UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBABILIDADES, ANUALIDADES Y SEGUROS EN VIDA SIMPLE Y CONJUNTA.

T E S I S

Que para obtener el Título de

ACTUARIO

P r e s e n t a

JUAN CARLOS TOXQUI LOPEZ

DIRECTOR DE TESIS:

ACT. MARIA AURORA VALDEZ MICHEL

FACULTAD DE CIENCIAS

UNAM

2000

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

PROBABILIDADES, ANUALIDADES Y SEGUROS EN VIDA SIMPLE Y CONJUNTA.

realizado por JUAN CARLOS TOXQUI LOPEZ

con número de cuenta 8514838-1 , pasante de la carrera de ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	ACT. MARIA AURORA VALDEZ MICHEL
Propietario	ACT. HUMBERTO RAMOS SANCHEZ
Propietario	ACT. LETICIA DANIEL ORANA Leticia Daniel O.
Suplente	ACT. LAURA MIRIAM QUEROL GONZALEZ L. M. Q. G.
Suplente	ACT. NOEMI VELAZQUEZ SANCHEZ Noemi Velázquez Sánchez

Consejo Departamental de [illegible]

M.A.P. MARIA DEL PI[illegible]ES

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A ti:

Porque me has permitido

conocerte, sentirte y amarte.

Porque gracias a ti:

conocí a mis padres, hermanos,

sobrinos y amigos.

Porque gracias a ti:

Soy lo que ves.
Gracias......

Por lo que recibí..
Gracias......

Por lo que recibo...
Gracias......

Por lo que recibiré...
Gracias......

Infinitamente.

ÍNDICE

Pag.

Introducción

El presente trabajo representa la culminación de un proyecto dirigido al área técnica Actuarial.

El por que de este trabajo es que a 50 años de la creación de la carrera existe muy poca información de apoyo, sobre todo para los alumnos que se encuentran cursando los semestres correspondientes al cuarto y quinto semestre respectivamente.

El objetivo principal es proporcionar a los alumnos más herramientas que faciliten su estudio y posteriormente su desarrollo. Es importante decir que la bibliografía existente casi se basa en dos textos, uno ya bastante conocido (Jordán) y el más reciente (Bowers), sin olvidar trabajos de tesis y traducciones de los dos textos anteriores.

La forma en como se aborda el estudio se dividió en dos partes la primera de ellas referente a vida simple que comprende probabilidades, anualidades y seguros que abarcan los tres primeros capítulos, la segunda parte la conforma el estudio en vida conjunta que abarca probabilidades de vida conjunta, anualidades de vida conjunta y seguros de vida conjunta, que representan los Capítulos cuarto quinto y sexto.

Referente a la primera parte se trato de estudiar lo mas profundamente posible, ya que el entendimiento de esta parte es fundamental, no solo para el estudio de la segunda parte aquí considerada, sino para abordar temas como Primas (la cual resulta de la combinación de anualidades y seguros) y Reservas en donde se combinan las tres (anualidades, seguros y primas).

Es importante señalar que los dos textos anteriormente mencionados fueron la base para el estudio de un servidor, complementando con trabajo de tesis y otros resultados, posteriormente comencé a hacer resultados de equivalencia entre algunas expresiones, algunas generalizaciones para finalmente enfocarme al desarrollo casi total de las expresiones consideradas en esta investigación.

Posterior a estos seis capítulos viene la parte referente a conclusiones para finalmente concluir con la bibliografía utilizada.

Esperando que pueda servir de ayuda el presente trabajo comenzaremos el estudio correspondiente.

CAPITULO I

CAPITULO I

SUPERVIVENCIA Y MORTALIDAD

1.1 Introducción

El cálculo actuarial es una rama de las matemáticas aplicadas destinada al análisis de capitales sujetos a contingencias y la finalidad del actuario es analizar sistemáticamente la contingencia de la vida humana.

a) Supervivencia

b) Mortalidad

El cálculo actuarial tiene como objetivo fundamental la determinación de pagos que dependen de la supervivencia o muerte e involucran el concepto de interés, por lo cual, es necesario el análisis y medida de las contingencias de la vida humana para hacer inferencias acerca de su comportamiento futuro.

1.2 Funciones Biometricas

Función de supervivencia

Observaciones:

- La muerte en la infancia es bastante elevada, disminuye en la niñez, se vuelve a incrementar durante la adolescencia y edad madura, acelerándose conforme se acerca al final de la vida.

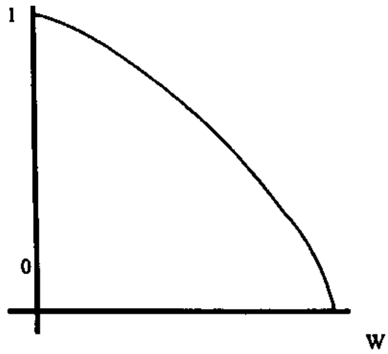
1.2.1 Notación y Propiedades de la función de supervivencia

x Representará la edad de la persona [**0,w)**

S(x) llamada función de supervivencia:

- **S(x)** decrece conforme "**x**" crece (**x** tiene mayor probabilidad de sobrevivir que " **x+t** ").
- **S(x)** es una función continua, ya que no hay rompimientos.
- Nuestra función **S(x)** debe cumplir los rangos de probabilidad [**0,1**]. Si **x = 0** se tiene que **S(0)= 1** y si **x = w** entonces **S(w) = 0**.

1.2.2 Gráfica de una función de supervivencia



Ejemplo

Sea $(100 - x)^{1/2} / 10$ verifique que es una función de supervivencia.

Debemos constatar que cumple las propiedades dadas anteriormente para que sea función de supervivencia.

- **Decreciente**. Como la derivada es negativa la función es decreciente:
$S'(x) < 0$.

- **Continua** aplicando limites para ver que una función es continua, tenemos que:

$$\lim_{x \to a} S(x) = S(a)$$

- $S(0) = 1$ Y $S(w) = 0$.

Por lo cual nuestra función es de supervivencia.

1.3 Tabla de Mortalidad

Es una herramienta bastante útil para el actuario, ya que le permite calcular las diferentes probabilidades de vida y de muerte.

Las fuentes de obtención son:
- Las estadísticas poblaciones(registro civil)
- Datos obtenidos por las compañías de seguros

1.3.1 Notación

X **Edad**

lx **Número de vivos**, representará nuestra nueva función de supervivencia y en lo sucesivo será continua y diferenciable.

Otra definición será, que es un conjunto de personas con la característica de que todos sus elementos tienen exactamente la edad **x**. Si se considera que **lx** es cerrado ante el proceso migratorio y se sujeta a observación hasta que todos sus elementos se destruyen por la acción de la mortalidad, **lx** representa la función fundamental de la tabla de mortalidad.

K **radix o base** (inicio del grupo)

Generalmente, se elige el radix como alguna potencia conveniente de 10, su magnitud deberá ser tal, que permita la significancia de la inferencia estadística y proporcione el grado de precisión deseado en los cálculos basados en la tabla de mortalidad.

1.3.2 Observaciones

$l_x = K\,S(x)$ número de vivos a edad x

d_x = número de muertos, es la diferencia entre vivos a edad x y x+1

$= l_x - l_{x+1}$

1.4 Probabilidades

1.4.1 Probabilidades de vida

Basada principalmente en la probabilidad clásica.

- La probabilidad de que **x** sobreviva un año.

$${}_1P_x \quad = \quad P_x \quad = \quad l_{x+1} / l_x$$

La probabilidad de que **x** sobreviva **n** años.

$${}_nP_x \quad = \quad {}_nP_x \quad = \quad l_{x+n} / l_x$$

1.4.2 Probabilidades de muerte

- La probabilidad de que **x** muera entre las edades **x** y **x+1**.

$$ {}_1q_x = q_x = 1 - P_x = 1 - l_{x+1} / l_x = l_x - l_{x+1} / l_x $$

- La probabilidad de que **x** fallezca entre las edades **x** y **x+n.**

$$ {}_nq_x = 1 - {}_nP_x = 1 - l_{x+n} / l_x = l_x - l_{x+n} / l_x $$

1.4.3 Probabilidades diferidas

- La probabilidad de que x sobreviva **n** años y fallezca entre **x+n** y **x+n+1.**

$$ {}_{n/}q_x = l_{x+n} - l_{x+n+1} / l_x = d_{x+n} / l_x $$

- La probabilidad de que **x** fallezca entre las edades **x+n** y **x+n+m**.

$$ {}_{n/m}q_x = l_{x+n} - l_{x+n+m} / l_x $$

$$ {}_{n/m}q_x = ({}_nP_x)({}_mq_{x+n}) $$

1.4.4 Observación.

$$ \mathbf{l_x} = l_0\ {}_xP_0 = l_0\, S(x) $$

$$ \mathbf{d_x} = l_0 \left(S(x) - S(x+1) \right) $$

$$ \mathbf{{}_nP_x} = S(x+n) / S(x) $$

$$ \mathbf{{}_nq_x} = S(x) - S(x+n) / S(x) $$

$$ \mathbf{{}_{n/m}q_x} = S(x+n) - S(x+n+m) / S(x) $$

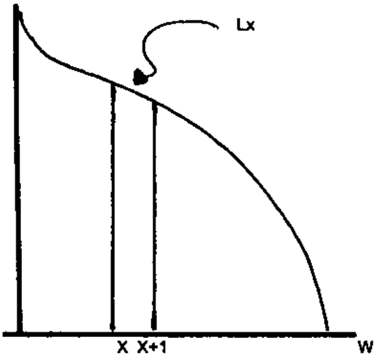
1.5 Tasa Central de Mortalidad

El área bajo la curva **l_x** representa el número de años vividos en conjunto por todos los componentes del grupo inicial.

Si consideramos el área bajo la curva en el intervalo **(0,t)** con **$t < w$**, ésta representará el número de años vividos por todos los componentes del grupo, desde su nacimiento hasta que alcanzaron la edad **t** y su complemento denotara el número de años que deberán aún vivir todos los componentes del grupo.

Considerando **Lx** el área bajo la curva **lx** en el intervalo **(x , x+1)**

$$Lx = \int_{x}^{x+1} lt\,dt = \int_{0}^{1} lx{+}t\,dt$$



Observemos los siguientes resultados:

$$Lx = lx - \tfrac{1}{2}\,dx = \tfrac{1}{2}\,(lx + lx_{+1})$$

Otra forma de definir **Lx** es considerarla como el número de personas que habiendo cumplido la edad **x** no han alcanzado la edad **x+1**

Ahora si, estaremos en condiciones de definir la tasa central de mortalidad:

$$mx = dx \;/\; Lx$$

Demos otra expresión en base al resultado anterior:

$$mx = dx \;/\; lx - \tfrac{1}{2}dx$$

divido ambos miembros por (1/lx)

$$mx = (dx/lx) \;/\; (lx/lx) - \tfrac{1}{2}(dx/lx)$$

Obtenemos:

$$\boxed{m_x = q_x / 1 - \tfrac{1}{2}q_x}$$

Retomando:

$$m_x = d_x / L_x$$

Reexpresando:

$$= (l_x - l_{x+1}) / \tfrac{1}{2}(l_x + l_{x+1}) \quad = 2(l_x - l_{x+1}) / (l_x + l_{x+1})$$

Divido cada miembro por $(1/l_x)$

$$= 2(l_x/l_x - l_{x+1}/l_x) / (l_x/l_x + l_{x+1}/l_x)$$

Con lo cual obtenemos:

$$\boxed{m_x = 2(1 - P_x) / (1 + P_x)}$$

Reexpresando:

$$m_x = 2(1 - (1-q_x) / (1 + (1-q_x))$$

$$m_x = 2(1 - 1 + q_x) / (1 + 1-q_x)$$

$$\boxed{m_x = 2(q_x) / 2 - q_x}$$

Otra expresión será:

$$\frac{d\,L_x}{dx} = l_{x+1} - l_x = - d_x$$

Por lo que otra expresión para m_x:

$$\boxed{m_x = \frac{-1}{L_x}\,\frac{d\,L_x}{dx}}$$

1.6 Esperanza de Vida

Definamos:

$$\mathbf{Tx = \sum_{t=0}^{\infty} Lx+t = \int_{0}^{\infty} lx+t\, dt}$$

Donde Tx denotará el número de personas vivas de edad mayor o igual a x. También se le puede definir como el tiempo que deben aún vivir todos los componentes del grupo.

Definiendo la siguiente expresión:

$$\mathbf{Tx = \sum_{t=1}^{\infty} lx+t + \tfrac{1}{2}\, lx}$$

Otra expresión la podemos obtener a partir de:

$$Tx = \int_{0}^{\infty} t lx+t \mu x+t \, dt$$

Resolviendo por partes:

u= t   du= dt

dv=lx+tμx+t dt   v=-lx+t

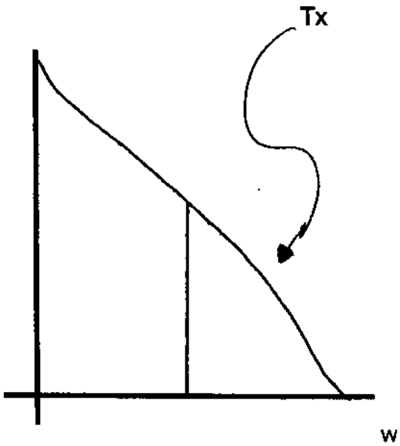
regresando:

$$t(lx+t \Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} (-lx+t)(dt)$$

resultando:

$$Tx= \int_{0}^{\infty} lx+t \, dt$$ Lo que se obtiene es la expresión definida anteriormente.

Si denotamos por $\mathring{e}_x$ al tiempo promedio de vida de cada uno de los que sobrevivieron a la edad **x**, obtenemos la siguiente expresión:



$$\mathring{e}_x = T_x / l_x = \int_0^\infty l_{x+t} / l_x \, dt = \int_0^\infty {}_tP_x \, dt$$

Representa la esperanza completa de vida.

1.6.1 Esperanza abreviada de vida

Se obtiene cuando se supone que las muertes ocurren al inicio de cada año.

$$e_x = \sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t} / l_x = \sum_{t=1}^{\infty} tP_x = \mathring{e}_x - \tfrac{1}{2}$$

También podemos obtener las esperanzas de vida completas o abreviadas, diferidas o temporales.

- $n / e_x = \sum_{t=n+1}^{\infty} tPx$

- $e_{x:n|} = \sum_{t=1}^{n} tPx$

- $n / e_{x:m|} = \sum_{t=n+1}^{n+m} tPx$

- $n / \mathring{e}_x = \int_{n}^{\infty} tPx \, dt$

- $\mathring{e}_{x:n} = \int_{0}^{n} tPx \, dt$

- $n/\mathring{e}_{x:m} = \int_{n}^{n+m} tPx \, dt$

1.7 Fuerza de Mortalidad

1.7.1 Tasa anual de mortalidad

Si dividimos el intervalo (x.x+1) en **t** partes iguales y consideramos que la probabilidad de fallecimiento, es igual a ${}_{1/t}q_x$, podremos obtener la tasa anual de mortalidad dada por:

$$q_x^{(t)} = (t)\ {}_{1/t}q_x = (t)\,\frac{(l_x - l_{x+1/t})}{l_x}$$

Si en la expresión anterior, hacemos tender $t \to \infty$ el resultado de este limite dará como resultado la Fuerza de Mortalidad que será representada por μx.

$$\mu x = \lim_{t\to\infty} \overset{(t)}{q} x$$

$$\mu x = \lim_{t\to\infty} (t)\ {}_{1/t}q\, x = \lim_{t\to\infty} (t)\,(l\,x - l\,x + {}_{1/t})\,/\,lx$$

$$= 1\,/\,l\,x \lim_{t\to\infty} (t)\,(l\,x - l\,x + {}_{1/t})$$

$$= 1\,/\,l\,x \lim_{1/t\to 0} \frac{(l\,x - l\,x + {}_{1/t})}{1/t}$$

Sabemos que la definición de derivada esta dada por:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Utilizando esta parte para nuestra demostración obtenemos:

$$= \frac{1}{lx} \lim_{1/t\to 0} \frac{-(\,l\,x + {}_{1/t} - l\,x\,)}{1/t}$$

$$= \frac{1}{lx}\,(-) \lim_{1/t\to 0} \frac{(\,l\,x + {}_{1/t} - l\,x\,)}{1/t}$$

$$\boxed{\mu x = \frac{1}{lx}\,(-)\,\frac{d\ lx}{dx}}$$

Otra expresión para la fuerza de mortalidad será:

$$\boxed{\mu x = (-)\,\frac{d \ln lx}{dx}}$$

1.7.2 Propiedades de la fuerza de mortalidad

- Mide la mortalidad al instante de alcanzar la edad **x**, es decir en cualquier instante que se desee medir.

- Puede ser expresada en forma de tasa anual, puede suceder que $\mu x > 1$ para valores de **x** situados al inicio o al final de la tabla.

- La fuerza de mortalidad es homologa a la fuerza de **interés** en el **interés compuesto.**

1.7.3 Expresión para lx en términos de la fuerza de mortalidad.

Primero hagamos una sustitución de **x** por **y:**

$$\mu y = (-) \frac{d \ln ly}{dy}$$

Luego integremos de **0** a **x:**

$$\int_0^x \mu y \, dy = (-) \int_0^x \frac{d \ln ly}{dy} \, dy$$

Analicemos el segundo miembro de la igualdad:

$$= (-) \ \ln ly \ \Big|_0^x$$

$$= - (\ln lx - \ln l_0)$$

Aplicando leyes de los logaritmos tenemos:

$$= - \ln \frac{lx}{lo}$$

Regresando:

$$\int_0^x \mu y \, dy = - \ln \frac{lx}{lo}$$

$$-\int_0^x \mu y \, dy = \ln \frac{lx}{lo}$$

Aplicando exponencial en ambos miembros obtenemos:

$$e^{-\int_0^x \mu y \, dy} = \frac{lx}{l\,0}$$

Despejando:

$$\boxed{l0 \; e^{-\int_0^x \mu y \, dy} = lx}$$

1.7.4 Otra expresión para lx en términos de μx.

Tomemos:

$$\mu x = \frac{1}{lx} (-) \frac{d}{dx} lx$$

En esta parte, debemos poner atención en que **x** es para edades enteras, por lo cual debemos sumarle a la **x**, **t**.

$$\mu x{+}t \, (l \, x{+}t) = (-) \frac{d}{dt} lx{+}t$$

Ahora si, aplicamos la primitiva en ambos miembros tenemos:

$$\int \mu x{+}t \, (l \, x{+}t) = - \int \frac{d}{dt} \; lx{+}t$$

Quedando la siguiente expresión:

$$\boxed{\int_0^{\infty} \mu x{+}t \, (l \, x{+}t) \; dt = - l \, x{+}t}$$

La expresión **$\mu x(lx)$** representa el número de muertes que ocurren en el momento de alcanzar la edad **x** y dicha gráfica es conocida como la curva de muertes.

1.7.5 Expresión para nqx en base a la fuerza de mortalidad.

Tomemos la siguiente igualdad:

$$\mu x = \frac{1}{lx} (-) \frac{d}{dx} lx$$

Cambiando a **x** por **y** tenemos:

$$\mu y = \frac{1}{ly} (-) \frac{d}{dy} ly$$

Despejando obtenemos:

$$\mu y\,(ly) = (-) \frac{d}{dy} ly$$

Si integramos ambos miembros de **x** a **x+n** tendríamos:

$$\int_x^{x+n} \mu y\,(ly)\,dy = -\int_x^{x+n} \frac{d}{dy} ly\,dy$$

$$\int_x^{x+n} \mu y\,(ly)\,dy = -ly \Big|_x^{x+n}$$

$$\int_x^{x+n} \mu y\,(ly)\,dy = -(l\,x+n - lx)$$

$$\int_x^{x+n} \mu y\,(ly)\,dy = lx - l\,x+n$$

Ahora hagamos un cambio de variable:

$y = x+t$ con $0 < t < n$

$dy = dt$

Por lo tanto, también nuestros limites de integración estarán en el intervalo [0,n]

$$\int_0^n \mu x{+}t\ (lx{+}t)\ dt = lx - l\,x{+}n$$

Ahora, dividiendo ambos miembros entre **lx** obtenemos:

$$\int_0^n \mu x{+}t\ \frac{(lx{+}t)}{lx}\ dt = \frac{lx - l\,x{+}n}{lx}$$

Por lo cual, estaremos en posibilidades de obtener una expresión para **nqx**:

$$\boxed{nqx = \int_0^n \mu x{+}t\ (tPx)\ dt = \frac{lx - l\,x{+}n}{lx}}$$

Representando la probabilidad de que **x** sobreviva **t** años y fallezca en el instante en que cumpla **x+t** años.

1.7.6 Otros resultados

Nuestra expresión para **n/mqx** es muy fácil de obtener cambiando los limites de integración de **n** a **m**.

$$\boxed{n/mqx = \int_n^m \mu x{+}t\ (tPx)\ dt = \frac{lx{+}n - l\,x{+}n{+}m}{lx}}$$

Además, el producto representa el número de muertes que ocurren al alcanzar la edad **x**, podemos obtener una expresión para **dx**.

$$\boxed{dx = \int_0^1 \mu x{+}t\ (l\,x{+}t)\ dt = lx - l\,x{+}1}$$

1.7.7 Observación.

Cuando lx esta definida en términos de una tabla de mortalidad y la ecuación matemática es desconocida, los valores de **μx** pueden solamente ser calculados aproximadamente por las siguientes equivalencias.

$$\mu x = \frac{1}{2} (\text{Log } l_{x-1} - \text{Log } l_{x+1})$$

$$\mu x = \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2\, lx} = \frac{d_{x-1} + dx}{2\, lx}$$

$$\mu x = 8\left(\frac{l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})}{12\, lx}\right.$$

$$\mu x = -\frac{1}{2} (\text{Log } P_{x-1} + \text{Log } P x)$$

1.8 Método para Edades Fracciónales

Comúnmente **lx** esta definida únicamente por la tabla de mortalidad que proporciona valores sólo para edades enteras, por lo que será necesario la utilización de métodos de aproximación para **lx**

El primero de ellos, es aquel donde la distribución de muertes es uniforme, el segundo es donde la fuerza de mortalidad es constante, y el tercero se le conoce como el método de Balducci. Este último en honor del Actuario Italiano quien desempeñó un papel fundamental en los métodos tradicionales de la construcción de las tablas de vida.

1.8.1 Distribución uniforme de muertes

$$l_{x+t} = (1 - t)lx + t\, l_{x+1}, \quad 0 < t < 1$$

Usando la expresión anterior, podemos obtener las siguientes igualdades:

$$tqx = \frac{lx - l_{x+t}}{lx}$$

Sustituimos nuestra relación:

$$tqx = \frac{lx - ((1 - t)lx + t\, l_{x+1})}{lx}$$

Desarrollando:

$$tqx = \frac{lx - (lx - t\,lx + t\,lx{+}1)}{lx}$$

$$tqx = \frac{lx - lx + t\,lx - t\,lx{+}1}{lx}$$

$$tqx = \frac{t\,lx - t\,lx{+}1}{lx}$$

$$tqx = t\,\frac{(lx - lx{+}1)}{lx}$$

$$\boxed{tqx = t \bullet qx}$$

Veamos la siguiente expresión:

$$\mathbf{tPx = \frac{lx{+}t}{lx}}$$

Sustituimos nuestra relación:

$$tPx = \frac{(1 - t\,)lx + t\,lx{+}1}{lx}$$

Desarrollando:

$$tPx = \frac{lx - t\,lx + t\,lx{+}1}{lx}$$

$$tPx = \frac{lx - t(\,lx - lx{+}1)}{lx}$$

$$\boxed{tPx = 1 - t \bullet qx}$$

El siguiente será:

$$\mu x{+}t = -\frac{1}{lx{+}t}\,\frac{d\,lx{+}t}{dt}$$

$$\mu x{+}t = -\frac{1}{(1-t)lx + t\,lx{+}1}\,\frac{d((1-t)lx + t\,lx{+}1)}{dt}$$

$$\mu x{+}t = -\frac{1}{lx - t\,lx + t\,lx{+}1}\,\frac{d(lx - t\,lx + t\,lx{+}1)}{dt}$$

$$\mu x{+}t = -\frac{1}{lx - t(lx - lx{+}1)}\,(-lx + lx{+}1)$$

$$\mu x{+}t = \frac{lx - lx{+}1}{lx - t(lx - lx{+}1)}.$$

Dividimos entre lx:

$$\boxed{\mu x{+}t = \frac{qx}{1 - t\bullet qx}.}$$

Por último revisemos:

tPxµx+t

Para resolver esta expresión tomemos lo demostrado en forma individual:

$$tPx\mu x{+}t = \frac{qx}{1 - t\bullet qx}\bullet(1 - t\bullet qx)$$

Con lo cual obtenemos:

$$\boxed{tPx\mu x{+}t = qx}$$

1.8.2 Fuerza constante de mortalidad

$l_{x+t} = l_x\, e^{-\mu t}$ donde $\mu = -\log P_x$

1.8.3 Balducci

$\dfrac{l}{l_{x+t}} = \dfrac{(1-t)}{\dfrac{l_{x+t}}{l_{x+1}}}$

1.9 Leyes de Mortalidad

Se le denominará **ley de mortalidad** a aquella expresión representada por **l_x** ó **μ_x** y que sea capaz de reproducir el comportamiento de un grupo inicial ante el evento muerte.

Avanzaremos cronológicamente.

1.9.1 Ley de mortalidad bajo Moivre

- Comenzando por estudiar a **Moivre** (1729).

Hipótesis

Decía que el número de vivos (**l_x**), decrecía en progresión aritmética de la edad **x** a la edad **w**. Con lo cual **l_x** podía ser representado por una línea recta.

$$\mu_x = (w - x)^{-1}$$

$$0 \leq x < w$$

Errores

No satisfacían dos condiciones importantes:

1. Un ajuste cercano a la experiencia real.
2. Una expresión que facilitara los cálculos.

$$\int_0^x \mu_y\, dy = \int_0^x \frac{1}{w-y}\, dy$$

Sea:

$u = w - y$
$du = -dy$
$-du = dy$

regresando:

$$\int_0^x \mu y \, dy = \int_0^x -\frac{1}{u} \, du$$

$$\int_0^x \mu y \, dy = -\ln u \Big|_0^x$$

$$\int_0^x \mu y \, dy = -(\ln w\text{-}x - \ln w)$$

$$\int_0^x \mu y \, dy = -\left(\ln \frac{w-x}{w}\right)$$

regresando:

Sabemos que:

$$= lo \, e^{-\int_0^x \mu y \, dy} = lx$$

$$= lo \, e^{-(-\ln(w-x/w))} = lx$$

$$= lo \, \frac{w-x}{w} = lx$$

$$\boxed{lx = lo \left(1 - \frac{x}{w}\right)}$$

1.9.2 Ley de mortalidad bajo Gompertz

- El siguiente aparece un siglo después, llamado **Gompertz** (1825)

Hipótesis

Consideraba que la muerte se debía a dos causas:

1. Azar o al deterioro biológico(casualidad)
2. Incapacidad para resistir a la muerte.

Consideraba que la μx se incrementaba en forma geométrica.

$$\mu x = BC^x$$

x representando la edad en cada momento.
B,C son constantes.

Error

En su expresión sólo consideraba la segunda, sin tomar en cuenta la primera.

Obtengamos una expresión para lx:

$$\int_0^x \mu y \, dy = \int_0^x BC^y \, dy$$

$$= B \int_0^x C^y \, dy = B \left(\frac{C^y}{\log c} \Big|_0^x \right)$$

$$= B \left(\frac{C^x}{\log C} - \frac{C^0}{\log C} \right) = \frac{BC^x}{\log C} - \frac{B}{\log C}$$

$$= \frac{B}{\log C} (C^x - 1)$$

$$= - \log g \; C^x - 1 \qquad \text{donde } - \log g = B / \log C$$

Sabemos que:

$$= l_0\, e^{-\int_0^x \mu_y\, dy} = l_x$$

$$= l_0\, e^{-\left(-\log g^{C^x - 1}\right)} = l_x$$

$$= l_x = l_0\, g^{C^x - 1}$$

Ahora si hacemos $k = l_0 / g$

$$= l_x = \frac{l_0\, g^{C^x}}{g}$$

$$\boxed{= l_x = k\, g^{C^x}}$$

Que es la expresión de **lx** bajo Gompertz.

Los limites de edad para **lx** se encuentra entre 20 y 60 años de edad, cuando se tienen edades mayores se tienen que modificar **K,g,C**.

1.9.3 Ley de mortalidad bajo Makeham

- Posteriormente, **Makeham**(1860) sugiere modificar la fórmula de **Gompertz.**

Hipótesis

Incluía la segunda causa mencionada pero no utilizada por **Gompertz**.

$$\mu_x = A + BC^x$$

Ahora encontremos una expresión para **lx.**

$$\int_0^x \mu_y\, dy = \int_0^x A + BC^y\, dy$$

$$= \int_0^x A\,dy + B\int_0^x C^y\,dy \quad = \quad A\left(y \Big|_0^x \right) \quad + \quad B\left(\frac{C^y}{\log c} \Big|_0^x \right)$$

$$= A\,(x-0) + B\left(\frac{C^x}{\log C} - \frac{C^0}{\log C} \right) = \frac{BC^x}{\log C} - \frac{B}{\log C}$$

$$= Ax + \frac{B}{\log C}\left(C^x - 1 \right)$$

$= -\log g^{C^x - 1}$ donde $-\log g = B / \log C$

= Así como $-\log S = A$

Con lo cual obtenemos:

$$= -\log S^x - \log g^{C^x-1}$$

Sabemos que:

$$= l_0\, e^{-\int_0^x \mu y\,dy} = l_x$$

$$= l_0\, e^{-(-\log S^x - \log g^{C^x-1})} = l_x$$

$$= l_x = l_0\, S^x\, g^{C^x-1}$$

Ahora si hacemos $k = l_0 / g$

$$= l_x = \frac{l_0 \, S^x \, g^{c^x}}{g}$$

$$\boxed{= l_x = k \, S^x \, g^{c^x}}$$

Que es la expresión para **lx** bajo **Makeham** y acepta edades mayores o iguales a 20.

1.9.4 Ley de mortalidad bajo Weibull

- En este siglo **Weibull** (1939)

Hipótesis

La curva de la vida tenia un comportamiento exponencial.

$\mu x = kX^n$

Ahora encontremos una expresión para **lx.**

$$\int_0^x \mu y \, dy = \int_0^x kY^n \, dy$$

$$= k \int_0^x Y^n \, dy \qquad = \qquad K \left(\frac{Y^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x \right)$$

$$= K \left(\frac{X^{n+1}}{n+1} - 0 \right)$$

$$= K \left(\frac{X^{n+1}}{n+1} \right)$$

= hagamos u = k / n+1

= u (X^{n+1})

$$= l_0 \, e^{-\int_0^x \mu_y \, dy} = l_x$$

$$\boxed{= l_0 \, e^{-(u X^{n+1})} = l_x}$$

con $k > 0$, $n > 0$, $x \geq 0$

1.9.5 Observaciones

La ley de Gompertz es un caso especial de Makeham cuando A=0

Si c=1 en las leyes de Gompertz y Makeham, el resultado es la distribución (fuerza constante) exponencial.

CAPITULO II

CAPITULO II

ANUALIDADES CONTINGENTES

2.1 Introducción

El objetivo fundamental de este capítulo es desarrollar fórmulas que calculen el valor presente de cantidades futuras, el pago de las cuales es contingente a la supervivencia de una vida dada.

Este valor presente es llamado **Prima Neta Única** denotado por **(PNU)**. El nombre de **neta** es por que se calcula sin tomar en cuenta los gastos que origina la operación, y **única** por que se paga una sola vez al contratar la operación.

2.2 Seguro Dotal Puro

Supongamos que **lx** personas con edad **x** contribuyen en igual cantidad para formar un fondo que provea de una unidad monetaria a cada uno de los que sobrevivan a un periodo de **n** años.
Como sabemos una vez transcurrido este periodo de tiempo habrá **lx+n** sobrevivientes.

