



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GAS DE BOSONES ATRAPADOS POR POTENCIALES ARMONICOS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
F I S I C O
P R E S E N T A :
FRANCISCO JAVIER SEVILLA PEREZ



DIRECTORES DE TESIS: DR. MANUEL DE LLANO DE LA GARZA
DR. MIGUEL ANGEL SOLIS ATALA



281455

FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"GAS DE BOSONES ATRAPADOS POR POTENCIALES ARMONICOS"

realizado por SEVILLA PEREZ FRANCISCO JAVIER

con número de cuenta 9128026-2 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Propietario DR. MIGUEL ANGEL SOLIS ATALA

Propietario DR. MANUEL DE LLANO DE LA GARZA

Suplente DR. GERARDO CARMONA RUIZ

Suplente DR. RAUL EZQUIVEL SIRVENT. *Raul Sirvent Requena*

Suplente M. EN C. MARCELA DOLORES GREYHER GONZALEZ *Marcela Grether*

Consejo Departamental de Física.

Patricia Goldstein Menache
DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

CONTENIDO

Dedicatoria	i
Agradecimientos	ii
Resumen	iii
1 Introducción	1
2 Gas Ideal de Bosones	6
2.1 Temperatura crítica	9
2.2 Fracción condensada	10
2.3 Energía interna	11
2.4 Calor específico	12
2.5 Ecuación de estado	14
2.6 Entropía	15
2.7 Potencial químico	17
3 Bosones en d dimensiones y relación energía-momento generalizada	19
3.1 Relación de dispersión generalizada	19
3.2 Temperatura crítica	19
3.3 Fracción condensada	21
3.4 Energía interna	21
3.5 Calor específico C_V	22
3.6 Presión	25
3.7 Entropía	26
3.7 Potencial químico	28
4 Bosones tridimensionales atrapados por potenciales armónicos	29
4.1 Bosones 3D atrapados por 3 osciladores armónicos	29
4.2 Bosones 3D atrapados por 2 osciladores armónicos	39
4.3 Bosones 3D atrapados por 1 oscilador armónico	46
4.4 Masa efectiva y densidad de partículas	53
5 Conclusiones	55
Apéndice A Integral de Bose	57
Apéndice B Integral de volumen sobre la esfera d -dimensional	60
Apéndice C Integral de volumen en el espacio k	62
Lista de figuras	64
Lista de tablas	65
Referencias	66

Dedicatoria

Dedico este trabajo a todas las personas que me brindaron su apoyo y confianza para su realización.

Especialmente a mis padres *Josefina Pérez* y *Javier Sevilla*, mis ejemplos, que siempre creyeron en mí.

A mis hermanos *Edgar* y *Andrea* que me animaron en todo momento.

A *Aurora Carreño* fuente de mi inspiración.

A toda mi familia.

A mis amigos.

Agradecimientos

Quiero aprovechar la oportunidad para dar las gracias muy especiales a los Drs. Miguel Ángel Solís Atala y Manuel de Llano de la Garza, por la confianza, amistad y dirección tan profesional que los distingue, la dedicación, motivación y su disposición académica que convirtió mi trabajo en una interesante experiencia.

A los Drs. Gerardo Carmona, Raúl Esquivel y a la Mtra. Marcela Grether quienes aceptaron con gusto formar parte del jurado, sugiriendome comentarios que han enriquecido la presentación final de este trabajo.

Al departamento de Física que me asignó a tan distinguido Jurado.

Al Instituto de Física e Instituto de Investigaciones en Materiales de la UNAM el haberme aceptado como estudiante Asociado y así mismo disponer de sus instalaciones y servicios durante la elaboración de esta tesis.

Por último, quiero agradecer a Fundación UNAM y CONACyT por el apoyo económico otorgado a través de beca de tesis de licenciatura.

RESUMEN

Nos proponemos describir las propiedades de un gas de N -bosones sin interacción entre ellos pero atrapados por potenciales externos tipo oscilador armónico unidireccionales y mutuamente perpendiculares entre sí, los cuales restringen el espacio accesible al gas. En particular, consideramos un gas de bosones tridimensional sobre el que actúan uno, dos o tres potenciales de oscilador armónico perpendiculares entre sí que restringen al gas a casi dos, casi una o casi cero dimensiones, respectivamente. Empezamos resumiendo las propiedades de un gas ideal en 3D de bosones para luego extender la descripción a un gas de bosones en d dimensiones y con una relación energía-momento, o relación de dispersión, generalizada de tal forma que la energía de cada partícula es proporcional al momento elevado a una potencia s positiva. Encontramos que las propiedades del sistema dependen, además de las variables termodinámicas, del cociente d/s . Posteriormente nos avocamos al sistema de nuestro interés donde investigamos la existencia de la condensación Bose-Einstein y calculamos la temperatura crítica además de la fracción de partículas condensadas en el estado de momentum cero, como función de la temperatura. Se reporta la densidad de estados y la energía interna entre otras propiedades termodinámicas. El calor específico muestra un salto típico de una transición de segundo orden cuando consideramos tres o dos osciladores armónicos y desaparece para un solo oscilador. Pero lo realmente novedoso es que nuestro gas de bosones tridimensional atrapado por uno, dos o tres osciladores armónicos externos, se comporta como un gas ideal de bosones en cuatro, cinco o seis dimensiones respectivamente, pero con una masa efectiva que tiende a cero en el límite termodinámico.

Capítulo 1

Introducción

Tres hechos relativamente recientes nos motivan y guían para realizar el presente trabajo: la obtención en laboratorio de la condensación de Bose-Einstein [1, 2], el descubrimiento de la superconductividad de alta T_c [3] y el creciente interés por las nanoestructuras [4]-[9].

La condensación de Bose-Einstein es un fenómeno cuántico cuya importancia en muchas áreas de la física ha crecido desde que por primera vez la predijera Albert Einstein en 1925 [10, 11]. Este fenómeno sólo ocurre para partículas cuyo “espín” total es un múltiplo entero de \hbar y obedecen una estadística especial, la de Bose-Einstein (BE). A estas partículas especiales se les llama “bosones” y tienen la característica de que cualquier número de ellas pueden acceder a uno cualquiera de sus niveles de energía. Cuando el número de bosones que se encuentran en el estado de energía más bajo es del orden del número total de bosones decimos que el sistema ha sufrido una condensación BE. Entonces el sistema manifiesta un comportamiento muy distinto al cual estamos acostumbrados a observar en los sistemas que nos rodean, por ejemplo, su índice de refracción es enorme [12] tal que la luz se mueve en el condensado a una velocidad nunca imaginada de unos cientos de metros por segundo (la velocidad de la luz en el vacío es aproximadamente 300 000 km/s), etc. Para 1937 Kapitza [13] descubre la superfluidez del helio cuatro líquido y en 1938 London [14] propone que ésta es una manifestación macroscópica de la condensación BE. Posteriormente, a principios de los años noventa la condensación BE fue detectada en excitones de semiconductores [15]. Sin embargo, fue necesario esperar 70 años para que en el labo-

ratorio se pudiera generar un gas de bosones con la posibilidad de condensarse. Aunque el candidato idóneo era el gas de hidrógeno atómico polarizado [10] por su masa ligera e interacción débil entre ellos, en 1995 grupos en JILA y la Universidad de Boulder Colorado USA, obtuvieron por primera vez la condensación de Bose-Einstein en un gas diluido de átomos de rubidio (^{37}Rb) confinados en el espacio por un campo magnético inhomogéneo [16]. Posteriormente este experimento fue reproducido con átomos de litio (^7Li) polarizados [17] en el Departamento de Física de la Universidad de Rice en Houston Texas y más tarde en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) con átomos de sodio (^{11}Na) [18]. La manera en que se obtiene el condensado es mediante un previo enfriamiento de un gas vía LASER, atrapándolos con campos magnéticos inhomogéneos y superenfriándolos evaporativamente [2]. Un resumen del proceso de atrapamiento de átomos puede ser consultado en la página web <http://www.colorado.edu/physics/2000/bec/>.

La obtención de condensado de Bose-Einstein en el laboratorio ha renovado el interés por el estudio teórico de gases bosónicos sujetos a un potencial externo, en particular el potencial armónico, y con interacción entre ellos.

Por otro lado, aunque la superconductividad fue descubierta por K. Onnes en 1911, no fue sino hasta 1986 que Bednorz and Müller [21] reportaron el primer cuprato superconductor de alta T_c (LaBaCuO) por lo que en 1987 les otorgaron el Premio Nobel de Física "por su importante contribución en el descubrimiento de la superconductividad en los materiales cerámicos". Este descubrimiento abrió la posibilidad de acceder a superconductores con temperaturas críticas superiores a la temperatura del nitrógeno líquido a presión ambiente. En 1987 el equipo de C.Y. Chu [22] de la Universidad de Houston corroboraron el hallazgo de Bednorz y Müller y extendieron las investigaciones a superconductores cuya temperatura de transición superconductora es de 92K (-181C),

este material está compuesto por óxido de itrio, bario y cobre $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$. Parecería que la simetría "planar" de la estructura cristalina del material es la responsable de esta alta temperatura de transición superconductor [23]. Lo anterior ha originado replantearse las teorías de superconductividad para dos, una y dimensiones intermedias.

Aunque la CBE y la superconductividad parecieran ser dos fenómenos distantes ya que el primero se da entre bosones y el otro se origina entre fermiones (electrones, huecos, ...), no lo son tanto pues las interacciones entre fermiones propicia la formación de bosones compuestos que pueden condensarse y manifestarse como superconductividad. Por ejemplo, recientemente se ha vinculado el efecto Hall cuántico con la superconductividad [24] en donde electrones atrapados en dos dimensiones forman bosones compuestos.

Los avances tecnológicos en el confinamiento de partículas permiten tener sistemas en dos, una o cero dimensiones [4, 5] a tal grado que los conocidos puntos cuánticos (quantum dots: electrones confinados a estructuras que pueden considerarse como puntos) se comportan como átomos naturales, los cuales pueden llevar al diseño de nuevos dispositivos electrónicos y ópticos [7, 9]. El control que se tiene para el confinamiento de partículas es tan alto que se puede tener un solo electrón en uno de dichos puntos cuánticos [8]. Los sistemas confinados presentan propiedades electrónicas muy peculiares a las que se pone mucha atención (por ejemplo los estudios hechos en nanotubos de carbono [6]) por las insospechadas aplicaciones tecnológicas que se esperan realizar.

En los tres fenómenos referidos: CBE, superconductividad de alta T_c y nanoestructuramiento, se destaca el confinamiento de partículas fermiónicas o bosónicas, cuyas propiedades dependen fuertemente de los potenciales confinantes. Estos potenciales confinantes externos pueden desarrollarse en serie alrededor del punto de equilibrio y en primera aproximación quedarnos con el término de orden cuadrático, es decir, dichos

potenciales pueden aproximarse como potenciales de tipo oscilador armónico.

Debido al interés por el fenómeno de la condensación BE, en esta tesis presentamos los resultados obtenidos de calcular las propiedades termodinámicas (temperatura de condensación de Bose-Einstein, fracción del condensado, energía interna, calor específico, presión, entropía, etc.) de un gas de bosones sometidos a distintos potenciales. El tipo de potencial se refleja en la forma de la expresión para la relación de dispersión energía-momento, aquí consideramos como potenciales confinantes los siguientes: la caja de potencial y potenciales de tipo oscilador armónico unidimensionales en 1, 2 y 3 direcciones mutuamente perpendiculares.

En el Capítulo 2 resumimos las propiedades termodinámicas para un gas libre de bosones en tres dimensiones, además de dar la temperatura crítica y la fracción del condensado como función de la temperatura. En un gas real, las interacciones entre las partículas son de extrema importancia, sin embargo atacamos problemas de partículas no interactuantes donde se puede entender la naturaleza del fenómeno.

En el Capítulo 3 se hace una generalización para un gas de bosones en $d > 0$ dimensiones y una relación de dispersión del tipo $\varepsilon_k = c_s k^s$.

En el Capítulo 4 se calculan las propiedades antes citadas para un gas de bosones tridimensional atrapado por tres, dos y uno potenciales armónicos unidimensionales mutuamente perpendiculares. Se obtiene que el gas de bosones atrapados se comporta como un gas de nuevos bosones libres en *seis*, *cinco* y *cuatro* dimensiones respectivamente con una masa efectiva que tiende a cero en el límite termodinámico.

En el Apéndice A se introduce la integral de Bose. En el Apéndice B se presenta la manera en que transformamos la integral de volumen en el espacio k (para calcular el

número de partículas de un gas de bosones en $d > 0$ dimensiones y relación de dispersión $\epsilon_k = c_s k^2$) a una integral de una sola variable k , debido a la simetría geométrica del problema y en el Apéndice C se detalla el procedimiento de transformación para calcular el número de bosones N en 3D atrapados por tres, dos y uno osciladores armónicos.

Capítulo 2

Gas Ideal de Bosones

En este capítulo calculamos y resumimos las propiedades termodinámicas de un gas de bosones ideales dentro de una caja de volumen V , tal que en el límite termodinámico $N \rightarrow \infty$ y $V \rightarrow \infty$ la densidad de partículas $n \equiv N/V$ permanece constante. Este problema es discutido ampliamente en libros de texto de Mecánica Estadística [25, 26, 27] pero que aquí incluimos por completéz. Como no existe interacción entre las partículas la energía de cada partícula bosónica corresponde a la energía de una partícula libre de masa m ,

$$\epsilon_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}; \quad (2.1)$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2,$$

$$k_x = \frac{2\pi}{L}n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L}n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L}n_z$$

con

$$n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

es decir, la relación de dispersión entre el momento $\hbar k$ y la energía ϵ de las partículas es cuadrática [28]. Ahora bien, en el caso de un sistema de partículas de Bose-Einstein el número promedio de partículas en un nivel de energía definido por el momento k está dado por n_k ,

$$n_k = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}, \quad (2.2)$$

conocida también como la función de distribución de Bose-Einstein, donde ϵ_k está dada por la ecuación (2.1), μ es el potencial químico y $\beta = 1/k_B T$ con k_B la constante de

Boltzmann y T la temperatura en grados Kelvin (K). De aquí que el número total N de partículas está dado por la suma de las partículas en cada nivel de energía asociado al momento $\hbar k$,

$$N = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1}. \quad (2.3)$$

Por conveniencia a N la escribiremos como la suma de partículas en el estado base N_0 más las partículas que están en los estados excitados N_e , es decir,

$$N = N_0 + N_e, \quad (2.4)$$

donde

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \quad (2.5)$$

y

$$N_e = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1}. \quad (2.6)$$

En el límite termodinámico la separación entre los niveles tiende a cero al grado que podemos aproximar (2.1) como una función continua de k y así la suma (2.6) para N_e la podemos reescribir de la siguiente manera

$$N_e = \frac{1}{\Omega} \int n_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} = \int \int \int n_{\mathbf{k}} dk_x dk_y dk_z, \quad (2.7)$$

donde Ω es el volumen de la celda mínima en el espacio k , es decir

$$\Omega = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3. \quad (2.8)$$

Ahora bien, usando coordenadas esféricas (2.7) se transforma en

$$N_e = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\infty} n_{\mathbf{k}} 4\pi k^2 dk \quad (2.9)$$

o

$$N_e = 4\pi \frac{1}{\Omega} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} k^2 dk, \quad (2.10)$$

donde hemos sustituido (2.2).

