a dicho parámetro ya que este puede ser una función tanto del voltaje en el capacitor, como de la corriente en el inductor.

Por *sistema* podemos entender a un conjunto interconectado de componentes con terminales o puertos de acceso, a través de los cuales se puede aplicar y/o extraer materia o energía. En el caso del regulador Boost podemos considerar la Fig. 1.2(a), Capítulo 1, la cual se reproduce convenientemente alterada en la Fig. 2.4, donde se observa que el sistema cuenta con dos puertos, el puerto de entrada de voltaje, y el puerto de salida de voltaje. Este sistema puede ser representado numéricamente por un *modelo matemático*, es decir, mediante un conjunto de ecuaciones que describen cercanamente las relaciones existentes entre la señal de entrada y la señal de salida del sistema.



Fig. 2.4 El sistema regulador Boost

## Capítulo 2 El regulador Boost

Como se observó en el análisis del regulador Boost, existen pequeñas variaciones en la corriente del inductor, debido a su carga y descarga de energía, por lo cual, si se desea realizar algún tipo de control sobre este y otros reguladores, es importante considerar esta variación. Así, en el modelado del regulador Boost, es conveniente considerar tres puertos en este sistema; un puerto de entrada para la señal de voltaje  $e$ , y dos puertos de salida, uno para la señal de voltaje del capacitor, es decir  $V_s$ , y otro para la señal de corriente del inductor,  $i_l$ . Por lo anterior, es útil realizar un análisis de *espacio de estado*, ya que permite estudiar al regulador Boost como un sistema de una entrada y múltiples salidas, con la ventaja de realizar este trabajo en el dominio del tiempo.

Antes de iniciar un estudio en el espacio de estado, primero debe definirse a este y a otros conceptos necesarios para el análisis, los cuales pueden consultarse más a fondo en [4] y [9].

- *Variable de estado*. Son aquellos parámetros que constituyen el conjunto más pequeño de variables que determinan el comportamiento interno de un sistema cualesquiera.
- *Estado*. Es el conjunto más pequeño de variables de estado, con el cual, junto con el conocimiento de la entrada, es posible determinar el comportamiento de un sistema en cualquier instante de tiempo.
- *Espacio de estado*. Aquel espacio  $n$ -dimensional cuyos ejes coordenados son las variables de estado se denomina espacio de estado, donde el estado de un sistema en un determinado instante se representa como un punto en el espacio de estado.
- *Vector de estado*. Si se requieren  $n$  variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces estas  $n$  variables se pueden considerar como los  $n$  componentes de un vector  $x$ . Este vector se conoce como vector de estado, por lo cual,  $x(t)$  es un vector que determina en forma única el estado del sistema en cualquier instante de tiempo.

## Capítulo 2 El regulador Boost

- *Ecuaciones de estado.* En un análisis de espacio de estado, se requieren de tres tipos de variables involucradas en un sistema: las variables de entrada, las de salida y las de estado.

Mediante estas variables es posible construir un sistema de  $n$ -ecuaciones para  $n$ -variables de estado, a este sistema se le conoce como ecuaciones de estado.

El método de análisis en el espacio de estado se basa en la descripción de un sistema en términos de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden. Por ello, la utilización de una notación matricial simplifica el trabajo matemático, así, un sistema lineal con múltiples entradas (representadas por una matriz  $\mathbf{e}(t)$ ), múltiples salidas (representadas por la matriz  $\mathbf{y}(t)$ ), y múltiples variables de estado (representadas por la matriz  $\mathbf{x}(t)$ ), tiene como ecuación de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{e}(t) \quad (2.12)$$

y una ecuación de salida dada por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{e}(t) \quad (2.13)$$

Donde  $\mathbf{A}(t)$  es una matriz de estado de  $n^*n$ ,  $\mathbf{B}(t)$  es una matriz de entrada de  $n^*m$ ,  $m$  es el número de entradas,  $\mathbf{C}(t)$  es una matriz de salidas de  $h^*n$ ,  $h$  es el número de salidas, y  $\mathbf{D}(t)$  es una matriz de transmisión directa de la entrada a la salida, de dimensión  $h^*m$ . Si en las matrices anteriores no aparece en forma explícita la variable  $t$  entonces el sistema será invariable en el tiempo, por lo que las dos últimas ecuaciones se pueden simplificar a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t) \quad (2.14.a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{e}(t) \quad (2.14.b)$$

En el caso de los sistemas no-lineales, las ecuaciones de estado se expresan de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t, x_1, x_2, \dots, x_n, e_1, \dots, e_n) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{e}(t)) \quad (2.15.a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{e}(t)) \quad (2.15.b)$$

## Capítulo 2 El regulador Boost

Donde  $F$  y  $H$  son funciones no-lineales con respecto a la variable  $t$ , y a las matrices  $x(t)$  y  $e(t)$ . En el caso de los reguladores conmutados CD-CD, esta no-linealidad se debe a la dependencia de las matrices  $A$  y  $B$  con respecto a la señal conmutada  $u$ , es decir, las matrices  $F$  y  $H$  están en función de  $t$ ,  $x(t)$ ,  $e(t)$  y  $u(t)$ .

### 2.2.1 El espacio de estado promedio y linealización

El análisis de espacio de estado promedio y de linealización son técnicas analíticas de aproximación que permiten representar en forma continua y lineal a los reguladores conmutados vistos en el Capítulo 1. Es decir, los espacios de estado promedio permiten que un sistema conmutado se aproxime a un sistema continuo pero no lineal, en tanto que la linealización permite la obtención de un modelo equivalente lineal

El criterio que se tomará en la presente tesis para lograr una aproximación a la continuidad consiste en establecer un conjunto satisfactorio de parámetros promedio Euler-Lagrange (EL), (ver [5], [16], [17] y [19]), modulados por el término  $u$ . Posteriormente, se tomará como criterio de aproximación a la linealidad el hecho de que las variaciones en el tiempo, o señales de CA, en las variables de estado, deben ser lo suficientemente pequeñas en comparación con sus señales respectivas de CD.

### 2.3 El Modelo continuo Euler-Lagrange (EL)<sup>1</sup>

El análisis empleado para la obtención de un modelo aproximado a la continuidad consiste en establecer determinados parámetros EL del sistema, asociados con cada uno de los subcircuitos correspondientes a las dos posibles posiciones del interruptor S1 mostradas en las Figuras 2.2 y 2.3.

---

<sup>1</sup> Un análisis más formal de lo expuesto en este apartado puede consultarse en las referencias [5], [16] y [17]

## Capítulo 2 El regulador Boost

Se empleó este método ya que los parámetros EL son una importante herramienta matemática mediante la cual, y a través de ecuaciones dinámicas Lagrangianas, se llega fácilmente a un sistema de ecuaciones diferenciales descriptivas. Es importante establecer primero los principios generales sobre el modelado de sistemas mediante parámetros EL, introducción que se presenta en el siguiente apartado.

### 2.3.1 Sistemas Eléctricos Euler-Lagrange

En sistemas eléctricos, existen tres *dispositivos puros* (es decir que pueden ser representados en forma ideal) mediante los cuales es posible describir a dichos sistemas: el inductor, el capacitor y el resistor, donde los dos primeros constituyen elementos de almacenamiento de energía y el tercero es un elemento disipador de la misma. Para lograr obtener una buena parametrización de EL, es necesario obtener de cada uno de estos dispositivos un conjunto característico de variables de estado.

#### 2.3.1.1 Determinación de las variables de estado

Antes de establecer las variables de estado necesarias para el análisis, primero deben conocerse las características básicas de los componentes a emplear.

##### \* El capacitor eléctrico

El capacitor eléctrico es un dispositivo capaz de almacenar energía eléctrica en un campo eléctrico, es decir, es capaz de acumular carga eléctrica en sus placas obteniéndose como resultado una diferencia de potencial en las mismas. Matemáticamente

$$V_c(t) = \frac{1}{C} q(t) \quad (2.16)$$

## Capítulo 2 El regulador Boost

Donde  $V_c(t)$  es el voltaje en el capacitor,  $C$  es una constante de proporcionalidad expresada en faradios, y  $q(t)$  es la *carga eléctrica* en el capacitor. En esta ecuación, la carga eléctrica se escoge como una de las variables de estado básicas, ya que sólo depende del tiempo y por que su primera derivada,  $\dot{q}(t)$ , es la corriente que fluye a través del capacitor.

### \* El inductor eléctrico

La ley de Faraday para una tensión inducida en una espira se determina como

$$e_{ind} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.17)$$

donde  $\mathbf{B}$  es un vector de superficie magnética,  $d\mathbf{S}$  es un vector de superficie elemental, y  $e_{ind}$  es el voltaje inducido en la espira. A partir de la Fig. 2.5, y con motivo de obtener un vector de inducción magnética,  $\mathbf{B}$ , en la dirección mostrada, se introduce una corriente en la parte 2 de la espira  $c$ . Por tanto

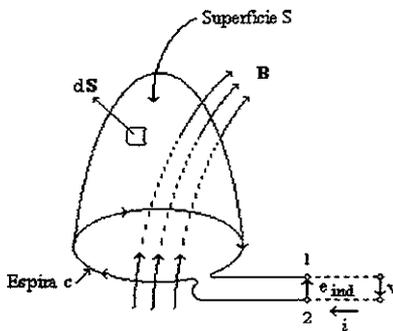


Fig. 2.5. Ilustración de la Ley de Faraday

## Capítulo 2 El regulador Boost

$$V = - e_{\text{ind}} \quad (2.18)$$

Por lo que al sustituir la ecuación (2.18) en la ecuación (2.17) e integrando con respecto al tiempo, se tiene

$$\left[ \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right]_{t=-\infty}^{t=1} = \int_{-\infty}^1 v(t) dt \quad (2.19)$$

La integral de superficie del vector inducción magnética, sobre una superficie que se apoya en la espira, se define como el flujo magnético que atraviesa la espira. Si un inductor esta formado por varias espiras, la suma de las integrales de superficie, tomadas para cada espira, será incluida en la ecuación (2.19). El total de las integrales de superficie se define como el *acoplo inductivo* del inductor. Matemáticamente

$$\left[ \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right]_{t=-\infty}^{t=1} = \lambda(t) - \lambda(-\infty) \quad (2.20)$$

Donde el acoplo inductivo,  $\lambda$ , se dimensiona en webers. En el instante  $-\infty$ , el acoplo inductivo se toma como cero, por lo que la ecuación (2.20) se reduce a

$$\int_0^1 v(t) dt = \lambda(t) \quad (2.21)$$

En el caso del inductor, la corriente se define como

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(t) dt \quad (2.22)$$

Donde L es una constante de proporcionalidad medida en henrios que, sustituyendo la ecuación (2.21) produce

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \lambda_L(t) \quad (2.23)$$

Por lo que el acoplo inductivo es proporcional a la corriente aplicada al inductor. Es decir, un inductor tiene la facultad de almacenar acoplo inductivo, produciéndose una corriente proporcional. El acoplo inductivo será entonces la segunda variable de estado, cuya derivada primera, con respecto al tiempo, es el voltaje,  $\dot{\lambda}$ .

\* La resistencia eléctrica

Debido a que el elemento de resistencia eléctrica no almacena energía sino que la disipa, y dado que la Ley de Ohm nos permite modelar el comportamiento de este dispositivo en función de los parámetros voltaje y corriente, entonces

$$\dot{\lambda}(t) = R \dot{q}(t) \quad (2.24)$$

Donde R es la constante de proporcionalidad dimensionada en ohms y  $\dot{q}(t)$  es la corriente expresada como la derivada de la carga eléctrica.

### 2.3.1.2 Funciones de energía

Para un sistema EL, la formulación de las ecuaciones de estado se basa en la obtención de las llamadas *funciones de estado de energía*, es decir ecuaciones de estado que representan el comportamiento de la energía electromagnética en cada elemento puro. Estas funciones, en cualquier instante dado, tienen valores determinados por las variables de estado, es decir, los valores de estas funciones dependerán de las variables de estado en ese mismo instante de tiempo y no de la historia pasada del sistema. De nuevo, se hace un análisis independiente de cada elemento puro para después pasar a determinar las ecuaciones de equilibrio de Lagrange.

## Capítulo 2 El regulador Boost

### \* Función de energía del capacitor eléctrico

En un capacitor eléctrico, la potencia instantánea se define como

$$P_e(t) = \dot{\lambda}_c \dot{q}_c(t) \quad (2.25)$$

Donde  $\dot{\lambda}_c(t)$  y  $\dot{q}_c(t)$  son, respectivamente, el voltaje y la corriente en el capacitor, y el término  $P_e$  indica la potencia eléctrica del capacitor. Así, el incremento de energía en el campo eléctrico se expresa como

$$\Delta w_e(t) = \int P_e(t) dt \quad (2.26)$$

por lo que en el intervalo de tiempo  $t_0$  a  $t$  se tiene que

$$w_e(t) - w_e(t_0) = \int_{t_0}^t \dot{\lambda}_c(t) \dot{q}_c(t) dt \quad (2.27)$$

Dado que la corriente eléctrica  $\dot{q}_c(t)$  es la variación de la carga eléctrica con respecto al tiempo, entonces la ecuación (2.27) cambia a

$$w_e(t) - w_e(t_0) = \int_{t_0}^t \dot{\lambda}_c(t) \frac{dq_c(t)}{dt} dt \quad (2.28)$$

de donde observa que hay una dependencia funcional con respecto a la variación de la carga que puede interpretarse mejor haciendo un cambio de variable de  $t$  por  $q$ . Así

$$w_e(q) - w_e(q_0) = \int_{q_0}^q \dot{\lambda}_c(\dot{q}) dq \quad (2.29)$$

Donde se ha utilizado las primas para denotar las variables implicadas en la integración, por lo que las variables que no llevan primas son los límites de la integral. Si el instante  $t_0$  se escoge de tal forma que  $q_0 = 0$ , entonces la energía almacenada en ese instante es cero; es decir

$$w_e(q) = \int_0^q \dot{\lambda}_c \dot{q}_c dq' \quad (2.30)$$

Esta última ecuación representa la energía total almacenada en el campo eléctrico de un capacitor en cualquier instante  $t$ . Un término energético de la forma de la ecuación (2.30), es una ecuación de estado donde la función dentro de la integral no es otra sino la ecuación (2.16) donde el término  $V_C$  se cambia por  $\dot{\lambda}_C(t)$ . Así, sustituyendo en (2.30) resulta

$$w_e(q) = \int_0^q \frac{1}{C} q_c dq' \quad (2.31)$$

y resolviendo la integral se llega a una ecuación energética de estado más práctica y útil en el análisis de estado

$$w_e(q) = \frac{1}{2C} q_c^2 \quad (2.32)$$

\* Función de energía para el inductor eléctrico

Aplicando el mismo procedimiento usado en el capacitor, tenemos que la potencia magnética instantánea, total, en un inductor, viene dada por

$$P_m(t) = \dot{\lambda}_L(t) \dot{q}_L(t) \quad (2.33)$$

Donde el subíndice  $m$  de la potencia  $P$  implica la naturaleza magnética de la misma. El almacenamiento de energía en el campo magnético logrado durante un incremento de tiempo  $dt$  es

$$dW_m(t) = \dot{q}(t) \frac{d(\lambda_L(t))}{dt} dt \quad (2.34)$$

Si se toma como nula la energía almacenada al inicio del intervalo de tiempo ( $t=0$ ), la energía total almacenada es entonces

## Capítulo 2 El regulador Boost

$$w_m(t) = \int_0^t \dot{q}_L(t) \frac{d\lambda_L(t)}{dt} dt \quad (2.35)$$

que, al igual que en el caso del capacitor, se reduce a

$$w_m(\lambda) = \int_0^\lambda \dot{q}'_L(\lambda') d\lambda' \quad (2.36)$$

donde  $\lambda$  sin prima, es la magnitud del acoplo inductivo para cada instante  $t$ . Sustituyendo el termino  $\dot{q}'_L(\lambda')$  por la función dada en al ecuación (2.23) tenemos

$$w_m(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{1}{L} \lambda' d\lambda' \quad (2.37)$$

donde al resolver se llega a la siguiente expresión

$$w_m(\lambda) = \frac{1}{2L} \lambda^2 \quad (2.38)$$

Debe mencionarse que en el análisis del inductor eléctrico no se trataron los fenómenos de inductancia mutua debido a que, en el caso de los reguladores conmutados vistos en el capítulo 1, este fenómeno no se presenta debido a que estos sistemas cuentan sólo con una inductancia en su circuito, aunque si pueden darse casos de interferencias que no se consideraron en el presente análisis.

La ecuación (2.38) es por tanto una función de la variable voltaje, función que difícilmente podríamos emplear junto con la ecuación (2.32), por ello se empleará un método matemático basado en lo siguiente:

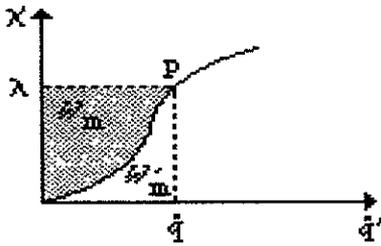


Fig 2.6. Interpretación gráfica de las funciones de estado, energía y coenergía del campo magnético.

En la Fig. 2.6 se muestra una interpretación gráfica de la integral obtenida en la ecuación (2.36). La energía magnética total, almacenada en cualquier instante  $t$  es el área por encima de la curva mostrada, así mismo, el área que queda debajo de la curva puede ser expresada como

$$w'_m(\dot{q}) = \int_0^{\dot{q}} \lambda'_L(\dot{q}'_L) d\dot{q}' \quad (2.39)$$

La cantidad  $w'_m(\dot{q})$  se conoce como la *coenergía* almacenada en el inductor, y se designa mediante la prima. Esta cantidad es también una función de estado de energía, del mismo modo que la energía almacenada. Si se elige un punto  $p$  cualesquiera en la curva mostrada, este punto representará el estado del sistema para valores de  $\lambda$  y  $\dot{q}$  específicos, valores que, matemáticamente, corresponden a una cierta cuantía de área, tanto por encima como por debajo de la curva. Por lo anterior la función de coenergía también proporciona una descripción válida de acuerdo a la relación del punto  $p$  y el área bajo la curva.

Debe mencionarse que el gráfico obtenido en la Fig. 2.6 no es lineal debido a que, en forma general, la constante de proporcionalidad  $L$  puede variar con respecto a  $\lambda$  o  $\dot{q}$ . A partir de la ecuación (2.23), despejamos el término  $\lambda_L$ , obteniendo

$$\lambda_L = L \dot{q}_L \quad (2.40)$$

la cual es una función integrable de acuerdo a la ecuación (2.39), por lo que

## Capítulo 2 El regulador Boost

$$w'_m(\dot{q}) = \int_0^{\dot{q}} L \dot{q}_L d\dot{q}' \quad (2.41)$$

y simplificando

$$w'_m(\dot{q}) = \frac{L}{2} \dot{q}_L^2 \quad (2.42)$$

La ecuación (2.42), es una nueva ecuación energética en función de la primera derivada de la carga eléctrica  $q$ , la cual es más fácil de relacionar con la ecuación (2.32) para obtener un espacio de estado característico.

