UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Solución analítica de la ecuación de Schroedinger con fuerzas tensoriales centrífugas

T E S I S

que para obtener el titulo de

FISICO

presenta

Jaime Besprosvany Fridzon

Asesor Marcos Moshinsky Borodiansky

México, D.F., 2000

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Solución analítica de la ecuación de Schrödinger con fuerzas tensoriales centrífugas"

realizado por BESPROSVANY FRIDZON JAIME

Con número de cuenta 8254227-8 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de tesis Propietario	Dr. Marcos Moshinsky Borodiansky
Propietario	Dr. Alejandro Frank
Propietario	Dr. Arturo Menchaca
Suplente	Dr. Luis Urrutia
Suplente	Dr. Kurt Bernardo Wolf

Consejo Departamental de Física

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura

A mis padres y a mis hermanos

Este trabajo fue realizado en colaboración con el Dr. Marcos Moshinsky del Instituto de Física, UNAM, y quien aceptó ser también asesor de esta tesis, todo lo cual le agradezco. La misma es prácticamente una transcripción del artículo "An exact solution for Schroedinger equation with centrifugal tensor forces ", *Phys. Rev. A*, **57**, p. 4401, Junio, 1998.

Resumen

En este trabajo encontramos la solución de la ecuación de Schroedinger para el caso un pozo cuadrado central (o barrera de potencial) más un potencial tensorial de pozo centrífugo para un sistema de dos partículas de espín 1/2. Se deriva la función de onda y de ésta se obtiene la amplitud de dispersión explicítamente.

Contenido

1 Introducción

Las fuerzas tensoriales son relevantes en la descripción de la interacción de las partículas de espín 1/2. En el caso de la física atómica la componente dipolar magnética de la fuerza entre los electrones es una corrección relativista importante[1]. En la física nuclear la fuerza tensorial es una componente necesaria en la interacción nucleón-nucleón (NN) e inclusive en el área de la física de partículas una posible interacción tensorial efectiva ha sido invocada en relación al problema del espín llevado por los cuarks[2].

Adicionalmente, la interacción de dipolo o centrífuga $1/r^2$ es una componente relevante en estos casos. De hecho, la interacción escalar $1/r^2$ puede describir la dispersión NN en ciertos rangos[3]. En efecto, actualmente se puede extender el análisis de la dispersión usando el más comprehensivo y reciente estudio experimental de la dispersión NN que permite una descripción más detallada de las correlaciones de espín[4]. Las fuerzas tensoriales en este caso son esenciales para la descripción del experimento. A saber, una componente $1/r^2$ tanto para las partes escalares y tensoriales está presente en muchas interacciones fenomenológicas NN que describen términos "cuadrados" de Yukawa[5].

En esta tesis presentaremos una solución analítica de la ecuación de Schroedinger para un potencial que contiene un pozo o una barrera centrífiga (dependencia $1/r^2$) en la componente tensorial. La solución es además la primera que se encuentra en un problema que involucra interacciones tensoriales locales (soluciones para potentiales tensoriales con operador de momento[6] y que incluyen supersimetría[7] han sido tambin encontradas). De hecho, en esta tesis mostraremos que es precisamente la forma de este potencial lo que permite la separación de ecuaciones que con otros potenciales es imposible hacer analíticamente. Asimismo, la solución que presentamos podría tener aplicaciones en otros campos. En términos generales, cualquier solución analítica es útil en la comprensión del comportamiento de ciertas clases de potenciales y puede servir como base para obtener la solución numérica de otros potenciales no-solubles. Otra posible aplicación aparece en una recientemente propuesta aproximación eikonal para problemas que involucran fuerzas tensoriales[8]. Para estudiar el rango de validez de esta aproximación sería conveniente comparar la solución aproximada con un caso de la ecuación de Schroedinger con componentes de interacción centrales y tensoriales que podría ser resuelta en forma exacta. La solución aquí propuesta sería útil en este objetivo.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: En la Sección 2 describiremos los pasos esenciales en la separación de la ecuación de Schroedinger para fuerzas tensoriales, comenzando por utilizar la constante de movimiento del espín total. En la Sección 3 continuamos con esta separación al usarse los operadores de momento angular total y paridad, que conmutan con el Hamiltoniano. Así, obtendremos un sistema de ecuaciones acopladas para la parte radial. En la Sección 4 resolvemos estas ecuaciones para el caso de una componente tensorial con dependencia del potencial centrífuga ($1/r^2$) y en la Sección 5 obtenemos la función de onda dispersiva como solución y la correspondiente amplitud de dispersión. En la Sección 6 hacemos algunos comentarios finales.

2 Ecuación de Shroedinger para fuerzas tensoriales

Comenzamos por escribir la ecuación de Schroedinger para un sistema de dos partículas de espín 1/2, las cuales podemos tomar para efectos de simplicidad de masa igual, en el sistema de centro de masa e incluimos un pozo de potencial de radio a para la parte central y una fuerza tensorial del mismo radio pero de forma centrífuga. Se obtiene entonces el Hamiltoniano

$$H = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2(M/2)} + V_c\theta(a-r) + \frac{V_T}{2r^4}[3(\sigma_1\cdot\mathbf{r})(\sigma_2\cdot\mathbf{r}) - (\sigma_1\cdot\sigma_2)r^2]\theta(a-r), \qquad (1)$$

