UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

ESTRATEGIAS DE COBERTURA UTILIZANDO PRODUCTOS DERIVADOS.

T E S I S

Que para obtener el título de

ACTUARIA

P r e s e n t a:

Maribel González González

Martha Trejo González

DIRECTOR DE TESIS

DR. PABLO PADILLA LONGORIA

2000

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

282057

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Estrategias de cobertura utilizando productos derivados

realizado por Maribel González González y Martha Trejo González

con numero de cuenta 9452523-8 / 9129335-2, pasante de la carrera de Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dr. Pablo Padilla Longoria Pablo Padilla L.

Propietario M. en A.P. Ma. del Pilar Aloso Reyes

Propietario M. en C. Beatríz Eugenia Rodríguez Fernández Beatriz Rodríguez F.

Suplente Dr. Mogens Bladt Petersen Mogens Bladt

Suplente M. en Ec. Miguel Angel Segoviano Basurto

Consejo Departamental de Matemáticas
M. en C. José Antonio Flores Díaz

Estrategias de cobertura utilizando productos derivados.

Maribel González González y Martha Trejo González

17 de agosto de 2000

Agradecimientos:

Con toda mi admiración y respeto al Dr. Pablo Padilla L. por el apoyo y comprensión brindados durante el desarrollo de la tesis...gracias por ser.

Al M. en Ec. Rafael Gómez T. y al M. en Ec. Miguel A. Segoviano por su interés , comentarios y sugerencias.

A la M. en C. Beatríz Rodríguez y a la M. en A. P. Ma. Del Pilar Alonso R. por su disponibilidad y guía durante toda la carrera.

Al Dr. Mogens Bland P. por su disponibilidad.

A todos los investigadores del IIMAS por el apoyo brindado.

Principalmente a mi padre, Pedro, por su apoyo incondicional, por sus sacrificios y esfuerzos, sin los cuales nunca habría podido llegar a donde estoy.

A mi madre, Guadalupe, por darme la oportunidad de cambiar mi vida, por su apoyo y amor incondicional.

A mis hermanas, Clara, Noemi y Judith por su apoyo invaluable.

A mi gran amiga y compañera de tesis Martha Trejo G. por su amistad invaluable y su apoyo incondicional y por ser parte de mi familia durante toda la carrera,

A mi amiga, casi hermana Violeta por estar siempre a mi lado, en los peores y mejores momentos durante tantos años, gracias por ser mi conciencia.

A Elizabeth por su maravillosa amistad, por todo el amor que desborda y por la pureza de su alma.

A Rocío por ser parte de mi familia durante toda la carrera, por su apoyo incondicional y su gran amistad, con profunda admiración.

A Rigoberto por su amistad sin condiciones, por su libertad y su gran valor.

A Norma por su gran amistad, por brindarme siempre su mano cálida y su paciencia, y por tantos momentos agradables compartidos.

A Yazmin por su gran amistad y por dar chispa a mi vida.

A Karen por su gran amistad y los momentos agradables.

Maribel Glez. Glez.

AGRADECIMIENTOS:

Muy especialmente al Dr. Pablo Padilla, por sus consejos, apoyo y atención que me brindó a lo largo del presente trabajo.

A Maribel, Rocío, Rigoberto y Zulma por su amistad y paciencia, gracias por estar conmigo en todo momento, tanto en lo bueno como en lo difícil. Fue muy agradable el haber terminado la carrera en su compañía.

A Mayra, Norma, Yazmín, Karen por compartir momentos gratos durante el tiempo de conocerlas.

A la profesora Nora Ortigoza por haberme orientado hacia esta carrera.

A MIS PADRES.

Martha T. G.

Introducción

Dentro del campo de las finanzas existe un problema en particular, referente a las grandes pérdidas que puede sufrir un inversionista o una compañía al enfrentarse al problema del cambio en los precios de los productos que utiliza, ya sea financieros o de consumo.

El propósito del presente trabajo es analizar diferentes estrategias para protegerse del riesgo de pérdida económica, *cobertura*, debido al comportamiento aleatorio de los precios de algún artículo en el mercado, utilizando para esto productos financieros derivados, específicamente los contratos de futuros y opciones; los cuales son acuerdos para comprar o vender un bien en una fecha y precios determinados, y a diferencia de los futuros en los cuales hay que cumplir con el convenio, en las opciones se posee el derecho mas no la obligación de ejercer el contrato. Para lograr tal objetivo se usarán como principales herramientas la teoría del interés, la estadística, así como la probabilidad aplicada, en especial la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Alrededor de 1900, Bachelier propone un modelo de comportamiento de los precios de activos financieros con el propósito principal de valuar *warrants* negociados en la bolsa de París. A finales de los sesenta y principios de los setenta, con el trabajo de Samuelson, Black, Scholes, Merton, etc., se cuenta con herramientas adecuadas para atacar el problema de valuación de productos derivados y de cobertura.

En el primer capítulo se describen los contratos sobre futuros y opciones, tanto sus especificaciones y mecanismos de compra-venta, así como su historia y utilidad para distintos fines, además de la cobertura. Se mencionan diversas situaciones económicas y financieras que servirán como premisas o suposiciones en el tratamiento teórico del problema.

En los tres capítulos siguientes se establecen herramientas matemáticas para resolver el problema de cobertura, tanto para futuros (Capítulo 2), como para opciones (Capítulos 3 y 4). Se parte de la definición de una caminata aleatoria discreta para la construcción del movimiento browniano; posteriormente se analizan sus incrementos para determinar cierto tipo de ecuación diferencial estocástica. Estos resultados se utilizan para modelar las fluctuaciones del precio de algún producto además de valuar los contratos de opciones. para esto se construye un portafolio de inversión que involucre ambos elementos además de los rendimientos libres de riesgo; se obtiene implícitamente en una ecuación diferencial estocástica lo que se conoce como radio de cobertura (Capítulo 4). *el cual es la cantidad de bienes que se deben cubrir de acuerdo con la cantidad expuesta*; y. con esto se podrá conocer en promedio la pérdida máxima que se tiene en caso de que los cambios futuros en los precios sean en contra de la empresa. Esto es en cuanto a contratos de opciones, para el caso de futuros se utiliza su mecánica de comercialización para deducir el porcentaje de bienes que se deben cubrir empleando estos instrumentos.

En el capítulo cinco se aplican los resultados de los temas precedentes para el caso de Petróleos Mexicanos. ya que de los ingresos de esa empresa depende en una medida importante la economía de México. Se analiza un escenario donde dicha compañia tuvo grandes pérdidas debido a la baja en el precio del petróleo y otro en el cual se obtuvieron ganancias por la recuperación de los precios. Se utilizan datos históricos y se discute su eficacia y utilidad para el país.

En el último capítulo se trata el tema de opciones vulnerables, su evaluación y se deduce a partir de capítulos anteriores el radio de cobertura con tales instrumentos. A diferencia de las opciones ordinarias en una opción vulnerable se contempla el riesgo de incumplimiento. es decir cuando el que suscribe la opción no cumple con su promesa de pago.

Índice General

Capítulo 1

Fundamentos Financieros

Las opciones y futuros son ejemplos de lo que se conoce como productos derivados, lo que significa que sus valores dependen del precio de otros bienes o instrumentos financieros básicos (activo subyacente), pueden además estar en función de otros factores como son los costos de transacción, el riesgo de incumplimiento, el riesgo crediticio, etcétera.

En este primer capítulo se describe de manera general qué son los contratos de futuros y opciones, cuáles son sus especificaciones, así como su comercialización en los mercados, [1], y algunas de sus propiedades principales, [5]. También se mencionará su utilidad para distintos fines como es la cobertura, la especulación y el arbitraje. Antes de abordar estos temas se mencionará la historia de los contratos de futuros, no sin antes dar la siguiente definición:

Un contrato de futuros es un convenio de compra/venta entre dos partes en una fecha presente, donde se establece el precio al cual será entregado el producto en una fecha posterior específica.

1.1 Historia de los mercados de futuros

Tradicionalmente, los mercados de futuros se habían establecido, en principio, para aquellos productos con mayor inestabilidad de precios, ya fuera por variaciones en su suministro, como es el caso de los productos agrícolas, o por variaciones en su demanda como consecuencia de los cambios en la actividad industrial, como en el caso de los metales. Ambos aspectos conducían a una considerable volatilidad [1] de

[1]Por el momento se definirá a la volatilidad como una medida de la incertidumbre existente en los movimientos del precio de algún producto (activo). Véase el capítulo cuatro.

precios y a tendencias especulativas de inventarios en determinados momentos. En estas condiciones, era natural el desarrollo de contratos de futuros, debido a que de esta manera se "aseguraban" de comerciar con precios determinados en el futuro, sin el temor de cambios bruscos en los mismos que pudiesen ocasionar algún quebranto en sus economías.

A pesar de la existencia de contratos de futuros para lana en la Europa medieval, los primeros mercados organizados se desarrollaron en el siglo XVII en el Japón. Los terratenientes recibían sus rentas en arroz de sus arrendatarios y, dado que estos pagos se concentraban en tiempos de cosecha, los terratenientes consideraban conveniente concertar entregas futuras de arroz con los arrendatarios, con el objeto de vender este arroz a los mercaderes. Hacia 1730 el mercado se había hecho tan sofisticado, que mostraba ya prácticamente todos los rasgos de los modernos mercados de futuros.

En occidente, el crecimiento del comercio en futuros surgió durante el siglo XIX. El primer contrato de grano se negoció en la bolsa de Chicago (*Chicago Board of Trade*) en marzo de 1851, despúes de su constitución en 1848. En esos años, la negociación a plazo fue impulsada por innovaciones técnicas que expandieron enormemente el comercio de las mercancías correspondientes. Ejemplos claros de ello fueron la apertura del canal de Illinois y Michigan en 1848 y el crecimiento del tráfico transatlántico de vapores.

Hasta entonces, lo habitual era que los nuevos mercados de futuros fueran el resultado de un desarrollo lento y espontáneo. Es a partir del siglo XX cuando los propios mercados toman la iniciativa de introducir nuevos contratos con los mismos criterios que cualquier empresario seguiría para introducir un nuevo producto o servicio para sus clientes.

Así, el mercado de materias primas de New York (*New York Mercantile Exchange* (NYMEX)) incorporó en 1981 los futuros sobre gasolina y en 1983, con gran éxito, los de petróleo crudo.

Sin embargo, no todos los intentos de innovación en materia de futuros han tenido éxito y muchos contratos fracasaron. Para que la introducción de un contrato de futuros tenga éxito, la mercancía debe ser homogénea, su precio debe ser volátil y formarse en régimen de competencia, los márgenes de precios entre diferentes tipos de mercancías deben ser estables y debe existir un activo mercado al contado para facilitar las entregas físicas [2]. Los contratos deben presentarse además en una forma conveniente para los agentes y debe existir un volumen de comercio lo suficientemente grande para atraer a los especuladores.

[2] Estas son algunas de las suposiciones que se ocuparán más adelante (capítulos dos y cuatro) en el desarrollo de las fórmulas de valuación de futuros y opciones.

Sin duda alguna estos argumentos fueron recogidos por Milton Friedman, de la Universidad de Chicago, a quien se atribuye la idea inicial de negociar contratos de futuros sobre divisas.

Los mercados de futuros en instrumentos financieros constituyen el desarrollo más sobresaliente dentro de los mercados financieros en lo que va del siglo. En poco más de una década han dejado de ser especulaciones de académicos para convertirse en mercados de grandes proporciones y liquidez. Su nacimiento se remonta al inicio de la década de los setenta y su desarrollo se centra en Estados Unidos, como continuación de tres grandes acontecimientos:

1971: R.Nixon devalúa el dólar y anuncia el término del patrón oro-dólar (convertibilidad y respaldo del dólar por reservas en oro), que había sido uno de los acuerdos básicos -acuerdo de Bretton Woods- para el restablecimiento del comercio internacional luego de la segunda guerra mundial, desencandenando la fluctuación generalizada de las diferentes monedas, por lo que los principales países utilizaron como armas los tipos de interés para ajustar sus monedas con respecto a las de los demás. Se desvaneció la relativa estabilidad de los tipos de cambio y tasas de interés existente hasta entonces y el precio del dinero adquirió una gran volatilidad.

1973: La crisis del petróleo provocó déficits de las balanzas de pagos, crecimiento de la inflación y recesión. El mundo conoció un periodo de alza de los tipos de interés sin precedentes.

1979: Liberación de los tipos de interés en los Estados Unidos. En ese momento, la Reserva Federal pasa de una política de tipos de interés a un control cuantitativo de liquidez mediante la regulación de la masa monetaria, dejando fluctuar los tipos como medida para poder controlar el crecimiento económico y combatir la inflación. Se genera de este modo una importante volatilidad de los tipos de interés.

El mercado de futuros financieros surgió formalmente en 1972, cuando el CME (*Chicago Mercantil Exchange*) creó el IMM (*International Monetary Market*), una división destinada a operar futuros sobre divisas. Otro avance importante se produjo en 1982, cuando se comenzaron a negociar contratos de futuros sobre el *índice de Standard & Poor's* y otros índices bursátiles, casi simultáneamente en Kansas City, Nueva York y Chicago.

1.1.1 El caso de México

A continuación se enumeran algunos hechos en los que se comerciaron contratos de futuros antes de que iniciara sus operaciones el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) en *1998* [3].

1. A partir de 1978 se comenzaron a cotizar en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) contratos a futuro sobre el tipo de cambio peso/dólar, los que se suspendieron a raíz del control de cambios decretado en 1982. En 1983 la BMV listó futuros sobre acciones individuales y petrobonos, los cuales registraron operaciones hasta 1986.

2. En la década de los noventa se negociaron contratos *forward* [4] sobre tasas de interés de títulos gubernamentales, pactados en forma interinstitucional. sin un marco operativo formal y fueron suspendidos a mediados de 1992.

3. A finales de 1994 entraron en vigor las normas de Banco de México para la operación de contratos *forward* sobre la tasa de interés interbancaria promedio (TIIP) y sobre en índice nacional de precios al consumidor (INPC). sujetos a registro ante el Banco Central y cumpliendo las normas del Grupo de los Treinta, para garantizar el control administrativo y de riesgo.

4. A finales de 1992 se celebraban contratos *forward* sobre tipo de cambio, tasas de interés y productos agroindustriales (*commodities*), entre intermediarios extranjeros y entidades nacionales. sin reconocimiento ni protección jurídica.

A partir del 15 de diciembre de 1998, con base en diversos estudios de la BMV y el marco regulatorio establecido por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), el Banco de México y la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), inicia operaciones el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer), luego de dos años de negociaciones para su aplicación, con el propósito de incorporar a los participantes nacionales en la creciente industria global de derivados, especialmente los vinculados con valores subyacentes mexicanos.

La inversión total para la puesta en marcha del mercado fue inferior a los 14 millones de dólares. El contrato del dólar fue el primero en cotizar con un tamaño adecuado para permitir que tesorerías de empresas medianas y pequeñas, así como personas físicas, pudieran beneficiarse de una mayor certidumbre sobre el tipo de cambio. Las operaciones se realizaron a viva voz.

[3] Fuente: http://www.mexder.com.mx/mexder/anteceden.htm

[4] En la siguiente sección se definirá la naturaleza de estos documentos y sus diferencias con los contratos de futuros.

En esa primera etapa, exclusivamente participaron los socios liquidadores [5] por cuenta propia, (Banamex, Bancomer, BBV e Inverlat).

Pocos meses después se incorporaron los socios operadores, [6] clientes y los formadores del mercado. Estos últimos son socios operadores que adquieren ante el Mexder la responsabilidad de presentar, de manera permanente, en el piso de remates cotizaciones de compra y de venta sobre los contratos de futuro. A cambio de este servicio de liquidez, el Mexder ofreció descuentos significativos en las cuotas y comisiones que cobran por operar.

A la fecha, en el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) cotizan futuros sobre los siguientes activos subyacentes:

1. Índices: Indice de Precios y Cotizaciones (IPC).
2. Tasas: Certificados de la Tesorería de la Federación a 91 días (CETES), así como la Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE).
3. Monedas extranjeras: dólar de los Estados Unidos.
4. Acciones de empresas como son: Cementos Mexicanos, S.A. de C.V. (CEMEX CPO), Fomento Económico Mexicano, S.A. de C.V. (FEMSA UBD), Grupo Carso, S.A. de C.V. (GCARSO), Grupo Financiero Bancomer, S.A. de C.V. (GFB O), Grupo Financiero Banamex-Accival, S.A. de C.V. (BANACCI O) y Teléfonos de México, S.A. de C.V. (TELMEX L).

1.2 Contratos de futuros y contratos *forward*

Retomando la primera definición:

Un contrato de futuros es un convenio de compra/venta entre dos partes en una fecha presente, donde se establece que un activo será comprado/vendido en una fecha posterior T a un cierto precio X [7].

[5] Fideicomisos miembros de la bolsa, participantes de la cámara de compensación, cuya finalidad es celebrar y liquidar, por cuenta propia o de los clientes, contratos de futuros y de opciones operados en bolsa.

[6] Miembros de MexDer, cuya función es actuar como comisionistas de uno o más socios liquidadores, en la celebración de contratos de futuros y contratos de opciones y que pueden tener acceso a las instalaciones de MexDer, para la celebración de dichos contratos.

[7] A diferencia de un contrato al contado (*spot*) que es cualquiera cuya liquidación es inmediata o a muy corto plazo.

Ejemplo 1.1 Supóngase que hoy es 25 de octubre de 1999 y un corredor de bolsa recibe instrucciones de la inversionista A para vender 100 acciones de BANACCI cuya entrega se hará en marzo del año 2000 a un precio de $21.00 pesos por acción. Al mismo tiempo, otro corredor está interesado en dicha oferta, pues tiene instrucciones del inversionista B de comprar esa cantidad de acciones al precio de $21.00 pesos por cada una; ambos agentes se ponen en contacto y cierran el trato [8].

En el caso anterior, el acuerdo se lleva a cabo el 25 de octubre, estableciendo el precio al cual se venderá cada acción, $21.00 pesos, conocido como precio de entrega (*delivery price*) y la fecha de liquidación, que es en marzo del año siguiente, a la que se le conoce como fecha de madurez. El inversionista que se ha comprometido a vender, se dice tiene una posición *corta*; así mismo su contraparte, se dice tiene una posición larga.

La inmensa mayoría de los contratos de futuros que son iniciados no se llega a efectuar la entrega del subyacente a la fecha de madurez, porque los clientes cambian de posición (*close out*) antes de la fecha de entrega; esto es, entrar a una posición opuesta a la original en cuanto a cantidad del activo y fecha de entrega.

La parte que vende no hace que la parte que compra tenga alguna ganancia por firmar el contrato o viceversa, y por tanto el valor del mismo en ese momento es cero.

Este tipo de documentos se comercializan en mercados especializados y los términos del convenio son estandarizados por los mismos. Por ejemplo, si en el contrato se pacta el pago o liquidación de acuerdo al proceso de compensación diaria por diferencias (*mark to market*) [9] no se realizará la entrega del activo subyacente al precio pactado inicialmente, ya que este mecanismo reajusta el precio en cada periodo (diariamente).

Contratos forward.

Un contrato forward es un acuerdo entre dos partes (realizado en $t = 0$) para comprar y/o vender un activo a un precio X en un tiempo $t = T$ ($T > 0$), pero a diferencia de los futuros, no son negociados ni estandarizados en mercados especializados, sino que son contratos privados entre dos instituciones financieras y saldados a la fecha de vencimiento (over de counter), por lo que no están sujetos a las compensaciones por diferencias diarias (mark to market).

[8]En la sección "dinámica de mercados de futuros" se detallará el proceso de compra-venta de estos documentos.

[9]La cuenta del o la inversionista que tiene en la cámara de compensación dentro del mercado derivados, se ajusta de acuerdo a los cambios diarios en los precios del futuro.

El precio establecido en un contrato *forward* se le llama precio de entrega y, al inicio de la vida del documento, su valor para ambas partes es cero, es decir, que no se aplica un costo al tomar una posición corta o larga. Por lo tanto, el precio *forward* para un contrato es similar al concepto de precio de futuro: es el precio que se podría establecer si el contrato fuese negociado hoy; es decir, se define como el precio de entrega que hace que el documento tenga valor cero. Esto implica que el precio *forward* (o del futuro) y el precio de entrega son por definición iguales al tiempo cero.

1.3 Especificaciones en los contratos de futuros

Cuando va a salir al mercado un nuevo contrato de futuros se debe establecer detalladamente la naturaleza exacta del acuerdo entre las dos partes: cantidad, calidad, límites, etcétera. A continuación se describen dichas características:

1. Cantidad del activo subyacente. Es posible considerar cierta tolerancia cuando sea difícil medir con precisión al activo.

2. Calidad aceptable. Definida cuidadosamente, con tablas de posibles sustitutos, a veces con algún ajuste al precio si se entrega una calidad ligeramente distinta a la especificada. Los activos financieros están generalmente bien definidos.

3. Lugar y/o mecanismos de entrega. En el caso de futuros financieros no hay "entregas" sino simplemente compensación por diferencias (*marking to market*). En los otros casos se establecen los lugares que sean más convenientes para los oferentes y demandantes.

4. Periodo de entrega y fechas de contratación. Varían de contrato en contrato de acuerdo a las necesidades de los participantes en el mercado.

5. Horarios de mercado y cotización.

6. Límites en la variación del precio diario. Surgen con el propósito de prevenir un movimiento pronunciado en los precios a causa de las actividades de los especuladores.

7. Límites en la posición adoptada. Es decir, el número máximo de contratos que un especulador pueda tener, con el fin de evitar influencias en el mercado.

8. Depósitos de garantía (margen inicial) y depósitos mínimos de garantía (margen de mantenimiento) sobre las posiciones adoptadas. Estos depósitos se ajustan constantemente en función de las condiciones del mercado.

Ejemplo 1.2 Se presentan a continuación las especificaciones en un contrato de futuros sobre petróleo WTI (*West Texas Intermediate*) en el NYMEX (*New York Mercantile Exchange*):

a) Cantidad: En este caso son 1,000 barriles (42,000 galones) por contrato (tolerancia 2%).

b) Con respecto a la calidad del subyacente se hace una descripción detallada del petróleo:

- Gravedad específica API entre 37 y 42. Los productos extranjeros estarán entre 34 y 42.
- Viscosidad inferior a 325 segundos Saybolt.
- Presión de vapor inferior a 9.5 psi.
- Restricciones sobre contaminantes: Azufre, inferior a 0.5% al peso. Agua y sedimentos, inferior al 1%.

Origen del petróleo:

- Petróleos domésticos USA: *West Texas Intermediate, Mid Continent Sweet, Low Sweet Mix, New Mexican Sweet, North texas sweet, Oklahoma Sweet, South Texas Sweet.*
- Petróleos extranjeros: *Brent Blend* (Reino Unido), *Bonny Light* (Nigeria), *Oseberg Blend* (Noruega).

c) El mecanismo de entrega en el caso del petróleo WTI es por oleoducto en Cushing, Oklahoma.

d) El periodo de entrega es sobre el curso del mes de entrega estipulado en el contrato.

e) La fechas de contratación son en el último día de negociación: tres días laborales antes del 25 del mes anterior al mes de entrega estipulado.

f) El horario del mercado es de acuerdo al horario local, por ejemplo, en la International Petroleum Exchange es de 10:02 a 20:13; en NYMEX es de 9:45am a 3:10pm. Existe un sistema de mercado electrónico, el cual comienza a las 4 pm en lunes hasta el jueves a las 8 am.

g) La cotización es en dólares y centavos por barril.

h) Se tiene que la variación mínima es de un centavo por barril y la máxima es de $15.00 por barril para los primeros dos meses del contrato.

Ejemplo 1.3 Los siguientes incisos muestran las características para un contrato que se negocia en el MexDer, [10] y cuyo activo subyacente es el dólar norteamericano:

a) Cantidad: 10.000.00 dólares.

b) La unidad de cotización es en pesos mexicanos, hasta en milésimas ($0.001) por dólar.

c) Los horarios de negociación son de 8:00 a 14:00 horas en días hábiles, tiempo de la Ciudad de México.

d) No hay límites en la variación del precio futuro diario, durante una misma sesión de remates.

e) El último día de negociación y la fecha de vencimiento serán dos días hábiles previos a la fecha de liquidación, la cual es el tercer miércoles del mes de vencimiento del contrato. [11]

f) Existen dos tipos de mecanismos de entrega de acuerdo al tipo de liquidación, si es al vencimiento o si es diaria. Para el primer caso y al día siguiente a la fecha de vencimiento:

"Los clientes con posiciones cortas tendrán la obligación de entregar en el horario, el banco y la cuenta que le indique el socio liquidador, el monto que resulte de multiplicar los dólares amparados por un contrato, por el número de sus contratos abiertos. En la fecha de liquidación, los clientes tendrán el derecho de recibir en moneda nacional la cantidad que resulte de multiplicar el precio de liquidación al vencimiento, por el número de dólares que ampara un contrato. por el número de contratos abiertos.

"Los clientes con posiciones largas tendrán la obligación de entregar la cantidad que resulte de multiplicar el precio de liquidación al vencimiento por el número de dólares que ampara un contrato, por el número de contratos abiertos. En la fecha de liquidación, los clientes con posiciones largas tendrán el derecho de recibir el monto que resulte de multiplicar los dólares amparados por un contrato, por el número de contratos abiertos.

"Los socios liquidadores tendrán la obligación de entregar en el horario y la cuenta del banco agente de Asigna [12] abierta en los

[10] Fuente: http:www.mexder.com.mx/mexder/glosari.htm

[11] La fecha de vencimiento es la última en que todavía un contrato puede ser negociado o ejercido y la fecha de liquidación es aquél día hábil en que concluye el plazo del contrato.

[12] Fideicomiso administrado por Bancomer S.A., identificado como Asigna, Compensación y Liquidación, cuyo fin es el de compensar y liquidar contratos de futuros y contratos de opciones. y

Estados Unidos de América, el monto que resulte de multiplicar los dólares amparados en un contrato por el total de los contratos abiertos en posición corta. En la fecha de liquidación, los socios liquidadores tendrán el derecho de recibir en moneda nacional en *el horario, el banco y la cuenta convenida con Asigna, la cantidad* que resulte de multiplicar el precio de liquidación al vencimiento. por el número de dólares que ampara un contrato, por el número de contratos abiertos en posición corta.

"Los socios liquidadores tendrán la obligación de entregar en moneda nacional, en el horario y la cuenta del banco agente de Asigna abierta en México, la cantidad que resulte de multiplicar el precio de liquidación al vencimiento, por el número de dólares que ampara un contrato, por el número de contratos abiertos en posición larga. En la fecha de liquidación, los socios liquidadores tendrán el derecho de recibir en el horario, el banco en los Estados Unidos de América y en la cuenta convenida con Asigna, el monto que resulte de multiplicar los dólares amparados por un contrato por el total de los contratos *abiertos en posición* larga.

Para el caso de liquidación diaria: "... los socios liquidadores y Asigna realizarán diariamente la liquidación de sus obligaciones ... quedando incorporados en la misma, las pérdidas y ganancias, la actualización de las aportaciones iniciales mínimas (margen de *mantenimiento*), la actualización *del fondo de compensación*, los intereses devengados y, en su caso, las cuotas correspondientes."

8. El valor absoluto de la diferencia en número de contratos con posiciones corta y larga debe ser menor o igual a 15,000 y la suma en número de contratos con posiciones larga y corta debe ser menor o igual a 60,000 contratos; se establece así un límite para las posiciones adoptadas.

1.4 Dinámica de los mercados de futuros

Supóngase que se tiene que cumplir con un contrato para vender 25,000 barriles de petróleo WTI con agosto como mes de entrega. Se sabe que el precio actual del futuro es de $20.30 dólares.

Teniendo esta información hay que ponerse en contacto con un agente y se le da

para actuar como contraparte en cada operación que se celebre en MexDer. Esto es la cámara de compensación.

instrucciones de vender a $20.25. Esta orden es transmitida al *broker* que se encuentra en el piso de remates de la Bolsa de New York; él a su vez tratará de encontrar a su contraparte pidiendo precios a sus vecinos (en la actualidad, la compra/venta se realiza generalmente en forma sistematizada). En cuanto le es posible realiza el trato e indica que consiguió ejecutar la orden.

El paso siguiente es tener dinero en la cuenta para cubrir el margen inicial (depósito de garantía). En el caso del petróleo, un margen inicial normal podría ser de $1.50 por barril. Se tiene una posición corta en 25 contratos, por lo que se debe depositar $37,500 como margen inicial.

Al finalizar el día todos los participantes en el mercado han depositado su margen en la cámara de compensación (*clearing house*). No existen transacciones abiertas entre ningún grupo de participantes, ya que todas las posiciones del mercado son entre un participante por un lado y la cámara por otro. La cámara no tiene posiciones por lo que no toma riesgo de mercado, y todo el riesgo de crédito que adquiere con los participantes está capitalizado con los depósitos de garantía.

En los días subsecuentes, la cuenta en la cámara de cada participante se ve sujeta a lo que se conoce como compensación por diferencias (*marking to market*), en función del precio de cierre del contrato de agosto diariamente. Es decir, si baja el petróleo y por lo tanto existe una ganancia (ya que se tiene una posición corta en los futuros sobre petróleo). la cuenta en la cámara de compensación recibe $250 por cada centavo que se mueva el precio a favor, cantidad que se puede retirar siempre que la cuenta se encuentre por encima del margen inicial. Si por el contrario, el mercado sube y existe una pérdida. cada centavo que el mercado se mueve en contra hace que la cuenta pierda $250 y, para asegurar que no llegue a ser negativa existe un margen de mantenimiento específico. el cual es menor que el margen inicial. Si se cae por debajo de dicho margen se tendrá que depositar inmediatamente más dinero hasta cubrir el margen inicial, si no se hace, el agente cerrará inmediatamente la cuenta comprando en el mercado los 25,000 barriles de petróleo con agosto como fecha de entrega en 25 contratos de futuros (*closing out position*).

Cámara de compensación, *Clearinghouse.*

Todas las posiciones abiertas en el mercado están respaldadas por depósitos de dinero en la cámara y, dado que por cada participante que pierde hay uno que gana, diariamente la cámara calcula la posición de cada uno de sus miembros y transfiere el dinero de la cuenta de aquellos participantes que perdieron a las cuentas de los que lo ganaron. El margen inicial sirve de "colchón" para aislar a la cámara del riesgo de crédito que representan todos sus clientes.

1.5 Propiedades básicas de los precios *forward* y de futuros

Se introduce a continuación notación usual que será utilizada a lo largo del presente trabajo.

F1) El precio de entrega X para los contratos *forward* es establecido al inicio del acuerdo y permanece fijo para toda $t \in [0, T]$.

F2) El valor de un contrato *forward* al inicio de su vida es cero y lo mismo sucede con los contratos de futuros.

$$f_0 = 0.$$

F3) El precio *forward* (y el precio del futuro) a la fecha de vencimiento T es el precio *spot* S_T.

F4) El valor de un contrato *forward* al tiempo T es el precio *spot* menos el precio *forward* original.

$$f_T = S_T - X.$$

F5) Condiciones para un contrato de futuros al realizarse la compensación por diferencias.

- **a)** Sea F_t que denota el precio del futuro al tiempo t con fecha de vencimiento T, entonces al final de la vida del documento se intercambiará una unidad del activo subyacente por el valor F_T.
- **b)** Si dividimos el intervalo $[0, T]$ en n partes de longitud h tal que $t_k = kh$ con $k = 1, 2, ..., n$; al tiempo t_k la parte que tiene una posición larga recibirá la cantidad $F_{t_k} - F_{t_{k-1}}$ siempre que sea positiva, de lo contrario tendrá que pagarla a la parte con posición corta.

F6) Por las condiciones a) y b) del inciso anterior, los precios de entrega efectivos varían en cada t_K y son iguales a los precios de futuros prevalecientes. Entonces, independientemente de las fechas de iniciación de los contratos, el precio de entrega en t_k es el mismo para todos los contratos con la misma fecha de entrega. Esto permite la estandarización de los contratos y por tanto su comercialización en mercados.

F7) En t_k, el precio del futuro para contratos nuevos o anteriores es el mismo. En consecuencia, en cada t_k y después del proceso descrito en el inciso F5b), el valor de todos los contratos de futuros es cero. De aquí se sigue que F_T será igual al precio "*spot*" del activo en ese momento (S_T). Las pérdidas y ganancias entre las partes son ajustadas a lo largo de la vida del contrato.

1.6 Historia de los mercados de opciones

La historia de este mercado se remonta al siglo XVII cuando en la región que actualmente ocupa Holanda ya se comerciaban opciones sobre tulipanes, los cuales se utilizaban como bienes especulativos y cuyos precios llegaron a ubicarse hasta en mil veces por encima de su precio real. Los productores vendieron contratos que permitían a los compradores obtener ganancias si los precios de los tulipanes disminuian. Sin embargo. cuando esto sucedió los productores se fueron a la banca rota sin cumplir con sus obligaciones, dando a las opciones una mala imagen.

Los mercados de opciones se han desarrollado simultáneamente a los mercados de futuros y, del mismo modo, nacen como consecuencia de la necesidad de superar problemas circunstanciales que ya se han comentado. Así pues, los mercados de opciones comparten las mismas características que en los mercados de futuros: el sistema de negociación y la estandarización de los contratos y la cámara de compensación como garante del buen fin de las operaciones.

Desde la década de los 70, y en mayor medida a partir de los derrumbes bursátiles de 1987, los mercados financieros internacionales visualizaron la necesidad de protegerse contra el fenómeno de la volatilidad. Así fue como comenzó a generalizarse el uso de los instrumentos derivados, entre los que sobresalen las opciones debido a que se caracterizan por desempeñarse como mecanismos de transferencia de riesgo, así como por permitir al inversionista ampliar su gama de combinaciones riesgo/rendimiento, al tiempo que le ofrecen altos niveles de apalancamiento (*leverage*) [13] con un capital relativamente pequeño.

En lo que se refiere a Europa, desde 1978 se establecieron el *London Trade Options Market* y el *European Options Exchange* de Amsterdam, todos los países europeos desde entonces, se han ido dotando de mercados.

En el caso de México, existe el antecedente de ciertas operaciones en el mercado de valores, como fue el caso de las operaciones a plazo y futuros sobre acciones y tesobonos entre 1983 y 1987; año en que fueron suspendidas por baja operatividad, consideraciones fiscales y otras.

La crisis bursátil de 1987 fue superada hacia 1990, tras la apertura del mercado a la inversión extranjera de cartera. En el presente se cotizan 11 opciones mexicanas y sobre un índice accionario en el CBOE (*Chicago Board Options Exchange*) y otras bolsas de EUA; además de warrants en Luxemburgo, París, Londres y Alemania.

Como ejemplo de su importancia, en 1994 las opciones sobre las acciones de Telmex fueron las más negociadas en el CBOE, con más de 8 millones de contratos.

[13]Este término es usado para describir el nivel de endeudamiento de una empresa.

