UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

R^3-Continuos en Hiperespacios

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

P R E S E N T A:

REYNALDO HERRERA GALVEZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

2000

FACULTAD DE CIENCIAS

SECCION ESCOLAR

281659

FACULTAD DE CIENCIAS

U N A M

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNOMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

R^3-continuos en Hiperespacios

realizado por Reynaldo Herrera Galvez

con número de cuenta 8552828-0, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Alejandro Illanes Mejía	
Propietario	Dr. Sergio Macías Alvarez	
Propietario	M. en C. Verónica Martínez de la Vega y Mansilla	
Suplente	Dr. Raúl Escobedo Conde	
Suplente	M. en C. María de Jesús López Toriz	

Consejo Departamental de Matemáticas

Héctor Méndez

Dr. Héctor Méndez Lango

Al Dr. Alejandro Illanes M.
Por su colaboración. que facilitó e hizo
posible la realización de éste trabajo.

Indice

Introducción.

Para empezar, recordemos la difinición de contractibilidad:

Un espacio topológico es *contraíble* si existe un punto $p \in X$ y una función continua $F : X \times [0,1] \to X$ tal que $F(x,0) = x$ y $F(x,1) = p$ para toda $x \in X$.

Aunque esta definición es muy natural no siempre es fácil decidir si un espacio es contraíble o no. Esto ha inducido a algunos autores a buscar criterios más sencillos para decidir la contractibilidad de un espacio. Un criterio que implica la no contractibilidad es la existencia de R^3-continuos (ver [3]). Este concepto fue introducido por S. T. Czuba en 1979 y es fácil de aplicar en los continuos.

Extendiendo las ideas de Czuba, en 1986, W. J. Charatonik estudia la existencia de R^3-continuos en los hiperespacios, 2^X y $C(X)$, de todos los subconjuntos cerrados y todos los subcontinuos de un continuo, respectivamente.

El objetivo de este trabajo es el de desarrollar el artículo de Charatonik, (ver [2]). Una parte importante de esta tesis consiste en mostrar un error en dicho artículo. Esto lo hacemos en el capítulo 3 en donde mostramos que si K es un R^3-continuo en X, entonces no necesariamente $C(K)$ es un R^3-continuo en $C(X)$.

A continuación describimos brevemente la manera en que está organizado este trabajo:

El capítulo introductorio incluye las definiciones necesarias para entender el resto. Ponemos especial énfasis en presentar los conceptos de hiperespacio, confluencia y R^3-continuo.

El segundo capítulo está dedicado a mostrar que si K es un R^3-continuo en X entonces 2^K es un R^3-continuo en 2^X. En el tercer capítulo vemos que la afirmación respectiva no es cierta para el caso en que sustituimos $C(X)$ por 2^X. Aunque vemos que en el caso en que el continuo X es C^*-suave, entonces $C(K)$ sí es un R^3-continuo para $C(X)$ cuando K lo es para X.

En el último capítulo mostramos un ejemplo que ilustra que la existencia de R^3-continuos en X no implica la existencia de tales continuos en los niveles de Whitney. Por otra parte, también vemos como una aplicación, que la existencia de R^3-continuos en X implica la no existencia de funciones de Whitney confluentes para 2^X.

Para información posterior a 1986 sobre este tema el lector puede consultar los trabajos, [1], [5], [6], [7] y [8].

CAPITULO 1.

Preliminares.

Un *continuo* es un espacio métrico compacto y conexo. Todos nuestros espacios serán continuos.

En topología se llaman *hiperespacios* los espacios constituidos por una clase específica de subconjuntos de un espacio dado. Los hiperespacios más comunes de un continuo X son:

$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y } A \neq \emptyset\}$,

$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$ y, para $n \in \mathbb{N}$,

$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$.

A todos los hiperespacios considerados en este estudio se les dota de una métrica, definida de la siguiente manera.

Dados $\varepsilon > 0$, $A \in 2^X$ y $p \in X$ definimos: $N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(a,x) < \varepsilon\}$, donde d es la métrica de X. Note que si $B_\varepsilon(p) = \{q \in X : d(p,q) < \varepsilon\}$, entonces $N(\varepsilon, A) = \bigcup\{B_\varepsilon(a) : a \in A\}$.

La métrica de *Hausdorff* para 2^X se define por:

$H(A,B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$

Para ver que H es, efectivamente, una métrica, (ver [10, 0.2, p.2]).

Definimos $B_\varepsilon(A)$ como: $B \in B_\varepsilon(A)$ si y solo si $H(A, B) < \varepsilon$.

Sea C un subconjunto arbitrario de un continuo X. Definimos los siguientes hiperespacios:

$2^C = \{A \in 2^X : A \subset C\}$,

$C(C) = \{A \in C(X) : A \subset C\}$ y, para $n \in \mathbb{N}$,

$F_n(C) = \{A \in 2^X : A \subset C$ y A tiene a lo más n puntos$\}$.

Dada una sucesión de subconjuntos $\{A_n\}_n$ de X, definimos:

$\text{\textit{lím inf}}\ A_n = \{x \in X :$ para toda $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para casi toda n (todas salvo un número finito)$\}$ y,

$\text{\textit{lím}}\ \sup A_n = \{x \in X :$ para toda $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de indices$\}$.

Dado un continuo X, una función de *Whitney* para 2^X (para $C(X)$) es una función continua

$\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ ($\mu : C(X) \to \mu(X)$) tal que:

$\mu(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$ y,

Si $A \subsetneq B$ entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Una propiedad topológica $\mathcal{P}$, es llamada una *propiedad de Whitney*, si cada vez que un continuo X tenga la propiedad $\mathcal{P}$, se sigue que $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad

$\mathcal{P}$ para toda función de Whitney μ para $C(X)$ y para toda $t \in [0, \mu(X))$.

La propiedad topológica $\mathcal{P}$ se dice que es una *propiedad reversible de Whitney* si cada vez que se cumple que todos los conjuntos de la forma $\mu^{-1}(t)$, donde μ varía sobre todas las funciones de Whitney para $C(X)$ y t varía sobre todos los números en $(0, \mu(X))$, se sigue que X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

El espacio X es *contraíble* en Y, si $X \subset Y$ y existen una función continua $H : X \times [0,1] \to Y$ y un punto $y_0 \in Y$ tales que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = y_0$, para toda $x \in X$.

Dado un continuo X se dice que es *C^*-suave* si la función definida como $C^* : C(X) \to C(C(X))$ dada por $C^*(A) = C(A)$, para toda $A \in C(X)$, es continua.

Una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$ se dice que es *confluente* si para cada subcontinuo Q de Y y cada componente C de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(C) = Q$.

Ejemplo de función confluente.

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ la función definida por: $f(x) = x^2$.

Sea Q un subcontinuo de $[0,1]$. Tomemos una componente C de $f^{-1}(Q)$. Como $C = f^{-1}(Q)$. Entonces $f(C) = Q$. Por tanto f es confluente, (véase la figura 0.1):

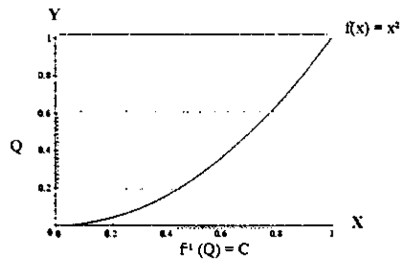

Figure 0.1:

Ejemplo de función no confluente.

Sea $f : [0, \frac{6}{5}] \longrightarrow [0, \frac{4}{3}]$ una función definida por: $f(x) = 1 + x(x-1)^2$, (véase la figura 0.2):

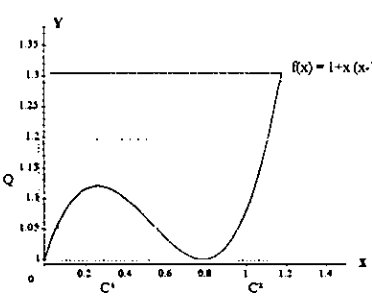

Figure 0.2:

Sea Q un subcontinuo de $[0, \frac{4}{3}]$ como n la figura 0.2, Tomemos la componente C^1 de $f^{-1}(Q)$. Entonces C^1 es tal que $f^{-1}(C^1) \neq Q$. Por tanto f no es una función confluente.

Decimos que un subcontinuo propio K de un continuo X es un R^3-*continuo* si existe un subconjunto abierto, U de X tal que $K \subset U$ y existe una sucesión $\{C_n\}_n$, de componentes de U tal que $\textit{lím inf } C_n = K$.

Ejemplos de continuos X que contienen un R^3-continuo.

(a) Consideremos el continuo X de la figura 0.3.

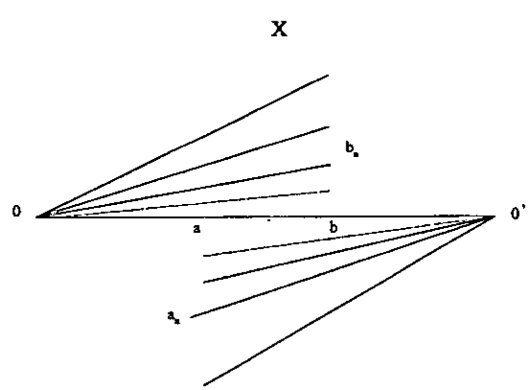

Figure 0.3:

Observemos que los segmentos $\overline{0b_n}$ tienden al segmento $\overline{0b}$ y, los de la forma $\overline{a_n0'}$ tienden al segmento $\overline{a0'}$.

Probaremos que el segmento $\overline{ab} = K$ es un R^3-continuo, (véase la figura 0.4):

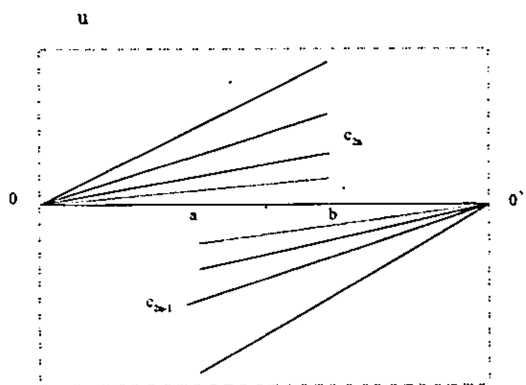

Figure 0.4:

Sea $U = X - \{0, 0'\}$. Entonces U es abierto en X y $K \subset U$. Las componentes de U son de la forma $C_{2n} = \overline{0b_n} - \{0\}$ y $C_{2n-1} = \overline{a_n0'} - \{0'\}$. A si que $K = lím\ inf\ C_n$. Por tanto K es un R^3-continuo de X.

(b) Sea $I = \{0\} \times [-1, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hacemos $a_n = (\frac{1}{6n}, 1)$,

$b_n = (\frac{1}{6n+1}, 0)$, $c_n = (\frac{1}{6n+2}, 1)$, $d_n = (\frac{1}{6n+3}, -1)$, $e_n = (\frac{1}{6n+4}, 0)$ y $f_n = (\frac{1}{6n+5}, -1)$. Hacemos $X = I \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n d_n e_n f_n a_{n+1} \ldots)$. (véase la figura 0.5):

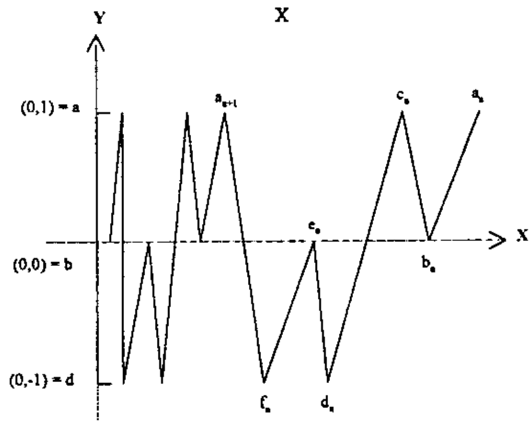

Figure 0.5:

Veremos que el conjunto $\{(0,0)\}$ es un R^3-continuo en X.