servir como base para obtener la solución numérica de otros potenciales no-solubles. Otra posible aplicación aparece en una recientemente propuesta aproximación eikonal para problemas que involucran fuerzas tensoriales[8]. Para estudiar el rango de validez de esta aproximación sería conveniente comparar la solución aproximada con un caso de la ecuación de Schroedinger con componentes de interacción centrales y tensoriales que podría ser resuelta en forma exacta. La solución aquí propuesta sería útil en este objetivo.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: En la Sección 2 describiremos los pasos esenciales en la separación de la ecuación de Schroedinger para fuerzas tensoriales, comenzando por utilizar la constante de movimiento del espín total. En la Sección 3 continuamos con esta separación al usarse los operadores de momento angular total y paridad, que conmutan con el Hamiltoniano. Así, obtendremos un sistema de ecuaciones acopladas para la parte radial. En la Sección 4 resolvemos estas ecuaciones para el caso de una componente tensorial con dependencia del potencial centrífuga ($1/r^2$) y en la Sección 5 obtenemos la función de onda dispersiva como solución y la correspondiente amplitud de dispersión. En la Sección 6 hacemos algunos comentarios finales.

2 Ecuación de Shroedinger para fuerzas tensoriales

Comenzamos por escribir la ecuación de Schroedinger para un sistema de dos partículas de espín 1/2, las cuales podemos tomar para efectos de simplicidad de masa igual, en el sistema de centro de masa e incluimos un pozo de potencial de radio a para la parte central y una fuerza tensorial del mismo radio pero de forma centrífuga. Se obtiene entonces el Hamiltoniano

$$H = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2(M/2)} + V_c\theta(a-r) + \frac{V_T}{2r^4}[3(\sigma_1\cdot\mathbf{r})(\sigma_2\cdot\mathbf{r}) - (\sigma_1\cdot\sigma_2)r^2]\theta(a-r), \quad (1)$$

donde el vector de posición relativa es $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. En adelante utilizaremos unidades en donde la constante de Planck sobre 2π, $\hbar$, la masa de cada partícula M y los radios de las fuerzas a son tomados como 1 (del tal manera que la masa reducida $M/2 = 1/2$), y donde $\theta(1-r)$ es la función de Heaviside

$$\theta(1-r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r < 1 \\ 0 & \text{si } r > 1 \end{cases}, \tag{2}$$

y $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2$ son las matrices de Pauli de espín asociadas con las dos partículas, respectivamente. Las intensidades de las fuerzas central y tensorial están contenidas en las constantes V_c y $V_T/2$, respectivamente.

El espín total S está dado por la expresión

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_1). \tag{3}$$

El Hamiltoniano (2.1) conmuta con S^2 como se demuestra al considerar, por ejemplo, el conmutador de $\sigma_{x1}\sigma_{x2}$ con $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$ (cuya consideración proviene de que $\mathrm{S}^2 = 1/2(3 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$. Dado que σ_{xi} conmuta o anticonmuta con los elementos σ_{xi}, σ_{yi}, σ_{zi}, el par $\sigma_{x1}\sigma_{x2}$ conmutará con los elementos de pares de matrices $\sigma_{j1}\sigma_{j2}$, $j = x, y, z$, contenidos en $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$. Esto se puede generalizar a cualquier dirección dado que el escalar $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$ siempre puede ser escrito en una base que proyecte a las σ_{ji} en las direcciones $\hat{\mathbf{r}}$ y ortogonales a ésta, cuyas correspondientes matrices satisfacen las mismas relaciones de conmutación y anticonmutación.

Consequentemente, podemos tratar separadamente los problemas del singulete y el triplete, y que corresponden respectivamente a soluciones con espín total $S = 0$ y $S = 1$.

El estado de singulete, cuyo operador de proyección está dado por $(1/4)(1 - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$ no tiene un interés especial siendo que la parte tensorial no contribuye, así que nos concentraremos exclusivamente en la parte del triplete. Usando el espín total S de (2.3), éste da lugar a una ecuación de la forma

$$H\psi = \Big\{ -\nabla^2 + V_c\theta(1-r) + V_T\frac{1}{r^4}[3(\mathrm{S}\cdot\mathbf{r})^2 - 2r^2]\theta(1-r) \Big\}\psi = E\psi, \tag{4}$$

donde ahora ψ es una estado de espín $S = 1$ que también puede ser entendido como un vector de tres componentes[7]. Que el operador $2[3(\mathbf{S}\cdot\mathbf{r})^2 - 2r^2]$, que actúa sobre el estado triplete, corresponda al operador tensorial en la Ec. (1) se puede demostrar aplicándole el operador de proyección de los estados triplete $(1/4)(3 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$, y usando la relación $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}) = 1 + (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$.

En la siguiente sección discurriremos sobre las soluciones de la Ec. (2.4).

3 Componenente radial de la ecuación para un potencial tensorial centrífugo

Para encontrar la parte radial de la Ec. (2.4) hacemos notar primero que el operador en el lado izquierdo conmuta con the momento angular total

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \qquad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -i\mathbf{r} \times \nabla. \tag{1}$$

Así, en vez de hacer una expansión parcial de la onda en términos de armónicos esféricos $Y_{LM}(\theta, \varphi)$, que son eigenestados de $\mathbf{L}^2$, L_z, debemos usar los armónicos vectoriales asociados con $\mathbf{J}^2$, J_z.

