



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

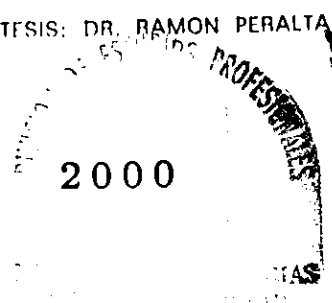
"ARQUEO EN SILOS"

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
**F I S I C O**  
P R E S E N T A :  
GABRIEL ARTURO CABALLERO ROBLEDO



DIRECTOR DE TESIS: DR. RAMON PERALTA FABI



281767



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO  
Jefa de la División de Estudios Profesionales  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:  
"Arqueo en silos"

realizado por CABALLERO ROBLEDO GABRIEL ARTURO

Con número de cuenta 9550424-5 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de tesis  
Propietario

DR. RAMON PERALTA FABI

*Ramon Peralta Fabi*

Propietario

DR. VICTOR MANUEL ROMERO ROCHIN

*Victor Manuel Romero Rochin*

Propietario

DR. RAUL MAURICIO RECHTMAN SCHRENZEL

*Raul Mauricio Rechtmán Schrenzel*

Suplente

DR. FRANCOIS ALLAIN LEYVRAZ WALTZ

*F. Leyvraz Waltz*

Suplente

DRA. CATALINA STERN FORGACH

*Catalina Stern Forgach*

Consejo Departamental de Física

*Patricia Goldstein Menache*

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN-MENACHE  
Coordinadora de Licenciatura



FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

A Liliana,  
por enseñarme que no hacen falta alas para volar. Te amo.

A mis abuelos.  
Celia, Aurora, Gabriel y Emilio.

A mis padres.  
este trabajo es tan suyo como mio, gracias.

A mi hermano Emilio.

A Juan.  
por tantos y tan buenos años de amistad.

## AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer de manera muy especial a Ramón Peralta por sus ideas, sus enseñanzas, su amistad, su ejemplo y por confiar en mí. Agradezco también a Víctor Romero, a Raúl Rechtman, a Catalina Stern y a Francois Leyvraz por sus valiosas aportaciones a este trabajo. A mis compañeros del Laboratorio de Fluidos por su apoyo y compañía. A mis padres y mi hermano, por todo su amor. A Juan, Enrico, Carlos, Luis, Víctor, Javier y Pablo por tantas clases, tantas tareas y tan grande amistad. A mis maestros Luis Briseño, Juan Manuel Lozano, César Rincón, María Ester Brandan y muy especialmente a Eugenio Ley Koo. A Liliana, Mariana, Gina y Pedro. A Carlos Málaga, Nicolás, Simao, Gabriel Torres, Eréndira, Rodrigo, Mildred, Christian, Paloma, Lorenza, Tamara, Isabel, Argelia, Tathali, Santiago, Eduardo, Omar, Nacho, Diana, Mauricio, Breno, Julio y Alexis. A mi familia y a los amigos de mis padres, que son parte de mi familia. A Don Gabriel Robledo Luna por su cariño y su sabiduría. A la Facultad de Ciencias. A la UNAM.

Agradezco a Fundación UNAM por la beca que me otorgó para la realización de esta tesis.

# CONTENIDO

<b>Resumen</b>	<b>2</b>
<b>1.- Introducción</b>	<b>3</b>
1.1 Medios granulados .....	3
1.2 Hipótesis de continuidad.....	6
1.3 Ecuaciones de equilibrio.....	8
<b>2.- Arqueo en silos</b>	<b>10</b>
2.1 Solución de Janssen.....	10
2.2 Correcciones al modelo de Janssen.....	15
2.3 Modelo q en dos dimensiones.....	17
2.4 Extensión del modelo q a tres dimensiones.....	22
2.4.1 Formulación.....	22
2.4.2 Estudio analítico del caso continuo.....	26
2.5 Modelo no local.....	33
<b>3.- Experimento</b>	<b>36</b>
3.1 Diseño.....	36
3.2 Metodología.....	38
3.3 Resultados.....	39
3.4 Conclusiones.....	48
<b>4.- Conclusiones y perspectivas</b>	<b>49</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>52</b>

## Resumen

Cuando un material granulado se encuentra dentro de un contenedor vertical (silo), la presión en la base del contenedor se satura conforme aumenta la altura de la columna, acercándose asintóticamente a un valor constante. A este fenómeno se le conoce como arqueo.

En el presente trabajo se discuten algunas aproximaciones teóricas a este tipo de sistemas. En particular se hace la extensión a tres dimensiones del modelo  $q$  en la versión de Peralta-Fabi, Málaga y Rechtman. Se plantean las ecuaciones discretas y se hace la extensión al límite en el que el material se considera como un continuo, encontrándose que el esfuerzo vertical obedece una ecuación de calor en la que la profundidad juega el papel de la variable temporal. Se resuelve la ecuación para un caso particular de condiciones a la frontera y se encuentra que la presión de saturación crece proporcional a  $N^2$ , en donde  $N$  es el tamaño horizontal del sistema. Este resultado contradice al modelo de Janssen, el cual predice que la presión de saturación escala con  $N$ .

Se reportan resultados de un experimento cuyo objetivo era encontrar la ley de escalamiento entre la presión de saturación y  $N$ , para lo cual se midió la presión en la base de columnas granulares de distintos tamaños. Se usaron cuatro tubos cilíndricos de diferentes radios en los cuales se vertían esferas de vidrio de 3mm de diámetro. En todos los tubos se presentó el fenómeno de arqueo. Sin embargo, no fue posible determinar la ley de escalamiento porque el intervalo de variación de  $N$  resultó ser muy pequeño y se hicieron mediciones en pocos tubos.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Medios granulados

Una buena parte de las cosas que nos rodean y que usamos comúnmente están formadas por granos: la arena, el azúcar, el talco, materiales de construcción, etc. Aproximadamente tres cuartas partes de las materias primas utilizadas en la industria se encuentran en forma granular [1], por lo que encontrar las formas óptimas de manejarlos (almacenamiento, transporte, segregación, etc.) resulta de gran importancia. Sin embargo, esto no ha resultado fácil: los medios granulados pueden comportarse, bajo ciertas circunstancias, como un sólido; en otras condiciones puede parecer un fluido; y en ocasiones se comporta de manera muy peculiar, distinta a cualquier otro sistema de varios cuerpos [5]. Un ejemplo de este tipo de comportamientos es que en algunas playas y desiertos la arena emite fuertes sonidos al ser perturbada. A esto se le conoce como el "canto de las arenas" [3]. Otro fenómeno fascinante son los patrones que se forman en la superficie de contenedores vibrados, siendo los más impresionantes los oscilones: ondas estacionarias localizadas [4].

Además de su importancia práctica, el desarrollo de una fenomenología clara y su correspondiente teoría en torno a los medios granulados, resulta un reto intelectual interesante.

Una posible definición de medio granulado es cualquier material compuesto de muchas partículas pequeñas que interactúen a través de fuerzas de contacto [4]. Por lo general se impone un límite inferior al tamaño de las partículas constitutivas de un material para poderlo considerar medio granulado, por ejemplo 100 micrómetros [5]. Lo importante



es que la energía térmica del material sea insignificante en comparación con la energía potencial relativa entre granos [6].

En un artículo de título "Sur une application des règles de Maximis & Minimis à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture", presentado a la Academia de Ciencias de Francia por M. Coulomb, Ingénieur du Roi, en 1773, se establece el primer acercamiento teórico al área de los medios granulados. Coulomb desarrolla una teoría basada en considerar al medio granulado como un cuerpo rígido capaz de sufrir fracturas ante esfuerzos externos. Las partes resultantes de una fractura interaccionan entre sí según las leyes de fricción clásicas, con lo cual es posible cerrar el problema de manera bien definida (Teoría de Falla de Deslizamiento de Coulomb). Hubo que esperar casi cien años para que volvieran a haber importantes aportaciones teóricas en esta área, hechas por gente como W. Rankine (1857), H. A. Janssen, L. Rayleigh y O. Reynolds (finales del S. XIX y principios del S. XX). Ya de lleno en el siglo XX destacan las importantes y numerosas aportaciones que R. Bagnold realizó entre 1940 y 1970, dentro de las que se encuentra un libro sobre dunas desérticas [3]. Resulta notable el modo en que ha aumentado el interés por los medios granulados, especialmente desde mediados del siglo XX hasta nuestros días: cada vez son más los científicos involucrados en investigaciones en esta área [5]. Las investigaciones recientes se han enfocado en fenómenos de mezclado y segregación [7], avalanchas [8], sistemas vibrados [4] y distribución y fluctuación de esfuerzos [9-12].

En el caso particular de la distribución de esfuerzos en medios granulados estáticos hay dos fenómenos interesantes que resultan poco intuitivos y que han motivado numerosas investigaciones. Hay evidencia experimental [13,25] de que la presión en la base de una pila de arena, bajo ciertas condiciones, presenta un mínimo local en la zona que está debajo del ápice de la pila (figura 1.1.1).

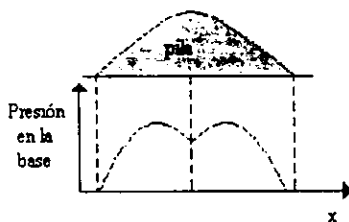


Figura 1.1.1.- La presión en la base de una pila de arena tiene un mínimo local justo debajo del ápice de la pila.

El otro fenómeno se presenta en columnas granulares (silos): la presión en la base alcanza un valor constante a partir de cierta altura de la columna debido a que parte del peso del material es soportado por las paredes del recipiente (figura 1.1.2) [2, 6, 9, 12,15].

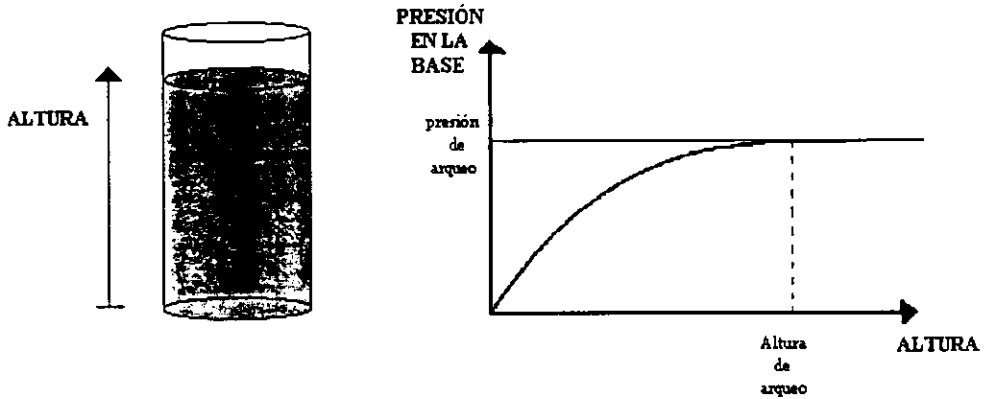


Figura 1.1.2.- La presión en la base de una columna granular alcanza un valor constante (presión de arqueo) a partir de cierta altura de la columna (altura de arqueo).

Estos problemas fueron discutidos de manera cualitativa por Edwards y Oakeshott [14], en donde argumentan que una característica de los medios granulares sometidos a algún esfuerzo es la formación espontánea de arcos cuyo efecto es dirigir los esfuerzos hacia los lados, funcionando como “pantallas de esfuerzos”. A esta característica se le conoce como fenómeno de arqueo.

El fenómeno de arqueo en silos resulta especialmente interesante, ya que el apantallamiento de la presión debido a la presencia de fronteras en una columna granular puede ser reflejo de la estructura de la red de esfuerzos dentro del material [12]. En 1895 Janssen [1.5,15] propuso un análisis que predice que la presión en la base tiende asintóticamente a un valor constante (presión de arqueo) que depende linealmente de las dimensiones transversales de la columna. Para poder resolver el problema Janssen hace algunas suposiciones que lo simplifican, pero que no son necesariamente ciertas [1]. Ha habido intentos de relajar estas suposiciones [1.16], pero los resultados no han variado significativamente con respecto al modelo original. Recientemente se han desarrollado nuevos acercamientos teóricos [2,9,10,20], en donde se observan resultados diferentes. Sin embargo, no se han reportado hasta ahora en la literatura resultados experimentales

suficientemente precisos para poner a prueba los modelos teóricos. Esta es la principal motivación del presente trabajo.

En las siguientes secciones de este capítulo se discute la validez de la hipótesis de continuidad en un sistema de muchos cuerpos y se plantean las ecuaciones de equilibrio en un medio continuo. En el segundo capítulo se desarrollan la solución de Janssen y las correcciones hechas por Walter en 1966 [16]. Además se presentan dos modelos: un modelo no local desarrollado por Kenkre et. al. [21]; y un modelo microscópico bidimensional conocido como modelo  $q$  [2.9]. De este último se hace la extensión al caso de tres dimensiones.

En el capítulo tres se muestran y discuten resultados experimentales de la presión en la base de cuatro diferentes tubos como función de la altura de una columna granular. El medio granulado utilizado son esferas de vidrio de 3mm de diámetro. Se utilizan tubos de diferentes tamaños con el fin de encontrar la ley de escalamiento de la presión y altura de arqueado con respecto a las dimensiones del sistema, punto importante en el que difieren el modelo de Janssen y el llamado  $q$ .

Por último se dan las conclusiones y perspectivas generales del trabajo.

## 1.2 Hipótesis de continuidad

En áreas de la física como la mecánica de fluidos o la elasticidad, normalmente se hace la hipótesis de que los materiales o cuerpos que se estudian están compuestos por un medio continuo, ignorando con esto su composición molecular. Esta aproximación es válida porque en general lo que se estudia es el comportamiento macroscópico de la materia en escalas mucho mayores a la de la separación entre moléculas. En este contexto, las cantidades físicas del material asociadas con la materia como masa y momento son consideradas igualmente continuas, y las propiedades físicas como la densidad y la velocidad son el promedio de dichas propiedades sobre un volumen pequeño. El tamaño de dicho volumen debe ser suficientemente chico para que estas propiedades puedan ser medidas de manera local, es decir que al reducir el tamaño del volumen no cambien las mediciones, y suficientemente grande para que dentro de él esté contenida una gran cantidad de moléculas. Los sistemas elásticos y los fluidos normalmente cumplen con estas

condiciones; en la mayoría de los experimentos de fluidos la dimensión característica del sistema es de al menos 1cm, mientras que un volumen de  $10^{-9}$  cm<sup>3</sup> contiene aproximadamente  $3 \times 10^{10}$  moléculas de aire a temperatura y presión estándar [17]. Sin embargo, no resulta tan clara la validez de la hipótesis de continuidad al aplicarla a los medios granulados.

La mínima escala determinada por el tamaño y separación típicas de las partículas constitutivas de un medio granulado es mucho mayor que en un sólido o en un fluido, y sin embargo, las longitudes características de los experimentos no son necesariamente mayores. En un experimento realizado por C. Málaga [6] se vertían esferas de vidrio de 3mm en una caja de 5cm de largo. En estas condiciones no es tan natural la suposición de continuidad del medio. No obstante, las dimensiones de algunos sistemas hacen viable la hipótesis. En resumen, en medios granulados es necesario tener especial cuidado al aplicar la hipótesis de continuidad.