Sea $U = X - (\mathbb{R} \times \{-1, 1\})$. Entonces U es abierto en X y $\{(0,0)\} \subset U$. Las componentes de U son de forma:

$C = \overline{ad} - \{a, d\}$, $C_{4n} = \overline{a_n b_n} \cup \overline{b_n c_n} - \{a_n, c_n\}$, $C_{4n+1} = \overline{c_n d_n} - \{c_n, d_n\}$, $C_{4n+2} = \overline{d_n e_n} \cup \overline{e_n f_n} - \{d_n, f_n\}$, $C_{4n+3} = \overline{f_n a_{n+1}} - \{f_n, a_{n+1}\}$. Así que $\{(0,0)\} = lím$ inf C_n. Por tanto el punto $\{(0,0)\}$ es un R^3-continuo en X, (véase la figura 0.6):

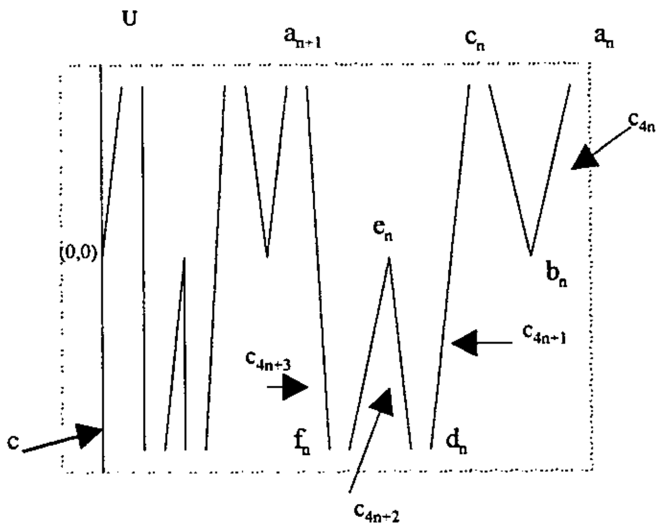

Figure 0.6:

CAPITULO 2.

Localizando R^3-continuos en 2^X.

En este capítulo demostraremos que si X contiene un R^3-continuo K, entonces 2^K es un R^3-continuo en 2^X.

Primero probaremos algunos lemas.

LEMA 2.1.

Sea U un subconjunto abierto de X. Entonces 2^U es un subconjunto abierto de 2^X.

Demostración.

Sea $A \in 2^U$. Tenemos que probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(A) \subset 2^U$.

Por definición, $A \subset U$. Como A es un subconjunto cerrado en un compacto X, entonces A es un conjunto compacto y $X - U$ es un conjunto cerrado.

Si $X - U = \emptyset$. Esto implica que $X = U$. De modo que $2^U = 2^X$ es abierto.

Si $X - U \neq \emptyset$. Entonces probaremos que existe $\varepsilon > 0$, tal que

$d(A, X - U) = inf\{d(a,b) : a \in A \text{ y } b \in X - U\} = \varepsilon > 0.$

Supongamos que lo anterior no se cumple. Es decir, que para toda $\varepsilon > 0$, existen $p \in A$ y $q \in X - U$ tales que $d(p,q) \leq \varepsilon$.

Entonces para $\varepsilon = 1$, existen $p_1 \in A$ y $q_1 \in X - U$ tales que $d(p_1, q_1) \leq 1$. Para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existen $p_2 \in A$ y $q_2 \in X - U$ tales que $d(p_2, q_2) \leq \frac{1}{2}$.

Siguiendo de es ta manera, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $p_n \in A$ y $q_n \in X - U$ tales que $d(p_n, q_n) \leq \frac{1}{n}$.

Consideremos la sucesión $\{p_n\}_n \subset A$. Como A es un conjunto compacto, entonces existen $p \in A$ y una subsucesión $\{p_{n_k}\}_k$ de la sucesión $\{p_n\}_n$ la cual p_{n_k} converge a p.

Como $p \in A \subset U$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subset U$.

Dado que $\frac{1}{n_j}$ converge a 0 y p_{n_j}converge a p, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(p, p_{n_N}) < \frac{\delta}{2}$, y $\frac{1}{n_N} < \frac{\delta}{2}$.

Entonces $d(p, q_{n_N}) \leq d(p, p_{n_N}) + d(p_{n_N}, q_{n_N}) < \frac{\delta}{2} + \frac{1}{n_N} = \delta$.

De modo que, $q_{n_N} \in B_\delta(p) \subset U$. Esto es absurdo ya que q_{n_N} se escogió en $X - U$.

Por tanto, se concluye que $\varepsilon = inf\{d(p,q) : p \in A \text{ y } q \in X - U\} > 0$.

Sea $B \in B_\varepsilon(A)$. Probaremos que $B \in 2^U$. Es decir, que $B \subset U$.

Para esto, tomemos $b \in B$. Como $H(A,B) < \varepsilon$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$, entonces existe

$a \in A$ tal que $d(a,b) < \varepsilon$.

Si ocurriera que $b \notin U$, tendríamos que $b \in X - U$ y, entonces $d(a,b) \geqslant \varepsilon$, lo cual es absurdo. De manera que $b \in U$. Esto implica que $B \subset U$. Por tanto $B_\varepsilon(A) \subset 2^U$. Esto demuestra que 2^U es un subconjunto abierto de 2^X.

LEMA 2.2.

Sea U un subconjunto abierto de X. Entonces $\mathcal{U} = \{ A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset\}$ es un subconjunto abierto de 2^X.

Demostración.

Sea $A \in \mathcal{U}$. Entonces $A \cap U \neq \emptyset$. De modo que, existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 \in U$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$, tal que $B_\varepsilon(a_0) \subset U$.

Vamos a probar que para tal $\varepsilon > 0$ se tiene que $B_\varepsilon(A) \subset \mathcal{U}$.

Tomemos $B \in B_\varepsilon(A)$. Entonces $H(A, B) < \varepsilon$. De manera que, como $a_0 \in A$ existe $b \in B$ tal que $d(a_0, b) < \varepsilon$. De modo que $b \in B_\varepsilon(a_0) \subset U$. Así que $B \cap U \neq \emptyset$. Esto implica que $B \in \mathcal{U}$. Por tanto $B_\varepsilon(A) \subset \mathcal{U}$.

Esto demuestra que $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de 2^X.

LEMA 2.3.

Sea M un subconjunto cerrado de X. Entonces $\mathcal{M} = \{A \in 2^X : A \subset M\}$ es un subconjunto cerrado de 2^X.

Demostración.

Como M es cerrado. Entonces $U = X - M$ es abierto en X.

Hacemos $\mathcal{U} = \{A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset\}$. Por el Lema 2.2, $\mathcal{U}$ es abierto. Notemos que $A \in 2^X - \mathcal{U}$ si y sólo si $A \subset X - U = M$. Esto muestra que $2^X - \mathcal{U} = \mathcal{M}$. Por tanto $\mathcal{M}$ es cerrado en 2^X.

LEMA 2.4.

Sea L un subconjunto cerrado de X. Entonces $\mathcal{L} = \{A \in 2^X : A \cap L \neq \emptyset\}$ es un subconjunto cerrado de 2^X.

Demostración.

Por hipótesis L es cerrado, así que $U = X - L$ es abierto. Por el Lema 2.1, se tiene que $2^U = \{A \in 2^X : A \subset U\}$ es abierto en 2^X.

Notemos que $A \in 2^X - \mathcal{L}$ si y sólo si $A \subset X - L = U$. Esto muestra que $2^X - 2^U = \mathcal{L}$. Por tanto $\mathcal{L}$ es cerrado en 2^X.

LEMA 2.5.

Sea $\mathcal{D}$ un subconjunto conexo de 2^X y $\mathcal{D} \cap C(X) \neq \emptyset$. Entonces el conjunto $F = \bigcup\{D : D \in \mathcal{D}\}$ es conexo en X.

Demostración.

Supongamos que F es un conjunto disconexo. Es decir, supongamos que, existen H y $K \subset X$ tales que:

(a) $F = H \cup K$

(b) $\overline{H} \cap K = \emptyset$ y $H \cap \overline{K} = \emptyset$

(c) $H \neq \emptyset$ y $K \neq \emptyset$

Por hipótesis $\mathcal{D} \cap C(X) \neq \emptyset$. Entonces existe $D_0 \in \mathcal{D}$ tal que D_0 es conexo y $D_0 \subset F$. Por (a), se tiene que $D_0 = (H \cap D_0) \cup (K \cap D_0)$. Esto implica que $H \cap D_0 = \emptyset$ o $K \cap D_0 = \emptyset$, ya que D_0 es conexo. Supongamos que $K \cap D_0 = \emptyset$, entonces $D_0 \subset H$.

Sean $\mathcal{H} = \{D \in \mathcal{D} : D \subset H\}$ y $\mathcal{K} = \{D \in \mathcal{D} : D \cap K \neq \emptyset\}$. Se probará que $\mathcal{H}$

y $\mathcal{K}$ forman una disconexión de $\mathcal{D}$. Lo cual será un absurdo.

Para esto probaremos lo siguiente:

(1) $\mathcal{D} = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$

(2) $\overline{\mathcal{H}} \cap \mathcal{K} = \emptyset$ y $\mathcal{H} \cap \overline{\mathcal{K}} = \emptyset$

(3) $\mathcal{H} \neq \emptyset$ y $\mathcal{K} \neq \emptyset$

Prueba de (1)

$\subset$) Sea $D \in \mathcal{D}$. Entonces $D \subset F = H \cup K$, así que $D \subset H$ o $D \not\subset H$.

Si $D \subset H$ entonces $D \in \mathcal{H}$.

Si $D \not\subset H$ entonces $D \cap K \neq \emptyset$. Así que $D \in \mathcal{K}$.

Por tanto $\mathcal{D} \subset \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$.

$\supset$) Por definición $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} \subset \mathcal{D}$.

Por tanto $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} = \mathcal{D}$.

Prueba de (2)

Por el Lema 2.3, el conjunto $\{A \in 2^X : A \subset \overline{H}\}$ es cerrado en 2^X. Además, $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{D} : A \subset H\} \subset \{A \in 2^X : A \subset \overline{H}\}$.

Así que $\overline{\mathcal{H}} \subset \{A \in 2^X : A \subset \overline{H}\}$.

Supongamos que $\overline{\mathcal{H}} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$. De manera que existe $A \in \mathcal{D}$ tal que $A \in \overline{\mathcal{H}}$ y $A \in \mathcal{K}$. De modo que, $A \subset \overline{H}$ y $A \cap K \neq \emptyset$. Entonces $\overline{H} \cap K \neq \emptyset$. Esto es absurdo, ya que $\overline{H} \cap K = \emptyset$. Por tanto $\overline{\mathcal{H}} \cap \mathcal{K} = \emptyset$.

Probaremos que $\mathcal{H} \cap \overline{\mathcal{K}} = \emptyset$.

Por el Lema 2.4, el conjunto $\{A \in 2^X : A \cap \overline{K} \neq \emptyset\}$ es cerrado en 2^X. Como $\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{D} : A \cap K \neq \emptyset\} \subset \{A \in 2^X : A \cap \overline{K} \neq \emptyset\}$. Entonces $\overline{\mathcal{K}} \subset \{A \in 2^X : A \cap \overline{K} \neq \emptyset\}$.

Supongamos que $\mathcal{H} \cap \overline{\mathcal{K}} \neq \emptyset$. Entonces existe $B \in \mathcal{D}$ tal que $B \in \mathcal{H}$ y $B \in \overline{\mathcal{K}}$. De modo que $B \subset H$ y $B \cap \overline{K} \neq \emptyset$. Lo cual implica que $H \cap \overline{K} \neq \emptyset$. Esto es absurdo pues $H \cap \overline{K} = \emptyset$. Por tanto $\mathcal{H} \cap \overline{\mathcal{K}} = \emptyset$.

Prueba de (3)

El conjunto $\mathcal{H} \neq \emptyset$, ya que $D_0 \subset H$.

Probaremos que $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Supongamos que $\mathcal{K} = \emptyset$. Entonces, para todo $D \in \mathcal{D}$ se tiene que $D \cap K = \emptyset$. Así que, $D \subset H$. Esto implica que $F = H$. Entonces $K = \emptyset$. Lo cual es absurdo, de manera que $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

Esto demuestra que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ forman una disconexión de $\mathcal{D}$ lo cual es absurdo. De manera que el conjunto $F = \bigcup\{D : D \in \mathcal{D}\}$ es conexo en X.

LEMA 2.6.

Sean X un continuo y $X^n = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n \text{ veces}}$. Sea $f : X^n \to F_n(X)$ la función dada por $f(x_1, ..., x_n) = \{x_1, ..., x_n\}$. Entonces f es una función continua y suprayectiva.

Demostración.

Consideremos al espacio X^n con la topología producto. Esta topología es equivalente a la dada por la siguiente métrica.