1.7 Contratos de opciones

Es otro tipo de contrato donde se establece una negociación a plazo: es decir, se acuerda comprar o vender un activo a un cierto precio, en un tiempo determinado, pero a diferencia de los contratos forward o de futuros:

1. *La opción tipo call da al poseedor el derecho mas no la obligación de comprar el activo subyacente.*

2. *La opción tipo put da al poseedor el derecho mas no la obligación de vender el activo subyacente en un cierto tiempo.*

El precio establecido en el contrato es conocido como precio de ejercicio (*strike*); la fecha convenida se conoce como fecha de expiración, fecha de ejercicio o vencimiento. El precio del subyacente al día llamado *spot* en futuros, normalmente se le conoce como precio *stock* en el caso de las opciones.

Una opción europea puede ser ejercida sólo en la fecha de ejercicio; una opción americana puede ser ejercida en cualquier fecha en o antes de la expiración del contrato. Las opciones que no son vainilla; es decir, europeas o americanas son conocidas como opciones exóticas.

El no tener la obligación de ejercer distingue a las opciones de los contratos de futuros; el que posea un contrato de futuros con posición larga se ha comprometido a comprar un activo en un tiempo posterior pagando el precio convenido; en cambio, el que posea una opción *call* no tiene que comprar el activo al vencimiento si no lo desea. Otra diferencia es que no cuesta nada entrar a un contrato de futuros (excepto por los requerimientos marginales); por el contrario, un inversionista debe pagar una prima por un contrato de opciones.

Existen cuatro tipos de participantes en los mercados de opciones:

1. Posición larga con opciones *call*.

2. Posición larga con opciones *put*.

3. Posición corta con opciones *call*.

4. Posición corta con opciones *put*.

El que suscribe la opción (posición corta) recibe dinero, pero con obligaciones potenciales para después.

Ejemplo 1.4 El día de hoy, primero de abril, un inversionista da instruciones a su corredor para comprar una opción *call* sobre acciones de CEMEX a un precio de ejercicio de \$50 y con vencimiento en octubre. El corredor pasa las instrucciones a otra persona que se encuentra en el piso de remates, el cual encuentra a alguien que desea vender un contrato *call* con las características deseadas. Supóngase que la prima a pagar es de \$6 y, se establece comprar o vender 100 acciones por contrato. Por lo tanto, un inversionista debe pagar \$600 para poseer el derecho de comprar las acciones por medio de su agente de bolsa. El precio de cada acción en este ejemplo podría ser de \$52 en el momento de hacer el trato, (precio *stock*).

Su contraparte ha recibido \$600 y ha acordado vender 100 acciones CEMEX a \$50 cada una si el inversionista escoge ejercer la opción.

Terminología.

De acuerdo al flujo de dinero que tenga el poseedor de una opción al momento de ejercer su derecho, se tienen tres situaciones:

a) Cuando el flujo es positivo, es decir, si se tiene una ganancia se define a la opción como *in the money*.

b) Cuando el flujo es cero, es decir, no existen pérdidas ni ganancias. En este caso se dice que la opción es *at the money*.

c) Cuando el flujo es negativo, es decir, hay una pérdida. Se define entonces a la opción como *out the money*.

Si S denota el precio actual del subyacente (*spot* o *stock*) y X el precio de ejercicio (*strike*), una opción tipo *call* es *in the money* cuando $S > X$, *at the money* cuando $S = X$ y *out the money* en el caso $S < X$. Para el caso de una opcion *put* se tienen los casos a), b) y c) cuando $S < X$, $S = X$ y $S > X$ respectivamente.

El valor intrínseco de una opción es definido como el máximo entre el valor que se podría tener si fuese ejercida inmediatamente y cero. Para una opción *call*, el valor intrínseco es el $\max(S - X, 0)$; para una opción *put* es el $\max(X - S, 0)$.

Una opción *call* americana *in the money*, C', debe valer por lo menos tanto como $max(S - X, 0)$, si el poseedor puede realizar el valor intrínseco ejercerciendo inmediatamente. A menudo, es mejor para el poseedor de C' esperar en vez de ejercer inmediatamente; en tal caso se dice que la opción tiene "valor de tiempo" (*time value*).

1.8 Especificaciones en los contratos de opciones

Al igual que en los contratos de futuros, se debe establecer la naturaleza exacta del acuerdo, a continuación se presentan dos de ellas que varían un poco de los futuros, las demás características ya se han mencionado en la sección 1.3.

1. Precio de ejercicio (*strike*). La bolsa escoge el precio de ejercicio al cual las opciones pueden suscribirse. La regla usual es calcular series de precios alrededor del precio *stock* espaciados en $2.5 si tal precio es menor a $25; en $5.00 cuando el precio *stock* sea mayor a $25.00 y menor a $200.00; y de $10.00 cuando sea mayor a $200. Por ejemplo, supóngase que el precio *stock* del subyacente es $32.00 cuando inicia la vida de la opción, entonces las opciones tipo *call* y *put* podrían ser ofrecidas a precios de ejercicio de $30.00 y $35.00. Esto siempre y cuando se utilicen activos que no pagen dividendos.

2. Límites en las posiciones tomadas en el mercado. Los cuales definen el número máximo de contratos de opciones que un participante puede poseer. Las posiciones largas en *calls* y las posiciones cortas en *puts* son consideradas como pertenecientes a un mismo grupo en el mercado. Mientras que en otro grupo se encuentran las posiciones cortas en *calls* y las posiciones largas en *puts*.

Opciones sobre futuros.

El activo subyacente es un contrato de futuros, el cual madura poco después de la fecha de expiración de la opción.

Cuando el poseedor de una opción *call* ejerce, adquiere del que suscribe el contrato una posición larga en el contrato de futuros sobre el subyacente más una cantidad igual a la diferencia del precio de futuros sobre el precio de ejercicio (*strike*). Mientras que, cuando el poseedor de una opción *put* ejerce, adquiere una posición corta en el contrato de futuros más una cantidad igual a la diferencia del precio de ejercicio sobre el precio del futuro.

En ambos casos el valor de los contratos de futuros es cero y pueden ser cancelados inmediatamente tomando una posición contraria en el mercado. El pago o liquidación (*payoff*) de una opción sobre futuros es la misma que en una opción sobre otro activo subyacente, y solo se sustituye el precio *stock* (valor actual del bien o activo) con el precio del futuro.

A continuación se describe una opción sobre futuros de petróleo Brent:

Ejemplo 1.5

a) Flexibilidad: El poseedor de una opción tiene el derecho, mas no la obligación de comprar o vender contratos de futuros sobre petróleo Brent a un precio especificado antes o en la fecha señalada.

b) No hay restricción en el tamaño de la posición tomada.

c) Fecha de emisión: 11 de mayo de 1989.

d) Unidad de transacción: Un contrato de futuros sobre petróleo Brent.

e) Cotización: El precio del contrato es en dólares y centavos por barril.

f) Incrementos en el precio *strike*: Múltiplos de 50 centavos por barril.

g) Fluctuación mínima en el precio: Un centavo por barril.

h) Fluctuación máxima en el precio diario: No hay límites.

i) Periodo de entrega: Es sobre el curso del mes después de la fecha de expiración.

j) Límites en la posición tomada: No hay límites.

1.9 Dinámica de los mercados de opciones

El comercio de opciones es en varios aspectos muy similar al comercio de contratos de futuros. Una bolsa o mercado de opciones tiene un número de miembros (individuos o firmas) los cuales realizan las transacciones. Algunas otras bolsas cuentan con corredores (*market marker*) que hacen las ofertas a viva voz, (actualmente se utilizan sistemas computarizados) para la compra o venta de contratos. Existen otro tipo de corredores (*floor broker*) quienes ejecutan órdenes del público en general. Cuando un inversionista contacta a su agente para comprar o vender una opción, él se encarga de comunicar la orden al corredor que se encuentra en el piso de remates de la bolsa, en donde estará negociando con otros corredores de piso pertenecientes a otras firmas.

Con respecto a los márgenes, la cantidad inicial es usualmente 50% del valor de una unidad de subyacente, mientras que el margen de mantenimiento es regularmente del 25% de dicho valor.

La cuenta del inversionista opera de la misma manera que la de un inversionista en contratos de futuros. Cuando son adquiridas opciones *call* o *put*, el precio del contrato debe ser pagado totalmente. Cuando un participante suscribe o vende una opción, requiere mantener fondos en su cuenta; esto se debe a la posibilidad de incumplimiento del inversionista si la opción es ejercida.

1.10 Cobertura, especulación y arbitraje

En los mercados de productos derivados existen tres clases de participantes: los que tienen por objeto cubrirse de las alzas o bajas en los precios de algún activo (*hedgers*) y que son principalmente productores y consumidores de productos agroindustriales, los que aprovechan las oportunidades de obtener ganancias sin tomar algún tipo de riesgo (*arbitrageurs*) y los especuladores (*speculators*). Estas tres actividades de los distintos participantes serán desarrolladas en las siguientes secciones.

1.10.1 Cobertura

El término cobertura se utiliza para designar al proceso que involucra tomar cierta posición en contratos de futuros u opciones con el fin de reducir o eliminar el riesgo de pérdida financiera a causa de los cambios de los precios de algún activo subyacente.

Normalmente los productores y consumidores están expuestos a este tipo de pérdidas, ya que tienen que adquirir o vender productos en el mercado de físicos [14] de manera instantanea o en fechas posteriores, o simplemente tienen que cumplir con sus obligaciones contractuales o con sus espectativas financieras.

Cobertura utilizando contratos de futuros.

Si un productor tiene pensado vender en una fecha futura sus productos en el mercado de físicos, tendrá que tomar una posición corta en contratos para protegerse así de una posible baja en los precios, a este procedimiento se le conoce como estrategia corta (*short hedge*); de lo contrario, si tiene que comprar algún activo, tendrá que tomar una posicion larga y así se protegerá ante incrementos en los precios del activo, a esta táctica se le conoce como estrategia larga (*long hedge*).

Ejemplo 1.6 Supóngase que es junio y un productor agrícola espera cosechar por lo menos 1,000 toneladas de frijol durante septiembre, ha acordado vender su mercancía al precio *spot* de ese mes y teme que el precio se vaya a la baja durante el tiempo de espera. El precio actual por kilogramo de frijol es de \$6.00 y el precio futuro del frijol para septiembre es de \$6.25.

[14] Es decir, productos energéticos (petróleo crudo, aceite, gas, gasolina, etc.), agrícolas (arroz, frijol, trigo, café, jugo de naranja, azúcar, etc.), ganaderos (res en pie, cerdo en pie) y metales (oro, plata, platino, paladio, cobre, etc.).

Por lo tanto, el productor debe tomar una posición corta en 200 contratos de futuros, cada uno de 5 toneladas, y días antes de que su contrato madure cambiar de posición en los contratos de futuros.

Llegada la fecha de liquidación se tiene que el precio *spot* es de $5.75; por lo tanto, obtiene una ganancia de $0.50 por kilogramo en el mercado de futuros y recibe $5.75 por kilogramo bajo el contrato de venta, lo que da un total de $6.25.

Sin embargo, si el precio *spot* hubiera estado en $6.50, tendría una pérdida de $0.25 por kilogramo en el mercado de futuros y recibiría $6.50 bajo el contrato de venta, lo cual daría un total de $6.25.

¿Qué hubiese sucedido si el productor toma una posición contraria (posición larga) en los contratos de futuros?

Para el caso de que el precio *spot* sea de $5.75, el productor tendrá una pérdida de $0.50 en contratos de futuros y por lo tanto sólo recibirá $5.25 por kilogramo.

Si el precio *spot* se encuentra en los $6.50 por kilogramo, tendrá una ganancia de $0.25 de acuerdo a la posición tomada y recibirá en total la cantidad de $6.75 por kilogramo.

Se puede concluir para este caso que si se tienen posiciones paralelas en ambos contratos, el productor "asegura" el precio de venta en una fecha posterior (a $6.25 por kilogramo de frijol) "independientemente" de los cambios en el precio del activo. Sin embargo, si se toman posiciones contrarias, podría obtener más dinero que con la estrategia anterior, pero también se corre el riesgo de recibir mucho menos; es decir, que no se elimina totalmente el riesgo de pérdida. Si el propósito es proteger al productor de las consecuencias que traigan los movimientos de los precios del subyacente, entonces la segunda estrategia no es la adecuada.

Cobertura utilizando contratos de opciones.

Como ya se había mencionado, el valor de una opción *call* europea al tiempo de ejercicio está dado por $max(S_T - X, 0)$; si la opción es ejercida, el emisor de la misma debe de entregar el subyacente a precio X; esto significa que debe generar una cantidad $max(S_T - X, 0)$ a la fecha de ejercicio.

Al momento de suscribir la opción ($t = 0$), S_T es desconocido y el emisor solamente recibe la prima o precio del *call*, entonces la pregunta sería ¿cómo generar tal cantidad?, este es el problema de *cobertura* para la opción. Una segunda pregunta que también se deduce es ¿cuánto se debe pagar por el contrato?, este es el problema de *valuar* la opción.

Ambos problemas interactuan de tal forma que el concepto de estrategia de cobertura es introducido a fin de permitir la solución al problema de valuación de la opción: ¿cuál es el precio justo a pagar en $t = 0$ por una opción?; es decir que la prima debe ser una cantidad de dinero que se necesita al tiempo $t = 0$ para replicar el pago de la opción al tiempo T, (en el caso de un *call* europeo es el $max(S_T - X, 0)$).

Las preguntas anteriores se responderán en los capítulos 3 y 4.

De acuerdo a sus necesidades, el participante en el mercado decidirá qué posición tomar en los contratos de opciones para cubrirse del riesgo de pérdida ante los cambios en el precio del subyacente.

Ejemplo 1.7 Considérese a una persona que en agosto posee 500 acciones de una compañía. El precio actual de cada acción es de \$52.00. De acuerdo a las proyecciones del negociante, el precio de las acciones puede bajar en los siguientes dos meses, y por tanto desea protegerse de ese riesgo; para esto podría comprar opciones *put* americanas para vender 500 acciones a un precio de \$50.00. Cada contrato cotizado en el mercado es por 100 acciones, en consecuencia el inversionista debe adquirir cinco contratos. Si el precio de la opción es de \$4.00, esto implica que el costo de la estrategia es por: \$4 x 100 x 5 = \$2,000.00, lo cual garantiza que las acciones puedan ser vendidas en \$50 durante la vida de la opción.

Si el precio en el mercado cae por debajo de los \$50.00, las opciones pueden ser ejercidas, así \$25,000.00 será lo que reciba el poseedor. Cuando el costo de las opciones es tomada en cuenta, solo recibirá \$23,000.00. Si el precio en el mercado se mantiene por arriba de los \$50.00, las opciones no son ejercidas y, en este caso el poseedor mantendrá su cuenta por encima de los \$25,000.00 (o de los \$23,000.00 si se toma en cuenta el gasto hecho en la adquisición de las opciones).

La cobertura con opciones implica una posición (A) en una opción y una posición (B) en el subyacente, de manera que A compense cualquier cambio desfavorable del precio de B. La cobertura con opciones no sólo se plantea como compensación, también busca el crear una barrera (*floor*) para el valor de una posición. Por ejemplo, las opciones *put out the money* son un seguro contra una fuerte caída de precios para el tenedor de una cartera de activos. Una estrategia de cobertura también podría ser comprar el subyacente y tomar una posición larga en un contrato *put*, lo que permite disponer de unos beneficios potenciales ilimitados cuando el precio del subyacente sube y, limitar las pérdidas cuando el precio del subyacente cae.

En los ejemplos **1.6** y **1.7**, la cantidad de unidades que se utilizan en los contratos (las que se cubren) es igual a la cantidad de unidades que se tienen o se poseen, sin embargo qué garantiza que el hecho de cubrir todo es lo óptimo para minimizar el riesgo de pérdida. Tal vez convendría no inventir todo el dinero en los derivados, sino sólo una parte y el sobrante en el propio activo subyacente. En el siguiente capítulo se discutirá esta cuestión para el caso de los futuros y en el capítulo 4 para el caso de opciones.

1.10.2 Especulación

La especulación es un proceso dentro de los mercados en donde el objetivo es obtener ganancias debido a las diferencias estimadas en los precios del activo, basándose en las posiciones tomadas según la tendencia esperada.

El especulador pretende maximizar su beneficio en el menor tiempo posible, minimizando la aportación de fondos propios. Si se tiene cierta posción en el mercado de físicos y no se ha establecido una estrategis de cobertura, también se está especulando. Aquí se estaría hablando de especulación pasiva o estática, a diferencia de la anteriormente enunciada, que se refiere a especulación activa o dinámica. Debe considerarse que la contrapartida negociadora de un especulador es, en numerosas ocasiones, alguien que realiza una operación de cobertura.

1.10.3 Arbitraje

Es una operación de oportunidad en los mercados en donde se obtiene un rendimiento seguro, sin tomar riesgo y sin hacer algún tipo de inversión inicial.

Sus características principales son:

"Este tipo de operaciones en el mercado se distinguen por la posibilidad de ganar dinero sin tomar riesgo aprovechando contradicciones entre distintos precios y variables observables en el mercado. Las oportunidades de arbitraje pueden surgir debido a diferencias entre mercados sobre distintos instrumentos, o también debido a circunstancias geográficas, como por ejemplo una acción que cotice en dos bolsas de valores distintas a dos precios distintos, o dos mercados distintos para una misma materia prima, donde la diferencia de precios se debe a los costos de transporte. Es posible identificar arbitrajes basados en el valor implícito de otras variables financieras, como por ejemplo volatilidad en los precios. [2].

"El mercado es por lo general un sistema eficiente, por lo que el precio de los futuros no suele separarse del precio *spot* (precio actual); si se separase mucho, las actividades de arbitraje de los participantes más alerta tenderían a normalizar rápidamente los precios. [3].

Es la imperfección o ineficiencia de los mercados la que genera oportunidades de arbitraje. Sin embargo, a través de dichas operaciones los precios tienden a la eficiencia.

Racionalidad y eficiencia.

Antes de definir el término eficiencia, sea la notación $a \preceq b$ que define la preferencia del participante sobre el resultado b por lo menos tanto como el a. La notación $a \prec b$ significa que el participante prefiere estrictamente a b con respecto a a. Las propiedades que deberían de satisfacer las preferencias de individuos racionales sobre un conjunto de resultados son las siguientes, [4]:

- $a \preceq b$ o $b \preceq a$ totalidad.
- $a \preceq b$ y $b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$ transitividad.

para toda a, b y c elementos de un conjunto de resultados como consecuencia de la nueva información procedente del mercado.

El supuesto de transitividad es el único que es un requerimiento genuino de **racionalidad**. El requerimiento de totalidad solamente asegura que el individuo siempre será capaz de expresar sus preferencias entre dos resultados.

El término **eficiencia** significa que el mercado responde "racionalmente" a la nueva información, [3]. Esto tiene las siguientes implicaciones:

1. Las correcciones en los precios son instantáneas y el mercado está siempre en 'equilibrio', los precios son 'justos' y no dan lugar a oportunidades de arbitraje; es decir, no permiten ganancias por diferencias en los precios.

2. Los *participantes en los mercados son uniformes en sus interpretaciones* acerca de la información obtenida e inmediatamente corrigen sus desiciones de acuerdo a la misma y conforme ésta va llegando.

3. Los participantes son homogeneos en sus objetivos; sus acciones son "colectivamente racionales".

1.11 Propiedades básicas de los precios de opciones

El objetivo de esta sección es deducir un conjunto de restricciones y/o propiedades sobre las fórmulas de valuación de opciones desde el punto de vista de las preferencias de los inversionistas, [5]. Se ha dejado este tema hasta el final de este capítulo, ya que se utilizarán términos definidos en la sección anterior.

Notación.

$C(S, t, X)$ Valor de un *call* americano.

$c(S, t, X)$ Valor de un *call* europeo.

$P(S, t, X)$ Valor de un *put* americano.

$p(S, t, X)$ Valor de un *put* europeo.

S_t Precio del subyacente al tiempo t, ($t \in [0, T]$).

X Precio de ejercicio.

T Tiempo de expiración del contrato, periodo de vida.

Propiedad 1

De la definición de contratos de opciones:

$$C(S, t, X) \geq 0, \qquad c(S, t, X) \geq 0.$$
$$P(S, t, X) \geq 0, \qquad p(S, t, X) \geq 0.$$

donde $t \in [0, T]$.

Propiedad 2

Al tiempo de expiración un *call* americano vale lo mismo que un *call* europeo:

$$C(S, T, X) = c(S, T, X) = max(S - X, 0).$$

Lo mismo sucede con los contratos *put*:

$$P(S, T, X) = p(S, T, X) = max(X - S, 0).$$

Definición

Cuando el rendimiento de un contrato o portafolio A [15] *en una fecha determinada sobrepasa el rendimiento de un portafolio B para algunos estados del mercado*

[15] Se le llama portafolio de inversión a un conjunto de valores (bonos, acciones, futuros, opciones, etc.) que forma parte del activo de un individuo o de una empresa, y que puede generar rendimientos.

y es por lo menos igual en todos los posibles estados del mercado, se dice que A es dominante sobre B.

"... En mercados perfectos donde no haya costos de transacción y exista la posibilidad de pedir prestado y vender en corto sin restricción, la existencia de un portafolio dominante podría ser equivalente a la existencia de una situación de arbitraje. Sin embargo, es posible para portafolios dominados existir sin arbitraje en mercados imperfectos; si se asume algo como mercados racionalmente simétricos además de que los inversionistas prefieren más riqueza que menos, entonces cualquier participante del mercado inclinado a adquirir el portafolio B podría preferir el A.

Supuesto A

"... Una condición necesaria para una teoría racional de valuación de opciones es que la opción a ser valuada no sea un valor dominado ni dominante.

Esta última condición a la que hace referencia Merton es un supuesto muy importante en el desarrollo de una teoría racional de opciones, ya que se descarta la existencia de posibilidades de arbitraje.

Propiedad 3

Un contrato que otorga más derechos que otro y por tanto la posibilidad de mayores rendimientos posee un valor mayor.

$$C(S,t,X) \geq c(S,t,X).$$

Propiedad 4

Un contrato con más tiempo de vida no puede valer menos que uno de menor vida, ambos sobre el mismo subyacente y con igual precio de ejercicio; si sucediera podría existir una posibilidad de arbitraje. De acuerdo con el supuesto A, para los contratos americanos *call* y *put* se tiene:

$$\frac{\partial C}{\partial T} \geq 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial T} \geq 0.$$

Esta condición no necesariamente se cumple en el caso de opciones europeas, ya que sólo se ejerce en T.

Propiedad 5

Sean dos contratos *call*, americanos o europeos, con las mismas fechas de expiración y sobre el mismo subyacente pero con distintos precios de ejercicio, entonces para $X_1 < X_2$:

$$C(S,t,X_1) \geq C(S,t,X_2), \qquad c(S,t,X_1) \geq c(S,t,X_2).$$

Lo cual quiere decir que las opciones tipo *call* adquieren menos valor conforme el precio de ejercicio aumenta, esto es porque difícilmente se ejerce la opción con precio de ejercicio muy alto.

$$\frac{\partial c}{\partial X}, \quad \frac{\partial C}{\partial X} \leq 0.$$

Para el caso de los contratos *put*, estos se vuelven más valiosos cuando el precio X se incrementa, esto es por la conveniencia de vender a precios altos.

$$\frac{\partial p}{\partial X}, \quad \frac{\partial P}{\partial X} \geq 0.$$

Propiedad 6

Las opciones *call* adquieren más valor conforme S aumenta, debido a que es más conveniente ejercer a un precio de ejercicio menor al precio de mercado.

$$\frac{\partial C}{\partial S} > 0.$$

Lo contrario sucede para las opciones *put*, ya que no es conveniente vender a un precio menor que el de mercado.

$$\frac{\partial P}{\partial S} < 0.$$

Propiedad 7 Límite superior para un *call*.

El valor del subyacente, S, es equivalente al valor de un *call* americano perpetuo $(t \to \infty)$ con precio de ejercicio cero. Se afirma entonces que:

$$S \geq C(S,t,X).$$

Demostración:

Por la propiedad 4: $\quad C(S,t,X) \leq C(S,\infty,X), \quad t < \infty.$

Por la propiedad 5: $\quad C(S,t,X_2) \leq C(S,t,X_1), \quad X_1 < X_2.$

$\Rightarrow \quad C(S,t,X) \leq C(S,t,0), \quad 0 < X$

$$\Rightarrow \quad C(S,t,X) \leq C(S,\infty,X) \leq C(S,\infty,0) = S. \dagger$$

Propiedad 8

Nunca se ejerce el derecho de adquirir un activo a precio X lo que en el mercado tiene valor cero ($S = 0$). Esto se puede demostrar utilizando las propiedades 1 y 7.

$$C(0,t,X) = c(0,t,X) = 0.$$

Propiedad 9

Sea $D(t)$ el precio de un préstamo o bono con tasa de descuento de bajo riesgo, (en términos de incumplimiento), el cual paga una unidad monetaria al término de su vida. Si se asume que las tasas de interés actuales y futuras son positivas, entonces:

$$D(t_0) < D(t_1) < ... < D(t_{n-1} < D(t_n = T) = 1$$

para $t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n$

Propiedad 10 Límite inferior para un *call*.

Si X es el precio de ejercicio de un *call* europeo sobre un activo que no paga dividendos, entonces:

$$c(S,t,X) \geq max[S - XD(t'), 0],$$

donde $t' = T - t$. Para mostrar que esta propiedad es cierta, se construyen los siguientes portafolios A y B:

A : Adquirir un *call* europeo con valor c(S,t,X) más una cantidad X de bonos a precio $D(t')$, (es decir $XD(t')$).

B : Adquirir una unidad del activo subyacente a precio S.

En la fecha de expiración T, el rendimiento de A es

$$\begin{aligned} max(S_T - X, 0) + XD(T) &= \begin{cases} S_T & \text{si } S_T > X \\ X & \text{si } S_T < X \end{cases} = max(S_T, X) \\ &\geq S_T \quad \text{valor o rendimiento de } B. \end{aligned}$$

Esto implica que A dominará a B, pero por el supuesto A, $c + XD(t') \geq S$ y por la propiedad 1, $c(S,T,X) \geq 0$, se tiene que $c \geq max[S - XD(t'), 0]$. †

Como $C(S,t,X) \geq c(S,t,X)$ la propiedad 10 se puede aplicar al valor de un *call* americano con precio de ejercicio fijo. De hecho, como $S - XD(t') > S - X$ para $t' > 0$ entonces

$$C(S,t,X) \geq max[S - X, 0].$$

Esta propiedad establece una cota inferior para precios *call* racionales. En la práctica, casi todas las opciones son americanas, mientras que es siempre más fácil resolver analíticamente para el valor de una opción europea.

Propiedad 11 Límite superior para un *put*.

Si X es el precio de ejercicio de un *put* sobre un activo que no paga dividendos, entonces:

$$p(S,t,X), \quad P(S,t,X) \leq X.$$

En el caso de opciones *put* europeas: $p \leq XD(t')$ [16]. Si lo anterior no fuera cierto, podría haber una ganancia libre de riesgo al suscribir la opción e invertir tal cantidad a una tasa de interés libre de riesgo.

Propiedad 12 Límite inferior para un *put*.

Si X es el precio de ejercicio de un *put* europeo sobre un activo que no paga dividendos, entonces:

$$max[XD(t') - S, 0] \leq p.$$

Para mostrar que esta propiedad es cierta se construyen dos portafolios, uno donde se adquiera un *put* europeo con valor $p(S,t,X)$ más una unidad del subyacente a precio S y el otro donde se adquiera una cantidad X de bonos a precio $D(t')$ y se procede a hacer un análisis similar al de la propiedad 10.

Propiedad 13 Ejercer un *call* antes de la fecha de expiración.

Si $C(S,t,X)$ es el valor de un *call* americano sobre un activo subyacente que no ofrece dividendos, entonces la opción no será ejercida antes de la fecha de expiración y por tanto tendrá el mismo valor que un *call* europeo.

Se tiene que $C \geq S - XD(t') > S - X$ para $t' > 0$; esto quiere decir que si se ejerce la opción antes de la fecha de expiración se tendría un flujo de dinero negativo, ya que las ganancias $(S - X)$ no compensan la inversión en el contrato $C(S,t,X)$.

[16] Hasta ahora no se ha mencionado como es la función $D(t')$, sin embargo se puede decir que si la cantidad M es pagada hasta la fecha de expiración T, entonces $MD(t')$ es justamente el valor presente de tal pago.

Por lo tanto, el *call* americano siempre vale más "vivo" que cuando "expira".

Propiedad 14

Si $C(S,t,X)$ es el valor de un *call* americano sobre un activo subyacente que no ofrece dividendos, entonces el valor de un *call* perpetuo es igual al valor del subyacente.

Demostración:

Por la propiedad 9: $C(S,t,X) \geq max[S - XD(t')), 0]$.

Si $T \to \infty$ entonces $D(t') \to 0$ y por lo tanto $C(S,t',X) \geq S$.

Por la propiedad 6: $S \geq C(S,\infty,X)$, se puede concluir que $C(S,t,X,) = S$, cuando $T \to \infty$. †

Samuelson (1965), Samuelson y Merton (1969) y Black Scholes (1973) han mostrado que el precio de un *call* perpetuo iguala el precio del subyacente para sus modelos particulares. La propiedad 14 demuestra que esto sucede independientemente de cualquier distribución del precio del subyacente o suposiciones sobre aversión al riesgo.

Propiedad 15 Paridad *put-call*.

Desde que la opción confiere a su poseedor un derecho mas no una obligación, ésta tiene un valor que se debe pagar en el momento de apertura del contrato, (el que suscribe la opción debe ser recompensado por la obligación que ha asumido). Pero, ?'cuanto se debe pagar por este derecho?.

En el capítulo cuatro se encontrará el valor de una opción con base en la construcción de un portafolio libre de riesgo.

A continuación se encontrará el valor de un portafolio de inversión que genera cierto rendimiento a pesar de estar compuesto de elementos con riesgo. El recurso de la estrategia utilizada para la construcción del portafolio radica en su habilidad para redirigir el riesgo.

Sea T el tiempo de ejercicio y considérese el siguiente portafolio:

Adquirir el activo subyacente a precio S, comprar una opción *put* y vender una opción *call*.

El valor del portafolio es $S + p - c$.

El pago o rendimiento de este portafolio en T es:

$$S + max(X - S, 0) - max(S - X, 0) = \begin{cases} X & \text{si } S \leq X \\ X & \text{si } S \geq X \end{cases}$$

Esto quiere decir que se ha eliminado la incertidumbre y la pregunta sería: ¿cuánto se debe pagar por un portafolio que garantiza X al tiempo T?

La respuesta es $Xe^{-r(T-t)}$, donde r es una tasa de interés constante libre de riesgo. Esto iguala el rendimiento del portafolio con el rendimiento de un depósito bancario, si éste no fuera el caso entonces podría haber una oportunidad de arbitraje.

Por lo tanto $\quad S + p - c = Xe^{-r(T-t)} \quad \Rightarrow \quad c + Xe^{-r(T-t)} = p + S.$

Esta relación muestra que el valor de un *call* europeo puede ser deducido a partir del valor de un *put* europeo y viceversa, ambos contratos sobre el mismo subyacente, con igual precio de ejercicio y fechas de expiración.

Propiedad 16 Ejercer un *put* antes de la fecha de expiración.

Como una opción *put* puede ser ejercida en cualquier momento, su precio debe satisfacer la condición

$$P(S, t. X) \geq max(X - S, 0) \tag{1.1}$$

De acuerdo con el supuesto A, se tiene que $P(S, t, X) \geq p(S, t, X)$ donde la desigualdad estricta se mantiene si existe una posibilidad de ejercer prematuramente.

Por otra parte y a diferencia de las opciones europeas, el valor de una opción americana es siempre una función no decreciente de su tiempo de expiración, además se puede demostrar que el valor de un *put* europeo perpetuo tiene valor cero, $p(S, \infty, X) = 0$, (consecuencia de las propiedades 1 y 11); entonces cabe la posibilidad de que el valor de un *put* americano perpetuo sea cero ($P \geq p \geq 0$), lo cual implicaría que todos los contratos *put* americanos tengan valor cero. Este resultado absurdo viola la condición (1.1) para $S \leq X$.

Para tener más claro este punto, considérese el siguiente portafolio A: $C - S + XD(t')$; es decir, adquirir un *call* americano, vender una unidad del subyacente y prestar la cantidad XD(t'). El valor de A en la fecha de expiración T es:

$$max(S - X. 0) - S + X = \begin{cases} X - S & \text{si } S \leq X \\ 0 & \text{si } S > X \end{cases}$$

el cual replica el valor de un *put* europeo y por consiguiente A debería ser por lo menos tan valioso que el *put*. Sin embargo, al tiempo $t < T$:
$C(S, t, X) - S + XD(t') =$

$$C(S, t, X) + (X - S) - X[1 - D(t')] \quad < \quad X - S \quad < \quad P(S, t, X),$$

siempre que $C < X[1 - D(t')]$, lo cual es posible para S suficientemente pequeña ($S < X[1 - D(t')]$).

Por lo tanto, se puede establecer lo siguiente:

Si para algún $t < T$, hay una posibilidad de que $C < X[1 - D(t')]$, entonces existe una posibilidad de que un *put* americano ($P(S, t, X)$) sea ejercido prematuramente y el valor de P será estrictamente mayor al valor de su contraparte europea.

Capítulo 2

Estrategias de cobertura utilizando futuros

En este capítulo se desarrollan aspectos teóricos sobre la tasa de interés continua con el fin de calcular los precios *forward* y de futuros en un tiempo determinado, así como sus aplicaciones en el problema de cobertura.

2.1 Determinación de precios de futuros y *forward*

Antes de presentar las fórmulas para encontrar los precios *forward* y de futuros, se introduce el tema de tasas de interés y algunos supuestos económicos.

Considérese una cantidad S invertida m años a una tasa de interés efectiva anual r_1, entonces al final del periodo tendremos un monto de $S(1+r_1)^m$.

Si r_2 es la tasa nominal de interés anual convertible (o se compone) n veces al año, al final de m años se habrá acumulado un monto equivalente a $S(1+r_2/n)^{mn}$; es decir, r_2/n representa la tasa efectiva asociada a un intervalo de tiempo de longitud $h = 1/n$ de año.

¿Cuál será la tasa asociada a intervalos de tiempo infinitamente pequeños de año, es decir, si $n \to \infty$, $(h \to 0)$? ¿Cómo se calcularía el monto con una tasa de esta naturaleza?

Sea $F(t)$ el valor acumulado del capital inicial más el rendimiento generado durante el tiempo t. Donde $F(0) = S_0$ es el capital inicial.

La tasa de rendimiento efectiva instantánea se define como:

$$r = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{hF(t)} = \frac{d}{dt} \ln F(t)$$

$$\ln F(t) = r \int dx = rt + c$$

$$F(t) = e^{rt+c} = Ae^{rt}.$$

1. Como $F(0) = A = S_0$ entonces

$$F(t) = S_0 e^{rt}. \tag{2.1}$$

2. Si $t = 1$; es decir, la inversión es por un año, se puede despejar a r de las igualdades siguientes:

$$S_0 e^r = S_0(1 + r_1) = S_0(1 + r_2/n)^n,$$

quedando como:

$$r = \ln(1 + r_1) = n \ln(1 + r_2/n).$$

Hasta aquí, se ha utilizado la tasa de interés r como constante, proveniente de una tasa de interés compuesta n veces al año constante, pero si se tiene el caso en que fuese una función conocida del tiempo $r(t)$, entonces la ecuación (2.1) puede ser modificada de la manera siguiente:

$$F(t) = S_0 e^{\int_0^t r(s)ds}. \tag{2.2}$$

Para estimar los precios *forward* y de futuros se asumen los siguientes **supuestos**:

(A1) No hay costos de transacción.

