

00365



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

3.

**FRONTERAS ABSORBENTES EN  
MEDIOS ELASTICOS**

**T E S I S**  
**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE**  
**MAESTRA EN CIENCIAS MATEMATICAS**  
**P R E S E N T A**  
**E. BEATRIZ LOPEZ VILICAÑA**

**DIRECTOR DOCTOR FRANCISCO SANCHEZ SESMA**

28/8/13



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Indice

Agradecimientos .....	4
Introducción .....	5
<i>El problema general; Ultimos trabajos; Distribución por capítulos; Seguimiento</i>	
Marco Teórico .....	9
<i>Ecuación de Onda; Condición de Sommerfeld; Operador DtN; Problemas de aproximación</i>	
Métodos de Solución .....	19
<i>Resumen; Formulación Variacional del problema de Helmholtz; Discretización</i>	
Aplicaciones .....	24
<i>Ejemplo (caso unidimensional)</i>	
Conclusiones .....	34
ANEXO 1 .....	35
ANEXO 2 .....	45
Referencias .....	48

# AGRADECIMIENTOS

Esta tesis se pudo realizar gracias al financiamiento del Instituto de Ingeniería, UNAM.

Agradezco en forma especial a Francisco Sánchez Sesma por su confianza y apoyo. Así mismo a su disponibilidad para discernir y argumentar los detalles del trabajo aún en los momentos más difíciles.

A Jesús López Estrada por su amistad.

Al doctor Anton Minzoni por su asesoría. A Lourdes Velasco y Angel Soriano por sus consejos.

Agradezco también a mis amigos de cubículo Leo, Moy y Juan Carlos por su interés y apoyo en aspectos de computación.

# Capítulo 0

## Introducción

---

Condición de Fronteras Absorbentes para el estudio de la propagación de ondas acústicas y elásticas. Aplicaciones. Descripción sintética por capítulos del contenido de la tesis.

## 0.1 Problema General

Encontramos el fenómeno ondulatorio en prácticamente todo el espacio físico que habitamos y percibimos; en diversas manifestaciones como las ondas acústicas, las electromagnéticas y también las elásticas; nos interesa representar el movimiento de partículas (propagación, reflexión y difracción) de una forma simplificada y confiable. Para lograr eso construimos y resolvemos un modelo numérico del problema de interés. Así, por un lado tenemos la expresión matemática que lo representa (ecuación de onda) y por otro la caracterización del espacio infinito en que se da el movimiento, esto es, debe representar la disipación de energía conforme la distancia crece. El concepto que agrupa lo anterior es el de Fronteras Absorbentes.

El estudio del fenómeno ondulatorio que nos ocupa tiene una amplia gama de aplicaciones tecnológicas. Entre ellas destacan la difracción de una onda acústica por un objeto dado (un avión) la cual produce una distribución de presiones en su frontera y conocerla puede ser necesario para calcular el campo irradiado a grandes distancias. En el caso de telecomunicaciones la frecuencia de las ondas varía de algunas decenas de kilociclos (radio) hasta los megaciclos y los gigaciclos (televisión) requiriendo pruebas indirectas como la difracción, la interferencia y la reflexión para su estudio. La propagación de ondas sísmicas se refieren a la propagación de vibraciones que se producen en el medio sólido, se utilizan las fronteras absorbentes para representar el exterior sin modelarlo realmente; éste sólo se manifiesta a través de las condiciones de frontera. Se utilizan también para estudiar medios heterogéneos como huecos, fracturas o burbujas llenas de material de distintas densidades, al estudiar la variación en el espectro de la respuesta y después integrar dicha variación al material completo. Para realizar pruebas no destructivas en materiales con propiedades dinámicas y materiales compuestos, en la modelación de la interacción suelo-estructura, la radiación o difusión de una estructura elástica sumergida en un medio fluido infinito, en cimentaciones, etc.

## 0.2 Desarrollos Recientes

Las Fronteras Absorbentes surgen con Lysmer y Kuhlemeyer (1969) y empiezan a despertar interés en los 70's en virtud del incremento en el estudio numérico de distintos fenómenos en regiones finitas con condiciones de frontera adecuadas para simular el medio exterior, típicamente un medio in-

finito. Lysmer y Kuhlemeyer proponen un amortiguamiento viscoso para representar la absorción de las componentes de esfuerzo normal y cortante a lo largo de la frontera artificial, dando buenos resultados para el caso unidimensional. Posteriormente Clayton y Engquist (1977) observaron que en el dominio frecuencia-número de onda, la tracción es proporcional al número de onda perpendicular a la frontera, el cual es la raíz cuadrada de la diferencia de números de onda (el absoluto y el aparente a lo largo de la frontera). Ellos propusieron una aproximación paraxial basada en operadores pseudo-diferenciales para la ecuación de onda; ésta aproximación tiene la virtud de reducir significativamente las reflexiones espurias para un intervalo amplio de ángulos de incidencia. Se han propuesto una buena cantidad de modificaciones y mejoras a las condiciones de frontera que originaron el concepto de fronteras absorbentes. Por ejemplo, las soluciones analíticas que se obtienen a partir del concepto de matriz de rigidez conducen a una interpretación física de absorción perfecta, Sánchez Sesma y Vai (1998), así como condiciones exactas derivadas de la ecuación de onda en el dominio del tiempo M. Grote (1995). Por ello se considera que el tema está abierto y con diversas opciones de desarrollo.

Para el tratamiento numérico de las ecuaciones en derivadas parciales, que modelan los fenómenos ondulatorios antes descritos, se recurre a los métodos en diferencias finitas o de elementos finitos. La mayor parte del trabajo de investigación desarrollado en este campo ha sido en el dominio del tiempo. Lo que permite tratar problemas no lineales. Este trabajo se enfoca en el estudio numérico de los modelos diferenciales en el dominio de la frecuencia. En este esquema resulta natural abordar éstos modelos en su formulación variacional débil.

### 0.3 Descripción de los capítulos

En éste escrito se mostrará la formulación matemática de las fronteras absorbentes y algunos ejemplos de aplicación. En el capítulo uno se presenta el marco teórico en que se desarrolla la ecuación reducida de onda, para representar una excitación armónica al medio que se estudia y simular el movimiento generado por dicha perturbación, para ello hay dos alternativas la primera a partir de la Mecánica del Medio Continuo que se presenta en el apéndice 1 y la segunda se deduce a partir de la segunda Ley de Newton, la ley de conservación de la masa y el comportamiento lineal del medio en que

se propaga la energía. Se definen los conceptos de Condición de radiación al infinito propuesta por Sommerfeld y el operador DtN. Todo lo anterior da lugar a la definición de Fronteras Absorbentes. En el capítulo 2 se presentan los métodos que usualmente se aplican en el estudio de la propagación de ondas y en la aplicación de las fronteras absorbentes, y se desarrolla la formulación variacional para el problema de Helmholtz. En el capítulo 3 se analiza el caso más general de frontera unidimensional y bidimensional.

## 0.4 Seguimiento

Evidentemente, el objeto de ésta tesis no se ha agotado en ésta búsqueda. Además el tema ofrece perspectivas que apenas se esbozan aquí y que se pueden abordar en el futuro.

Las Fronteras Absorbentes se han tratado desde un punto de vista general, a partir del planteamiento de un marco teórico conceptual con la ecuación de Helmholtz, la condición de Sommerfeld y el operador DtN para los casos en dos y tres dimensiones. Se da un esbozo de la formulación variacional para el mismo problema. En la parte práctica se presenta un ejemplo general unidimensional en que se hace uso de las fronteras absorbentes y con una solución de Galerkin débil. En éste modelo se obtienen resultados satisfactorios dadas las restricciones mismas del modelo. Una alternativa de trabajo futuro es hacer una formulación diferente que permita comparar el modelo existente o bien cambiar las hipótesis iniciales de éste modelo general para observar variaciones en el tiempo y espacio. Esto permitiría estudiar fenómenos diferentes dentro del mismo modelo. Por ejemplo el estudio de medios heterogéneos en ambas direcciones o bien heterogeneidades particulares como la fractura. Otra alternativa de trabajo es la evaluación e implementación de herramientas de cómputo distintas para el estudio de las Fronteras Absorbentes. Un ejemplo es el programa Matlab y Programas que utilicen el Método de Elemento Finito.