Una vez aceptada la continuidad es posible definir variables continuas como densidad y velocidad, que por lo general son a su vez funciones continuas de la posición y el tiempo. Esto permite plantear las ecuaciones que rigen el movimiento del material. Normalmente, al plantear estas ecuaciones el problema no queda cerrado, es decir, hay más incógnitas que ecuaciones, por lo que para resolver el problema es necesario encontrar relaciones constitutivas entre las incógnitas. Gran parte de la investigación teórica en esta área se ha enfocado en dichas relaciones, pero dadas las características específicas de los medios granulados no ha sido posible hasta ahora encontrar relaciones constitutivas que cierren el problema de manera completamente satisfactoria [10].

Por último cabe mencionar que los problemas que surgen al considerar un medio granular como continuo son menos significativos en sistemas estáticos que en dinámicos [5]. Es importante hacer notar este hecho ya que en el presente trabajo se comparan resultados experimentales de un sistema estático con resultados teóricos, algunos de los cuales parten de considerar al medio continuo.

### 1.3 Ecuaciones de equilibrio

Pensemos en un elemento de volumen ( $V$ ) de un material continuo que se encuentra en equilibrio traslacional bajo la acción de una fuerza volumétrica ( $\mathbf{F}$ ). El balance de fuerzas sobre  $V$  es

$$\int_V \rho \mathbf{F} dV + \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (1.3.1)$$

en donde  $\mathbf{F}$  es una fuerza volumétrica por unidad de masa,  $\rho$  es la densidad del material,  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de esfuerzos,  $S$  es la superficie que envuelve a  $V$  y  $\mathbf{n}$  un vector unitario normal a  $S$  y que apunta hacia afuera de  $V$ . Por el teorema de la divergencia podemos transformar el segundo término en una integral de volumen, quedando

$$\int_V \rho \mathbf{F} dV + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = 0, \quad (1.3.2)$$

con lo cual

$$\rho \mathbf{F} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.3.3)$$

Si además pedimos que el elemento de volumen esté en equilibrio rotacional, o sea, que no haya torca, entonces

$$\int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{F}) dV + \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{T}) dS = 0, \quad (1.3.4)$$

en donde  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  es la fuerza superficial por unidad de área sobre el plano perpendicular a

$\mathbf{n}$ . La componente  $i$ -ésima de la ecuación (1.3.4) es

$$\int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho F_k dV + \int_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS = 0. \quad (1.3.5)$$

Transformamos la integral de superficie en integral de volumen:

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS = \int_V \varepsilon_{ijk} \frac{\partial (x_j \sigma_{kl})}{\partial x_l} dV = \int_V \varepsilon_{ijk} (x_j \frac{\partial (\sigma_{kl})}{\partial x_l} + \sigma_{kl}) dV. \quad (1.3.6)$$

Si  $V \rightarrow 0$ ,

$$\int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho F_k dV \propto V^{4/3}, \quad (1.3.7)$$

$$\int_V \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial (\sigma_{kl})}{\partial x_l} dV \propto V^{4/3}, \quad (1.3.8)$$

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{kl} dV \propto V. \quad (1.3.9)$$

El hecho de que el término (1.3.9) sea de orden mayor en  $V$  que los términos (1.3.7) y (1.3.8) implica que debe ser idénticamente cero. Esto es cierto para todo  $V$  sólo si en cualquier parte del medio se cumple que

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{kl} = 0. \quad (1.3.10)$$

Esta condición implica que el tensor de esfuerzos es simétrico

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (1.3.11)$$

Cuando esto sucede siempre es posible diagonalizar el tensor, o sea que existe un sistema de referencia local de ejes ortogonales para los cuales los elementos no diagonales del tensor de esfuerzos son cero. En otras palabras, para cada punto de un medio continuo en equilibrio siempre es posible encontrar un sistema de referencia en el cual no hay esfuerzos cortantes: a los ejes de tal sistema coordinado se les conoce como ejes principales.

De las ecuaciones (1.3.3) y (1.3.11) vemos que, en tres dimensiones, tenemos tres ecuaciones y seis incógnitas, por lo que son necesarios más postulados físicos para cerrar el problema. En fluidos y elasticidad el problema se cierra planteando una relación constitutiva entre los esfuerzos y la deformación del material. Una forma de cerrar el problema en medios granulados es suponer que el material se encuentra en todos lados justo en el punto de falla de deslizamiento [1,10], pero esta aproximación no ha sido capaz de explicar algunos resultados experimentales importantes [10,13,22].

## Capítulo 2

### Arqueo en silos

En el presente capítulo se desarrolla la solución teórica que Janssen planteó para el problema del arqueo en silos en 1895. Posteriormente se muestran algunas correcciones que se han hecho al modelo de Janssen desde entonces y se discuten sus consecuencias y relevancia. También se mencionan los principales resultados de un modelo teórico propuesto por Kenkre et. al. [21] más recientemente. Se expone en detalle un modelo microscópico del caso bidimensional conocido como modelo  $q$  [9], en la forma propuesta por Peralta-Fabi, Málaga y Rechtman [2], y se hace la extensión al caso tridimensional.

#### 2.1 Solución de Janssen

El modo en que Janssen abordó el problema de la presión en una columna granular como función de la profundidad [1.15] fue haciendo el balance de fuerzas sobre una delgada rebanada de la columna (figura 2.1.1).

Se considera una columna cilíndrica formada por un material granular ideal de Coulomb sin cohesión.\* Esta consideración representa la primera relación constitutiva introducida por Janssen. Se maneja un sistema de coordenadas cilíndricas con origen en la intersección del eje y la superficie de la columna: el eje  $z$  crece con la profundidad (figura 2.1.1). Además se supone que el tamaño de los granos es mucho más pequeño que el

---

\* Se define un material ideal de Coulomb como aquel que cumple con la relación:

$$\tau = \mu\sigma - c,$$

en donde  $\tau$  es un esfuerzo cortante,  $\mu$  es una constante de fricción,  $\sigma$  es el esfuerzo normal correspondiente y  $c$  es una constante de cohesión. El material ideal de Coulomb es el modelo más simple de un material granulado y su papel en el estudio de dichos materiales es equivalente al del fluido Newtoniano en mecánica de fluidos.

diámetro de la sección transversal de la columna, por lo que es posible considerar al material como un continuo.

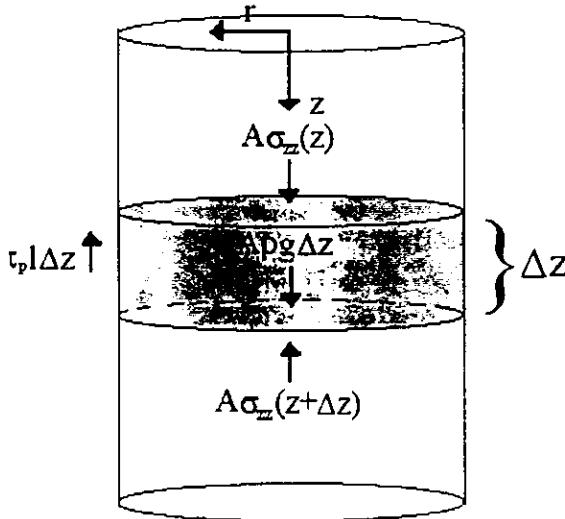


Figura 2.1.1.- Esquema de una columna granular. El análisis de Janssen se basa en el balance de fuerzas sobre una delgada rebanada de la columna.

El área de la sección transversal de la columna es  $A$ ,  $\rho$  es la densidad del material y  $g$  es la aceleración gravitatoria. Con esto, el peso del material confinado en la rebanada de ancho  $\delta z$  es  $A\rho g \delta z$ . El material que está por encima de la rebanada ejerce una fuerza hacia abajo de magnitud  $A\sigma_{zz}$ , y  $A(\sigma_{zz} + \delta\sigma_{zz})$  es la fuerza ejercida hacia arriba por el material que está debajo de la rebanada. En las expresiones de compresión se supuso que  $\sigma_{zz}$  es constante a lo largo de cualquier sección transversal; de hecho, lo mismo se supone para todos los esfuerzos, siendo esta una simplificación que Janssen utiliza para atacar el problema, y que sin embargo no tiene por qué ser necesariamente cierta.

La segunda relación constitutiva en la que se basa el análisis de Janssen es que los esfuerzos  $\sigma_{rr}$  y  $\sigma_{zz}$  son esfuerzos principales, que en el marco de la teoría de falla de



Coulomb es equivalente a decir que el cociente de ambos esfuerzos es una constante, que además, coincide con el coeficiente de presión de tierra de Rankine<sup>\*</sup> [1]:

$$\sigma_{rr} = K\sigma_{zz}. \quad (2.1.1)$$

El coeficiente de presión de tierra de Rankine se define en términos del ángulo de reposo  $\phi$  (relacionado con la fricción interna del material), para el caso activo, del siguiente modo:

$$K = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}. \quad (2.1.2)$$

El único esfuerzo cortante en dirección vertical ( $\tau_p = \sigma_{rz}$  evaluado en la pared de la columna) se da en la zona de contacto del material con la pared del recipiente y es debido a la fricción. La fuerza total de fricción sobre la rebanada es  $D\pi\tau_p\delta z$ , en donde D es el diámetro de la sección transversal.

El balance total de fuerzas es

$$A\rho g \delta z + A\sigma_{zz} = A(\sigma_{zz} + \delta\sigma_{zz}) + D\pi\tau_p\delta z. \quad (2.1.3)$$

Por tratarse de un material ideal de Coulomb

$$\tau_p = \mu_p\sigma_{rr}. \quad (2.1.4)$$

Además podemos introducir la relación (2.1.1) y obtener  $\tau_p$  en función de  $\sigma_{zz}$

$$\tau_p = \mu_p K\sigma_{zz}. \quad (2.1.5)$$

Sustituyendo la relación (2.1.5) en la (2.1.3) y reagrupando

$$\frac{(\sigma_{zz} + \delta\sigma_{zz}) - \sigma_{zz}}{\delta z} = \rho g - \mu_p K \frac{D\pi}{A} \sigma_{zz}. \quad (2.1.6)$$

En el límite  $\delta z \rightarrow 0$

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dz} = \rho g - \mu_p K \frac{D\pi}{A} \sigma_{zz}. \quad (2.1.7)$$

Lo más conveniente en este punto es adimensionalizar el problema para simplificar la solución de la ecuación diferencial y aclarar el significado físico de cada elemento de la misma. Para tal fin se definen los siguientes parámetros:

<sup>\*</sup> Rankine definió dos posibles estados de un material granulado: el activo y el pasivo. El estado activo se refiere a la situación en que el material está a punto de sufrir una fractura debido a la expansión del recipiente que lo contiene, mientras que el estado pasivo se da cuando la fractura es provocada por un estrechamiento del recipiente. La mayoría de los manuales de diseño suponen que en el proceso de llenado de un contenedor el estado del material se aproxima mucho más al estado activo que al pasivo [1].

$$\alpha = 4\mu_p K,$$

$$f(z) = \frac{\rho(z)}{\rho_\infty},$$

$$\xi = \frac{z}{D} \alpha,$$

$$P_\infty = \frac{\rho_\infty g D}{\alpha}, \quad (2.1.8)$$

$$P(\xi) = \frac{\sigma_{zz}}{P_\infty}.$$

El proceso de llenado del silo podría hacer que la densidad dependiera de la profundidad. Si la columna granular fuera formada vertiendo el material en un contenedor por la parte superior de éste podríamos esperar que la densidad aumentara con la profundidad. Sin embargo, la densidad en un medio granular está determinada por la densidad del material constitutivo y por la compactación del empaquetamiento, lo cual impone una cota superior a  $\rho(z)$ . Esto permite suponer que a profundidades suficientemente grandes la densidad alcanza un valor constante  $\rho_\infty$ , valor que usamos para adimensionalizar  $\rho(z)$ .

En términos de los parámetros (2.1.8) la ecuación (2.1.7) queda de la forma

$$\frac{dP(\xi)}{d\xi} = f(\xi) \cdot P(\xi). \quad (2.1.9)$$

La solución general de la ecuación (2.1.9) es

$$e^{\xi} P(\xi) = \int f(x) e^x dx + \text{cte.} \quad (2.1.10)$$

Para el caso particular en el que la densidad es constante, es decir  $f(z) = 1$  y  $\rho(z) = \rho_\infty$ , y la presión en la superficie de la columna es cero, la solución de la ecuación (2.1.9) es

$$P(\xi) = 1 - e^{-\xi}. \quad (2.1.11)$$

La ecuación (2.1.11) tiende asintóticamente a  $P(\xi)=1$  conforme la profundidad aumenta.

En la figura 2.1.2 se grafican las variables originales  $\sigma_{zz}$  vs  $z$ . Podemos observar que el análisis de Janssen predice que la presión en una columna granular crece con la profundidad de la columna acercándose asintóticamente a un valor constante de saturación  $P_\infty = \rho_\infty g D / \alpha$ . Es importante mencionar aquí que el parámetro  $\alpha$  está estrechamente ligado a las relaciones constitutivas, de modo que el estudio de  $P_\infty$  puede ser de gran utilidad para entender su efecto. Nótese que  $P_\infty$  no depende solamente de  $\mu_p$  o de  $K$ , sino del producto de ambas constantes.

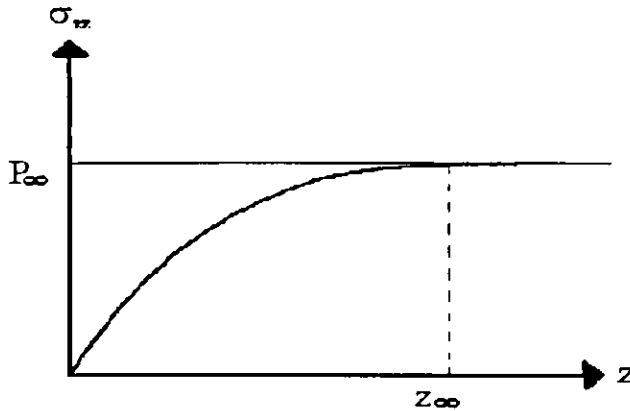


Figura 2.1.2.- Gráfica de  $\sigma_{zz}$  vs  $z$ . La presión como función de la profundidad en una columna granular tiende de manera asintótica al valor  $P_\infty$ . Se considera que  $\sigma_{zz}$  alcanza el valor constante  $P_\infty$  cuando  $(P_\infty - \sigma_{zz}) / P_\infty = 10^{-2}$  [6]; a la profundidad a la que sucede esto se le llama  $z_\infty$ .

Otro parámetro relevante en el análisis de Janssen es la profundidad a partir de la cual se puede considerar que la presión deja de aumentar y se mantiene constante. En este trabajo llamaremos  $z_r$  a dicha profundidad y la definiremos como la profundidad para la que  $(P_\infty - \sigma_{zz}) / P_\infty = 10^{-2}$  [6].

