

112



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES  
CUAUTITLÁN**

**“MEDICIÓN DE PIEZAS  
MECÁNICAS Y APLICACIÓN DE  
SOLDADURA MEDIANTE ROBOT”**

280939

**T E S I S**  
**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**  
**INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA**  
**P R E S E N T A**  
**JOSÉ CARLOS ZAVALA JURADO**

**ASESOR: ING. NICOLÁS CALVA TAPIA**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN  
 UNIDAD DE ADMINISTRACION ESCOLAR  
 DEPARTAMENTO DE EXÁMENES PROFESIONALES

ASUNTO: VOTOS APROBATORIOS

DR. JUAN ANTONIO MONTARAZ CRESPO  
 DIRECTOR DE LA FES-CUAUTITLAN  
 P R E S E N T E

AT'N: Q. M. DEL CARMEN GARCIA MIJARES  
 Jefe del Departamento de Exámenes  
 Profesionales de la FES-C

Con base en el Art. 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos el Trabajo de:  
Tesis con el nombre de  
 "Medición de piezas mecánicas y aplicación de soldadura mediante robot".

que presenta el pasante: JOSE CARLOS ZAVALA JURADO  
 con número de cuenta: 08907373-7 para obtener el título de:

INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA

Considerando que dicho trabajo reúne los requisitos necesarios para ser discutido en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO

A T E N T A M E N T E.  
 "POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
 Cuautitlán Izc., México, a 26 de Mayo de 2000

|               |                                     |
|---------------|-------------------------------------|
| PRESIDENTE    | ING. JORGE BUENDIA GOMEZ            |
| VOCAL         | ING. NICOLAS CALVA TAPIA            |
| SECRETARIO    | ING. MARGARITA LOPEZ LOPEZ          |
| 1ER. SUPLENTE | ING. JULIO CESAR VAZQUEZ FUENTES    |
| 2DO. SUPLENTE | ING. CORINA ADRIANA SANDOVAL GARCIA |

*[Firma]*  
 \_\_\_\_\_  
 @apia  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

*A Dios por haberme hecho consciente de la creación*

*A tí mamá, por tu amor y sensibilidad hacia nosotros, por todos tus esfuerzos, que no son pocos, por tu gran calidad humana,*

*A ti papá, por tu ejemplo, por tu dedicación hacia nosotros, por el amor que nos has brindado,*

*A ustedes papá y mamá, por infundir en nosotros el deseo del mejoramiento personal y social, la inclinación a la búsqueda del conocimiento y el respeto hacia los demás*

*A mis hermanos, por su apoyo incondicional, por ser grandes compañeros de mi vida*

*A mis abuelos , luz y alegría de mi niñez*

*A mis profesores, que han coadyuvado en la preparación  
de la juventud de México*

*A mi Universidad, por ser hogar de ideas, desarrollo,  
evolución,*

*Al profesor Nicolás Calva, por su apoyo y esfuerzo, un  
reconocimiento a su trayectoria docente.*

*A Jesús Solís, por su gran ejemplo, por su valentía.*

*A mi país, que espera más de mi.*

# INDICE

---

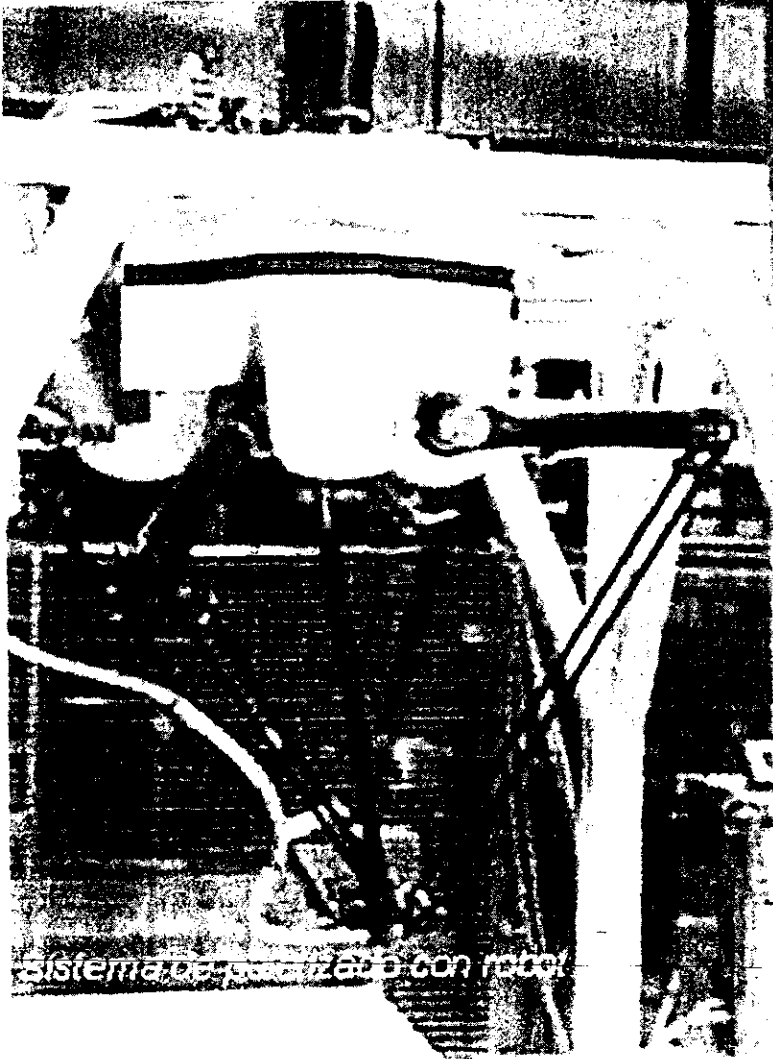
|   |    |
|---|----|
| I.-Introducción   | 1  |
| II.-Robots.   | 9  |
| 2.1Cinemática.  | 10 |
| 2.1.1 Geometría de matrices.  | 10 |
| Posición y orientación de cuerpos rígidos.  | 10 |
| Transformación de coordenadas.  | 12 |
| Transformaciones homogéneas   | 15 |
| Transformaciones homogéneas inversas  | 17 |
| 2.1.2 Geometría de cuaterniones.  | 18 |
| Obtención de la matriz de rotación.   | 18 |
| Cálculo del ángulo y eje de giro a partir<br>de la matriz de rotación             | 21 |
| Cuaterniones  | 23 |
| Transformaciones de matrices a cuaterniones.                                      | 26 |
| 2.1.3 Comparación de cálculos entre matrices<br>y cuaterniones                    | 27 |
| 2.1.4 Modelo cinemático del brazo de un manipulador.                              | 32 |
| Cadenas cinemáticas abiertas.   | 32 |
| La notación Denavit-Hartenberg.   | 34 |
| Cinemática directa de un robot de seis ejes<br>de revolución usando cuaterniones. | 41 |
| Cinemática Inversa.   | 51 |
| Métodos de solución.  | 53 |

|  |     |
|--|-----|
| Solución de la ecuación cinemática<br>de un manipulador 5-R-1-P. | 55  |
| 2.2 Estática.  | 63  |
| 2.2.1 Análisis de fuerzas y momentos                             | 63  |
| Balanceo de fuerzas y momentos                                   | 63  |
| Torques equivalentes en articulaciones                           | 66  |
| Dualidad   | 69  |
| Transformación de fuerzas y momentos                             | 69  |
| 2.2.2 Rigidez  | 71  |
| Análisis de deflexión del punto de aplicación.                   | 72  |
| La transformación principal en matrices de acoplo.               | 74  |
| 2.2 Dinámica.  | 78  |
| 2.3.1 La formulación lagrangiana                                 | 78  |
| III.-Sistemas de Control.  | 85  |
| 3.1 Sistemas de control de trayectoria                           | 86  |
| 3.1.1 Tipos.   | 86  |
| 3.1.2 Control de posición con esquema local.                     | 89  |
| 3.1.3 Control de trayectoria preciso.                            | 91  |
| IV.- Aplicaciones Industriales.                                  | 95  |
| 4.1.- Soldadura de arco.   | 96  |
| 4.1.1 Introducción.  | 96  |
| 4.1.2 Principio de funcionamiento del proceso MIG/MAG            | 98  |
| 4.1.3 Parámetros de soldadura                                    | 100 |
| 4.1.4 Equipo   | 106 |
| 4.1.5 Interface con robot  | 114 |
| 4.1.6 Recomendaciones prácticas                                  | 117 |
| 4.2.- Soldadura por resistencia o de punto.                      | 121 |
| 4.2.1 Introducción   | 121 |
| 4.2.2 Principio de funcionamiento                                | 123 |
| 4.2.3 Equipo de soldadura  | 127 |

|                          |  |     |
|--------------------------|--|-----|
| 4.2.4                    | Parámetros de soldadura  | 130 |
| 4.2.5                    | Recomendaciones prácticas  | 132 |
| V.-                      | Medición de piezas mecánicas con robot.                              | 135 |
| 5.1                      | Desarrollo   | 136 |
| 5.1.1                    | Objetivo   | 136 |
| 5.1.2                    | Método   | 137 |
| 5.1.3                    | Descripción de las partes  | 138 |
| 5.1.4                    | Descripción del programa del robot y algoritmos                      | 141 |
| 5.1.5                    | Listado del programa para el robot                                   | 150 |
| Conclusiones             |  | 161 |
| Bibliografía.            |  | 165 |
| Apéndice A               |  | 167 |
| Programa 1.              | Rotaciones mediante matrices con cálculo intermedio de posición.     | 167 |
| Programa 2.              | Rotaciones mediante cuaterniones con cálculo intermedio de posición. | 168 |
| Programa 3.              | Rotaciones mediante matrices sin cálculo intermedio de posición.     | 170 |
| Programa 4.              | Rotaciones mediante cuaterniones sin cálculo intermedio de posición. | 171 |
| Rutinas comunes          | para los programas de rotaciones.                                    | 172 |
| Apéndice B               |  | 183 |
| Programa para el cálculo | de la posición del extremo de un brazo de seis ejes de revolución.   | 183 |
| Apéndice C               |  |     |
| Movimiento Diferencial : | Matriz Jacobiana:  | 187 |



# INTRODUCCIÓN



sistema de potencia con motor

# I

## INTRODUCCIÓN

---

La historia del hombre sobre la tierra se distingue por tener ciertos hechos cruciales que han definido la forma de vida y de pensamiento de las generaciones que les suceden. Así por ejemplo, la invención de las primeras máquinas en Europa decidió la desaparición gradual de los talleres de manufactura artesanal, para dar paso al nacimiento de las primeras fábricas, donde el trabajo de los hombres consistía en mantener funcionando un sistema productivo en serie, con ello, las costumbres, actividades y formas de vida de los trabajadores se vieron modificadas de forma sustantiva. La invención de la computadora, como otro ejemplo, ha permitido suprimir las horas de cálculo manual por el uso de programas de cálculo que facilitan el proceso de información. Entre esos acontecimientos importantes de la historia del hombre se encuentra la invención y uso de los robots.

Un robot es un dispositivo que conjuga dos cualidades, según una definición aceptada generalmente : por un lado , hace uso del control numérico para el posicionamiento de sus diferentes elementos mecánicos, y por otro lado, permite reproducir movimientos que ya han sido programados de antemano en un ciclo en que la máquina puede simular comportamiento autónomo. En

otras definiciones se considera el número de grados de libertad de la máquina para determinar si es o no un robot.

En México, el uso de los robots es relativamente nuevo, de entre las diferentes categorías de los robots, los del tipo industrial son los más numerosos en nuestro país, y son por cierto muy diferentes a la concepción que la mayoría de la gente tiene sobre ellos.

Me enfocaré en esta oportunidad a los robots industriales y buscaré presentar los elementos teóricos más importantes, así como un desarrollo práctico que busque enlazar teoría y práctica, como lo es el caso de la medición de piezas mecánicas y aplicación de soldadura.

Un robot industrial es un mecanismo diseñado para manipular herramientas y realizar un trabajo de cierta aplicación, generalmente tiene seis grados de libertad, es decir, tiene seis articulaciones y sus enlaces entre ellas, las cuales permiten realizar movimientos con respecto a seis ejes de referencia, ver figura 1.1. Los ejes de un robot industrial son casi siempre de dos tipos: ejes de revolución, que significa que los enlaces giran con respecto a cada eje, o ejes prismáticos, en los cuales el enlace o brazo se desplaza linealmente con respecto a su eje.

Los robots industriales son usados principalmente por dos razones :

- 1.- Son precisos y rápidos. Esta cualidad les permite desarrollar distintas tareas en una línea industrial de producción.

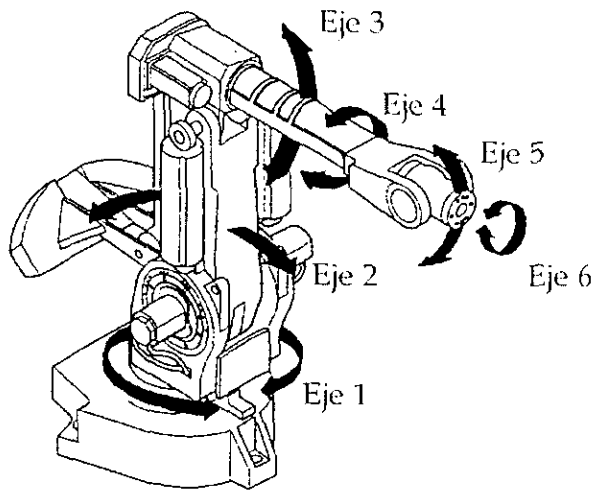


Fig 1.1 El manipulador IRB6400 tiene 6 ejes

2.-Son adaptables y flexibles, es decir, pueden ser reprogramados en forma relativamente sencilla para realizar diferentes trayectorias y tareas.

En una línea de producción, la decisión para determinar si un trabajo se ejecuta de forma manual, o se ocupa una máquina dedicada o se ocupa un robot depende de varios factores, entre ellos se pueden mencionar:

1.- El volumen de producción. Entre mayor sea es más factible el uso de máquinas dedicadas o robots.

2.- El tipo de aplicación. Si la aplicación es riesgosa o difícil para un operario, se buscará el uso de maquinaria, ya sea de máquinas dedicadas o de robots.

3.- La variación de los modelos de producción. Si se ha determinado utilizar maquinaria, pero no se sabe si decidir entre máquinas dedicadas o robots, este parámetro ayudará a decidir: entre mayor sea la necesidad de variar la tarea por los diferentes modelos a producir, mayor será también la necesidad de emplear un robot industrial.

Como es de notarse, el uso de los robots se contrapone al uso de mano de obra para ejecutar un trabajo, y ésta ha sido razón para los temores de muchos trabajadores al observar el uso cada vez más frecuente de este tipo de máquinas en las diferentes fases de un proceso productivo, sin embargo, en muchos casos, los robots han venido a reemplazar a los trabajadores sobre todo en aquellas áreas donde se tiene alto riesgo, como lo es la aplicación de pintura, donde la emisión constante de gases tóxicos afecta gravemente la salud de los operarios, o la de soldadura de arco, la emisión de gases, calor y rayos dañinos pone también en riesgo la salud de los trabajadores.

En México, la presencia de los primeros robots industriales se identifica con la instalación de maquinaria en algunas plantas automotrices. Los primeros robots industriales estuvieron disponibles en Norteamérica y Europa durante la segunda mitad de la década de los 70's, pero no es sino hasta la siguiente década cuando se traen a México algunos de ellos, sus primeras aplicaciones fueron la pintura y la soldadura, ellas dentro de las empresas automotrices.

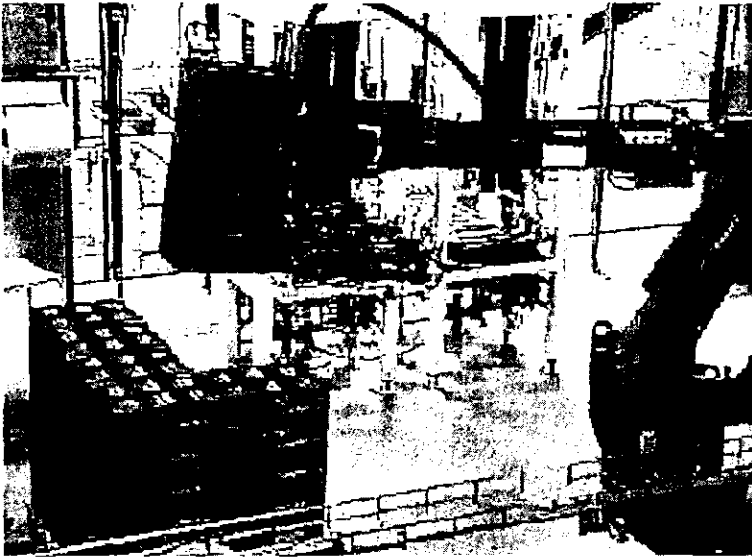
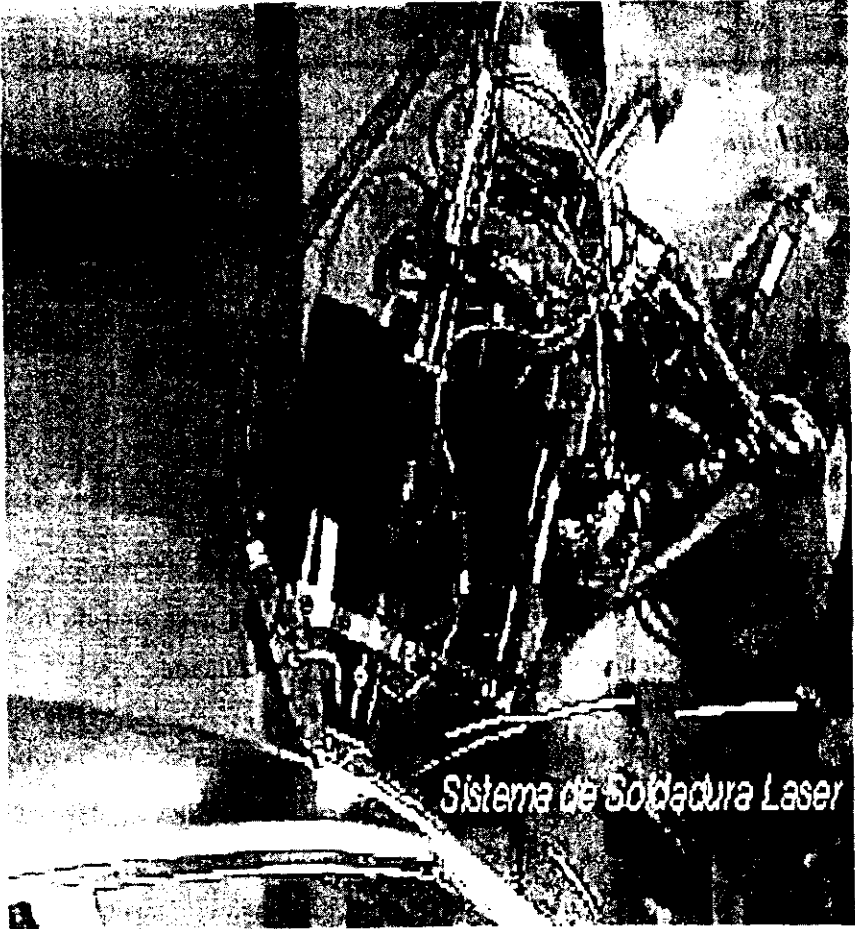


Fig 1.2 Manipulador utilizado para el empaque de productos lácteos

*desarrolla una aplicación original que aportara algún beneficio a la robótica en México. Lo que resulte de este trabajo quede como referencia para aquellos que deseen profundizar más en el tema.*

II

ROBOTS



## II ROBOTS

---

### 2.1 Cinemática

---

La cinemática de un manipulador es el estudio de la geometría de los movimientos del brazo del manipulador. Su importancia radica en que es una herramienta fundamental para el diseño y control .

#### ▨ 2.1.1 Geometría de matrices.

*Posición y orientación de un cuerpo rígido.*

El conjunto de enlaces del brazo de un manipulador puede ser modelado como un sistema de cuerpos rígidos. La localización de cada uno de los enlaces se describe completamente por su posición y orientación.

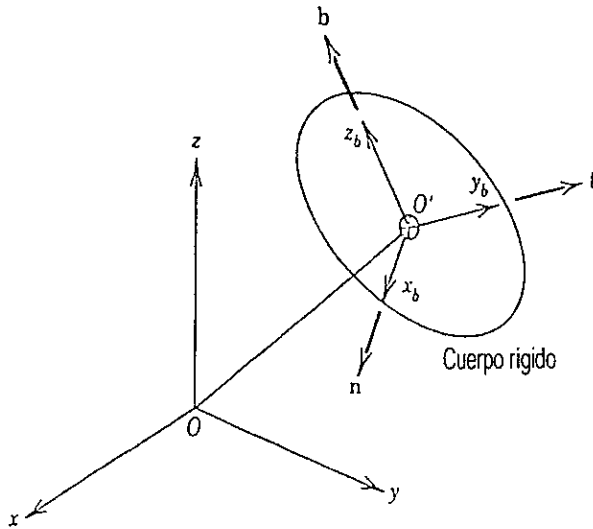
La posición puede ser representada por las coordenadas de un punto arbitrario fijo con respecto al cuerpo rígido. Sea por ejemplo  $O$ -xyz un sistema de ejes coordenados fijo al piso y sea  $O'$  un punto arbitrario fijo al cuerpo rígido, tal como se muestra en la figura 2.1. Entonces, la posición del cuerpo rígido con respecto al marco de referencia  $O$ -xyz es :



$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

(2-1)

donde  $\mathbf{x}_0$  es un vector columna de  $3 \times 1$ .



2.1 Posición y orientación de un cuerpo rígido

Para representar la orientación de un cuerpo rígido, se utilizan tres ejes coordenados  $x_b, y_b, z_b$ , los cuales se fijan al cuerpo como se muestra en la figura anterior. Los ejes forman otro sistema de ejes coordenados  $O'-x_b y_b z_b$ , el cual se mueve junto con el objeto. Sean  $\mathbf{n}, \mathbf{t}$  y  $\mathbf{b}$  los vectores unitarios apuntando a las direcciones de los ejes coordenados  $x_b, y_b$  y  $z_b$  respectivamente. Los componentes de cada vector unitario son los cosenos directores de cada eje coordenado proyectado en el sistema  $O-xyz$ . Por

conveniencia se combinan los tres vectores  $\mathbf{n}$  y se escriben en una matriz  $\mathbf{R}$  de  $3 \times 3$  :

$$\mathbf{R} = [\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b}] \tag{2-2}$$

La matriz  $\mathbf{R}$  describe completamente la orientación de un cuerpo rígido

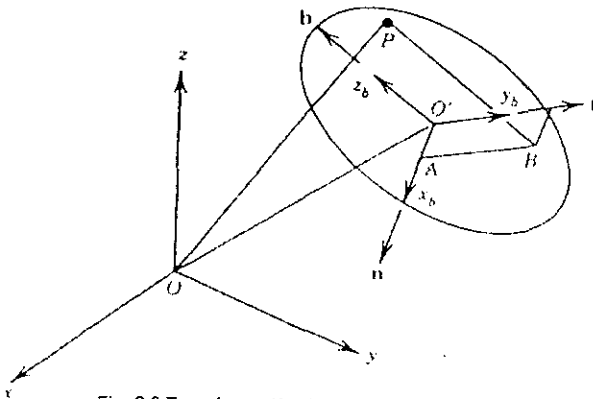


Fig. 2.2 Transformación de coordenadas

con respecto a un sistema de ejes coordenados O-xyz .Dado que sus vectores columna son ortogonales entre ellos y tienen una magnitud unitaria, se dice que es una matriz ortonormal

### *Transformación de coordenadas*

Sea P un punto arbitrario en el espacio, como se muestran en la figura 2.2. Las coordenadas del punto P con respecto al sistema de ejes coordenados O-xyz serán :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2-3)$$

La posición de P puede también ser representada con referencia al sistema coordenado que se encuentra fijo al cuerpo rígido,  $O'x_b y_b z_b$ , por la siguiente ecuación:

$$X^b = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

La relación entre estos dos sistemas coordenados define la transformación de coordenadas entre el marco fijo y el que se encuentra sobre el cuerpo. Para obtenerla se utilizan la posición y la orientación del cuerpo rígido, las cuales son representadas por el vector  $x_0$  y la matriz R que recién se acaban de describir. Según la figura 2.2, el punto P puede ser alcanzado a través de los puntos O', A y B, lo cual se puede representar por:

$$OP = OO' + O'A + AB + BP \quad (2-5)$$

donde  $OP = x$ ,  $OO' = x_0$ . Es de notar que los vectores O'A, AB, BP son paralelos a los vectores unitarios  $n$ ,  $t$ ,  $b$ , respectivamente, y sus longitudes están dadas por  $u$ ,  $v$  y  $w$ , de forma que se puede reescribir la expresión como:

$$x = x_0 + un + vt + wb \quad (2-6)$$

es decir, según ecuaciones (2-2) y (2-4)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}\mathbf{x}^b \quad (2-7)$$

La ecuación (2-7) provee la transformación de coordenadas para pasar de las coordenadas del cuerpo  $\mathbf{x}^b$  a las coordenadas fijas  $\mathbf{x}$ . Esta transformación de coordenadas viene dada en términos de  $\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{R}$ , que representan posición y orientación del cuerpo rígido.

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (2-7) por la transpuesta  $\mathbf{R}^T$  de la matriz  $\mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{R}^T \mathbf{x} = \mathbf{R}^T \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{x}^b \quad (2-8)$$

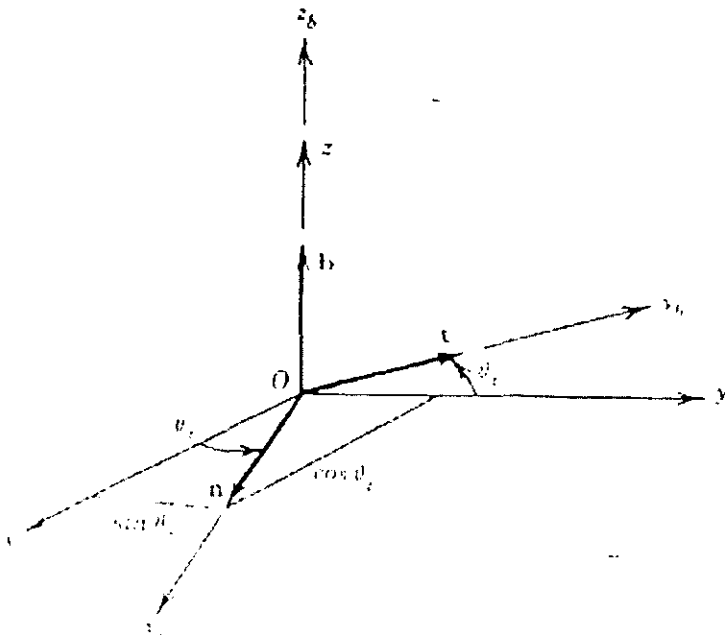


Fig 2-3 Vectores unitarios del sistema de coordenadas de un cuerpo rígido

Al realizar el producto de la parte derecha considerando que los vectores componentes  $n, t, b$  son ortonormales entre sí, se encuentra el siguiente resultado:

$$\mathbf{x}^b = -\mathbf{R}^T \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}^T \mathbf{x} \quad (2-9)$$

La ecuación (2-9) representa la transformación de los ejes coordenados a las coordenadas del cuerpo, es decir, es la inversa de la transformación original (2-7). De lo anterior se puede apreciar que la transformación inversa se obtiene simplemente usando la matriz transpuesta de la matriz  $\mathbf{R}$ .

La matriz  $\mathbf{R}$  tiene tres significados físicos. Puede representar:

- la orientación del sistema de ejes coordenados  $O'-x_b y_b z_b$  con respecto al sistema  $Oxyz$ , donde el vector columna representa los cosenos directores de cada eje de  $O'-x_b y_b z_b$  proyectados en el sistema  $O'-xyz$ .
- la transformación de coordenadas  $O'xbyzb$  a coordenadas  $Oxyz$ ,
- la rotación de un vector en el sistema de coordenadas  $O-xyz$ .

#### *Transformaciones homogéneas.*

Retomemos la transformación de coordenadas dada por la ecuación (2.7), donde el primer término de la derecha representa la transformación de translación, mientras que el segundo representa la transformación de rotación.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}\mathbf{x}^b \quad (2-10)$$

Si se definen los vectores

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}^b = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

Y la matriz A de 4x4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} R & 1 & x_0 \\ - & - & - \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

Los vectores originales  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}_b$  son aumentados añadiendo un "1" como un cuarto elemento, de lo cual resulta un vector 4x1. De la misma forma, la matriz de rotación R es extendida a 4x4 combinándola con el vector  $\mathbf{x}_0$  de 3x1, con tres ceros y con un 1 en el cuarto renglón. La ecuación (2-10) puede ser reescrita de la siguiente forma :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}^b \quad (2-13)$$

Es decir:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 1 & x_0 \\ - & - & - \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

La ecuación (2-14) se conoce como transformación homogénea y representa tanto la posición como la orientación del marco  $O-x_b y_b z_b$ . Obsérvese que para una secuencia de transformaciones, la transformación homogénea es una forma más compacta de expresión y de cálculo que la expresión de rotaciones mediante matrices de  $3 \times 3$ . Si consideramos  $n$  transformaciones consecutivas y siendo  $A_i^{i-1}$  la matriz  $4 \times 4$  asociada con la transformación homogénea del sistema de coordenadas  $i$  al sistema de coordenadas  $i-1$ , entonces, la posición del vector  $X^n$  en el marco  $n$  es transformado a  $X_0$  en el marco 0 mediante :

$$X_0 = A_1^0 A_2^1 \dots A_n^{n-1} X^n \quad (2-15)$$

*Transformaciones homogéneas inversas.*

De la ecuación (2-13), usando transformaciones homogéneas, la transformación inversa de coordenadas está dada por:

$$X^b = A^{-1} X \quad (2-16)$$

Por otro lado, utilizando matrices de  $3 \times 3$ , de la ecuación (2-9), la misma transformación inversa es :

$$x^b = -R^T x_0 + R^T x \quad (2-17)$$

Para convertir la expresión que se encuentra arriba en una expresión matriz de  $4 \times 4$ , se debe determinar la matriz  $A^{-1}$ . Comparando la expresión (2-17) con (2-10), se encuentra que  $x_0$  de (2-10) se reemplaza por  $-R^T x_0$  en (2-17).

mientras que  $\mathbf{R}$  simplemente se reemplaza por  $\mathbf{R}^T$ . Aplicando la misma conversión que en (2-12), se obtiene:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & | & -\mathbf{R}^T \mathbf{x}_0 \\ \hline 0 & | & 1 \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

### 2.1.2 Geometría de cuaterniones

*Obtención de la matriz de rotación.*

En el apartado anterior, se describieron las matrices de rotación de dimensión 3x3, sin embargo, no se explicó de forma específica como definir las. Primero es necesario considerar que cada matriz de rotación tiene un eje de rotación. Para una matriz de rotación  $\mathbf{R}$ , se cumple :

$$\text{DET}(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}) \text{ tiene como solución } \lambda = 1 \quad (2-19)$$

es decir, el valor característico de una matriz de rotación es igual a 1. Dada esta condición, se deduce que hay un vector  $\omega$ , diferente de cero, con la propiedad

$$\omega = \mathbf{R} \omega \quad (2-20)$$

donde la longitud de  $\omega$  es inmaterial y puede asumirse que es un vector unitario.  $\omega$  puede también considerarse como el eje de rotación de la matriz  $\mathbf{R}$ . Si se conocen los valores del eje de rotación, así como del ángulo de giro, es posible obtener la matriz de rotación.



¡Obsérvese la figura 2.4:

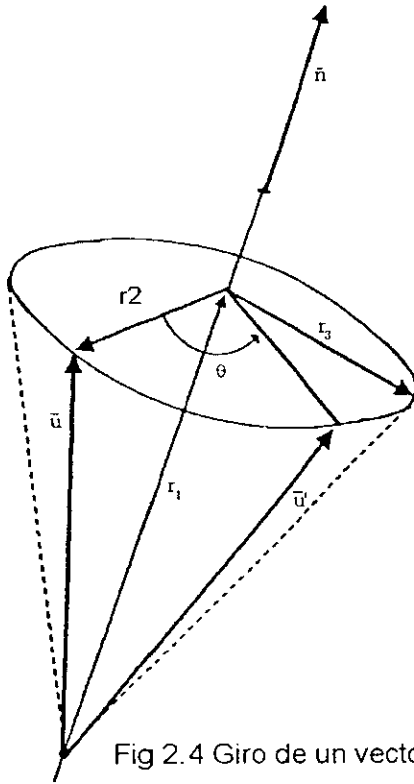


Fig 2.4 Giro de un vector

El vector  $\vec{u}$  está rotado a la posición  $\vec{u}'$ .  $\vec{u}$  puede ser descompuesto en  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  donde  $\vec{r}_1$  es paralelo a  $\vec{n}$  y  $\vec{r}_2$  está en ángulo recto con  $\vec{n}$ . Introduciendo  $\vec{r}_3$ , el cual es  $\vec{r}_2$  girado  $90^\circ$  alrededor de  $\vec{n}$ . Se puede demostrar que :

$$\vec{r}_1 = (\vec{n} \cdot \vec{u}) \vec{n} \tag{2-21}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{u} - \vec{r}_1 \tag{2-22}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{n} \times \vec{u} \quad (2-23)$$

De la figura anterior, se desprende :

$$\vec{u} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \quad (2-24)$$

$$\vec{u}' = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \cos \theta + \vec{r}_3 \sin \theta \quad (2-25)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2-21) a (2-25) se tiene,

$$\vec{u}' = \begin{bmatrix} x^2 & xy & zx \\ xy & y^2 & yz \\ zx & yz & z^2 \end{bmatrix} \vec{u} + \begin{bmatrix} 1-x^2 & -xy & -zx \\ -xy & 1-y^2 & -yx \\ -zx & -yz & 1-z^2 \end{bmatrix} \vec{u} \cos \theta + \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} \vec{u} \sin \theta \quad (2-26)$$

donde

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

Si agrupamos en una sola matriz, la expresión de la matriz de rotación queda así :

$$R = \text{ROT}(\theta, \vec{n}) \quad (2-28)$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta + x^2(1 - \cos\theta) & xy(1 - \cos\theta) - z \cdot \text{sen}\theta & xz(1 - \cos\theta) + y \cdot \text{sen}\theta \\ xy(1 - \cos\theta) + z \cdot \text{sen}\theta & \cos\theta + y^2(1 - \cos\theta) & yz(1 - \cos\theta) - x \cdot \text{sen}\theta \\ xz(1 - \cos\theta) - y \cdot \text{sen}\theta & yz(1 - \cos\theta) + x \cdot \text{sen}\theta & \cos\theta + z^2(1 - \cos\theta) \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

*Cálculo del ángulo y eje de giro a partir de la matriz de rotación.*

Se buscará ahora encontrar los valores de  $\theta$ , que hemos designado como el ángulo de rotación, y de  $\vec{n}$ , o eje de rotación, conociendo los valores de la matriz de rotación R.