Si denotamos **nEx** como la contribución de cada una de las **lx** personas, tendremos la siguiente igualdad:

$$\boxed{nEx = V^n \frac{lx+n}{lx} = V^n \, nPx}$$

Si multiplicamos y dividimos por V^x tenemos la siguiente equivalencia:

$$nEx = V^n \frac{V^x}{V^x} \frac{lx+n}{lx} = \frac{V^{x+n}}{V^x} \frac{lx+n}{lx} = \frac{Dx+n}{Dx}$$

Los resultados obtenidos constituyen el seguro total puro cuya prima neta única queda representada por $\mathbf{Ax : \overset{1}{n|}}$.

El uno sobre la parte superior de **n** significa que el pago unitario se llevará a cabo sólo si transcurren **n** años.

nEx representa el valor presente de una unidad monetaria pagada a **x** si sobrevive a un periodo de **n** años.

Podemos decir que **nEx** representa en el cálculo actuarial lo que V^n representa en el interés compuesto.

2.3 Anualidades

Son una serie de pagos periódicos que dependen de la sobrevivencia de una persona o de un grupo de vidas.

En este capítulo se analizarán las anualidades simples que representan una serie de dótales puros con vencimientos periódicos.

Las anualidades de vida simple se clasifican de acuerdo a:

- La fecha de inicio del intervalo de pago en relación al momento de contratación.
- Existen dos tipos la **ordinaria**(si el intervalo inicia al momento de contratación) y **diferida** (si empieza después de transcurrido un periodo preestablecido).
- La manera en que son realizados los pagos, existiendo dos casos, **anticipados**(si el pago se hace al inicio de cada periodo) y **vencidos**(si se realizan al final de cada periodo)
- De acuerdo a la temporalidad de los pagos, dividiendo en **vitalicias** (pagando mientras la persona este viva) y **temporales** (si esta vigente por un tiempo determinado)
- De acuerdo a la frecuencia de pago por periodo pagaderos una vez por periodo.
- De acuerdo a la tasa de los pagos pudiendo ser **constantes o niveladas** (si los pagos son iguales durante todo el intervalo de pago) y **variables** (en caso contrario)

En todas las anualidades descritas anteriormente se tomarán (dependiendo de cada grupo) la primera clasificación, salvo que se nos especifique lo contrario.

2.3.1 Anualidades pagaderas una vez por periodo

2.3.1.1 Anualidad vitalicia

Estará dada por una serie de pagos de $2.0 efectuados al final de cada año y continúan mientras x sobreviva, es llamada anualidad vitalicia.

a_x = Representa la prima neta única

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_x = \sum_{t=1}^{\infty} V^t \, {}_tP_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x}$$

Aquí hacemos uso de un valor conmutado:

$N_x = \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+t}$ $\qquad$ $N_{x+1} = \sum_{t=1}^{w-x} D_{x+t}$

Regresando tenemos:

$$a_x = \frac{1}{D_x} \{ D_{x+1} + D_{x+2} + \dots\dots\dots + D_w \}$$

$$\boxed{a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}}$$

2.3.1.2 Anualidad vencida temporal a n años.

Son los pagos de \$2.0 contingentes a la sobrevivencia de x al final de cada año mientras x sobreviva durante n años.

$$a_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_x = {}_1E_x + {}_2E_x + \dots\dots\dots + {}_nE_x$$

$$a_{x:\overline{n|}} = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \dots\dots\dots + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$a_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x} \{ \sum_{t=1}^{n} D_{x+t} \}$$

$$\boxed{a_{x:\overline{n|}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}}$$

2.3.1.3 Anualidad diferida n años.

Es aquella en la cual el intervalo de pagos contingentes a la sobrevivencia de **x** ha de empezar a correr después de transcurridos n años (n+1)

$$_{n/}a_x = \sum_{t=n+1}^{\infty} {}_tE_x = {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + \dots\dots\dots$$

$$_{n/}a_x = \frac{D_{x+n+1}}{D_x} + \frac{D_{x+n+2}}{D_x} + \dots\dots\dots$$

$$_{n/}a_x = \frac{1}{D_x} \left\{ \sum_{t=n+1}^{\infty} D_{x+t} \right\}$$

$$\boxed{_{n/}\mathbf{a}_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}}$$

Otra igualdad seria:

$$\boxed{_{n/}\mathbf{a}_x = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_{x:\overline{n|}}}$$

$$_{n/}a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} - \left(\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \right)$$

$$_{n/}a_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+1} + N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$_{n/}\mathbf{a}_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

2.3.1.4 Anualidad diferida a n años y temporal a m

Es una serie de pagos anuales a x que empiezan a pagarse a la edad x+n+1 y continua durante m años si x sobrevive.

$$_{n/m}a_x = \sum_{t=n+1}^{n+m} {}_tE_x = {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + \dots\dots\dots + {}_{n+m}E_x$$

$$_{n/m}a_x = \frac{D_{x+n+1}}{D_x} + \frac{D_{x+n+2}}{D_x} + \dots\dots + \frac{D_{x+n+m}}{D_x}$$

$$_{n/m}a_x = \frac{1}{D_x} \left\{ \sum_{t=n+1}^{n+m} D_{x+t} \right\}$$

$$n/m\,a_x = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}}{D_x}$$

$$\boxed{n/m\,a_x = n/a_x - n{+}m/a_x}$$

2.3.1.5 Anualidades anticipadas

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$n/\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

$$n/m\,\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x}$$

2.3.1.6 Otras equivalencias

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + a_{x:\overline{n-1|}}$$

$$n/\ddot{a}_x = n{-}1/a_x$$

$$n/m\,\ddot{a}_x = n{-}1/m\,a_x$$

2.3.2 Anualidades pagaderas m veces al año.

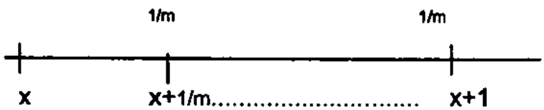
En la práctica las anualidades de vida son pagaderas en forma mensual, trimestral, cuatrimestral. Un ejemplo de ello son el pago de pensiones que se hace en forma mensual. Por lo cual, resulta importante determinar la **PNU** de anualidades de este tipo, donde **m** es cualquier entero.

La notación a utilizar en este tipo de anualidades es el agregar **(m)** que indicará que la renta es pagadera m veces por periodo.

Comenzaremos por analizar:

2.3.2.1 Anualidad unitaria pagadera m veces al año.

$a^{(m)}_x$ Que denotará el valor presente de una anualidad unitaria pagadera m veces al año: los pagos son de 1/m cada m-esimo de tiempo.



$$a^{(m)}_x = 1/m\sum_{t=1}^{\infty} {}_{t/m}E_x = \frac{1/m}{D_x}\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t/m}$$

Tendremos que hacer uso de una serie de Woolhouse

$$1/m\sum_{t=0}^{\infty} f_{t/m} = \sum_{t=0}^{\infty} f_t - \frac{m-1}{2m} f_0 + \frac{m^2-1}{12\,m^2} f'_0 - \frac{m^4-1}{720\,m^4} f'''_0$$

Utilizándola tenemos:

$$a^{(m)}_x = \frac{1}{D_x}\left(\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t} + \frac{m-1}{2m} D_x + \frac{m^2-1}{12m^2} D'_x - \dots\right)$$

El signo del segundo miembro cambia ya que la sumatoria original comienza un periodo después.

Significativamente tomaremos únicamente los dos primeros sumandos.

$$\boxed{\ddot{a}^{(m)}_x = \ddot{a}_x + \frac{m-1}{2m}}$$

2.3.2.2 Anualidades diferidas pagaderas m veces al año

$$n/\ddot{a}^{(m)}_x = 1/m \sum_{t=n+1}^{\infty} t/mEx = \frac{1/m}{Dx} \sum_{t=n+1}^{\infty} Dx+t/m$$

Recordemos la serie de Woolhouse:

$$1/m \sum_{t=0}^{\infty} f_{t/m} = \sum_{t=0}^{\infty} f_t - \frac{m-1}{2m} f_0 + \frac{m^2-1}{12\,m^2} f'_0 - \frac{m^4-1}{720\,m^4} f'''_0$$

Utilizándola tenemos:

$$n/\ddot{a}^{(m)}_x = \frac{1}{Dx} \left(\sum_{t=n+1}^{\infty} Dx+t + \frac{m-1}{2m} Dx+t\,|_{t=n} + \ldots\ldots \right)$$

$$n/\ddot{a}^{(m)}_x = \frac{1}{Dx} \left(\sum_{t=n+1}^{\infty} Dx+t + \frac{m-1}{2m} Dx+n \right)$$

Con lo cual obtenemos:

$$\boxed{n/\ddot{a}^{(m)}_x = \frac{Nx+n+1}{Dx} + \frac{m-1}{2m}\,\frac{Dx+n}{Dx}}$$

Lo cual es lo mismo:

$$\boxed{n/\ddot{a}^{(m)}_x = n/\ddot{a}_x + \frac{m-1}{2m}\, nEx}$$

Otras equivalencias:

$$\boxed{n/\ddot{a}^{(m)}_x = nEx\, \ddot{a}^{(m)}_{x+n} = nEx\left(\ddot{a}_{x+n} + \frac{m-1}{2m}\right)}$$

2.3.2.3 Anualidad temporal a n años pagadera m veces al año

Siguiendo la estructura de las anualidades vistas en la sección anterior, tenemos la siguiente igualdad:

$$\boxed{a^{(m)}{}_{x:\,n|} = a^{(m)}{}_x - n/a^{(m)}{}_x}$$

$$= \left(a_x + \frac{m-1}{2m}\right) - \left(n/a_x + \frac{m-1}{2m}\, nE_x\right)$$

$$\boxed{a^{(m)}{}_{x:\,n|} = a_{x:\,n|} + \frac{m-1}{2m}\left(1 - nE_x\right)}$$

2.3.2.4 Las anualidades anticipadas pagaderas m veces al año

Siguiendo el orden de las anualidades vistas en la sección anterior:

$$\ddot{a}^{(m)}{}_x = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$n/\ddot{a}^{(m)}{}_x = n/\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\, nE_x$$

$$\ddot{a}^{(m)}{}_{x:\,n|} = \ddot{a}_{x:\,n|} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - nE_x\right)$$

2.3.3 Anualidades continuas

Son aquellas donde la serie de pagos son infinitamente pequeños efectuados a intervalos infinitamente pequeños. Podría pensarse que este tipo de anualidades es un caso particular de las anualidades pagaderas m veces al año, donde m crece hacia el infinito.

Debemos proceder a calcular la **PNU**

2.3.3.1 Anualidad continua vitalicia.

Apliquemos el límite a la anualidad vitalicia pagadera m veces al año.

$$\bar{a}_x = \lim_{m\to\infty} a^{(m)}{}_x = a_x + \tfrac{1}{2}$$

$$\boxed{\bar{a}_x = a_x + \tfrac{1}{2}}$$

2.3.3.2 Anualidad continua temporal

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \lim_{m\to\infty} a^{(m)}{}_{x:\overline{n|}} = a_{x:\overline{n|}} + \tfrac{1}{2}(1-{}_nE_x)$$

$$\boxed{\bar{a}_{x:\overline{n|}} = a_{x:\overline{n|}} + \tfrac{1}{2}(1-{}_nE_x)}$$

2.3.3.3 Anualidad continua diferida

$$n/\bar{a}_x = \lim_{m\to\infty} n/a^{(m)}{}_x = n/a_x + \frac{1}{2}\,{}_nE_x$$

$$\boxed{n/\bar{a}_x = n/a_x + \tfrac{1}{2}\,{}_nE_x}$$

2.3.3.4 Otras expresiones

También pueden calcularse este tipo de anualidades por medio de integrales. Retomemos la sumatoria de las anualidades pagaderas m veces al año y apliquemos el limite cuando m tiende a infinito

Anualidad vitalicia continua

$$\bar{a}_x = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t/m}E_x$$

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} {}_tE_x \, dt = \int_0^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x} dt = \int_0^{\infty} V^t \, {}_tP_x \, dt$$

$$\boxed{\bar{a}_x = \int_0^{\infty} V^t \, {}_tP_x \, dt}$$

Ahora definamos dos conmutados:

$$\bar{D}_x = \int_0^{1} D_{x+t} \, dt$$

$$\bar{N}_x = \int_0^{\infty} D_{x+t} \, dt$$

Por lo que ya estaremos en condiciones de representar esta anualidad continua:

$$\bar{a}_x = \frac{\bar{N}_x}{D_x}$$

En la práctica se definen los valores de **Dx** y **Nx**, suponiendo un comportamiento líneal de **Dx+t** en el intervalo $0 \leq t \leq 2$. Por lo que tenemos:

$$\bar{D}_x = D_{x+½} = ½ (D_x + D_{x+1}) = \int_0^{1} D_{x+t} \, dt$$

$$\bar{N}_x = ½ (N_x + N_{x+1}) = N_{x+1} + ½ D_x = N_x - ½ D_x = \int_0^{\infty} D_{x+t} \, dt$$

También podemos dar las expresiones de las **Anualidades Continuas Diferidas y Temporales:**

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^{n} V^t \, {}_tP_x \, dt = \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}}{D_x}$$

$$n / \bar{a}x = \int_n^{\infty} V^t \; tPx \; dt = \frac{\bar{N}x{+}n}{Dx}$$

$$n/m\bar{a}x = \int_n^{n+m} V^t \; tPx \; dt = \frac{\bar{N}x{+}n - \bar{N}x{+}n{+}m}{Dx}$$

2.3.3.5 Otros resultados importantes

Pueden darse dos casos:

$$\bar{N}x = \int_x^{\infty} Dy \; dy$$

$$\frac{d\bar{N}x}{dx} = - Dx$$

$$\bar{N}x = \int_0^{x} Dy \; dy$$

$$\frac{d\bar{N}x}{dx} = Dx$$

2.3.4 Anualidades variables

Existen anualidades bajo las cuales, el monto del pago varia de tiempo en tiempo.

Se da como la combinación de anualidades.

2.3.4.1 Anualidad Vitalicia Creciente

(Ia)x denota el valor presente a edad **x** que proporciona pagos de **\$2.0** a edad **x+1,\$2.0** a edad **x+2,+....+.** Incrementandose en **\$2.0** para cada año que **(x)** sobrevive.

$$(Ia)x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t/}a_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Nx+t+1}{Dx}$$

Desarrollando la sumatoria tenemos:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{N\,x+t+1}{Dx} = \frac{N\,x+1}{Dx} + \frac{N\,x+2}{Dx} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\boxed{(Ia)x = ax + 2ax + 3ax + \ldots\ldots}$$

Ahora definamos otro valor conmutado:

$$Sx = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N\,x+t}{Dx} = \frac{Nx}{Dx} + \frac{Nx+1}{Dx} + \frac{Nx+2}{Dx} + \ldots\ldots$$

$$Sx+1 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{N\,x+t}{Dx} = \frac{Nx+1}{Dx} + \frac{Nx+2}{Dx} + \ldots\ldots$$

Por lo que ya podemos dar una expresión para:

$$\boxed{(Ia)x = \frac{S\,x+1}{Dx}}$$

2.3.4.2 Anualidad Temporal Creciente

Es aquella donde los pagos crecientes cesan en el **n**-esimo pago de **\$n.0**

$$(Ia)x{:}\overline{n|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/n-t}\,a_x = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{Nx+t+1 - Nx+n+1}{Dx}$$

Desarrollando la sumatoria tenemos:

$0/n\ddot{a}x + 1/n\text{-}1\ddot{a}x + 2/n\text{-}2\ddot{a}x + \ldots + n\text{-}1/1\ddot{a}x$

$$\frac{Nx+0+1 - Nx+0+n+1}{Dx} + \frac{Nx+1+1 - Nx+1+n-1+1}{Dx} + \frac{Nx+2+1 - Nx+2+n-2+1}{Dx} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{Nx+n-1+1 - Nx+n-1+1+1}{Dx}$$

Simplificando :

$$\frac{Nx+1 - Nx+n+1}{Dx} + \frac{Nx+2 - Nx+n+1}{Dx} + \frac{Nx+3 - Nx+n+1}{Dx} + \ldots\ldots + \frac{Nx+n - Nx+n+1}{Dx}$$

Tomemos los primeros sumandos y Reexpresemos:

$Nx+1 + Nx+2 + Nx+3 + \ldots\ldots + Nx+n$

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{N\,x+t}{Dx} = \frac{S\,x+1 - S\,x+n+1}{Dx}$$

$$\boxed{(\mathbf{I\ddot{a}})\mathbf{x{:}n|} = \frac{\mathbf{S\,x+1 - S\,x+n+1 - nN\,x+n+1}}{\mathbf{Dx}}}$$

2.3.4.3 Otro tipo de Anualidades

Otro tipo de anualidad creciente es aquella que proporciona incrementos de \$2.0 cada año hasta que en el n-esimo pago, los pagos serán constantes por el resto de la vida (x).

Convencionalmente no tiene un nombre determinado.

$$(In|\ddot{a})x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t}/\,\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{Nx+t+1}{Dx}$$

Desarrollando tenemos:

$0/\ddot{a}x + 1/\ddot{a}x + 2/\ddot{a}x + \ldots + n\text{-}1/\ddot{a}x$

$$\frac{Nx+1}{Dx} + \frac{Nx+2}{Dx} + \frac{Nx+3}{Dx} + \ldots\ldots + \frac{Nx+n}{Dx}$$

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{Nx+t}{Dx} = \frac{Sx+1 - Sx+n+1}{Dx}$$

Por lo que tenemos ya una expresión para:

$$\boxed{(I n| a)x = \frac{Sx+1 - Sx+n+1}{Dx}}$$

2.3.4.4 Anualidad Temporal Decreciente

Proporciona un pago de **\$n.0** a edad **x+1,\$n-1** a edad **x+2.........** y así sucesivamente decrece un **\$2.0** cada año, cesando al **n**-esimo pago de **\$2.0.**
Este tipo de anualidades puede expresarse en términos de una suma de **n** anualidades temporales niveladas.

$$(Da)x{:}n| = \sum_{t=1}^{n} ax : t| = \sum_{t=1}^{n} \frac{Nx+1 - Nx+t+1}{Dx}$$

$$ax : 1| + ax : 2| + ax : 3| + \ldots + ax : n|$$

$$\frac{Nx+1 - Nx+2}{Dx} + \frac{Nx+1 - Nx+3}{Dx} + \ldots\ldots + \frac{Nx+1 - Nx+n+1}{Dx}$$

$$nNx+1 - \left(\sum_{t=2}^{n+1} \frac{Nx+t}{Dx} \right)$$

$$\boxed{(Da)x{:}n| = \frac{nNx+1 - (Sx+2 - Sx+n+2)}{Dx}}$$

Se pueden obtener sus homologas pero anticipadas

2.3.4.5 Anualidades Crecientes Anticipadas

Anualidad vitalicia anticipada creciente.

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t}/\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_{x+t}}{D_x}$$

Desarrollando la sumatoria tenemos:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_{x+t}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} + \frac{N_{x+1}}{D_x} + \ldots\ldots\ldots$$

Ahora definamos otro valor conmutado:

$$S_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_{x+t}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} + \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{N_{x+2}}{D_x} + \ldots\ldots$$

Por lo que ya podemos dar una expresión para:

$$\boxed{(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x}}$$

Anualidad Temporal Anticipada Creciente

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t}/_{n-t}\,\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{n-1} \underline{N_{x+t} - N_{x+n}}$$

Vayamos directamente a la sumatoria de los conmutados:

$$\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} + \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} + \ldots\ldots + \frac{N_{x+n-1} - N_{x+n}}{D_x}$$

Tomemos los primeros sumandos:

$$N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots\ldots + N_{x+n-1} - nN_{x+n}$$

$$\sum_{t=0}^{n-1} N_{x+t} = S_x - S_{x+n}$$

Regresando tenemos:

$$\boxed{(Ia^{\circ\circ})x{:}\overline{n|} = \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x}}$$

Otro tipo de Anualidad Anticipada Creciente

$$(I\overline{n|}\,a^{\circ\circ})x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t/}a^{\circ\circ}_x = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{N_{x+t}}{D_x}$$

Enfocando directamente en los conmutados tenemos:

$$\frac{N_x}{D_x} + \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{N_{x+2}}{D_x} + \ldots\ldots + \frac{N_{x+n-1}}{D_x}$$

$$\sum_{t=0}^{n-1} N_{x+t} = S_x - S_{x+n}$$

Por lo que tenemos ya una expresión para:

$$\boxed{(I\overline{n|}\,a^{\circ\circ})x = \frac{S_x - S_{x+n}}{D_x}}$$

Anualidad Temporal Anticipada Decreciente

$$(Da^{\circ\circ})x{:}\overline{n|} = \sum_{t=1}^{n} a^{\circ\circ}x:\overline{t|} = \sum_{t=1}^{n} \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}$$

$$\frac{N_x - N_{x+1}}{D_x} + \frac{N_x - N_{x+2}}{D_x} + \ldots\ldots + \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$nN_x - \left(\sum_{t=1}^{n} N_{x+t}\right)$$

$$\boxed{(Da^{\circ\circ})x{:}\overline{n|} = \frac{nN_x - (S_{x+1} - S_{x+n+1})}{D_x}}$$

2.3.5 Anualidades Variables Pagaderas m Veces por Periodo

Existen dos casos:

El primero se da cuando la tasa de pago es constante durante el año. Haciendo el pago anual total en m pagos iguales. Los incrementos o decrementos ocurren al principio o al final del año.

La denotamos por:

$$(Ia^{(m)})x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t}/a^{(m)}_{x} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Nx+t+1}{Dx} + \frac{m-1}{2m}\frac{Dx+t}{Dx}$$

Desarrollando la sumatoria tenemos:

$${}_{0}/a^{(m)}_{x} + {}_{1}/a^{(m)}_{x} + {}_{2}/a^{(m)}_{x} + \ldots\ldots$$

$${}_{0}/a_{x} + \frac{m-1}{2m}\frac{Dx+0}{Dx} + {}_{1}/a_{x} + \frac{m-1}{2m}\frac{Dx+1}{Dx} + {}_{2}/a_{x} + \frac{m-1}{2m}\frac{Dx+2}{Dx} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{Nx+1}{Dx} + \frac{m-1}{2m}\frac{Dx}{Dx} + \frac{Nx+2}{Dx} + \frac{m-1}{2m}\frac{Dx+1}{Dx} + \frac{Nx+3}{Dx} + \frac{m-1}{2m}\frac{Dx+2}{Dx} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} Nx+t = Sx+1$$

Por otro lado:

$$\frac{m-1}{2m}\left(\sum_{t=0}^{\infty} Dx+t\right) = \frac{m-1}{2m}(Nx)$$

Regresando podemos dar una expresión para:

$$\boxed{(Ia^{(m)})x = \frac{Sx+1 + \frac{m-1}{2m.} Nx}{Dx}}$$

Otra expresión sería:

$$(Ia^{(m)})x = \frac{Sx+1}{Dx} + \frac{m-1\ Nx}{2m.\ Dx} \quad .$$

Con lo cual resulta

$$\boxed{(Ia^{(m)})x = (Ia)x + \frac{m-1}{2m.}\, a^{\circ\circ}x \quad .}$$

El segundo caso a analizar se presenta cuando la tasa de pago crece o decrece m veces al año y el pago anual total es hecho en m pagos anuales.

Analicemos este caso de la siguiente forma:

Consideremos que tenemos una anualidad creciente que es pagadera a tasa de 1/m por año al final de los primeros 1/m.2/m por año al final de los segundos 1/m de años y así sucesivamente.
Si esta anualidad es emitida a edad x, el primer pago vencido a edad x+1/m será de $1/m^2$, como este pago cubre un periodo de 1/m años y la tasa de pago durante este primer periodo es de 1/m por año. El segundo pago a edad x+2/m será de $2/m^2$ y así continua.

La forma en que va a ser representada esta dada por:

$$(I^{(m)}a)^{(m)}x = \frac{1}{m^2} \sum_{t=1}^{\infty} t\, \frac{Dx + t/m}{Dx}$$

$$\frac{1}{Dx}\left(\frac{1}{m^2} \sum_{t=1}^{\infty} t\, Dx+t/m \right)$$

Aplicando la formula de Woolhouse obtenemos:

$$\frac{1}{Dx}\left(\sum_{t=1}^{\infty} t\, Dx+t + \frac{m-1}{2m} (t\, Dx+t)_{t=0} + \frac{m^2-1}{12m^2} \left(\frac{d}{dt}(tDx+t)_{t=0} + \ldots\ldots \right)\right.$$

Como $\frac{d}{dt}(tD_{x+t})\Big|_{t=0} = D_x$ (Hay que recordar que es la derivada de un producto)

El segundo miembro de la sumatoria da (0)

$$\frac{1}{D_x}\left(\sum_{t=1}^{\infty} t\,D_{x+t} + \frac{m^2-1}{12m^2} D_x\right)$$

Desarrollando la primera sumatoria tenemos:

$$\sum_{t=1}^{\infty} t\,D_{x+t} = D_{x+1} + 2D_{x+2} + 3D_{x+3} + 4D_{x+4} + \ldots\ldots$$

Que es lo mismo

$$\begin{aligned}
D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4} + \ldots\ldots\ldots\ldots &= N_{x+1}\\
+ D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4} + \ldots\ldots\ldots\ldots &= N_{x+2}\\
+ D_{x+3} + D_{x+4} + \ldots\ldots\ldots\ldots &= N_{x+3}
\end{aligned}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} N_{x+t} = S_{x+1}$$

Regresando tenemos:

$$(I^{(m)}a)^{(m)}_x = \frac{1}{D_x}\left(S_{x+1} + \frac{m^2-1}{12m^2} D_x\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}
(I^{(m)}a)^{(m)}_x &= \frac{S_{x+1}}{D_x} + \frac{m^2-1}{12m^2}\\
(I^{(m)}a)^{(m)}_x &= (Ia)_x + \frac{m^2-1}{12m^2}
\end{aligned}}$$

2.3.6 Anualidades variables continuas

2.3.6.1 Anualidad vitalicia creciente continua

Representa el valor presente de una anualidad creciente continua, la cual proporciona el pago de $2.0 pagadero a cada momento del primer año, el pago de $2.0 pagadero a cada momento del segundo año y así sucesivamente, permaneciendo constante la tasa de pago durante cada año.

Aplicando el límite a la anualidad variable

$(I\bar{a})_x = \lim_{m\to\infty} (Ia)^{(m)}_x$

Este tipo de anualidades puede ser escrita como una suma de anualidades continuas niveladas y diferidas.

$$(I\bar{a})_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t}/\bar{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\bar{N}_{x+t}}{D_x}$$

$${}_0/\bar{a}_x + {}_1/\bar{a}_x + {}_2/\bar{a}_x + \ldots\ldots$$

Nosotros sabemos que:

$$ {}_{n}/\bar{a}_x = \frac{\bar{N}_{x+n}}{D_x}$$

Desarrollando tenemos:

$$\frac{\bar{N}_x}{D_x} + \frac{\bar{N}_{x+1}}{D_x} + \frac{\bar{N}_{x+2}}{D_x} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \bar{N}_{x+t} = \bar{S}_x$$

Regresando obtenemos:

$$\boxed{(I\bar{a})_x = \frac{\bar{S}_x}{D_x}}$$

Otra expresión homologa se puede obtener a partir de la siguiente expresión:

$(I\bar{a})_x = \lim_{m\to\infty} (Ia)^{(m)}_x$

Aplicando el límite tenemos:

$$(I\bar{a})_x = \lim_{m\to\infty} S_{x+1} + \frac{m}{2m} - \frac{1}{2m} N_x$$

$$(\bar{Ia})_x = \frac{S_{x+1} + \frac{1}{2} N_x}{D_x}$$

Otra podría ser:

$$(\bar{Ia})_x = \frac{S_x - \frac{1}{2} N_x}{D_x}$$

En términos de anualidades:

$$(\bar{I}\bar{a})_x = (I\bar{a})_x + \frac{1}{2}\, \ddot{a}_x$$

$$(\bar{I}\bar{a})_x = (I\ddot{a})_x - \frac{1}{2}\, \ddot{a}_x$$

De estos resultados se puede concluir que:

$$\bar{S}_x = S_{x+1} + \frac{1}{2} N_x = S_x - \frac{1}{2} N_x$$

2.3.6.2 Otro tipo de anualidad creciente continua

Se encuentra dentro de aquellas donde la tasa de pago crece durante cada año:

$$(\bar{I}\bar{a})_x = \lim\, (I^{(m)}a)^{(m)}{}_x$$

$$\int_0^{\infty} t\, v^t\; {}_tP_x\, dt$$

$$\frac{1}{D_x} \int_0^{\infty} t\, D_{x+t}\, dt$$

Otra expresión se obtiene sacando directamente el límite:

$$\lim_{m\to\infty} (I^{(m)}a)^{(m)}{}_x = (I\bar{a})_x + \frac{1}{12}$$

CAPITULO III

CAPITULO III

SEGUROS

3.1 Introducción

Un contrato de seguros es aquel que garantiza el pago de una suma especifica a la muerte o al acontecimiento de cualquier contingencia de la vida de una persona, llamada asegurado.

Las funciones descritas en el capítulo anterior corresponden a una serie de pagos sujetos a la sobrevivencia de una persona.

En este capítulo nos ocuparemos del desarrollo de fórmulas que determinen el valor presente (P.N.U) de un pago contingente a la muerte de una persona (asegurado) comúnmente conocido como seguro de muerte o simplemente seguro, aun cuando las anualidades constituyen seguros sobre la vida.

3.2 Clasificación del Seguro

Los seguros tienen la siguiente clasificación:

- **Al inicio de la cobertura:**

Ordinarios si se inicia en la fecha de contratación.

Diferidos si debe transcurrir un determinado tiempo para que entre en vigor el seguro.

- **La temporalidad de la cobertura:**

Temporales si la cobertura es únicamente por un determinado periodo.

Vitalicio en caso contrario.

- **La variabilidad de la suma asegurada respecto al tiempo:**

Constantes si la suma asegurada es siempre la misma.

Variables en otro caso.

- **Forma de pago:**

Pagaderos al final del año de fallecimiento o en el momento que ocurre el fallecimiento.

Tabla de la clasificación del seguro

Inicio de la cobertura	**Temporalidad de la cobertura**	**Forma de pago**	**La tasa de pago**
Ordinarios	Vitalicios	Pagaderos al final del año del deceso	Constantes
Diferidos	Temporales	Pagaderos en el momento del deceso	Variables

Tenemos el seguro **Dotal Mixto** que resulta de una combinación de una anualidad y un seguro.

Para determinar la **P.N.U** se hacen las siguientes suposiciones.

- La edad de calculo es entera.
- La mortalidad se comporta de acuerdo a la tabla adoptada.
- La compañía invierte los fondos a la tasa estipulada.

En la vida real, la edad se obtiene como la más cercana a la edad del cumpleaños del asegurado, facilitando con ello, los cálculos derivados de la tabla de mortalidad.

3.2.1 Seguros pagaderos al final del año de fallecimiento.

En la práctica el pago de la suma asegurada se lleva a cabo inmediatamente después de que se comprueba la muerte del asegurado.

Aunque de manera técnica los seguros han sido calculados bajo el supuesto de que el pago de la suma asegurada se efectúa al final del año en que ocurre la muerte.

Salvo que se indique, se supondrá que la suma asegurada será pagada al final del año en que ocurre el fallecimiento del asegurado y será de una unidad monetaria.

3.2.1.1 Seguro vitalicio.

Es aquel que garantiza el pago de la suma asegurada al final del año en que fallezca **(x)** en cualquier tiempo que esto suceda, es conocido como seguro vitalicio de vida completa u Ordinario de Vida **(OV)**.

Veamos el siguiente análisis

Supongamos:

lx = contratan a la vez este tipo de seguro.
dx=durante el primer año del aseguramiento fallezcan (**dx**) personas.
$=deberá pagarse **dx** unidades monetarias al finalizar el año, por concepto de reclamaciones

dx+1 = fallezcan (**dx+1**)
$= se pagará (**dx+1**) por reclamaciones y así continuamos.