El esfuerzo  $\sigma_{zz}$  es la presión en una sección transversal del silo, que se supuso constante en toda la sección. Si el material contenido en el silo no presentara arqueado (un fluido, por ejemplo), la presión a cierta profundidad estaría dada por el peso del material que estuviera por encima, dividido entre el área de la sección transversal. Al presentarse arqueado la presión es menor que la presión hidrostática, lo cual permite pensar que dentro del silo hay una masa aparente ( $M_a$ ) menor a la masa que realmente hay ( $M_r$ ). Estas masas están relacionadas con  $\sigma_{zz}$  y con  $z$  del siguiente modo:

$$\sigma_{zz} = \frac{M_a g}{A} \quad (2.1.12)$$

$$M_r = \rho A z \quad (2.1.13)$$

Al sustituir las relaciones (2.1.12) y (2.1.13) en la ecuación (2.1.7) resulta

$$\frac{dM_a}{dM_r} = 1 - \mu_p K \frac{D \pi}{\rho A^2} M_a. \quad (2.1.14)$$

La solución de la ecuación (2.1.14) es

$$M_a = \frac{\rho\pi D^3}{16 \mu_p K} (1 - \exp[-(16 \mu_p K / \rho\pi D^3) M_r]) \quad (2.1.15)$$

En términos de las masas, el arqueo se expresa en términos de una masa aparente de saturación  $M_s$  que está dada por

$$M_s = \frac{\rho\pi D^3}{16 \mu_p K} \quad (2.1.16)$$

En el presente trabajo se estudia el escalamiento de la presión y la masa de arqueo, por lo que resulta importante comentar que del análisis de Janssen se obtiene que la presión de saturación  $P_\infty$  escala linealmente con el diámetro del silo  $D$  (ver definiciones (2.1.8) ), mientras que la masa aparente de saturación  $M_s$  escala con  $D^3$ .

## 2.2 Correcciones al modelo de Janssen

El análisis de Janssen es aproximado dadas las simplificaciones en las que se basa, sin embargo forma la base de los procedimientos recomendados por los códigos para el diseño de contenedores, los cuales presentan mejoras de carácter empírico [1]. Sin embargo, también ha habido esfuerzos importantes por mejorar este método de forma teórica. En 1966 Walker publica un artículo [16] en donde intenta corregir dos grandes inconsistencias del modelo de Janssen. La primera de ellas es la suposición de que  $\sigma_r$  y  $\sigma_{zz}$  son esfuerzos principales y que a su vez en la pared del recipiente el esfuerzo  $\sigma_{zz} = \tau_p$  es distinto de cero. Lo que Walker hace es suponer que, dado que el esfuerzo cortante  $\tau_p$  existe,  $\sigma_r$  y  $\sigma_{zz}$  no son esfuerzos principales. Con esto y basándose en la teoría de fallas de Coulomb, hace un análisis más detallado de los esfuerzos en la región cercana a la pared, obteniendo una constante de proporcionalidad ( $K_p$ ) entre  $\sigma_r$  y  $\sigma_{zz}$  distinta a la de Janssen. Esta nueva constante ya no depende únicamente de la fricción interna del material sino que introduce la fricción entre el material y la pared. Al introducir  $K_p$  en las ecuaciones de Janssen se obtiene que los esfuerzos alcanzan más rápidamente sus valores asintóticos ya que siempre  $K < K_p$ . Si se comparan los valores de ambas constantes se encuentra que cuando la fricción entre el material y la pared es pequeña, entonces  $K \approx K_p$ , creciendo la diferencia cuando la fricción con la pared es parecida a la interna. Un hecho notable es que la evidencia

experimental no es suficientemente precisa para saber si esta corrección de Walker realmente mejora la predicción de la distribución de esfuerzos dada por Janssen [1].

Una vez corregido el problema en la región de la pared surge otra inconsistencia al considerar que los esfuerzos son independientes de su posición transversal. Si esto fuera cierto el esfuerzo  $\sigma_{rr}$  tendría que valer lo mismo en la pared y en el eje de la columna. Ya vimos que en la región de la pared este esfuerzo es distinto de cero, mientras que en el centro de la sección transversal tiene que ser nulo por simetría. Para ser consistente Walker considera que los esfuerzos no son independientes de  $r$ , lo cual implica que la fuerza ejercida sobre la superficie de la rebanada de la columna debe ser evaluada como  $\int \sigma_{zz} dA$ . Si se define un esfuerzo axial medio  $\langle \sigma_{zz} \rangle$  tal que  $\int \sigma_{zz} dA = A \langle \sigma_{zz} \rangle$ , se llega a una ecuación equivalente a la (2.1.7):

$$\frac{d\langle \sigma_{zz} \rangle}{dz} = \rho g - \frac{1}{A} \iota_p \quad (2.2.1)$$

Se pueden escribir las relaciones entre los esfuerzos según Walker del siguiente modo:

$$\iota_p = \mu_p(\sigma_{rr})_p = \mu_p K_p(\sigma_{zz})_p \quad (2.2.2)$$

en donde los esfuerzos tienen que estar evaluados en la región de la pared porque fue ahí en donde se hizo el análisis. Para relacionar  $\iota_p$  con  $\langle \sigma_{zz} \rangle$  Walker define un factor de distribución  $\vartheta$  como

$$\vartheta = \frac{(\sigma_{zz})_p}{\langle \sigma_{zz} \rangle} \quad (2.2.3)$$

el cual se puede introducir en la ecuación (2.2.2) y posteriormente en la (2.2.1) para obtener

$$\frac{d\langle \sigma_{zz} \rangle}{dz} = \rho g - \frac{1}{A} \mu_p K_p \vartheta \langle \sigma_{zz} \rangle \quad (2.2.4)$$

Si  $\vartheta$  fuera constante la solución de la ecuación (2.2.4) sería igual al resultado de Janssen salvo por el factor de distribución y el valor de  $K_p$ . Es posible calcular el valor de  $\vartheta$  a profundidades para las cuales los esfuerzos han alcanzado sus valores asintóticos [1]. Para profundidades pequeñas esto no es fácil y la hipótesis de invariancia de  $\vartheta$  no es necesariamente válida. Aún así Walker supuso que  $\vartheta$  era constante y le dio el valor que toma a grandes profundidades, con lo cual la ecuación (2.2.4) es simplemente una reinterpretación de la ecuación (2.1.7). En esas condiciones las diferencias de sus resultados con los de Janssen son mínimos si el material se encuentra en estado activo. En cambio,

para el caso pasivo el efecto de este factor sí resulta relevante. En general todo el análisis de Janssen y las correcciones de Walker son más apropiadas para el caso activo que para el pasivo [1].

Un análisis y discusión más detalladas de las correcciones de Walker se encuentran en el libro de Nedderman [1].

### 2.3 Modelo $q$ en dos dimensiones

En 1997 Peralta-Fabi, Málaga y Rechtman [2] desarrollan un modelo microscópico de propagación de esfuerzos dentro de un material granulado, que se basa en la utilización de variables aleatorias distribuidas uniformemente. Aunque desarrollado de manera independiente, este modelo es muy parecido al propuesto por Liu et. al. [9], en el que se usan variables aleatorias caracterizadas con la letra  $q$ , de ahí el nombre de modelo  $q$ . En el presente trabajo, las referencias al modelo  $q$  corresponderán a la versión de Peralta-Fabi, Málaga y Rechtman.

El sistema consiste en un material granulado bidimensional dentro de un contenedor rígido y bajo la influencia de la gravedad. Los granos están acomodados en filas, en cada una de las cuales hay  $N$  granos. Las filas están desplazadas horizontalmente la mitad del radio de un grano (todos los granos son iguales), de manera que en cada fila sólo un grano está en contacto con alguna pared (fig. 2.3.1). Si el radio de las esferas es  $d$  entonces el tamaño transversal del sistema está dado por  $D = Nd$ .

Esta configuración hace que cada grano descansa en dos granos de la fila inferior y a su vez soporte parcialmente el peso de dos granos de la fila superior. Para simetrizar el sistema se intercalan dos arreglos independientes en donde cada fila tiene  $2N$  granos (fig. 2.3.2). Se numeran los granos según su posición horizontal ( $i=1,2,\dots,2N$ ) y vertical ( $t=1,2,\dots$ ) de modo que la posición de cada grano está determinada por la pareja  $(i,t)$ . En ese nuevo arreglo ambos extremos de cada fila están en contacto con la pared y los granos pares de una fila solamente interaccionan con los impares de las filas adyacentes y viceversa. Con esto se logra un arreglo simétrico que conserva las características del arreglo inicial.

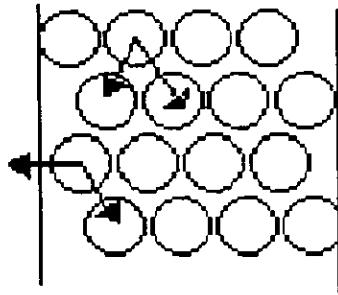


Figura 2.3.1.- Esquema del modelo bidimensional que consiste en un material granulado bidimensional dentro de un contenedor rígido y bajo la influencia de la gravedad. El peso de cada grano se reparte aleatoriamente en los dos granos en los que descansa. Las paredes absorben parte del peso.

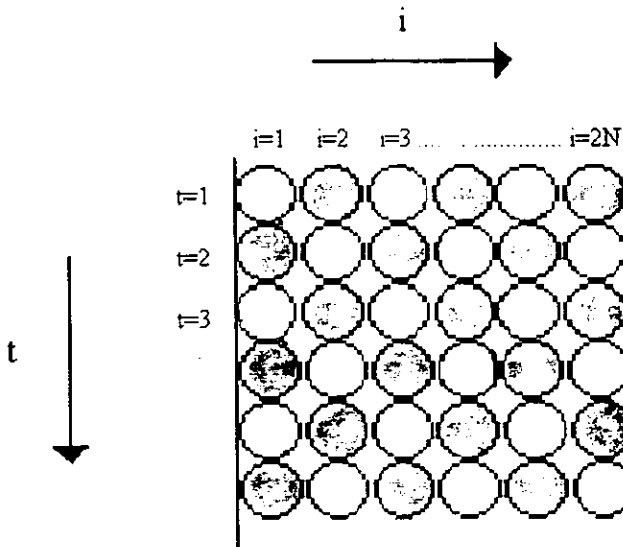


Figura 2.3.2.- Versión simétrica del modelo. Hay dos arreglos independientes intercalados. La posición de cada grano está determinada por la pareja  $(i,t)$ . Los granos pares de una fila interactúan con los impares de las filas adyacentes y viceversa. No hay interacción entre granos de colores diferentes.

El desorden y la variación de formas y orientaciones que de manera natural están presentes en los sistemas granulados reales es modelado introduciendo números aleatorios que determinan la fracción del peso de cada grano que es soportado por cada uno de los dos

granos inferiores. Si el peso de un grano es 1, el peso ( $w$ ) del grano en la posición  $(i,t+1)$  está dado por

$$w^{(t+1)}_i = 1 + r^{(t)}_{i-1} w^{(t)}_{i-1} + [1 - r^{(t)}_{i-1}] w^{(t)}_{i+1}, \quad (2.3.1)$$

en donde  $r^{(t)}_i$  es un número aleatorio uniforme entre cero y uno. Como condición inicial se considera que  $w^{(0)}_i = 1$ , y las condiciones a la frontera son

$$w^{(t+1)}_1 = 1 + [1 - r^{(t)}_2] w^{(t)}_2, \quad (2.3.2)$$

$$w^{(t+1)}_{2N} = 1 + r^{(t)}_{2N-1} w^{(t)}_{2N-1}. \quad (2.3.3)$$

Planteando así la propagación del peso se logra que las paredes carguen una fracción aleatoria del peso de los granos con los que está en contacto, representando con esto la fricción entre el material y el contenedor. La presión queda definida como

$$P(t;N) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{2N} w^{(t)}_i. \quad (2.3.4)$$

Es claro que en este esquema no hay presentes esfuerzos tangenciales, por lo que se satisfacen las condiciones de equilibrio mecánico.

Una vez planteada la ecuación (2.3.1) se procedió a resolverla numéricamente, encontrándose que la presión promedio  $\langle P \rangle$  se satura a un valor constante  $\langle P_s \rangle$  que escala con  $N^2$ . Del análisis de Janssen se puede definir una profundidad de relajamiento  $t_r = D/\alpha$ , según los parámetros definidos en la sección 2.1; los resultados numéricos muestran que también  $t_r$  escala con  $N^2$ . Esto sugiere que  $\langle P \rangle / N^2$  es una función universal de  $t / N^2$ . Además se encontró que la fluctuación relativa de la presión  $\sigma_p(t) = \langle (\langle P \rangle - P)^2 \rangle / \langle P \rangle$  decae a cero como  $N^{-0.493} \sim N^{-1/2}$  para  $t \gg t_r$ .

La ecuación (2.3.1) también puede resolverse de manera analítica si se considera que  $r^{(t)}_i = 1/2$ , lo cual es equivalente a promediar sobre muchas realizaciones de los experimentos. Con esto la ecuación (2.3.4) se puede escribir en términos de la serie

$$N P(t;N) = \sum_{k=1}^N \sum_{m=0}^k \frac{a^{(k)}_m}{2^m}. \quad (2.3.5)$$

en donde los coeficientes cumplen las relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} a^{(k)}_m &= a^{(k-1)}_{m-1} + a^{(k+1)}_{m-1}. \\ a^{(1)}_m &= a^{(2)}_{m-1}, \\ a^{(N)}_m &= a^{(N)}_{m-1} + a^{(N-1)}_{m-1}. \\ a^{(k)}_0 &= 1. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$



Resolviendo estas ecuaciones y sumando sobre  $m$  en la ecuación (2.3.5) se puede escribir la presión como

$$P(t;N) = P_s(N) - P_N(t), \quad (2.3.7)$$

en donde

$$P_s(N) = 2N^2/3 + N + 1/3, \quad (2.3.8)$$

y

$$P_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N A_i \csc\theta_i \sin(j+1)\theta_i \frac{\cos^{j+1}\theta_i}{1-\cos\theta_i}. \quad (2.3.9)$$

En esta última expresión  $\theta_i = \pi(2i-1)/(2N+1)$ , y las  $A_i$  satisfacen

$$\sum_{i,j=1}^N A_i \frac{\sin(k+1)\theta_i}{\sin\theta_i} = 1; \quad k=1, \dots, N. \quad (2.3.10)$$

Lo relevante de esto es que la ecuación (2.3.9) tiende a cero conforme  $t$  crece, mientras que la ecuación (2.3.8) no depende de  $t$ , con lo que la presión crece acercándose asintóticamente a  $P_s(N)$ . Con esto se comprobó que el modelo predice el arqueo, se calculó el valor de  $P_s$  y además se comprobó que los resultados de la evaluación de estas fórmulas coincide con los resultados de los experimentos numéricos.

Para los casos en que  $N \gg 1$  se espera que el peso no cambie de manera apreciable entre un lugar ( $i, t$ ) y los lugares adyacentes. Cuando esto se cumple es posible remplazar las variables discretas  $i$  y  $t$  por las variables continuas  $x \in [0, 2N]$  y  $t \in [0, \infty)$  [19]. De este modo, la ecuación continua equivalente a la ecuación (2.3.1) es

$$w_t = \frac{1}{2} w_{xx} + 1. \quad (2.3.11)$$

con sus correspondientes condiciones de frontera e inicial

$$\begin{aligned} 2w_t(0,t) &= 1 + w_x(0,t) - w(0,t), \\ 2w_t(2N,t) &= 1 - w_x(2N,t) - w(2N,t), \\ w(x,0) &= 1. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

La ecuación (2.3.11) es del tipo parabólico y junto con las condiciones de frontera constituye un problema generalizado de Sturm-Liouville. La solución se puede separar en dos partes, una asintótica y otra dependiente de la profundidad,  $w(x,t) = w_s(x) + v(x,t)$ . En esta separación,  $v(x,t)$  satisface una ecuación homogénea cuya solución es

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[ \cos \lambda_n^2 x + \frac{1 - \lambda_n^2}{\lambda_n} \operatorname{sen} \lambda_n x \right] \exp[-\lambda_n^2 t/2], \quad (2.3.13)$$

en donde  $\lambda_n$  es la  $n$ -ésima raíz de la ecuación trascendental  $2\lambda(\lambda^2 - 1) \cos 2\lambda N = (\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1) \operatorname{sen} 2\lambda N$ . Del análisis de esta ecuación se obtiene que  $\{\lambda_n\}$  es una serie de números reales. Por otro lado la solución de  $w_s(x)$  es

$$w_s(x) = 2(N + 1) + x(2N - x). \quad (2.3.14)$$

Los coeficientes  $a_n$  de la ecuación (2.3.13) quedan determinados por la condición inicial

$$v(x,0) = 1 - w_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[ \cos \lambda_n^2 x + \frac{1 - \lambda_n^2}{\lambda_n} \operatorname{sen} \lambda_n x \right], \quad (2.3.15)$$

con lo cual queda claro que  $v(x,t)$  tiende a cero conforme crece  $t$ . La presión en el caso continuo se obtiene de remplazar la suma por una integral en la expresión (2.3.4), por lo que la presión de saturación en este caso resulta de la integral de la ecuación (2.3.14):

$$P_s = 2N^2/3 + 2N + 2, \quad (2.3.16)$$

resultado que para  $N$  grande coincide con el obtenido en la solución discreta.