En general:

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \equiv \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) f(\varepsilon)$$

para partículas sin espín.

Nótese que la ecuación tiene la forma $N_e = \int_0^\infty d\varepsilon f(\varepsilon)g(\varepsilon)$, donde $f(\varepsilon)$ es la función de distribución de Bose-Einstein (2.2) que representa el número promedio de partículas en el nivel de energía ε , y $g(\varepsilon)$ es el número de niveles por unidad de energía ε . Conociendo la relación entre el número de onda k y la energía ε , es inmediato determinar $g(\varepsilon)$ la cual conocemos como la densidad de estados. Para esto basta identificar que

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = 4\pi k^2 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{dk}{d\varepsilon} d\varepsilon$$

la cual después de usar la relación de dispersión (2.1) nos queda

$$g(\varepsilon) = \frac{L^3}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2}. \quad (2.11)$$

En la Fig. 2.1 graficamos la densidad de estados $g(\varepsilon)$ en unidades de $(2mL^2/4\pi^2\hbar^2)$ como función de la energía ε en unidades de \hbar^2/L^22m .

En términos de la densidad de estados la ecuación (2.10) toma la siguiente forma

$$N_e = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} d\varepsilon \quad (2.12)$$

o haciendo cambio de variable $x = \beta\varepsilon$ tenemos

$$N_e = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\beta\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{z^{-1}e^x - 1} dx, \quad (2.13)$$

con $z \equiv e^{\beta\mu}$ la fugacidad y $V \equiv L^3$. La integral en la ecuación anterior es la función de Bose (ver Apéndice A) $g_{3/2}(z)$ multiplicada por la función gamma $\Gamma(3/2)$,

$$N_e = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\beta\hbar^2}\right)^{3/2} g_{3/2}(z)\Gamma(3/2).$$

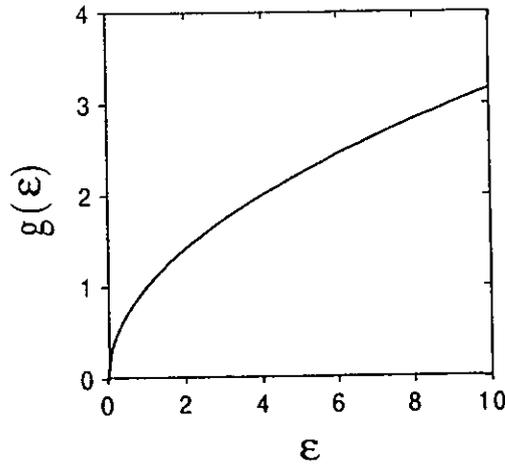


Figura 2.1 Densidad de estados $g(\varepsilon)$ para un gas ideal 3D de bosones.

Recordando que $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ y usando el hecho de que $\beta = 1/k_B T$ nos queda que el número de partículas excitadas está dado por

$$N_e = V \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} g_{3/2}(z), \quad \forall T. \quad (2.14)$$

2.1 Temperatura crítica

La ecuación (2.14) relaciona las variables termodinámicas N , T , V y μ . En el límite de altas temperaturas μ se comporta clásicamente, es decir, $\mu < 0$ por lo que $0 \leq z \leq 1$ y $N_e = N$, es decir, todas las partículas del sistema se encuentran en los estados excitados de energía. Sin embargo, cuando la temperatura del sistema disminuye hasta cierto valor, $\mu \rightarrow 0$ [29] y $N = N_0 + N_e$, el estado base de energía comienza a poblarse y los estados excitados disminuyen su número de partículas de tal manera que N permanece constante. La temperatura a la que ocurre $\mu = 0$ se le llama temperatura crítica T_c la cual limita dos regiones: si $T \geq T_c$ entonces $N_e = N$ y si $T < T_c$ entonces $N = N_0 + N_e$. Notemos

que para $T = T_c$ se tiene que $N_e = N$ y $\mu = 0$ por lo que $z = 1$ y

$$N = V \left(\frac{mk_B T_c}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \zeta(3/2), \quad (2.15)$$

donde hemos usado que $g_\sigma(1) = \zeta(\sigma)$ para $\sigma > 1$, la cual es una constante del sistema.

Despejando T_c de la ecuación (2.15) tenemos que

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{N}{V\zeta(3/2)} \right)^{2/3} \simeq 3.31 \frac{\hbar^2}{mk_B} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}, \quad (2.16)$$

ya que $\zeta(3/2) \simeq 1.202$.

2.2 Fracción condensada

Ahora podemos calcular la fracción del condensado N_0/N es decir, la fracción de partículas que se encuentran en el estado base. De la ecuación (2.4) tenemos que

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_e}{N}. \quad (2.17)$$

La ecuación anterior se cumple para toda T . Ahora bien, dividiendo la ecuación (2.14) entre la ecuación (2.15) resulta que

$$\frac{N_e}{N} = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)} \quad (2.18)$$

y sustituyendo (2.18) en la ecuación (2.17) nos queda

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)}. \quad (2.19)$$

Las ecuaciones anteriores se cumplen para toda T . Para $T < T_c$, $z = 1$ y la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}. \quad (2.20)$$

A $T = 0$ todas las partículas están condensadas y a $T = T_c$ todas están en los estados excitados como puede deducirse de la Fig. 2.2.

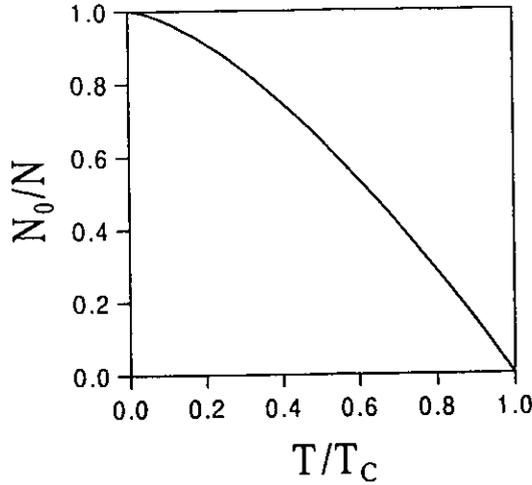


Figura 2.2 Fracción de partículas condensadas (2.20) como función de la temperatura.

2.3 Energía interna

La energía interna $U(V, T)$ de un gas ideal de bosones, se calcula de la siguiente manera:

$$U(V, T) = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (2.21)$$

donde $\epsilon_{\mathbf{k}}$ es la energía del estado excitado definido por \mathbf{k} . En el límite termodinámico la suma anterior la podemos convertir en una integral,

$$U(V, T) = \int_0^{\infty} d\epsilon \epsilon g(\epsilon) n(\epsilon). \quad (2.22)$$

Usando la densidad de estados (2.11) y la función de distribución $n_{\mathbf{k}}$ (2.2), $U(V, T)$ queda

$$U(V, T) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon. \quad (2.23)$$

Haciendo el cambio de variable $x = \beta\epsilon$, usando el hecho de que $\Gamma(5/2) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$, que $\beta = 1/k_B T$ y escribiendo la integral resultante en términos de la función de Bose corres-

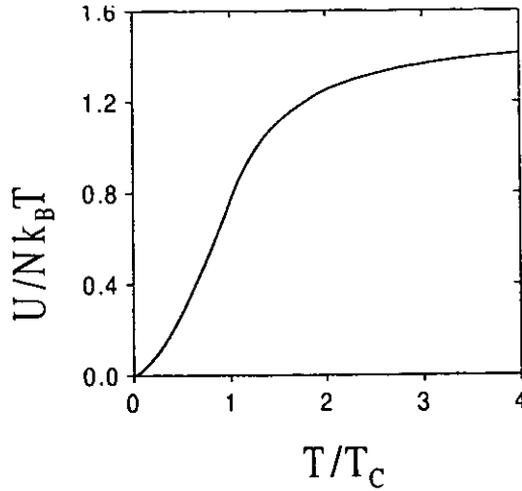


Figura 2.3 Energía interna de un gas ideal tridimensional de bosones.

pendiente,

$$U(V, T) = \frac{3}{2} k_B T V \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} g_{5/2}(z). \quad (2.24)$$

Para escribir la ecuación anterior en términos de la temperatura crítica y el número de partículas N usamos la ecuación (2.15), es decir

$$U = \frac{3}{2} N k_B T \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(1)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}, \quad \forall T. \quad (2.25)$$

En la Fig 2.3 graficamos $U/Nk_B T$ como función de T/T_c .

2.4 Calor específico

Para calcular el calor específico $C_V \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N, V}$ derivamos la expresión (2.25) para la energía interna con respecto a la temperatura, quedándonos

$$C_V = \frac{3}{2} \frac{N k_B}{g_{3/2}(1)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \left[\frac{5}{2} g_{3/2}(z) + T g'_{3/2}(z) \frac{\partial z}{\partial T} \right], \quad (2.26)$$

donde la prima significa derivada respecto al argumento de la función. Para $T > T_c$ se tiene que $N_e = N$ y z satisface la ecuación (2.18) por lo que

$$\frac{\partial z}{\partial T} = -\frac{3}{2} \frac{1}{T} \frac{g_{3/2}(z)}{g'_{3/2}(z)}, \quad (2.27)$$

sustituyendo la ecuación (2.27) en (2.26) tenemos que

$$C_V = \frac{3}{2} N k_B \frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \left[\frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{3}{2} \frac{g'_{5/2}(z)}{g'_{3/2}(z)} \right]. \quad (2.28)$$

Ahora bien, como $N_e = N$ para $T > T_c$ la expresión (2.18) queda

$$1 = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)},$$

la cual usamos en la ecuación anterior para obtener

$$C_V = \frac{3}{2} N k_B \left[\frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{3}{2} \frac{g'_{5/2}(z)}{g'_{3/2}(z)} \right], \quad T > T_c. \quad (2.29)$$

Para $T \leq T_c$ tenemos que

$$U = \frac{3}{2} N k_B T \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

pues $z = 1$. De aquí que C_V está dado por

$$C_V = \frac{15}{4} N k_B \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}, \quad T < T_c. \quad (2.30)$$

El comportamiento de C_V cerca de T_c se analiza por medio de la diferencia

$$\Delta C_V|_{T=T_c} = C_V(T_c^-) - C_V(T_c^+),$$

donde $C_V(T_c^-)$ está dada por la ecuación (2.30) y $C_V(T_c^+)$ por la ecuación (2.29), de tal forma que

$$\frac{\Delta C_V}{N k_B} |_{T=T_c} = \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(1)}{g_{1/2}(1)}, \quad (2.31)$$

y debido a que $g_{1/2}(1) \rightarrow \infty$, $\Delta C_V|_{T=T_c} = 0$ lo que significa que *no hay discontinuidad* en el calor específico. C_V alcanza su máximo valor $1.925 N k_B$ en $T = T_c$ [30] como puede apreciarse en la Fig. 2.4.

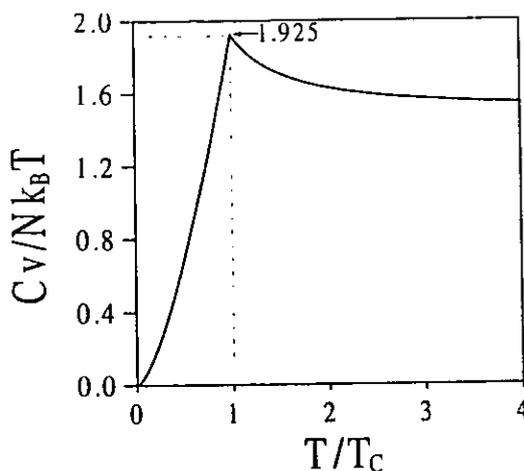


Figura 2.4 Calor específico C_V de un gas ideal tridimensional de bosones.

2.5 Ecuación de estado

Para encontrar la ecuación de estado, es decir la ecuación que relaciona la energía interna U , el volumen V y la presión P del sistema, hacemos uso de nuevo de un resultado de la mecánica estadística [27]

$$\frac{PV}{k_B T} \equiv \ln \Xi(T, V, \mu), \quad (2.32)$$

donde $\Xi(T, V, \mu)$ es la función de partición para un gas de bosones (ensamble gran canónico)

$$\Xi(T, V, \mu) \equiv \prod_{\mathbf{k}} \left[\frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)}} \right]. \quad (2.33)$$

Sustituyendo la ecuación (2.33) en (2.32) tenemos que

$$\frac{PV}{k_B T} = - \sum_{\mathbf{k}} \ln(1 - z e^{-\beta \epsilon_{\mathbf{k}}}) \quad (2.34)$$

donde $z \equiv e^{\beta\mu}$ es la fugacidad. En el límite termodinámico podemos convertir la suma anterior en la siguiente integral

$$\frac{PV}{k_B T} = - \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) \ln(1 - ze^{-\beta\varepsilon}), \quad (2.35)$$

donde la densidad de estados $g(\varepsilon)$ está dada por la ecuación (2.11). Sustituyendo ésta en (2.34) y haciendo una integración por partes tenemos

$$\frac{PV}{k_B T} = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{2}{3} \beta \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{3/2}}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} - 1} \quad (2.36)$$

o

$$\frac{PV}{k_B T} = V \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} g_{5/2}(z). \quad (2.37)$$

En términos de la energía interna (2.25), la ecuación anterior se puede reescribir así

$$PV = V \left(\frac{mk_B T_c}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{2}{3} U \frac{1}{N} g_{3/2}(1), \quad (2.38)$$

donde usando la ecuación (2.15) tenemos finalmente que la ecuación de estado es

$$PV = \frac{2}{3} U. \quad (2.39)$$

2.6 Entropía

Para calcular la entropía partimos de la siguiente expresión para la energía libre de Gibbs para un sistema monoatómico [31],

$$G = N\mu = U + PV - TS, \quad (2.40)$$

donde usando la ecuación de estado (2.39) tenemos que

$$TS = \frac{5}{2} U - N\mu.$$

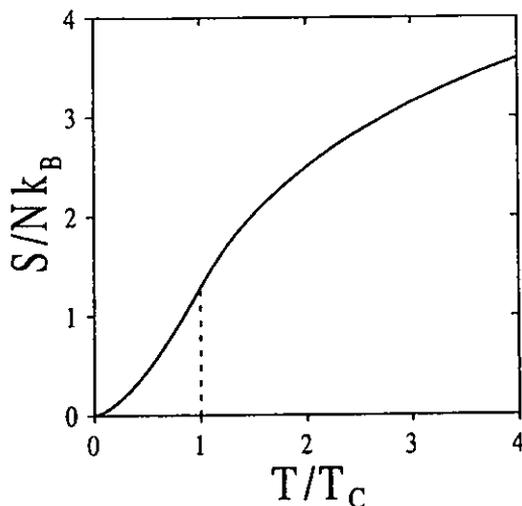


Figura 2.5 Entropía S de un gas ideal tridimensional de bosones.

Usando la expresión (2.24) de la energía y despejando S tenemos que

$$S = \frac{5}{2} N k_B \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(1)} - \frac{N\mu}{T}. \quad (2.41)$$

Para $T \leq T_c$ se tiene que $\mu = 0$ y por tanto $z = 1$ así que el segundo término de S se hace cero y

$$S = \frac{5}{2} N k_B \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)}. \quad (2.42)$$

La entropía como función de la temperatura T/T_c se muestra en la Fig. 2.4.