El valor presente de las reclamaciones constituyen el compromiso del asegurador que deberá ser igual a los compromisos de los asegurados.

Analicemos:

$$lxAx = Vdx + V^2dx+1 + V^3\,dx+2+........$$

$$Ax = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\,\frac{dx+t}{lx}$$

$$Ax = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\,t/qx$$

sabemos que

$$t/qx = \frac{lx+t - lx+t+1}{lx} = \frac{dx+t}{lx}$$

Definamos lo siguiente:

$$\boxed{\mathbf{Cx = V^{x+1}\,dx}}$$

$Cx{+}t = V^{x+t+1}\, dx{+}t$

$\mathbf{Mx = \sum_{t=0}^{\infty} Cx{+}t}$

Multiplicamos y dividimos por V^x

$$Ax = \sum_{t=0}^{\infty} V^{x+t+1} \frac{dx+t}{V^x\, lx}$$

$$Ax = \sum_{t=0}^{\infty} V^{x+t+1} \frac{dx+t}{Dx}$$

Utilizamos el nuevo conmutado.

$$Ax = \sum_{t=0}^{\infty} V^{x+t+1} \frac{dx+t}{Dx}$$

$$Ax = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Cx+t}{Dx}$$

$\mathbf{Ax = \frac{Mx}{Dx}}$

3.2.1.2 Seguro temporal

Es aquel que garantiza el pago de la suma asegurada únicamente si la muerte ocurre dentro de un periodo limitado.

Si el seguro es de n años denotaremos la **P.N.U** como:

$$lx\overset{!}{A}x{:}\overline{n|} = Vdx + V^2dx{+}1 + V^3\, dx{+}2{+}\ldots\ldots + V^n\, dx{+}n{-}1$$

$$\overset{!}{A}x{:}\overline{n|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{t+1} \frac{dx+t}{lx}$$

$$\overset{!}{A}x\ {:}\overline{n|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{t+1}\, t/qx$$

Multiplicamos y dividimos por V^x

$$\overset{1}{A}x :\overline{n|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{x+t+1} \frac{dx+t}{V^x\, lx}$$

$$\overset{1}{A}x :\overline{n|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{x+t+1} \frac{t/qx}{Dx}$$

Utilizamos el nuevo conmutado.

$$\overset{1}{A}x :\overline{n|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{Cx+t}{Dx}$$

$$\boxed{\overset{1}{\mathbf{A}}\mathbf{x} :\overline{n|} = \frac{\mathbf{Mx - Mx+n}}{\mathbf{Dx}}}$$

3.2.1.3 Seguro dotal Mixto.

En este seguro se garantiza el pago de la suma asegurada al final del año en que ocurre el fallecimiento, siempre que este ocurra dentro de un periodo preestablecido, o al final de dicho periodo, si el asegurado permanece aun con vida.

Si el término del seguro es de n años y denotamos **Ax:n|** la **P.N.U** de esta póliza e igualamos compromisos tenemos:

$$lxAx:\overline{n|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{t+1}\, dx+t + V^n\, lx+n$$

$$Ax:\overline{n|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{t+1} \frac{t/qx}{lx} + \frac{V^n\, lx+n}{lx}$$

Multiplicamos y dividimos por V^x

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{x+t+1} \frac{d_{x+t}}{V^x l_x} + \frac{V^{x+n} l_{x+n}}{V^x l_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{x+t+1} \frac{t/q_x}{D_x}$$

Utilizamos el nuevo conmutado:

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{C_{x+t}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Denotamos:

$$\mathbf{\frac{D_{x+n}}{D_x} = \overset{!}{A}_{x:\overline{n}|}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \mathbf{A_{x:\overline{n}|} = \overset{!}{A}_{x:\overline{n}|} + \overset{!}{A}_{x:\overline{n}|}} \\ \mathbf{A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}} \end{gathered}}$$

3.2.1.4 Seguro diferido

Son aquellos en los que las obligaciones de la compañía entran en vigor después de un periodo preestablecido. Es decir, la suma asegurada podrá ser exigible sólo si el asegurado fallece después de un determinado periodo (periodo de diferimiento) y dentro del termino de vigencia del seguro.

La **P.N.U** de un seguro **O.V** diferido n años estará dada por:

$$l_x\,{}_{n/}A_x = V^{n+1} d_{x+n} + V^{n+2} d_{x+n+1} + \ldots\ldots$$

$${}_{n/}A_x = \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x}$$

$${}_{n/}A_x = \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1}\, t/q_x$$

Multiplicamos y dividimos por V^x

$$n/Ax = \sum_{t=n}^{\infty} \frac{V^{x+t+1}}{V^x} \frac{dx+t}{lx}$$

$$n/Ax = \sum_{t=n}^{\infty} V^{x+t+1} \frac{dx+t}{Dx}$$

Utilizamos el nuevo conmutado.

$$n/Ax = \sum_{t=n}^{\infty} \frac{Cx+t}{Dx}$$

$$\boxed{n/Ax = \frac{Mx+n}{Dx}}$$

Ahora veamos el:

3.2.1.5 Seguro temporal a m años y diferido a n años.

$$n/mAx = n/A\overset{!}{x}:m|$$

$$lxn/A\overset{!}{x}:m| = V^{n+1}\, dx+n + V^{n+2}\, dx+n+1 + \ldots\ldots + V^{n+m}\, dx+n+m-1$$

$$n/A\overset{!}{x}:m| = \sum_{t=n}^{n+m-1} V^{t+1} \frac{dx+t}{lx}$$

$$n/A\overset{!}{x}:m| = \sum_{t=n}^{n+m-1} V^{t+1}\, t/qx$$

Multiplicamos y dividimos por V^x

$$n/A\overset{!}{x}:m| = \sum_{t=n}^{n+m-1} \frac{V^{x+t+1}}{V^x} \frac{dx+t}{lx}$$

$$n/A\overset{!}{x}:m| = \sum_{t=n}^{n+m-1} V^{x+t+1} \frac{dx+t}{Dx}$$

Utilizamos el nuevo conmutado.

$$\overset{!}{n/Ax:m|} = \sum_{t=n}^{n+m-1} \frac{Cx+t}{Dx}$$

$$\overset{!}{n/Ax:m|} = \frac{Mx+n-Mx+n}{Dx}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \overset{!}{n/Ax:m|} = \dfrac{Mx+n}{Dx} - \dfrac{Mx+n+m}{Dx} \\ \\ \overset{!}{n/Ax:m|} = n/Ax - \ n+mAx \end{array}}$$

3.2.1.6 El seguro dotal a m años diferido n años

$$n/Ax:m| = \sum_{t=n}^{n+m-1} V^{t+1} \frac{dx+t}{lx} + \frac{V^{n+m}\, lx+n+m}{lx}$$

$$n/Ax:m| = \sum_{t=n}^{n+m-1} V^{t+1}\, t/qx + \frac{V^{n+m}\, lx+n+m}{lx}$$

Multiplicamos y dividimos por V^x

$$n/Ax:m| = \sum_{t=n}^{n+m-1} V^{x+t+1} \frac{dx+t}{V^x\, lx} + \frac{V^{x+n+m}\, lx+n+m}{V^x\, lx}$$

$$n/Ax:m| = \sum_{t=n}^{n+m-1} V^{x+t+1} \frac{dx+t}{Dx} + \frac{V^{x+n+m}\, lx+n+m}{Dx}$$

Utilizamos el nuevo conmutado.

$$n/Ax:m| = \sum_{t=n}^{n+m-1} \frac{Cx+t + Dx+n+m}{Dx}$$

Recordemos que definimos:

$$\frac{Dx+n}{Dx} = \overset{!}{Ax:n|}$$

Por lo que finalmente nuestra expresión requerida es:

$$\boxed{n/Ax:m| = \frac{Mx+n-Mx+n+m+Dx+n+m}{Dx}}$$

$$\boxed{n/Ax:m| = n/\overset{!}{Ax:m|} + nEx\ \overset{!}{Ax+n:m|}}$$

3.2.2 Relaciones entre seguros y anualidades

Tomemos nuestros nuevos conmutados definidos en este capítulo y desarrollemos:

$Cx = V^{x+1}\ dx$

Poniendo en otros términos nuestra expresión tenemos:

$Cx = V^{x+1}\ (\ lx - lx+1\ )$

Distribuyendo:

$Cx = V^{x+1}\ lx - V^{x+1}\ \ lx+1$

$$\boxed{Cx = V\ Dx - Dx+1}$$

Ahora veamos el otro conmutado:

$Mx = \sum_{t=0}^{\infty} Cx+t$

$Mx = \sum_{t=0}^{\infty} Cx+t = \sum_{t=0}^{\infty} (V\ Dx+t - Dx+t+1) = VNx - Nx+1$

Por lo que nuestra nueva relación es:

$$\boxed{Mx = VNx - Nx+1}$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en las primas netas únicas de seguros obtenemos las equivalencias entre anualidades y seguros.

Comencemos:

3.2.2.1 Seguro vitalicio.

$$Ax = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} \frac{dx+t}{lx}$$

$$Ax = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\ t/qx$$

Sabemos que:

$$t/qx = \frac{lx+t - lx+t+1}{lx} = \frac{dx+t}{lx}$$

Sustituyamos nuestra expresión anterior correspondiente a t/qx

$$Ax = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} \left(\frac{lx+t - lx+t+1}{lx}\right)$$

$$Ax = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} \left(\frac{lx+t}{lx}\right) - \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} \left(\frac{lx+t+1}{lx}\right)$$

$$Ax = V \sum_{t=0}^{\infty} V^{t} \left(\frac{lx+t}{lx}\right) - \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} \left(\frac{lx+t+1}{lx}\right)$$

Multiplicamos y dividimos ambos miembros por V^x

$$Ax = V \sum_{t=0}^{\infty} V^{x+t} \left(\frac{lx+t}{V^x\ lx}\right) - \sum_{t=0}^{\infty} V^{x+t+1} \left(\frac{lx+t+1}{V^x\ lx}\right)$$

$$Ax = V \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Dx+t}{Dx} - \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{Dx+t+1}{Dx}\right)$$

$$Ax = \frac{VNx - Nx+1}{Dx}$$

$$\boxed{Ax = V\ddot{a}x - ax}$$

Otra forma de obtenerlo y más sencilla, es sustituir la equivalencia de nuestro conmutado en el resultado final:

$$Ax = \frac{Mx}{Dx}$$

$$Ax = \frac{Mx}{Dx} = \frac{VNx - Nx+1}{Dx}$$

Obteniendo finalmente:

$$\mathbf{Ax = V\ddot{a}x - ax}$$

Otra expresión podría encontrarse a partir de que $ax = \ddot{a}x - 1$

$$Ax = V\,\ddot{a}x - (\ddot{a}x - 1)$$

$$Ax = V\,\ddot{a}x - \ddot{a}x + 1$$

$$Ax = \ddot{a}x\,(V - 1) + 1$$

$$Ax = 1 - (1 - V)\,\ddot{a}x$$

Sabemos que $1 - V = dx$

$$\boxed{Ax = 1 - dx\,\ddot{a}x}$$

3.2.2.2 Seguro temporal

Vayamos directamente a los conmutados.

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{(VN_x - N_{x+1}) - (VN_{x+n} - N_{x+n+1})}{D_x}$$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{(VN_x - VN_{x+n}) - (N_{x+1} - N_{x+n+1})}{D_x}$$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{V(N_x - N_{x+n})}{D_x} - \frac{(N_{x+1} - N_{x+n+1})}{D_x}$$

$$\boxed{A^{1}_{x:\overline{n}|} = V\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}}$$

3.2.2.3 Seguro dotal Mixto.

Directamente a los conmutados.

Ya tenemos algunas equivalencias, simplemente sustituyamos.

$$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{(VN_x - N_{x+1}) - (VN_{x+n} - N_{x+n+1}) + D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{(VN_x - VN_{x+n}) - (N_{x+1} - N_{x+n+1}) + D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{V(N_x - N_{x+n})}{D_x} - \frac{(N_{x+1} - N_{x+n+1}) + D_{x+n}}{D_x}$$

$$\mathbf{A_{x:\overline{n}|} = V\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{(N_{x+1} - N_{x+n+1}) + D_{x+n}}{D_x}}$$

Analicemos el segundo miembro.

$\sum_{t=1}^{n} D_{x+t} = D_{x+1} + D_{x+2} + ...+D_{x+n}$

Pero a esta sumatoria le antecede el signo menos.

$-\sum_{t=1}^{n} D_{x+t} = -D_{x+1} - D_{x+2} - ....-D_{x+n} + \mathbf{D_{x+n}}$

Tenemos una nueva sumatoria.

$\sum_{t=1}^{n-1} D_{x+t} = D_{x+1} + D_{x+2} + ...+D_{x+n-1}$

Por lo que:

$\sum_{t=1}^{n-1} D_{x+t} = N_{x+1} - N_{x+n-1} = a_{x:n-1|}$

Regresando:

$$\boxed{A_{x:n|} = V\ddot{a}_{x:n|} - a_{x:n-1|}}$$

3.2.2.4 Seguros diferidos.

Analicemos a partir de los conmutados:

Tomemos nuestra expresión básica:

$\mathbf{M_x = VN_x - N_{x+1}}$

$n/A_x = \dfrac{M_{x+n}}{D_x}$

$n/A_x = \dfrac{VN_{x+n}-N_{x+n+1}}{D_x}$

$n/A_x = \dfrac{VN_{x+n}}{D_x} - \dfrac{N_{x+n+1}}{D_x}$

$$n/A_x = V\, n/\ddot{a}_x - n/a_x$$

3.2.2.5 Seguro temporal a m años y diferido a n años.

Analicemos a partir de los conmutados:

Sabemos:

$$M_x = VN_x - N_{x+1}$$

$$n/A^{1}_{x:m|} = \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m}}{D_x}$$

$$n/A^{1}_{x:m|} = \frac{(VN_{x+n} - N_{x+n+1}) - (VN_{x+n+m} - N_{x+n+m+1})}{D_x}$$

$$n/A^{1}_{x:m|} = \frac{(VN_{x+n} - VN_{x+n+m}) - (N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1})}{D_x}$$

$$n/A^{1}_{x:m|} = \frac{V(N_{x+n} - N_{x+n+m}) - (N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1})}{D_x}$$

$$n/A^{1}_{x:m|} = V\frac{(N_{x+n} - N_{x+n+m})}{D_x} - \frac{(N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1})}{D_x}$$

$$n/A^{1}_{x:m|} = V\, n/m\ddot{a}_x - n/m a_x$$

3.2.2.6 El seguro dotal a m años diferido n años

Nuevamente analicemos desde los conmutados:

$M_x = VN_x - N_{x+1}$

$$n/A_{x:m|} = \frac{M_{x+n} - M_{x+n+m} + D_{x+n+m}}{D_x}$$

$$n/A_{x:m|} = \frac{(VN_{x+n} - N_{x+n+1}) - (VN_{x+n+m} - N_{x+n+m+1}) + D_{x+n+m}}{D_x}$$

$$n/A_{x:m|} = \frac{(VN_{x+n} - VN_{x+n+m}) - (N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}) + D_{x+n+m}}{D_x}$$

$$n/A_{x:m|} = V\frac{(N_{x+n} - N_{x+n+m})}{D_x} - \frac{(N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}) + D_{x+n+m}}{D_x}$$

$$n/A_{x:m|} = V\,n/m\ddot{a}_x - \frac{(N_{x+n+1} - N_{x+n+m+1}) + D_{x+n+m}}{D_x}$$

Analicemos esta sumatoria.

$$\sum_{t=n}^{n+m} D_{x+t+1} = D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \ldots\ldots + D_{x+n+m}$$

A toda esta sumatoria le antecede el signo menos por lo tanto:

$$-\sum_{t=n}^{n+m} D_{x+t+1} = -D_{x+n+1} - D_{x+n+2} - \ldots\ldots - D_{x+n+m} + D_{x+n+m}$$

$$-\sum_{t=n}^{n+m-1} D_{x+t+1} = -D_{x+n+1} - D_{x+n+2} - \ldots\ldots - D_{x+n+m-1}$$

Redefiniendo nuevamente el signo menos.

$$\sum_{t=n}^{n+m-1} D_{x+t+1} = D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \ldots\ldots + D_{x+n+m-1} = N_{x+n+1} - N_{x+n+m}$$

$$n/A_{x:m|} = V\,n/m\ddot{a}_x - \frac{(N_{x+n+1} - N_{x+n+m})}{D_x}$$

$$\boxed{n/A_{x:m|} = V\,n/m\ddot{a}_x - n/\ddot{a}_x + (n+m-1)/\ddot{a}_x}$$

Hay que hacer notar que en los casos de seguros temporales y diferidos no se tiene la certeza de que se haga un pago, por lo tanto, deben tomarse con ciertas reservas sus expresiones correspondientes.

3.2.3 Seguros Variables.

Se le denomina a aquel seguro que da un beneficio por muerte, pudiendo ser creciente o decreciente.

3.2.3.1 Seguro creciente de vida entera

El cual provee un beneficio por muerte de \$1.0 en el primer año, de \$2.0 en el segundo año y así sucesivamente.
Será denotado por: **(IA)x**
Debemos recordar que al igual de lo que sucedió con las anualidades variables la base es t/Ax

$$(IA)x = \sum_{t=0}^{\infty} t/Ax = \frac{1}{Dx} \sum_{t=0}^{\infty} Mx+t$$

Desarrollando la segunda sumatoria tenemos:

$$\sum_{t=0}^{\infty} Mx+t = Mx + Mx+1 + Mx+2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Podremos definir otro conmutado.

$$\boldsymbol{\sum_{t=0}^{\infty} Mx+t = Mx + Mx+1 + Mx+2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = Rx}$$

$$\boldsymbol{\sum_{t=1}^{\infty} Mx+t = Mx+1 + Mx+2 + Mx+3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = Rx+1}$$

Por lo que podemos dar una expresión para este tipo de seguro:

$$\boldsymbol{(IA)x = \frac{Rx}{Dx}}$$

3.2.3.2 Seguro creciente temporal a n años.

Es aquel que, proporciona un beneficio por muerte de \$1.0 en el primer año, incrementándose en \$1.0 cada año, suspendiéndose el beneficio por muerte después de n años.

Será denotado por:

$$(IA)x{:}\overline{n|} = \sum_{t=0}^{n-1} t/n\text{-}tAx = \frac{1}{Dx} \sum_{t=0}^{n-1} Mx+t+1 - Mx+n+1$$

Desarrollemos la primera sumatoria:

$0/nAx + 1/n\text{-}1Ax + 2/n\text{-}2Ax + ...+n\text{-}1/1Ax$

Tomando como base el:

$$\boxed{\mathbf{n/mAx = n/Ax - n+m/Ax}}$$

Desarrollando:

$(0/Ax - n/Ax) + (1/Ax - n/Ax) + (2/Ax - n/Ax) + ...+(n\text{-}1/Ax - n/Ax)$

Ahora tomamos de base el:

$$\mathbf{n/Ax = \frac{Mx+n}{Dx}}$$

Desarrollando:

$(Mx + Mx+n) + (Mx+1 - Mx+n) + (Mx+2 - Mx+n)+.......+(Mx+n\text{-}1 - Mx+n)$

Nos da la siguiente sumatoria, considerando únicamente los primeros sumandos:

$Mx + Mx+1 + Mx+2 + ...+Mx+n\text{-}1 = \sum_{t=0}^{n-1} Mx+t = Rx - Rx+n$

Regresando tenemos:

$$\boxed{\mathbf{(IA)x{:}\overline{n|} = \frac{Rx - Rx+n - nMx+n}{Dx}}}$$

3.2.3.3 Otro Seguro de vida entera

Es aquel que proporciona un beneficio por muerte que se incrementa solamente durante n años y permanece constante en n.

Será denotado por:

$(I_{\overline{n|}} : A)x$

Desarrollemos:

$$(I_{\overline{n|}} A)x = \sum_{t=0}^{n-1} t/Ax = \frac{1}{Dx} \sum_{t=0}^{n-1} Mx+t+1$$

Desarrollando la primera sumatoria:

$0/Ax + 1/Ax + 2/Ax + \ldots\ldots + n-1/Ax$

Tomando de base:

$$n/Ax = \frac{Mx+n}{Dx}$$

Reexpresando cada sumando tenemos:

$$Mx + Mx+1 + Mx+2 + \ldots\ldots + Mx+n-1 = \sum_{t=0}^{n-1} Mx+t = Rx - Rx+n$$

Regresando tenemos:

$$\boxed{(I_{\overline{n|}} : A)x = \frac{Rx - Rx+n}{Dx}}$$

3.2.3.4 Seguro temporal decreciente

Es aquel que provee un beneficio inicial por muerte de n, decreciendo $1.0 cada año, sin pago de la suma asegurada, si la muerte ocurre después de n años.

Esta denotado por:

$$(DA)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} A_{x:\overline{t}|} = \sum_{t=1}^{n} \frac{M_{x+1} - M_{x+t+1}}{D_x}$$

Desarrollemos la primera sumatoria:

$$A_{x:\overline{1}|} + A_{x:\overline{2}|} + A_{x:\overline{3}|} + \ldots\ldots\ldots + A_{x:\overline{n}|}$$

Tomando de base:

$$\mathbf{A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}$$

Sustituyendo tenemos:

$$\frac{(M_x - M_{x+1}) + (M_x - M_{x+2}) + \ldots\ldots\ldots + (M_x - M_{x+n})}{D_x}$$

Analicemos los segundos sumandos:

$$M_{x+1} + M_{x+2} + M_{x+3} + \ldots\ldots + M_{x+n} = \sum_{t=1}^{n} M_{x+t} = R_{x+1} - R_{x+n+1}$$

Regresando tenemos:

$$nM_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\mathbf{(DA)_{x:\overline{n}|} = \frac{nM_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})}{D_x}}}$$

3.2.3.5 Relación entre la anualidad creciente y seguro creciente

Sabemos que:

$$\sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t} = R_x$$

Pero podemos sustituir el valor de Mx+t:

$\sum_{t=0}^{\infty} VNx+t - Nx+t+1$

$\sum_{t=0}^{\infty} VNx+t - \sum_{t=0}^{\infty} Nx+t+1$

$V\sum_{t=0}^{\infty} Nx+t - \sum_{t=0}^{\infty} Nx+t+1 = VSx - Sx+1$

Tomando la primera anualidad variable tenemos:

$$(IA)x = \frac{Rx}{Dx} = \frac{VSx - Sx+1}{Dx}$$

$$(IA)x = V\frac{Sx}{Dx} - \frac{Sx+1}{Dx}$$

$$\boxed{(IA)x = V\,(Ia_{\infty})x - (Ia)x}$$

3.2.3.6 Otros tipos de seguros crecientes

Estudiaremos tres.
El primero de ellos:

Es aquel donde la suma asegurada es realizado en el momento de ocurrir la muerte.
Su prima neta única estará dada por:

$$(\overline{IA})x = \frac{1}{Dx}\sum_{t=0}^{\infty} (t+1)\,\overline{C}x+t$$

Desarrollando la sumatoria tenemos:

$\overline{C}x + 2\overline{C}x+1 + 3\overline{C}x+2 + 4\overline{C}x+3 +$

Desarrollando tenemos:

$\overline{C}x + \overline{C}x+1 + \overline{C}x+2 + \overline{C}x+3 + \ldots\ldots = \sum_{t=0}^{\infty} \overline{C}x+t = \overline{M}x$

$$+ \bar{C}x+1 + \bar{C}x+2 + \bar{C}x+3 + \ldots\ldots = \sum_{t=1}^{\infty} \bar{C}x+t = \bar{M}x+1$$

$$+ \bar{C}x+2 + \bar{C}x+3 + \ldots\ldots = \sum_{t=2}^{\infty} \bar{C}x+t = \bar{M}x+2$$

Esto será igual a:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \bar{M}x+t = \frac{\bar{R}x}{Dx}$$

$$\boxed{(\bar{IA})x = \frac{\bar{R}x}{Dx}}$$

El segundo y el tercero, surgen al suponer que el beneficio por muerte se incrementa a intervalos que son fracciones de año.

Debe suponerse que el beneficio por muerte de 1/m en la primera m-esima de año, de 2/m en la segunda m-esima de año y así sucesivamente.

Cabe señalar que ya que el incremento ocurre a cada fracción de cada año, es de aquí donde surgen los dos casos:
El primero de ellos, es donde la suma asegurada es pagada al final del año en que ocurre la muerte.

Será denotado por:

$$(I^{(m)} A)\, x = \frac{1}{Dx} \sum_{t=0}^{\infty} \left(t + \frac{m+1}{2m}\right) Cx+t$$

Desarrollando tenemos:

$$\frac{(m+1)}{2m}Cx + \left(Cx+1 + \frac{m+1}{2m} Cx+1\right) + \left(2Cx+2 + \frac{m+1}{2m} Cx+2\right)+\ldots\ldots$$

Desarrollando los primeros sumandos:

$$Cx+1 + 2Cx+2 + 3Cx+3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$Cx+1 + Cx+2 + Cx+3 + \ldots\ldots\ldots = \sum_{t=1}^{\infty} Cx+t = Mx+1$$

$$+ C_{x+2} + C_{x+3} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \sum_{t=2}^{\infty} C_{x+t} = M_{x+2}$$

$$+ C_{x+3} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \sum_{t=3}^{\infty} C_{x+t} = M_{x+3}$$

Así continuamos:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \mathbf{M_{x+t} = R_{x+1}}$$

Ahora analicemos los segundo sumandos:

$$\frac{(m+1)}{2m} C_x + \left(\frac{m+1}{2m} C_{x+1}\right) + \left(\frac{m+1}{2m} C_{x+2}\right) + \ldots\ldots.$$

$$\frac{m+1}{2m}(C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots\ldots.)$$

$$\frac{m+1}{2m}\left(\sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}\right)$$

$$\frac{m+1}{2m}(M_x)$$

Regresando tenemos:

$$\boxed{(I^{(m)} A)_x = \frac{R_{x+1} + \frac{m+1}{2m}(M_x)}{D_x}}$$

Analicemos el segundo caso:

Considerando que la suma asegurada es pagada en el momento en que ocurre la muerte.

Estará denotada por:

$$(I^{(m)} \bar{A})_x = \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{\infty} \left(t + \frac{m+1}{2m}\right) \bar{C}_{x+t}$$

Desarrollando tenemos:

$$\frac{(m+1)}{2m}\bar{C}_{x} + \left(\bar{C}_{x+1} + \frac{m+1}{2m}\bar{C}_{x+1}\right) + \left(2\bar{C}_{x+2} + \frac{m+1}{2m}\bar{C}_{x+2}\right) + ...$$

Desarrollando los primeros sumandos:

$$\bar{C}_{x+1} + 2\bar{C}_{x+2} + 3\bar{C}_{x+3} + ...$$

$$\bar{C}_{x+1} + \bar{C}_{x+2} + \bar{C}_{x+3} + ... = \sum_{t=1}^{\infty} \bar{C}_{x+t} = \bar{M}_{x+1}$$

$$+ \bar{C}_{x+2} + \bar{C}_{x+3} + ... = \sum_{t=2}^{\infty} \bar{C}_{x+t} = \bar{M}_{x+2}$$

$$+ \bar{C}_{x+3} + ... = \sum_{t=3}^{\infty} \bar{C}_{x+t} = \bar{M}_{x+3}$$

Así continuamos:

$$\boldsymbol{\sum_{t=1}^{\infty} \bar{M}_{x+t} = \bar{R}_{x+1}}$$

Ahora analicemos los segundos sumandos:

$$\frac{(m+1)}{2m}\bar{C}_{x} + \left(\frac{m+1}{2m}\bar{C}_{x+1}\right) + \left(\frac{m+1}{2m}\bar{C}_{x+2}\right) + ...$$

$$\frac{m+1}{2m}\left(\bar{C}_{x} + \bar{C}_{x+1} + \bar{C}_{x+2} + ...\right)$$

$$\frac{m+1}{2m}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \bar{C}_{x+t}\right)$$

$$\boldsymbol{\frac{m+1}{2m}\left(\bar{M}_{x}\right)}$$

Regresando tenemos:

$$\boxed{(\bar{I}^{(m)}\bar{A})_x = \frac{\bar{R}_{x+1} + \frac{m+1}{2m}(\bar{M}_x)}{D_x}}$$

Si en el seguro anterior hacemos que $m \to \infty$ obtenemos:

$$\lim_{m\to\infty}(\bar{I}^{(m)}\bar{A})_x = \lim_{m\to\infty} \frac{\bar{R}_{x+1} + \frac{m+1}{2m}(\bar{M}_x)}{D_x}$$

$$\boxed{(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{\bar{R}_{x+1} + \frac{1}{2}(\bar{M}_x)}{D_x}}$$

3.2.4 Seguros pagaderos en el momento de la muerte.

En la vida cotidiana la suma asegurada es pagada en el momento en que se comprueba la muerte. En nuestras expresiones anteriores, la suma asegurada se supone será pagada al final del año en que fallece el asegurado, por lo que ahora debemos de hacer ajuste a nuestras expresiones anteriores, con el fin de hacer que la suma segurada sea pagada al final del m-esimo de año en que ocurre el deceso.

Comencemos por analizar la PNU de un seguro OV por $A^{(m)}{}_x$.

$$A_x^{(m)} = \frac{1}{l_x}\left(V^{1/m}\,(l_x - l_{x+1/m}) + V^{2/m}\,(l_{x+1/m} - l_{x+2/m}) + \ldots\ldots\right)$$

$$A_x^{(m)} = -\frac{1}{l_x}\sum_{t=1}^{\infty} V^{t/m}\,\Delta l_{x+(t-1)/m}$$

Veamos el comportamiento para t=1

$$-(\Delta l_x) = -(l_{x+1/m} - l_x) = l_x - l_{x+1/m}$$

1/m representa la magnitud del intervalo entre cada argumento.

Si a esta expresión hacemos que m $\rightarrow\infty$,el seguro que se obtiene es el que es pagadero en el momento en que ocurre la muerte. La notación utilizada para este tipo de seguros consiste en señalar con una barra la A.