Otra vez, como en el caso discreto (ecuación (2.3.8)), se obtiene que  $P_s$  escala con  $N^2$ . Si se trunca la serie (2.3.13) en su primer término se observa que la expresión que queda para el peso es muy parecida a la de Janssen, en donde la profundidad de relajamiento es  $t_r = 2/\lambda_0^2$ , sólo que ahora  $t_r$  escala con  $N^2$ .

La conclusión principal de este modelo es que siempre se encontró arqueado, hecho apoyado además por resultados experimentales obtenidos por C. Málaga en su tesis de licenciatura [6]. Además se han realizado experimentos numéricos con la versión tridimensional del modelo obteniéndose los mismos resultados cualitativos, es decir,  $P_s$  y  $t_r$  escalan con  $N^2$ .

En resumen, la relación funcional entre la presión promedio y la profundidad que resulta de este modelo a primer orden es cualitativamente igual a la obtenida por Janssen, sin embargo el hecho de que la presión de saturación y la profundidad de relajamiento escalen con  $N^2$  se contraponen al resultado de Janssen, según el cual escalan con  $N$ . Esta discrepancia no es trivial y no debe pasarse por alto, pues representa una buena oportunidad de poner a prueba experimentalmente los modelos  $q$  y de Janssen. Para discernir entre cuál de las dos predicciones es la correcta es necesario recurrir a resultados experimentales

enfocados en ese sentido, cosa que hasta ahora nadie ha hecho. Proporcionar esos resultados constituye la motivación principal del presente trabajo.

## 2.4 Extensión del modelo $q$ a tres dimensiones

El modelo  $q$  en la versión de Peralta-Fabi, Málaga y Rechtman [2], sólo ha sido estudiado en dos dimensiones. Como parte del presente trabajo se desarrolla la versión tridimensional. Una vez planteadas las ecuaciones discretas de distribución del peso se hace la extensión al continuo.

### 2.4.1 Formulación

Considérese una caja cuadrada. En cada lado de la caja caben  $N$  y media esferas idénticas, por lo que se pueden acomodar  $N^2$  esferas al mismo nivel en la forma en que se muestra en la figura 2.4.1.

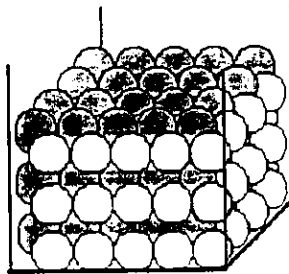


Figura 2.4.1.- Caja cuadrada con  $N^2$  esferas en cada nivel

En esta configuración, las esferas que no están en las orillas están en contacto con doce esferas: cuatro del nivel superior, cuatro del nivel inferior y cuatro de su mismo nivel. Esto significa que, bajo la acción de la gravedad, cada esfera soporta parte del peso de las cuatro esferas del nivel superior con las que está en contacto, y reparte su propio peso, más el peso que soporta, en las cuatro esferas del nivel inferior.

En el caso de dos dimensiones se simetrizó el sistema intercalando dos redes de granos independientes que no interaccionaban entre sí (figura 2.3.2). Para simetrizar el sistema tridimensional es necesario intercalar cuatro redes de granos independientes. Esto se logra con un arreglo en el que cada esfera sigue en contacto con cuatro esferas de su nivel pero que sólo toca una esfera del nivel inferior y una del nivel superior. La figura 2.4.2 (a) muestra el nuevo arreglo con los niveles separados entre sí para que sea más claro el esquema. Además las esferas del esquema están pintadas de diferentes colores. Hay cuatro colores colocados de manera que las posiciones relativas de las esferas de un mismo

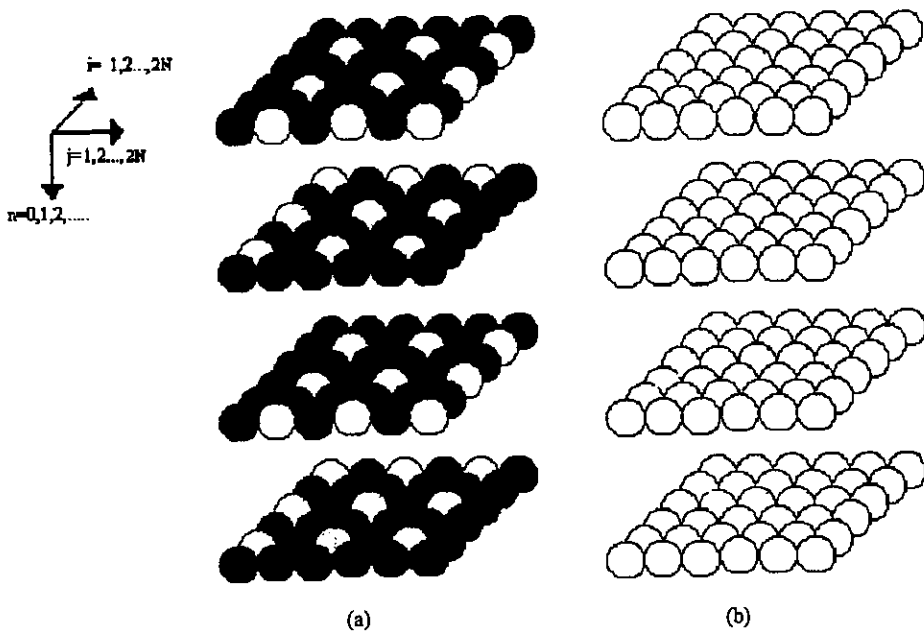


Figura 2.4.2.- (a) Simetrización del sistema. Sólo hay interacción entre esferas del mismo color, por lo que cada color es un subsistema equivalente al no simétrico. Los niveles están separados en el esquema por claridad. (b) El mismo arreglo pero solamente uno de los subsistemas tiene color. Nótese que las posiciones relativas de las esferas de un mismo color son iguales que al caso no simétrico.

color son iguales a las que tiene el sistema no simétrico. Por tal motivo, si *cada esfera interacciona únicamente con las esferas de su mismo color*, se recupera el modelo planteado anteriormente. De hecho, lo que resulta son cuatro subsistemas idénticos independientes que no interaccionan entre sí. Para aclarar esto, la figura 2.4.2 (b) muestra el

mismo arreglo pero sólo uno de los subsistemas tiene color. Se numeran ahora los niveles de arriba hacia abajo con  $n = 0, 1, 2, \dots$ , y a los granos de cada nivel se les asigna un par de coordenadas  $(i, j)$ , en donde  $i = 1, 2, \dots, 2N$  y  $j = 1, 2, \dots, 2N$  (figura 2.4.2). Las variables  $i$  y  $j$  corren hasta  $2N$  para que cada subsistema sea de tamaño  $N$  por lado. De este modo, cada subsistema es igual al sistema no simétrico. La figura 2.4.3 muestra los niveles  $n$  (círculos) y  $n+1$  (cruces) de un subsistema vistos desde arriba.

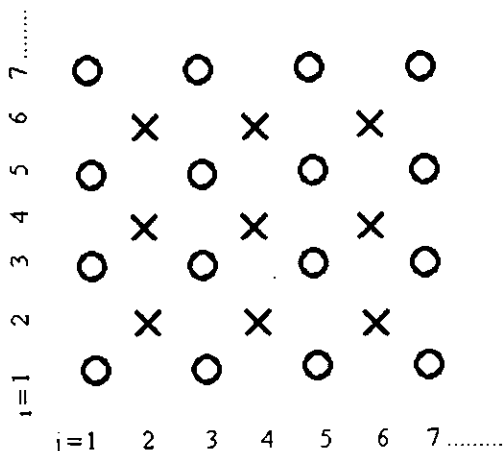


Figura 2.4.3.- Niveles  $n$  (círculos) y  $n+1$  (cruces), de un solo subsistema, vistos desde arriba.

En la figura 2.4.4 (a) se representa esquemáticamente el modo en el que una esfera que está en el nivel  $n$  (círculo), en el sitio  $(i, j)$ , reparte su peso en cuatro esferas del nivel  $n+1$  (cruces), mientras que en 2.4.4 (b) una esfera del nivel  $n+1$  (cruz) soporta parte del peso de cuatro esferas del nivel  $n$  (círculos).

Con esto es posible definir  $w_{ij}^{(n)}$  como el peso soportado en el sitio  $(i, j)$  del nivel  $n$ . Si establecemos que el peso de las esferas es unitario ( $w_{ij}^{(0)} = 1$  para cualquier pareja  $(i, j)$ ), entonces el peso soportado por el sitio  $w_{ij}^{(n+1)}$  es:

$$w_{ij}^{(n+1)} = [r_{i+1,j+1}^{(n)} s_{i+1,j+1}^{(n)} w_{i+1,j+1}^{(n)} + r_{i+1,j-1}^{(n)} (1 - s_{i+1,j-1}^{(n)}) w_{i+1,j-1}^{(n)} + s_{i-1,j+1}^{(n)} (1 - r_{i-1,j+1}^{(n)}) w_{i-1,j+1}^{(n)} + (1 - q_{i-1,j-1}^{(n)}) w_{i-1,j-1}^{(n)}] + 1; \quad (2.4.1)$$

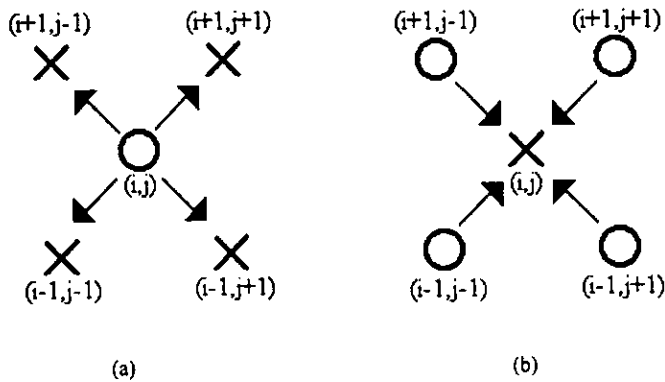


Figura 2.4.4.- (a) Una esfera del nivel  $n$  (círculo) en el sitio  $(i,j)$ , reparte su peso en cuatro esferas del nivel  $n+1$  (cruces). (b) Una esfera del nivel  $n+1$  en  $(i,j)$  soporta parte del peso de cuatro esferas del nivel  $n$ .

En este modelo la simulación de los esfuerzos internos del material se basa en la distribución aleatoria del peso de cada grano entre los granos que lo soportan. Por esta razón se introducen los parámetros  $r_{ij}^{(n)}$ ,  $s_{ij}^{(n)}$  y  $q_{ij}^{(n)}$ , números aleatorios entre 0 y 1 asociados al sitio  $(i,j)$  del nivel  $n$ .  $r_{ij}^{(n)}$  y  $s_{ij}^{(n)}$  son generados de manera independiente, mientras que  $q_{ij}^{(n)}$  lo definiremos como:

$$q_{ij}^{(n)} = r_{ij}^{(n)}s_{ij}^{(n)} + r_{ij}^{(n)}(1-s_{ij}^{(n)}) + s_{ij}^{(n)}(1-r_{ij}^{(n)}). \quad (2.4.2)$$

Esta definición de  $q_{ij}^{(n)}$  cumple con la siguiente propiedad:

$$r_{ij}^{(n)}s_{ij}^{(n)} + r_{ij}^{(n)}(1-s_{ij}^{(n)}) + s_{ij}^{(n)}(1-r_{ij}^{(n)}) + (1-q_{ij}^{(n)}) = 1. \quad (2.4.3)$$

De este modo, cada sumando de la ecuación (2.4.3) puede usarse para determinar de forma aleatoria la fracción del peso que cada esfera cederá a cada una de las cuatro esferas que la sostienen (ecuación 2.4.1 y figura 2.4.4(a)).

El modo en el que se simula la fricción con las paredes es haciendo que parte del peso de un grano sea cedido a la pared cuando está en contacto con ella de igual modo a como cedería su peso a otros granos. Esto significa que los granos de las orillas tienen asociados sus cuatro números aleatorios, pero solamente interaccionan con uno o dos granos; el peso

que no es cedido a estos granos es absorbido por las paredes. La forma mas sencilla de incluir este aspecto en las ecuaciones del modelo es introduciendo sitios ficticios con las siguientes condiciones:

$$w_{0,j}^n = w_{i,0}^n = w_{i,2N+1}^n = w_{2N+1,j}^n = 0 \quad (2.4.4)$$

para toda  $n$  y para  $i,j = 0,1,2,\dots,2N+1$ , con lo cual el peso de los granos de las orillas está determinado por la ecuación (2.4.1)

Este tipo de interacción con las paredes modela un caso muy particular en el que la fricción interna del material es igual a la fricción con las paredes. Sin embargo, es posible modelar otro tipo de interacciones con las paredes si modificamos de algún modo los parámetros aleatorios correspondientes a los granos de las orillas.

Las ecuación (2.4.1) nos permite obtener el peso de cada sitio en los distintos niveles. Para un nivel cualquiera se puede promediar el peso de todos los sitios. La forma explícita de este promedio, que llamaremos  $P$ , es:

$$P(n) = \frac{1}{(2N)^2} \sum_{i,j=1}^N w_{i,j}^{(n)} \quad (2.4.5)$$

Dado que la suma de todos los pesos de un nivel está siendo dividida por el número de sitios  $(2N)^2$  podemos pensar a  $P(n)$  como la presión, si establecemos que el diámetro de las esferas es  $d=1$ .

Una vez formulado el modelo es posible, al igual que en dos dimensiones, hacer simulaciones numéricas o proceder a resolverlo de manera analítica.

#### 2.4.2 Estudio analítico del Caso Continuo

Se había mencionado que en el caso de dos dimensiones los resultados numéricos mostraron que los promedios resultantes de varias realizaciones de la simulación cuando los pesos son cedidos aleatoriamente son similares a los resultados cuando los pesos son cedidos por mitades, por lo que en el estudio analítico se sustituyeron las variables aleatorias por sus promedios (aproximación de campo medio) para simplificar el análisis. Es posible hacer la misma aproximación en el caso de tres dimensiones, considerando que el promedio de las variables aleatorias en este caso es  $1/4$ . Usando esto, y aplicando la

aproximación de campo medio, la ecuación de distribución de peso para el nivel  $n$  se puede escribir como:

$$w^{(n+1)}_{i,j} = \frac{1}{4} [ w^n_{i+1,j+1} + w^n_{i+1,j-1} + w^n_{i-1,j+1} + w^n_{i-1,j-1} ] + w_0, \quad (2.4.6)$$

en donde  $w_0$  es el peso de cada esfera, que en el caso discreto se había supuesto valía uno.