(A2) Todas las ganancias están sujetas a los mismos impuestos.

(A3) Se permite el *short selling* [1]. Los participantes en el mercado pueden pedir dinero prestado a una tasa de interés libre de riesgo, así como otorgar préstamos.

(A4) Se descarta la posibilidad de oportunidades de arbitraje.

[1] Es una estrategia donde existe la venta de activos que no se poseen.

Con respecto al supuesto (A4), la realidad es que cualquier participante en el mercado puede y de hecho está preparado para aprovechar una oportunidad de arbitraje cuando ésta se presenta, lo cual implica que dicha oportunidad desaparecerá tan pronto como aparezca.

Notación.

S_t Precio del activo subyacente en el tiempo $t \in [0, T]$.

X Precio de entrega acordado.

F Precio del futuro (*forward*).

T Tiempo de madurez del contrato.

r Tasa de interés libre de riesgo.

De acuerdo a la definición sobre contratos de futuros, y suponiendo una tasa de interés constante:

$$F_t = S^* e^{r^*(T-t)}, \quad t \in [0, T]. \tag{2.3}$$

donde:

1. $S^* = S$ y $r^* = r$ si el subyacente no ofrece rendimientos.
2. $S^* = S - M$ y $r^* = r$ si es un activo que ofrece cierto rendimiento M^* en T, (M es el valor presente del rendimiento M^*).
3. $S^* = S$ y $r^* = r - q$ si el subyacente ofrece cierto rendimiento expresado como porcentaje de S.

El precio de futuros F al tiempo t es una estimación, de acuerdo con la tasa r, de como se encontrará el precio *spot* al tiempo T (S_T), tomando en cuenta las suposiciones A1-A4. En la notación anterior, hace suponer que el precio del futuro se calcula de la misma forma que el precio *forward*. De hecho, se puede mostrar utilizando un argumento [2] de ausencia arbitrage y teniendo una tasa de interés libre de riesgo constante, que el precio de futuros es igual al precio *forward* para ambos contratos con la misma fecha de madurez.

El procedimiento es comparar dos estrategias de inversión sobre un intervalo de tiempo de n días, una utilizando futuros y otra invirtiendo en contratos *forward*, sobre el mismo activo subyacente.

[2] Esta estrategia fue propuesta por J.C. Cox, J.E. Ingersoll, and S.A. Ross, "The relationship between forward prices and futures prices". *Journal of Financial Economics, 9*, p.p 321-346.

- Primera estrategia.

  Sea F_i el precio del futuro al final del día i, $(0 < i < n)$ y r la tasa libre de riesgo. La estrategia consiste en tomar una posición larga de e^r al final del día 0 (al inicio del contrato), e ir incrementando la posición a e^{ir} al final del día $i-1$.

  Entonces, al principio del día i, el inversionista tiene una posición larga de e^{ir}. La ganancia (posiblemente negativa) al día i es

$$(F_i - F_{i-1})e^{ir}.$$

  Si esta cantidad es invertida diariamente (compuesta) a la tasa r, El monto acumulado en el último día n es

$$(F_i - F_{i-1})e^{ir}e^{(n-i)r} = (F_i - F_{i-1})e^{nr}$$

  Por lo tanto, el valor acumulado total al final del día n de la estrategia es

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i - F_{i-1})e^{nr} = (F_n - F_0)e^{nr} = (S_n - F_0)e^{nr}$$

  Ya que el precio del futuro en el día n es el el precio *spot* S_n.

  Si, además al inicio de la estrategia se invierte la cantidad F_0 a la tasa r libre de riesgo, como puede ser en un banco, entonces al final de la estrategia se tendrá la cantidad

$$F_0e^{nr} + (S_n - F_0)e^{nr} = S_ne^{nr}.$$

  No se requiere inversión para las posiciónes largas en contratos de futuros, solamente la cantidad F_0 invertida en el banco.

- Segunda estrategia.

  Sea G_0 el precio *forward* al final del día 0; si se invierte esta cantidad en bonos o en un banco a una tasa de interés libre de riesgo r por n diıas y, además se toma una posición larga de e^{nr} en contratos *forward*, entonces al final de la estrategia, se garantiza un monto de

$$G_0e^{nr} + (S_n - G_0)e^{nr} = S_ne^{nr}.$$

Las dos estrategias de inversión, donde solamente se requiere una inversión inicial de F_0 para la primera y G_0 para la segunda, tienen un rendimiento de $S_e^{nr}n$ al tiempo $T = n$. De aquí que en ausencia de oportunidades de arbitraje:

$$F_0 = G_0.$$

En otras palabras. el precio de futuro y el precio *forward* es el mismo. El argumento utilizado para mostrar lo anterior puede ser extendido si la tasa de interés es una función conocida del tiempo t.

Cuando las tasas de interés varían impredeciblemente (como en realidad sucede), ambos precios no son iguales, una explicación intuitiva sería el hecho de considerar la situación donde el precio del activo subyacente, S, está correlacionado positivamente con las tasas de interés. Cuando S incrementa, un inversionista que posee posiciones largas en contratos de futuros, obtiene inmediatamnete una ganancia debido al procedimiento de compensación por diferencias diarias. Esta ganancia tenderá a ser invertida a una tasa más alta que el promedio. Similarmente, cuando S decrece, el inversionista tendrá una pérdida inmediata, la cual será financiada a una tasa menor que el promedio. Un participante del mercado que posea un contrato *forward* en lugar de uno de futuros no se verá afectado de esta manera por los movimientos en las tasas. Por tanto, una posición larga en contratos de futuros será más atractiva que tener la misma posición en contratos *forward*.

Valuación de contratos *forward*.

Como el precio *forward* se calcula igual que el precio del futuro, sea entonces F el precio *forward* de algún activo subyacente. Ya se había mencionado que dicho precio es el que podríamos establecer si la transacción fuera hecha hoy, por lo tanto, si estamos en $t = 0$ entonces $F_0 = X$ y $f = 0$; si $t > 0$ tendremos que conocer la diferencia de ambos montos $(F_t - F_0)$ y traerla a valor presente, esto es lo que se le conoce como el valor del documento, el cual está dado por:

$$f = (F - X)e^{-rT}.$$

2.2 Cobertura utilizando futuros

El objetivo es neutralizar el riesgo de pérdida financiera tanto como sea posible tomando una posición en contratos de futuros.

Sea t_1 la fecha en que se firma un contrato, el precio del futuro del activo subyacente es F_1: al llegar la fecha t_2, la ganancia (pérdida) es $F_2 - F_1$, donde F_2 es el precio del futuro del activo subyacente al tiempo t_2, esto es debido a la compensación por diferencias aplicada en el periodo $t_2 - t_1$. En otras palabras, pasado un tiempo existe la posibilidad de vender al precio F_2, si $F_2 > F_1$ entonces tengo una ganancia si se tiene posición corta.

Si una empresa determinada espera vender V unidades de su producto en t_2 a precio *spot* (S_2), entonces ante la posible baja de los precios para esa fecha, se le ocurre tomar una posición corta en futuros sobre V_c unidades de un activo similar y tal vez dejar V_e unidades expuestas, $V = V_c + V_e$, pero se pregunta cuál es el valor óptimo de V_c:

Se define $\hat{h} = V_c/V_e$ como el **radio o razón de cobertura**, que en esencia indica el número de unidades de activo subyacente a cubrir con contratos de futuros, con respecto al tamaño de la cantidad expuesta (V_e).

Al final de la cobertura (en t_2) se tendrá un monto M, recibido por la venta del producto a precio *spot* menos la pérdida (más la ganancia) en los contratos de futuros:

$$\begin{aligned} M &= S_2V_e - (F_2 - F_1)V_c \\ &= S_1V_e + (S_2 - S_1)V_e - (F_2 - F_1)V_c \\ &= S_1V_e + \Delta SV_e - \Delta FV_c \\ &= S_1V_e + V_e(\Delta S - h\Delta F) \end{aligned}$$

donde $\Delta S = S_2 - S_1$ y $\Delta F = F_2 - F_1$. Tales cantidades indican los cambios en el precio *spot* y del futuro respectivamente, durante un periodo de tiempo igual a la vida de la cobertura.

Como S_1 y V_e son conocidos en t_1, para minimizar la varianza del monto M solo hay que considerar $(\Delta S - h\Delta F)$.

Sean μ_S, μ_F, σ_S y σ_F las esperanzas y varianzas de Δ_S y Δ_F respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} Var(\Delta S - h\Delta F) &= E[((\Delta S - \mu_S) - h(\Delta F - \mu_F))^2] \\ &= E[(\Delta S - \mu_S)^2] + h^2E[(\Delta F - \mu_F)^2] - 2hE[(\Delta S - \mu_S)(\Delta F - \mu_F)] \\ &= \sigma_S^2 + h^2\sigma_F^2 - 2h\sigma_{SF} \\ &= \sigma_S^2 + h^2\sigma_F^2 - 2h\rho\sigma_S\sigma_F. \end{aligned}$$

Para localizar el mínimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Var(\Delta S - h\Delta F)}{\partial h} &= 2h\sigma_F^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_F = 0. \\ \iff \hat{h} = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F}. \end{aligned}$$

Como la segunda derivada de $Var(\Delta S - h\Delta F)$ es $2\sigma_F^2 \geq 0$, entonces sí se trata de un mínimo.

Por lo tanto el radio de cobertura se encuentra en función del coeficiente de correlación *rho* y las desviaciones estándares σ_S y σ_F de ΔS y ΔF respectivamente, tales parámetros son estimados a partir de datos históricos.

Un número de intervalos de tiempo que no se traslapen son escogidos y observados para obtener ΔS y ΔF en cada uno; idealmente, el de cada intervalo debe ser igual al tiempo de cobertura aplicado. En la práctica, esto es algunas veces complicado por la falta de datos y es necesario utilizar un periodo de tiempo más pequeño.

Recuérdese que la estimación de los parámetros, dadas las muestras aleatorias $x_1, x_2, ...x_n$; $y_1, y_2, ...y_n$, se obtienen de la siguiente forma:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \quad , \quad n > 1$$

donde $\overline{x} = (1/n)\Sigma_{i=1}^{n}x_i$ es la media de la muestra.

$$\rho = \frac{cov[x,y]}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{(1/n)\Sigma x_i y_i - (1/n^2)\Sigma x_i \Sigma y_i}{\sigma_x\sigma_y}, \quad \sigma_x, \sigma_y > 0.$$

Cobertura estática y cobertura dinámica.

La cobertura estática o *bid-hold*, se refiere a que no se realiza la compensación diaria por diferencias, es decir, no se reajusta el precio de entrega en cada periodo y simplemente se toma en cuenta el contrato que se firmó en el tiempo t_0 hasta su fecha de madurez, entonces F_t va a depender solo del tiempo y de la tasa de interés (si es una función conocida del tiempo). Siendo así, el cálculo de $F_k - F_{k-1}$ se refiere a los cambios en el precio en la vida de un solo contrato. A diferencia de la cobertura *bid-hold*, en la cobertura dinámica se observa el cambio en el precio de un contrato firmado en t_k con respecto a otro firmado en t_{k+1} sobre el mismo subyacente, entonces F_t va a depender además del tiempo y de la tasa de interés, del precio *spot* del activo subyacente; el precio de ejercicio se reajusta en cada periodo.

Capítulo 3

Fundamentos matemáticos

En este capítulo se establecen las principales herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo del presente trabajo, [6], [7], [8].

Antes de iniciar es necesario aclarar que aunque en general los activos financieros suelen seguir procesos de variable discreta, es frecuente tratarlos como si fuesen de variable continua ya que en la práctica los movimientos mínimos permitidos son tan pequeños que es poco significativa la distinción, y además en muchas ocasiones es más conveniente trabajar con variables aleatorias continuas que con discretas.

En cuanto al tiempo, podría decirse que los activos financieros siguen procesos de tiempo discreto, ya que casi todos los mercados cierran al menos una vez al día y durante ese tiempo los precios no pueden cambiar. En la práctica, los precios siguen cambiando aún cuando el mercado está cerrado ya que el precio de apertura no tiene por qué ser el precio de cierre del día anterior, por lo tanto, el proceso estocástico de los activos financieros es un proceso de variable aleatoria continua y tiempo continuo, aunque existen algunas excepciones.

Por lo anterior, los precios de activos financieros son modelados a través de un proceso estocástico de tiempo continuo, con la característica de que sus incrementos siguen una distribución normal y son estadísticamente independientes. A este modelo particular se le conoce como **movimiento browniano** y se llega a él mediante un proceso de límite de una caminata aleatoria, como se verá más adelante.

Posteriormente se deduce el lema de Itō a través del uso de importantes resultados de ecuaciones diferenciales estocásticas, una vez hecho esto se tendrán las herramientas necesarias para llegar a la ecuación de Black-Scholes, la cual podría decirse que es una de las herramientas más importantes para la valuación de activos financieros que en años recientes ha tomado gran fuerza.

3.1 Movimiento browniano

El estudio del movimiento browniano se originó para explicar el fenómeno físico correspondiente al movimiento continuo irregular de una partícula suspendida en un fluido. Durante 1827-1829, Robert Brown, botánico, dió un informe detallado acerca de sus experimentos y descubrimientos sobre tal fenómeno, de ahí su nombre. En 1905 Albert Einstein presentó una teoría cuantitativa correcta del movimiento browniano. La teoría cinética que hay detrás del fenómeno indica que el movimiento de la partícula es una consecuencia del bombardeo continuo de las moléculas en el fluido hacia ella.

Alrededor de 1900. el francés Louis Bachelier en su tesis *Theory of Speculation* fué el primero en proponer un modelo formal matemático del comportamiento de los precios de activos financieros (*warrants*), el cual establece que el movimiento en los precios sigue una 'caminata aleatoria'.

Por lo tanto, no debería de sorprender que el movimiento browniano juegue un papel central en los modelos de valuación de instrumentos financieros derivados. Este proceso de tiempo continuo está fuertemente relacionado con versiones de tiempo discreto de variables aleatorias y se podría tomar la caminata aleatoria de tiempo discreto como un punto de partida en la construcción heurística del movimiento browniano. La meta es usar la caminata aleatoria de tiempo discreto para definir una sucesión de procesos de tiempo continuo la cual converja en el límite a una caminata aleatoria de tiempo continuo análoga.

3.1.1 Caminata aleatoria

Considérese un proceso estocástico $\{X_t, t = 0, 1, \ldots\}$ que toma valores sobre un conjunto de estados finito o numerable, si $X_t = j$, entonces se dice que el proceso se encuentra en el estado j al tiempo t, por ejemplo, si se considera el experimento de lanzar un dado cada minuto durante una hora entonces el proceso estocástico está dado por $\{X_t, \quad t = 1, 2, \ldots, 60\}$ y espacio de estados $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de esta manera $X_{37} = 4$ significa que al minuto 37 el resultado del lanzamiento es 4.

Si se supone que el proceso al tiempo t está en el estado i sea P_{ij} la probabilidad condicional de que el proceso transite al estado j al tiempo $t+1$ dado que ha pasado por los estados i_0, $i_1, \ldots, i_{t-1}$ en los tiempos $0, 1, \ldots, t-1$ respectivamente:

$$P_{ij} = P\{X_{t+1} = j \backslash X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\},$$

para todos los estados i_0, $i_1, \ldots, i_{t-1}$, i, j y para toda $t \geq 0$.

Un proceso es llamado de Markov si su probabilidad de transición P_{ij} sólo depende del estado anterior, es decir:

$$P_{ij} = P\{X_{t+1} = j \backslash X_t = i\}.$$

Esta es llamada la propiedad markoviana y el valor P_{ij} representa la probabilidad de que el proceso en el estado i haga una transición al estado j. Estas probabilidades de transición tienen las siguientes propiedades:

$$P_{ij} \geq 0, \quad i, j \geq 0;$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Una caminata aleatoria $\{Y_t$ con $t = 1, 2, \ldots, n\}$ es un proceso de Markov con espacio de estados numerable y está dada por:

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \begin{cases} \Delta & \text{con probabilidad } \pi, \\ -\Delta & \text{con probabilidad } \pi' = 1 - \pi, \end{cases}$$

donde ε es una variable aleatoria, independiente e idénticamente distribuida, que toma sólo dos valores, Δ y -Δ, es decir, si se encuentra en el estado i al tiempo t entonces al tiempo $t+1$ se puede estar en el estado $i + \Delta$ o en $i - \Delta$, donde p_0 es el punto de partida y está fijo.

Así P_{ij} para la caminata aleatoria es:

$$P_{ij} = \begin{cases} \pi & \text{si } j = \Delta, \\ 1 - \pi & \text{si } j = -\Delta. \end{cases}$$

Una ilustración de la caminata aleatoria de tiempo discreto es la trayectoria de un borracho sobre una línea recta, es decir, con probabilidad π da un paso a la derecha de longitud Δ y con probabilidad $1 - \pi$ da un paso de longitud $-\Delta$, o sea, a la izquierda.

Ahora considérese el siguiente proceso de tiempo continuo $Y_n(t)$, $t \in [0, T]$, el cual puede ser construido del proceso de tiempo discreto $\{Y_t\}$, $t = 1, \ldots, n$ como sigue:

Sea una partición del intervalo [0,T] en n pedazos, cada uno de ellos de longitud $h = T/n$, y definamos el proceso:

$$Y_n(t) = Y_{[\frac{t}{h}]} = Y_{[\frac{nt}{T}]}, \tag{3.1}$$

con t ϵ [0,T] donde $[x]$ denota el mayor entero menor o igual que x. $Y_n(t)$ es un proceso de tiempo continuo constante excepto al tiempo $t = kh$, $k = 1, \ldots, n$, (véase la Figura 3.1).

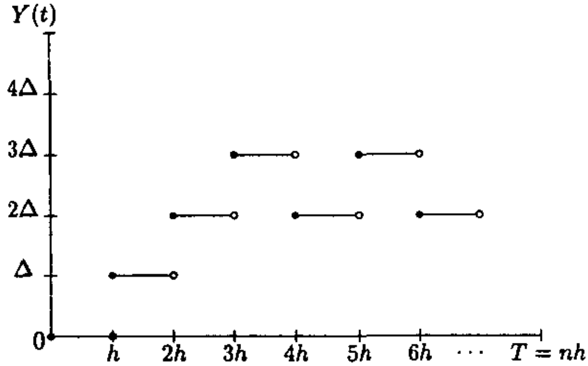


Figura 3.1. Caminata aleatoria

Aunque $Y_n(t)$ es un proceso de tiempo continuo bien definido, es todavía esencialmente el mismo proceso de tiempo discreto $\{Y_t\}$ ya que varía sólo en puntos de tiempo discretos. Sin embargo, si se toma el límite cuando n tiende a infinito y se mantiene T fija, entonces se forza a h a aproximarse a cero y por consiguiente el número de puntos en $[0, T]$ en los cuales hay variaciones de $Y_n(t)$ crecerá indefinidamente. Si al mismo tiempo se ajusta el tamaño del paso Δ y las probabilidades π y π' apropiadamente conforme n crece, entonces $Y_n(t)$ converge en distribución [1] a un proceso continuo bien definido sobre el intervalo $[0, T]$.

Para mostrar por qué es necesario ajustar a Δ, π y π', considere la media y la

[1]Una sucesión de variables aleatorias $\{A_n\}$ converge en distribución o converge débilmente a la variable aleatoria A ($A_n \xrightarrow{d} A$) si para toda función f continua y acotada se satisface la siguiente relación, [7]:

$$E(f(A_n)) \to E(f(A)), \quad n \to \infty.$$

varianza de $Y_n(T)$:

$$\begin{aligned} E[Y_n(T)] &= E\left[\sum_1^n \varepsilon\right] = \sum_1^n (\Delta\pi - \Delta\pi') \\ &= n(\pi - \pi')\Delta, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} Var[Y_n(T)] &= E\left[(\sum_1^n \varepsilon)^2\right] - n^2(\pi - \pi')^2\Delta^2 \\ &= E\left[\sum_1^n \varepsilon^2\right] + E(\sum_{i\neq j} \varepsilon_i\varepsilon_j) - n^2\Delta^2(\pi - \pi') \\ &= n\Delta^2 + n(n-1)E_{i\neq j}(\varepsilon_i\varepsilon_j) - n^2\Delta^2(\pi - \pi') \\ &= n\Delta^2 + n(n-1)[\Delta^2(\pi^2 + \pi'^2) - \Delta^2(2\pi\pi')] - n^2\Delta^2(\pi - \pi')^2 \\ &= n\Delta^2 + n(n-1)\Delta^2(\pi - \pi')^2 - n^2\Delta^2(\pi - \pi')^2 \\ &= n\Delta^2 - n\Delta^2(\pi - \pi')^2 \\ &= n\Delta^2 - n\Delta^2(\pi^2 - 2\pi\pi' + \pi'^2) \\ &= n\Delta^2 - n\Delta^2(\pi^2 - 2\pi\pi' + (1-\pi)^2) \\ &= n\Delta^2 - n\Delta^2(1 - 4\pi\pi') = 4n\pi\pi'\Delta^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como n crece indefinidamente. la media y la varianza de $Y_n(T)$ crecerán indefinidamente si Δ, π y π' se mantienen fijas. Para obtener en el límite un proceso bien definido y no degenerado, se debe obtener momentos finitos para $Y_n(T)$ cuando n tiende a infinito. En particular se debe ajustar Δ, π y π' tal que:

$$n(\pi - \pi')\Delta = \frac{T}{h}(\pi - \pi')\Delta \to \mu T, \tag{3.4}$$

$$4n\pi\pi'\Delta^2 = \frac{T}{h}4\pi\pi'\Delta^2 \to \sigma^2 T, \tag{3.5}$$

es decir, que la esperanza y la varianza de la variable aleatoria $Y_n(T)$ sean finitas y proporcionales al intervalo de tiempo T y esto se logra con la selección:

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma}\right), \\ \pi' &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma}\right), \\ \Delta &= \sigma\sqrt{h}. \end{aligned}$$

Lo anterior se puede verificar directamente de la sustitución de π, π' y Δ en las ecuaciones 3.4 y 3.5. Recuérdese que $h = T/n$ de aquí si $n \to \infty$ entonces $h \to 0$,

$$\pi = \frac{1}{2} + O(\sqrt{h}), \quad \pi' = \frac{1}{2} - O(\sqrt{h}), \quad \Delta = O(\sqrt{h}), \tag{3.6}$$

donde $O(\sqrt{h})$ denota que los términos son del mismo **orden asintótico** a $\sqrt{h}$ [2]. Por lo tanto cuando n crece, la caminata aleatoria $Y_n(T)$ varía más frecuentemente sobre el intervalo $[0, T]$, pero con el tamaño de los pasos más pequeños y con probabilidades de avanzar y retroceder aproximadas a $1/2$.

Calculando la función generadora de momentos de $Y_n(T)$ y tomando su límite cuando n tiende a infinito, se puede demostrar [3] que la distribución de $Y_n(T)$ es normal con media μT y varianza $\sigma^2 T$, de este modo $Y_n(T)$ converge en distribución a una variable aleatoria $Y(T) = N(\mu T, \sigma^2 T)$.

Además de la normalidad de $Y(T)$, el proceso estocástico $Y(t)$ posee las siguientes tres propiedades:

(B1) Para cualesquiera t_1 y t_2 tales que $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$; los incrementos de $Y(T)$ también son normales:

$$Y(t_2) - Y(t_1) \sim N(\mu(t_2 - t_1), \sigma(t_2 - t_1)) \tag{3.7}$$

(B2) Para cualesquiera t_1, t_2, t_3 y t_4 tal que $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq T$, el incremento $Y(t_2) - Y(t_1)$ es estadísticamente independiente del incremento $Y(t_4) - Y(t_3)$.

(B3) Las trayectorias de $Y(t)$ son continuas.

De esta forma $Y(t)$ es el célebre **movimiento browniano aritmético o proceso de Wiener** y está completamente caracterizado por esas tres propiedades. Si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, se obtiene el **movimiento browniano estándar**, el cual se denota por $B(t)$. Por consiguiente, se podría expresar $Y(t)$ como:

$$Y(t) = \mu t + \sigma B(t), \quad t \in [0, T]. \tag{3.8}$$

Con el objeto de obtener una mayor compresión intuitiva del comportamiento de $Y(t)$ a continuación se presentan algunos resultados de sus momentos condicionales:

$$E_{t_0}[Y(t)] \;=\; E[Y(t)/Y(t_0)] = Y(t_0) + \mu(t - t_0),$$

[2] Ver apéndice A.

[3] Ver apéndice B.

$$
\begin{aligned}
Var_{t_0}[Y(t)] &= Var[Y(t)/Y(t_0)] = \sigma^2(t - t_0), \\
\\
Cov[Y(t_1), Y(t_2)] &= Cov[Y(t_1), Y(t_2) - Y(t_1) + Y(t_1)] \\
&= Cov[Y(t_1), Y(t_2) - Y(t_1)] + Cov[Y(t_1), Y(t_1)] \\
&= 0 + Var[Y(t_1)] = \sigma^2 t_1.
\end{aligned}
$$

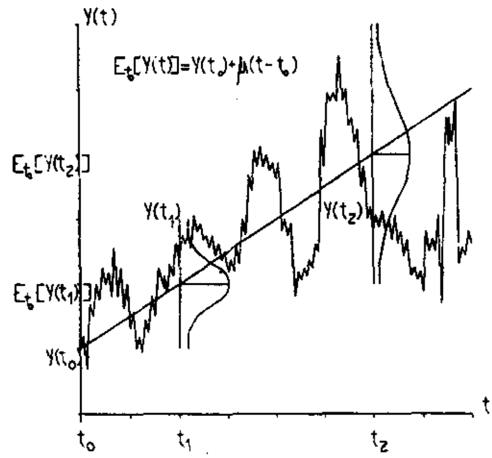


Figura 3.2. Movimiento browniano.

Como con la caminata aleatoria, la media y la varianza de $Y(t)$ son lineales en t (ver Figura 3.2). Las propiedades (B2) y (B3) del movimiento browniano implican que sus trayectorias son muy irregulares y dentadas, si fueran suaves, el incremento $B(t+h) - B(t)$ podría ser predecible a partir del incremento anterior $B(t) - B(t-h)$, violando la propiedad de independencia. De hecho, observe que la razón $(B(t+h) - B(t))/h$ no converge a una variable aleatoria bien definida cuando h tiende a 0, además:

$$Var\left[\frac{(B(t+h) - B(t))}{h}\right] = \frac{\sigma^2}{h}. \tag{3.9}$$

Por lo tanto, la derivada del movimiento browniano, $B'(t)$, **no existe** en el sentido ordinario, y aunque las trayectorias del movimiento browniano son continuas en todas partes, no son diferenciables. A consecuencia de este hecho, el pequeño incremento del movimiento browniano, es decir, el límite de $B(t+h) - B(t)$ cuando h tiende a (dt), tiene la notación $dB(t)$ con su propia y única interpretación.

En la siguiente sección se verá con mayor detenimiento esta nueva interpretación de $dB(t)$.

3.1.2 Ecuaciones diferenciales estocásticas

Las ecuaciones diferenciales estocásticas son el análogo probabilistíco de las ecuaciones diferenciales deterministas. El nombre deriva del hecho de que las primeras aparecen cuando se presenta aleatoriedad en los términos de las segunda. ya que *si se consideran aspectos aleatorios en una descripción determinista de las leyes de* movimiento de sistemas físicos, un número de modificaciones son hechos en la formulación del problema con valor inicial x_0. Por ejemplo, el punto inicial x_0 podría ser reemplazado por una variable aleatoria X_0 y la función determinista $f(t,x)$ podría ser reemplazada por una función aleatoria $F(t,X)$.

Regresando al movimiento browniano, heurísticamente $B(t+h) - B(t)$ puede ser visto como un proceso de ruido blanco gaussiano [4] y en el límite cuando h tiende a cero, $dB(t)$ es la "versión a tiempo continuo del ruido blanco".

Debe tenerse muy claro que $dB(t)$ es un tipo especial de diferencial, una **diferencial estocástica**, no debe ser confundida con las diferenciales dx y dy del cálculo. Sin embargo, $dB(t)$ obedece algunas relaciones de la mecánica que las ecuaciones diferenciales ordinarias satisfacen. Por ejemplo, 3.8 es casi siempre expresada en forma diferencial como:

$$dY(t) = \mu dt + \sigma dB(t). \tag{3.10}$$

Sin embargo, 3.10 no puede ser tratada como una ecuación diferencial ordinaria (ya que tal ecuación incluye términos aleatorios y es no diferenciable), y es conocida como una **ecuación diferencial estocástica**.

Para dar a 3.10 un significado independiente, se debe desarrollar un entendimiento más amplio de las propiedades de las diferenciales estocásticas $dB(t)$. Por ejemplo. ya que $dB(t)$ es una variable aleatoria, puede preguntarse ¿cuáles son sus momentos?, ¿cómo se comportan $(dB)^2$ y $(dB)(dt)$?. Para contestar a estas preguntas considerese la definición de $dB(t)$:

[4] Un proceso estocástico X_t es de ruido blanco gaussiano si cumple las siguientes propiedades:

$$E[X_t] = 0, \quad E[X_t^2] = \sigma^2, \quad E[X_t X_\tau] = 0 \quad \forall \quad t \neq \tau \quad y \quad X_t \sim N(0, \sigma^2).$$

$$dB(t) \equiv \lim_{h \to dt} (B(t+h) - B(t)),$$

y recordando de la propiedad (B1) que los incrementos del movimiento browniano se distribuyen normalmente con media cero ($\mu = 0$) y varianza igual a la longitud del intervalo h (ya que $\sigma = 1$). Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} E[dB] &= \lim_{h \to dt} E[B(t+h) - B(t)] \\ &= \lim_{h \to dt} \mu = 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} Var[dB] &= \lim_{h \to dt} E[(B(t+h) - B(t))^2] \\ &= \lim_{h \to dt} h = dt, \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} E[(dB)(dB)] &= \lim_{h \to dt} E[(B(t+h) - B(t))^2] \\ &= Var[dB] = dt, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} Var[(dB)(dB)] &= \lim_{h \to dt} \{E[((dB)(dB))^2] - E^2[(dB)(dB)]\} \\ &= \lim_{h \to dt} \{E[(B(t+h) - B(t))^4] - h^2\} = O(dt), \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} E[(dB)(dt)] &= \lim_{h \to dt} E[(B(t+h) - B(t))h] \\ &= \lim_{h \to dt} \mu h = 0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} Var[(dB)(dt)] &= \lim_{h \to dt} \{E[((dB)(dt)^2)] - E^2[(dB)(dt)]\} \\ &= \lim_{h \to dt} E[(B(t+h) - B(t))^2 h^2] = O(dt). \end{aligned} \tag{3.17}$$

De (B1) y 3.12-3.13 se infiere que $dB(t)$ podría ser vista como una variable aleatoria normalmente distribuida con media cero y varianza dt y aunque dt podría no parecer del todo una varianza no es insignificante del todo.

Sin embargo, $(dt)^2$ si es insignificante con respecto a dt, ya que el cuadrado de un número muy pequeño es mucho más pequeño que el número mismo. Si se interpretan los términos de orden $O(dt)$ como cero, entonces 3.14-3.17 muestran que $(dB)^2$ y $(dB)(dt)$ no son aleatorias (pues son de orden $O(dt)$) ya que las relaciones $(dB)^2 = dt$ y $(dB)(dt) = 0$ se satisfacen en la **esperanza**. Estos resultados de las conocidas ecuaciones diferenciales estocásticas se resumen en la Tabla 3.1.

*	dB	dt
dB	dt	0
dt	0	0

Tabla 3.1. Reglas de la multiplicación para diferenciales estocásticas

Para ilustrar por qué esas reglas son útiles, observe que ahora se puede calcular $(dY(t))^2$:

$$\begin{aligned}(dY)^2 &= (\mu dt + \sigma dB)^2 \\ &= \mu^2(dt)^2 + \sigma^2(dB)^2 + 2\mu\sigma(dB)(dt) \\ &= \sigma^2 dt. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Este simple cálculo muestra que aunque dY es una variable aleatoria, $(dY)^2$ no lo es. También muestra que dY se comporta como el incremento de una caminata aleatoria en el sentido de que la varianza de dY es proporcional a la longitud del intervalo.

3.1.3 Movimiento browniano geométrico

Si el movimiento browniano aritmético $Y(t)$ es tomado como el precio de algún activo, la propiedad (B1) muestra que los cambios del precio sobre cualquier intervalo se distribuirá normalmente. Pero ya que el dominio de la distribución normal es el conjunto de los números reales, los cambios del precio distribuidos normalmente implica que los precios pueden ser negativos con probabilidad positiva. Ya que virtualmente todos los activos financieros poseen una "responsabilidad limitada" -la pérdida máxima está cubierta al -100 por ciento de la inversión total- los precios negativos son empíricamente inverosímiles.

Se puede eliminar este problema definiendo $Y(t)$ como el logaritmo natural del precio $P(t)$. Bajo esta definición, $P(t) = e^{Y(t)}$ es siempre no-negativo. El proceso del precio $P(t) \equiv e^{Y(t)}$ es conocido como un **movimiento browniano geométrico** o **difusión lognormal**.

Paradoja de San Petesburgo.

Por algún tiempo, se ha supuesto que la atracción de un juego podría ser caracterizada por el valor esperado del pago. Sin embargo, en 1728, Nicolás Bernoulli planteó la Paradoja de San Petesburgo. De acuerdo con esta historia, un casino de San Petesburgo estaba dispuesto ha ofrecer cualquier tipo de juego siempre que la dirección del casino pudiera establecer el precio de la entrada que se paga por participar. Se propone el siguiente juego: suponga que alguien lanza una moneda *justa* repetidamente. Se recibe \$2 si cae cara en el primer lanzamiento, \$4 si la primera vez que cae cara es en el segundo lanzamiento, \$8 si la primera vez que cae cara es en el tercer lanzamiento de la moneda, y así sucesivamente, es decir, se recibe \$ 2^n si la primera vez que cae cara es en el n-ésimo lanzamiento. Con probabilidad $\frac{1}{2}$ se obtiene cualquier resultado, cara o cruz, en cualquier lanzamiento, la liquidación esperada, o ganacia esperada, $E(w)$, de este juego al calcular la media aritmética es:

$$\begin{aligned} E(w) &= 2\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) + 8\left(\frac{1}{8}\right) + 16\left(\frac{1}{16}\right) + \cdots + 2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \frac{1}{2^i} = 1 + 1 + 1 + \cdots = n. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Esta ecuación implica, que si n tiende a infinito se paga un monto ilimitado por el derecho a participar en este juego. La pregunta es, ¿se estaría dispuesto a liquidar toda la fortuna material que se posee a cambio de una entrada para este juego?. Poca gente estaría dispuesta a hacerlo, especialmente después de observar que la probabilidad de conseguir más de \$8 es tan sólo de $1/8$.