3.2.4.1 Seguro de vida entera pagadero al momento de ocurrir la muerte.

$$\bar{A}x = \lim_{m\rightarrow\infty} Ax^{(m)}$$

$$\bar{A}x = -\frac{1}{lx} \lim_{m\rightarrow\infty} \sum_{t=1}^{\infty} V^{t/m} \Delta lx +_{(t-1)/m}$$

entonces $\lim_{m\rightarrow\infty} lx + (t-1)/m \rightarrow dlx+t$

Nosotros sabemos porque lo demostramos en el capitulo 1 que:

$$\mu x = \frac{1}{lx} (-) \frac{d}{dx} lx$$

Por lo que podemos definir lo siguiente:

$dlx+t= -lx+t\ \mu x+t\ dt$

Regresando:

$$\bar{A}x = -\frac{1}{lx} \int_0^{\infty} V^t -lx+t\ \mu x+t\ dt$$

$$\bar{A}x = \frac{1}{lx} \int_0^{\infty} V^t\ lx+t\ \mu x+t\ dt$$

$$\bar{A}x = \int_0^\infty V^t \frac{lx+t}{lx} \mu x+t \, dt$$

$$\bar{A}x = \int_0^\infty V^t \, tPx \, \mu x+t \, dt$$

Hagamos esta integración por partes:

$uv - \int vdu$

sea:

$u = V^t$ $\quad\quad\quad\quad$ $du = V^t \log V \, dt$(sea $\log V = -\delta$)

$dv = lx+t \, \mu x+t$ $\quad\quad\quad\quad$ $v = -lx+t$

Regresando tenemos:

$$\bar{A}x = \frac{1}{lx}\left(V^t \left(-lx+t \,\Big|_0^\infty\right) - \int_0^\infty (-lx+t)(-\delta)V^t dt\right)$$

$$\bar{A}x = \frac{1}{lx}\left(V^t \left(-lx+t \,\Big|_0^\infty\right) - \delta\int_0^\infty lx+t \;\; V^t dt\right)$$

Cuando evaluamos en el limite superior, como es una función de supervivencia $lx+t = 0$

$$\bar{A}x = \left(V^t \left(-\frac{lx+t}{lx} \,\Big|_0^\infty\right) - \delta\int_0^\infty \frac{lx+t}{lx} \; V^t dt\right.$$

$$\bar{A}x = 1 - \delta\int_0^\infty \frac{lx+t}{lx} \; V^t dt$$

$$\bar{A}x = 1 - \delta\int_0^\infty tPx \; V^t dt$$

Como ya demostramos en el capítulo dos, el resultado de la integral representa una anualidad continua.

$$\bar{A}x = 1 - \delta\,\bar{a}x$$

Retomando la siguiente expresión:

$$\int_0^\infty V^t\, tPx\, \mu x{+}t\, dt$$

Si ahora multiplicamos y dividimos por V^x

$$\int_0^\infty \frac{V^{x+t}\, lx{+}t}{V^x\, lx}\, \mu x{+}t\, dt$$

De la cual obtenemos:

$$\int_0^\infty \frac{Dx{+}t}{Dx}\, \mu x{+}t\, dt$$

$$\frac{1}{Dx}\int_0^\infty Dx{+}t\, \mu x{+}t\, dt$$

A partir de la expresión anterior definimos dos nuevos conmutados:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{C}x &= \int_0^1 Dx{+}t\, \mu x{+}t\, dt \\ \bar{M}x &= \int_0^\infty Dx{+}t\, \mu x{+}t\, dt \end{aligned}}$$

Con las cuales podemos dar otra expresión para nuestro seguro en cuestión.

$$\bar{A}x = = \frac{1}{Dx}\int_0^\infty Dx{+}t\, \mu x{+}t\, dt$$

$$\boxed{\bar{A}x = \frac{\bar{M}x}{Dx}}$$

3.2.4.2 Seguro temporal a n años pagadero al momento de ocurrir la muerte

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n V^t\, {}_tP_x\, \mu_{x+t}\, dt$$

Hagamos esta integración por partes:

$$uv - \int v\,du$$

sea:

$u = V^t$ $\quad$ $du = V^t \log V\, dt$ (sea $\log V = -\delta$)

$dv = l_{x+t}\, \mu_{x+t}$ $\quad$ $v = -l_{x+t}$

Regresando tenemos:

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x}\left(V^t (-l_{x+t} \Big|_0^n) - \int_0^n (-l_{x+t})(-\delta) V^t dt\right)$$

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x}\left(V^t (-l_{x+t} \Big|_0^n) - \delta \int_0^n l_{x+t}\, V^t dt\right)$$

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \left(V^t \left(-\frac{l_{x+t}}{l_x} \Big|_0^n\right) - \delta \int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x}\, V^t dt\right.$$

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \left(V^n \left(-\frac{l_{x+n}}{l_x}\right)\right) + 1 - \delta \int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x}\, V^t dt$$

El primer sumando lo multiplicamos y dividimos por V^x

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \left(-\frac{V^{x+n}\, l_{x+n}}{V^x\, l_x}\right) + 1 - \delta \int_0^n {}_tP_x\, V^t dt$$

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \left(-\frac{D_{x+n}}{D_x}\right) + 1 - \delta \int_0^n {}_tP_x\, V^t dt$$

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = -{}_nE_x + 1 - \delta\int_0^n {}_tP_x\, V^t dt$$

Como ya demostramos en el capítulo dos, el resultado de la integral representa una anualidad temporal continua:

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \mathbf{1 - {}_nE_x - \delta\, \bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Demos otra expresión a partir de nuestros nuevos conmutados:

$$\bar{M}_x = \int_0^\infty D_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt$$

$$\bar{M}_{x+n} = \int_n^\infty D_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt$$

Con las cuales podemos dar otra expresión para nuestro seguro en cuestión

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{D_x}$$

3.2.4.3 Seguro diferido n años pagadero al ocurrir el fallecimiento.

$${}_{n/}\bar{A}_x = \int_n^\infty V^t\, {}_tP_x\, \mu_{x+t}\, dt$$

Hagamos esta integración por partes:

Sea:

$u = V^t$ $\quad$ $du = V^t \log V\, dt$ (sea $\log V = -\delta$)

$dv = l_{x+t}\, \mu_{x+t}$ $\quad$ $v = -l_{x+t}$

Regresando tenemos:

$$\overline{n/A}x = \frac{1}{lx}\left(V^t(-lx+t \mid_n^\infty) - \int_n^\infty -lx+t\, -\delta V^t dt\right)$$

$$\overline{n/A}x = \frac{1}{lx}\left(V^t(-lx+t \mid_n^\infty) - \delta\int_n^\infty lx+t\ V^t dt\right)$$

$$\overline{n/A}\ x = \left(V^t\left(-\frac{lx+t}{lx} \mid_n^\infty\right) - \delta\int_n^\infty \frac{lx+t}{lx}\ V^t dt\right.$$

Como sucedió en el primer caso, cuando evaluamos en el límite superior nos da cero.

$$\overline{n/A}x = \left(V^n \frac{lx+n}{lx}\right)\Big) - \delta\int_n^\infty \frac{lx+t}{lx}\ V^t dt$$

El primer sumando lo multiplicamos y dividimos por V^x

$$\overline{n/A}x = \left(\frac{V^{x+n}\, lx+n}{V^x\, lx}\right) - \delta\int_n^\infty \underline{t}Px\ V^t dt$$

$$\overline{n/A}\ x = \left(\frac{Dx+n}{Dx}\right) - \delta\int_n^\infty tPx\ V^t dt$$

$$\overline{n/A}\ x = nEx \quad - \delta\int_n^\infty tPx\ V^t dt$$

Como ya demostramos en el capítulo dos, el resultado de la integral representa una anualidad diferida n años continúa.

$$\boxed{\overline{n/A}\ x = nEx\ - \delta\ n/\ \overline{a}x}$$

3.2.4.4 Seguro dotal a n años pagadero al momento de fallecimiento.

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$$

El primer sumando ya demostramos a que es igual, simplemente sustituyamos:

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = 1 - {}_{n}E_{x} - \delta\, \bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

El segundo sumando también podemos ya definirlo:

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Debe notarse que no se verá afectado el seguro dotal puro.

Con lo cual podemos dar otra expresión para nuestro seguro en cuestión:

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1 - {}_{n}E_{x} - \delta\, \bar{a}_{x:\overline{n}|} + {}_{n}E_{x}$$

$$\boxed{\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1 - \delta\, \bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

Otra expresión para este tipo de seguros en términos de conmutados sería

$$\boxed{\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}}$$

CAPITULO IV

CAPITULO IV

SUPERVIVENCIA Y MORTALIDAD

4.1 Introducción

El Cálculo Actuarial II es una generalización de las funciones de Cálculo Actuarial I. El objetivo fundamental es generalizar las funciones de vida simple a funciones de grupo. Es decir, se generaliza a "m" vidas las funciones de vida simple.

Para hacer posible el poder aplicar las tablas de Mortalidad se depende de la existencia de por lo menos dos vidas.

Para este curso será necesario manejar en un 80% las funciones estudiadas en el curso anterior.

Es necesario suponer que las probabilidades de vida son independientes y por lo tanto, la probabilidad de que varias vidas sobrevivan n años se calcula con el producto de ambas.

4.2 Notación

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$:

Representa un grupo de m, vidas a distintas edades.

$(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m)$:

Representa un grupo de vida conjunta con la característica de que las vidas individuales tienen edades $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$.

Además, debe tenerse en cuenta que el grupo continúa existiendo mientras todas las vidas que conforman el grupo permanezcan con vida, y desaparece o destruye el grupo cuando ocurre la primera muerte, pudiendo ser esta al inicio, de manera intermedia o al final.

4.3 Probabilidades de Vida Conjunta

4.3.1 Probabilidades de vida

Como ya se ha dicho en repetidas ocasiones, será una generalización de vida simple llevadas a vida de grupo basadas en la probabilidad clásica.

Analicemos primero para **dos vidas.**

Sean (x) y (y) dos vidas tratadas de manera independiente:

nPx = lx+n / lx

nPy = ly+n/ ly

Como son vidas independientes, la probabilidad conjunta de sobrevivencia estará dada por la siguiente expresión:

$$(nPx)(nPy) = \frac{(lx+n)(ly+n)}{lx \quad ly} = \frac{lx+n:y+n}{lxy}$$

Representa la probabilidad de que dadas dos vidas (x) y (y) sobrevivan n años.

Ya estamos en condiciones de generalizar para **m vidas**

$$\boxed{nPx_1x_2x_3\ldots\ldots x_m = \frac{lx_1+n:x_2+n:\ldots\ldots\ldots:x_m+n}{lx_1x_2\ldots\ldots x_m} = \frac{lx_1+n\bullet x_2+n\bullet\ldots\ldots\bullet x_m+n}{lx_1\bullet lx_2\bullet\ldots\ldots\bullet lx_m}}$$

4.3.2 Probabilidades de muerte

Como sabemos las probabilidades de muerte las obtenemos a partir de las probabilidades de vida, por lo que analicemos nuestra siguiente probabilidad para dos vidas.

Lo que necesitamos es obtener la probabilidad de que ocurra la primera muerte y que al menos una vida fallezca en ese periodo.

En otras palabras, esto es simplemente el complemento de la probabilidad descrita anteriormente.

$$nqxy = 1- nPxy = 1 - \frac{lx+n:y+n}{lxy} = \frac{lxy - lx+n:y+n}{lxy}$$

Ahora podemos generalizar para **m** vidas:

$$nqx_1x_2\ldots\ldots x_m = 1 - \frac{lx_1+n:x_2+n:\ldots\ldots\ldots:x_m+n}{lx_1x_2\ldots\ldots x_m}$$

$$\boxed{{}_nq_{x_1x_2.....x_m} = \frac{l_{x_1x_2.....x_m} - l_{x_1+n:x_2+n:.......:x_m+n}}{l_{x_1x_2.....x_m}}}$$

Un caso particular de esta probabilidad es la referente **al año del deceso**, con n=1.

$${}_1q_{x_1x_2......x_m} = 1 - \frac{l_{x_1+1:x_2+1:.......:x_m+1}}{l_{x_1x_2.....x_m}}$$

$${}_1q_{x_1x_2......x_m} = \frac{l_{x_1x_2.....x_m} - l_{x_1+1:x_2+1:.......:x_m+1}}{l_{x_1x_2.....x_m}}$$

Pero como sabemos:

$$l_{x_1x_2.....x_m} - l_{x_1+1:x_2+1:.......:x_m+1} = d_{x_1x_2....x_m}$$

Por lo que se tiene la siguiente igualdad:

$$\boxed{{}_1q_{x_1x_2......x_m} = \frac{l_{x_1x_2.....x_m} - l_{x_1+1:x_2+1:.......:x_m+1}}{l_{x_1x_2.....x_m}} = \frac{d_{x_1x_2....x_m}}{l_{x_1x_2.....x_m}}}$$

4.3.3 Probabilidades diferida n años

Analicemos primero la probabilidad de que la primera muerte ocurra en el n+1 esimo año (i.e las **diferidas n años**)

Para **dos vidas:**

$${}_{n/}q_{xy} = \frac{l_{x+n:y+n} - l_{x+n+1:y+n+1}}{l_{xy}} = \frac{d_{x+n:y+n}}{l_{xy}}$$

$${}_{n/}q_{xy} = \frac{l_{x+n:y+n}}{l_{xy}} - \frac{l_{x+n+1:y+n+1}}{l_{xy}}$$

$${}_{n/}q_{xy} = {}_nP_{xy} - {}_{(n+1)}P_{xy}$$

Ahora analicemos para **m vidas:**

$$\boxed{{}_{n/}q_{x_1x_2.....x_m} = \frac{l_{x_1+n:x_2+n:....x_m+n} - l_{x_1+n+1:x_2+n+1:....:x_m+n+1}}{l_{x_1x_2.....x_m}}}$$

$$\boxed{{}_{n/}q_{x_1x_2.....x_m} = \frac{d_{x_1+n:x_2+n:.....:x_m+n}}{l_{x_1x_2....x_m}}}$$

$$n/qx_1x_2.....x_m = \frac{lx_1+n:x_2+n:....x_m+n}{lx_1x_2.....x_m} - \frac{lx_1+n+1:x_2+n+1:.....:x_m+n+1}{lx_1x_2.....x_m}$$

$$\boxed{n/qx_1x_2.....x_m = nPx_1x_2...x_m - (n+1)Px_1x_2...x_m}$$

4.3.4 Probabilidades diferidas a n años y temporal a m años

Tomando la misma base.

Para dos vidas:

$$n/mqxy = \frac{lx+n:y+n - lx+n+m:y+n+m}{lxy}$$

$$n/mqxy = \frac{lx+n:y+n}{lxy} - \frac{lx+n+m:y+n+m}{lxy}$$

$$n/mqxy = nPxy - (n+m)Pxy$$

Para **m vidas** estará dado por:

$$\boxed{n/mqx_1x_2.....x_m = \frac{lx_1+n:x_2+n:....x_m+n - lx_1+n+m:x_2+n+m:.....:x_m+n+m}{lx_1x_2.....x_m}}$$

$$n/mqx_1x_2.....x_m = \frac{lx_1+n:x_2+n:....x_m+n}{lx_1x_2.....x_m} - \frac{lx_1+n+m:x_2+n+m:.....:x_m+n+m}{lx_1x_2.....x_m}$$

$$\boxed{n/mqx_1x_2.....x_m = nPx_1x_2...x_m - (n+m)Px_1x_2...x_m}$$

4.4 Tasa Central de Mortalidad

Simplemente generalicemos la expresión obtenida en vida simple.

Antes necesitamos lo siguiente:

$$\boxed{Lx_1x_2x_3.....x_m = \int_0^1 lx_1+t:x_2+t:......:x_m+tdt}$$

$$\boxed{Lx_1x_2x_3.....x_m = lx_1x_2x_3.....x_m - \tfrac{1}{2}\, dx_1x_2x_3.....x_m}$$

$$L_{x_1x_2x_3.....x_m} = \tfrac{1}{2}\,(l_{x_1x_2x_3.....x_m} - l_{x_1+1\,x_2+1\,x_3+1.....x_m+1})$$

Con lo anterior, estaremos en condiciones de definir la **tasa central de mortalidad** para vida conjunta:

$$m_{x_1x_2...x_m} = d_{x_1x_2...x_m} / L_{x_1x_2...x_m}$$

Otra expresión será:

$$m_{x_1x_2...x_m} = \frac{-1}{L_{x_1x_2...x_m}} \frac{dL_{x_1x_2...x_m}}{dx_1x_2...x_m}$$

4.5 Esperanza de Vida

Antes de definir la esperanza de vida, debemos definir lo siguiente:

$$T_{x_1x_2...x_m} = \sum_{t=0}^{\infty} L_{x_1+t:x_2+t:....:x_m+t} = \int_0^{\infty} l_{x_1+t:x_2+t:....:x_m+t}\, d$$

$$T_{x_1x_2...x_m} = \sum_{t=1}^{\infty} l_{x_1+t:x_2+t:....:x_m+t} + \tfrac{1}{2}\, l_{x_1:x_2...:x_m}$$

4.5.1 Esperanza de Vida Completa

$$\overset{0}{e}_{x_1x_2...x_m} = T_{x_1x_2...x_m} / l_{x_1x_2...x_m}$$

$$\overset{0}{e}_{x_1x_2...x_m} = \int_0^{\infty} l_{x_1+t:x_2+t:....:x_m+t} / l_{x_1x_2:....:x_m}\, dt$$

$$\overset{0}{e}_{x_1x_2...x_m} = \int_0^{\infty} {}_tP_{x_1x_2:....:x_m}\, dt$$

Definida como esperanza completa de vida para grupos.

4.5.2 Esperanza abreviada de vida

$$e_{x_1x_2\ldots x_m} = \sum_{t=1}^{\infty} l_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t} \,/\, l_{x_1x_2:\ldots:x_m}$$

$$e_{x_1x_2\ldots x_m} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tP_{x_1x_2:\ldots:x_m}$$

$$e_{x_1x_2\ldots x_m} = \mathring{e}_{x_1x_2\ldots x_m} - \tfrac{1}{2}$$

También podemos obtener las Esperanzas de Vida Completas o Abreviadas Diferidas y Temporales para grupo.

- $_{n/}e_{x_1x_2\ldots x_m} = \sum_{t=n+1}^{\infty} {}_tP_{x_1x_2:\ldots:x_m}$
- $e_{x_1x_2\ldots x_m:n} = \sum_{t=1}^{n} {}_tP_{x_1x_2:\ldots:x_m}$
- $_{n/}e_{x_1x_2\ldots x_m:m} = \sum_{t=n+1}^{n+m} {}_tP_{x_1x_2:\ldots:x_m}$
- $_{n/}\mathring{e}_{x_1x_2\ldots x_m} = \int_{n}^{\infty} {}_tP_{x_1x_2:\ldots:x_m}\, dt$
- $\mathring{e}_{x_1x_2\ldots x_m;n} = \int_{0}^{n} {}_tP_{x_1x_2:\ldots:x_m}\, dt$
- $_{n/}\mathring{e}_{x_1x_2\ldots x_m:m} = \int_{n}^{n+m} {}_tP_{x_1x_2:\ldots:x_m}\, dt$

4.6 Fuerza de Mortalidad

La fuerza de mortalidad para vida conjunta se obtiene generalizando nuestro resultado de vida simple, de lo cual resulta la siguiente expresión:

$$\mu_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t} = \frac{-1}{l_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t}} \frac{d}{dt} l_{x_1+t:x_2+t:\ldots:x_m+t}$$

La otra expresión para la fuerza de mortalidad será:

$$\mu\, x_1{+}t : x_2{+}t : \ldots : x_m{+}t = \frac{-d}{dt} \ln l x_1{+}t : x_2{+}t : \ldots : x_m{+}t$$

Sabemos que el producto de logaritmos es igual a la suma de logaritmos.

Con lo cual obtenemos:

$$\mu\, x_1{+}t : x_2{+}t : \ldots : x_m{+}t = \left(\frac{-d \ln l x_1{+}t}{dt}\right) + \left(\frac{-d \ln x_2{+}t}{dt}\right) + \ldots + \left(\frac{-d \ln x_m{+}t}{dt}\right)$$

Por lo que podemos observar que son fuerzas de mortalidad para vidas simple.

Reordenando tenemos:

$$\mu\, x_1{+}t : x_2{+}t : \ldots : x_m{+}t = (\mu x_1{+}t) + (\mu x_2{+}t) + \ldots + (\mu x_m{+}t)$$

$$\mu\, x_1{+}t : x_2{+}t : \ldots : x_m{+}t = \mu x_1{+}t + \mu x_2{+}t + \ldots + \mu x_m{+}t$$

4.6.1 Expresión para $l x_1 x_2 \ldots x_m$ en términos de la fuerza de mortalidad

$$l x_1{+}t : x_2{+}t \ldots x_m{+}t = l_0\, e^{-\int_0^x \mu y_1{+}t : y_2{+}t \ldots y_m{+}t\, dt}$$

4.6.2 Expresión para $nq x_1 x_2 \ldots x_m$ en términos de la fuerza de mortalidad

$$nq x_1 x_2 \ldots x_m = \int_0^n \mu x_1{+}t : x_2{+}t \ldots x_m{+}t (tP x_1 x_2 \ldots x_m)\, dt = \frac{l x_1 x_2 \ldots x_m - l x_1{+}n : x_2{+}n : \ldots x_m{+}n}{l x_1 x_2 \ldots x_m}$$

4.6.3 Expresión para $n/mq x_1 x_2 \ldots x_m$ en términos de la fuerza de mortalidad

$$n/mq x_1 x_2 \ldots x_m = \int_n^m \mu x_1{+}t : x_2{+}t \ldots x_m{+}t (tP x_1 x_2 \ldots x_m)\, dt$$

$$ {}_{n/m}q_{x_1x_2\ldots x_m} = \frac{l_{x_1+n:x_2+n:\ldots x_m+n} - l_{x_1+n+m:x_2+n+m:\ldots x_m+n+m}}{l_{x_1x_2\ldots x_m}} $$

4.6.4 La expresión para $d_{x_1x_2\ldots x_m}$ en términos de la fuerza de mortalidad

$$ \int_0^1 \mu_{x_1+t:x_2+t:\ldots x_m+t}\,({}_tP_{x_1x_2\ldots x_m})\,dt = \frac{l_{x_1x_2:\ldots x_m} - l_{x_1+1:x_2+1:\ldots x_m+1}}{l_{x_1x_2\ldots x_m}} $$

Pasando multiplicando el denominador del otro lado de la igualdad tenemos:

$$ \boxed{\begin{aligned} \int_0^1 \mu_{x_1+t:x_2+t:\ldots x_m+t}\,(l_{x_1+t:x_2+t:\ldots x_m+t})\,dt &= l_{x_1x_2:\ldots x_m} - l_{x_1+1:x_2+1:\ldots x_m+1} \\ &= d_{x_1x_2\ldots x_m} \end{aligned}} $$

4.7 Leyes de Mortalidad Aplicados a Probabilidades de Vida Conjunta

4.7.1 Ley de mortalidad bajo Gompertz aplicados a vida conjunta

Primero analizaremos a Gompertz.

Sabemos que:

$$ \mu_x = BC^x $$

$$ l_x = kg^{C^x} $$

Si queremos obtener una expresión para $_nP_{xy}$ utilizamos simplemente el resultado obtenido en Cálculo Actuarial I

$$ {}_nP_{xy} = g^{C^x(C^n-1)} \bullet g^{C^y(C^n-1)} $$

Haciendo álgebra tenemos:

$$ {}_nP_{xy} = g^{(C^x+C^y)(C^n-1)} $$

Haciendo la siguiente suposición:

$$ \boxed{C^x + C^y = C^z} $$

Regresando a nuestra expresión tenemos:

$$nPz = g^{C^{(z)}\;{}^{n}(C\text{-}1)}$$

Que representa la probabilidad requerida:

Ahora analicemos nuestra expresión para m vidas:

$$nPx_1x_2...x_m = g^{C^{x1}\;{}^{n}(C\text{-}1)} \bullet g^{C^{x2}\;{}^{n}(C\text{-}1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \bullet g^{C^{xm}\;{}^{n}(C\text{-}1)}$$

$$nPx_1x_2...x_m = g^{C^{(x1+x2+...+xm)}\;{}^{n}(C\text{-}1)}$$

Suponiendo ahora que:

$x1+x2+... + xm = w$

Regresando tenemos:

$$nPx_1x_2...x_m = g^{C^{(w)}\;{}^{n}(C\text{-}1)}$$

Sin perdida de generalidad podemos concluir que:

$$\boxed{nPw = g^{C^{(w)}\;{}^{n}(C\text{-}1)}}$$

También podemos concluir:

$$\boxed{\mu x_1 + \mu x_2 .. + \mu x_m = \mu w}$$

O bien:

$$\boxed{\mu x_1 x_2 ... x_m = \mu w}$$

4.7.2 Ley de mortalidad bajo Makeham aplicados a vida conjunta

$\mu x = A + BC^x$

$lx = kS^x g^{C^x}$

Si queremos obtener una expresión para nPxy utilizamos simplemente el resultado obtenido en Cálculo Actuarial I.

$$nPxy = S^n g^{C^x (C^n - 1)} \bullet S^n g^{C^y (C^n-1)}$$

Haciendo álgebra tenemos:

$$nPxy = S^{2n} g^{C^{(x+y)} (C^n - 1)}$$

Haciendo la siguiente suposición:

Que las vidas involucradas tienen la misma edad tenemos:

$C^x + C^y = C^z + C^z = 2C^z$

Podemos observar que podemos sustituir dos vidas de diferente edad, por dos vidas de igual edad, siempre que se cumpla lo siguiente:

$\frac{C^x + C^y}{2} = C^z + C^z = 2C^z$

Regresando a nuestra expresión tenemos:

$$nPzz = S^{2n} g^{2C^z (C^n - 1)}$$

que representa la probabilidad requerida.

Ahora analicemos nuestra expresión para m vidas:

$$nPx_1x_2...x_m = S^n g^{C^{x1} (C^n-1)} \bullet S^n g^{C^{x2} (C^n-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \bullet S^n g^{C^{xm} (C^n-1)}$$

$$nPx_1x_2...x_m = S^{mn} g^{C^{(x1+x2+...+xm)} (C^n-1)}$$

Suponiendo ahora que:

$C^{x1}+C^{x2}+\ldots+C^{xm} = mC^{w}$

Regresando tenemos:

$$nPx_1x_2\ldots x_m = S^{mn}g^{mC^{(w)}(C^{n}-1)}$$

Sin perdida de generalidad podemos concluir que:

$$\boxed{\mathbf{nPw\ldots.m = S^{mn}g^{mC^{(w)}(C^{n}-1)}}}$$

También podemos concluir:

$$\boxed{\mu x_1+\mu x_2\ldots+\mu x_m = m\mu w}$$

O bien:

$$\boxed{\mu x_1x_2\ldots x_m = m\mu w}$$

4.8 Ley del Envejecimiento Uniforme

Tendremos que hacer el análisis utilizando la Ley de Gompertz y Makeham, pero antes debemos considerar las siguientes suposiciones.

Para visualizar mejor tomemos dos vidas (x) y (y). En este caso supongamos que **y>x** , con lo cual podemos suponer lo siguiente:

(x,x+n) donde y = x+n

Pero lo importante suponer aquí, es que los dos tiene la misma edad por lo que nos quedaría:

(x+t:x+t) donde z=x+t **n > t**

Definido lo anterior podemos comenzar con Makeham.

4.8.1 Ley del Envejecimiento uniforme para la Ley de Makeham

Bajo la Ley de Makeham definimos:

$C^x+C^y = C^z+C^z = 2C^z$

Aplicando los supuestos definidos en el párrafo anterior y haciendo las sustituciones correspondientes:

$C^x+C^{x+n} = 2C^{x+t}$

Haciendo álgebra

$C^x+C^xC^n = 2C^xC^t$

Factorizando:

$C^x(1+C^n) = 2C^xC^t$

Cancelando:

$(1+C^n) = 2C^t$

Lo que nos interesa es conocer **t** por lo tanto despejamos:

$$\frac{1+C^n}{2} = C^t$$

Sacando logaritmos en ambos lados:

$$\log\left(\frac{1+C^n}{2}\right) = t \log C$$

Aplicamos propiedad de logaritmos:

$\log(1+C^n) - \log 2 = t \log C$

$$\boxed{\frac{\log(1+C^n) - \log 2}{\log C} = t}$$

Como podemos observar en nuestra expresión, el valor de **t** no depende ni de **x** ni de **y** sino esta en función del valor de **n.**

Cuando se trabaje con más de dos vidas el procedimiento es semejante.
Se van haciendo los reemplazos correspondientes por ejemplo si se tienen tres vidas, se toman las dos menores y se encuentra la edad común, posteriormente se sigue el mismo procedimiento.

4.8.2 Ley del envejecimiento uniforme bajo la ley de Gompertz

Bajo la Ley de Gompertz se supuso:

$C^x+C^y = C^z+C^z = C^z$

Aplicando los supuestos definidos anteriormente y haciendo las sustituciones correspondientes:

$C^x+C^{x+n} = C^{x+t}$

Haciendo álgebra:

$C^x+C^xC^n = C^xC^t$

Factorizando:

$C^x(1+C^n) = C^xC^t$

Cancelando:

$(1+C^n) = C^t$

Por consiguiente, lo que nos interesa es conocer **t**, por lo tanto despejamos:

$1+C^n = C^t$

Sacando logaritmos en ambos lados:

$\log(1+C^n) = t \log C$

Aplicamos propiedad de logaritmos:

$\log(1+C^n) = t \log C$

$$\frac{\log(1+C^n)}{\log C} = t$$

Como podemos observar en nuestra expresión el valor de **t** no depende ni de (x) ni de (y) sino esta en función del valor de n

Debe considerarse que en este caso, se puede reemplazar pares de vida conjunta por vidas simples hasta obtener la edad original del grupo, reduciendo a la edad de una vida simple.

4.9 Probabilidades del Grupo del Ultimo Superviviente

Hasta aquí hemos trabajado con grupo de vida conjunta. Ahora trabajaremos con el grupo del último superviviente, el cual desaparece cuando ocurre la última muerte.

Estará integrado por m vidas a edades $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

4.9.1 Probabilidades de vida del grupo del ultimo superviviente

Será denotado por $nP\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}$ para un grupo de m vidas.

En todos los casos se considera que los eventos son mutuamente excluyentes.

¿Que representara $nP\overline{xy}$?

Es la probabilidad de que dadas 2 personas (x) y (y) una de ellas por lo menos viva n años.

Tenemos, para responder esta pregunta que considerar lo siguiente:

- Que viva (x) y fallezca (y)
- Que viva (y) y fallezca (x)
- Que ambos sobrevivan

$$nP\overline{xy} = nPx(1-nPy) + nPy(1-nPx) + (nPx)(nPy)$$

$$\mathbf{nP\overline{xy} = nPx + nPy - nPxy}$$

¿Que representará $n\overline{Pxyz}$?

- Que estén con vida los tres
- Que estén con vida dos y muerto uno
- Que estén con vida uno y muertos dos

$n\overline{Pxyz}$ = nPx +nPy + nPz - (nPxy+nPxz+nPyz)+nPxyz

¿Cuál será el complemento de $n\overline{Pxyz}$?

=1 - [nPx +nPy + nPz - (nPxy+nPxz+nPyz)+nPxyz]

Con los ejemplos vistos anteriormente para dos y tres vidas, ya estamos en condiciones de dar una generalización:

$n\overline{Px_1x_2...x_m}$ para un grupo de m vidas.

$$\mathbf{n\overline{Px_1x_2...x_m} = \sum nPx_1 - \sum nPx_1x_2 + \sum nPx_1x_2x_3 + ... + nPx_1x_2x_3...x_m}$$

Observación:

$\sum nPx_i$ denota la suma de todas las posibles combinaciones de vidas individuales.

$\sum nPx_ix_j$ denota la suma de todas las posibles combinaciones de dos vidas.

.

.

.

.

etc.

4.9.2 Probabilidades de muerte bajo el último superviviente

Como hemos podido darnos cuenta, las probabilidades de muerte están en términos de las probabilidades de vida, por tal motivo, será más sencillo el desarrollo de esta sección.

Tomemos primero **dos vidas**

$n\overline{qxy}$ = Representa la probabilidad de que ni (x) ni (y) sobrevivan n años.

$nq\overline{xy} = (1-nPx)(1-nPy) = 1 - [\, nPx + nPy - nPxy]$

Como se observa en la sección anterior, el término dentro del corchete es la probabilidad obtenida anteriormente.

$nq\overline{xy} = 1 - [\, nP\overline{xy}\,]$

Si tomáramos **tres vidas** veríamos que el resultado seria:

$nq\overline{xyz} = 1 - [\, nP\overline{xyz}\,]$

Para m vidas el resultado seria el siguiente:

$$\boxed{nq\overline{x_1x_2...x_m} = 1 - [nP\overline{x_1x_2...x_m}]}$$

4.9.3 Probabilidades diferidas bajo el último superviviente

Tomemos otra vez dos personas para después generalizar el resultado.

Un consejo para el desarrollo de este tipo de probabilidades es, ver su equivalencia primero en vida simple, en términos de probabilidades de vida. Para después dar el resultado esperado.