# Capítulo 1

## Marco Teórico

---

En este capítulo se presentan las definiciones formales de frontera absorbente, Condición de Sommerfeld, Operador DtN, así como algunos problemas para la aproximación del operador DtN, y su noción de exactitud.

## 1.1 Planteamiento del Problema

Físicamente las fronteras absorbentes ideales disipan la energía de las ondas que arriban a ellas. Matemáticamente se busca hacer finito un problema para tratarlo numéricamente estableciendo un dominio cerrado dentro de uno infinito, con condiciones de frontera que garanticen la transferencia hacia el exterior.

El objetivo de este trabajo es mostrar que el concepto de fronteras absorbentes es útil para el estudio numérico de la propagación de energía ondulatoria en medios elásticos.

Para ello es necesario formular las siguientes hipótesis:

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  acotado,  $\Gamma$  una variedad de dimensión  $n-1$  suficientemente regular, frontera de  $\Omega$  y sea  $\Omega' = \mathbb{R}^n - \bar{\Omega}$  donde  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ .

1.  $\Omega \cup \Gamma$  es un medio continuo isótropo y elástico lineal que se caracteriza por las constantes de Lamé  $\lambda$  y  $\mu$ .
2. la ecuación que gobierna el movimiento es la de Navier

$$\mu \Delta \bar{u} + (\lambda + \bar{\mu}) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) + \rho \omega^2 \bar{u} = -\bar{f}$$

que gracias a la descomposición de Helmholtz, puede expresarse como:

$$\bar{u} = \nabla \Upsilon + \nabla \times \bar{\Psi}, \quad \nabla \cdot \bar{\Psi} = 0$$

Siempre que

$$\bar{f} = \nabla \Theta + \nabla \times \bar{\Psi}, \quad \nabla \cdot \bar{\Psi} = 0$$

con

$$\Delta \Upsilon + k_p^2 \Upsilon = -\Theta$$

y

$$\Delta \bar{\Psi} + k_s^2 \bar{\Psi} = -\bar{\Xi}$$

En ésta secuencia  $k_p = \frac{\omega}{v_p}$  y  $k_s = \frac{\omega}{v_s}$  son los números de onda P y S respectivamente

donde  $\omega$  = frecuencia circular en  $(\frac{rad}{s})$

$$v_p = \sqrt{\frac{(\lambda+2\mu)}{\rho}} = \text{velocidad de ondas P}$$

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \text{velocidad de ondas S y } \rho = \text{densidad de masa.}$$

En el presente trabajo se considera la parte escalar de la descomposición de Helmholtz; que se obtiene al considerar excitaciones armónicas y con las siguientes condiciones de frontera:

$$\Delta u + k^2 u = f, \forall \bar{x} \in \Omega \quad (1)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g, \forall x \in \Gamma \quad (2)$$

donde  $\alpha = \alpha(x)$ ,  $\beta = \beta(x)$ ,  $g = g(x)$  son funciones sobre  $\Gamma$  y  $u = u(\bar{x})$  es función sobre  $\Omega \cup \Gamma$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(d-1)/2} \left( \frac{\partial u}{\partial n} - iku \right) \quad (3)$$

Esta última relación se conoce como condición de irradiación de Sommerfeld, en ella  $r$  es la distancia desde un punto cualquiera de la región en que se originan las ondas difractadas (si  $d=2$  ó  $3$   $r$  define una circunferencia ó una esfera).

donde  $k$  es el parámetro antes mencionado que se conoce como número de onda. Es la relación entre la frecuencia y la velocidad de propagación de onda.

$$\frac{\omega}{c}$$

o bien representa la cantidad de ondas por unidad de longitud

$$\frac{2\pi}{\lambda}$$

3. El campo incidente para la ecuación de onda es conocido y tiene forma  $f_{inc}(x, t) = f_0(x)e^{-i\omega t}$

Con objeto de dar sustento a las hipótesis anteriores se presentan algunos conceptos generales de la teoría ondulatoria de partículas y la mecánica del medio continuo.

### 1.1.1. Ecuación de Onda

La materia condensada suele estar formada por un conjunto de partículas que constituyen una estructura molecular o cristalina y que interactúan entre sí, dando lugar a una configuración de equilibrio. En numerosas aplicaciones es conveniente aceptar que dichas partículas están constituidas por una masa continua, sin huecos ni separaciones en su interior, que es homogénea y además isotrópica, esto es, se excluye la posibilidad de tener una distribución preferencial de las propiedades mecánicas. De ésta manera, es posible crear un modelo matemático diferencial para estudiar su comportamiento y en particular el caso de la propagación de ondas, puesto que las ondas en última instancia son la variación espacio-temporal de una cierta propiedad de un medio; el cambio de la altura de la superficie del agua en una ola, el cambio de la presión local en el sonido, los desplazamientos en el caso de ondas en medios elásticos sólidos. Las ondas electromagnéticas se propagan en el vacío sin que exista un medio portador. Sin embargo, las ecuaciones que las gobiernan son muy semejantes y en muchos casos son idénticas. Esto hizo pensar en el *ether* como medio portador. Las mediciones de la velocidad de la luz ayudaron a abandonar esa idea. En lo sucesivo no se abordan explícitamente las ondas electromagnéticas; nos referiremos a ondas acústicas y elásticas pero los resultados son aplicables a todas ellas.

Si consideramos el tipo más sencillo de movimiento de una onda longitudinal en una cuerda y suponemos que se tiene una densidad de masa uniforme  $\rho$ , que no actúan sobre ella fuerzas exteriores (como las gravitatorias), que se encuentra en un medio elástico continuo, como el descrito anteriormente. Además supongamos que los desplazamientos son pequeños. El desplazamiento de la cuerda a partir de su posición original se puede caracterizar con una función de la forma  $u=u(x,t)$ . Un medio elástico y lineal se puede describir mecánicamente con las constantes de Lamé  $\lambda$  y  $\mu$ <sup>1</sup> y con la ley de Hooke unidimensional:

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

Para deducir la ecuación de onda basta plantear el equilibrio dinámico de

---

<sup>1</sup>Para una descripción más detallada de los conceptos de la Mecánica del Medio Continuo consultar el apéndice 1 de ésta tesis y/o la referencia 2

una partícula con dimensiones suficientemente chicas:

$$A(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Delta x + \dots) - A\sigma_x = \rho \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial t^2} A \Delta x \quad (5)$$

donde  $A$  = el área de la superficie normal al eje  $x$ ,  $\bar{u}$  es el valor promedio del desplazamiento entre un punto y su incremento ( $x, x + \Delta x$ ). En la expresión de equilibrio dinámico el valor de  $\sigma(x + \Delta x, t)$  se puede expresar mediante un desarrollo en serie de Taylor en el que sólo se consideren los términos de primer orden. Se puede ver que si además  $\Delta x \rightarrow 0, \bar{u} \rightarrow u$  la ecuación de equilibrio se vuelve:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial u^2}{\partial t^2} \quad (6)$$

Ahora se introduce la ley de Hooke que relaciona esfuerzos con deformaciones y la ecuación anterior se convierte en la Ecuación de Onda Unidimensional:

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u^2}{\partial t^2} \quad (7)$$

donde  $\alpha^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}$

Las ecuaciones de onda en dos y tres dimensiones pueden deducirse de la misma manera, éstas ecuaciones serían apropiadas por ejemplo, para una teoría sencilla de ondas en agua (bidimensionales) o de ondas acústicas (tri dimensionales).