Es importante hacer un paréntesis en este punto, ya que en la formación de las ecuaciones de equilibrio, a partir de las funciones energéticas, se requiere calcular ciertas derivadas parciales. La manera en que se obtienen las ecuaciones de equilibrio puede verse en la forma siguiente:

a) En el caso del capacitor, si se deriva la ecuación (2.30) con respecto a la variable de estado  $q(t)$  se obtiene

$$\frac{\partial w_e(q)}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left[ \int_0^q \lambda'_c(q'_c) dq' \right] \quad (2.43)$$

que se reduce a

$$\frac{\partial w_e(q)}{\partial q} = \lambda'_c(q'_c)$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial w_e(q)}{\partial q} = \frac{1}{C} q_c \quad (2.44)$$

En otras palabras estamos obteniendo una expresión del voltaje en el capacitor en función de las variaciones de la energía con respecto a las variaciones de la carga eléctrica  $q$ .

b) Para el inductor, derivando la ecuación (2.39) con respecto a la variable  $\dot{q}$

**Capítulo 2 El regulador Boost**

$$\frac{\partial w'_m(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[ \int_0^{\dot{q}} \lambda'_L(\dot{q}'_L) d\dot{q}' \right] \quad (2.45)$$

y siguiendo los mismos pasos que en el inciso a) se llega al siguiente resultado

$$\frac{\partial w'_m(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = L \dot{q}_L \quad (2.46)$$

donde la ecuación (2.46) expresa al voltaje en el inductor de acuerdo a la variación de la coenergía con respecto a la variación de primera derivada de la variable  $q$ .

\* Función de energía en la resistencia eléctrica

A partir de la ecuación (2.24), es posible construir una gráfica muy similar a la curva obtenida para el inductor, que a su vez tampoco es una línea recta debido a que la variable  $R$  puede variar en función del voltaje o la corriente. En esta gráfica, Fig. 2.7, el área bajo la curva muestra la primera derivada temporal de una de las variables de estado, en función de la primera derivada temporal de la otra.

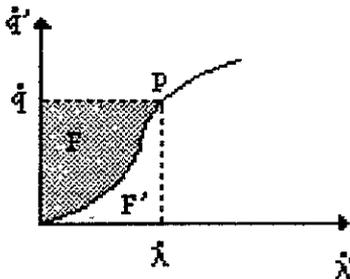


Fig. 2.7 Interpretación gráfica de la función y cofunción disipativa de la resistencia eléctrica

En el caso de la resistencia, el área sobre la curva se conoce como *la función de disipación de Rayleigh*, la cual está determinada por

$$F_e(\dot{q}) = \int_0^{\dot{q}} \lambda'(\dot{q}') d\dot{q}' \quad (2.47)$$

donde el termino  $F_e$  es la notación que recibe esta función y el subíndice  $e$  denota que esta disipación se da en forma eléctrica. Similarmente, la *cofunción de Rayleigh* es el área sombreada por debajo de la curva en la Fig 2.7. Dado que las funciones de estado que se están considerando dependen de la variable  $q$ , de la función de disipación de Rayleigh y de la ecuación (2.24), se llega a

$$F_e(\dot{q}) = \int_0^{\dot{q}} R \dot{q}' d\dot{q}'$$

o equivalentemente

$$F_e(\dot{q}) = \frac{R}{2} \dot{q}^2 \quad (2.48)$$

La derivada parcial de la función de Rayleigh con respecto a la corriente  $\dot{q}$  da como resultado una expresión del voltaje a través de la resistencia en función de la variación de la disipación de energía con respecto a la variación de corriente eléctrica

$$\frac{\partial F_e(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = R \dot{q} \quad (2.49)$$

### 2.3.1.3 Ecuaciones de equilibrio

Un sistema eléctrico Euler-Lagrange es caracterizado por las siguientes ecuaciones diferenciales no lineales, conocidas como las *ecuaciones de Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial F_e(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = e_q \quad (2.50)$$

Donde  $\dot{q}$  es un vector de las corrientes que fluyen en el sistema, y  $q$  es el vector de carga eléctrica. Este vector de carga eléctrica constituye la variable de estado que describe el circuito. La función escalar  $\mathcal{L}$  es el *Lagrangiano* del sistema, definido como la diferencia entre la coenergía magnética del sistema y la energía del campo eléctrico

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = w'_m(\dot{q}) - w_e(q) \quad (2.51)$$

$F_e$  es la función de disipación de Rayleigh, y el vector  $e_q$  representa las fuentes externas de energía asociadas con el parámetro  $q$ . De lo anterior, el conjunto de funciones  $Wm'$ ,  $We$ ,  $F_e$  y  $e_q$  son conocidos como *los parámetros Euler Lagrange* del sistema.

En el caso del regulador Boost, es necesario considerar el comportamiento de los interruptores S1 y S2, por lo cual, en la Fig. (2.8) se presenta un nuevo circuito, en el que se incluye un único interruptor equivalente denotado como  $u$ . Este interruptor tomara la posición 1 o 0 alternativamente, resultando, de cada posición, los subcircuitos equivalentes ya vistos en la sección 2.1. Nótese que desde el punto de vista del S1, el interruptor  $u$  puede considerarse como una variable que toma los valores discretos  $[0,1]$ . Como ya se vio, cuando el interruptor  $u$  toma la posición 0 ( $u=0$ ), el regulador adquiere la forma mostrada en la Fig. (2.3), la cual se reproduce en la Fig. (2.9) donde se muestra la nueva notación para las corrientes circulantes.

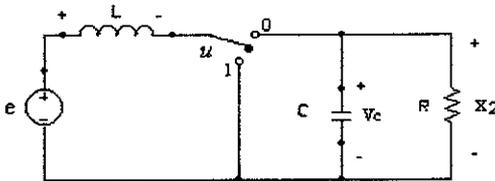


Fig.2.8. Regulador Boost conmutado por un solo interruptor  $u$

Capítulo 2 El regulador Boost

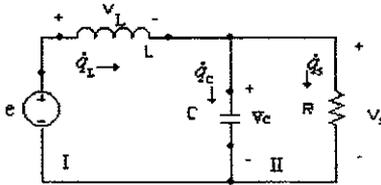


Fig.2.9 Circuito equivalente Boost para la posición 0 del interruptor  $u$ .

Realizando un análisis de mallas del circuito, y tomando a  $\dot{q}_L$  como la corriente en la malla I, y a  $\dot{q}_C$  como la corriente de la malla II, como se muestra en la Fig. (2.9), tenemos que la función de coenergía magnética, de acuerdo a la ecuación (2.42), es

$$W'_{L0} = \frac{L}{2} \dot{q}_L^2 \quad (2.52)$$

Donde el término  $W'_{L0}$  representa la coenergía magnética en el inductor durante la posición 0 del interruptor  $u$ . Del mismo modo y a partir de la ecuación (2.32), la función de energía eléctrica se define como

$$W_{\infty} = \frac{1}{2C} q_C^2 \quad (2.53)$$

La función de disipación de Rayleigh, de acuerdo a la ecuación (2.48), es igual a

$$F_{\infty}(\dot{q}) = \frac{R}{2} (\dot{q}_s)^2 \quad (2.54)$$

donde

$$\dot{q}_s = \dot{q}_L - \dot{q}_C \quad (2.55)$$

Por último, la fuente externa de voltaje  $e$  solo afecta directamente al parámetro  $\dot{q}_L$  resultando

## Capítulo 2 El regulador Boost

$$\begin{aligned} e_{qL_0} &= e \\ e_{qC_0} &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Considerando ahora el caso en el que el interruptor  $u = 1$ , Fig. 2.8; los parámetros de Lagrange, bajo el mismo procedimiento empleado, son

$$W'_{L1} = \frac{L}{2} \dot{q}_L^2 \quad (2.57)$$

$$W_{C1} = \frac{1}{2C} q_C^2 \quad (2.58)$$

$$F_{e1}(\dot{q}) = \frac{R}{2} \left( -\dot{q}_C \right)^2 = \frac{R}{2} \dot{q}_C^2 \quad (2.59)$$

Por último

$$\begin{aligned} e_{qL1} &= e \\ e_{qC1} &= 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

Donde el subíndice 1 denota el valor de la posición del interruptor  $u$  para el cual son válidas. Obsérvese que en el caso del regulador Boost, la única diferencia entre las ecuaciones del caso  $u = 0$  y las ecuaciones de  $u = 1$  se encuentra en la función de disipación de Rayleigh donde la acción de la corriente sobre la resistencia  $R$  de salida depende de la posición en que se encuentre el interruptor. Es decir, la parte disipativa del sistema es la única afectada por la posición del interruptor, por tanto, generalizando las ecuaciones obtenidas mediante la parametrización en  $u$  obtenemos los siguientes resultados

$$W'_L = \frac{L}{2} \dot{q}_L^2 \quad (2.61)$$

$$W_C = \frac{1}{2C} q_C^2 \quad (2.62)$$

$$F_c(\dot{q}) = \frac{R}{2} \left[ (1-u)\dot{q}_L - \dot{q}_C \right]^2 \quad (2.63)$$

## Capítulo 2 El regulador Boost

$$\begin{aligned}e_{q_L} &= e \\e_{q_C} &= 0\end{aligned}\tag{2.64}$$

Nótese que en el caso en que  $u = 1$  y  $u = 0$ , se recupera, respectivamente, la función de disipación para cada caso, por lo cual se considera que las ecuaciones (2.61) a (2.64) son consistentes, por ello no incluyen ningún subíndice numérico.

A partir de los resultados anteriores, el Lagrangiano, ecuación (2.51), para el regulador Boost esta dado por la ecuación

$$\mathcal{L} = \frac{L}{2} \dot{q}_L^2 - \frac{1}{2C} q_C^2\tag{2.65}$$

Por lo cual, es posible obtener dos ecuaciones de equilibrio en función de los parámetros  $q_L$  y  $q_C$ . Para aplicar las ecuaciones de Lagrange, ecuación (2.50), primero debe obtenerse el primer término de dicha ecuación para el parámetro  $q_L$ , así

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_L} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_L} \left( \frac{L}{2} \dot{q}_L^2 - \frac{1}{2C} q_C^2 \right)\tag{2.66}$$

cuyo resultado es

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_L} \right) = L \dot{q}_L$$

Sin embargo, es necesario contar con la derivada respecto al tiempo de este termino, por lo que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_L} \right) = L \ddot{q}_L\tag{2.67}$$

El segundo término de la ecuación (2.66) es

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_L} \right) = 0\tag{2.68}$$

## Capítulo 2 El regulador Boost

Donde el resultado de la ecuación era de esperarse ya que el Lagrangiano no esta en función de la carga en el inductor. El tercer termino se obtiene como sigue

$$\frac{\partial F_e}{\partial \dot{q}_L} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_L} \left\{ \frac{R}{2} \left[ (1-u)\dot{q}_L - \dot{q}_C \right]^2 \right\}$$

el cual se reduce a

$$\frac{\partial F_e}{\partial \dot{q}_L} = R(1-u) \left[ (1-u)\dot{q}_L - \dot{q}_C \right] \quad (2.69)$$

Por ultimo, y dado que la fuente de voltaje solo afecta directamente al inductor

$$e_{q_L} = e \quad (2.70)$$

Ahora podemos determinar la primera ecuación de equilibrio de Lagrange en función de  $q_L$  y de su primera derivada temporal :

$$L\ddot{q}_L + R(1-u) \left[ (1-u)\dot{q}_L - \dot{q}_C \right] = e \quad (2.71)$$

La segunda ecuación de equilibrio se obtiene mediante el mismo procedimiento aplicado para el parámetro  $q_C$ , así

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_C} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F_e}{\partial \dot{q}_C} = -R \left[ (1-u)\dot{q}_L - \dot{q}_C \right]$$

$$e_{q_C} = 0 \quad (2.72)$$

## Capítulo 2 El regulador Boost

Las ecuaciones dadas en (2.72) permiten llegar a una segunda ecuación de equilibrio

$$0 - \left( -\frac{1}{C} q_c \right) - R \left[ (1-u) \dot{q}_L - \dot{q}_c \right] = 0$$

$$\frac{1}{C} q_c - R \left[ (1-u) \dot{q}_L - \dot{q}_c \right] = 0 \quad (2.73)$$

Dado que nuestra intención es obtener un modelo de espacio en forma matricial, las ecuaciones (2.71) y (2.73) deben reescribirse convenientemente, por ello, de la ecuación (2.73) se despeja el término  $\dot{q}_c$ , obteniéndose

$$\dot{q}_c = (1-u) \dot{q}_L - \frac{1}{RC} q_c \quad (2.74)$$

Si en esta ecuación (2.74) se aplica el siguiente cambio de variables

$$x_1 = \dot{q}_L$$

$$x_2 = \frac{1}{C} q_c$$

se obtiene una forma más manejable de la segunda ecuación de equilibrio

$$\dot{x}_2 = \frac{(1-u)}{C} x_1 - \frac{1}{RC} x_2 \quad (2.75)$$

La primera ecuación de equilibrio se obtiene al realizar la sustitución de la ecuación (2.74) en la ecuación (2.71), así

$$L \ddot{q}_L + R(1-u) \left\{ (1-u) \dot{q}_L - \left[ (1-u) \dot{q}_L - \frac{1}{RC} q_c \right] \right\} = e$$

ecuación que al reducirse, y despejar el término  $\ddot{q}_L$ , da

$$\ddot{q}_L = \frac{1}{L} e - \frac{1}{LC} (1-u) q_c$$

## Capítulo 2 El regulador Boost

Donde aplicando nuevamente el cambio de variables se llega a una nueva ecuación de equilibrio

$$\dot{x}_1 = -\frac{(1-u)}{L}x_2 + \frac{1}{L}e \quad (2.76)$$

Finalmente, las ecuaciones (2.75) y (2.76) se encuentran en función del termino discreto  $u$ , por esto, el siguiente paso consiste en encontrar una nueva expresión en el tiempo continuo, para ello, si se analiza el comportamiento de  $u$  con respecto al tiempo, Fig. 2.10, se observa que cumple con la siguiente igualdad :

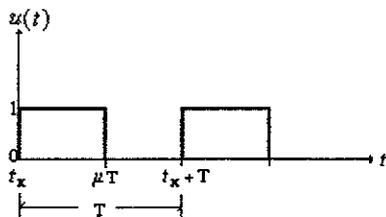


Fig 2.10 Gráfico que muestra el comportamiento del termino  $u$  con respecto al tiempo

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t_k \leq t < t_k + \mu T \\ 0, & t_k + \mu T \leq t < t_k + T \end{cases}$$

De lo anterior, para  $t_k = 0$ , la función temporal  $u(t) = 1$  es igual al tiempo de trabajo  $\mu T$ , en tanto que  $u(t) = 0$  será equivalente al termino  $T - \mu T$ , por esto, la variación de cambio  $u$  esta directamente relacionada con el termino continuo, lo que permite tomar a este ultimo como el tiempo de trabajo desde el punto de vista continuo. Realizando el cambio de variable, tenemos que el modelo de espacio de estado promedio del regulador Boost esta dado por

## Capítulo 2 El regulador Boost

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{(1-\mu)}{L}x_2 + \frac{1}{L}e \\ \dot{x}_2 &= \frac{(1-\mu)}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 \end{aligned} \quad (2.77)$$

expresión que se reduce a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mu)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}e(t) \quad (2.78)$$

donde las matrices **A** y **B** están dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(1-\mu)}{L} \\ \frac{(1-\mu)}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

### 2.4 Linealización del Modelo de Espacio de Estado

Debido a que el objetivo principal de este trabajo consiste en validar una ley de control obtenida a partir de un análisis no-lineal, se requerirá implantar una segunda ley de control con el fin de realizar comparaciones. Esta segunda ley de control consiste en una señal de retroalimentación PWM por medio de la cual se busca regular el voltaje de salida. Este método de control es analizado en el capítulo 3 desde un punto de vista lineal, por ello, en este apartado se introduce una expresión matricial lineal de la representación en el espacio de estado para el regulador Boost.

Cualquier sistema no lineal puede aproximarse a un sistema lineal en la vecindad del punto de operación de Corriente Directa (CD). Lo anterior se consigue separando los términos de CD, en los vectores  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{e}$  y del escalar  $\mu$ , de los términos de Corriente Alterna (CA). Para ello considere las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{X} + \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} &= \mathbf{E} + \hat{\mathbf{e}} \\ \mu &= D + \hat{\mu} \end{aligned} \quad (2.80)$$

## Capítulo 2 El regulador Boost

Los términos en CA están identificados por la notación  $(\wedge)$ , mientras que los términos en CD se identifican por las letras mayúsculas. Lo siguiente será asumir que las amplitudes de CA son muy pequeñas, por lo que el producto de dos términos en CA cualesquiera es despreciable. Esta suposición, aunque no es siempre válida, es necesaria para realizar una aproximación a la linealidad.

Dado que las matrices **A** y **B** son no lineales con respecto al término  $\mu$ , entonces, cuando esta variable toma los valores límite 1 y 0 se obtienen las matrices correspondientes a cada posición del interruptor  $u$ . Así para  $\mu=1$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

mientras que para  $\mu=0$  se tiene

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Donde los subíndices en cada matriz denotan la posición del interruptor  $u$  con la cual se relacionan. De todo lo anterior puede determinarse una expresión para el valor promedio de las matrices **A** y **B** de acuerdo a la variación del término  $(1-\mu)$  con respecto al tiempo. Matemáticamente

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_1 \mu + \mathbf{A}_0 (1-\mu) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_1 \mu + \mathbf{B}_0 (1-\mu) \end{aligned} \quad (2.83)$$

Al sustituir estos resultados en la ecuación (2.78) se tiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \{\mathbf{A}_1 \mu + \mathbf{A}_0 (1-\mu)\} \mathbf{x} + \{\mathbf{B}_1 \mu + \mathbf{B}_0 (1-\mu)\} \mathbf{e} \quad (2.84)$$

## Capítulo 2 El regulador Boost

Ahora puede aplicarse la sustitución de las igualdades dadas en (2.80) en la ecuación (2.84) obteniéndose un término que puede ser dividido en dos ecuaciones, una para CD, y la otra para CA. Así, la ecuación para CD está determinada por

$$0 = \{ \mathbf{A}_1 \mu + \mathbf{A}_0 (1 - \mu) \} \mathbf{x}_0 + \{ \mathbf{B}_1 \mu + \mathbf{B}_0 (1 - \mu) \} \mathbf{e}_0$$

y a su vez, la expresión para CA es

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}_1 D + \mathbf{A}_0 (1 - D)] \hat{\mathbf{x}} + [\mathbf{B}_1 D + \mathbf{B}_0 (1 - D)] \hat{\mathbf{e}} + [(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0) \mathbf{x}_0 + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0) \mathbf{e}_0] \hat{\mu} \quad (2.85)$$

La ecuación (2.84) se conoce como *el modelo de señal pequeña*. Considerando el siguiente cambio de variables

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{A}_1 D + \mathbf{A}_0 (1 - D)$$

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_1 D + \mathbf{B}_0 (1 - D)$$

$$\mathbf{E} = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0) \mathbf{x}_0 + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_0) \mathbf{e}_0 \quad (2.86)$$

Donde el subíndice  $(\cdot)_e$  implica que las matrices están en función de la componente de CD del tiempo de trabajo  $\mu$ . De acuerdo al modelo de estado promedio del regulador Boost, la única diferencia entre sus matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y las ecuaciones dadas en (2.86) radica en el cambio de variable  $\mu$  por su componente de CD, en tanto que la matriz  $\mathbf{E}$  se calcula como sigue

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} (0 - 0) \mathbf{x}_1 + \left[ 0 - \left( -\frac{1}{L} \right) \right] \mathbf{x}_2 + \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L} \right) \mathbf{e} \\ \left( 0 - \frac{1}{C} \right) \mathbf{x}_1 + \left[ -\frac{1}{RC} - \left( -\frac{1}{RC} \right) \right] \mathbf{x}_2 + (0 - 0) \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

por lo que el modelo de señal pequeña del regulador Boost está dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-D) \\ (1-D) & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{e}} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} x_2 \\ -\frac{1}{C} x_1 \end{bmatrix} \hat{\mu} \quad (2.87)$$

La ecuación (2.87) se conoce como el *modelo promedio lineal* del regulador Boost, ya que las matrices  $\mathbf{A}_c$  y  $\mathbf{B}_c$  están ahora en función de un parámetro constante  $D$ , mientras que la componente  $\hat{\mu}$ , de CA, se toma ahora como una segunda entrada al sistema, eliminando así la no-linealidad del modelo y facilitando con ello el análisis para el control PWM ([6], [11] y [20])

# CAPÍTULO 3

## ESQUEMAS DE CONTROL

El control de convertidores conmutados de potencia ha sido un área muy activa para investigadores tanto del área de la electrónica de potencia como en la teoría de control automático. Este interés se debe principalmente a que dichos sistemas tienen como características la no-linealidad de sus modelos descriptivos, su fácil implantación, y la posibilidad para medir y retroalimentar los estados de estos sistemas en forma directa.