El resultado que se quiere obtener es el referente a:

$n/q\overline{xy}$

Primero demos su equivalencia en términos de probabilidades de vida:

$$n/qxy = \frac{lx{+}n{:}y{+}n - lx{+}n{+}1{:}y{+}n{+}1}{lxy}$$

Separando tenemos:

$$n/qxy = \frac{lx{+}n{:}y{+}n}{lxy} - \frac{lx{+}n{+}1{:}y{+}n{+}1}{lxy}$$

Poniéndolo en términos de probabilidades de vida:

$n/qxy = nPxy - (n+1)Pxy$

Regresando a nuestra probabilidad pedida tenemos:

$n/\overline{qxy} = n\overline{Pxy} - (n+1)\overline{Pxy}$

Utilizando el resultado general de **probabilidades de vida** sería:

$n/\overline{qxy} = n/qx + n/qy - n/qxy$

Ahora generalicemos para m vidas por ambas expresiones:

Por un lado tenemos:

$$\mathbf{n/\overline{qx_1x_2...x_m} = \sum n/qx_1 - \sum n/qx_1x_2 + \sum n/qx_1x_2x_3 + ... + n/qx_1x_2x_3...x_m}$$

Y por el otro:

$$\mathbf{n/\overline{qx_1x_2...x_m} = nP\overline{x_1x_2...x_m} - (n+1)\ nP\overline{x_1x_2...x_m}}$$

Podrá utilizarse indistintamente cualquiera.

4.10 Probabilidades de Grupo Generalizado

Hasta aquí podemos distinguir dos casos ya observados, el primero de ellos es el llamado de vida conjunta, el segundo el del último superviviente.

Ahora estudiaremos el llamado del **grupo generalizado**.
Dentro de éste, como ya se mencionó, existen dos casos:

El **primero** de ellos se denota por:

$$\mathbf{\frac{\qquad r \quad}{(x_1,x_2,.....x_m)}}$$

Tiene las siguientes características

si r=1 nos da el grupo del último superviviente

si r=2,3.....es un grupo generalizado

De hecho el del último superviviente y de vida conjunta son casos especiales del grupo generalizado.

De la misma manera, podemos también definir su probabilidad asociada:

$$\boxed{nP\,\overset{r}{\overline{(x_1x_2,\ldots.x_m)}}}$$

Lo cual indica que r de las m vidas originales estarán con vida dentro de n años.

Ahora abordemos el **segundo** caso:

$$\boxed{\overset{[r]}{\overline{(x_1,x_2,\ldots.x_m)}}}$$

Con su correspondiente probabilidad asociada:

$$\boxed{nP\overset{[r]}{\overline{(x_1,x_2,\ldots.x_m)}}}$$

La cual indica la probabilidad de que exactamente r vidas de las m sobrevivan al final de n años.

4.10.1 Método Z para probabilidades de supervivencia de exactamente r vidas.

Primero daremos la técnica del método para exactamente r vidas, ya que el resultado de este se utiliza para obtener el resultado del segundo.

Lo importante aquí es suponer en un principio que todos tiene la misma edad.

Tomemos:

$$nP\overset{[r]}{\overline{(x,x,\ldots.x)}}$$

Como podemos observar, todos tienen la misma edad (x).

Las siguientes observaciones son importantes:

Como todas tienen la misma edad y sobrevivirán exactamente r la probabilidad estará dada por:

$$(nPx)^r$$

Si las anteriores viven entonces el complemento muere es decir (m-r) fallecen:

$$(1-nPx)^{m-r}$$

Pero como no sabemos a cual grupo de ellas seleccionar de la r de las m vidas tenemos:

$$C_m^r$$

Con estas tres suposiciones ya estamos en condiciones de calcular nuestra probabilidad:

$$\overline{nP(x,x,.....x)}^{[r]} = C_m^r \bullet (nPx)^r \bullet (1-nPx)^{m-r}$$

En la expresión anterior lo importante será resolver:

$(1-nPx)^{m-r}$

Esto lo podemos hacer por el **Teorema del Binomio.**

Resolvamos esto primero y después regresamos:

$$(1-nPx)^{m-r} = 1 - (m-r)nPx + \frac{(m-r)(m-r-1)(nPx)^2}{2!} - \frac{(m-r)(m-r-1)m-r-2)(nPx)^3}{3!} + ...$$

Regresando tenemos:

$$\overline{nP(x,x,.....x)}^{[r]} = C_m^r \bullet (nPx)^r \bullet [1 - (m-r)nPx + \frac{(m-r)(m-r-1)(nPx)^2}{2!} - \frac{(m-r)(m-r-1)(m-r-2)(nPx)^3}{3!} + ...]$$

Distribuyendo:

$$\overset{\underline{\quad[r]\quad}}{nP(x,x,\ldots..x)} = C_m^r \bullet (nPx)^r \bullet [1-(m-r)nPx] + C_m^r \bullet (nPx)^r \bullet \left[\frac{(m-r)(m-r-1)(nPx)^2}{2!}\right] - C_m^r \bullet (nPx)^r \bullet \left[\frac{(m-r)(m-r-1)(m-r-2)(nPx)^3}{3!}\right] + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nuevamente:

$$\overset{\underline{\quad[r]\quad}}{nP(x,x,\ldots..x)} = C_m^r \bullet (nPx)^r - C_m^r[(m-r)(nPx)^{r+1}] + C_m^r\left[\frac{(m-r)(m-r-1)(nPx)^{r+2}}{2!}\right] - C_m^r\left[\frac{(m-r)(m-r-1)(m-r-2)(nPx)^{r+3}}{3!}\right] + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Reexpresemos el valor de las combinaciones:

$$C_m^r = \frac{m!}{r!\,(m-r)!}.$$

Sustituyamos en nuestra expresión:

$$\overset{\underline{\quad[r]\quad}}{nP(x,x,\ldots..x)} = \frac{m!}{r!\,(m-r)!}.(nPx)^r - \frac{m!}{r!\,(m-r)!}.[(m-r)(nPx)^{r+1}] + \frac{m!}{r!\,(m-r)!}.\left[\frac{(m-r)(m-r-1)(nPx)^{r+2}}{2!}\right] - \frac{m!}{r!\,(m-r)!}.\left[\frac{(m-r)(m-r-1)(m-r-2)(nPx)^{r+3}}{3!}\right] + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Aquí lo importante es modificar a partir del segundo miembro:

$$\frac{m!(m-r)}{r!\,(m-r)!} = \frac{m!(m-r)}{r!\,(m-r)(m-r-1)!} = \frac{m!}{r!(m-r-1)!} = \frac{(r+1)\,m!}{(r+1)!(m-r-1)!} = (r+1)\,C_m^{r+1}$$

Veamos el tercer miembro:

$$\frac{m!(m-r)(m-r-1)}{r!\,(m-r)!\,2!} = \frac{m!(m-r)(m-r-1)}{r!\,(m-r)(m-r-1)(m-r-2)!\,2!} = \frac{m!}{r!(m-r-2)!\,2!} = \frac{(r+2)(r+1)m!}{(r+2)!(m-r-2)!\,2!}.$$

$$= \frac{(r+2)(r+1)\,C_m^{r+2}}{2!}$$

Así continuamos , reordenamos y regresamos:

$$\overset{[r]}{\overline{nP(x,x,.....x)}} = (nPx)^r C_m^r - (r+1)(nPx)^{r+1} C_m^{r+1} + \frac{(r+2)(r+1)(nPx)^{r+2} C_m^{r+2}}{2!} - ....$$

Si ahora dejamos de suponer que todos tiene la misma edad y volvemos a realidad de que se tienen edades distintas.

Se tienen tantos grupos de vida como combinaciones de m vidas tomadas de r en r,de r+1 en r+1.de r+2 en r+2,......

De esta manera se tiene varias sumas las cuales denotaremos como:

Z^{r+t} con t=0,1,2,....

$Z^r = (nPx)^r C_m^r$

$Z^{r+1} = (nPx)^{r+1} C_m^{r+1}$

$Z^{r+2} = (nPx)^{r+2} C_m^{r+2}$

.

.

.

Regresando tenemos:

$$\overset{[r]}{\overline{nP(x,x,.....x)}} = Z^r - (r+1) Z^{r+1} + \frac{(r+2)(r+1) Z^{r+2}}{2!} - ....$$

Si factorizamos Z^r:

$$\overset{[r]}{\overline{nP(x,x,.....x)}} = Z^r \left[1 - (r+1) Z^1 + \frac{(r+2)(r+1) Z^2}{2!} - ....\right.$$

Si podemos observar es el desarrollo de un binomio de Newton:

$$(1+Z)^{-(r+1)} = 1 - (r+1) Z^1 + \frac{(r+2)(r+1) Z^2}{2!} - ....$$

Regresando tenemos las siguientes dos expresiones:

$$\boxed{\overset{[r]}{\overline{\mathbf{nP(x,x,.....x)}}} = \mathbf{Z^r} \left[(1+Z)^{-(r+1)}\right]}$$

$$\boxed{{}_nP\overline{(x,x,\ldots x)}^{[r]} = \frac{Z^r}{(1+Z)^{(r+1)}}}$$

Que son las expresiones para **exactamente** r vidas.

4.10.2 Método Z para probabilidades de supervivencia de al menos r vidas.

El termino lógico al menos significa que pueden sobrevivir exactamente r o r+1 o r+2 o....

Por lo que nuestra expresión quedaría:

$$nP\,\overline{(x_1x_2,\ldots x_m)}^{r} = nP\,\overline{(x_1x_2,\ldots x_m)}^{[r]} + nP\,\overline{(x_1x_2,\ldots x_m)}^{[r+1]} + \ldots$$

Lo que es lo mismo:

$$nP\,\overline{(x_1x_2,\ldots x_m)}^{r} = \frac{Z^r}{(1+Z)^{(r+1)}} + \frac{Z^{r+1}}{(1+Z)^{(r+2)}} + \frac{Z^{r+2}}{(1+Z)^{(r+3)}} + \ldots$$

Si observamos bien esto es una progresión geométrica decreciente con un numero infinito de términos donde r+t > m

Por lo cual nos queda:

$$nP\,\overline{(x_1x_2,\ldots x_m)}^{r} = \frac{\dfrac{Z^r}{(1+Z)^{(r+1)}}}{1-\dfrac{Z}{(1+Z)}} = \frac{\dfrac{Z^r}{(1+Z)^{(r+1)}}}{\dfrac{(1+Z)-Z}{(1+Z)}} = \frac{\dfrac{Z^r}{(1+Z)^{(r+1)}}}{\dfrac{1}{(1+Z)}}$$

$$\boxed{nP\,\overline{(x_1x_2,\ldots x_m)}^{r} = \frac{Z^r}{(1+Z)^r}}$$

Desarrollando:

$$(1+Z)^{-r} = 1-(r)\,Z^1 + \frac{(r)(r+1)}{2!}Z^2 - \ldots$$

Regresando:

$$\overline{\quad r \quad}$$
$$nP\,(x_1x_2,\ldots x_m) = Z^r\left[1-(r)\,Z^1+\frac{(r)(r+1)}{2!}Z^2-\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\overline{\quad r \quad}\\ nP\,(x_1x_2,\ldots x_m) = Z^r-(r)\,Z^{r+1}+\dfrac{(r)(r+1)}{2!}Z^{r+2}-\ldots\ldots\ldots\,]\end{array}}$$

4.11 Probabilidades Contingentes

Habrá que abordar en esta sección las funciones contingentes, posteriormente se hará el estudio sobre funciones contingentes compuestas, en ambas se pone de manifiesto el orden en que morirán los integrantes del grupo.

El primer caso (las funciones contingentes) tienen como característica principal que se toma de base a uno de los individuos que componen el grupo.

El segundo caso (funciones contingentes compuestas) toma el orden de muerte pero tomando como base más de uno de los componentes del grupo.

Será importante ver las probabilidades contingentes que involucra dos vidas , tres vidas, cuatro vidas, etc.

4.11.1 Probabilidades contingentes que involucran dos vidas

Pasemos directamente al estudio ¿Cual será la probabilidad de que dadas dos vidas (x) y (y) ,(x) fallezca en el momento t estando (y) con vida?

Analicemos:

Yo sugiero la siguiente expresión:

$\mu x+t\ tPxtPy$

¿Porque?

La probabilidad de que (x) llegue con vida al instante t y que muera en ese instante esta dado por:
$\mu x+ttPx$

Y la probabilidad de que (y) llegue al instante y+t ,no me importa lo que pase después , lo único que necesito garantizar es que llegue a ese instante.

tPy

Observemos un resultado obtenido:

$$n/mq_{x_1x_2\ldots x_m} = \int_n^m \mu_{x_1+t:x_2+t\ldots\ldots x_m+t}(tP_{x_1x_2\ldots x_m})dt$$

En nuestro caso tenemos dos vidas y si en este caso integramos de n a n+1 obtenemos:

$$\mathbf{n/\overset{1}{q}xy = \int_{t=n}^{n+1} \mu x+t(tPxy)dt}$$

Si cambiamos los limites de integración obtenemos otras expresiones, veamos:

$$\mathbf{\overset{1}{q}xy = \int_0^1 \mu x+t(tPxy)dt}$$

$$\mathbf{n\overset{1}{q}xy = \int_0^n \mu x+t(tPxy)dt}$$

$$\mathbf{n/m\overset{1}{q}xy = \int_n^{n+m} \mu x+t(tPxy)dt}$$

$$\mathbf{n/1\overset{1}{q}xy = \int_{t=n}^{n+1} \mu x+t(tPxy)dt}$$

Si ahora conservando los mismos supuestos sobre (x) estando (y) muerto tenemos:

Tomemos la tercera integral:

$$n\overset{2}{q}xy = \int_0^n \mu x+t(tPx)(1-tPy)dt$$

Desarrollando y separando tenemos:

$${}_nq^{2}_{xy} = \int_0^n \mu_{x+t}({}_tP_x)(1-{}_tP_y)dt$$

$${}_nq^{2}_{xy} = \int_0^n \mu_{x+t}({}_tP_x)dt - \int_0^n \mu_{x+t}({}_tP_{xy})dt$$

La primera integral es un resultado de vida simple:

$$\mathbf{{}_nq^{2}_{xy} = {}_nq_x - {}_nq^{1}_{xy}}$$

Tomemos nuevamente nuestra integral y cambiemos nuestros limites de $[0,\infty)$, tenemos como resultado cuando (x) fallece habiendo fallecido previamente (y).

$${}_\infty q^{2}_{xy} = \int_0^\infty \mu_{x+t}({}_tP_x)(1-{}_tP_y)dt$$

$${}_\infty q^{2}_{xy} = \int_0^\infty \mu_{x+t}({}_tP_x)dt - \int_0^\infty \mu_{x+t}({}_tP_{xy})dt$$

$${}_\infty q^{2}_{xy} = {}_\infty q_x - {}_\infty q^{1}_{xy}$$

Revisemos el primer sumando:

$${}_\infty q_x = \int_0^\infty \mu_{x+t}({}_tP_x)dt$$

Reexpresemos el contenido de la integral:

$${}_\infty q_x = \int_0^\infty \left(\frac{1}{l_{x+t}}\,\frac{(-dl_{x+t})}{dt}\right)\frac{(l_{x+t})dt}{l_x}$$

Saquemos fuera de la integral 1/lx y lo consideramos al final.

Cancelamos lo que se deba:

$$_{\infty}q_x = \left. -l_{x+t} \right|_0^{\infty}$$

$$_{\infty}q_x = \left. -l_{x+t} - (-l_{x+t}) \right|_0^{\infty}$$

$$_{\infty}q_x = -l_{x+\infty} - (-l_{x+0})$$

$$_{\infty}q_x = l_x$$

Regresamos con nuestro cociente obtenemos:

$$\boxed{_{\infty}q_x = l_x / l_x = 1}$$

Ahora regresamos a nuestra expresión y sustituyo:

$$_{\infty}q_{xy}^{2} = {}_{\infty}q_x - {}_{\infty}q_{xy}^{1}$$

$$_{\infty}q_{xy}^{2} = 1 - {}_{\infty}q_{xy}^{1}$$

Por complemento tendremos lo siguiente:

$$_{\infty}q_{xy}^{2} = {}_{\infty}q_{xy}^{1}$$

Este resultado es valido cuando nuestro limite superior es el infinito.

4.11.2 Probabilidades contingentes que involucran tres vidas

El primer caso es muy sencillo. Si tenemos tres vidas (x),(y) y (z) la probabilidad de que la primera de ellas fallezca en primer lugar una vez transcurridos n años esta dado por:

$$_nq_{xyz}^{1} = \int_0^n {}_tP_{xyz}\, \mu_{x+t}dt$$

Cuando se supone que (x) fallece en segundo lugar, el concepto se complica un poco, aquí habrá que utilizar el ultimo superviviente con exactamente una vida, ya que solamente una debe haber fallecido, sabiendo que (x) fallece segundo.

$${}_nq^{2}_{xyz} = \int_0^n {}_tP_x \, {}_t\overline{P}^{[1]}_{yz} \, \mu_{x+t}dt$$

Tomemos el segundo factor y resolvamos.

Aquí m=2 y r=1

$${}_t\overline{P}^{[1]}_{yz} = Z^1\,(1-2Z) = Z - 2Z^2 = {}_tP_y + {}_tP_z - 2({}_tP_{yz})$$

Regresamos a nuestra integral y sustituimos:

$${}_nq^{2}_{xyz} = \int_0^n {}_t\overline{P_x}\,({}_tP_y + {}_tP_z - 2{}_tP_{yz})\, \mu_{x+t}dt$$

Continuamos con nuestro desarrollo:

$${}_nq^{2}_{xyz} = \int_0^n {}_t\overline{P}_{xy} + {}_tP_{xz} - 2{}_tP_{xyz})\, \mu_{x+t}dt$$

Dividimos en tres integrales:

$${}_nq^{2}_{xyz} = \int_0^n {}_tP_{xy}\, \mu_{x+t}dt + \int_0^n {}_tP_{xz}\mu_{x+t}dt - 2\int_0^n {}_tP_{xyz}\, \mu_{x+t}dt$$

$$\mathbf{{}_nq^{2}_{xyz} = {}_nq^{1}_{xy} + {}_nq^{1}_{xz} - 2\, {}_nq^{1}_{xyz}}$$

El siguiente caso consiste en considerar nuevamente tres vidas, pero ahora se supondrá que (x) fallece una vez que (y) y (z) ya lo hicieron.

Integremos en el intervalo [0,∞)

$${}_\infty q^{3}_{xyz} = \int_0^\infty {}_t\overline{P}_x(1-{}_tP_y)\,(1-{}_tP_z)\, \mu_{x+t}dt$$

Desarrollando tenemos:

$$ {}_{\infty}q^{3}_{xyz} = \int_0^{\infty} (\overline{{}_tP_x}-{}_tP_{xy})\,(1-{}_tP_z)\,\mu_{x+t}dt $$

$$ {}_{\infty}q^{3}_{xyz} = \int_0^{\infty} \overline{{}_tP_x}-{}_tP_{xz}-{}_tP_{xy}+{}_tP_{xyz}\,\mu_{x+t}dt $$

Divido en cuatro integrales:

$$ {}_{\infty}q^{3}_{xyz} = \int_0^{\infty} {}_tP_x\mu_{x+t}dt - \int_0^{\infty}{}_tP_{xz}\mu_{x+t}dt - \int_0^{\infty}{}_tP_{xy}\mu_{x+t}dt + \int_0^{\infty}{}_tP_{xyz}\,\mu_{x+t}dt $$

$$ \mathbf{{}_{\infty}q^{3}_{xyz} = {}_{\infty}q_{x} - {}_{\infty}q^{1}_{xz} - {}_{\infty}q^{1}_{xy} + {}_{\infty}q^{1}_{xyz} =} $$

El primer sumando es igual a 1 por lo tanto otra expresión será:

$$ \mathbf{{}_{\infty}q^{3}_{xyz} = 1 - {}_{\infty}q^{1}_{xz} - {}_{\infty}q^{1}_{xy} + {}_{\infty}q^{1}_{xyz} =} $$

Veamos ahora el caso en que se quiere obtener la probabilidad de que (x) fallezca antes del ultimo superviviente de (y) y (z).

$$ {}_{\infty}q^{1}_{x:\overline{yz}} = \int_0^{\infty}{}_tP_x\mu_{x+t}\,{}_tP_{\overline{yz}}\,dt $$

$$ {}_{\infty}q^{1}_{x:\overline{yz}} = \int_0^{\infty}{}_tP_x\mu_{x+t}\,({}_tP_y+{}_tP_z-{}_tP_{yz})\,dt $$

Distribuimos y dividimos en tres integrales:

$$ {}_{\infty}q^{1}_{x:\overline{yz}} = \int_0^{\infty}{}_tP_{xy}\mu_{x+t}\,dt + \int_0^{\infty}{}_tP_{xz}\mu_{x+t}\,dt - \int_0^{\infty}{}_tP_{xyz}\mu_{x+t}\,dt $$

$$ \mathbf{{}_{\infty}q^{1}_{x:\overline{yz}} = {}_{\infty}q^{1}_{xy} + {}_{\infty}q^{1}_{xz} - {}_{\infty}q^{1}_{xyz}} $$

Veamos lo que sucede con el resultado anterior y este:

$$ {}_{\infty}\overset{3}{q}_{xyz} = 1 - {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xz} - {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xy} + {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xyz} = 1 - ({}_{\infty}\overset{!}{q}_{xz} - {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xy} + {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xyz}) $$

$$ {}_{\infty}\overset{1}{q}_{\overline{x:yz}} = {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xy} + {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xz} - {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xyz} $$

Si observamos nuestro resultado nos quedaría:

$$ {}_{\infty}\overset{3}{q}_{xyz} = 1 - ({}_{\infty}\overset{!}{q}_{xz} + {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xy} + {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xyz}) = 1 - {}_{\infty}\overset{1}{q}_{\overline{x:yz}} $$

El siguiente resultado:

$$ {}_{\infty}\overset{\overset{1}{\frown}}{q}_{xy:z} = {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xyz} + {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xyz} $$

Representa la probabilidad conjunta de (x) y (y) de fallecer antes que la tercera (z)

Otro resultado importante lo representaría:

$$ {}_{\infty}\overset{1:2}{q}_{x:yz} = {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xyz} + {}_{\infty}\overset{2}{q}_{xyz} $$

Que representa la probabilidad de que dadas tres vidas (x) (y) y (z) la persona de edad (x), fallece en primero ó segundo lugar

$$ {}_{\infty}\overset{1:2}{q}_{x:yz} = {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xyz} + {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xy} + {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xz} - 2\,{}_{\infty}\overset{!}{q}_{xyz} $$

A partir del segundo sumando es el segundo resultado obtenido en esta sección.

$$ {}_{\infty}\overset{1:2}{q}_{x:yz} = {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xy} + {}_{\infty}\overset{!}{q}_{xz} - 2\,{}_{\infty}\overset{!}{q}_{xyz} $$

Pasando a otra expresión tenemos:

$$ {}_{n}\overset{2}{q}_{\overline{xy}:z} = \int_0^n (1 - {}_{t}P_{z})({}_{t}P_{\overline{xy}}\, \mu_{\overline{x+t:y+t}})\,dt $$

Solo se considera cuando hay una vida que tenga sentido:

$${}_n\overset{2}{q}_{\overline{xy}:z} = \int_0^n (1-{}_tP_z)({}_tP_{\overline{xy}}\,\mu_{\overline{x+t:y+t}})dt$$

$${}_n\overset{2}{q}_{\overline{xy}:z} = \int_0^n(1-{}_tP_z)({}_tP_x\mu_{x+t} + {}_tP_y\mu_{y+t} - {}_tP_{xy}\,\mu_{x+t:y+t})dt$$

$${}_n\overset{2}{q}_{\overline{xy}:z} = \int_0^n {}_tP_x\mu_{x+t} + {}_tP_y\mu_{y+t} - {}_tP_{xy}\,\mu_{x+t:y+t} - {}_tP_{xz+t}\mu_{x+t}\,dt$$

$$- {}_tP_{yz}\mu_{y+t} + {}_tP_{xyz}\mu_{x+t:y+t}$$

$${}_n\overset{2}{q}_{\overline{xy}:z} = {}_nq_x + {}_nq_y - {}_nq_{xy} - {}_nq_{xz} - {}_nq_{yz} + {}_nq^{1}_{xy:z}$$

$$\mathbf{{}_n\overset{2}{q}_{\overline{xy}:z} = {}_nq_x + {}_nq_y - {}_nq_{xy} - ({}_nq_{xz} + {}_nq_{yz} - {}_nq^{1}_{xy:z}}$$

Representa la probabilidad de que el último superviviente de (x) y (y) fallezca dentro de n años habiendo muerto (z).

4.11.3 Probabilidades contingentes que involucran cuatro vidas

Observemos la siguiente expresión:

$${}_\infty\overset{2}{q}_{xyzw} = \int_0^\infty {}_tP^{[2]}_{\overline{yzw}}\;{}_tP_x\mu_{x+t}dt$$

Representa la probabilidad que (x) fallezca en segundo lugar del grupo.

Resolviendo por el último superviviente:

$${}_tP^{[2]}_{\overline{yzw}} = Z^2(1-3z) = Z^2 - 3Z^3 = {}_tP_{yz} + {}_tP_{yw} + {}_tP_{zw} - 3\,{}_tP_{yzw}$$

Sustituyendo:

$${}_{\infty}q^{2}_{xyzw} = \int_0^{\infty} ({}_tP_{yz} + {}_tP_{yw} + {}_tP_{zw} - 3\,{}_tP_{yzw})\,{}_tP_x \mu_{x+t} dt$$

Distribuyendo:

$${}_{\infty}q^{2}_{xyzw} = \int_0^{\infty} {}_tP_{xyz}\mu_{x+t} dt + \int_0^{\infty} {}_tP_{xyw}\mu_{x+t} dt + \int_0^{\infty} {}_tP_{xzw}\mu_{x+t} dt - 3\int_0^{\infty} {}_tP_{xyzw}\mu_{x+t} dt$$

Reexpresando:

$${}_{\infty}q^{2}_{xyzw} = {}_{\infty}q^{1}_{xyz} + {}_{\infty}q^{1}_{xyw} + {}_{\infty}q^{1}_{xzw} - 3\,{}_{\infty}q^{1}_{xyzw}$$

Ahora observemos el siguiente resultado

$${}_{\infty}q^{3}_{xyzw} = \int_0^{\infty} \overline{{}_tP_{yzw}}^{[1]}\,{}_tP_x \mu_{x+t} dt$$

Representa la probabilidad que (x) fallezca en tercer lugar del grupo.

Resolviendo por el último superviviente:

$$\overline{{}_tP_{yzw}}^{[1]} = Z^1(1-2Z+3Z^2) = Z - 2Z^2 + 3Z^3 = {}_tP_y + {}_tP_z + {}_tP_w - 2\,{}_tP_{yz} - 2{}_tP_{yw} -$$

$$2{}_tP_{zw} + 3P_{yzw}$$

Sustituyendo:

$${}_{\infty}q^{3}_{xyzw} = \int_0^{\infty} ({}_tP_y + {}_tP_z + {}_tP_w - 2\,{}_tP_{yz} - 2{}_tP_{yw} - 2{}_tP_{zw} + 3P_{yzw})\,{}_tP_x \mu_{x+t} dt$$

Distribuyendo:

$${}_{\infty}q^{2}_{xyzw} = \int_0^{\infty} {}_tP_{xy}\mu_{x+t} dt + \int_0^{\infty} {}_tP_{xz}\mu_{x+t} dt + \int_0^{\infty} {}_tP_{xw}\mu_{x+t} dt - 2\int_0^{\infty} {}_tP_{xyz}\mu_{x+t} dt$$

$$- 2\int_0^{\infty} {}_tP_{xyw}\mu_{x+t} dt - 2\int_0^{\infty} {}_tP_{xzw}\mu_{x+t} dt + 3\int_0^{\infty} {}_tP_{xyzw}\mu_{x+t} dt$$

Reexpresando:

$$ {}_\infty q^{3}_{xyzw} = {}_\infty q^{1}_{xy} + {}_\infty q^{1}_{xz} + {}_\infty q^{1}_{xw} - 2\,{}_\infty q^{1}_{xyz} - 2\,{}_\infty q^{1}_{xyw} - 2\,{}_\infty q^{1}_{xzw} + 3\,{}_\infty q^{1}_{xyzw} $$

Otro resultado importante es:

$$ {}_\infty q^{1:2:3}_{x\ yzw} = {}_\infty q^{1}_{xyzw} + {}_\infty q^{2}_{xyzw} + {}_\infty q^{3}_{xyzw} $$

Continuando con esta equivalencia, observemos que los resultados de la derecha ya los obtuvimos, sustituyamos su equivalencia.

$$ {}_\infty q^{1:2:3}_{x\ yzw} = {}_\infty q^{1}_{xyzw} + {}_\infty q^{1}_{xyz} + {}_\infty q^{1}_{xzw} + {}_\infty q^{1}_{xyw} - 3\,{}_\infty q^{1}_{xyzw} $$

$$ + {}_\infty q^{1}_{xy} + {}_\infty q^{1}_{xz} + {}_\infty q^{1}_{xw} - 2\,{}_\infty q^{1}_{xyz} - 2\,{}_\infty q^{1}_{xyw} - 2\,{}_\infty q^{1}_{xzw} + 3\,{}_\infty q^{1}_{xyzw} $$

Simplificando:

$$ {}_\infty q^{1:2:3}_{x\ yzw} = {}_\infty q^{1}_{xy} + {}_\infty q^{1}_{xz} + {}_\infty q^{1}_{xw} - {}_\infty q^{1}_{xyz} - {}_\infty q^{1}_{xyw} - {}_\infty q^{1}_{xzw} + {}_\infty q^{1}_{xyzw} $$

4.12 Evaluación de Probabilidades Contingentes

Lo más recomendable para evaluar probabilidades contingentes es hacerlo por medio de la Ley de mortalidad de Gompertz y Makeham . Nosotros procederemos a hacerlo primero por Gompertz y posteriormente por Makeham.

4.12.1 Probabilidades contingentes bajo la Ley de Gompertz

Sabemos que bajo Gompertz la fuerza de mortalidad esta dado por

$\mu x = BC^x$

Siguiendo el mismo principio que se utilizó en la sección anterior procederemos a hacer el cálculo de la expresión general para m vidas.

$$nqx_1x_2...x_m = \int_0^n tPx_1x_2...x_m \, \mu x_1{+}t \, dt$$

Ahora sustituyamos el valor de nuestra fuerza de mortalidad:

$$nqx_1x_2...x_m = \int_0^n tPx_1x_2...x_m \, BC^{x1+t} \, dt$$

$$nqx_1x_2...x_m = \int_0^n tPx_1x_2...x_m \, BC^{x1}C^{+t} \, dt$$

Saquemos de la integral $\mathbf{C^x}$ esto lo podemos hacer ya que no depende de la **t**.

$$nqx_1x_2...x_m = C^{x1}\int_0^n tPx_1x_2...x_m \, BC^t \, dt$$

Ahora multipliquemos por un uno disfrazado, numerador y denominador, el denominador lo sacamos directamente de la integral.

$$C^{x1} + C^{x2} + ... + C^{xm}$$

Regresamos:

$$nqx_1x_2...x_m = \frac{C^{x1}}{C^{x1} + C^{x2} + ... + C^{xm}} \int_0^n tPx_1x_2...x_m \, BC^t \, (C^{x1} + C^{x2} + ... + C^{xm})dt$$

Distribuimos:

$$nqx_1x_2...x_m = \frac{C^{x1}}{C^{x1} + C^{x2} + ... + C^{xm}} \int_0^n tPx_1x_2...x_m \, (BC^tC^{x1} + BC^t C^{x2} + ... + BC^t C^{xm})dt$$

$$nqx_1x_2...x_m = \frac{C^{x1}}{C^{x1} + C^{x2} + ... + C^{xm}} \int_0^n tPx_1x_2...x_m \, (BC^{x1+t} + BC^{x2+t} + ... + BC^t C^{xm+t})dt$$

$$nqx_1x_2...x_m = \frac{C^{x1}}{C^{x1} + C^{x2} + ... + C^{xm}} \int_0^n tPx_1x_2...x_m \, (\mu x_1{+}t + \mu x_2{+}t + ... + \mu x_{1m}{+}t)dt$$

Y ya demostramos que la suma de las mortalidades es igual a la mortalidad de la suma:

$$\overset{!}{{}_nq}_{x_1x_2\ldots x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{x1} + C^{x2} + \ldots + C^{xm}} \int_0^n {}_tP_{x_1x_2\ldots x_m} (\mu_{x_1+t} : x_2+t : \ldots : x_m+t)\,dt$$

El miembro de la derecha ya lo conocemos:

$$\boxed{\overset{!}{{}_nq}_{x_1x_2\ldots x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{x1} + C^{x2} + \ldots + C^{xm}}\ {}_nq_{x_1x_2\ldots x_m}}$$

Pero bajo Gompertz tenemos una equivalencia respecto a m vidas.

$$\boxed{\overset{!}{{}_nq}_{x_1x_2\ldots x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{w}}\ {}_nq_w}$$

Donde w es la edad equivalente.