Se observa que $G \equiv N\mu$ tiene el mismo el valor cuando $T \rightarrow T_c^-$ y cuando $T \rightarrow T_c^+$ y que S es continua en $T = T_c$ es decir $S(T_c^-) = S(T_c^+)$. Calculando $\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial^2 G}{\partial T^2}$ se tiene que

$$\left[\frac{\partial S}{\partial T} \right]_{T_c^-} = \left[\frac{\partial S}{\partial T} \right]_{T_c^+} \quad (2.43)$$

como debe ser, ya que

$$C_V = -T \frac{\partial^2 G}{\partial T^2}$$

y como se observa en la Fig. 2.4 el calor específico C_V es continuo en $T = T_c$. Aunque en $T = T_c$ C_V muestra una discontinuidad en su derivada que equivaldría a una transición de fase de tercer orden no es así. La independencia de la presión con el volumen (2.37), nos indica que aún teniendo la presión el mismo valor para $T = T_c$ el volumen no, dándonos la condición para considerar la transición como de primer orden [26].

2.7 Potencial químico

El valor del potencial químico μ es cero para $T \leq T_c$. Usemos la ecuación (2.18) para calcular μ en temperaturas $T > T_c$. Para $T > T_c$ $N_e = N$ y se obtiene de (2.18) la siguiente ecuación implícita para μ

$$g_{3/2}(z) = g_{3/2}(1) \left(\frac{T}{T_c} \right)^{-3/2} \quad (2.44)$$

con $z \equiv e^{\beta\mu}$, usando la expansión en serie de $g_{3/2}(z)$ (ver Apéndice A) tenemos que

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{3/2}} = g_{3/2}(1) \left(\frac{T}{T_c} \right)^{-3/2} \quad (2.45)$$

Revirtiendo la serie de potencias dada en (2.45) obtenemos una expresión en serie de potencias de $g_{3/2}$ para z

$$z \equiv e^{\beta\mu} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m g_{3/2}^m \quad (2.46)$$

donde los cinco primeros valores de b_m son dados [33]

$$b_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}; \quad b_2 = -\frac{2^{7/2}}{\pi}; \quad b_3 = \frac{2^3}{\pi^{3/2}}(2^4 - 3^{3/2}); \quad b_4 = \frac{2^{11/2}}{\pi^2}(5 \times 3^{3/2} - 2^{3/2} - 5 \times 2^3);$$

$$b_5 = \frac{2^5}{\pi^{7/2}}(2^{11/2} \times 3 + 3^4 + 2^7 \times 7 - 2^{5/2} \times 5^{3/2} - 2^4 \times 3^{5/2} \times 7).$$

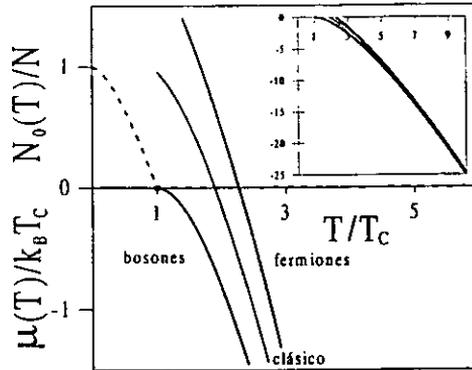


Figura 2.6 Potencial químico μ para un gas libre 3D de bosones y de fermiones, en el límite clásico ambos tienden a μ clásica [34].

En el límite clásico ($T \gg T_c$) el número promedio de partículas en cada estado de energía es muy pequeño es decir

$$n = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} \ll 1$$

de aquí que $z \ll 1$ y $g_{3/2}(z) \approx z$ (ver Apéndice A) lo cual sustituimos en (2.44) para obtener

$$\mu = k_B T \ln \left[g_{3/2}(1) \left(\frac{T}{T_c} \right)^{-3/2} \right],$$

sustituyendo T_c se obtiene finalmente la conocida expresión clásica para μ

$$\mu = -k_B T \ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \right]. \quad (2.47)$$

En la Fig. 2.6 graficamos el potencial químico $\mu(T)$ para un gas de N bosones de masa m resolviendo numéricamente la Ec. (2.44) y lo comparamos con el potencial químico clásico así como con el correspondiente potencial químico de un gas de $2N$ fermiones de masa $m/2$.

Capítulo 3

Bosones en d dimensiones y relación energía-momento generalizada

3.1 Relación de dispersión generalizada

En el capítulo anterior se calcularon las propiedades termodinámicas de un gas ideal tridimensional de bosones con relación de dispersión cuadrática. En este capítulo generalizamos los resultados del capítulo anterior para un gas libre de N bosones de masa m atrapados en una caja en $d > 0$ dimensiones y con una energía proporcional al momento del bosón elevado a la potencia $s > 0$ [35], es decir

$$\varepsilon_k = c_s k^s, \quad (3.1)$$

donde el momento de la partícula \mathbf{p} está relacionado con \mathbf{k} por medio de la relación de De Broglie $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$, con \mathbf{k} el vector de onda en el espacio d -dimensional y que podemos escribir como $\mathbf{k} = (2\pi/L)\mathbf{n}$ debido a las condiciones de frontera del sistema, con $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3, \dots, n_d)$ y $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; i = 1, 2, \dots, d$. L^d es el volumen de nuestro sistema. c_s es una constante con dimensiones de energía por longitud a la potencia s .

3.2 Temperatura crítica

El número total N de partículas puede escribirse como la suma de las partículas que están en el estado base N_0 más las que ocupan los estados excitados N_e , es decir

$$N = N_0 + N_e, \quad (3.2)$$

donde

$$N_e = \sum_{k>0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}. \quad (3.3)$$

La suma sobre todos los estados puede reemplazarse por la integral de volumen en el espacio k , es decir N está dado por el volumen de la hipersfera dividida por el volumen de la celda mínima en el espacio k , Ω

$$N_e = \frac{1}{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} n_k dk_1 dk_2 \dots dk_d, \quad (3.4)$$

con $\Omega = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^d$ y n_k el número promedio de partículas en cada estado de energía ϵ_k . La ecuación (3.4) la podemos escribir como (ver Apéndice B)

$$N_e = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \int_0^{\infty} n_k k^{d-1} dk. \quad (3.5)$$

Escribiendo la ecuación anterior en términos de ϵ en lugar de k

$$N_e = \frac{L^d}{\Gamma(d/2)\pi^{d/2}2^{d-1}} \frac{1}{s c_s^{d/s}} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{d/s-1}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon. \quad (3.6)$$

De aquí se tiene que la densidad de estados $g(\epsilon)$ está dada por

$$g(\epsilon)d\epsilon = \frac{1}{\Omega} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} k^{d-1} dk \quad (3.7)$$

o

$$g(\epsilon) = \frac{L^d}{\Gamma(d/2)\pi^{d/2}2^{d-1}} \frac{1}{s c_s^{d/s}} \epsilon^{d/s-1}. \quad (3.8)$$

Haciendo el cambio de variable $x = \beta\epsilon$, y definiendo $z \equiv e^{\beta\mu}$ tenemos que la ecuación (3.6) toma la forma

$$N_e = \frac{L^d}{\Gamma(d/2)\pi^{d/2}2^{d-1}} \frac{1}{s c_s^{d/s} \beta^{d/s}} \int_0^{\infty} \frac{x^{d/s-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx$$

la cual podemos reescribir en términos de la función de Bose respectiva

$$N_e = L^d \frac{\Gamma(d/s)}{\Gamma(d/2)\pi^{d/2}2^{d-1}s} \left(\frac{k_B T}{c_s}\right)^{d/s} g_{d/s}(z). \quad (3.9)$$

Como $N = N_e$ para $T \geq T_c$ podemos calcular N

$$N = L^d \frac{\Gamma(d/s)}{\Gamma(d/2)\pi^{d/2}2^{d-1}s} \left(\frac{k_B T_c}{c_s} \right)^{d/s} g_{d/s}(1). \quad (3.10)$$

Partiendo de la última ecuación podemos calcular la temperatura crítica a la cual empieza a ocurrir la condensación de Bose-Einstein. Dos condiciones definen la temperatura crítica T_c , el potencial químico μ es igual a cero y el número de partículas en el estado base también es cero, bajo estas condiciones tenemos

$$T_c = \frac{c_s}{k_B} \left[\frac{\Gamma(d/2)s\pi^{d/2}2^{d-1}}{\Gamma(d/s)g_{d/s}(1)} \right]^{s/d} \left[\frac{N}{L^d} \right]^{s/d}. \quad (3.11)$$

Como $g_{d/s}(1) \rightarrow \infty$ para $d/s \leq 1$ (ver Apéndice B) existe BEC con una temperatura crítica finita y mayor que cero cuando $d/s > 1$ y la temperatura crítica es cero cuando $d/s \leq 1$.

3.3 Fracción condensada

Podemos calcular el número de partículas que se encuentran en el estado base de energía (la fracción condensada) dividiendo la ecuación (3.2) por N ,

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_e}{N} \quad (3.12)$$

ahora bien, sustituyendo (3.9) y (3.10) en la ecuación anterior tenemos la fracción condensada en términos de la temperatura T

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{d/s}. \quad (3.13)$$

3.4 Energía interna

Una de las propiedades termodinámicas que podemos calcular inmediatamente es la energía interna $U = \int_0^\infty d\varepsilon n(\varepsilon)g(\varepsilon)\varepsilon$. Sustituyendo en la expresión anterior la densidad de

estados (3.8) y la función de distribución BE, tenemos

$$U = \frac{L^d}{\Gamma(d/2)\pi^{d/2}2^{d-1}} \frac{1}{s c_s^{d/s}} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{d/2}}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon.$$

Haciendo el cambio de variable $x = \beta\epsilon$ tenemos

$$U = \frac{L^d}{\Gamma(d/2)\pi^{d/2}2^{d-1}} \frac{1}{s c_s^{d/s} \beta^{d/2+1}} \int_0^\infty \frac{x^{d/2}}{z^{-1}e^x - 1} dx.$$

De la definición de $g_{d/2+1}(z)$ y usando la ecuación (3.9) se tiene finalmente que

$$U = \frac{d}{s} N_e k_B T \frac{g_{d/s+1}(z)}{g_{d/s}(z)}, \quad (3.14)$$

o bien

$$U = \frac{d}{s} N k_B T \frac{g_{d/s+1}(z)}{g_{d/s}(1)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{d/s} \quad \forall T. \quad (3.15)$$

En el límite en que $T \rightarrow \infty$, $\frac{g_{d/s+1}(z)}{g_{d/s}(z)} \rightarrow 1$ y $N_e = N$, por tanto de la ecuación (3.14)

obtenemos

$$U = \frac{d}{s} N k_B T, \quad (3.16)$$

una versión generalizada del teorema de equipartición de la energía.

3.5 Calor específico C_V

El calor específico se calcula mediante la ecuación

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N}.$$

Usando la ecuación (3.15) para $U(T, V)$ tenemos

$$C_V = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{d}{s} N k_B T \frac{g_{d/s+1}(z)}{g_{d/s}(1)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{d/s} \right). \quad (3.17)$$

Para $T \leq T_c$, $z = 1$ y

$$C_V = \frac{d}{s} \left(\frac{d}{s} + 1 \right) N k_B \frac{g_{d/s+1}(1)}{g_{d/s}(1)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{d/s}. \quad (3.18)$$

Para $T \geq T_c$ se tiene

$$C_V = \frac{d}{s} N k_B \left[\left(\frac{d}{s} + 1 \right) \left(\frac{T}{T_c} \right)^{d/s} T_c \frac{g_{d/s}(z)}{g_{d/s}(1)} + \left(\frac{T}{T_c} \right)^{d/s} \frac{g'_{d/s+1}(z)}{g_{d/s}(1)} \frac{dz}{dT} \right]. \quad (3.19)$$

Para calcular $\frac{dz}{dT}$ se usa la ecuación (3.9) obteniéndose

$$C_V = \frac{d}{s} N k_B \left[\left(\frac{d}{s} + 1 \right) \frac{g_{d/s+1}(z)}{g_{d/s}(z)} - \frac{d}{s} \frac{g'_{d/s+1}(z)}{g'_{d/s}(z)} \right]. \quad (3.20)$$

Para analizar si tenemos un salto en el calor específico en $T = T_c$ calculamos el salto ΔC_V definido como la diferencia de $C_V(T_c^+)$ ecuación (3.20) y $C_V(T_c^-)$ ecuación (3.18), es decir

$$\Delta C_V = C_V(T_c^-) - C_V(T_c^+) |_{T=T_c}$$

$$\frac{\Delta C_V}{N k_B} = \left(\frac{d}{s} \right)^2 \frac{g_{d/s}(1)}{g_{d/s-1}(1)}. \quad (3.21)$$

Si $d/s - 1 \leq 1$, $g_{d/s-1}(1)$ diverge mientras que para $d/s - 1 > 1$ converge, por lo que para $d/s \leq 2$ el salto $\Delta C_V = 0$ pero hay un salto finito distinto de cero si $d/s - 1 > 1$ o $d/s > 2$. La Fig. 3 de [35] muestra ΔC_V para $1 < d/s \leq 3$. Para valores de $1 < d/s \leq 2$, $\Delta C_V = 0$, es decir, no existe salto alguno. Sin embargo para $d/s \gtrsim 1.4$, el calor específico mismo muestra una cúspide en T_c , como puede deducirse de la Fig. 3.1 donde graficamos el valor del calor específico en T_c , como función de d/s . La línea a trazos muestra el correspondiente valor de C_V en límite clásico. Para el caso en que $d/s \leq 1$ no hay condensación de Bose-Einstein para temperatura crítica distinta de cero, es decir, $T_c = 0$. El calor específico no presenta saltos ni singularidades en sus derivadas (Fig. 3.2).

$$\frac{C_V}{N k_B} = \left(\frac{d}{2} + 1 \right) \left(\frac{T}{T_F} \right)^{d/2} g_{d/2+1}(z) - \frac{d}{2} \left(\frac{T}{T_F} \right)^{d/2} \frac{g_{d/2}^2(z)}{g_{d/2-1}(z)}, \quad (3.22)$$

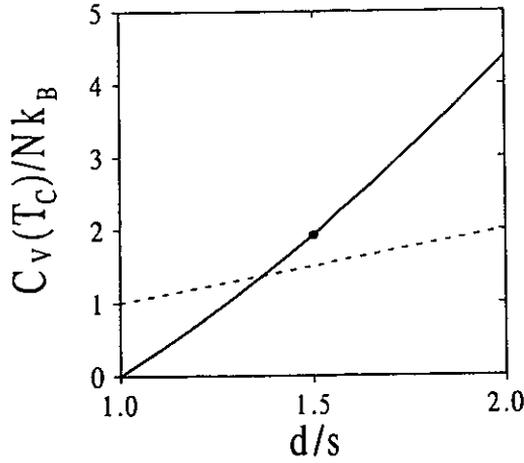


Figura 3.1 Calor específico dentro del intervalo $1 < d/s \leq 2$, evaluado en T_c . La línea a trazos muestra el valor del calor específico en el límite clásico. El punto muestra el valor 1.925 para un gas ideal ($s = 2$) de bosones en 3D ($d = 3$).

donde hemos normalizado la temperatura del sistema a la temperatura de Fermi T_F . Para hacer esta normalización se consideró un gas de N_F fermiones libres en $d > 0$ dimensiones sin espín [34] con las condiciones de que el número de fermiones es el doble que el de bosones $2N = N_F$ y que la masa del bosón es dos veces la masa del fermión $m = 2m_F$. Para el caso en que $d = 1$

$$\frac{C_V}{Nk_B} = 2^{-3/2}\pi^{1/2} \left[\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{T}{T_F}\right)^{1/2} g_{3/2}(z) - \frac{1}{2} \left(\frac{T}{T_F}\right)^{1/2} \frac{g_{1/2}^2(z)}{g_{-1/2}(z)} \right], \quad (3.23)$$

donde $T_F = N_F^2 \pi^2 \hbar^2 / L^2 m_F k_B$. Para $d = 2$

$$\frac{C_V}{Nk_B} = 2 \left(\frac{T}{T_F}\right) \left[2g_2(z) - \frac{g_1^2(z)}{g_0(z)} \right], \quad (3.24)$$

donde $T_F = N_F 2\pi \hbar^2 / L^2 m_F k_B$.