$D : X^n \times X^n \to \mathbb{R}$:

Sean $A = (x_1, ..., x_n)$ y $B = (y_1, ..., y_n) \in X^n$, entonces:

$D(A, B) = D((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = máx\{d(x_1, y_1), ..., d(x_n, y_n)\}$.

Tenemos que probar que para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $D(A, B) < \delta$, entonces $H(A, B) < \varepsilon$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $(x_1, ..., x_n) \in X^n$. Proponemos $\delta = \varepsilon$. Tomemos $(y_1, ..., y_n) \in X^n$ tal que $D((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) < \delta = \varepsilon$. Entonces $d(x_i, y_i) < \delta = \varepsilon$ para toda i. De manera que $x_i \in N(\varepsilon, \{y_i\})$ y $y_i \in N(\varepsilon, \{x_i\})$ para toda i. Entonces $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Por tanto $H(A, B) < \varepsilon$. Esto demuestra que f es una función continua.

Para ver que f es suprayectiva.

Sea $A \in F_n(X)$, entonces $A = \{x_1, ..., x_k\}$ con $k \leqslant n$. Si $k = n$, consideremos el punto $(x_1, ..., x_n) \in X^n$, entonces $f((x_1, ..., x_n)) = A$. Si $k < n$, tomemos $\underbrace{(x_1, ...x_k, x_k, ...x_k)}_{n \text{ veces}} \in X^n$, entonces $f((x_1, ..., x_k, x_k, ..., x_k)) = \{x_1, ..., x_k, x_k, ..., x_k\} = \{x_1, ..., x_k\} = A$.

Por tanto $f(X^n) = F_n(X)$. Es decir f es una función suprayectiva.

LEMA 2.7.

Sea C un subconjunto de X. Definimos el conjunto $F(C) = \{A \subset C : A$ es finito y $A \neq \emptyset\}$. Si C es conexo, entonces $F(C)$ es un conjunto conexo de 2^X.

Demostración.

Por definición del hiperespacio $F_n(C) = \{A \in F(C) : A$ tiene a lo más n puntos$\}$. Entonces $F(C) = \bigcup\{F_n(C) : n \in \mathbb{N}\}$.

Sea $f : X^n \to F_n(X)$ la función definida como en el Lema 2.6.

Sea $f|_{C^n} : C^n \to F_n(C)$ la función restringida. Entonces $f|_{C^n}$ es una función continua y sobreyectiva.

Como C^n es un espacio conexo, Pues el producto topológico de espacios conexos es conexo, (ver [4, 1.7, p.109]). Entonces por el Lema 2.6, $F_n(C)$ es una imagen continua de un espacio conexo, así que $F_n(C)$ es conexo.

Si $C = \emptyset$, entonces $F(C) = \emptyset$. Así que $F(C)$ es conexo. Supongamos entonces que $C \neq \emptyset$.

Elegimos un punto $x_1 \in C$. Ya que $\{x_1\} \in F_n(C)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\bigcap\{F_n(C) : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. Esto implica que $F(C) = \bigcup\{F_n(C) : n \in \mathbb{N}\}$ es conexo en 2^X, (ver [4, 1.5, p.108]).

LEMA 2.8.

Sea U un subconjunto abierto de X. Si C es un subconjunto conexo de U, entonces 2^C es un subconjunto conexo de 2^U.

Demostración.

Por el Lema 2.7, $F(C)$ es un subconjunto conexo de 2^X.

Afirmamos que: $F(C) \subset 2^C \subset \overline{(F(C))}^{2^X}$.

Por definición $F(C) \subset 2^C$.

Ahora probaremos que $2^C \subset \overline{(F(C))}^{2^X}$.

Sea $A \in 2^C$. Se probará que, para toda $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(A) \cap F(C) \neq \emptyset$. Es decir, que existe B conjunto finito tal que $B \in F(C)$, $B \subset A$ y $H(A, B) < \varepsilon$.

Consideremos la cubierta abierta de A dada por $\Gamma = \{B_\varepsilon(a) : a \in A\}$. Como A es un conjunto compacto existe una familia finita $\{B_\varepsilon(a_1), ..., B_\varepsilon(a_n)\}$ de Γ tal que $A \subset \bigcup\{B_\varepsilon(a_i) : i \in \{1, ..., n\}\}$.

Ahora bien, tomemos el conjunto $B = \{a_1, ..., a_n\}$. Entonces B es finito, $B \subset A$ y $B \in F(C)$.

Sólo nos falta probar que $H(A, B) < \varepsilon$. Como $B \subset A$, entonces $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Por otra parte $A \subset \bigcup\{B_\varepsilon(a_i) : a_i \in B\} = N(\varepsilon, B)$. Entonces $A \subset N(\varepsilon, B)$. Por tanto $H(A, B) < \varepsilon$.

Esto demuestra que, para toda $\varepsilon > 0$, se tiene que $B_\varepsilon(A) \cap F(C) \neq \emptyset$. De modo que $A \in \overline{F(C)}^{2^X}$. Por tanto $2^C \subset \overline{(F(C))}^{2^X}$.

Hemos probado que $F(C) \subset 2^C \subset \overline{(F(C))}^{2^X}$.

Como 2^C está entre un conexo y su cerradura, podemos concluir que 2^C es un subconjunto conexo de 2^U, (ver [4, 1.6, p.109]).

LEMA 2.9.

Sea U un subconjunto abierto de X. Si C es una componente de U, entonces 2^C es una componente de 2^U.

Demostración.

Por el Lema 2.8, 2^C es conexo. Sea $\mathcal{N}$ la componente de 2^U tal que $2^C \subset \mathcal{N}$.

Elegimos $x \in C$, así que $\{x\} \in 2^C$. Entonces $\{x\} \in \mathcal{N}$. De manera que $\mathcal{N} \cap C(X) \neq \emptyset$. Por el Lema 2.5, el conjunto $F = \bigcup\{E : E \in \mathcal{N}\}$ es conexo en U.

Dado $y \in C$, $\{y\} \in 2^C \subset \mathcal{N}$. De manera que $y \in F$. Esto muestra que $C \subset F \subset U$. Como C es una componente de U, no puede estar contenido en un conexo mayor, así que $C = F$.

Dada $E \in \mathcal{N}$ tenemos que $E \subset F = C$, así que $E \in 2^C$. Esto muestra que

$\mathcal{N} \subset 2^C$. Por tanto $\mathcal{N} = 2^C$, de donde 2^C es una componente de 2^U.

TEOREMA 2.10.

Sea X un continuo que contiene un R^3-continuo K. Entonces 2^K es un R^3-continuo en 2^X.

Demostración.

Como K es un R^3-continuo en X. Entonces, existen un abierto U de X tal que $K \subset U$ y una sucesión $\{C_n\}_n$ de componentes de U tales que $lím\ inf\ C_n = K$.

Por el Lema 2.1, 2^U es abierto. Por el Lema 2.9, $\{2^{C_n}\}_n$ es una sucesión de componentes de 2^U.

Por definición: $2^K = \{A \in 2^X : A \subset K\} \subset \{A \in 2^X : A \subset U\} = 2^U$. Por el Lema 2.8 se tiene que 2^K es un conjunto conexo y, cerrado por el Lema 2.3 . Entonces 2^K es un subcontinuo de 2^X.

Sólo nos falta probar que $lím\ inf\ 2^{C_n} = 2^K$.

$\subset$) Sean $A \in lím\ inf\ 2^{C_n}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geqslant N$, se tiene que $B_\varepsilon(A) \cap 2^{C_n} \neq \emptyset$. Dada $n \geqslant N$ existe $D_n \in 2^{C_n}$ tal que, $H(A, D_n) < \varepsilon$. De manera que $A \subset N(\varepsilon, D_n) \subset N(\varepsilon, C_n)$. De modo que, para toda $a \in A$, existe $c \in C_n$ tal que $a \in B_\varepsilon(c)$.

Entonces, para toda $n \geqslant N$, se tiene que $B_\varepsilon(a) \cap C_n \neq \emptyset$.

Por tanto $a \in lím\ inf\ C_n = K$.

Por tanto $A \subset K$. Así que, $lím\ inf\ 2^{C_n} \subset 2^K$.

$\supset$) Sea $A \in 2^K$, entonces $A \subset K$. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos la cubierta de A dada por $\Psi = \{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) : a \in A\}$. Como A es compacto, existe una familia finita $\{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_1), ..., B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_k)\}$ de Ψ tal que $A \subset \bigcup\{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) : i \in \{1, ..., k\}\}$.

Tomemos el conjunto $F = \{a_1, ..., a_k\}$, así que $F \subset A$ y $H(A, F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Notemos que $F \subset A \subset K$.

Entonces, para toda $a_i \in F$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geqslant N_i$ se tiene que $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) \cap C_n \neq \emptyset$. Sea $N = máx\{N_1, ..., N_k\}$, así que para toda $n \geqslant N$ y para toda $i \in \{1, ..., k\}$ se tiene que $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) \cap C_n \neq \emptyset$.

Sea $n \geqslant N$ un índice fijo. Para cada $i \in \{1, ..., k\}$ tomemos $g_i \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) \cap C_n$. De esta manera construimos al conjunto $G = \{g_1, ..., g_k\}$ que satisface que $G \in 2^{C_n}$.

Probaremos que $H(F, G) < \frac{\varepsilon}{2}$. Para $a_i \in F$, $g_i \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) \cap C_n$ entonces $d(a_i, g_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Esto implica que $F \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, G)$. Para cada $g_i \in G$, por construcción, $g_i \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) \cap C_n$, entonces $d(g_i, a_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así que $G \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, F)$. Por tanto $H(F, G) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por otra parte, $H(A, G) \leqslant H(G, F) + H(F, A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Como $G \in 2^{C_n}$, así que $G \in B_\varepsilon(A) \cap 2^{C_n}$.

Hemos mostrado que para toda $n \geqslant N$ se tiene que $B_\varepsilon(A) \cap 2^{C_n} \neq \emptyset$. De manera que $A \in lím\ inf\ 2^{C_n}$.

Por tanto $2^K \subset lím\ inf\ 2^{C_n}$.

Esto muestra que $lím\ inf\ 2^{C_n} = 2^K$. Así que 2^K es un R^3-continuo de 2^X.

COMENTARIO 2.11.

Hasta ahora no se sabe si el hecho de que 2^X tenga un R^3-continuo implica que X tiene un R^3-continuo.

CAPITULO 3.

Localizando R^3-continuos en C(X).

En este capítulo analizaremos lo que ocurre con $C(K)$ cuando K es un R^3-continuo de X. Veremos qué le falla a $C(K)$ para ser un R^3-continuo en $C(X)$. También mostraremos con un ejemplo, que $C(K)$ no siempre es un R^3-continuo de $C(X)$.

LEMA 3.1.

Sea U un subconjunto abierto de X. Definimos el conjunto $C(U) = \{A \subset U : A$ es conexo$\}$. Entonces $C(U)$ es un conjunto abierto de $C(X)$.

Demostración.

Observemos que $2^U \cap C(X) = C(U)$.

Por el Lema 2.1, 2^U es abierto en 2^X. Así que $C(U)$ es abierto en $C(X)$.

LEMA 3.2.

Sea U un subconjunto abierto de X. Si Z es un subconjunto conexo de U, entonces $C(Z)$ es un subconjunto conexo de $C(X)$.

Demostración.

Sea $\mathcal{D} = \{\{x\} : x \in Z\}$. Probaremos que $\mathcal{D}$ es un subconjunto conexo de $C(X)$.

Sea $f : Z \to \mathcal{D}$ la función dada por: $f(x) = \{x\}$. f es una función continua y suprayectiva.

(a) f es continua.

Sean $x, y \in Z$. Probaremos que, para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $H(\{x\}, \{y\}) < \varepsilon$.

Hagamos $\delta = \varepsilon$. Entonces si $d(x, y) < \delta = \varepsilon$ se tiene que $x \in N(\varepsilon, \{y\})$ y $y \in N(\varepsilon, \{x\})$, así que $\{x\} \subset N(\varepsilon, \{y\})$ y $\{y\} \subset N(\varepsilon, \{x\})$. Esto implica que $H(\{x\}, \{y\}) < \varepsilon$. Por tanto f es continua.

(b) f es suprayectiva.

Sea $\{x\} \in \mathcal{D}$, entonces $x \in Z$ es tal que $f(x) = \{x\}$. Esto implica que f es suprayectiva, así que $f(Z) = \mathcal{D}$.

Así que, como Z es un conjunto conexo.