Una solución a esta paradoja se encontró en 1738 cuando el primo de Nicólas Bernoulli, Daniel Bernoulli, propusó que, en vez de maximizar el valor esperado de su ganancia, los individuos actuan tal que maximizan la **utilidad**[5] esperada de su ganacia. Al mismo tiempo, se supuso que la relación entre la utilidad de los individuos de la ganancia, $u(w)$, y la ganancia, w, tiene una forma concava. Esta función exhibe la propiedad conocida como disminución marginal de la utilidad de la ganancia, por que su pendiente se va progresivamente acostando conforme la ganacia se incrementa. Esta pendiente implica que \$1 adicional a la ganancia disminuye la utilidad del inversionista cuando la ganacia inicial es más grande que cuando es pequeña, lo cual implica que el inversionista es averso al riesgo.

Basándose en lo anterior, se propone la función de utilidad: $log(w)$, así calculando

[5]La utilidad se define como una función $u : \Omega \to \Re$ que representa la relación de preferencia de un individuo, [4]:

$$u(a) \leq u(b) \Leftrightarrow \text{se prefiere } a \text{ sobre } b.$$

su valor esperado:

$$\begin{aligned} E(u(w)) &= E(log(w)) = \sum_{i=1}^{\infty} log(2^i)\frac{1}{2^i} \\ &= log(2)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^i} = log(2)\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Si se aplica la prueba de la razón, [9], para determinar si 3.20 converge o diverge:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2} < 1. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Por lo tanto, la serie 3.20 converge y de hecho converge a 2, es decir, el valor esperado de la utilidad de la ganancia para este juego es: $log(2)\cdot 2 \approx 1.3862$. La serie para n finita, es conocida en estadística como la **media geométrica**, [10].

3.2 Lema de Itô

Aunque la primera teoría matemática del movimiento browniano es debida a Wiener (1923), la contribución fundamental es de Itô (1951) ya que su lema dio lugar a un gran número de aplicaciones del movimiento browniano, tales como a problemas en matemáticas, estadística, física, química, biología, ingeniería y por supuesto, economía financiera. En particular, Itô construye una amplia gama de procesos estocásticos continuos basados en el movimiento browniano, ahora conocidos como **procesos de Itô** o **ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô.**

El lema de Itô es el más importante resultado acerca de la manipulación de variables aleatorias. Este lema es para las funciones de variables aleatorias lo mismo que el teorema de Taylor es para las funciones de variables determinísticas. Nuestro enfoque heurístico del Lema de Itô esta basado en la expansión en series de Taylor.

Suponga que $f(Y,t)$ es una función suave de Y y del tiempo t; y olvide por el momento que Y es estocástica, si se varía Y por un monto pequeño dY entonces claramente f también varía por un monto pequeño.

De la ecuación de series de Taylor se puede escribir:

$$df(Y,t) = \frac{\partial f}{\partial Y}dY + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}dY^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial Y\partial t}dYdt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}dt^2\right] + \ldots, \tag{3.22}$$

donde los puntos denotan un residuo el cual es más pequeño que cualquiera de los términos que se han mostrado, por lo que sólo se conservarán los terminos aquí mostrados.

Usando las reglas de la multiplicación para diferenciales estocásticas, presentadas en la tabla 2.1 se encuentra que la nueva expresión para $df(Y,t)$ es:

$$df(Y,t) = \frac{\partial f}{\partial Y}dY + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}dY^2. \tag{3.23}$$

Esta fórmula es conocida como el **Lema de Itô**; el modesto término "lema" no hace justicia al gran impacto que 3.23 ha tenido; ya que esta poderosa herramienta nos permite cuantificar la evolución de un complejo sistema estocástico en un sencillo paso. Por ejemplo, sea p que denota el proceso del logaritmo del precio de un activo y suponga que satisface 3.10; ¿cúal es la variación del proceso del precio $P(t) = e^{Y(t)}$?. El lema de Itô nos proporciona una respuesta inmediata:

$$\begin{aligned}
dP(Y,t) &= \frac{\partial P}{\partial Y}dY + \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial Y^2}(dY)^2 \\
&= e^Y dY + \frac{1}{2}e^Y(dY)^2 \\
&= e^Y(\mu dt + \sigma dB) + \frac{1}{2}e^Y(\mu dt + \sigma dB)^2 \\
&= P(\mu dt + \sigma dB) + \frac{1}{2}P(\sigma^2 dt) \\
&= P\sigma dB + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)Pdt \\
&= (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)Pdt + \sigma PdB \\
dP &= \mu' Pdt + \sigma PdB \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

De 3.24 concluye que el logaritmo de los cambios del precio se distribuyen como un movimiento browniano; pero en contraste al movimiento browniano aritmético 3.10, se observa que **la media instantánea y la desviación estándar del movimiento browniano geométrico son proporcionales a P.** Alternativamente 3.24 implica que el porcentaje instantáneo del cambio del precio dP/P conduce a un movimiento browniano aritmético o caminata aleatoria, la cual es precisamente el caso dado por la transformación exponencial.

Capítulo 4

Estrategias de cobertura utilizando opciones

En este capítulo se describen los conceptos fundamentales de la teoría de las opciones financieras, incluyendo el radio de cobertura y el arbitraje. Este radio de cobertura mejor conocido como delta aparece cuando se deduce la ecuación de Black-Scholes. Aquí se presenta la aproximación propuesta por Merton, la cual consiste en la construcción de un portafolio auto-financiado compuesto de activo subyacente, opciones sobre el mismo activo y títulos de libres de riesgo. Hecho esto la condición de no arbitraje conduce a una ecuación diferencial parcial de segundo orden, la cual es la famosa ecuación de Black-Scholes.

Una vez establecida la ecuación de Black-Scholes se hace un análisis intuitivo de dicha ecuación con el objeto de resaltar su importancia, sobre todo en materia económica así como para su mejor comprensión. Por otra parte se establece uno de los métodos para estimar la volatilidad en el precio del activo subyacente, el método aquí presentado es el más común y es conocido como *cálculo de la volatilidad histórica.*

Posteriormente aparecen las sensibilidades de la opción, las cuales tienen una importancia crucial en el comercio y manejo de opciones. Estas sensibilidades son usadas tanto para medir riesgos como para definir el radio de cobertura. Cada una de estas sensibilidades o medidas de riesgo son consideradas por separado, dando primeramente una explicación general de su significado y más tarde el patrón de comportamiento que las caracteriza.

4.1 Suposiciones en la ecuación de Black-Scholes

A continuación se define la notación utilizada a lo largo del presente capítulo. Se denota por $V(S(t), t)$ el precio al tiempo t de una opción *call* europea con precio de ejercicio X y fecha de vencimiento $T > t$ sobre un activo con precio $S(t)$ al tiempo t. Claramente V también depende de otras cantidades tales como la fecha de vencimiento T y el precio de ejercicio X.

De hecho se puede hacer una clasificación entre los diferentes tipos de variables y parámetros de los cuales depende el precio de la opción:

* S y t son variables;
* σ y μ son paramétros asociados con el precio del activo;
* X y T son paramétros asociados con los detalles del contrato en particular;
* r es un paramétro asociado con la moneda con la cual el activo es cotizado.

Es importante observar que expresar V como una función del precio actual del activo $S(t)$, y no de los precios pasados, es una restricción que simplifica la tarea de encontrarlo. Aunque lo anterior no es cierto para otro tipo de derivados, por ejemplo, las opciones exóticas [13]. Para valuar las opciones europeas Black y Scholes (1973) hacen los siguientes supuestos:

(A1) No hay imperfecciones en el mercado, es decir, no hay costos de transacción ni impuestos asociados a la posesión de un portafolio, no hay restricciones para la venta en corto (*short-selling*), es decir, que se puede vender activos que no se poseen, la comercialización del activo subyacente es continua y las inversiones de unos participantes del mercado no afectan a otros, y los activos son divisibles.

(A2) Además r es la tasa de rendimiento libre de riesgo; por lo que \$1 invertido en un activo tal sobre el intervalo de tiempo τ crece \$$1e^{r\tau}$. Alternativamente, si $D(t)$ es el valor descontado de un bono que vence al tiempo T con valor nominal de \$1, entonces para $t \in [0, T]$ las dinámicas del precio del bono están dadas por:

$$dD(t) = rD(t)dt \tag{4.1}$$

(A3) Los cambios en el precio del activo están dados por un movimiento browniano geométrico, solución a la siguiente ecuación diferencial estocástica de Itô con $t \in [0, T]$:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \quad S(0) = S_0 > 0, \tag{4.2}$$

donde $B(t)$ es el movimiento browniano estándar. Existen otros modelos sin esta suposición de los cuales es posible derivar una ecuación diferencial para el valor de la opción, pero en pocos de ellos existe una fórmula explícita. Al final de esta sección se discute la importancia de este supuesto.

(A4) No hay posibilidad de arbitraje. Esto significa que todos los portafolios libres de riesgo deben ganar el mismo rendimiento, este supuesto es uno de los más fuertes y es conocido como el ***principio de no arbitraje***, [5], [8].

En la siguiente sección se hará evidente que sólo las suposiciones (A1)-(A4) son necesarias siguiendo la aproximación de Merton.

La suposición (A3) es actualmente muy utilizada y se ha convertido en una práctica estándar en estudios recientes, sin embargo, las características muestrales son muchas veces inconsistentes con esta supuesta propiedad de la población. Una de las inconsistencias más importantes es que la frecuencia de observaciones "extremas" en la distribución gaussiana es muy baja en comparación con las distribuciones empíricas de los cambios en el precio.

Maldelbrot (1963) y Fama (1963) [5] intentaron resolver tales discrepancias, reemplazando la suposición gaussiana por una suposición de distribución Pareto-Levy más general. Aunque esta distribuición ajusta las colas de las distribuciones empíricas mejor que la gaussiana, no hay evidencia empírica suficiente para adoptar tal hipótesis. Además, la distribución Pareto-Levy posee la propiedad de la varianza infinita, lo cual implica que la mayoría de las herramientas estadísticas, las cuales están basadas en suposiciones de momentos finitos, serían inservibles. Esto también implica que el primer momento o la esperanza del cambio del precio aritmético no existe.

Las dificultades teóricas y empíricas de la "Hipótesis Paretiana Estable" conduce a considerar la ruta alternativa de procesos de momentos finitos cuyas distribuciones son no estacionarias. Es en esta aproximación donde el análisis de tiempo continuo parece más prometedor, aunque su esquema general requiere que el proceso subyacente sea una mezcla del proceso de difusión y Poisson dirigido.

Por otra parte Rosenberg (1972) [5] muestra que al explicar las características de la cola pesada observada de los rendimientos del activo surge un modelo gaussiano con una razón de varianza cambiante (y pronosticable).

Rosenfeld (1980) [5] ha desarrollado técnicas estadísticas para estimar los parámetros de los procesos de tiempo continuo y los ha aplicado en la construcción de una prueba de verosímilitud para seleccionar entre un proceso de difusión con una razón de varianza cambiante y una mezcla de proceso de difusión y Poisson dirigido.

Por supuesto, se requiere más información para poder obtener una conclusión.

Sin embargo, la extensa literatura matemática sobre características distribucionales de los procesos de tiempo continuo además de sus propiedades de momentos finitos hacen el desarrollo de la prueba de hipótesis considerablemente más fácil para estos procesos que para el proceso Pareto-Levy estable.

4.2 Aproximación de Black-Scholes y Merton

El propósito de esta sección es obtener una fórmula explícita para V. Black, Scholes y Merton lo hacen, considerando las relaciones entre las dinámicas del precio de la opción, V, el precio del subyacente, S y el rendimiento de un título de inversión libre de riesgo, D, como puede ser un bono o el rendimiento de una cantidad invertida en un banco a una tasa de interés r. Se supone que V es solamente una función del precio del activo S al tiempo t; si se aplica el lema de Itô a la función $V(S(t),t)$ se obtiene la dinámica del precio de la opción:

$$dV = \mu_v V dt + \sigma_v V dB(t), \tag{4.3}$$

donde:

$$\begin{aligned} \mu_v &= \frac{1}{V}\left[\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right], & (4.4)\\ \sigma_v &= \frac{1}{V}\left[\sigma S\frac{\partial V}{\partial S}\right]. & (4.5)\end{aligned}$$

Para verificar el resultado anterior se aplica el lema de Itô a la función $V(S(t),t)$ y bajo la suposición de que los cambios en el precio del activo están dados por la ecuación 4.2:

$$\begin{aligned} dV(S,t) &= \frac{\partial V}{\partial S}(dS) + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 \\ &= \frac{\partial V}{\partial S}(\sigma S dB + \mu S dt) + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\sigma S dB + \mu S dt)^2 \\ &= \frac{\partial V}{\partial S}S(\sigma dB + \mu dt) + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^2(\sigma dB + \mu dt)^2, \end{aligned} \tag{4.6}$$

si se desarrolla el término al cuadrado y usando nuevamente las reglas de la multiplicación para diferenciales estocásticas establecidas en el Capítulo 3 se tiene:

$$
\begin{aligned}
(\sigma dB + \mu dt)^2 &= \sigma^2 \underbrace{dB^2}_{dt} + 2\sigma\mu \underbrace{dBdt}_{0} + \mu^2 \underbrace{dt^2}_{0} \\
&= \sigma^2 dt,
\end{aligned}
$$

sustituyendo el resultado anterior en la ecuación 4.6 queda:

$$
\begin{aligned}
dV(S,t) &= \frac{\partial V}{\partial S} S(\sigma dB + \mu dt) + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} S^2\sigma^2 dt \\
&= \underbrace{\frac{\partial V}{\partial S}\sigma S}_{\sigma_V V} dB + \underbrace{\left(\mu\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} S^2\sigma^2\right)}_{\mu_V V} dt, \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

que es lo que se quería.

La condición $\mu_v = r_0$ reduce 4.7 a una ecuación diferencial parcial, la cual bajo algunas condiciones de regularidad y frontera, posee una solución única. Esta es la aproximación tomada por Black y Scholes (1973); la cual requiere mayor estructura que la propuesta en (A1)-(A4) [13].

Merton (1973b) presenta una alternativa en la cual la misma fórmula de valuación de opciones es obtenida pero sin ninguna suposición adicional a (A1)-(A4). Merton construye un portafolio que incluye al subyacente, opciones sobre el subyacente y títulos de bajo riesgo, dicho portafolio no requiere una inversión neta inicial ni inversiones adicionales entre 0 y T; es un portafolio **auto-financiado** donde *las posiciones largas están completamente financiadas por posiciones cortas.*

Específicamente si:

$\Pi_s(t)$ denota el monto invertido en el subyacente al tiempo t.

$\Pi_r(t)$ denota el monto invertido en títulos libre de riesgo al tiempo t los cuales vencen al tiempo T.

$\Pi_v(t)$ denota el monto invertido en la opción *call* al tiempo t.

Entonces la condición de la inversión neta inicial igual a cero es expresada como:

$$
\Pi = \Pi_s(t) + \Pi_r(t) + \Pi_v(t) = 0, \quad \forall \quad t \in [0,T]. \qquad (4.8)
$$

Los portafolios que satisfacen 4.8 son llamados **portafolios de arbitraje**. Merton (1969) muestra que el rendimiento instantáneo $d\Pi$ para este portafolio es:

$$d\Pi = \frac{\Pi_s}{S}dS + \frac{\Pi_r}{D}dD + \frac{\Pi_v}{V}dV, \tag{4.9}$$

donde las diferenciales estocásticas dP y dD están dadas por 4.2 y 4.1 respectivamente, y dV por 4.3.

Sustituyendo las dinámicas de $S(t)$, $B(t)$ y $V(t)$ en 4.9 y utilizando 4.8 se tiene:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{\Pi_s}{S}(\mu S dt + \sigma S dB) + \frac{\Pi_r}{D}(rDdt) + \frac{\Pi_v}{V}(\mu_v V dt + \sigma_v V dB) \\ &= \Pi_s(\mu dt + \sigma dB) + \Pi_r(rdt) + \Pi_v(\mu_v dt + \sigma_v dB) \\ &= (\Pi_s\mu + \Pi_r r + \Pi_v\mu_v)dt + (\Pi_s\sigma + \Pi_v\sigma_v)dB \\ &= (\Pi_s\mu + (-\Pi_s - \Pi_v)r + \Pi_v\mu_v)dt + (\Pi_s\sigma + \Pi_v\sigma_v)dB \\ &= [(\mu - r)\Pi_s + (\mu_v - r)\Pi_v]dt + [\sigma\Pi_s + \sigma_v\Pi_v]dB(t). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Agregando otra restricción a este portafolio para que quede libre de riesgo en el sentido de que su rendimiento no sea estocástico en $[0,T]$, se selecciona $\Pi_v = \Pi_v^*$ y $\Pi_s = \Pi_s^*$ tal que:

$$\sigma\Pi_s^* + \sigma_v\Pi_v^* = 0, \quad \forall \quad t \in [0,T] \tag{4.11}$$

lo cual sustituyendo σ_v por 4.5:

$$\begin{aligned} \sigma\Pi_s^* + \frac{1}{V}\left[\sigma S\frac{\partial V}{\partial S}\right]\Pi_v^* &= 0, \\ \Pi_s^* + \frac{S}{V}\frac{\partial V}{\partial S}\Pi_v^* &= 0, \\ \frac{\Pi_s^*}{S}/\frac{\Pi_v^*}{V} &= -\frac{\partial V}{\partial S} \end{aligned} \tag{4.12}$$

por lo tanto:

$$\frac{n_s^*(t)}{n_v^*(t)} = -\frac{\partial V(t)}{\partial S}, \tag{4.13}$$

para toda $t \in [0,T]$, donde $n_s^*(t)$ y $n_v^*(t)$ son el número de unidades de activo y de la opción, respectivamente, en el portafolio sin riesgo y autofinanciado.

Observe que a menos que $\partial V(t)/\partial S$ sea constante en t, $n_s^*(t)$ y $n_v^*(t)$ deben variar en el tiempo para asegurar que este portafolio sea libre de riesgo en toda su duración. Un portafolio con tales características se dice que es de **cobertura perfecta**, $-\partial V(t)/\partial S$ es conocido como el **radio de cobertura** y denotado por Δ.

De hecho cualquier estrategia que produce reducción en el riesgo es generalmente conocida como **cobertura** y la eliminación perfecta del riesgo, por la explotación de la correlación entre dos instrumentos (en este caso la opción y su subyacente) es generalmente llamada **cobertura delta**. La cobertura delta es un ejemplo de una estrategia de **cobertura dinámica** ya que de un momento a otro la cantidad $-\partial V(t)/\partial S$ cambia.

Si se aplica 4.8 y 4.13 para toda $t \in [0, T]$ se produce una estrategia *dinámica* libre de riesgo y que no requiere inversión, donde su rendimiento no-estocástico $d\Pi$ debe ser cero, de otra forma podría existir algún costo y entonces habría un rendimiento positivo. Por lo tanto, para mantener la condición de no arbitraje, debe suceder que:

$$(\mu - r)\Pi_s^*(t) + (\mu_v - r)\Pi_v^* = 0. \tag{4.14}$$

Sorprendentemente, esta simple condición de no arbitraje reduce las posibles soluciones de V justo a una expresión, la cual es una ecuación diferencial parcial de segundo orden:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0, \tag{4.15}$$

la ecuación anterior es la famosa **Ecuación de Black-Scholes**.

La solución a la ecuación 4.15 sujeta a las siguientes dos condiciones frontera $c(S(T), T, X) = Max[S(T) - X, 0]$ y $c(0, t, X) = 0$, donde $c(S(t), t, X)$ el valor de una opción *call* al tiempo t es, [13]:

$$c(S(t), t, X) = S(t)\phi(d_1) - Xe^{-r(T-t)}\phi(d_2), \tag{4.16}$$

directamente de la relación de paridad *call-put* se obtiene el valor de una opción *put* al tiempo t, la cual tiene como liquidación $p(S(T), T, X) = Max[X - S(T), 0]$:

$$p(S(t), t, X) = Xe^{-r(T-t)}\phi(-d_2) - S(t)\phi(-d_1), \tag{4.17}$$

donde:

$$d_1 \equiv \frac{log(S(t)/X) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{4.18}$$

$$d_2 \equiv \frac{log(S(t)/X) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \tag{4.19}$$

$\phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulativa de la normal estándar y $T - t$ es el tiempo para el vencimiento de la opción en años.

La importancia de las suposiciones (A1) y (A3) son ahora claras; esto es, la combinación del movimiento browniano (con rutas muestrales continuas) y la posibilidad de comerciar continuamente permite la construcción de un portafolio de cobertura perfecta. Si cualquiera de esas suposiciones falla, habría ocasiones en que el rendimiento para el portafolio de arbitraje sea diferente de cero y estocástico (riesgoso). Si es así, el argumento de arbitraje ya no es aplicable.

La derivación de Merton de la ecuación de Black-Scholes también exhibe el poder del lema de Itô, el cual proporciona las dinámicas 4.3 del precio de la opción V que conduce a la ecuación diferencial parcial 4.15.

4.2.1 Análisis intuitivo de la ecuación de Black-Scholes

En esta sección se presenta un pequeño análisis intuitivo de la ecuación de Black-Scholes. Se inicia con el caso donde $\sigma = 0$, es decir, no hay volatilidad en el comportamiento del precio del activo subyacente, entonces la ecuación de Black-Scholes se convierte en:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \tag{4.20}$$

despejando $\frac{\partial V}{\partial t}$ y recordando que $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ (la razón de cambio del valor de la opción respecto al activo subyacente o la medida de correlación entre los movimientos de la opción y los del activo subyacente), se tiene:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = r(V - \Delta S), \tag{4.21}$$

pero además $\Delta = \frac{n_i^*(t)}{n_v^*(t)}$, es decir, el número de unidades de activo subyacente por cada opción en la que se invierte, así por ejemplo si $\Delta = 1/3$ significa que se invierte en una unidad del activo S por cada tres opciones, por lo cual, ΔS da el valor del activo subyacente cubierto por unidad. Dicho en otras palabras, si el precio del activo subyacente puede ser determinado de antemano entonces el valor de la opción cambiará en el tiempo (también de manera determinística) a una tasa libre de riesgo r.

Por lo tanto, se tiene que cuando no hay volatilidad en el precio del activo subyacente la razón de cambio del precio de la opción con respecto al tiempo es equivalente al rendimiento a una tasa de interés libre de riesgo del valor de la opción menos el valor del activo subyacente cubierto.

Ahora en el caso donde $\sigma \neq 0$, en el cual se tiene la ecuación completa 4.15, pero despejando nuevamente $\frac{\partial V}{\partial t}$, se obtiene:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = -rS\frac{\partial V}{\partial S} + rV - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}. \tag{4.22}$$

La única diferencia con el caso $\sigma = 0$ es el término:

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2},$$

el cual sí contiene una componente aleatoria σ, este término aunque tiene signo negativo puede ser positivo ya que puede ser cualquiera el signo que proporcione la segunda derivada del valor de la opción con respecto del activo subyacente.

Si el signo de $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ es negativo significa que el valor de la opción alcanza un máximo, es decir, que el valor de la opción con respecto al activo subyacente es una función cóncava, y por lo tanto cuando el activo subyacente aumenta el valor de la opción disminuye. En este caso el término de arriba tendrá signo positivo y por ende se tendrá una ganancia al invertir en la opción ya que el cambio en el valor de la opción será mayor que si se invirtierá en el banco.

En el caso contrario donde el signo de $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ es positivo entonces se tiene una función convexa, y cuando el activo subyacente aumenta el valor de la opción también aumentará, por lo cual no conviene un radio de cobertura demasiado grande; por otra parte el término de arriba tendrá signo negativo y esto significa que el cambio de la opción es menor que si se invirtiera el dinero en el banco, por lo cual se tendrá una pérdida.

Antes de concluir se hace la observación que en la ecuación 4.15 no aparece μ, es decir, el valor de la opción es independiente de que tan rápido o lento crece un activo. El único parámetro de la ecuación diferencial parcial 4.15 para el precio del activo que afecta el precio de la opción es la volatilidad σ.

4.2.2 Estimación de σ

La volatilidad de un activo, σ, es una medida de la incertidumbre acerca de los rendimientos proporcionados por el activo. Los valores más comunes de la volatilidad del activo están en el rango 0.2 a 0.4 por año y casi siempre tales volatilidades son expresadas en porcentajes.

Una definición precisa de la volatilidad sería:

La volatilidad del precio del activo es la desviación estándar de los rendimientos proporcionados por el activo en un año.

El cálculo de la volatilidad puede ser tan complejo como se quiera, ya que se han desarrollado numerosas técnicas para alcanzar tal objetivo, a continuación se describe el método de volatilidad histórica el cual es el más utilizado en la práctica y uno de los más sencillos, además de que los resultados arrojados proporcionan una buena aproximación.

Se requiere un registro o serie histórica de los movimientos del precio del activo para estimar la volatilidad con tal método. El precio del activo es usualmente observado en intervalos fijos de tiempo (diariamente, cada semana o cada mes). Se define:

$$\begin{aligned} n+1 &: \text{ número de observaciones,} \\ S_i &: \text{ precio del activo al final del } i\text{-ésimo intervalo } (i = 0,1,\ldots,n), \\ \tau &: \text{ longitud del intervalo de tiempo en años,} \end{aligned}$$

y sea:

$$u_i = ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right).$$

Una estimación, $\bar{s}$, de la desviación estándar de las u_i's está dado por:

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}$$

o

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_1\right)^2}$$

donde $\bar{u}$ es la media de las u_i's.

Una variable con una distribución lognormal tiene la propiedad que su logaritmo natural es normalmente distribuido. La suposición de Black-Scholes para los precios del activo implica que $ln(S(T))$ es normal, donde $S(T)$ es el precio del activo al tiempo T. Se puede escribir este resultado como :

$$lnS(T) \sim N\left(lnS + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right),$$

que es equivalente a:

$$ln\frac{S(T)}{S} \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right),$$

de lo anterior la desviación estándar de u es $\sigma\sqrt{\tau}$. La variable $\bar{s}$ es por lo tanto una estimación de $\sigma\sqrt{\tau}$. De esto se sigue que σ puede se estimada como $\hat{\sigma}$, donde:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{\sqrt{\tau}}.$$

El error estándar de esta estimación es apróximadamente $\hat{\sigma}/\sqrt{2n}$. Generalmente entre más datos se tengan mayor precisión, pero si los datos son muy viejos podrían no ser adecuados para una predicción del futuro. Algo que parece razonablemente correcto es trabajar con precios de datos diarios sobre los últimos 90 o 180 días. Hay un detalle importante que debe ser tomado en cuenta cuando los parámetros de la volatilidad están siendo estimados y usados, el cual es la determinación del tiempo en el que debe ser medida en días calendario o en días de operación.

4.3 Delta y otras sensibilidades

Las derivadas parciales de V con respecto a sus argumentos tienen una importancia crucial en el comercio y manejo de opciones, tanto que son ahora conocidas entre los profesionales en inversiones como **sensibilidades de la opción:**

$$\begin{aligned}
\text{Delta} \quad \Delta &\equiv \frac{\partial V}{\partial S}, \\
\text{Gamma} \quad \Gamma &\equiv \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \\
\text{Theta} \quad \Theta &\equiv \frac{\partial V}{\partial t}, \\
\text{Vega} \quad \kappa &\equiv \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \\
\text{Rho} \quad \rho &\equiv \frac{\partial V}{\partial r},
\end{aligned}$$

donde V puede ser el valor de una opción o de un portafolio completo.

Las principales aplicaciones de estas medidas de riesgo son:

1. Medición del riesgo de opciones en términos de su comportamiento, en respuesta a los cambios en un parámetro del mercado, tal como el precio del activo.
2. Facilita la replicación de activos generando las liquidaciones de la opción por comerciar con el activo subyacente.
3. Uso de la sensibilidad y comportamiento de la opción como una medida para definir la cobertura u otros intereses del inversionista además de facilitar la creación de estrategias más eficientes.

4.3.1 Delta Δ

La **delta**[1], Δ, es definida como la razón de cambio del valor de la opción con respecto al precio del activo subyacente. Es la pendiente de la curva que relaciona el precio de la opción y el precio del activo subyacente. Y, además proporciona la cantidad de unidades del subyacente que se deben cubrir con respecto al total de subyacente expuesto, es decir, **el radio de cobertura**.

La delta de una opción o de un portafolio de opciones es la sensibilidad de la opción o del portafolio con respecto al activo subyacente. Es la tasa de cambio del valor de la opción con respecto al activo:

$$\Delta \equiv \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Donde V puede ser el valor de un simple contrato o de un portafolio completo. La delta de un portafolio de opciones es la suma de las deltas de todas las posiciones individuales, esta relación se establece como:

$$\Delta_p = \sum_{i=1}^{n} W_i \Delta_i,$$

donde:

Δ_p = delta del portafolio,

Δ_i = delta de la i-ésima opción en el portafolio,

W_i = peso de la opción i (valor nominal de la opción / valor nominal del portafolio).

[1]Esta sensibilidad conocida como delta de cobertura fue descrita acertadamente por Thorp y Kassouf en 1967.

La naturaleza aditiva de la delta facilita grandemente el manejo de un portafolio de opciones.

A groso modo se puede decir que el mundo financiero esta dividido en especuladores y coberturistas. Los especuladores fijan su atención en alguna cantidad tal como el precio del activo e implementan una estrategia para obtener una ganancia, para tales personas la cobertura no es su objetivo principal.

En cuanto a los coberturistas, hay dos tipos: unos que mantienen una posición y quieren eliminar un riesgo en específico (usualmente usando opciones); y los otros que venden (o compran) opciones, porque creen que tienen un mejor precio y que pueden obtener alguna ganancia cubriendo todo el riesgo. Estos últimos sólo pueden garantizar una ganancia por la venta de un contrato en un valor alto si pueden eliminar todo el riesgo provocado por la fluctuación aleatoria en el subyacente.

La delta, el radio de cobertura, puede ser expresada como una función de S y de t, esto significa que el número de activos conservados debe ser cambiado continuamente para mantener una **posición delta neutral**, es decir, una posición tal que al recalcular delt, despúes de ajustar el portafolio para que sea libre de riesgo, sea igual a cero. Este procedimiento es llamado **cobertura dinámica**. La cobertura dinámica puede ser contrastada con la cobertura estática, en la cual la cobertura es establecida inicialmente y no se vuelve a ajustar. Es importante entender que debido a los cambios de la delta, la posición del inversionista funciona sólo en un periodo de tiempo relativamente corto. En la práctica, cuando la cobertura delta es implementada, tiene que ser ajustada periodicamente y para esto se debe cambiar el número de activos conservados, es decir, requiere de una compra y/o venta continua de activo. Esto es llamado **recobertura** o **rebalanceo** del portafolio.

Este radio de cobertura es usado muy frecuentemente en mercados altamente líquidos donde es relativamente barato comprar o vender. Así la suposición de Black-Scholes acerca de cobertura continua casi se cumple. En mercados menos líquidos, se pierde mucho sobre la oferta y por lo tanto la cobertura es menos eficiente y poco frecuente. Además, no se puede comprar o vender en las cantidades deseadas. Lo anterior hace a la cobertura delta menos exacta y en la práctica el riesgo en el subyacente no puede ser cubierto perfectamente.

Algunos contratos tienen una delta que se hace muy grande en algunos periodos o en valores del activo especiales. Algunas veces el tamaño de la delta convierte a la cobertura en imposible, por ejemplo, se puede encontrar una delta teórica para comprar más subyacente del que existe. Esto sucede cerca del tiempo de expiración en el ejercicio de **opciones binarias**[2].

[2]Las opciones binarias (también conocidas como opciones digitales) son contratos que tienen una liquidación al vencimiento que es discontinua con respecto al precio del activo subyacente. Por

A continuación se presentan las fórmulas para los radios de cobertura o deltas de contratos *call* y *put* (las fórmulas suponen que el subyacente paga D dividendos [14]):

$$\begin{array}{ll} \textit{Call} & \phi(d_1)e^{-DT} \\ \textit{Put} & (\phi(d_1)-1)e^{-DT} \end{array}$$

donde:

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad \text{y } d_1 \text{ es como se definió en 4.18.}$$

La delta o radio de cobertura de una opción es caracterizada por el siguiente patrón de comportamiento [15]:

1. La delta de una opción *call* (*put*) es positiva (negativa), reflejando la dirección del cambio del valor de la opción dado un incremento en el activo del activo.

2. La delta de la opción está entre 0 y 1 para una opción *call* y entre 0 y -1 para una opción *put*. La delta del activo es siempre 1; una posición larga tiene una delta de +1 mientras que una posición corta tiene una delta de -1.

3. Opciones que están fuera del dinero (*out of the money*) tienen deltas cercana a cero porque no son muy sensibles a cambios en el precio del activo subyacente. Opciones que están dentro del dinero (*in the money*) tienen deltas cercana a +1 o -1 porque se mueven al paso del precio del activo subyacente. Las deltas de opciones que están en el dinero (*at the money*) tienden a acercarse a 0.5.

4. La delta más alta se obtiene cuando los cambios en el precio de la opción son muy cercanos a los cambios en el precio del activo y consecuentemente las ganacias y las pérdidas podrían derivar de una posición en el activo subyacente.

4.3.2 Gamma Γ

La **gamma**, Γ, de una opción o de un portafolio de opciones es la segunda derivada de la posición con respecto al subyacente:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

---

ejemplo, una opción *call* binaria paga L al vencimiento si $S(T) \geq X$ y 0 en caso contrario.

De aquí que la gamma sea la sensibilidad de la delta con respecto al subyacente, es decir, una medida de cuanto o cuantas veces una posición debe ser *recubierta* para mantener una posición con la delta neutral. Aunque la delta también varía en el tiempo este efecto es dominado por la naturaleza browniana del movimiento del subyacente.

La gamma de un portafolio de opciones sobre un activo, es la razón de cambio de la delta del portafolio con respecto al precio del subyacente. Si la gamma es pequeña, entonces la delta cambia suavemente y los ajustes para mantener un portafolio delta neutral no son muy necesarios, si la gamma es grande en términos de valor absoluto, entonces la delta es altamente sensible con respecto al precio del subyacente, es entonces muy riesgoso dejar el portafolio delta neutral sin cambios en cualquier periodo de tiempo.

Puesto que la gamma es una medida de sensibilidad del radio de cobertura Δ para el movimiento en el subyacente, la cobertura requiere ser reducida por una estrategia **gamma neutral**, *esto significa comprar o vender más opciones, no sólo el subyacente.* En la práctica, la posición de la opción no es reajustada tan frecuente porque, si el costo de transacción en el subyacente es grande, entonces el costo de transacción en sus derivados también es grande. Y cuando los costos son muy grandes y se requiere reducir la exposición es natural tratar de minimizar la necesidad de rebalancear el portafolio tan frecuentemente.

La neutralidad en la delta proporciona una protección de los pequeños movimientos del precio del activo entre el rebalanceo. La neutralidad en la gamma proporciona protección de movimientos grandes en el precio del activo entre el rabalanceo de la cobertura.