Prácticamente todas las estrategias de control que han sido desarrolladas para los reguladores de voltaje, basados en transistores, se han derivado a partir de la linealización del modelo de espacio de estado alrededor de un punto nominal de operación. Estas formas de control se conocen como esquemas de *control conmutados*. Un segundo grupo de controladores es derivado de diferentes análisis realizados sobre el modelo no lineal del espacio de estado promedio mediante funciones de Lyapunov, por ello estos controladores son llamados *controladores basados en Lyapunov*. En el capítulo 2 se obtuvo un modelo linealizado promedio para el regulador Boost a partir de las ecuaciones de Lagrange, este modelo se empleará para el desarrollo de diferentes controladores con el fin de implantarlos físicamente y así comprobar la eficacia de los mismos.

En este capítulo se presentan dos diferentes esquemas de control. En el apartado (3.1), se da una breve introducción a este capítulo. En el apartado (3.2) se desarrolla el controlador conmutado más representativo, el controlador PWM por retroalimentación de voltaje. En la sección (3.3) se presenta un controlador basado en las propiedades pasivas del modelo de estado mediante un análisis de Lyapunov.

### 3.1. Introducción

Cuando un convertidor de CD-CD está expuesto a cambios repentinos en la carga, su forma de operación se ve afectada ocasionando comportamientos no deseados como sobretensiones o distorsiones en la forma de onda de salida. Por ello, es deseable que un sistema de este tipo tenga la capacidad de responder rápidamente ante perturbaciones (buena respuesta dinámica) y no se modifique su forma de operación ante cambios pequeños en los cambios del sistema (robustez). Estas dos propiedades dependen de la estrategia de control utilizadas en el diseño de estos sistemas.

Una perturbación es una señal no deseada e impredecible que puede consistir en un cambio brusco en la señal de entrada, en la carga o en alguna variable del sistema. Dado que estos cambios provocan un comportamiento muchas veces impredecible en la señal de salida de nuestro sistema, una buena estrategia de control es aquella en la que la salida es medida y empleada por el esquema de control como un medio de información sobre la forma de comportarse del sistema y de las variables que se desean controlar. Esta estrategia es la base del *control retroalimentado*, o *control en lazo cerrado*.

### 3.2 Control por Retroalimentación de Voltaje (CRV)

En la Fig.1.10, se muestra el arreglo básico para la implantación de un controlador PWM por retroalimentación de voltaje. Este esquema es simple y físicamente realizable. Dado que la forma de operar de este circuito ya fue explicada en la sección 1.4, solo falta demostrar su estabilidad. Debido a que el control por retroalimentación de voltaje se establece mediante el circuito analógico mostrado en la Fig.3.2, el análisis de la señal de control  $V_e$  se realizará, por simplicidad, en el dominio de la frecuencia mediante la ayuda de la variable compleja  $s$ . De este modo y, aplicando el modelo de espacio de estado lineal determinado en la ecuación (2.87) dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_e \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_e \hat{e} + \mathbf{E} \hat{\mu}. \quad (3.1)$$

### Capítulo 3 Esquemas de control

Solo resta aplicar una transformación de Laplace considerando que las condiciones iniciales en el sistema son nulas, el resultado es como sigue

$$s \hat{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{A}_c \hat{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{B}_c \hat{\mathbf{e}}(s) + \mathbf{E} \hat{\mu}(s) \quad (3.2)$$

donde los términos  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$  y  $\mathbf{E}$  representan a las matrices siguientes

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(1-D)}{L} \\ \frac{(1-D)}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} x_{2d} \\ -\frac{1}{C} x_{1d} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Los valores  $x_{1d}$  y  $x_{2d}$  son los valores constantes a los cuales se desea que las variables  $x_1$  y  $x_2$  tiendan respectivamente. De la ecuación (3.2) se factoriza el vector  $\hat{\mathbf{X}}(s)$ , con lo cual se obtiene una expresión que relaciona a las variables de estado,  $\hat{\mathbf{X}}(s)$ , con las entradas  $\hat{\mathbf{e}}(s)$  y  $\hat{\mu}$ , expresión que se conoce como *función de transferencia matricial*, o simplemente *función de transferencia (FT)*, dada por

$$\hat{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c \hat{\mathbf{e}}(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{E} \hat{\mu}(s) \quad (3.4)$$

El general, el tiempo de trabajo  $\mu$  es una función de las variables de estado (retroalimentación), y de la(s) entrada(s) al sistemas (adelanto de alimentación). En nuestro caso, la ecuación que describe la dependencia de  $\mu(s)$  con respecto a  $\mathbf{X}(s)$  y  $\mathbf{e}(s)$  se le conoce como *ley de control*. Esta ley de control es no-lineal, por lo que debe

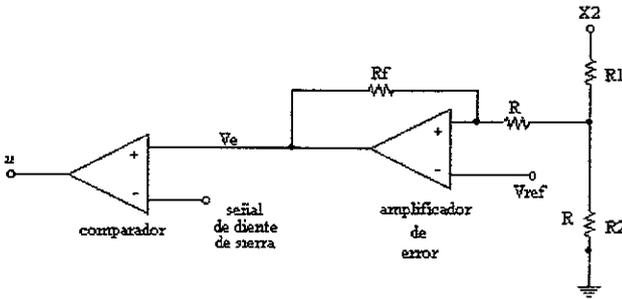


Fig 3.2 Circuito básico para la retroalimentación de voltaje

linealizarse usando nuevamente aproximaciones hacia la señal pequeña  $\hat{\mu}$ . Esta señal, en general, esta determinada por la expresión

$$\hat{\mu}(s) = F^T(s)\hat{X}(s) + Q^T(s)\hat{e}(s) \quad (3.5)$$

Donde las matrices  $F^T$  y  $Q^T$  son función del termino D, que es la componente constante del tiempo de trabajo y de  $s$ , ya que, en general, pueden incluir diferenciaciones o integraciones de algunos parámetros.

Debido a que nos interesa demostrar la estabilidad de este método de control, primero debemos obtener las matrices  $F^T$  y  $Q^T$ , para lo cual, se considerará el circuito de retroalimentación mostrado en la figura (3.2), donde el voltaje de error  $V_e$  es igual al tiempo de trabajo  $\mu$  (recuérdese que el parámetro  $u$  a la salida del comparador, es el tiempo de trabajo en su versión conmutada o señal PWM de control). Por lo anterior se tiene que, a partir del circuito amplificador de error

$$\mu(s) = V_e(s) = (1 - \beta)V_{ref}(s) - \alpha\beta X_2(s) \quad (3.6)$$

Donde  $\beta$  y  $\alpha$  son constantes determinadas por las resistencias del circuito de retroalimentación. Estas relaciones son como sigue:

$$\beta = \frac{R_f}{R}; \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.7)$$

### Capítulo 3 Esquemas de control

Considerando que el voltaje de referencia es constante, se concluye que el tiempo de trabajo, expresado en su componente de señal pequeña, está dado por la ecuación lineal

$$\hat{\mu}(s) = -\alpha \beta \hat{X}_2(s) \quad (3.8)$$

en cuyo caso

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \beta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}(s) = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

Reemplazando las expresiones anteriores en la ecuación (3.4), y después de un poco de álgebra, se tiene que

$$\hat{\mathbf{X}}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}_C - \mathbf{E}\mathbf{F}^T(s)]^{-1} [\mathbf{B}_C + \mathbf{E}\mathbf{Q}^T(s)] \hat{\mathbf{e}}(s) \quad (3.10)$$

La expresión dada en (3.10) se conoce como *función de transferencia matricial en lazo cerrado*. A partir de esta ecuación es posible obtener una FT entre el voltaje de salida  $\hat{X}_2(s)$  y la señal de entrada  $\hat{e}(s)$ , por ello, es necesario resolver la matriz inversa  $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}_C - \mathbf{E}\mathbf{F}^T(s)]^{-1}$ . Debido a que la matriz  $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}_C - \mathbf{E}\mathbf{F}^T(s)]$  es cuadrada, y su determinante puede considerarse no nulo, entonces, la inversa de esta matriz puede calcularse como

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}_C - \mathbf{E}\mathbf{F}^T(s)]^{-1} = \frac{\text{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}_C - \mathbf{E}\mathbf{F}^T(s)]}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_C - \mathbf{E}\mathbf{F}^T(s)|} \quad (3.11)$$

Es decir, la inversa de una matriz cuadrada es igual a la adjunta de la matriz entre el determinante de la misma, ver Apéndice A. Aplicando esta ecuación en (3.10), y considerando que la adjunta se obtiene intercambiando los dos elementos en la diagonal principal de la matriz, y al cambiar los signos de los elementos que se encuentran fuera de la diagonal principal, se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mathbf{X}}(s)}{\hat{\mathbf{e}}(s)} &= \begin{bmatrix} s & \frac{(1-D)}{L} + \frac{1}{L} \alpha \beta x_{2d} \\ \frac{(1-D)}{C} & s + \frac{1}{RC} - \frac{1}{C} \alpha \beta x_{1d} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ L \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} s + \frac{1}{RC} - \frac{1}{C} \alpha \beta x_{1d} & -\frac{(1-D)}{L} - \frac{1}{L} \alpha \beta x_{2d} \\ \frac{(1-D)}{C} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ L \\ 0 \end{bmatrix}}{s^2 + \left( \frac{1}{RC} - \frac{1}{C} \alpha \beta x_{1d} \right) s + \frac{(1-D)}{LC} [(1-D) + \alpha \beta x_{2d}]} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Finalmente, se tiene que

$$\frac{\hat{X}_2(s)}{\hat{\mathbf{e}}(s)} = \frac{\frac{(1-D)}{LC}}{s^2 + \left( \frac{1}{RC} - \frac{1}{C} \alpha \beta x_{1d} \right) s + \frac{(1-D)}{LC} [(1-D) + \alpha \beta x_{2d}]} \quad (3.13)$$

Esta función de transferencia juega un papel muy importante en el análisis de estabilidad para el control por retroalimentación de voltaje, esto debido a que si el polinomio del denominador se iguala a cero, se obtiene la *ecuación característica* del sistema dada por

$$s^2 + \left( \frac{1}{RC} - \frac{1}{C} \alpha \beta x_{1d} \right) s + \frac{(1-D)}{LC} [(1-D) + \alpha \beta x_{2d}] = 0 \quad (3.14)$$

### 3.2.1 Estabilidad en lazo cerrado

Un sistema se dice ser estable en lazo cerrado, si los polos de la función de transferencia en lazo cerrado están todos en el semiplano izquierdo del plano  $s$ . Las raíces que satisfacen al polinomio característico de cualquier FT se denominan polos del sistema, los cuales, en general, pueden ser reales y/o complejos. Dado que el polinomio

### Capítulo 3 Esquemas de control

característico del controlador esta en función de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  es necesario establecer las restricciones que deben tener estas raíces para que el controlador sea estable. Aplicando la ecuación general de segundo grado para resolver el polinomio característico, se tiene que

$$s_{1,2} = -\left(\frac{1-R\alpha\beta x_{1d}}{RC}\right) \pm \left\{ \left(\frac{1-R\alpha\beta x_{1d}}{RC}\right)^2 - 4\frac{(1-D)}{LC} [(1-D) + \alpha\beta x_{2d}] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

Como ya se mencionó, para que un sistema sea estable es necesario que sus polos se encuentren en el semiplano izquierdo del plano  $s$ , por este motivo, la parte real de las raíces obtenidas en (3.15) deben ser negativas, es decir

$$\frac{1-R\alpha\beta x_{1d}}{RC} > 0 \quad (3.15)$$

debido a que los valores  $x_{1d}$  y  $C$  son constantes, y la carga  $R$  es ideal (no varía), se tiene que la estabilidad del sistema depende únicamente de los valores que tomen los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  ya que la desigualdad (3.15) se reduce a

$$1-R\alpha\beta x_{1d} > 0 \quad (3.16)$$

la cual nos lleva al siguiente resultado

$$\alpha\beta < \frac{1}{Rx_{1d}} \quad (3.17)$$

La desigualdad (3.17) nos indica que, mientras más se aleje el término  $\alpha\beta$  del valor  $1/Rx_{1d}$  la estabilidad del sistema estará asegurada, sin embargo, aunque la respuesta estacionaria del sistema será menos oscilante, la respuesta transitoria puede presentar un mayor sobrepaso. Comúnmente un sobrepaso grande no es muy deseado, por lo que debe buscarse un punto medio entre el nivel de sobrepaso y el grado de estabilidad deseado.

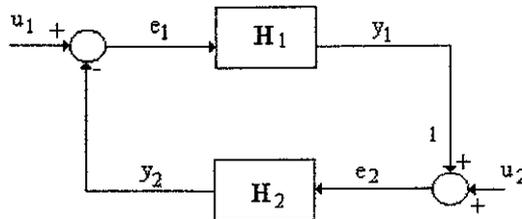


Fig 3.2 Sistema con retroalimentación

### 3.3 Control Basado en Pasividad (CBP)

Con el fin de desarrollar un análisis de estabilidad para el regulador Boost, visto como un sistema retroalimentado, se estudiará la característica pasiva del mismo. Si en el sistema retroalimentado de la Fig 3.2, los bloques  $H_1$  y  $H_2$  no generan energía por sí mismos, entonces se dice que el sistema es pasivo. Si algún componente de un bloque disipa energía, entonces el bloque se denomina pasivo disipativo. Se considerará que el sistema consiste en una serie de elementos tales como resistencias lineales, interruptores ideales y elementos almacenadores ideales de energía.

En el Capítulo 2 se llegó al siguiente modelo de espacio de estado promedio

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mu)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{e}(t) \quad (3.18)$$

donde las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  están dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-\mu) \\ \frac{(1-\mu)}{C} & -\frac{L}{RC} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Dado que el análisis de Lagrange se basa en un estudio de las energías que maneja un sistema, se retomaran, convenientemente, algunos conceptos desarrollados en el Capítulo 2. Para ello se factoriza, de la ecuación (3.18), los parámetros L y C, pasando al lado izquierdo de la igualdad, por lo que el modelo queda como sigue

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-\mu) \\ (1-\mu) & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{e} \quad (3.20)$$

factorizando ahora el término  $(1-\mu)$ , y al reacomodar algunos términos, llegamos a las siguientes expresiones

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} = (1-\mu) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{e} \quad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + (1-\mu) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Considerando ahora el siguiente cambio de variables

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\mathcal{D}$  es la matriz de almacenamiento de energía,  $\mathcal{R}$  es la matriz de disipación de energía,  $\mathcal{E}$  es el vector de energía externa y  $\mathcal{F}$  es una matriz antisimétrica; el modelo de espacio de estado del regulador Boost se reduce a

$$\mathcal{D} \dot{\mathbf{x}} + (1-\mu)\mathcal{F} \mathbf{x} + \mathcal{R} \mathbf{x} = \mathcal{E} \quad (3.23)$$

Dado que la regularización del voltaje en el capacitor es el objetivo que nos ocupa, supóngase que el valor de dicho voltaje es una constante  $V_d$  por lo que podemos definir  $x_{2d} = V_d$ . De acuerdo con esta lógica, para obtener dicha constante se requiere de un valor determinado de corriente en la entrada, el cual puede ser representado mediante la función  $x_{1d}(t)$ , la cual será empleada posteriormente.

Debido a que durante un transitorio existe determinados niveles de error tanto en un voltaje como en una corriente reguladas, deben considerarse las variables de error  $z_1(t) = x_1(t) - x_{1d}(t)$  y  $z_2(t) = x_2(t) - V_d$  en el análisis. En todo proceso de control se busca que el valor de la variable de control se encuentre lo mas cerca posible a un valor deseado, en nuestro caso debe cumplirse lo siguiente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = x_2 - V_d \quad (3.24)$$

es decir,  $x_2 \rightarrow V_d$  conforme  $x_1 \rightarrow x_{1d}$ . Por lo tanto, en el diseño del controlador las variables de error juegan un papel muy importante en este análisis, así

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{x}_d \quad (3.25)$$

Donde  $\mathbf{x}$  es el vector de variables de estado,  $\mathbf{z}$  es el vector de error y  $\mathbf{x}_d$  es el vector de valores deseados, sustituyendo la ecuación (3.25) en (3.23) llegamos a la siguiente expresión matricial

$$\mathcal{D} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{x}}_d \end{pmatrix} + (1-\mu)\mathcal{F}(\mathbf{z} + \mathbf{x}_d) + \mathcal{R}(\mathbf{z} + \mathbf{x}_d) = \mathcal{E} \quad (3.26)$$

Si se separan los términos de error de los términos deseados, y estos últimos se pasan al lado derecho de la igualdad, tenemos

$$\mathcal{D}\dot{\mathbf{z}} + (1 - \mu)\mathcal{F}\mathbf{z} + \mathcal{K}\mathbf{z} = \mathcal{E} \cdot \left[ \mathcal{D}\dot{\mathbf{x}}_d + (1 - \mu)\mathcal{F}\mathbf{x}_d + \mathcal{K}\mathbf{x}_d \right] \quad (3.27)$$

Por simplicidad se considera la siguiente sustitución

$$\mathcal{E} \cdot \left[ \mathcal{D}\dot{\mathbf{x}}_d + (1 - \mu)\mathcal{F}\mathbf{x}_d + \mathcal{K}\mathbf{x}_d \right] = \psi \quad (3.28)$$

por lo que el modelo de espacio de estado queda como sigue

$$\mathcal{D}\dot{\mathbf{z}} + (1 - \mu)\mathcal{F}\mathbf{z} + \mathcal{K}\mathbf{z} = \psi \quad (3.29)$$

La ecuación (3.29) se conoce como *la dinámica de error*. El control basado en pasividad (CBP), se obtiene mediante un estudio de Lyapunov de las funciones de los dispositivos que almacenan energía en el sistema. En el caso del regulador Boost, estos elementos son la inductancia de entrada y el capacitor de salida, cuyas funciones de energía se obtuvieron en el Capítulo 2, y se reproducen a continuación:

- \* función de coenergía magnética del inductor

$$W_L' = \frac{1}{L} \dot{q}_L^2$$

- \* función de energía eléctrica del capacitor

$$W_C = \frac{1}{2C} q_C^2$$

Aplicando la ecuación (2.16) y tomando en cuenta que la derivada de la carga eléctrica es  $\dot{q}_L = x_1$ , entonces la energía que el sistema almacena puede definirse como la suma de la coenergía magnética y de la energía eléctrica

$$V = \frac{1}{2} L x_1^2 + \frac{1}{2} C x_2^2 \quad (3.30)$$

Donde la función  $V$  se denominará *función de pasividad* ya que describe el comportamiento de la energía almacenada. Esta función puede ser representada en forma matricial ya que este formato permitirá un mejor manejo de la misma

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathcal{D} \mathbf{x} \quad (3.31)$$

Nótese que  $\mathbf{x}^T$  es el vector transpuesto de  $\mathbf{x}$ .