Para calcular  $\vec{n}$  nos referiremos a la ecuación (2-20), es decir, resolviendo el sistema :

$(R-I)\vec{n} = 0$ , el cual da como resultado:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

Para encontrar el valor de  $\theta$ , se pueden utilizar los elementos de la matriz R. Si denotamos al elemento  $d_{ij}$  de tal forma que  $i = \text{linea}_i$ ,  $j = \text{linea}_j$ , el cálculo para  $\tan\theta$  vendrá dado de la siguiente forma:

$$A = z \cdot d_{21} - yd_{11} = (x^2 + y^2)\text{sen}\theta \quad (2-31)$$

$$B = d_{11} - (xd_{11} + yd_{21} + zd_{31}) = (1-x^2)\cos\theta \quad (2-32)$$

Como se conoce :

$x_2 + y_2 + z_2 = 1$ , por lo tanto :

$$B = (y^2 + z^2)\cos\theta \quad (2-33)$$

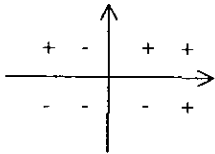
Y si consideramos  $y^2 + z^2 \neq 0$ , lo siguiente es cierto :

$$\tan\theta = \frac{A}{B} = \frac{zd_{21} - yd_{31}}{d_{11} - (xd_{11} + yd_{21} + zd_{31})} \quad (2-34)$$

De lo anterior:

$$\theta = \arctan \frac{A}{B} \quad (2-35)$$

lo cual nos da dos valores de  $\theta$  separados  $180^\circ$ . El cuadrante correcto lo dan los signos de A y B, de acuerdo a lo que se muestra en la siguiente figura :



Si sucede  $y^2 + z^2 = 0$ , se deben utilizar otros elementos de  $\mathbf{R}$ .

### *Cuaterniones.*

Un cuaternión es una magnitud compuesta por cuatro componentes. Uno de ellos es una cantidad escalar  $s$  y los otros tres definen un vector  $v$ . La definición de un cuaternión es la siguiente :

$$Q = (s + \vec{v}) \quad (2-36)$$

Para los cuaterniones se define una multiplicación de la siguiente forma :

$$Q = Q_1 \circ Q_2 = (s_1 s_2 - \vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 + s_2 \vec{v}_1 + s_1 \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \quad (2-37)$$

$$\text{Donde : } Q_1 = (s_1 + \vec{v}_1)$$

$$Q_2 = (s_2 + \vec{v}_2)$$

Véase en la operación anterior, que  $Q$  también es un cuaternión. Los cuaterniones tienen las siguientes propiedades :

- Hay un cuaternión  $e$  tal que

$$Q \circ e = e \circ Q = Q \quad (2-38)$$

Este cuaternión es  $= 1$ , es decir,  $s=1, \vec{v}=0$ .

- Para cada cuaternión  $Q = s + \vec{v}$ , hay un inverso  $Q^{-1}$ ,

tal que  $Q \circ Q^{-1} = Q^{-1} \circ Q = e = 1$ , siendo  $Q^{-1}$  expresado de la siguiente forma:

$$Q^{-1} = \frac{1}{s^2 + v^2} (s - v) \quad (2-39)$$

Sólo con  $s^2 + v^2 \neq 0$

Los cuaterniones que cumplen con :  $s^2 + v^2 = 1$ , se designan como normalizados. Estos cuaterniones tienen las siguientes características :

- Cada cuaternión normalizado representa una rotación.
- Una rotación combinada puede ser calculada como el producto de dos cuaterniones.
- Cada cuaternión normalizado puede ser expresado como :

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + \text{sen} \frac{\theta}{2} \circ \bar{n} \quad (2-40)$$

Donde  $\bar{n}$  es un vector unitario y  $\theta$  es el ángulo de giro de la rotación con respecto a  $\bar{n}$ .

- Si Q1 y Q2 son dos cuaterniones, el inverso de  $Q = Q1 \circ Q2$  es:

$$Q^{-1} = Q_2^{-1} \circ Q_1^{-1} \quad (2-41)$$

- Si Q1 y Q2 son normalizados , entonces :  $Q = Q1 \circ Q2$  es también normalizado.

La proposición siguiente muestra porque un cuaternión normalizado de la forma :

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + \text{sen} \frac{\theta}{2} \hat{n} \quad (2-42)$$

puede ser interpretado como un operador de giro donde  $\theta$  representa el ángulo de giro y  $\hat{n}$  el eje de giro. En esta siguiente proposición es fundamental en la “teoría de las rotaciones”.

Si el vector  $\vec{u}$  es girado con un ángulo  $\theta$  alrededor de  $\hat{n}$  (vector unitario) el vector resultante  $\vec{u}'$  puede ser escrito :

$$\vec{u}' = Q \circ \vec{u} \circ Q^{-1} \quad (2-43)$$

Existe una relación de uno a uno entre una matriz de rotación  $ROT(\theta, \hat{n})$  y un cuaternión de la forma :

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + \text{sen} \frac{\theta}{2} \hat{n} \quad (2-44)$$

Si la rotación A es representada por  $Q_1$  y la rotación B por  $Q_2$ , la rotación  $C = A \circ B$  es representada por un nuevo cuaternión Q donde .

$$Q = Q_1 \circ Q_2 \quad (2-45)$$

*Transformación de matrices a cuaterniones.*

Conociendo la matriz de rotación  $R$  con dimensión  $3 \times 3$ , se pueden calcular los valores de  $\theta$  y de  $\bar{n}$  y en función de ellos los elementos de su cuaternión correspondiente. Para calcular  $\bar{n}$  se utiliza la relación :

$$(\mathbf{R}-\mathbf{I}) \bar{n} = 0 \tag{2-46}$$

que da como resultado :

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2-47}$$

Es de notar en este punto que un sistema de ecuaciones homogéneo puede tener dos tipos de soluciones : una solución trivial( todas las incógnitas iguales a cero) o un conjunto infinito de soluciones.

De la expresión anterior ,

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + \text{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \bar{n} \tag{2-48}$$

Se pueden ocupar los elementos de la matriz de rotación  $R$  para encontrar los valores de su cuaternión correspondiente. Si se denotan los elementos  $d_{ij}$  de tal forma que  $i = \text{línea}$ ,  $j = \text{columna}$ , los valores de los elementos estarán dados por :



$$q_1 = \frac{\pm \sqrt{d_{11} + d_{22} + d_{33} + 1}}{2} \quad (2-49)$$

Para  $q_1$  se selecciona el signo positivo, lo cual significa que el giro es alrededor del signo positivo.

$$q_2 = \frac{\pm \sqrt{d_{11} - d_{22} - d_{33} + 1}}{2} \quad (2-50)$$

$$\text{signo}(q_2) = \text{signo}(d_{32} + d_{23})$$

$$q_3 = \frac{\pm \sqrt{d_{22} - d_{11} - d_{33} + 1}}{2} \quad (2-51)$$

$$\text{signo}(q_3) = \text{signo}(d_{13} - d_{31})$$

$$q_4 = \frac{\pm \sqrt{d_{33} - d_{11} - d_{22} + 1}}{2} \quad (2-52)$$

$$\text{signo}(q_4) = \text{signo}(d_{21} - d_{12})$$

### **/// 2.1.3 Comparación de cálculos entre matrices y cuaterniones.**

En este apartado se compararán dos métodos de cálculo para rotar un vector : por un lado, se utilizarán matrices de rotación y por otro cuaterniones.

El objetivo es demostrar la diferencia que existe entre el número de operaciones que se deben realizar entre los dos métodos anteriores para

calcular la rotación de un vector y como ello puede representar una ventaja operativa en la implementación del programa de control del manipulador.

La comparación contará con dos partes, en la primera se realizarán rotaciones de un vector de forma sucesiva, calculando en cada ocasión la posición del vector, utilizando el mismo vector para el cálculo posterior. La segunda parte consiste en el cálculo de rotaciones intermedias sin calcular la posición del vector en cada paso, sino que se realiza el cálculo de las rotaciones parciales y cuando se llega al último giro, se calcula la posición final del vector inicial.

Veamos en las siguientes líneas los resultados de estos dos tipos de cálculos.

#### Rotaciones con cálculo intermedio de posición

Como se comentaba antes, en las rotaciones con cálculo intermedio de posición, dado un ángulo inicial de giro, se calcula por principio el giro y después de cada uno de estos cálculos se obtiene la posición del vector. La secuencia es igual si se utilizan matrices o cuaterniones, en cualquier caso, el algoritmo del programa es el siguiente:

- 1.- Asignación de valores al Vector Unitario de giro.
- 2.- Asignación de valores al Vector original a ser girado.
- 3.- Asignación de valores al ángulo de giro.

- 4.- Cálculos correspondientes al giro a partir de los datos anteriores.
- 5.- Cálculo de la posición final de vector a partir de los cálculos de giro.
- 6.- Actualización del vector a ser girado en función del último cálculo
- 7.-Continuar algoritmo en el paso 4.

Los datos iniciales del programa son:

Vector unitario:  $(x=0,y=0,z=1)$

Vector a ser girado:  $(x=1,y=0,z=0)$

Angulo de rotación para cada iteración: 0.05 radianes

Número de iteraciones: 10,000.

Los resultados del programa de rotación mediante matrices fue el siguiente:

Vector resultante:  $(x=-0.883849,y=-0.467772,z=0)$

Tiempo de ejecución:0.22 s

El listado del programa del que derivaron estos resultados se muestra en el apéndice A, programa 1.

Para el programa de rotación mediante cuaterniones el resultado fue :

Vector resultante:  $(x=-0.883849,y=-0.467772,z=0)$

Tiempo de ejecución:0.22 s.

El listado del programa del que derivaron estos resultados se muestra en el apéndice A, programa 2.

Obsérvese que los resultados son exactamente iguales y así lo es el tiempo de cálculo . Veremos ahora las rotaciones sin cálculo intermedio de posición.

### Rotaciones sin cálculo intermedio de posición

En estas rotaciones, el cálculo de la posición final del vector se obtiene a través del cálculo sucesivo de las rotaciones. No se realizan cálculos intermedios de la posición del vector. Este tipo de cálculos es útil cuando se requiere obtener sólo la posición final de una secuencia de rotaciones.

El algoritmo de este procedimiento se muestra en las siguientes líneas

- 1.- Asignación de valores al Vector Unitario de giro.
- 2.- Asignación de valores al Vector original a ser girado.
- 3.- Asignación de valores al ángulo de giro.
- 4.- Cálculos correspondientes al primer giro.
- 5.- Cálculo del siguiente giro.
- 6.- Cálculo de la combinación del último giro con el giro acumulado.

7.- Regresar al paso 5 mientras no se llegue al número determinado de rotaciones.

8.- Realizar el cálculo del vector final utilizando la rotación final calculada.

Al igual que en el caso de las rotaciones con cálculos de posición intermedia, el algoritmo anterior es igual para matrices que para cuaterniones.

Los datos iniciales del programa son:

Vector unitario:  $(x=0,y=0,z=1)$

Vector a ser girado:  $(x=1,y=0,z=0)$

Angulo de rotación para cada iteración: 0.05 radianes

Número de iteraciones: 10.000.

Los resultados del programa de rotación mediante matrices fue el siguiente:

Vector resultante:  $(x=-0.883849,y=-0.467772,z=0)$

Tiempo de ejecución:0.33 s

El listado del programa del que derivaron estos resultados se muestra en el apéndice A, programa 3.

Para el programa de rotación mediante cuaterniones el resultado fue :

Vector resultante:  $(x=-0.883849, y=-0.467772, z=0)$

Tiempo de ejecución: 0.11 s.

El listado del programa del que derivaron estos resultados se muestra en el apéndice A, programa 4.

Como se puede observar en los cálculos anteriores, los resultados numéricos son iguales, siendo menor el tiempo utilizado en el caso del programa de cuaterniones.

En síntesis, los cuaterniones presentan ventajas sobre las matrices por dos razones: ofrecen un menor tiempo de cálculo cuando se utilizan rotaciones continuas sin calcular las posiciones intermedias del vector resultante y por otro lado, requieren solamente de cuatro variables para determinar la orientación o rotación de un vector, mientras que para las matrices, se requieren nueve variables.

#### **2.1.4. Modelo cinemático del brazo de un manipulador.**

*Cadenas cinemáticas abiertas.*

El brazo de un manipulador es en esencia una serie de cuerpos rígidos en una estructura cinemática. La figura 2.8 muestra un manipulador modelado

como una serie de cuerpos rígidos ligados entre sí. Tal estructura es conocida como cadena cinemática abierta y es representativa de la mayor parte de robots industriales o de investigación.

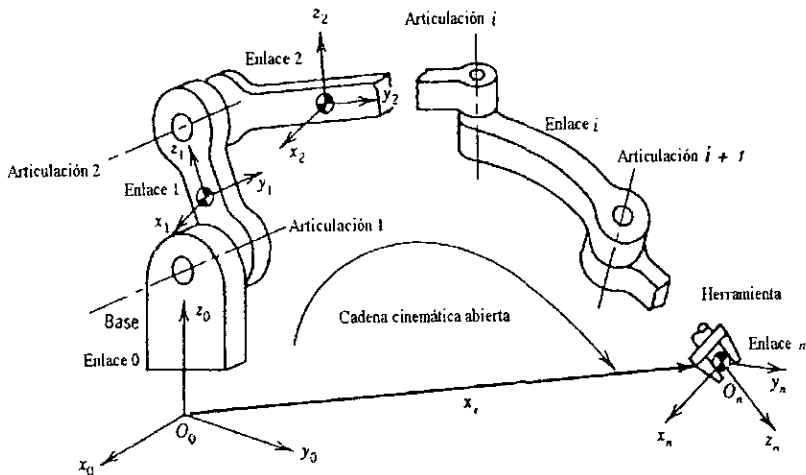


Fig 2.8 Cadena cinemática abierta.

Cada eslabón de la cadena se numera de 0 a  $n$  como se muestra en la figura 2.8. El eslabón de base, que normalmente está fijo al piso se numera con 0, mientras que el eslabón más distante se numera con  $n$ .

Para representar la posición y orientación de la herramienta que sostiene el manipulador, se fija un sistema de coordenadas  $O_n-x_n y_n z_n$  al último eslabón. La localización de este sistema de coordenadas se describe con respecto a otro sistema:  $O_0-x_0 y_0 z_0$ , fijo al piso. Si se fija a cada eslabón un sistema de coordenadas, por ejemplo, el sistema de coordenadas  $O_i-x_i y_i z_i$  al eslabón  $i$ .

se puede obtener la posición de la herramienta fija al último eslabón mediante transformaciones consecutivas entre el último sistema de coordenadas al que se encuentra en la base.

El movimiento relativo de los eslabones adyacentes es causado por el movimiento de la unión que conecta ambos eslabones. Hay un total de  $n$  articulaciones en el brazo de un manipulador de  $(n + 1)$  eslabones, como se muestra en la figura 2.8. La articulación entre el eslabón  $i-1$  e  $i$  se conoce como la articulación  $i$ .

*La notación Denavit-Hartenberg.*

La notación Denavit-Hartenberg fue introducida como un método sistemático de describir una relación cinemática. El método se base en la representación matricial 4x4 de la posición y orientación de un cuerpo.

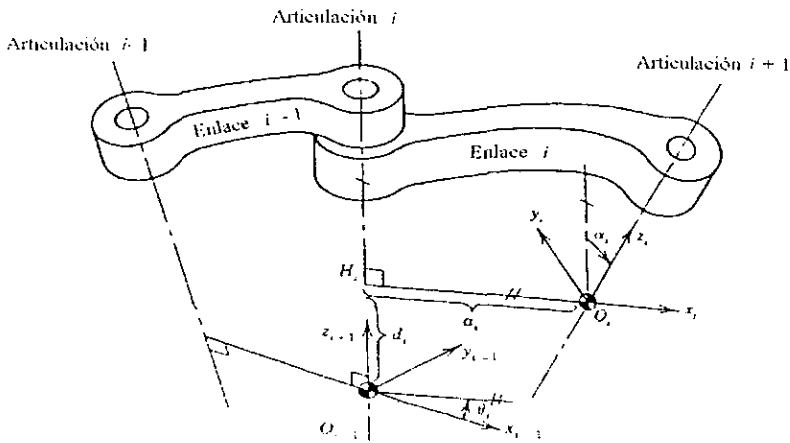


Fig. 2.9 Notación de Denavit-Hartenberg



La figura 2.9 muestra un par de eslabones adyacentes, eslabón  $i-1$  y eslabón  $i$  y sus articulaciones asociadas, articulaciones  $i-1$  y  $i+1$ . La línea  $H_iO_i$  en la figura es la normal común a los ejes de las articulaciones  $i$  e  $i+1$ . La relación entre ambos eslabones se describe por la posición relativa y la orientación de los dos sistemas de ejes coordenados que se encuentra fijos a los eslabones. En la notación Denavit-Hartenberg, el origen del sistema de coordenadas  $i$ -ésimo  $O_i$  se localiza en la intersección del eje  $i+1$  y la normal común entre los ejes  $i$  e  $i+1$ , tal como se muestra en la figura. Nótese que el eje  $x_i$  se encuentra dirigido a lo largo de la línea de extensión de la normal común, mientras que el eje  $y_i$  se escoge de tal forma que el sistema de coordenadas resultante  $O_i-x_iy_iz_i$  forme un sistema de coordenadas derecho o dextrógiro.

La localización relativa de los dos sistemas de referencia puede ser determinada completamente por los siguientes parámetros:

- $a_i$  La longitud de la normal común.
- $d_i$  La distancia entre el origen  $O_{i-1}$  y el punto  $H_i$ .
- $\alpha_i$  El ángulo entre el eje de la articulación  $i$  y el eje  $z_i$  en el sentido derecho.
- $\theta_i$  El ángulo entre el eje  $x_{i-1}$  y la normal común  $H_iO_i$  medida entre el eje  $z_{i-1}$  en el sentido derecho.

Los parámetros  $a_i$  y  $\alpha_i$  son parámetros constantes que son determinados por la geometría de los eslabones:  $a_i$  representa la longitud del eslabón y  $\alpha_i$  representa el ángulo de giro entre los dos ejes de giro. Uno de los otros dos parámetros  $d_i$  y  $\theta_i$ , varía al moverse la articulación.

Hay dos tipos de mecanismos en los manipuladores: los ejes o articulaciones de revolución, en los cuales, las articulaciones adyacentes giran con respecto a las demás alrededor del eje de giro y articulaciones prismáticas, en las cuales las articulaciones no adyacentes se trasladan linealmente a lo largo del eje de la articulación. Para una articulación de revolución, el parámetro  $\theta_i$  es la variable que representa el desplazamiento de la articulación, mientras que el parámetro  $d_i$  es constante. Para una articulación prismática, el parámetro  $d_i$  es la variable que representa el avance de la articulación, mientras que  $\theta_i$  es constante.

Una vía de formular la relación cinemática entre los eslabones adyacentes

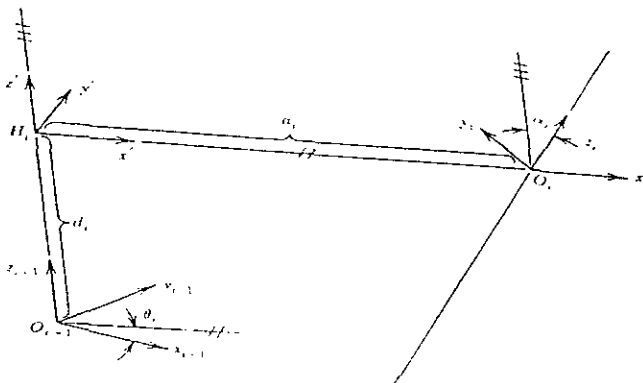


Fig. 2.10 Relación entre sistemas de coordenadas adyacentes en la notación Denavit Hartenberg.

es usar las matrices homogéneas 4x4, y haciendo corresponder una matriz de ese tipo con la transformación de ejes. La figura 2.10 muestra dos sistemas de ejes coordenados  $O_i-x_iy_iz_i$  y  $O_{i-1}-x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$  y el sistema intermedio  $H_i-x'y'z'$  fijo al punto  $H_i$ . Sean  $X^i$ ,  $X'$  y  $X^{i-1}$  los vectores de posición 4x1 en  $O_i-x_iy_iz_i$ ,  $H_i-x'y'z'$ ,  $O_{i-1}-x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$  respectivamente. De la figura 2.10, la transformación de coordenadas de  $X^i$  a  $X'$  está dada por:

$$X' = A_{im}^{i'} X^i \quad (2-53)$$

Donde:

$$A_{im}^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-54)$$

Similarmente la transformación de  $X'$  a  $X^{i-1}$  está dada por:

$$X^{i-1} = A_{im}^{i-1} X' \quad (2-55)$$

Donde:

$$A_{im}^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-56)$$

Al combinar las dos ecuaciones anteriores (2-53) y (2-55) se obtiene

$$X^{i-1} = A_i^{-1} X^i \quad (2-57)$$

Donde:

$$A_i^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & \alpha_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & \alpha_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-58)$$

La matriz  $A_i^{-1}$  representa la posición y la orientación del marco  $i$  con respecto al marco  $i-1$ . Como se ha mostrado antes, los primeros vectores columna  $3 \times 1$  de  $A_i^{-1}$  contienen los cosenos directores de los ejes coordenados del marco  $i$ , mientras que el último vector columna representa la posición del origen  $O_i$ .

Nótese que al aplicar estas transformaciones sucesivas entre los diferentes eslabones de la cadena abierta, se puede encontrar la posición del punto de aplicación final desde el marco base. La orientación y posición del último eslabón con respecto a la base será:

$$T = A_1^{-1} A_2^{-1} \dots A_n^{-1} \quad (2-59)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación cinemática del brazo del manipulador y gobierna el comportamiento fundamental del brazo.

En las siguientes líneas se desarrollarán las ecuaciones para la cinemática de un manipulador 5-R-1-P, es decir cinco ejes de revolución y un eje prismático, el cual se muestra en la figura 2.14

En la figura (2.14) se aprecian los distintos ejes, el primero rota al cuerpo completo alrededor del eje vertical, el segundo lo rota alrededor del eje

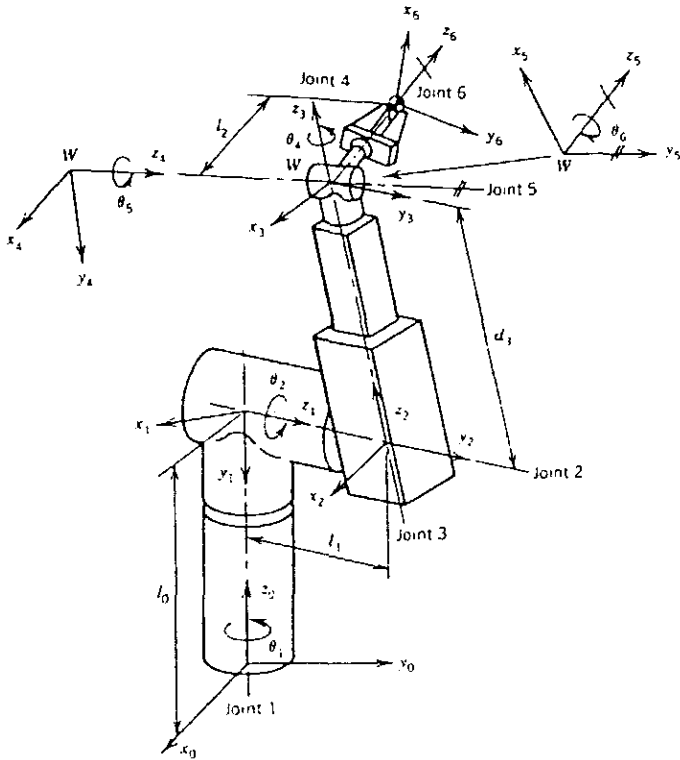


Fig 2.14 Manipulador 5R-1P

horizontal. El eje tres es un eje prismático que causa el movimiento de traslación de los tres últimos ejes, en este caso el eje de la articulación 3 fue

escogido de tal forma que coincide con la articulación 4. Los últimos tres ejes son de revolución y se intersectan en el punto W.

La tabla siguiente contiene los parámetros para los sistemas de ejes coordenados de acuerdo al los parámetros Denavit-Hartenberg.

| No. Enlace | $\alpha_i$  | $a_i$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|------------|-------------|-------|-------|------------|
| 1          | $-90^\circ$ | 0     | $l_0$ | $\theta_1$ |
| 2          | $+90^\circ$ | 0     | $l_1$ | $\theta_2$ |
| 3          | 0           | 0     | $d_3$ | 0          |
| 4          | $-90^\circ$ | 0     | 0     | $\theta_4$ |
| 5          | $+90^\circ$ | 0     | 0     | $\theta_5$ |
| 6          | 0           | 0     | $l_2$ | $\theta_6$ |

Las matrices homogéneas  $A_i^{-1}(q_i)$ , donde  $q_i$  es el parámetro de revolución o de traslación correspondiente, que resultan del análisis son las siguientes:

$$A_1^{-1}(\theta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^{-1}(\theta_2) = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2(d_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4^3(\theta_4) = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5^4(\theta_5) = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6^5(\theta_6) = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde  $c_i = \cos(\theta_i)$ , y  $s_i = \sin(\theta_i)$ , por lo que la ecuación cinemática del brazo del manipulador está dada por :

$$T = A_1^0(\theta_1) A_2^1(\theta_2) A_3^2(d_3) A_4^3(\theta_4) A_5^4(\theta_5) A_6^5(\theta_6)$$

donde T representa la posición y orientación de la herramienta como una función de los desplazamientos de las articulaciones,  $\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ .

### *Cinemática directa de un robot de 6 ejes de revolución usando cuaterniones*

Para determinar la posición y orientación de un manipulador con seis ejes de revolución usando el concepto de los cuaterniones el primer paso es identificar en un diagrama las dimensiones del manipulador. Obsérvese en la figura (2.15) un robot de seis ejes de revolución con sus principales medidas.

El método para determinar la posición y orientación del punto extremo del brazo del robot a través de cuaterniones considera genéricamente los siguientes pasos:

- Del modelo geométrico del manipulador determinar las articulaciones y enlaces que lo componen.
- Determinar los sistemas de ejes coordenados para cada

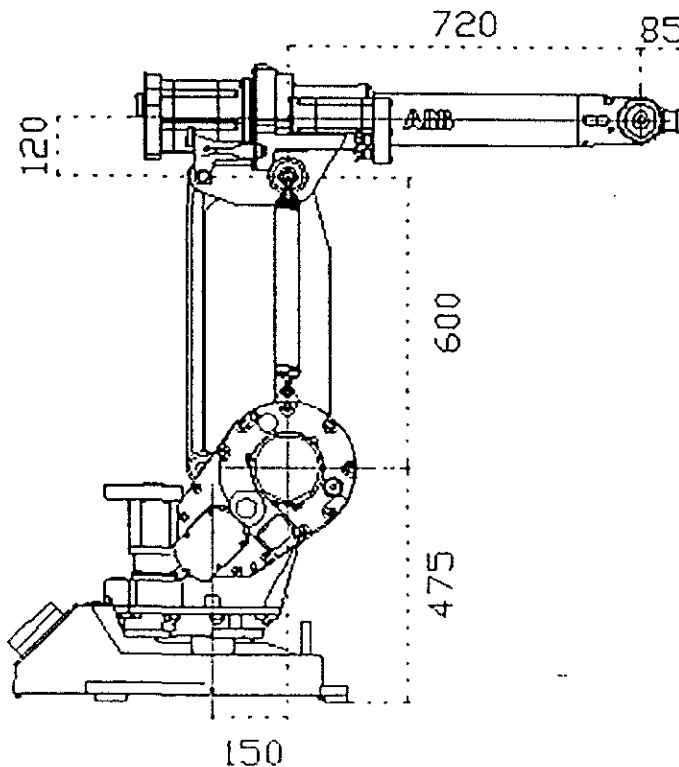
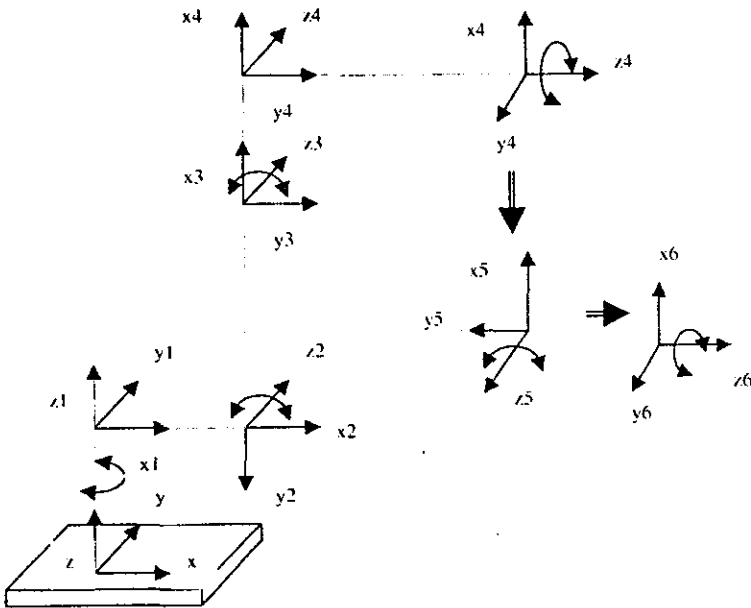


Fig 2.15 Dimensiones del IRB1400 en mm



articulación y los vectores de traslación entre cada uno de ellos.

- Considerar la articulación inicial y definir el cuaternión para el giro inicial del manipulador ( $q_1$ )
- Realizar el cálculo de giro del vector de traslación ( $v_1$ ) mediante el cuaternión  $q_1$ .



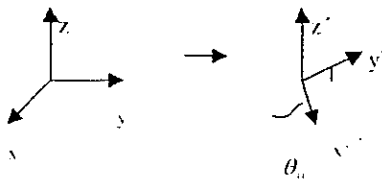
- Realizar el cálculo para el giro de la segunda articulación ( $q_2$ ) y multiplicarla con el cuaternión del primer giro para obtener un cuaternión resultante ( $q_f$ ).

- Girar el vector de traslación ( $v_2$ ) usando el cuaternión resultante anterior ( $q_1$ ).
- Sumar el vector resultante del giro de  $v_2$  con el resultante del giro del vector  $v_1$ .
- Tomar la siguiente articulación, obtener el cuaternión para esa articulación y multiplicarla por el cuaternión resultante anterior.
- Girar el vector de traslación siguiente utilizando el cuaternión resultante anterior y sumarlo al vector acumulado anterior.

En síntesis, lo que se pretende es definir vectores que conecten las diferentes articulaciones y a través de giros mediante el uso de cuaterniones, sumar los vectores a través de la cadena cinemática. Como se verá en el desarrollo de este ejemplo.