Para  $N \gg 1$  se espera que el peso entre sitios adyacentes no varíe de forma significativa. Bajo estas circunstancias es posible definir variables continuas  $x \in [0, 2N]$ ,  $y \in [0, 2N]$  y  $z \in [0, \infty)$  que sustituyan a las discretas  $i$ ,  $j$  y  $n$ . Con estas variables continuas definimos el volumen  $\Delta x \Delta y \Delta z$  de manera que en su interior haya muchos granos y que a la vez sus dimensiones sean pequeñas en comparación con las dimensiones del sistema (ver sección 1.2). Al haber definido un elemento de volumen, el peso individual de cada grano ya no es significativo, por lo que definimos la densidad de peso  $w(x,y,z)$  de modo que  $w(x,y,z) \Delta x \Delta y \Delta z$  sea el peso de los granos que están dentro del volumen  $\Delta x \Delta y \Delta z$ . Si suponemos que la distribución del peso entre elementos de volumen adyacentes es igual que entre granos, la ecuación (2.4.6) se aplica al caso continuo de la forma

$$w(x,y,z+\Delta z) = \frac{1}{4} [ w(x+\Delta x, y+\Delta y, z) + w(x+\Delta x, y-\Delta y, z) + w(x-\Delta x, y+\Delta y, z) + w(x-\Delta x, y-\Delta y, z) ] + W_0. \quad (2.4.7)$$

En este caso  $W_0 \Delta x \Delta y \Delta z$  es el peso de los granos que están dentro de el volumen  $\Delta x \Delta y \Delta z$ .

Al suponer que en el caso continuo el peso cambia suavemente con respecto a la posición, resulta una buena aproximación quedarnos con los primeros términos de las series de Taylor de los sumandos de la ecuación (2.4.7):

$$w(x,y,z+\Delta z) = w(x,y,z) + \Delta z w_z + \frac{1}{2} (\Delta z)^2 w_{zz} + \dots \quad (2.4.8)$$

$$w(x+\Delta x, y \pm \Delta y, z) = w(x,y,z) + \Delta x w_x \pm \Delta y w_y + \frac{1}{2} [ (\Delta x)^2 w_{xx} \pm 2(\Delta x)(\Delta y) w_{xy} + (\Delta y)^2 w_{yy} ] + \dots \quad (2.4.9)$$

$$w(x-\Delta x, y \pm \Delta y, z) = w(x,y,z) - \Delta x w_x \pm \Delta y w_y + \frac{1}{2} [ (\Delta x)^2 w_{xx} (-/+ ) 2(\Delta x)(\Delta y) w_{xy} + (\Delta y)^2 w_{yy} ] + \dots \quad (2.4.10)$$



en donde los subíndices significan derivación parcial con respecto a esa variable ( $w_x \equiv \partial w / \partial x$ ). Al sustituir las ecuaciones (2.4.8-10) en la ecuación (2.4.7) tenemos que

$$\Delta z w_z + O[(\Delta z)^2] = \frac{1}{2} [(\Delta x)^2 w_{xx} + (\Delta y)^2 w_{yy} + O[(\Delta x)^4 (\Delta y)^4]] + W_0. \quad (2.4.11)$$

Si nos quedamos únicamente con los términos de orden más bajo en cada variable, hacemos  $\Delta x = \Delta y$ , y dividimos entre  $\Delta z$ , la ecuación (2.4.11) queda de la forma

$$w_z = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta z} [w_{xx} + w_{yy}] + \frac{W_0}{\Delta z} \quad (2.4.12)$$

En este punto se toman los límites  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta z \rightarrow 0$ , pero haciendo que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta z} \rightarrow 2k, \quad (2.4.13)$$

$$\frac{W_0}{\Delta z} \rightarrow \rho_0, \quad (2.4.14)$$

con  $k$  y  $\rho_0$  constantes, en donde  $\rho_0$  es una densidad de peso por unidad de profundidad. La justificación de la condición (2.4.14) se discute más adelante. Finalmente, la versión continua de la ecuación (2.4.6) es

$$w_z = k [w_{xx} + w_{yy}] + \rho_0 \quad (2.4.15)$$

La ecuación (2.4.15) es una ecuación diferencial parabólica, igual a la que cumple la temperatura en los problemas de calor, en donde  $w$  juega el papel de la temperatura.  $x$  e  $y$  son variables espaciales, y  $z$  es el tiempo. En ese contexto la constante  $k$  es conocida como coeficiente de difusión térmica y  $\rho_0$  está relacionada con la generación de calor por unidad de volumen por unidad de tiempo; se le conoce como término fuente. Bajo esta analogía resulta natural la existencia del término  $\rho_0$  en la ecuación (2.4.15), pues representa la generación de peso por unidad de profundidad, es decir, resulta del propio peso del material. Este término puede despreciarse cuando los esfuerzos internos son mucho

mayores que el peso de los granos [21]. Un modo más general de escribir la ecuación (2.4.15) es en términos del laplaciano bidimensional  $\nabla^2 \equiv \partial_{xx} + \partial_{yy}$  :

$$w_z = \rho_0 + k \nabla^2 w . \quad (2.4.16)$$

El modo más sencillo de resolver las ecuaciones de calor como la (2.4.16) es en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ . Hay que recordar que en el caso del problema de calor la coordenada temporal es  $z$ . En estos términos el laplaciano bidimensional de la ecuación (2.4.16) es  $\nabla^2 = r^{-1} (\partial/\partial r)(r\partial/\partial r) + r^{-2} (\partial^2/\partial \theta^2)$ . De ahora en adelante se trabajará en estas coordenadas.

Un punto importante en la formulación de la extensión al continuo es el correcto planteamiento de las condiciones de borde. Para tal fin conviene recurrir a la analogía discutida en el párrafo anterior entre el problema de la distribución de esfuerzos en el silo y el de la conducción de calor bidimensional. Las variables espaciales horizontales serían comunes en ambos problemas. La variable espacial vertical del problema del silo correspondería a la variable temporal del problema de calor. La fricción del material con las paredes puede pensarse como un flujo de calor (en el caso del silo, un "flujo de peso") hacia afuera del sistema. El flujo de calor ( $\Phi$ ) se define como la cantidad de calor conducido por unidad de superficie por unidad de tiempo. La Ley de Fourier establece que el flujo es proporcional a la derivada direccional  $du/dn$ , en donde  $n$  es una coordenada que representa distancia en la dirección del vector  $\mathbf{n}$ , vector unitario perpendicular a la superficie sobre la que se evalúa el flujo. Además el flujo de calor siempre se da de zonas de menor temperatura a zonas de mayor temperatura, por lo que podemos escribir

$$\Phi = - \zeta (du/dn) . \quad (2.4.17)$$

en donde  $\zeta$  es el coeficiente de conductividad. Con base en esto, si el silo es cilíndrico y de radio  $R = Nd$ , en donde  $d$  es el diámetro de los granos, la condición de borde en  $r = N$  (suponiendo que  $d = 1$ ) podría ser:

$$w_r(N, \theta, z) + \eta w(N, \theta, z) = v . \quad (2.4.18)$$

En el contexto del problema de conducción de calor, la condición de frontera (2.4.18) corresponde al intercambio térmico entre la superficie de un cuerpo y el medio ambiente a temperatura  $v/\eta$ , de acuerdo a la ley de enfriamiento de Newton. En el caso del silo los parámetros  $\eta$  y  $v$  pueden en general ser funciones de  $z$  e incluir factores relacionados con el empaquetamiento, los materiales constitutivos y la historia del sistema. Como parte de las

condiciones que debe cumplir el sistema, tenemos que pedir que la solución de la ecuación (2.4.16) sea finita en todo su dominio, en particular en  $r = 0$ . La simetría del sistema permite suponer que no hay dependencia en  $\theta$ . Finalmente, la condición inicial más general sería

$$w(r, \theta, 0) = g(r, \theta). \quad (2.4.19)$$

De esta manera queda cerrado el problema continuo y puede resolverse. La ecuación (2.4.16) quedó finalmente como sigue:

$$w_z = \rho_0 + k (w_{rr} + r^{-1} w_r). \quad (2.4.20)$$

Se propone una solución aditiva: una que tienda a cero conforme crece  $z$  y otra que no dependa de  $z$ , es decir

$$w(r, z) = w_\infty(r) + v(r, z), \quad (2.4.21)$$

con  $r \in [0, N]$ ,  $z \in [0, \infty)$  y  $\lim_{z \rightarrow \infty} v(r, z) = 0$ . En el límite  $z \rightarrow \infty$ , la ecuación (2.4.26) se

transforma en una ecuación para  $w_\infty(r)$ :

$$(w_\infty)_{rr} + r^{-1} (w_\infty)_r = -\rho_0 / k, \quad (2.4.22)$$

cuya solución es, si pedimos que  $w_\infty$  sea finita en  $r = 0$ ,

$$w_\infty = C_1 - \frac{\rho_0 r^2}{4k}. \quad (2.4.23)$$

siendo  $C_1$  una constante por determinar. Como  $w_\infty$  no depende de  $z$ , la solución encontrada vale para toda  $z$ , y al sustituirla en la expresión (2.4.21) hace que la ecuación (2.4.20) se convierta en una ecuación para  $v(r, z)$ :

$$v_\xi = v_{rr} + r^{-1} v_r, \quad \text{con } \xi = kz. \quad (2.4.24)$$

Sea  $v = Z(\xi)R(r)$ , con lo cual  $Z_\xi / Z = R_{rr} / R + R_r / rR = -\lambda^2$ , con  $\lambda$  constante. Por lo tanto,

$$Z(\xi) = \exp(-\lambda^2 \xi). \quad (2.4.25)$$

$$r^2 R_{rr} + r R_r + \lambda^2 r^2 R = 0. \quad (2.4.26)$$

La ecuación (2.4.26) es una ecuación de Bessel, con solución no divergente en cero  $R(r) = J_0(\lambda r)$ , en donde  $J_0(x)$  es la función de Bessel de primera especie de orden cero. La solución general de  $v(r, z)$  es

$$v(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \exp(-\lambda_i^2 \xi) J_0(\lambda_i r), \quad (2.4.27)$$

en donde los  $\lambda_i$  y los coeficientes  $A_i$  quedarán determinados por las condiciones de borde e inicial respectivamente. La condición de borde (2.4.18) con la solución completa de  $w(r,z)$  es

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_i \exp(-\lambda_i^2 \xi) [\lambda_i J_0'(\lambda_i N) + \eta J_0(\lambda_i N)] + \eta(C_1 - \rho_0 N^2/4k) - \rho_0 N/2k = v. \quad (2.4.28)$$

Para  $\eta$  y  $v$  constantes, y  $\eta \neq 0$ .

$$C_1 = \frac{\rho_0 N^2}{4k} + \frac{\rho_0 N}{2k\eta} + \frac{v}{\eta}. \quad (2.4.29)$$

$$\lambda_i J_0'(\lambda_i N) + \eta J_0(\lambda_i N) = 0. \quad (2.4.30)$$

La ecuación (2.4.30) determina las  $\lambda_i$ , un número infinito de raíces reales simples.

La condición inicial (2.4.19) queda del siguiente modo:

$$w(r,0) = w_{,r}(r) + \sum_{i=0}^{\infty} A_i J_0(\lambda_i r) = g(r,\theta). \quad (2.4.31)$$

Si  $g(r,\theta) = g_0$ , con  $g_0$  constante, conviene multiplicar la ecuación (2.4.31) por  $r J_0(\lambda_i r) dr$  e integrar de cero a  $N$ :

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_i \int_0^N J_0(\lambda_i r) J_0(\lambda_i r) dr = (g_0 - C_1) \int_0^N r J_0(\lambda_i r) dr + (\rho_0/4K) \int_0^N r^3 J_0(\lambda_i r) dr. \quad (2.4.32)$$

Las integrales de la ecuación (2.4.32) son conocidas [23]:

$$\int_0^x J_0(s) ds = x J_1(x). \quad (2.4.33)$$

$$\int_0^x s^n J_0(s) ds = x^n J_1(x) + (n-1) x^{n-1} J_0(x) - (n-1)^2 \int_0^x s^{n-2} J_0(s) ds, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.4.34)$$

$$\int_0^c J_0(\alpha, x) J_0(\alpha, x) dx = \delta_{ij} [( \alpha_i^2 c^2 + h^2 ) / (2\alpha_i^2)] (J_0(\alpha, c))^2. \quad (2.4.35)$$

La relación (2.4.35) es válida para problemas con condiciones de frontera del tipo

$$(\alpha, c) J_0'(\alpha, c) + h J_0(\alpha, c) = 0, \quad 0 < x < c, \quad h \geq 0, \quad (2.4.36)$$

que es exactamente la condición (2.4.30) obtenida previamente, con  $\alpha_i = \lambda_i$ ,  $c = N$ ,  $h = N\eta$  y  $x = r$ . Usando las relaciones (2.4.33) a (2.4.35) es posible determinar la forma de las  $A_i$ :

$$A_i = \left( \frac{2\lambda_i}{\lambda_i^2 + \eta^2} \right) \frac{1}{N J_0(\lambda_i N)} \left[ \frac{\rho_0 N^2}{4k} \left( \frac{J_1(\lambda_i N)}{J_0(\lambda_i N)} - 1 \right) + \frac{\rho_0 N}{2k} \left( \frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\eta} \right) + \left( g_0 - \frac{v}{\eta} - \frac{\rho_0}{k\lambda_i^2} \right) \right] \quad (2.4.37)$$

Con esto queda totalmente determinada la solución de la ecuación (2.4.20) para el caso particular en el que  $\eta$ ,  $v$ , y  $g_0$  son constantes, requiriéndose además que  $\eta$  sea estrictamente mayor que cero. Aún con tales restricciones en estos parámetros la condición de borde (2.4.18) ofrece la posibilidad de ajustarlos para modelar una interesante variedad de situaciones físicas distintas.

Un parámetro medular en todo este trabajo es la presión de saturación o presión de arqueo ( $P_\infty$  en el análisis de Janssen (sección 2.1) y  $P_s$  en el modelo  $q$  en dos dimensiones (sección 2.3)). Para el caso del modelo  $q$  en tres dimensiones  $P_s$  está dada por

$$P_s = (1/A) \int_A w_x(r) da, \quad (2.4.38)$$

en donde  $A = \pi N^2$  es el área de la sección transversal del silo y por lo tanto  $da = dr r d\theta$ . Al evaluar la integral resulta que

$$P_s = \frac{\rho_0 N^2}{8k} + \frac{\rho_0 N}{2k\eta} + \frac{v}{\eta}. \quad (2.4.39)$$

Nuevamente, la presión de arqueo escala con  $N^2$ , el cuadrado de la longitud transversal característica del sistema.

Es fácil ver que si la presión de saturación  $P_s$  escala con  $N^2$ , entonces la masa de saturación según el modelo  $q$  escala con  $N^4$ , pues

$$P_s = \frac{M_s g}{A}. \quad (2.4.40)$$

Con  $A = \pi(D/2)^2$ , en donde  $D$  es el diámetro del silo. Si  $D = Nd$ , con  $d$  el diámetro de los granos, entonces

$$M_s = \frac{\pi d^2 N^2 P_s}{4g}. \quad (2.4.41)$$

Por lo tanto, si  $P_s$  escala con  $N^2$ , la masa de saturación escala con  $N^4$ .