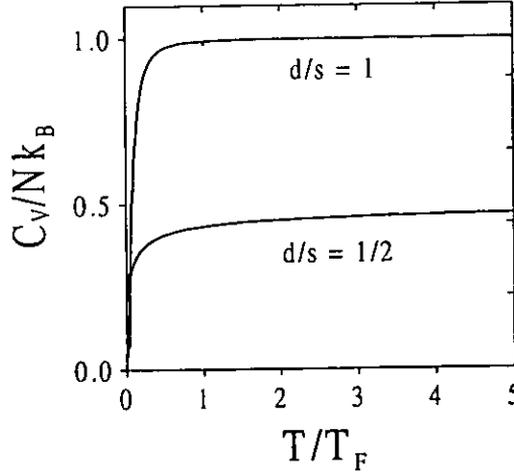


Figura 3.2 Calor específico C_V para $d/s = 1/2$ y $d/s = 1$, T_F es la temperatura de Fermi de un gas de fermiones libres en d dimensiones.

3.6 Presión

La presión termodinámica se determina por medio de la gran función partición $\Xi(T, V, \mu)$ en el marco del gran canónico

$$\frac{PV}{k_B T} \equiv \ln \Xi(T, V, \mu) = - \sum_{\mathbf{k}} \ln[1 - e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)}],$$

donde $V = L^d$. En el límite termodinámico

$$\frac{PV}{k_B T} = - \int_0^{\infty} g(\epsilon) \ln(1 - z e^{-\beta \epsilon}) d\epsilon \quad (3.25)$$

usando (3.8) y la función de Bose tenemos

$$\frac{PV}{k_B T} = \frac{s}{d} V \frac{\Gamma(d/s + 1)}{\Gamma(d/2) \pi^{d/2} 2^{d-1} s c_s^{d/s}} (k_B T)^{d/s} g_{d/s+1}(z), \quad (3.26)$$

y podemos obtener la ecuación de estado utilizando las ecuaciones (3.2) y (3.15) para N y U respectivamente

$$PV = \frac{s}{d}U. \quad (3.27)$$

3.7 Entropía

La entropía puede obtenerse por medio de la función de Gibbs

$$G \equiv U - TS + PV,$$

para sistemas monoatómicos $G \equiv N\mu$ y se tiene que

$$ST = U + PV - N\mu, \quad (3.28)$$

en donde sustituimos PV (3.27) y la (3.15) para U , para tener

$$S = \left(\frac{d}{s} + 1\right) Nk_B \left(\frac{T}{T_c}\right)^{d/s} \frac{g_{d/s+1}(z)}{g_{d/s}(1)} - \frac{N\mu}{T}, \quad (3.29)$$

o en términos de la fugacidad z

$$\frac{S}{Nk_B} = \left(\frac{d}{s} + 1\right) \left(\frac{T}{T_c}\right)^{d/s} \frac{g_{d/s+1}(z)}{g_{d/s}(1)} - \ln z, \quad (3.30)$$

la cual es válida para toda T . Para el caso $T \leq T_c$ S queda

$$\frac{S}{Nk_B} = \left(\frac{d}{s} + 1\right) \left(\frac{T}{T_c}\right)^{d/s} \frac{g_{d/s+1}(1)}{g_{d/s}(1)}, \quad (3.31)$$

y para $T \gg T_c$ (límite clásico) $\frac{g_{d/s+1}(z)}{g_{d/s}(z)} \rightarrow 1$ por lo que

$$S = \left(\frac{d}{s} + 1\right) Nk_B. \quad (3.32)$$

Se observa que $G \equiv N\mu$ tiene el mismo el valor cuando $T \rightarrow T_c^-$ y cuando $T \rightarrow T_c^+$, de las

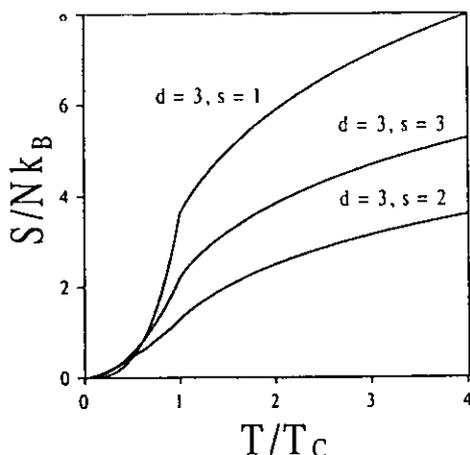


Figura 3.3 Entropía como función de la temperatura T/T_c para valores de $d = 1, 2, 3$ y $s = 1, 2$.

ecuaciones (3.30), (3.31) se puede ver que S es continua en $T = T_c$ es decir $S(T_c^-) = S(T_c^+)$.

Calculando $\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial^2 G}{\partial T^2}$ se tiene que para $T > T_c$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial T} \right]_{T_c^+} = \left(\frac{d}{s} + 1 \right) \left(\frac{d}{s} \right) \frac{Nk_B}{T_c} \frac{g_{d/s+1}(1)}{g_{d/s}(1)} - \left(\frac{d}{s} \right)^2 \frac{Nk_B}{T_c} \frac{g_{d/s}(1)}{g_{d/s-1}(1)} \quad (3.33)$$

y para $T \leq T_c$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial T} \right]_{T_c^-} = \left(\frac{d}{s} + 1 \right) \left(\frac{d}{s} \right) \frac{Nk_B}{T_c} \frac{g_{d/s+1}(1)}{g_{d/s}(1)} \quad (3.34)$$

así que

$$\left[\frac{\partial S}{\partial T} \right]_{T_c^-} - \left[\frac{\partial S}{\partial T} \right]_{T_c^+} = \left(\frac{d}{s} \right)^2 \frac{Nk_B}{T_c} \frac{g_{d/s}(1)}{g_{d/s-1}(1)} \quad (3.35)$$

y

$$\left[\frac{\partial S}{\partial T} \right]_{T_c^-} \neq \left[\frac{\partial S}{\partial T} \right]_{T_c^+} \quad (3.36)$$

sólo si $d/s - 1 > 1$ o $d/s > 2$, por tanto el sistema sufre una transición de fase de segundo orden siempre que $d/s > 2$.

3.8 Potencial químico

Una expresión implícita para el potencial químico μ se obtiene dividiendo la ecuación (3.9) por la ecuación (3.10) para temperaturas $T > T_c$

$$g_{d/s}(z) = g_{d/s}(1) \left(\frac{T}{T_c} \right)^{-d/s} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l^{d/s}}, \quad (3.37)$$

definiendo $y \equiv g_{d/s}(z) = g_{d/s}(1) (T/T_c)^{-d/s}$ y revirtiendo la serie tenemos que

$$z = y + q_1 y^2 + q_2 y^3 + q_3 y^4 + \dots$$

con

$$q_1 = -2^{-d/s}; \quad q_2 = 2^{-2d/s+1} - 3^{-d/s}; \quad q_3 = 5 \times 6^{-d/s} - 4^{-d/s} - 5 \times 2^{-3d/s}.$$

Así,

$$\frac{\mu}{k_B T} = \ln \left[g_{d/s}(1) \left(\frac{T}{T_c} \right)^{-d/s} \right] + \ln \left[1 + q_1 g_{d/s}(1) \left(\frac{T}{T_c} \right)^{-d/s} + q_2 g_{d/s}^2(1) \left(\frac{T}{T_c} \right)^{-2d/s} + \dots \right] \quad (3.38)$$

Una expresión generalizada para μ en el límite clásico puede obtenerse. Para temperaturas muy grandes $T \gg T_c$ y $g_{d/s}(z) \approx z$ (ver sección 2.7) así

$$z = g_{d/s}(1) \left(\frac{T}{T_c} \right)^{-d/s} \quad (3.39)$$

sustituyendo T_c se tiene que

$$\mu = -k_B T \ln \left[\frac{L^d}{N} \frac{\Gamma(d/s)}{\Gamma(d/2) s \pi^{d/2} 2^{d-1}} \left(\frac{k_B T}{c_s} \right)^{d/s} \right] \quad (3.40)$$

Para $d = 3$, $s = 2$ y $c_2 = \hbar^2/2m$, recuperamos la Ec. (2.46).

Capítulo 4

Bosones tridimensionales atrapados por potenciales armónicos

Nos avocamos ahora al estudio de un gas tridimensional (3D) de bosones que no interactúan entre sí, atrapados por δ potenciales unidimensionales de tipo oscilador armónico, con $\delta = 1, 2, 3$, poniendo énfasis en el cálculo de sus propiedades termodinámicas. El presente trabajo generaliza el de A. de Groot, Hoyman y Seldan [37] quienes discuten la transición BEC para un gas de bosones atrapados por osciladores armónicos con la restricción de que el número de osciladores es igual al número de dimensiones del sistema. Más recientemente Kleppner, Bagnato y Pritchard [36] calcularon la temperatura crítica T_c , la fracción del condensado N_0/N y el salto en el calor específico para un gas de bosones atrapados por potenciales que van como una ley de potencias y donde el potencial de oscilador armónico es un caso particular pero usaron la aproximación adiabática para sus cálculos de la cual prescindimos en los nuestros.

4.1 Bosones 3D atrapados por 3 osciladores armónicos

Resolvemos el problema de un gas tridimensional de N bosones no interactuantes sujetos a la acción de 3 potenciales armónicos unidimensionales mutuamente perpendiculares. Este caso $\delta = 3$ es discutido aquí de manera diferente a como lo han hecho varios autores [38, 39, 40, 41, 42]. En [43] se discute el caso de un gas 2D de bosones atrapado por 2 osciladores. Para obtener las propiedades termodinámicas de nuestro sistema calculamos primero los niveles de energía. Como los bosones no interactúan entre sí, basta calcular

los niveles de energía de un solo bosón. En el caso isotrópico el Hamiltoniano para un bosón en este sistema es,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa r^2 \quad (4.1)$$

con

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

y

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

El Hamiltoniano dado por (4.1) se puede escribir como la suma de tres hamiltonianos unidimensionales

$$H = H_x + H_y + H_z$$

con

$$H_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa x^2 \quad (4.2)$$

$$H_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa y^2 \quad (4.3)$$

$$H_z = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa z^2. \quad (4.4)$$

Resolviendo la ecuación de Schrödinger $H\Psi = \varepsilon\Psi$ se encuentra que los valores propios de la energía son [44]

$$\varepsilon = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n_x\right) + \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n_y\right) + \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n_z\right) \quad (4.5)$$

$$n_x = 0, 1, 2, \dots$$

$$n_y = 0, 1, 2, \dots$$

$$n_z = 0, 1, 2, \dots,$$

ecuación que puede ser escrita como

$$\varepsilon = \hbar v(k_x + k_y + k_z) + \frac{3}{2}\hbar\omega \quad (4.6)$$

donde

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\omega n_x}{v}, \\ k_y &= \frac{\omega n_y}{v}, \\ k_z &= \frac{\omega n_z}{v}. \end{aligned}$$

4.1.1 Temperatura crítica

El número total de bosones N está dado por

$$N = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (4.7)$$

que escribimos como

$$N = N_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (4.8)$$

donde

$$N_0 = \frac{1}{e^{\beta(\frac{3}{2}\hbar\omega - \mu)} - 1} \quad (4.9)$$

y ε está dada por (4.6). En el límite termodinámico el espaciamiento entre los niveles de energía se reduce de tal manera que el sistema puede ser descrito por un continuo de estados. El segundo término del miembro derecho de la ecuación (4.8) al cual se designa por N_e se calcula mediante

$$N_e = \frac{1}{\Omega} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}, \quad (4.10)$$

con $\Omega = (\omega/v)^3$ el volumen de la celda unitaria en el espacio k . Sustituyendo (4.6) en la ecuación anterior tenemos

$$N_e = \left(\frac{v}{\omega}\right)^3 \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z \frac{1}{\exp[\beta(\hbar v(k_x + k_y + k_z) + \frac{3}{2}\hbar\omega - \mu)] - 1}. \quad (4.11)$$

La integral puede evaluarse haciendo los cambios de variables

$$\hbar v k_x = \epsilon \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \quad (4.12)$$

$$\hbar v k_y = \epsilon \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \quad (4.13)$$

$$\hbar v k_z = \epsilon \cos^2 \theta \quad (4.14)$$

donde $\epsilon \equiv \epsilon - \frac{3}{2}\hbar\omega \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi/2]$, $\varphi \in [0, \pi/2]$. El Jacobiano asociado a este cambio de variable es

$$J = 4(1/\hbar v)^3 \epsilon^2 \sin^3 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi,$$

por lo que (4.11) queda (ver Apéndice C)

$$N_e = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\hbar\omega} \right)^3 \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^2}{\exp[\beta(\epsilon + \frac{3}{2}\hbar\omega - \mu)] - 1}, \quad (4.15)$$

la cual puede escribirse en términos de la energía del sistema ϵ

$$N_e = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\hbar\omega} \right)^3 \int_{\frac{3}{2}\hbar\omega}^\infty d\epsilon \frac{(\epsilon - \frac{3}{2}\hbar\omega)^2 \theta(\epsilon - \frac{3}{2}\hbar\omega)}{\exp[\beta(\epsilon - \mu)] - 1}, \quad (4.16)$$

donde hemos usado la función $\theta(\epsilon - \frac{3}{2}\hbar\omega)$ que vale cero para $\epsilon < \frac{3}{2}\hbar\omega$ y 1 para $\epsilon \geq \frac{3}{2}\hbar\omega$ debido a que las partículas no pueden ocupar estados más bajos de energía que el estado base $\frac{3}{2}\hbar\omega$. De la ecuación anterior podemos identificar la función densidad de estados $g(\epsilon)$ ya que $N_e = \int_0^\infty d\epsilon f(\epsilon) g(\epsilon)$ donde $f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}$ es la función de distribución de Bose-Einstein. Por tanto

$$g(\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\hbar\omega} \right)^3 \theta(\epsilon - \frac{3}{2}\hbar\omega) (\epsilon - \frac{3}{2}\hbar\omega)^2, \quad (4.17)$$

confirmando el resultado que obtiene Ligare en [41] y Kirsten en [39] para el caso isotrópico.