Se puede demostrar que para un campo escalar tridimensional  $u$  la ecuación general de onda es:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial u^2}{\partial t^2} \quad (8)$$

En el caso de un campo vectorial  $\bar{u}$  la ecuación de onda elástica adquiere la forma

$$v_s^2 \Delta \bar{u} + (v_p^2 - v_s^2) \nabla(\nabla \cdot \bar{u}) = \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial t^2} \quad (9)$$

Esta ecuación es más complicada pero gracias a la descomposición de Helmholtz es posible resolverla en términos de ecuaciones de onda.

### 1.1.2. Ecuación de Helmholtz

La ecuación reducida de onda (Ecuación de Helmholtz) se puede deducir de varias maneras, en ésta tesis se desarrollan dos de ellas; la primera se plantea a partir de la Mecánica del Medio Continuo (es la ciencia que analiza las propiedades de los medios deformables bajo la hipótesis del medio continuo). Este planteamiento tiene la ventaja de permitir predecir el comportamiento de los materiales que se utilizan en las ciencias aplicadas (Mecánica y Resistencia de Materiales) el desarrollo se puede encontrar en el Apéndice I de ésta tesis. La segunda consiste en formar un sistema de ecuaciones determinado a partir de tres hipótesis físicas (La Ley de Conservación de la masa, la segunda ley de Newton y la linealidad en el comportamiento de los materiales):

a) Para obtener la ecuación de continuidad consideremos un elemento diferencial de volumen  $V$ , con frontera  $\Gamma$ , sujeta a presiones distribuidas  $P(x, t)$ . La velocidad del flujo normal a través de la frontera se expresa por  $\mathbf{V}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x)$  donde  $\mathbf{n}(x) \in \Gamma$  es el vector normal unitario. La disminución de la masa debido a un flujo hacia el exterior de la frontera se expresa (Ley de Conservación de la Masa) :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = \oint_{\Gamma} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \, dS$$

La integral curvilínea del lado derecho se puede convertir en una integral de volumen si se aplica el Teorema de Gauss:

$$\oint_{\Gamma} (\rho \mathbf{V}) \cdot \bar{\mathbf{n}} \, dS = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) \, dV.$$

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) \right) \, dV = 0$$

implica la condición:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$$

ó ecuación de continuidad.

De la expresión para la ley de Conservación de la Masa se tiene una ecuación con cuatro incógnitas  $\bar{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3), \rho$

b) En segundo lugar obtenemos la ecuación de Euler: Supongamos que un elemento diferencial de volumen está sujeto a cierta presión distribuída  $P(x, t)$ . La fuerza total en la frontera es la integral  $-\oint P \bar{n} dS$ , de la segunda Ley de Newton ( $F = ma$ ) tenemos que:

$$-\oint_{\Gamma} P \bar{n} dS = \int_V \rho \frac{d\bar{V}}{dt} dV$$

Usando el teorema de Gauss y linealizando la diferencial total en  $V$  la integral curvilínea se convierte en integral de volumen  $-\oint_{\partial V} P \bar{n} ds = -\int_V \text{div} P dV$  para llegar a la ecuación de Euler:

$$\rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = -\nabla P$$

En este caso se tienen 3 ecuaciones con 5 incógnitas  $V = (v_1, v_2, v_3), \rho, P$ . Para representar la Ecuación de Euler en su forma estacionaria se hace  $V(x, t) = v(x)e^{i\omega t}$ ,  $P(x, t) = p(x)e^{i\omega t}$  y se puede escribir:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \rho v(x) i\omega e^{i\omega t}$$

Tomando el gradiente del campo de presión  $P$ , se obtiene:

$$\nabla P(x, t) = (\nabla p(x))e^{i\omega t}$$

Luego, de la ecuación de Euler se sigue que:

$$\Rightarrow \rho v(x) i\omega e^{i\omega t} = \nabla p e^{i\omega t}$$

es decir que,

$$i\rho v(x)\omega = \nabla p$$

La que se puede modificar al introducir el vector de desplazamientos  $u(x, t)$  en la expresión:

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\nabla P$$

cuya forma estacionaria es:

$$\rho\omega^2 \mathbf{u} = \nabla p$$

c) En tercer lugar se supone que  $P = f(\rho)$  de la forma  $P = c^2\rho$  y junto con las expresiones de los dos primeros pasos se llega a un sistema determinado de cinco ecuaciones y cinco incógnitas que se relacionan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^2}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial \rho^2}{\partial t^2} \\ &= -c^2 \rho_0 \operatorname{div} \frac{\partial f}{\partial t} = c^2 \operatorname{div}(\nabla P)\end{aligned}$$

para llegar a:

$$\Delta P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial P^2}{\partial t^2} = 0$$

Bajo la hipótesis de ondas armónicas se obtiene la ecuación de Helmholtz:

$$\Delta p + k^2 p = 0$$

donde  $k = \frac{\omega}{c}$  es el número de onda con dimensiones  $m^{-1}$

Existen varias técnicas para resolver la ecuación de Helmholtz, que varían según el problema que se quiera resolver. Una solución muy importante es propuesta por el matemático francés D'Alembert alrededor de 1750; la cual consiste en cambiar el sistema de coordenadas mediante la introducción de un cambio de variables a fin de encontrar una ecuación más fácil de manejar, la solución general que obtuvo es:  $u(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$

Es fácil de evaluar si se tienen dos condiciones iniciales. Además proporciona interpretaciones físicas importantes del movimiento ondulatorio. Otro método muy común es el de separación de variables, por su planteamiento lleva naturalmente a los desarrollos de Fourier de las ecuaciones separadas. Este método se emplea en el ejemplo que se presenta en el capítulo 3.

### 1.1.3. Condición de Sommerfeld

Para asegurar que el problema de Helmholtz está bien definido en el dominio infinito, es necesario, establecer una condición que garantice que las ondas son de irradiación pura y además que se van disipando conforme el radio de influencia va creciendo. La expresión matemática para representar dicha condición, se obtiene del análisis del problema exterior como sigue:

Sea  $u(r)$  una solución de la ecuación de Helmholtz en el dominio  $\Omega^+$

y  $g(r, r') = g(|r' - r|)$  el espacio libre de la función de Green, que satisface la ecuación 1 :

$$\Delta g(|r' - r|) + k^2 g(|r' - r|) = \delta(|r' - r|)$$

$\forall r, r' \in \Omega^+, \delta$  la función Delta de Dirac.

Donde  $r'$  es el origen o punto fijo y  $r$  es el radio de la esfera que va creciendo hasta la frontera.

Si además  $u(r) \in C^2(\overline{\Omega})$  es armónica en  $\overline{\Omega}$ , se puede probar que se cumple la ecuación identidad de Green para la función que definimos:

$$u(r) = \int_{\partial R} [u(r') \frac{\partial}{\partial n'} g(r, r') - g(r, r') \frac{\partial}{\partial n'} u(r')] dS(r')$$

Se cubre la región con una esfera de radio  $R$  que encierra  $\Omega$ . Y hacemos  $R \rightarrow \infty$  De esta forma  $\partial\Omega^+ = \partial\Omega \cup S_R$  y la condición se convierte en:

$$\int_{\partial S_R} [u(r') \frac{\partial}{\partial n'} g(r, r') - g(r, r') \frac{\partial}{\partial n'} u(r')] dS(r') \rightarrow 0$$

para  $R \rightarrow \infty$  y para cualquier  $r \in \Omega^+$  suponemos que la esfera es de medida tal que se cumple:

$$R = |r' - r| \cong |r'|$$

finalmente la integral para la función de Green se convierte en:

$$\int_{\partial S_R} \frac{1}{R} (iku - \frac{u}{R} - \frac{du}{dR}) \frac{e^{ikR}}{4\pi} dS$$

Entonces las ondas se absorben en el infinito si:

$$u = o(R^{-1}), \quad iku - \frac{du}{dR} = o(R^{-1}), \quad R \rightarrow \infty$$

#### 1.1.4. Problemas de aproximación para la frontera artificial

Para resolver el problema que se planteó en el inciso 1.1 es necesario imponer condiciones de frontera sobre la frontera artificial, es decir, en el lugar geométrico en que la distancia teórica alcanza la frontera, de tal manera que

la solución junto con su condición de frontera (ecuaciones 1 y 2) coincidan con la restricción en  $\Omega$ , dicha condición se conoce como el operador DtN, porque relaciona a la función  $u(x,t)$  con su derivada (condición de Dirichlet y Neumann, respectivamente) de la siguiente manera:

$$\partial_r u = Mu$$

Para aplicar el operador primero se obtiene la expresión de  $u$  y su derivada; para el caso de dos dimensiones es:

$$\partial_r U(a, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k H_n^{(1)'}(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} \int_0^{2\pi} \cos n(\theta - \theta') U(a, \theta') d\theta'$$

donde  $H_n^{(1)}$  es la función de Hankel de primer orden

Es decir que el problema que se plantea en el inciso 1.1. tiene solución única y debe ser la misma que se obtiene con el operador DtN.