Entonces $f(Z) = \mathcal{D}$ es un conjunto conexo, (ver [4, 1.4, p.108]).

Dada $A \in C(Z)$. Elegimos $a \in A$. Entonces existe un arco ordenado de $\{a\}$ a A.

Es decir, un arco ordenado de $\{a\}$ a A en $C(X)$ es una una función continua $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que:

$\alpha(0) = \{a\}$

$\alpha(1) = A$ y

Si $t < s$ entonces $\alpha(t) \subsetneq \alpha(s)$, (ver [10, 1.8, p.59]).

Afirmamos que, dada $t \in [0,1]$, $\alpha(t) \subset \alpha(1) = A \subset Z$. De manera que $\alpha(t) \in C(Z)$.

Supongamos, por el contrario, que existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $\alpha(t_0) \not\subseteq Z$. Por otra parte para, $t \in (0,1)$ se tiene que $t < 1$, en particular para $t_0 < 1$, entonces $\alpha(t_0) \subseteq \alpha(1) = A$ y, $A \subset Z$. Por tanto $\alpha(t_0) \subset A \subset Z$, lo que es absurdo. Así que, $t \in [0,1]$, $\alpha(t) \subset \alpha(1) = A \subset Z$. De manera que $\alpha(t) \in C(Z)$.

Por tanto la imagen de α es un subconjunto conexo de $C(Z)$ que contiene tanto a $\{a\}$ como A. Como ya vimos que $\mathcal{D} = \{\{x\} : x \in Z\}$ es conexo, entonces a todos los elementos de $C(Z)$ los podemos conectar con un conexo con el conexo fijo $\mathcal{D}$. Esto prueba que $C(Z)$ es conexo.

LEMA 3.3.

Sea U un subconjunto abierto de X. Si Z es una componente de U, entonces $C(Z)$ es una componente de $C(U)$.

Demostración.

Por el Lema 3.2, $C(Z)$ es conexo. Sea $\mathcal{M}$ la componente de $C(U)$ tal que $C(Z) \subset \mathcal{M}$.

Elegimos $x \in Z$, entonces $\{x\} \in C(Z)$. Así que $\{x\} \in \mathcal{M}$. De manera que $C(X) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$.

Por el Lema 2.5, el conjunto $F = \bigcup\{M : M \in \mathcal{M}\}$ es conexo en X.

Dado $y \in Z$, $\{y\} \in C(Z) \subset \mathcal{M}$. De manera que $y \in F$. Esto muestra que $Z \subset F \subset U$. Como Z es una componente de U, no puede estar contenido en un conexo mayor, así que $Z = F$.

Dado $M \in \mathcal{M}$, tenemos que $M \subset F = Z$, así que $M \in C(Z)$. Esto muestra que $\mathcal{M} \subset C(Z)$.

Por tanto $\mathcal{M} = C(Z)$. Por tanto $C(Z)$ es una componente de $C(U)$.

LEMA 3.4.

Sean U un subconjunto abierto de X y $\{C_n\}_n$ una sucesión de subconjuntos de U. Si $A \in lím\ inf\ C(C_n)$, entonces $A \subset lím\ inf\ C_n$.

Demostración.

Sea $a \in A$. Probaremos que, para toda $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geqslant N$ se tiene que $B_\varepsilon(a) \cap C_n \neq \emptyset$.

Por hipótesis $A \in lím\ inf\ C(C_n)$, entonces para toda $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geqslant N_0$ se tiene que $B_\varepsilon(A) \cap C(C_n) \neq \emptyset$. De manera que, para toda $n \geqslant N_0$, existe $D_n \in C(C_n)$, tal que $H(A, D_n) < \varepsilon$. Esto implica que $A \subset N(\varepsilon, D_n) \subset N(\varepsilon, C_n) = \bigcup\{B_\varepsilon(c) : c \in C_n\}$.

Entonces para toda $a \in A$ existe $c \in C_n$ tal que $a \in B_\varepsilon(c)$. De manera que, para toda $n \geqslant N = N_0$ se tiene que $B_\varepsilon(a) \cap C_n \neq \emptyset$. Así que $a \in lím\ inf\ C_n$. Por tanto $A \subset lím\ inf\ C_n$.

Como veremos más adelante, cuando K es un R^3-continuo de X, no necesariamente $C(K)$ es un R^3-continuo de $C(X)$. Esto ocurre porque cuando $K = lím\ inf\ C_n$, no necesariamente $C(K) = lím\ inf\ C(C_n)$. El siguiente lema nos ilustra cuál contención se cumple siempre en esta igualdad.

LEMA 3.5.

Sean X un continuo que contiene un R^3-continuo K, U un subconjunto abierto de X tal que $K \subset U$ y $\{C_n\}_n$ una sucesión de componentes de U tal que $K = lím\ inf\ C_n$. Entonces $C(U)$ es abierto en $C(X)$, $\{C(C_n)\}_n$ es una sucesión de componentes de $C(U)$ y $lím\ inf\ C(C_n) \subset C(K)$.

Demostración.

Por el Lema 3.1, $C(U)$ es abierto. Por el Lema 3.3, $\{C(C_n)\}_n$ es una sucesión de componentes de $C(U)$.

Sea $A \in lím\ inf\ C(C_n)$. Por el Lema 3.4, $A \subset lím\ inf\ C_n = K$. Como $K \subset U$, tenemos que $A \in C(K)$ y $A \in C(U)$. Por tanto $lím\ inf\ C(C_n) \subset C(K) \subset C(U)$.

LEMA 3.6.

Sea $\{C_n\}_n$ una sucesión de subconjuntos de X, tal que para alguna $N \in \mathbb{N}$ se tiene que $C_N = C_{N+1} = \cdots$. Entonces $lím\ inf\ C_n = \overline{C_N}$.

Demostración.

$\subset$) Sea $b \in lím\ inf C_n$. Entonces, para toda $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geqslant N_0$ se tiene que $B_\varepsilon(b) \cap C_n \neq \emptyset$.

Tenemos que probar que $b \in \overline{C_N}$. Para esto, tenemos que mostrar que, para toda $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(b) \cap C_N \neq \emptyset$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $N_0 \in \mathbb{N}$ tales que, para toda $n \geqslant N_0$, se tiene que $B_\varepsilon(b) \cap C_n \neq \emptyset$. Sea $m = m\acute{a}x\{N_0, N\}$. Entonces $C_N = C_m$ y $B_\varepsilon(b) \cap C_m \neq \emptyset$. Por tanto $B_\varepsilon(b) \cap C_N \neq \emptyset$. Esto termina la prueba de que $b \in \overline{C_N}$.

$\supset$) Sea $b \in \overline{C_N}$. Entonces, para toda $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(b) \cap C_N \neq \emptyset$. Tenemos que probar que, para toda $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geqslant N_0$. $B_\varepsilon(b) \cap C_n \neq \emptyset$.

Entonces, para toda $\varepsilon > 0$, existe $N = N_0$ tal que, para toda $n \geqslant N_0 = N$, se tiene que $B_\varepsilon(b) \cap C_n \neq \emptyset$. De modo que, $b \in l\acute{\imath}m\ inf\ C_n$.

Por tanto $l\acute{\imath}m\ inf\ C_n = \overline{C_N}$.

LEMA 3.7.

Sean X un continuo que contiene un R^3-continuo K y $p_0 \in K$. Entonces X no es localmente conexo en p_0.

Demostración.

Sea K un R^3-continuo. Entonces existen un abierto U de X y una sucesión

$\{C_n\}_n$ de componentes de U, tales que $K \subset U$ y $lím\ inf\ C_n = K$.

Sabemos que $p_0 \in K = lím\ inf\ C_n$. Supongamos que X es localmente conexo en p_0.

Como U es abierto y $p_0 \in K \subset U$, entonces existe una vecindad V_{p_0} de p_0, tal que V_{p_0} es conexa y $V_{p_0} \subset U$. Como V_{p_0} es abierto, entonces existe $\varepsilon > 0$, tal que $B_\varepsilon(p_0) \subset V_{p_0}$.

Así que para $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geqslant N_0$, se tiene que $B_\varepsilon(p_0) \cap C_n \neq \emptyset$. Esto implica que $V_{p_0} \cap C_n \neq \emptyset$. De modo que $C_n \cup V_{p_0}$ es un subconjunto conexo de U y, como C_n es una componente, $V_{p_0} \subset C_n$. Así que, para cada n, $j \geqslant N_0$, se tiene que $C_n \cap C_j \neq \emptyset$. Entonces $C_{N_0} = C_{N_0+1} = \cdots$. Y por el Lema 3.6, se tiene que $lím\ inf\ C_n = \overline{C_{N_0}}$. Entonces $K = lím\ inf\ C_n = \overline{C_{N_0}}$.

Por el Teorema de los Golpes en la Frontera (ver [10, 20.1, p.625]), $\overline{C_{N_0}} \cap FrU \neq \emptyset$, además, para todo $b \in FrU$, se tiene que $b \notin U$, ya que U es abierto. Por tanto $\overline{C_{N_0}} \not\subseteq U$, de donde $K = \overline{C_{N_0}} \not\subseteq U$, lo que implica que $K \not\subseteq U$ lo que es un absurdo. Por tanto X no es localmente conexo en p_0.

LEMA 3.8.

Sean A y $B \in C(X)$, tales que $H(A, B) < \varepsilon$ y $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces existe una función continua e inyectiva $\alpha : [0,1] \to B_\varepsilon^{C(X)}(A)$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$.

Demostración.

Sean A y $B \in C(X)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces $A \cup B$ es conexo.

Ademas toda componente de $A \cup B$ intersecta tanto a A como a B. Así que, existen arcos ordenados, (ver [10, 1.8, p.59]).

$\beta_1 : [0, \frac{1}{2}] \to C(X)$ tal que $\beta_1(0) = A$, $\beta_1(\frac{1}{2}) = A \cup B$

$\beta_2 : [0, \frac{1}{2}] \to C(X)$ tal que $\beta_2(0) = B$, $\beta_2(\frac{1}{2}) = A \cup B$

Sea:

$$\alpha(t) = \begin{cases} \beta_1(t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta_2(1-t) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Como $\beta_1(t)$ y $\beta_2(t)$ son continuas y, además, para $t = \frac{1}{2}$ se tiene que $\beta_1(\frac{1}{2}) = \beta_2(\frac{1}{2}) = A \cup B$. Tenemos que $\alpha(t)$ es continua.

Ahora probaremos que, dado $t \in [0,1]$, se tiene que $\alpha(t) \subset B_\varepsilon^{C(X)}(A)$. Para esto veremos que, dado $\varepsilon > 0$, $H(A, \alpha(t)) < \varepsilon$. Es decir que, dado $\varepsilon > 0$, se tiene que $A \subset N(\varepsilon, \alpha(t))$ y $\alpha(t) \subset N(\varepsilon, A)$.

Como $H(A, B) < \varepsilon$, entonces $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$. Entonces para $t \in [0, \frac{1}{2}]$ se tiene que $A \subset \beta_1(t)$ y, por otra parte, para $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ se tiene que $B \subset \beta_2(t)$ y, como $A \subset N(\varepsilon, B)$, resulta que $A \subset N(\varepsilon, \beta_2(t))$. En cualquier caso, $A \subset N(\varepsilon, \alpha(t))$.

Para $t \in [0, 1]$ se tiene que $\alpha(t) \subset A \cup B$ y como $B \subset N(\varepsilon, A)$, se sigue que $\alpha(t) \subset N(\varepsilon, A)$.

Por tanto $H(A, \alpha(t)) < \varepsilon$. Así que $\alpha(t) \subset B_{\varepsilon}^{C(X)}(A)$.

Por tanto existe una trayectoria $\alpha : [0, 1] \to B_{\varepsilon}^{C(X)}(A)$, tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$.

Por 8.18 de [9, p.128] la imagen de α es un continuo de Peano y, por 8.23 de [9], ese continuo de Peano es arco conexo.

Por tanto también existe una función continua e inyectiva con las mismas propiedades.

Ahora daremos un ejemplo en el cual el continuo X contiene un R^3-continuo K y es tal que $C(K)$ no es un R^3-continuo en $C(X)$.

EJEMPLO 3.9.

Sea X el continuo representado en la figura 0.7. El continuo X consta de un triodo cuyos puntos extremos son p_1, p_2 y p_3 y tres sucesiones de arcos $\{C_{3n}\}_n$, $\{C_{3n+1}\}_n$ y $\{C_{3n+2}\}_n$ representadas por los colores azul, verde y rojo, respectivamente. Los arcos azules se pegan al triodo por el punto p_1 y tienden al subtriodo que tiene por puntos extremos a p_1, c y b. El comportamiento de los arcos rojos y de los verdes tiene una descripción similar.