Haciendo el cambio de variable $x = \beta\epsilon$ en la ecuación (4.15) y definiendo $\mu_1 \equiv \mu - \frac{3}{2}\hbar\omega$ tenemos que

$$N_e = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\hbar\omega} \right)^3 \frac{1}{\beta^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{x - \mu_1} - 1}, \quad (4.18)$$

donde $z = e^{\beta\mu} e^{-\frac{3}{2}\hbar\omega}$ y $e^{\beta\mu}$ la fugacidad del sistema. Usando la función respectiva de Bose

$$g_\sigma(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx$$

y que $\beta = 1/k_B T$ tenemos finalmente

$$N_e = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(z) \quad (4.19)$$

donde hemos de distinguir entre la densidad de estados $g(\varepsilon)$ y la función de Bose $g_\sigma(z)$.

Para temperaturas T mayor o igual que la temperatura crítica, todas las partículas se encuentran ocupando los estados excitados, de tal manera que podemos escribir

$$N = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(z), \quad T \geq T_c.$$

En particular, para $T = T_c$ $\mu = \frac{3}{2}\hbar\omega$ y $\mu_1 = 0$ como se ve en la Fig 4.1 [40] por lo que

$$N = \left(\frac{k_B T_c}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(1), \quad (4.20)$$

de donde podemos despejar la temperatura crítica del sistema [36].

$$T_c = 0.940499 \frac{\hbar\omega}{k_B} N^{1/3}. \quad (4.21)$$

La temperatura crítica de condensación Bose-Einstein dada por (4.21) se obtuvo en el límite termodinámico. Un tratamiento analítico para un sistema con un número finito de partículas N se da en [42] cuyos resultados coinciden con los mostrados aquí para N muy grandes.

Finalmente, la ecuación (4.8) queda

$$N = N_0 + N_e = N_0 + \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(z).$$

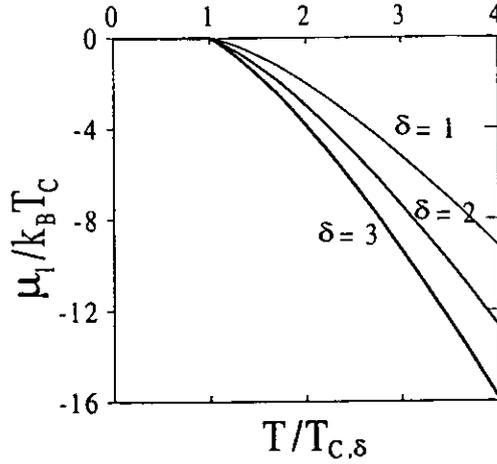


Figura 4.1 Potencial químico $\mu_1 \equiv \mu - \frac{\delta}{2}\hbar\omega$ para un gas 3D de bosones atrapados por $\delta = 1, 2$ y 3 osciladores armónicos.

4.1.2 Fracción del condensado

El número de partículas que se encuentran en el estado base depende de la temperatura y sabemos que el estado base comienza a poblarse a temperaturas por debajo de cierta temperatura crítica T_c . La fracción de partículas condensadas es

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_e}{N}, \quad (4.22)$$

donde hemos usado que $N = N_0 + N_e$. Sustituyendo (4.19) y (4.20) en (4.22) nos queda

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \quad (4.23)$$

ya que para $T < T_c$ $z = 1$. Este resultado es también obtenido por Kleppner *et al.* [36]. La manera en que fracción de partículas condensadas varía con la temperatura se muestra en la Fig 4.2. En [38] se obtiene la fracción del condensado y la temperatura crítica para el caso de un número finito de partículas ($N = 2000, 200000$), valores que tienden a los

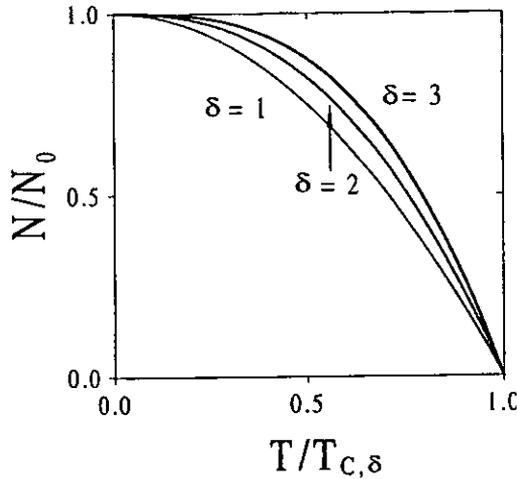


Figura 4.2 Fracción condensada para un gas de bosones 3D atrapados por $\delta = 1, 2, 3$ osciladores armónicos.

nuestros conforme el número de partículas aumenta. Para $T > T_c$, $N_0 = 0$ y se obtiene la siguiente relación

$$\left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \frac{g_3(z)}{g_3(1)} = 1. \quad (4.24)$$

4.1.3 Energía interna

La energía interna del sistema está dada por

$$U(T, V) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1}, \quad (4.25)$$

la suma anterior se puede escribir como la suma del estado $\mathbf{k} = 0$ más los que están en los estados $\mathbf{k} \neq 0$

$$U = \frac{3}{2} \hbar \omega \frac{1}{e^{\beta(\frac{3}{2} \hbar \omega)} - 1} + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1}$$

usando la ecuación (4.9)

$$U = \frac{3}{2} \hbar \omega N_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1}. \quad (4.26)$$

El segundo término de la ecuación anterior puede aproximarse en el límite termodinámico con la integral

$$\sum_{\mathbf{k} \neq 0} \rightarrow \frac{1}{\Omega} \int_0^{\infty} dk_x dk_y dk_z,$$

donde utilizando los cambios de variable dados por (4.12), (4.13), (4.14), sustituyendo (4.6) y usando (4.11) la integral anterior nos da

$$\frac{3}{2} N_e \hbar \omega + 3 \hbar \omega \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^4 g_4(z). \quad (4.27)$$

Para temperaturas $T \geq T_c$ $N_0 = 0$, $N_e = N$ y usando las ecuaciones (4.19) y (4.20) la ecuación (4.26) queda

$$U = \frac{3}{2} N \hbar \omega + 3 \hbar \omega \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^4 g_4(z). \quad (4.28)$$

Para $T < T_c$ sustituimos N_0 y la ecuación (4.28) en (4.26) para obtener

$$U = \frac{3}{2} N \hbar \omega + 3 \hbar \omega \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^4 g_4(1). \quad (4.29)$$

Un tratamiento analítico de la suma dada por (4.25) se da en [40] coincidiendo con nuestro resultado. La ecuación (4.29) puede escribirse en términos del número de partículas N y de la temperatura crítica T_c la cual se grafica en la Fig. 4.3.

4.1.4 Calor específico

El calor específico es importante debido a que nos da información acerca de posibles transiciones de fase del sistema. Para $T > T_c$ $N_e = N$ y derivando parcialmente respecto de T la ecuación (4.28) obtenemos

$$C_V = 3 \hbar \omega \left[\frac{4 k_B T}{\hbar \omega} \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_4(z) + \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^4 g_4'(z) \frac{\partial z}{\partial T} \right].$$

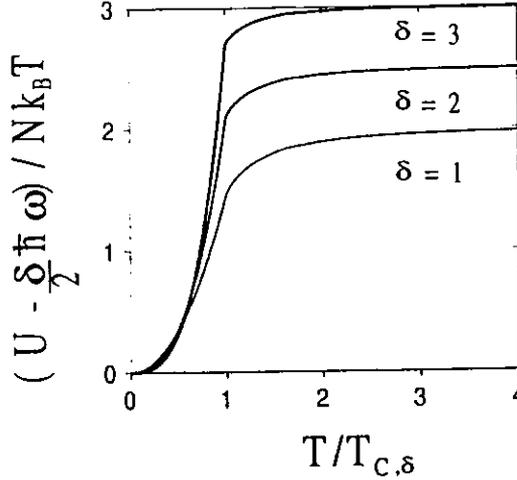


Figura 4.3 Energía interna para un gas 3D de bosones atrapados por $\delta = 1, 2, 3$ osciladores armónicos.

Como $\frac{\partial z}{\partial T} = -\frac{3}{T} \frac{g_3(z)}{g_3'(z)}$, entonces

$$C_V = 3k_B \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 \left[4g_4(z) - 3 \frac{g_3^2(z)}{g_2(z)} \right], \quad T > T_c. \quad (4.30)$$

Para $T < T_c$ tenemos de la ecuación (4.29) que

$$C_V = 12k_B \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_4(1), \quad T < T_c. \quad (4.31)$$

El salto en el calor específico está dado por

$$\frac{\Delta C_V}{N k_B} = 9 \frac{g_3(1)}{g_2(1)} = 6.5768 \quad (4.32)$$

el cual coincide con el presentado por Kleppner *et al.* [36] y puede observarse en la Fig 4.4 para $\delta = 3$. En [41] se presenta una gráfica del calor específico para sistemas con un número finito de partículas N y en [42] se da una descripción analítica para el mismo caso.

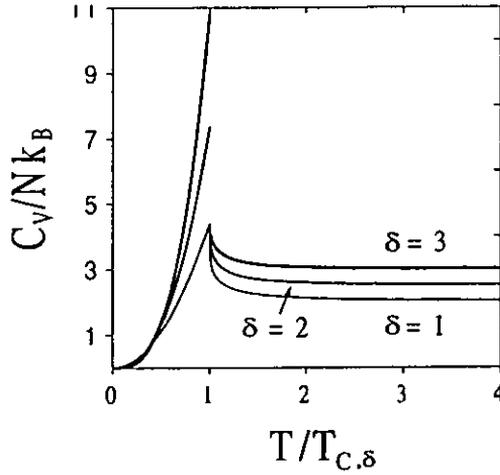


Figura 4.4 Calor específico C_V para un gas 3D de bosones atrapados por $\delta = 1, 2, 3$ osciladores armónicos.

4.1.5 Presión

Calculamos la presión termodinámica por medio de la siguiente expresión [27]

$$\frac{PV}{k_B T} \equiv \ln \Xi = - \sum_{\epsilon} \ln(1 - z e^{-\beta \epsilon}), \quad (4.33)$$

la cual en el límite termodinámico podemos reescribir

$$\frac{PV}{k_B T} = - \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) \ln(1 - z e^{-\beta \epsilon}), \quad (4.34)$$

donde usando (4.17) para $g(\epsilon)$

$$\frac{PV}{k_B T} = \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_4(z) \quad (4.35)$$

y usando las ecuaciones (4.20) y (4.27) la ecuación anterior queda

$$PV = \frac{1}{3} \left[U - \frac{3}{2} N \hbar \omega \right]. \quad (4.36)$$

4.1.6 Entropía

Usemos la ecuación (3.28) de la energía libre de Gibbs [31] para calcular la entropía, es decir

$$ST = U + PV - N\mu, \quad (4.37)$$

sustituyendo (4.36)

$$S = 4k_B \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_4(z) - Nk_B \ln z, \quad (4.38)$$

o poniéndola en términos de N

$$\frac{S}{Nk_B} = 4 \frac{g_4(z)}{g_3(z)} - \ln z. \quad (4.39)$$

Para $T \leq T_c$

$$\frac{S}{Nk_B} = 4 \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \frac{g_4(1)}{g_3(1)}. \quad (4.40)$$

En la Fig 4.5 se presenta el comportamiento de S con la temperatura.

4.2 Bosones 3D atrapados por 2 osciladores armónicos

Se considera un gas de bosones no interactuantes sometidos por 2 potenciales armónicos mutuamente perpendiculares. En el caso isotrópico es decir, ambos osciladores iguales, el Hamiltoniano para un bosón en este sistema es,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa r^2 \quad (4.41)$$

con

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

y

$$r^2 = x^2 + y^2$$

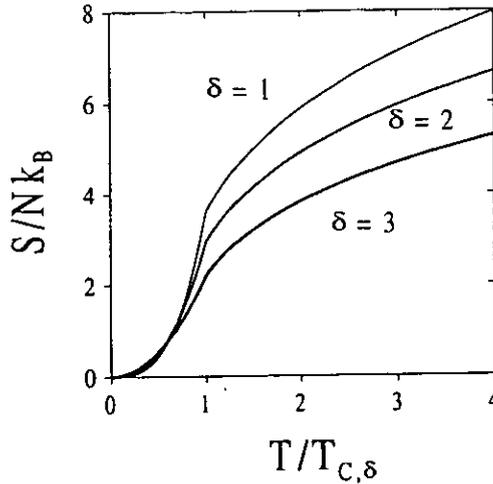


Figura 4.5 Entropía para un gas 3D de bosones atrapados por δ potenciales armónicos.

es decir, el potencial armónico sólo se aplica en las direcciones x, y . El Hamiltoniano dado por (4.41) se puede escribir como la suma de tres hamiltonianos unidimensionales

$$H = H_x + H_y + H_z$$

con

$$H_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa x^2,$$

$$H_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa y^2,$$

$$H_z = \frac{p_z^2}{2m}.$$

Resolviendo la ecuación de Schrödinger $H\Psi = \varepsilon\Psi$ se encuentra que los valores propios de la energía son

$$\varepsilon = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n_x\right) + \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n_y\right) + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n_z^2 \quad (4.42)$$

$$n_x = 0, 1, 2, \dots$$

$$n_y = 0, 1, 2, \dots$$

$$n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

energía que puede ser escrita como

$$\varepsilon = \hbar v(k_x + k_y) + \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 + \hbar\omega, \quad (4.43)$$

donde

$$k_x = \frac{\omega n_x}{v},$$

$$k_y = \frac{\omega n_y}{v},$$

$$k_z = \frac{2\pi n_z}{L}.$$

y v es una cantidad con unidades de velocidad.