Con este objeto definimos primero, usando la notación de Dirac[9],

$$\langle \hat{\mathbf{r}} | L1JM \rangle = \sum_{\mu,\sigma} \langle L\mu, 1\sigma | JM \rangle Y_{L\mu}(\theta, \varphi) \chi_\sigma, \tag{2}$$

donde $\langle\,|\,\rangle$ es un coeficiente de Clebsch-Gordan, $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector-unidad en la dirección $\mathbf{r}$ y $\chi_\sigma, \sigma = 1, 0, -1$ es un vector (esférico) de espín 1, el cual también puede ser escrito como

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

siempre que tomemos $\mathbf{S}_0$ como una componente esférica con la representación matricial

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

donde ahora ψ es una estado de espín $S = 1$ que también puede ser entendido como un vector de tres componentes[7]. Que el operador $2[3(\mathbf{S}\cdot\mathbf{r})^2 - 2r^2]$, que actúa sobre el estado triplete, corresponda al operador tensorial en la Ec. (1) se puede demostrar aplicándole el operador de proyección de los estados triplete $(1/4)(3 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$, y usando la relación $\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}) = 1 + (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$.

En la siguiente sección discurriremos sobre las soluciones de la Ec. (2.4).

3 Componenente radial de la ecuación para un potencial tensorial centrífugo

Para encontrar la parte radial de la Ec. (2.4) hacemos notar primero que el operador en el lado izquierdo conmuta con the momento angular total

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \qquad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -i\mathbf{r} \times \nabla. \tag{1}$$

Así, en vez de hacer una expansión parcial de la onda en términos de armónicos esféricos $Y_{LM}(\theta, \varphi)$, que son eigenestados de $\mathbf{L}^2, L_z$, debemos usar los armónicos vectoriales asociados con $\mathbf{J}^2, J_z$.

Con este objeto definimos primero, usando la notación de Dirac[9],

$$\langle \hat{\mathbf{r}} | L1JM \rangle = \sum_{\mu,\sigma} \langle L\mu, 1\sigma | JM \rangle Y_{L\mu}(\theta, \varphi) \chi_\sigma, \tag{2}$$

donde $\langle\,|\,\rangle$ es un coeficiente de Clebsch-Gordan, $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector-unidad en la dirección $\mathbf{r}$ y $\boldsymbol{\chi}_\sigma, \sigma = 1, 0, -1$ es un vector (esférico) de espín 1, el cual también puede ser escrito como

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

siempre que tomemos $\mathbf{S}_0$ como una componente esférica con la representación matricial

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Los valores de L están por supuesto restringindos a

$$L = J \pm 1, J, \tag{5}$$

donde J tiene un valor fijo. A cada componente L asignamos una dependencia espacial $g_{L-J,J}(r)$. Una solución de (2.4) puede ser entonces escrita como

$$\psi_{EJM} = \sum_{L=J-1}^{J+1} g_{L-J,J}(r)\langle\hat{\mathbf{r}}|L1JM\rangle. \tag{6}$$

Sustituyendo esta solución en (2.4) y multiplicando por $\langle L'1JM|\hat{\mathbf{r}}\rangle$ por el lado izquierdo observamos que se obtienen ecuaciones sólo para $g_{L-J,J}(r)$ en r y d/dr, y por consiguiente, el único término que requiere ser determinado es

$$\begin{aligned}&\langle L'1JM|(\mathbf{S}\cdot\mathbf{r})^2|L1JM\rangle = \\ &= \sum_{L''}\langle L'1JM|\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}|L''1JM\rangle\langle L''1JM|\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}|L1JM\rangle.\end{aligned} \tag{7}$$

Del análisis de Racah[10] tenemos que

$$\begin{aligned}&\langle L'1JM|\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}|L1JM\rangle = (-1)^{L'+1-J}W(LL'11;1J) \\ &[3(2L'+1)]^{1/2}\langle L'\|\mathbf{r}\|L\rangle\langle 1\|\mathbf{S}\|1\rangle,\end{aligned} \tag{8}$$

donde W es un coeficiente de Racah, $\langle 1\|\mathbf{S}\|1\rangle = \sqrt{2}$ y[10]

$$\left\langle \begin{matrix} L+1 \\ L-1 \end{matrix} \middle\| \mathbf{r} \middle\| L \right\rangle = r\left\{ \begin{matrix} \left[\frac{L+1}{2L+3}\right]^{1/2} \\ -\left[\frac{L}{(2L-1)}\right]^{1/2} \end{matrix}\right. . \tag{9}$$

De las expresiones explícitas de los coeficientes de Racah[10] obtenemos entonces que

$$\begin{aligned}&\langle L+11JM|\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}|L1JM\rangle = \\ &(-1)^{L+1-J}r\Big[\frac{(J+L+3)(J+L)(L-J+2)(J-L+1)}{4(2L+1)(2L+3)}\Big]^{1/2} \\ &\langle L-11JM|\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}|L1JM\rangle = \\ &(-1)^{L+1-J}r\Big[\frac{(J+L+2)(L+1-J)(J+L-1)(J-L+2)}{4(2L+1)(2L-1)}\Big]^{1/2},\end{aligned} \tag{10}$$

y de esta manera podemos calcular inmediatamente la expresión (3.7) y obtener para $g_{L-J,J}(r)$ las ecuaciones radiales (siendo cada conjunto de ecuaciones correspondiente a estados de paridad $(-1)^L$)

$$\left\{-\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr} - \frac{J(J+1)}{r^2}\right] + (V_c + \frac{V_T}{r^2})\theta(1-r)\right\} g_{0J}(r) = E g_{0J}(r) \qquad (L = J) \tag{11}$$

$$\left\{ -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{r^2}\begin{bmatrix} (J-1)J & 0 \\ 0 & (J+1)(J+2) \end{bmatrix} + \right.$$
$$\left. +V_c\theta(1-r)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{V_T\theta(1-r)}{(2J+1)r^2}\begin{bmatrix} -(J-1) & 3[J(J+1)]^{1/2} \\ 3[J(J+1)]^{1/2} & -(J+2) \end{bmatrix}\right\} \begin{pmatrix} g_{-1J} \\ g_{1J} \end{pmatrix}$$
$$= E\begin{pmatrix} g_{-1J} \\ g_{1J} \end{pmatrix} \qquad (L = J \pm 1) \tag{12}$$

Para deducir, por ejemplo la Ec. (3.11) se aplica, de (3.7),

$$\sum_{L''}\langle L'1JM|\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}|L''1JM\rangle\langle L''1JM|\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}|L1JM\rangle\Big|_{J=L=L'} = r^2, \tag{13}$$

donde para obtener $\langle L1JM|\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}|L+11JM\rangle$ y $\langle L1JM|\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}|L-11JM\rangle$ se usa (3.10).