La solución de la ecuación anterior se aplica considerando series truncadas en un cierto valor  $N$  lo que modifica la expresión del operador DtN a la forma:

$$\partial_r U = M^N U$$

se puede tener una solución más o menos aproximada en función del número de elementos de la serie que se tomen,  $0 \leq n \leq N$ , aunque en el caso de  $n > N$  la condición truncada es evidentemente  $\partial_r U = 0$ , lo que da lugar a eigenvalores que se desprecian y que producen un cierto error de aproximación. Dicho error se puede disminuir de varias formas; seleccionando un mayor número en  $N$ , asignando a los valores de  $\partial_r U = 0$  la condición de Sommerfeld, la de Bayliss-Turkel o la exacta de Grote.

El objeto de estudio de los errores de aproximación da lugar a estudios detallados y por el momento no se profundizará en ello.

# Capítulo 2

## Métodos de Solución

---

En este capítulo se presenta un resumen muy breve de los métodos de solución al problema de propagación de ondas así como el planteamiento teórico de la formulación variacional.

# Métodos de solución

## Introducción

En el estudio de propagación de ondas se han aplicado dos tipos de métodos que varían según el orden de aproximación. En el primero se encuentra el Método de Elemento Finito y el Método de Diferencias Finitas. El Método de Elemento Finito se ha utilizado tradicionalmente en Ingeniería Estructural, se ha visto que es más adecuado para problemas que involucran comportamiento no lineal y singularidades, además permite un refinamiento más efectivo. En el segundo grupo se encuentran métodos que utilizan aproximaciones de orden superior como el método de Elementos Espectrales. Se ha encontrado que en este caso se tiene la ventaja de llegar a soluciones con el mismo error que los métodos de menor orden pero con un número reducido de puntos de discretización y disminuyendo así el esfuerzo de cómputo; éste método es de gran utilidad para analizar elementos con un gran número de grados de libertad.

Sin embargo los fenómenos en la realidad requieren del análisis tanto de configuraciones complejas como estructuras largas, es por ello que lo usual es utilizar herramientas híbridas. Esto es usar Elementos Finitos o Diferencias Finitas en aquellas partes del modelo donde ocurran comportamientos plásticos, heterogeneidades importantes ó interacción con diferentes tipos de materiales (comportamiento no lineal) y Métodos Espectrales en el elemento completo

Matemáticamente, el problema se puede plantear de dos maneras:

1. Con la Ecuación de onda simplificada que se obtiene al suponer una solución periódica (Helmholtz); en este caso para que el problema exterior quede bien definido se requieren establecer dos tipos de condiciones: la de radiación al infinito (Sommerfeld) para garantizar que las ondas se dirijan hacia el exterior y que disminuyan conforme crece el radio de influencia, éstas pueden dividirse también en locales y globales. Se requiere también de condiciones de frontera artificiales que limiten el dominio infinito que se estudia pero que dan lugar a errores en la aproximación de la solución numérica por truncamiento (condición de Robin). Con ésta formulación se pueden estudiar medios heterogéneos,

ya que es local y generalmente se trabaja en el dominio de la frecuencia.

2. En el dominio del tiempo se tiene una formulación integral que no requiere de condiciones de frontera, pero se tiene la desventaja de que se requiere la solución completa del problema en la frontera por lo que se considera global además es muy costosa porque da lugar a matrices no acopladas.

La selección de la forma de aproximación depende de la aproximación que se requiera, en ésta tesis se va a estudiar la formulación de la ecuación de Helmholtz en el problema exterior dado que interesa modelar las fronteras absorbentes en medios heterogéneos.

## Principio Variacional

Las aplicaciones de las Matemáticas a la Física se incrementaron en el siglo XIX y más aún en el siglo XX, al grado que cambiaron su carácter y ampliaron la naturaleza de su objeto de estudio; no solamente se ocuparon de la formalización y abstracción del conocimiento científico (matemáticas puras), sino también del manejo y control del mismo para un fin determinado (matemáticas aplicadas). Esto fué gracias a que se encargaron de construir modelos para describir nuevas teorías de Hidrodinámica, Elasticidad, Electromagnetismo, Termodinámica, y más tarde de la Relatividad y la Mecánica Cuántica, dando lugar a ecuaciones en Derivadas Parciales. Aunque algunos de dichos modelos se remontan al siglo XVIII, los matemáticos no eran capaces de resolver muchos de los problemas que se presentaban, fué necesario un gran esfuerzo de investigación de los Analistas del Siglo XIX en la búsqueda de nuevos métodos de solución para que se dieran resultados significativos y útiles para la Física. Es por esto que podemos afirmar que las necesidades de la Física obligaron la fundación de una nueva rama de la Ciencia Matemática que se denomina Análisis Funcional y que estudia las propiedades de las funciones de funciones. Dentro de las propiedades que nos interesa conocer está la siguiente: dentro de un grupo de funciones buscar aquella que haga un funcional estacionario <sup>1</sup>. Un sistema físico con

---

<sup>1</sup>Se dice que una función alcanza un valor estacionario en un cierto punto si el rango de variación en cualquier dirección es despreciable

frecuencia se comporta en forma estacionaria si las ecuaciones constitutivas del fenómeno son estacionarias de algún problema variacional.

## Formulación Variacional del problema de Helmholtz

Para empezar se analiza el siguiente problema variacional ( $J_1$ ) encontrar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que: <sup>2</sup>

$$J(u) \leq J(v) \\ \forall v \in C^1(\Omega)$$

donde:

$$J(v) = \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla v dx - k^2 v^2) dx - 2 \int_{\Omega} f v dx$$

Se puede verificar que  $J(u)$  está acotado por abajo, es estrictamente convexa, continua y coercitiva (i.e.  $J(u) \rightarrow \infty$  cuando  $\|u\|_W \rightarrow \infty$ ). Por tanto existe  $u \in W$ ,  $W \subset H_0^1(\Omega)$  tal que  $J(u) \leq J(v) \forall v \in W$

Por las condiciones necesarias de optimalidad, si  $u$  es solución del problema  $J_1$  entonces es solución de:

$$\delta J(v, w) = 0 \forall w \in \Omega$$

Cuya primera variación está dada por:

$$\delta J(v, w) = 2 \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla w - k^2 v w) dx - 2 \int_{\Omega} f \cdot w dx$$

Esto es,  $u$  es tal que:

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla w - k^2 u w) dx = \int_{\Omega} f \cdot w dx \forall w \in W$$

El problema anterior nos conduce al siguiente problema ( $J_2$ ) de encontrar  $u$  tal que  $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\Omega)$

Aplicando la identidad de Green tenemos:

$$\int_{\Omega} (-\Delta u v - k^2 u v) dx = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

---

<sup>2</sup>Se dice que se busca una solución en "sentido clásico" si queremos encontrar una función:  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  que satisfaga la ecuación y que se anule en su frontera

Por lo tanto

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - k^2 - f)v dx = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Y como  $H_0^1(\Omega)$  es denso en  $L^2(\Omega)$ , se sigue que

$$-\Delta u - k^2 u = f$$

A la solución de  $J_2$  se le llama solución débil a la Sobolev. Para finalizar esta presentación breve se desarrolla la formulación variacional para el problema de aplicación que se presenta en el capítulo 3.