A continuación se presentan las formúlas para la gamma para contratos *call* y *put* (las fórmulas suponen que el subyacente paga D dividendos [14]):

$$\begin{array}{ll} Call & \frac{N(d_1)e^{-DT}}{\sigma S\sqrt{T}} \\ Put & \frac{N(d_1)e^{-DT}}{\sigma S\sqrt{T}} \end{array}$$

donde:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \quad \text{y } d_1 \text{ es como se define en la ecuación 4.18.}$$

La gamma de una opción es caracterizada por el siguiente patrón de comportamiento [15]:

1. Opciones fuera o dentro del dinero (*out of the money or in the money*) tienen gammas cercanas a cero porque no son muy sensibles a cambios en el activo subyacente.

2. Opciones en el dinero (*at the money*) particularmente donde el tiempo para el vencimiento es relativamente corto tienen las gammas más altas reflejando el hecho que la opción es ejercida o expira sin ejercer y la delta resultante tenderá a 1 (en el caso de ser ejercida) o a 0 (en el caso de no ser ejercida).

3. Un valor pequeño de gamma indica que la delta cambia suavemente dado un cambio en el activo subyacente. Un valor alto de la gamma indica que la delta es muy sensible a los cambios en el precio del activo subyacente.

4. Los activos tiene una gamma mínima. Para la mayoría de los activos, la gamma es cero. La única excepción es para títulos con tasas de interés fijas las cuales tienen un valor de gamma diferente de 0 debido a la naturaleza convexa de los cambios en el precio dados los cambios en la tasa de interés.

4.3.3 Theta Θ

La **theta**, Θ, es la razón de cambio del valor de la opción o del portafolio con respecto al tiempo,

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

La theta no es del mismo tipo de cobertura que la delta. Existe incertidumbre acerca de los cambios en el precio del activo subyacente sobre un periodo corto de tiempo, pero no hay incertidumbre acerca del paso del tiempo mismo. Tiene sentido cubrirse en contra de los cambios del precio del activo, pero no del paso del tiempo. Por lo anterior, hay muchos agentes que usan la theta como un útil estimador del portafolio.

La theta está relacionada con el valor de la opción V, a la delta Δ y a la gamma Γ por la ecuación de Black-Scholes de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + rS\Delta + \Theta = rV.$$

En un portafolio con cobertura delta, la theta asegura que el portafolio gane la tasa libre de riesgo, a diferencia de la gamma.

Aquí se presentan las fórmulas de la theta para los contratos *put* y *call* (otra vez las fórmulas suponen que el subyacente paga D dividendos [14]):

$$\begin{array}{ll} Call & -\frac{S\sigma N(d_1)e^{-DT}}{2\sqrt{T}} + DS\phi(d_1)e^{-DT} - rXe^{-rT}\phi(d_2) \\ \\ Put & -\frac{S\sigma N(d_1)e^{-DT}}{2\sqrt{T}} - DS\phi(-d_1)e^{-DT} + rXe^{-rT}\phi(-d_2) \end{array}$$

donde:

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt, \quad N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{y } d_1 \text{ se define como en 4.18.}$$

La theta de una opción es caracterizada por el siguiente patrón de comportamiento [15]:

1. La theta es negativa reflejando la pérdida del valor cuando el tiempo para la expiración disminuye. Esta caída en el precio da al vendedor una ganancia la cual es compensada por la pérdida sufrida por el comprador.
2. La theta para una opción dentro o fuera del dinero (*in or out of the money*) es menor que para una correspondiente opción en el dinero (*at the money*).
3. La theta más alta (pero negativa) es para una opción en el dinero (*at the money*) con poco tiempo para el vencimiento.

Aunque el patrón de comportamiento de la theta asegura que siempre toma valores negativos se presentan algunos casos en los cuales puede ser positiva [3], en el Capítulo 1 Sección 1.11 se demuestra racionalmente este hecho.

Las formulas para opciones donde el subyacente no paga dividendos son:

$$\begin{array}{ll} Call & -\frac{S\sigma N(d_1)}{2\sqrt{T}} - rXe^{-rT}\phi(d_2) \\ \\ Put & -\frac{S\sigma N(d_1)}{2\sqrt{T}} + rXe^{-rT}\phi(-d_2) \end{array}$$

claramente la theta para una opción *call* europea siempre será negativa. Pero para una opción *put* europea no siempre sucede lo mismo, por ejemplo, si la tasa de interés y el precio de ejercicio son altos la theta para una opción *put* europea es positiva.

[3] Por ejemplo en opciones *put* europeas dentro del dinero (*in the money*), $S < X$, que no paga dividendos, y en opciones *call* europeas sobre tipos de cambio con tasa de interés muy alta y dentro del dinero (*in the money*), [1]

4.3.4 Vega κ

La vega, κ, es una cantidad muy importante y útil en la practica. Es la sensibilidad de la opción con respecto a la volatilidad,

$$\kappa = \frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

Es completamente diferente a las otras griegas puesto que es una derivada con respecto a un parámetro y no a una variable.

En la práctica, no sólo es muy díficil medir la volatilidad del subyacente en cualquier momento, sino que además es muy complicado predecir que hará en el futuro. Supongase que se tiene una volatilidad del 20% en una fórmula de valuación de opciones; ¿qué tan sensible es el precio de la opción a este valor?. La respuesta es dada por la vega.

La vega mide la sensibilidad a los cambios en la volatilidad de una simple opción o de un portafolio.

Aquí se presentan las fórmulas para las vegas de los contratos *put* y *call* (como siempre se supone que el subyacente paga D dividendos) [14]:

$$\textit{Call} \qquad S\sqrt{T}N(d_1)e^{-DT},$$

$$\textit{Put} \qquad S\sqrt{T}N(d_1)e^{-DT},$$

donde:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \quad \text{y } d_1 \text{ se define como en la ecuación 4.18.}$$

La vega de una opción es caracterizada por el siguiente patrón de comportamiento [15]:

1. Opciones que están fuera o dentro del dinero (*out of the money or in the money*) tienen vegas menores porque no son muy sensibles a los cambios en la volatilidad, reflejandose este hecho en que esas opciones tienen valores dominados por el valor intrínseco de la opción.

2. Opciones en el dinero (*at the money*), particularmente donde el tiempo para vencimiento es largo, tienen la vega mas alta.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

3. Una vega baja indica que la delta de la opción cambia suavemente para un cambio dado en la volatilidad. Un valor alto en la vega indica que la delta de la opción es muy sensible a los cambios en el valor de la volatilidad.

4. Los activos que tienen vega igual a 0, reflejan el hecho que la volatilidad no es un parámetro relevante para la valuación de los activos.

4.3.5 Rho ρ

La **rho**, ρ, es la sensibilidad del valor de la opción con respecto a la tasa de interés:

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

En la práctica casi siempre se usa una tasa dependiente del tiempo $r(t)$. La rho entonces podría ser la sensibilidad según las tasas supuestas.

La rho mide la sensibilidad para cambios en la tasa de interés libre de riesgo de una simple opción o de un portafolio.

A continuación se presentan las fórmulas para las rhos de los contratos *call* y *put* [14]:

$$\begin{array}{ll} Call & XTe^{-rT}\phi(d_2) \\ Put & -XTe^{-rT}\phi(-d_2) \end{array}$$

donde:

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad \text{y } d_1 \text{ es definida en la ecuación 4.18.}$$

La rho de una opción es caracterizada por el siguiente patrón de comportamiento [15]:

1. La rho para un *call* (*put*) es positiva (negativa) reflejando la dirección del impacto de un incremento en las tasa de interés sobre el valor de la opción.

2. La rho decrece con el tiempo para el vencimiento, reflejando la disminución en el descuento del precio de ejercicio.

Es conveniente aclarar que no siempre las dos últimas sensibilidades descritas aquí son consideradas como griegas.

4.3.6 Interacción entre las medidas de riesgo

En el análisis las medidas de riesgo, han sido tomadas por separado, sin embargo, en la práctica existe una substancial interacción entre las medidas de riesgo. La mayor parte de interacciones están entre delta, gamma, vega y theta.

Como se ya se mencionó antes la theta Θ, la delta Δ, la gamma Γ y el valor de la opción V están relacionadas por la ecuación de Black-Scholes. De hecho para un portafolio delta neutral (i.e., $\Delta = 0$) se tiene:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + \Theta = rV.$$

Esta ecuación muestra que cuando Θ es grande y positiva, la gamma tiende a ser grande y negativa y viceversa. Esto significa que la gamma de un portafolio, bajo ciertas condiciones, compensa a la theta de este portafolio. Note que cuando delta y gamma son cero, $\Theta = rV$, mostrando que el valor del portafolio crece a la tasa de libre de riesgo.

Por otra parte la delta y la gamma están ambas afectadas por los cambios en la volatilidad. El patrón de interacción es como sigue:

1. Los incrementos en la volatilidad resultan en deltas altas para opciones fuera y en el dinero (*out and at the money*). Los incrementos en la volatilidad reducen a la delta para opciones dentro del dinero (*in the money*). Este patrón refleja el hecho de que delta es, en un sentido, una medida de la probabilidad de ejercer la opción. El incremento en la volatilidad aumenta o disminuye la probabilidad de ejercicio para opciones fuera y en el dinero (*out, at the money*), y opciones dentro del dinero (*in the money*) respectivamente.

2. La gamma generalmente disminuye con un incremento en la volatilidad y viceversa. El cambio en la gamma para un cambio en la volatilidad es el más grande para una opción en el dinero (*at the money*), mientras que el cambio en la gammas es el menor para cambios en la volatilidad para opciones dentro y fuera del dinero (*in and out of the money*).

La implicación de esta relación es que donde la delta de una opción o portafolio es utilizada o replicada la opción subyacente, los cambios en la volatilidad pueden erosionar significantemente la eficiencia de la cobertura.

4.4 La aproximación por martingalas

Una vez que Black, Scholes (1973) y Merton (1973b) presentaron sus modelos de valuación de opciones, fue claro que su aproximación podía ser usada para valuar una variedad de títulos de los cuales sus liquidaciones (*payoffs*) dependieran de los precios de otros valores (*security*).

Es interesante observar que la valuación de títulos derivados no requiera ninguna restricción adicional sobre las preferencias de los agentes además de no-estacionalidad, es decir, los agentes prefieren más a menos, lo cual regula las oportunidades de arbitraje. Por lo tanto, la fórmula de valuación para cualquier título derivado que puede ser valuado de esta manera debe ser idéntica para *todas* las preferencias que no admiten arbitraje. En particular, la fórmula de valuación debe ser a pesar de las tolerancias de riesgo de los agentes, tal que una economía compuesta de inversionistas neutrales al riesgo, debe producir el mismo valor de la opción que una economía compuesta de inversionistas renuentes al riesgo. Pero bajo la neutralidad en riesgo, todos los activos deben ganar la misma tasa esperada de rendimiento, la cual bajo la suposición (A2), debe igualar a la tasa libre de riesgo r. Esta colaboración fundamental, debida a Cox y Ross (1976), simplifica el cálculo de las fórmulas de valuación de opciones enormemente porque en una economía neutral al riesgo el precio de la opción es simplemente el valor esperado de su liquidación "descontada" a la tasa libre de riesgo:

$$V(t) = e^{-r(T-t)}E_t[Max(S^*(T) - X, 0)]. \tag{4.23}$$

Sin embargo, la esperanza condicional en 4.23 debe ser evaluada con respecto a la variable aleatoria $S^*(T)$, no $S(T)$, donde $S^*(T)$ es el precio del activo al final *ajustado para neutralidad en riesgo.*

Específicamente, bajo la suposición (A3), la distribución condicional de $S(T)$ dado $S(t)$ es simplemente una distribución lognormal con:

$$E[logS(T)/S(t)] = logS(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)$$

y

$$Var[logS(T)/S(t)] = \sigma^2(T-t).$$

Bajo la neutralidad en riesgo, la tasa esperada de rendimiento para todos los activos debe ser r, y puesto que la distribución condicional del precio del activo al final neutral al riesgo $S^*(T)$ es también lognormal, pero con:

$$E[logS(T)/S(t)] = logS(t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)$$

y

$$Var[logS(T)/S(t)] = \sigma^2(T-t).$$

Este procedimiento es llamado el método de *valuación neutral al riesgo* y bajo las suposiciones (A1)-(A4), la esperanza en 4.23 puede ser evaluada explícitamente como una función de distribución acumulativa de la normal estándar y así obtener la fórmula de Black-Scholes 4.15.

Para enfatizar la generalidad del método de valuación de riesgo neutral en valuación de liquidaciones (*payoff*) arbitrarias, 4.23 es casi siempre re-escrito como:

$$V(t) = e^{-r(T-t)} E_t^*[Max(S(T) - X, 0)], \tag{4.24}$$

donde el asterisco en E_t^* indica que la esperanza es tomada con respecto a una distribución de probabilidad ajustada, para ser consistente con la neutralidad en riesgo. En un ambiente mas formal, Harrison y Kreps (1979) han mostrado que la distribución de probabilidad ajustada es precisamente la distribución bajo la cual el precio del activo sigue una martingala, o mejor dicho se comporta como una martingala; así ellos llaman a la distribución ajustada *medida de martingala equivalente.* Por consiguiente, el método de valuación neutral al riesgo es también conocido como la *técnica de valuación por martingalas.*

Capítulo 5

Aplicaciones

En este capítulo se hace uso de las herramientas y teoría antes desarrolladas dentro de un campo muy importante para la economía mexicana como lo es la exportación de petróleo. La finalidad es cubrirse del riesgo de pérdida por las fluctuaciones en el precio de tal subyacente. Los ejemplos se realizarán en dos escenarios reales, uno en donde existan condiciones favorables y otro donde sean adversas para un país exportador de petróleo como es el caso de México; esto con el objetivo de comparar los resultados obtenidos con las estrategias realizadas por el gobierno ante tales circunstancias (principalmente en la caída del precio del petróleo a principios de 1998) y los obtenidos con estrategias de cobertura utilizando contratos de futuros y opciones.

Para cada uno de los dos ejemplos se consideran dos casos:

En el Caso 1 se hace un análisis de la cobertura utilizando como activo subyacente el petróleo WTI (West Texas Intermediate) dado que no existe un mercado de productos derivados mexicano o extranjero donde se puedan comerciar opciones y futuros sobre el crudo mexicano.

Para tal objetivo se utiliza como unidad monetaria el dólar americano y como tasa de interés libre de riesgo la tasa T Bills a 30 años [1].

En el Caso 2 se hace un análisis de la cobertura utilizando como subyacente a la propia Mezcla mexicana, simulando la existencia de un mercado mexicano de derivados en donde se comercialice el petróleo.

La unidad monetaria es el peso mexicano y como tasa de interés libre de riesgo

[1] Las series de datos utilizados, tanto el precio del WTI que es semanal desde enero de 1992 hasta diciembre de 1998; así como la tasa de interés se presentan en el Apéndice C al final del presente trabajo.

se emplea la de los CETES a 28 días [2].

El periodo de cobertura utilizado para todos los ejemplos es de 6 meses y se supondrá que se tiene una posición corta para el caso de los futuros y una posición larga en contratos *put* europeos.

5.1 Ejemplo 1. Primer semestre, 1998

En este primer ejemplo el periodo a considerar es el que inicia el primero de enero de 1998 y termina el primero de julio del mismo año.

Se presenta el entorno del mercado petrolero así como el plan a seguir establecido a inicios del año por el gobierno mexicano, posteriormente se muestran los resultados obtenidos a finales de 1998 dadas las condiciones que prevalecieron durante todo el año y las decisiones tomadas. Finalmente las secciones donde se utilizan estrategias con futuros y opciones establecen los resultados que se hubieran obtenido si en 1998 el gobierno federal hubiera decidido cubrirse con productos derivados.

5.1.1 Entorno y resultados obtenidos

A principios de 1998 parecía que las condiciones que habían deteriorado el mercado habían sido dadas, en primer lugar, en cuanto a la demanda se refiere, por una desaceleración de la actividad económica la cual había sido originada principalmente por la reducción del ritmo de crecimiento y en algunos casos en las tasas de crecimiento negativas de los países asiáticos que empezaron a mostrar signos de debilidad financiera en el verano de 1997. Corea, Singapur y Malasia tuvieron problemas muy serios que se hicieron patentes a finales de 1997 e inicios de 1998. Algunos de estos países, mostraron una debilidad en sus sistemas financieros mucho mayor de la que se había previsto y, por lo tanto, la demanda prevista para el lejano oriente derivada de crudo se redujó sustancialmente así como los pronósticos.

El segundo factor importante que afectó al mercado, fue que a finales de 1997 y principios de 1998, el invierno fue más caliente de lo que se tenía registrado en estadísticas en los Estados Unidos y en Europa Occidental, lo cual disminuyó sustancialmente la demanda de combustibles fósiles y de otros energéticos. La predicción que se había hecho en cuanto a las temperaturas no fue muy acertado, ya que, se pronosticaron temperaturas por debajo de las reales. Estas dos últimas condiciones proporcionaron nueva información a los mercados a principios de 1998 y esto provocó

[2] Las series del precio de la mezcla, las tasas de interés y tipo de cambio se incluyen en el Apéndice C.

una caida adicional en la demanda.

Posteriormente en lo que a la oferta se refiere, se tuvo un incremento significativo en la producción de los principales países productores, como Arabia Saudita, Venezuela, Noruega, México, Irán entre otros. La oferta de petróleo crudo superó en promedio a la demanda en 2.1 mil millones de barriles diarios. Este desequilibrio entre la oferta y demanda mundiales de petróleo crudo ocasionó una distorsión en los patrones de intercambio. La contracción de la demanda de Asia trajo como consecuencia que el mercado de Estados Unidos recibiera crudos asiáticos y otros cuya comercialización se considera atípica. Además, el rechazo de los compradores asiáticos desvió importantes volúmenes de crudo provenientes del Medio Oriente y del oeste de Africa hacia Europa y Estados Unidos, cuyos mercados permanecieron más fuertes que los demás centros de consumo. Entonces se observó la combinación de dos factores: una disminución en la demanda y un incremento en la oferta.

Ante estas condiciones del mercado, México tuvo un acercamiento con algunos países entre los que figuraban Venezuela y Arabia Saudita. En esa reunión se discutieron las condiciones del mercado, se apreció que las economías asiáticas entrarían en un ciclo de recuperación a partir del tercer o cuarto trimestre de ese año. Lo cual implicaría que la demanda derivada para productos de energía y sobre todo de combustibles fósiles en el lejano Oriente se recuperaría. También se apreció que las condiciones climáticas mundiales volverían a su nivel normal durante ese año.

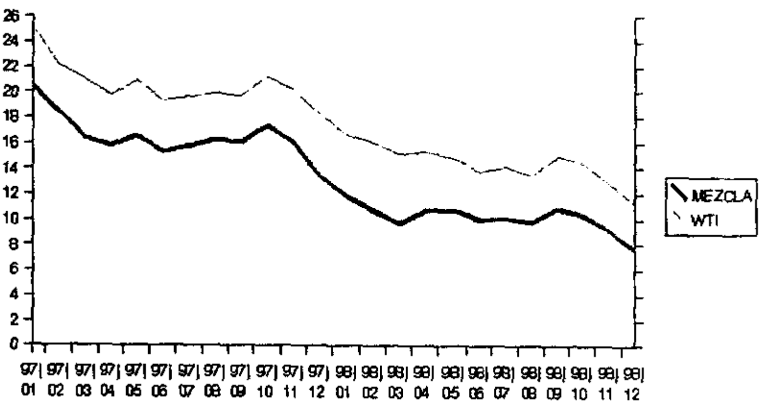
Ante esta situación, se concluyó que una reducción temporal por parte de los principales países productores conduciría a un incremento en los niveles de precios, que se estimó llegaría a ser entre 17 y 18 dólares para el West Texas Intermediate, en promedio, durante el año. Y alrededor de 13.10 dólares por barril para la mezcla del crudo mexicano, en promedio, durante el año.

En el programa operativo de PEMEX (Petróleos Mexicanos) de 1998 se preveía la exportación de 1 millón 892 mil barriles diarios. A raíz del acuerdo de Riad, México tomó la decisión unilateral de reducir su exportación en 100 mil barriles, se hicieron ajustes para exportar en promedio 1 millón 742 mil barriles diarios [3].

Como consecuencia, en el periodo de 1997 a 1998 la industria petrolera internacional atravesó por una de las etapas más criticas de su historia; los precios del petróleo crudo se colapsaron en el mundo, retornando a niveles que, en términos reales, reflejaron los prevalecientes en el mercado antes de la crisis petrolera internacional de 1973; vease la Gráfica 5.1, donde se muestra la evolución del precio del petróleo.

Esta caída abrupta de los precios encierra una transferencia masiva de recursos de

[3]Conferencia de prensa ofrecida por el Secretario de Energía y el Director General de PEMEX el día 25 de marzo de 1998. http://www.planet.com.mx/macroeconomia/macro57/crisis.htm.



Grafica 5.1 *Evolucion del precio del petroleo (dolares por barril)*

los países productores a los consumidores y reduce, en forma significativa, las utilidades de las grandes empresas integradas, a la vez que alienta fusiones y adquisiciones de la industria petrolera y la racionalización del sector petroquímico.

En este escenario adverso, los resultados que tuvo PEMEX en sus finanzas en 1998, muestran con claridad el efecto de la crisis del mercado petrolero internacional. La exportación de petróleo crudo fue de 1,718,000 barriles diarios en promedio durante ese año. La utilidad de operación consolidada, antes del pago de impuestos y derechos, ascendió a 141 mil millones de pesos, equivalente a más de 15 mil millones de dólares norteamericanos. El rendimiento neto fue negativo por 10.6 miles de millones de pesos.

Los ingresos obtenidos por la empresa y sus organismos subsidiarios alcanzaron los 256,986 millones de pesos, lo que representa un 15.4 por ciento menores en términos reales a los obtenidos en 1997 (véase el estado de resultados consolidado de PEMEX al 31 de diciembre de 1998 [4]); en cuanto a las ventas netas de exportación ascendieron a poco más de 72 mil millones de pesos de las cuales aproximádamente el 68.09% es por exportaciones de petróleo crudo.

[4]PEMEX, Informe anual 1998

ESTADO DE RESULTADOS CONSOLIDADO
(Cifras en miles de pesos)

	al 31 de diciembre de 1998
Ventas netas:	
En el pais	184,781,001
De exportacion	72,205,616
	256,986,617
Utilidad en cambios, neta	983,601
Otros ingresos	7,778,549
Total de ingresos	265,748,767
Costos y gastos de operacion:	
Costo de lo vendido	91,727,063
Gastos de distribucion	9,602,693
Gastos de administracion	17,650,525
Intereses, netos	2,893,745
Otros gastos	2,126,322
Impuesto especial sobre produccion y servicios	65,854,312
Derechos sobre hidrocarburos y otros	86,033,222
Total de costos y gastos de operacion	275,887,882
(Perdida) rendimiento neto	($10,139,115)

5.1.2 Resultados utilizando futuros

En esta sección se analizarán los resultados al utilizar estrategias de cobertura estática y dinámica, asimismo y para cada una de las aplicaciones se emplean tasas de interés constantes y variables a lo largo de los seis meses. Por tanto se tendrán cuatro resultados para cada uno de los casos.

Como ya se ha observado en la sección anterior, al primer riesgo al que se expone Petróleos Mexicanos es a la baja en el precio del petróleo, por tanto la primer pregunta a responder es ¿qué porcentaje de volumen con respecto al total de exportación debe utilizar para tomar una posición corta en contratos de futuros, de tal forma que las pérdidas se minimizen?

CASO 1. Activo subyacente: WTI

La tendencia del precio del petróleo Mezcla en dólares es similar a la del precio del WTI, (Gráfica 5.1), esta condición aunada al hecho de que no existe un mercado donde se comercie con futuros sobre el petróleo Mezcla, hace suponer que es factible utilizar al subyacente WTI para efectos de cobertura contra los movimientos en el precio de la Mezcla. Se supone además que cada barril de crudo mexicano será cubierto con una unidad de WTI.

	WTI (dls. por barril)	Tasa de interes	Futuro (6 meses)
Enero 8, 1998	$16.97	5.75%	$17.255
Julio 2, 1998	$14.57		

Tabla F1. Datos al inicio y al final de la cobertura.

	ΔF	ΔS
06-enero-1994		
07-julio-1994	0.27708	3.70
05-enero-1995	0.38154	-1.40
06-julio-1995	0.36119	-0.35
04-enero-1996	0.31575	2.54
04-julio-1996	0.34481	1.30
02-enero-1997	0.40033	4.48
03-julio-1997	0.47654	-6.13
08-enero-1998	0.35913	-2.59
σ	0.05925	3.545
ρ		-0.68562
Radio de cobertura		41.02132

Tabla F2. Resultados al utilizar una tasa de interes constante.

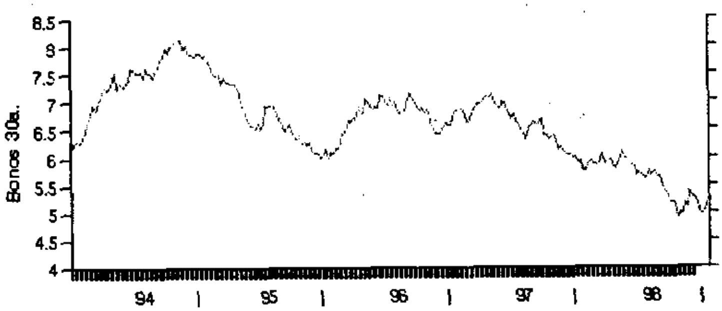
Resultado A. Cobertura estática y tasa de interés constante.

Al inicio de la cobertura, el precio del petróleo WTI es de \$16.97 dólares, la tasa de interés (a treinta años) es de 5.75% y el precio del futuro con fecha de entrega en la primera semana de julio es de \$17.25 dólares, véase la Tabla F1.

Se hacen un total de ocho observaciones a lo largo de cuatro años sobre los cambios en el precio del futuro, ΔF, así como del subyacente, ΔS, esto como consecuencia de emplear ocho contratos de futuros (o contratos *forward*) no traslapados en sus periodos de vida. Para el cálculo del precio del futuro se utiliza la fórmula (2.3) con una tasa de interés constante durante los seis meses de vida del contrato, dicha tasa es la vigente al firmarse el acuerdo. En la Tabla F2 se observa que el radio de cobertura es igual a 41, quiere decir que por cada unidad (barriles) de activo expuesto hay 41 unidades cubiertas, es decir el 97.6% del total.

	WTI (dls. por barril)	Futuro (6 meses)	Radio de Cobertura
Enero 8, 1998	\$16.97	\$17.259	40.6
Julio 2, 1998	\$14.57		

Tabla F3. Datos al inicio y al final de la cobertura.



Grafica 5.2 Evolucion de las tasas de interes (bonos a 30 anos).

El programa operativo anual de PEMEX, preveía la exportación de 1,892,000 barriles diarios; tomando esto como base, el volumen estimado de exportación para el primer semestre del 98 es de: (182)(1,892,000) = 344,344,000 barriles.

Utilizando el radio de cobertura obtenido, el volumen a cubrir es de 336,145.333 barriles y esto se logra tomando una posición corta en 336,145 contratos de futuros sobre WTI (dejando fuera 333) con precio de entrega \$17.255 dólares. Llegada la fecha de madurez (primera semana de julio), el precio *spot* se encuentra en los \$14.57, lo que implica una ganancia de \$2.685 dólares por barril y por tanto un total de \$902,549,325.00 dólares.

Resultado B. Cobertura estática y tasa de interés variable.

Para este resultado lo único que varía del anterior es que se utiliza la tasa de interés $r(t)$ como una función conocida del tiempo; es decir, en lugar de utilizar una tasa de interés constante durante la vida de cada contrato se emplean las series completas de las tasas de interés desde 1994 hasta el primer semestre de 1998, lo que implica que el precio del futuro se ajusta con la llegada de la información sobre

	ΔF	ΔS
06-enero-1994		
07-julio-1994	0.29158	3.70
05-enero-1995	0.38653	-1.40
06-julio-1995	0.34382	-0.35
04-enero-1996	0.31427	2.54
04-julio-1996	0.36509	1.30
02-enero-1997	0.39513	4.48
03-julio-1997	0.48271	-6.13
08-enero-1998	0.34902	-2.59
σ	3.58435	3.545
ρ		0.99993
Radio de cobertura		0.98895

Tabla F4. Resultados al utilizar la tasa de *interes como funcion conocida del tiempo.*

las tasas. Cabe hacer la observación que al principio del año 1998 no se poseen los valores reales futuros de la tasas, sin embargo se hace la suposición que se tienen *buenas estimaciones de las mismas*. Los resultados se resumen en la Tabla F3. Como se puede observar el radio de cobertura es bastante aproximado al caso anterior, por tanto, el análisis y resultados son iguales a los obtenidos en el resultado A.

La varianza de ΔF para el resultado A es 0.05925 y para el resultado B es de 0.058542, lo cual indica que la variabilidad semestral en las tasas de interés fue reducida (gráfica 5.2), sin embargo, el coeficiente de correlación entre ΔF y ΔS es de -0.68 para el resultado A y -0.669 para el resultado B, quiere decir que en ambos casos los cambios en el precio del futuro explican alrededor del 77% los cambios del precio del petróleo.

Resultado C. Cobertura dinámica y tasa de interés variable.

En esta sección se utiliza, al igual que en el resultado B, la tasa de interés $r(t)$ como función conocida del tiempo y los conceptos de cobertura dinámica; es decir que las negociaciones son en un mercado donde existe la compensación por diferencias. Los datos al inicio y final de la cobertura se pueden observar en la Tabla F3. Se omite el análisis donde se emplea la tasa de interés constante por ser equivalente en los resultados obtenidos.

El coeficiente de correlación es casi uno, véase la tabla F4, esto indica que ΔF

	Sin cobertura		Cobertura Estatica		Cobertura Dinamica	
Ingresos por exportaciones	$29,053.37	(us)$3,434.15	$30,628.50	(us) $3,618.45	$30,628.50	(us) $3,618.45
Ganancias en futuros			$8,074.21	(us) $902.55	$4,118.71	(us) $460.40
Total	$29,053.37	(us)$3,434.15	$38,702.70	(us) $4,521.00	$34,747.21	(us) $4,078.85

Tabla F6. Comparacion de resultados. Cifras en millones de pesos y en millones de dolares.

explica en un 99.9% los cambios en el precio del subyacente. El radio de cobertura es de 0.98895; lo que significa que por cada barril de petróleo expuesto hay 0.98895 unidades cubiertas; es decir un 49.72% del total, el cual se calculó en el resultado A y asciende a 344,344,000 barriles.

Por lo tanto, la cantidad a cubrir es de solo 171,215,464 barriles en 171,215 contratos al tomar una posición corta; el precio de entrega es de $17.259 y el precio *spot* en la primera semana de julio es de $14.57, lo que implica una la ganancia de $2.689 dólares por barril y en suma $460,397,135.00 dólares.

Comparación.

Para obtener una estimación de los ingresos por concepto de exportación que México hubiese tenido en este primer semestre al cumplir con sus proyecciones de venta, se utiliza la cantidad promedio de exportación de 1,892,000 barriles diarios, entonces:

$$Ingresos \quad estimados \quad = \quad 1,892,000 \sum_{i=1}^{182} Mezcla_i \quad = \quad us\$3,618,450,000.00$$

donde $Mezcla_i$ es el precio del barril en el día i cotizado en dólares [5].

De acuerdo con lo anterior, los ingresos más las ganancias en contratos de futuros suman un total de $4,520,999,325.00 para el caso de cobertura estática, tales ganancias representan el 24.94% de los ingresos estimados. En el caso donde se utiliza cobertura dinámica la suma total es de $4,078,847,135.00 donde las ganancias representan el 12.72% de los ingresos estimados por exportación.

Sin embargo, durante el primer trimestre las ventas internacionales fueron de 1,845,000 barriles diarios en promedio y para cumplir con los convenios hechos con otros países exportadores de petróleo se redujeron a 1,745,000 barriles diarios durante el segundo trimestre, lo que suma un total de 323,100,000 barriles, tal cantidad representa el 93.83% de lo que se tenía previsto al inicio del año. Por otra parte

[5] Sólo se cuenta con datos mensuales promedio.

	Mezcla (pesos por barril)	Futuro (6 meses)
Enero 2, 1998	$95.03	$104.46
Julio 1, 1998	$90.71	

Tabla F6. Datos al inicio y al final de la cobertura.

los ingresos reales aproximados suman un total de $3,434,152,500.00 dólares, lo que representa el 94.91% de los ingresos estimados sólo que con cero ganancias. Los ingresos tanto en pesos como en dólares se adjuntan en la Tabla F5.

Se puede observar lo siguiente al hacer una comparación entre la pérdida neta registrada en el estado de resultados de 1998 y las ganancias en contratos de futuros:

1. Utilizando cobertura estática las ganancias representan el 79.63% de la pérdida neta.
2. Utilizando cobertura dinámica las ganancias representan el 40.62% de la pérdida neta.

Haciendo la observación de que tales ganancias son de un solo semestre.

CASO 2. Activo subyacente: Mezcla mexicana

Para este caso se hace la suposición de la existencia de futuros sobre la Mezcla en el mercado de derivados en México cotizados en pesos. Se agrega el supuesto de que la cantidad del subyacente es de 1,000 barriles por contrato.

Resultado A. Cobertura estática y tasa de interés constante.

Al inicio de la cobertura, el precio del crudo Mezcla es de $95.03 pesos por barril y el precio del futuro con fecha de entrega la primera semana de julio es de $104.46 pesos, (Tabla F6). Al igual que en los resultados anteriores se tienen ocho observaciones a lo largo de cuatro años como consecuencia de utilizar contratos donde el periodo de vida de cada uno no se intersecta con el de los demás. El precio de los futuros se calcula de acuerdo a la fórmula (2.3) con la tasa de interés constante hasta la fecha de madurez de cada contrato, empleándose la vigente al inicio del contrato.

Como se puede observar en la Tabla F7, los cambios en el precio de futuro en un

	ΔF	ΔS
03-enero-1994		
01-julio-1994	1.97359	18.92620
02-enero-1995	4.44116	23.12600
03-julio-1995	10.85124	17.30000
02-enero-1996	22.48275	30.64518
01-julio-1996	30.65902	10.62793
02-enero-1997	21.57328	27.29386
01-julio-1997	22.02121	-37.01086
02-enero-1998	14.52938	-30.02330
σ	9.87937	26.17842
ρ		-0.16462
Radio de cobertura		0.43620

Tabla F7. Resultados al utilizar una tasa de interes constante.

	Mezcla (pesos por barril)	Futuro (6 meses)
Enero 2, 1998	$95.03	$104.28
Julio 1, 1998	$90.71	

Tabla F8. Datos al inicio y al final de la cobertura.

solo contrato semestral distan mucho en reflejar los cambios reales en el precio del subyacente, de hecho, el coeficiente de correlación entre ambas series, ΔF y ΔS, es de -0.16462 y por tanto el radio de cobertura muestra que de una unidad expuesta del subyacente deben cubrirse 0.4362 unidades, lo que equivale al 30.37% del total.