4 Eigenestados de las ecuaciones radiales

En esta sección consideramos soluciones dispersivas ($E > 0$) de las ecuaciones anteriormente descritas. Si en las Eqs. (3.11), (3.12) $r > 1$, entonces no existe un potencial, y las soluciones están dadas en términos de una combinación de funciones Hankel esféricas entrantes y salientes[11] $h_L^{\pm}(kr)$, donde $k = E^{1/2}$. Expresiones explícitas de estas funciones serán dadas más adelante cuando en la siguiente sección discutamos la determinación de la matriz-S del problema.

Para $r < 1$ el análisis requiere más atención. Partimos de (3.11), lo cual puede ser escrito como

$$\left[-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr} + \frac{J(J+1) + V_T}{r^2}\right] g_{0J}(r) = \kappa^2 g_{0J}(r), \tag{1}$$

donde

$$\kappa \equiv \sqrt{E - V_c}. \tag{2}$$

Definiendo entonces Λ como

$$\Lambda(\Lambda+1) \equiv J(J+1) + V_T, \tag{3}$$

obtenemos que el valor positivo de Λ es

$$\Lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big\{1 + 4[J(J+1) + V_T]\Big\}^{1/2}, \tag{4}$$

y así la solución de (3.1), —la cual debe ser cero en el origen—, puede ser escrita en términos de funciones esféricas de Bessel de orden real Λ como

$$A_0 j_\Lambda(\kappa r), \tag{5}$$

donde A_0 es una constante a ser determinada ms adelante.

Volviendo ahora nuestra atención sobre la Ec. (3.12) para $r < 1$, vemos que ésta puede ser escrita en la forma

$$\left\{-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\begin{bmatrix} a_J & b_J \\ b_J & c_J \end{bmatrix}\right\}\begin{pmatrix} g_{-1J}(r) \\ g_{1J}(r) \end{pmatrix} = \kappa^2 \begin{pmatrix} g_{-1J}(r) \\ g_{1J}(r) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

donde las constantes a_J, b_J, c_J están dadas por

$$\begin{aligned} a_J &= (J-1)[J - V_T(2J+1)^{-1}] \\ b_J &= 3V_T(2J+1)^{-1}[J(J+1)]^{1/2} \\ c_J &= (J+2)[(J+1) - V_T(2J+1)^{-1}]. \end{aligned} \tag{7}$$

La matriz en (4.6) es simétrica y real, por lo que puede ser diagonalizada con una transformación ortogonal. Los eigenvalores ν_J están dados por la ecuación

$$\det\begin{bmatrix} a_J - \nu_J & b_J \\ b_J & c_J - \nu_J \end{bmatrix} = 0. \tag{8}$$

Sustituyendo los valores (4.7) encontramos que las dos raíces $\nu_J^{\mp}$ están descritas por

$$\nu_J^{\mp} = (J^2 + J + 1 - \tfrac{1}{2}V_T) \pm [(2J+1)^2 - 3V_T + \frac{9}{4}V_T^2]^{1/2}. \tag{9}$$

La solución de las ecuaciones diagonalizadas están ahora dadas obviamente en términos de las funciones esféricas de Bessel de orden real $\lambda_J^{\mp}$ como

$$\begin{bmatrix} A_J^- j_{\lambda_J^-}(\kappa r) \\ A_J^+ j_{\lambda_J^+}(\kappa r) \end{bmatrix}, \tag{10}$$

donde las $A_J^{\mp}$ son constantes a ser determinadas posteriormente y $\lambda_J^{\mp}$ satisface la ecuación $\nu_J^{\mp} = \lambda_J^{\mp}(\lambda_J^{\mp} + 1)$.

Sin embargo, necesitamos las soluciones $g_{\mp 1J}(r)$, y con este objeto requerimos el inverso de la matriz ortogonal que da lugar a la diagonalización y cuyas componentes satisfacen la ecuación

$$\begin{bmatrix} a_J - \nu_J^{\pm} & b_J \\ b_J & c_J - \nu_J^{\pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1J}^{\pm} \\ x_{2J}^{\pm} \end{bmatrix} = 0. \tag{11}$$

Como el determinante de la matriz es cero si $\nu_J^{\mp}$ está dado por (4.9), notamos que

$$x_{1J}^{\pm} = \frac{b_J}{[(\nu_J^{\pm} - a_J)^2 + b_J^2]^{1/2}}, \; x_{2J}^{\pm} = \frac{\nu_J^{\pm} - a_J}{[(\nu_J^{\pm} - a_J)^2 + b_J^2]^{1/2}}. \tag{12}$$

De esta manera, obtenemos finalmente que

$$\begin{bmatrix} g_{-1J}(r) \\ g_{1J}(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1J}^+ & x_{2J}^+ \\ x_{1J}^- & x_{2J}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_J^- j_{\lambda_J^-}(\kappa r) \\ A_J^+ j_{\lambda_J^+}(\kappa r) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x_{1J}^+ j_{\lambda_J^-}(\kappa r) & x_{2J}^+ j_{\lambda_J^+}(\kappa r) \\ x_{1J}^- j_{\lambda_J^-}(\kappa r) & x_{2J}^- j_{\lambda_J^+}(\kappa r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_J^- \\ A_J^+ \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Usando las propiedades de la matriz de transformación, los elementos de la matriz pueden ser expresados en términos de x_{1J}^+ como $x_{2J}^+ = \sqrt{1 - x_{1J}^{+2}}$, $x_{1J}^- = (b_J/|b_J|)\sqrt{1 - x_{1J}^{+2}}$, $x_{2J}^- = -|x_{1J}^+|$.