4.2.1 Temperatura crítica

El número total de partículas N se escribe como antes, la suma de las partículas que están en el estado base N_0 más aquellas que ocupan los estados excitados de energía N_e

$$N = N_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} \quad (4.44)$$

donde $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ está dada por (4.43). En el límite termodinámico la sumatoria sobre todos los estados la podemos aproximar por una integral de volumen en el espacio k

$$N_e = \frac{1}{\Omega} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_{-\infty}^\infty dk_z \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} \quad (4.45)$$

con $\Omega = \left(\frac{2\pi}{L}\right) \left(\frac{\omega}{v}\right)^2$ el volumen de la celda unitaria en el espacio k . Sustituyendo la ecuación (4.43) en la ecuación anterior tenemos

$$N_e = \left(\frac{2\pi}{L}\right) \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_{-\infty}^\infty dk_z \frac{1}{e^{\beta(\hbar v(k_x + k_y) + \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 + \hbar\omega - \mu)} - 1}. \quad (4.46)$$

La integral puede evaluarse haciendo los cambios de variables

$$\hbar v k_x = \epsilon \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \quad (4.47)$$

$$\hbar v k_y = \epsilon \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \quad (4.48)$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} k_z = \epsilon^{1/2} \cos \theta \quad (4.49)$$

donde $\epsilon \equiv \epsilon - \hbar\omega \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, obteniéndose

$$N_e = \frac{4}{3} \frac{L}{2\pi} \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta(\epsilon + \hbar\omega - \mu)} - 1}. \quad (4.50)$$

Escribiendo la ecuación anterior en términos de la energía ϵ del sistema

$$N_e = \frac{4}{3} \frac{L}{2\pi} \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \int_{\frac{1}{2}\hbar\omega}^\infty d\epsilon \frac{(\epsilon - \hbar\omega)^{3/2} \theta(\epsilon - \hbar\omega)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}. \quad (4.51)$$

De la ecuación anterior podemos identificar la función densidad de estados $g(\epsilon)$ ya que está escrita en la forma $\int_0^\infty f(\epsilon)g(\epsilon)d\epsilon$ donde $f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon + \hbar\omega - \mu)} - 1}$ es la función de distribución de Bose-Einstein y

$$g(\epsilon) = \frac{4}{3} \frac{L}{2\pi} \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \theta(\epsilon - \hbar\omega) (\epsilon - \hbar\omega)^{3/2}. \quad (4.52)$$

Haciendo uso de la función de Bose-Einstein apropiada, definiendo $z \equiv e^{\beta\mu_1}$ donde $\mu_1 = \mu - \hbar\omega$ e introduciendo la constante $x_0 \equiv \sqrt{\hbar/m\omega}$ tenemos que la ecuación (4.50) se puede escribir de la siguiente forma

$$N_e = \frac{L}{(2\pi)^{1/2} x_0} \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^{5/2} g_{5/2}(z). \quad (4.53)$$

Como todas las partículas están en los estados excitados cuando $T = T_c$ es decir $N = N_e(T = T_c)$, y el potencial químico $\mu = \hbar\omega$ entonces el número total de partículas es

$$N = \frac{L}{(2\pi)^{1/2} x_0} \left(\frac{k_B T_c}{\hbar\omega}\right)^{5/2} g_{5/2}(1). \quad (4.54)$$

De (4.54) despejamos la temperatura crítica la cual está dada por

$$T_c = \frac{\hbar\omega}{k_B} \left[\frac{(2\pi)^{1/2} N x_0}{g_{5/2}(1) L} \right]^{2/5}. \quad (4.55)$$

Los resultados dados por las ecuaciones (4.55) y (4.17) concuerdan con las que se obtienen en la Ref. [36] para un gas de bosones atrapados por dos potenciales armónicos.

4.2.2 Fracción del condensado

La fracción del número de partículas total N que se encuentran poblando los estados excitados se obtiene combinando las ecuaciones (4.53) y (4.54)

$$\frac{N_e}{N} = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{5/2} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{5/2}(1)} \quad (4.56)$$

que para $T < T_c$ la ecuación anterior queda

$$\frac{N_e}{N} = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{5/2}.$$

La fracción del número de partículas que están en el estado base para $T < T_c$ se calcula mediante las ecuaciones (4.44) y (4.56) obteniéndose

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{5/2}. \quad (4.57)$$

y que puede observarse en la Fig. 4.2.

4.2.3 Energía interna

El cálculo de la energía interna se hará sumando las energías de las partículas en los estados con momento $\hbar\mathbf{k}$. Así

$$U = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1}, \quad (4.58)$$

donde ϵ_k es la energía por partícula y $[e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1]^{-1}$ la función de distribución de bosones en los estados. En el límite termodinámico

$$U = \frac{1}{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon_k}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} dk_x dk_y dk_z \quad (4.59)$$

sustituyendo ϵ_k dada por la ecuación (4.43) y haciendo los cambios de variable dados por las ecuaciones (4.47), (4.48) y (4.49) tenemos

$$U = N\hbar\omega + \frac{5}{2} \frac{L}{(2\pi)^{1/2} x_0} \hbar\omega \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^{7/2} g_{7/2}(z) \quad (4.60)$$

o en términos de la temperatura crítica T_c

$$U = N\hbar\omega + \frac{5}{2} N k_B T \left(\frac{T}{T_c} \right)^{7/2} \frac{g_{7/2}(z)}{g_{7/2}(1)}. \quad (4.61)$$

La energía interna se muestra en la Fig. 4.3 para el caso en $\delta = 2$.

4.2.4 Calor específico

Derivando la ecuación (4.60) respecto de T a volumen y número de partículas constante, obtenemos el calor específico a volumen constante

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

Para $T > T_c$

$$C_V = \frac{5}{2} \frac{L}{(2\pi)^{1/2} x_0} \hbar\omega \left[\frac{7}{2} \frac{k_B}{\hbar\omega} \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^{5/2} g_{7/2} + \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^{7/2} g'_{7/2}(z) \frac{\partial z}{\partial T} \right], \quad (4.62)$$

sustituyendo $\frac{dz}{dT} = -\frac{5}{2} \frac{1}{T} \frac{g_{5/2}(z')}{g'_{5/2}(z')}$ sustituyendo en la ecuación anterior resulta

$$C_V = \frac{5}{2} N k_B \left[\frac{7}{2} \frac{g_{7/2}(z)}{g_{5/2}(z)} - \frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \right]. \quad (4.63)$$

Para $T < T_c$ tenemos que

$$U = N\hbar\omega + \frac{5}{2} \frac{L}{(2\pi)^{1/2} x_0} \hbar\omega \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^{7/2} g_{7/2}(1),$$

la cual derivamos respecto de T y escribiendola en términos de la temperatura crítica nos queda

$$C_V = \frac{35}{4} k_B T \left(\frac{T}{T_c} \right)^{5/2} \frac{g_{7/2}(1)}{g_{5/2}(1)} \quad (4.64)$$

El salto en el calor específico está dado ahora por

$$\frac{\Delta C_V}{N k_B} = \frac{25}{4} \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} = 3.2095, \quad (4.65)$$

el cual puede observarse en la Fig 4.4.

4.2.5 Presión

La presión se define en términos de la función de partición $\Xi(T, V, \mu)$

$$\frac{PV}{k_B T} \equiv \ln \Xi(T, V, \mu) \quad (4.66)$$

o

$$\frac{PV}{k_B T} = - \sum_{\mathbf{k}} \ln(1 - z e^{-\beta \epsilon_{\mathbf{k}}}). \quad (4.67)$$

En el límite termodinámico aproximamos la suma por una integral quedándonos

$$\frac{PV}{k_B T} = - \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) \ln(1 - z e^{-\beta \epsilon}). \quad (4.68)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior la densidad de estados (4.52) tenemos

$$\frac{PV}{k_B T} = \frac{L}{2\pi} \left(\frac{2\pi m}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} (k_B T)^{5/2} g_{7/2}(z) \quad (4.69)$$

que con la ayuda de las ecuaciones (4.54) y (4.61) queda

$$PV = \frac{2}{5} [U - N\hbar\omega]. \quad (4.70)$$

4.2.6 Entropía

$$ST = U + PV - N\mu$$

sustituyendo PV en la ecuación anterior tenemos

$$ST = \frac{7}{5}U - N \left[\frac{2}{5}\hbar\omega - \mu \right]$$

y usando la ecuación (4.61) para U

$$\frac{S}{Nk_B} = \frac{7}{2} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{5/2} \frac{g_{7/2}(z)}{g_{5/2}(1)} - \ln(z). \quad (4.71)$$

Para el caso $T \leq T_c$ S queda simplemente

$$\frac{S}{Nk_B} = \frac{7}{2} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{5/2} \frac{g_{7/2}(1)}{g_{5/2}(1)}. \quad (4.72)$$

En la Fig. 4.5 se muestra S en los intervalos de temperatura $T < T_c$ y $T \geq T_c$.

4.3 Bosones 3D atrapados por 1 oscilador armónico

Se considera un gas de bosones (3D) no interactuantes sometidos por 1 potencial de oscilador armónico en la dirección z . En el caso isotrópico el Hamiltoniano para un bosón en este sistema es,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa r^2 \quad (4.73)$$

con

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

y

$$r^2 = z^2,$$

es decir, el potencial armónico sólo se aplica en las direcciones z . El Hamiltoniano dado por (4.73) se puede escribir como la suma de tres hamiltonianos unidimensionales

$$H = H_x + H_y + H_z$$

con

$$H_x = \frac{p_x^2}{2m},$$

$$H_y = \frac{p_y^2}{2m},$$

$$H_z = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa z^2.$$

Resolviendo la ecuación de Schrödinger $H\Psi = \varepsilon\Psi$ se encuentra que los valores propios de la energía son

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n_x^2 + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n_y^2 + \left(\frac{1}{2} + n_z\right)\hbar\omega \quad (4.74)$$

$$n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$n_z = 0, 1, 2, \dots,$$

ecuación que puede ser escrita como

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m}k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m}k_y^2 + \hbar vk_z, \quad (4.75)$$

donde

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L},$$

$$k_y = \frac{2\pi n_y}{L},$$

$$k_z = \frac{\omega n_z}{v},$$

y v es una cantidad con unidades de velocidad.

4.3.1 Temperatura crítica

El número total de partículas N se escribe como antes, la suma de las partículas que están en el estado base N_0 más aquellas que ocupan los estados excitados de energía N_e

$$N = N_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}, \quad (4.76)$$

donde ϵ está dada por (4.75). En el límite termodinámico la sumatoria sobre todos los estados la podemos aproximar por una integral de volumen en el espacio k

$$N_e = \frac{1}{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_0^{\infty} dk_z \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} \quad (4.77)$$

con $\Omega = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{\omega}{v}\right)$ el volumen de la celda unitaria en el espacio k . Sustituyendo la ecuación (4.75) tenemos

$$N_e = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{v}{\omega}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_0^{\infty} dk_z \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{\hbar^2}{2m}k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m}k_y^2 + \hbar v k_z + \frac{1}{2}\hbar\omega - \mu\right)} - 1}. \quad (4.78)$$

La integral puede evaluarse haciendo los cambios de variables

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} k_x = \epsilon^{1/2} \cos\theta \quad (4.79)$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} k_y = \epsilon^{1/2} \sin\theta \cos\phi \quad (4.80)$$

$$\hbar v k_z = \epsilon \sin^2\theta \sin^2\phi \quad (4.81)$$

donde $\epsilon \equiv \epsilon - \hbar\omega/2 \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, \pi]$, obteniéndose

$$N_e = \left(\frac{L}{2\pi}\right) \frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{2\pi m}{\hbar^2}\right) \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon + \frac{1}{2}\hbar\omega - \mu)} - 1}. \quad (4.82)$$

En términos de la energía ϵ del sistema la ecuación (4.82) queda

$$N_e = \left(\frac{L}{2\pi}\right) \frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{2\pi m}{\hbar^2}\right) \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{(\epsilon - \frac{1}{2}\hbar\omega) \theta(\epsilon - \frac{1}{2}\hbar\omega)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1}. \quad (4.83)$$

De la ecuación anterior podemos identificar la función densidad de estados $g(\varepsilon)$ ya que tiene la forma $\int_0^\infty f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon$ donde $f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon+\hbar\omega-\mu)} - 1}$ es la función de distribución de Bose-Einstein y

$$g(\varepsilon) = \left(\frac{L^2 m}{2\pi\hbar^2}\right) \frac{1}{\hbar\omega} \theta\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\hbar\omega\right) \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\hbar\omega\right). \quad (4.84)$$

Con la función de Bose-Einstein adecuada, definiendo $z \equiv e^{\beta\mu_1}$ donde $\mu_1 \equiv \mu - \frac{1}{2}\hbar\omega$ y usando la constante $x_0 \equiv \sqrt{\hbar/m\omega}$ tenemos que la ecuación (4.83) se escribe como

$$N_e = \frac{L^2}{2\pi x_0^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^2 g_2(z). \quad (4.85)$$

Cuando $T = T_c$ todas las partículas están en los estados excitados es decir $N = N_e$ y el potencial químico $\mu = \frac{1}{2}\hbar\omega$, por lo tanto de la ecuación anterior tenemos que

$$N = \frac{L^2}{2\pi x_0^2} \left(\frac{k_B T_c}{\hbar\omega}\right)^2 g_2(1). \quad (4.86)$$

La temperatura crítica la podemos despejar de (4.86) la cual está dada por

$$T_c = \frac{\hbar\omega}{k_B} \left[\frac{2\pi N x_0^2}{g_2(1) L^2}\right]^{1/2}. \quad (4.87)$$

Los resultados dados por las ecuaciones (4.87) y (4.84) concuerdan con los que se obtienen en la Ref. [36] para un gas de bosones atrapados por dos potenciales armónicos.

4.3.2 Fracción del condensado

La fracción del número de partículas total N que se encuentran poblando los estados excitados se obtiene combinando las ecuaciones (4.85) y (4.86), es decir

$$\frac{N_e}{N} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \frac{g_2(z)}{g_2(1)}. \quad (4.88)$$

Como para $T < T_c$ $z = 1$ la ecuación anterior queda

$$\frac{N_e}{N} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^2. \quad (4.89)$$

La fracción del número de partículas que están en el estado base para $T < T_c$ se calcula mediante las ecuaciones (4.76) y (4.89) obteniéndose

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2. \quad (4.90)$$

4.3.3 Energía interna

El cálculo de la energía interna se hará sumando las energías de las partículas en los estados con momento $\hbar\mathbf{k}$. Así

$$U = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1}, \quad (4.91)$$

donde $\epsilon_{\mathbf{k}}$ es la energía por partícula y $[e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1]^{-1}$ la función de distribución de bosones en los estados. En el límite termodinámico

$$U = \frac{1}{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{e^{\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} dk_x dk_y dk_z, \quad (4.92)$$

donde sustituyendo $\epsilon_{\mathbf{k}}$ dada por la ecuación (4.75) y haciendo los cambios de variables dados por las ecuaciones (4.79), (4.80) y (4.81) tenemos

$$U = \frac{1}{2} \hbar\omega N + \frac{L^2}{\pi x_0^2} \hbar\omega \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^3 g_3(z). \quad (4.93)$$

La ecuación anterior la podemos reescribir en términos del número total de partículas N y la temperatura crítica T_c de la siguiente manera

$$\frac{U}{N k_B T} = \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega}{k_B T} + 2 \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \frac{g_3(z)}{g_2(1)}. \quad (4.94)$$

Esta energía interna se muestra en la Fig. 4.3 para el caso $\delta = 1$.

4.3.4 Calor específico

Derivando la ecuación (4.94) respecto de T a volumen y número de partículas constante, obtenemos el calor específico C_V

$$C_V \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N}$$

$$C_V = \frac{L^2}{\pi x_0^2 \hbar \omega} \left[3 \frac{k_B}{\hbar \omega} \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^2 g_3(z) + \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_3'(z) \frac{\partial z}{\partial T} \right] \quad (4.95)$$

Para $T > T_c$ $N_e = N$ y $\frac{\partial z}{\partial T} = -\frac{2}{T} \frac{g_2(z')}{g_2'(z')}$ sustituyendo en la ecuación anterior resulta

$$C_V = \frac{L^2}{\pi x_0^2 k_B} \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^2 \left[3g_3(z) - 2 \frac{g_2^2(z)}{g_1(z)} \right]. \quad (4.96)$$

Utilizando la ecuación (4.85) tenemos que

$$\frac{C_V}{N k_B} = 6 \frac{g_3(z)}{g_2(z)} - 4 \frac{g_2(z)}{g_1(z)}, \quad T > T_c. \quad (4.97)$$

Para $T < T_c$, $\mu = 0$ y la ecuación (4.94) se escribe

$$U = \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{L^2}{\pi x_0^2} \hbar \omega \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_3(1)$$

derivando esta última expresión respecto de T tenemos

$$\frac{C_V}{N k_B} = 6 \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \frac{g_3(1)}{g_2(1)}, \quad T < T_c. \quad (4.98)$$

El salto en el calor calor específico está dado ahora por

$$\frac{\Delta C_V}{N k_B} = 4 \frac{g_2(1)}{g_1(1)} = 0, \quad (4.99)$$

puesto que $g_1(1) \rightarrow \infty$. Así C_V es continua con T como puede apreciarse en la Fig. 4.4.