### 3.3.1 Diseño de control mediante Lyapunov

En el análisis de estabilidad tanto de sistemas lineales como no lineales, el segundo método de Lyapunov es el más empleado debido a la facilidad de su aplicación y a la posibilidad de emplearlo en sistemas variantes en el tiempo. En el Apéndice A se expone una breve introducción al mismo.

Convencionalmente, para un sistema dado primero se diseñan los sistemas de control, y luego se verifica su estabilidad. El diseño de control basado en pasividad es distinto ya que primero se formulan las condiciones de estabilidad y luego se diseña el sistema dentro de estas limitaciones. De esta manera, se propone la función dada en (3.32) como candidata a función de Lyapunov, ya que esta función describe el comportamiento de la energía en los elementos almacenadores debido a las variables de error consideradas anteriormente. Para validar esta elección primero debe probarse que (3.31) es una función definida positiva.

**Capítulo 3 Esquemas de control**

Si se tiene una función matricial  $V$ , cuyos valores propios son todos reales, de dimensión  $N \times N$  y que cumple con la relación  $V^T = V$ , donde  $V^T$  se define como la transpuesta de la matriz; entonces la función matricial  $V$  se dice que es *definida positiva* si y solo si  $\mathbf{x}^T V \mathbf{x} > 0$ , para todos los estados no nulos del vector  $\mathbf{x}$ .

Debido a que la matriz  $V$  cumple con la relación  $V^T = V$ , y ya que en la ecuación (3.30) nunca es negativa, se concluye que la función (3.31) puede utilizarse en el análisis, de este modo se define

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathcal{D} \mathbf{z} \quad (3.32)$$

De acuerdo a lo expuesto en el Apéndice A, para que el CBP sea estable es necesario que la función (3.32) posea una derivada definida negativa, es decir, otra condición bajo la cual una función es definida positiva radica en que la derivada de la función debe ser una función definida positiva pero con signo negativo. Al derivar la función candidata de pasividad se llega al siguiente resultado

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathcal{D} \dot{\mathbf{z}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}^T \mathcal{D} \mathbf{z}$$

Nótese que  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^T$ , por tanto

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathcal{D} \dot{\mathbf{z}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}^T \mathcal{D} \mathbf{z} \\ \dot{V} &= \mathbf{z}^T \mathcal{D} \dot{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Después de despejar el término  $\mathcal{D} \dot{\mathbf{z}}$  de la ecuación (3.29) y sustituyendo en la ecuación (3.33), tenemos

$$\dot{V} = \mathbf{z}^T [-(1-\mu)\mathcal{F}\mathbf{z} - \mathcal{R}\mathbf{z} + \boldsymbol{\psi}] \quad (3.34)$$

Eliminando las llaves se llega a lo siguiente

$$\dot{V} = -(1-\mu)\mathbf{z}^T \mathcal{F} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathcal{R} \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \boldsymbol{\psi} \quad (3.35)$$

En donde al desarrollarse la multiplicación  $\mathbf{z}^T \mathcal{F} \mathbf{z}$  esta resulta ser cero, por tanto (3.35) se reduce a

$$\dot{V} = -\mathbf{z}^T \mathcal{F} \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \psi \quad (3.36)$$

Para que la ecuación (3.36) sea definida negativa, es necesario que la función  $\psi$  sea igual a cero. Dado que  $\psi$  es una función de los valores deseados, que son constantes, y del vector de energía externa, y considerando a este último como constante, entonces  $\psi$  puede ser definida como

$$\psi = -\mathbf{k} \mathbf{z} \quad (3.37)$$

Donde  $\mathbf{k}$  es una matriz de dos por dos, esto con el fin de que la suma  $\mathcal{R} + \mathbf{k}$  no altere a los elementos de la matriz  $\mathcal{R}$ , por simplicidad se considerará

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que podemos definir la siguiente expresión

$$\mathcal{R}_o = \mathbf{k} + \mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

entonces, la derivada de la función de pasividad se reduce a

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{z}^T \mathcal{R} \mathbf{z} + \mathbf{z}^T (-\mathbf{k} \mathbf{z}) \\ \dot{V} &= -\mathbf{z}^T \mathcal{R}_o \mathbf{z} \end{aligned} \quad (3.39)$$

### Capítulo 3 Esquemas de control

la cual es definida negativa. Ahora solo debe comprobarse que la función  $\Psi$  es igual a cero. Al igualar las expresiones dadas en (3.37) y (3.28) tenemos que

$$\mathcal{L} \cdot \left[ \mathcal{D}\dot{\mathbf{x}}_d + (1 - \mu)\mathcal{F}\mathbf{x}_d + \mathcal{R}\mathbf{x}_d \right] = -k\mathbf{z} \quad (3.40)$$

reagrupando convenientemente tenemos

$$\mathcal{L} + k\mathbf{z} = \mathcal{D}\dot{\mathbf{x}}_d + (1 - \mu)\mathcal{F}\mathbf{x}_d + \mathcal{R}\mathbf{x}_d \quad (3.41)$$

sumando el término  $k\mathbf{z}$  en ambos lados de la ecuación (3.27)

$$\mathcal{D}\dot{\mathbf{z}} + (1 - \mu)\mathcal{F}\mathbf{z} + \mathcal{R}\mathbf{z} + k\mathbf{z} = \mathcal{L} + k\mathbf{z} - \left[ \mathcal{D}\dot{\mathbf{x}}_d + (1 - \mu)\mathcal{F}\mathbf{x}_d + \mathcal{R}\mathbf{x}_d \right] \quad (3.42)$$

y sustituyendo la ecuación (3.41) resulta que la parte derecha del resultado es cero

$$\mathcal{D}\dot{\mathbf{z}} + (1 - \mu)\mathcal{F}\mathbf{z} + \mathcal{R}\mathbf{z} + k\mathbf{z} = 0 \quad (3.43)$$

reduciendo

$$\mathcal{D}\dot{\mathbf{z}} + (1 - \mu)\mathcal{F}\mathbf{z} + \mathcal{R}_0\mathbf{z} = 0 \quad (3.44)$$

Al observarse la ecuación (3.29) se tiene que la función  $\Psi$  será igual a cero siempre y cuando el término 'k' de la matriz  $k$  sea mayor a cero, esto para asegurar que la matriz  $\mathcal{R}_0$  sea siempre positiva. Por lo anterior, la matriz  $k$  se define como *matriz de inyección de amortiguamiento* ya que al sumarse a la ecuación (3.29) garantiza que el factor  $\Psi$  será igual a cero, con lo cual se asegura que el sistema tenga estabilidad.

### 3.3.2 Regulación por voltaje

El control sobre el voltaje en el capacitor puede lograrse en forma directa, para lo cual es necesario aplicar el concepto de dinámica cero.

Cuando una entrada de control  $\mu$  mantiene sin variación la salida de un sistema para todo  $t > 0$ , entonces se tiene una *dinámica cero*. La dinámica cero de una salida en un punto de equilibrio se obtiene igualando la dinámica de la variable controlada a cero, es decir, las derivadas, con respecto al tiempo, de la salida controlada se mantienen en cero con el fin de garantizar que dicha salida sea constante. En nuestro caso, la salida controlada es el voltaje  $x_2$ , y el punto de equilibrio no es otro sino el valor deseado  $x_{2d}$ . Al mismo tiempo la variable que se desea controlar es el propio voltaje de salida, de aquí que se trate de un control directo de retroalimentación.

Con el fin de obtener un controlador basado en pasividad en modo de retroalimentación directa, se sustituye la ecuación (3.25) en (3.41), con lo cual se tiene que

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1d} \\ \dot{x}_{2d} \end{bmatrix} = -(1-\mu) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1d} \\ x_{2d} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1d} \\ x_{2d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{1d} \\ x_2 - x_{2d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Si se elimina la notación matricial se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$L \dot{x}_{1d} = -(1-\mu)x_{2d} + (x_1 - x_{1d})k + e \quad (3.46)$$

$$C \dot{x}_{2d} = (1-\mu)x_{1d} - \frac{1}{R}x_{2d} \quad (3.47)$$

Cuando la dinámica del sistema es cero,  $\dot{x}_{2d} = 0$  y  $\dot{x}_{1d} = 0$ , se tiene que, de la ecuación (3.47) resulta

$$x_{1d} = \frac{x_{2d}}{R(1-\mu)} \quad (3.48)$$

Al derivar la ecuación (3.48), con respecto al tiempo se llega a la siguiente expresión

$$\dot{x}_{1d} = \frac{\dot{\mu} x_{2d}}{R(1-\mu)} \quad (3.49)$$

Sustituyendo la ecuación (3.49) en la ecuación (3.46) se tiene lo siguiente

$$L \left[ \frac{\dot{\mu} x_{2d}}{R(1-\mu)^2} \right] = -(1-\mu)x_{2d} + (x_1 - x_{1d})k + e \quad (3.50)$$

al despejar el término  $\dot{\mu}$  del resultado anterior, y eliminando el término constante  $x_{1d}$ , se llega a una expresión dinámica del tiempo de trabajo de la forma

$$\dot{\mu} = \frac{R(1-\mu)^2}{Lx_{2d}} \left\{ e - (1-\mu)x_{2d} + \left[ x_1 - \frac{x_{2d}}{R(1-\mu)} \right] k \right\} \quad (3.51)$$

La ley de control expresada en la ecuación (3.51) obliga a  $x_1$  y  $x_2$  a permanecer al rededor de sus valores deseados. Sin embargo, este controlador carece de estabilidad, ya que, cuando  $x_1$  alcanza su valor deseado, la ecuación (3.51) se reduce a

$$\dot{\mu} = \frac{R(1-\mu)^2}{Lx_{2d}} [e - (1-\mu)x_{2d}] \quad (3.52)$$

cuya solución o puntos de equilibrio, en los cuales la dinámica de control es cero, son

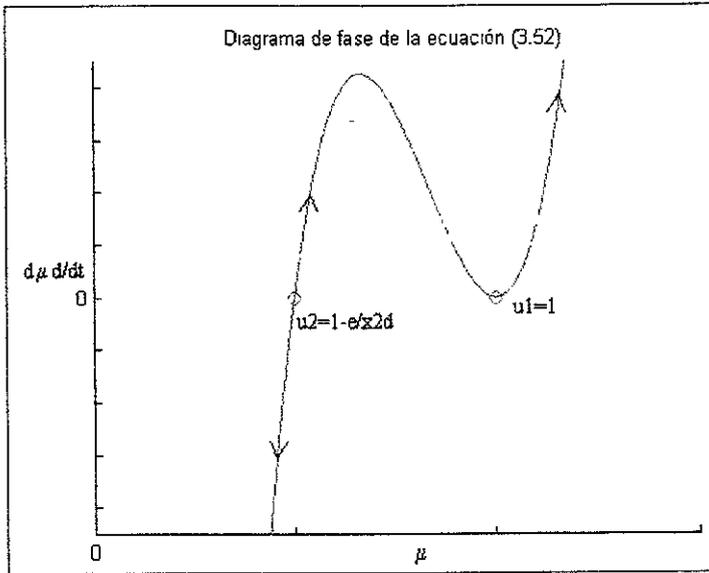


Fig. 3.3 Diagrama de fase de la ecuación (3.52) donde  $O$  indica una de las soluciones de dicha ecuación.

$$\mu = 1, \quad \mu = 1 - \frac{e}{x_{2d}}$$

Para los cuales el diagrama de fase de la ecuación (3.52) muestra como el comportamiento de la dinámica de control es inestable con respecto a sus soluciones, por lo que el control en modo directo no es físicamente realizable.

### 3.3.2 Regulación por corriente

En esta sección se introducirá un esquema de control indirecto basado en el hecho de que la salida de voltaje en el capacitor permanecerá constante siempre y cuando la corriente de entrada  $x_1$  permanezca regulada. En este caso, la variable  $x_1$  deberá tender a un valor constante  $I_d$ , es decir  $x_{1d} = I_d$ . Con este fin se procede a eliminar el término  $x_{2d}$  de las ecuaciones (3.46) y (3.47), mediante la dinámica cero aplicada en el punto de equilibrio  $x_{1d}$ . De la ecuación (3.46)

$$x_{2d} = \frac{e + (x_1 - x_{1d})k}{(1 - \mu)} \quad (3.53)$$

derivando este resultado se tiene

$$\dot{x}_{2d} = \frac{k \dot{x}_1 (1 - \mu) + \dot{\mu} [e + (x_1 - x_{1d})k]}{(1 - \mu)^2} \quad (3.54)$$

Sustituyendo la ecuación (2.76) en (3.54), para eliminar el término  $\dot{x}_1$  y, posteriormente, en (3.47), se tiene que, después de un poco de álgebra, la dinámica del controlador está dada por

$$\dot{\mu} = \frac{(1 - \mu)}{C[e + (x_1 - x_{1d})k]} \left\{ (1 - \mu)^2 x_{1d} - \frac{Ck}{L} [e - (1 - \mu)x_2] - \frac{(x_1 - x_{1d})k + e}{R} \right\} \quad (3.55)$$

Dado que el controlador obtenido en (3.55) obligará a las variables  $x_1$  y  $x_2$  a coincidir con los valores deseados  $I_d$  y  $V_d$  respectivamente, el controlador finalmente deber tender a la siguiente forma simplificada

$$\dot{\mu} = \frac{(1 - \mu)}{RCe} [R(1 - \mu)^2 x_{1d} - e] \quad (3.56)$$

La ecuación obtenida en (3.56), posee tres puntos de equilibrio dados por

$$\mu = 1; \quad \mu = 1 - \sqrt{\frac{e}{Rx_{1d}}}; \quad \mu = 1 + \sqrt{\frac{e}{Rx_{1d}}}$$

El punto de equilibrio  $\mu = 1 - \sqrt{e/Rx_{1d}}$ , es el único que posee interpretación física ya que esta ecuación puede ser directamente obtenida a partir de la ecuación (2.11), donde el término del voltaje de salida se elimina quedando en su lugar la corriente de entrada  $x_1$ .

Por tanto, este punto de equilibrio representa, indirectamente, al voltaje de salida en la resistencia de carga  $R$  en función del tiempo de trabajo y la corriente de entrada.

El diagrama de fase, Fig. 3.4, muestra como la trayectoria de la dinámica de control es estable únicamente en la vecindad de la solución  $\mu_2$ , lo que garantiza la estabilidad del controlador obtenido en dicho punto.

Se concluye que la realización física de este controlador es posible, por lo tanto, para un valor constante  $V_d > e$  en el voltaje de salida del capacitor, la dinámica que genera el tiempo de trabajo, (3.55), con un valor  $I_d$  determinado, estabiliza asintóticamente las trayectorias de los estados en el modelo promedio de dicho regulador hacia los valores deseados mediante la convergencia del tiempo de trabajo hacia el punto de equilibrio  $1 - \sqrt{e/RxI_d}$ . Las referencias para este capítulo son [6], [11] y [14] para la sección 3.2, y [13], [16], [17], [20] para la sección 3.3.

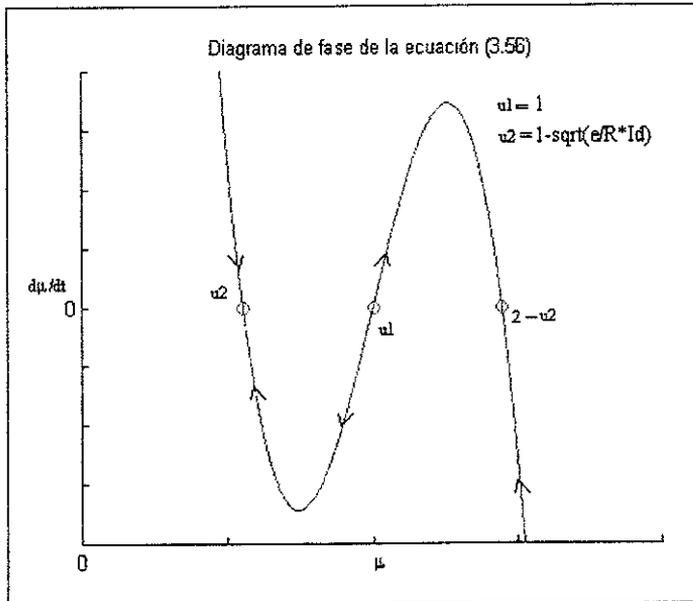


Fig. 3.4 Diagrama de fase de la ecuación (3.56) donde  $O$  indica una de las soluciones de dicha ecuación.

## CAPÍTULO 4

### IMPLANTACIÓN DE LOS ESQUEMAS DE CONTROL

En este capítulo se expone la implantación, en un sistema real, de los esquemas de control estudiados en el Capítulo 3, así como el desarrollo de un prototipo de laboratorio. Los esquemas de control fueron implementados mediante el empleo de una computadora personal provista de una tarjeta de adquisición de datos, esto debido a que la implantación analógica de los controladores proporcionaba diversas señales de ruido difíciles de eliminar. La manera como se implementaron estos controladores se muestra en la Fig. 4.1. En el Apéndice B puede consultarse la forma en que se implementó este diagrama en forma física, por lo que en este capítulo se procurara no ser muy redundante al respecto.

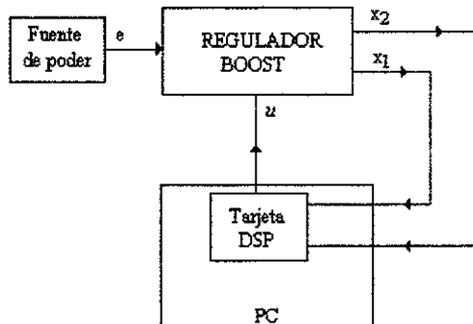


Fig. 4.1 Sistema de control por computadora

## Capítulo 4 Implantación de los esquemas de control

En todo diseño de control, el modelo matemático de un sistema en estudio juega un papel muy importante ya que es la base matemática para realizar el análisis de dicho sistema. Por ello, es necesario realizar pruebas de simulación con el modelo mediante la aplicación de una determinada entrada para, así, obtener una salida que pueda ser comparada con la respectiva salida entregada por el sistema físico ante la excitación debida a un mismo tipo de entrada.

El regulador Boost es el sistema en el cual se han basado los estudios realizados en este trabajo de tesis. Por ello, en el apartado 4.2 la validación del modelo de dicho sistema se realiza para sustentar el trabajo aquí expuesto. En los apartados 4.3 y 4.4, se presentan los esquemas de control CRV y CBP respectivamente.

### 4.1 Diseño del prototipo

Con el propósito de comprobar la validez del modelo obtenido, se diseñó un prototipo experimental del regulador Boost con las siguientes especificaciones nominales.

Tensión promedio de salida ( $x_2$ )	20 Volts.
Resistencia de carga (R)	100 ohms.
Tensión de entrada ( $e$ )	10 Volts.
Corriente de carga ( $x_0$ )	0.2 Amperes .
Frecuencia de conmutación( $F$ )	10 kHz.
Inductor(L)	43.5 mH.
Capacitor(C)	1000 $\mu$ F.