Ahora enfocamos nuestra atención sobre la solución donde $r > 1$, e introducimos la matriz S del problema. Consideramos primero la Ec. (3.11) y escribimos la solución en términos de una onda entrante con coeficiente 1 y una onda saliente que tendrá como coeficiente una componente de la matriz S que denotaremos S_{00}. Asimismo, usaremos este procedimiento para el problema (3.12) para obtener los otros coeficientes componentes de la matriz S (usando esta notación de dos índices) y en la última sección mostraremos la manera en que estos coeficientes forman parte de la función de onda de dispersión.

Tenemos entonces que para $r > 1$ la Ec. (4.1) tiene la solución

$$h_J^-(kr) + S_{00}(k)h_J^+(kr), \tag{14}$$

y las condiciones de frontera ligadas a la continuidad de la función de onda y sus derivadas en $r = 1$ dan lugar a las ecuaciones

$$\begin{aligned} A_0 j_\Lambda(\kappa) &= h_J^-(k) + S_{00}(k)h_J^+(k) \\ \kappa A_0[j_\Lambda'(\kappa r)]_{r=1} &= k[h_J^{-\prime}(kr) + S_{00}(k)h_J^{+\prime}(kr)]_{r=1}, \end{aligned} \tag{15}$$

donde la prima indica derivadas con respecto a los argumentos kr o κr de las funciones. Dividiendo la primera ecuación sobre la segunda en (4.15) y poniendo en el argumento de las funciones $r = 1$ obtenemos

$$R(\kappa) \equiv \frac{j_\Lambda(\kappa)}{\kappa j_\Lambda'(\kappa)} = \frac{h_J^-(k) + S_{00}(k)h_J^+(k)}{k[h_J^{-\prime}(k) + S_{00}(k)h_J^{+\prime}(k)]}. \tag{16}$$

El lado izquierdo es conocido como la matriz R del problema[12], en este caso de dimensión (1×1), y así finalmente tenemos que

$$S_{00}(k) = -\frac{h_J^-(k) - R(\kappa)kh_J^{-\prime}(k)}{h_J^+(k) - R(\kappa)kh_J^{+\prime}(k)}. \tag{17}$$

Sustituyendo $R(\kappa)$ de (4.16) obtenemos una expresión explícita para la matriz S del problema cuando $L = J$. Como $R(\kappa)$ es real y $h_J^+(k) = [h_J^-(k)]^*$ deducimos que S_{00} es unitaria, es decir, $|S_{00}| = 1$.

Para la ecuación (3.12) el análisis es menos directo. Es entonces necesario considerar dos posibilidades, siendo la primera cuando la función de onda entrante tiene momento angular orbital $L = J - 1$ de tal manera que la función de onda en $r > 1$ es

$$\begin{bmatrix} g^-_{-1J}(r) \\ g^-_{+1J}(r) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} h^-_{J-1}(kr) + S^J_{--}(k)h^+_{J-1}(kr) \\ S^J_{-+}(k)h^+_{J+1}(kr) \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Para la segunda posibilidad, cuando $L = J + 1$, tenemos

$$\begin{bmatrix} g^+_{-1J}(r) \\ g^+_{+1J}(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^J_{+-}h^+_{J-1}(kr) \\ h^-_{J+1}(kr) + S^J_{++}h^+_{J+1}(kr) \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Las dos funciones de onda descritas arriba deben satisfacer la condición de continuidad (4.13) en $r = 1$, tanto ellas mismas como sus derivadas. Llamando $\mathbf{D}_J$ a la matriz de 2×2 que aparece en (4.13)

$$\mathbf{D}_J = \begin{bmatrix} x^+_{1J}j_{\lambda^-_J}(\kappa) & x^+_{2J}j_{\lambda^+_J}(\kappa) \\ x^-_{1J}j_{\lambda^-_J}(\kappa) & x^-_{2J}j_{\lambda^+_J}(\kappa) \end{bmatrix}, \tag{20}$$

obtenemos para la función de onda entrante con momento angular orbital $L = J - 1$ las ecuaciones

$$\mathbf{D}_J\begin{bmatrix} A^-_J \\ A^+_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^-_{J-1}(k) & +S^J_{--}(k)h^+_{J-1}(k) \\ & S^J_{-+}(k)h^+_{J+1}(k) \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\kappa\mathbf{D}'_J\begin{bmatrix} A^-_J \\ A^+_J \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} h^{-\prime}_{J-1}(k) & +S^J_{--}(k)h^{+\prime}_{J-1}(k) \\ & S^J_{-+}(k)h^{+\prime}_{J+1}(k) \end{bmatrix}, \tag{22}$$