4.3.5 Presión

$$\frac{PV}{k_B T} \equiv \ln \Xi \quad (4.100)$$

$$\frac{PV}{k_B T} = - \sum_{\epsilon} \ln(1 - z e^{-\beta \epsilon}) \quad (4.101)$$

en el límite termodinámico

$$\frac{PV}{k_B T} = - \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) \ln(1 - z e^{-\beta \epsilon}) \quad (4.102)$$

usando la ecuación (4.84) para la densidad de estados tenemos

$$\frac{PV}{k_B T} = \frac{L^2 m (k_B T)^2}{4\pi \hbar^2 \hbar \omega} g_3(z) \quad (4.103)$$

y usando la ecuaciones (4.86) y (4.94) la ecuación anterior queda

$$PV = \frac{1}{2} [U - \frac{1}{2} N_e \hbar \omega]. \quad (4.104)$$

4.3.6 Entropía

$$ST = U + PV - N\mu$$

sustituyendo PV ecuación (4.104) tenemos

$$ST = \frac{3}{2} U - N \left[\frac{1}{4} \hbar \omega - \mu \right],$$

y usando la ecuación (4.94) para U

$$\frac{S}{N k_B} = 3 \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \frac{g_3(z)}{g_2(1)} - \ln(z). \quad (4.105)$$

Para el caso $T \leq T_c$ S queda

$$\frac{S}{N k_B} = 3 \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \frac{g_3(1)}{g_2(1)}. \quad (4.106)$$

4.4 Masa efectiva y densidad de partículas

La densidad de partículas está dada por la expresión

$$n_B = \frac{N}{x_0^\delta L^{d-\delta}} \quad (4.107)$$

donde δ es el número de osciladores unidimensionales (1, 2 o 3) que someten al sistema y

$x_0 \equiv \sqrt{\hbar/m\omega}$ es la longitud característica del oscilador, es decir

$$n_B = \frac{m^{3/2}}{\hbar^{3/2}\omega^{3/2}}(k_B T_c)^3 g_3(1) \quad \delta = 3, \quad (4.108)$$

$$n_B = \frac{m^{3/2}}{(2\pi)^{1/2}\hbar^4\omega}(k_B T_c)^{5/2} g_{5/2}(1) \quad \delta = 2, \quad (4.109)$$

$$n_B = \frac{m^{3/2}}{2\pi\hbar^{7/2}\omega^{1/2}}(k_B T_c)^2 g_2(1) \quad \delta = 1. \quad (4.110)$$

Comparando las ecuaciones (4.17), (4.52) y (4.84) con la ecuación (3.8) haciendo $c_s = \hbar^2/2m^*$ resulta que nuestro sistema se comporta como un gas libre de partículas idénticas en $\delta + 3$ dimensiones, pero con una masa efectiva m^*

$$m^* = \frac{2\pi\hbar}{\omega L^2} \quad \delta = 3, \quad (4.111)$$

$$m^* = m^{1/5} \left(\frac{2\pi\hbar}{L^2\omega} \right)^{4/5} \quad \delta = 2, \quad (4.112)$$

$$m^* = m^{1/2} \left(\frac{2\pi\hbar}{L^2\omega} \right)^{1/2} \quad \delta = 1, \quad (4.113)$$

las cuales en el límite termodinámico ($L \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ y manteniendo n_B constante) se van a cero en los tres casos, es decir

$$\lim_{L \rightarrow \infty} m^* = 0 \quad \text{para } \delta = 1, 2, 3.$$

La posibilidad de representar un gas tridimensional de bosones sin interacción entre ellos pero sujeto a δ potenciales externos de oscilador armónico, como un gas libre en $3 + \delta$ dimensiones, es un resultado novedoso y más aún que la masa equivalente se vaya a cero.

En la Tabla 1 resumimos algunas de las propiedades termodinámicas calculadas aquí para el gas 3D de bosones atrapados por δ osciladores armónicos con $\delta = 1, 2$ y 3.

Tabla 1. Resumen de algunas de las propiedades termodinámicas para un gas tridimensional de bosones atrapados por $\delta = 1, 2, 3$ osciladores armónicos.

caso	$\delta = 3$	$\delta = 2$	$\delta = 1$
$g(\varepsilon)$	$\frac{1}{2}(\hbar\omega)^{-3}(\varepsilon - \frac{3}{2}\hbar\omega)^2$	$\frac{2^{3/2}}{3} \frac{L}{\pi z_0} (\hbar\omega)^{-5/2} (\varepsilon - \hbar\omega)^{3/2}$	$\frac{L^2}{2\pi z_0^2} (\hbar\omega)^{-2} (\varepsilon - \frac{1}{2}\hbar\omega)$
N_0/N	$1 - (T/T_c)^3$	$1 - (T/T_c)^{5/2}$	$1 - (T/T_c)^2$
T_c	$\frac{\hbar\omega}{k_B} \left[\frac{N}{g_3(1)} \right]^{1/3}$	$\frac{\hbar\omega}{k_B} \left[\frac{(2\pi)^{1/2} N z_0}{g_{5/2}(1) L} \right]^{2/5}$	$\frac{\hbar\omega}{k_B} \left[\frac{2\pi N z_0^2}{g_2(1) L^2} \right]^{1/2}$
$U/Nk_B T$	$\frac{3}{2} \frac{\hbar\omega}{k_B T} + 3 \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \frac{g_4(z)}{g_3(1)}$	$\frac{\hbar\omega}{k_B T} + \frac{5}{2} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{5/2} \frac{g_{7/2}(z)}{g_{5/2}(1)}$	$\frac{1}{2} \frac{\hbar\omega}{k_B T} + 2 \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \frac{g_3(z)}{g_2(1)}$
$\Delta C_V/Nk_B$	$9 \frac{g_3(1)}{g_2(1)} \simeq 6.5768$	$\frac{25}{4} \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} \simeq 3.2095$	0
PV	$\frac{1}{3}(U - \frac{3}{2}N_e\hbar\omega)$	$\frac{2}{5}(U - N_e\hbar\omega)$	$\frac{1}{2}(U - \frac{1}{2}N_e\hbar\omega)$
S/Nk_B	$4 \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \frac{g_4(z)}{g_3(1)} - \ln z$	$\frac{7}{2} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{5/2} \frac{g_{7/2}(z)}{g_{5/2}(1)} - \ln z$	$3 \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \frac{g_3(z)}{g_2(1)} - \ln z$
m^*	$\frac{2\pi\hbar}{\omega L^2}$	$m^{1/5} \left(\frac{2\pi\hbar}{L^2\omega} \right)^{4/5}$	$m^{1/2} \left(\frac{2\pi\hbar}{L^2\omega} \right)^{1/2}$

Capítulo 5

Conclusiones

Resolver el problema de un sistema de bosones en d dimensiones y con una relación de dispersión generalizada $\epsilon_k = c_s k^s$, no tan sólo nos dio información valiosa para determinar las relaciones entre s y d para las cuales existe condensación Bose-Einstein a una temperatura crítica distinta de cero o discontinuidad en el calor específico, sino que también nos proporcionó una herramienta para visualizar el problema de los bosones atrapados por osciladores armónicos como bosones ideales pero en dimensión aumentada por el número de osciladores presentes. Hacemos notar que las propiedades del gas ideal de bosones 3D, obtenidas y resumidas al principio, las recuperamos como un caso particular cuando hacemos $s = 2$ y $c_s = \hbar^2/2m$.

Para cada uno de los sistemas de bosones 3D tratados aquí con uno, dos o tres potenciales externos de oscilador armónico, fue posible deducir sus propiedades termodinámicas a partir de sus correspondientes densidades de estado. Baste resaltar que para los tres casos estudiados existe una temperatura crítica distinta de cero que es proporcional a la densidad de partículas elevada a la potencia $2/(d + \delta)$, es decir, el efecto de los potenciales además de restringir el espacio accesible a las partículas *disminuye* la temperatura crítica para una misma densidad de partículas. Por otro lado, mientras que en el gas ideal 3D de bosones no existe discontinuidad en el calor específico lo cual observamos también cuando introducimos un potencial armónico en una sola dirección, esto no es así cuando introducimos dos o tres potenciales armónicos mutuamente perpendiculares; la magnitud del salto en el calor específico aumenta con δ . De aquí podemos concluir que si

hemos de pensar a la superconductividad donde se observa un salto en el calor específico, como una condensación Bose-Einstein, habremos de pensar en bosones ideales sujetos a potenciales externos o, en su defecto, en bosones con una relación de dispersión diferente de la cuadrática.

En general, el efecto de atrapamiento de gases cuánticos genera una renormalización de las masas de las partículas en una dimensión aumentada por el número de osciladores, i.e., $d \rightarrow d + \delta$. En particular, hemos mostrado que el gas de bosones tridimensional atrapado por pozos de potencial armónicos en 1, 2 o 3 direcciones se mapea a un gas ideal de bosones en 4, 5 o 6 dimensiones, respectivamente, de masas equivalentes que tienden a cero en el límite termodinámico.

Finalmente, hemos de mencionar que los cálculos aquí mostrados fueron obtenidos dentro de la aproximación de frecuencias pequeñas o potenciales de oscilador poco restrictivos al grado de que las sumas involucradas en el cálculo de las propiedades termodinámicas pudieron ser aproximadas por integrales. Dentro de esta aproximación es posible tratar fenómenos como el de la superconductividad o el de atrapamiento de átomos neutros por campos magnéticos. Sin embargo, para describir nanoestructuras se requieren potenciales más restrictivos los cuales involucran frecuencias más altas que invalidan la aproximación antes mencionada. En este último caso las sumas involucradas deberán realizarse término a término lo cual no representa dificultad alguna si contamos con la herramienta de las supercomputadoras y que podría ser un proyecto por venir.

Apéndice A

Integral de Bose

Calcular la integral dada por la ecuación (2.13) llamada función de Bose $g_\sigma(z)$

$$g_\sigma(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx,$$

se hace de la siguiente manera. Para z pequeña

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx &= \int_0^\infty zx^{\sigma-1}e^{-x}(1 - ze^{-x})^{-1} dx \\ &= \int_0^\infty zx^{\sigma-1}e^{-x} \sum_{l=0}^\infty (ze^{-x})^l dx \\ &= \int_0^\infty x^{\sigma-1} \sum_{l=1}^\infty (ze^{-x})^l dx \\ &= \sum_{l=1}^\infty z^l \int_0^\infty x^{\sigma-1} e^{-xl} dx \\ \text{(Haciendo el cambio } y = xl) &= \sum_{l=1}^\infty \frac{z^l}{l^\sigma} \int_0^\infty y^{\sigma-1} e^{-y} dy \\ \text{(por definición } \Gamma(\nu) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} dt) &= \Gamma(\sigma) \sum_{l=1}^\infty \frac{z^l}{l^\sigma}. \end{aligned}$$

Definimos la función de Bose

$$g_\sigma(z) \equiv \sum_{l=1}^\infty \frac{z^l}{l^\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx.$$

Cuando $z \ll 1$ la función $g_\sigma(z)$ se comporta como z misma para toda σ . Puede observarse que $g_\sigma(z)$ es una función monótona creciente de z cuyo valor límite para nuestro interés es 1, así cuando $z \rightarrow 1$ $g_\sigma(z)$ se comporta como la función zeta de Riemann $\zeta(\sigma)$ [27] es decir

$$g_\sigma = \sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l^\sigma} = \zeta(\sigma) \quad (\sigma > 1). \tag{A.1}$$

Algunos valores numéricos de $\zeta(\sigma)$ se presentan a continuación

$$\begin{aligned}\zeta(3/2) &\simeq 2.612, & \zeta(2) &= \pi^2/6 \simeq 1.645, \\ \zeta(5/2) &\simeq 1.341, & \zeta(3) &\simeq 1.202, \\ \zeta(7/2) &\simeq 1.127, & \zeta(4) &= \pi^4/90 \simeq 1.082, \\ \zeta(6) &= \pi^6/945 \simeq 1.017.\end{aligned}$$

Se puede obtener una relación de recurrencia simplemente derivando $g_\sigma(z)$

$$z \frac{\partial}{\partial z} [g_\sigma(z)] \equiv \frac{\partial}{\partial(\ln z)} g_\sigma(z) = g_{\sigma-1}(z). \quad (\text{A.2})$$

Esta relación se sigue inmediatamente de la expansión en serie de $g_\sigma(z)$.

Para el caso $\sigma \leq 1$, $g_\sigma(z)$ diverge conforme $z \rightarrow 1$. Cuando $\sigma = 1$ se tiene

$$g_1(z) = \int_0^\infty \frac{dx}{z^{-1}e^x - 1} = -\ln(1-z),$$

que diverge logarítmicamente a ∞ conforme $z \rightarrow 1$. En el caso que $\sigma < 1$ definimos $z = e^{-\alpha}$, el comportamiento de $g_\sigma(e^{-\alpha})$, con $\alpha \rightarrow 0$ se determina como sigue

$$g_\sigma(e^{-\alpha}) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1} dx}{e^{\alpha+x} - 1} \approx \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1} dx}{\alpha + x}.$$

Haciendo el cambio de variable apropiado se obtiene

$$g_\sigma(e^{-\alpha}) \approx \frac{\Gamma(1-\sigma)}{\alpha^{1-\sigma}} \quad (0 < \sigma < 1). \quad (\text{A.3})$$

La expresión anterior aísla la singularidad de la función $g_\sigma(e^{-\alpha})$ en $\alpha = 0$; el resto de la función puede expandirse en potencias de α [45]

$$g_\sigma(e^{-\alpha}) = \frac{\Gamma(1-\sigma)}{\alpha^{1-\sigma}} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \zeta(\sigma-i) \alpha^i. \quad (\text{A.4})$$

Agregando (A.2) a la definición de la función $g_\sigma(z)$, ésta puede extenderse para todo valor de σ , incluyendo $\sigma \leq 0$. Para $\sigma = m$, un entero positivo tenemos

$$g_m(e^{-\alpha}) = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \left[\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i} - \ln \alpha \right] \alpha^{m-1} + \sum_{i=0, i \neq m-1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \zeta(m-i) \alpha^i. \quad (\text{A.5})$$

Las ecuaciones (A.4) y (A.5) completan la descripción de la función $g_\sigma(e^{-\alpha})$ para α pequeña.

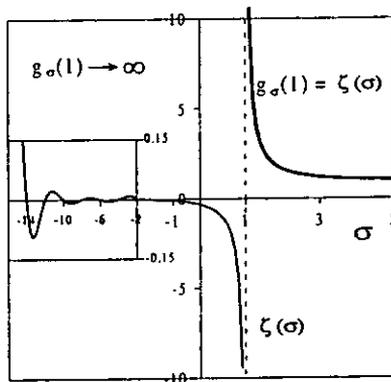


Fig. A.1 Gráfica donde se muestra que $g_\sigma(1) = \zeta(\sigma)$ para $\sigma \geq 1$ pero que para $\sigma < 1$ $g_\sigma \rightarrow \infty$ mientras que $\zeta(\sigma)$ es negativa y finita dentro de este intervalo.