El tiempo de trabajo requerido está determinado por (2.11), donde la variable  $V_s$  es sustituida por la variable  $x_2$  en la siguiente expresión

$$x_2 = \frac{e}{(1 - \mu)} \quad (4.1)$$

Sustituyendo valores, se tiene que

$$\mu = 0.5$$

Si se supone un circuito sin pérdidas,  $x_2 \cdot x_o = e \cdot x_1$ , donde  $x_1$  es la corriente promedio de entrada que, al despejar y sustituir los valores debidos, tiene el valor

$$x_1 = 0.4 \text{ A.}$$

A partir de la ecuación (2.9) podemos calcular la corriente ondulatoria pico a pico en el inductor  $\Delta x_1$  de la siguiente manera

$$\Delta x_1 = x_2 \cdot \mu / F \cdot L = 20 \cdot 0.5 / 10k \cdot 43.5m$$

$$\Delta x_1 = 0.02298 \text{ A}$$

es decir, la variación en la corriente de entrada es aproximadamente el 2.87% del valor nominal. Cuando el transistor esta activo, el capacitor suministra la corriente de carga para el tiempo  $t = t_{on}$ , por lo tanto las variaciones pico a pico en el voltaje del capacitor pueden calcularse a partir de la siguiente expresión

$$\Delta x_2 = x_2(t_{on}) - x_2(0) = x_o \cdot t_{on} / C = x_o \cdot \mu / F \cdot C \quad (4.2)$$

sustituyendo valores se tiene

$$\Delta x_2 = 0.01 \text{ V.}$$

Por lo que el porcentaje de variación en el voltaje del capacitor es del 0.025% del valor nominal. A partir de estos resultados, el modelo de espacio obtenido en (2.77) es simulado por computadora como se verá en el siguiente apartado.

El sistema experimental esta compuesto por un regulador Boost, un circuito PWM, un sensor de corriente y otros dispositivos. Para la implementación del regulador Boost se emplearon los siguientes componentes:

Dispositivos

1 Inductancia (L)	43.5 mH
1 Capacitancia (C)	1000 $\mu$ F
1 Resistencia (R)	100 ohms

Interruptores

1 IRF540 (S1)
1 1N5820 (S2)

Donde el interruptor S1 es simulado por el transistor IRF540, el cual es un transistor MOSFET de potencia, y el interruptor S2 es simulado por el diodo 1N5820 el cual es un diodo Schottky de potencia. La decisión de emplear un transistor MOSFET como el switch S1 se debe a que estos transistores trabajan de acuerdo a las necesidades de diseño de la tarjeta experimental. Esto es, su velocidad de conmutación es muy alta siendo los tiempos de conmutación del orden de nanosegundos, es controlado por voltaje y requiere de muy poca potencia de excitación en la compuerta. Estas características facilitan el proceso de control de la compuerta, simplificado con ello el tamaño del sistema. Respecto al interruptor S2, el diodo Schottky de potencia fue elegido ya que elimina el problema de almacenamiento de carga, por lo que su tiempo de recuperación es muy alto. En el Apéndice C se encuentran las hojas de especificación de estos dispositivos, las cuales se recomienda consultar para obtener una mejor descripción de los mismos.

El diagrama de conexión del sistema experimental Boost se muestra en la Fig. 4.2, donde la conmutación del switch S1 puede controlarse directamente mediante una señal PWM generada por la tarjeta dSPACE de la computadora, o bien, mediante la señal PWM que entrega el integrado TL494. Este ultimo dispositivo se introdujo debido a que las leyes de control examinadas son señales continuas las cuales son transformadas a una versión conmutada mediante la ayuda de dicho dispositivo. Lo anterior puede ser confuso ya que la señal de control CRV puede implementarse directamente como una

## Capítulo 4 Implantación de los esquemas de control

PWM, sin embargo, la implementación de una ley de control mediante dSPACE y el programa SIMULINK solo permiten frecuencias de trabajo de 10 kHz máximo, por lo cual se optó por implementar a dicho controlador en su forma continua dejándose la opción de controlar al S1 mediante señales PWM que trabajen a frecuencias mayores.

En la Fig.4.2 se observa un dispositivo denotado como SHR100, este dispositivo es un sensor de corriente de efecto Hall empleado para medir y retroalimentar la corriente en el inductor L. El amplificador operacional uA741 se emplea como limitador de voltaje para la entrada al dSPACE encargada de adquirir la información del voltaje de salida, esto con el fin de protegerla de cualquier sobrevoltaje que pueda presentarse. La perturbación en la carga se consiguió mediante la aplicación de una resistencia R7 de 100 ohms en paralelo con la carga, cuya acción se controló mediante un segundo transistor IRF540 (S3).

### 4.2 Validación del Modelo de Espacio de Estado

MATLAB es un software de análisis y diseño que cuenta con diversas herramientas de apoyo (conocidas como *toolbox*). De entre estas herramientas dos fueron las más utilizadas:

- SIMULINK. Es un programa que permite la simulación de sistemas dinámicos mediante el apoyo de diagramas de bloques.
- Power System Blockset (PSB). Este toolbox permite la construcción y simulación de sistemas eléctricos de potencia que contengan elementos lineales y/o no lineales en el ambiente de SIMULINK.



Mediante los parámetros obtenidos en el apartado anterior se obtuvo el diagrama de simulación, para PSB, mostrado en la Fig.(4.2). Del mismo modo se elaboro un esquema para SIMULINK partiendo del modelo de espacio de estado y de los parámetros obtenidos, Fig. (4.3). Estos dos esquemas se simularon con el fin de poder validar tanto al modelo como a los parámetros en forma separada. Finalmente, se implanto el sistema físico cuya configuración, en lazo abierto, se muestra en la figura (4.4).

En la figura (4.2), el esquema se diseño de acuerdo a la topología básica del regulador Boost, donde el bloque llamado MOSFET representa a un transistor MOS de potencia el cual actúa como el swicht de control  $S_1$ . El bloque DIODE representa un diodo de potencia que actúa en lugar del swicht  $S_2$ . El bloque PWM consiste en un comparador y un generador de diente de sierra, los cuales hacen la conversión de la señal continua  $\mu$  a la señal discreta  $u$ .

La Fig. (4.3) consiste en un generador de señal escalón y un bloque de matriz de estados en el cual se encuentra programado el modelo de espacio de estado del regulador Boost.

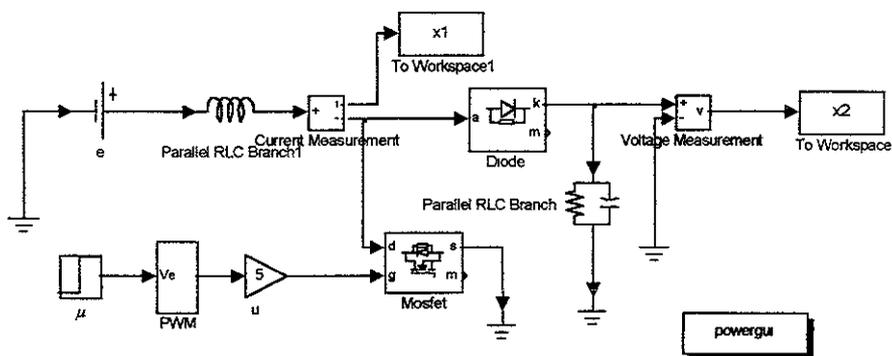


Fig. 4.2 Esquema elaborado en PSB para el regulador Boost

**Capítulo 4 Implantación de los esquemas de control**

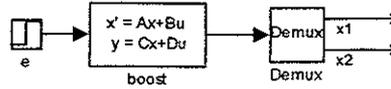


Fig 4.3 Diagrama de simulación para SIMULINK

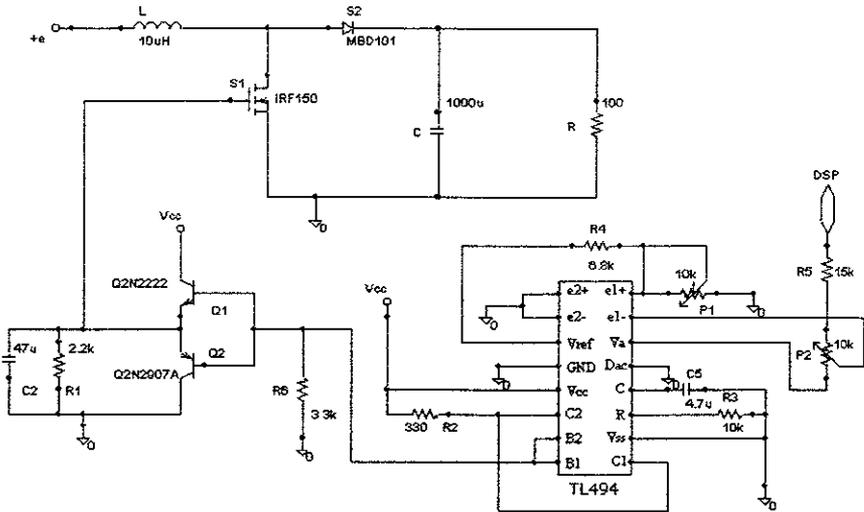


Fig 4.4 Diagrama esquemático para el regulador Boost

La figura (4.4), muestra un diagrama esquemático de los componentes principales utilizados en la implantación del regulador Boost. En el sistema, el integrado TL494 realiza la función de comparar la señal de entrada, proveniente de la tarjeta de DSP, con una señal rampa interna para proporcionar la señal de control  $u$  del swicht  $S_1$ . Los transistores  $Q_1$  y  $Q_2$  únicamente se emplean para acoplar la salida del TL494 con el  $S_1$ .

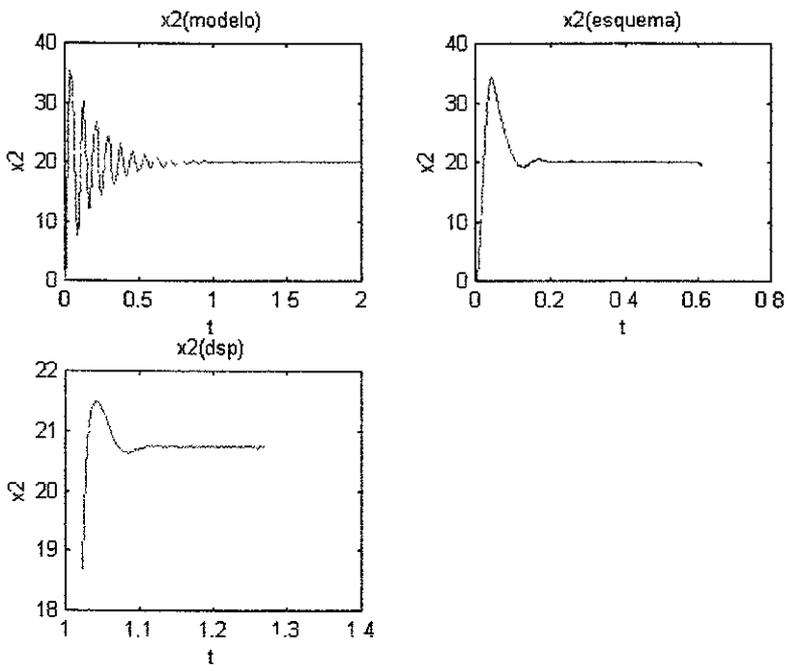


Fig. 4.5 Comparativo de las respuestas transitorias de  $x_2$

#### 4.2.1 Resultados

Los resultados obtenidos durante las simulaciones de los modelos se comparan con el resultado del experimento con el sistema físico. En primer plano se muestran las gráficas comparativas correspondientes al voltaje de salida del capacitor, Fig.4.5. En las cuales se observa como el resultado de la simulación del modelo de espacio de estado, tarda en llegar a una respuesta permanente, no así el modelo del esquema de potencia, el cual se apega más al resultado dado por DSP. La causa principal se debe a que el modelo de espacio de estado es el único que trabaja con parámetros ideales, no así el modelo esquemático, ya que en este requiere de algunos parámetros en los bloques del MOSFET y de DIODE.

Los resultados obtenidos en lo que concierne a la respuesta estacionaria de  $x_2$  en las simulaciones se muestran en la Fig. 1.6, donde los valores son más coincidentes con el valor deseado de 20 V de salida en el capacitor.

Respecto a la corriente  $x_1$  de entrada, las gráficas correspondientes a las respuestas transitorias obtenidas son mostradas en la Fig.4.7, donde también se puede apreciar como el sobrepulso máximo obtenido en las simulaciones es muy superior al obtenido en el resultado experimental. Las respuestas permanentes obtenidas para  $x_1$  pueden observarse en la Fig. 4.8, donde la respuesta experimental es la que presenta error en estado estacionario.

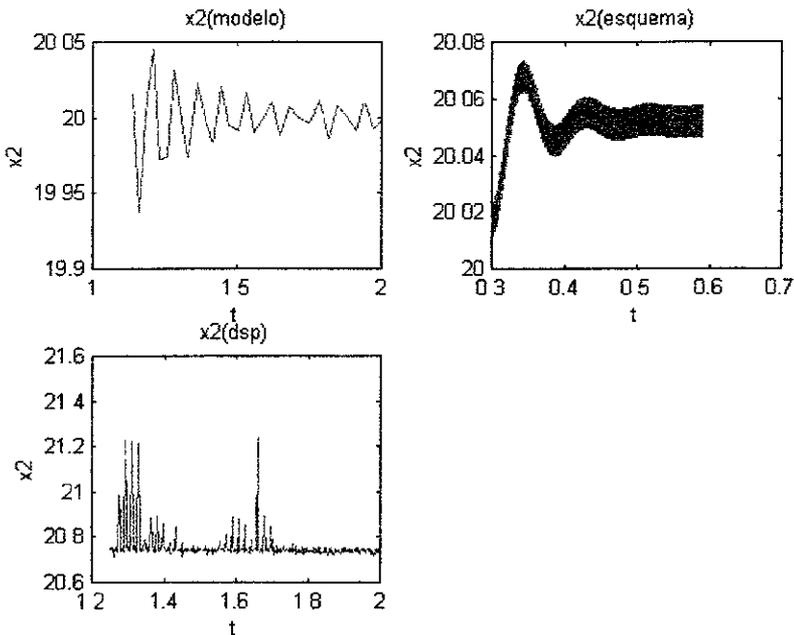


Fig. 4.6 Comparativo de las respuestas permanentes para el voltaje  $x_2$

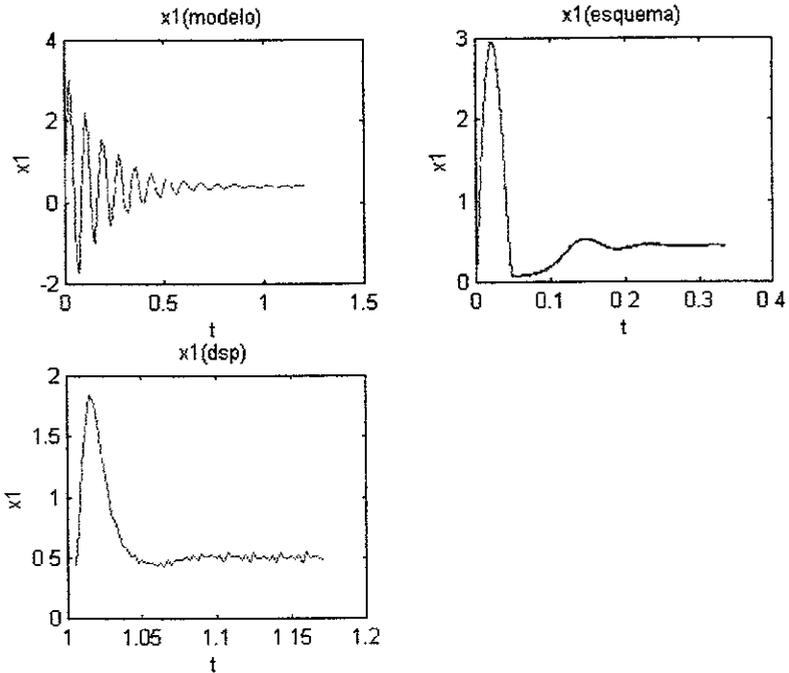


Fig. 4 7 Comparativo de las respuestas transitorias para  $x_1$

A partir de los resultados anteriores, se concluye que el modelo de espacio de estado cumple con las expectativas de diseño tan solo en el estado permanente de las señales  $x_1$  y  $x_2$ , ya que el transitorio presenta un sobreimpulso máximo muy elevado, un tiempo de recuperación muy alto, e incluso valores negativos como en el caso de la corriente.

El manejo de bloque de SIMULINK no permite que en la simulación la frecuencia afecte directamente los parámetros relacionados con el inductor y el capacitor, es decir, en la simulación con SIMULINK, los parámetros poseen valores estrictamente lineales. Lo anterior no ocurre con la simulación en PSB ya que este programa se diseñó precisamente para compensar este y otros problemas en la simulación de sistemas de potencia. En conclusión, el modelo de espacio de estado obtenido en (2.77), es una representación matemática cercana al sistema físico considerado y, por tanto, puede considerarse apropiado para el análisis realizado.

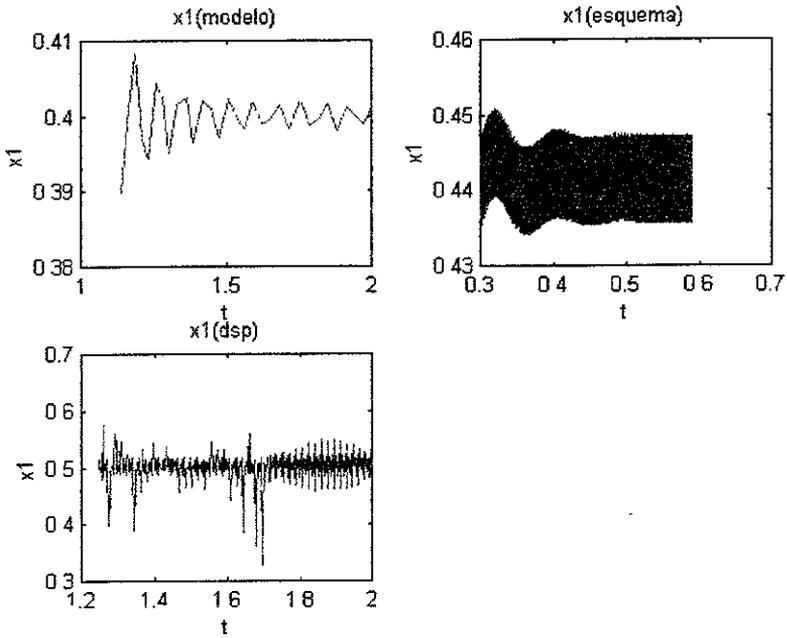


Fig. 4.8 Comparativo de las respuestas permanentes para  $x_1$

### 4.3 implantación física de los esquemas de control

Antes de la implantación de los esquemas de control, es importante comprobar que el sistema responda a las variaciones en la señal de control. Con este fin, se experimentó en lazo abierto para los valores de 0.25, 0.5 y 0.6, para los cuales, y de acuerdo a la ecuación (2.11), el voltaje de salida es de 13.33 V, 20V y 25 V respectivamente. La señal de control  $\mu$  se implementó de acuerdo a la Fig. 4.9 mediante bloques SIMULINK y la interface Real-Time Workshop de DSP. Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 4.10, donde se observa que el sistema responde satisfactoriamente.

### 4.3.1 El controlador CRV

La simulación del control por retroalimentación de voltaje se muestra en la Fig. 4.11, donde los bloques ADC y DAC cumplen con la función de enlazar al esquema con el sistema físico. La salida del bloque sumador *Sum1* corresponde a la ley de control determinada en la ecuación (3.6), la cual es enviada a un bloque saturador para evitar que la ley de control alcance valores mayores a los que físicamente puede alcanzar,  $0 < \mu < 1$ . Los bloques *tinicial*, *to* y *tfinal* conforman una segunda señal de control empleada para controlar la activación y desactivación de una resistencia paralela a la carga con el fin de que actúe como una perturbación en la misma.