Se trata del modelo de propagación de movimiento ondulatorio en un medio estratificado heterogéneo, de tal manera que el planteamiento matemático es el siguiente: A partir de la ecuación de onda

$$\Delta \cdot \Delta(u) + \lambda^2 \rho u = 0$$

y una onda incidente que tiene la forma:

$$e^{ik(\cos \alpha x + \sin \alpha z)}$$

con el número de onda:  $k^2 = \frac{\omega^2 \rho_0}{\mu_0}$  y la aproximación al campo de desplazamientos de la forma:

$$u = e^{ik(\cos \alpha x + \sin \alpha z)} + U(z)e^{ik \cos \alpha x}$$

se llega a la siguiente ecuación diferencial ordinaria con las condiciones de frontera:

$$(\mu(z)u')' + \lambda^2 \rho(z)U = G(z)$$

$$\mu(0)U_z = ia; \quad z = 0$$

$$\mu(H)U_z - ik \sin \alpha U = 0; \quad z = h$$

Cuya formulación variacional es :

$$\int_h^0 \mu U_z U_{*z} - \lambda^2 \rho U U_* dz - ik \sin \alpha U_*(-H) - ia V_*(0)$$

la variación de la ecuación de onda en el campo de desplazamientos es la siguiente:

$$U_* = U_0 + h, \quad U = U_0$$

$$\int_h^0 -(\mu(U_z)_z - \lambda^2 \rho U)h + \mu(0)V_z h - ia h - \mu(-H)V_z h + ik \sin \alpha U h = 0$$

# Capítulo 3

## Aplicaciones

---

Ejemplo unidimensional de propagación de ondas S en un medio estratificado de la Ciudad de México.

### 3.0 APLICACIONES

En éste capítulo se presenta un caso general de propagación de ondas S en un medio estratificado. El cual da lugar a la propagación en un movimiento de reflexión vertical. Por un lado se resuelve la ecuación de Helmholtz utilizando el método de Galerkin. Por otro lado se compara la solución anterior con un método analítico (Método de Haskell) através de la función de transferencia del sistema.

Los datos que alimentaron ambas soluciones fueron tomados partir de resultados de acelerogramas de pozo ubicados en la ciudad de México en la estación Coyoacán del CENAPRED.

#### DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Consideremos la propagación de ondas sísmicas tipo S en un depósito con geometría irregular y suave, ubicado sobre un semi-espacio elástico en el que descansan N estratos con las siguientes propiedades:

$\mu = \mu(x, z)$  módulo de elasticidad en esfuerzo cortante;  $\rho = \rho(x, z)$  densidad de masa;  $\beta = \beta(x, z)$  velocidad de propagación de ondas S

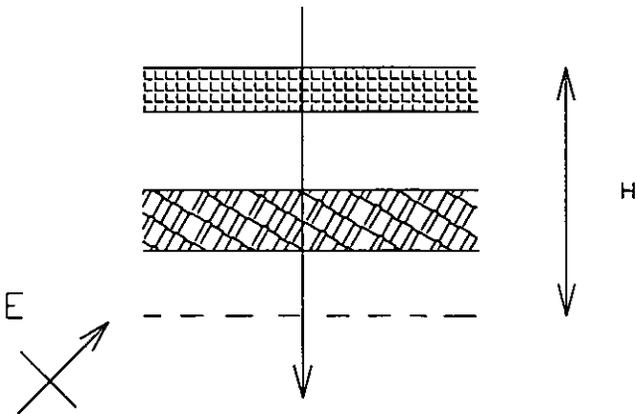


Figura 1

Como hemos visto la propagación de ondas armónicas queda expresada con la ecuación de Helmholtz

$$\Delta^2 u + k^2 u = 0$$

donde  $k = \frac{\omega}{\beta}$  es el número de onda,  $\omega$  es la frecuencia angular

y  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  el operador Laplaciano. Sin embargo nos interesa expresarla en términos de esfuerzos y deformaciones; por lo que reescribimos la ecuación de onda aplicando el operador Laplaciano:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial u}{\partial z} + \rho \omega^2 u = 0$$

y como  $\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_{xy}$ ,  $\mu \frac{\partial u}{\partial z} = \sigma_{zy}$  son los esfuerzos normales en x y z respectivamente, podemos escribir la ecuación de Helmholtz como:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho \omega^2 u = 0$$

## CONDICIONES DE FRONTERA

En  $z=0$  se tiene una superficie libre por lo que:

El Esfuerzo;  $\sigma_{zy} |_{z=0} = 0$

En  $z=H$  se tiene un condición de frontera absorbente que se expresa:

$$\mu \partial_z U |_{z=H} = -i \omega \rho_E \beta_E \cos \gamma U |_{z=H}$$

que se puede obtener ya sea evaluando la condición:

$$\sigma = \mu_E \frac{\partial U}{\partial z} |_{z=h} = \mu_E \frac{\partial (U e^{-i\nu_E z})}{\partial z} |_{z=h} = \mu_E (-i\nu_E) U e^{-i\nu_E z} = i\nu_E \mu_E V(h) = -i \frac{\omega}{\beta_E} \cos \gamma \rho_E \beta_E^2 U$$

ó bien evaluando la condición de Sommerfeld directamente

## CONSIDERACIONES ADICIONALES

a) El campo de desplazamientos en estratos tiene la forma:

$$u = u^0 + U$$

donde  $u^0$  es el campo incidente que tiene la forma

$$u^0 = u_0(\omega) e^{-i \frac{\omega}{\beta_E} \text{sen} \gamma x} e^{i \frac{\omega}{\beta_E} \text{cos} \gamma z} e^{i \omega t}$$

si  $k = \frac{\omega}{\beta_E} \text{sen} \gamma$  es el número de onda horizontal;  $\frac{\omega}{\beta_E} \text{cos} \gamma$  es el número de onda vertical se tiene:

$$u^0 = u_0(\omega) e^{-ikx} e^{i\omega t} e^{i\nu_E z}$$

b) El campo de desplazamiento resultante es desconocido y se aproxima con la base de cosenos siguiente:

$$u'_i = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \phi^n(z)$$

$$\phi^n(z) = \cos \frac{n\pi z}{h}$$

## SOLUCIÓN

La ecuación de movimiento en función de los esfuerzos se expresa como:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \omega^2 \rho u$$

cada componente de la ecuación anterior se expresa utilizando la forma del campo descrita anteriormente

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial u^0}{\partial z} + \mu \frac{\partial U}{\partial z}; \quad \sigma_{zy} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \mu (-i \frac{\omega}{\beta_E} \text{sen} \gamma) [u^0 + U];$$

$$\rho \omega^2 u = \rho \omega^2 (u_i + u(z)) e^{-i(kx - \omega t)}$$

Para conocer la respuesta en los estratos aplicamos el método de Galerkin de la siguiente manera:

$$\int_0^H \left( \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \omega^2 \rho v \right) \phi^n(z) dz = 0$$

El desarrollo de la expresión anterior es:

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}; \quad u = [u^0 + U] e^{-ikx} e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -iku; \quad \mu \frac{\partial u}{\partial x} = -\mu iku$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = \mu (-k^2) u$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zy} &= \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \mu \frac{\partial u^0}{\partial z} + \mu \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zy}) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u^0}{\partial z} + \mu \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ \rho \omega^2 u &= -\rho \omega^2 (u^i + U)\end{aligned}$$

$$\int_0^H (\mu(-k^2 x)(u^i + U) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu \frac{\partial u^i}{\partial z} + \mu \frac{\partial U}{\partial z}) + \rho \omega^2 (u^i + U)) \phi^n(z) dz = 0$$

La integral anterior se compone en cada miembro de una parte incidente conocida y otra reflejada que interesa conocer por lo que al separarlas se obtiene la siguiente función:

### 1. Parte incidente

$$\int_0^H k^2 \mu u^i \phi^m dz - \mu \frac{\partial u^i}{\partial z}(H) \phi^m(H) + \int_0^H \mu \frac{\partial u^i}{\partial z} \phi_z^m dz - \int_0^H \rho \omega^2 u^i \phi^m dz = F_I$$