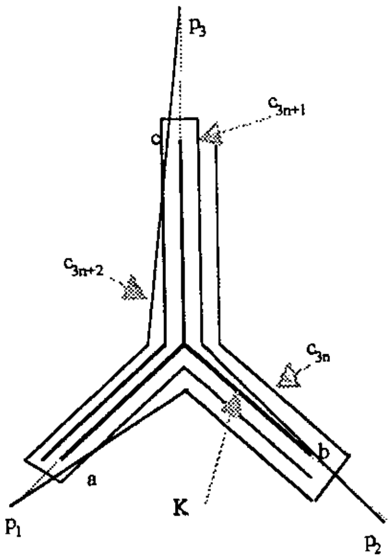

Figure 0.7:

Vamos a probar que el subtriodo K cuyos puntos extremos son a, b y c, es un R^3-continuo en X.

Sea U un subconjunto abierto de X, como en la figura 0.8.

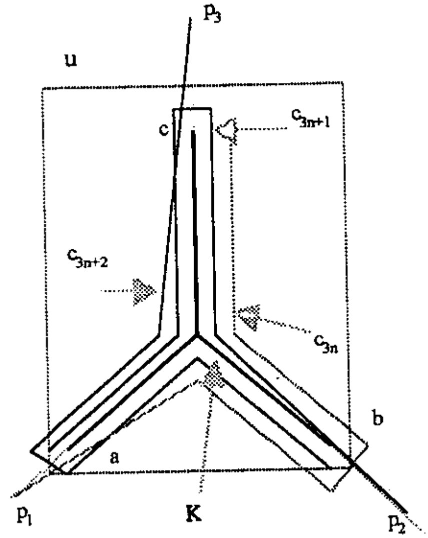

Figure 0.8:

Por construcción, los límites inferiores de las sucesiones $\{C_{3n}\}_n$, $\{C_{3n+1}\}_n$ y $\{C_{3n+2}\}_n$ son como se describen a continuación, (véase figura 0.9):

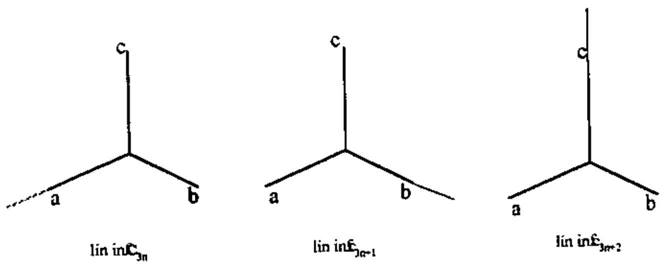

Figure 0.9:

Por tanto. $lím\ inf\ C_{3n} \cap lím\ inf\ C_{3n+1} \cap lím\ inf\ C_{3n+2} = K$, (véase figura 0.10):

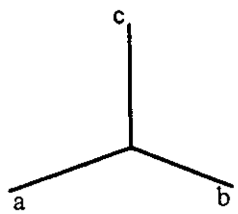

Figure 0.10:

Por tanto K es un R^3-continuo en X.

Ahora veremos que $C(K)$ no es un R^3 -continuo en X.

Sea T el triodo que tiene como puntos extremos e, f y g, (véase figura 0.11):

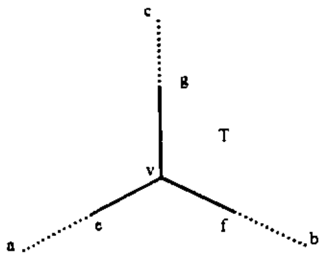

Figure 0.11:

Notemos que $T \subset K$ y, T es conexo. Así que $T \in C(K)$. Si probamos que $C(X)$ es localmente conexo en T, por el Lema 3.7 podremos concluir que $C(K)$ no es un R^3-continuo en $C(X)$.

Veamos pues que $C(X)$ es localmente conexo en T.

Sean $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{1}{2}d(e,v) = \frac{1}{2}d(g,v) = \frac{1}{2}(f,v)$ y, $S \in C(X)$ tal que $H(T,S) < \varepsilon$.

Entonces $S \subset N(\varepsilon,T)$. Observemos que $N(\varepsilon,T)$ tiene el siguiente aspecto, (véase figura 0.12):

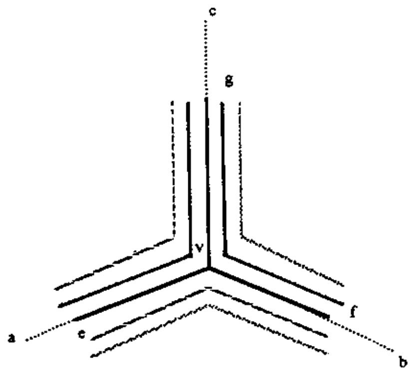

Figure 0.12:

Ya que S es conexo, tiene que estar en una de las componentes de esta nube. Si S no está contenido en el triodo dibujado T entonces S está contenido en uno de los arcos que se aproximan a dos de las patas del triodo y entonces $H(S,T) \geqslant \varepsilon$, lo que es absurdo. Por tanto S está contenido en el triodo

Si S no tiene a v, entonces S está contenido en una sola pata del triodo y $H(S,T) \geqslant \varepsilon$, lo que también es absurdo. Por tanto v $\in S$. De modo que $S \cap T \neq \emptyset$. Por el Lema 3.8, S y T se pueden conectar por un arco dentro de $B_\varepsilon(T)$.

Esto prueba que $B_\varepsilon(T)$ es conexa para toda $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña.

De manera que $C(X)$ es localmente conexa en T. Por tanto $C(K)$ no es un R^3-continuo de $C(X)$.

Ahora veremos que si el continuo X es C^* -suave entonces sucede que $C(K)$ es un R^3-continuo si K lo es.

TEOREMA 3.10.

Sea X un continuo, si X es C^*-suave y contiene un R^3-continuo K. Entonces $C(K)$ es un R^3-continuo en $C(X)$.

Demostración.

Por hipótesis X contiene un R^3-continuo K, entonces existe un abierto, U en X y una sucesión $\{C_n\}_n$, de componentes de U tales que $K \subset U$ y *lím inf* $C_n = K$.

Por el Lema 3.1 $C(U)$ es abierto. Por el Lema 3.3 $\{C(C_n)\}_n$ es una sucesión de componentes de $C(U)$ y $C(K) \subset C(U)$.

Probaremos que *lím inf* $C(C_n) = C(K)$.

$\subset$) Por el Lema 3.5, se tiene que *lím inf* $C(C_n) \subset C(K)$.

$\supset$) Sea $A \in C(K)$. Mostraremos que $A \in$ *lím inf* $C(C_n)$.

Supongamos que $A \notin$ *lím inf* $C(C_n)$, entonces existe $\varepsilon > 0$, tal que para toda $N \in \mathbb{N}$, existe $n > N$ tal que $B_\varepsilon(A) \cap C(C_n) = \emptyset$. De manera que existen números naturales $n_1 < n_2 <\ldots$, tales que para toda $k \in \{1, 2, \ldots\}$ se tiene que $B_\varepsilon(A) \cap C(C_{n_k}) = \emptyset$.

Como X es compacto podemos suponer que existe $C_0 \in C(X)$ tal que $\overline{C_{n_k}}$ converge a C_0.

Afirmamos que $A \subset C_0$.

Sea $a \in A$ y supongamos que $a \notin C_0$, entonces existe $\varepsilon_a > 0$ tal que $B_{\varepsilon_a}(a) \cap C_0 = \emptyset$.

Dado que $\overline{C_{n_k}}$ converge a C_0, entonces dado $\varepsilon_a > 0$ existe $l \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $k \geq l$ se tiene que $B_{\frac{\varepsilon_a}{2}}(a) \cap \overline{C_{n_k}} = \emptyset$

Por otra parte, como $a \in A \subset K = lím\ inf\ C_n$, resulta que para toda $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geqslant N$, se tiene que $B_\delta(a) \cap C_n \neq \emptyset$. Más aún, para toda $n \geqslant N$ se tiene que $B_\delta(a) \cap \overline{C_n} \neq \emptyset$.

En particular para $\varepsilon_a > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geqslant l$, y para toda $k \geqslant N$ se tiene que $B_{\frac{\varepsilon_a}{2}}(a) \cap \overline{C_{n_k}} \neq \emptyset$. Lo cual es un absurdo.

Por tanto $a \in C_0$. Esto prueba que $A \subset C_0$.

Por hipótesis X es C^*-suave. Entonces la función $C^* : C(X) \to C(C(X))$ definida como $C^*(B) = C(B)$ es continua en todo $C(X)$.

Como $\overline{C_{n_k}}$ converge a C_0 y, la función C^*es continua, entonces $C^*(\overline{C_{n_k}}) =$

$C(C_0)$. Además como $A \subset C_0$ se tiene que $A \in C(C_0)$. De manera que $A \in$ *lím inf* $C(\overline{C_{n_k}})$. De acuerdo con (ver [12, 2.2, p.13]), $A =$ *lím* A_{n_k}, donde para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_{n_k} \in C(\overline{C_{n_k}})$.

Probaremos que, de hecho, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geqslant N_0$, se tiene que $A_{n_k} \in C(C_{n_k})$.

Sea $\mathcal{U}^* = \{B \in C(X) : B \subset U\}$. Por el Lema 2.1, $\mathcal{U}^*$ es abierto en $C(X)$ y, como $A \in \mathcal{U}^*$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_{n_k} \in \mathcal{U}^*$ para toda $k \geqslant N_0$.

Dada $k \geqslant N_0$, $A_{n_k} \subset U \cap \overline{C_{n_k}}$. Ya que C_{n_k} es una componente de U, tenemos que C_{n_k} es cerrado en U. Esto implica que $C_{n_k} = U \cap \overline{C_{n_k}}$. De modo que $A_{n_k} \subset C_{n_k}$ para toda $k \geqslant N_0$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_{n_k}) < \varepsilon$.

Entonces $B_\varepsilon(A) \cap C(C_{n_k}) \neq \emptyset$. Esto contradice la elección de ε, y $n_1, n_2, \ldots$

Esto concluye la prueba de que $A \in$ *lím inf* $C(C_n)$ y, entonces también termina la demostración del teorema.

CAPITULO 4.

Funciones de Whitney

En este capítulo daremos unos ejemplos con los cuales veremos que:

Hay un continuo X que no contiene ningún R^3-continuo y el hiperespacio $C(X)$ no es contraíble.

La propiedad de no contener un R^3-continuo no es una propiedad reversible de Whitney.

La contractibilidad del hiperespacio no es una propiedad reversible de Whitney.

Finalmente veremos que para cada X continuo que contenga un R^3-continuo no existen funciones de Whitney confluentes para 2^X.

LEMA 4.1.

Sea $\{C_n\}_n$ una sucesión de subconjuntos de X. Entonces el *lím inf* C_n es un conjunto cerrado.

Demostración.

Para ver que $lím\, inf\ C_n$ es un conjunto cerrado basta probar que $\overline{lím\ inf\ C_n} \subset lím\, inf\ C_n$.

Sean $x \in \overline{lím\ inf\ C_n}$ y $\varepsilon > 0$, entonces $B_\varepsilon(x) \cap lím\ inf\ C_n \neq \emptyset$. Tomemos $y \in B_\varepsilon(x) \cap lím\ inf\ C_n$. Entonces $y \in B_\varepsilon(x)$. Como $B_\varepsilon(x)$ es un conjunto abierto de X, entonces existe $\delta > 0$, tal que $B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x)$ y, como también $y \in lím\ inf\ C_n$, entonces para δ, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geqslant N$, se tiene que $B_\delta(y) \cap C_n \neq \emptyset$.

Así que, para toda $n \geqslant N$, se tiene que $B_\varepsilon(x) \cap C_n \neq \emptyset$. De manera que $x \in lím\ inf\ C_n$.

Por tanto $\overline{lím\ inf\ C_n} \subset lím\ inf\ C_n$.

TEOREMA 4.2.

Sea X un continuo que contiene un R^3-continuo K. Entonces X no es contraíble.

Demostración.

Por hipótesis K es un R^3-continuo, entonces existen un subconjunto abierto

U de X tales que $K \subset U$ y una sucesión de componentes $\{C_n\}_n$ de U tal que *lím inf* $C_n = K$.