### 4.3.2 El controlador CBP

Para la implantación de la ley de control expresada en la ecuación (3.55), se recurrió al empleo de un bloque de funciones  $f(u)$ , y al arreglo mostrado en la Fig. 4.12. Dicho bloque se programó de la siguiente forma

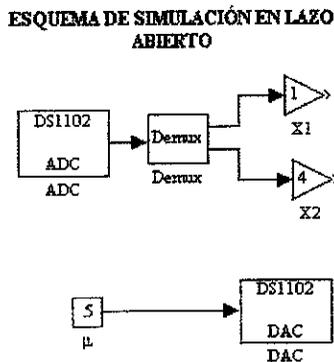


Fig. 4.9 esquema para la aplicación del control en lazo abierto

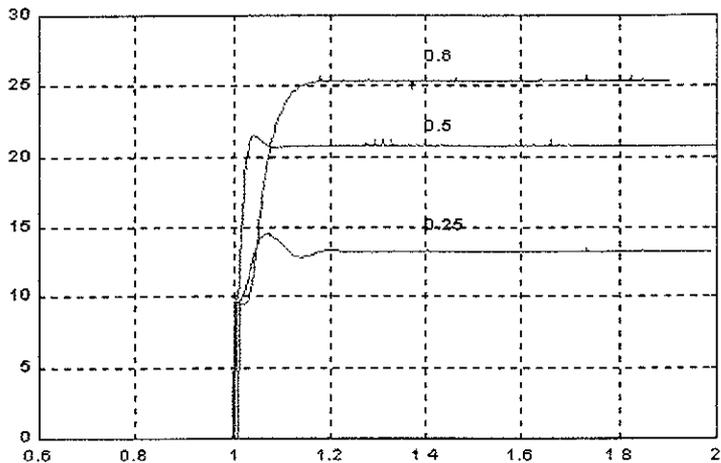


Fig 4.10 Comportamiento de la señal  $x_2$  ante diferentes valores de  $\mu$ .

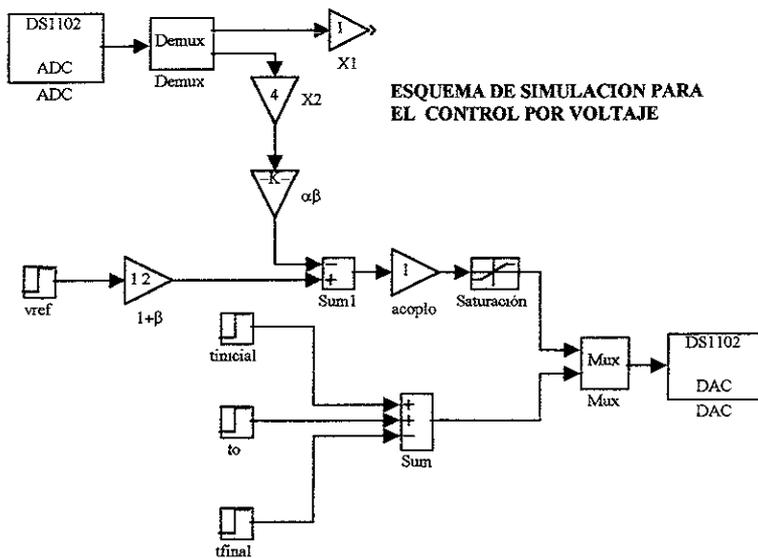


Fig. 4.11 Esquema de simulación para el control CRV

**Capítulo 4    Implantación de los esquemas de control**

$$\left( (1-u[1]) * (1-u[1]) * .4 - (10 + ((u[2] - .4) * 1.5)) / 100 \right) - 1.5 * .001 * (10 - (1-u[1]) * u[3]) / 0.0435 * (1 - u[1]) / (.001 * (10 + (u[2] - .4) * 1.5))$$

Donde los términos  $u[1]$ ,  $u[3]$  y  $u[2]$  representan respectivamente a las entradas  $\mu$ ,  $x_1$  y  $x_2$  del bloque multiplexor *Mul*.

En todos los esquemas mostrados, el parámetro  $x_2$  es multiplicado por un factor de 4. Esto se debe a que la señal de salida de voltaje se atenúa 4 veces con el fin de proteger a las entradas DAC de la tarjeta de DSP, las cuales soportan un máximo de  $\pm 10$  Volts.

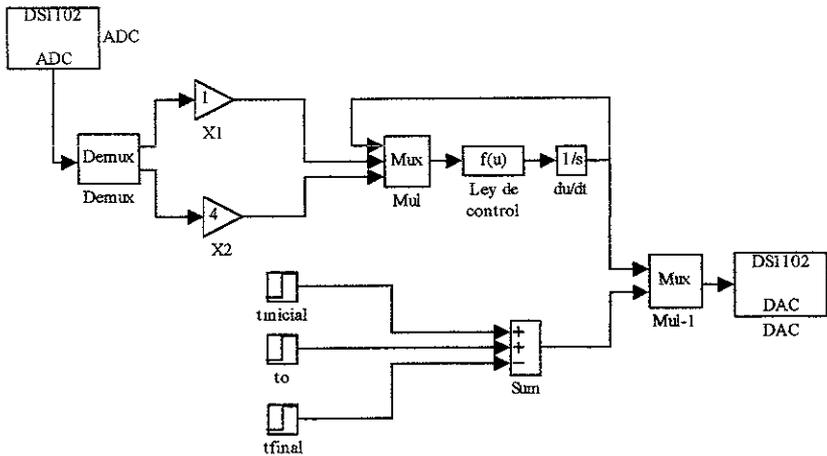


Fig. 4.12 Esquema para la implantación del controlador CBP

## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS EXPERIMENTALES

En este capítulo se presentan los resultados experimentales obtenidos para los controladores implementados en el regulador Boost. Se muestran también las gráficas para cada controlador ante un cambio brusco en la carga R del sistema físico y los cálculos de error correspondientes

#### 5.1 Respuesta transitoria

Todos los sistemas de control estables presentan un fenómeno transitorio antes de alcanzar un estado estacionario en su salida. Esta característica inherente se debe a los polos del sistema en lazo cerrado.

Para el esquema de control CRV se presentan las gráficas de los transitorios en las señales  $x_1$ ,  $x_2$  y la ley de control  $\mu$ , Fig. (5.1). DSP posee un software capaz de guardar los datos adquiridos en un formato de extensión \*.MAT que el paquete de análisis MATLAB reconoce como datos numéricos. Gracias a esto y mediante el uso de algunos comandos de este paquete, se calcularon las más importantes características de la señal transitoria del voltaje  $x_2$ , los resultados son los siguientes:

*Porcentaje de sobrepaso (PS)*. Es el valor porcentual del sobreimpulso máximo presentado, en el caso del control CRV este valor fue de un 3.3095%.

*Tiempo pico (TP)*. Es el tiempo en el cual la señal alcanza su primer y más grande pico. Este parámetro alcanzó un valor de 0.0071 seg. a partir de la aplicación de la entrada al sistema.

## Capítulo 5 Resultados Experimentales

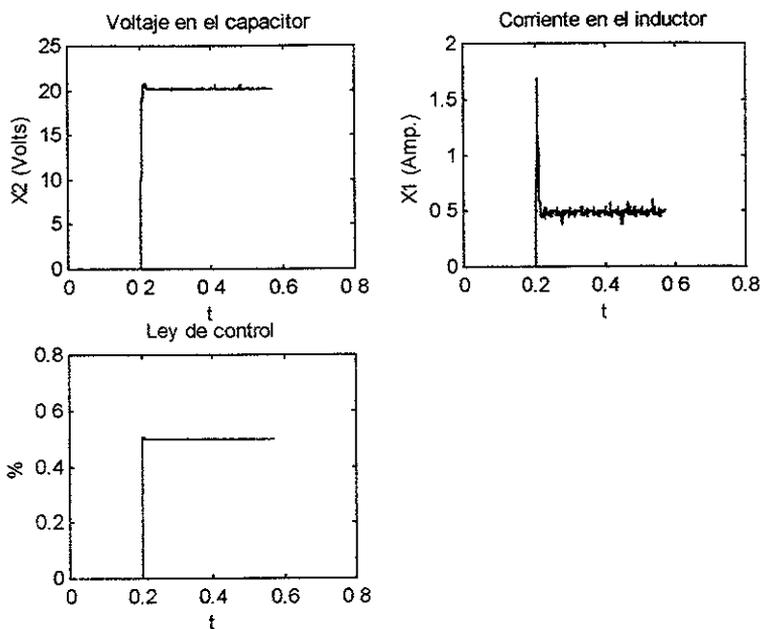


Fig.5.1 Comportamiento transitorio del regulador Boost para el control CRV

*Tiempo de establecimiento* (TE). Es el tiempo requerido para que la respuesta alcance y se mantenga en un rango alrededor de un 2% del valor final. Este tiempo fue de 0.0705 seg. , a partir de la aplicación de la señal de entrada.

Con respecto a la señal de corriente  $x_1$ , las características transitorias son:

$$PS = 232.3620 \%$$

$$TP = 0.0021 \text{ seg.}$$

$$TE = 0.0705 \text{ seg.}$$

## Capítulo 5 Resultados Experimentales

En lo referente a las características transitorias de la señal  $x_2$  bajo el control CBP, los resultados son los siguientes:

$$PS = 1.5085 \%$$

$$TP = 0.0271 \text{ seg}$$

$$TE = 0.0285 \text{ seg.}$$

Respecto a  $x_1$  se obtuvo:

$$PS = 26.0911 \%$$

$$TP = 0.0066 \text{ seg.}$$

$$TE = 0.0285 \text{ seg.}$$

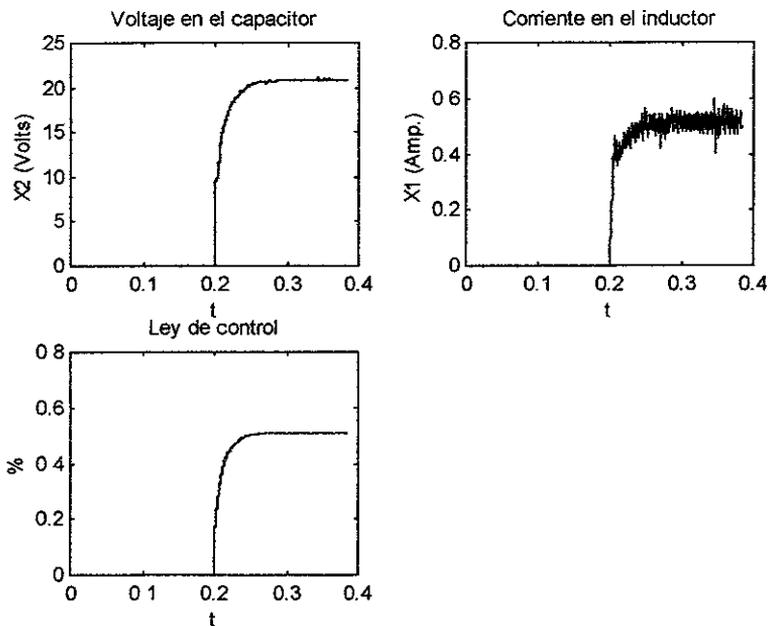


Fig. 5.2 Comportamiento transitorio del regulador Boost para el control CBP

## Capítulo 5 Resultados Experimentales

Las gráficas correspondientes a los transitorios debidos al control CBP se muestran en la Fig. 5.2.

Como referencia, se introducen las gráficas de control en lazo abierto para el regulador Boost, Fig.5.2. A partir de estos datos, del cálculo de las características transitorias se llegó a los siguientes resultados:

$\underline{x}_2$ :

PS = 3.6786 %

TP = 0.0045 seg.

TE = 0.0495 seg.

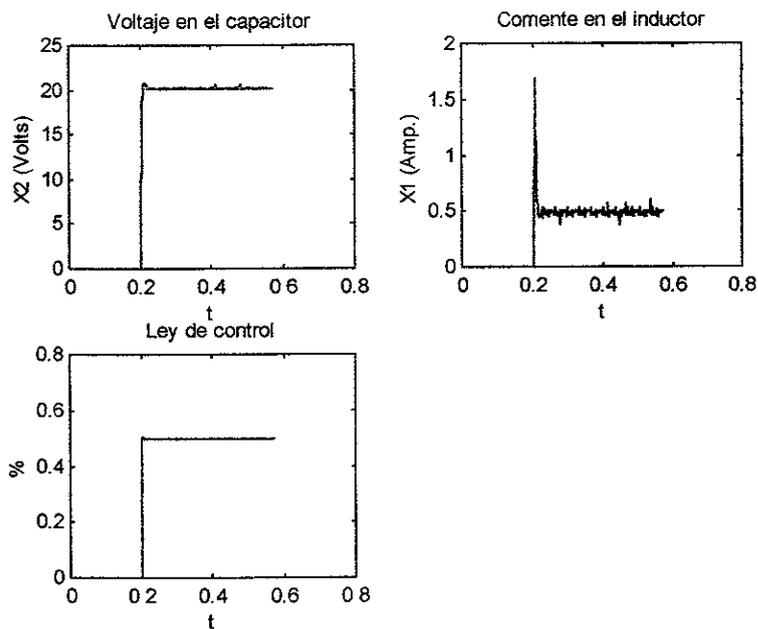


Fig.5.3 Comportamiento transitorio del regulador Boost para el control CRV

## Capítulo 5 Resultados Experimentales

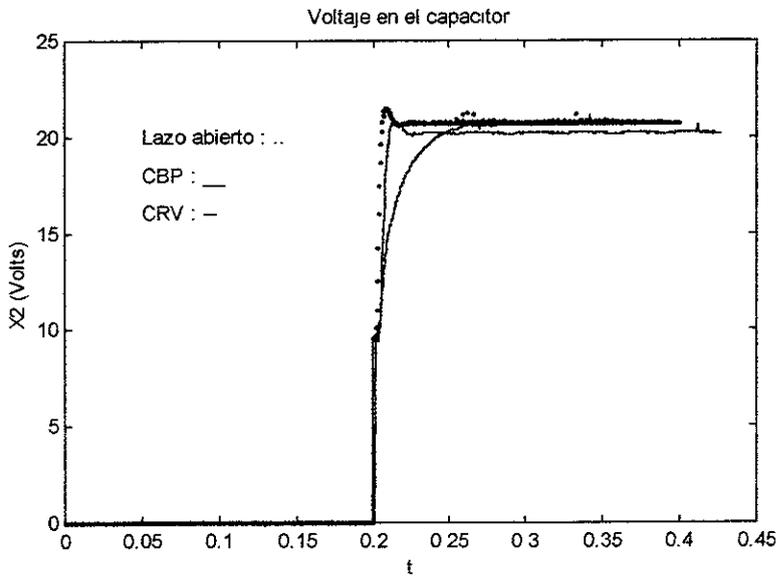


Fig. 5.4 Comparativo de la señal de voltaje  $x_2$

$\underline{x}_1$ :

PS = 257.1550 %

TP = 0.0015 seg.

TE = 0.0495 seg.

En la Fig. 5.4, se presenta una gráfica comparativa del voltaje de salida  $x_2$  para los controladores implantados. De igual forma, en las figuras 5.5 y 5.6 se presentan los comparativos de la corriente  $x_1$  y de la señal de control respectivamente.

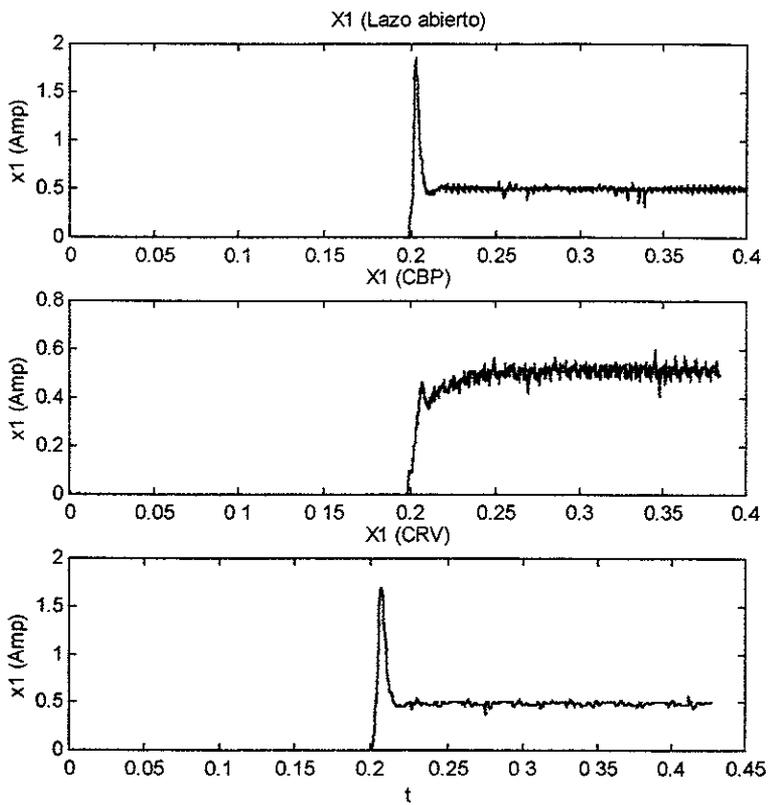


Fig 5.5 Comparativo de la señal de corriente  $x_1$

## Capítulo 5 Resultados Experimentales

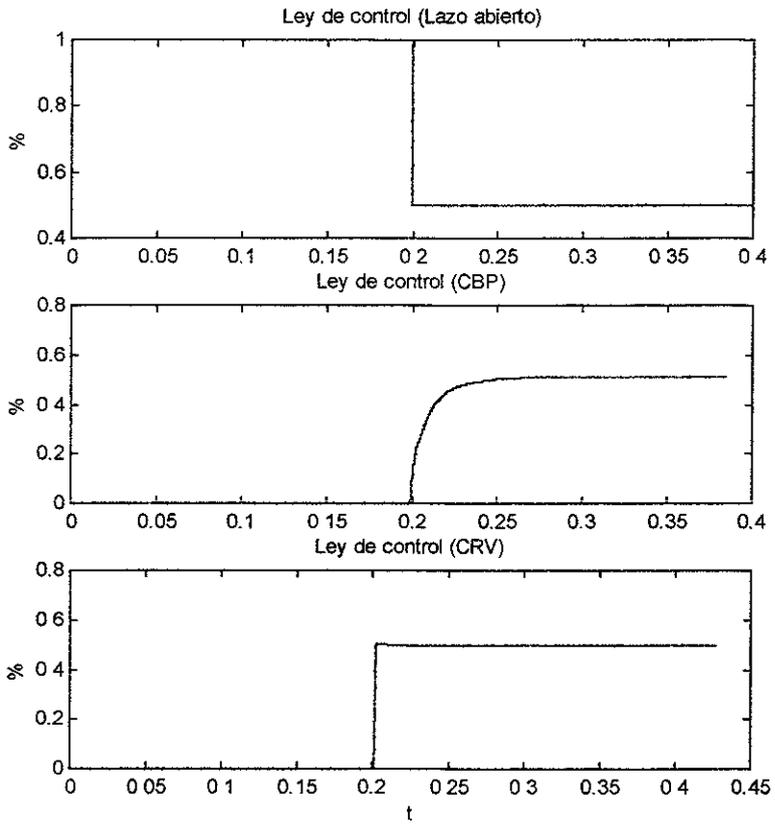


Fig 5 6 Comparativo de la ley de control  $\mu$

### 5.2 Respuesta ante una perturbación en la carga

La respuesta en estado estable es muy importante en los sistemas convertidores CD-CD ya que da una indicación de la capacidad de regulación de dichos sistemas. En la practica, la respuesta en estado estable de la salida no concuerda exactamente con la referencia de entrada, esta variación en la salida se conoce como *error en estado estable* (EEE). En la segunda parte de los experimentos realizados se aplico una perturbación en la carga del sistema con el fin de comprobar la robustez de los controladores aplicados. En la Fig.5.6 se muestra un comparativo de las diferentes respuestas de la señal  $x_2$  ante la perturbación bajo las acciones de control implementadas, así como en lazo abierto.