### 2. Parte reflejada

$$\int_0^H [-k^2 \mu \Sigma A_n \phi^n \phi^m - \mu \Sigma A_n \phi_z^n \phi_z^m + \rho \omega^2 \Sigma A_n \phi^n \phi^m] dz + \mu \frac{\partial U}{\partial z} \phi^m(H) = F_R$$

En las integrales anteriores la parte incógnita se descompone de la siguiente manera:

$$\Sigma_{n=0} C_n [\omega^2 \rho_E \int_0^H \frac{\rho(z)}{\rho_E} (1 - \frac{\beta^2(z)}{\beta_E^2} \text{sen}^2 \gamma) \phi^m \phi^n dz - \mu_E \int_0^H \frac{\mu}{\mu_E} \phi^m \phi^n dz - i \omega \rho_E \beta_E \phi^m(H) \phi^n(H)] A_n$$

## SOLUCIÓN NUMERICA DEL SISTEMA

De la expresión final se obtiene un sistema de ecuaciones que se expresa por: Una matriz de coeficientes incógnitas multiplicado por el vector  $C_n$  y que da por resultado la función de campo incidente. Al resolver el sistema se obtiene una matriz cuya diagonal principal contiene la parte real de la solución y las diagonales la parte imaginaria. Al invertir el sistema anterior y obtener los coeficientes es posible obtener la respuesta del sistema y compararlo con el método de Haskell que aparece en el anexo 2.

$$[ \quad ] [ \quad ] = [ \quad ]$$

## DATOS

ESTRATO	ESPESOR	DENSIDAD	VELOCIDAD
1	4	1.5	160
2	5	1.6	200
3	2	1.7	280
4	1	1.4	80
5	3	1.4	80
6	2.5	1.7	500
7	2.5	1.7	400
8	2	1.7	340
9	2	1.7	400
10	4.5	1.7	590
SEMIESPACIO	60	2.1	1100

Tabla 1 Estratigrafía de la Estación Coyoacan

# CONCLUSIONES

Se realizó un Marco Teórico de las condiciones necesarias y suficientes para establecer la frontera transparente o absorbente en un medio con comportamiento elástico, lo cual representa un caso general pero también un punto de partida para la elaboración de modelos más complejos de propagación de Energía ondulatoria. Se presentó también un caso de aplicación para medios estratificados, con una solución de Galerkin débil, lo cual representó bastante ilustrativo de la aplicación de la frontera absorbente. Se obtuvieron resultados aceptables conforme las hipótesis del modelo y se plantearon las posibles rutas de seguimiento a la investigación. Dentro de las más importantes se encuentran el estudio variacional riguroso del problema exterior de Helmholtz para medios heterogéneos en dos direcciones. El estudio de la fractura en medios no elásticos, la disminución de los problemas de aproximación.

# Anexo 1 Mecánica del Medio Continuo

La mecánica del Medio Continuo es la rama de la Mecánica que se refiere al esfuerzo en sólidos, líquidos y gases, así como la deformación extrema de dichos materiales. La finalidad del presente anexo es unificar ciertos conceptos más que expresar en forma detallada los mismos, es por ello que se hace un esbozo muy general de la materia. Para el desarrollo de los conceptos básicos en principio tomemos una región en  $\mathbb{R}^3$

Sea un elemento diferencial de la misma; estará sujeto a fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie; las propiedades o fuerzas de cuerpo dependen de la cantidad de materia presente por ejemplo la masa, la cantidad de calor, la velocidad de propagación de ondas, la presión, la temperatura, etc. Si se toma el promedio de la masa en un elemento diferencial de volumen y después su limite:

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \rho$$

Lo que hemos hecho es convertir una propiedad extensiva a una puntual y lo mismo se puede hacer con la temperatura y el tiempo (para encontrar la variación local de la temperatura P):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = P$$

Las propiedades intensivas o puntuales de un medio continuo son funciones continuas y derivables del tiempo en cada punto del medio y por lo tanto podemos determinar el comportamiento global de campos escalares y vectoriales de las fuerzas y desplazamientos en el medio estudiado.

Otro concepto fundamental en la Mecánica del Medio Continuo es el esfuerzo; que se deduce del concepto extensivo de fuerza de superficie, esto es, si a una fuerza  $F$  que actúa sobre una superficie  $S$ , la suponemos uniforme distribuida continua y diferenciable, de tal manera que al tender a cero el elemento diferencial de área, le corresponda una parte pequeña de la fuerza total, se obtiene el esfuerzo promedio de la siguiente manera:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} = \sigma$$

Con los conceptos y las hipótesis anteriores se construyen tres tipos de relaciones: Las de equilibrio, de desplazamiento-deformación y las constitutivas

a) Equilibrio estático

Se plantea el equilibrio en el elemento diferencial de volumen de la región de  $\mathbb{R}^3$ ; Por simplicidad tomamos un estado de esfuerzos plano, para lo cual hacemos:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0$$

Ahora tomemos la suma de fuerzas en la dirección "x", y suponiendo la dimensión normal a  $x_1 x_2 = 1$  tenemos :

$$\begin{aligned} \Sigma F_{x_x} = 0 &= (\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x_x} dx_x) dx_y(1) - \sigma_{xx}(dx_y)(1) \\ &+ (\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x_y} dx_y) dx_x(1) - \sigma_{yx}(dx_x)(1) = 0 \end{aligned}$$

O bien

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x_x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x_y} = 0$$

Podemos proceder análogamente en la dirección "y" para obtener:

$$\Sigma F_{y_x} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x_y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x_x} = 0$$

Si además se consideran las fuerzas de cuerpo, las relaciones de equilibrio son:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x_x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x_y} + B_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x_x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x_y} + B_y = 0$$

b) Relaciones desplazamiento-deformación

Para un estado de deformaciones en el plano  $x_x x_y$  y con elementos diferenciales  $dx_x, dy_y$  se consideran por simplificación dos tipos de deformaciones, las longitudinales o isotrópicas y las angulares o distorsionales, mientras que las primeras llevan a un cambio en la magnitud, la segunda en forma. Para el medio de la figura las deformaciones longitudinales son:

$$\epsilon_l = \frac{\delta l}{l} = \frac{OA' - OA}{OA} = \frac{OA' - dx_x}{dx_x} = \frac{OA'}{dx_x} - 1$$

$$\Rightarrow OA' = (\epsilon_l + 1)dx_x$$

$$(OA')^2 = (1 + 2\epsilon_l + \epsilon_l^2)(dx_x)^2$$

Por otro lado del triangulo OA'C se tiene:

$$(OA')^2 = (dx_x + \frac{\partial u_x}{\partial x_x} dx_x)^2 + (\frac{\partial u_y}{\partial x_x} dx_x)^2$$

Igualando las expresiones y despreciando los términos de segundo orden tenemos:

$$(1 + 2\epsilon_l + \epsilon_l^2)(dx_x)^2 = (1 + 2\frac{\partial u_x}{\partial x_x} + (\frac{\partial u_x}{\partial x_x})^2 + (\frac{\partial u_y}{\partial x_x})^2)(dx_x)^2$$

tenemos:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_l = \frac{\partial u_x}{\partial x_x}$$

Se puede hacer lo mismo con  $\epsilon_{yy}$  y obtenemos:

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial x_y}$$

Y para las deformaciones distorsionales:

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial x_y} + \frac{\partial u_y}{\partial x_x}$$

En resumen:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x_x}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial x_y}$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial x_y} + \frac{\partial u_y}{\partial x_x}$$

c) Relaciones constitutivas

Un material es elástico si sus deformaciones son proporcionales a los esfuerzos locales (Ley de Hooke) lo cual se expresa matemáticamente de la siguiente manera a) para el caso de esfuerzo local axial