Supongamos que X es contríble, entonces $C(X)$ es contraíble. (ver [10, 16.7, p.535]). En el mismo Teorema 16.7 del libro [10] se muestra que entonces existe una función continua $H : C(X) \times [0,1] \to C(X)$ tal que, para toda $A \in C(X)$, $H(A,0) = A$, $H(A,1) = X$ y si $t_1 < t_2$ entonces $H(A,t_1) \subset H(A,t_2)$.

Tomemos $p \in K$, sea $G = \{t \in [0,1] : H(\{p\},t) \subset K\}$. Probaremos que $G \neq \emptyset$ y que G es un conjunto cerrado.

Por definición $H(\{p\},0) = \{p\} \subset K$, así que $G \neq \emptyset$.

Sea $t \in \overline{G}$. Entonces existe una sucesión $\{t_n\}_n$ en G, tal que t_n converge a t, como H es continua, entonces $H(\{p\},t_n)$ converge a $H(\{p\},t)$ y, como K es cerrado, entonces $H(\{p\},t) \subset K$. Por tanto G es cerrado.

Por tanto G es compacto y no vacío. Entonces podemos tomar $t_0 = máx\ G$. Aseguramos, que $t_0 < 1$, ya que si $t_0 = 1$, entonces, de la definición de G se tiene que $X = H(\{p\},1) \subset K \subset U$ lo que es un absurdo pues los R^3-continuos son subconjuntos propios del espacio ambiente.

Así que, $t_0 < 1$. Ya que $H(\{p\},t) \subset K \subset U$ y, como U es abierto, por el Lema 2.1 y la continuidad de H, existe $t_0 < t_1$ tal que $H(\{p\},t_0) \subset H(\{p\},t_1) \subset U$.

Por otra parte como $K = lím\ inf\ C_n$, entonces $p = lím\ p_n$ donde, para cada

$n \in \mathbb{N}$, $p_n \in C_n$; (ver [12, 2.2, p.13]). De manera que $\{p_n\} = H(\{p_n\}, 0) \subset H(\{p_n\}, t_1)$. Como U es abierto y $H(\{p_n\}, t_1)$ converge a $H(\{p\}, t_1)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geqslant N$, se tiene que $H(\{p_n\}, t_1) \subset U$. Ya que para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $H(\{p_n\}, t_1)$ es conexo y $H(\{p_n\}, t_1) \cap C_n \neq \emptyset$ y, como cada C_n es componente de U, concluimos que $H(\{p_n\}, t_1) \subset C_n$. De manera que *lím inf* $H(\{p_n\}, t_1) \subset$ *lím inf* $C_n = K$.

Como *lím inf* $H(\{p_n\}, t_1) = H(\{p\}, t_1)$, entonces $H(\{p\}, t_1) \subset K$ lo que es un absurdo, ya que t_0 es el máximo tal que $H(\{p\}, t_0) \subset K$.

Por tanto X no es contraíble.

EJEMPLO 4.3.

Existe un continuo X, tal que X no contiene ningún R^3-continuo y el hiperespacio $C(X)$ no es contraíble, (ver [2, Ejemplo 5, p.209]).

En el plano Euclidiano, consideremos los puntos $a = (0, 1)$, $b = (0, 0)$, $c = (0, -1)$ y, para toda $n \in \mathbb{N}$, hacemos $a_n = (2^{-3n}, 1)$, $b_n = (2^{-3n}, 0)$, $c_n = (2^{-(3n+1)}, -1)$ y $d_n = (2^{-(3n-1)}, -1)$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ hacemos $b_{n,m} = (2^{-3n}(1 - 2^{-(m+3)}), 0)$, $b'_{n,m} = (2^{-3n}(1 +$

$2^{-(m+3)}),0)$, $c_{n,m} = (2^{-(3n-1)}(1-2^{-(m+3)}),-1)$, $d_{n,m} = (2^{-(3n-1)}(1+2^{-(m+3)}),-1)$.

Entonces se tiene que a_n converge a a, b_n converge a b, c_n converge a c y para toda n fija se tiene que $b_{n,m}$ converge a b_n, $b'_{n,m}$ converge a b_n, $d_{n,m}$ converge a d_n, cuando m converge a ∞.

Para toda $n \in \mathbb{N}$ hacemos:

$Q_n = a_nb_n \cup b_nc_n \cup b_nd_n \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} a_nb_{n,m}c_{n,m}) \cup (\bigcup_{m=1}^{\infty} a_nb'_{n,m}d_{n,m})$.

Definimos $Y = aa_1 \cup ac \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n)$, y sea Y' = la imagen simétrica de Y con respecto al origen. Finalmente hacemos $X = Y \cup Y'$ (véase la figura 0.13):

X

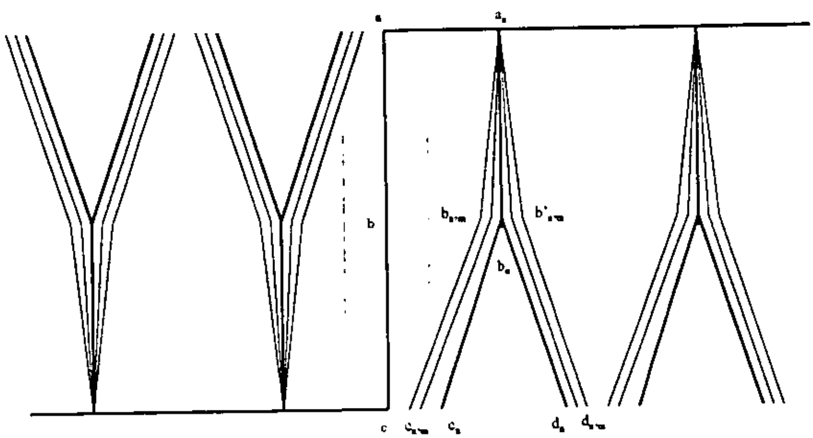

Figure 0.13:

Veremos que el continuo X no contiene R^3-continuos. Procederemos por contradicción.

Supongamos entonces que X contiene un R^3-continuo K. Por el Lema 3.7, K tiene que estar contenido en el conjunto de puntos de no conexidad local de X, el cual esta representado en la figura 0.14. Y entonces K tiene que estar contenido en una de las componentes de dicho conjunto.

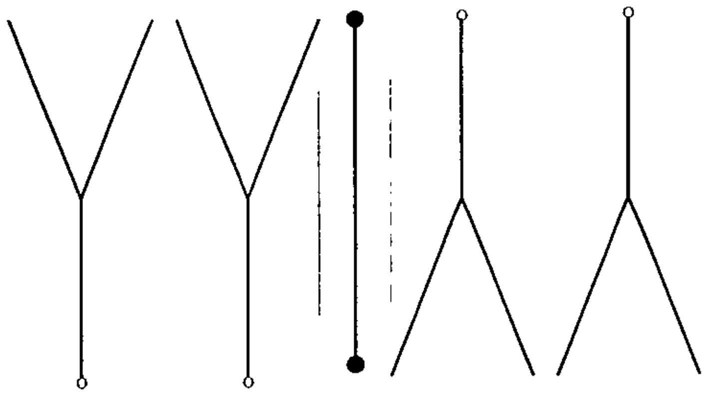

Figure 0.14:

Por definición, existen un abierto U en X, tal que $K \subset U$ y una sucesión $\{C_n\}_n$, de componentes de U tales que $lím$ inf $C_n = K$.

Si K está contenido en uno de los triodos de la derecha entonces, recortando a U si hace falta, podemos suponer que U tiene un aspecto como el de uno de los conjuntos representados en los siguientes conjuntos, (véase la figura 0.15):

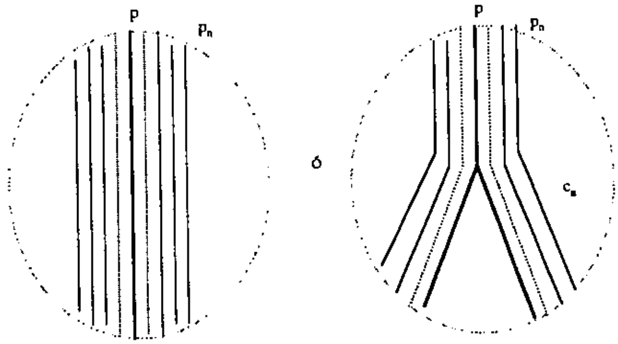

Figure 0.15:

Para cada C_n, tomemos el punto p_n de $\overline{C_n}$ que se encuentra más alto que los demás. Observemos que dicho punto no se encuntra en U y que la sucesión $\{p_n\}_n$ converge a un punto p. Por un lado $p \notin U$ y por el otro, $p \in lím \inf C_n = K \subset U$. Lo que es absurdo. Por tanto K no puede estar contenido en uno de los triodos de la derecha.

Los casos en que K se encuentra contenido en uno de los triodos de la izquierda o en el segmento límite son similares y también son imposibles.

Con esto concluimos que X no contiene R^3-continuos.

Ahora, probaremos que $C(X)$ no es contraíble.

Supongamos que $C(X)$ es contraíble. En la prueba de (ver [10, 16.7, p.535]), se muestra que entonces existe una función continua

$H : C(X) \times [0,1] \to C(X)$ tal que

$H(\{x\}, 0) = \{x\}$ para toda $x \in X$

Si $t > 0$ y $x \in X$, entonces $H(\{x\}, t) \neq \{x\}$

$H(\{x\}, 1) = X$, y si $t_1 < t_2$, entonces $H(\{x\}, t_1) \subset H(\{x\}, t_2)$.

Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney tal que $\mu(X) = 1$, por definición, μ es continua. Sea $b = (0,0) \in X$, (ver figura 0.16):

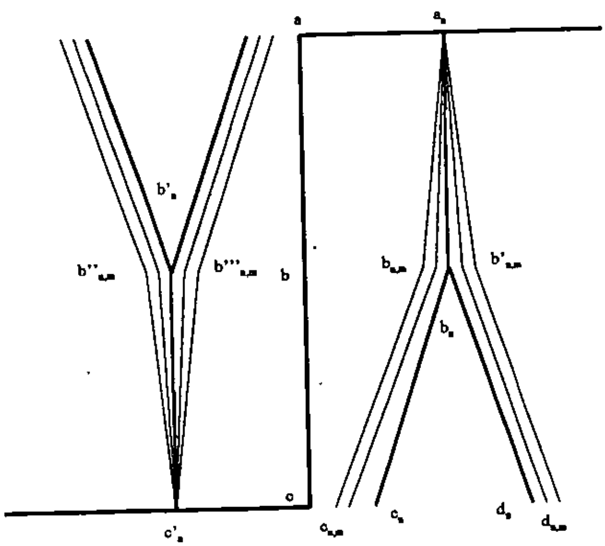

Figure 0.16:

Dada $t \in [0,1]$, consideremos el valor $\mu(H(b,t))$.

Sean a y c como en la figura 0.16 y $S_0 = mín\{\mu(arco\, ab), \mu(arco\, bc)\}$, entonces $0 < S_0 < 1$.

Como la función $t \mapsto \mu(H(b,t))$ es continua, $\mu(H(b,0)) = \mu(\{b\}) = 0$ y $\mu(H(b,1)) = \mu(X) = 1$, tenemos que existe $t_0 \in [0,1]$, tal que $\mu(H(b,t_0)) = \frac{S_0}{2}$.

Sea $A = H(b,t_0)$. Notemos que A es un subcontinuo de X que tiene a b, $A \neq \{b\}$ y $a, c \notin A$ (pues de lo contrario ab o $cb \subset A$ y, entonces, $S_0 \leqslant \mu(A)$, lo cual es absurdo). De manera que A es un subcontinuo (sub-arco) del *arco ac* y $\{b\} \notin A$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, observemos que $H(b_n,t_0) = \lim_{m\to\infty} H(b_{n,m},t_0) \subset arco\; a_nb_nc_n$. Por otro lado, tenemos que $H(b_n,t_0) = \lim_{m\to\infty} H(b'_{n,m},t_0) \subset arco\; a_nb_nd_n$. Por tanto $H(b_n,t_0) \subset arco\; a_nb_n$.

Por otra parte, tenemos que $H(b,t_0) = \lim_{n\to\infty} H(b_n,t_0) \subset \lim_{n\to\infty} a_nb_n = ab$. Por tanto $H(b,t_0) \subset arco\; ab$.