donde la prima indica la derivada ya sea con respecto a κ para el caso de $\mathbf{D}_J$ o con respecto a k para el caso $h^{\pm}_{J+1}(k)$ (en $r = 1$). Ahora multiplicamos (4.22) por $[\kappa\mathbf{D}'_J]^{-1}$, sustituimos la expresión resultante de $A^{\mp}_J$ en (4.21) y finalmente definimos una matriz de 2×2 $\mathbf{R}$ como

$$\mathbf{R}_J(\kappa) \equiv \mathbf{D}_J[\kappa\mathbf{D}'_J]^{-1}. \tag{23}$$

De aquí obtenemos

$$\begin{bmatrix} h^-_{J-1}(k) & +S^J_{--}(k)h^+_{J-1}(k) \\ & S^J_{-+}h^+_{J+1}(k) \end{bmatrix} = k\mathbf{R}_J\begin{bmatrix} h^{-\prime}_{J-1}(k) & +S^J_{--}h^{+\prime}_{J-1}(k) \\ & S^J_{-+}h^{+\prime}_{J+1}(k) \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Cuando la función de onda entrante tiene momento angular orbital $L = J + 1$, el mismo análisis lleva a la relación

$$\begin{bmatrix} S^J_{+-}h^+_{J-1}(k) \\ h^-_{J+1}(k) + S^J_{++}h^+_{J+1}(k) \end{bmatrix} = k\mathbf{R}_J\begin{bmatrix} S^J_{+-}h^{+\prime}_{J-1}(k) \\ h^{-\prime}_{J+1}(k) + S^J_{++}h^{+\prime}_{J+1}(k) \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Las dos ecuaciones pueden ser escritas de manera conjunta en forma de matriz si definimos

$$\mathbf{H}_J^{\mp} = \begin{pmatrix} h_{J-1}^{\mp}(k) & 0 \\ 0 & h_{J+1}^{\mp}(k) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^J = \begin{bmatrix} S_{--}^J(k) & S_{+-}^J(k) \\ S_{-+}^J(k) & S_{++}^J(k) \end{bmatrix}, \tag{26}$$

de tal forma que

$$\mathbf{H}_J^- + \mathbf{H}_J^+ \mathbf{S}^J = k\mathbf{R}_J[\mathbf{H}_J^{-\prime} + \mathbf{H}_J^{+\prime}\mathbf{S}^J], \tag{27}$$

donde nuevamente las primas indican la derivada de la matriz $\mathbf{H}_J^{\pm}(k)$ con respecto a k.

Finalmente, y de manera similar a la Ec. (4.17), podemos escribir la matriz $\mathbf{S}^J(k)$ del problema como

$$\mathbf{S}^J(k) = -(\mathbf{H}_J^+ - k\mathbf{R}_J\mathbf{H}_J^{+\prime})^{-1}(\mathbf{H}_J^- - k\mathbf{R}_J\mathbf{H}_J^{-\prime}). \tag{28}$$

De esta manera hemos obtenido una expresión analítica y explícita para la matriz $\mathbf{S}$ (de 2×2) del problema cuando el momento angular orbital toma los valores $L = J \pm 1$, además del caso $L = J$, descrito después de (4.14).

5 La función de onda para el problema dispersivo

Recalcamos primero que nos ocupamos sólo de los estados con $S = 1$. Para obtener la amplitud de dispersión para estos estados necesitamos expresar primero una onda plana entrante con espín χ_ν en términos de los kets esféricos (3.2). Con este motivo partimos de la relación bien conocida[11]

$$\chi_\nu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \chi_\nu \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} 4\pi i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\alpha,\beta) Y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{1}$$

donde α, β son los ángulos asociados con el número de onda $\mathbf{k}$ cuyo valor absoluto es k; θ, ϕ son los ángulos asociados con el vector $\mathbf{r}$ con valor absoluto r, y χ_ν es the vector de espín de la Ec. (3.3).

Las dos ecuaciones pueden ser escritas de manera conjunta en forma de matriz si definimos

$$\mathbf{H}_J^{\mp} = \begin{pmatrix} h_{J-1}^{\mp}(k) & 0 \\ 0 & h_{J+1}^{\mp}(k) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^J = \begin{bmatrix} S_{--}^J(k) & S_{+-}^J(k) \\ S_{-+}^J(k) & S_{++}^J(k) \end{bmatrix}, \tag{26}$$

de tal forma que

$$\mathbf{H}_J^- + \mathbf{H}_J^+\mathbf{S}^J = k\mathbf{R}_J[\mathbf{H}_J^{-\prime} + \mathbf{H}_J^{+\prime}\mathbf{S}^J], \tag{27}$$

donde nuevamente las primas indican la derivada de la matriz $\mathbf{H}_J^{\pm}(k)$ con respecto a k.

Finalmente, y de manera similar a la Ec. (4.17), podemos escribir la matriz $\mathbf{S}^J(k)$ del problema como

$$\mathbf{S}^J(k) = -(\mathbf{H}_J^+ - k\mathbf{R}_J\mathbf{H}_J^{+\prime})^{-1}(\mathbf{H}_J^- - k\mathbf{R}_J\mathbf{H}_J^{-\prime}). \tag{28}$$

De esta manera hemos obtenido una expresión analítica y explícita para la matriz S (de 2×2) del problema cuando el momento angular orbital toma los valores $L = J\pm1$, además del caso $L = J$, descrito después de (4.14).