Debemos observar que el grupo de vida pueden ser evaluadas mediante la vida simple (w) y las funciones de vida conjunta pueden ser evaluadas directamente de las tablas de vida simple, para esto es necesario determinar primero la edad equivalente a la edad simple desde la relación observada en Ley de Gompertz.

$$\boxed{\overset{!}{{}_nq}_{x_1x_2\ldots x_m} = \frac{\mu_{x1}}{\mu_w}\ {}_nq_w}$$

Si tomáramos nuevamente nuestra expresión inicial pero ahora integremos de 0 a ∞ obtendremos:

$$\overset{!}{{}_\infty q}_{x_1x_2\ldots x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{x1} + C^{x2} + \ldots + C^{xm}} \int_0^\infty {}_tP_{x_1x_2\ldots x_m} (\mu_{x_1+t} : x_2+t : \ldots : x_m+t)\,dt$$

Si obsevamos el segundo factor es igual a uno, lo demostramos para vida simple, por lo tanto será multiplicar m veces el uno.

Dado lo anterior obtenemos:

$$
{}_{\infty}q_{\overset{!}{x_1}x_2\ldots x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{x1} + C^{x2} + \ldots + C^{xm}}
$$

Si regresamos a nuestra expresión anterior y sustituimos nuestra nueva equivalencia obtenemos:

$$
{}_{n}q_{\overset{!}{x_1}x_2\ldots x_m} = {}_{\infty}q_{\overset{!}{x_1}x_2\ldots x_m}\ {}_{n}q_{x_1x_2\ldots x_m}
$$

4.12.2 Evaluación de probabilidades contingentes bajo la ley de Makeham

Sabemos que bajo Gompertz la fuerza de mortalidad esta dado por:

$\mu x = A + BC^x$

Siguiendo el mismo principio que se utilizo bajo Gompertz procederemos a hacer el calculo de la expresión general para m vidas.

$$
{}_{n}q_{\overset{!}{x_1}x_2\ldots x_m} = \int_0^n {}_{t}P_{x_1x_2\ldots x_m}\, \mu_{x_1+t}\, dt
$$

Ahora sustituyamos el valor de nuestra fuerza de mortalidad

$$
{}_{n}q_{\overset{!}{x_1}x_2\ldots x_m} = \int_0^n {}_{t}P_{x_1x_2\ldots x_m} (A+BC^{x1+t})dt
$$

$$
{}_{n}q_{\overset{!}{x_1}x_2\ldots x_m} = \int_0^n {}_{t}P_{x_1x_2\ldots x_m} (A+BC^{x1}C^{+t})dt
$$

Dividamos en dos integrales y saquemos de la integral **A** y **C^x** esto lo podemos hacer ya que no depende de la t.

$$
{}_{n}q_{\overset{!}{x_1}x_2\ldots x_m} = A\int_0^n {}_{t}P_{x_1x_2\ldots x_m}\, dt + C^{x1}\int_0^n {}_{t}P_{x_1x_2\ldots x_m}\, BC^{t}\, dt
$$

Ahora multipliquemos por un uno disfrazado numerador y denominador, el denominador lo sacamos directamente de la integral. También observemos que la integral que multiplica a la **A** es una esperanza de vida completa temporal.

$$C^{x1} + C^{x2} + ... + C^{xm}$$

Regresamos

$$ {}_n q_{x_1 x_2 \ldots x_m} = A\,\mathring{e}_{x_1 x_2 \ldots x_m : \overline{n|}} + \frac{C^{x1}}{C^{x1} + C^{x2} + ... + C^{xm}} \int_0^n {}_tP_{x_1 x_2 \ldots x_m}\, BC^t\,(C^{x1} + C^{x2} + ... + C^{xm})\,dt $$

Distribuimos:

$$ {}_n q_{x_1 x_2 \ldots x_m} = A\,\mathring{e}_{x_1 x_2 \ldots x_m : \overline{n|}} + \frac{C^{x1}}{C^{x1} + C^{x2} + ... + C^{xm}} \int_0^n {}_tP_{x_1 x_2 \ldots x_m}\,(BC^tC^{x1} + BC^t C^{x2} + ... + BC^t C^{xm})\,dt $$

$$ {}_n q_{x_1 x_2 \ldots x_m} = A\,\mathring{e}_{x_1 x_2 \ldots x_m : \overline{n|}} + \frac{C^{x1}}{C^{x1} + C^{x2} + ... + C^{xm}} \int_0^n {}_tP_{x_1 x_2 \ldots x_m}\,(BC^{x1+t} + BC^{x2+t} + ... + BC^t C^{xm+t})\,dt $$

Para obtener nuestra fuerza de mortalidad para Makeham necesitamos sumar una **A**, a cada uno de los sumandos y al mismo tiempo restarlos para que no afecte nuestro resultado.

$$ {}_n q_{x_1 x_2 \ldots x_m} = A\,\mathring{e}_{x_1 x_2 \ldots x_m : \overline{n|}} + \frac{C^{x1}}{C^{x1} + .. + C^{xm}} \int_0^n {}_tP_{x_1 x_2 \ldots x_m}\,(A + BC^{x1+t} + A + BC^{x2+t} + ... + A + BC^t C^{xm+t}) - mA)\,dt $$

Distribuimos y simplificamos:

$$ {}_n q_{x_1 x_2 \ldots x_m} = A\,\mathring{e}_{x_1 x_2 \ldots x_m : \overline{n|}} + \frac{C^{x1}}{C^{x1} + ... + C^{xm}} \int_0^n {}_tP_{x_1 x_2 \ldots x_m}(\mu_{x_1+t} + \mu_{x_2+t} + ... + \mu_{x_{1m}+t}) - mA)\,dt $$

Distribuimos el último sumando:

$$ {}_n q_{x_1 x_2 \ldots x_m} = A\,\mathring{e}_{x_1 x_2 \ldots x_m : \overline{n|}} + \frac{C^{x1}}{C^{x1} + ... + C^{xm}} \int_0^n {}_tP_{x_1 x_2 \ldots x_m}(\mu_{x_1+t} + \mu_{x_2+t} + ... + \mu_{x_{1m}+t})\,dt $$

$$ - mA\int_0^n {}_tP_{x_1 x_2 \ldots x_m}\,dt $$

Reexpresamos nuestro resultado:

$$\overset{!}{n}q_{x_1x_2\ldots x_m} = A\mathring{e}_{x_1x_2\ldots x_m:\overline{n|}} + \frac{C^{x1}}{C^{x1}+\ldots.+C^{xm}}\int_0^n {}_tP_{x_1x_2\ldots x_m}(\mu_{x_1+t}+\mu_{x_2+t}+\ldots.+\mu_{x_{1m}+t})dt$$

$$- mA\,\mathring{e}_{x_1x_2\ldots x_m:\overline{n|}}$$

$$\overset{!}{n}q_{x_1x_2\ldots x_m} = A\mathring{e}_{x_1x_2\ldots x_m:\overline{n|}} + \frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+\ldots.+C^{xm}}\left(nq_{x_1x_2\ldots x_m} - mA\,\mathring{e}_{x_1x_2\ldots x_m:\overline{n|}} \right)$$

A estas alturas ya sabemos la equivalencia bajo Makeham, simplemente apliquemos:

$$\overset{!}{n}q_{x_1x_2\ldots x_m} = A\mathring{e}_{ww\ldots w:\overline{n|}} + \frac{C^{x1}}{mC^{w}}\left(nq_{ww..w} - mA\,\mathring{e}_{ww..w:\overline{n|}} \right)$$

Al igual que en vida simple hacemos un cambio de variable $-\log S = A$

Sustituyamos:

$$\overset{!}{n}q_{x_1x_2\ldots x_m} = -\log S\mathring{e}_{ww\ldots w:\overline{n|}} + \frac{C^{x1}}{mC^{w}}\left(nq_{ww..w} + m\log S\,\mathring{e}_{ww..w:\overline{n|}} \right)$$

Introducimos 1/m dentro del paréntesis.

$$\overset{!}{n}q_{x_1x_2\ldots x_m} = -\log S\mathring{e}_{ww\ldots w:\overline{n|}} + \frac{C^{x1}}{C^{w}}\left(\frac{1}{m} nq_{ww..w} + \log S\,\mathring{e}_{ww..w:\overline{n|}} \right)$$

Cambiamos el orden:

$$\boxed{\overset{!}{n}q_{x_1x_2\ldots x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{w}}\left(\frac{1}{m} nq_{ww..w} + \log S\,\mathring{e}_{ww..w:\overline{n|}} \right) - \log S\mathring{e}_{ww\ldots w:\overline{n|}}}$$

Ahora cambiamos la n por ∞ y obtenemos (el resultado de la esperanza de vida se definió en un principio).

$$\overset{!}{{}_{\infty}q}_{x_1x_2\ldots x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{w}}\left(\frac{1}{m}\,{}_{\infty}q_{ww..w} + \log S\,\overset{\circ}{e}_{ww..w}\right) - \log S\,\overset{\circ}{e}_{ww...w}$$

Si observamos el primer factor dentro del paréntesis es igual a uno, lo demostramos para vida simple, por lo tanto será multiplicar m veces el uno.

$$\overset{!}{{}_{\infty}q}_{x_1x_2\ldots x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{w}}\left(\frac{1}{m} + \log S\,\overset{\circ}{e}_{ww..w}\right) - \log S\,\overset{\circ}{e}_{ww...w}$$

Obteniendo otra equivalencia.

4.13 Probabilidades contingentes compuestas

Aquí debe escribirse el orden en que ocurren las muertes.

Veamos que representa:

$${}_{\infty}q^{\;2}_{\underset{1}{x}yz} = \int_0^{\infty} (1-\overline{{}_tP_x})\,{}_tP_{yz}\;\mu_{y+t}dt$$

Distribuimos:

$${}_{\infty}q^{\;2}_{\underset{1}{x}yz} = \int_0^{\infty} {}_tP_{yz}\;\mu_{y+t}dt \;-\; \int_0^{\infty} \overline{{}_tP_{xyz}}\;\mu_{y+t}dt$$

$${}_{\infty}q^{\;2}_{\underset{1}{x}yz} = {}_{\infty}q^{\;1}_{yz} - {}_{\infty}q^{\;1}_{xyz}$$

Es importante hacer notar que los números de arriba indican el orden en que ocurren otras muertes y los de abajo los que ya fallecieron.

$${}_{\infty}\overset{2}{q}_{xy\underset{1}{z}w} = \int_0^\infty (1-\overline{t}Pw)tPxyz\ \mu x+tdt$$

Distribuimos:

$${}_{\infty}\overset{2}{q}_{xy\underset{1}{z}w} = \int_0^\infty tPxyz\ \mu x+tdt- \int_0^\infty tPxyzw\ \mu x+tdt$$

$$\mathbf{{}_{\infty}\overset{2}{q}_{xy\underset{1}{z}w} = {}_{\infty}\overset{1}{q}_{xyz} - {}_{\infty}\overset{1}{q}_{xyzw}}$$

Veamos otro resultado:

$${}_{\infty}\overset{3}{q}_{x\underset{2}{y}\underset{1}{z}w} = \int_0^\infty (\overline{1}-tPz)(1-tPy)tPxw\ \mu x+tdt$$

$${}_{\infty}\overset{3}{q}_{x\underset{2}{y}\underset{1}{z}w} = \int_0^\infty (\overline{t}Pxw\ \mu x+t - tPxzw\ \mu x+tdt)(1-tPy)dt$$

Distribuimos

$${}_{\infty}\overset{3}{q}_{x\underset{2}{y}\underset{1}{z}w} = \int_0^\infty (\overline{t}Pxw\ \mu x+t - tPxzw\ \mu x+t - tPxyw\ \mu x+t +tPxyzw\ \mu x+t)dt$$

Dividimos

$${}_{\infty}\overset{3}{q}_{x\underset{2}{y}\underset{1}{z}w} = \int_0^\infty tPxw\ \mu x+t\ dt- \int_0^\infty tPxzw\ \mu x+t\ dt -\int_0^\infty tPxyw\ \mu x+t\ dt +\int_0^\infty tPxyzw\ \mu x+tdt$$

$$\mathbf{{}_{\infty}\overset{3}{q}_{x\underset{2}{y}\underset{1}{z}w} = {}_{\infty}\overset{1}{q}_{xw} - {}_{\infty}\overset{1}{q}_{xzw} - {}_{\infty}\overset{1}{q}_{xyw} + {}_{\infty}\overset{1}{q}_{xyzw}}$$

CAPITULO V

CAPITULO V

ANUALIDADES

5.1 Introducción

Como se hizo en el Capítulo IV, generalizando los resultados obtenidos en la sección de supervivencia y mortalidad y llevarlos a m vidas, de la misma forma la unidad II correspondiente al curso anterior se puede generalizar a m vidas. Cuyo objetivo fundamental es calcular el valor presente de cantidades futuras cuyo pago es contingente a la supervivencia de dos o más vidas.

La técnica para evaluar las anualidades de grupo, se hace de manera similar a como se hizo en vida simple.

El cálculo de anualidades es importante ya que, una vez que se ha calculado la prima neta única se puede obtener relaciones de estas con seguros, primas y reservas.

5.2 Seguro Dotal puro

Sabemos que $lx_1x_2.....x_m$ personas con edades $x_1,,x_2,....,x_m$ contribuyen con una cantidad igual para integrar un fondo que provea de una unidad monetaria a cada uno de los que sobrevivan a n años.

Una vez transcurrido este periodo habrá $lx_1+n:x_2+n:....:x_m+n$ sobrevivientes.

La forma como denotaremos el seguro dotal puro será $nEx_1x_2...x_m$ como la contribución de cada una de las $lx_1x_2..x_m$ personas .

Comencemos para dos vidas (x) y (y)

$$tExy = V^t tPxy = V^t \frac{lx+t:y+t}{lxy}$$

Multiplicamos numerador y denominador por $V^{x+y/2}$.

$$tExy = V^t \frac{lx+t:y+t\ (V^{x+y/2})}{lxy\ \ (V^{x+y/2})}$$

$$tExy = \frac{V^{(x+y/2)+t}}{V^{x+y/2}} \frac{lx+t:y+t}{lxy}$$

$$\boxed{{}_tE_{xy} = \frac{D_{x+t:y+t}}{D_{xy}}}$$

La P.N.U. para dos vidas estará dado por:

$$\boxed{A_{xy:\overset{1}{n|}}}$$

La **P.N.U.** para **m vidas** estará dado por:

$${}_tE_{x_1x_2..x_m} = V^t\,{}_tP_{x_1x_2..x_m} = V^t \frac{l_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t}}{l_{x_1x_2..x_m}}$$

Multiplicamos numerador y denominador por $V^{x1+x2+..+xm/m}$.

$${}_tE_{x_1x_2..x_m} = V^t \frac{l_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t}}{l_{x_1x_2..x_m}} \frac{(V^{x1+x2+..+xm/m})}{(V^{x1+x2+..+xm/m})}$$

$${}_tE_{x_1x_2..x_m} = \frac{V^{(x1+x2+..+xm/m)+t}}{V^{x1+x2+..+xm/m}} \frac{l_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t}}{l_{x_1x_2..x_m}}$$

$$\boxed{{}_tE_{x_1x_2..x_m} = \frac{D_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t}}{D_{x_1x_2..x_m}}}$$

La prima neta única para **m vidas** esta dado por:

$$\boxed{A_{x_1x_2..x_m:\overset{1}{n|}}}$$

El uno en la parte superior de la n representa que el pago unitario se llevara a cabo solo si transcurren n años.

5.3 Anualidades pagaderas una vez por periodo

Representa una serie de pagos de $1.0 efectuados al finalizar cada año y siguen mientras $(x_1),(x_2),...,(x_m)$ sobrevivan.

5.3.1 Anualidad vitalicia.

Analicemos para dos vidas (x),(y)

$$a_{xy} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_{xy} = \sum_{t=1}^{\infty} V^t\, {}_tP_{xy} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_{x+t:y+t}}{D_{xy}}$$

Definamos un conmutado:

$$\boxed{\begin{aligned} N_{xy} &= \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t:y+t} \\ N_{x+1:y+1} &= \sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t:y+t} \end{aligned}}$$

Regresando:

$$\boxed{a_{xy} = \frac{N_{x+1:y+1}}{D_{xy}}}$$

Resolvamos esta anualidad para **m vidas**

$$a_{x_1x_2..x_m} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_{x_1x_2..x_m} = \sum_{t=1}^{\infty} V^t\, {}_tP_{x_1x_2..x_m} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t}}{D_{x_1x_2..x_m}}$$

Definamos un conmutado:

$$\boxed{\begin{aligned} N_{x_1x_2..x_m} &= \sum_{t=0}^{\infty} D_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t} \\ N_{x_1+1:x_2+1:..x_m+1} &= \sum_{t=1}^{\infty} D_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t} \end{aligned}}$$

Regresando:

$$\boxed{a_{x_1x_2..x_m} = \frac{N_{x_1+1:x_2+1:..x_m+1}}{D_{x_1x_2..x_m}}}$$

5.3.2 Anualidad vitalicia anticipada

Analicemos para dos vidas (x),(y)

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_{xy} = \sum_{t=0}^{\infty} V^t\,{}_tP_{xy} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_{x+t:y+t}}{D_{xy}}$$

Regresando:

$$\boxed{\ddot{a}_{xy} = \frac{N_{xy}}{D_{xy}}}$$

Resolvamos esta anualidad para **m vidas**

$$\ddot{a}_{x_1x_2..x_m} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_{x_1x_2..x_m} = \sum_{t=0}^{\infty} V^t\,{}_tP_{x_1x_2..x_m} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_{x_1+t:x_2+t:..:x_m+t}}{D_{x_1x_2..x_m}}$$

Utilizamos el conmutado

Tenemos:

$$\boxed{\ddot{a}_{x_1x_2..x_m} = \frac{N_{x_1x_2...x_m}}{D_{x_1x_2..x_m}}}$$

5.3.3 Anualidad temporal a n años

Son los pagos de \$1.0 contingentes a la sobrevivencia de $(x_1),(x_2),..,(x_m)$al final de cada año mientras cada una de las vidas sobreviva durante n años.

$$a_{xy:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_{xy} = \sum_{t=1}^{n} V^t\,{}_tP_{xy} = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_{x+t:y+t}}{D_{xy}}$$

Sustituyendo nuestro conmutado:

$$\boxed{a_{xy:\overline{n|}} = \frac{N_{x+1:y+1} - N_{x+n+1:y+n+1}}{D_{xy}}}$$

Resolvamos esta anualidad para **m vidas**

$$a_{x_1x_2..x_m:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} {}_tE_{x_1x_2..x_m} = \sum_{t=1}^{n} V^t\,{}_tP_{x_1x_2..x_m} = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_{x_1+t:x_2+t:..:x_m+t}}{D_{x_1x_2..x_m}}$$

Sustituyendo:

$$\boxed{a_{x_1x_2..x_m:\overline{n|}} = \frac{N_{x_1+1:x_2+1:..x_m+1} - N_{x_1+n+1:x_2+n+1:..x_m+n+1}}{D_{x_1x_2..x_m}}}$$

5.3.4 Anualidad anticipada temporal a n años

Analizando para dos vidas (x),(y)

$$\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_{xy} = \sum_{t=0}^{n-1} V^t\,{}_tP_{xy} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{D_{x+t:y+t}}{D_{xy}}$$

Expresando en conmutados tenemos:

$$\boxed{\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} = \frac{N_{xy} - N_{x+n:y+n}}{D_{xy}}}$$

Resolvamos esta anualidad para **m vidas:**

$$\ddot{a}_{x_1x_2..x_m:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_{x_1x_2..x_m} = \sum_{t=0}^{n-1} V^t\,{}_tP_{x_1x_2..x_m} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{D_{x_1+t:x_2+t:..:x_m+t}}{D_{x_1x_2..x_m}}$$

En términos de conmutados:

$$\boxed{\ddot{a}_{x_1x_2..x_m:\overline{n|}} = \frac{N_{x_1x_2:..x_m} - N_{x_1+n:x_2+n:..:x_m+n}}{D_{x_1x_2..x_m}}}$$

5.3.5 Anualidad diferida n años

Es aquella en la cual el intervalo de pagos contingentes a la sobrevivencia de $(x_1),(x_2),..,(x_m)$ ha de empezar a correr después de transcurridos n años (n+1)

Primero estudiemos para dos vidas:

$${}_{n/}a_{xy} = \sum_{t=n+1}^{\infty} {}_tE_{xy} = \sum_{t=n+1}^{\infty} V^t\,{}_tP_{xy} = \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{D_{x+t:y+t}}{D_{xy}}$$

Utilizamos el conmutado:

$$\boxed{{}_{n/}a_{xy} = \frac{N_{x+n+1:y+n+1}}{D_{xy}}}$$

Resolvamos esta anualidad para **m vidas:**

$${}_{n/}a_{x_1x_2..x_m} = \sum_{t=n+1}^{\infty} {}_tE_{x_1x_2..x_m} = \sum_{t=n+1}^{\infty} V^t {}_tP_{x_1x_2..x_m} = \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{D_{x_1+t:x_2+t:..:x_m+t}}{D_{x_1x_2..x_m}}$$

Utilizamos el nuevo conmutado:

$$\boxed{{}_{n/}a_{x_1x_2..x_m} = \frac{N_{x_1+n+1:x_2+n+1:..x_m+n+1}}{D_{x_1x_2..x_m}}}$$

5.3.6 Anualidad anticipada diferida n años

Analicemos para dos vidas (x),(y).

$${}_{n/}\ddot{a}_{xy} = \sum_{t=n}^{\infty} {}_tE_{xy} = \sum_{t=n}^{\infty} V^t {}_tP_{xy} = \sum_{t=n}^{\infty} \frac{D_{x+t:y+t}}{D_{xy}}$$

Utilizamos el conmutado.

Sustituyendo:

$$\boxed{{}_{n/}\ddot{a}_{xy} = \frac{N_{x+n:y+n}}{D_{xy}}}$$

Resolvamos esta anualidad para **m vidas:**

$${}_{n/}\ddot{a}_{x_1x_2..x_m} = \sum_{t=n}^{\infty} {}_tE_{x_1x_2..x_m} = \sum_{t=n}^{\infty} V^t {}_tP_{x_1x_2..x_m} = \sum_{t=n}^{\infty} \frac{D_{x_1+t:x_2+t:..:x_m+t}}{D_{x_1x_2..x_m}}$$

Utilizamos el conmutado.

Regresando:

$$\ddot{n/a}x_1x_2..x_m = \frac{Nx_1+n:x_2+n:..x_m+n}{Dx_1x_2..x_m}$$

5.3.7 Anualidades diferidas a n años y temporal a m

Es una serie de pagos anuales a $(x_1),(x_2),..(x_m)$ que empiezan a pagarse a la edad (x_1+n+1), (x_2+n+1)... (x_m+n+1)

$$n/maxy = \sum_{t=n+1}^{n+m} tExy = \sum_{t=n}^{n+m} V^t tPxy = \sum_{t=n+1}^{n+m} \frac{Dx+t:y+t}{Dxy}$$

Sustituyendo:

$$n/maxy = \frac{Nx+n+1:y+n+1 - Nx+n+m+1:y+n+m+1}{Dxy}$$

Resolvamos para **m vidas:**

$$n/max_1x_2..x_m = \sum_{t=n+1}^{n+m} tEx_1x_2..x_m = \sum_{t=n+1}^{n+m} V^t tPx_1x_2..x_m = \sum_{t=n+1}^{n+m} \frac{Dx_1+t:x_2+t:..:x_m+t}{Dx_1x_2..x_m}$$

Regresando:

$$n/max_1x_2..x_m = \frac{Nx_1+n+1:x_2+n+1:..x_m+n+1 - Nx_1+n+m+1:x_2+n+m+1:..x_m+n+m+1}{Dx_1x_2..x_m}$$

5.3.8 Anualidad anticipada diferida n años y temporal a m años

Analicemos para dos vidas (x),(y).

$$\ddot{n/ma}xy = \sum_{t=n}^{n+m-1} tExy = \sum_{t=n}^{n+m-1} V^t tPxy = \sum_{t=n}^{n+m-1} \frac{Dx+t:y+t}{Dxy}$$

Regresando:

$$n/m\ddot{a}xy = \frac{Nx+n:y+n - Nx+n+m:y+n+m}{Dxy}$$

Resolvamos para **m vidas:**

$$n/m\ddot{a}x_1x_2..x_m = \sum_{t=n}^{n+m-1} tEx_1x_2..x_m = \sum_{t=n}^{n+m-1} V^t tPx_1x_2..x_m = \sum_{t=n}^{n+m-1} \frac{Dx_1+t:x_2+t:...:x_m+t}{Dx_1x_2..x_m}$$

Regresando:

$$n/m\ddot{a}x_1x_2..x_m = \frac{Nx_1+n:x_2+n:..x_m+n - Nx_1+n+m:x_2+n+m:..x_m+n+m}{Dx_1x_2..x_m}$$

5.4 Anualidades Pagaderas m veces al año

Como sabemos en la vida real las anualidades de vida son pagaderas en forma mensual, trimestral, cuatrimestral, etc.

Lo que cambiara será que ahora, nuestros resultados corresponden a mas de dos vidas y hasta m.

La notación como sabemos es agregar el símbolo (m) que indica que la renta es pagadera m veces por periodo.

Lo importante es calcular la **P.N.U** de anualidades de este tipo.

5.4.1 Anualidad vitalicia pagadera m veces al año

$a^{(m)}x_1x_2..x_m$ Representara el valor presente de una anualidad pagadera m veces al año, los pagos son de 1/m cada m-esimo de año

Para dos vidas (x) y (y) tenemos:

$$a^{(m)}xy = 1/m \sum_{t=1}^{\infty} t/mExy = \frac{1/m\sum_{t=1}^{\infty} Dx+t/m:y+t/m}{Dxy}$$

Recordemos la serie de Woolhouse:

$$\boxed{1/m\sum_{t=0}^{\infty} f_{t/m} = \sum_{t=0}^{\infty} f_t - \frac{m-1}{2m} f_0 + \frac{m^2-1}{12m^2} f'_0 - \frac{m^4-1}{720m^4} f'''_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Utilizando la serie tenemos:

$$a^{(m)}xy = \frac{1}{Dxy}\left(\sum_{t=1}^{\infty} Dx+t{:}y+t - \frac{m-1}{2m}Dxy + \frac{m^2-1}{12m^2} D'xy - \frac{m^4-1}{720m^4} D'''xy + \ldots\ldots\right)$$

Tomemos hasta el tercer sumando:

$$a^{(m)}xy = \frac{1}{Dxy}\sum_{t=1}^{\infty} Dx+t{:}y+t - \frac{m-1}{2m}Dxy + \frac{m^2-1}{12m^2} D'xy$$

Observemos que nuestra serie original comienza desde 0 y la que estamos resolviendo empieza en 1.

Veamos que sucede con el segundo miembro:

$$-\frac{m-1}{2m} + 1 = \left(\frac{-m-1+2m}{2m}\right) = \mathbf{\frac{m-1}{2m}}$$ se hace positivo

Por lo que:

$$a^{(m)}xy = \frac{1}{Dxy}\left(\sum_{t=1}^{\infty} Dx+t{:}y+t + \frac{m-1}{2m}Dxy + \frac{m^2-1}{12m^2} D'xy\right)$$

Para cuestiones de aproximaciones será suficiente considerar hasta el segundo miembro:

$$a^{(m)}xy = \frac{1}{Dxy}\left(\sum_{t=1}^{\infty} Dx+t{:}y+t + \frac{m-1}{2m}Dxy\right)$$

Sabemos que la sumatoria es una anualidad vitalicia:

$$a^{(m)}xy = axy + \frac{m-1}{2mDxy}Dxy$$

$$\boxed{\mathbf{a^{(m)}xy = axy + \frac{m-1}{2m}}}$$

El resultado para m vidas será:

$$a^{(m)}_{x_1x_2..x_m} = a_{x_1x_2..x_m} + \frac{m-1}{2m}$$

5.4.2 Anualidad anticipada vitalicia pagadera m veces al año

Los resultados son faciles de obtener, basta con sumar 1/m y nos quedan las siguientes expresiones:

Para dos vidas:

$$\ddot{a}^{(m)}_{xy} = a_{xy} + \frac{m-1}{2m} + \frac{1}{m} = a_{xy} + \frac{m-1+2}{2m}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{xy} = a_{xy} + \frac{m+1}{2m}$$

Tenemos una relación entre anualidad vencida y una anticipada:

$$\ddot{a}_{xy} = 1 + a_{xy}$$

De aquí:

$$a_{xy} = \ddot{a}_{xy} - 1$$

Regresamos:

$$\ddot{a}^{(m)}_{xy} = \ddot{a}_{xy} + \frac{m+1}{2m} - 1$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{xy} = \ddot{a}_{xy} + \frac{m+1-2m}{2m}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{xy} = \ddot{a}_{xy} + \frac{(-m+1)}{2m}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{xy} = \ddot{a}_{xy} - \frac{m-1}{2m}$$

Utilizando las equivalencias anteriores podemos determinar el resultado para m vidas:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x_1x_2..x_m} = a_{x_1x_2..x_m} + \frac{m+1}{2m}$$

Otra equivalencia seria:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x_1x_2..x_m} = \ddot{a}_{x_1x_2..x_m} - \frac{m-1}{2m}$$

5.4.3 Anualidad diferida pagadera m veces al año

$n/a^{(m)}_{x_1x_2..x_m}$ Para dar la expresión rápidamente simplemente generalicemos nuestro resultado de vida simple:

$$n/a^{(m)}_{xy} = {}_nE_{xy}a^{(m)}_{x+n:y+n} = {}_nE_{xy}(a_{x+n:y+n} + \frac{m-1}{2m}) = n/a_{xy} + \frac{m-1}{2m}{}_nE_{xy}$$

El resultado para m vidas:

$$n/a^{(m)}_{x_1x_2..x_m} = {}_nE_{x_1x_2..x_m}a^{(m)}_{x_1+n:x_2+n..x_m+n}$$

Otra equivalencia seria:

$$n/a^{(m)}_{x_1x_2..x_m} = n/a_{x_1+n:x_2+n..x_m+n} + \frac{m-1}{2m}{}_nE_{x_1x_2..x_m}$$

o bien:

$$_{n/}a^{(m)}_{x_1x_2..x_m} = {}_nE_{x_1x_2..x_m}\left(a_{x_1+n:x_2+n..x_m+n} + \frac{m-1}{2m}\right)$$

5.4.4 Anualidad anticipada diferida pagadera m veces al año

$$_{n/}\ddot{a}^{(m)}_{x_1x_2..x_m}$$

Para dar la expresión generalicemos nuestro resultado de vida simple:

$$_{n/}\ddot{a}^{(m)}_{xy} = {}_nE_{xy}\ddot{a}^{(m)}_{x+n:y+n} = {}_nE_{xy}\left(\ddot{a}_{x+n:y+n} - \frac{m-1}{2m}\right) = {}_{n/}\ddot{a}_{xy} - \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_{xy}$$

El resultado para m vidas:

$$_{n/}\ddot{a}^{(m)}_{x_1x_2..x_m} = {}_nE_{x_1x_2..x_m}\ddot{a}^{(m)}_{x_1+n:x_2+n..x_m+n}$$

Otra equivalencia sería:

$$_{n/}\ddot{a}^{(m)}_{x_1x_2..x_m} = {}_{n/}\ddot{a}_{x_1x_2..x_m} - \frac{m-1}{2m}\,{}_nE_{x_1x_2..x_m}$$

o bien:

$$_{n/}\ddot{a}^{(m)}_{x_1x_2..x_m} = {}_nE_{x_1x_2..x_m}\left(\ddot{a}_{x_1+n:x_2+n..x_m+n} - \frac{m-1}{2m}\right)$$

5.4.5 Anualidad temporal a n años pagadera m veces al año

De Cálculo Actuarial I podemos dar el siguiente resultado, primero para dos vidas y posteriormente para m vidas.