### ARTICULACIÓN NO. 1

Para pasar del sistema de coordenadas fijo al primer sistema de coordenadas rotado, se requiere la siguiente rotación:

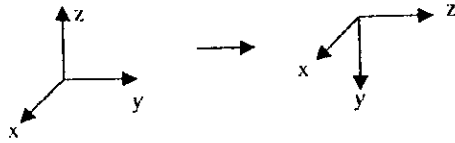


Del giro mostrado en la figura, el vector unitario de giro es  $n=(0,0,1)$  el ángulo  $\theta_0$ , el cuaternión de giro resultante es :

$$q_1 = \cos(\theta_0/2) + \text{sen}(\theta_0/2) * n$$

El cuaternión será entonces  $q_1 = (\cos(\theta_0/2), 0, 0, \text{sen}(\theta_0/2))$

El segundo giro correspondiente a la primera articulación será dado por la siguiente figura:



Para este giro, el vector de giro y el ángulo de giro serán :  $n=(1,0,0)$ ,  $\theta = -90^\circ$ , con lo cual :

$$q_{1im} = \cos(-90^\circ/2) + \text{sen}(-90^\circ/2) * (1,0,0)$$

$$q_{1im} = (\cos(45^\circ), \text{sen}(-45^\circ), 0,0)$$

La multiplicación entre  $q_1$  y  $q_{1im}$  será:

$$q_1 * q_{1im} = (\cos\theta/2, 0,0, \text{sen}\theta/2) * (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0,0) = \frac{\cos\theta/2}{\sqrt{2}} - 0 +$$

$$(-\frac{\cos\theta/2}{\sqrt{2}}, 0,0) + (0,0, \frac{\text{sen}\theta/2}{\sqrt{2}}) + (0, -\frac{\text{sen}\theta/2}{\sqrt{2}}, 0)$$

$$q_1 * q_{1im} = (\frac{\cos\theta/2}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos\theta/2}{\sqrt{2}}, -\frac{\text{sen}\theta/2}{\sqrt{2}}, \frac{\text{sen}\theta/2}{\sqrt{2}})$$

## ARTICULACIÓN 2.

Para este caso, el primer giro consiste en :

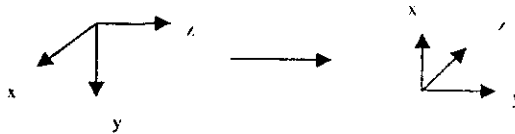


Dado este giro, el vector de giro y el ángulo correspondiente serán :

$N = (0,0,1)$ ,  $\theta = \theta_2$ , por lo que el cuaternión será :

$$q1 = (\cos \theta_2/2, 0, 0, \sin \theta_2/2);$$

Para la segunda rotación en esta misma articulación:



Para este caso :  $n=(0,0,1)$ ,  $\theta = 90^\circ$ , con lo cual :

$$q2 = (\cos -90^\circ/2, 0, 0, \sin -90^\circ/2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

con estos dos cuaterniones

$$q1 \times q2 = (\cos \theta_2/2, 0, 0, \sin \theta_2/2) \times (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$q1 \times q2 = (\frac{\cos \theta_2/2 - \sin \theta_2/2}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{\sin \theta_2/2 + \cos \theta_2/2}{\sqrt{2}})$$

### ARTICULACIÓN 3.

En este caso, las rotaciones vienen dadas por las siguientes figuras:



El vector de giro y ángulo son :  $n=(0,0,1)$ ,  $\theta =\theta_1$ , por lo que :

$$q1 = (\cos(\theta_1/2), 0, 0, \text{sen}(\theta_1/2));$$



De esta figura :  $n= (1,0,0)$ ,  $\theta = -90^\circ$ , de lo que resulta:

$$q2 = (\cos(-90/2), \text{sen}(-45), 0, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$$

$$q1 * q2 = (\cos(\theta_1/2), 0, 0, \text{sen}(\theta_1/2)) * (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$$

$$q1 * q2 = \frac{\cos\theta_1/2}{\sqrt{2}} \cdot 0 + (-\frac{\cos\theta_1/2}{\sqrt{2}} \cdot 0, 0) + (0, 0 \cdot \frac{\text{sen}\theta_1/2}{\sqrt{2}}) + (0, -\frac{\text{sen}\theta_1/2}{\sqrt{2}} \cdot 0)$$

$$q1 * q2 = (\frac{\cos\theta_1/2}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos\theta_1/2}{\sqrt{2}}, -\frac{\text{sen}\theta_1/2}{\sqrt{2}}, \frac{\text{sen}\theta_1/2}{\sqrt{2}})$$

#### ARTICULACIÓN 4

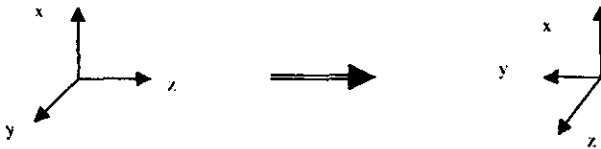
Obsérvense los siguientes giros:



De la figura anterior :  $n = (0,0,1)$  ,  $\theta = \theta_1$  , el cuaternión resultante será :

$$q1 = (\cos \theta_1/2, 0, 0, \sin \theta_1/2)$$

El siguiente giro será de  $90^\circ$  , con



Los datos correspondientes a la figura anterior:

$n = (1,0,0)$  ,  $\theta = -90^\circ$  , con lo cual :

$$q2 = (\cos 45^\circ, \sin 45^\circ, 0, 0) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right)$$

El resultado de la multiplicación será:

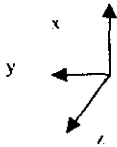
$$q1 * q2 = (\cos \theta_1/2, 0, 0, \sin \theta_1/2) * \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right)$$

$$q1 * q2 = \frac{\cos\theta_1/2}{\sqrt{2}} - 0 + (-\frac{\cos\theta_1/2}{\sqrt{2}}, 0, 0) + (0, 0, \frac{\sin\theta_1/2}{\sqrt{2}}) + (0, -\frac{\sin\theta_1/2}{\sqrt{2}}, 0)$$

$$q1 * q2 = (\frac{\cos\theta_1/2}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos\theta_1/2}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin\theta_1/2}{\sqrt{2}}, \frac{\sin\theta_1/2}{\sqrt{2}})$$

### ARTICULACIÓN 5

Dada la siguiente figura:



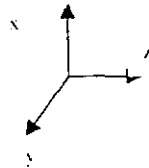
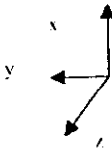
$\theta_1$



El giro correspondiente viene dado por  $n = (0, 0, 1)$  y  $\theta = \theta_1$ , con :

$$q1 = (\cos \theta_1/2, 0, 0, \sin\theta_1/2)$$

El siguiente giro es:



Para este giro,  $n = (1, 0, 0)$ ,  $\theta = 90^\circ$ .

$$q_2 = (\cos 45^\circ, \sin 45^\circ, 0, 0) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right)$$

Al multiplicar ambos cuaterniones:

$$q_1 * q_2 = (\cos \theta_s / 2, 0, 0, \sin \theta_s / 2) * \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right)$$

$$q_2 * q_2 = \frac{\cos \theta_s / 2}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \left( \frac{\cos \theta_s / 2}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right) + \left( 0, 0, \frac{\sin \theta_s / 2}{\sqrt{2}} \right) + \left( 0, \frac{\sin \theta_s / 2}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$q_1 * q_2 = \left( \frac{\cos \theta_s / 2}{\sqrt{2}}, \frac{\cos \theta_s / 2}{\sqrt{2}}, \frac{\sin \theta_s / 2}{\sqrt{2}}, \frac{\sin \theta_s / 2}{\sqrt{2}} \right)$$

## ARTICULACIÓN 6.

La rotación en el eje seis viene dada por el siguiente diagrama:



Con esta figura se puede deducir:

$n = (0, 0, 1)$ , y  $\theta = \theta_6$ , con :

$$q_1 = (\cos \theta_6 / 2, 0, 0, \sin \theta_6 / 2)$$



Para una descripción detallada del cálculo de la posición final de un manipulador de seis ejes como el que se utiliza aquí véase el apéndice B donde se encontrará un programa que calcula la posición extrema del manipulador utilizando cuaterniones.

### *Cinemática Inversa*

La ecuación derivada en la sección previa provee de una relación entre los desplazamientos de las articulaciones y la posición y orientación final del punto de aplicación del brazo. Al problema de encontrar la posición del punto final de aplicación a partir de los desplazamientos de las articulaciones se le conoce como el problema de cinemática directa. Por otro lado, al problema de encontrar las posiciones de las articulaciones para una posición dada en el punto final de aplicación se le conoce como el problema de la cinemática inversa.

La cinemática inversa es más compleja que la directa, en el sentido que pueden existir múltiples soluciones para una misma localización del punto final de aplicación. más aún, en ocasiones, no es posible derivar la solución en una forma cerrada, es decir, se tiene que recurrir a métodos numéricos para su solución.

Un brazo de manipulador debe tener por lo menos seis grados de libertad para determinar el punto final con una posición arbitraria en el espacio. Los

brazos manipuladores con menos de seis grados de libertad no son capaces de efectuar un posicionamiento arbitrario. Pero si por el contrario, un manipulador tiene más de seis grados de libertad, existe un número infinito de soluciones a la ecuación cinemática. Este tipo de manipuladores se conocen como manipuladores redundantes.

Para que una solución al problema de cinemática inversa exista, es necesario que la posición que se tiene como objetivo se encuentre dentro del espacio de trabajo del manipulador. Se define al espacio de trabajo como el volumen de espacio que la herramienta del manipulador puede alcanzar. Existen dos definiciones de espacio de trabajo : espacio de trabajo útil es el volumen de espacio que la herramienta de trabajo puede alcanzar en cualquier orientación. El espacio de trabajo alcanzable es el volumen de espacio que la herramienta del robot puede alcanzar en al menos una posición. Claramente el espacio de trabajo útil es un subconjunto del espacio alcanzable. Si la posición objetivo se encuentra en el espacio de trabajo, entonces al menos una solución existe.

Otro problema encontrado al resolver ecuaciones cinemáticas es la de múltiples soluciones . Los criterios para decidir cuál solución es la más adecuada para un manipulador pueden ser: cercanía con el objetivo, obstáculos posibles, tamaño de los enlaces que hay que mover. El número de soluciones depende del número de ejes de giro del manipulador, así como de los parámetros del enlace (de acuerdo con la definición de Denavit Hartenberg ). Por ejemplo, el robot PUMA puede alcanzar ciertos puntos con ocho diferentes soluciones, en general, entre más parámetros de enlace sean diferentes de cero, se tendrán más formas de llegar a ciertas posiciones.

### *Métodos de solución.*

A diferencia de las ecuaciones lineales, no existe un algoritmo general que pueda ser ocupado para la solución de ecuaciones no lineales. Antes es necesario definir lo que constituye una solución de un manipulador determinado.

Se considera que un manipulador tiene solución si los ángulos de los ejes de giro pueden ser determinados por un algoritmo que permita encontrar todos los conjuntos de variables asociadas con una posición y orientación determinada. La principal cualidad de esta definición es que requiere en el caso de soluciones múltiples que se encuentren todas las soluciones.

Se pueden dividir en dos grandes clases las estrategias para la solución de manipuladores: *soluciones de forma cerrada* o *soluciones numéricas*. Las soluciones de forma cerrada significan un método de solución basado en expresiones analíticas o en la solución de un polinomio de grado cuatro o menor, de tal forma que cálculos no iterativos sean suficientes para encontrar una solución. Dentro de este tipo de soluciones se encuentran dos tipos de métodos: algebraicos y geométricos. La distinción entre ellos no es muy clara, puesto que cualquier método algebraico en sus bases encierra un manejo geométrico.

Un resultado notable en cinemática es que, de acuerdo a la definición de factibilidad de solución, todos los sistemas con ejes o uniones prismáticas o de revolución que tengan un total de seis grados de libertad en una cadena serial simple son solucionables. Aunque la solución general sea numérica.

Una condición suficiente para que un manipulador con seis ejes de revolución tenga una solución de forma cerrada es que tres ejes consecutivos se intersecten en un mismo punto.

El método de solución algebraico considera el planteamiento de las ecuaciones de posición y orientación del punto de aplicación del robot y a partir de ellas se realizan procedimientos algebraicos con los cuales se obtienen los ángulos desconocidos. En el método geométrico, en cambio, se parte de diagramas, desde los cuales se plantean ecuaciones que después de una secuencia finita de pasos derivan en la solución de las incógnitas.

Dentro de las soluciones algebraicas se distingue la solución por reducción a polinomio, la cual consiste en la sustitución de variables para eliminar la presencia de funciones trascendentales y obtener polinomios. Las sustituciones más utilizadas son :

$$u = \tan \frac{\theta}{2} \quad (2-60)$$

$$\cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad (2-61)$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{2u}{1+u^2} \quad (2-62)$$

### *Solución de la ecuación cinemática de un manipulador 5-R-1-P*

En las siguientes líneas se resolverá la ecuación del manipulador de cinco articulaciones de revolución y una articulación prismática que se mostró en las líneas anteriores.

La ecuación cinemática está dada por :

$$T = A_1^0 A_2^1 A_3^2 A_4^3 A_5^4 A_6^5 \quad (2-63)$$

para este manipulador existe una solución analítica para una localización arbitraria de la herramienta T. Escribiendo de diferente forma la ecuación anterior

$$T (A_6^5)^{-1} = A_1^0 A_2^1 A_3^2 A_4^3 A_5^4 \quad (2-64)$$

y al premultiplicar ambos lados por  $(A_1^0)^{-1}$ ,

$$(A_1^0)^{-1} T (A_6^5)^{-1} = A_2^1 A_3^2 A_4^3 A_5^4 \quad (2-65)$$

La parte izquierda de la ecuación (2-65) es una función de  $\theta_1$  y de  $\theta_6$ . Se puede decir que la ecuación anterior representa tanto en el lado izquierdo como en el derecho la posición y orientación de un cierto punto pero tomando como origen distintos puntos de partida, siendo también diferentes las trayectorias seguidas para llegar a los puntos finales.

La figura 2.16 muestra el esqueleto del manipulador 5-R-1-P. Cada arco en la figura representa la relación entre dos sistemas de ejes coordenados. la

matriz de 4x4 en el arco da la posición y orientación del sistema de ejes coordenados visto desde el sistema de ejes coordenados en el origen. Obsérvese que el punto W depende solo de las tres primeras articulaciones,

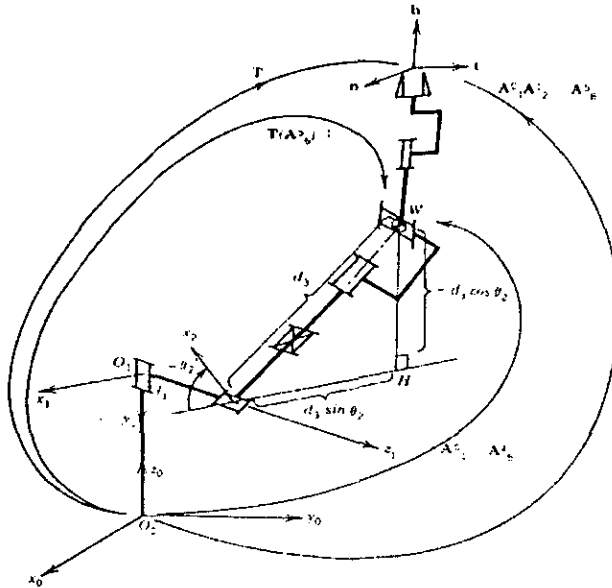


Fig 2.16 Estructura del esqueleto de un manipulador 5R-1P

por lo que si se compara el cuarto vector columna de las matrices de las ecuaciones (2-64) y (2-65), se pueden obtener ecuaciones simultáneas con tres incógnitas. El cuarto vector columna del lado derecho de la ecuación (2-65) representa la posición de W con respecto al primer marco, a través de las articulaciones del brazo y simplemente está dado por.

$$x_w^1 = \begin{pmatrix} d_3 s_2 \\ -d_3 c_2 \\ l_1 \end{pmatrix} \quad (2-66)$$

Y si la expresión de T es la siguiente :

$$T = \begin{bmatrix} n_z & t_x & b_x & p_x \\ n_1 & t_y & b_y & p_y \\ n_2 & t_z & b_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-67)$$

y sustituyendo en el lado izquierdo de la ecuación (2-65), se obtiene otra expresión de las coordenadas  $x_w^1$ , por decir,

$$x_w^1 = \begin{bmatrix} p_x^* c_1 + p_y^* s_1 \\ -p_z^* + l_0 \\ -p_x^* s_1 + p_y^* c_1 \end{bmatrix} \quad (2-68)$$

donde  $p_x^*$ ,  $p_y^*$ ,  $p_z^*$  representa las coordenadas del punto W, y son dados por .

$$p_x^* = p_x - l_2 b_x$$

$$p_y^* = p_y - l_2 b_y \quad (2-69)$$

$$p_z^* = p_z - l_2 b_z$$

Al igualar las ecuaciones (2-66) y (2-68), se obtienen tres ecuaciones,

$$d_3 s_2 = p_x^* c_1 + p_y^* s_1 \quad (2-70)$$

$$-d_3 c_2 = -p_z^* + l_0 \quad (2-71)$$

$$l_2 = -p_x^* s_1 + p_y^* c_1 \quad (2-72)$$

Para resolver la ecuación , dejamos.

$$t = \tan\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \quad (2-73)$$

de tal forma que:

$$c_1 = \cos(\theta_1) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad s_1 = \sin(\theta_1) = \frac{2t}{1+t^2} \quad (2-74)$$

Sustituyendo (2-74) en (2-72) se obtiene una ecuación cuadrática en términos de la variable desconocida  $t$ ,

$$(l_1 + p_1^*)t^2 + 2p_1^*t + l_1 - p_1^* = 0 \quad (2-75)$$

Resolviendo la ecuación para  $t$  y usando (2-73) se obtiene :

$$\theta_1 = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{-p_1^* \pm \sqrt{p_1^{*2} + p_1^{*2} - l_1^2}}{l_1 + p_1^*} \right] \quad (2-76)$$

Obsérvese que la cantidad debajo de la raíz debe ser positiva. de otra forma, la solución no existe. lo cual significa que la posición indicada del manipulador se encuentra fuera de rango o espacio de trabajo , al dividir ambos lados de la ecuación (2-70) por los correspondientes lados de (2-71) , obtenemos

$$\theta_1 = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{p_1^* c_1 + p_1^* s_1}{l_1 + p_1^*} \right] \quad (2-77)$$



Usando la expresión (2-76) en la ecuación anterior, nos permite evaluar el ángulo desconocido  $\theta_3$ , posteriormente se puede obtener  $d_3$  tomando la suma de los cuadrados de las ecuaciones (2-70) y (2-71) :

$$d_3 = \pm \sqrt{(p_x^* c_1 + p_y^* s_1)^2 + (p_z^* - l_0)^2} \quad (2-78)$$

El enlace prismático para este manipulador tiene una carrera limitada, en la cual  $d_3$  es siempre positiva, por lo tanto se descarta la solución negativa. Por otro lado, la ecuación (2-76) tiene dos soluciones debido a los dobles signos debajo antes de la raíz cuadrada. También , la expresión (2-77) toma dos valores diferentes, dependiendo del valor  $\theta_1$  .

Después de que se obtienen los valores para los tres primeros ejes, se resuelve la ecuación cinemática para los tres últimos desplazamientos en los ejes. Premultiplicando la inversa del producto de la matriz  $A_1^0 A_2^1 A_3^2$  a ambos lados de la ecuación (2-38), se obtiene :

$$[A_1^0(\theta_1) A_2^1(\theta_2) A_3^2(d_3)]^{-1} T = A_4^3(\theta_4) A_5^4(\theta_5) A_6^5(\theta_6) \quad (2-79)$$

Ambos lados de la ecuación representan la posición y orientación de la herramienta vista desde el tercer sistema de ejes. Puesto que se conocen  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , la matriz izquierda es conocida. denotémosla por :

$$T^* = [A_1^0 A_2^1 A_3^2]^{-1} T = \begin{bmatrix} n_x & t_x & b_x & p_x \\ n_y & t_y & b_y & p_y \\ n_z & t_z & b_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-80)$$

Premultiplicando la ecuación (2-79) por  $[A_1'(\theta_1)]^{-1}$  y evaluando ambos lados, se obtiene :

$$(A_1^3)^{-1} T' = \begin{bmatrix} * & * & b_x c_4 + b_y s_4 & * \\ -n_z & -l_z & -h_z & * \\ -n_x s_4 + n_y c_4 & -l_x s_4 + l_y c_4 & -b_x s_4 + b_y c_4 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-81)$$

$$A_5^4 A_6^5 = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & s_5 & * \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & -c_5 & * \\ s_6 & c_6 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-82)$$

donde algunos elementos de las matrices son simplemente denotados por \*, puesto que son irrelevantes en el presente cálculo. Comparando los elementos [3,3] de la matrices anteriores, se obtiene,

$$-b_x s_4 + b_y c_4 = 0 \quad (2-83)$$

El desplazamiento  $\theta_4$  está dado por :

$$\theta_4 = \tan^{-1} \left( \frac{b_y}{b_x} \right) \quad (2-84)$$

De los elementos [1,3] y [2,3], se obtiene:

$$\theta_5 = \tan^{-1} \left( \frac{b_x c_4 + b_y s_4}{h_z} \right) \quad (2-85)$$

donde  $c_4$  y  $s_4$  son evaluados con la ecuación (2-84). De forma similar el desplazamiento de  $\theta_n$  puede ser determinado de los elementos [3,1] y [3,2] y está dado por:

$$\theta_n = \tan^{-1} \left( \frac{-n_r s_4 + n_y c_4}{-l_c s_4 + l_y c_4} \right) \quad (2-86)$$

Con lo cual se obtienen todos los desplazamientos.

## 2.2 Estática

En este subcapítulo se revisarán las relaciones entre el torque aplicado a cada uno de los actuadores de un manipulador y la fuerza y momento resultante en el efector o herramienta final, así como la deflexión del punto final debido a la rigidez del manipulador.

### 2.2.1 Análisis de fuerzas y momentos

#### Balanceo de fuerzas y momentos

Empecemos por considerar la figura siguiente:

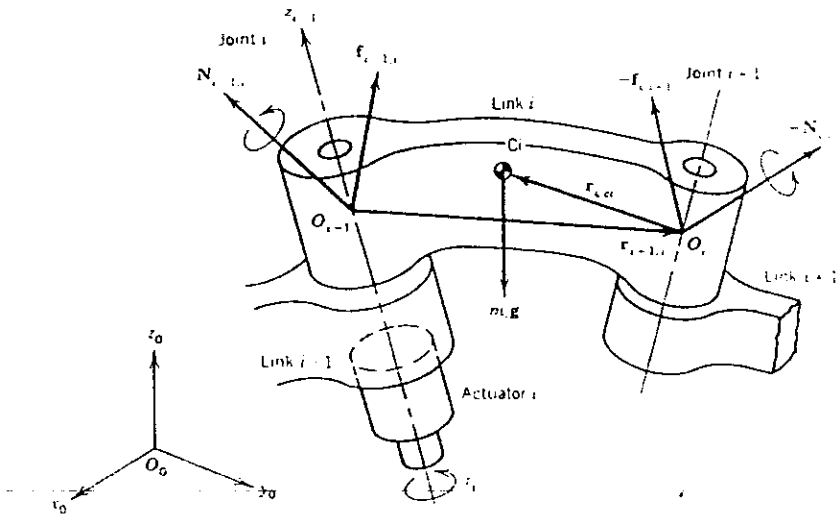


Fig 2.1.1 Fuerzas y momentos actuando en el enlace i.

Se muestra en la figura el enlace  $i$  con las fuerzas y momentos que actúan sobre él. La fuerza lineal que actúa sobre el punto  $O_{i-1}$ , que es el origen del sistema de coordenadas  $O_{i-1}$  es denotado por el vector  $f_{i-1,i}$ , donde la fuerza es generada por el enlace con el subíndice anterior ( $i-1$ ). El vector  $f_{i,i+1}$  por lo tanto representa la fuerza aplicada al enlace  $i+1$  por el enlace  $i$ . La fuerza aplicada al enlace  $i$  por el enlace  $i+1$  está dado por  $-f_{i,i+1}$ . La fuerza de gravedad actuando sobre el centroide  $C_i$  se denota por  $m_i g$ , donde  $m_i$  es la masa del enlace  $i$  y  $g$  es un vector  $3 \times 1$  que representa la

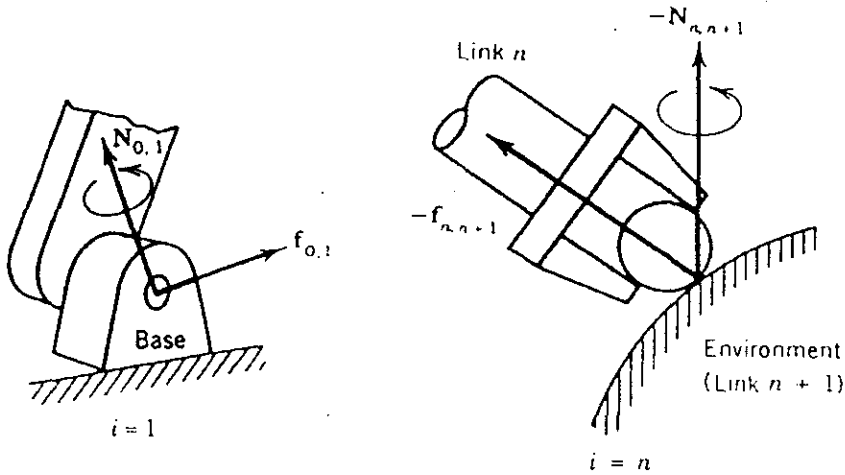


Fig. 2.1.2 Fuerzas y momentos ejercidos por el enlace de base y el ambiente

aceleración de la gravedad. La ecuación de fuerzas está dada por:

$$f_{i-1,i} - f_{i,i+1} + m_i g = 0, \quad i=1, \dots, n \quad (2.1.1)$$

obsérvese que todos los vectores están definidos con referencia al sistema de coordenadas  $O_{0,x_0,y_0,z_0}$

Por otro lado, el momento aplicado al enlace  $i$  por el enlace  $i-1$  se denota por  $N_{i-1,i}$ , y por lo tanto, el momento aplicado al enlace  $i$  por el enlace  $i+1$  es  $-N_{i,i+1}$ , más aún, las fuerzas lineales  $f_{i-1,i}$  y  $-f_{i,i+1}$  también causan momentos alrededor del centroide  $C_i$ . La ecuación de balance de momentos con respecto al centroide  $C_i$  viene dado por:

$$N_{i-1,i} - N_{i,i+1} - (r_{i-1,i} + r_{i,c_i}) \times f_{i-1,i} + (-r_{i,c_i}) \times (-f_{i,i+1}) = 0, \quad i=1, \dots, n \quad (2.1.2)$$

donde  $r_{i-1,i}$  es el vector de posición  $3 \times 1$  desde el punto  $O_{i-1}$  al punto  $O_i$  con referencia en al sistema de coordenadas base y  $r_{i,c_i}$  representa la el vector de posición desde el punto  $O_i$  al centroide  $C_i$ . La fuerza  $f_{i-1,i}$  y el momento  $N_{i-1,i}$  son llamados fuerza de acoplo y momento entre los enlaces adyacente  $i$  e  $i-1$ . Cuando  $i=1$ , la fuerza de acoplo y momentos se convierte en  $f_{0,1}$  y  $N_{0,1}$ . Estos dos son interpretados como la fuerza de reacción y momento

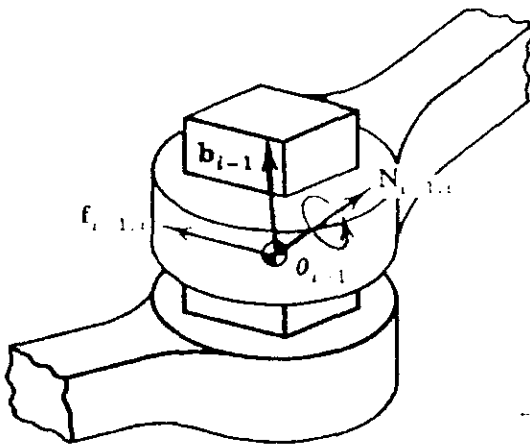


Fig 2.1.3 Fuerza de acoplo y fuerza de articulación para una articulación prismática.

aplicado a la base a la cual el brazo está fijo ( fig 2.1.2). Cuando  $i=n$ , por

otro lado, la fuerza de acoplo y momento se convierte  $f_{n,n+1}$  y  $N_{n,n+1}$ . Como se muestra en la figura 2.1.2, cuando el efector final (que es, enlace  $n$ ) hace contacto con el ambiente, la fuerza de reacción y momento actúa en el último enlace. Por conveniencia se trata al ambiente como un enlace adicional, numerado  $n+1$ , y a la fuerza de reacción y momento por  $-f_{n,n+1}$  y  $-N_{n,n+1}$ , respectivamente.

Las dos ecuaciones anteriores pueden ser encontradas para todos los enlaces, excepto para el de la base, con  $i=1, \dots, n$ . El número total de ecuaciones vectoriales que pueden ser derivadas es de  $2n$ , mientras que el número de fuerzas de acoplo y momentos involucrados es  $2(n+1)$ , por lo que dos de las fuerzas de acoplo y momentos deben ser especificados, de otra forma las ecuaciones no pueden ser resueltas. Sabemos que para realizar una tarea el manipulador tiene que activar una fuerza y momento en su último enlace, por lo que para resolver las ecuaciones simultáneas se requerirán conocer:  $f_{n,n+1}$  y el momento  $N_{n,n+1}$  y definir el siguiente vector de seis dimensiones:

$$F = \begin{bmatrix} f_{n,n+1} \\ N_{n,n+1} \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

En donde se llama a  $F$  el vector de fuerza y momentos o simplemente la fuerza en el punto final.

### *Torques equivalentes en articulaciones*

Se derivarán en estos párrafos las relaciones funcionales entre los torques de entrada producidos por los actuadores y la fuerza resultante en el punto final.

Sea  $\tau_i$  el torque producido por el actuador  $i$ -ésimo sobre la articulación  $i$ -ésima.

Para una articulación de revolución,  $\tau_i$  representa un torque ( a diferencia de una articulación prismática , en la cual representa una fuerza lineal).Este torque es balanceado con el componente de torque de acoplo de  $N_{i-1,i}$  el cual está en la dirección del eje de giro

$$\tau_i = b_{i-1}^T \cdot N_{i-1,i} \quad (2.1.4)$$

Otros componentes del torque de acoplo  $N_{i-1,i}$  son soportados por la estructura de la articulación y dada su orientación, no realizan trabajo.

Se pueden combinar todas las fuerzas y momentos de articulación juntos para definir el vector con  $n$  elementos dado por :

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} \quad (2.1.5)$$

a  $\tau$  anterior se le conoce como el *vector de fuerza y torque* o simplemente *torque de articulación* . Los torques de articulación representan la aportación de los actuadores al manipulador. La relación entre los torques de articulación  $\tau$  y el vector de fuerza final  $F$  se establecerá en el siguiente teorema :



"Asumiendo que los mecanismos de las articulaciones no tienen fricción , entonces, los torques de articulación que se requieren para soportar una fuerza arbitraria  $\mathbf{F}$  en el punto final del manipulador está dada por :"<sup>1</sup>

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F} \tag{2.1.6}$$

donde  $\mathbf{J}$  es la expresión jacobiana de  $6 \times n$  que relaciona los desplazamientos infinitesimales de la articulación  $d\mathbf{q}$  a los desplazamientos infinitesimales  $d\mathbf{p}$  del punto de aplicación del manipulador

$$d\mathbf{p} = \mathbf{J}d\mathbf{q} \tag{2.1.7}$$

En la ecuación anterior, no se consideran los torques de gravedad u otros,

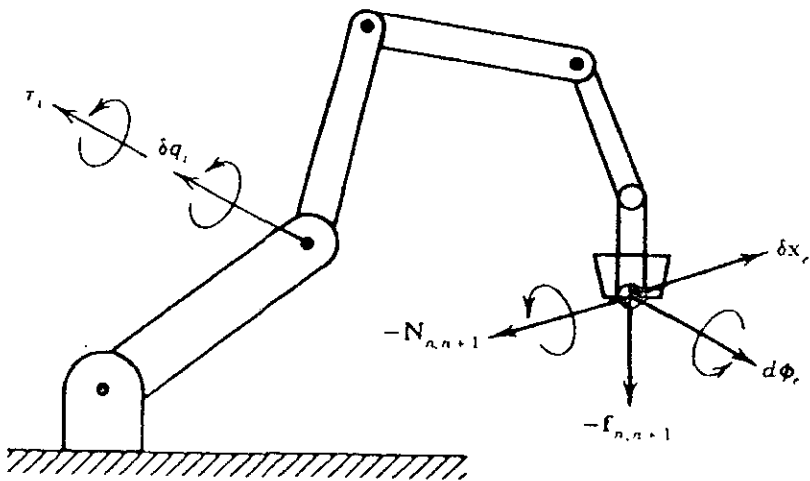


Fig. 2.1.4 Desplazamiento virtual de la herramienta final y las articulaciones individuales.

son los torques netos que balancean la fuerza y momentos en el punto de

<sup>1</sup>Asada .H; Slotine J.J..Robot analysis and control. John Wiley and Sons.

aplicación. En la ecuación 2.1.6 el símbolo  $\tau$  representa a los torques equivalentes de articulación correspondientes a la fuerza del punto  $F$ . La ecuación 2.1.6 representa un resultado importante para el cálculo de los torques intermedios.

### *Dualidad*

Considerando que los torques de las articulaciones están relacionados con la fuerza en el punto de aplicación por la matriz Jacobiana del manipulador, que es la misma matriz que relaciona los desplazamientos infinitesimales de la articulación con el desplazamiento del punto de aplicación final, se deriva que la fuerza estática está relacionada también con la cinemática instantánea del manipulador.

### *Transformaciones de Fuerzas y Momentos*

La ley de la dualidad puede ser utilizada en cinemática instantánea y estática. Una vez que se encuentra la ecuación de cinemática instantánea, se puede derivar la relación entre fuerzas estáticas y momentos inmediatamente sin pasar a través del diagrama de cuerpo libre.

Como inicio, se define al vector  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$  como un juego independiente de coordenadas generalizadas que localizan un sistema mecánico de forma completa. Los desplazamientos de las articulaciones son un ejemplo de tal juego independiente de coordenadas. Sea además  $\mathbf{Q} = [Q_1, \dots, Q_n]^T$  las fuerzas generalizadas correspondientes a las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$ . También asumimos que existe otro juego de coordenadas generalizadas denotadas por  $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_m]^T$ . Es de notar que las coordenadas  $\mathbf{p}$  no necesariamente

tienen que ser completas, es decir, todos los grados de libertad del sistema no necesariamente son determinados por el juego de coordenadas. Por ejemplo, la posición y orientación del punto de aplicación del robot no determina la configuración completa del manipulador cuando el manipulador tiene grados de libertad redundante.

Considérese un instante en que las fuerzas estáticas y momentos actúan sobre el sistema cuando está con las coordenadas  $\mathbf{q}$ . Supóngase que las fuerzas y momentos denotados por  $\mathbf{P} = [P_1, \dots, P_m]^T$  son representados con referencia a las coordenadas  $\mathbf{p}$  de tal forma que  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{P}$  son las coordenadas generalizadas y sus correspondientes fuerzas generalizadas. El problema consiste en transformar las fuerzas y momentos denotados por  $\mathbf{P}$  de las coordenadas  $\mathbf{p}$  a las coordenadas  $\mathbf{q}$ .