## 2.5 Modelo no local

Con el fin de entender el fenómeno de la presión en la base de una pila granular, así como la distribución espacial de esfuerzos en distintas geometrías, Bouchaud et. al. [10] desarrollan un modelo continuo en donde la variable espacial vertical  $z$  juega el papel del tiempo. El resultado de este análisis es que la presión evoluciona con la profundidad en función de una ecuación de onda, lo cual aparentemente se contrapone de manera sustancial a la ecuación de calor que resulta del modelo  $q$ . Sin embargo, Kenkre et. al. [21] proponen un modelo que recupera ambos resultados para dos distintos límites.

El modelo de Kenkre et. al. [21] parte de las ecuaciones de un medio continuo en equilibrio (ecuaciones (1.3.3) y (1.3.11)). Si el campo gravitacional es la única fuerza volumétrica y está en la dirección del eje  $z$ , las ecuaciones son:

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0, \quad (2.5.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0. \quad (2.5.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g. \quad (2.5.3)$$

La cantidad de interés en este caso es el esfuerzo vertical  $\sigma_{zz}$ . La ecuación (2.5.3) puede escribirse como una ecuación de continuidad en dos dimensiones:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial S}{\partial z} = \rho g, \quad (2.5.4)$$

en donde el "flujo"  $\mathbf{j} = (\sigma_{yz}, \sigma_{zy})$ , la "densidad"  $S = \sigma_{zz}$ ,  $\rho g$  es un "término fuente" que puede despreciarse si se considera que los esfuerzos internos son mucho mayores que el peso de los granos, y  $\nabla$  es el gradiente bidimensional definido en la sección anterior. La ecuación (2.5.4) junto con una relación constitutiva entre  $\mathbf{j}$  y  $S$  es suficiente para determinar  $S$ . De la experiencia en mecánica de fluidos se prueban tres diferentes relaciones constitutivas:

$$\mathbf{j} = -k \nabla S, \quad (2.5.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial z} = -c^2 \nabla S, \quad (2.5.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial z} + \frac{c^2}{k} \mathbf{j} = -c^2 \nabla S. \quad (2.5.7)$$

Si se usa la relación constitutiva (2.5.5), la ecuación de continuidad (2.5.4) (con  $p_g=0$ ) resulta en la ecuación de calor para S, con constante de difusión k. Al sustituir la relación (2.5.6) en la ecuación de continuidad se obtiene la ecuación de onda para S con velocidad de propagación c. Con la relación (2.5.7) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{c^2}{k} \frac{\partial S}{\partial z} = c^2 \nabla^2 S. \quad (2.5.8)$$

Esta ecuación es un caso particular de una ecuación de memoria generalizada, en donde la relación constitutiva es no local en la coordenada z

$$\mathbf{j}(z) = -k \int_0^z dz' \phi(z-z') \nabla S(z'), \quad (2.5.9)$$

con  $\phi(z)$  una función de memoria.

La ecuación resultante para S es una ecuación integrodiferencial de tipo Volterra.

$$\frac{\partial S(z)}{\partial z} = -k \int_0^z dz' \phi(z-z') \nabla^2 S(z'). \quad (2.5.10)$$

La forma de k y  $\phi(z)$  dependen de cada sistema en particular. Por ejemplo, si la función de memoria es constante,  $\phi(z) = c^2 / k$ , entonces la ecuación (2.5.10) es la ecuación de onda (en términos de  $\sigma_{zz}$ )

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}(x,y,z)}{\partial z^2} = c^2 \left\{ \frac{\partial^2 \sigma_{zz}(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}(x,y,z)}{\partial y^2} \right\}. \quad (2.5.11)$$

La interpretación de una función de memoria constante es que al propagarse los esfuerzos en dirección vertical no hay pérdida de información de la magnitud y dirección de alguna fuerza aplicada originalmente a una partícula. Esta situación ideal podría presentarse en un sistema de partículas esféricas idénticas sin fricción, acomodadas en un arreglo perfectamente ordenado, en el que los esfuerzos se transmitieran a través de las líneas de contacto entre las partículas. Evidentemente esta es una situación ideal, pues en los sistemas granulares reales normalmente las partículas tienen formas y tamaños distintos y están empacados de manera desordenada. Estos sistemas estarían mejor descritos por una función de memoria que decayera rápidamente con la profundidad. Llevando esta idea al

límite se puede pensar en un decaimiento inmediato y proponer  $\phi(z) = \delta(z)^*$ . En ese caso, la ecuación (2.5.10) es la ecuación de calor encontrada anteriormente por el modelo q sin el término fuente:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}(x,y,z)}{\partial z} = k \left[ \frac{\partial^2 \sigma_{zz}(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}(x,y,z)}{\partial y^2} \right]. \quad (2.5.12)$$

Vale la pena mencionar que la relación constitutiva (2.5.7) es una consecuencia de suponer una relación lineal entre los elementos diagonales del tensor de esfuerzos ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ), pues resulta de la combinación de esta suposición con las ecuaciones de equilibrio (2.5.1) y (2.5.2), y sin la necesidad de pedir que el tensor de esfuerzos sea diagonal. La relación lineal entre los elementos diagonales del tensor de esfuerzos es supuesta también por Janssen y por la mayoría de los modelos desarrollados hasta ahora, y sin embargo, nadie ha podido explicar el origen o justificación física exacta de tal relación [21].

De esta forma, vemos que la ecuación de onda de Bouchaud et. al. [10] y la ecuación de calor del modelo q son dos casos extremos del modelo de Kenkre et. al. [21]. Sin embargo, la validez de las suposiciones, de la interpretación de resultados y en general de los modelos, depende de la comparación con resultados experimentales.

---

\* La función  $\delta(z)$  es la delta de Dirac, definida por sus propiedades:

$$\delta(z) = 0, \quad z \neq 0,$$

$$\int f(z) \delta(z) dz = f(0),$$

en donde  $f(z)$  es cualquier función bien comportada y el volumen de integración incluye al origen.



## Capítulo 3

# Experimento

En el capítulo 2 se mencionó que el modelo  $q$  predice que el escalamiento de la presión de saturación con respecto al diámetro de la columna es cuadrático ( $P_s \propto N^2$ ), mientras que el análisis de Janssen plantea que el escalamiento es lineal ( $P_s \propto N$ ). Por esta razón, la obtención experimental de la ley de escalamiento correcta de la presión de saturación adquiere especial importancia.

En el presente capítulo se describe un experimento en el que se midió la presión en la base de columnas granulares de distintos diámetros con el fin de obtener la ley de escalamiento de la presión y la altura de arqueado.

### 3.1 Diseño

Medir esfuerzos en un material granulado no es fácil. En el caso particular de la presión, todo sistema utilizado para medirla se basa en el desplazamiento mecánico de una superficie de referencia. Aunado a esto, en un sistema granular la red de esfuerzos es en general compleja y muy sensible: cualquier desplazamiento de las fronteras puede modificar la distribución de esfuerzos de manera irreversible [12].

Otra complicación importante viene de la naturaleza histerética de los materiales granulados. Esto es claro de ver, si se piensa en una porción de material poco compacto, que al aplicársele algún tipo de esfuerzo pudiera variar significativamente su densidad de bulto gracias al reacomodo de partículas. Sin embargo, al dejarse de aplicar el esfuerzo, el material no necesariamente se expande, con lo cual la densidad de bulto no sólo depende del esfuerzo aplicado sino que depende también de su historia [1].

Estas peculiares características de los medios granulados han hecho que muchos de los experimentos realizados en esta área presenten resultados confusos y muchas veces no reproducibles. De ahí que el diseño de este tipo de experimentos deba hacerse con especial cuidado. La discusión anterior sugiere que un experimento que mida la presión en un silo dependerá fuertemente del proceso de llenado y de las características de las fronteras. Clément et. al. [12] sugieren que en este tipo de sistemas la red de esfuerzos es extremadamente sensible a perturbaciones geométricas mínimas.

Con el fin de obtener la ley de escalamiento de la presión de saturación se diseñó un dispositivo experimental que permite medir la presión en la base de columnas granulares de diferentes diámetros como función de la altura de las columnas. El dispositivo consiste en un tubo cilíndrico colocado de manera vertical por cuyo extremo inferior se introduce un pistón que a su vez descansa sobre una báscula analítica (figura 3.1.1). El tubo no toca a la báscula ni al pistón en ningún punto. Sin embargo, la separación que existe entre el tubo y el pistón es menor al diámetro de las esferas para evitar que se atoren entre ambos, y puedan alterar las mediciones. Se usaron esferas de vidrio de 3mm de diámetro y 0.04 gm de peso aproximadamente. El sistema de llenado consiste en un tubo delgado y largo que en su interior tiene un alambre enrollado en espiral. El extremo inferior del tubo de llenado se coloca a unos 3cm de la superficie de la columna, y las esferas son vertidas dentro del tubo de llenado por su extremo superior a través de un embudo. De esta manera se logra que las esferas siempre sean depositadas del mismo modo, es decir, desde la misma altura y a la misma velocidad aproximadamente. Además, el alambre evita la caída libre de las esferas y reduce la velocidad con la que llegan a la superficie de la columna. Ya se había discutido que la naturaleza histerética de los sistemas granulares hace que su historia sea un factor importante a considerar. De ahí la importancia de buscar que la caída de las esferas sobre la columna sea lo menos perturbativa posible.

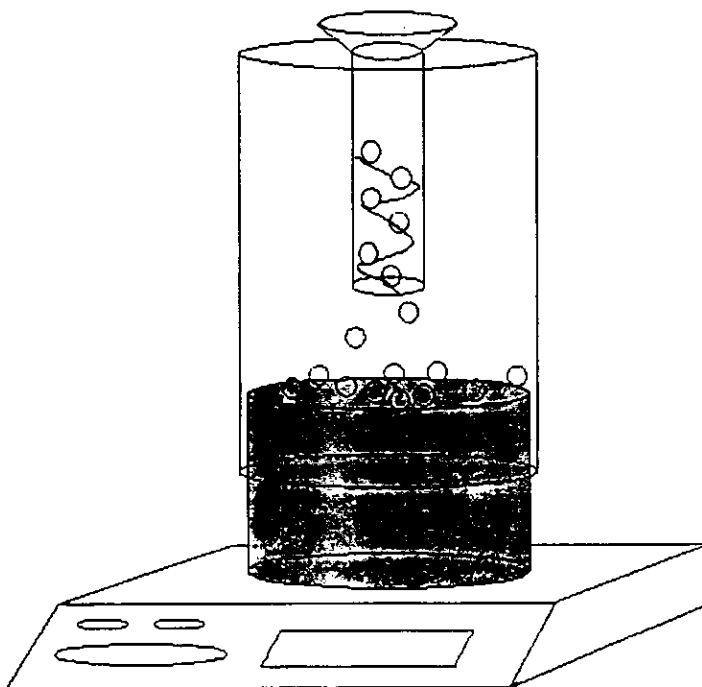


Figura 3.1.1- Esquema del diseño experimental. La base del tubo es un pistón que no toca al tubo y que descansa sobre la báscula. Los granos son vertidos en un tubo de llenado que en su interior tiene un alambre que suaviza la caída.

### 3.2 Metodología

Dado que la construcción de la columna se basa en el apilamiento sucesivo de granos, resulta equivalente construir una columna distinta para cada medición o formar la columna más pequeña a medir, sobre esta apilar más granos para aumentar la altura y tomar la siguiente medición y así sucesivamente. Este último método fue el usado por ser el más sencillo.

En algunas realizaciones de prueba del experimento se observó que la superficie de la columna no es perfectamente plana, por lo que la determinación de la altura de la columna no es exacta, presentando en general un error promedio de  $\pm 0.5\text{cm}$ . Esto implica que el

mejor modo de realizar el experimento es controlar la cantidad de masa que se vierte en el tubo y registrar la altura de la columna y la presión en la base correspondientes (la báscula tiene una precisión de 0.1g).

Por conveniencia para el análisis de los resultados, lo más apropiado es expresar la altura de la columna  $z$  en términos del diámetro del tubo  $D$ . El modo en el que se procedió fue el siguiente: se determinó de manera aproximada la cantidad de masa que se requiere para formar una columna que tuviera una altura equivalente al diámetro del tubo; se agregó la mitad de esta masa, se registró la altura de la columna y se esperó un minuto para registrar la lectura de la báscula; se vertió otra cantidad de masa igual sobre la columna anterior, se midió la altura y se registró la lectura de la báscula después de un minuto; se repitió el procedimiento hasta alcanzar una altura de entre 5 o 6 diámetros; al terminar de tomar la última lectura se vaciaba el tubo y se comenzaba nuevamente el proceso; se hizo esto hasta completar diez lecturas en cada altura.

La razón por la que se deja pasar un minuto entre que se terminan de verter las esferas y el registro de la lectura de la báscula es porque se observa que al momento de dejar de agregar masa, la lectura que presenta la báscula cambia muy rápidamente. Sin embargo, la tasa de cambio es mayor inmediatamente después de terminar de apilar las esferas, y va disminuyendo con el tiempo. Algunos experimentos de prueba mostraron que sí hay diferencias apreciables entre el peso que marca la báscula al momento de terminar de agregar las esferas y lo que marca después de un minuto (sobre todo para alturas pequeñas), mientras que las diferencias entre las lecturas tomadas al minuto uno, dos o tres son esencialmente iguales entre sí. Este resultado coincide además con el de Lovoll et. al. [24], quienes estudian de manera más precisa el tiempo de relajamiento después de una perturbación en un sistema muy parecido.

### 3.3 Resultados

El experimento se realizó en cuatro tubos de diferentes diámetros siguiendo el procedimiento descrito en la sección anterior. Los tubos utilizados tienen un diámetro de 1.9, 2.6, 3.6 y 7.1cm. Si definimos la variable  $N$  como el número de esferas que caben en el diámetro del tubo (figura 3.3.1), entonces los diámetros de los tubos usados corresponden

aproximadamente a  $N = 6, 9, 12$  y  $24$ , respectivamente. De ahora en adelante los tubos serán referidos por su correspondiente valor de  $N$ .

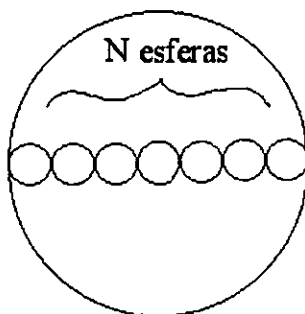


Figura 3.3.1- Se define a  $N$  como el número de esferas que caben en el diámetro del tubo.

En la figura 3.3.2 se grafica la masa aparente  $M_a$ , es decir, el registro de la báscula, contra la masa real contenida en el tubo  $M_r$ , esta última adimensionalizada por la masa necesaria para llenar el tubo hasta una altura de un diámetro  $D$ ; esta masa es  $M_1$ .