$a^{(m)}{}_{x_1x_2..x_m:n|}$.

Para dar la expresión generalicemos nuestro resultado de vida simple:

$$a^{(m)}{}_{xy:n|} = a^{(m)}{}_{xy} - {}_{n/}a^{(m)}{}_{xy}$$

Sustituyendo nuestras equivalencias de cada miembro:

$$a^{(m)}{}_{xy:n|} = \left(a_{xy} + \frac{m-1}{2m}\right) - \left({}_{n/}a_{xy} + \frac{m-1}{2m}\,{}_{n}E_{xy}\right)$$

Reordenando obtenemos:

$$a^{(m)}{}_{xy:n|} = a_{xy:n|} + \frac{m-1}{2m}\left(1 - {}_{n}E_{xy}\right)$$

Podemos pasar al resultado para m vidas:

$$a^{(m)}{}_{x_1x_2..x_m:n|} = a^{(m)}{}_{x_1x_2..x_m} - {}_{n/}a^{(m)}{}_{x_1x_2..x_m}$$

Otra igualdad:

$$a^{(m)}{}_{x_1x_2..x_m:n|} = a_{x_1x_2..x_m:n|} + \frac{m-1}{2m}\left(1 - {}_{n}E_{x_1x_2..x_m}\right)$$

5.4.6 Anualidad anticipada temporal a n años pagadera m veces al año

$\ddot{a}^{(m)}{}_{x_1x_2..x_m:n|}$

Primero resolvamos para dos vidas:

$$\ddot{a}^{(m)}{}_{xy} = \ddot{a}^{(m)}{}_{xy} - {}_{n/}\ddot{a}^{(m)}{}_{xy}$$

Sustituimos:

$$\ddot{a}^{(m)}xy = (\ddot{a}xy - \frac{m-1}{2m}) - (n/\ddot{a}xy - \frac{m-1}{2m}nExy)$$

Simplificamos:

$$\boxed{\ddot{a}^{(m)}xy = \ddot{a}xy{:}n| - \frac{m-1}{2m}(1 - nExy)}$$

El resultado para m vidas:

$$\boxed{\ddot{a}^{(m)}x_1x_2..x_m{:}n| = \ddot{a}^{(m)}x_1x_2..x_m - n/\ddot{a}^{(m)}x_1x_2..x_m}$$

Otra equivalencia sería:

$$\boxed{\ddot{a}^{(m)}x_1x_2..x_m\ {:}n| = \ddot{a}x_1x_2..x_m{:}n| - \frac{m-1}{2m}(1 - nEx_1x_2..x_m)}$$

5.5 Anualidades Continuas

Son un caso particular de las anualidades pagaderas m veces al año donde m tiende al infinito.

5.5.1 Anualidad vitalicia continua

Primero veamos para dos vidas (x) (y).

Aplicamos limite sobre m

$$\bar{a}xy = \lim_{m\to\infty} a^{(m)}xy = axy + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\bar{a}xy = axy + \frac{1}{2}}$$

Resultado para **m** vidas:

$$\bar{a}_{x_1x_2..x_m} = \lim_{m\to\infty} a^{(m)}_{x_1x_2..x_m} = a_{x_1x_2..x_m} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\bar{a}_{x_1x_2..x_m} = a_{x_1x_2..x_m} + \frac{1}{2}}$$

5.5.2 Anualidad Continua diferida n años

Para dos vidas:

$$n/\bar{a}_{xy} = \lim_{m\to\infty}(n/a^{(m)}_{xy}) = {}_nE_{xy}(a_{x+n:y+n} + \frac{1}{2}) = n/a_{xy} + \frac{1}{2}{}_nE_{xy}$$

$$\boxed{n/\bar{a}_{xy} = {}_nE_{xy}(a_{x+n:y+n} + \frac{1}{2}) = n/a_{xy} + \frac{1}{2}{}_nE_{xy}}$$

El resultado para m vidas:

$$\boxed{n/\bar{a}_{x_1x_2..x_m} = n/a_{x_1+n:x_2+n..x_m+n} + \frac{1}{2}\,{}_nE_{x_1x_2..x_m}}$$

otro:

$$\boxed{n/\bar{a}_{1x_2..x_m} = {}_nE_{x_1x_2..x_m}(a_{x_1+n:x_2+n..x_m+n} + \frac{1}{2})}$$

5.5.3 Anualidad continua temporal a n años

Para dos vidas y posteriormente para m vidas.

$$\bar{a}_{xy:\overline{n}|} = \lim_{m\to\infty} a^{(m)}_{xy:\overline{n}|} = a_{xy:\overline{n}|} + \frac{1}{2}(1 - {}_nE_{xy})$$

$$\boxed{\bar{a}_{xy:\overline{n}|} = a_{xy:\overline{n}|} + \frac{1}{2}(1 - {}_nE_{xy})}$$

Podemos pasar al resultado para **m vidas:**

$$\bar{a}_{x_1x_2..x_m:\overline{n}|} = \lim_{m\to\infty} a^{(m)}_{x_1x_2..x_m:\overline{n}|} = a_{x_1x_2..x_m:\overline{n}|} + \frac{1}{2}\left(1 - {}_nE_{x_1x_2..x_m}\right)$$

$$\boxed{\bar{a}_{x_1x_2..x_m:\overline{n}|} = a_{x_1x_2..x_m:\overline{n}|} + \frac{1}{2}\left(1 - {}_nE_{x_1x_2..x_m}\right)}$$

5.5.4 Otra expresión para anualidades continuas

Pasemos a generalizar algunos resultados de vida simple para dar otra expresión para anualidades continuas.

Sabemos para dos vidas que:

$$\bar{a}_{xy} = \lim_{m\to\infty} 1/m \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t/m}E_x$$

De lo cual resulta:

$$\bar{a}_{xy} = \int_0^{\infty} {}_tE_{xy}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{D_{x+t:y+t}}{D_{xy}}\, dt = \int_0^{\infty} V^t\, {}_tP_{xy}\, dt$$

Definimos

$$\boxed{\bar{D}_{xy} = \int_0^1 D_{x+t:y+t}\, dt}$$

$$\boxed{\bar{N}_{xy} = \int_0^{\infty} D_{x+t:y+t}\, dt}$$

Dadas las dos expresiones anteriores podremos dar otra expresión para una anualidad continua:

$$\boxed{\bar{a}_{xy} = \frac{\bar{N}_{xy}}{D_{xy}}}$$

Otras expresiones para $\bar{N}xy$ y $\bar{D}xy$ serán:

$$\bar{D}xy = Dxy + \tfrac{1}{2} = 1/2\,(Dxy + Dx+1{:}y+1)$$

$$\bar{N}xy = \tfrac{1}{2}\,(Nxy + Nx+1{:}y+1) = Nx+1{:}y+1 + \tfrac{1}{2}\,Dxy$$

Generalicemos este tipo de anualidad continua a m vidas

$$\bar{a}x_1x_2..x_m = \lim_{m\to\infty} 1/m \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t/m}Ex_1x_2..x_m$$

De lo cual resulta:

$$\bar{a}x_1x_2..x_m = \int_0^{\infty} {}_tEx_1x_2..x_m\,dt = \int_0^{\infty} \frac{Dx_1+t{:}x_2+t{:}..{:}x_m+t}{Dx_1x_2{:}..{:}x_m}\,dt = \int_0^{\infty} V^t\,{}_tPx_1x_2..x_m\,dt$$

Definamos:

$$\bar{D}x_1x_2..x_m = \int_0^1 Dx_1+t{:}x_2+t{:}..{:}x_m+t\,dt$$

$$\bar{N}x_1x_2..x_m = \int_0^{\infty} Dx_1+t{:}x_2+t{:}..{:}x_m+t\,dt$$

Demos otra expresión para la anualidad continua:

$$\bar{a}x_1x_2..x_m = \frac{\bar{N}x_1x_2..x_m}{Dx_1x_2..x_m}$$

Tenemos otras expresiones para $\bar{N}x_1x_2..x_m$ y $\bar{D}x_1x_2..x_m$

$$\bar{D}x_1x_2..x_m = Dx_1x_2..x_m + \tfrac{1}{2} = 1/2\,(Dx_1x_2..x_m + Dx_1+1{:}x_2+1{:}..{:}x_m+1)$$

$$\bar{N}x_1x_2..x_m = \tfrac{1}{2}\,(Nx_1x_2..x_m + Nx_1+1{:}x_2+1{:}..{:}x_m+1)$$

$$\bar{N}x_1x_2..x_m = Nx_1+1{:}x_2+1{:}..{:}x_m+1 + \tfrac{1}{2}\,Dx_1x_2..x_m$$

Para concluir demos otras **expresiones para las anualidades continuas temporales y diferidas.**

Otra expresión para la **anualidad continua temporal a n años.**

$$\bar{a}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n V^t \, {}_tP_{xy} \, dt$$

Otra expresión:

$$\bar{a}_{xy:\overline{n}|} = \frac{\bar{N}_y - \bar{N}_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

Ahora generalicemos este tipo de anualidad continua a m vidas

$$\bar{a}_{x_1x_2..x_m:\overline{n}|} = \int_0^n V^t \, {}_tP_{x_1x_2..x_m} \, dt$$

Expresión en términos de conmutados para la anualidad continua

$$\bar{a}_{x_1x_2..x_m:\overline{n}|} = \frac{\bar{N}_{x_1x_2..x_m} - \bar{N}_{x_1+n:x_2+n:...:x_m+n}}{D_{x_1x_2..x_m}}$$

Otra expresión para la **anualidad continua diferida n años.**

$${}_{n/}\bar{a}_{xy} = \int_n^\infty V^t \, {}_tP_{xy} \, dt$$

Otra expresión:

$${}_{n/}\bar{a}_{xy} = \frac{\bar{N}_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

Generalicemos este tipo de anualidad continua a **m vidas:**

$${}_{n/}\bar{a}_{x_1x_2..x_m} = \int_n^\infty V^t \, {}_tP_{x_1x_2..x_m} \, dt$$

Expresión en términos de conmutados para la anualidad continua:

$$n/\bar{a}_{x_1x_2..x_m} = \frac{\bar{N}_{x_1+n:x_2+n:..:x_m+n}}{D_{x_1x_2..x_m}}$$

Expresión para la **anualidad continua diferida n años y temporal a m.**

$$n/m\bar{a}_{xy} = \int_n^{n+m} V^t \, {}_tP_{xy} \, dt$$

En términos de conmutados para una anualidad continua:

$$n/m\bar{a}_{xy} = \frac{\bar{N}_{x+n:y+n} - \bar{N}_{x+n+m:y+n+m}}{D_{xy}}$$

Generalicemos este tipo de anualidad continua a **m vidas:**

$$n/m\bar{a}_{x_1x_2..x_m} = \int_n^{n+m} V^t \, {}_tP_{x_1x_2..x_m} \, dt$$

Expresión en términos de conmutados para la anualidad continua:

$$n/m\bar{a}_{x_1x_2..x_m} = \frac{\bar{N}_{x_1+n:x_2+n:..:x_m+n} - \bar{N}_{x_1+n+m:x_2+n+m:..:x_m+n+m}}{D_{x_1x_2..x_m}}$$

5.6 Anualidades variables

En este tipo de anualidades el monto del pago varia de tiempo en tiempo.

Resultan de la combinación de anualidades.

5.6.1 Anualidad vitalicia creciente

$(Ia)_{x_1x_2....x_m}$ denotara el valor presente a edades $x_1,x_2,..,x_m$ que proporcionan pagos de \$1.0 a edad $x_1+1:x_2+1:..:x_m+1$,de \$2.0 a edad $x_1+2:x_2+2:..:x_m+2$ etc. Incrementandoce en \$1.0 para cada año que cada una de las $X_1,x_2,..,x_m$ sobrevivan.

$$(Ia)x_1x_2....x_m = \sum_{t=0}^{\infty} t/ax_1x_2..x_m = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Nx_1+t+1:x_2+t+1:..:x_m+t+1}{Dx_1x_2..x_m}$$

Desarrollemos la sumatoria de la segunda igualdad:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{Nx_1+t+1:x_2+t+1:..:x_m+t+1}{Dx_1x_2..x_m} = \frac{Nx_1+1:x_2+1:..:x_m+1}{Dx_1x_2..x_m} + \frac{Nx_1+2:x_2+2:..:x_m+2}{Dx_1x_2..x_m} + ...$$

$$\boxed{(Ia)x_1x_2....x_m = ax_1x_2..x_m + 2ax_1x_2..x_m + 3ax_1x_2..x_m + ..}$$

Obtengamos otra equivalencia en términos de conmutados:
Definamos un conmutado:

$$Sx_1x_2..x_m = \sum_{t=0}^{\infty} Nx_1+t:x_2+t:..:x_m+t = Nx_1x_2:..:x_m + Nx_1+1:x_2+1:..:x_m+1 + ...$$

$$Sx_1+1:x_2+1:..:x_m+1 = \sum_{t=1}^{\infty} Nx_1+t:x_2+t:..:x_m+t = Nx_1+1:x_2+1:..:x_m+1 + Nx_1+2:x_2+2:..:x_m+2 + ...$$

Por lo anterior podemos dar otra expresión:

$$\boxed{(Ia)x_1x_2....x_m = \frac{Sx_1+1:x_2+1:..:x_m+1}{Dx_1x_2..x_m}}$$

5.6.2 Anualidad creciente temporal a n años

Es aquella en donde los pagos crecientes cesan en el n -esimo pago de \$n.0

$$(Ia)x_1x_2....x_m:n| = \sum_{t=0}^{n-1} t/n\text{-}tax_1x_2..x_m = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{Nx_1+t+1:x_2+t+1:..:x_m+t+1 - Nx_1+n+1}{Dx_1x_2..x_m}$$

$$(Ia)x_1x_2....x_m:n| = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{Nx_1+t+1:x_2+t+1:..:x_m+t+1 - Nx_1+n+1:x_2+n+1:..:x_m+n+1}{Dx_1x_2..x_m}$$

Desarrollemos la sumatoria de la primera igualdad:

$(0/n\text{-}0ax_1x_2..x_m)+(1/n\text{-}1ax_1x_2..x_m)+(2/n\text{-}2ax_1x_2..x_m)+...+(n\text{-}1/n\text{-}(n\text{-}1)ax_1x_2..x_m)$

$(0/nax_1x_2..x_m)+(1/n\text{-}1ax_1x_2..x_m)+(2/n\text{-}2ax_1x_2..x_m)+...+(n\text{-}1/1ax_1x_2..x_m)$

Para desarrollar cada una tomemos de base un resultado de vida simple:

$$n/m\ddot{a}x_1x_2..x_m = \frac{Nx+n+1 - Nx+n+m+1}{Dx}$$

Para el primer sumando:

$$0/n\ddot{a}x_1x_2..x_m = \frac{Nx_1+0+1:x_2+0+1:...:x_m+0+1- \ Nx_1+0+n+1:x_2+0+n+1:...:x_m+0+n+1}{Dx_1x_2..x_m}$$

$$\mathbf{0/n\ddot{a}x_1x_2..x_m = \frac{Nx_1+1:x_2+1:...:x_m+1- \ Nx_1+n+1:x_2+n+1:...:x_m+n+1}{Dx_1x_2..x_m}}$$

Para el segundo sumando:

$$1/n\text{-}1\ddot{a}x_1x_2..x_m = \frac{Nx_1+1+1:x_2+1+1:...:x_m+1+1- \ Nx_1+1+(n-1)+1:x_2+1+(n-1)+1:...:x_m+1+(n-1)+1}{Dx_1x_2..x_m}$$

$$\mathbf{1/n\text{-}1\ddot{a}x_1x_2..x_m = \frac{Nx_1+2:x_2+2:...:x_m+2- \ Nx_1+n+1:x_2+n+1:...:x_m+n+1}{Dx_1x_2..x_m}}$$

Para el tercer sumando:

$$2/n\text{-}2\ddot{a}x_1x_2..x_m = \frac{Nx_1+2+1:x_2+2+1:...:x_m+2+1- \ Nx_1+2+(n-2)+1:x_2+2+(n-2)+1:...:x_m+2+(n-2)+1}{Dx_1x_2..x_m}$$

$$\mathbf{2/n\text{-}2\ddot{a}x_1x_2..x_m = \frac{Nx_1+3:x_2+3:...:x_m+3- \ Nx_1+n+1:x_2+n+1:...:x_m+n+1}{Dx_1x_2..x_m}}$$

Para el último sumando

$$n\text{-}1/1\ddot{a}x_1x_2..x_m = \frac{Nx_1+(n-1)+1:x_2+(n-1)+1:...:x_m+(n-1)+1- \ Nx_1+(n-1)+(1)+1:x_2+(n-1)+(1)+1:...:x_m+(n-1)+(1)+1}{Dx_1x_2..x_m}$$

$$\mathbf{n\text{-}1/1\ddot{a}x_1x_2..x_m = \frac{Nx_1+n:x_2+n:...:x_m+n- \ Nx_1+n+1:x_2+n+1:...:x_m+n+1}{Dx_1x_2..x_m}}$$

Ahora observemos los primeros miembros de cada uno de los sumandos:

$$Nx_1+1:x_2+1:...:x_m+1+ Nx_1+2:x_2+2:...:x_m+2+ Nx_1+2:x_2+2:...:x_m+2+..+ Nx_1+n:x_2+n:...:x_m+n$$

Esto representa uno de los conmutados definidos anteriormente:

$$\boxed{Sx_1{+}1{:}x_2{+}1{:}\ldots{:}x_m{+}1 - Sx_1{+}n{+}n1{:}x_2{+}n{+}1{:}\ldots{:}x_m{+}n{+}1 = \sum_{t=1}^{n} Nx_1{+}t{:}x_2{+}t{:}\ldots{:}x_m{+}t}$$

También observemos que el segundo termino de cada sumando esta n veces por lo cual obtenemos:

$$n(Nx_1{+}n{+}1{:}x_2{+}n{+}1{:}\ldots{:}x_m{+}n{+}1)$$

Dado lo anterior podemos dar la expresión final:

$$\boxed{(Ia)x_1x_2\ldots x_m{:}\overline{n|} = \frac{(Sx_1{+}1{:}x_2{+}1{:}\ldots{:}x_m{+}1 - Sx_1{+}n{+}1{:}x_2{+}n{+}1{:}\ldots{:}x_m{+}n{+}1) - n(Nx_1{+}n{+}1{:}x_2{+}n{+}1{:}\ldots{:}x_m{+}n{+}1)}{Dx1x2..xm}}$$

5.6.3 Otro tipo de anualidad

Otro tipo de anualidad creciente es aquella que proporciona incrementos de \$1.0 cada año hasta que en el n-esimo pago , los pagos serán constantes por el resto de la vidas de $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

$$(I\overline{n|}a)x_1x_2\ldots x_m = \sum_{t=0}^{n-1} t\,/ax_1x_2..x_m = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{Nx_1{+}t{+}1{:}x_2{+}t{+}1{:}\ldots{:}x_m{+}t{+}1}{Dx_1x_2..x_m}$$

Desarrollemos la sumatoria de la primera igualdad:

$$(0\,/ax_1x_2..x_m) + (1\,/ax_1x_2..x_m) + (2\,/ax_1x_2..x_m) + \ldots + (n-1\,/ax_1x_2..x_m)$$

$$\frac{Nx_1{+}1{:}x_2{+}1{:}\ldots{:}x_m{+}1}{Dx_1x_2..x_m} + \frac{Nx_1{+}2{:}x_2{+}2{:}\ldots{:}x_m{+}2}{Dx_1x_2..x_m} + \ldots + \frac{Nx_1{+}n{:}x_2{+}n{:}\ldots{:}x_m{+}n}{Dx_1x_2..x_m}$$

Esto representa uno de los conmutados definidos anteriormente:

$$\boxed{(Sx_1{+}1{:}x_2{+}1{:}\ldots{:}x_m{+}1) - (Sx_1{+}n{+}n1{:}x_2{+}n{+}1{:}\ldots{:}x_m{+}n{+}1) = \sum_{t=1}^{n} Nx_1{+}t{:}x_2{+}t{:}\ldots{:}x_m{+}t}$$

Por lo anterior podemos dar la expresión final:

$$\boxed{(I\overline{n|}a)x_1x_2\ldots x_m = \frac{(Sx_1{+}1{:}x_2{+}1{:}\ldots{:}x_m{+}1 - Sx_1{+}n{+}1{:}x_2{+}n{+}1{:}\ldots{:}x_m{+}n{+}1)}{Dx1x2..xm}}$$

5.6.4 Anualidad Temporal Decreciente

Proporciona un pago de \$n.0 a edad $x_1+1, x_2+1, .., x_m+1$, \$n-1 a edad $x_1+2, x_2+2, .., x_m+2$ y así sucesivamente decrece \$1.0 cada año , cesando en el n-simo pago de \$1.0.

Este tipo de anualidades puede expresarse en términos de una suma de n anualidades temporales niveladas.

$$(Da)x_1x_2....x_m:n| = \sum_{t=1}^{n} ax_1x_2..x_m:t| = \sum_{t=1}^{n} \frac{Nx_1+1:x_2+1..x_m+1 - Nx_1+t+1:x_2+t+1:...:x_m+t+1}{Dx_1x_2..x_m}$$

Desarrollemos la sumatoria de la primera igualdad:

$$(ax_1x_2..x_m:1|)+(ax_1x_2..x_m:2|)+(ax_1x_2..x_m:3|)+..+(ax_1x_2..x_m:n|)$$

$$\frac{(Nx_1+1:x_2+1:...:x_m+1 - Nx_1+2:x_2+2:...:x_m+2)}{Dx_1x_2..x_m} + \frac{(Nx_1+1:x_2+1:...:x_m+1 - Nx_1+3:x_2+3:...:x_m+3)}{Dx_1x_2..x_m}$$

$$+..+ \frac{(Nx_1+1:x_2+1:...:x_m+1 - Nx_1+n+1:x_2+n+1:...:x_m+n+1)}{Dx_1x_2..x_m}$$

Esto representa uno de los conmutados definidos anteriormente:

$$\boxed{(Sx_1+2:x_2+2:...:x_m+2)-(Sx_1+n+2:x_2+n+2:...:x_m+n+2) = \sum_{t=0}^{n-1} Nx_1+t+2:x_2+t+2:...:x_m+t+2}$$

Dado lo anterior podemos dar la expresión final

$$\boxed{(Da)x_1x_2....x_m:n| = \frac{nNx_1+1:x_2+1:...:x_m+1 + (Sx_1+2:x_2+2:...:x_m+2 - Sx_1+n+2:x_2+n+2:...:x_m+n+2)}{Dx1x2..xm}}$$

Obtengamos las correspondientes anticipadas.

5.6.5 Anualidad vitalicia creciente anticipada

$$(I\ddot{a})x_1x_2....x_m = \sum_{t=0}^{\infty} t/\ddot{a}x_1x_2..x_m = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Nx_1+t:x_2+t:...:x_m+t}{Dx_1x_2..x_m}$$

Desarrollemos la sumatoria de la segunda igualdad:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{Nx_1+t:x_2+t:...:x_m+t}{Dx_1x_2..x_m} = \frac{Nx_1x_2:...:x_m}{Dx_1x_2..x_m} + \frac{Nx_1+1:x_2+1:...:x_m+1}{Dx_1x_2..x_m} + ...$$

$$\ddot{(Ia)}x_1x_2\ldots x_m = \ddot{a}x_1x_2..x_m + 1\ddot{a}x_1x_2..x_m + 2\ddot{a}x_1x_2..x_m + ..$$

Obtengamos otra equivalencia:

$$Sx_1x_2..x_m = \sum_{t=0}^{\infty} Nx_1+t:x_2+t:..:x_m+t = Nx_1x_2:..:x_m + Nx_1+1:x_2+1:..:x_m+1 + \ldots\ldots$$

Dado lo anterior podemos dar otra expresión:

$$\ddot{(Ia)}x_1x_2\ldots x_m = \frac{Sx_1x_2:..:x_m}{Dx_1x_2..x_m}$$

5.6.6 Anualidad creciente temporal anticipada a n años

$\ddot{(Ia)}x_1x_2\ldots x_m:n|$

Pasamos directamente a la sumatoria de los conmutados:

$$\frac{(Nx_1:x_2:..:x_m - Nx_1+n:x_2+n:..:x_m+n) + (Nx_1+1:x_2+1:..:x_m+1 - Nx_1+n:x_2+n:..:x_m+n) + (Nx_1+n-1:x_2+n-1:..:x_m+n-1 - Nx_1+n:x_2+n:..:x_m+n)}{Dx_1x_2..x_m}$$

Ahora observemos los primeros miembros de cada uno de los sumandos:

$Nx_1x_2:..:x_m + Nx_1+1:x_2+1:..:x_m+1 + \ldots + Nx_1+n-1:x_2+n-1:..:x_m+n-1$

En términos de conmutados tenemos:

$$Sx_1x_2:..:x_m - Sx_1+n:x_2+n:..:x_m+n = \sum_{t=0}^{n-1} Nx_1+t:x_2+t:..:x_m+t$$

También observemos que el segundo termino de cada sumando esta n veces por lo cual obtenemos:

$n(Nx_1+n:x_2+n:..:x_m+n)$

Dado lo anterior podemos dar la expresión final:

$$(I\ddot{a})_{x_1x_2....x_m:\overline{n|}} = \frac{(S_{x_1x_2:...:x_m} - S_{x_1+n:x_2+n:...:x_m+n}) - n(N_{x_1+n:x_2+n:...:x_m+n})}{D_{x1x2..xm}}$$

5.6.7 Otro tipo de anualidad anticipada

$$(I_{\overline{n|}}\ddot{a})_{x_1x_2....x_m}$$

Pasemos directamente a los conmutados:

$$\frac{N_{x_1:x_2:...:x_m}}{D_{x_1x_2..x_m}} + \frac{N_{x_1+1:x_2+1:...:x_m+1}}{D_{x_1x_2..x_m}} + .. + \frac{N_{x_1+n-1:x_2+n-1:...:x_m+n-1}}{D_{x_1x_2..x_m}}$$

En términos de conmutados:

$$(S_{x_1x_2:...:x_m}) - (S_{x_1+n:x_2+n:...:x_m+n}) = \sum_{t=0}^{n-1} N_{x_1+t:x_2+t:...:x_m+t}$$

La expresión final será:

$$(I_{\overline{n|}}\ddot{a})_{x_1x_2....x_m} = \frac{(S_{x_1x_2:...:x_m} - S_{x_1+n:x_2+n:...:x_m+n})}{D_{x1x2..xm}}$$

5.6.8 Anualidad Temporal Decreciente anticipada

$$(D\ddot{a})_{x_1x_2....x_m:\overline{n|}}$$

De los conmutados:

$$\frac{(N_{x_1x_2:...:x_m} - N_{x_1+1:x_2+1:...:x_m+1})}{D_{x_1x_2..x_m}} + \frac{(N_{x_1x_2:...:x_m} - N_{x_1+2:x_2+2:...:x_m+2})}{D_{x_1x_2..x_m}}$$

$$+ ..\ . + \frac{(N_{x_1x_2:...:x_m} - N_{x_1+n:x_2+n:...:x_m+n})}{D_{x_1x_2..x_m}}$$

Esto representa uno de los conmutados:

$$(Sx_1+1:x_2+1:..:x_m+1-Sx_1+n+1:x_2+n+1:..:x_m+n+1)=\sum_{t=0}^{n-1}Nx_1+t+1:x_2+t+1:..:x_m+t+1$$

Por lo anterior la expresión final:

$$\overset{\infty}{(Da)}x_1x_2...x_m:\overline{n|}=\frac{nNx_1x_2:..:x_m-(Sx_1+1:x_2+1:..:x_m+1-Sx_1+n+1:x_2+n+1:..:x_m+n+1)}{Dx1x2..xm}$$

5.6.9 Anualidades variables pagaderas m veces al año

Al igual que en vida simple, existen dos casos:

El primero se da cuando la tasa de pago es constante durante el año. Haciendo el pago anual total en m pagos iguales. Los incrementos o decrementos ocurren al principio o al final del año.

La denotamos por:

$$(Ia)^{(m)}xy=\sum_{t=0}^{\infty}{}_t/a^{(m)}_{xy}=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{Nx+t+1:y+t+1}{Dxy}+\frac{m-1}{2m}\frac{Dx+t:y+t}{Dxy}$$

Desarrollando la sumatoria tenemos:

$${}_0/a^{(m)}_{xy}+{}_1/a^{(m)}_{xy}+{}_2/a^{(m)}_{xy}+......$$

$${}_0/a_{xy}+\frac{m-1}{2m}\frac{Dx+0:y+0}{Dxy}+{}_1/a_{xy}+\frac{m-1}{2m}\frac{Dx+1:y+1}{Dxy}+{}_2/a_{xy}+\frac{m-1}{2m}\frac{Dx+2:y+2}{Dxy}+..........$$

$$\frac{Nx+1:y+1}{Dxy}+\frac{m-1}{2m}\frac{Dx+0:y+0}{Dxy}+\frac{Nx+2:y+2}{Dxy}+\frac{m-1}{2m}\frac{Dx+1:y+1}{Dxy}+\frac{Nx+3:y+3}{Dxy}+\frac{m-1}{2m}\frac{Dx+2:y+2}{Dxy}+..........$$

$$\sum_{t=1}^{\infty}Nx+t:y+t=Sx+1:y+1$$

Por otro lado:

$$\frac{m-1}{2m}\left(\sum_{t=0}^{\infty}Dx+t:y+t\right)=\frac{m-1}{2m}(Nxy)$$

Regresando podemos dar una expresión para:

$$(Ia)^{(m)}_{xy}= \frac{S_{x+1:y+1} + \frac{m-1}{2m.} N_{xy}}{D_{xy}}$$

El segundo caso a analizar se presenta cuando la tasa de pago crece o decrece m veces al año y el pago anual total es hecho en m pagos anuales y sus análisis es similar al que se usó en vida simple.