5 La función de onda para el problema dispersivo

Recalcamos primero que nos ocupamos sólo de los estados con $S = 1$. Para obtener la amplitud de dispersión para estos estados necesitamos expresar primero una onda plana entrante con espín χ_ν en términos de los kets esféricos (3.2). Con este motivo partimos de la relación bien conocida[11]

$$\chi_\nu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \chi_\nu \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} 4\pi i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\alpha,\beta) Y_{lm}(\theta,\varphi), \tag{1}$$

donde α, β son los ángulos asociados con el número de onda $\mathbf{k}$ cuyo valor absoluto es k; θ, ϕ son los ángulos asociados con el vector $\mathbf{r}$ con valor absoluto r, y χ_ν es the vector de espín de la Ec. (3.3).

Para expandir esta función en términos de los kets esféricos (3.2) tenemos que considerar el producto escalar

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \langle L1JM|\hat{\mathbf{r}}\rangle \chi_\nu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$
$$= \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sum_{\mu\sigma} \langle L\mu, 1\sigma|JM\rangle Y^*_{L\mu}(\theta,\varphi)\chi^\dagger_\sigma \chi_\nu$$
$$\times \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} 4\pi i^l j_l(kr) Y^*_{lm}(\alpha,\beta) Y_{lm}(\theta,\varphi)$$
$$= \sum_{\mu,\sigma} \langle L\mu, 1\sigma|JM\rangle Y^*_{L\mu}(\alpha,\beta)\chi^\dagger_\sigma i^L j_L(kr) 4\pi \chi_\nu$$
$$= \langle L1JM|\hat{\mathbf{k}}\rangle \chi_\nu i^L j_L(kr) 4\pi. \tag{2}$$

De las Eqs. (5.1), (5.2) obtenemos que una onda plana con espín puede ser escrita de la forma

$$\begin{aligned} \chi_\nu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} &= \sum_{J=0}^{\infty}\sum_{M=-J}^{J}\sum_{L=J-1}^{J+1} 4\pi i^L j_L(kr)\langle L1JM|\hat{\mathbf{k}}\rangle\chi_\nu\langle\hat{\mathbf{r}}|L1JM\rangle \\ &= \sum_{J=0}^{\infty}\sum_{M=-J}^{J}\sum_{L=J-1}^{J+1} 4\pi i^L j_L(kr) m_L(JM,\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{r}}), \end{aligned} \tag{3}$$

donde hemos definido

$$m_L(JM,\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{r}}) \equiv 4\pi\langle L1JM|\hat{\mathbf{k}}\rangle\chi_\nu\langle\hat{\mathbf{r}}|L1JM\rangle. \tag{4}$$

Es también conveniente considerar separadamente los tres términos diferentes $m_L(JM,\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{r}})$ en (5.4) para J dado. Así, escribimos $m_J(JM,\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{r}})$ cuando $L = J$, y escribimos los dos términos $L = J \pm 1$ en forma de matriz, usando las negritas en $\mathbf{m}_J(JM,\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{r}})$ definida como

$$\mathbf{m}_J(JM,\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{r}}) = \begin{bmatrix} -im_{J-1}(JM,\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{r}}) & 0 \\ 0 & im_{J+1}(JM,\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{r}}) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Además es conveniente considerar en forma separada las funciones Bessel esféricas $j_L(kr)$, $L = J$, $J \pm 1$, usando $j_J(kr)$ cuando $L = J$, y poniendo las otras dos con $L = J \pm 1$ en forma matricial:

$$\mathbf{J}_J(kr) = \begin{bmatrix} j_{J-1}(kr) & 0 \\ 0 & j_{J+1}(kr) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Con esta notación es posible reescribir la onda plana entrante como

$$\chi_\nu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \left\{ \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} 4\pi i^J j_J(kr) m_J(JM, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}}) + \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} 4\pi i^J tr \Big[\mathbf{J}_J(kr) \mathbf{m}_J(JM, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}}) \Big] \right\}, \tag{7}$$

donde tr representa la traza del producto de las matrices diagonales indicado en el paréntesis cuadrado.

De esta manera encontramos la función de onda dispersiva, solución de nuestro problema, como una suma de una onda incidente más una onda radial saliente construida de una amplitud de dispersión, función de $\theta, \varphi, \alpha, \beta$, y multiplicada por $r^{-1}\exp(ikr)$. Hacemos notar que las funciones esféricas de Bessel $j_L(kr)$ se pueden escribir como

$$j_L(kr) = \frac{1}{2}[h_L^+(kr) + h_L^-(kr)], \tag{8}$$

y que también se puede escribir el lado derecho de la función de onda en (4.14), con $L = J$ y multiplicando por $\frac{1}{2}$, de la forma

$$j_J(kr) - \frac{h_J^+(kr)}{2}[1 - S_{00}(k)]. \tag{9}$$

De manera similar, partiendo de las Eqs. (4.18) y (4.19) para $L = J \pm 1$ tenemos la matriz de 2×2

$$\begin{bmatrix} j_{J-1}(kr) & 0 \\ 0 & j_{J+1}(kr) \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} h_{J-1}^+(kr) & 0 \\ 0 & h_{J+1}^+(kr) \end{bmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_{--}^J(k) & S_{+-}^J(k) \\ S_{-+}^J(k) & S_{++}^J(k) \end{pmatrix} \right], \tag{10}$$

que en notación matricial puede ser expresada como

$$\mathbf{J}_J - \tfrac{1}{2}\mathbf{H}_J^+[\mathbf{I} - \mathbf{S}^J(k)], \tag{11}$$

con $\mathbf{H}_J^+$, $\mathbf{S}^J$ y $\mathbf{J}_J$ dados respectivamente por (4.26) y (5.6). Recordamos que las funciones de onda que son solución están construidas al multiplicar (5.9) y (5.10) por las partes orbitales tal como está dado en la Ec. (3.6). Asimismo, escogemos combinaciones lineales de estas soluciones con coeficientes dados por (5.2). Esto corresponde a sumar términos con (5.9) multiplicado por $m_J(JM, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}})$ de (5.4) y la matriz (5.10) multiplicada por las correspondientes $\mathbf{m}_J(JM, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}})$ de (5.5). Al sumar sobre $J = 0, 1, \ldots; M = -J, \ldots J$ la función de onda resultante tiene la forma