Consideremos para el problema desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{p}$ . Dado que las coordenadas  $\mathbf{q}$  son un juego completo de coordenadas generalizadas, ellas pueden representar el desplazamiento de un punto arbitrario en el sistema. Por lo tanto, los desplazamientos representados por  $\mathbf{p}$  deben ser expresados en coordenadas  $\mathbf{q}$ . La expresión que liga estos dos tipos de coordenadas es

$$\delta \mathbf{p} = \mathbf{J} \delta \mathbf{q} \quad (2.1.8)$$

donde  $\mathbf{J}$  es la matriz jacobiana de dimensiones  $m \times n$  asociada con la transformación de coordenadas. Las fuerzas generalizadas  $\mathbf{P}$  son transformadas en fuerzas generalizadas  $\mathbf{Q}$  en las coordenadas  $\mathbf{q}$  por la expresión :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J}^T \mathbf{P} \quad (2.1.9)$$

Donde  $J^T$  es la traspuesta de la matriz Jacobiana.

### 2.2.2 Rigidez

La rigidez de un manipulador determina la magnitud de la deflexión del punto de aplicación de un manipulador cuando se le aplica una fuerza al brazo del manipulador.

Hay varias fuentes que producen deflexiones en un brazo manipulador: fuerzas muy grandes aplicadas al brazo, en particular cuando el brazo es largo; uso de transmisiones, reductores y sistemas de servodrivives. Cada uno de los elementos mecánicos agrega una deflexión, por otro lado, el sistema de control de realimentación genera un torque que se basa en la diferencia entre la posición de referencia y la posición medida en la realidad.

Una ecuación para modelar la rigidez del sistema de control combinada con la rigidez del reductor y transmisión es la siguiente:

$$\tau_i = k_i \Delta q_i \quad (2.1.10)$$

donde  $\tau_i$  es el torque de articulación.  $\Delta q_i$  es la deflexión del eje de articulación y  $k_i$  es la constante que relaciona la deflexión con el torque transmitido.

*Análisis de deflexión del punto de aplicación.*

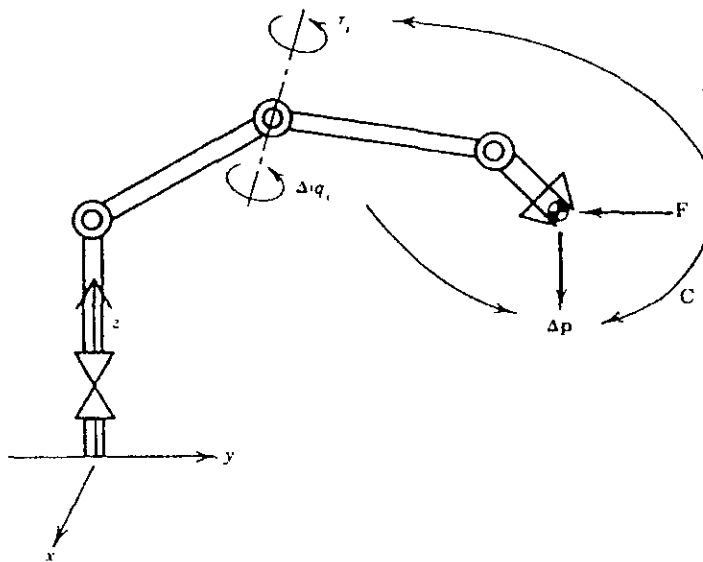


Fig 2.1.5 Rigidez del punto final y de las articulaciones del manipulador

Dado el vector  $m$ -dimensional  $\mathbf{F}$  que representa la fuerza y momento sobre el punto de aplicación del manipulador y la deflexión resultante  $\Delta \mathbf{p}$ , ambos definidos con respecto al sistema de coordenadas base y despreciando la gravedad y fricción, la fuerza en el punto de aplicación puede ser convertida en torques de las articulaciones mediante la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F} \tag{2.1.11}$$

donde  $\mathbf{J}^T$  es la transpuesta de la matriz jacobiana. De las ecuaciones previas se conoce que los torques  $\boldsymbol{\tau}$  de las articulaciones están relacionados con

las deflexiones  $\Delta \mathbf{q}$  por la rigidez de las articulaciones individuales, la ecuación en forma de vector es:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{q} \quad (2.1.12)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz diagonal de  $n \times n$  dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{bmatrix} \quad (2.1.13)$$

Las deformaciones de las articulaciones individuales  $\Delta \mathbf{q}$  producen deformaciones en el punto final  $\Delta \mathbf{p}$  de acuerdo a :

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{J} \Delta \mathbf{q} \quad (2.1.14)$$

Cuando los sistemas de accionamiento individuales de las articulaciones están activos y la rigidez no es cero, la matriz  $\mathbf{K}$  es invertible . Sustituyendo 2.1.11 y 2.1.12 en 2.1.14 se obtiene :

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{C} \mathbf{F} \quad (2.1.15)$$

donde :

$$\mathbf{C} = \mathbf{J} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{J}^T \quad (2.1.16)$$

Por lo que la deformación en el punto final se relaciona a la fuerza en el punto final por la matriz  $\mathbf{C}$  de  $m \times m$  dimensiones. La matriz  $\mathbf{C}$  se conoce como la matriz de acoplo (compliance matrix) del punto final del brazo. Si

la matriz jacobiana es cuadrada y de rango completo, la matriz de acoplo se invertible:

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}^{-1} \Delta \mathbf{p}$$

La inversa de la matriz de acoplo se conoce como la matriz de rigidez del punto final del brazo. Cuando la matriz jacobiana es degenerada, la rigidez se convierte en infinita en al menos una dirección. Esto implica que existe una fuerza en el punto final del manipulador tal que los torques de las articulaciones son cero, y al no existir torque aplicado sobre las articulaciones, la deflexión es cero y por lo tanto la rigidez es infinita (si los enlaces del manipulador se consideran rígidos ).

La matriz de acoplo del punto final, así como la matriz de rigidez, dependen de las rigideces individuales de las articulaciones así como de la matriz jacobiana y siendo esta dependiente de la configuración del manipulador, se desprende que la matriz de acoplo también es dependiente de la configuración, al tiempo que la magnitud de deformación del punto final varía con la dirección de la fuerza en el punto final.

#### *La transformación principal en Matrices de acoplo.*

La deflexión del brazo de un manipulador varía no solamente por la configuración del brazo, sino también por la dirección de las fuerzas aplicadas en el punto final.

Sabemos de la sección anterior que la matriz de acoplo  $C$  viene dada por:

$$C = JK^{-1}J^T \quad (2.1.17)$$

Donde  $J$  es la matriz jacobiana y  $K$  es la matriz que relaciona el torque con

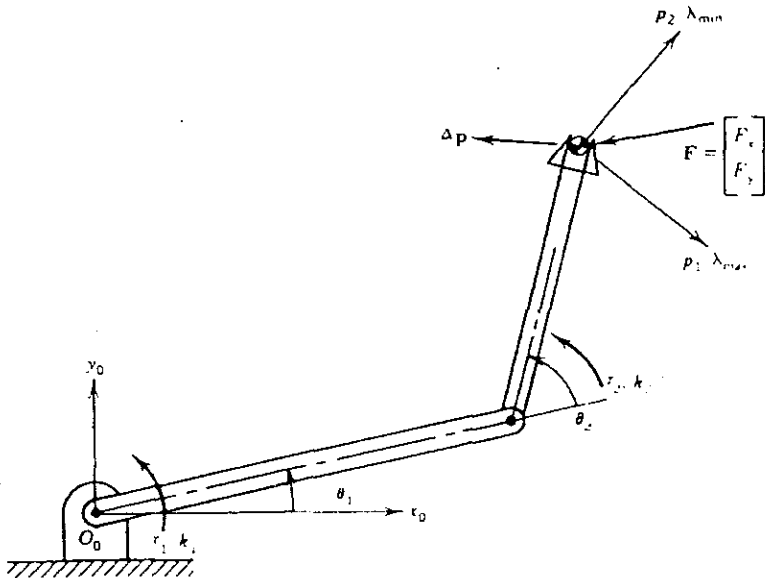


Fig. 2.1.6 Direcciones principales de deflexión del punto final.

las deflexiones del sistema mecánico. Para encontrar las deflexiones máximas y mínimas y sus direcciones, cuando se aplica una fuerza de magnitud unitaria al punto final, de la ecuación 2.1.15, la norma cuadrada de la deflexión del punto está dada por:

$$|\Delta p|^2 = \Delta p^T \Delta p = F^T C^T C F = F^T C^2 F \quad (2.1.18)$$



donde  $C$  es simétrica. Usando la condición de que la magnitud de la fuerza sea igual a 1 y utilizando el multiplicador de Lagrange  $\lambda$ :

$$L = F^T C^2 F - \lambda (F^T F - 1) \quad (2.1.19)$$

La condición necesaria para que la norma cuadrada del punto de deflexión tome valores extremos, está dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 : -F^T F + 1 = 0 \quad (2.1.20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial F} = 0 : C^2 F - \lambda F = 0 \quad (2.1.21)$$

De la ecuación anterior 2.1.21 se sigue que el multiplicador de Lagrange es el valor característico de la matriz  $C^2$ . Por lo que el problema de encontrar las deflexiones máximas y mínimas es un problema de valor característico. Al resolver la ecuación característica se encuentran los valores característicos mínimo y máximo.

$$\lambda_{\max} / \lambda_{\min} = \frac{1}{2} \left[ a_1 + a_2 \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4a_3^2} \right] \quad (2.1.22)$$

donde

$$C^2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}$$

Al usar las ecuaciones 2.1.20 y 2.1.21, la norma cuadrada de la deflexión del punto final viene dada por:

$$|\Delta p|^2 = F^T C^{-2} F = F^T \lambda F = \lambda \quad (2.1.23)$$

de lo que las deflexiones máxima y mínima vienen dadas por:  $\sqrt{\lambda_{\max}}$  y  $\sqrt{\lambda_{\min}}$ , respectivamente.

La dirección en que ocurren las máxima o mínima deflexión viene dada por el vector característico correspondiente a los valores característicos máximos y mínimos. Las direcciones de los vectores característicos son perpendiculares entre sí y son conocidas como ejes principales.

## 2.3 Dinámica

---

Para encontrar las ecuaciones de movimiento de un manipulador se pueden seguir dos caminos : la utilización de la segunda ley de Newton que relaciona fuerzas y momentos, así como torque y momento angular, pero que requiere de varias operaciones para derivar de una forma clara las ecuaciones dinámicas, o la formulación lagrangiana de la dinámica de un manipulador, la cual describe el comportamiento del sistema en términos de trabajo y energía almacenada en el sistema más que en función de fuerzas y momentos de los miembros involucrados.

### 2.3.1 La formulación lagrangiana

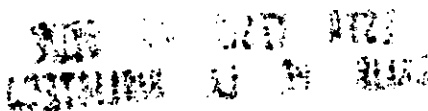
La función Lagrangiana  $L$  está definida por:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T - U \quad (2.3.1)$$

Donde  $q_1, \dots, q_n$  son las coordenadas generalizadas que localizan completamente a un sistema dinámico, y  $T, U$  son la energía cinética total y la energía potencial almacenadas en el sistema. Las ecuaciones de movimiento del sistema vienen dadas por la siguiente expresión, si se considera el uso de la Lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i=1, \dots, n \quad (2.3.2)$$

y  $Q_i$  es una fuerza generalizada correspondiente a la coordenada generalizada  $q_i$ .



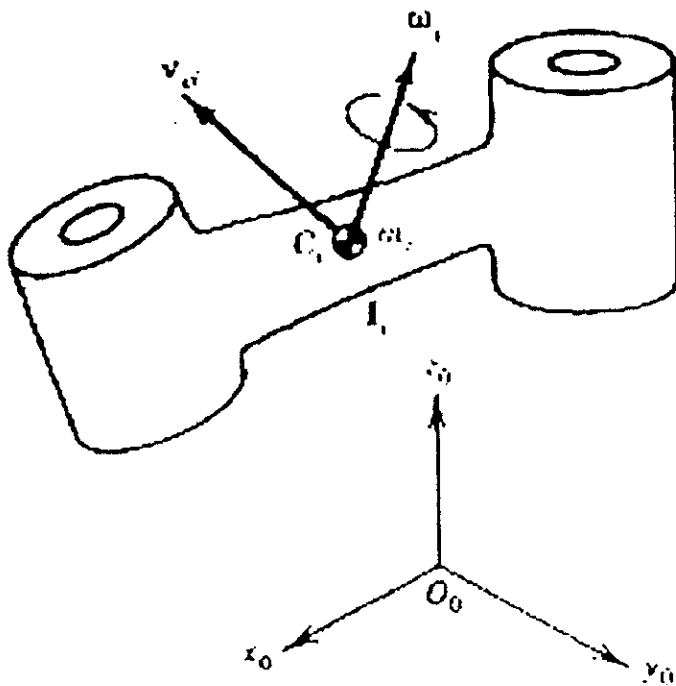


Fig. 2.3.1 Velocidad centroidal y velocidad angular del enlace i.

El primer paso consiste en encontrar el valor de la energía cinética almacenada en cada enlace del brazo.

La energía cinética total del enlace i según la figura 2.3-1 es dada por:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^2 + \frac{1}{2} \omega_i^T I_i \omega_i \quad (2.3.3)$$

donde  $m_i$  es la masa del enlace e  $I_i$  es el tensor de inercia de 3x3 en el centroide expresado en coordenadas de base, el primer término de la derecha representa la energía cinética resultante del movimiento traslacional, mientras que el segundo término representa la energía cinética resultante de la rotación a través del centroide, obsérvese que la energía total vendrá dada por la suma de la energía de todos los enlaces del brazo.

Si consideramos que la velocidad se puede representar por la multiplicación de las coordenadas de las articulaciones por los correspondientes elementos de la matriz jacobiana, entonces, la expresión de las velocidades vendrá dada por:

$$v_{ci} = J_{1i}^{(0)} \dot{q}_1 + \dots + J_{ni}^{(0)} \dot{q}_n = J_i^{(0)} \dot{q}_i \quad (2.3.4)$$

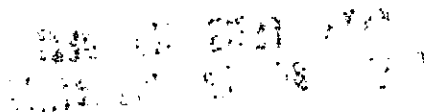
$$\omega_i = J_{\omega 1}^{(0)} \dot{q}_1 + \dots + J_{\omega n}^{(0)} \dot{q}_n = J_i^{(\omega)} \dot{q}_i \quad (2.3.4)$$

donde  $J_{1i}^{(0)} \dot{q}_j$  y  $J_{\omega i}^{(0)} \dot{q}_j$  son los vectores de la columna  $j$ , de la matriz jacobiana de 3x3. Sabemos del análisis estático que los valores de los elementos de la matriz jacobiana dependen del tipo de articulación :

$$J_{1i}^{(0)} = \begin{cases} b_{i-1} & \text{para una articulación prismática} \\ b_{i-1} r_{0,ci} & \text{para una articulación de revolución} \end{cases} \quad (2.3.5)$$

$$J_{\omega i}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{para una articulación prismática} \\ b_{i-1} & \text{para una articulación de revolución} \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Donde  $r_{0,ci}$  es el vector de posición del centroide del enlace  $i$  referido al sistema de coordenadas base y  $b_{i-1}$  es el vector unitario a lo largo del eje  $j-1$ .



Sustituyendo (2.3.4) en (2.3.3) resulta :

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i \dot{q}_i^T J_{i,i}^{(0)T} J_{i,i}^{(0)} \dot{q}_i + \dot{q}_i^T J_{i,i}^{(0)T} I_i J_{i,i}^{(0)} \dot{q}_i) = \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q} \quad (2.3.6)$$

donde H es la matriz de nxn dada por:

$$H = \sum_{i=1}^n (m_i J_{i,i}^{(0)T} J_{i,i}^{(0)} + J_{i,i}^{(0)T} I_i J_{i,i}^{(0)}) \quad (2.3.7)$$

Si se separan en elementos por columna-renglón, el tensor H del manipulador puede ser rescrito de la siguiente forma :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.3.8)$$

Obsérvese que la matriz H incorpora todas las propiedades de la masa del brazo completo reflejadas en las ejes de las articulaciones y se conoce como el *tensor de inercia del manipulador*. Esta matriz contiene elementos de la matriz jacobiana y como consecuencia depende de la configuración del robot y representa las propiedades instantáneas del brazo completo.

En adición al cálculo de energía cinética, se precisa conocer la energía potencial U y las fuerzas generalizadas para derivar las ecuaciones de movimiento de Lagrange . Sea **g** el vector 3x1 que representa la aceleración de la gravedad con referencia al sistema de coordenadas de base, el cual es un sistema de referencia inercial. La energía almacenada en todo el brazo está dada por:

$$U = \sum_{i=1}^n m_i g^i r_{0,i} \quad (2.3.9)$$

Donde la posición del centroide  $C_i$  es dependiente de la configuración del brazo, por lo que la función potencial es una función de  $q_1, \dots, q_n$ .

Las fuerzas generalizadas agrupan a todas las fuerzas y momentos que actúan sobre el brazo del manipulador, exceptuando las fuerzas de gravedad y fuerzas inerciales. Consideramos la situación donde los actuadores aplican torques en las articulaciones  $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  individuales y una fuerza externa  $F_{ext}$  y momento son aplicados en el punto final del brazo mientras que se encuentran en contacto con el medio ambiente. Las fuerzas generalizadas se obtienen de calcular el *trabajo virtual* que realizan estas fuerzas, es decir, de suponer un desplazamiento en la posición final y en el desplazamiento de ángulos y calcular el trabajo realizado.

El trabajo virtual vendrá dado por:

$$\delta \text{Trabajo} = \tau^T \delta q + F_{ext}^T \delta p = (\tau + J^T F_{ext})^T \delta q \quad (2.3.10)$$

Si se considera además que el trabajo también puede ser expresado directamente en función de las fuerzas generalizadas  $Q = [Q_1, \dots, Q_n]^T$ , entonces:

$$\delta \text{Trabajo} = Q^T \delta q \quad (2.3.11)$$

de las dos ecuaciones anteriores, se desprende :

$$Q = \tau + J^T F_{ext} \quad (2.3.12)$$

Al usar la energía cinética (cc. 2.3.8) y la energía potencial total (cc. 2.3.9), podemos derivar las ecuaciones de movimiento de Lagrange. Para la ecuación 2.3.8, el primer término se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n H_{ij} \dot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^n H_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{dH_{ij}}{dt} \dot{q}_j \quad (2.3.13)$$

es de notarse que  $H_{ij}$  es función de  $q_1, \dots, q_n$ , de tal forma que la derivada de  $H_{ij}$  con respecto al tiempo está dada por:

$$\frac{dH_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (2.3.14)$$

El segundo término de la ecuación 2.3.8. incluye la derivada parcial de la energía cinética, dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n H_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (2.3.15)$$

lo anterior se cumple porque  $H_{jk}$  depende de  $q_i$ . El término de la gravedad  $G_i$  se obtiene tomando la derivada parcial de la energía potencial:

$$G_i = \frac{\partial U^i}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n m_j g_j^i \frac{\partial r_{0,ci}^j}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n m_j g_j^i J_{ij}^{(i)} \quad (2.3.16)$$

la relación anterior se cumple porque la derivada parcial del vector de posición  $r_{0,ci}$  con respecto a  $q_i$  es la misma que el  $i$ -ésimo vector columna de



la matriz jacobiana  $J_{i'}^{(i)}$  definido por las ecuaciones (2.3.4 y 2.3.5).

Sustituyendo las expresiones (2.3.13 a 2.3.16) en (2.3.3) se encuentra :

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + G_i = Q_i, \quad i=1, \dots, n \quad (2.3.17)$$

donde:

$$h_{ijk} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} \quad (2.3.18)$$

$$G_i = \sum_{j=1}^n m_j g^j J_{i'}^{(j)} \quad (2.3.19)$$

El primer término representa los torques de inercia, incluyendo interacciones de torque, mientras que el segundo término incluye los efectos centrífugos y de coriolis y el último término es el correspondiente al torque gravitacional. La formulación lagrangiana de las ecuaciones de movimiento provee de una forma cerrada de ecuaciones dinámicas.

### III

## SISTEMAS DE CONTROL



## III SISTEMAS DE CONTROL

---

### *3.1 Sistemas de Control de Trayectoria*

---

#### 3.1.1 Tipos

En esta parte se describirán de forma breve las aproximaciones a las formas que existen para realizar el control de trayectoria en un manipulador, se pretende como una introducción, puesto que la profundidad y vastedad del tema requerirían mayor amplitud.

Existen tres aproximaciones al problema de determinar las posibilidades mecánicas de un manipulador y de entender el control dinámico del mismo, ellas son:

- a) Control individual de articulación PID
- b) Torque calculado.
- c) Diseño del controlador Robusto

La primera aproximación, control individual de la articulación, es la más simple, puesto que ignora la dinámica del manipulador e intenta controlar usando un controlador PID local en cada articulación.

$$\tau_j = -\kappa_j \dot{\tilde{q}}_j - k_{p,j} \tilde{q}_j - k_{v,j} \int_0^t \tilde{q}_j dT \quad j=1, \dots, n \quad (4.1)$$

donde  $\tilde{q} := q_j - q_{d,j}$  es el error de posición y los coeficientes  $k_{p,j}$ ,  $k_{v,j}$ , y  $\kappa_j$  son positivos y relativamente grandes. Este método es casi factible de ocupar, puesto que logra el control de posición: después de un rato, logrará que el manipulador vaya a donde debe ir.

Sin embargo, se requiere algo más sofisticado para obtener un buen resultado en cuanto a la precisión de la trayectoria. La idea del torque calculado es la definir un torque de control  $\tau$  usando una estructura idéntica a la de la dinámica del manipulador (ec 4.2), o sea

$$\mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h} = \boldsymbol{\tau} \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{q}$  es el vector de desplazamiento de las articulaciones,  $\boldsymbol{\tau}$  es el vector de torques de las articulaciones,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{q})$  es la matriz de inercia del manipulador y el término no lineal  $\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; t)$  contiene las fuerzas centrífugas, Coriolis y gravitación.

Para el torque calculado, la estructura resultante será:

$$\boldsymbol{\tau} := \mathbf{H} \mathbf{u} + \mathbf{h} \quad (4.3)$$

de tal forma que sustituyendo 4.3 en 4.1, el problema se reduce idealmente a controlar el sistema simple:

$$\ddot{q} = u \quad (4.4)$$

la equivalencia anterior es posible dado que al igualar el torque, la matriz  $H$  puede ser eliminada pues es definida positiva y es invertible. La expresión (4.4) contiene un juego de  $n$  integradores dobles independientes, cada uno de los cuales puede ser controlado independientemente usando un simple controlador PD.

$$u_j := \ddot{q}_{jd} - k_{jd} \dot{q}_j - k_{jd} \bar{q}_j \quad j=1, \dots, n \quad (4.5)$$

o PID

$$u_j := \ddot{q}_{jd} - k_{jd} \dot{q}_j - k_{jd} \bar{q}_j - k_{jd} \int_0^t \bar{q} dT \quad j=1, \dots, n \quad (4.6)$$

donde  $\ddot{q}_{jd}$  es la aceleración de la trayectoria deseada en la articulación  $j$ . El vector de torque de la articulación (4.3) puede ser calculado del valor de  $u$  usando algún algoritmo recursivo.

Esta aproximación tiene una limitante importante : sólo se disponen de las estimaciones de  $\hat{H}$  y  $\hat{h}$ , correspondientes a  $H$  y  $h$ . Tal incertidumbre paramétrica es debida a imprecisiones en las propiedades de masa del manipulador o en las constantes de torque de los actuadores, y a la falta de un buen modelo de fricción , cargas desconocidas, quizás limitadas por la capacidad de cómputo en tiempo real, de tal forma que se puede aplicar solamente:

$$\tau := \hat{H}u + \hat{h} \quad (4.7)$$

en lugar de (4.3) , de tal forma que obtenemos :

$$\ddot{q} = (H^{-1} \hat{H})u + H^{-1}(\hat{h} - h) \quad (4.8)$$

Esta ecuación no es tan simple como (4.4), y puede no ser manejada de forma adecuada por métodos lineales de control. Un punto importante es como minimizar la sensibilidad a incertidumbre del modelo, incluyendo incertidumbre paramétrica y de la dinámica de alta frecuencia.

### 3.1.2 Control de Posición con esquema Local.

En general , un esquema local compuesto de controladores independientes, uno en cada articulación, representa un esquema de control adecuado para un manipulador. En ausencia de fricción o gravedad, el control de posición se puede alcanzar mediante:

$$\tau = -K_p \tilde{q} - K_D \dot{\tilde{q}} \quad (4.9)$$

donde:  $K_p$  y  $K_D$  son matrices simétricas positivas y definidas, y  $\tilde{q} = q - q_d$  , con  $q$  siendo el vector real de desplazamiento y  $q_d$  el vector fijo de desplazamiento deseado, por lo anterior las derivadas de ambas son iguales

( $\ddot{q} = \dot{\ddot{q}}$ ). Lo anterior considerando que es posible representar la dinámica del manipulador mediante la siguiente expresión:

$$H\ddot{q} + Q\dot{q} = \tau \quad (4.10)$$

Donde H es la matriz de inercia que incorpora todas las propiedades de la masa del brazo completo reflejadas en las ejes de las articulaciones y se conoce como el *tensor de inercia del manipulador*, q es la posición de la articulación, Q es la matriz que incluye los torques de inercia y  $\tau$  es el torque aplicado al manipulador.

Si se pretende considerar los efectos de la gravedad, las ecuaciones resultantes son:

$$H\ddot{q} + Q\dot{q} + g = \tau \quad (4.11)$$

$$\tau = -K_p \tilde{q} - K_D \dot{\tilde{q}} + g(q) \quad (4.12)$$

Dado que esta compensación es imperfecta, debido a la posición del centro de masa, inercias del brazo, se utiliza un término de control integral:

$$\tau = -k_{i,j} \int_0^t \tilde{q}_j dT - k_{v,j} \dot{\tilde{q}}_j - k_{p,j} \tilde{q}_j \quad j=1,2,\dots,n \quad (4.13)$$

Intuitivamente, el efecto del control integral es el de ajustar el comportamiento de las salidas, puesto que los efectos de la gravedad y fricción de Coulomb no son compensados de forma exacta.

### 3.1.3. Control de Trayectoria Preciso

El uso de controladores PID locales es adecuado para la aplicaciones de control de posición comunes, tales como manejo de materiales y soldadura de punto, para ellas, al realizar un movimiento el robot generalmente rebasa la posición final antes de estabilizarse, y esto es especialmente verdadero para brazos con articulaciones acopladas directamente a un motor, donde hay poca fricción y no hay engranes que reduzcan los efectos dinámicos. Otras aplicaciones, como soldadura por plasma, corte por rayo láser, requieren de capacidades más efectivas de seguimiento de trayectoria.

Para resolver los problemas de un seguimiento adecuado de trayectoria, el diseño de controladores se puede volver más sofisticado que un PID. Si consideramos la dinámica del brazo dada por:

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h} = \boldsymbol{\tau} \quad (4.14)$$

Donde  $\mathbf{q}$  es el vector de desplazamiento de las articulaciones, el torque calculado es,

$$\boldsymbol{\tau} := \mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{h} \quad (4.15)$$

lo cual lleva a una dinámica de lazo cerrado:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{H}^{-1}\hat{\mathbf{H}})\mathbf{u} + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}) \quad (4.16)$$



El reto para el control consiste en:

i) Diseñar a  $u$  de tal forma que considere:

a) Incertidumbre de parámetros: imprecisión en las propiedades de masa del manipulador, cargas desconocidas, incertidumbre en la posición de la carga, imprecisión en las constantes de los actuadores, fricción, etc.

b) Presencia de dinámica no modelada de alta frecuencia, tal como modos de resonancia estructural, retrasos de señal no considerados, muestreo finito. El ancho de banda de control debe ser tan grande para reducir los efectos de incertidumbre paramétrica, pero lo suficientemente baja como para evitar la excitación de dinámica no modelada.

ii) Cuantificar específicamente los pros y contras de un controlador con respecto a modelado y operación. El efecto de despreciar algunos términos en el modelo dinámico debe ser predecible.

Para realizar un acercamiento más efectivo a la solución de los problemas antes listados, se aplican dos conceptos, que sólo se mencionarán, pero que influyen de manera significativa en el comportamiento del manipulador: las superficies deslizantes y el concepto de "switching" en la señal de control.

### *Superficies deslizantes.*

El objetivo de este concepto es establecer primeramente una función de seguimiento de error  $s$  que pueda tener un comportamiento predecible y con un rango límite. Luego se selecciona una ley de control  $u$ , de tal forma que  $s^2$  permanezca dentro de una función de Lyapunov del sistema de lazo cerrado, a pesar de las imprecisiones e influencias externas.

Es de hacer notar que una función de Lyapunov representa la energía total asociada con el manipulador, y tiene la característica de que su derivada con respecto al tiempo es menor que cero.

Sea un sistema dinámico con una sola entrada representado con la siguiente ecuación:

$$\ddot{x}^{(n)}(t) = f(X) + b(X)u(t) + d(t) \quad (4.17)$$

donde  $u(t)$  es la entrada de control (por ejemplo el torque aplicado a una articulación de un manipulador),  $x$  es la salida escalar de interés, por ejemplo, un ángulo de una articulación, y  $X = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$  es el vector de estado. En la ecuación anterior,  $f(X)$  no es conocida exactamente, pero la imprecisión  $|\Delta f|$  está limitada por una función continua y conocida de  $X$ , de forma similar el control de ganancia  $b(x)$  no es conocido exactamente, pero es de signo conocido y está limitado por una función continua de  $X$ . La perturbación dada por  $d(t)$  es desconocida, pero también limitada por una función de  $X$  y  $t$ .

Se define entonces una superficie deslizante variante en el tiempo  $S(t)$  en el espacio  $\mathbb{R}^n$  por la ecuación escalar  $s(X,t)=0$ , donde,

$$s(X,t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x} \quad (4.18)$$

y  $\lambda$  es una constante positiva, y  $\tilde{X} = X - X_d = [\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \dots, \tilde{x}^{(n-1)}]^T$

el problema de buscar llegar a un error igual a cero es equivalente a permanecer en la superficie  $S(X,t)$  para toda  $t > 0$ .

de las perturbaciones, la entrada de control debe ser discontinua para lograr permanecer en la superficie de  $S(t)$ , lo cual puede derivar en la introducción de alta frecuencia, y por lo tanto de dinámica inestable, no deseable en el sistema.

El uso del concepto de las superficies deslizantes, el cual básicamente mantiene al error del sistema dinámico dentro de un rango conocido, permite tener un control preciso cuando el modelo tiene cierto grado de incertidumbre, con la desventaja de generar discontinuidad en las señales de entrada de control, lo cual introduce variaciones de alta frecuencia. La solución utilizada para evitar las señales de alta frecuencia es suavizar la discontinuidad del control en una delgada capa vecina a la superficie de switcheo.

En realidad, la suavización de una discontinuidad en el control equivale a la introducción de un filtro pasabajos a la dinámica local de la variable  $s$ , por lo cual se elimina la variación continua en corto tiempo.

IV

APLICACIONES INDUSTRIALES



Sistema de soldadura de arco

## IV APLICACIONES INDUSTRIALES

---

### 4.1 Soldadura de arco

---

#### 4.1.1 Introducción

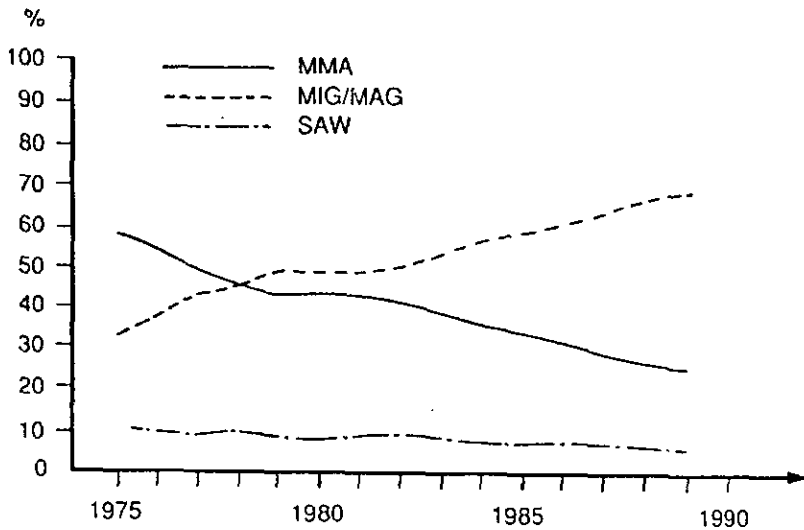
De entre los procesos industriales, la soldadura es de los más comunes en el *área metalmeccánica*, sus tipos se han derivado al mismo ritmo en que han crecido las necesidades específicas de unir metales en muy distintas condiciones y bajo diferentes parámetros; así, existen por ejemplo:

- **Soldadura manual o MMA (Manual Metal Arc Welding)**, en la cual una fuente de voltaje realiza un corto circuito mediante la unión de un electrodo a la pieza de trabajo, conteniendo el electrodo el material de aporte y teniendo normalmente un fundente de tipo sólido que forra al material de aporte. El ajuste de posición de la antorcha con respecto a la pieza a soldar, así como el desplazamiento de la misma la realiza el operario.
  
- **Soldadura semiautomática con gas o GMAW( Gas Metal Arc Welding )** En este tipo de soldadura el electrodo es un alambre que va alimentándose al proceso de forma semiautomática. El arco formado entre el alambre y la pieza a ser soldada es protegido por una corriente de gas. El operario sólo realiza el avance de la pistola en dirección del cordón de soldadura.