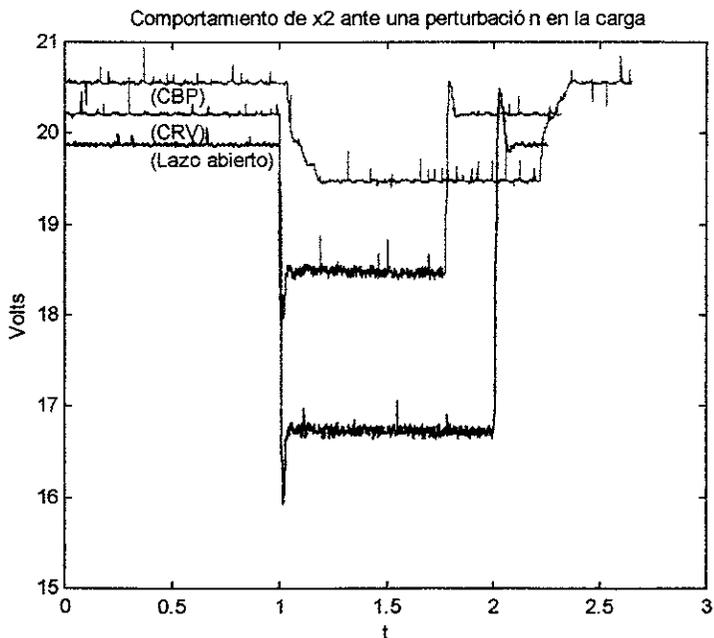


Fig. 5.6 Comparativo de las respuestas de  $x_2$  durante la aplicación de una perturbación en la carga

## Capítulo 5 Resultados Experimentales

Condición de control	EEE	Error durante la perturbación
Lazo abierto	0.13 V.	3.26 V
CRV	0.21 V	1.53 V
CBP	0.55 V	0.54 V

Tabla 5.1 Relación en el error de voltaje  $x_2$

Condición de control	EEE	Error durante la perturbación
Lazo abierto	0.09 Amp.	0.76 Amp.
CRV	0.1 Amp.	0.47 Amp.
CBP	0.109 Amp.	0.165 Amp

Tabla 5.2 Relación en el error de corriente  $x_1$

Condición de control	Estado Estable	Variación ante la perturbación
Lazo abierto	0.5	0
CRV	0.4998	0.00035
CBP	0.5071	0.0104

Tabla 5.3 Relación en la variación de la ley de control  $\mu$

La tabla 5.1 muestra una relación del error en estado estable y del error durante la perturbación en la respuesta de la señal de salida  $x_2$  para cada condición de control implementada. De igual forma, las relaciones de las variaciones en las señales  $x_1$  y  $\mu$  se muestran en las tablas 5.2 y 5.3 respectivamente.

Las gráficas correspondientes a estos comportamientos se presentan en las figuras 5.6 y 6.7 para la corriente  $x_1$  y la ley de control  $\mu$  respectivamente

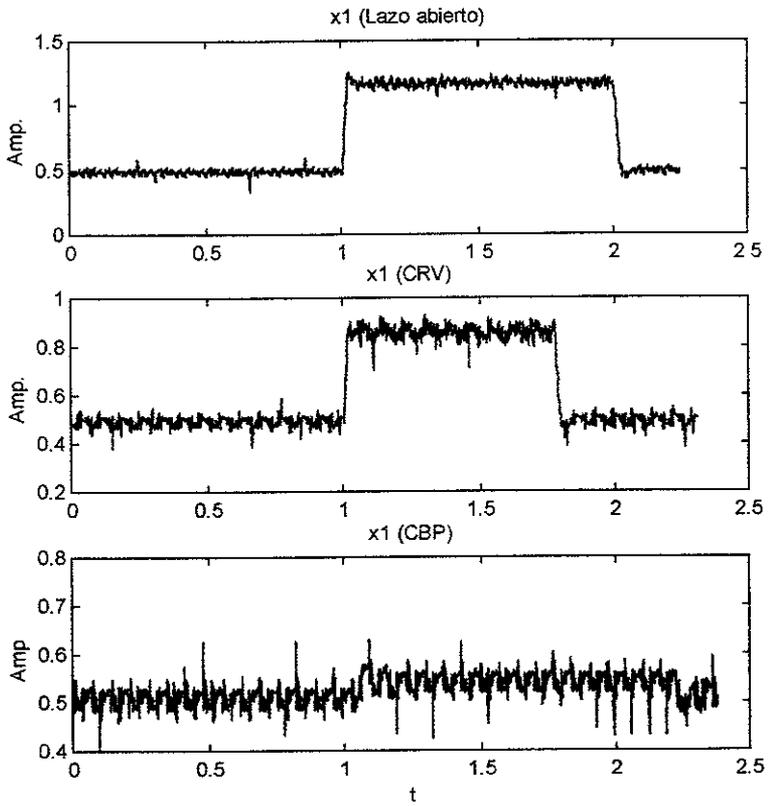


Fig. 5.6 Comparativo del comportamiento de  $x_1$  bajo diferentes acciones de control ante una perturbación en la carga

## Capítulo 5 Resultados Experimentales

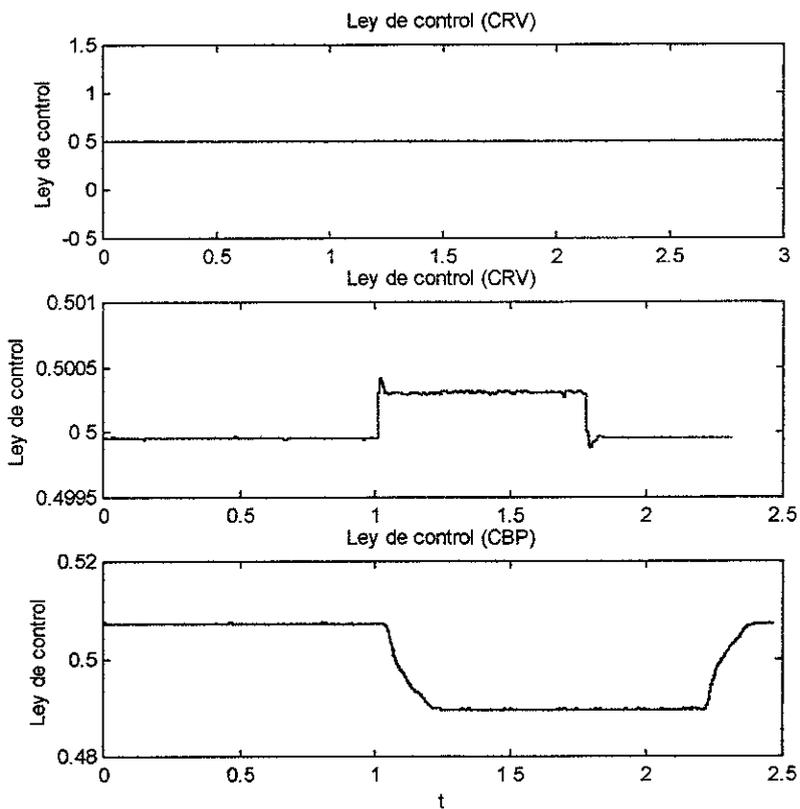


Fig 5.7 Comparativo del comportamiento de la ley de control  $\mu$  bajo diferentes acciones de control ante una perturbación en la carga

### 5.3 DISCUSIÓN

A pesar del bajo nivel de error presentado por el controlador CBP durante la aplicación de la perturbación en la carga, el controlador no consiguió que el voltaje de salida tendiese nuevamente a su valor estable durante la duración de esta por lo que se estima que ante perturbaciones más drásticas, como variaciones en la carga en combinación con cambios en el voltaje de entrada y ruido introducido por señales electromagnéticas externas, este controlador presentará un menor grado de robustez.

Respecto al esquema de control PWM (CRV), las características que presentó fueron prácticamente las mismas exhibidas en el control en lazo abierto, excepto por un menor margen de valores en las características de su respuesta transitoria y en el error de estado estable, es decir, este algoritmo de control mostró un sobreimpulso grande y, por consiguiente, un tiempo de respuesta mucho menor. Se hace la observación de que dicho esquema de control no presentó ninguna regulación en la corriente de entrada y durante la perturbación tampoco exhibió muy buena robustez en el voltaje de salida.

Por todo lo anterior, se concluye que el control basado en las características pasivas del regulador Boost resulto ser superior al método de control PWM empleado en este tipo de sistemas, ya que su comportamiento resulto ser bastante bueno a pesar de que en el proceso de su desarrollo no se consideraron los valores parásitos de resistencia y capacitancia inherentes tanto de los interruptores como del resto de los componentes pasivos empleados, tampoco se consideraron los errores de conversión en el proceso de la adquisición de datos realizado por la tarjeta de dSPACE, ni las señales de error presentes tanto en el sistema como en el sensor de corriente de efecto Hall utilizado en esta trabajo.

## CONCLUSIONES

En el estudio comparativo realizado en esta tesis se examinó el comportamiento de un convertidor CD-CD específico sometido a una nueva clase de estrategia de control basado en las características pasivas del mismo, empleando como referencia un esquema de control PWM y el control en lazo abierto.

En este trabajo se emplean herramientas de análisis matemático que se caracterizan por abandonar la idea de considerar cualquier sistema dinámico, esto es cualquier ecuación diferencial sin importar su estructura, y se centra en una clase de sistemas no-lineales sobre los cuales se tiene un amplio conocimiento sobre su estructura y propiedades. Esto con el fin de presentar un estudio que demuestre claramente la posibilidad de desarrollar, en forma teórica, controladores con una interpretación física inmediata que permiten, por un lado disminuir el distanciamiento entre un esquema teórico y uno práctico, y por otro lado obtener un resultado satisfactorio para el control de una clase de sistemas muy especiales como lo son los reguladores conmutados de Corriente Directa-Corriente Directa. Estos sistemas son considerados *especiales* debido a que poseen propiedades como la no-linealidad, la fácil medición y retroalimentación de diversas señales de interés y la no-continuidad debida a las características conmutativas de algunos de sus dispositivos.

En este trabajo se presenta primero el estudio de las propiedades físicas del regulador conmutado elevador de voltaje (Boost). Este análisis se sintetizó en un modelo obtenido mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange para después aplicar un esquema de control diseñado a partir de dicho modelo y del segundo método de Lyapunov (se refiere al lector al artículo [16]). También se introdujo un método de control PWM, el cual es un método que históricamente se desarrollo mediante la practica, con el fin de realizar un proceso comparativo que permitiese probar las características del control no-lineal.

## Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos en el capítulo 5, se observó que el control basado en las características pasivas del regulador Boost presenta una respuesta transitoria críticamente amortiguada, por lo cual el controlador responde lentamente a cualquier perturbación en el sistema. Sin embargo, esta estrategia de control presentó una serie de características muy superiores a la del control CRV, ya que no solo el error en estado estable fue el menor obtenido, sino que también este esquema presentó el menor nivel de error durante la aplicación de una perturbación en la carga de salida. También destaca el hecho de que este controlador logró mantener un buen nivel de corriente en el inductor, característica que puede ser aprovechada como un medio de protección contra sobrecorrientes que puedan presentarse en la entrada al sistema. Esto implica que los análisis de sistemas no-lineales mediante herramientas como las ecuaciones de Euler-Lagrange y el segundo método de Lyapunov son alternativas de estudio y desarrollo válidas.

## Trabajos futuros

Sobre la base de los resultados obtenidos experimentalmente se observa que la línea de investigación basada en las características topológicas y del manejo de energía del sistema estudiado puede ofrecer alternativas de control bastante aceptables, por ello, a partir del segundo método de Lyapunov y de acuerdo al tipo de función candidata que se proponga se han derivado ya diversas ramas de estudio. Así mismo la búsqueda de funciones de inyección de amortiguamiento que permitan el cumplimiento de la ecuación (3.44) permitirá un comportamiento diferente para el controlador CBP de acuerdo a las características con que cuente dicha función.

Las líneas de investigación a las que se ha hecho referencia han comenzado a emplearse para el estudio de este tipo de sistemas, como por ejemplo, el análisis de control adaptable, control en modos deslizantes y el control difuso; los cuales se emplean en este tipo de sistemas como una forma de probar su eficacia para después ser empleados en sistemas conmutados más complicados como los convertidores acoplados, los inversores y los puentes rectificadores controlados.

## APÉNDICE A

### ANÁLISIS DE LYAPUNOV

La determinación de la estabilidad de un sistema cualesquiera es el paso más importante en el análisis de control. Esto debido a que la estabilidad es una propiedad que garantiza que un sistema, sometido o no a una estrategia de control, se comportará siempre de acuerdo a determinados límites o lineamientos.

El segundo método de Lyapunov es una herramienta de análisis muy importante en el estudio de los sistemas de control ya que es el método más general para determinar la estabilidad en sistemas tanto lineales como no lineales, y su principal ventaja radica en que no es necesario resolver las ecuaciones de estado del sistema para poder determinar su estabilidad. Para exponer este tema en la forma más completa y concreta posible se requerirá de algunos conceptos previos para, posteriormente, presentar la función de Lyapunov.

#### A.1 Conceptos preliminares

Dado que el análisis de Lyapunov realizado en este trabajo se desarrolló desde el punto de vista matricial, es importante el retomar algunos conceptos de la teoría del álgebra matricial y del álgebra lineal.

Una *matriz* se define como una colección de elementos arreglados en una forma ya sea rectangular o cuadrada. La forma de representarla es como sigue

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Donde  $a_{ij}$  se define como el elemento en el  $i$ -ésimo renglón y en la  $j$ -ésima columna de la matriz. El término *orden de una matriz* se refiere al número total de renglones y columnas de una matriz. Así, la matriz (A.1) tiene tres renglones ( $N$ ) y tres columnas ( $M$ ), por lo que la matriz se denomina como de orden  $3 \times 3$  ( $N \times M$ ). Por lo anterior, una matriz cuadrada es aquella que tiene el mismo número de renglones y de columnas ( $N \times N$ ).

La matriz transpuesta  $\mathbf{M}^T$  es aquella matriz cuadrada cuyos renglones están intercambiados con los elementos en las columnas correspondientes en la matriz  $\mathbf{M}$ , por ejemplo, la matriz cuadrada  $\mathbf{H}$  y su transpuesta  $\mathbf{H}^T$  se presentan mostrando los subíndices correspondientes para enfatizar la relación entre ambas.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Una *matriz simétrica*  $\mathbf{M}^T$  es una matriz cuadrada cuyos elementos se encuentran en el campo de los números reales ( $\mathcal{R}^N$ ), y que cumple con la condición  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ . *Matriz hermitiana* es un concepto más general que el de matriz simétrica ya que este concepto se aplica a matrices cuyos elementos se encuentran en el campo de los números complejos ( $\mathcal{C}^N$ ) y se denota por  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^*$ , donde la matriz  $\mathbf{M}^*$  se conoce como *matriz transpuesta conjugada*.

Para una matriz cuadrada se puede definir un *determinante* que es un ente algebraico que contiene los mismos elementos y orden de la matriz, así, para la matriz  $\mathbf{M}$  el determinante se designa como  $\det(\mathbf{M})$  y es caracterizado por un valor determinado

## Apéndice A. Análisis de Lyapunov

El *cofactor* de cualquier elemento  $a_{2j} = A_{2j}$ , es el determinante que se obtiene al eliminar todos los elementos del  $i$ -ésimo renglón y de la  $j$ -ésima columna, que después se multiplica por  $(-1)^{i+j}$ .

El concepto de *norma* es análogo al del valor absoluto. En un espacio dado, una norma es una función que asigna a cada vector  $x$  un número real designado como  $\|x\|$ , de tal forma que  $\|x\| > 0$  para todo  $x$  diferente de cero. Existen diferentes tipos de normas, la más empleada es la *norma euclidiana* que se define como

$$\|x\| = \left(x^T x\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.2})$$

Sea  $M$  una matriz cuadrada de  $N \times N$ . La *matriz adjunta* de  $M$  se denota por  $\text{adj}M$  y se define como

$$\text{adj} M = A_{2j} \text{ de } |M| \quad (\text{A.3})$$

En donde  $A_{2j}$  implica el cofactor  $a_{2j}$ . En el álgebra de matrices, la ecuación  $Ax = y$  puede ser expresada como

$$x = A^{-1} y \quad (\text{A.4})$$

En donde  $A^{-1}$  se conoce como la *matriz inversa* de  $A$ . Las condiciones para que  $A^{-1}$  exista son:

- a)  $A$  debe ser cuadrada.
- b) El determinante de  $A$  debe ser diferente de cero.
- c) Si  $A^{-1}$  existe, está dada por

$$A^{-1} = \frac{\text{adj} A}{|A|} \quad (\text{A.5})$$

Considérese el siguiente modelo de espacio de estado

$$\begin{aligned} s \mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{e}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{e}(s) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

La función de transferencia matricial se puede definir a partir de (A.6) despejando el término  $\mathbf{X}(s)$  de la ecuación dinámica de estados, y se sustituye en la ecuación de salida, de ese modo se tiene que

$$\frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{e}(s)} = [\mathbf{sI} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (\text{A.7})$$

Si se aplica la ecuación (A.5), en la ecuación (A.7) se llega a la siguiente expresión matemática

$$\frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{e}(s)} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}[\mathbf{sI} - \mathbf{A}]\mathbf{B} + |\mathbf{sI} - \mathbf{A}|\mathbf{D}}{|\mathbf{sI} - \mathbf{A}|} \quad (\text{A.8})$$

La función de transferencia dada en (A.8), puede ser expresada como una relación entre dos polinomios, es decir

$$\frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{e}(s)} = \frac{\mathbf{P}(s)}{\mathbf{Q}(s)} \quad (\text{A.9})$$

donde los polinomios  $\mathbf{P}(s)$  y  $\mathbf{Q}(s)$  están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s) &= \mathbf{C} \text{adj}[\mathbf{sI} - \mathbf{A}]\mathbf{B} + |\mathbf{sI} - \mathbf{A}|\mathbf{D} \\ \mathbf{Q}(s) &= |\mathbf{sI} - \mathbf{A}| \end{aligned}$$

Cuando el polinomio  $\mathbf{Q}(s)$  es igualado a cero se le denomina *ecuación característica* del sistema, ya que esta ecuación contiene la información necesaria para determinar las características básicas de la respuesta del sistema. Las raíces de la ecuación característica se conocen como *valores característicos* debido a que estos se mantienen invariantes aun después de transformar el modelo de espacio de estado por otro equivalente.

## Apéndice A. Análisis de Lyapunov

Una matriz cuadrada hermitiana  $\mathbf{M}$  se dice que es *definida positiva* ( $\mathbf{M} > 0$ ) si y solo si la relación  $\mathbf{x}^* \mathbf{M} \mathbf{x} > 0$  se cumple para todos los estados  $\mathbf{x}$  no ceros en  $\mathbf{C}^N$ . Una matriz hermitiana  $\mathbf{M}$  es *definida negativa* si  $-\mathbf{M}$  es definida positiva para todos los estados  $\mathbf{x}$  diferentes de cero.

La ecuación dinámica dada en (A.10) posee uno o varios estados que cumplen con la igualdad mostrada en (A.11)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = \mathbf{0} \quad (\text{A.11})$$

Donde  $\mathbf{x}_e$  se denomina *estado de equilibrio o punto de equilibrio del sistema*. Estos estados corresponden a las soluciones constantes del sistema donde el comportamiento del mismo se mantiene sin variación. Si consideramos la existencia de una región esférica de radio  $l$ , alrededor de un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_e$ , es decir

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| \leq l \quad (\text{A.12})$$

Donde  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\|$  es una norma euclidiana. Sea  $S(\delta)$  una región que contiene todos los puntos tales que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| \leq \delta \quad (\text{A.13})$$

y  $S(\varepsilon)$  una región que contiene todos los puntos tales que

$$\|\mathbf{f}(t; \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}_e\| \leq \varepsilon \text{ para todo } t \geq t_0,$$

donde  $\mathbf{f}(t; \mathbf{x}_0, t_0)$  implica la solución de la ecuación (A.10) en el tiempo observado  $t$  para el estado  $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$  en el tiempo  $t=t_0$ . El estado de equilibrio  $\mathbf{x}_e$  es estable en el sentido de Lyapunov, si en una región  $S(\varepsilon)$ , existe un espacio  $S(\delta)$  tal que las trayectorias

que se inician en  $S(\delta)$  no salgan de la región establecida por  $S(\epsilon)$  al incrementarse el tiempo  $t$  en forma indefinida.