Si al principio del año se tenía previsto exportar un volumen aproximado de 344,344,000, es decir 1,892,000 barriles diarios en promedio, entonces la cantidad a cubrir hubiese sido de 104,583,521 barriles en 104,584 contratos de futuros con precio de entrega de $104.46 pesos para la primera semana de julio.

Supóngase que así fue, como el precio del barril estuvo en $90.71 pesos en la primera semana de julio, la ganancia total fue de $1,438,030,000.00 pesos, la cual representa un 4.7% de los ingresos estimados ($30,628,495,748.40 pesos).

Resultado B. Cobertura estática y tasa de interés variable.

	ΔF	ΔS
03-enero-1994		
01-julio-1994	2.31732	18.92620
02-enero-1995	4.29211	23.12600
03-julio-1995	22.93225	17.30000
02-enero-1996	22.36989	30.64518
01-julio-1996	22.91970	10.62793
02-enero-1997	19.84373	27.29386
01-julio-1997	17.88136	-37.01086
02-enero-1998	12.39457	-30.02330
σ	8.37475	26.17842
ρ		0.01674
Radio de cobertura		0.05233

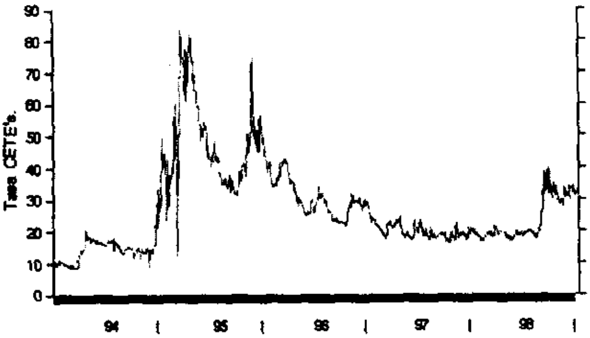
Tabla F9. Resultados al utilizar la tasa de interes como funcion conocida del tiempo.

En esta sección y a diferencia del resultado anterior, solamente se cambia el valor de la tasa de interés de una constante a una función conocida del tiempo, para esto se emplean las series completas de los CETES desde 1994 hasta el primer semestre de 1998. Cabe hacer la observación que al principio del año 1998 no se poseen los valores reales de la tasas, sin embargo se hace la suposición que se tienen buenas estimaciones de las mismas.

Al observar la Tabla F9, los cambios en el precio de futuro en un solo contrato semestral no explican los cambios reales en el precio del subyacente, el coeficiente de correlación entre ambas series, ΔF y ΔS, es de 0.01674. Así mismo el radio de cobertura muestra que por una unidad expuesta del subyacente deben cubrirse 0.05233 unidades, esto es, el 4.997% del total, que al igual que en ejemplo anterior es de 344,344,000 barriles, por lo que la cantidad cubierta es de sólo 17,123,451 unidades en 17,123 contratos, (sin tomar en cuenta las 451).

Por lo tanto, las ganancias en contratos de futuros suman un total de $232,359,110 pesos, las cuales representan solamente un 0.76% de los ingresos estimados totales, los que suman un total de $30,628,495,748.40 pesos por la venta de 1,892,000 barriles diarios.

Un aspecto importante de estos resultados es que muestra el efecto de la variabilidad semestre a semestre de las tasas de interés sobre los precios futuros, y observando las series históricas de las tasas el periodo de mayor inestabilidad fue en el año de 1995, (gráfica 5.3).



Grafica 5.3 Evolucion de las tasas de interes de CETE's.

Resultado C. Cobertura dinámica y tasa de interés constante.

En esta situación se hace uso de los conceptos de cobertura dinámica. Los datos al inicio y final de la cobertura se pueden observar en la Tabla F6.

El **radio de cobertura** es de 0.83852, lo que equivale a decir que el 45.61% del volumen total debe ser cubierto con contratos de futuros. En este caso, el coeficiente de correlación entre las observaciones de los movimientos de los precios tanto del subyacente como del futuro, es de 0.95198 lo que a primera instancia dice que ΔF explica en un 94.37% a la variable ΔS.

Si al principio del año se tenía previsto exportar un volumen aproximado de 344,344,000, es decir 1,892,000 barriles diarios en promedio, entonces la cantidad a cubrir hubiese sido de 157,049,872 barriles en 157,050,000 contratos de futuros con precio de entrega de $104.46 pesos para la primera semana de julio.

Supóngase que así fue, como el precio del barril estuvo en $90.71 pesos en la primera semana de julio, la ganancia total fue de $2,159,437,500.00 pesos, la cual representa un 7.05% de los ingresos estimados ($30,628,495,748.40 pesos).

Resultado D. Cobertura dinámica y tasa de interés variable.

Los datos al inicio y final de la cobertura se pueden observar en la Tabla F8.

Para esta situación se tiene un coeficiente de correlación de 0.95198, lo cual es

		Cobertura			
		Estatica		Dinamica	
	Sin cobertura	Tasa constante	Tasa variable	Tasa constante	Tasa variable
Ingresos por exportaciones	$29,053.37	$30,628.50	$30,628.50	$30,628.50	$30,628.50
Ganancias en futuros		$1,438.03	$232.36	$2,159.44	$2,227.76
Total	$29,053.37	$32,066.53	$30,860.85	$32,787.93	$32,856.25

Tabla F10. Comparacion de resultados. Cifras en millones de pesos.

equivalente a decir que ΔF explica en un 95% el comportamiento de ΔS; por otra parte el **radio de cobertura** es de 0.91115, es decir que del volumen total se debe cubrir el 47.68%, que al igual que en ejemplos anteriores es de 344,344,000. Por lo tanto, las unidades cubiertas suman 164,168,000; como el precio del subyacente a la fecha de madurez es menor que el precio del futuro en \$13.57 pesos, las ganancias totales ascienden a \$2,227,759,760.00 pesos (el 7.27% de los ingresos estimados).

Comparación.

Las ventas internacionales fueron de 1,845,000 barriles diarios en promedio durante los tres primeros meses, de acuerdo con el convenio que México hizo con otros países exportadores de petróleo la cantidad exportada se redujo para el segundo trimestre en 100,000 barriles diarios con respecto al primero; por lo que la suma total en el semestre es de 323,100,000 barriles. Con esta información y utilizando las series de precios de la Mezcla y los tipos de cambio de enero a junio se obtiene como ingresos reales un total de \$29,053,367,731.50 pesos, (Tabla F10), que representa el 94.86% de los ingresos estimados, pero con cero ganancias.

Si se comparan las cantidades de dinero obtenidas en contratos de futuros con respecto a la pérdida neta registrada en el estado de resultados que dió a conocer PEMEX al final del año 1998, se observa lo siguiente:

1. Utilizando cobertura estática y tasa de interés constante, las ganancias representan el 14.18% de la pérdida neta.

2. Para el caso de cobertura estática y tasa de interés variable, representan el 2.29%.

3. Para el caso de cobertura dinámica y tasa de interés constante, representan el 21.30%.

4. Para el caso de cobertura dinámica y tasa de interés variable, representan el 21.29%.

Considerando que las ganancias son de un solo semestre.

5.1.3 Resultados utilizando opciones

En esta sección se presenta un análisis de los resultados que se hubieran obtenido en 1998 si se hubieran utilizado opciones como instrumento de cobertura. Se dan los dos casos, uno donde el activo subyacente es el petróleo WTI (West Texas Intermediate) y el otro donde el activo es la Mezcla mexicana. Aunque se presentan los valores para ambas opciones *put* y *call* europeas, el análisis se hace sólo con la posición larga en una opción *put*, (se compra el derecho a vender), ya que se supone que México como país exportador lo único que quiere es cubrirse de los cambios en el precio del petróleo y no especular.

CASO 1. Activo subyacente: WTI.

En primera instancia se presenta la información disponible al inicio del periodo de cobertura y los resultados obtenidos con ella. Se observa que la tasa de interés T Bills al inicio del periodo es casi constante, ya que la volatilidad es de apenas 0.19%, mientras que con el activo subyacente pasa lo contrario, tiene una volatilidad de 27.95 % y un rendimiento medio negativo de -0.0633. (Ver Tabla P1).

En la Tabla P1 se muestran el valor del activo subyacente y la tasa de interés al principio y al final del periodo de cobertura, sin embargo los cálculos son hechos sólo con la información disponible al principio del periodo (01-enero-1998).

Todos los cálculos analizados aquí se refieren a dos precios de ejercicio (ver Tabla P1), el mínimo es el supuesto si el valor del activo subyacente se invirtiera a la mínima tasa de interés libre de riesgo y el segundo es el máximo supuesto si el valor del activo subyacente se invirtiera a la máxima tasa de interés libre de riesgo.

Es importante mencionar, que se está utilizando una cobertura estática, es decir, la delta es calculada al inicio del periodo y durante el mismo no se ajusta.

Se puede observar en la Tabla P2 que dada una opción *put* con precio de ejercicio X_1 el cambio de esta con respecto al activo subyacente es de -43.66%, es decir, dado un incremento en el precio del petróleo el valor de la opción sufre un decremento de aproximadamente 44%. De la misma forma si se tiene una opción *put* con precio de ejercicio X_2, la delta de esta opción es de -45.05% lo que significa que si el petróleo incrementa en una unidad el valor de la opción decrece en un 45.05%. Obsérvese que como se esperaba, el valor de la delta para ambos precios de ejercicio es cercano a 50%, indicando que al principio del periodo las opciones están en el dinero (*at the money*), es decir, no se esperan pérdidas ni ganancias.

Media	
S	-0.06330
r	0.03826
Desviación Estándar	
S	0.27952
r	0.00197
Activo Subyacente	
08-Enero-98	16.97
08-Julio-98	13.92
Tasa de Interés	
08-Enero-98	0.03398
08-Julio-98	0.03344
Precio de Ejercicio	
Mínimo X1	17.05542
Máximo X2	17.17433
Valor Opción Call	
X1	1.43137
X2	1.37552
Valor Opción Put	
X1	1.22947
X2	1.29052

Tabla P1. Datos generales.

Sensibilidades de la Opción:		
	Call	**Put**
Delta		
X1	0.56332	-0.43668
X2	0.54943	-0.45057
Gamma		
X1	0.11744	0.11744
X2	0.11803	0.11803
Theta Anual		
X1	-1.59742	-1.02764
X2	-1.59791	-1.02416
Vega %		
X1	4.72673	4.72673
X2	4.75035	4.75035
Rho %		
X1	4.06405	-4.32000
X2	3.97418	-4.46832

Tabla P2. Sensibilidades de la Opción.

En cuanto a la sensibilidad gamma, la cual mide el cambio de la sensibilidad delta con respecto al activo subyacente, es de 0.1174 y 0.1180 para una opción *put* con precio de ejercicio X_1 y X_2 respectivamente, lo cual reafirma que la cobertura estática es una buena estrategia, es decir, los cambios en el radio de cobertura con respecto al activo subyacente no llega ni a 0.12 y no hay necesidad de hacer reajustes frecuentemente para mantener una posición delta neutral.

En lo que se refiere a la sensibilidad theta, se puede decir que el valor de la opción disminuye en 0.00288 y en 0.00287 conforme avanza el tiempo (por día) y se acerca el tiempo de expiración. Como se menciona en el Capítulo 4, la theta es más bien utilizada como estadístico descriptivo y no como medida de riesgo.

Por otra parte, el valor de la sensibilidad vega indica que dado un valor de 27.95% en la volatilidad del precio del petróleo y un incremento en dicho valor se tendrá un incremento de 4.72% y 4.75% en el valor de la opción con precio de ejercicio X_1 y X_2 respectivamente.

Finalmente qué tan sensible es el valor de la opción con respecto a un cambio en la tasa de interés libre de riesgo es dada por la rho, la cual indica que dado un incremento en la tasa de interés el valor de la opción *put* sufrirá un decremento de 4.32% y 4.46%.

De lo anterior se concluye que el número de barriles determinado con el valor de la delta utilizando cobertura estática y con un periodo de cobertura de seis meses es adecuado, ya que se nota poca sensibilidad en el radio de cobertura con respecto al activo subyacente, así como en el valor de la opción con respecto al tiempo y a la volatilidad del activo subyacente.

Si se toma en cuenta que al inicio del periodo se estimó un volumen de exportación de 1.892 millones de barriles diarios (mbd) en promedio, entonces el total de exposición es de 344,344,000 barriles que se esperan exportar en seis meses. Dado este total de exposición se determina que el volumen de barriles a cubrir es de 257,683,135 y 227,357,314 barriles para el precio de ejercicio X_1 y X_2 respectivamente, quedando al descubierto 86,660,865 y 116,986,666 barriles, en el mismo orden.

A la fecha de ejercicio (01-julio-1998) el precio del petróleo sufrió una caída de 3.05 doláres, lo cuál representa una ganancia dada una posición corta con opciones sobre el crudo WTI, ya que la liquidación dado el precio de ejercicio X_1 y X_2 es de (us)\$3.13542 y (us)\$3.25433 respectivamente, por barril de petróleo cubierto.

Para los precios de ejercicio X_1 y X_2 las ganancias netas son (us)\$456,819,012.43 y (us)\$466,180,207.76 respectivamente, y suponiendo que dado que el petroóleo fue cubierto y por lo tanto no fue necesario el recorte en el volumen de exportaciones, entonces se obtiene un ingreso neto de (us)\$4,094,925,627.42 y (us)\$4,178,839,382.33 en el primer semestre del 98 (ver Tabla R1).

	Sin cobertura	Con cobertura X1	Con cobertura X2
Ingresos por exportación	\$3,434.15	\$3,618.45	\$3,618.45
Ganacias por opciones		\$456.82	\$466.18
Total	\$3,434.15	\$4,075.27	\$4,084.63

(millones de dolares)

	Sin cobertura	Con cobertura X1	Con cobertura X2
Ingresos por exportación	\$29,053.37	\$30,628.50	\$30,628.50
Ganacias por opciones		\$4,094.93	\$4,178.84
Total	\$29,053.37	\$34,723.42	\$34,807.34

(millones de pesos)

Tabla R1. Resultados 1998 con activo subyacente WTI

Las ganancias en pesos (con tipo de cambio de 8.96 a la fecha de expiración) representan el 40.38% y 41.21%, para el precio de ejercicio X_1 y X_2 respectivamente, con respecto al rendimiento neto que reportó PEMEX en 1998 y el cual fue negativo. Debe considerarse por supuesto que la pérdida neta reportada por PEMEX se refiere a los dos semestres de 1998 y la cobertura en este ejemplo sólo es para uno de los semestres.

Finalmente se subraya que los resultados obtenidos con los precios de ejercicio definidos no varian en mucho y obtener opciones sobre el petróleo WTI con cualquiera de ambos precios de ejercicio hubiera proporcionado resultados favorables.

CASO 2. Activo subyacente: Mezcla.

Nuevamente se presentan las sensibilidades de la opción calculadas al inicio del periodo con la información disponible hasta este punto, pero ahora con la Mezcla mexicana.

Se observa de la Tabla P3 que ahora la tasa de interés es sumamente volátil ya que equivale al 67.60% de la media de la tasa de interés, es decir, la tasa de interés fluctua entre 10.34% y 53.52% con una media de 31.93%, además de que equivale a 110 veces más la volatilidad de la tasa de interés utilizada en el Caso 1 (ver Tabla P1) y a 67.60% la media de la tasa de interés utilizada aquí. En cuanto al activo subyacente se refiere, este presenta una volatilidad de 33.25% y un rendimiento medio de 13.86, para tales cálculos se tomó la serie de precios de la Mezcla en pesos, por lo cual estas cifras son mucho más grandes que para el crudo WTI, ya que también

Media	
S	0.13866
r	0.31933
Desviación Estándar	
S	0.33255
r	0.21589
Activo Subyacente	
1-Enero-98	95.03280
1-Julio-98	90.71
Tasa de Interés	
1-Enero-98	0.19515
1-Julio-98	0.22051
Precio de Ejercicio	
Mínimo X1	97.52238
Máximo X2	108.63842
Valor Opción Call	
X1	12.26955
X2	7.41259
Valor Opción Put	
X1	5.69270
X2	10.91835

Tabla P3. Datos generales.

reflejan la volatilidad en el tipo de cambio.

Se hace la observación que dado que el crudo WTI y la Mezcla mexicana están fuertemente correlacionados (ver Gráfica 5.1) las únicas variables que pueden influir para la determinación de resultados diferentes a los del Caso 1 son el tipo de cambio y la tasa de interés (ver Gráfica 5.3).

Otra vez se menciona que las cifras aquí presentadas fueron calculadas sólo con la información disponible al principio del periodo y el análisis incluye dos precios de ejercicio diferentes, pero debido a la alta volatilidad en las tasas de interés estos precios de ejercicio varian mucho más que antes.

Dado que las exportaciones previstas a principios del año fueron de 1,892,000 barriles diarios en promedio durante todo el año y como el periodo de cobertura es de seis meses, entonces se considera un total de exposición de 344,344,000,000 barriles. Por lo anterior y tomando las cifras para el radio de cobertura de la Tabla P4 el volumen de barriles a cubrir con los precios de ejercicio X_1 y X_2 son de 257,683,135 y 227,357,314 barriles respectivamente.

De la Tabla P4 también se observa que para la posición larga con precios de ejercicio X_1 y X_2 el cambio del valor de la opción con respecto al activo subyacente es en el primer caso de 33.61% y en el segundo de 51.45%, o dicho de otra manera dado un cambio en el precio del crudo mexicano el precio de la opción experimenta

Sensibilidades de la Opción:		Call	Put
Delta			
	X1	0.66369	-0.33631
	X2	0.48545	-0.51455
Gamma			
	X1	0.01633	0.01633
	X2	0.01784	0.01784
Theta Anual			
	X1	-18.06813	-0.80556
	X2	-16.46581	2.76443
Vega %			
	X1	24.51858	24.51858
	X2	26.79043	26.79043
Rho %			
	X1	25.40149	-18.82649
	X2	19.36054	-29.90873

Tabla P4. Sensibilidades de la Opción:

un cambio en sentido contrario de 33.61% y de 51.45% para el precio de ejercicio X_1 y X_2, en el mismo orden.

Por otra parte el valor de la delta para la opción con precio de ejercicio X_1 no es tan cercana a 0.5 como se esperaría, es más bien cercana a cero, lo cual podría indicar que esta opción está fuera del dinero (*out of the money*), es decir que se esperan pérdidas si se decide cubrise con tal opción. Mientras que la otra opción tiene una delta muy cercana a 0.5 que indica que no se esperan pérdidas ni ganancias.

En lo que se refiere a la sensibilidad gamma se puede decir que el radio de cobertura es poco sensible con respecto al precio del crudo mexicano, ya que se observan valores de 0.0163 y 0.01784 para la opción *put* con precios de ejrcicio X_1 y X_2 respectivamente. De lo cual se puede concluir que una cobertura estática es adecuada.

El caso más interesante se presenta con la theta, se observa que para el precio de ejercicio X_1 la theta es negativa como se esperaba aunque muy pequeña y para el precio de ejercicio X_2 la theta es positiva. De lo anterior podemos decir que para el precio de ejercicio X_1 se pierde 0.003222 por cada día que transcurre, pero para el precio de ejercicio X_2 se gana 0.011058 diariamente. Este hecho al parecer es debido por las altas tasas de interés, ya que si se hace $r = 0.084$ y se mantienen los mismos datos de la Tabla P3 entonces las thetas (para ambos precios de ejercicio) toman valores negativos, por supuesto los otros parámetros tales como la volatilidad, el precio del activo y el precio de ejercicio también influyen, pero después de analizar los datos y cambiar las series de cada una de las variables anteriores se concluye que

	Sin cobertura	Con cobertura X1	Con cobertura X2
Ingresos por exportación	$3,434.15	$3,618.45	$3,618.45
Ganancias por opciones		$32.12	$177.74
Total	$3,434.15	$3,650.57	$3,796.19

(millones de dolares)

	Sin cobertura	Con cobertura X1	Con cobertura X2
Ingresos por exportación	$29,053.37	$30,628.50	$30,628.50
Ganancias por opciones		$287.89	$1,593.24
Total	$29,053.37	$30,916.39	$32,221.73

(millones de pesos)

Tabla R2. Resultados 1998 con activo subyacente Mezcla

la tasa de interés es la variable que influye más intensamente en la positividad del valor de la theta para el precio de ejercicio X_1

Por otra parte, los valores de la sensibilidad vega se interpretan como sigue: dado que se tiene un valor en la volatilidad del activo subyacente de 33.25% anual, entonces un incremento en tal volatilidad produce un incremento de 24.52% y 26.79

Por último la sensibilidad rho indica qué tan sensible es el valor de la opción *put* con respecto a la tasa de interés, de esta forma se interpreta que por cada cambio en la tasa de interés del 1% el valor de la opción disminuye en $0.1882 y en $0.2990.

De todo lo dicho anteriormente se concluye que el número de barriles a cubrir adecuado para nuestro portafolio compuesto sólo de activo subyacente y de opciones *put* adecuado es de 74.83% y 66.02% del total de barriles disponibles, para opciones con precio de ejercicio X_1 y X_2 respectivamente. Además de que al parecer una cobertura estática es adecuada. Al parecer es hay más posibilidades de que la opción con precio de ejercicio X_2 proporcione una ganancia, sin embargo esta opción es la que presenta mayor riesgo, con respecto a los cambios en la volatilidad del activo subyacente y a los cambios en la tasa de interés.

Supongase que se decide cubrise con opciones *put* donde el activo subyacente es la Mezcla mexicana, entonces dado que al 01-julio-1998 el precio del crudo es de $90.71 se ejerce y se obtiene por cada opción con precio de ejercicio X_1 y X_2 de $6,809.94 y $17,925.98 respectivamente, ya que cada opción cubre 1000 barriles de petróleo. Pero por cada opción se pago $5,692.70 y $10,918.35 para cada precio de ejercicio, por lo tanto la ganancia por cada opción es de $1,117.24 y $7,007.63, y dado que el número de opciones adquiridas al inicio del periodo fue de 257,683 y

227,357 entonces la ganancia total obtenida al final del periodo es de \$287.894.689.76 y \$1,593,233,816.03 para el precio de ejercicio X_1 y X_2 respectivamente.

Estas ganancias representan el 2.84% y el 15.71% de la pérdida neta registrada en ese año, mientras que las ganancias son semestrales. La ganancia mas baja en dólares con opciones *put* sobre el activo subyacente Mezcla con respecto a la ganancia en dólares con opciones *put* sobre el activo subyacente WTI representa tan solo el 7.03%, y para el caso de las ganancias mas altas representa el 38.09%.

De lo cual se concluye que era más conveniente la cobertura con opciones *put* sobre el activo WTI que sobre el crudo mexicano.

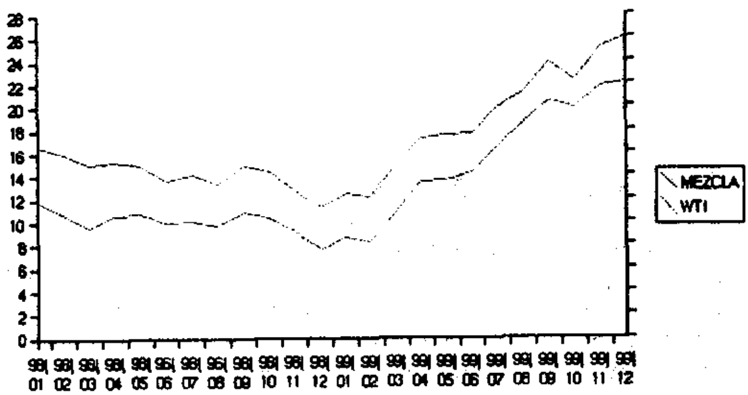
5.2 Ejemplo 2. Primer semestre, 1999

El analisis de este ejemplo seguirá la misma secuencia del ejemplo 1, tratando primero el entorno y resultados obtenidos reales para este periodo, continuando con el estudio de situaciones donde se utilizen productos futuros y opciones para cubrirse ante los cambios en el precio del petróleo utilizando como subyacente tanto al WTI como a la Mezcla mexicana.

5.2.1 Entorno y resultados obtenidos

Hasta el mes de marzo de 1999 y desde principios de 1997, la tendencia de los precios del petróleo se había mantenido decreciente, lo cual tuvo consecuencias graves como las mencionadas en la sección referente al primer semestre de 1998; sin embargo, a partir de abril de 1999 los precios se recuperaron debido fundamentalmente a la reducción de la oferta mundial pactada por Arabia Saudita, Argelia, Irán, México y Venezuela, el 12 de marzo de ese año en la La Haya, Holanda y principalmente por la confirmación de la OPEP en disminuir la oferta de sus productos el 23 del mismo mes. Tal compromiso consistió en reducir la oferta global en 2.1 millones de barriles diarios adicionales a la disminución acordada en 1998 y alcanzar en inventarios los niveles registrados a finales de 1996 y principios de 1997. Como consecuencia del compromiso de mantener las cuotas de producción hasta marzo del 2000, durante el cuarto trimestre de 1999, los precios de los principales crudos de referencia se incrementaron aún más.

Estimaciones al respecto indican que en 1999 la producción mundial de petróleo crudo (incluidos los líquidos del gas) fue de 74 mil millones de barriles diarios (MMbd) volumen inferior en casi 1.0 MMbd al registrado en el bienio 1997-1998. Con respecto al último año la disminución fue de 2.0 por ciento, equivalente a 1.5 MMbd.



Grafica 5.4 Evolucion del precio del petroleo (dolares por barril).

Otro factor influyente en el aumento de los precios fue el aumento en la demanda mundial del crudo que en 1999 promedió 75.5 MMbd, es decir 1.3 MMbd superior al año anterior. Tal crecimiento se debió principalmente por la recuperación de la actividad económica en los países del este asiático, al creciente fortalecimiento de la demanda interna en Estados Unidos, las mejores perspectivas de crecimiento en Japón y el mayor dinamismo del comercio.

Como consecuencia del entorno favorable para la industria petrolera, en el mes de diciembre de 1999, el crudo Brent registró un precio promedio de 25.57 dólares por barril, y el promedio en el año se ubicó en 17.97 dólares por barril, nivel superior en 5.25 dólares al promedio de 1998. En ese mes el WTI llegó a 26.11 dólares por barril, y el precio promedio en el año fue de 19.31, cantidad superior en 4.92 dólares por barril al del año previo.

La recuperación del mercado petrolero internacional se reflejó en una sensible alza de los precios de la canasta de crudos mexicanos de exportación.

En enero de 1999 el precio promedio de la mezcla mexicana se ubicó en 8.68 dólares por barril mientras que en diciembre alcanzó los 22.14 dólares por barril, lo que significa un aumento de 13.46 dólares en el año. Lo cual superó las expectativas formuladas en el presupuesto de 1999 de la industria petrolera nacional, al alcanzar la mezcla de crudo mexicano un precio promedio anual de 15.62 dólares por barril, superior en 6.37 respecto del programado y mayor en 5.45 dólares con respecto al año anterior.

Por tanto, en ese año Petróleos Mexicanos y sus organismos subsidiarios obtuvieron una utilidad de operación de 111,416 millones de pesos, monto 9.2 por ciento superior en términos reales al obtenido el año anterior como consecuencia de mayores ingresos totales.

5.2.2 Resultados utilizando futuros

En esta sección se analizarán los resultados al utilizar estrategias de cobertura estática y dinámica, empleando como subyacente en el Caso 1 al petróleo WTI y en el Caso 2 a la propia Mezcla mexicana, para cada una de las aplicaciones se utilizan tasas de interés constantes y variables a lo largo de los seis meses. Se seguirá el mismo análisis que el realizado en el ejemplo de 1998, sin embargo, una de las diferencias con respecto a éste es que ahora se cuenta con dos periodos más de observación para el cálculo de los radios de cobertura, además de que el escenario económico es favorable para México, ya que los precios del petróleo se recuperaron en el transcurso del primer semestre de 1999, lo cual se puede observar en la gráfica 5.4.

CASO 1. Activo subyacente: WTI

El hecho de que los precios del crudo Mezcla sigan la misma tendencia que el WTI además de que no existe el comercio de futuros sobre el crudo mexicano, respaldan el uso del subyacente extranjero para efectos de cobertura contra los movimientos en el precio de la Mezcla. A lo largo del análisis se supondrá que cada barril de petróleo mexicano será cubierto con una unidad de WTI.

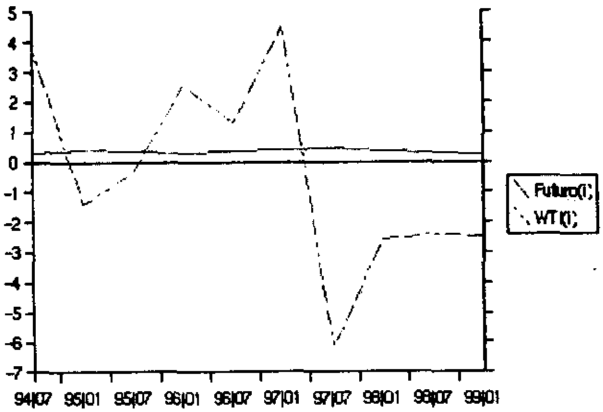
Resultado A. Cobertura estática y tasa de interés constante.

A continuación se muestran los datos al inicio y al final del periodo de cobertura (Tabla F11), se puede observar que el precio del petróleo aumentó de enero 1 a julio 1 en un 60.12%, de \$12.11 a \$19.39 pesos, por lo que el valor del futuro con fecha de madurez en julio queda por debajo del valor del subyacente en ese tiempo, lo cual implica una pérdida para quien se ha comprometido a vender como se verá más adelante.

Como ya se había mencionado, se cuentan con diez observaciones de ΔF y ΔS a lo largo de cinco años (94-98), al utilizar diez contratos de futuros no traslapados con respecto a sus periodos de vida, además de que se emplea una tasa constante durante el intervalo de tiempo que duran los contratos antes de expirar, dicha tasa es la vigente al firmarse el acuerdo. Al tomar en cuenta todas estas suposiciones el radio de cobertura es de 13.782, es decir que por cada unidad (barril de petróleo)

	WTI (dls. por barril)	Futuro (6 meses)	Radio de Cobertura
Enero 1, 1999	\$12.11	\$12.299	13.782
Julio 1, 1999	\$19.39		

Tabla F11. Datos al inicio y al final de la cobertura.



Grafica 5.5 Cambios en el precio del WTI y del futuro a la fecha i.

expuesta hay 13.782 cubiertas, lo cual representa el 93.23% del activo total.

En los resultados del ejemplo 1998, se encuentran las tablas con las observaciones ΔS y ΔF, mostrando sus respectivas desviaciones estándar y el coeficiente de correlación entre ambas variables, en la gráfica 5.5 se puede apreciar el comportamiento de las observaciones hasta 1999. Se observa que los cambios en el precio del futuro semestre a semestre no reflejan los cambios en el precio del petróleo, de hecho el coeficiente de correlación entre ambas series es $\rho = -0.28$ y las desviaciones estándar de ΔF y ΔS son 0.068 y 3.316 respectivamente.

En el primer semestre de 1999, el volumen de las exportaciones de petróleo crudo fue de 285,150,000 barriles [6].

De acuerdo con el radio de cobertura, el volumen a cubrir es de 265,859,647 barriles, por lo que se tomará una posición corta en 265,860 contratos de futuros sobre

[6]No se contó con el dato estimado por lo que se utilizará el volumen exportado real.

	WTI (dls. por barril)	Futuro (6 meses)	Radio de Cobertura
Enero 1, 1999	$12.11	$12.309	0.988
Julio 1, 1999	$19.39		

Tabla F12. Datos al inicio y al final de la cobertura.

el subyacente WTI con precio de entrega $12.299 dólares por barril para la primera semana de julio; llegado ese día se tiene que el precio *spot* se encuentra en los $19.39 dólares por barril, lo que implica una pérdida de $7.09 dólares por unidad y en suma $1,885,213,260.00 dólares. Se omite el análisis para el caso en donde se toma a la tasa de interés como función conocida del tiempo debido a que la variación en los resultados es mínima como consecuencia de que la varibilidad de las tasas es muy baja semestre a semestre.

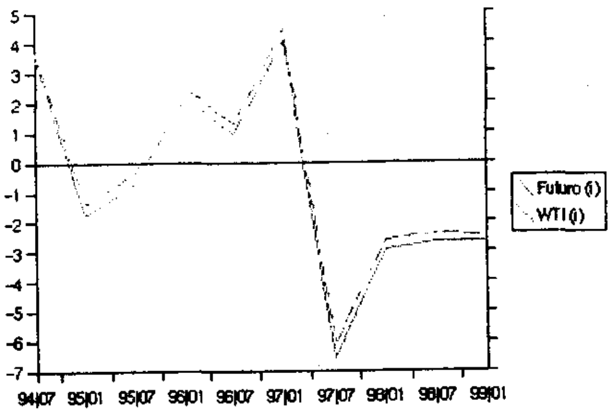
Resultado B. Cobertura dinámica y tasa de interés variable.

Las series semanales de las tasas de interés de enero del 94 a junio del 99 se aplican para la función $r(t)$ [7]. Los datos al inicio y final de la cobertura se muestran en la Tabla F12, el análisis se efectúa bajo la suposición de que se llevan a cabo las compensaciones por diferencias (cobertura dinámica); como resultado se tiene que el radio de cobertura es igual a 0.994, lo cual significa que de cada barril expuesto hay 0.994 cubiertos, lo equivalente al 49.85% del volumen total a cubrir.

En la gráfica 5.6 se muestra el comportamiento de las observaciones ΔF y ΔS de 1994 a 1998, se puede apreciar que los cambios en el precio del futuro semestre a semestre siguen la misma tendencia que los cambios en el precio del subyacente, a diferencia del resultado A el coeficiente de correlación entre ambas series es 0.999.

Se toma nuevamente como volumen total de exportación 285,150,000 barriles, el radio de cobertura indica que hay que cubrir el 49.85% del total, es decir, 142,145,988 barriles tomando una posición corta en 142,146 contratos de futuros con precio de entrega $12.309 dólares por barril para la primera semana de julio; sin embargo en esa fecha el precio *spot* se encuentra en los 19.39 por lo hay una pérdida de $7.08 dólares por barril, que en suma da un total de $1,006,535,826.00 dólares. Se omite el análisis para el caso en que se utiliza una tasa de interés constante en cada periodo de observación por las mismas causas expresadas en el resultado A.

[7] Véase la fórmula (2.1) donde se presenta el caso con tasa de interés continua $r(t)$.



Gráfica 5.6. Cambios en el precio del WTI y del futuro. Observaciones semestrales

	Sin cobertura			Cobertura Estatica			Cobertura Dinamica		
Ingresos por exportaciones	$31,595.02	(us)	$3,258.08	$31,595.02	(us)	$3,258.08	$31,595.02	(us)	$3,258.08
Ganancias en futuros				(17,721.00)	(us)	(1,885.21)	(9,461.44)	(us)	(1,006.54)
Total	$31,595.02	(us)	$3,258.08	$13,874.01	(us)	$1,372.87	$22,133.58	(us)	$2,251.54

Tabla F13. Comparacion de resultados. Cifras en millones de pesos y en millones de dolares.

Comparación.