Pero como $X = Y \cup Y'$, en Y'se tiene que:

$H(b'_n,t_0) \subset arco\; b'_nc'_n$ y, también, $H(b,t_0) = \lim_{n\to\infty} H(b'_n,t_0) \subset \lim_{n\to\infty} b'_nc'_n = bc$. Por tanto $H(b,t_0) \subset arco\; bc$.

Esto muestra que $A = H(b,t_0) \subset arco\; ab$ y $A = H(b,t_0) \subset arco\; bc$.

Por tanto $A = \{b\}$ lo que es un absurdo.

Por tanto $C(X)$ no es contraíble.

EJEMPLO 4.4.

En el siguiente ejemplo (ver [11, Ejemplo 3.7, p.243]) se muestra un continuo X tal que:

a) X contiene un R^3-continuo, pero $\mu^{-1}(t)$ no contiene un R^3-continuo para ninguna $t \in (0, \mu(X))$.

b) X no es contraíble, pero $\mu^{-1}(t)$ es contraíble para toda $t \in (0, \mu(X))$.

Sean X_0 el segmento que une a $(-1,0)$ con $(1,0)$ en $\mathbb{R}^2$ y, para toda $n \in \mathbb{N}$, B_n el segmento que une a $(1,0)$ con $(0,-2^{-n})$, y A_n es el segmento que une a $(-1,0)$ con $(0,2^{-n})$.

Entonces $X = X_0 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$, (véase la figura 0.17):

X

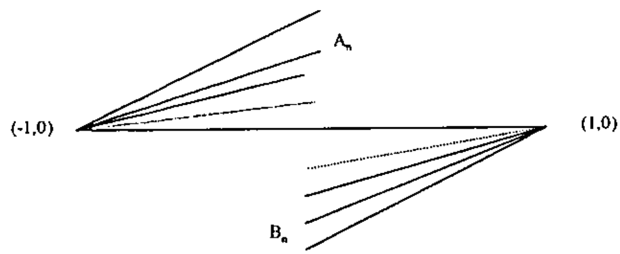

Figure 0.17:

Probaremos que $K = \{(0,0)\}$ es un R^3-continuo en X.

Sea $U = X - \{(-1,0),(1,0)\}$, entonces U es un abierto de X. Las componentes de U son los conjuntos $B_n - \{(1,0)\}$ y $A_n - \{(-1,0)\}$, además del conjunto $X_0 - \{(-1,0),(1,0)\}$. De manera que, si hacemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_{2n} = B_n - \{(1,0)\}$ y $C_{2n-1} = A_n - \{(-1,0)\}$, tenemos que las componentes de U son $X_0 - \{(-1,0),(1,0)\}, C_1, C_2, ...$ Observemos que $lím$ inf $C_n = \{(0,0)\}$. Por tanto $K = \{(0,0)\}$ es un R^3-continuo de X, (véase la figura 0.18):

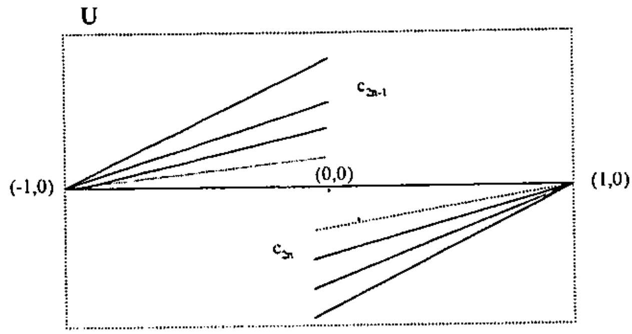

Figure 0.18:

Daremos una idea geométrica de por qué, dada una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,\infty)$ y dada $t \in (0, \mu(X))$, se tiene que $\mu^{-1}(t)$ no tiene R^3-continuos. De acuerdo con el Teorema 4.2, es suficiente con probar que $\mu^{-1}(t)$ es contraíble. En realidad, aunque esta afirmación es cierta para toda $t \in (0, \mu(X))$, sólo daremos un argumento geométrico para las t pequeñas. Para ser más precisos, supondremos que $t < \mu(A_n), \mu(B_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Primero observemos que, si A es un subarco de X tal que $\mu(A) > t$ entonces $C(A) \cap \mu^{-1}(t)$ es un arco. Esto resulta cierto porque si identificamos a A con el intervalo $[0,1]$ y hacemos la función de $C(A) \cap \mu^{-1}(t) = (\mu |_{C(A)})^{-1}(t)$ en $[0,1]$

dada por $B \to m\acute{\imath}n\,\text{de } B$, entonces obtenemos una función continua e inyectiva, así que su imagen es un subarco homeomorfo a $C(A) \cap \mu^{-1}(t)$.

Tomemos $A \in \mu^{-1}(t)$, como A es conexo, A tiene alguna de las siguientes posibilidades:

- $(-1,0) \in A$

- $(1,0) \in A$

- $A \subset A_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$

- $A \subset B_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$

- $A \subset [-1,1] \times \{0\}$.

De manera que:

$\mu^{-1}(t) = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup (\cup\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}) \cup (\cup\{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}) \cup \mathcal{C}_0$.

Donde $\mathcal{C}_i = \{A \in \mu^{-1}(t) : ((-1)^{i^o},0) \in A, i \in \{1,2\}\}$, $\mathcal{A}_n = \{A \in \mu^{-1}(t) : A \subset A_n\}$, $\mathcal{B}_n = \{A \in \mu^{-1}(t)\} : A \subset B_n\}$ y $\mathcal{C}_0 = \{A \in \mu^{-1}(t) : A \subset [-1,1] \times \{0\}\}$.

Por el comentario que hicimos antes, cada $\mathcal{A}_n$, cada $\mathcal{B}_n$ y $\mathcal{C}_0$ son arcos.

Los elementos de $\mathcal{C}_0$ que son límite de elementos de los $\mathcal{A}_n$ están contenidos en el lado izquierdo del eje Y, mientras que los elementos de $\mathcal{C}_0$ que son límite de elementos de los $\mathcal{B}_n$ están contenidos en el lado derecho del eje Y. Ya que $t > 0$, ningún elemento de $\mathcal{C}_0$ puede estar contenido a la vez en el lado negativo y en el lado positivo del eje Y. Esto muestra que ningún elemento de $\mathcal{C}_0$ es límite de elementos de los $\mathcal{A}_n$ y también límite de los elementos de los $\mathcal{B}_n$. Entonces $\mu^{-1}(t)$ puede ser representado de la siguiente forma, (véase la figura 0.19):

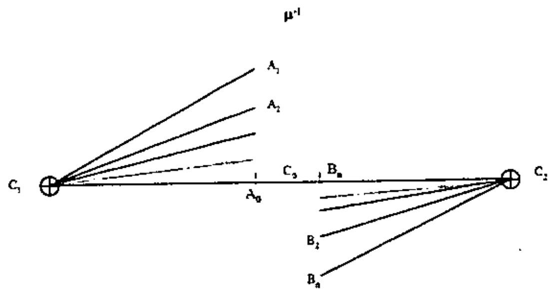

Figure 0.19:

Aquí A_0 representa el segmento de la forma $[a, 0] \times \{0\}$ que pertenece a $\mu^{-1}(t)$, y B_0 al segmento de la forma $[0, b] \times \{0\}$ que pertenece a $\mu^{-1}(t)$. El segmento que une a A_0 con B_0 representa a todos los elementos de $\mu^{-1}(t)$ que tienen al punto $(0, 0)$.

Alargando al segmento A_0B_0 (usándolo como si fuera una liga), podemos empujar continuamente a todos los segmentos $\mathcal{A}_n$ hacia la izquierda y a todos los $\mathcal{B}_n$ hacia la derecha.

Entonces el nivel $\mu^{-1}(t)$ puede ser deformado en el siguiente espacio, (véase la figura 0.20):

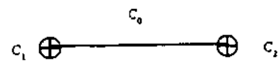

Figure 0.20:

Para poder contraer este espacio, necesitamos que tanto C_1 como C_2 sean contraíbles. Concentrémonos en C_1. Una manera de convencernos de que C_1 es contraíble es poniéndo al espacio X de la siguiente manera, (véase la figura 0.21):

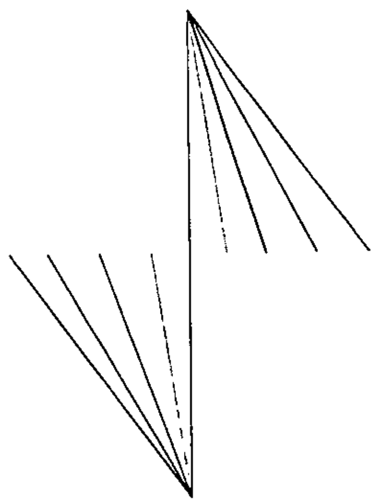

Figure 0.21:

Dejando que la gravedad actué continuamente sobre los elementos de C_1. Esto quiere decir que, si tomamos un elemento $A \in C_1$, podemos pensar que A está hecho de un material como gelatina y dejar que la gravedad actúe por un día hasta que el continuo deje de moverse. Como A es de gelatina, a medida que se mueve no pierde el tamaño ni se desconecta por lo que siempre permanece en C_1 (véase la figura 0.22):

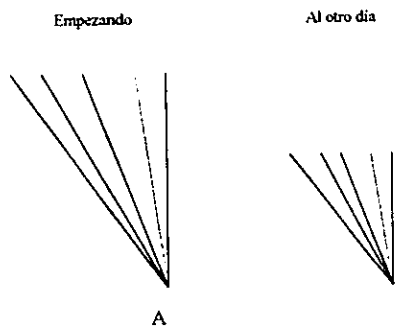

Figure 0.22:

Entonces todos los elementos de C_1 terminan en el mismo elemento, precisamente el elemento de C_1 que tiene todas sus patas del mismo tamaño.

El movimiento que hemos descrito nos da una deformación de C_1 que empieza en la identidad y termina en una función constante. Por tanto C_1 es contraíble.

Por supuesto que todo esto se puede poner en fórmulas pero pensamos que esta descripción, además de agradable, es convincente.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Hasta este momento ya podemos llevar a $\mu^{-1}(t)$ a un espacio de la forma, (véase la figura 0.23):

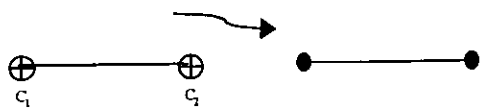

Figure 0.23:

Que es precisamente un arco y que ya se puede deformar a un punto.

Por tanto $\mu^{-1}(t)$ es contraíble.

Vamos a terminar este capítulo discutiendo la influencia de los R^3-continuos en la no existencia de funciones de Whitney que sean confluentes para 2^X.

Para empezar, se sabe (ver [7, 19.9, p.160]) que las funciones de Whitney definidas en $C(X)$ son monótonas. La utilidad que tiene éste hecho es que entonces los niveles de Whitney son continuos e inducen descomposiciones agradables de $C(X)$ en subcontinuos. Por otra parte, se sabe que se pueden construir funciones de Whitney para 2^X que no son monótonas ¡para cualquier continuo X!, (ver[7, 24.2, p.208]). También se sabe que, para algunos continuos X es posible construir funciones de Whitney para 2^X que sí son monótonas, sin embargo, hay algunos continuos que no admiten tales funciones. Entre ellos están los que contienen R^3-continuos, como veremos en la segunda parte de este capítulo.

LEMA 4.5.

Sean Z un espacio métrico compacto y $P, Q \in 2^Z$. Entonces P y Q pertenecen a la misma componente de 2^Z si y sólo si para cada componente C de Z la condición $P \cap C \neq \emptyset$ es equivalente a la condición $Q \cap C \neq \emptyset$.

Para la demostración del Lema 4.5 necesitaremos el siguiente Teorema, que es una consecuencia del resultado que se conoce como el Teorema del Cable Cortado, (ver [9, 5.2, p. 72])

TEOREMA 4.6.

Sean Z un espacio métrico compacto, C una componente de Z y P un subconjunto cerrado de Z tal que $C \cap P = \emptyset$. Entonces existen dos cerrados ajenos H y K de Z, tales que $C \subset H$, $P \subset K$ y $Z = H \cup K$.

Ahora probaremos el Lema 4.5.

$\Rightarrow$) Supongamos que existe una componente C de Z tal que $P \cap C = \emptyset$ y $Q \cap C \neq \emptyset$. Por el Teorema 4.6, existe un subconjunto cerrado y abierto H de Z tal que $C \subset H$ y $P \cap H = \emptyset$.