En el caso de que el estado de equilibrio sea estable en el sentido de Lyapunov y, además, toda solución que sale desde el interior de  $S(\delta)$  converge de nuevo hacia  $x_e$  sin abandonar  $S(\epsilon)$  al incrementarse  $t$ , entonces se dice que el estado de equilibrio  $x_e$  es *asintóticamente estable*.

## A.2 El Teorema de Lyapunov

Con los conceptos preliminares vistos en el apartado anterior, es posible introducir ahora el segundo teorema de Lyapunov, el cual se presenta aquí para el análisis de los sistemas invariantes en el tiempo.

Todos los valores característicos de la matriz  $A$  tendrán parte real negativa o, lo que es lo mismo, el estado  $x = 0$  de la ecuación  $\dot{x} = Ax$  es asintóticamente estable si y solo si para una matriz hermitiana  $N$  definida positiva, la expresión matricial

$$A^*M + MA = -N \quad (A.14)$$

Tendrá a la matriz hermitiana  $M$  como única solución, y donde  $M$  es definida positiva. Lo anterior indica que, si  $A$  es asintóticamente estable y si  $N$  es definida positiva, entonces la solución  $M$  de  $\dot{x} = Ax$  debe ser definida positiva. Esto no quiere decir que si  $A$  es asintóticamente estable y si  $M$  es definida positiva, entonces, la matriz  $N$  sea definida positiva. Es decir, no es recomendable tratar de obtener una matriz  $N$  definida positiva si primero se establece una función  $M$  definida positiva.

Una característica de la estabilidad asintótica consiste en que, dado un sistema multivariable estable, su energía total (que generalmente puede expresarse como una matriz definida positiva), es continuamente decreciente, esto es, la derivada con respecto al tiempo de la energía total, debe ser definida negativa con el fin de que esta función alcance el estado de equilibrio.

## Apéndice A. Análisis de Lyapunov

El segundo método de Lyapunov esta basado en una generalización de lo anterior, es decir, si el sistema tiene un estado de equilibrio asintóticamente estable, entonces la energía almacenada del sistema disminuye al crecer el tiempo hasta que alcance finalmente el valor mínimo en el estado de equilibrio. Por lo anterior, si se encuentra una función de energía  $V(x)$ , tal que

$$V(x) = x^* M x \quad (A.15)$$

Donde  $M$  es definida positiva, se requerirá, para tener estabilidad asintótica, que  $\dot{V}(x)$  sea definida negativa, por lo tanto es necesario que

$$\dot{V}(x) = -x^* Q x \quad (A.16)$$

Donde la matriz  $Q$  sea definida positiva y cumpla con la siguiente relación

$$A^* M + M A = -Q \quad (A.17)$$

Por lo general la obtención de una función de energía no es sencillo, por ello, se debe buscar una función ficticia que cumpla con lo establecido en (A.15), (A.16) e implícitamente, con (A.17). Esta función recibe el nombre de *función ficticia* o *función candidata de Lyapunov*.

## APÉNDICE B

### INTRODUCCIÓN A dSPACE

La importancia de establecer un protocolo de comunicación entre computadoras y dispositivos externos a estas, radica en la posibilidad de implementar algoritmos que permitan sensar y/o interactuar a estos computadores con determinados procesos para fines de investigación o industriales. Esto es importante ya que, en materia de investigación y de enseñanza, esta comunicación facilita el desarrollo de diversos experimentos sin necesidad de realizar dispositivos físicos específicos cuya implementación puede ser muy cara, o de realizar modificaciones en estos.

Las tarjetas de adquisición de datos, son dispositivos de propósito general que permiten esta intercomunicación mediante la debida programación de los mismos. Una de las tarjetas más populares de este tipo es la tarjeta DS1102, Fig. B.1 de la serie dsp-citeco, la cual es una familia especialmente diseñada para la implementación de controladores multivariados de alta velocidad para la simulación, en tiempo real, de algoritmos empleados en campos como



Fig B 1. Tarjeta DS1102 para la adquisición de datos

## Apéndice B. Introducción a dSPACE

- \* Robótica,
- \* Sistemas eléctricos y sistemas servohidráulicos,
- \* Control de manipuladores,
- \* Control de vehículos, etc.

También es posible emplearla para el procesamiento digital de señales.

### B.1 Características técnicas

El DS1102 se desarrollo sobre la base del microprocesador TMS320C31 de Texas Instruments. Es la tercera generación de los llamados Procesadores Digitales de Señales (DSP), de punto flotante, el cual constituye la principal unidad de procesamiento. El DSP esta complementado con un conjunto de periféricos muy empleados en el control digital. Los principales periféricos los constituyen dispositivos convertidores Analógico-Digitales (AD), y Digitales-Analógicos (DA), logrando que la tarjeta DS1102 sea una interface muy poderosa hacia la gran mayoría de los sistemas físicos. Las principales características técnicas y requerimientos de esta tarjeta se enumeran a continuación:

- 1.- La computadora ' anfitriona ' debe proveer una fuente de alimentación capaz de soportar una carga de 2 Amp. con un voltaje de alimentación de 5 V, y una corriente de 100 mA para una fuente de  $\pm 12$  V.
- 2.- La computadora debe contar con diez puertos libres de entrada/salida de 8 bits .
- 3.- La frecuencia del anfitrión no debe exceder de un valor de 8.33 Mhz durante el acceso al bus de expansión.
- 4.- La tarjeta cuenta con dos canales o puertos AD de 16 bits, y dos canales AD de 12 bits.
- 5.- El DS1102 posee cuatro canales DA de 12 bits.
6. - El DS1102 cuenta con dos encoders o puertos codificados cuya función consiste en establecer un canal directo con sensores ópticos comúnmente empleados en

problemas de control de posición .

7.- Para este trabajo, el anfitrión fué una PC 486 DX-2 con el siguiente software para Windows 3.1:

- MATLAB Versiones 4.2 y 5.2
- SIMULINK Versiones 1.3 y 2.2
- C Code Generator Versión 1.1 (Real-Time Workshop).

Todos ellos propiedad de Math Works' software.

El rango de voltaje de entrada para los puertos AD empleados es de  $\pm 10$  V, con un tiempo de conversión de 10  $\mu$ s, un offset de voltaje de  $\pm 5$  mV, un valor de  $\pm 25\%$  de ganancia de error, y una relación de señal a ruido mayor a 80 dB para los puertos de 16 bits; con respecto a los puertos de 12 bits, solo cambia el tiempo de conversión de 3  $\mu$ s, y la relación señal a ruido que es mayor a los 65 dB

Una de las principales ventajas de la tarjeta DS1102 con respecto a otras existentes en el mercado, consiste en su capacidad de interface con MATLAB, el cual es un paquete muy poderoso de análisis y diseño numérico muy fácil de emplear.

Es gracias a esta capacidad de enlace que los experimentos realizados para la presente tesis fueron implementados. Así, mediante el empleo del toolbox SIMULINK de MATLAB, se consiguió aplicar al sistema los algoritmos de control y el lazo abierto descritos en el Capítulo 4. Este proceso de interface se describe en el siguiente apartado.

## **B.2 Interface en el Tiempo Real**

La DS1102 es una tarjeta que trabaja bajo un ambiente de programación C, sin embargo, esta tarjeta cuenta también con un software de enlace capaz de compilar, enlazar y cargar los archivos generados en código C por la ventana de diálogo *Real Time Options* (RTI) de SIMULINK. El enlace con SIMULINK se realiza mediante los bloques de interface contenidos en el menú DS1102 del conjunto de bloques que es accedido mediante MATLAB con la siguiente instrucción (Fig. B2).

» dspclib

Dentro de este menú se encuentran dos bloques denominados DS1102 ADC y DS1102 DAC, ver Fig.B3, los cuales representan a los convertidores AD y DA en la tarjeta de adquisición.

Una vez que el esquema ha sido elaborado, el siguiente paso consiste en la generación del código C, ANSI C, mediante la opción *Generate Code Only* en la ventana de opciones RTI, Fig. B4, con lo cual se generan dos archivos con extensión \*.c y \*.h los cuales comprimen la descripción en código C del modelo. Posteriormente se selecciona la opción *real time applications* en el mismo menú y se especifican los siguientes parámetros en el cuadro de dialogo:

- Step Size. Consiste en el tamaño base del tiempo de captura en DSP
- Algorith. permite la aplicación de uno de métodos de integración empleados en SIMULINK.

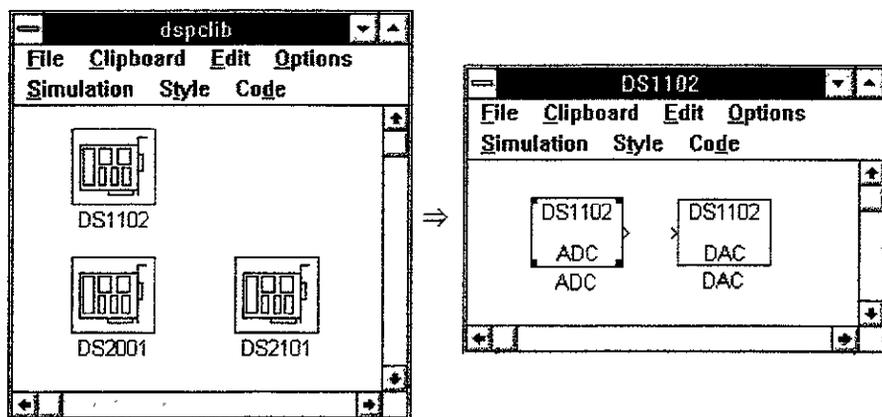


Fig. B2. Menú de dSPACE

**Apéndice B. Introducción a dSPACE**



Fig. B3 Bloques de interface DAC y ADC

Posteriormente se pulsa la tecla de Built la cual se encarga de cargar los archivos \*.c y \*.h en la tarjeta de DSP, a su vez genera otros archivos de enlace para, finalmente, activar la tarjeta y generar los siguientes archivos:

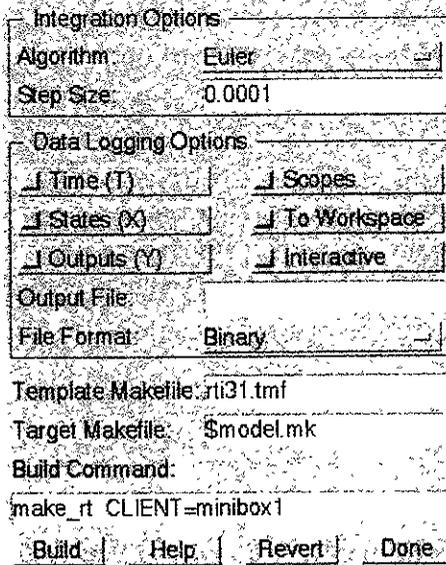


Fig B4 Ventana de Real-Time Options

## Apéndice B. Introducción a dSPACE

- \*.rc: Este archivo, en código C, guarda la descripción del modelo adaptada a aplicaciones en tiempo real.
- \*.io: Este archivo incluye todas las funciones entrada/salida necesarias para la aplicación.
- \*.usr. Es un archivo que ofrece los comandos para la inserción de códigos definidos por el usuario.
- \*.trc: Archivo que establece el mapa de memoria para las aplicaciones del programa TRACE.

Una vez que el esquema ha sido compilado, y la tarjeta se encuentre activada, el siguiente paso consiste en recurrir al software de aplicación de DSP, Fig B5. COCKPIT es una herramienta de animación en tiempo real que corre bajo Microsoft Windows 3.1, ver Fig. B6. Este programa posee muchas ventajas ya que permite implementar un control total sobre la tarjeta DSP, es decir, bajo su ambiente gráfico es posible implementar diferentes instrumentos que permiten acciones tan variadas como la inicialización, pausa y finalización de una corrida, también permite visualizar y modificar, mientras se simula, los parámetros en los bloques del esquema de SIMULINK sobre el cual se este trabajando.

Cuando el programa en código C ha sido cargado por COCKPIT y la tarjeta de DSP ha comenzado la corrida del esquema, puede entonces recurrirse al programa TRACE, el cual permite desplegar gráficamente todas las señales y parámetros involucrados en la simulación que se encuentren representados mediante variables flotantes de precisión simple en la memoria de la tarjeta, Fig. B7. Este programa presenta muchas características muy importantes, entre las cuales puede mencionarse las siguientes:

- Inicio del despliegue gráfico mediante una señal de disparo al iniciarse la simulación
- Capacidad de graficar por periodos fijos de tiempo y en forma automática (captura automática de trazos periódicos)
- Captura del trazo mediante tasas de muestreo variables.

Apéndice B. Introducción a dSPACE

- Despliegue automático de los trazos, y
- Posibilidad de salvar los gráficos en el formato \*.mat para su empleo posterior en el ambiente de MATLAB o si se prefiere en formato ASCII .

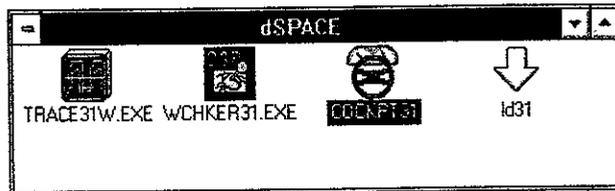


Fig. B5 Software de dSPACE

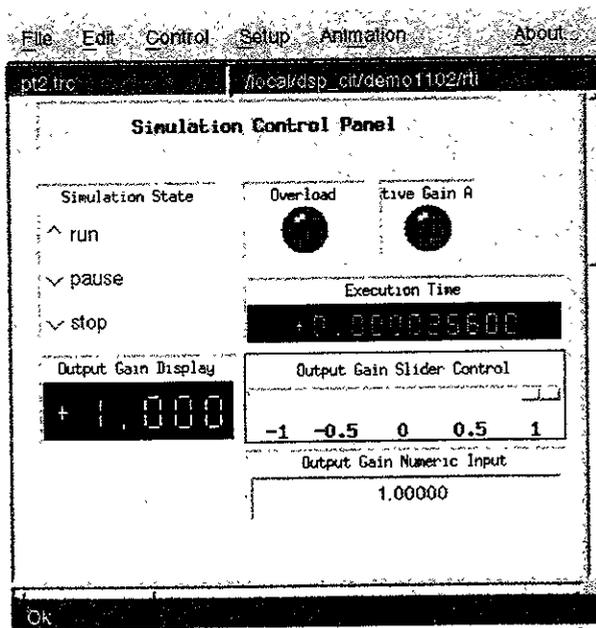


Fig. B6 Ventana de aplicación para Cockpit

Apéndice B. Introducción a dSPACE

Lo expuesto anteriormente revela la facilidad con que un esquema de SIMULINK puede ser implementado en una tarjeta de DSP, permitiendo realizar practicas de prueba en forma rápida y con la posibilidad de realizar cambios en el esquema que, de otra forma, no serian posibles.

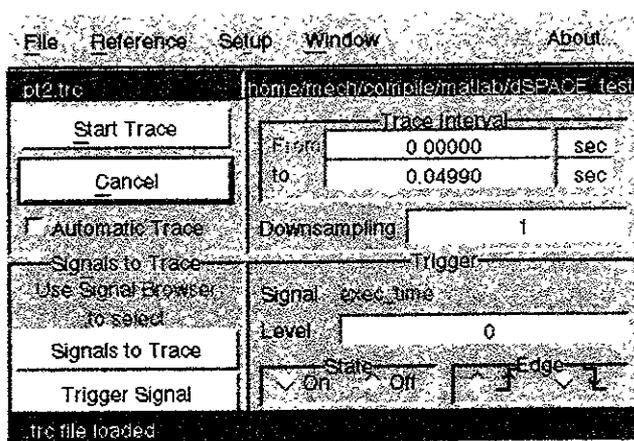


Fig. B7 Ventana de opciones de Trace

## REFERENCIAS

- [1]. *DS1102, User's Guide*. Paderborn, Germany. An der schönen Aussicht 2. (1993).
- [2]. Escobar G., Romeo O., Sira-Ramirez, H. Jean Paul Vilain, Ismail Zein. *An Experimental Comparison of Several Non-Linear Controllers for Power Converters*. IEEE Power Electronics Specialists Conference Record. 1997, pp. SS89 - SS94.
- [3]. Kassakian, J. G. M. Schlecht y G. C. Verghese, **Principles of Power Electronics**. Reading, Mass: Addison-Wesley Publishing Co, Inc,(1991)
- [4]. Kuo, B. C., **Sistemas de Control Automático**. Edo. de México. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., septima edicion (1996).
- [5]. Meisel J. **Principles of Electromechanical-Energy Conversion**. McGraw-Hill. (1966)
- [6]. Mitchell M. Daniel. *DC-DC Switching Regulators Analysis*. New York McGraw-Hill. (1993).
- [7]. Muhammad M. Rashid, **Power Electronics. Circuits, devices and applications**. Prentice hall, 2ª edición,(1993).
- [8]. Naomi E. L., William S. L., **Using MATLAB to Analyze and Design Control Systems**. California : Addison-Wesley Publishing Company .(1995).
- [9]. Ogata K, **Ingeniería de Control Moderna**. Edo. de México. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., segunda edicion (1993).
- [10]. *Power System Blockset, User's Guide*. The Math Works Inc.(1997).
- [11].R. D. Middlebrook . *Topics in Multiple-Loop Regulators and Current-Mode Programming*. IEEE Power Electronics Specialists Conference Record. 1985, pp. 716-732.
- [12].Robert F. Coughlin, Frederick F. Driscoll. **Amplificadores Operacionales y Circuitos Integrados Lineales**. Edo. de México: Prentice-Hall Hispanoamericana.(1993)

## Referencias

- [13].Seth R. Sanders, Verghese C. Georges. *Lyapunov-Based Control for Switched Power Converters*. IEEE Transactions on Power electronics, Vol. 7, No. 1. January 1992. Pags. 17-24.
- [14].Shi-Ping Hsu, Art Brown, Loman Rensink y R. D. Middlebrook . *Modelling and Analysis of Switching DC -to- DC Converters in Constant – Frequency Current – Programmed Mode*. IEEE Power Electronics Specialists Conference Record. Junio/1979, pp. 284-301.
- [15].*Simulink User's Guide*. The Math Works Inc., (1993).
- [16].Sira-Ramirez H., R. Ortega, M. Pérez -Moreno y M. García - Esteban. *Passivity – Based Controllers for the Stabilization of DC -to- DC Power Converters*. Automática, Febrero/1997, pp. 499-513.
- [17].Sira-Ramirez H. , Romeo Ortega y Gerardo Escobar . *Lagrangian Modeling of Switch Regulated DC -to- DC Power Converters*. Noviembre/1995, pp. 1-19.
- [18].Slotine J.,Weiping Li. **Applied Nonlinear Control**. New Jersey: Prentice-Hall, (1991)
- [19].Wellstead, **Introduction to Physical System Modelling**. Academic Press, (1979).
- [20].Yan-Fei L, Paresh C. S., *A General Unified Large Signal Model for Current Programmed DC to DC Converters*. IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 9, No. 4 july 1994, pp 414-424.