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} \text{ ó } \sigma_x = E\epsilon_x$$

b) para el caso de esfuerzo distorsional

$$\sigma_{xy} = G\epsilon_{xy} \text{ ó } \sigma_{xy} = E\epsilon_{xy}$$

Dentro de los materiales que se utilizan en ingeniería existen comportamientos muy variados pero tienen en común un comportamiento elástico al principio de la aplicación de la carga, esto es, la deformación es proporcional a la carga o esfuerzo local, el parámetro que expresa dicha proporción es el módulo elástico o módulo de Young (E) para el que existen tres posibilidades:

E=constante se tiene un material elástico perfecto

E=E(e) materiales inelásticos

E=E(t) materiales viscoelásticos

Experimentalmente se ha probado que ante un estado de esfuerzos uniaxial en la dirección "x" se tiene una respuesta (expansión o compresión) en la dirección ortogonal "y". Al cociente se le conoce como relación de Poisson.

$$\nu = \frac{-\epsilon_{tx}}{\epsilon_{ty}}$$

El módulo de rigidez del material se puede expresar en función del módulo de elasticidad y el módulo de Poisson como:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

La Ley de Hooke en tres dimensiones se escribe a partir de conceptualizar un esfuerzo normal como la descomposición de una parte isotrópica y otra distorsional:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} + \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}))$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} + \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}))$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} + \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}))$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E}\sigma_{xy}$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{2(1 + \nu)}{E}\sigma_{yz}$$

$$\epsilon_{zx} = \frac{2(1 + \nu)}{E}\sigma_{zx}$$

En un estado plano de esfuerzos se tiene:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = 0$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} + \nu(\sigma_{yy}))$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} + \nu(\sigma_{xx}))$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \nu(\sigma_{yy}))$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}$$

y los esfuerzos:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2}(\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2}(\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{xx})$$

$$\sigma_{xy} = G\epsilon_{xy}$$

En términos de la componente de deformación se tienen expresiones similares. Otra forma de la Ley de Hooke que será de utilidad se obtiene al expresar el esfuerzo normal como una descomposición de una parte isotrópica y una distorsional.

$$\sigma_x = \sigma_m + (\sigma_x - \sigma_m)$$

ó en términos de deformación:

$$\epsilon_x = \epsilon_m + (\epsilon_x - \epsilon_m)$$

La relación entre  $\epsilon_m$  y  $\sigma_m$  es:

$$\epsilon_m = \frac{1}{3K} \sigma_m$$

y los distorsionales

$$(\epsilon_x - \epsilon_m) = \frac{1}{2G} (\sigma_x - \sigma_m)$$

de donde:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G(\epsilon_x - \epsilon_m) + \sigma_m = 2G(\epsilon_x - \epsilon_m) + 3K\epsilon_m \\ &= 2G\epsilon_x + (3K - 2G)\epsilon_m \end{aligned}$$

si introducimos el parámetro de Lamé

$$\lambda = \frac{3k - 2G}{3}$$

Tenemos:

$$\sigma_x = 2G\epsilon_x + 3\lambda\epsilon_m$$

Por otro lado

$$\text{div} S = \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z}$$

$$= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 3\epsilon_m$$

Los esfuerzos normales y cortantes en función de los desplazamientos

$$\sigma_x = 2G \frac{\partial S_x}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} S$$

$$\sigma_y = 2G \frac{\partial S_y}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} S$$

$$\sigma_z = 2G \frac{\partial S_z}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} S$$

$$\tau_{xy} = G \left( \frac{\partial S_x}{\partial S_y} + \frac{\partial S_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = G \left( \frac{\partial S_y}{\partial S_z} + \frac{\partial S_z}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zx} = G \left( \frac{\partial S_z}{\partial S_x} + \frac{\partial S_x}{\partial z} \right)$$

A continuación se hace uso de las relaciones de equilibrio dinámico. Para presentarlas, se hará un resumen de las ideas fundamentales que las originan:

Para estudiar propiedades extensivas a partir de ecuaciones integrales se utiliza la técnica del volumen de control y el principio de conservación de la masa; la primera consiste en fijar un volumen conveniente para analizar su variación en el tiempo, el movimiento de partículas hacia adentro y hacia afuera es a partir de la superficie de control. El principio de la conservación de la masa establece que no hay ni creación ni destrucción de masa en el interior de un volumen de control y por tanto, si hay cambios de masa, éstos son consecuencia de un flujo a través de la superficie de control. Se establece el equilibrio dinámico de un volumen de control. En ésta situación, como se dijo, la resultante de esfuerzos internos tiene que ser nula y por tanto se obtiene la en la superficie de control como:

$$R = \int_{V_c} \rho v dV + \oint_{S_c} T(n) dS$$

Si se considera además que la cantidad de movimiento irá cambiando conforme entra y sale de la superficie de control, la rapidez de variación se obtiene integrando sobre la superficie la masa que cruza cada elemento por segundo, de esa manera se obtiene la ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\int_{V_c} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \oint_{S_c} \rho v (v \cdot n) dS$$

$$\int_{V_c} \rho f dV + \oint_{S_c} \rho v T(n) dS$$

la cual se puede transformar por medio de la expresión de Gauss y considerando la aceleración como

tenemos:

$$\rho a = \rho f + \text{div} T$$

Por la identidad de Cauchy

$T(n) = lT(i) + mT(j) + nT(k)$  donde

$$T(i) = \sigma_x i + \tau_{xy} j + \tau_{xz} k$$

$$T(j) = \tau_{yx} i + \sigma_y j + \tau_{yz} k$$

$$T(k) = \tau_{zx} i + \tau_{zy} j + \sigma_z k$$

y escribiendo la aceleración  $a$  y la fuerza másica como:

$$a = a_x i + a_y j + a_z k$$

$$f = f_x i + f_y j + f_z k$$

llegamos al siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio en coordenadas cartesianas:

$$\rho a_x = \rho f_x + G \nabla^2 s_x + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} \text{div} s,$$

$$\rho a_y = \rho f_y + G \nabla^2 s_y + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \text{div} s,$$

$$\rho a_z = \rho f_z + G \nabla^2 s_z + (G + \lambda) \frac{\partial}{\partial z} \text{div} s,$$

Si sustituimos el laplaciano  $\nabla^2$  en las ecuaciones de equilibrio y se escribe en forma vectorial se obtiene la relación :

$$\rho a = \rho f + G \nabla^2 s + (G + \lambda) \text{grad div } s$$

En problemas elásticos las aceleraciones son tan pequeñas que se pueden despreciar y la ecuación anterior se simplifica:

$$G \nabla^2 s + (G + \lambda) \text{grad div } s + \rho f = 0$$

Se conoce como la ecuación constitutiva fundamental de la elasticidad o la ecuación de Navier

#### Ecuación de Onda

Si consideramos el tipo más sencillo de movimiento de una onda en una cuerda y suponemos que se tiene una densidad uniforme  $\rho$ , que no actúan sobre ella fuerzas exteriores (como las gravitatorias), entonces tendremos una tensión uniforme y finalmente que los desplazamientos son pequeños. El desplazamiento de la cuerda de su posición original se puede simplificar en una componente distorsional y una componente axial o de dilatación. Dichas componentes producen rotaciones, deformaciones angulares y dilataciones. Si se tiene cuenta solamente con la componente distorsional, el material es incompresible y por lo tanto:

$$\text{div } s = 0$$

que al aplicar a la ecuación de Navier, se obtiene:

$$\rho \frac{d^2 s}{dt^2} = G \nabla^2 s$$

ahora, si se considera que no hay rotaciones, la condición cambia a:

$$\text{rot } s = 0$$

si se considera además que :

$$\text{grad div } s = \nabla^2 s + \text{rot rot } s$$

La ecuación de Navier se convierte en:

$$\rho \frac{d^2 s}{dt^2} = (2G + \lambda) \nabla^2 s$$

Finalmente:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = c^2 \nabla^2 s$$

$c$  es la velocidad de desplazamiento de la onda

Las ecuaciones de ondas en dos y tres dimensiones pueden deducirse de la misma manera, éstas ecuaciones serían apropiadas por ejemplo, para una teoría sencilla de ondas en agua (bidimensionales) o de ondas acústicas (tridimensionales). Considerando por separado cada componente del desplazamiento, puede demostrarse que la ecuación de ondas general es:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

#### **Ecuación de Helmholtz**

Si suponemos que todas las ondas son armónicas en el tiempo, con frecuencia angular  $\omega$  es posible expandir el campo escalar de excitación como:

$$u(x_i, t) = f(x_i) e^{-i\omega t}$$

con  $i = 1, 2, 3, \dots$

$f$  es una función estacionaria o función potencial de velocidad

Podemos simplificar la ecuación de onda en la Ecuación de Helmholtz de la siguiente manera:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

con  $k = \frac{\omega}{c}$

## ANEXO 2.- Metodo de Haskell

Este método sirve para calcular la respuesta de un sistema lineal estratificado; se transforma la ecuación diferencial parcial de onda en dos ecuaciones diferenciales ordinarias, mediante la introducción de un vector de funciones del desplazamiento y el esfuerzo en ondas SH. Se calcula la matriz de propagación para cada estrato a partir de la superficie y hasta el semiespacio para obtener la función de transferencia del sistema.