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} \left\{ \Big(j_J(kr) - \frac{h_J^+(kr)}{2}[1 - S_{00}(k)] \Big) m_J(JM, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}}) \right.$$
$$\left. + tr\left[\Big(\mathbf{J}_J - \tfrac{1}{2}\mathbf{H}_J^+[\mathbf{I} - \mathbf{S}^J(k)] \Big) \mathbf{m}_J(JM, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}}) \right] \right\}. \tag{12}$$

Finalmente, como estamos interesados en el comportamiento asintótico de (5.12) para el caso en que $r \to \infty$, reemplazamos $h_L^+(kr)$ por su valor asintótico

$$h_L^+(kr) \to \frac{e^{ikr}}{kr}(-i)^{L+1}. \tag{13}$$

Sustituyendo esto en las expressiones de arriba obtenemos que, usando (5.7) y (5.12), la función de onda de nuestro problema se comporta como

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \to \chi_\nu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$
$$- \frac{i}{2k} \left\{ \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} [1 - S_{00}(k)] m_J(JM, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}}) \right.$$
$$\left. + \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} tr\left[\Big(\mathbf{I} - \mathbf{S}^J(k) \Big) \mathbf{m}_J(JM, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}}) \right] \right\} \frac{\exp(ikr)}{r}. \tag{14}$$

De esta manera hemos obtenido en el paréntesis de llave una expresión que representa la amplitud de dispersión (para $S = 1$).

6 Observaciones finales

En este trabajo hemos derivado la amplitud de dispersión para un potencial central combinado con un potencial tensorial centrífugo. La dependencia $1/r^2$ del coeficiente por las partes orbitales tal como está dado en la Ec. (3.6). Asimismo, escogemos combinaciones lineales de estas soluciones con coeficientes dados por (5.2). Esto corresponde a sumar términos con (5.9) multiplicado por $m_J(JM, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}})$ de (5.4) y la matriz (5.10) multiplicada por las correspondientes $\mathbf{m}_J(JM, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}})$ de (5.5). Al sumar sobre $J = 0, 1, \ldots; M = -J, \ldots J$ la función de onda resultante tiene la forma

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} \left\{ \left(j_J(kr) - \frac{h_J^+(kr)}{2}[1 - S_{00}(k)] \right) m_J(JM, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}}) \right.$$
$$\left. + tr\left[\left(\mathbf{J}_J - \tfrac{1}{2}\mathbf{H}_J^+[\mathbf{I} - \mathbf{S}^J(k)] \right) \mathbf{m}_J(JM, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}}) \right] \right\}. \quad (12)$$

Finalmente, como estamos interesados en el comportamiento asintótico de (5.12) para el caso en que $r \to \infty$, reemplazamos $h_L^+(kr)$ por su valor asintótico

$$h_L^+(kr) \to \frac{e^{ikr}}{kr}(-i)^{L+1}. \quad (13)$$

Sustituyendo esto en las expressiones de arriba obtenemos que, usando (5.7) y (5.12), la función de onda de nuestro problema se comporta como

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \to \chi_\nu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$
$$-\frac{i}{2k}\left\{ \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} [1 - S_{00}(k)] m_J(JM, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}}) \right.$$
$$\left. + \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} tr\left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{S}^J(k) \right) \mathbf{m}_J(JM, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}}) \right] \right\} \frac{\exp(ikr)}{r}. \quad (14)$$

De esta manera hemos obtenido en el paréntesis de llave una expresión que representa la amplitud de dispersión (para $S = 1$).

6 Observaciones finales

En este trabajo hemos derivado la amplitud de dispersión para un potencial central combinado con un potencial tensorial centrífugo. La dependencia $1/r^2$ del coeficiente del potencial tensorial ha sido esencial para separar las ecuaciones radiales originalmente acopladas (con el uso de una transformación unitaria independiente de la coordenada de distancia), y sin haber una restricción sobre la elección de la parte central del potencial. Arribamos entonces a la conclusión que existe un amplio conjunto de potenciales distintos que pueden ser resueltos usando los métodos aplicados en este trabajo.

Referencias

[1] H. A. Bethe y E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One and Two-Electron Atoms* (Plenum-Rosetta, New York, 1977).

[2] J. van der Brand y P. de Witt Huberts, *Physics World* 9 (February 1996) 35.

[3] W. M. Frank y D. J. Land, *Rev. Mod. Phys.* **43** No. 1, 36 (1971).

[4] C. Lechanoine-Leluc and F. Lehar, *Rev. Mod. Phys.*, Vol. **65**, No. 1, 47 (1993).

[5] R. B. Wiringa, R. A. Smith y T. L. Ainsworth, *Phys. Rev. C* **29**, 1207 (1984).

[6] J.C. D'Olivo, L. F. Urrutia y F. Zertuche, *Phys. Rev. D* **32**, 2174 (1985).

[7] M. Moshinsky, *Le Journal de Physique et le Radium* **15**, 725 (1954).

[8] J. Besprosvany, *Phys. Rev. A* **55**, 3539 (1997).

[9] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (Claredon Press, Oxford, 1947).

[10] M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (Wiley & Sons, New York, 1957).

[11] P. Morse y Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (Mc Graw-Hill, New York, 1953).