- **Soldadura Sumergida o SAW (Submerged Arc Welding)** . En este tipo de soldadura el metal de aporte también es alimentado de forma semiautomática , salvo que en este caso el arco se realiza sumergido en un material que impide la reacción entre el arco eléctrico y el aire circundante , típicamente el material de inmersión utilizado es arena.
  
- **Soldadura con electrodo de tungsteno o TIG** . En la cual, un electrodo de tungsteno es usado para proporcionar el calor, y el material de aporte se suministra paralelamente al punto de soldadura, fundiéndose y dando el volumen adecuado para la soldadura.
  
- **Soldadura de arco con alambre tubular o FCW (Flux Core Arc Welding)**. En este proceso, el arco es producido por medio de un alambre que sirve como electrodo. El alambre es tubular y contiene un fundente sólido por dentro, con lo cual se elimina la necesidad de utilizar gas de protección para el arco. Se produce una buena cantidad de proyecciones y requiere limpieza de la pieza soldada.

De los distintos métodos descritos brevemente, el MIG/MAG es el que más aceptación ha tenido a nivel industrial por dos razones: tiene una elevada productividad y es más fácil de automatizar. Este es el método que abordaremos en este apartado.

El método de soldadura MIG/MAG ha desplazado básicamente al proceso de soldadura manual, obsérvese la figura 4.1.1. Originalmente el método proviene de los Estados Unidos, donde fue introducido para la soldadura de



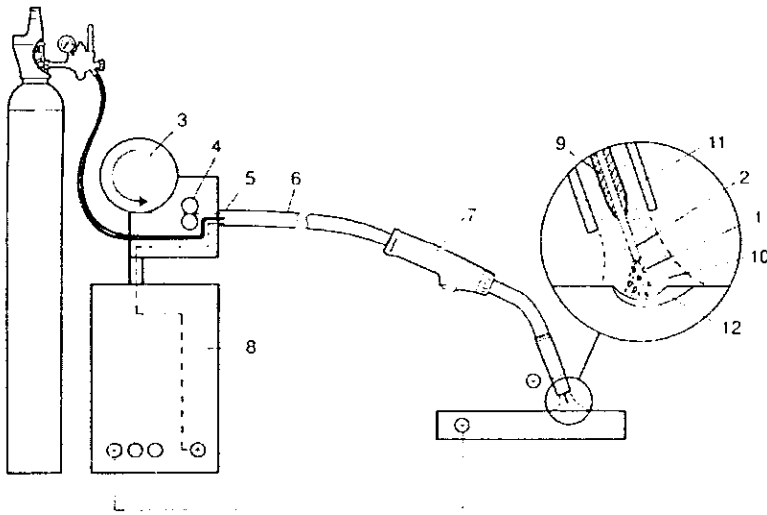
**Fig 4.1.1 Distribución entre diferentes tipos de soldadura en Europa Occidental**

aluminio, usando al argón y helio como gas de protección. Más adelante cuando se descubrió que podía utilizarse el bióxido de carbono puro como gas de protección, se inició la soldadura de acero. Con el desarrollo de materiales de aporte, gases de protección y fuentes de corriente, el proceso ha mejorado significativamente en resistencia y también en apariencia.

#### **▨ 4.1.2 Principio de Funcionamiento del proceso MIG/MAG**

El método MIG/MAG aprovecha el arco eléctrico para fundir el metal base y el de aportación y formar la soldadura. Obsérvese la figura 4.1.2. El arco (1) se forma entre la pieza de trabajo y el alambre metálico (2) que es alimentado continuamente y que se funde. El alambre metálico tiene dos

funciones : electrodo y material de aporte. Está enrollado en una bobina (3) y se hace avanzar mediante rodillos propulsores (4) a través de un conducto flexible (5) por dentro de una manguera (6) hasta la pistola (7). La energía eléctrica es suministrada por una fuente de corriente (8). El paso de la corriente al electrodo tiene lugar en la punta de contacto (9) incorporada a la pistola. La boquilla está normalmente conectada al borne positivo de la fuente de corriente, mientras que la pieza se encuentra conectada al polo negativo, formándose al contacto de estos dos polos el circuito eléctrico por donde fluye la corriente.



**Fig. 4.1.2 Principio de la soldadura MIG/MAG**

A través de la tobera de gas (11) que rodea a la punta de contacto, pasa un gas (10) cuya misión es proteger el electrodo (2), el arco (1) y el metal fundido (12) de la acción nociva del aire circundante. El gas protector puede ser inerte, lo cual significa que es inactivo y no participa en los procesos de



arco ni de baño de fundición , o reactivo. Según el tipo de gas protector el método se denomina MIG (Metal Inert Gas) o MAG (Metal Active Gas)

#### **▨ 4.1.3 Parámetros de soldadura**

En la soldura MIG/MAG los parámetros a controlar y que determinan los resultados del proceso son:

- Tensión o Voltaje (longitud de arco).
- Velocidad de alimentación de alambre (lo que determina intensidad de corriente)
- Inductancia( ajustable en la mayoría de fuentes de corriente )
- Tipo de gas protector
- Velocidad de avance.
- Inclinación de la pistola
- Longitud libre de alambre (Stick Out)A fin de obtener el mejor resultado de la soldadura, estos parámetros tienen que balancearse entre sí. Los tres primeros se regulan en la fuente de corriente. Su ajuste depende del material de base, del espesor de material , del tipo de unión, de la posición de la soldadura, del material de aportación y del gas protector. Los valores nominales pueden encontrarse en tablas, como la que se muestra en la figura 4.1.3. Estas tablas ayudan a encontrar el punto de trabajo adecuado,

véase figura 4.1.4. El punto de trabajo debe ser tal que se encuentre en la zona de trabajo de la combinación gas protector/material de aportación en cuestión y nivel de energía correcta.

|   | ESPESOR DE CHAPAS  | SEPARACION DE CHAPAS | CONSUMO DE ALAMBRE | DIÁMETRO DEL ALAMBRE | VELOCIDAD DE DEPOSITACION | VELOCIDAD DE ALIMENTACION DE ALAMBRE | INTENSIDAD | VELOCIDAD DE SOLDADURA |        |
|---|--------------------|----------------------|--------------------|----------------------|---------------------------|--------------------------------------|------------|------------------------|--------|
|   | mm                 | mm                   | kg/m               | Ø mm                 | kg/h                      | m/min                                | A          | m/h                    | cm/min |
|   | 1                  | 0                    | 0.02               | 0,6                  | 1,0                       | 7,0                                  | 60         | 50                     | 83     |
|   | 1.5                | 0.5                  | 0.02               | 0,8                  | 1,2                       | 6,0                                  | 90         | 48                     | 86     |
|   | 2                  | 1.0                  | 0.03               | 0,8                  | 1,5                       | 6,8                                  | 110        | 50                     | 83     |
|   | 3                  | 2.0                  | 0.06               | 0,8                  | 1,8                       | 8,0                                  | 125        | 33                     | 55     |
|   | 3                  | 2.0                  | 0.06               | 1,0                  | 2,1                       | 8,0                                  | 150        | 38                     | 63     |
|   | 4                  | 1                    | 0.08               | 1,0/-                | 2,2/-                     | 6,4/-                                | 150/-      | 24/-                   | 40/-   |
|   | 5                  | 1                    | 0.09               | 1,0/-                | 2,2/-                     | 6,4/-                                | 150/-      | 17/-                   | 28/-   |
|   | 6                  | 1.5                  | 0.17               | 1,0/1,0              | 2,1/2,9                   | 6,8/ 8,5                             | 150/200    | 36/26                  | 60/43  |
|   | 8                  | 1.5                  | 0.30               | 1,0/1,2              | 2,1/3,9                   | 6,0/ 7,6                             | 150/280    | 26/17                  | 43/28  |
|   | 10                 | 2                    | 0.50               | 1,0/1,2              | 2,1/5,1                   | 6,0/10,0                             | 150/320    | 21/13                  | 35/21  |
|   | CUELLO             |                      |                    |                      |                           |                                      |            |                        |        |
|   | 2                  |                      | 0.05               | 0,6                  | 1,2                       | 8,4                                  | 70         | 24                     | 40     |
|   | 2                  |                      | 0.05               | 0,8                  | 1,6                       | 6,8                                  | 110        | 32                     | 53     |
|   | 3                  |                      | 0.10               | 0,8                  | 1,9                       | 8,3                                  | 130        | 19                     | 32     |
|   | 3                  |                      | 0.10               | 1,0                  | 2,4                       | 7,0                                  | 170        | 24                     | 40     |
|   | 4                  |                      | 0.16               | 1,0                  | 2,7                       | 8,2                                  | 190        | 17                     | 28     |
|   | 5                  |                      | 0.25               | 1,2                  | 3,9                       | 7,8                                  | 260        | 16                     | 26     |
|   | 6                  | DOS O MAS CORDONES   | 0.33               | 1,2                  | 3,9                       | 7,8                                  | 260        | 12                     | 20     |
| 6 | DOS O MAS CORDONES | 0.33                 | 1,2                | 4,8                  | 9,5                       | 300                                  | 14         | 22                     |        |
| 8 | DOS O MAS CORDONES | 0.58                 | 1,2                | 4,8                  | 9,5                       | 300                                  | 8,5        | 14                     |        |
|   | 1.5                |                      | 0.02               | 0,6                  | 1,0                       | 7,0                                  | 60         | 50                     | 83     |
|   | 2                  |                      | 0.03               | 0,8                  | 1,5                       | 6,8                                  | 110        | 53                     | 88     |
|   | 3                  |                      | 0.05               | 0,8                  | 1,9                       | 8,2                                  | 130        | 38                     | 63     |
|   | 4                  |                      | 0.07               | 0,8                  | 2,0                       | 9,0                                  | 140        | 29                     | 48     |
|   | 4                  |                      | 0.07               | 1,0                  | 2,5                       | 7,5                                  | 180        | 37                     | 62     |
|   | 5                  |                      | 0.10               | 1,0                  | 2,6                       | 7,5                                  | 180        | 26                     | 43     |
|   | 6                  |                      | 0.15               | 1,2                  | 3,5                       | 7,0                                  | 240        | 23                     | 38     |
|   | 8                  | DOS O MAS CORDONES   | 0.26               | 1,2                  | 3,7                       | 7,5                                  | 250        | 18                     | 30     |
|   | 10                 | DOS O MAS CORDONES   | 0.40               | 1,2                  | 5,0                       | 10,0                                 | 320        | 12                     | 20     |
|   | 12                 | DOS O MAS CORDONES   | 0.58               | 1,2                  | 5,0                       | 10,0                                 | 320        | 9                      | 15     |

Fig. 4.1.3 Tabla ejemplo para la selección de parámetros de soldadura.

Un aspecto importante del proceso de soldadura es la forma en que el material de aportación fundido se transfiere al baño de fusión. Dependiendo de los parámetros de soldadura que se ocupen, se determina el tipo de transferencia, el cual puede ser corto circuito, arco mixto o arco de spray.

Un cuarto tipo de transmisión se obtiene con la soldadura de pulsación, una variante del método MIG/MAG que va ganando presencia en la actualidad.

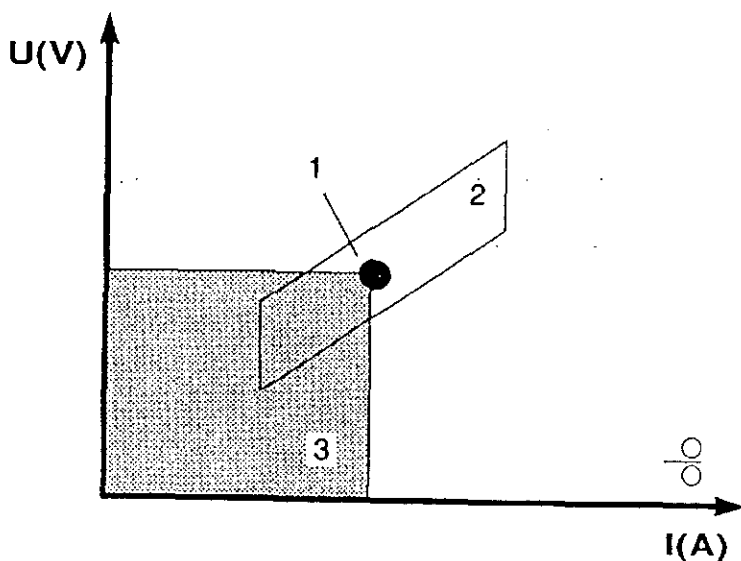


Fig. 4.1.4 Definiciones : 1.-Punto de trabajo, 2.- Zona de trabajo, 3.- Energía térmica del arco.

La soldadura con arco en corto circuito es la variante más corriente del método MIG/MAG . Este tipo de soldadura se realizan con tensión e intensidad relativamente bajas, obsérvese la figura 4.1.5. Por esta razón el arco en corto circuito es conveniente para soldar piezas delgadas y en posiciones inclinadas.

En la soldadura de corto circuito, se forman gotas bastante grandes que cortocircuitan el arco, tal como se aprecia en la figura 4.1.6, y el número de cortocircuitos varía entre 30 y 200 por segundo.

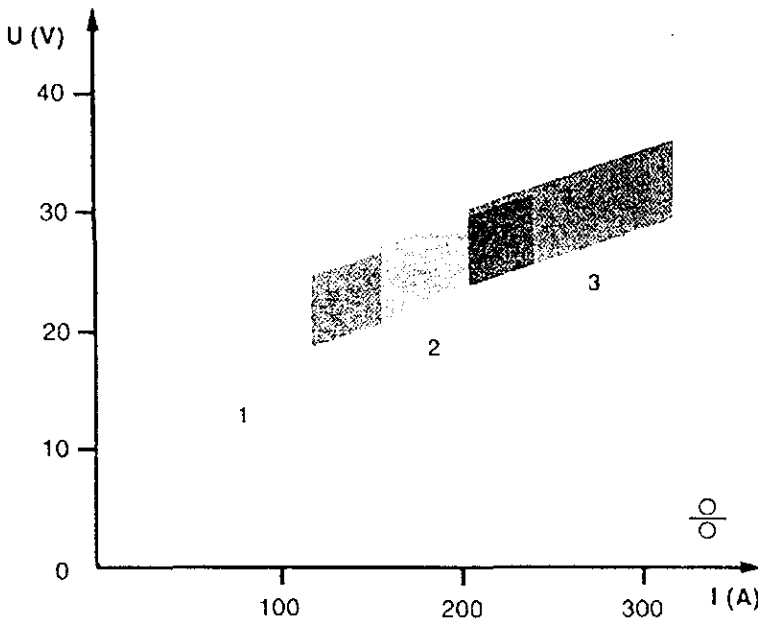


Fig. 4.1.5 Zonas de trabajo para diferentes tipos de arco. Las posiciones exactas dependen del gas protector y del diámetro de alambre: 1- Arco Corto, 2.- Arco Mixto, 3.-Arco Spray.

El arco mixto se compone de gotas de metal de tamaño variado, mezcla de gotas producidas en distintas condiciones. El resultado es un arco inestable que produce mucho humo y salpicaduras. Es conveniente evitar esta zona.

En el arco spray, la tensión e intensidad son suficientemente elevadas en relación al diámetro del electrodo y gas protector, el material se transfiere

en forma de pequeñas gotas uniformemente distribuidas que no cortocircuitan el arco. Debido a la gran cantidad de energía depositada, este tipo de soldadura es usada en cordones de relleno. Obsérvese la figura.4.1.7.

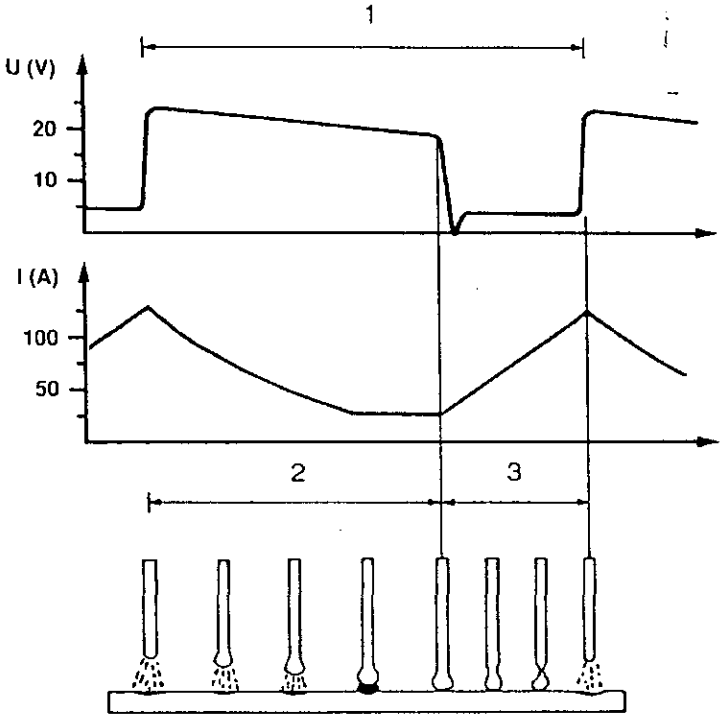


Fig. 4.1.6 Proceso de deposición de la soldadura

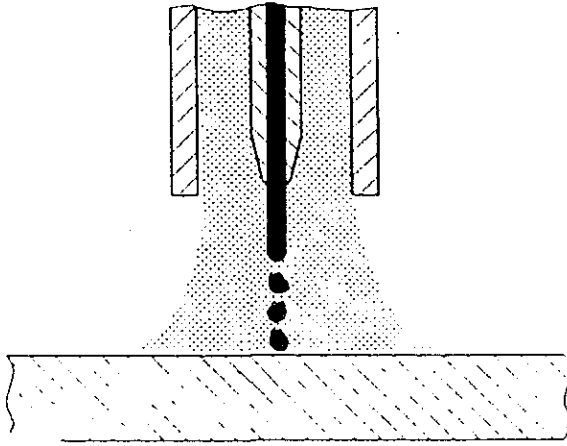


Fig. 4.1.7. Arco de spray

En el arco pulsado, la aportación de calor es moderada a la pieza de trabajo, lo cual se consigue pulsando la corriente de soldeo. Véase figura 4.1.8. Cada vez que llega un pulso de corriente, se corta una gota, baja el voltaje y el arco se estabiliza, por lo que la aportación del calor es baja y permite soldar placas delgadas.

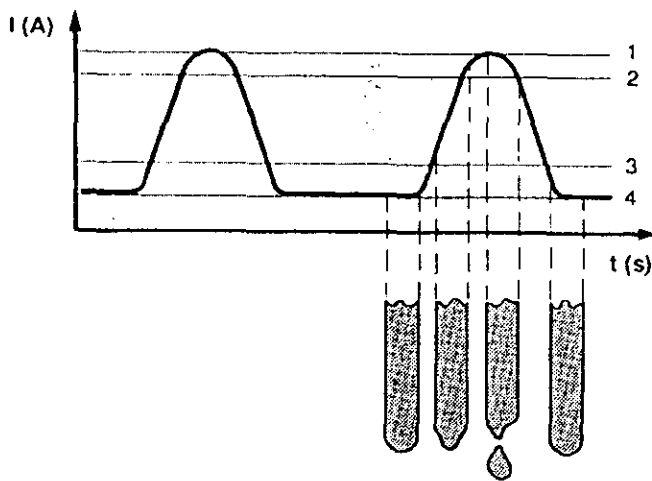


Fig. 4.1.8. Descripción de la soldadura de arco pulsado.  
 1.- Pico de corriente pulsada, 2.- Corriente de transición,  
 3.- Corriente principal de soldadura, 4.- Corriente de fondo.

#### ▨ 4.1.4 Equipo

En principio, el proceso MIG/MAG consta de los siguientes: fuente de corriente, mecanismo alimentador de alambre, pistola de soldar con manguera, sistema de suministro de gas, mecanismo automático de aplicación.

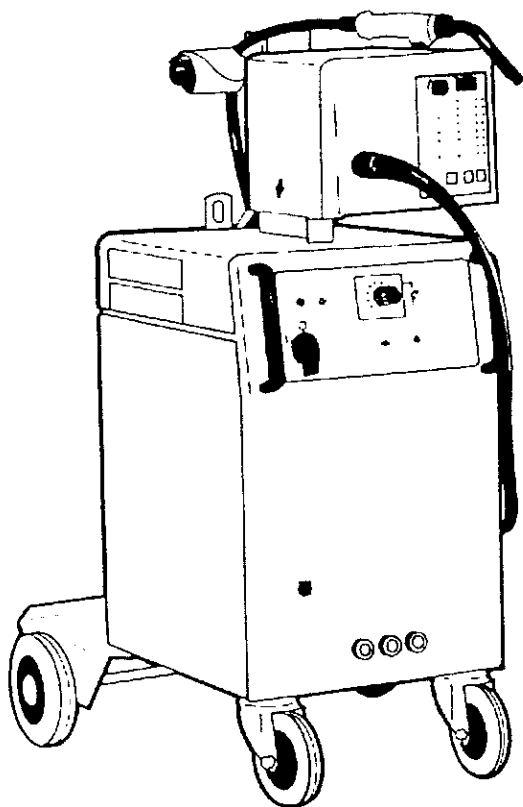


Fig. 4.1.9. Fuente de corriente de soldadura.

Fuente de Corriente. Tiene la misión de proveer corriente continua a un nivel de tensión idóneo. Obsérvese la figura 4.1.9. En la fuente se ajusta: tensión de arco, velocidad de alambre de pistola e inductancia. Las fuentes de corriente son actualmente de tipo sinérgico, puesto que ajustan automáticamente los parámetros de pulsación y tensión idónea.



## Unidad de alimentación de alambre.

Consiste en un mecanismo de avance de alambre y opcionalmente en una bobina de alambre giratoria, su objetivo es hacer avanzar al electrodo a lo largo de la guía de éste en la manguera, hasta la pistola. El mecanismo puede ser de varios tipos según el montaje de la propulsión del alambre : con rodillos para empujar o tirar del alambre de aporte. Véase la figura 4.1.10.

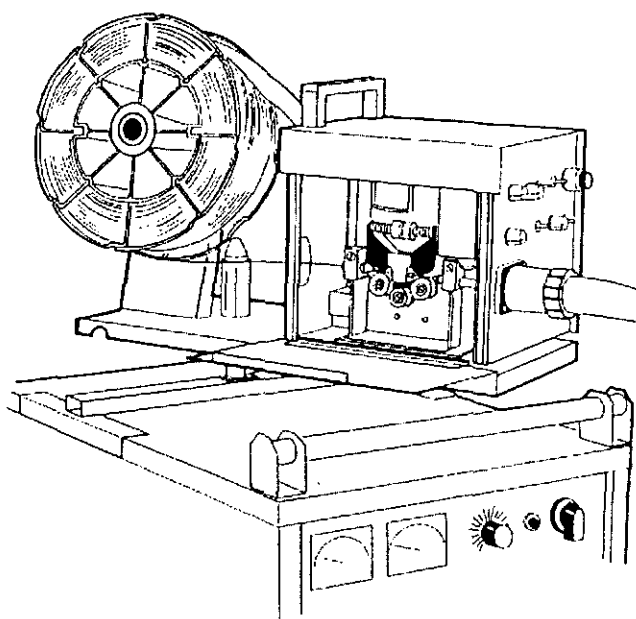


Fig. 4.1.10. Mecanismo alimentador de alambre.

## Pistola de Soldar y Manguera

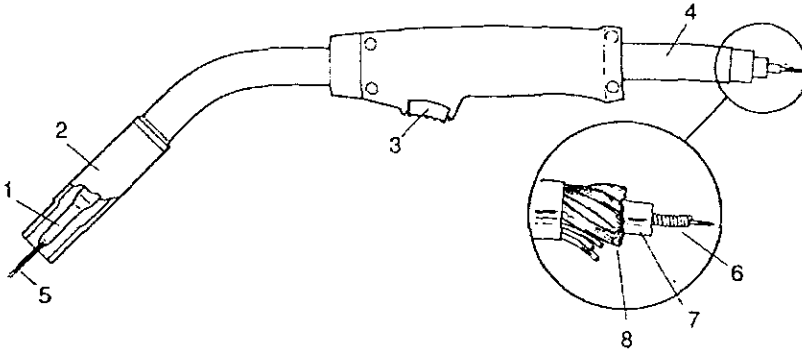


Fig. 4.1.11. Pistola de soldar con paquete de manguera. 1.- Boquilla de contacto, 2- Tobera para gas de protección, 3.- Microinterruptor, 4.- Manguera, 5.- Alambre, 6.- Funda guía de alambre, 7.- Manguera para gas de protección, 8.- Cable de corriente.

Las partes más importantes de un pistola son la punta de contacto y la tobera de gas. Véase figura 4.1.11.

En la punta o boquilla de contacto se produce el paso de corriente hacia el electrodo. La parte del electrodo que lleva la corriente se llama longitud libre de hilo. La boquilla es intercambiable para poder adaptarse a diferentes diámetros y tipos de alambre. La boquilla del contacto está rodeada por la tobera de gas cuya misión es la suministrar una buena protección de gas al alambre y al metal fundido.

Hay varios tipos de pistolas de soldar. Para la soldadura semiautomática la forma más corriente es la de "cuello de cisne", con lo cual se facilita el acceso a espacios reducidos. Las pistolas pueden ser enfriadas por agua o por aire.

La manguera consta de una funda dentro de la que están la guía del electrodo y los conductores de corriente y gas protector. Para los equipos refrigerados por agua también hay tubos de agua. Las longitudes de corriente del paquete de manguera son de 3, 4 o 5 metros

#### Suministro de Gas de Protección

Los gases protectores para soldar pueden ser suministrados en tres formas:

- En cilindros.
- En paquetes
- En forma líquida en depósitos.

En las dos últimas formas se requiere de una central de gas con varias tomas en el taller. La figura 4.1.12 muestra como es el suministro de gas a partir de un cilindro. Este se acopla a la unidad de alimentación de alambre desde la que el gas es conducido por la manguera hasta el manguito de la pistola. Una electroválvula regula el paso del gas para iniciar o parar el proceso.

1.- Definición de características de inicio del cordón de soldadura.

Son las cualidades que se controlan sólo al momento de arranque de la soldadura. Entre ellas están :

a.- Tiempo de preflujo de gas.

b.- Tiempo de espera para estabilización de arco.

c.- Voltaje de arranque.

d.- Velocidad de alimentación de alambre para arranque.

2.- Definición de características para cuerpo de cordón. Son las cualidades controladas durante la soldadura del cuerpo del cordón.

Ellas son:

a.- Tiempo de postflujo de gas.

b.- Voltaje de soldadura.

c.- Velocidad de alimentación de alambre para soldadura.

d.- Voltaje para llenado de cráter.

e.- Velocidad de alambre para llenado de cráter.

f.- Voltaje para quemado de alambre de finalización de cordón.

g.- Tiempo de quemado de alambre de finalización de cordón.

h.- Velocidad de aplicación de soldadura en manipulador.

3.- Definición de tipo de movimiento de la soldadura:

a.- Tipo de movimiento : lineal, en zig-zag, en forma de diente, rectangular, etc.

b.- Longitud de onda del movimiento a utilizar.

c.- Amplitud de la onda

Como se puede apreciar, de las características anteriores, todas ellas vienen asociadas al movimiento del manipulador.

### ***Hardware***

La forma en que el robot se comunique con la fuente de soldar puede ser de varias formas:

1.- Con señales analógicas de control de parámetros de soldadura. Con las cuales el manipulador indica a la fuente los niveles de voltaje, corriente, velocidad de alimentación de alambre.

2.- Con señales digitales seriales. Esto se realiza mediante un canal serie o bus, de donde sólo se requiere un número mínimo de hilos para tener comunicación completa entre los equipos, independientemente del número de señales empleadas para la comunicación.

- 3.- Con señales digitales paralelas, es decir , donde un hilo sirve sólomente para una señal de comunicación.

#### **▨ 4.1.6 Recomendaciones prácticas.**

Al poner en funcionamiento una celda automática de soldadura MIG con robot, es importante considerar lo siguiente:

- 1.- Las piezas a soldar y las herramientas de sujeción deben contar con una precisión adecuada, normalmente para evitar fallas de proceso, esta debe estar entre 0.5mm y 0.1mm. Para lograr una mejor precisión será necesario invertir mayores recursos en la herramienta de sujeción, pero una precisión de más de 0.5mm muy probablemente origine problemas de posición de cordones de soldadura, baja penetración, mala apariencia y baja resistencia a la tensión.
- 2.- La secuencia de las soldaduras debe ser de tal forma que la eventual deformación por calentamiento sea simétrica o al menos uniforme, evitando torsiones y cambios de dimensión.
- 3.- Si las piezas a soldar son delgadas (menos de 2mm), el calibre del alambre deberá ser también pequeño (menor a 0.85mm). buscando lograr un mayor aporte de calor mediante el incremento en la velocidad de alimentación de alambre. Entre menor es el diámetro, es más fácil localizar el calor en la pieza en los puntos adecuados.

- 4.- En el inicio de un cordón es preferible mantener bajos el voltaje y la alimentación de alambre, de tal forma que se mantenga estético el inicio del cordón.
  
- 5.- En la parte final del cordón es recomendable mantener activo el voltaje durante unos instantes después de terminar la alimentación del alambre, para que ello queme la punta del alambre de la antorcha de soldadura (burn back), y esta quede de un tamaño no mayor a 15mm.
  
- 6.- En general , cuando una soldadura se utiliza para rellenar una cavidad , es conveniente utilizar los parámetros de arco spray, puesto que en esta zona se consigue una alta depositación de material a alta velocidad, mientras que si la soldadura no es de relleno, se preferirá soldar en la región de arco-corto circuito, que puede lograr mayor penetración . pero menor velocidad de aporte de material.
  
- 7.- Si la pieza y la herramienta de sujeción no logran disipar el calor durante el ciclo de soldadura, será recomendable utilizar enfriamiento por circulación de agua dentro de los herramientas. El calentamiento intenso en las herramientas de sujeción puede afectar la calidad de la soldadura al provocar una fusión temprana en la pieza de trabajo y causar orificios en la zona de aplicación.

- 8.- Habrá de considerarse que el ángulo de la antorcha en el sentido vertical afectará la penetración de la soldadura. Si el ángulo de avance es menor a  $90^\circ$ , es decir, si se empuja la soldadura, el cordón será abultado y poco profundo, mientras que si el ángulo es mayor a  $90^\circ$ , es decir, si se va “jalando” la soldadura, el cordón será más ancho y mayor la profundidad. Deberá evaluarse en cada caso el mejor ángulo.
- 9.- Cuando las piezas a soldar no están juntas o su separación es variable, se puede emplear el movimiento oscilatorio (en zig-zag) del robot, con lo cual se mejora la distribución de la soldadura a lo largo del cordón.
- 10.- La fusión adecuada de la soldadura puede lograrse consiguiendo una aportación precisa del calor a la pieza de trabajo. Para ello, se deberán equilibrar por un lado, el voltaje de aplicación con la velocidad de alimentación de alambre, y por otro, la velocidad de aplicación de robot. En general, se busca, en términos de eficiencia de proceso, aumentar al máximo la velocidad de aplicación de robot y sobre ese parámetro fijo, se juega con los otros parámetros para lograr la cantidad adecuada de disipación del calor.



En la aplicación de soldadura MIG existen muchos parámetros a controlar y su dominio adecuado requiere de un análisis de las circunstancias en particular, además de un proceso de prueba y error que involucre a los programadores de robots, diseñadores de las herramientas y laboratoristas de calidad. Ellos corrigen los parámetros, trayectorias de aplicación y herramientas de sujeción para lograr los resultados adecuados.

## 4.2 Soldadura por resistencia o de punto

---

### 4.2.1 Introducción

La soldadura por resistencia o de punto es un proceso común en la industria automotriz, así como en otras industrias metal-mecánicas. Es aplicada por lo general donde se tiene la necesidad de unir placas relativamente delgadas (grosos cercanos a un milímetro son comunes) entre sí. No requiere de material de aportación, ni de gas protector, de tal forma que es más simple que el proceso de soldadura de arco.

La soldadura de punto requiere en el proceso manual de habilidad y fuerza física, el equipo de trabajo se cuelga y es posible manipularlo mediante balancines. El operador desarrolla toda la fuerza y control de la trayectoria para acceder a los puntos de aplicación, lo cual debe hacer con rapidez y con precisión. En tanto que la calidad de la aplicación de la soldadura depende de la habilidad del operario, así como de su estado de ánimo y descanso, para el proceso automático en el que un robot aplica la soldadura existen dos aspectos a saber: la programación del robot, lo cual se realiza solamente una vez y por otra lado, la repetibilidad de las piezas y herramientas a utilizar para la soldadura.

La repetibilidad de la soldadura en un proceso automático es el punto clave por el que las estaciones manuales sean desplazadas en la actualidad por las estaciones robotizadas. Líneas completas de producción de carrocerías (Fig 4.2.1) así como de subensambles son accionadas por robots industriales. En las orbes industrializadas del norte de América, las líneas automáticas

cuentan entre 300 y 400 robots por línea, llegando a existir más de 1500 robots en una sola planta automotriz. En las plantas de producción mexicanas, las líneas de punteo automático pueden utilizar entre 10 y 100 robots.