Los ingresos reales aproximados que obtuvo México por concepto de exportar 285,150,000 barriles en el primer semestre de 1999 suman un total de $3,258,078,600.00 dólares, tales cantidades representan el 88.25% y el 94.87% del volumen e ingresos respectivamente que se tuvieron en el primer semestre de 1998.

Los ingresos tanto en pesos como en dólares se muestran en la Tabla F13. se puede observar lo siguiente:

1. Las pérdidas representan el 57.86% de los ingresos reales aproximados para el caso de cobertura estática.

2. Las pérdidas representan el 30.89% de los ingresos reales aproximados para el caso de cobertura dinámica.

CASO 2. Activo subyacente: Mezcla mexicana

	Mezcla (pesos por barril)	Futuro (6 meses)	Radio de Cobertura
Enero 1, 1999	$85.41	$99.20	0.215
Julio 1, 1999	$155.48		

Tabla F14. Datos al inicio y al final de la cobertura.

Las suposiciones hechas para este ejemplo son las mismas que en el ejemplo 1 para el caso 2: la existencia de contratos de futuros sobre mezcla mexicana en el mercado de derivados en México cotizados en pesos y la cantidad de activo subyacente por contrato es de 1,000 barriles. Para la tasa de interés libre de riesgo se utiliza la serie para reportos iniciados a un día valor mismo día, véase el apéndice D.

Resultado A. Cobertura estática y tasa de interés constante.

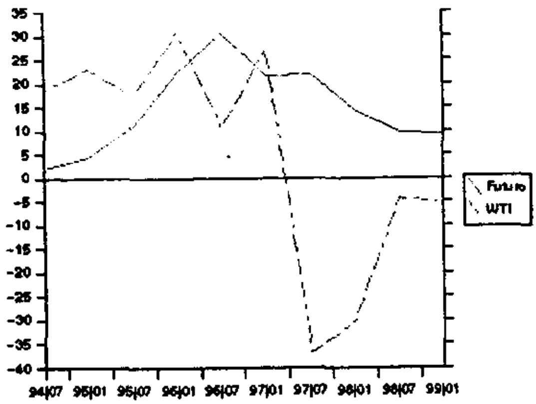
Los datos al inicio y final de la cobertura se muestran en la Tabla F14, el precio de la mezcla es de $85.41 pesos en enero de 1999, por lo que al utilizar la ecuación (2.2) con r constante (la vigente al frmarse el acuerdo), da como resultado que el precio del futuro sea de $99.20 pesos con fecha de madurez para la primera semana de julio; sin embargo, el precio *spot* para esta fecha es de $155.48 pesos, esto significa que el precio por barril subió en un 82.04% durante esos primeros seis meses.

Para este ejemplo se tienen diez observaciones bajo las mismas condiciones que las mencionadas en el resultado A del caso 1, como resultado el radio de cobertura es igual a 0.215, lo que significa cubrir el 17.186% del volumen total.

En la gráfica 5.7 se observan las tendencias de las observaciones semestrales ΔS y ΔF desde enero de 1994 hasta diciembre de 1999, y claramente se ve que los cambios en el precio del futuro difícilmente explicaran los cambios en el precio del activo, en sí, el coeficiente de correlación entre ambas series es de $\rho = -0.0832$.

Como ya se mencionó en los resultados anteriores el volumen total de exportaciones es igual a 285,150,000 barriles.

Como el radio de cobertura muestra que hay que cubrir el 17.186%, entonces se tiene que tomar una posición corta en 50,432 contratos de futuros con fecha de entrega del subyacente para julio. Como el precio del subyacente subió a $155.48 y el compromiso es de vender al precio de $99.20 pesos por barril implica una pérdida de $56.274 pesos por barril, lo que en total asciende a $2,838,005,324.80 pesos en pérdidas.



Grafica 5.7. Cambios en los precios tanto del activo como del futuro a la fecha.

	Mezcla (pesos por barril)	Futuro (6 meses)	Radio de Cobertura
Enero 1, 1999	$85.41	$96.05	0.193
Julio 1, 1999	$155.48		

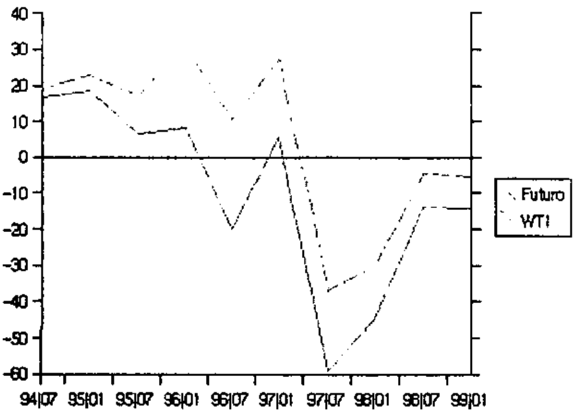
Tabla F15. Datos al inicio y al final de la cobertura.

Resultado B. Cobertura estática y tasa de interés variable.

Haciendo un análisis similar al resultado anterior, solo que empleando una tasa de interés como función conocida del tiempo, se tiene que las pérdidas ascienden a $2,741,460,308 pesos, lo que resulta un poco menor que para el resulado A, pues el radio de cobertura es de 0.19299 y el precio del futuro es de $96.0457 pesos por barril. (Tabla F15).

Resultado C. Cobertura dinámica y tasa de interés constante.

Los precios del subyacente así como del futuro al inicio y final del periodo de cobertura se muestra en la la Tabla F14, ya que se utiliza una tasa de interés constante



Gráfica 5.8. Cambios en los precios del futuro y del activo. Observaciones semestrales.

durante los seis meses; sin embargo como en este caso se aplican los criterios de cobertura dinámica el radio de cobertura es 0.84986, es decir el 45.94% del activo total tendrá que cubrirse.

En la gráfica 5.8 se pueden observar las tendencias de ΔS y ΔF, a diferencia de utilizar cobertura estática aqui se observa que los cambios en los precios del futuro explican de manera satisfactoria los cambios en los precios de la mezcla, el coeficiente de correlación entre ambas variables es de $\rho = 0.937$.

De acuerdo con el radio de cobertura y el volumen total, la cantidad cubierta debe ser de 131,003,000 unidades, lo cual se logra al tomar una posición corta en 131,003 contratos de futuros con fecha de madurez en julio. Al llegar a ese tiempo se tiene que el valor del subyacente ha crecido en un 82% por lo que las pérdidas ascienden $7,371,994,919.30 pesos en total.

Resultado D. Cobertura dinámica y tasa de interés variable.

Para este resultado se utilizan los precios del petróleo y del futuro al inicio del periodo de cobertura que se muestran en la Tabla F15; al calcular el radio de cobertura de acuerdo con las condiciones de una cobertura dinámica se obtiene que es igual a 0.92, lo que significa cubrir un 47.93% del volumen total. Como resultado se obtine un volumen cubierto de 136,688,000 en 136,688 contratos de futuros. Y, como las condiciones del mercado son favorables en el mercado *spot*, las consecuencias son

Cobertura					
		Estatica		Dinamica	
	Sin cobertura	Tasa constante	Tasa variable	Tasa constante	Tasa variable
Ingresos por exportaciones	$31,595.02	$31,595.02	$31,595.02	$31,595.02	$31,595.02
Ganancias en futuros		-$2,838.01	-$2,741.46	-$7,371.94	-$8,123.41
Total	$31,595.02	$28,757.01	$28,853.56	$24,223.07	$23,471.61

Tabla F16. Comparacion de resultados. Cifras en millones de pesos y en millones de dolares.

desfavorables en el mercado de futuros por lo que las pérdidas totales ascienden a $8,123,408,846.4 pesos.

Comparación.

Tomando en cuenta nuevamente que los ingresos reales que tuvo México por concepto de exportación de petróleo crudo fueron de $31,595,018,750.10 pesos, se tiene el siguiente cuadro de resultados.

De dicho cuadro (Tabla F16) se puede concluir:

1. Las pérdidas representan el 8.98% de los ingresos reales aproximados para el caso de cobertura estática y tasa constante.
2. Las pérdidas representan el 8.68% de los ingresos reales aproximados para el caso de cobertura estática y tasa variable.
3. Las pérdidas representan el 23.33% de los ingresos reales aproximados para el caso de cobertura dinámica y tasa constante.
4. Las pérdidas representan el 25.71% de los ingresos reales aproximados para el caso de cobertura dinámica y tasa variable.

5.2.3 Resultados utilizando opciones

CASO 1. Activo subyacente: WTI.

Los valores calculados con la información disponible hasta el 01-enero-1999 se presenta en la Tabla P5. En la cual se puede observar también que la tasa de interés libre de riesgo tiene fluctuaciones muy ligeras alrededor dell 3.75% a diferencia del crudo WTI que tiene una volatilidad de 32.73% con un rendimiento medio de -0.1254.

Dado los datos generales presentados en la Tabla P5, se pueden calcular las griegas de la opción para los dos precios de ejercicio determinados para este ejemplo y al

Media	
S	-0.12540
r	0.03754
Desviación Estándar	
S	0.32731
r	0.00258
Activo Subyacente	
07-Enero-99	12.96
08-Julio-99	19.69
Tasa de Interés	
07-Enero-99	0.03195
08-Julio-99	0.03488
Precio de Ejercicio	
Mínimo X1	13.00447
Máximo X2	13.12367
Valor Opción Call	
X1	1.26908
X2	1.21422
Valor Opción Put	
X1	1.10745
X2	1.16990

Tabla P5. Datos generales

igual que antes se supone que uno de ellos es el mínimo esperado si se invierte 12.96 a la tasa de interés libre de riesgo (X_1) y el otro (X_2) es el máximo esperado si se invierte el mismo monto a la tasa de interés libre de riesgo. Nuevamente la cobertura estática es la utilizada para este ejemplo.

De la Tabla P6 se puede mencionar que el valor de las deltas para la opción *put* con precio de ejercicio X_1 y X_2 es cercano s 0.5, indicando que dichas opciones se encuentran en el dinero (*at the money*) como se esperaba, así como que dado un incremento en el crudo WTI el valor de la opción se decrementa en 43.25% y 44.80% respectivamente.

La gamma nos confirma que la cobertura estática establecida inicialmente es adecuada ya que los cambios en el radio de cobertura serán de apenas 0.13110 y 0.13187 dado un cambio de una unidad en el activo subyacente (en el mismo sentido), para el precio de ejercicio X_1 y X_2, en el mismo orden.

En cuanto a la theta, se observa que el precio de la opción con precio de ejercicio X_1 y X_2 disminuye en 0.002681 y 0.002677 respectivamente, por cada día que pasa y se acerca a la fecha de vencimiento.

Las cifras de la sensibilidad vega indican que dado un valor de la volatilidad del activo subyacente de 32.73%, un incremento en tal volatilidad de una unidad conduce

Sensibilidades de la Opción:	Call	Put
Delta		
X1	0.56747	-0.43253
X2	0.55192	-0.44808
Gamma		
X1	0.13110	0.13110
X2	0.13187	0.13187
Theta Anual		
X1	-1.37391	-0.96500
X2	-1.37623	-0.96357
Vega %		
X1	3.60353	3.60353
X2	3.62494	3.62494
Rho %		
X1	3.04269	-3.35649
X2	2.96935	-3.48849

Tabla P6. Sensibilidades de la Opción.

a un incremento de 0.0360 y 0.0362 en el valor de la opción con precio de ejercicio X_1 y X_2, respectivamente.

Finalmente la sensibilidad del valor de la opción con respecto a la tasa de interés es determinada por la griega rho, la cual puede interpretarse de la Tabla P6 que dado un incremento en la tasa de interés el valor de la opción *put* con precio de ejercicio X_1 y X_2 sufre un decremento de 3.35% y 3.48%, en el mismo orden.

Las cifras anteriores parecen indicar que una cobertura estática, con los valores del radio de cobertura o delta establecidos, y un periodo de cobertura de seis meses es adecuado para protegerse de las fluctuaciones en el precio del crudo WTI.

Supongase que al inicio del año se tenían estimaciones adecuadas, muy aproximadas, para el volumén de exportación mensual esperado en los primeros seis meses. Dado lo anterior el volumen total de barriles que se esperaba exportar a principios de año es de 285,150,000 barriles de petróleo durante el primer semestre. Bajo este supuesto el total de barriles a cubrir dado el precio de ejercicio X_1 y X_2 es de 199,053,928 y 196,916,390, respectivamente, es decir, se adquieren 199,054 y 196,916 opciones respectivamente (ver Tabla R2).

A la fecha de vencimiento el precio del petróleo aumenta a (us)\$19.69 por barril, provocando esto una pérdida por la prima pagada al principio del periodo y que

	Sin cobertura	Con cobertura X1	Con cobertura X2
Ingresos por exportación	\$3,258.08	\$3,258.08	\$3,258.08
Ganacias por opciones		-\$220.44	-\$230.37
Total	\$3,258.08	\$3,037.64	\$3,027.71

(millones de dolares)

	Sin cobertura	Con cobertura X1	Con cobertura X2
Ingresos por exportación	\$31,595.02	\$31,595.02	\$31,595.02
Ganacias por opciones		-\$2,155.92	-\$2,253.04
Total	\$31,595.02	\$29,439.10	\$29,341.98

(millones de pesos)

Tabla R9. Resultados 1999 con activo subyacente WTI

representa aproximadamente el 7% de los ingresos por exportación estimados para ese primer semestre, tanto en doláres como en pesos con tipo de cambio \$9.78 por dólar.

CASO 2. Activo subyacente: Mezcla.

En primer lugar se muestra la información general con la cual se hacen los calculo necesarios para determinar la posición a tomar y el radio de cobertura. De la Tabla P7 se puede observar que la tasa de interés hasta el 01-enero-1999 tiene una volatilidad de 19.94%, lo cual representa poco más del 64% de su valor medio. En cuanto al activo subyacente, presenta una volatilidad de 34.89% y un rendimiento medio de 0.05743, nuevamente la volatilidad refleja tambien las fluctuaciones en el tipo de cambio, ya que para calcularla se utilizo la serie de precios del petroleo en pesos.

Con los datos de la Tabla P7 se llega a la Tabla P8, de la cual se puede observar que dada una opción *put* con precio de ejercicio X_1 (o X_2), el cambio del valor de dicha opción con respecto a la Mezcla es de -22.14% (o -35.84%), lo que significa que dado un incremento en el activo subyacente el precio de la opción *put* experimenta un decremento de 0.2214 (o 0.3584). En ambos casos la delta no está tan cercana a 0.5 como se espera al inicio del periodo de cobertura, están más bien cercanas a cero lo cual indica que están fuera del dinero (*out of the money*).

En cuanto a la sensibilidad gamma se puede decir que dado un cambio en el activo subyacente el radio de cobertura (Δ) experimenta un cambio de 0.0141 para la opción *put* con precio de ejercicio X_1 y 0.0177 para la opción *put* con precio de ejercicio X_2, lo cual se considera como cifras pequeñas y por lo tanto se concluye que

Media	
S	0.05743
r	0.31103
Desviación Estándar	
S	0.34896
r	0.19941
Activo Subyacente	
01-Enero-99	85.41
01-Julio-99	155.48
Tasa de Interés	
01-Enero-99	0.37356
01-Julio-99	0.21691
Precio de Ejercicio	
Mínimo X1	87.82820
Máximo X2	97.03662
Valor Opción Call	
X1	15.58915
X2	10.83089
Valor Opción Put	
X1	3.04261
X2	5.92391

Tabla P7. Datos generales

Sensibilidades de la Opción:		
	Call	**Put**
Delta		
X1	0.77853	-0.22147
X2	0.64176	-0.35824
Gamma		
X1	0.01410	0.01410
X2	0.01772	0.01772
Theta Anual		
X1	-25.28043	1.93872
X2	-24.30123	5.77174
Vega %		
X1	17.95085	17.95085
X2	22.55646	22.55646
Rho %		
X1	25.45303	-10.97930
X2	21.99123	-18.26088

Tabla P8. Sensibilidades de la Opción

	Sin cobertura	Con cobertura X1	Con cobertura X2
Ingresos por exportación	$3,258.08	$3,258.08	$3,258.08
Ganancias por opciones		-$710.29	-$1,243.67
Total	$3,258.08	$2,547.79	$2,014.41

(millones de dolares)

	Sin cobertura	Con cobertura X1	Con cobertura X2
Ingresos por exportación	$31,595.02	$31,595.02	$31,595.02
Ganancias por opciones		-$6,946.65	-$12,163.11
Total	$31,595.02	$24,648.37	$19,431.91

(millones de pesos)

Tabla P4. Resultados 1999 con activo subyacente Mezcla

el radio de cobertura es poco sensible a los cambios en el precio de ejercicio y por lo tanto una cobertura estática es adecuada.

De la sensibilidad theta se observa que conforme transcurre el tiempo el valor de la opción *put* con precio de ejercicio X_1 se incrementa 0.005385 diariamente (o bien 1.93872 al año) y el valor de la opción *put* con precio de ejercicio X_2 se incrementa 0.01603 diariamente (o bien 5.77174 al año).

Por otra parte, la sensibilidad vega con valores de 17.95% y 22.55% para una opción *put* con precio de ejercicio X_1 y X_2 respectivamente, se interpreta como que dado un decremento (o incremento) en la volatilidad del activo subyacente (Mezcla) y un valor en la volatilidad de dicho activo de 0.34896, el valor de la opción sufrirá un decremento (o incremento) de 0.1795 y 0.2255, respectivamente.

Por último, la sensibilidad en el valor de la opción con respecto a la tasa de interés está dada por la rho, la cual en este caso indica que dado un incremento (o decremento) en la tasa de interés el valor de la opción *put* con precio de ejercicio X_1 sufrirá un decremento (o incremento) de 0.10979. De igual forma dado un incremento (o decremento) en la tasa de interés el valor de la opción *put* con precio de ejercicio X_2 sufrirá un decremento (o incremento) de 0.182608.

Dado que las exportaciones previstas fueron de 285,150,000 barriles de petróleo durante el primer semestre y tomando las cifras de la Tabla P8 el volumen de barriles a cubrir con opciones *put* con precio de ejercicio X_1 y X_2 son de 233,448,284 y 209,940,538 barriles respectivamente, por lo cual se adquieren 233,448 opciones y 209,941 opciones, en el mismo orden.

A la fecha de vencimiento el precio del petróleo aumenta a $192.57 por barril, lo cual produce una pérdida por la prima pagada, ya que se decide no ejercer, esta pérdida asciende a \$6,946.65 y \$12,163.11 para la cobertura con opciones con precio de ejercicio X_1 y X_2, lo cual representa aproximadamente el 21% y 38%, respectivamente, de los ingresos por exportación estimados en ese semestre.

5.2.4 Conclusiones

En la tablas siguientes se muestra un resumen de los resultados que se hubieran obtenido bajo las suposiciones hechas en el desarrollo del presente capítulo. La cifra en la casilla sombreada es una estimación de los ingresos obtenidos por PEMEX durante todo el año, dado que no utilizó ningún instrumento financiero para cubrirse de las fluctuaciones del petróleo. Las cantidades restantes son una estimación de los ingresos que se hubieran obtenido en todo el año de haberse utilizado una estrategia de cobertura con algún instrumento derivado.

La columna de la derecha de la tabla Resumen 1 muestra el rendimiento obtenido, en el año de 1998, con respecto al ingreso total estimado sin cobertura. Se observa que las mayores ganancias se obtienen con la cobertura estática utilizando futuros sobre el activo subyacente WTI y en segundo lugar con la cobertura estática usando opciones sobre el mismo activo subyacente.

Dado que estos resultados fueron calculados con información disponible hasta diciembre de 1998, se concluye que la decisión tomada por PEMEX de no cubrirse fue errónea, ya que además en ese momento era visible la tendencia decreciente del precio del petróleo adicionalmente a la ausencia de medidas para reducir dicha tendencia.

En cuanto al año de 1999, la columna derecha de la tabla Resumen 2 muestra claramente que las mayores pérdidas son obtenidas cuando se utiliza la cobertura estática de futuros sobre el activo subyacente WTI, en segundo lugar se encuentra la estrategia de cobertura estática de opciones sobre la Mezcla y precio de ejercicio X_2 (máximo), siguiendole la cobertura dinámica de futuros sobre el activo WTI y sobre la Mezcla tanto para tasa variable como para tasa constante. Como era de esperarse la menor pérdida es obtenida con la cobertura utilizando opciones sobre el activo WTI.

Durante 1998 México firmó varios acuerdos para reducir la exportación de crudo con el propósito de aumentar su precio y a principios de 1999 se tenía ya previsto la firma de otro acuerdo con varios paises, entre ellos Arabia Saudita, para recortar nuevamente la exportación del petróleo. Por lo anterior se concluye que la "decisión" de México de no cubrirse en este año fue la correcta, ya que se esperaba un incremento en el precio del crudo resultado de la suboferta provocada.

Instrumento	Tipo de cobertura	Activo Suby.	Total de ingresos	Rendimiento sobre ingresos reales
Futuros	Estatica, tasa constante	WTI	$38,702.70	33.21%
Futuros	Estatica, tasa variable	WTI	$38,702.70	33.21%
Futuros	Dinamica, tasa constante	WTI	$34,747.21	19.60%
Futuros	Dinamica, tasa variable	WTI	$34,747.21	19.60%
Futuros	Estatica, tasa constante	Mezcla	$32,066.53	10.37%
Futuros	Estatica, tasa variable	Mezcla	$30,860.85	6.22%
Futuros	Dinamica, tasa constante	Mezcla	$32,787.93	12.85%
Futuros	Dinamica, tasa variable	Mezcla	$32,856.25	13.09%
Opciones	Estatica, precio de ejercicio X1	WTI	$34,723.43	19.52%
Opciones	Estatica, precio de ejercicio X2	WTI	$34,807.34	19.80%
Opciones	Estatica, precio de ejercicio X1	Mezcla	$30,916.39	6.41%
Opciones	Estatica, precio de ejercicio X2	Mezcla	$32,221.73	10.91%
Ninguno	-	-	$29,053.57	

(Cifras en millones de pesos)

Resumen 1. Resultados 1998

Instrumento	Tipo de cobertura	Activo Suby.	Total de ingresos	Rendimiento sobre ingresos reales
Futuros	Estatica, tasa constante	WTI	$13,874.01	-56.09%
Futuros	Estatica, tasa variable	WTI	$13,874.01	-56.09%
Futuros	Dinamica, tasa constante	WTI	$22,133.58	-29.95%
Futuros	Dinamica, tasa variable	WTI	$22,133.58	-29.95%
Futuros	Estatica, tasa constante	Mezcla	$28,757.01	-8.98%
Futuros	Estatica, tasa variable	Mezcla	$28,853.55	-8.68%
Futuros	Dinamica, tasa constante	Mezcla	$24,223.07	-23.33%
Futuros	Dinamica, tasa variable	Mezcla	$23,471.61	-25.71%
Opciones	Estatica, precio de ejercicio X1	WTI	$29,439.10	-6.82%
Opciones	Estatica, precio de ejercicio X2	WTI	$29,341.98	-7.13%
Opciones	Estatica, precio de ejercicio X1	Mezcla	$24,648.37	-21.99%
Opciones	Estatica, precio de ejercicio X2	Mezcla	$19,431.91	-38.50%
Ninguno	-	-	$31,596.02	

(Cifras en millones de pesos)

Resumen 2. Resultados 1999

En ambos casos los resultados obtenidos con derivados cuyo activo subyacente sea la Mezcla mexicana no son muy favorables, por lo tanto, no se recomienda al menos a corto plazo la creación de un mercado regulado de opciones sobre el crudo mexicano.

Finalmente se recomienda la cobertura estática con opciones sobre el activo subyacente WTI, sobre todo en los casos donde se prevea una caída en los precios. De hecho a inicios de 2000, México colateralmente con otros principales paises productores, incremento su producción de petróleo lo cual podría ser un factor determinante para un nuevo colapso en los precios del crudo.

Capítulo 6

Opciones con riesgo de incumplimiento

Tradicionalmente se ha supuesto que las opciones no presentan riesgo de incumplimiento. Tal suposición es válida cuando se trata de opciones que se comercian en un mercado organizado, el incumplimiento en tales opciones requeriría de un repentino y fuerte movimiento en el precio de los activos, sin embargo, muchas opciones y activos financieros son vendidos por empresas privadas en un mercado secundario.

Además, en la práctica existen opciones en las cuales el incumplimiento es una posibilidad que debe ser considerada, por ejemplo, en opciones donde existe riesgo asociado al activo subyacente tales como los derivados de crédito. Por cuestiones de espacio y tiempo ese tipo de opciones no es considerado aquí en su amplitud, pero es importante señalar que el campo que abarca este tipo particular de opciones es muy amplio y aún no hay un método estándar establecido como en las opciones ordinarias.

En este capítulo, se estudia cómo las opciones sujetas al riesgo de incumplimiento, a las cuales se les conoce como **opciones vulnerables**, son valuadas. Inicialmente se muestra sin hacer suposiciones sobre la distribución que sigue el activo subyacente, cómo las propiedades de las opciones vulnerables difieren de las opciones ordinarias. Posteriormente se deriva el valor de la opción vulnerable cuando el emisor de la opción ofrece una garantía. Finalmente se supone que los activos del emisor de la opción sigue una distribución lognormal.

6.1 Propiedades de las opciones *call* vulnerables

En esta sección se presentan resultados (sin hacer ninguna suposición acerca de la distribución que sigue el activo subyacente) para la valuación de opciones *call* vulnerables.

6.1.1 Suposiciones y notación

La siguiente notación es usada durante todo el capítulo. El activo subyacente para la opción tiene valor $S(t)$ al tiempo t. La opción vence al tiempo T, en el cual paga $max(S(T)-X,0)$ si el subscriptor de la opción es solvente. Si el emisor de la opción no puede hacer la liquidación prometida, el poseedor de la opción recibe los activos del emisor de la opción, los cuales tienen una valor total de $G(t)$ al tiempo t. El valor de la *call* europea vulnerable se escribe $c(S(t),G(t),X,T)$.

A menos que se indique lo contrario, el resto del análisis es hecho bajo las siguientes suposiciones:

(A1) Los mercados para comerciar activos son perfectos; es decir, no hay impuestos, no hay costos de transacción, no hay limite en las ventas en corto y todos los inversionistas son **price takers** [1].

(A2) Se puede pedir prestado un monto ilimitado a la tasa de interés constante r por unidad de tiempo.

(A3) $S(t)$ y $G(t)$ no pueden tomar valores negativos. Más aún, la distribución conjunta de las tasas de rendimiento de $S(t)$ y $G(t)$ no es afectada por un cambio en $S(t)$ o en $G(t)$.

(A4) Los mercados son completos en el sentido de que es posible construir un portafolio que no paga nada hasta la fecha T y paga $S(T)$ al tiempo T y un portafolio que no paga nada hasta el tiempo T y paga $G(T)$ al tiempo T.

6.1.2 Relación con opciones ordinarias

Usando la notación ya introducida, la liquidación al vencimiento de una *call* ordinaria europea es:

$$max(S(T)-X,0),$$

[1]Participantes del mercado, los cuales no influyen en la determinación del precio de los activos comerciados en el mercado.

mientras la liquidación del *call* vulnerable es:

$$min[G(T), max(S(T) - X, 0)],$$

ya que si $max(S(T) - X, 0) > G(T)$ se prefiere incumplir y entonces la liquidación recibida será $G(T)$, en caso contrario, $max(S(T) - X, 0) < G(T)$ se cumple con el contrato y entonces la liquidación de la opción *call* vulnerable es la misma que la de una opción *call* ordinaria.

El objetivo es construir un activo artificial con valor actual $A(t)$ tal que:

$$min[G(T), max(S(T) - X, 0)] = max(A(T) - X, 0),$$

de manera que la *call* vulnerable pueda ser vista como una *call* ordinaria sobre un activo que paga $A(T)$ al vencimiento. Lo anterior se logra definiendo $A(T)$ de la siguiente manera:

$$A(T) = min(X + G(T), S(T)),$$

puede ser verificado que se cumple lo especificado anteriormente, es decir:

$$\begin{aligned} max(A(T) - X, 0) &\stackrel{\text{def}}{=} max[min(X + G(T), S(T)) - X, 0] \\ &= min[G(T), max(S(T) - X, 0)]. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Demostración de 6.1:

P.D. $max[min(X + G(T), S(T)) - X, 0] \stackrel{?}{=} min[G(T), max(S(T) - X, 0)]$

Si $X(T) \leq S(T) \leq G(T)$:

$$\begin{aligned} max[min(X + G(T), S(T)) - X, 0] = max[S(T) - X, 0] &= S(T) - X, \\ min[G(T), max(S(T) - X, 0)] = min[G(T), S(T) - X] &= S(T) - X. \end{aligned}$$

Análogamente se verifica para las relaciones restantes que se presentan entre X, $S(T)$ y $G(T)$. †

De 6.1, $c(S, G, X, T)$ (el precio de un *call* vulnerable) es igual al precio de una opción ordinaria sobre A, el cual se escribe como $c^A(A, X, T)$, y ahora que se ha encontrado la manera de expresar una opción *call* vulnerable como una opción *call* ordinaria se enfoca el análisis sobre la valuación de una opción ordinaria que tiene como activo subyacente A.

6.1.3 Resultados comparativos

Para obtener resultados comparativos para *calls* vulnerables y ordinarias. es necesario derivar algunos resultados para el valor del activo artificial que paga $A(T)$ al tiempo T. Sea $i(x, y, T)$ el valor actual de una opción europea para intercambiar un activo con valor y por un activo con valor x al tiempo T. Entonces $i(x, y, T) = max(x - y, 0) = c(x, y, T)$. Con esta notación adicional, se sigue que:

$$\begin{aligned} A(t) &= S(t) - i[S(t), Xe^{-r(T-t)} + G(t), T] \equiv S - i^{I} \\ &= Xe^{-r(T-t)} + G(t) - i[Xe^{-r(T-t)} + G(t), S(t), T] \\ &\equiv Xe^{-r(T-t)} + G(t) - i^{II}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Demostración de 6.2:

P.D. $A(t) \stackrel{?}{=} S(t) - i[S(t), X_t + G(t), T] \stackrel{?}{=} X_t + G(t) - i[X_t + G(t), S(t), T]$

Si $X(t) \leq S(t) \leq G(t) \quad \forall \quad t \leq T$:

$$A(t) = min(X + G(t), S(t)) = \mathbf{S(t)},$$

$$\begin{aligned} S(t) - i[S(t), X_t + G(t), T] &= S(t) - max[S(t) - X_t - G(t), 0] \\ &= S(t) - 0 = \mathbf{S(t)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_t + G(t) - i[X_t + G(t), S(t), T] &= X_t + G(t) - max[X_t + G(t) - S(t), 0] \\ &= X_t + G(t) - (X_t + G(t) - S(t)) = \mathbf{S(t)}. \end{aligned}$$

donde $X_t = Xe^{-r(T-t)}$. Análogamente se puede verificar para las relaciones restantes que se presentan entre X, $S(t)$ y $G(t)$. †

Bajo el hecho de que $i(x, y, T) = yc(x/y, 1, T)$ y usando los resultados de teoría racional de opciones [ver Capítulo 1], la ecuación 6.2 implica que:

$$\frac{\partial A}{\partial S} = -i_2^{II} > 0, \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial A}{\partial G} = -i_2^{I} > 0, \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial A}{\partial X} = -i_2^I e^{-r(T-t)} > 0, \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial A}{\partial r} = (T-t)Xe^{-r(T-t)}i_2^I < 0 \tag{6.6}$$

y

$$\frac{\partial A}{\partial T} = rXe^{-r(T-t)}i_2^I - i_3^I < 0, \tag{6.7}$$

donde, por ejemplo, i_2^{II} denota la parcial de i^{II} con respecto a su segundo parámetro.

Como se esperaba $A(t)$ crece cuando S, G y X lo hacen, ya que por ejemplo de 6.3 se tiene:

$$\frac{\partial A}{\partial S} = -\frac{\partial}{\partial S}i^{II} = -\frac{\partial}{\partial S}i[X_t + G(t), S(t), T] = -\frac{\partial}{\partial S}max(X_t + G(t) - S(t), 0) > 0,$$

de lo cual se concluye que $\frac{\partial}{\partial S}max(X_t + G(t) - S(t), 0)$ es menor que cero, lo cual intuitivamente se interpreta como que si el precio del activo $S(t)$ crece el valor de la opción de *intercambio* baja y si el precio del activo disminuye el valor de la opción aumenta.

Por otra parte, de 6.4 se tiene:

$$\frac{\partial A}{\partial G} = -\frac{\partial}{\partial G}i^I = -\frac{\partial}{\partial G}i[S(t), X(t) + G(t), T] = -\frac{\partial}{\partial G}max(S(t) - (X_t + G(t)), 0) > 0,$$

lo que significa que $\frac{\partial}{\partial G}max(S(t) - (X_t + G(t)), 0)$ es negativa, es decir, cuando el precio de $G(t)$ crece entonces el valor de la opción de *intercambio* disminuye y viceversa.

En cuanto a la ecuación 6.5:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial X} = -\frac{\partial}{\partial X}i^I e^{-r(T-t)} &= -e^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial X}i[S(t), X(t) + G(t), T] \\ &= -e^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial G}max(S(t) - (X_t + G(t)), 0) > 0,\end{aligned}$$

es decir, el valor de la opción de *intercambio* aumenta cuando X decrece y lo contrario también sucede. Ya que si se posee el activo $X(t) + G(t)$ y el valor de X aumenta se prefiere no intercambiarlo por el activo S (o sea, no ejercer) y el precio de tal opción decrece, lo contrario sucede cuando el valor de X disminuye.

De la ecuación 6.6 se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial r} &= (T-t)Xe^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial r}i^I \\ &= (T-t)Xe^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial r}i[S(t), X_t + G(t), T] \\ &= (T-t)Xe^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial r}max(S(t) - (X_t + G(t)), 0) < 0,\end{aligned}$$

la ecuacií anterior es negativa sólo si $max(S(t) - (X_t + G(t)), 0)$ es negativa, y esto sucede debido a que si r crece entonces el valor presente de X decrece.

Finalmente, de la ecuación 6.7 es negativa, es decir, el valor del activo $A(t)$ decrece cuando T aumenta, esto es debido al descuento que se le aplica a X.

Ahora es posible derivar los resultados estacionarios de la opción *call* emitida sobre el activo A. Usando nuevamente la teoría racional de opciones, se sigue que:

$$\frac{\partial c}{\partial S} = c_1^A \frac{\partial A}{\partial S} > 0, \tag{6.8}$$

$$\frac{\partial c}{\partial G} = c_1^A \frac{\partial A}{\partial G} > 0, \tag{6.9}$$

$$\frac{\partial c}{\partial X} = c_1^A \frac{\partial A}{\partial X} + c_2^A < 0, \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial c}{\partial R} = c_1^A \frac{\partial A}{\partial R} + \frac{\partial c^A}{\partial R} \gtrless 0 \tag{6.11}$$

y

$$\frac{\partial c}{\partial T} = c_1^A \frac{\partial A}{\partial T} + \frac{\partial c^A}{\partial T} \gtrless 0, \tag{6.12}$$

Como era de esperarse el valor de la opción *call* se incrementa con el valor del activo subyacente y con el de los activos del emisor de la opción. Mientras el valor de la opción *call* decrece con el precio de ejercicio. El valor del *call* es una función decreciente de X ya que resulta ilógico que una opción con un precio de ejercicio grande pague más que una opción con un precio de ejercicio menor. Más sorprendentemente, es que el valor del *call* sea una función decreciente de la tasa de interés r y de la fecha de vencimiento T. Esto sucede porque un incremento en r o en T reduce el valor del activo subyacente. Si no hay riesgo de incumplimiento, el valor del activo subyacente es $S(t)$ y su valor depende de T pero no de r, así que el valor de la opción se incrementa con r y T.