Sean $\mathcal{A}_1 = \{A \in 2^Z : A \subset Z - H\}$ $\mathcal{A}_2 = \{A \in 2^Z : A \cap H \neq \emptyset\}$. Entonces $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son subconjuntos abiertos en 2^Z. Aseguramos que $P \in \mathcal{A}_1$ y $Q \in \mathcal{A}_2$.

$P \in \mathcal{A}_1$ ya que $P \cap H = \emptyset$ implica $P \subset Z - H$. Por otra parte $Q \in \mathcal{A}_2$ ya que $Q \cap C \neq \emptyset$ y $C \subset H$. Entonces $Q \cap H \neq \emptyset$.

Afirmamos que $2^Z = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

Sea $A \in 2^Z$. Entonces $A \subset Z$. De manera que si $A \cap H \neq \emptyset$. Entonces $A \in \mathcal{A}_2$ y si $A \cap H = \emptyset$ entonces $A \subset Z - H$. Así que $A \in \mathcal{A}_1$.

Por otra parte $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$.

Por tanto P y Q no pertenecen a la misma componente lo cual es un absurdo. En forma similar se obtendría una contradicción de suponer que hay una componente C de Z tal que $P \cap C \neq \emptyset$ y $Q \cap C = \emptyset$.

Por tanto, toda componente C de Z satisface que $P \cap C \neq \emptyset$ si y sólo si $Q \cap C \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$) Sea $Z_1 = \bigcup\{C : C$ es componente de Z y $C \cap P \neq \emptyset\} = \bigcup\{C : C$ es componente de Z y $C \cap Q \neq \emptyset\}$.

Primero probaremos que Z_1 es cerrado. Tomemos un punto $p \in \overline{Z_1}$ y supongamos que $p \notin Z_1$. Ya que $Z_1 \subset Z$ y Z es cerrado, tenemos que $p \in Z$. Sea D la componente de Z que tiene a p. Ya que $p \notin Z_1$, tenemos que $D \cap P = \emptyset$. Por el Teorema del Cable Cortado (Teorema 4.6), existen dos subconjuntos cerrados y ajenos H y K de Z tales que $D \subset H$ y $P \subset K$. Dada una componente C de Z tal que $C \cap P \neq \emptyset$, tenemos que $C \subset H \cup K$ y $C \cap K \neq \emptyset$. De manera que $C \subset K$. Esto prueba que $Z_1 \subset K$ y, como K es cerrado, $\overline{Z_1} \subset K$. De modo que $p \in H \cap K$, lo que es absurdo. Con esto concluimos que Z_1 es cerrado.

Dada una componente E de $Z_1 \subset Z$, existe una componente C de Z tal que $E \subset C$. Dada $x \in E$, x está en alguna componente de Z que intersecta a P. Pero la única componente de Z que tiene a x es C. De manera que $P \cap C \neq \emptyset$. Esto implica que $C \subset Z_1$. Y como E es componente de Z_1, obtenemos que $C \subset E$. Por tanto $E = C$ y $E \cap P \neq \emptyset$.

Hemos mostrado que Z_1 es cerrado y todas sus componentes intersectan a P. De manera que hay un arco ordenado α de P a Z_1,(ver [7, 15.3]). Observemos que todos los elementos de tal arco pertenecen a 2^Z. Similarmente, hay un arco ordenado de Q a Z_1 (contenido también en 2^Z). Uniendo los dos arcos ordenados tenemos un conexo en 2^Z que tiene a P y a Q. Esto termina la prueba del Lema.

TEOREMA 4.7.

Sea X un continuo que contiene un R^3-continuo. Entonces no existen funciones de Whitney que sean confluentes para 2^X.

Demostración.

Sea X el continuo que contiene un R^3-continuo K. Entonces existen un subconjunto abierto U de X tal que $U \subset X$ y una sucesión $\{C_n\}_n$ de componentes de U tal que $\textit{lím} \inf C_n = K$, $K \subset U$ y $K \neq X$.

Elegimos $p \in K$ por (ver [12, 2.2, p.13]), podemos elegir puntos $p_n \in C_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ tales que $\textit{lím}\ p_n = p$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $A_n = \{p, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$. Entonces A_n es un subconjunto compacto de X y es claro que $\textit{lím}\ A_n = \{p\}$.

Sea μ una función de Whitney para 2^X fija y, como el continuo X es un espacio normal, entonces existe un subconjunto abierto V de X tal que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Sea $N \geqslant 1$ tal que $p_n \in \overline{V}$ para toda $n \geqslant N$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea D_n una componente de $\overline{V}$ tal que $p_n \in D_n$. También sea D_0 la componente de $\overline{V}$ que contiene a p.

Dado $x \in Fr(\overline{V})$, tenemos que $x \notin K = \textit{lím} \inf C_n$. De manera que existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $\overline{B_{2\varepsilon_x}(x)} \cap C_n = \emptyset$ para una infinidad de n's (pues de lo contrario todas las vecindades de x intersectarían a casi todos los C_n y esto no es posible porque $x \notin lím\inf C_n$). También podemos suponer que $p \notin \overline{B_{2\varepsilon_x}(x)}$.

Por la compacidad de $Fr(\overline{V})$, existen $m \in \mathbb{N}$ y puntos $x_1, x_2, ..., x_m \in Fr(\overline{V})$ tales que $Fr(\overline{V}) \subset B_{\varepsilon_{x_1}}(x_1) \cup ... \cup B_{\varepsilon_{x_m}}(x_m)$.

Definimos $\varepsilon_0 = mín\{\varepsilon_{x_1}, ..., \varepsilon_{x_m}\}$. Tomando ε_0 más pequeña si hace falta, podemos suponer que $B_{\varepsilon_0}(p) \subset V - [\overline{B_{\varepsilon_{x_1}}(x_1)} \cup ... \cup \overline{B_{\varepsilon_{x_m}}(x_m)}]$.

Sea $\mathcal{B} = \{A \in 2^X : \text{diám}(A) \geqslant \varepsilon_0\}$. Ya que la función diámetro es continua, tenemos que $\mathcal{B}$ es un subconjunto cerrado de 2^X y, por tanto, $\mathcal{B}$ es compacto. Observemos que $\mathcal{B}$ no contiene conjuntos de un sólo punto. De manera que $t = mín\{\mu(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es un número positivo.

Supongamos que la función μ que habíamos escogido es confluente. Ya que $lím(\mu(A_n)) = 0$, tenemos que existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_N) \leqq \frac{t}{2}$. Sea $\mathcal{C}$ la componente de $\mu^{-1}([0, \frac{t}{2}])$ que contiene a A_N. Entonces $0 \in \mu(\mathcal{C})$. Así que existe un punto $z \in X$ tal que $\{z\} \in \mathcal{C}$. Si existiera $A \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, tendríamos que $\mu(A) \leqq \frac{t}{2} < t \leqq \mu(A)$, lo que es absurdo y muestra que $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Ya que $A_N \notin \mathcal{B}$, entonces $\text{diám}(A_N) < \varepsilon_0$, tenemos que $A_N \subset B_{\varepsilon_0}(p) \subset V$. Así que $A_N \in 2^{\overline{V}}$.

Sea $\mathcal{M}$ la componente de $2^{\overline{V}}$ tal que $A_N \in \mathcal{M}$. Por el Lema 4.5, tenemos que $\mathcal{M} = \{A \in 2^{\overline{V}} : A \cap D_n \neq \emptyset$ si y sólo si $n \geqslant N$ o $n = 0\}$.

Vamos a ver que no es posible que $\mathcal{C} \subset 2^{\overline{V}}$. Supongamos, por el contrario, que

$\mathcal{C} \subset 2^{\overline{V}}$. Ya que $\mathcal{C}$ es conexo, obtenemos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$. Así que $\{z\} \in \mathcal{M}$. De aquí que $z \in D_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $z \in C_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, así que $C_1 = C_2 = \cdots$. De aquí que $K = lím \inf C_n = \overline{C_1}$. Entonces $\overline{C_1} \subset U$. No es posible que $U = X$, pues de lo contrario su única componente es él mismo y entonces $C_n = X$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Esto nos daría que $K = X$ lo cual no se permite por definición de R^3-continuo. Entonces $U \neq X$, de manera que podemos aplicarle el Teorema de los Golpes en la Frontera (ver [12, 5.2, p.43]) a C_1 y a U y obntener que $\overline{C_1} \cap FrU \neq \emptyset$. Pero habíamos concluído que $\overline{C_1} \subset U$, lo que nos da que $U \cap FrU \neq \emptyset$. Esto es absurdo pues U es abierto. Por tanto $\mathcal{C} \not\subset 2^{\overline{V}}$.

Entonces $2^{\overline{V}} \cap \mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado, no vacío y propio de $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{D}$ la componente de $2^{\overline{V}} \cap \mathcal{C}$ que tiene a A_N. Podemos aplicar el Teorema de los Golpes en la Frontera y deducir que existe un elemento $A \in \mathcal{D} \cap Fr_{\mathcal{C}}(2^{\overline{V}} \cap \mathcal{C})$. Si ocurriera que $A \subset \text{int}(\overline{V})$, entonces, $\{B \in 2^{\overline{V}} : B \subset \text{int}(\overline{V})\} \cap \mathcal{C}$ es un abierto de $\mathcal{C}$, contenido en $2^{\overline{V}} \cap \mathcal{C}$, que tiene al elemento A. Esto contradice el hecho de que $A \in Fr_{\mathcal{C}}(2^{\overline{V}} \cap \mathcal{C})$ y prueba que $A \not\subset$ int $(\overline{V})$. Por otra parte $A \subset \overline{V}$, de modo que existe un punto $q \in A \cap Fr(\overline{V})$.

Como $A \in \mathcal{C}$, A no puede estar en $\mathcal{B}$, así que diám $A < \varepsilon_0$. Ya que $\mathcal{D}$ es un subconjunto conexo de $2^{\overline{V}}$ y $A_N \in \mathcal{D}$, tenemos que $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$. De manera que $A \cap D_n \neq \emptyset$, para toda $n \geqslant N$ y $A \cap D_0 \neq \emptyset$.

Como $q \in Fr(\overline{V})$, existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $q \in B_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$. Entonces $A \subset B_{\varepsilon_0}(q) \subset B_{\varepsilon_0+\varepsilon_{x_i}}(x_i) \subset B_{2\varepsilon_{x_i}}(x_i)$. De manera que $B_{2\varepsilon_{x_i}}(x_i) \cap D_n \neq \emptyset$ para toda $n \notin \mathbb{N}$. Como D_n es un subconjunto conexo de U e intersecta a C_n en p_n, tenemos que $D_n \subset C_n$. Por tanto $B_{2\varepsilon_{x_i}}(x_i) \cap C_n \neq \emptyset$ para toda $n \geqslant N$. Pero el número ε_{x_i} había sido escogido precisamente con la propiedad de que $B_{2\varepsilon_{x_i}}(x_i)$ dejara de intersectar a una infinidad de C_n.

Esta contradicción completa la prueba de que μ no es confluente.

Bibliografía.

[1] B. S. Baike, K.Hur y C.J. Rhee, On spaces without R^i-sets and contractibility, J. Korean Math. Soc., 34 (1997), 309-319.

[2] W. J. Charatonik, R^i-continua and hyperspaces, Top. Appl. 23 (1986) 207-216.

[3] S. T. Czuba, R^i-continua and contractibility of dendroids, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., 27 (1979), 299-302.

[4] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Boston 1966.

[5] K. Hur y C. J. Rhee, On spaces without R^i-continua, Bull. Korean Math. Soc., 30 (1993), 295-299.

[6] A. Illanes, R^3-continua in hyperspaces, Houston J. Math., 20 (1994), 529-538.

[7] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., Hyperspaces, fundamentals and recent advances, Pure and Applied Mathematics, a Series of Monographs and Textbooks 216, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel 1999.

[8] I. S. Kin, R. S. Kin y C. J. Rhee, W-regular convergence of R^i-continua, Bull. Korean Math. Soc., 31 (1994), 105-113.

[9] S. B. Nadler, Jr., Continum Theory, Pure and Applied Mathematics, a

Series of Monographs and Textbooks 158, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel 1999.

[10] S. B. Nadler, Jr., Hyperspaces of sets, Pure and Applied Mathematics, a Series of Monographs and Textbooks 49, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel 1978.

[11] S. B. Nadler, Jr., Whitney-reversible properties, Fund. Math. 109 (1980) 235-248.

[12] Notas de clase (no publicadas), Alejandro Illanes.