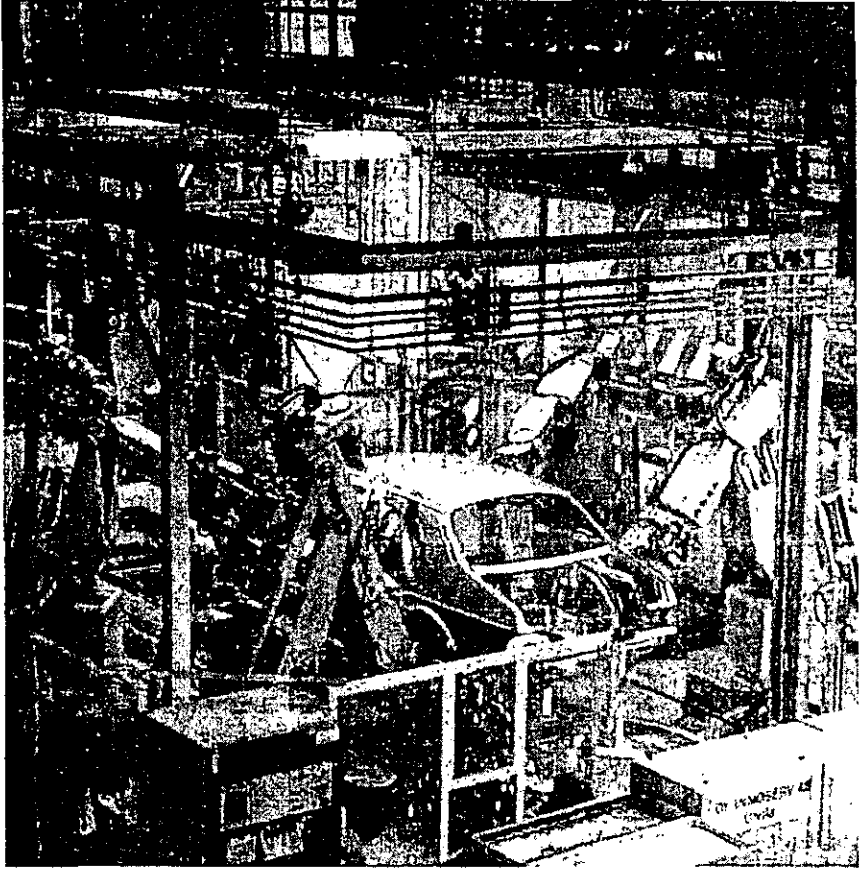


Fig. 4.2.1. Sistema robótico industrial de soldadura de punto en SAAB, Suecia.

## 4.2.2 Principio de funcionamiento

El principio de funcionamiento del proceso de soldadura de punto se basa en la fusión de material metálico a partir del paso de corriente eléctrica por una cierta área de las dos superficies a unir. La densidad de corriente debe ser tal que el calor generado y la presión adecuada permitan la unión permanente de las partes involucradas.

La pinza de trabajo tiene dos electrodos, los cuales además de ser conductores de la corriente de fusión, generan presión entre dos piezas. La presión generada puede oscilar entre las 700 y 1200 lb/pulgada<sup>2</sup>. A los dos electrodos de la pinza de trabajo, se le conectan cables provenientes del circuito secundario de un transformador. El circuito primario de un transformador es alimentado por un voltaje con un valor estándar a nivel industrial. Ya sea en la pistola, o montado en el robot, el transformador es

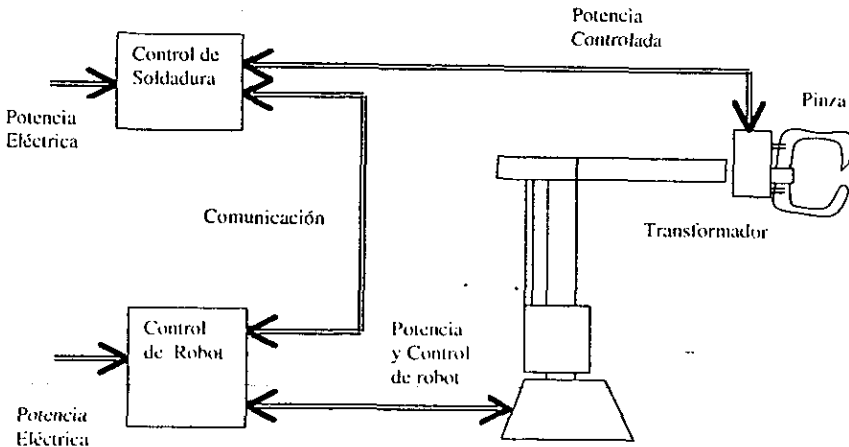


Fig 4.2.2 Circuito eléctrico de un sistema de soldadura de punto.

encargado de multiplicar el valor de la corriente y disminuir el voltaje entre los dos electrodos. El circuito formado se muestra en la figura 4.2.2

Los componentes de un sistema de soldadura por resistencia con robot son los siguientes:

- 1.- Controlador del robot. Consiste en un gabinete, el cual contiene por un lado los componentes de control: como son computadora del robot, computadora principal, puertos de entradas y salidas, etc. y por otro, los elementos de transmisión de potencia hacia los motores del robot: es decir, los drives o circuitos de etapa de potencia.
- 2.- Manipulador del robot. Es la parte mecánica del robot, consiste en un brazo con articulaciones y un motor acoplado en cada uno de sus ejes. Así mismo, incluye en cada uno de sus motores un circuito de realimentación (en algunos casos un *resolver*, en otros un *encoder*), que indican al sistema de control la posición exacta del manipulador. El manipulador realiza en este caso el trabajo del punteo.
- 3.- Control de soldadura. Es un dispositivo que permite controlar el flujo de energía en cuanto a tiempo y amplitud hacia el transformador y de ahí a la pistola de soldar. El control de soldadura tiene tres partes principales : un circuito de control

programable, el cual determina tiempos de soldadura, inicio y fin de la misma y amplitud de corriente y voltaje; un circuito de potencia, el cual recibe la energía eléctrica y la “dosifica”, es decir, la regula de tal forma que se alcancen los valores programados de corriente y voltaje durante el proceso de soldadura, se compone de elementos de potencia (SCR'S, TRIACS, etc.) y por último por un interruptor que conecta la potencia de trabajo durante cada ciclo de soldadura, de tal forma que sea posible realizar una desconexión instantánea de potencia en el caso de emergencia o mantenimiento.

- 4.- Transformador. Este elemento realiza el cambio en los parámetros eléctricos provenientes del control de soldadura, de tal forma que el alto voltaje (normalmente entre 400 y 500 volts de corriente alterna) y baja corriente sean transformados a la inversa, es decir, a bajo voltaje y alta corriente ( arriba de 8,000 amperes) que servirán para fundir las placas de los materiales a unir.
  
- 5.- Pinza de soldar. Este elemento está físicamente sujeto a la muñeca o parte extrema del brazo del robot .En cada uno de los brazos se encuentran conectadas las terminales del transformador. Contiene algún mecanismo que mueve uno o los dos brazos para que sus puntas o electrodos no sólo se toquen, sino que generen una presión de trabajo suficiente para la unión de los materiales (típicamente entre 800 y 1200 psi). El mecanismo puede ser un simple cilindro neumático, hidráulico , o hidroneumático, o en

algunos casos, un motor eléctrico con *drive* o control de torque y velocidad.

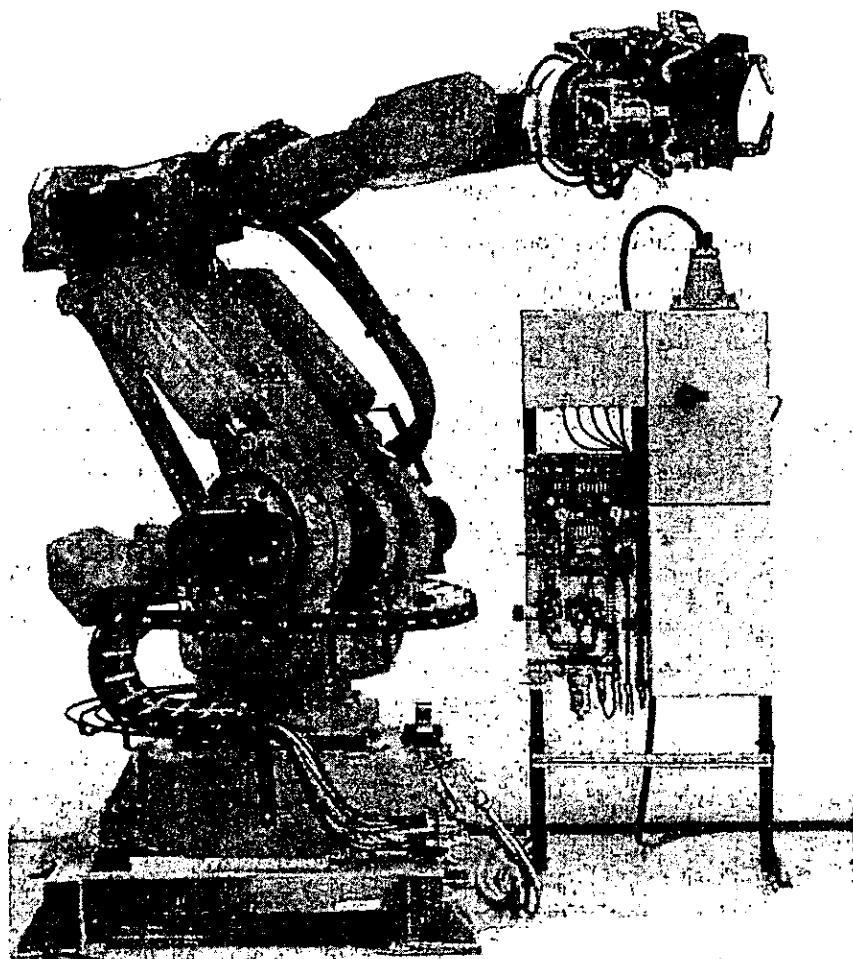


Fig. 4.2.3 Robot con pistola neumática de soldadura montada en la muñeca.

### 4.2.3 Equipo de soldadura

Se describirá en esta parte un control de soldadura Medar ® Medar 3005 , para describir de una forma más ilustrativa el funcionamiento de un equipo de soldadura. Los elementos de este equipo son :

- 1.- Interruptor de circuito. Este interruptor provee una forma segura de desconectar potencia del control. Este interruptor se abre si ocurre una sobrecarga de corriente en el sistema.
- 2.- Contactor de aislamiento. El propósito del contactor de aislamiento es aplicar voltaje al ensamble del SCR y en el caso de un evento catastrófico, detiene el suministro de energía al sistema. Este contactor es controlado por un relevador de estado sólido que depende del estado de la señal de Paro de Control, lo cual significa que se activa en estado de error. Alimenta directamente al SCR (Rectificador controlado de Silicio).
- 3.- Transformador de Control. Este recibe el voltaje de alimentación (380 o 480 VCA) del interruptor de circuito . Su función es la de reducir el voltaje de alimentación a 120 VCA para alimentar las tarjetas de 120VCA. También alimenta la bobina del contactor de aislamiento así como el controlador programable.
- 4.- Bobina de corriente. Es un dispositivo con forma de dona localizado cerca de los contactores del SCR en el gabinete de control. El control usa este dispositivo para medir la corriente del primario de soldadura.



La corriente de la soldadura fluye a través del centro de la bobina induciendo una corriente en el secundario de la bobina a una razón de 200:1.

5.- Tarjeta de disparo. La tarjeta de control realiza las siguientes tareas

- a) Provee señales al procesador que proveen lecturas de voltaje, corriente y factor de potencia, al mismo tiempo que regulan los SCR's.
- b) Suministra las señales para activar los SCR's.
- c) Controla las entradas y salidas de monitoreo de control.
- d) Realiza el sensado de alto voltaje.

Señales de Entrada de la tarjeta de disparo.

La tarjeta de disparo tiene las siguientes señales de entrada :

- 1.- línea de voltaje de alimentación, la cual es utilizada para sincronización mediante la señal de cruce por cero volts y también para medición de voltaje.
- 2.- línea de corriente que proviene de la bobina de corriente y es utilizada para medir la corriente del primario.

3.- entrada lógica del procesador de soldadura, la cual es acoplada ópticamente y conectada al cátodo y entrada del ensamble del SCR.

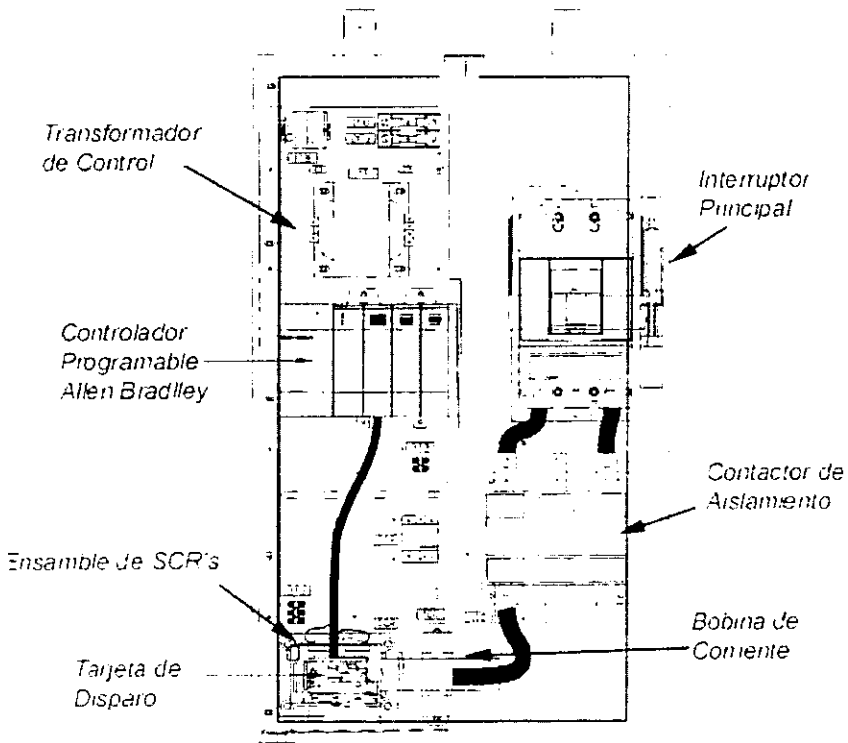


Fig 4.2.4 Control de soldadura Medar 3005.

## Señales de Salida de la tarjeta de disparo

Las señales de salida de la tarjeta de disparo son utilizadas por el procesador de soldadura para:

- 1.- encontrar el ángulo de fase con respecto a cero en la línea de alimentación como una referencia para sus mediciones de ángulo de fase.
- 2.- seleccionar el ángulo de fase de disparo.
- 3.- medir el voltaje de línea , corriente primaria y factor de potencia.
- 4.- ajustar el ángulo de fase de disparo, basado en el voltaje o la corriente (dependiendo del modo de disparo) y el factor de potencia.
- 5.- Monitorear corto circuitos o disparos en falso en el SCR.
- 6.- Ensamble del SCR. Este arreglo permite el paso de potencia al transformador de soldadura cuando es disparado. Se utiliza un par cuando la alimentación a la pistola es monofásica.

### 4.2.4 Parámetros de soldadura

Presión de trabajo. Debe ser tal que permita al realizarse la fusión de las dos láminas, permita la unión definitiva. Si es demasiado alta, reducirá el espesor de la soldadura y quedará deformada la lámina. si es muy baja, al soldadura será falsa .

Tiempo de construcción de presión. Es el intervalo utilizado para esperar a que la presión en el cilindro neumático sea uniforme y por tanto la fuerza en los electrodos sea también constante.

Tiempo de soldadura. Es el tiempo durante el cual el control de soldadura suministra potencia al transformador y este a su vez a la pistola de soldadura. Este tiempo determina directamente la aportación de calor al material.

Magnitud de corriente. Es la cantidad de amperes que se hacen circular por un punto de soldadura y que determinan la cantidad de calor para fusión de material. Es importante determinar la magnitud justa, de tal forma que la fusión sea suficiente y por otro lado la pieza no se caliente más de lo debido.

Tiempo de enfriamiento. Es el tiempo en que los electrodos se encuentran todavía sujetando a los materiales a soldar, pero en que ya se ha concluido el paso de corriente por el material. Es importante mantener este espacio para permitir el asentamiento de la soldadura y evitar fallas en la unión.

Impulso de soldadura. Es la secuencia de ciclos de soldadura alternados con ciclos de enfriamiento, de tal forma que la transmisión de calor sea tal que funda las láminas, pero no deje un grosor pequeño de soldadura.

Modo de soldadura. Es el tipo de soldadura utilizada; puede ser de *Compensación Automática de Corriente*, la cual mantiene una corriente constante durante toda la soldadura, variando el voltaje de tal forma que la corriente se mantenga estable, o puede ser *Compensación Automática de*

*Voltaje*, lo cual permite mantener estable el voltaje a costa de la variación de la corriente.

#### 4.2.5 Recomendaciones prácticas.

A diferencia del proceso de soldadura de arco MIG, el proceso de soldadura de punto requiere del ajuste de menor cantidad de parámetros, dado que el proceso en sí se realiza sin movimiento. El robot sólo sirve para transportar el equipo de un punto de aplicación a otro, pero durante la trayectoria, el equipo de soldadura está totalmente inactivo.

Los puntos sobre los cuales se puede hacer una observación o recomendación son los siguientes:

- 1.- Debe seleccionarse un equipo de soldadura en principio en base a la potencia requerida para fundir las placas a soldar. El control de soldadura (que contiene elementos de electrónica de potencia) deberá tener la misma capacidad que el transformador y que la pinza de soldadura. Industrialmente hablando, para aplicaciones comunes un equipo con la capacidad de manejar 60 kVA es suficiente, aunque se pueden requerir hasta 90 o 100 kVA en aplicaciones robóticas.

- 2.- El segundo criterio para selección de equipo deberá ser la accesibilidad que presenta la pieza a soldar, de ello dependerá el tipo de pistola . Existen dos categorías principales en cuanto a pinzas de soldar se refiere; por un lado las pinzas cerradas, que consisten en un ensamble que rodea a la pieza por los dos lados y la presiona con dos electrodos montados en la misma estructura, por otro lado, las herramientas de soldadura con un solo electrodo móvil, el cual presiona a la pieza contra un electrodo fijo, cerrando el circuito eléctrico que aporte el calor de fusión.

La pinza deberá tener una configuración mecánica para acceder a todos los puntos de aplicación y por otro una impedancia tal que la disipación de calor en el circuito eléctrico tenga un límite y no disminuya la energía para la aplicación .

- 3.- La corriente programada en el control de soldadura podrá ser elevada a fin de disminuir el tiempo de aplicación mientras que la pieza a ser soldada no se funda tan rápido como para causar orificios.
- 4.- La presión que sujete las piezas a soldar deberá ser calibrada de forma precisa, pues de otra forma, la resistencia de la unión, la cual variará en función directa de la misma presión, será inestable, con resultados de una unión falsa( baja corriente) o de un punto con orificio (alta corriente debido a la pequeña área de contacto) .
- 5.- Se deberá considerar un tiempo de estabilización de presión, durante el cual , la presión se distribuirá uniformemente en el

cilindro y el área de soldadura será la misma durante el proceso de soldadura.

En esta aplicación, la prueba más común para determinar la calidad de una soldadura es la prueba destructiva, la cual consiste en una simple separación de las placas soldadas, debiendo ser el resultado, la rotura de las placas alrededor del punto soldado y permaneciendo este último intacto.

# MEDICIÓN DE PIEZAS MECÁNICAS CON ROBOT





# V

## MEDICIÓN DE PIEZAS MECÁNICAS CON ROBOT

---

### 5.1 Desarrollo

---

#### 5.1.1 Objetivo

La utilización de los robots industriales ha abarcado la mayoría de las aplicaciones industriales. Su uso es extendido en aquellas áreas productivas donde el volumen del trabajo o las condiciones no adecuadas para los operarios requieren de elementos automáticos: desde piezas únicas adaptadas para realizar alguna función simple, como los cilindros neumáticos o hidráulicos, hasta el uso de manipuladores complejos que realizan tareas de secuencias complicadas.

De entre las aplicaciones que no se han auxiliado extensivamente de los robots industriales destaca la de medición. La razón de ello radica básicamente en que hasta hace pocos años, la precisión de un manipulador era menor que la deseable con respecto a la precisión requerida en la pieza a ser medida.

Para nuestro caso, nos interesará en mayor medida la programación del robot considerando que la precisión de las piezas a medir sea fácilmente lograda por la precisión del robot. La tarea principal será encontrar la dimensión de una pieza mecánica mediante el deslizamiento del robot a lo

largo de la pieza a medir. Se utiliza en el desarrollo una estructura metálica sujeta al manipulador, sobre la cual se montan un emisor y un sensor de luz en línea recta, de tal forma que a través de la interrupción del rayo se pueda determinar la presencia o ausencia del objeto sobre el que se está haciendo la medición. La medida se determina mediante los registros internos de posición de robot.

Los resultados de medición de cada pieza podrán ser utilizados por el mismo manipulador en un paso subsecuente en el que se soldará la pieza y donde la medición obtenida servirá para dar una localización más exacta de la posición de inicio de la soldadura.

### 5.1.2 Método

Las operaciones involucradas en la realización de las mediciones son las siguientes:

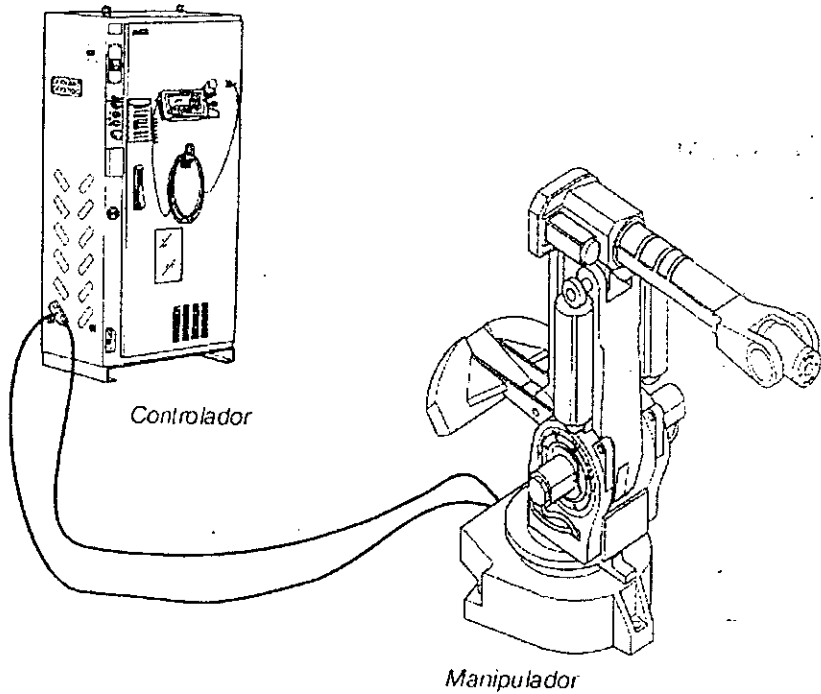
- 1.- Se realiza una medición de prueba de un objeto del que se conoce la medida exacta y se confirma que los registros del robot estén arrojando resultados correctos, de no ser así, se realiza el cálculo de un ajuste para que las mediciones obtenidas posteriormente sean reales.
- 2.- Se posiciona al robot en un punto cercano al de inicio para la medición y se le indica la dirección hacia donde deba moverse el robot para tomar la medida.

3.- Se inicia el programa del robot, el cual se encargará automáticamente de buscar el otro extremo de la pieza a medir, obtendrá el resultado de la dimensión y desplegará los resultados en la pantalla del panel del robot.

### ▨ 5.1.3 Descripción de las partes

1.- Robot industrial.

El robot está compuesto de dos partes principales: manipulador y

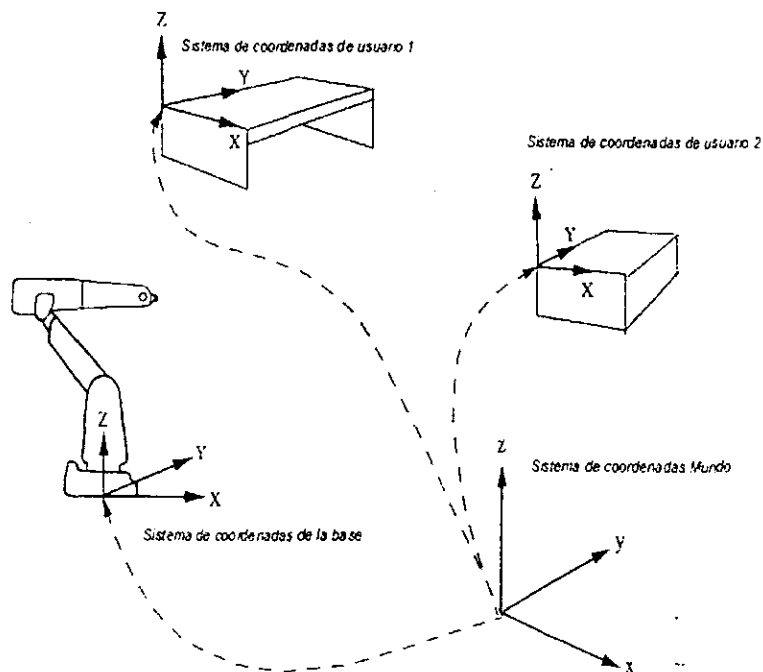


**Fig. 5.1** Las partes principales de un robot: controlador y manipulador.

controlador.

El controlador contiene la electrónica necesaria para controlar el manipulador, ejes externos y equipo periférico.

El robot utiliza los sistemas de coordenadas como una referencia para ubicar sus puntos de trabajo. De esa forma, la información de las coordenadas de los puntos contenidos en la trayectoria de un robot tienen coordenadas  $x,y,z$  que se miden con respecto a algunos de los sistemas de coordenadas. En la



**Fig. 5.2 Sistemas de coordenadas para el robot.**

figura 5.2 se muestran algunos de los sistemas de coordenadas para el robot que utilizaremos en nuestro desarrollo.

El sistema de coordenadas Mundo define una referencia al piso, que es el punto inicial para otros sistemas de coordenadas. Usando este sistema de coordenadas es posible relacionar al robot con un punto fijo en el área de trabajo. El sistema de coordenadas mundo es útil también cuando dos robots trabajan juntos o cuando existe algún transportador.

El sistema de coordenadas de base se considera fijo a la superficie de montaje del robot. El sistema de coordenadas de la herramienta especifica el centro de aplicación de la herramienta así como la orientación de la misma.

El sistema de coordenadas del usuario especifica la posición de una herramienta o pieza de trabajo para el manipulador.

El sistema de coordenadas del objeto especifica como una pieza de trabajo se posiciona en una herramienta.

Los sistemas de coordenadas pueden ser programados especificando valores numéricos o moviendo el robot a través de un cierto número de posiciones.

Dada la circunstancia de que cada posición que se registra con respecto a un sistema de coordenadas, aún cuando se mueva una herramienta o se mueva la pieza de trabajo, sólomente se requiere redefinir el sistema de coordenadas del objeto de trabajo.

## 2.- Soporte mecánico para rayo de luz.

El manipulador tendrá montado un soporte mecánico, el cual estará formado por una base y dos postes laterales paralelos, los cuales sostendrán

a su vez un emisor de luz por una parte y un sensor de luz por otra. La función de la estructura será proveer una forma para desplazar al rayo de luz a través del objeto a medir.

La figura 5.3 muestra un dibujo del soporte propuesto.

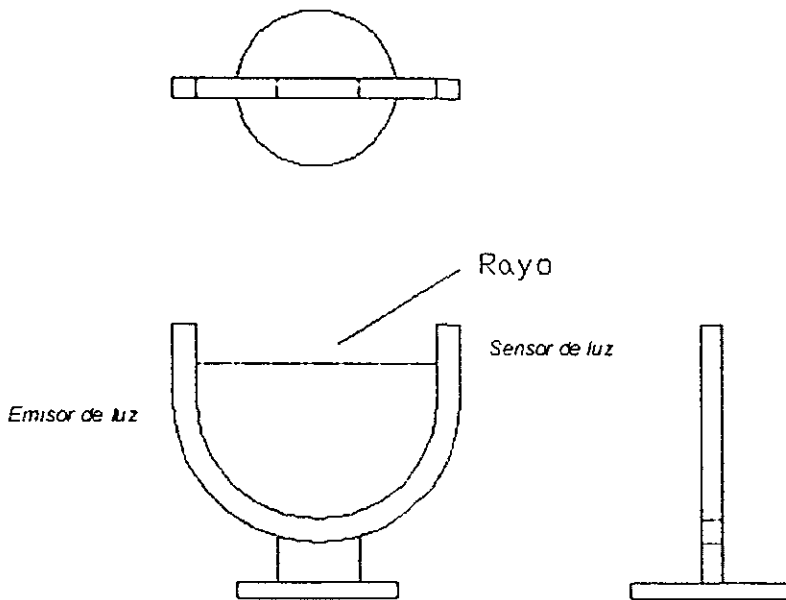


Fig. 5.3 Soporte para emisor y sensor de luz (rayo para medición).

#### 5.1.4 Descripción del programa del robot y algoritmos

La función del programa será la de realizar el movimiento del robot para obtener la medida de un objeto. ciertas restricciones debe tener la geometría del objeto y sobre ellas se hablará la final de este capítulo.

Tres son las partes principales del programa:

- 1.- Obtención del punto de inicio para la medición del objeto.
- 2.- Deslizamiento del soporte del rayo de luz a lo largo del objeto.
- 3.- Obtención del punto final para la medición del objeto.

Con la obtención de los puntos inicial y final y la dirección de la medición se puede obtener la medida del objeto. La descripción de cada una de las tres partes anteriores sigue a continuación:

- 1.- Obtención del punto de inicio para la medición del objeto. En esta parte lo que se pretende es encontrar el plano que servirá de referencia para la medición de la pieza. Se requieren dos pasos para lograr este objetivo:
  - a) Localización del plano perpendicular a la dirección de medición de la pieza.
  - b) Localización del punto de inicio para la medición.
- 2.- La ejecución de esta parte del programa consiste básicamente en deslizar el rayo de luz en la dirección axial de la parte a medir , considerando que la dirección viene dada por el plano obtenido en el punto 1.
- 3.- Para esta fase del programa sólo se requiere determinar el punto final , lo cual se logrará considerando la dirección de desplazamiento del punto anterior.

Los algoritmos para lograr estas operaciones serán dados por las siguientes secuencias.

## ALGORITMO PARA LOCALIZACIÓN DEL PLANO PERPENDICULAR

Descripción general.

El plano buscado se formará por la intersección de dos líneas rectas en la superficie límite del objeto a estudiar . Estas líneas  $l_1$  y  $l_2$  tendrán un ángulo de intersección de  $90^\circ$ .

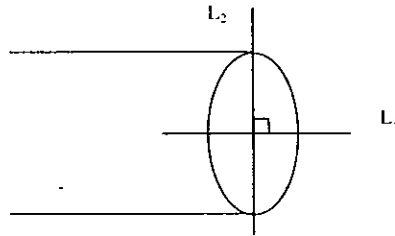


Fig. 5.4 Objeto a medirse

Para localizar la línea  $L_1$  se posicionará al rayo frente a la superficie plana del objeto, se acercará al rayo hacia el objeto hasta que este sea interrumpido , luego se variará el ángulo sucesivamente hasta que la distancia recorrida por el rayo antes de ser interrumpido sea máxima. Luego se girará el rayo  $90^\circ$  con respecto al eje sobre el que se medirá el objeto, se realizarán aproximaciones del rayo con diferentes ángulos y se grabará de la misma forma la posición y la orientación del robot hasta que se encuentre la mayor distancia de desplazamiento.

Obsérvese que en la tercera aproximación , la distancia medida  $x+b$  es mayor que cualquier otra medición con respecto al eje de referencia, que es un buen valor de ángulo para realizar una medición más precisa.



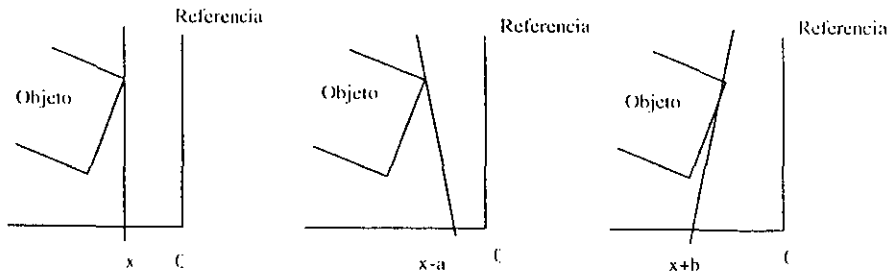


Fig. 5.5 Ángulos de llegada del rayo de luz hacia el objeto

El mismo proceso se realizará girando el rayo  $90^\circ$  y por consiguiente obteniendo el otro eje necesario para formar un plano.

El algoritmo de trabajo deberá funcionar al irse obteniendo una aproximación más cercana a la medición final, con la salvedad de que la variación del ángulo que se utilizará para acercamiento será menor entre más se aproxime el punto final.

#### ALGORITMO.

Las siguientes definiciones se utilizarán para representar al algoritmo de trabajo:

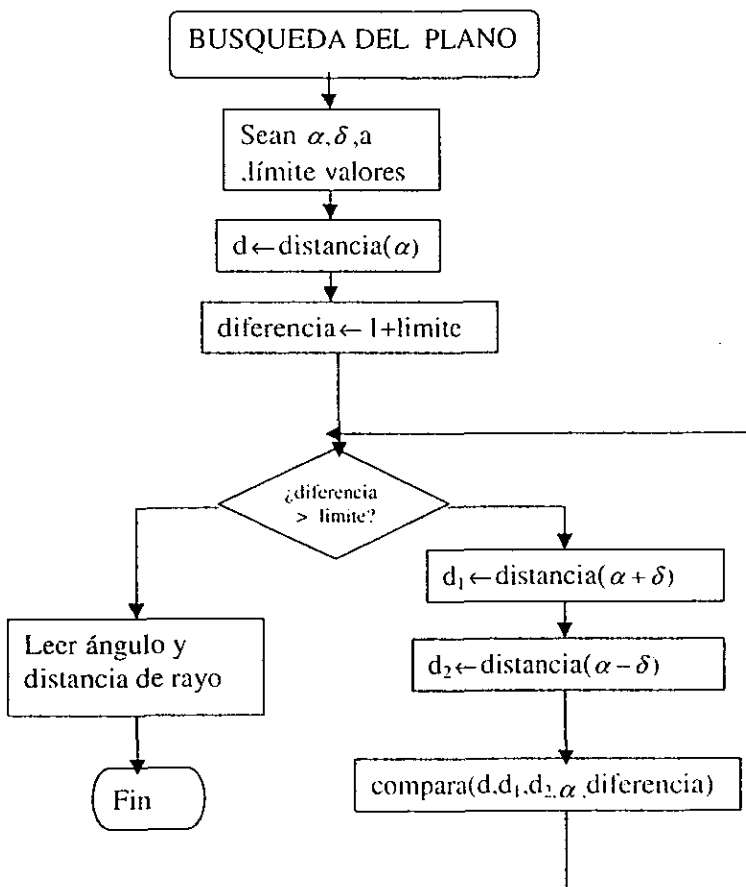
$\alpha$  = ángulo de rayo respecto a alguna línea fija de referencia.