6.1.4 Relación de paridad

Para establecer la relación de paridad entre las opciones vulnerables, es necesario primeramente derivar el precio de una opción *put* europea vulnerable como una *put* europea ordinaria (similar a lo que se hizo con una *call* europea vulnerable en la sección anterior) y entonces aplicar la relación de paridad para opciones ordinarias.

La liquidación al vencimiento de una *put* europea ordinaria es:

$$max(X - S(T), 0),$$

mientras que una *put* europea vulnerable con precio de ejercicio X paga al vencimiento:

$$min[G(T), max(X - S(T), 0)].$$

Sea $p(S(t), G(t), X, T)$ el valor de una *put* vulnerable al tiempo t. Como con una *call*, se puede expresar el *put* vulnerable como una opción *put* ordinaria sobre un activo artificial. Sea $a(t)$ el valor actual de un activo artificial que paga:

$$max(S, X - G)$$

al tiempo T. Con esta notación, una opción vulnerable tiene el mismo valor cuando una *put* ordinaria es emitida sobre el activo con valor $a(t)$; es decir,

$$\begin{aligned} max(X - a(T), 0) &= max(X - max(S, X - G), 0) \\ &= min(G, max(X - S, 0)) \qquad (6.13) \end{aligned}$$

Demostración de 6.13:

P.D. $max(X - max(S, X - G).0) \stackrel{?}{=} min(G, max(X - S, 0))$

Si $G \leq S \leq X$ y $S \geq X - G$, entonces:

$$\begin{aligned} max(X - max(S.X - G), 0) = max(X - S, 0) &= X - S, \\ min(G, max(X - S, 0)) = min(G, X - S) &= X - S. \end{aligned}$$

Análogamente se verifica para las otras relaciones que se presentan entre G, S y X, y S y $X - G$. †

Por lo tanto:

$$p(S(t), G(t), X, T) = p^a(a(t), X, T), \qquad (6.14)$$

utilizando nuevamente $i(x, y, T)$ se puede escribir:

$$\begin{aligned} a(t) &= S(t) + i[Xe^{-r(T-t)} - G(t), S(t), T] \\ &\stackrel{\text{def}}{=} S(t) + max[Xe^{-r(T-t)} - G(t) - S(t), 0] \end{aligned} \tag{6.15}$$

Demostración de 6.15:

P.D. $a(t) \stackrel{?}{=} S(t) + i[X_t - G(t), S(t), T]$

Si $X \leq G \leq S$, entonces

$$\begin{aligned} a(t) = max[S(t), X(t) - G(t)] &= S(t), \\ S(t) + max[X(t) - G(t) - S(t), 0] = S(t) + 0 &= S(t). \end{aligned}$$

análogamente se verifica para los casos restantes.†

Los valores de la opción *put* y de la *call* están relacionados a través de una relación de paridad. Sea $M(t)$ el valor actual de un activo tal que su valor cumple:

$$M(t) = min(a(T), X + G(T)) = max(A(T), X - G(T))$$

al tiempo T.

Demostración:

P.D. $min[max(S, X - G), X + G) \stackrel{\text{def}}{=} max[min(X + G, S), X - G]$

Si $S \leq X \leq G$:

$$\begin{aligned} M(t) &= min(S, X + G) = S, \\ M(t) &= max(S, X - G) = S, \end{aligned}$$

análogo para los casos restantes.†

Si $A(T) = min(X+G(T), S(T))$ la denotamos como $A_S(T)$ y si $a(T) = max(S(T), X-G(T))$ la denotamos por $a_S(T)$ entonces

$$A_a(T) = min(a(T), X + G(T)),$$

$$a_A(T) = max(A(T), X - G(T)),$$

de las ecuaciones 6.2 y 6.3 podemos escribir $M(t) = A_a(t)$ y $M(t) = a_A(t)$ como:

$$M(t) = a(t) - e[a(t), Xexp(-R(T-t)) + G(t), T]$$

y

$$M(t) = A(t) - e[Xexp(-R(T-t)) - G(t), A(t), T].$$

La relación de paridad entre *puts* y *calls* vulnerables puede ser ahora establecida de la siguiente manera:

$$p^a(a(t), X, T) = c^A(a(t), X, T) - M(t) + Xexp(-R(T-t)). \tag{6.16}$$

La prueba es simple. Sustituyendo $a(t)$ y $A(t)$ por $M(t)$ en 6.16:

$$p^M(M(t), X, T) = c^M(M(t), X, T) - M(t) + Xexp(-R(T-t)),$$

es equivalente a:

$$M(t) + p^M(M(t), X, T) - c^M(M(t), X, T) = X_t,$$

que es simplemente la **paridad** *put-call* para opciones ordinarias con activo subyacente M y precio de ejercicio X.

La *put* será ejercida sólo si $a(T) < X$, no hay incoveniente si se reemplaza $a(t)$ por $M(t)$ en 6.16. Más aun, la *call* será ejercida sólo si $A(T) > X$, no hay problema si se reemplaza $A(T)$ por $M(t)$ en 6.16. Entonces, 6.16 es simplemente la **paridad** *put-call* para opciones vulnerables sobre M con precio de ejercicio X.

6.2 Proceso de difusión lognormal

En esta sección, se supone que el valor del activo subyacente sigue:

$$dS = \mu_S S dt + \sigma_S S dB_S.$$

donde σ_S es supuesta constante y dB_S es el incremento de un proceso estándar de Wiener. Cuando S sigue un proceso de difusión lognormal, es posible construir una cobertura perfecta para una opción vulnerable. El valor, v, de cualquier opción vulnerable se satisface la ecuación de Black-Scholes, ya que la única diferencia entre las opciones vulnerables y las ordinarias es la liquidación (*payoff*):

$$\frac{\partial v}{\partial T} - rv + rS\frac{\partial v}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} = 0. \tag{6.17}$$

Las condiciones de acotamiento para 6.17 dependen de las provisiones contractuales de la opción vulnerable en cuestion.

6.2.1 Opciones europeas vulnerables

El valor de una opción *call* europea vulnerable puede ser obtenida tomando la esperanza de la liquidación de la opción bajo la suposición de dinámicas del precio neutrales al riesgo. Cuando además del precio del activo, la garantía también sigue un proceso de difusión lognormal, el valor de la opción puede ser escrito como sigue [17]:

$$c(S,G,X,T) = \frac{e^{-rT}\left[\int_X^\infty \frac{dS^*}{S^*}\int_0^{S^*-X} dG^* e^{-D} + \int_0^\infty \frac{dG^*}{G^*}\int_X^{G^*+X}\frac{dS^*}{S^*}e^{-D}(S^*-X)\right]}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}\sigma_G\sigma_S T}, \tag{6.18}$$

donde:

$$\begin{aligned} D &= \frac{A^2-2\rho AB+B^2}{2(1-\rho^2)}, \quad (6.19)\\ A &= \frac{log(S/S^*)+(r-\sigma_S^2/2)T}{\sigma_S\sqrt{T}},\\ B &= \frac{log(G/G^*)+(r-\sigma_G^2/2)T}{\sigma_G\sqrt{T}}. \end{aligned}$$

Los asteriscos denotan valores del activo al vencimiento del *call* vulnerable. En la ecuación 6.19, la primer doble integral corresponde a la liquidación esperada si el emisor de la opción está en banca rota al vencimiento, mientras que la segunda integral corresponde a la liquidación esperada en el caso contrario.

Si se supone $\rho = 0$ y G constante, entonces la ecuación 6.19 se convierte en:

$$c(S,G,X,T) = \frac{e^{-rT}\left[\int_X^\infty \frac{dS^*}{S^*}e^{-D}G + \int_X^{G+X}\frac{dS^*}{S^*}e^{-D}(S^*-X)\right]}{\sqrt{2\pi T}}. \tag{6.20}$$

Resolviendo las integrales y derivando con respecto al activo subyacente se obtiene el radio de cobertura para opciones *call* vulnerables [8]:

$$\frac{\partial c}{\partial S_t} = e^{-r(T-t)}\phi(\delta-\sigma(T-t)) \tag{6.21}$$

donde:

$$\delta = \frac{ln(\frac{G+X}{S_t})+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma}.$$

Bajo la misma suposición el precio para la opción vulnerable es:

$$p(S, G, X.T) = \frac{\epsilon^{-rT}\left[\int_0^{X-G} \frac{dS^*}{S^*} e^{-D} G + \int_\infty^{X-G} X \frac{dS^*}{S^*} e^{-D}(X - S^*)\right]}{\sqrt{2\pi T}}. \quad (6.22)$$

Resolviendo las integrales y derivando con respecto al activo subyacente se obtiene el radio de cobertura para opciones *put* vulnerables [8]:

$$\frac{\partial p}{\partial S_t} = -e^{-r(T-t)}\phi(-\delta + \sigma(T-t)) \quad (6.23)$$

donde:

$$\delta = \frac{ln(\frac{X-G}{S_t}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma}.$$

Apéndice A

Relaciones de orden asintótico

En este apéndice se describen algunas relaciones de orden asintótico con algunos *ejemplos ilustrativos, [6], con el objeto de ampliar la información del capítulo tres lo* referente a los valores de π, π' y Δ.

Se dice que la función $f(h)$ es del **mismo** *orden asintótico* que $g(h)$ -denotado por $f(h) \sim O(g(h))$ - si la siguiente relación es satisfecha:

$$0 < \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{g(h)} < \infty.$$

Se dice que una función $f(h)$ es de **menor** *orden asintótico* que $g(h)$ -denotado por $f(h) \sim o(g(h))$- si:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{g(h)} = 0.$$

Para la mejor comprensión de las definiciones dadas se presentan algunos ejemplos de relaciones de orden asintótico:

$$h \sim o(\sqrt{h}), \quad 3h^2 \sim o(\sqrt{h}), \quad 5\sqrt{h} + h^2 \sim O(\sqrt{h}), \quad h - 8h^2 \sim O(h).$$

Apéndice B

Convergencia en distribución

En este apéndice se demuestra que $Y_n(T)$ converge en distribución a la función de distribución normal con media μT y varianza $\sigma^2 T$ al calcular el limite de su función generadora de momentos cuando n tiende a infinito, para complementar lo establecido en el capítulo tres en la sección 3.1.

Sea $Y_n(T) = \sum_i^n \varepsilon$ y su respectiva función generadora de momentos:

$$\begin{aligned} E(e^{tY_n(T)}) &= E(e^{t\sum_{i=1}^n \varepsilon}) = \prod_{i=1}^n E(e^{t\varepsilon}) \\ &= \prod_{i=1}^n (\pi e^{t\Delta} + \pi' e^{-t\Delta}) \\ &= (\pi e^{t\Delta} + \pi' e^{-t\Delta})^n. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Calcular el límite cuando n tiende a infinito de la ecuación anterior es equivalente a:

$$\lim_{n\to\infty} (\pi e^{t\Delta} + \pi' e^{-t\Delta})^n \approx \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma} \right) e^{t\sigma\sqrt{h}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma} \right) e^{-t\sigma\sqrt{h}} \right)^{T/n}, \tag{B.2}$$

lo anterior se obtiene con la sustitución directa de los valores de π, π', Δ y n definidos en el capítulo 3. El lado derecho de la ecuación anterior es equivalente a:

$$\lim_{h\to 0} e^{\frac{T}{n} log\left(\frac{1}{2} \left(1+\frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma}\right) e^{t\sigma\sqrt{h}} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma}\right) e^{-t\sigma\sqrt{h}} \right)}. \tag{B.3}$$

Como es bien sabido el límite de una función (si el límite existe) es igual a la función evaluada en el límite, por lo cual se puede calcular el límite del exponente y una vez encontrado aplicarle la función exponencial, por lo cual se fija la atención sólo en encontrar el límite de:

$$\lim_{h\to 0} \frac{T}{h} log \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma} \right) e^{t\sigma\sqrt{h}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma} \right) e^{-t\sigma\sqrt{h}} \right). \tag{B.4}$$

El límite de la ecuación anterior es de la forma $\frac{0}{0}$ cuando h tiende a 0, por lo cual se aplica la regla de L'Hôpital obteniendo:

$$\lim_{h\to 0} T \frac{\frac{\mu}{\sigma}\frac{1}{2\sqrt{h}}e^{t\sigma\sqrt{h}} + (1 + \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})e^{t\sigma\sqrt{h}}\frac{t\sigma}{2\sqrt{h}} - \frac{\mu}{\sigma}\frac{1}{2\sqrt{h}}e^{t\sigma\sqrt{h}} - (1 - \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})e^{-t\sigma\sqrt{h}}\frac{t\sigma}{2\sqrt{h}}}{(1 + \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})e^{t\sigma\sqrt{h}} + (1 - \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})e^{-t\sigma\sqrt{h}}}, \tag{B.5}$$

simplificando B.5:

$$\frac{T}{2} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\mu}{\sigma}(e^{t\sigma\sqrt{h}} - e^{-t\sigma\sqrt{h}}) + t\sigma[(1 + \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})e^{t\sigma\sqrt{h}} - (1 - \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})e^{-t\sigma\sqrt{h}}]}{\sqrt{h}[(1 + \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})e^{t\sigma\sqrt{h}} + (1 - \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})e^{-t\sigma\sqrt{h}}]}. \tag{B.6}$$

Otra vez la ecuación B.6 es de la forma $\frac{0}{0}$ por lo que se vuelve a aplicar L'Hôpital, el término dentro del límite queda como sigue:

$$\frac{\frac{\mu}{\sigma}(e^{t\sigma\sqrt{h}}\frac{t\sigma}{2\sqrt{h}} + e^{-t\sigma\sqrt{h}}\frac{t\sigma}{2\sqrt{h}}) + t\sigma[\frac{\mu}{\sigma}\frac{1}{2\sqrt{h}}e^{t\sigma\sqrt{h}} + (1 + \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})e^{t\sigma\sqrt{h}}\frac{t\sigma}{2\sqrt{h}} + \frac{\mu}{\sigma}\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-t\sigma\sqrt{h}} + (1 - \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})e^{-t\sigma\sqrt{h}}}{\frac{1}{2\sqrt{h}}[(1 + \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})e^{t\sigma\sqrt{h}} + (1 - \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})e^{-t\sigma\sqrt{h}}] + \sqrt{h}[\frac{\mu}{\sigma}\frac{1}{2\sqrt{h}}e^{t\sigma\sqrt{h}} + (1 + \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})e^{t\sigma\sqrt{h}}\frac{t\sigma}{2\sqrt{h}} + (1 - \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})e^{-t\sigma\sqrt{h}}}$$

simplificando el término anterior se obtiene:

$$\frac{2\mu t(e^{t\sigma\sqrt{h}} + e^{-t\sigma\sqrt{h}}) + t^2\sigma^2((1 + \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})e^{t\sigma\sqrt{h}} + (1 - \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})e^{-t\sigma\sqrt{h}})}{(1 + \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})(e^{t\sigma\sqrt{h}} + \sqrt{h}e^{t\sigma\sqrt{h}}t\sigma) + (1 - \frac{\mu\sqrt{h}}{\sigma})(e^{-t\sigma\sqrt{h}} - \sqrt{h}e^{-t\sigma\sqrt{h}}t\sigma) + \frac{\sqrt{h}\mu}{\sigma}(e^{t\sigma\sqrt{h}} - e^{-t\sigma\sqrt{h}})}.$$

al aplicar el límite al término anterior y multiplicarlo por $\frac{T}{2}$ se llega a:

$$\frac{T}{2} \left(\frac{4\mu t + 2t^2\sigma^2}{2} \right) = \frac{T}{2}(2\mu t + t^2\sigma^2) = t(\mu T) + (\sigma^2 T)\frac{t^2}{2}, \tag{B.7}$$

finalmente al aplicar la función exponencial a este límite se obtiene:

$$\lim_{n \to \infty} E(e^{tY_n(T)}) = e^{t(\mu T)+(\sigma^2 T)\frac{t^2}{2}}, \tag{B.8}$$

y esta es la función generadora de momento de la función de distribución normal con media μT y varianza $\sigma^2 T$.

Apéndice C

Datos históricos

En este apéndice se encuentran las series históricas de los datos utilizados para el desarrollo de los ejemplos en el capítulo cinco, cabe señalar que esta información fue proporcionada por el M. en Ec. Rafael E. Gomez-Tagle Morales.

Semana	$us WTI	Bonos 30a
09.Jan 92	17.86	7.42
16.Jan 92	18.91	7.65
23.Jan 92	18.32	7.71
30.Jan 92	18.94	7.79
06.Feb 92	19.51	7.75
13.Feb 92	19.68	7.92
20.Feb 92	18.54	7.91
27.Feb 92	18.75	7.86
05.Mar92	18.55	7.95
12.Mar92	18.83	8.04
19.Mar92	19.29	7.98
26.Mar92	19.28	7.99
02.Apr92	19.80	7.92
09.Apr92	20.31	7.85
15.Apr92	19.87	7.87
23.Apr92	19.98	8.06
30.Apr92	20.85	8.06
07.May92	20.71	8.00
14.May92	20.55	7.87
21.May92	20.73	7.86
28.May92	21.95	7.87
04.Jun 92	22.48	7.88
11.Jun 92	22.35	7.88
18.Jun 92	22.26	7.80
25.Jun 92	22.80	7.78
02.Jul 92	22.10	7.63
09.Jul 92	21.40	7.61
16.Jul 92	21.79	7.62
23.Jul 92	22.08	7.54
30.Jul 92	21.83	7.46
06.Aug 92	21.42	7.45
13.Aug 92	21.34	7.36
20.Aug 92	21.44	7.32
27.Aug 92	21.13	7.42
03.Sep 92	21.48	7.37
10.Sep 92	21.93	7.24
17.Sep 92	22.30	7.34
24.Sep 92	21.64	7.42
01.Oct92	21.83	7.30
08.Oct92	21.99	7.45
15.Oct92	22.33	7.51
22.Oct92	21.22	7.61
29.Oct92	20.71	7.60
05.Nov92	20.64	7.69
12.Nov92	20.21	7.57
19.Nov92	20.54	7.54
25.Nov92	20.20	7.54
03.Dec 92	19.08	7.53
10.Dec 92	19.28	7.39
17.Dec 92	19.70	7.39
24.Dec 92	19.95	7.31
30.Dec 92	19.59	7.35

Semana	$us WTI	Bonos 30a
07.Jan 93	18.95	7.40
14.Jan 93	18.70	7.36
21.Jan 93	18.63	7.27
28.Jan 93	20.41	7.17
04.Feb 93	20.30	7.15
11.Feb 93	20.26	7.15
18.Feb 93	19.42	7.02
25.Feb 93	20.36	6.88
04.Mar93	21.07	6.74
11.Mar93	20.13	6.75
18.Mar93	20.29	6.82
25.Mar93	20.13	6.86
01.Apr93	20.52	6.97
08.Apr93	20.22	6.85
15.Apr93	20.22	6.73
22.Apr93	19.73	6.75
29.Apr93	20.53	6.89
06.May93	20.47	6.80
13.May93	20.07	6.95
20.May93	19.51	6.99
27.May93	20.06	6.93
03.Jun 93	19.74	6.88
10.Jun 93	19.28	6.88
17.Jun 93	18.70	6.81
24.Jun 93	18.41	6.75
01.Jul 93	18.45	6.67
08.Jul 93	17.79	6.66
15.Jul 93	17.47	6.56
22.Jul 93	17.33	6.63
28.Jul 93	18.23	6.69
04.Aug 93	17.80	6.55
12.Aug 93	18.18	6.38
19.Aug 93	17.65	6.20
26.Aug 93	18.40	6.12
02.Sep 93	17.97	6.04
09.Sep 93	16.97	5.96
15.Sep 93	16.86	5.97
23.Sep 93	17.58	6.07
30.Sep 93	18.79	6.04
07.Oct93	18.49	6.02
14.Oct93	18.50	5.86
21.Oct93	18.25	5.84
28.Oct93	17.37	5.95
04.Nov93	17.36	6.12
11.Nov93	16.90	6.21
18.Nov93	16.69	6.20
25.Nov93	16.10	6.30
02.Dec 93	14.95	6.26
08.Dec 93	14.59	6.17
16.Dec 93	14.23	6.30
23.Dec 93	14.48	6.25
30.Dec 93	14.17	6.28

Semana	$us WTI	Bonos 30a
06.Jan 94	15.42	6.40
13.Jan 94	14.51	6.18
20.Jan 94	15.10	6.29
27.Jan 94	15.42	6.31
03.Feb 94	15.89	6.28
10.Feb 94	14.56	6.41
17.Feb 94	14.23	6.47
24.Feb 94	14.74	6.66
03.Mar 94	14.71	6.77
10.Mar 94	14.14	6.96
17.Mar 94	14.82	6.83
24.Mar 94	15.12	6.95
31.Mar 94	14.79	7.09
07.Apr 94	15.58	7.22
14.Apr 94	16.23	7.29
21.Apr 94	17.16	7.21
28.Apr 94	16.57	7.27
05.May 94	17.29	7.34
12.May 94	18.28	7.56
19.May 94	18.45	7.24
26.May 94	17.74	7.36
02.Jun 94	18.23	7.35
09.Jun 94	18.67	7.28
16.Jun 94	19.91	7.36
23.Jun 94	19.26	7.40
30.Jun 94	19.37	7.62
07.Jul 94	19.12	7.61
14.Jul 94	20.18	7.54
21.Jul 94	19.37	7.55
28.Jul 94	19.77	7.55
04.Aug 94	20.14	7.42
11.Aug 94	18.68	7.66
18.Aug 94	17.73	7.50
25.Aug 94	17.52	7.54
01.Sep 94	17.47	7.45
08.Sep 94	17.62	7.57
15.Sep 94	16.72	7.64
22.Sep 94	17.64	7.78
29.Sep 94	17.95	7.84
06.Oct94	18.23	7.96
13.Oct94	17.10	7.86
20.Oct94	17.54	8.00
27.Oct94	18.15	8.05
03.Nov94	18.96	8.10
10.Nov94	18.18	8.15
17.Nov94	17.63	8.13
24.Nov94	18.06	7.95
01.Dec 94	17.70	8.03
08.Dec 94	17.12	7.90
15.Dec 94	16.73	7.86
22.Dec 94	17.21	7.87
29.Dec 94	17.72	7.83

Semana	$us WTI	Bonos 30a
05.Jan 95	17.72	7.89
12.Jan 95	17.72	7.88
19.Jan 95	18.69	7.77
26.Jan 95	18.24	7.86
02.Feb 95	18.54	7.76
09.Feb 95	18.24	7.68
16.Feb 95	18.59	7.57
23.Feb 95	18.48	7.49
02.Mar 95	18.35	7.48
09.Mar 95	18.02	7.53
16.Mar 95	18.13	7.29
23.Mar 95	18.85	7.44
30.Mar 95	19.15	7.37
06.Apr 95	19.77	7.35
13.Apr 95	19.15	7.32
20.Apr 95	20.52	7.34
27.Apr 95	20.43	7.32
04.May 95	20.29	7.15
11.May 95	19.41	6.97
18.May 95	20.00	6.88
25.May 95	19.11	6.75
01.Jun 95	18.90	6.53
08.Jun 95	18.91	6.56
15.Jun 95	18.94	6.56
22.Jun 95	17.58	6.50
29.Jun 95	17.56	6.64
06.Jul 95	17.37	6.52
13.Jul 95	17.25	6.60
20.Jul 95	17.01	6.96
27.Jul 95	17.49	6.91
03.Aug 95	17.72	6.93
10.Aug 95	17.89	6.95
17.Aug 95	17.66	6.90
24.Aug 95	19.51	6.82
31.Aug 95	17.84	6.65
07.Sep 95	18.27	6.60
14.Sep 95	18.85	6.47
21.Sep 95	17.76	6.56
28.Sep 95	17.76	6.59
05.Oct95	16.87	6.42
12.Oct95	17.12	6.39
19.Oct95	17.32	6.31
26.Oct95	17.58	6.39
02.Nov95	17.96	6.24
09.Nov95	17.84	6.28
16.Nov95	18.11	6.22
23.Nov95	17.83	6.28
30.Nov95	18.18	6.13
07.Dec 95	18.73	6.08
14.Dec 95	19.11	6.09
21.Dec 95	18.86	6.09
28.Dec 95	19.36	5.98

Semana	$us WTI	Bonos 30a
04.Jan 96	19.91	6.03
11.Jan 96	18.79	6.15
18.Jan 96	19.18	5.99
25.Jan 96	18.42	6.11
01.Feb 96	17.71	6.07
08.Feb 96	17.76	6.15
15.Feb 96	19.04	6.17
22.Feb 96	22.10	6.34
29.Feb 96	19.54	6.47
07.Mar96	19.81	6.46
14.Mar96	21.16	6.69
21.Mar96	22.40	6.62
28.Mar96	21.41	6.72
04.Apr96	22.75	6.67
11.Apr96	25.34	6.94
18.Apr96	23.82	6.83
25.Apr96	24.15	6.80
02.May96	20.86	7.06
09.May96	20.68	7.02
16.May96	20.77	6.91
23.May96	22.43	6.86
30.May96	19.93	6.93
06.Jun 96	20.00	6.90
13.Jun 96	20.05	7.13
20.Jun 96	20.09	7.11
27.Jun 96	20.97	6.99
04.Jul 96	21.21	6.93
11.Jul 96	21.95	7.06
18.Jul 96	21.68	6.93
25.Jul 96	20.74	7.01
01.Aug 96	21.04	6.84
08.Aug 96	21.55	6.79
15.Aug 96	21.90	6.81
22.Aug 96	22.49	6.84
29.Aug 96	22.15	7.04
05.Sep 96	23.44	7.15
12.Sep 96	25.00	7.08
19.Sep 96	23.45	7.04
26.Sep 96	24.44	6.89
03.Oct96	24.81	6.83
10.Oct96	24.26	6.88
17.Oct96	25.42	6.79
24.Oct96	24.46	6.85
31.Oct96	23.35	6.64
07.Nov96	22.74	6.53
14.Nov96	24.41	6.42
21.Nov96	24.04	6.42
28.Nov96	23.75	6.44
05.Dec 96	25.58	6.51
12.Dec 96	23.72	6.63
19.Dec 96	26.57	6.58
26.Dec 96	24.92	6.58

Semana	$us WTI	Bonos 30a
02.Jan 97	25.69	6.74
08.Jan 97	26.62	6.85
16.Jan 97	25.52	6.83
23.Jan 97	23.93	6.86
30.Jan 97	24.87	6.87
06.Feb 97	23.10	6.76
13.Feb 97	22.02	6.62
20.Feb 97	21.98	6.66
27.Feb 97	20.89	6.81
06.Mar97	20.94	6.89
13.Mar97	20.70	6.96
20.Mar97	22.32	6.96
26.Mar97	20.64	6.98
03.Apr97	19.47	7.07
10.Apr97	19.57	7.11
17.Apr97	19.42	7.07
24.Apr97	19.83	7.13
30.Apr97	20.21	6.96
08.May97	20.35	6.93
15.May97	21.30	6.87
22.May97	21.51	6.99
29.May97	20.97	6.98
05.Jun 97	19.66	6.88
12.Jun 97	18.69	6.78
19.Jun 97	18.67	6.68
26.Jun 97	19.09	6.78
03.Jul 97	19.56	6.63
10.Jul 97	19.22	6.56
17.Jul 97	19.99	6.49
24.Jul 97	19.53	6.44
31.Jul 97	20.14	6.30
07.Aug 97	20.09	6.53
14.Aug 97	20.08	6.55
21.Aug 97	19.45	6.62
28.Aug 97	19.58	6.57
04.Sep 97	19.40	6.61
11.Sep 97	19.53	6.69
18.Sep 97	19.38	6.40
25.Sep 97	20.25	6.40
02.Oct97	21.77	6.30
09.Oct97	22.12	6.35
16.Oct97	20.97	6.39
23.Oct97	20.84	6.31
30.Oct97	21.22	6.14
06.Nov97	20.39	6.18
13.Nov97	20.70	6.10
19.Nov97	19.80	6.04
27.Nov97	19.15	6.05
04.Dec 97	18.60	6.05
11.Dec 97	18.15	5.99
18.Dec 97	18.52	5.98
24.Dec 97	18.25	5.91

Semana	$us WTI	Bonos 30a
31.Dec 97	17.64	5.92
08.Jan 98	16.97	5.75
15.Jan 98	16.34	5.74
22.Jan 98	15.84	5.87
29.Jan 98	17.82	5.94
04.Feb 98	16.37	5.86
12.Feb 98	15.96	5.87
19.Feb 98	16.16	5.85
26.Feb 98	15.41	5.95
05.Mar 98	15.45	6.04
12.Mar 98	14.32	5.87
19.Mar 98	14.39	5.89
26.Mar 98	15.91	5.97
02.Apr 98	15.83	5.85
08.Apr 98	15.63	5.77
16.Apr 98	15.97	5.87
23.Apr 98	13.11	5.98
30.Apr 98	15.66	6.09
07.May 98	15.31	5.96
14.May 98	15.11	5.97
21.May 98	14.17	5.91
28.May 98	14.88	5.83
04.Jun 98	15.31	5.83
12.Jun 98	12.85	5.56
18.Jun 98	11.82	5.71
25.Jun 98	14.09	5.66
02.Jul 98	14.57	5.60
09.Jul 98	13.92	5.61
16.Jul 98	14.54	5.74
23.Jul 98	13.83	5.66
30.Jul 98	14.26	5.73
06.Aug 98	13.80	5.65
13.Aug 98	13.26	5.65
20.Aug 98	13.61	5.46
27.Aug 98	13.27	5.38
03.Sep 98	14.7	5.29
10.Sep 98	14.7	5.18
17.Sep 98	14.92	5.16
24.Sep 98	15.83	5.13
01.Oct 98	15.49	4.88
08.Oct 98	14.53	5.00
15.Oct 98	14.06	4.97
22.Oct 98	13.96	5.17
29.Oct 98	14.27	5.08
05.Nov 98	13.89	5.36
12.Nov 98	14.01	5.25
19.Nov 98	12.29	5.26
26.Nov 98	10.78	5.17
03.Dec 98	11.21	5.00
10.Dec 98	10.79	4.95
17.Dec 98	11.00	5.01
24.Dec 98	10.98	5.22
31.Dec 98	12.11	5.12

Fecha	Mezcla Méx. ($us x barril)	Dolar Interbancario	CETES 28 dias
12/1993	10.32	3.104	11.78
1/1994	10.98	3.106	10.52
2/1994	11.45	3.106	9.45
3/1994	11.35	3.230	9.73
4/1994	12.40	3.363	15.79
5/1994	13.86	3.280	16.36
6/1994	14.58	3.330	16.18
7/1994	15.61	3.398	17.07
8/1994	15.07	3.398	14.46
9/1994	13.43	3.386	13.76
10/1994	15.27	3.408	13.60
11/1994	16.14	3.437	13.74
12/1994	15.09	3.440	18.51
1/1995	15.24	5.000	37.25
2/1995	15.56	5.400	41.69
3/1995	15.65	5.970	69.54
4/1995	16.56	6.770	74.75
5/1995	17.15	5.840	59.17
6/1995	16.05	6.195	47.25
7/1995	14.96	6.250	40.94
8/1995	14.96	6.135	35.14
9/1995	14.97	6.250	33.46
10/1995	14.14	6.498	40.29
11/1995	14.10	7.290	53.16
12/1995	15.91	7.570	48.62
1/1996	16.17	7.678	40.99
2/1996	16.50	7.413	38.58
3/1996	18.27	7.569	41.45
4/1996	19.24	7.509	35.21
5/1996	17.61	7.475	28.45
6/1996	17.12	7.449	27.81
7/1996	17.71	7.610	31.25
8/1996	18.80	7.575	26.51
9/1996	20.85	7.545	23.90
10/1996	22.20	7.523	25.75
11/1996	20.84	7.953	29.57
12/1996	21.68	7.881	27.23
1/1997	20.52	7.898	23.55
2/1997	18.43	7.825	19.80
3/1997	16.47	7.995	21.66
4/1997	15.80	7.914	21.35
5/1997	16.61	7.910	18.42
6/1997	15.32	7.917	20.17
7/1997	15.77	7.930	18.80
8/1997	16.27	7.840	18.93
9/1997	16.09	7.769	18.02
10/1997	17.36	7.754	17.92
11/1997	16.08	8.275	20.16
12/1997	13.50	8.173	18.85
1/1998	11.82	8.040	17.95
2/1998	10.79	8.415	18.74
3/1998	9.67	8.517	19.85
4/1998	10.69	8.510	19.03
5/1998	10.79	8.470	17.91
6/1998	9.99	8.915	19.50
7/1998	10.14	8.946	20.08
8/1998	9.77	8.964	22.64
9/1998	10.88	9.905	40.80
10/1998	10.40	10.395	34.86
11/1998	9.17	9.990	32.12
12/1998	7.67	10.006	33.66

Bibliografía

[1] John Hull: *Introduction to futures and options markets*, Prentice Hall, 1995.

[2] J. Rodríguez de Castro: *Introducción al análisis de productos financieros derivados*, Limusa, 1997.

[3] Albert N. Shiryaev: *Essentials of stochastic finance: facts, models, theory*, World Scientific Pub., 1999.

[4] Ken Binmore: *Teoría de juegos*, McGraw-Hill, 1994.

[5] Robert C. Merton, Paul A. Samuelson: *Continuous time finance*, Blackwell, 1992.

[6] John Y. Campbell. et al: *The econometrics of financial markets*, Princeton University, 1996.

[7] Thomas Mikosh: *Elementary stochastic calculus with finance in view*, World Scientific Pub., 1998.

[8] Michael U. Dothan: *Prices in financial markets*, Oxford University Press, 1990.

[9] Spivak: *Calculus*, Reverté, 1994.

[10] Lothar Sachs: *Applied statistics. A handbook of techniques*, Springer Verlag New York, 1982.

[11] Constantin Tudor: *Procesos estocásticos*, Aportaciones matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 1997.

[12] Thomas C. Gard: *Introduction to stochastic differential equations*, Marcel Dekkey, 1998.

[13] Paul Wilmott, et al: *Option pricing. Mathematical models and computation*, Oxford Financial Press, 1993.

[14] Paul Wilmott: *Derivatives. The theory and practice of financial engineering.* John Wiley Sons, 1998.

[15] Satyajit Das: Risk management and financial derivatives, McGraw Hill, 1997.

[16] Robert A. Taggart: *Quantitative analysis for investment management.* Prentice Hall, 1996.

[17] Herb Johnson, René Stulz: *The pricing of options with default risk.* The journal of finance, vol. XLII, 1987.