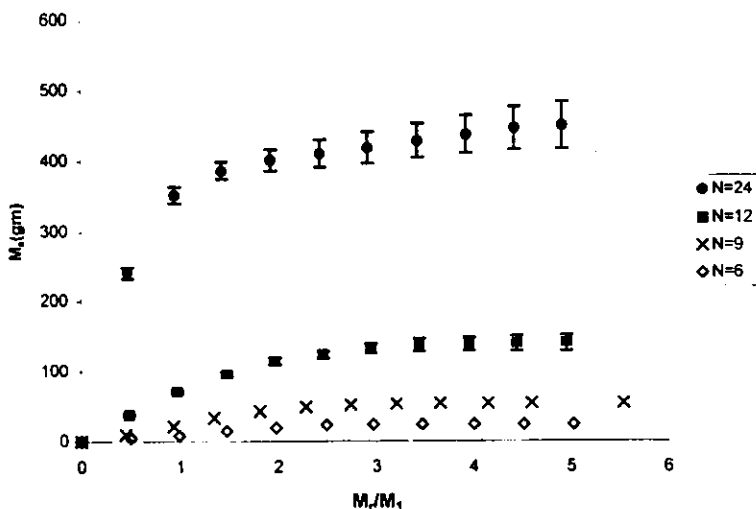


Figura 3.3.2- Resultados experimentales de masa aparente ( $M_a$ ) en función de la masa real contenida en el tubo ( $M_r$ ), esta última adimensionalizada por la masa necesaria para llenar el tubo hasta una altura igual al diámetro del tubo.

Cada punto de la figura 3.3.2 es el promedio de diez mediciones y tienen asociada su correspondiente desviación estándar.

La figura 3.3.3 es la gráfica de la presión en la base de los tubos ( $M_a$  es la masa aparente y  $A$  es el área de la base del tubo) como función de la altura  $z$  de la columna. La altura está adimensionalizada por el diámetro  $D$  de cada tubo.

El resultado más evidente e importante es el hecho de que el fenómeno de arqueo siempre está presente, ya que la presión no se comporta de manera lineal como en un fluido. De hecho, en todos excepto en el tubo más grande, la presión se satura y deja de aumentar a partir de cierta altura (altura de arqueo). La razón por la que el tubo más grande no alcanza a saturar es la siguiente: en la gráfica 3.3.3 se observa que la altura de arqueo es menor en el tubo más pequeño y va aumentando conforme aumenta el tamaño del tubo (desde altura de arqueo  $\approx 3$  para  $N=6$ , hasta altura de arqueo  $\approx 5$  para  $N=12$ ), por lo que para observar la saturación del tubo mayor habrían sido necesarias mediciones a alturas mayores a los 5 diámetros.

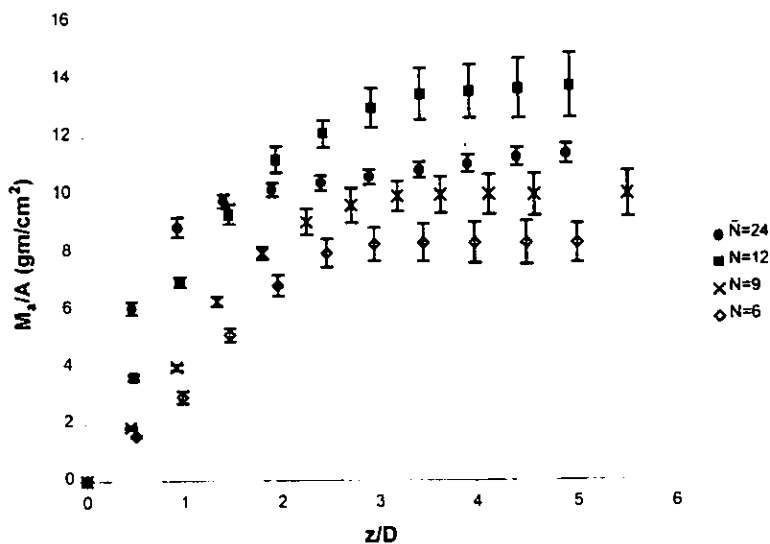


Figura 3.3.3- Resultados experimentales de la presión ( $M_a$  = masa aparente y  $A$  = área de la base del tubo) en la base de la columna granular como función de la altura  $z$ , adimensionalizada por el diámetro de cada tubo  $D$ . Se hizo el experimento en cuatro tubos de distintos diámetros ( $N=6, 9, 12$  y  $24$ ). Cada punto es el promedio de diez mediciones.

Hasta aquí todos los resultados discutidos coinciden, al menos cualitativamente, con lo que se esperaba obtener. Sin embargo, el hecho de que la presión del tubo  $N=24$  esté por debajo de la del tubo  $N=12$ , va en contra no sólo de lo predicho por los modelos  $q$  y de Janssen sino que se contraponen a experiencias anteriores [12] y a lo que sugiere la intuición. Este hecho pudiera estar relacionado con otro fenómeno igualmente inesperado y no intuitivo: en algunas ocasiones la báscula marcaba un peso mayor al peso correspondiente a la masa que hasta ese momento había sido vertida en el tubo. El que la presión de saturación del tubo más grande sea menor que la de tubos más pequeños, tiene como consecuencia inmediata que la relación encontrada en este experimento entre la presión de saturación ( $P_s$ ) y la dimensión transversal del sistema ( $N$ ), esté muy alejada de la dependencia lineal planteada por Janssen ( $P_s \propto N$ ), así como del escalamiento cuadrático del modelo  $q$  ( $P_s \propto N^2$ ).

Las figuras 3.3.4 y 3.3.5 muestran las gráficas en escala logarítmica de  $P_s$  vs  $N$ , y  $M_s$  vs  $N$  respectivamente, en donde  $M_s$  es la masa de saturación. Para el caso de la figura 3.3.4 la teoría de Janssen predice una recta de pendiente uno y el modelo  $q$  una recta de pendiente dos. Los resultados experimentales presentan un coeficiente de correlación  $r^2=0.406$  al ajustarlos a una recta, lo cual resulta bastante malo. La ecuación para  $P_s$  en función de  $N$  que se obtiene de este ajuste es  $P_s = 6 N^{(0.2 \pm 0.2)}$ .

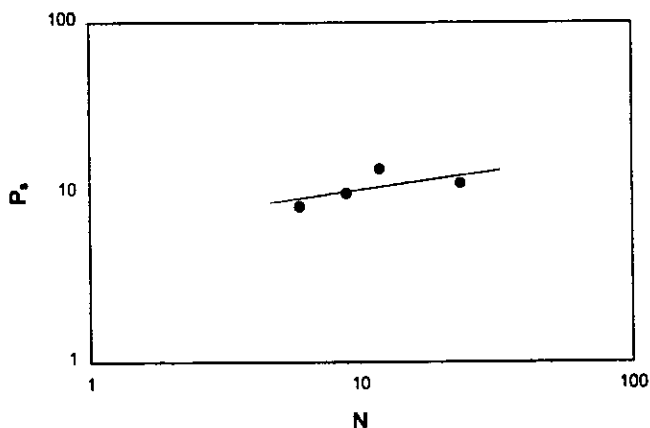


Figura 3.3.4-  $P_s$  vs  $N$  en escala logarítmica. Del ajuste de la recta se obtiene que  $P_s = 6N^{0.2 \pm 0.2}$ , con un coeficiente de correlación  $r^2 = 0.406$ . Janssen predice  $P_s \propto N$ , y el modelo  $q$ ,  $P_s \propto N^2$ .

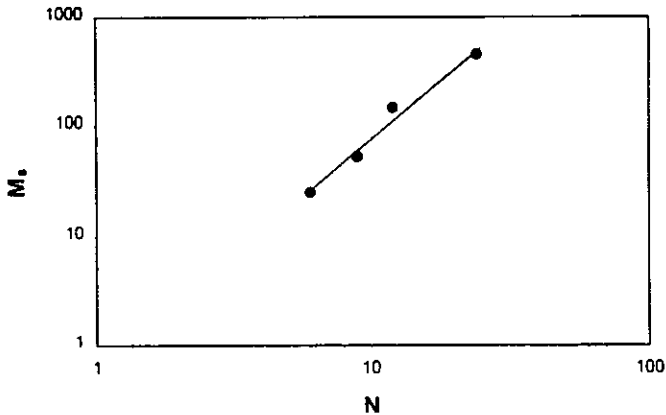


Figura 3.3.5- Masa de saturación ( $M_s$ ) vs  $N$ . Del ajuste de la recta se obtiene que  $M_s = (0.56)N^{2.1 \pm 0.2}$ , con un coeficiente de correlación  $r^2 = 0.979$ . Janssen predice  $M_s \propto N^3$ , y el modelo  $q$ ,  $M_s \propto N^4$ .

Al ajustar una recta a los puntos experimentales en la gráfica 3.3.5 se obtiene que  $M_s = (0.56) N^{2.1 \pm 0.2}$  con un coeficiente de correlación  $r^2 = 0.979$ . Para este caso la teoría de Janssen predice que  $M_s \propto N^3$  (ver sección 2.1), y el modelo  $q$ ,  $M_s \propto N^4$  (ver sección 2.4, ecuación (2.4.47)). De cualquier modo, estos resultados no pueden ser concluyentes, pues se tienen muy pocos puntos en cada gráfica. Además, el intervalo de variación de  $N$ ,  $P_s$  y  $M_s$  es muy pequeño: convendría tener mediciones para varios órdenes de magnitud. Por todo esto, junto con los inesperados resultados antes mencionados y que se discutirán más adelante, no es posible determinar la ley de escalamiento de la presión y de la altura de arqueo con respecto a la dimensión transversal del sistema como se pretendía.

En la figura 3.3.6 se muestra la gráfica de la presión en función de la altura, pero la presión está adimensionalizada por la presión  $P_1$ , la cual resulta de dividir el peso de la masa de una columna de un diámetro de altura entre el área de la base, es decir,

$$P_1 = \rho v g D, \quad (3.3.1)$$

en donde  $\rho$  es la densidad del material de los granos,  $v$  es la fracción de empaquetamiento (suma del volumen de todos los granos que forman la columna, entre el volumen total de la columna),  $g$  es la aceleración gravitacional y  $D$  es el diámetro de la columna.



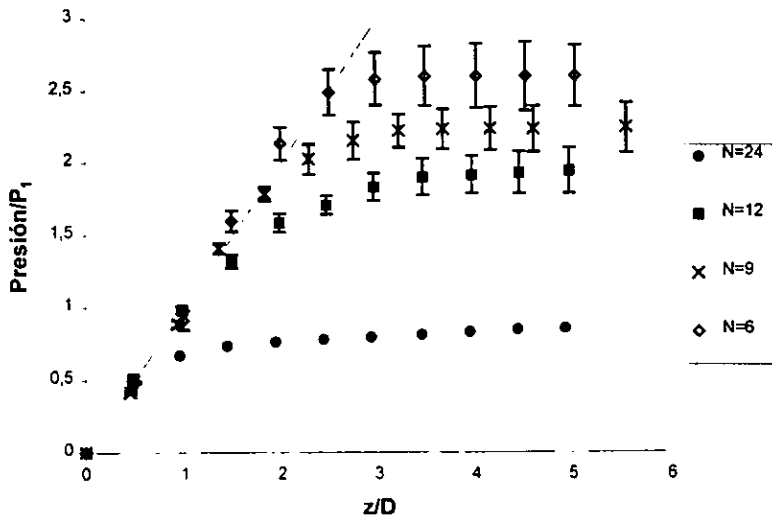


Figura 3.3.6- Misma gráfica de la figura 3.3.3 pero la presión está adimensionalizada por una presión característica  $P_1 = \rho v g D$ .

En términos de estos parámetros el resultado de Janssen (ecuación (2.1.11)) toma la forma

$$\frac{\sigma_{zz}}{P_1} = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha z/D}). \quad (3.3.2)$$

De este modo, el valor de saturación de la variable  $\sigma_{zz} / P_1$  está determinado únicamente por  $\alpha = 4\mu_p K$ . Además, adimensionalizar así la presión y la altura hace que la recta identidad sea precisamente el comportamiento hidrostático, o sea, la presión en la base de la columna si no hubiera arqueado.

La ecuación (3.3.2) establece que el valor de saturación de la presión adimensional de la gráfica de la figura 3.3.6 únicamente depende del parámetro  $4\mu_p K$ , en donde  $\mu_p$  es la constante de fricción que relaciona el esfuerzo normal a la pared del silo  $\sigma_r$  con el esfuerzo cortante vertical en la pared  $\tau_p$  (ecuación (2.1.4)), y  $K$  es la constante que surge de la relación constitutiva (2.1.1) introducida por Janssen. El valor de  $\mu_p$  debe depender fuertemente de los materiales de que estén hechos los granos y el silo, mientras que  $K$  debe

estar más relacionado con la composición del medio granulado, su compactación y su historia. En un experimento con tubos de distintos tamaños, en donde los materiales son los mismos y se sigue el mismo proceso de llenado, no debería haber cambios considerables en los valores de  $\mu_p$  y  $K$ . Según el análisis de Janssen esto llevaría a que, en una gráfica como la de la figura 3.3.6. en todos los tubos la presión adimensional arqueara aproximadamente al mismo valor. Sin embargo, lo que los resultados muestran es que el valor de saturación de  $P/P_0$  está inversamente relacionado con el tamaño del tubo, además de que el tubo más pequeño arquea a una presión adimensional de más del doble que el tubo mayor. Por lo tanto, Janssen resulta ser inconsistente con este experimento.

La figura 3.3.7 muestra la gráfica de la masa aparente dividida entre el área al cuadrado de la sección transversal de cada tubo,  $M_p/A^2$ , contra la altura de la columna dividida entre el diámetro al cuadrado,  $z/D^2$ . Esta gráfica es equivalente a graficar  $P/N^2$  vs.  $z/N^2$ , en donde  $P$  es la presión en la base y  $N$  el número de granos que caben en el diámetro de cada tubo (figura 3.3.1). Según el modelo  $q$  [2],  $P/N^2$  es una función universal de  $z/N^2$ , es decir, en la gráfica de la figura 3.3.7 todas las curvas deberían de colapsarse en una sola curva, lo cual evidentemente no sucede. De esta forma se ve que tampoco este modelo se apega a los resultados experimentales.

Como se había mencionado previamente, llama la atención que algunos puntos caen por encima de la recta hidrostática de la figura 3.3.6. Este es un fenómeno que ningún modelo predice y que pudiera estar relacionado con resultados experimentales previos. Clément et. al. [12] reportan resultados de un experimento similar pero con otra metodología, y discuten que en general el sistema alcanzará una posición de equilibrio que dependerá específicamente de la energía cinética asociada al procedimiento de llenado, la distribución efectiva de las fuerzas de fricción en las fronteras, y del desplazamiento del medidor de presión. Probablemente los puntos que están por encima de la hidrostática son resultado del almacenamiento de la energía cinética con la que los granos alcanzan la superficie de la columna. Este efecto es precisamente el que se intentó reducir por medio del alambre en el tubo de llenado.