$d$  = distancia medida entre algún punto de referencia y el objeto con el rayo en el ángulo  $\alpha$

$\delta$  = ángulo de variación para la búsqueda del plano.

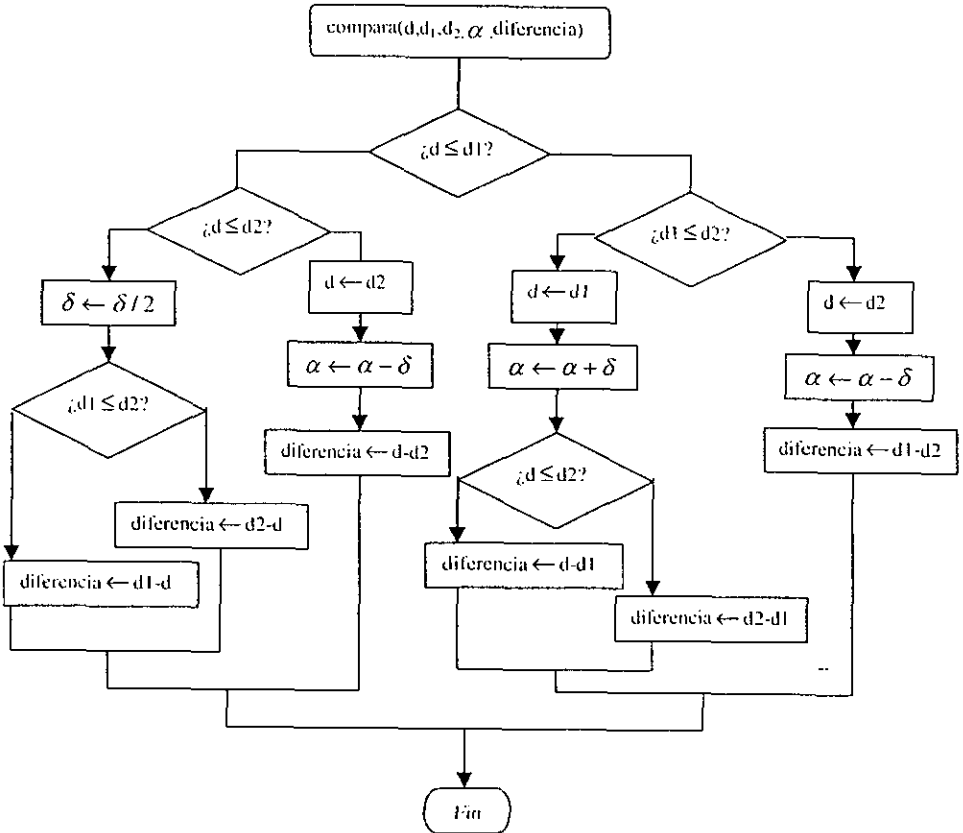
$d_1$  = distancia medida entre algún punto de referencia y el objeto con el rayo en el ángulo  $\alpha + \delta$

$d_2$  = distancia medida entre algún punto de referencia y el objeto con el rayo en el ángulo  $\alpha - \delta$



$a$  = valor aproximado de la longitud máxima de la cara del objeto a medirse.

límite = valor de diferencia de dos mediciones sucesivas que detendrá el ciclo



Una vez que se ha hallado el ángulo de rango y la distancia menor, se realiza el giro de  $90^\circ$  y se procede a correr la misma rutina, con la cual se tendrán dos posiciones y dos orientaciones del rayo.

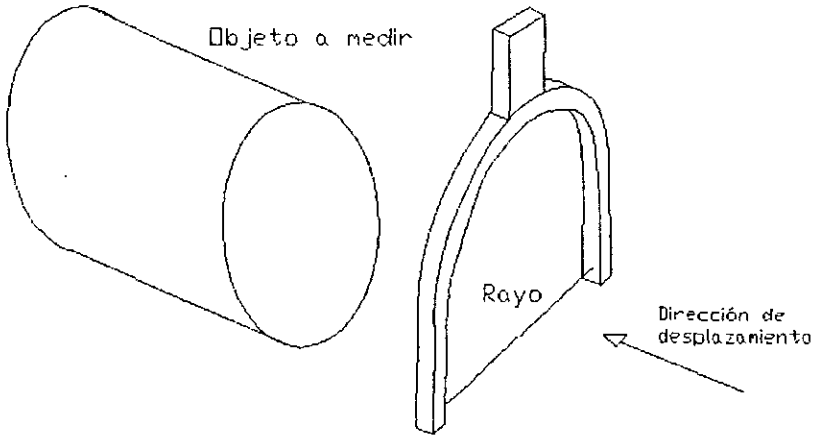


Fig. 5.6 Desplazamiento de rayo en primera aproximación.

Con las dos orientaciones, el robot se puede desplazar en línea recta de tal forma que la medición del objeto se logre con un simple desplazamiento del rayo. Obsérvese que si el giro del rayo es de  $90^\circ$ , la configuración será la siguiente:

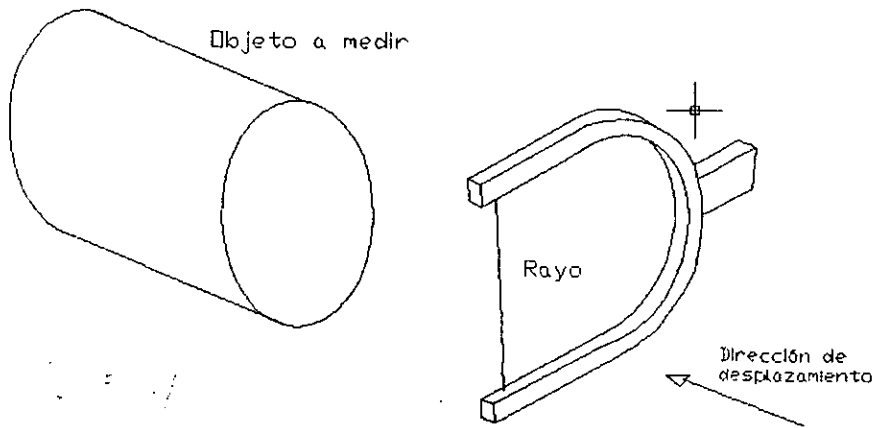


Fig. 5.7 Desplazamiento del rayo en segunda aproximación.

Si consideramos que el TCP (Tool Center Point o Punto de Aplicación de la herramienta) se encuentra exactamente al centro del rayo, entonces, para encontrar la dirección perpendicular a los dos rayos vendrá dada por:

$$V_p = V_1 \times V_2$$

Con este producto cruz, se encuentra la dirección sobre la cual hay que deslizarse, dado el vector y el punto de aplicación se podrá obtener una recta que servirá de guía para el movimiento del robot a lo largo de la pieza. Es decir,

$$x = p + \alpha V_p$$

Donde  $x$  = cualquier punto sobre la recta

$p$  = punto de referencia por donde pasa la recta

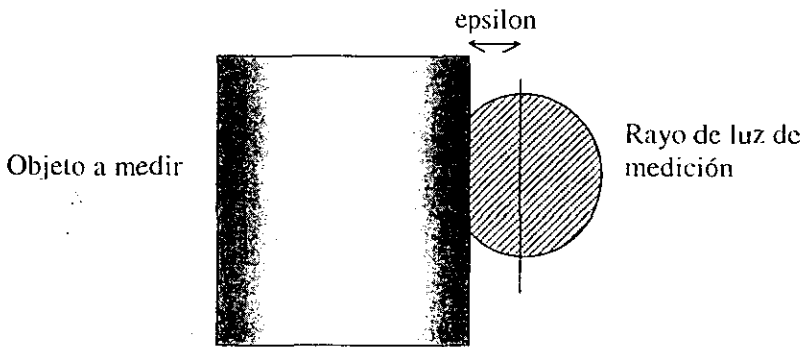
$V_p$  = vector guía para el movimiento del robot

$\alpha$  = variable escalar.

Al realizar el desplazamiento sobre la recta se esperará solamente que se reciba la señal de continuidad del rayo que indicará que la pieza se ha terminado de medir. Se obtendrá la medida sobre la recta a partir del punto inicial de referencia.

Es necesario considerar que existirá una desviación entre la medición obtenida y la distancia real debido a la constitución del sistema de medición.

Obsérvese la figura 5.8 en la que se muestra de modo amplificado, la distribución del rayo de luz una vez que un objeto está a punto de



interrumpirlo para que este genere la señal de inicio o fin de medición.

Cuando el objeto haya sido medido por el rayo de luz, se tendrá que hacer una corrección, la cual consistirá en la suma o en la resta de dos veces epsilon. Se restarán en caso de que el rayo al pasar por el objeto genere una señal de interrupción antes de que el rayo haya llegado al centro de su eje. Se sumarán en caso de que el al pasar el rayo por el objeto a medir genere una señal de interrupción después de que el rayo haya pasado por el centro del eje.

Para encontrar el valor de epsilon deberá correrse una rutina de prueba en la que se mida la longitud de un objeto conocido, y al comparar esa con respecto a la medición obtenida, se podrá despejar el valor de epsilon.

### **▨ 5.1.5 Listado del programa para el robot :**

El programa que responde a los requerimientos del algoritmo anterior y que realiza los movimientos del robot viene a continuación, con la descripción de las tareas. El programa está escrito para un robot ABB S4.

\*\*\*

VERSION:1

LANGUAGE: ENGLISH

\*\*\*

MODULE MEDICION

!

!

PROGRAMA PARA MEDICION DE PIEZAS POR MEDIO DE RAYO  
DE LUZ

!

!

FECHA: 10/03/2000

!

AUTOR: CARLOS ZAVALA

!

!

```

CONST robtarget pInicio:=[[163.51,41.12,-98.19],
[0.626699,-0.019849,0.006001,-0.778987],[0,-
1,0,0],[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
CONST num P_PUNTO1:=1;
CONST num P_PUNTO2:=2;
CONST num P_DESLIZAMIENTO:=3;
CONST num P_IR_CASA:=4;
CONST num epsilon;
!
PERS num alfa:=-0.15625;
PERS num delta:=0.0390625;
PERS num limite:=0.05;
PERS num Tecla:=5;
VAR num d1:=0;
VAR num d2:=0;
VAR num d:=0;
!
VAR num diferencia:=0;
!
CONST speeddata vbusq:=[30,500,5000,1000];
PERS robtarget punto_ini1:=[[1854.85,499.958,740.877],
[0.00284847,0.702468,0.711689, 0.00557922],[-,
1,0,0,0],[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
PERS robtarget punto_ini2:=[[1854.86,-
499.994,740.91],[0.271468,0.647904,
0.655378,0.277504],[-,
1,0,0,0],[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
VAR robtarget ptemporal:=[[218.65,154.49,510.28],
[0.378539,0.026289,0.925212, 0.000288],[0,-
1,0,0],[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
PERS robtarget pCasa:=[[218.65,154.49,510.28],
[0.378539,0.026289,0.925212, 0.000288],[0,-
1,0,0],[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
PERS robtarget sp:=[[1854.51,-
473.821,741.001],[0.272031,0.646575,0.656687,
0.276956],[-,
1,0,0,0],[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
PERS tooldata tRayo:=[TRUE,[[-,
1.29115,8.10327,1208.67],[0.963714,-0.010629,-
0.005146,0.266679]],[5,[85,0,65],[1,0,0,0],0.01,0.01,0.01]]
;
PERS robtarget sp_c:=[[1854.51,-
473.804,740.999],[0.27184,0.647019,0.656251, 0.277139],[-,
1,0,0,0],[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];
PERS robtarget sp_l:=[[1854.46,-
473.927,740.945],[0.271644,0.64746,0.655826, 0.277307],[-,
1,0,0,0],[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];

```



```

PERS robtargt sp_2:=[[1854.51,-
473.821,741.001],[0.272031,0.646575,0.656687,
0.276956],[-
1,0,0,0],[9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09,9E+09]];

```

```

PROC despliega_info()
  TPWrite "d"\Num:=d;
  TPWrite "d1"\Num:=d1;
  TPWrite "d2"\Num:=d2;
  TPWrite "diferencia"\Num:=diferencia;
  TPWrite "alfa"\Num:=alfa;
  TPWrite "delta"\Num:=delta;
  TPReadFK Tecla,"Oprima Ok para
continuar","","","","","Ok";
ENDPROC

```

```

!
!
! Nombre: busca_planol
! Función: Realiza los movimientos para encontrar el
! primer punto y la orientación
! para realizar la medición.
!
!
!

```

```

FUNC robtargt busca_planol(
  INOUT num angulo)

  alfa:=0;
  punto_inil:=CRobT(\Tool:=tRayo\WObj:=wobj0);
  d:=distancia(alfa,punto_inil,sp_c);
  diferencia:=limite+1;
  WHILE diferencia>limite DO
    d1:=distancia(alfa+delta,punto_inil,sp_1);
    d2:=distancia(alfa-delta,punto_inil,sp_2);
    despliega_info;
    compara d,d1,d2;
  ENDWHILE
  angulo:=alfa;
  RETURN sp_c;
ENDFUNC

```

```

! Nombre: gira_90grad
! Función: Realiza un giro sobre el eje de la
! herramienta del
! rayo de tal forma que este gire 90° con
! respecto al
! plano del objeto.pero siga siendo

```

```

!           perpendicular
!           al mismo.La posición se encontrará
!           multiplicando la
!           orientación actual por un cuaternión que
!           represente
!           giro de 90° en z.

```

```

PROC gira_xgrad(
    num grados)

    punto_ini2:=RelTool(punto_ini1,0,0,0\Rx:=grados);
    MoveL punto_ini2,v150,fine,tRayo;
ENDPROC

```

```

FUNC num distancia(
    num alfa,
    robtarget p_inic,
    INOUT robtarget punto)

```

```

    VAR robtarget punto1;
    VAR robtarget punto2;
    VAR robtarget p_fin;
    VAR num dist:=0;
    VAR num dx:=0;
    VAR num dy:=0;
    VAR num dz:=0;

```

```

    punto1:=RelTool(p_inic,-20,0,0\Rz:=alfa);
    punto2:=RelTool(p_inic,80,0,0\Rz:=alfa);
    MoveL punto1,v30,fine,tRayo;
    SearchL\PStop,di_sen1,sp,punto2,vbusq,tRayo;
    dx:=sp.trans.x-punto1.trans.x;
    dy:=sp.trans.y-punto1.trans.y;
    dz:=sp.trans.z-punto1.trans.z;
    dist:=Sqrt(dx*dx+dy*dy+dz*dz);
    punto:=sp;
    RETURN dist;

```

```

ENDFUNC

```

```

!
!
! Nombre: busca_plano2
! Función: Realiza los movimientos para encontrar el
!           segundo punto
!           y la orientación para realizar la medición a
!           90°.
!
!
!

```

```

FUNC robtarget busca_plano2(
  INOUT num angulo)

  alfa:=0;
  gira_xgrad -45;
  punto_ini2:=CRobT(\Tool:=tRayo\WObj:=wobj0);
  d:=distancia(alfa,punto_ini2,sp_c);
  diferencia:=limite+1;
  WHILE diferencia>limite DO
    d1:=distancia(alfa+delta,punto_ini2,sp_1);
    d2:=distancia(alfa-delta,punto_ini2,sp_2);
    compara d,d1,d2;
  ENDWHILE
  angulo:=alfa;
  RETURN sp_c;
ENDFUNC

!
!
! Nombre: compara(num d1,num d2)
! Función: realiza la asignación de la distancia menor a
! la variable
! global d,también asigna a alfa y a delta
! según la
! dirección que se debe seguir, y también le
! asigna valor
! a la diferencia entre las dos distancias
! menores
! resultantes de la medición.
!

PROC compara(
  INOUT num d,
  INOUT num d1,
  INOUT num d2)

  IF d<=d1 THEN
    IF d1<=d2 THEN
      diferencia:=d2-d1;
      d:=d2;
      sp_c:=sp_2;
      alfa:=alfa-delta;
    ELSE
      alfa:=alfa+delta;
      IF d<=d2 THEN
        diferencia:=d1-d2;
      ELSE
        diferencia:=d1-d;
      ENDIF
    ENDIF
  ENDIF

```

```

        ENDIF
        d:=d1;
        sp_c:=sp_1;
    . ENDIF
ELSEIF d<=d2 THEN
    alfa:=alfa-delta;
    diferencia:=d2-d;
    d:=d2;
    sp_c:=sp_2;
ELSE
    delta:=delta/2;
    IF d1<=d2 THEN
        diferencia:=d-d2;
    ELSE
        diferencia:=d-d1;
    ENDIF
ENDIF
ENDIF
ENDPROC

!
!
! Nombre: mover_a_casa
! Función: Mueve el robot a la posición de casa, después
!           de preguntar en el Teach Pendant si es
!           posible el movimiento a Home.
!
PROC mover_a_casa()
    ptemporal:=CROBT(\Tool:=tRayo\WObj:=wobj0);
    IF NOT (ptemporal.trans.x+5>pCasa.trans.x AND
ptemporal.trans.y+5>pCasa.trans.y AND
ptemporal.trans.z+5>pCasa.trans.z AND ptemporal.trans.x-
5<pCasa.trans.x AND ptemporal.trans.y-5<pCasa.trans.y AND
ptemporal.trans.z-5<pCasa.trans.z) THEN
        TPWrite "Precaución                ";
        TPWrite "El robot no se encuentra en posicion";
        TPWrite "de casa ";
        TPWrite " ";
        TPReadFK Tecla,"Oprima Ok para mover a
Casa", " ", " ", " ", " ", " ", "Ok";
        IF Tecla=5 THEN
            pantalla (P_IR_CASA);
            MoveJ pCasa,v200,fine,tRayo\WObj:=wobj0;
        ENDIF
    ENDIF
ENDIF
ENDPROC

```

```

!
! Nombre: pantalla
! Función: Despliega una pantalla para indicar que
!           rutina se está ejecutando
!
!
PROC pantalla(
    num tipo)

    TEST tipo
    CASE P_PUNTO1:
        TPErase;
        TPWrite " ";
        TPWrite " ";
        TPWrite "   PROGRAMA PARA MEDICIÓN POR RAYO";
        TPWrite " ";
        TPWrite " ";
        TPWrite " ";
        TPWrite " Buscando el primer punto ...";
    CASE P_PUNTO2:
        TPErase;
        TPWrite " ";
        TPWrite " ";
        TPWrite "   PROGRAMA PARA MEDICIÓN POR RAYO";
        TPWrite " ";
        TPWrite " ";
        TPWrite " ";
        TPWrite " Buscando el segundo punto...";
        TPWrite " ";
    CASE P_DESLIZAMIENTO:
        TPErase;
        TPWrite " ";
        TPWrite "   PROGRAMA PARA MEDICIÓN POR RAYO";
        TPWrite " ";
        TPWrite " ";
        TPWrite " ";
        TPWrite " Desplazándose para realizar medición...";
        TPWrite " ";
    CASE P_IR_CASA:
        TPErase;
        TPWrite " ";
        TPWrite "   PROGRAMA PARA MEDICIÓN POR RAYO";
        TPWrite " ";
        TPWrite " ";
        TPWrite " ";
        TPWrite " Desplazándose para realizar medición...";
        TPWrite " ";

```

```
ENDTEST
ENDPROC
```

```
!
!
! Nombre: lee_datos
! Función: Pide los datos necesarios para la
! realización de las
! iteraciones de búsqueda de los puntos de
! inicio de medición, que corresponden a los
! siguientes parámetros:
! delta= ángulo de variación del rayo de luz
! para búsqueda del plano de la cara del
! objeto a medir limite= valor que representa
! la diferencia entre dos
! mediciones, las cuales al ser alcanzadas,
! detienen el funcionamiento del programa.
!
```

```
PROC lee_datos()
  TPErase;
  TPWrite "Teclee los siguientes valores:";
  TPWrite " ";
  TPReadNum delta, "Angulo de variación inicial : ";
  TPWrite " ";
  TPReadNum limite, "Límite de diferencias : ";
  TPWrite " ";
ENDPROC
```

```
!
!
! Nombre: Posicion_inicio
! Función: Pide al operario acercarse al manipulador
! manualmente al punto de inicio para
! mediciones. Este punto debe tener
! una característica importante: La dirección
! sobre la cual se realice la medición debe ser
! colineal a la dirección del eje X de
! las coordenadas de la herramienta del rayo.
!
```

```
PROC Posicion_inicio()
  TPWrite "ATENCIÓN";
  TPWrite "1.- Detenga el programa oprimiendo OK";
  TPWrite "2.- Mueva el robot a la posición inicial";
  TPWrite " y oprima MODPOS";
  TPWrite "3.- Oprima START para continuar";
  TPWrite " ";
```

```

    TPReadFK Tecla, "Oprima Ok para detener el
programa", "", "", "", "", "Ok";
    IF Tecla=5 THEN
        Stop;
        MoveJ punto_ini1, v200, fine, tRayo;
    ENDIF
ENDPROC

!
!
! Nombre: deslizamiento
! Función: Realiza el movimiento del robot para realizar
!           la medición. Lo hace a partir del punto de
!           inicio
!
FUNC num deslizamiento(
    robtarget punto_ini,
    num alfa)

    VAR robtarget punto;
    VAR num dx:=0;
    VAR num dy:=0;
    VAR num dz:=0;
    VAR num dist:=0;

    punto:=RelTool(punto_ini, 400, 0, 0\Rz:=alfa);
    SearchL\PStop, di_senl\Flanks, sp, punto, vbusq, tRayo;
    dx:=sp.trans.x-punto_ini.trans.x;
    dy:=sp.trans.y-punto_ini.trans.y;
    dz:=sp.trans.z-punto_ini.trans.z;
    dist:=Sqrt(dx*dx+dy*dy+dz*dz);
    RETURN dist+epsilon;
ENDFUNC

!
!
! Nombre: despliega_res
! Función: Despliega los resultados de la medición
!
!
PROC despliega_res(
    num medicion)

    TPWrite "";
    TPWrite "";
    TPWrite "Medición de longitud: "\Num:=medicion;
    TPWrite "";

```

```
TPWrite "";
TPReadFK Tecla,"Oprima Ok para
continuar","","","","","Ok";
ENDPROC
```

```
!
!   PROGRAMA PARA MEDICIÓN DE PIEZAS
!
!   PROGRAMA PRINCIPAL : En el se llaman a las rutinas y
!                       módulos secundarios
!
!
!
!
!
!
!
PROC main()
  VAR rotarget p_inicio;
  VAR rotarget p_int;
  VAR rotarget p_inicio2;
  VAR num medicion:=0;
  VAR num angulo:=0;
  VAR num angulo2:=0;

  TPErase;
  Posicion_inicio;
  lee_datos;
  p_inicio:=busca_plano1(angulo);
  p_inicio2:=busca_plano2(angulo2);
  ajusta(p_inicio,p_inicio2,angulo,angulo2);
  medicion:=deslizamiento(p_inicio,angulo);
  mover_a_casa;
  despliega_res (medicion);
ENDPROC
ENDMODULE
```



## CONCLUSIONES

---

No serán suficientes las páginas ni las palabras para terminar de describir los elementos de la robótica, sus avances, su tecnología y los fundamentos que le dan vida, sin embargo, con este breve tratado se ha logrado por una parte la descripción de los conceptos más trascendentes en la composición de un robot industrial y por otro, se ha buscado integrarlos a un desarrollo práctico.

Es necesario considerar que la revisión de los fundamentos de la robótica han sido útiles a nivel personal , aunque quizás para los que deseen mayores detalles será conveniente hacer referencia a las fuentes originales, sin embargo existen dos elementos que son aportaciones principales de esta composición: el tratamiento de los cuaterniones como método para resolver la rotación de un vector y por otro lado la descripción de un algoritmo para realizar la medición de objetos con robot.

Por lo que se refiere al tratamiento de los cuaterniones como forma de calcular rotaciones, es necesario hacer notar que el procesamiento de los cuaterniones está ligado directamente a la evaluación de los métodos para realizar rotaciones. Este aspecto es tratado en uno de los apéndices para que se consideren las diferencias específicamente entre cuaterniones y matrices y se puedan obtener elementos de decisión para su utilización. La ventaja que

se encontró de los cuaterniones con respecto a las matrices es que para una cierta secuencia de rotaciones se requiere una cantidad menor de operaciones y que por otro lado, el manejo de cuatro variables para representar una rotación es más eficiente que el manejo de nueve variables, como lo exige el cálculo por matrices.

En cuanto al desarrollo práctico, se apuntarán los siguientes elementos:

- a.- El proceso de medición tal como se pensó puede ser parte de los periféricos de un robot que esté dedicado a otra aplicación, es decir, podría tener alguna cierta aplicación y al mismo tiempo tener la interface para realizar mediciones y con ello complementar el proceso de calidad.
- b.- Los algoritmos y la precisión del robot utilizados en la fase práctica de este trabajo ofrecen una buena precisión al proceso de medición, lo que es un parámetro importante en el momento de selección de los equipos.
- c.-El proceso de medición de dimensiones de piezas puede representar un algoritmo de consumo de tiempo para una línea de producción con requerimientos de disminución de tiempos de ciclo, sin embargo, representa una buena alternativa en la disminución de actividades por concepto de control de calidad.
- d.- Durante las pruebas de ejecución de las rutinas para el robot se tuvieron algunos inconvenientes que apuntaré solamente:

- i) Algunas mediciones del robot llegaban a converger sólo después de varios ciclos de búsqueda del plano de medición, cuando el límite de variación es muy pequeño las distancias intermedias que se van encontrando no necesariamente siguen un patrón de disminución, sino que pueden oscilar unos cuantos ciclos y después disminuir.
  
- ii) El giro a  $90^\circ$  que se plantea para obtener el segundo plano no puede ser logrado por el robot utilizado, debido a su alcance, por lo que se utilizó un cálculo adicional para que con un giro de menos grados se pudiera obtener el resultado adecuado.

Creo que con este breve tratado se han cumplido los objetivos básicos propuestos originalmente

## BIBLIOGRAFÍA

---

- 1.- Taylor, P.M. .Control Robótico.  
Ediciones CEAC. 1989.
- 2.- Parkin, Robert E. Applied Robotic Analysis.  
Prentice Hall.1991.
- 3.- Tzaestas ,Spiros G. (Compiler),Robotic Systems.  
Kluwer Academic Publishers.1994.
- 4.- Schilling , Robert J .Fundamentals of Robotics, Analysis and Control.  
Prentice Hall.1995.
- 5.- Selig , J.M.Introductory Robotics.  
Prentice Hall.1993.
- 6.- Asada .H: Slotine J.J..Robot analysis and control.  
John Wiley and Sons.1988.
- 7.- Grossman, Stanley I.Algebra lineal.  
Mc Graw Hill. Quinta Ed. 1997.
- 8.- Ogata , Katsuhiko .Ingeniería de Control Moderna.  
Prentice Hall.Tercera Ed. 1998.
- 9.- Zill. Dennis G. Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones.  
Grupo Editorial Iberoamérica.Segunda Ed. 1988.
- 10.- Beer, Ferdinand P: Johnston, Russel. Mecánica Vectorial para ingenieros.  
Mc Graw Hill.Sexta Ed. 1999.
- 11.-AGA. Verdades acerca de soldadura MIG/MAG.1996.
- 12.-25 Years of ABB Robotics AB. Robotics Products. 1999.
- 13.-Product Manual IRB6400. ABB Robotics Products AB. 1996.
- 14.-User's Guide. IRB6400. ABB Robotics Products AB. 1996.

## APÉNDICE A

### PROGRAMA 1

*Rotaciones mediante matrices con cálculo intermedio de posición.*

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#include<time.h>
#include<dos.h>

#include" c:\lenguaje\fuentes\robots\tiempo.c"
#include" c:\lenguaje\fuentes\robots\estruct1.c"
#include" c:\lenguaje\fuentes\robots\matrices.c"

/* Este programa realiza el cálculo de 10,000 iteraciones
de rotaciones de un vector utilizando la misma matriz de
giro y el mismo vector unitario.El objetivo es calcular el
tiempo de proceso de las 10000 operaciones .