A partir de la ecuación de onda descrita en función de los esfuerzos y deformaciones:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

y la ecuación reducida de onda

$$\Delta^2 u + \frac{\omega^2}{\beta^2} u = 0$$

con una de sus soluciones:

$$u = u_1(k, z, w) e^{i(kx - \omega t)}$$

donde  $k = \frac{\omega}{\beta}$  es el número de onda;  $\omega$  = frecuencia angular;

$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  = velocidad de propagación de ondas S;

$\mu$  = módulo de elasticidad en cortante

se construye un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas mediante la introducción de la función:

$$u_2 = \mu \frac{du_1}{dz}$$

y que al sustituir la solución de la ecuación reducida de onda, y el esfuerzo en la ecuación de onda en términos de esfuerzos nos da la siguiente relación:

$$\frac{du_2}{dz} = (k^2 \mu - \omega^2 \rho) u_1$$

que en forma matricial se expresa por:

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} \\ k^2 \mu - \omega^2 \rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

o bien por:  $\frac{d}{dz}\bar{f} = A\bar{f}$  donde una solución para  $\bar{f}$  está dada por:

$$\bar{f}_j = \bar{v}_j e^{\psi_j(z-z_0)}$$

siendo  $\psi_j$  el valor característico de la matriz A;

$v_j$  = vector característico correspondiente al valor  $\psi_j$ , con  $j=1,2$  que al sustituirse en la solución da lugar a la solución general:

$$\bar{f} = EM\bar{w}$$

con  $\bar{w}$  = vector de amplitud de ondas ascendentes y descendentes  $S^+$ ,  $S^-$ , y M es la matriz que representa los factores verticales de fase. Bastará conocer la matriz inversa del producto  $F = EM$  para determinar las amplitudes del campo incidente y el reflejado en términos del esfuerzo y deformación. Es decir;

$$\bar{w} = F^{-1}\bar{f}$$

$$F^{-1} = \frac{1}{2\nu\mu} \begin{pmatrix} \nu\mu e^{\nu(z-z_0)} & -e^{-\nu(z-z_0)} \\ \nu\mu e^{\nu(z-z_0)} & e^{\nu(z-z_0)} \end{pmatrix}$$

Por otro lado la matriz de propagación es:

$$P(z, z_0) = I + \int_{z_0}^z A(\epsilon_1)d\epsilon_1 + \int_{z_0}^z A(\epsilon_1) + \int_{z_0}^{\epsilon_1} A(\epsilon_1) \int_{z_0}^{\epsilon_1} A(\epsilon_2)d\epsilon_2d\epsilon_1 + \dots$$

o bien

$$\frac{d}{dz}P(z, z_0) = A(z)P(z, z_0)$$

donde  $z_0$  es el nivel de referencia.

Si consideramos que  $P(z_0, z_0) = I$ ; obtenemos la siguiente propiedad:

$$\bar{f}(z) = P(z, z_0)\bar{f}(z_0)$$

Como  $P(z, z_0)\bar{f}(z)$  satisface la ecuación del sistema, entonces genera el vector desplazamiento-esfuerzo en la profundidad  $z$  al operar sobre dicho vector en la profundidad  $z_0$ . Si  $A(z)$  es constante en un estrato, al evaluar las integrales de la matriz de propagación queda:

$$P(z, z_0) = I + (z - z_0)A + \frac{1}{2}(z - z_0)^2AA + \dots = e^{(z-z_0)A}$$

En general para el  $i$ -ésimo estrato se tiene:

$$P(z, z_0) = \begin{pmatrix} \cosh n_i(z - z_0) & \operatorname{senh} \frac{n_i(z - z_0)}{n_i \mu_i} \\ n_i \mu_i \operatorname{senh} n_i(z - z_0) & \cosh n_i(z - z_0) \end{pmatrix}$$

donde

$$n_i = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{\beta_i^2}}; \quad k = \frac{\omega}{\beta_E} \operatorname{sen} \theta$$

$\beta_E$  es la velocidad de propagación de las ondas S en el semiespacio. Finalmente la respuesta del sistema se obtiene de la combinación entre W y P como sigue:

$$W_{z=z_{i+1}} = R \bar{f}_{z=0}$$

donde

$$R = F^{-1} P(z_i, z_{i-1}) \dots P(z_i, 0)$$

y como en  $z = 0$  el término  $l_2 = 0$ ,

$$l_1|_{z=0} = \frac{S^+}{r_{1,1}}$$

# REFERENCIAS

1. Achenbach, J.D., *Wave Propagation in Elastic Solids.*, Elsevier Science Publishers, 1975
2. Aki, K y P. G. Richards, *Quantitative seismology, theory and methods.*, San Francisco: W.H.Freeman., 1980
3. Clayton, R. y B. Engquist, *Wave Propagation in Elastic Solids.*, Elsevier Science Publishers.
4. Clayton, R. y B. Engquist, *Absorbing Boundary Conditions for acoustic and elastic wave equations*, *Bulletin of the Seismological Society of America* vol.67 No. 6. pp.1529-1540, 1977
5. Givoli D, *Non-reflecting boundary conditions:review article*, *J. Comput. Phys*, 94,1-29, 1980
6. M. Grote, *Absorbing Boundary Conditions for Acoustic and Elastic Wave Equations*, *Bulletin of the Seismological Society of America* vol. 67 No. 6.pp.1569-1540, 1977
7. M. Grote, J.B. Keller *The effects of surface geology on seismic motion*, *J. Comput. Physics* vol. 122. 231-245, 1995
8. Haskell N. A., *The dispersion of surface waves on multilayered media*, *Bull. Seis. Soc. Am.* 43, 17-34 1953
9. F. Ihlenburg, *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*, Springer ,1991

10. Keller J.D. y D. Givoli, *Exact non-reflecting boundary conditions*, J. Comput. Phys. 82, 172-192 1989
11. Lysmer J. y R.L. Kuhlemeyer , *Finite Dynamic model for infinite media*, J.Eng. Mech. Div. ASCE 95,859-877 ,1972
12. R. Madariaga Alain Cochard, *On the Integral Equation for an antiplane crack*, Departament de Sismologic Institute de Physique du Globe de Paris., 1992
13. F.J.Sánchez Sesma, J. Ramos-Martínez, M. Campillo, *An Indirect Boundary Element Method Applied to Simulate the seismic response of alluvial valleys for incident P, SV and Rayleigh waves*. Earthquake Eng. Struct Dyn. 7,441-450, 1979
14. F.J.Sánchez Sesma y R. Vai, *Absorbing Boundaries in frequency domain. In the effect of surface geology on seismic motion*. Recent Progress and New Horizon on ESG Study, Vol. 2 pp.961-966.
15. F.J. Sánchez Sesma, *Fundamentos de Elastodinmica (apuntes)*
16. J. Zhu, *Short note: A transparent boundary technique for numerical modeling of elastic waves* Departament of Structural Engineering and Materials, Technical Univesity of Denmark