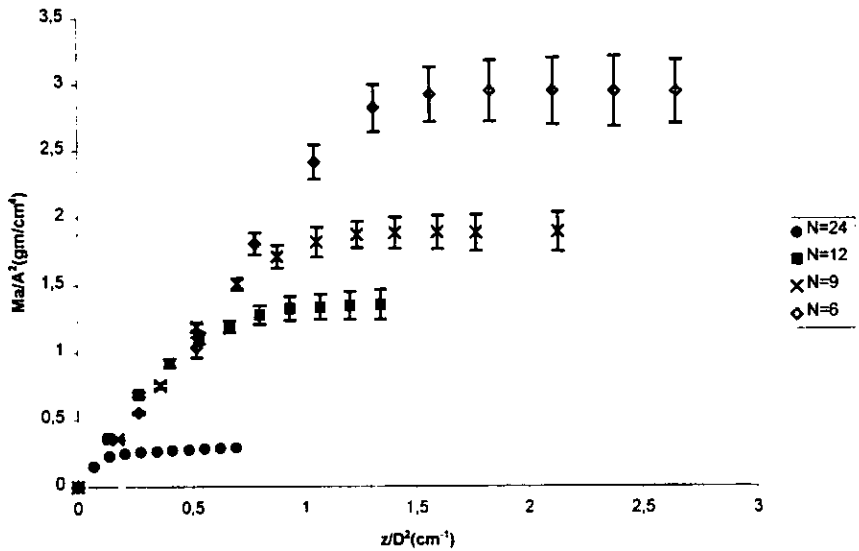


Figura 3.3.7- Masa aparente ( $M_a$ ) dividida entre el área transversal al cuadrado ( $A^2$ ), contra altura ( $z$ ) dividida entre el diámetro del tubo al cuadrado ( $D^2$ ). Esta gráfica es equivalente a  $P/N^2$  vs.  $z/N^2$ , en donde  $P$  es la presión en la base del tubo,  $z$  es la altura de la columna y  $N$  es el número de esferas que caben en el diámetro del tubo. Según el modelo  $q$  las curvas deberían colapsarse en una misma [2].

En la gráfica de la figura 3.3.6 se aprecia que es en el tubo chico ( $N=6$ ) en el que se presentan más mediciones por arriba de la hidrostática. Conforme aumenta  $N$ , la cantidad de mediciones de este tipo disminuye, hasta que, finalmente, ya no se presentan en el tubo  $N=24$ . Esto sugiere que cuando el tubo es muy pequeño en comparación con el tamaño de las esferas, es factible que se formen cadenas de esferas que vayan de pared a pared del silo, atorándose contra estas al ser empujadas por las esferas superiores. De ese modo, las cadenas pueden almacenar energía; entre mayor energía tengan, más intensos serán los esfuerzos internos de la cadena, y también serán más intensos los esfuerzos contra las paredes del silo. Así se explica que la báscula pueda registrar masas mayores a la masa que soporta, ya que la base del silo es una pared y las cadenas almacenan la energía cinética de los granos que caen. El caso extremo de esta situación sería un cilindro cuyo diámetro fuera mayor al diámetro de las esferas, pero que fuera menor a dos veces el diámetro de estas. La figura 3.3.8 muestra un esquema de dicho arreglo. En este caso la cadena formada es de dos esferas. Si la esfera superior es depositada con cierta velocidad puede quedar atorada entre

la esfera inferior y el silo, con lo que la esfera inferior empujaría al pistón de la base con más fuerza que el peso de ambas esferas. Claramente, la formación de este tipo de cadenas es más difícil entre más grande sea el tamaño del tubo con respecto a las esferas.

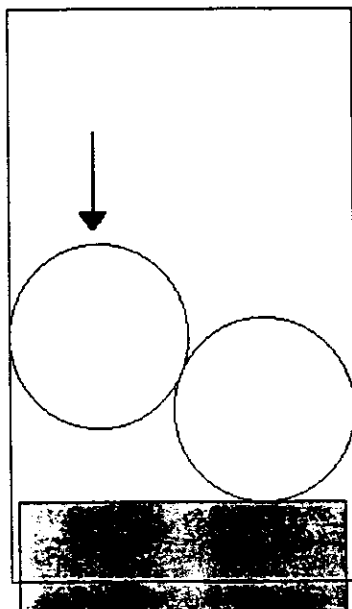


Figura 3.3.8- Esquema de un cilindro cuyo diámetro es mayor al de una esfera pero más chico que dos veces el diámetro de esta. Si la segunda esfera cae con cierta velocidad pueden atorarse ambas esferas entre las paredes y base del contenedor almacenando energía.

Es importante hacer notar en este punto que en el tubo más grande ya no se observan mediciones por encima de la hidrostática. lo cual indica que la presencia de cadenas atoradas es muy baja si no es que han desaparecido por completo. Resulta entonces, que el efecto de la formación de cadenas disminuye considerablemente ante variaciones de  $N$  no muy grandes.

Otro asunto de relevancia de los resultados son las fluctuaciones. Se había mencionado en el segundo capítulo que uno de los resultados numéricos del modelo  $q$  es que la fluctuación relativa de la presión decae a cero como  $N^{-1/2}$ , aproximadamente. En la gráfica de la figura 3.3.3 vemos que las fluctuaciones de los resultados son menores para el

tubo  $N=24$ . En los tres tubos chicos las fluctuaciones son de aproximadamente 16%, mientras que en el tubo más grande son de 6%. No es posible obtener la forma en que dependen las fluctuaciones del diámetro del tubo ya que la variación de  $N$  no es suficientemente grande. Además las fluctuaciones también podrían estar afectadas por la formación de cadenas.

### **3.4 Conclusiones**

En todos los experimentos se observó el fenómeno de arqueo. Sin embargo, se trabajó con muy pocos tubos y con variaciones de las dimensiones del sistema muy pequeñas, por lo que no fue posible determinar la ley de escalamiento entre la presión de saturación y el diámetro de la columna. Además se usaron esferas muy grandes en relación al tamaño de los tubos, lo cual pudo haber provocado que se formaran cadenas de granos que se atoraban con las paredes de los tubos al ser empujadas por las esferas que caían encima, provocando con esto que algunas mediciones fueran mayores a la hidrostática. Se observó que este fenómeno decae rápidamente ante pequeños incrementos del diámetro del tubo. Esto sugiere que para poder encontrar la ley de escalamiento de la presión de saturación se requiere hacer el experimento con  $N$  mayores a 30 o modificar el sistema de llenado.

## Capítulo 4

### Conclusiones y perspectivas

A partir del modelo  $q$  [9] bidimensional, en la versión de Peralta-Fabi, Málaga y Rechtman [2], en el presente trabajo se hizo la extensión a tres dimensiones del modelo, planteándose las ecuaciones discretas. Queda pendiente resolver las ecuaciones y realizar experimentos numéricos buscando la ley de escalamiento. Además, podría incluirse en este modelo la posibilidad de encontrar sitios vacíos, es decir, variar la densidad de manera análoga a como se hizo en el caso bidimensional [2,6].

Se hizo la extensión al continuo de las ecuaciones discretas del modelo  $q$  tridimensional, encontrándose que el peso como función de las variables espaciales satisface una ecuación de calor, en donde la profundidad juega el papel de la variable temporal. La condición a la frontera que se planteó equivale a la ley de enfriamiento de Newton en el problema de calor. Esta condición está en términos de dos parámetros libres  $\eta$  y  $\nu$ , que en general pueden ser funciones de la profundidad (variable temporal). Es en estos parámetros en donde quedarían incluidas las características específicas de cada sistema (desorden, fricción, historia).

Se resolvió la ecuación continua para el caso particular en el que  $\eta$  y  $\nu$  son constantes con  $\eta > 0$ , encontrándose que la presión de saturación  $P_s$  escala con  $N^2$ , en donde  $N$  es la dimensión transversal del sistema. La expresión que resulta para  $P_s$  es un polinomio de segundo orden en  $N$  y que depende del cociente  $\nu/\eta$  (ecuación (2.4.39)). El escalamiento cuadrático de  $P_s$  coincide con los resultados previos del modelo  $q$  en dos dimensiones. El hecho de que en la condición de frontera (ecuación (2.4.18)) haya dos parámetros libres, da la posibilidad de modelar una interesante variedad de situaciones físicas distintas. Para la

correcta interpretación del significado físico de dichos parámetros podría servir la analogía con problemas de calor.

Se realizaron experimentos para medir la presión en la base de una columna granular como función de la altura. En todos los experimentos se presentó el fenómeno de arqueo, es decir, la presión se desvió del comportamiento hidrostático, tendiendo a un valor de saturación. Se graficó la presión de saturación como función del tamaño transversal del tubo con el fin de establecer la ley de escalamiento. Resultaron ser muy pocos puntos y con un intervalo de variación de  $P_s$  y  $N$  muy pequeño como para poder concluir algo. Además, los pocos puntos obtenidos no están relacionados de manera lineal o cuadrática, como predicen los modelos de Janssen y  $q$ ; al ajustar una recta en la gráfica log-log se obtuvo un coeficiente de correlación  $r^2 = 0.406$ . De este ajuste se obtuvo que  $P_s = 6N^{(0.2 \pm 0.2)}$ . Al graficar la masa de saturación en función de  $N$  se encontró que  $M_s = (0.56)N^{2.1 \pm 0.2}$ , con un coeficiente de correlación de la recta de ajuste en la gráfica log-log de  $r^2 = 0.979$ . Los modelos de Janssen y  $q$  obtienen que  $M_s \propto N^3$  y  $M_s \propto N^4$ , respectivamente. De cualquier modo, este resultado no puede ser concluyente por las mismas razones antes mencionadas: pocos puntos e intervalo de variación de los parámetros muy chico.

Se encontró, además, un comportamiento inesperado: para alturas pequeñas, en ocasiones el material ejercía sobre la base una fuerza mayor a la de su propio peso, es decir, la presión en la base era mayor a la presión hidrostática. Este efecto se presentó en mayor medida en el tubo más pequeño, disminuyendo en los tubos de diámetro intermedio, para finalmente desaparecer en el de diámetro mayor. La posible causa de este comportamiento es que el tamaño de las esferas haya sido muy grande en relación al tamaño de los tubos, atorándose éstas entre las paredes y base de los tubos. Lo cierto es que ninguno de los modelos aquí discutidos contempla esta posibilidad ni obtiene este tipo de resultados. Los resultados experimentales obtenidos en este trabajo sugieren que al crecer la diferencia entre el tamaño del tubo y el de los granos se "suaviza" la interacción con las paredes, condición que se apega más a la supuesta por algunos de los modelos teóricos.

Actualmente se están diseñando y preparando experimentos con medios granulados mucho más pequeños (arena, por ejemplo), con el fin de trabajar con muchos más tubos, tener mediciones a escalas que difieran en varios órdenes de magnitud y eliminar el

problema de almacenamiento de la energía de llenado. Sin embargo, trabajar con granos pequeños no es fácil, pues se complica el sistema de medición de la presión.

Un reto experimental interesante que quedaría por hacer es el de poner a prueba el modelo de Kenkre et. al. [21], que postula que en un sistema ideal de esferas idénticas sin fricción y perfectamente ordenadas la evolución del esfuerzo vertical con la profundidad obedece una ecuación de onda, mientras que en un sistema totalmente desordenado, el mismo esfuerzo obedece una ecuación de calor. Además, entre estos dos extremos existen estados intermedios. Se ha visto que las esferas de acero tienden a acomodarse de forma más ordenada que las de vidrio [6], lo cual podría aprovecharse para buscar acercarse lo más posible a la situación ideal de orden perfecto.

Está pendiente también la aplicación del modelo  $q$  y la realización de experimentos para el caso de la pila de arena.

Queda claro que el diseño de experimentos y el desarrollo de una fenomenología clara y su correspondiente teoría en torno a los medios granulados no es una tarea sencilla, siendo este trabajo la continuación de importantes esfuerzos hechos en este sentido y el comienzo de un largo camino por recorrer.



## Bibliografía

- [1] R. M. Nedderman, *Statics and Kinematics of Granular Materials* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [2] R. Peralta-Fabi, C. Málaga, y R. Rechtman, en *Powder and Grains 97*, ed. por R.P. Behringer y J. T. Jenkins (Balkema, Rotterdam, 1997); R. Peralta-Fabi, C. Málaga y R. Rechtman, *Europhys. Lett.*, **45** (1), pp.76-82 (1999).
- [3] R. A. Bagnold, *Blown Sands and Desert Dunes*. (Methuen & Co.), London, 1941.
- [4] P. B. Umbanhowar, F. Melo y H. L. Swinney, *Nature*, **382**, 793 (1996); Conferencia dictada por H. L. Swinney, en la *XXIX Winter Meeting on Statistical Physics*, México, 2000.
- [5] J. Duran, *Sables, Poudres et Grains*. Eyrolles Sciences, Paris, 1992.
- [6] C. Málaga, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, (1997)
- [7] O. Zik, D. Levine, S. G. Lipson, S. Shtrikman y J. Stavans, *Phys. Rev. Lett.*, **73** (1994) 644; K. M. Hill y J. Kakalios, *Phys. Rev. E.*, **49** (1994) R3610; E. Clément, J. Rajchenbach, y J. Duran., *Europhys. Lett.*, **30** (1995) 7; G. Metcalfe, T. Shinbrot, J. J. McCarthy y J. Ottino, *Nature*, **374** (1995) 39.
- [8] H. M. Jaeger, C. H. Liu y S.R. Nagel, *Phys. Rev. Lett.*, **62** (1989) 40; P. Evesque, *Phys. Rev. A.*, **43** (1991) 2720; E. Morales-Gamboa, J. Lomnitz-Addler, V. Romero-Rochín, R. Chicharro-Serra y R. Peralta-Fabi, *Phys. Rev. E.*, **47** (1993) R2229; V. Romero-Rochín, J. Lomnitz-Addler, E. Morales-Gamboa y R. Peralta-Fabi., *Phys. Rev. E.*, **51** (1995) 3968.
- [9] C. H. Liu, S.R. Nagel., D. A. Schecter, S. N. Coppersmith, S. Majumdar, O. Narayan y T. A. Witten, *Science*, **269** (1995) 513.
- [10] J. P. Bouchaud, M. E. Cates y P. Claudin, *J. Phys. I*, **5** (1995) 639; J. P. Wittmer, P. Claudin., M. E. Cates y J. P. Bouchaud., *Nature*, **382**, 336 (1996).

- [11] F. Cantelaube y J. D. Goddard, *Powders and Grains 97*, (Ref.[2]).
- [12] E. Clément, Y. Serrero, J. Lanuza, J. Rajchenbach y J. Duran, *Powders and Grains 97*, (Ref [2]), p.349; L. Vanel y E. Clément, *Eur. Phys. J B* **11**, 525-533 (1999).
- [13] J. Smid y J. Novosad, *I. Chem. E. Symp.*, **63** (1981) p. DV/v/1.
- [14] S. F. Edwards y R. B. Oakeshott S., *Physica D* **38** (1989) 88.
- [15] H. A. Janssen, *Zeits. Vereins Deutsch Ing.*, **39** (1895) 1045.
- [16] D.M. Walker, *Chem. Engng. Sci.* **21** (1966) 975.
- [17] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, (Cambridge University Press) 1967.
- [18] T. Travers, M. Ammi, D. Bideau, A. Gervois, J. C. Messenger y Troadec J.P., *Europhys. Lett.* **4** (1987) 329.
- [19] C.M. Bender y S. A. Orzag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. (McGraw-Hill) 1978.
- [20] J. E. S. Socolar, *Phys. Rev. E.* **57** (1998) 3204.
- [21] V.M. Kenkre, J.E. Scott, E.A. Pease y A.J. Hurd, *Phys. Rev. E.* **57** (1998) 5841.
- [22] J. Rajchenbach, 2000. (enviado a *Phys. Rev. Letts*).
- [23] J. W. Brown y R.V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 5ª edición. (McGraw-Hill) 1993.
- [24] G. Lovoll, K. J. Måløy, E.G. Flekkøy, *Phys. Rev. E.* **60** (1999) 5872.
- [25] L. Vanel, D. Howell, D. Clark, R.P. Behringer y E. Clément, *Phys. Rev. E.* **60** (1999) R5040.