Apéndice B

Integral de volumen sobre la esfera d -dimensional

El número de partículas está dado por la ecuación (3.3)

$$N = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \quad (\text{B.1})$$

con

$$n_{\mathbf{k}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)}}. \quad (\text{B.2})$$

En el límite termodinámico N se puede escribir como

$$N = \frac{1}{\Omega} \int n_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}, \quad (\text{B.3})$$

con Ω el volumen de la celda unitaria en el espacio \mathbf{k} . La energía está dada por

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$$

donde tenemos que $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon(k)$ es decir depende sólo de la magnitud de $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_d^2}$.

La ecuación (B.3) puede escribirse como

$$N = \frac{1}{\Omega} \int_0^\infty n_k dk \int_{S_k} d\sigma = \frac{1}{\Omega} \int_0^\infty n_k \Omega_d(k) dk \quad (\text{B.4})$$

donde $\Omega_d(k) = \int_{S_k} d\sigma$ es el área de la hypersfera S_k en el espacio $(d-1)$ dimensional.

En general el área de una superficie dada por

$$\phi(k_1, \dots, k_d) = \text{constante}$$

está dada por

$$A = \int_{B_r} \dots \int \frac{\sqrt{\phi_{k_1}^2 + \dots + \phi_{k_d}^2}}{|\phi_{k_d}|} dk_1 \dots dk_{d-1}$$

con $\phi_{k_i} = k_i/k$. El área del hemisferio de S_k es entonces

$$\frac{1}{2}\Omega_d(\mathbf{k}) = k \int_{B_k} \dots \int \frac{d^d k_{d-1}}{k_d} \quad (\text{B.5})$$

sobre la bola $(d-1)$ dimensional. B_k está dada por

$$k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_{d-1}^2 \leq k$$

$$k_d = \sqrt{k^2 - k_1^2 - \dots - k_{d-1}^2}$$

Definiendo las nuevas variables $\xi = k_i/k$ $i = 1, \dots, d-1$ y poniendo $\xi_d = k_d/r = \sqrt{1 - \xi_1^2 - \dots - \xi_{d-1}^2}$ se tiene que $\Omega_d(\mathbf{k})$ es proporcional a k^{d-1} es decir

$$\Omega_d(\mathbf{k}) = \omega_d k^{d-1} \quad (\text{B.6})$$

donde

$$\omega_d \equiv 2 \int \dots \int \frac{d\xi_1 \dots d\xi_{d-1}}{\xi_d}$$

Para calcular ω_d se elige un caso particular obteniéndose

$$\omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (\text{B.7})$$

Finalmente la ecuación (B.3) se escribe como

$$N = \frac{2\pi^{d/2}}{\Omega\Gamma(d/2)} \int_0^\infty n_k k^{d-1} dk \quad (\text{B.8})$$

Apéndice C

Integral de “volumen” en el espacio k

La integral dada en el capítulo 4 por (4.10)

$$N_e = \frac{1}{\Omega} \iiint \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} dk_x dk_y dk_z \quad (\text{C.1})$$

cuando

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar v(k_x + k_y) + \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 + \hbar \omega$$

queda

$$N_e = \frac{1}{\Omega} \iiint \frac{1}{\exp\beta[\hbar v(k_x + k_y) + \frac{\hbar^2}{2m} k_z^2 + \hbar \omega - \mu] - 1} dk_x dk_y dk_z,$$

donde hacemos ahora el siguiente cambio de variable

$$\hbar v k_x = \rho \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \varphi,$$

$$\hbar v k_y = \rho \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi,$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} k_z = \rho^{\frac{1}{2}} \cos \theta$$

cuyo jacobiano es

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{2u}{\hbar v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2v}{\hbar v} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \end{pmatrix} = \frac{4}{\hbar^2 v^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} uv.$$

Por tanto

$$N_e = \left(\frac{L}{2\pi}\right) \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2 \frac{4}{\hbar^2 v^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^0 dv \int_0^0 dw \frac{uv}{e^{\beta(u^2+v^2+w^2+\hbar\omega-\mu)} - 1}.$$

cambiando a coordenadas esféricas $u = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$, $v = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$, $w = r \cos \theta$, cuyo jacobiano es

$$J = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

entonces

$$\begin{aligned} N_e &= \left(\frac{L}{2\pi}\right) \frac{4}{\hbar^2 \omega^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \int_0^\pi \frac{r^4 \operatorname{sen}^3 \theta \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \, d\theta \, d\varphi \, dr}{e^{\beta(r^2 + \hbar\omega - \mu)} - 1} \\ &= \left(\frac{L}{2\pi}\right) \frac{4}{\hbar^2 \omega^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \int_0^\infty \frac{r^4 \, dr}{e^{\beta(r^2 + \hbar\omega - \mu)} - 1} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \theta \, d\theta \\ &= \left(\frac{L}{2\pi}\right) \frac{4}{\hbar^2 \omega^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \int_0^\infty \frac{r^4 \, dr}{e^{\beta(r^2 + \hbar\omega - \mu)} - 1} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi\right]_0^{\pi/2} \left[-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta\right]_0^\pi \\ &= \left(\frac{L}{2\pi}\right) \frac{8}{3\hbar^2 \omega^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \int_0^\infty \frac{r^4 \, dr}{e^{\beta(r^2 + \hbar\omega - \mu)} - 1}. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio $\varepsilon = r^2$ y después el cambio $x = \beta\varepsilon$

$$\begin{aligned} N_e &= \left(\frac{L}{2\pi}\right) \frac{4}{3\hbar^2 \omega^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} \, d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon + \hbar\omega - \mu)} - 1} \\ &= \left(\frac{L}{2\pi}\right) \frac{4}{3\hbar^2 \omega^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \beta^{-5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} \, dx}{e^x x^{-1} - 1}. \end{aligned}$$

Ahora usando la función de Bose respectiva (ver Apéndice A), con $\beta = 1/k_B T$ tenemos

$$N_e = \left(\frac{L}{2\pi}\right) \frac{4}{3\hbar^2 \omega^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} (k_B T)^{5/2} g_{5/2}(z') \Gamma(5/2), \quad (\text{C.2})$$

como $\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$ tenemos finalmente que

$$N_e = \frac{L}{2\pi} \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \left(\frac{2\pi m}{\hbar^2}\right)^{1/2} (k_B T)^{5/2} g_{5/2}(z'). \quad (\text{C.3})$$

De manera análoga se calcula (C.1) para los casos en que $\varepsilon = \hbar v(k_x + k_y + k_z) + \frac{3}{2}\hbar\omega$ y $\varepsilon = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m}k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m}k_y^2 + \hbar v k_z$

Lista de figuras

Figura 2.1 Densidad de estados $g(\varepsilon)$ para un gas ideal 3D de bosones.

Figura 2.2 Fracción condensada para un gas ideal 3D de bosones.

Figura 2.3 Energía interna de un gas ideal 3D de bosones.

Figura 2.5 Entropía S de un gas ideal 3D de bosones.

Figura 2.6 Potencial químico μ para un gas ideal 3D de bosones.

Figura 3.1 Calor específico dentro del intervalo $1 < d/s \leq 2$, evaluado en T_c .

Figura 3.2 Calor específico C_V para $d/s = 1/2$ y $d/s = 1$. T_F es la temperatura de Fermi de un gas de fermiones libres en d dimensiones.

Figura 3.3 Entropía como función de la temperatura T/T_c para valores de $d = 1, 2, 3$ y $s = 1, 2$.

Figura 4.1 Potencial químico $\mu_1 \equiv \mu - \frac{\delta}{2}\hbar\omega$ para un gas 3D de bosones atrapados por $\delta = 1, 2$ y 3 osciladores armónicos.

Figura 4.2 Fracción condensada para un gas de bosones 3D atrapados por $\delta = 1, 2, 3$ osciladores armónicos.

Figura 4.3 Energía interna para un gas 3D de bosones atrapados por $\delta = 1, 2, 3$ osciladores armónicos.

Figura 4.4 Calor específico C_V para un gas 3D de bosones atrapados por $\delta = 1, 2, 3$ osciladores armónicos.

Figura 4.5 Entropía para un gas 3D de bosones atrapados por δ potenciales armónicos.

Lista de tablas

Tabla 1. Resumen de algunas de las propiedades termodinámicas para un gas tridimensional de bosones atrapados por $\delta = 1, 2, 3$ osciladores armónicos.

References

- [1] C. Townsend, W. Ketterle y S. Stringari, "Bose-Einstein condensation," *Physics World*, 10 (3), 29 (1997).
- [2] C. E. Wieman, "The Richtmyer Memorial Lecture: Bose-Einstein condensation in an Ultracold Gas," *Am. J. Phys.* 64, 847 (1996).
- [3] F. J. Owens, C. P. Poole, "The new superconductors," (Plenum Press. N.Y., 1996).
- [4] L. J. Challis, "Physics in less than three dimensions," *Contemporary Physics* 33 (2), 111 (1992).
- [5] E. Corcoran, G. Zorpette, "Diminishing dimensions," *Scientific American* 263 (5), 74 (1990).
- [6] Jeroen W. G. Wildöer, L. C. Venema, A. G. Rinzler, R. E. Smalley y C. Dekker, "Electronic structure of atomically resolved carbon nanotubes," *Nature* 391, 1 (1998).
- [7] M. A. Kastner, "Artificial atoms," *Physics Today*, enero (1993).
- [8] P. Yam, "Dot's incredible," *Scientific American* 269 (5), 7 (1993).
- [9] M. A. Reed "Quantum Dots," *Scientific American* 268 (1), 118 (1993).
- [10] I. F. Silvera, "Bose-Einstein condensation," *Am. J. Phys.* 65 (6), 570 (1997).
- [11] C. Fernández-Pineda, L. L. Sánchez-Soto, "A la búsqueda de la condensación perdida: el gran sueño de Bose y Einstein," *Rev. Esp. Fís.* 9 (3), 1 (1995).
- [12] L.V. Hau, S.E. Harris, Z. Dutton and C.H. Behroozi, "Light speed reduction to 17 meters per second in an ultracold atomic gas," *Nature* 397, 594 (1999).

- [13] P. Kapitza, *Nature* **141**, 74 (1938).
- [14] F. London, "On Bose-Einstein condensation," *Phys. Rev.* **54**, 947 (1938); F. London, *Nature* **141**, 643 (1938); F. London, "On the Nature of the Superconducting State," *Phys. Rev.* **51**, 678 (1937); F. London, *Physica* **3**, 450 (1936); E. M. Lifshitz, "Superfluidity," *Scientific American*, junio (1988).
- [15] J. M. Blatt and K. W. Boer, "Bose-Einstein Condensation of excitons," *Phys. Rev.* **126**, 1691 (1962); D. W. Snoke, J. P. Wolfe and A. Mysyrowicz, "Evidence for Bose-Einstein condensation of excitons in Cu_2O ," *Phys. Rev. B* **41**, 11171 (1990); J.L. Lin and J.P. Wolfe, "Bose-Einstein Condensation of Paraexcitons in Stressed Cu_2O ," *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1222 (1993); A. V. Korolev, M. A. Liberman, "Bose condensation and superfluidity of excitons in a high magnetic field," *Phys. Rev. B* **50**, 14077 (1994).
- [16] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, "Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor," *Science* **269**, 198 (1995).
- [17] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett and R.G. Hulet, "Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions," *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
- [18] K. B. Davis *et al.* "Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms," *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [19] F. Reif, "Superfluidity and quasi-particles," *Scientific American* **203** (5), 138 (1960).
- [20] S. I. Shevchenko, "Theory of two-dimensional superfluidity in a nonuniform external field," *Sov. Phys. JETP* **73**, 1009 (1991).

- [21] J. G. Bednorz and K. A. Müller, "Possible High T_c Superconductivity in the Ba-La-Cu-O System," *Z. Phys. B* **64**, 189 (1986).
- [22] C.W. Chu, P.H. Hor, R.L. Meng, L.Gao, Z.J. Huang and Y.Q. Wang, "Evidence for Superconductivity above 40K in the La-Ba-Cu-O Compound System," *Phys. Rev. Lett.* **58**, 405 (1987).
- [23] Jean-Marc Triscone y Oystein Fischer, "Las superredes de superconductores," *Mundo científico (La recherche)* **135**, 13 (1992).
- [24] S. Kivelson, D. H. Lee and S. C. Zhang, "Electrons in flatland," *Scientific American* **274** (3), 64 (1996).
- [25] K. Huang, *Statistical Mechanics* (Wiley, N.Y., 1963).
- [26] F. London, *Superfluids II* (Wiley, N.Y., 1954).
- [27] R.K. Pathria, *Statistical mechanics* (Pergamon Press, N.Y., 1985).
- [28] N.W. Ashcroft, N.D. Mermin, *Solid State Physics* (HRW International Editions, N.Y., 1976).
- [29] G. Cook, R. H. Dickerson, "Understanding the chemical potential," *Am. J. Phys.* **63**, 737 (1995).
- [30] D.L. Goodstein, *States of matter* (Dover Publications, Inc, N.Y., 1985).
- [31] H.B. Callen, *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, Second Edition (John Wiley, N.Y., 1972).
- [32] G. Fischer, "On phase transformations," *Am. J. Phys.* **25**, 100 (1957).

- [33] V.C. Aguilera-Navarro and G.A. Estévez, "Analytic approximation for the chemical potential of an ideal boson system," *Am. J. Phys.* **56**, (1988).
- [34] L.F. Magaña, E. Cctina and A.A. Valladares, "The free-electron gas in n dimensions," *Am. J. Phys.* **45**(10), 960 (1977).
- [35] V. C. Aguilera, M. de Llano and M.A. Solís, "Bose-Einstein condensation for general dispersion relations," *Eur. J. Phys.* **20**, 177 (1999).
- [36] V. Bagnato, D. E. Pritchard and D. Kleppner, "Bose-Einstein condensation in an external potential," *Phys. Rev. A* **35**, 10 (1987).
- [37] S. R. de Groot, G. J. Hooyman and C. A. ten Seldam, "On the Bose-Einstein condensation," *Proc. R. Soc. A* **203**, 266 (1950).
- [38] H. Haugerud, T. Haugset, F. Ravndal, "A more accurate analysis of Bose-Einstein condensation in harmonic traps," *Phys. Lett. A* **225**, 18 (1997).
- [39] K. Kirsten, D. J. Toms, "Density of states for Bose-Einstein condensation in harmonic oscillator potentials," *Phys. Lett. A* **222**, 148-151 (1996).
- [40] K. Kirsten, D. J. Toms, "Bose-Einstein condensation of atomic gases in a general harmonic-oscillator confining potential trap," *Phys. Rev. A* **54**, 4188 (1996).
- [41] Martin Ligare, "Numerical analysis of Bose-Einstein condensation in a three-dimensional harmonic oscillator potential," *Am. J. Phys.* **66**, 185 (1998).
- [42] R. K. Pathria, "Bose-Einstein condensation of a finite number of particles confined to harmonic traps," *Phys. Rev. A* **58**, 1490 (1998).

- [43] W. J. Mullin, "Bose-Einstein condensation in harmonic potential," *J. of Low Temperature Physics* **106**, 615 (1997).
- [44] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Lal e, *Quantum Mechanics*, Vol. 1 (John Wiley & sons).
- [45] J.E. Robinson, "Note on the Bose-Einstein Integral Functions," *Phys. Rev.* **83**, 678 (1951).