*/

main()
{
    int i;
    struct time t1,t2;
    struct matriz ROT,m_temp1,m_temp2;
    struct vector v_uni,v_ori,v_res,v_rotado,v_temp;
    double alfa;

    v_uni.x=0;
    v_uni.y=0;
    v_uni.z=1;
    v_ori.x=1.0;
    v_ori.y=0.0;
    v_ori.z=0.0;
```

```

    alfa=0.05;
    ROT=inicia_matriz(&ROT,3,3);
    m_temp1=inicia_matriz(&m_temp1,3,1);
    m_temp2=inicia_matriz(&m_temp2,3,3);

    gettime(&t1);
    for(i=0;i<10000;i++){
        ROT=matriz_rot(alfa,v_uni,&ROT); /* Cálculo del giro
*/
        v_rotado=matriz_a_vector(mult_matrices(ROT,vector_a_ma
triz
(v_ori,&m_temp1),&m_temp2),&v_temp); /* Cálculo del
vector rotado */
        v_ori=v_rotado;
    }
    gettime(&t2);
    despliega_vector(v_rotado);
    printf(" \n\n El tiempo de ciclo en segundos es %3.8f
",duracion(t1,t2));
    return 0;
}

```

## PROGRAMA 2

*Rotaciones mediante cuaterniones con cálculo intermedio de posición.*

```

#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
#include<time.h>
#include<dos.h>

#include "c:\lenguaje\fuentes\robots\tiempo.c"
#include "c:\lenguaje\fuentes\robots\estruct1.c"
#include "c:\lenguaje\fuentes\robots\vectores.c"
#include "c:\lenguaje\fuentes\robots\cuater.c"

```

/\* Este programa realiza la rotación de un vector a partir de un vector original, de un ángulo de rotación y de un

vector unitario de giro. La rotación se realiza a partir del cálculo de su cuaternión correspondiente.

El objetivo es obtener el tiempo de cálculo para 10000 iteraciones, y compararlo con el tiempo utilizado por los mismos cálculos utilizando matrices.

\*/

```
main()
{
    int    i;
    struct time t1,t2;
    struct vector v_uni,v_ori,v_res;
    double magnitud,alfa;

    v_uni.x=0;
    v_uni.y=0;
    v_uni.z=1;
    v_ori.x=1;
    v_ori.y=0;
    v_ori.z=0;

    alfa=0.05;
    gettime(&t1);

    for(i=0;i<10000;i++){
        v_res=rotar(v_uni,alfa,v_ori); /* Rotación del vector
con:
                                ángulo de giro */
        v_ori=v_res;      /* vector original y vector unitario
*/
    }
    gettime(&t2);

    puts("Los valores del vector resultante son ");
    printf(" x : %4.6f \n",v_res.x);
    printf(" y : %4.6f \n",v_res.y);
    printf(" z : %4.6f \n",v_res.z);
    magnitud=v_res.x*v_res.x+v_res.y*v_res.y+v_res.z*v_res.z;
    printf(" La magnitud del vector es : %2.6f \n",magnitud);
    printf(" \n\n El tiempo de ciclo en segundos es %3.8f
",duracion(t1,t2));

    return 0;
}
```

## PROGRAMA 3

### *Rotaciones mediante matrices sin cálculo intermedio de posición.*

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#include<time.h>
#include<dos.h>

#include" c:\lenguaje\fuentes\robots\tiempo.c"
#include" c:\lenguaje\fuentes\robots\estruct1.c"
#include" c:\lenguaje\fuentes\robots\matrices.c"

/* Este programa realiza el cálculo de 10,000 iteraciones
de rotaciones de una matriz de rotación. El cálculo de la
posición se realiza al final

*/

main()
{
    int i;
    struct time t1,t2;
    struct matriz ROT,m_temp1,m_temp2,m_temp3;
    struct vector v_uni,v_ori,v_res,v_rotado,v_temp;
    double alfa;

    v_uni.x=0;
    v_uni.y=0;
    v_uni.z=1;
    v_ori.x=1.0;
    v_ori.y=0.0;
    v_ori.z=0.0;

    alfa=0.05;
    ROT=inicia_matriz(&ROT,3,3);
    m_temp1=inicia_matriz(&m_temp1,3,1);
    m_temp2=inicia_matriz(&m_temp2,3,3);
    m_temp3=inicia_matriz(&m_temp3,3,3);
    ROT=matriz_rot(alfa,v_uni,&ROT);
    gettime(&t1);
    for(i=0;i<9999;i++){
```



```

        m_temp2=matriz_rot(alfa,v_uni,&m_temp2); /* cálculo
de
                                matriz de giro */
        mult_matrices(ROT,m_temp2,&m_temp3); /*
Multiplicación
                                de giro */
        copia_matriz(m_temp3,&ROT);
    }
    gettimeofday(&t2);

v_rotado=matriz_a_vector(mult_matrices(m_temp3,vector_a_mat
riz(v_ori,&m_temp1),&m_temp2),&v_temp);
    despliega_vector(v_rotado);
    printf(" \n\n El tiempo de ciclo en segundos es %3.8f
",duracion(t1,t2));
    return 0;
}

```

## PROGRAMA 4

### *Rotaciones mediante cuaterniones sin cálculo intermedio de posición.*

```

#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
#include<time.h>
#include<dos.h>

#include "c:\lenguaje\fuentes\robots\tiempo.c"
#include "c:\lenguaje\fuentes\robots\estruct1.c"
#include "c:\lenguaje\fuentes\robots\vectores.c"
#include "c:\lenguaje\fuentes\robots\cuater.c"

/* Este programa realiza el cálculo de la rotación de un
cuaternión con 10,000 giros, sin realizar el cálculo de
las posiciones intermedias. La posición final del vector se
calcula solamente una vez.

El objetivo es obtener el tiempo de cálculo para 10000
teraciones, y compararlo con el tiempo utilizado por los
mismos cálculos utilizando matrices.
*/

```

```

main()
{
    int    i;
    struct time t1,t2;
    struct vector v_uni,v_ori,v_res;
    struct cuaternion q1,q2;
    double magnitud,alfa;

    v_uni.x=0;
    v_uni.y=0;
    v_uni.z=1;
    v_ori.x=1;
    v_ori.y=0;
    v_ori.z=0;

    alfa=0.05;
    gettime(&t1);
    q1=angulo_a_cuaternion(alfa,v_uni);

    for(i=0;i<9999;i++){
        q2=angulo_a_cuaternion(alfa,v_uni);
        q1=mult_cuaternion(q1,q2);
    }

    v_res=rotar_vector(q1,v_ori);
    gettime(&t2);

    puts("Los valores del vector resultante son ");
    printf(" x : %4.6f \n",v_res.x);
    printf(" y : %4.6f \n",v_res.y);
    printf(" z : %4.6f \n",v_res.z);
    magnitud=v_res.x*v_res.x+v_res.y*v_res.y+v_res.z*v_res.z;
    printf(" La magnitud del vector es : %2.6f \n",magnitud);
    printf(" \n\n El tiempo de ciclo en segundos es %3.8f
",duracion(t1,t2));

    return 0;
}

```

### ***Rutinas comunes para los programas de rotaciones.***

```

struct vector rotar(struct vector n,double alfa,struct
vector vector_ori);

```

```

struct cuaternion angulo_a_cuaternion(double alfa,struct
vector n);
struct vector rotar_vector(struct cuaternion q1,struct
vector v_orig);
struct cuaternion cuaternion_inverso(struct cuaternion q);
struct cuaternion vector_a_cuaternion(struct vector n);
struct cuaternion mult_cuaternion(struct cuaternion
q1,struct cuaternion q2);
struct vector cuaternion_a_vector(struct cuaternion
q,double *alfa);

```

```

struct vector rotar(struct vector n,double alfa,struct
vector vector_ori)
{
    struct cuaternion q1;
    struct vector rotado;

    q1=angulo_a_cuaternion(alfa,n);
    rotado=rotar_vector(q1,vector_ori);

    return rotado;
}

```

```

struct cuaternion angulo_a_cuaternion(double alfa,struct
vector n)
{
    struct cuaternion q;
    double seno;

    seno=sin(alfa/2.0);
    q.qu1=cos(alfa/2.0);
    q.qu2=seno*n.x;
    q.qu3=seno*n.y;
    q.qu4=seno*n.z;
    return q;
}

```

```

struct vector rotar_vector(struct cuaternion q1,struct
vector v_orig)
{
    struct cuaternion q_inv,q2,q3,q_res;
    struct vector vector_res;

```

```

    q_inv.qu1=q1.qu1;
    q_inv.qu2=-q1.qu2;
    q_inv.qu3=-q1.qu3;
    q_inv.qu4=-q1.qu4;
    q2=vector_a_cuaternion(v_orig);
    q3=mult_cuaternion(q1,q2);
    q_res=mult_cuaternion(q3,q_inv);
    vector_res.x=q_res.qu2;
    vector_res.y=q_res.qu3;
    vector_res.z=q_res.qu4;

    return vector_res;
}

```

```

struct cuaternion vector_a_cuaternion(struct vector n)
{
    struct cuaternion q;

    q.qu1=0;
    q.qu2=n.x;
    q.qu3=n.y;
    q.qu4=n.z;
    return q;
}

```

/\* Esta funci3n realiza la multiplicaci3n de dos cuaterniones de acuerdo a la definici3n encontrada en el texto relativo a los cuaterniones:

$$Q1.Q2= s1*s2-v1.v2+s2*v1+s1*v2+v1xv2$$

donde Q1 =s1 +v1 y Q2 = s2 +v2 y  
s= parte real  
v= parte vectorial \*/

```

struct cuaternion mult_cuaternion(struct cuaternion
q1,struct cuaternion q2)
{
    struct cuaternion q3;
    struct vector v1,v2,v3,v4,v5;

    q3.qu1=q1.qu1*q2.qu1-
(q1.qu2*q2.qu2+q1.qu3*q2.qu3+q1.qu4*q2.qu4);

```

```

v1.x=q2.qu1*q1.qu2;
v1.y=q2.qu1*q1.qu3;
v1.z=q2.qu1*q1.qu4;
v2.x=q1.qu1*q2.qu2;
v2.y=q1.qu1*q2.qu3;
v2.z=q1.qu1*q2.qu4;
v4.x=q1.qu2;
v4.y=q1.qu3;
v4.z=q1.qu4;
v5.x=q2.qu2;
v5.y=q2.qu3;
v5.z=q2.qu4;
v3=producto_cruz(v4,v5);
q3.qu2=v1.x+v2.x+v3.x;
q3.qu3=v1.y+v2.y+v3.y;
q3.qu4=v1.z+v2.z+v3.z;

return q3;
}

```

```

#define MAX_RENGLONES 10
#define MAX_COLUMNAS 10

```

```

struct matriz inicia_matriz(struct matriz *A,int
renglon,int columna);
struct matriz mult_matrices(struct matriz A,struct matriz
B,struct matriz *C);
struct matriz suma_matrices(struct matriz A,struct matriz
B,struct matriz *C);
void libera_matriz(struct matriz A);
void despliega_matriz(struct matriz A);
void despliega_vector(struct vector V);
struct vector matriz_a_vector(struct matriz A,struct vector
*v);
struct matriz matriz_rot(double alfa,struct vector v,struct
matriz *D);
struct matriz vector_a_matriz(struct vector v,struct matriz
*A);
struct matriz cuaternion_a_matriz(struct cuaternion
q,struct matriz *A);
struct matriz resolver_matriz(struct matriz B,struct matriz
*A);

```

```

struct matriz copia_matriz(struct matriz A,struct matriz
*B);
struct matriz escalar_x_matriz(double escalar,struct matriz
A,struct matriz *B);
struct matriz gira_matriz_rotacion_h(struct posicion_camara
p_cam,struct matriz *R);
struct matriz matriz_inversa_h(struct matriz M,struct
matriz *R);

```

```

/* Esta funci3n regresa una matriz con un n3mero de
renglones y columnas igual a los par metros que se utilizan
en su llamado

```

```

La matriz no puede tener m s de MAX_REGLONES como renglones
y MAX_COLUMNAS como columnas. */

```

```

struct matriz inicia_matriz(struct matriz *A,int
renglon,int columna)
{
    int    i;

    if((renglon<=MAX_REGLONES) && (columna<=MAX_COLUMNAS)){
        for(i=0;i<renglon;i++){
            if((A->m[i]=calloc(columna,sizeof(double)))==NULL){
                puts("Error(inicia_matriz): memoria insuficiente para
asignaci3n a matriz");
                exit(0);
            }else{
                A->renglon=renglon;
                A->columna=columna;
            }
        }
    }else
        puts("Error(inicia_matriz): dimensiones de matriz fuera
de l3mite");

    return *A;
}

```

```

/* Esta funci3n realiza la multiplicaci3n de dos matrices
*/

```

```

struct matriz mult_matrices(struct matriz A,struct matriz
B,struct matriz *C)
{

```

```

int r1,r2,c1,c2,i,rel,ce2;
double s;

r1=A.renglon;
c1=A.columna;
r2=B.renglon;
c2=B.columna;
/* *C=inicia_matriz(C,r1,c2); */

if(c1==r2){
    for(rel=0;rel<r1;rel++){
        for(ce2=0;ce2<c2;ce2++){
            for(i=0,s=0;i<c1;i++){
                s+=A.m[rel][i]*B.m[i][ce2];
            }
            C->m[rel][ce2]=s;
        }
    }
}else
    puts("Error(mult_matrices): las matrices no son
compatibles para la multiplicaci3n");

return *C;
}

/* Esta funci3n libera la memoria asignada previamente a
una matriz */

void libera_matriz(struct matriz A)
{
    int i;

    for(i=0;i<A.renglon;i++)
        free(A.m[i]);
}

/* Esta rutina despliega los valores de un vector de tres
elementos */

void despliega_vector(struct vector V)
{
    printf("\n x=%6.4f ",V.x);
    printf(" y=%6.4f ",V.y);
}

```

```

    printf(" z=%6.4f ",V.z);
    printf("Magnitud de vector : %2.6f
\n",V.x*V.x+V.y*V.y+V.z*V.z);
}

```

```

/* Esta funci3n transforma una matriz de 3x1 elementos en
un vector de 3 elementos */

```

```

struct vector matriz_a_vector(struct matriz A,struct vector
*v)
{

```

```

    v->x=A.m[0][0];
    v->y=A.m[1][0];
    v->z=A.m[2][0];

```

```

    return *v;
}

```

```

/* Esta funci3n genera una matriz de rotaci3n a partir de
un ngulo y de un vector unitario con base en la definici3n
del art;culo de cuaterniones de ABB */

```

```

struct matriz matriz_rot(double alfa,struct vector v,struct
matriz *D)
{

```

```

/* inicia_matriz(D,3,3); */

```

```

    D->m[0][0]=cos(alfa)+v.x*v.x*(1-cos(alfa));
    D->m[0][1]=v.x*v.y*(1-cos(alfa))-v.z*sin(alfa);
    D->m[0][2]=v.x*v.z*(1-cos(alfa))+v.y*sin(alfa);
    D->m[1][0]=v.x*v.y*(1-cos(alfa))+v.z*sin(alfa);
    D->m[1][1]=cos(alfa)+v.y*v.y*(1-cos(alfa));
    D->m[1][2]=v.y*v.z*(1-cos(alfa))-v.x*sin(alfa);
    D->m[2][0]=v.x*v.z*(1-cos(alfa))-v.y*sin(alfa);
    D->m[2][1]=v.y*v.z*(1-cos(alfa))+v.x*sin(alfa);
    D->m[2][2]=cos(alfa)+v.z*v.z*(1-cos(alfa));
    return *D;
}

```

```

/* Esta funci3n transforma un vector de 3 elementos en una
matriz de tres renglones y una columna
*/

```



```

struct matriz vector_a_matriz(struct vector v,struct matriz
*A)
{
/*  inicia_matriz(A,3,1);    */

A->m[0][0]=v.x;
A->m[1][0]=v.y;
A->m[2][0]=v.z;

return *A;
}

```

```

/* Esta funci3n genera una matriz de rotaci3n de 3x3 a
partir de un cuaterni3n */

```

```

struct matriz cuaternion_a_matriz(struct cuaternion
q,struct matriz *A)
{

```

```

inicia_matriz(A,3,3);

```

```

A->m[0][0]=2*(q.qu1*q.qu1+q.qu2*q.qu2)-1;
A->m[0][1]=2*(q.qu2*q.qu3-q.qu1*q.qu4);
A->m[0][2]=2*(q.qu2*q.qu4+q.qu1*q.qu3);
A->m[1][0]=2*(q.qu2*q.qu3+q.qu1*q.qu4);
A->m[1][1]=2*(q.qu1*q.qu1+q.qu3*q.qu3)-1;
A->m[1][2]=2*(q.qu3*q.qu4-q.qu1*q.qu2);
A->m[2][0]=2*(q.qu2*q.qu4-q.qu1*q.qu3);
A->m[2][1]=2*(q.qu3*q.qu4+q.qu1*q.qu2);
A->m[2][2]=2*(q.qu1*q.qu1+q.qu4*q.qu4)-1;

```

```

return *A;

```

```

}

```

```

/* Esta funci3n copia los valores de una matriz a otra.
La matriz A es la que contiene los valores fuentes,
mientras que la la matriz B es la que contiene el registro
donde se depositar n los valores iniciales. */

```

```

struct matriz copia_matriz(struct matriz A,struct matriz
*B)

```

```

{
    int    i,j;

    /* inicia_matriz(B,3,3); */
    B->renglon=A.renglon;
    B->columna=A.columna;
    for(i=0;i<A.renglon;i++)
        for(j=0;j<A.columna;j++)
            B->m[i][j]=A.m[i][j];

    return *B;
}

```

*/\* Esta función recibe como parámetros los ángulos de giro con respecto a los ejes de un sistema de referencia y devuelve la matriz homogénea (4x4) correspondiente a tal giro. \*/*

```

struct matriz gira_matriz_rotacion_h(struct posicion_camara
p_cam,struct matriz *R)
{
    int    i,j;

    inicia_matriz(R,4,4);
    for(i=0;i<4;i++)
        for(j=0;j<4;j++)
            R->m[i][j]=0;
    if(p_cam.alfax!=0){
        p_cam.alfax=p_cam.alfax*PI/180.0;
        R->m[0][0]=1.0;
        R->m[0][1]=0;
        R->m[0][2]=0;
        R->m[1][0]=0;
        R->m[1][1]=cos(p_cam.alfax);
        R->m[1][2]=-sin(p_cam.alfax);
        R->m[2][0]=0;
        R->m[2][1]=sin(p_cam.alfax);
        R->m[2][2]=cos(p_cam.alfax);
    }
    if(p_cam.alfay!=0){
        p_cam.alfay=p_cam.alfay*PI/180.0;
        R->m[0][0]=cos(p_cam.alfay);

```

```

R->m{0}[1]=0;
R->m{0}[2]=sin(p_cam.alfay);
R->m{1}[0]=0;
R->m{1}[1]=1.0;
R->m{1}[2]=0;
R->m{2}[0]=-sin(p_cam.alfay);
R->m{2}[1]=0;
R->m{2}[2]=cos(p_cam.alfay);
}
if(p_cam.alfaz!=0){
p_cam.alfaz=p_cam.alfaz*PI/180.0;
R->m{0}[0]=cos(p_cam.alfaz);
R->m{0}[1]=-sin(p_cam.alfaz);
R->m{0}[2]=0;
R->m{1}[0]=sin(p_cam.alfaz);
R->m{1}[1]=cos(p_cam.alfaz);
R->m{1}[2]=0;
R->m{2}[0]=0;
R->m{2}[1]=0;
R->m{2}[2]=1;
}
R->m{0}[3]=p_cam.p0.x;
R->m{1}[3]=p_cam.p0.y;
R->m{2}[3]=p_cam.p0.z;
R->m{3}[0]=0;
R->m{3}[1]=0;
R->m{3}[2]=0;
R->m{3}[3]=1;

return *R;
}
/* Esta rutina regresa la matriz inversa de una matriz
homog,nea de 4x4 elementos. Lo realiza en funci3n de la
definici3n en la p gina 29 del libro Robot Analysis and
control (Haruhiko Asada) */

```

```

struct matriz matriz_inversa_h(struct matriz M,struct
matriz *R)
{
struct vector p0;

inicia_matriz(R,4,4);
p0.x=M.m{0}[3];
p0.y=M.m{1}[3];
p0.z=M.m{2}[3];

```

```

R->m{0}[0]=M.m[0][0];
R->m{0}[1]=M.m[1][0];
R->m{0}[2]=M.m[2][0];
R->m{1}[0]=M.m[0][1];
R->m{1}[1]=M.m[1][1];
R->m{1}[2]=M.m[2][1];
R->m{2}[0]=M.m[0][2];
R->m{2}[1]=M.m[1][2];
R->m{2}[2]=M.m[2][2];
R->m{0}[3]=-R->m{0}[0]*p0.x+R->m{0}[1]*p0.y+R-
>m{0}[2]*p0.z;
R->m{1}[3]=-R->m{1}[0]*p0.x+R->m{1}[1]*p0.y+R-
>m{1}[2]*p0.z;
R->m{2}[3]=-R->m{2}[0]*p0.x+R->m{2}[1]*p0.y+R-
>m{2}[2]*p0.z;

R->m{3}[0]=0;
R->m{3}[1]=0;
R->m{3}[2]=0;
R->m{3}[3]=1.0;

return *R;
}

```

## APÉNDICE B

***Programa para el cálculo de la posición del extremo de un brazo de seis ejes de revolución.***

```
/* Este archivo contiene un ejemplo con el cálculo del
cuaterniçn y posiçiçn del extremo del brazo para un robot 6R
(de seis ejes de revoluciçn) . */
```

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<conio.h>
#include<dos.h>
#include<math.h>
#include<graphics.h>
#include"c:\lenguaje\fuentes\robots\estruct1.c"
#include"c:\lenguaje\fuentes\robots\par_6R.c"
#include"c:\lenguaje\fuentes\robots\vectores.c"
#include"c:\lenguaje\fuentes\robots\cuater.c"
#include"c:\lenguaje\fuentes\robots\matrices.c"
#include"C:\lenguaje\fuentes\robots\ruq6r.c"
#include"c:\lenguaje\fuentes\robots\recuadro.c"
```

```
main()
```

```
{
```

```
struct p6r val;
struct vector vresul;
struct cuaternion quat;
```

```
val.fL0=30.0;
val.fL1=20.0;
val.fL2=40.0;
val.fL3=10.0;
val.fL4=20.0;
val.fL5=10.0;
```

```
val.vteta1=0.0;
val.vteta2=0.0;
val.vteta3=0.0;
val.vteta4=PI/2.0;
```

```

val.vteta5=PI/2.0;
val.vteta6=0.0;

vresul=calcula_cuater_6r(val,&cuat);
printf("\n Los valores resultantes son \n");
despliega_vector(vresul);

}

/* Este archivo contiene la rutina de calculo del cuaterni n
final para un manipulador de seis ejes de revolución */

struct vector calcula_cuater_6r(struct p6r parm,struct
cuaternion *qres)
{

    struct cuaternion
Q1,Q2,Q2post,Q3,Q3post,Q4,Q5,Q6,Qinter,Qresul;
    struct vector v1,v2,v3,v3post,v4,v5,v6,vres1,vres2;
    double signo2,signo3,signo4;

    Q1.qu1=cos(parm.vteta1/2.0)/RC2;
    Q1.qu2=-cos(parm.vteta1/2.0)/RC2;
    Q1.qu3=-sin(parm.vteta1/2.0)/RC2;
    Q1.qu4=sin(parm.vteta1/2.0)/RC2;
    v1.x=0.0;
    v1.y=0.0;
    v1.z=parm.fL0;

    Q2.qu1=cos(parm.vteta2/2.0);
    Q2.qu2=0;
    Q2.qu3=0;
    Q2.qu4=sin(parm.vteta2/2.0);
    Q2post.qu1=1/RC2;
    Q2post.qu2=0.0;
    Q2post.qu3=0.0;
    Q2post.qu4=-1/RC2;
    v2.x=parm.fL1;
    v2.y=0.0;
    v2.z=0.0;
    v2=rotar_vector(Q1,v2);

```

```

Qinter=mult_cuaternion(Q1,Q2);
vres1=suma_vectores(v1,v2);

Q3.qu1=cos(parm.vteta3/2.0);
Q3.qu2=0.0;
Q3.qu3=0.0;
Q3.qu4=sin(parm.vteta3/2.0);
v3.x=0.0;
v3.y=-parm.fl2;
v3.z=0.0;
v3=rotar_vector(Qinter,v3);
Qinter=mult_cuaternion(Qinter,Q2post);
Qinter=mult_cuaternion(Qinter,Q3);
vres2=suma_vectores(vres1,v3);

Q3post.qu1=1/RC2;
Q3post.qu2=-1/RC2;
Q3post.qu3=0.0;
Q3post.qu4=0.0;
v3post.x=parm.fl3;
v3post.y=parm.fl4;
v3post.z=0.0;
v3post=rotar_vector(Qinter,v3post);
Qinter=mult_cuaternion(Qinter,Q3post);
vres1=suma_vectores(vres2,v3post);

Q4.qu1=cos(parm.vteta4/2.0)/RC2;
Q4.qu2=-cos(parm.vteta4/2.0)/RC2;
Q4.qu3=-sin(parm.vteta4/2.0)/RC2;
Q4.qu4=sin(parm.vteta4/2.0)/RC2;
v4.x=0.0;
v4.y=0.0;
v4.z=0.0;
Qinter=mult_cuaternion(Qinter,Q4);
vres2=vres1;

Q5.qu1=cos(parm.vteta5/2.0)/RC2;
Q5.qu2=cos(parm.vteta5/2.0)/RC2;
Q5.qu3=sin(parm.vteta5/2.0)/RC2;
Q5.qu4=sin(parm.vteta5/2.0)/RC2;
v5.x=0.0;
v5.y=0.0;
v5.z=0.0;
Qinter=mult_cuaternion(Qinter,Q5);
vres1=vres2;

Q6.qu1=cos(parm.vteta6/2.0)/RC2;

```

```

|   Q6.qu2=0.0;
   Q6.qu3=0.0;
   Q6.qu4=sin(parm.vteta6/2.0)/RC2;
   v6.x=0.0;
   v6.y=0.0;
   v6.z=parm.fL5;
   Qinter=mult_cuaternion(Qinter,Q6);
   v6=rotar_vector(Qinter,v6);
   vres1=suma_vectores(vres1,v6);

   qres->qul=Qinter.qu1;
   qres->qu2=Qinter.qu2;
   qres->qu3=Qinter.qu3;
   qres->qu4=Qinter.qu4;

   return vres1;
)

```



## APÉNDICE C

### Movimiento Diferencial : Matriz Jacobiana.

El objetivo de este apartado será el de describir la relación entre la velocidad del punto final del manipulador con las velocidades individuales de las articulaciones, para lograr ello, se derivará la relación diferencial entre los desplazamientos de las articulaciones y la posición del punto final de aplicación, y a partir de ello se solucionará para movimientos individuales de las articulaciones.

#### *1.1 Modelado cinemático de movimiento instantáneo.*

Relaciones diferenciales

Para un manipulador de  $n$  articulaciones, las ecuaciones cinemáticas que relacionan la posición final de la herramienta  $(x,y,z)$  con los desplazamientos de las articulaciones vienen dadas por:

$$x(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = f_x(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$$

$$y(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = f_y(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \quad (II.1)$$

$$z(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = f_z(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$$

para obtener los pequeños desplazamientos del punto final de la herramienta con respecto a una cierta posición se utilizarán las relaciones diferenciales, las cuales se obtienen al diferenciar las ecuaciones II.1.

$$\begin{aligned}
 dx &= \frac{\partial x}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial x}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \dots + \frac{\partial x}{\partial \theta_n} d\theta_n \\
 dy &= \frac{\partial y}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial y}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial \theta_n} d\theta_n \\
 dz &= \frac{\partial z}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial z}{\partial \theta_2} d\theta_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial \theta_n} d\theta_n
 \end{aligned}
 \tag{II.2}$$

en forma vectorial, se puede expresar :

$$dx = J d\theta \tag{II.3}$$

donde  $dx$ ,  $d\theta$  son vectores infinitesimales de desplazamiento definidos por:

$$dx = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad d\theta = \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \\ \dots \\ d\theta_n \end{bmatrix} \tag{II.4}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial x}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial y}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial z}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial z}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \tag{II.5}$$

La matriz  $\mathbf{J}$  contiene las derivadas parciales de las funciones  $x(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ ,  $y(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  con respecto a los ángulos:  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  y se conoce como la matriz Jacobiana del manipulador, la cual representa la relación infinitesimal entre los desplazamientos de la articulación y la localización del punto final de la aplicación en la posición presente. En realidad también representa la relación de velocidades entre el punto final de la aplicación y las velocidades de las articulaciones.

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{J} \frac{d\theta}{dt} \quad (II.6)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{J} \dot{\theta} \quad (II.7)$$

### Rotaciones infinitesimales

Así como se requiere el cálculo de la traslación infinitesimal, de la misma forma se necesita realizar el cálculo de la velocidad angular para el brazo de un manipulador, para ello es útil saber que las rotaciones de ángulos infinitesimales se comportan de forma substancialmente diferente que las rotaciones de ángulos finitos.

En efecto, al realizar el cálculo de las rotaciones de ángulos infinitesimales mediante la multiplicación de matrices se obtiene el resultado siguiente:

$$R(d\phi_x, d\phi_y, d\phi_z) = \begin{bmatrix} 1 & -d\phi_z & d\phi_y \\ d\phi_z & 1 & -d\phi_x \\ -d\phi_y & d\phi_x & 1 \end{bmatrix} \quad (II.8)$$

La matriz de rotación depende sólo de los ángulos infinitesimales, pero es independiente del orden de rotación.

Una propiedad importante de las matrices de rotación infinitesimal es que la multiplicación de ellas, es decir, el giro consecutivo de dos rotaciones equivale a la rotación de la suma de los ángulos infinitesimales correspondientes a los componentes individuales de cada eje, es decir :

$$R \quad (d\phi_x, d\phi_y, d\phi_z) \quad R \quad (d\phi_x', d\phi_y', d\phi_z') \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & (d\phi_z + d\phi_z') & -(d\phi_y + d\phi_y') \\ -(d\phi_z + d\phi_z') & 1 & (d\phi_x + d\phi_x') \\ (d\phi_y + d\phi_y') & -(d\phi_x + d\phi_x') & 1 \end{bmatrix} \quad (II.9)$$

Dadas las propiedades de las rotaciones infinitesimales, se puede definir un vector de tres ejes :

$$d\phi = \begin{bmatrix} d\phi_x \\ d\phi_y \\ d\phi_z \end{bmatrix} \quad (II.10)$$

### Cálculo de la matriz Jacobiana

Sea  $d\mathbf{p}$  el vector de seis componentes, compuesto por  $dx_i$  que representa la traslación infinitesimal del punto final de la herramienta, y por  $d\phi_i$  que representa la rotación infinitesimal del punto final de la aplicación (según figura II-1):

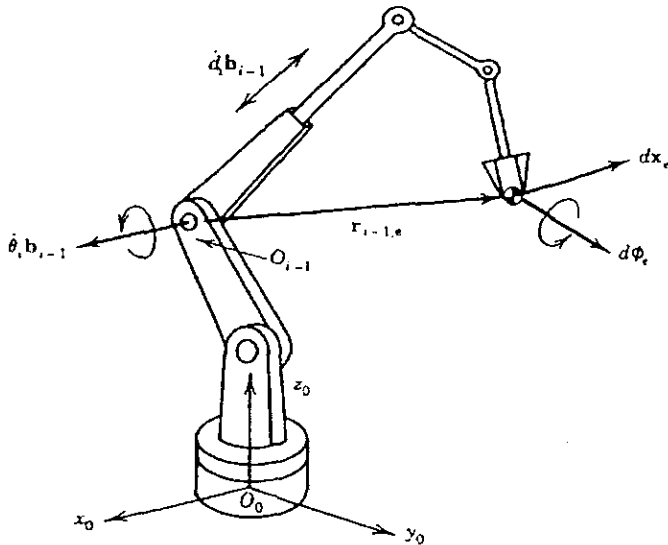


Fig. II-1 Desplazamientos infinitesimales del efector final generados por las articulaciones individuales.

$$d\mathbf{p} = \begin{bmatrix} dx_e \\ d\phi_e \end{bmatrix} \quad (II.11)$$

Si se dividen ambos lados de la ecuación por un incremento de tiempo  $dt$ , se obtiene la velocidad lineal y velocidad angular del punto final de la aplicación.

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} v_e \\ w_e \end{bmatrix} \quad (II.12)$$

las velocidades lineal y angular se pueden escribir como una función de las velocidades de las articulaciones

$$\dot{p} = J \dot{q} \quad (II.13)$$

donde  $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$  es el vector  $n \times 1$  de velocidad de las articulaciones. Las dimensiones de la matriz jacobiana es de  $6 \times n$ , donde los primeros tres renglones son asociados con la velocidad lineal  $v_c$ , mientras que las últimas tres corresponden a la velocidad angular  $w_c$ . Cada vector columna, por otro lado, representa la velocidad lineal y angular generadas por una articulación en particular.

Al considerar cada columna de la matriz jacobiana por separado, se pueden expresar en forma individual los vectores de columna  $J_{Li}$  y  $J_{Ai}$  de dimensiones  $3 \times 1$  asociados con las velocidades lineales y angulares respectivamente. La matriz jacobiana queda entonces expresada de la siguiente forma:

$$J = \begin{bmatrix} J_{L1} & J_{L2} & \dots & J_{Ln} \\ J_{A1} & J_{A2} & \dots & J_{An} \end{bmatrix} \quad (II.14)$$

Al usar los valores  $J_{Li}$ , se puede escribir la velocidad lineal del punto final como :

$$v_c = J_{L1} \dot{q}_1 + \dots + J_{Ln} \dot{q}_n \quad (II.15)$$

si la articulación es prismática, produce una velocidad lineal en el punto final en la misma dirección del eje de la articulación. Sea  $b_{i,1}$  el vector

unitario que apunta en la dirección del eje de la articulación  $i$ , como se muestra en la figura II.1, y sea  $d_i$  la velocidad escalar de la articulación en la misma dirección, por lo que:

$$J_{Li} \dot{q}_i = \mathbf{b}_{i-1} \dot{d}_i \quad (\text{II.16})$$

Si por otro lado, la articulación es de revolución, como también se muestra en la figura , ella rota la distancia entre las articulaciones  $i$  y  $n$  a la velocidad angular  $w_i$ , lo cual se expresa en la siguiente forma:

$$w_i = \mathbf{b}_{i-1} \dot{\theta}_i \quad (\text{II.17})$$

esta velocidad angular produce a su vez una velocidad lineal que deriva del producto del vector de posición  $\mathbf{r}_{i-1,e}$  que conecta  $O_{i-1}$  a la posición del punto final del brazo y está dada por:

$$J_{Li} \dot{q}_i = w_i \times \mathbf{r}_{i-1,e} = (\mathbf{b}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,e}) \dot{\theta}_i \quad (\text{II.18})$$

En forma breve se pueden expresar los vectores de la matriz jacobiana mediante las siguientes ecuaciones :

$$\begin{bmatrix} J_{L,i} \\ J_{A,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{para una articulación prismática} \quad (\text{II.19})$$

y

$$\begin{bmatrix} J_{L,i} \\ J_{A,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,e} \\ \mathbf{b}_{i-1} \end{bmatrix} \quad \text{para una articulación de revolución} \quad (\text{II.20})$$

de las expresiones anteriores,  $\mathbf{b}_{i-1}$  y  $\mathbf{r}_{i-1}$  son función del desplazamiento  $q_i$ , y su cálculo viene dado de la siguiente forma.

Si  $\mathbf{b} = [0, 0, 1]^T$  representa la dirección del eje de la articulación  $i-1$  con referencia al sistema de ejes coordinados  $i-1$ , entonces, a través del cálculo de las rotaciones sobre los distintas articulaciones representadas por las matrices de  $3 \times 3$   $R_j^{-1}(q_j)$ , se obtiene :

$$\mathbf{b}_{i-1} = R_1^0(q_1) \dots R_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) \mathbf{b} \quad (II.21)$$

para calcular al vector  $\mathbf{r}_{i-1}$  se pueden usar las matrices homogéneas de rotación-traslación  $A_j^{-1}(q_j)$ . Consideremos  $\mathbf{X}_{i-1,e}$  es el vector aumentado de  $\mathbf{r}_{i-1}$  y sea  $\mathbf{X} = [0,0,0,1]^T$  el vector aumentado que representa el origen del sistema de coordenadas, entonces, el vector de posición  $\mathbf{r}_{i-1}$  se deriva de la siguiente

$$\mathbf{X}_{i-1,e} = A_1^0(q_1) \dots A_i^0(q_i) \mathbf{X} - A_1^0(q_1) \dots A_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) \mathbf{X} \quad (II.22)$$

Donde el primer término representa el vector de posición del origen al punto final de aplicación, mientras que el segundo corresponde al vector que va de  $O_0$  a  $O_{i-1}$ .

Es necesario hacer notar que los elementos de la matriz jacobiana dependen de los desplazamientos de las articulaciones, de lo que desprende que la matriz jacobiana depende de la configuración del manipulador.



## 1.2 Cinemática Instantánea Inversa

### Resolución de ecuación de movimiento

De la ecuación II.13 se obtiene la velocidad del punto final del manipulador dada la velocidad de las articulaciones. Para resolver el problema inverso, es decir para encontrar las velocidades de las articulaciones dada una velocidad en el punto final del manipulador, se puede partir de esa expresión, considerando que para mover el punto final de aplicación en una dirección arbitraria con una velocidad angular arbitraria, es necesario que el manipulador tenga seis ejes.

Para una manipulador de seis grados de libertad, la matriz jacobiana es una matriz cuadrada de  $6 \times 6$ . y si la matriz es no singular en una posición dada del brazo, la matriz inversa  $J^{-1}$  existe. De la ecuación II.13 se obtiene :

$$\dot{q} = J^{-1} \dot{p} \quad (II.23)$$

Con esto se obtienen las velocidades necesarias en las articulaciones individuales para obtener una velocidad  $\dot{p}$  en el punto final del manipulador. En algunas ocasiones, la matriz jacobiana puede ser singular debido a la posición del manipulador, por lo que su inversa no existe, y no aplica la ecuación anterior. En esos puntos se dice que la posición del manipulador es singular. En una posición singular, la matriz jacobiana no tiene todos sus elementos, y sus columnas son linealmente dependientes, por lo que no mapean el espacio vectorial de  $\dot{p}$ , es decir, existe al menos una dirección en la que el punto final de aplicación no puede ser movido.