La forma en que va a ser representada esta dada por:

$$(I^{(m)}a)^{(m)}_{xy}= \frac{1}{m^2} \sum_{t=1}^{\infty} t \frac{D_{x + t/m:y+t/m}}{D_{xy}}$$

$$\frac{1}{D_{xy}} \left(\frac{1}{m^2} \sum_{t=1}^{\infty} t D_{x+t/m:y+t/m} \right)$$

Aplicando la formula de Woolhouse obtenemos:

$$\frac{1}{D_{xy}} \left(\sum_{t=1}^{\infty} t D_{x+t:y+t} + \frac{m-1}{2m^2} (t D_{x+t:y+t})_{t=0} + \frac{m^2-1}{12m^2} \left(\frac{d}{dt} (tD_{x+t:y+t})_{t=0} + \ldots\ldots \right) \right)$$

Como $\frac{d}{dt} (tD_{x+t:y+t})_{t=0} = D_{xy}$ (Hay que recordar que es la derivada de un producto)

El segundo miembro de la sumatoria da (0)

$$\frac{1}{D_{xy}} \left(\sum_{t=1}^{\infty} t D_{x+t:y+t} + \frac{m^2-1}{12m^2} D_{xy} \right)$$

Desarrollando la primera sumatoria:

$$\sum_{t=1}^{\infty} t D_{x+t:y+t} = D_{x+1:y+1} + 2D_{x+2:y+2} + 3D_{x+3:y+3} + 4D_{x+4:y+4} + \ldots\ldots$$

Que es lo mismo:

$$\begin{aligned} D_{x+1:y+1} + D_{x+2:y+2} + D_{x+3:y+3} + D_{x+4:y+4} + \ldots\ldots\ldots\ldots &= N_{x+1:y+1} \\ + D_{x+2:y+2} + D_{x+3:y+3} + D_{x+4:y+4} + \ldots\ldots\ldots\ldots &= N_{x+2:y+2} \\ + D_{x+3:y+3} + D_{x+4:y+4} + \ldots\ldots\ldots\ldots &= N_{x+3:y+3} \end{aligned}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} N_{x+t:y+t} = S_{x+1:y+1}$$

Regresando:

$$(I\ddot{a})^{(m)}_{xy} = \frac{1}{Dxy}\left(\sum_{t=1}^{\infty} t\, D_{x+t:y+t} + \frac{m^2-1}{12m^2}\, Dxy\right)$$

$$(I\ddot{a})^{(m)}_{xy} = \frac{1}{Dxy}\left(S_{x+1:y+1} + \frac{m^2-1}{12m^2}\, Dxy\right)$$

$$(I\ddot{a})^{(m)}_{xy} = \frac{S_{x+1:y+1}}{Dxy} + \frac{m^2-1}{12m^2}$$

$$(I\ddot{a})^{(m)}_{xy} = (I\ddot{a})_{xy} + \frac{m^2-1}{12m^2}$$

5.6.10 Anualidades variables continuas

Representa el valor presente de una anualidad creciente continua, la cual proporciona el pago de $1.0 pagadero a cada momento del primer año ,el pago de $2.0 pagadero a cada momento del segundo año y así sucesivamente ,permaneciendo constante la tasa de pago durante cada año.

$$(I\bar{a})_{xy} = \lim_{m\to\infty} (I\ddot{a})^{(m)}_{xy}$$

Este tipo de anualidades puede ser escrita como una suma de anualidades continuas niveladas y diferidas

$$(I\bar{a})_{xy} = \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t}/\bar{a}_{xy} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\bar{N}_{x+t:y+t}}{Dxy}$$

$${}_{0}/\bar{a}_{xy} + {}_{1}/\bar{a}_{xy} + {}_{2}/\bar{a}_{xy} + \ldots\ldots$$

Nosotros sabemos que:

$${}_{n}/\bar{a}_{xy} = \frac{\bar{N}_{x+n:y+n}}{Dxy}$$

Desarrollando tenemos:

$$\frac{\bar{N}_{xy}}{D_{xy}} + \frac{\bar{N}_{x+1:y+1}}{D_{xy}} + \frac{\bar{N}_{x+2:y+2}}{D_{xy}} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \bar{N}_{x+t:y+t} = \bar{S}_{xy}$$

Regresando:

$$\mathbf{(I\bar{a})_{xy} = \frac{\bar{S}_{xy}}{D_{xy}}}$$

Otra expresión se puede obtener a partir de:

$$(I\bar{a})_{xy} = \lim_{m\to\infty} (Ia)^{(m)}_{xy}$$

Aplicando el límite:

$$(I\bar{a})_{xy} = S_{x+1:y+1} + \frac{m}{2m} - \frac{1}{2m}\ N_{xy}$$

$$\frac{S_{x+1:y+1} + \frac{1}{2} N_{xy}}{D_{xy}}$$

$$= \frac{S_{x+1:y+1}}{D_{xy}} + \frac{1}{2}\ddot{a}_{xy}$$

$$(I\bar{a})_{xy} = (Ia)_{xy} + \frac{1}{2}\ddot{a}_{xy}$$

Otra equivalencia sería:

$$(I\bar{a})_{xy} = \frac{S_{xy} - \frac{1}{2} N_{xy}}{D_{xy}} = (I\ddot{a})_{xy} - \frac{1}{2}\ddot{a}_{xy}$$

De estos resultados se puede concluir que:

$$\mathbf{\bar{S}_{xy} = S_{x+1:y+1} + \frac{1}{2} N_{xy} = S_{xy} - \frac{1}{2} N_{xy}}$$

5.6.11 Anualidad creciente continua

Se encuentra dentro de aquellas donde la tasa de pago crece durante cada año:

$$(I\bar{a})_{xy} = \lim (Ia)^{(m)(m)}_{xy}$$

$$\int_0^{\infty} t\, V^t\, {}_tP_{xy}\, dt$$

$$\frac{1}{D_{xy}} \int_0^{\infty} t\, D_{x+t:y+t}\, dt$$

Otra expresión se obtiene sacando directamente el límite:

$$\lim_{m\to\infty}(Ia)^{(m)(m)}_{xy} = (I\bar{a})_{xy} + \frac{1}{12}$$

5.7 Leyes de mortalidad para anualidades de vida conjunta

5.7.1 Ley de Gompertz para anualidades de vida conjunta.

Es importante ver las expresiones obtenidas a partir de la fuerza de mortalidad bajo Gompertz para la construcción de anualidades.

Sabemos que:

$$\mu_x = BC^x$$

En la unidad I se dio una expresión para la probabilidad de vida para m vidas:

$$_nP_{x_1x_2..x_m} = e^{-\int_0^n (\mu_{x_1+t}+\mu_{x_2+t}+..+\mu_{x_m+t})d}$$

Sustituyamos:

$$_nP_{x_1x_2..x_m} = e^{-\int_0^n (BC^{x1+t} + BC^{x2+t} +.....+ BC^{xm+t})dt}$$

Factoricemos BC^t

$$nPx_1x_2..x_m = e^{-\int_0^n (BC^t(C^{x1} + C^{x2} +.....+ C^{xm})dt}$$

Sabemos bajo Gompertz:

$$C^{x1} + C^{x2} +.....+ C^{xm} = C^w$$

Sustituimos:

$$nPx_1x_2..x_m = e^{-\int_0^n BC^t(C^w)dt}$$

$$nPx_1x_2..x_m = e^{-\int_0^n BC^{w+t}dt}$$

Podemos concluir que:

$$nPx_1x_2..x_m = nPw$$

La anualidad sería:

$$ax_1x_2...x_m = \sum_{t=1}^{\infty} V^t tPx_1x_2..x_m = \sum_{t=1}^{\infty} V^t tPw = aw$$

$$\boxed{ax_1x_2...x_m = aw}$$

Que es el resultado obtenido bajo Gompertz. Si observamos bien se sigue cumpliendo la característica esencial de trabajar bajo esta Ley.

5.7.2 Ley de Makeham para anualidades de vida conjunta.

Veamos la expresión obtenida a partir de la fuerza de mortalidad bajo Makeham para la construcción de anualidades.

Sabemos:

$$\mu x=A+BC^x$$

En el capítulo IV se dio una expresión para la probabilidad de vida para m vidas:

$$nPx_1x_2..x_m = e^{-\int_0^n(\mu x_1+t+\mu x_2+t+..+\mu x_m+t)dt}$$

Sustituyamos nuestra equivalencia en fuerza de mortalidad para Makeham:

$$nPx_1x_2..x_m = e^{-\int_0^n (A+BC^{x1+t}+A+BC^{x2+t}+.....+A+BC^{xm+t})dt}$$

Factoricemos $A+BC^t$

$$nPx_1x_2..x_m = e^{-\int_0^n (mA+BC^t(C^{x1}+C^{x2}+.....+C^{xm})dt}$$

Sabemos que bajo Makeham:

$$\mathbf{C^{x1}+C^{x2}+.....+C^{xm}=mC^{w}}$$

Sustituimos:

$$nPx_1x_2..x_m = e^{-\int_0^n mA+BC^t(mC^w)dt}$$

$$nPx_1x_2..x_m = e^{-\int_0^n m(A+BC^{w+t})dt}$$

Con este resultado podemos concluir que:

$nPx_1x_2..x_m = nPww...(m)$

Ahora pasemos a construir la anualidad:

$$ax_1x_2...x_m = \sum_{t=1}^{\infty} V^t tPx_1x_2..x_m = \sum_{t=1}^{\infty} V^t tPww..(m) = aww..(m)$$

$$\boxed{\mathbf{ax_1x_2...x_m = aww..(m)}}$$

Que es el resultado obtenido bajo Makeham. Si observamos bien, se sigue cumpliendo la característica esencial de trabajar bajo esta Ley.

5.8 Anualidades del último superviviente

Así como se obtuvó una expresión general para probabilidades del último superviviente de la misma manera obtendremos una expresión para anualidades de vida conjunta.

Observemos en particular el caso de una anualidad vitalicia.

Analicemos para dos vidas:

$$a_{\overline{xy}} = \sum_{t=1}^{\infty} V^t\,{}_tP_{\overline{xy}} = \sum_{t=1}^{\infty} V^t\,{}_tP_x + \sum_{t=1}^{\infty} V^t\,{}_tP_y - \sum V^t\,{}_tP_{xy}$$

$$\boxed{a_{\overline{xy}} = a_x + a_y - a_{xy}}$$

Ahora para tres vidas:

$$a_{\overline{xyz}} = \sum_{t=1}^{\infty} V^t\,{}_tP_{\overline{xyz}} = \sum_{t=1}^{\infty} V^t\,{}_tP_x + \sum_{t=1}^{\infty} V^t\,{}_tP_y + \sum_{t=1}^{\infty} V^t\,{}_tP_z - \sum_{t=1}^{\infty} V^t\,{}_tP_{xy} - \sum_{t=1}^{\infty} V^t\,{}_tP_{xz} -$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} V^t\,{}_tP_{yz} + \sum_{t=1}^{\infty} V^t\,{}_tP_{xyz}$$

$$\boxed{a_{\overline{xyz}} = a_x + a_y + a_z - a_{xy} - a_{xz} - a_{yz} + a_{xyz}}$$

Si observamos bien los signos se van intercambiando, al igual que en el resultado de probabilidades. Con estos resultados ya podemos generalizar resultado para anualidades del último superviviente.

$$\boxed{a_{x_1x_2..x_m} = \sum a_{x_1} - \sum a_{x_1x_2} + \sum a_{x_1x_2x_3} - \ldots + (-1)^{m+1} a_{x_1x_2..x_m}}$$

5.9 Anualidades del grupo generalizado.

Al igual que en probabilidades tenemos dos casos:

a) Cuando la unidad asegurada sea el grupo en si que forman todos los componentes del grupo.

b) Cuando se tiene anualidades del ultimo superviviente.

Dentro de este último grupo tenemos dos tipos el primero será denominado anualidades de supervivencia de **exactamente r vidas** y el segundo anualidades de supervivencia de **al menos r vidas.**

Debemos hacer notar que para calcular anualidades del tipo b) con sus dos divisiones será necesario realizarlo por el método Z visto en la sección anterior para los dos casos resultantes.

Se seguirá la misma técnica únicamente que en términos de notación serán utilizados los correspondientes a anualidades.

Dicho lo anterior no será necesario ahondar más en cuanto al cálculo de anualidades.

5.10 Anualidades de reversión.

Resultan cuando se quiere obtener la anualidad de reversión pagadera a (x) a partir de la muerte de (y).

Primero debemos obtener el seguro dotal puro correspondiente. Y para construir el dotal puro necesitamos de las probabilidades.

¿Cómo estarán dadas las probabilidades?

Tomando en consideración la misma pregunta inicial tenemos el siguiente resultado:

$$\boxed{nPx(1-nPy) = nPx - nPxy}$$

Dado el resultado anterior podemos construir el seguro dotal puro con su correspondiente notación.

$tEy/x= V^t (tPx-tPxy)$

Distribuimos:

$$\boxed{tEy/x= V^t\, tPx - V^t tPxy}$$

Dado el seguro dotal puro podemos construir la anualidad reversionaria correspondiente.

$a_{y/x} = \sum_{t=1}^{\infty} V^t\, {}_tP_x - \sum_{t=1}^{\infty} V^t\, {}_tP_{xy}$

De lo cual tenemos:

$$\boxed{a_{y/x} = a_x - a_{y/x}}$$

Ahora revisemos las anualidades de reversión que involucran 3 o más vidas. El cálculo es muy sencillo, siguiendo el resultado anterior.

$\mathbf{a_{xy/z} = a_z - a_{xyz}}$

Lo podemos obtener haciendo un cambio:

u=xy

v=z

Otro resultado seria:

$\bar{a}_{xy/z} = a_z - \bar{a}_{xy:z}$

Resolvamos:

$\bar{a}_{xy/z} = a_z - (\bar{a}_{xy})a_z$

$\bar{a}_{xy/z} = a_z - (a_x+a_y-a_{xy})a_z$

Simplificando:

$\mathbf{\bar{a}_{xy/z} = a_z - a_{xz} - a_{yz} + a_{xyz}}$

Otro resultado:

$a_{xy/zw} = a_{zw} - a_{xy:zw}$

Resolvamos

$\bar{a}_{xy/zw} = a_z + a_w - a_{zw} - a_{xy}(a_z + a_w - a_{zw})$

$\mathbf{\bar{a}_{xy/zw} = a_z + a_w - a_{zw} - a_{xyz} - a_{xyw} + a_{xyzw}}$

Como podemos observar todas pueden resolverse a partir del primer caso.

El cálculo de otros tipos de anualidades se hacen de manera similar, como por ejemplo las anualidades pagaderas una vez por periodo, m veces por periodo, variables, etc.

De manera especial revisemos las anualidades reversionarias continuas.

$\bar{a}_{y/x} = \bar{a}_x - \bar{a}_{xy}$

La expresión más fácil se obtendría siguiendo el resultado anterior

Pero veamos otra expresión:

$$\boxed{\bar{a}_{y/x} = \int_0^\infty V^t\,{}_tP_x(1-{}_tP_y)dt}$$

Sabemos que:

$1-{}_tP_y = {}_tq_y = \int_0^t \mu_{x+n}({}_nP_x)dn$

Sustituimos:

$\bar{a}_{y/x} = \int_0^\infty V^t\,{}_tP_x(\int_0^t \mu_{x+n}({}_nP_x)dn\,)dt$

$\bar{a}_{y/x} = \int_0^\infty \int_0^t V^t\,{}_tP_x\mu_{x+n}({}_nP_x)dndt$

Cambiamos el orden de integración:

$\bar{a}_{y/x} = \int_0^\infty \int_n^\infty V^t\,{}_tP_x\mu_{x+n}({}_nP_x)dtdn$

$\bar{a}_{y/x} = \int_0^\infty \mu_{x+n}({}_nP_x)\int_n^\infty V^t\,{}_tP_xdt\,dn$

$$\boxed{\bar{a}_{y/x} = \int_0^\infty \mu_{x+n}({}_nP_x)\,{}_{n/}\bar{a}_xdn}$$

Otra expresión sería:

$$\bar{a}_{y/x} = \int_0^\infty V^n ({}_nP_{xy})\mu_{y+n}\bar{a}_{x+n}dn$$

5.11 Anualidades Reversionarias Compuestas

Analicemos la siguiente expresión

$$\bar{a}^{1}_{yz/x} = \int_0^\infty V^t\, {}_tP_{xyz}\mu_{y+t}\bar{a}_{x+t}dt$$

Representa el valor presente de $1.0 pagadero a (x), siempre y cuando **y** fallezca en primero, y en este caso (z) fallece en segundo.

Otra equivalencia:

$$\bar{a}^{1}_{yz/x} = \int_0^\infty V^t\, {}_tP_x (1-{}_tP^{1}_{yz})dt$$

$$\bar{a}^{1}_{yz/x} = \int_0^\infty V^t\, {}_tP_x ({}_tq^{1}_{yz})dt$$

Veamos el siguiente resultado:

$$\bar{a}^{2}_{yz/x} = \int_0^\infty V^t\, {}_tP_{xy}(1-{}_tP_z)\mu_{y+t}\bar{a}_{x+t}dt$$

Distribuimos:

$$\bar{a}^{2}_{yz/x} = \int_0^\infty V^t\, {}_tP_{xy}\mu_{y+t}\bar{a}_{x+t}dt - \int_0^\infty V^t\, {}_tP_{xyz}\mu_{y+t}\bar{a}_{x+t}dt$$

$$\bar{a}^{2}_{yz/x} = \bar{a}_{y/x} - \bar{a}^{1}_{yz/x}$$

Podemos dar otra expresión:

$$\boxed{\bar{a}^{2}_{yz/x} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xyz}\,\mu_{z+t}\,\bar{a}_{y+t/x+t}\,dt}$$

Desarrollemos la anualidad reversionaria que se encuentra en el interior de la integral:

$$\bar{a}^{2}_{yz/x} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xyz}\,\mu_{z+t}(\bar{a}_{x+t} - \bar{a}_{x+t:y+t})dt$$

Distribuimos

$$\bar{a}^{2}_{yz/x} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xyz}\,\mu_{z+t}\,\bar{a}_{x+t}\,dt - \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xyz}\,\mu_{z+t}\,\bar{a}_{x+t:y+t}\,dt$$

Reexpresamos:

$$\boxed{\bar{a}^{2}_{yz/x} = \bar{a}^{1}_{yz/x} - \bar{a}_{z/xy}}$$

Analicemos la siguiente expresión:

$$\boxed{\bar{a}^{1}_{xyz/w} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xyzw}\,\mu_{z+t}\,\bar{a}_{w+t}\,dt}$$

Veamos otro resultado:

$$\boxed{\bar{a}^{1}_{yz/wx} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xyzw}\,\mu_{z+t}\,\bar{a}_{x+t:w+t}\,dt}$$

Analicemos la siguiente expresión:

$$\boxed{\bar{a}^{\;2}_{\underset{1}{xyz}/w} = \int_0^\infty v^t(1-{}_tp_z)\,{}_tp_{xyw}\,\mu_{y+t}\,\bar{a}_{w+t}\,dt}$$

Distribuimos:

$$\bar{a}^{2}_{xy\underset{1}{z}/w} = \int_0^\infty v^t\,{}_tP_{xyw}\,\mu_{y+t}\,\bar{a}_{w+t}\,dt - \int_0^\infty v^t\,{}_tP_{xyzw}\,\mu_{y+t}\,\bar{a}_{w+t}\,dt$$

Reexpresamos:

$$\boxed{\bar{a}^{2}_{xy\underset{1}{z}/w} = \bar{a}^{1}_{xy/w} - \bar{a}^{1}_{xyz/w}}$$

Otra expresión:

$$\boxed{\bar{a}^{2}_{yz/wx} = \int_0^\infty v^t\,(1-{}_tP_z)\,{}_tP_{xyw}\,\mu_{y+t}\,\bar{a}_{x+t:w+t}\,dt}$$

Distribuimos:

$$\bar{a}^{2}_{yz/wx} = \int_0^\infty v^t\,{}_tP_{xyw}\,\mu_{y+t}\,\bar{a}_{x+t:w+t}\,dt - \int_0^\infty v^t\,{}_tP_{xyzw}\,\mu_{y+t}\,\bar{a}_{x+t:w+t}\,dt$$

$$\boxed{\bar{a}^{2}_{yz/wx} = \bar{a}_{y/wx} - \bar{a}^{1}_{yz/wx}}$$

Continuando con la misma relación:

$$\boxed{\bar{a}^{2}_{yz/wx} = \int_0^\infty v^t\,{}_tP_{xyzw}\,\mu_{z+t}\,\bar{a}_{y+t/x+t:w+t}\,dt}$$

Desarrollemos la anualidad interior:

$$\bar{a}^{2}_{yz/wx} = \int_0^\infty v^t\,{}_tP_{xyzw}\,\mu_{z+t}\,(\bar{a}_{x+t:w+t} - \bar{a}_{x+t:y+t:w+t})\,dt$$

Distribuimos:

$$\bar{a}^{2}_{yz/wx} = \int_0^\infty v^t\,{}_tP_{xyzw}\,\mu_{z+t}\,\bar{a}_{x+t:w+t} - \int_0^\infty v^t\,{}_tP_{xyzw}\,\mu_{z+t}\,\bar{a}_{x+t:y+t:w+t}\,dt$$

Reexpresamos:

$$a^{2}_{yz/wx} = a^{1}_{yz/wx} - a_{z/xyw}$$

Revisemos:

$$a^{2}_{yz/wx} = \int_0^\infty v^t (1-{}_tp_z)\,{}_tp_{y:xw}\,\mu_{y+t}\, a_{x+t:w+t}\,dt$$

Distribuimos:

$$a^{2}_{yz/wx} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{y:xw}\,\mu_{y+t}\,a_{x+t:w+t}\,dt - \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{yz:xw}\,\mu_{y+t}\,a_{x+t:w+t}\,dt$$

$$a^{2}_{yz/wx} = a_{y/wx} - a^{1}_{yz/wx}$$

Desarrollamos el último superviviente:

$$a^{2}_{yz/wx} = (a_{wx} - a_{y:xw}) - (a_{wx} - a^{1}_{yz:wx})$$

Distribuimos:

$$a^{2}_{yz/wx} = a_{wx} - a_{y:xw} - a_{wx} + a^{1}_{yz:wx}$$

$$a^{2}_{yz/wx} = a^{1}_{yz:wx} - a_{y:xw}$$

Desarrollemos:

$$a^{2}_{yz/wx} = a^{1}_{yz}(a_w + a_x - a_{wx}) - a_y(a_x + a_w - a_{xw})$$

Distribuimos:

$$\boxed{\bar{a}^{2}_{yz/wx} = \bar{a}^{1}_{yzw}+\bar{a}^{1}_{xyz}-\bar{a}^{1}_{xyzw} - \bar{a}_{xy}-\bar{a}_{yw}+\bar{a}_{xyw}}$$

Obtengamos otra expresión:

$$\boxed{\bar{a}^{2}_{yz/wx} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{yz:xw}\,\mu_{z+t}\,\bar{a}_{y+t/x+t:w+t}\,dt}$$

Desarrollemos la anualidad interior

$$\bar{a}^{2}_{yz/wx} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{yz:xw}\,\mu_{z+t}(\bar{a}_{x+t:w+t} - \bar{a}_{y+t:x+t:w+t})dt$$

Distribuimos:

$$\bar{a}^{2}_{yz/wx} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{yz:xw}\,\mu_{z+t}\,\bar{a}_{x+t:w+t} - \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{yz:xw}\,\mu_{z+t}\,\bar{a}_{y+t:x+t:w+t}\,dt$$

Reexpresamos:

$$\boxed{\bar{a}^{2}_{yz/wx} = \bar{a}^{1}_{yz/wx} - \bar{a}_{z/y:xw}}$$

Para obtener otra expresión desarrollemos el último superviviente:

$$\bar{a}^{2}_{yz/wx} = (\bar{a}_{xw} - \bar{a}^{1}_{yz}(\bar{a}_{wx})) - (\bar{a}_{y}(\bar{a}_{xw}) - \bar{a}_{yz}(\bar{a}_{xw}))$$

Desarrollamos:

$$\bar{a}^{2}_{yz/wx} =(\bar{a}_x+\bar{a}_w-\bar{a}_{xw})-\bar{a}^{1}_{yz}(\bar{a}_x+\bar{a}_w-\bar{a}_{wx})-(\bar{a}_y(\bar{a}_x+\bar{a}_w-\bar{a}_{xw})-\bar{a}_{yz}(\bar{a}_x+\bar{a}_w-\bar{a}_{xw})$$

Simplificamos:

$$\boxed{\bar{a}^{2}_{yz/wx} =\bar{a}_x+\bar{a}_w-\bar{a}_{xw}-\bar{a}^{1}_{xyz}+\bar{a}^{1}_{yzw}+\bar{a}^{1}_{xyzw}-\bar{a}_{xy}-\bar{a}_{yw}+\bar{a}_{xyw}+\bar{a}_{xyz}+\bar{a}_{yzw}-\bar{a}_{xyzw})}$$

Otro resultado:

$$\boxed{\bar{a}^{2:3}_{\underset{1}{x}:y:z/w} = a^{2}_{\underset{1}{x}:y:z/w} + a^{3}_{\underset{1}{x}:y:z/w}}$$

Desarrollando ambos sumandos:

$$\bar{a}^{2:3}_{\underset{1}{x}:y:z/w} = \int_0^\infty v^t(1-{}_tp_z){}_tp_{xyw}\mu_{y+t}(\bar{a}_{w+t})dt + \int_0^\infty v^t(1-{}_tp_z){}_tp_{xyw}\mu_{x+t}(a_{y+t/w+t})dt$$

Distribuimos:

$$\bar{a}^{2:3}_{\underset{1}{x}:y:z/w}=\int_0^\infty v^t{}_tp_{xyw}\mu_{y+t}(\bar{a}_{w+t})dt - \int_0^\infty v^t{}_tp_{xyzw}\mu_{y+t}(\bar{a}_{w+t})dt$$

$$+ \int_0^\infty v^t(1-{}_tp_z){}_tp_{xyw}\mu_{x+t}(a_{y+t/w+t})dt$$

Desarrollamos ahora la anualidad reversionaria interior:

$$\bar{a}^{2:3}_{\underset{1}{x}:y:z/w}=\int_0^\infty v^t{}_tp_{xyw}\mu_{y+t}(\bar{a}_{w+t})dt - \int_0^\infty v^t{}_tp_{xyzw}\mu_{y+t}(\bar{a}_{w+t})dt$$

$$+ \int_0^\infty v^t(1-{}_tp_z){}_tp_{xyw}\mu_{x+t}(a_{w+t}-a_{y+t:w+t})dt$$

Distribuimos:

$$\bar{a}^{\,2:3}_{x:y:z/w\atop 1}=\int_0^\infty V^t\,{}_tP_{xyw}\,\mu_{y+t}(\bar{a}_{w+t})dt-\int_0^\infty V^t\,{}_tP_{xyzw}\,\mu_{y+t}(\bar{a}_{w+t})dt$$

$$+\int_0^\infty V^t\,{}_tP_{xyw}\,\mu_{x+t}(a_{w+t}-a_{y+t:w+t})dt-V^t\,{}_tP_{xyzw}\,\mu_{x+t}(a_{w+t}-a_{y+t:w+t})dt$$

Desarrollamos aun más:

$$\bar{a}^{\,2:3}_{x:y:z/w\atop 1}=\int_0^\infty V^t\,{}_tP_{xyw}\,\mu_{y+t}(\bar{a}_{w+t})dt-\int_0^\infty V^t\,{}_tP_{xyzw}\,\mu_{y+t}(\bar{a}_{w+t})dt$$

$$+\int_0^\infty V^t\,{}_tP_{xyw}\,\mu_{x+t}(\bar{a}_{w+t})dt-\int_0^\infty V^t\,{}_tP_{xyw}\,\mu_{x+t}\,\bar{a}_{y+t:w+t})dt$$

$$-\int_0^\infty V^t\,{}_tP_{xyzw}\,\mu_{x+t}(\bar{a}_{w+t})dt+\int_0^\infty V^t\,{}_tP_{xyzw}\,\mu_{x+t}\,\bar{a}_{y+t:w+t}dt$$

Reexpresamos:

$$\boxed{\bar{a}^{\,2:3}_{x:y:z/w\atop 1}=\bar{a}^{\,1}_{xy/w}-\bar{a}^{\,1}_{xyz/w}+\bar{a}^{\,1}_{xy/w}-\bar{a}_{x/yw}-\bar{a}^{\,1}_{xyz/w}+\bar{a}^{\,1}_{xz/yw}}$$

CAPITULO VI

CAPITULO VI

SEGUROS

6.1 Introducción

Los seguros que se estudiaran involucran dos o más vidas, analizando los seguros de vida conjunta, seguros contingentes, y seguros contingentes compuestos.

El estudio de los seguros de dos o más personas se dividirá en dos: el primero será cuando el seguro es pagadero a la disolución del grupo, o dicho de otra manera a partir de que ocurra la primera muerte y el segundo caso cuando fallece el último superviviente.

En este capítulo nos ocuparemos del desarrollo de fórmulas que determinen el valor presente (P.N.U), porque como ya sabemos son la base para elaborar los planes de seguro y el cálculo de primas netas.

Todos y cada uno de los resultados obtenidos en el curso anterior serán generalizados en este capítulo.

Los seguros tienen la siguiente clasificación.

Tabla de la clasificación del seguro

Inicio de la cobertura	**Temporalidad de la cobertura**	**Forma de pago**	**La tasa de pago**
Ordinarios	Vitalicios	Pagaderos al final del año del deceso	Constantes
Diferidos	Temporales	Pagaderos en el momento del deceso	Variables

Tenemos el seguro **Dotal Mixto** que resulta de una combinación de una anualidad y un seguro.

Para determinar la **P.N.U** se siguen las mismas suposiciones que en vida simple.

6.2 Seguros pagaderos al final del año de fallecimiento.

Salvo que se indique, se supondrá que la suma asegurada será pagada al final del año en que ocurre el fallecimiento del asegurado y será de una unidad monetaria.

6.2.1 Seguro vitalicio.

Es conocido como seguro vitalicio de vida completa u ordinario de vida **(OV)**.

Veamos el siguiente análisis:

Supongamos:

$\mathbf{lx_1x_2..x_m}$ = contratan a la vez este tipo de seguro.
$\mathbf{dx_1x_2..x_m}$=durante el primer año del aseguramiento fallezcan (**dx**) personas.
$= deberá pagarse $\mathbf{dx_1x_2..x_m}$ unidades monetarias al finalizar el año por concepto de reclamaciones

dx+1:x+2:..:x+m = fallezcan (**dx+1:x+2:..:x+m**)
$= se pagara (**dx+1:x+2:..:x+m**) por reclamaciones y así continuamos.

El valor presente de las reclamaciones constituyen el compromiso del asegurador que deberá ser igual a los compromisos de los asegurados.

Analicemos para dos vidas:

$lxyAxy = Vdxy + V^2dx{+}1{:}y{+}1 + V^3\, dx{+}2{:}y{+}2{+}\ldots\ldots..$

$$Axy = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\, \frac{dx{+}t{:}y{+}t}{lxy}$$

$$Axy = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\, t/qxy$$

Sabemos que

$$t/qxy = \frac{lx{+}t{:}y{+}t - lx{+}t{+}1{:}y{+}t{+}1}{lxy} = \frac{dx{+}t{:}y{+}t}{lxy}$$

Definamos lo siguiente:

$$\mathbf{Cxy = V^{(x+y/2)+1}\, dxy}$$

$$\mathbf{Cx{+}t{:}y{+}t = V^{(x+y/2)+t+1}\, dx{+}t{:}y{+}t}$$

$$\mathbf{Mxy = \sum_{t=0}^{\infty} Cx{+}t{:}y{+}t}$$

Multiplicamos y dividimos por $V^{x+y/2}$:

$$Axy = \sum_{t=0}^{\infty} V^{(x+y/2)+t+1} \frac{dx{+}t{:}y{+}t}{V^{x+y/2}\, lxy}$$

$$Axy = \sum_{t=0}^{\infty} V^{(x+y/2)+t+1} \frac{dx{+}t{:}y{+}t}{Dxy}$$

Utilizamos el conmutado:

$$Axy = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Cx{+}t{:}y{+}t}{Dxy}$$

$$\mathbf{Axy = \frac{Mxy}{Dx}}$$

Generalizando para m vidas

$$\mathbf{Ax_1x_2..x_m = \frac{Mx_1x_2..x_m}{Dx_1x_2..x_m}}$$

6.2.2 Seguro temporal

Es aquel que garantiza el pago de la suma asegurada únicamente si la muerte ocurre dentro de un periodo limitado.

Si el seguro es de n años denotaremos la **P.N.U** como:

$$l_{xy}\overset{!}{A}_{xy:n|} = V d_{xy} + V^2 d_{x+1:y+1} + V^3 d_{x+2:y+2} + \dots\dots + V^n d_{x+n-1:y+n-1}$$

$$\overset{!}{A}_{xy:n|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{t+1} \frac{d_{x+t:y+t}}{l_{xy}}$$

$$\overset{!}{A}_{xy:n|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{t+1}\, {}_{t/}q_{xy}$$

Multiplicamos y dividimos por $V^{x+y/2}$:

$$\overset{!}{A}_{xy:n|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{V^{(x+y/2)+t+1}}{V^{x+y/2}} \frac{d_{x+t:y+t}}{l_{xy}}$$

$$\overset{!}{A}_{xy:n|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{(x+y/2)+t+1} \frac{{}_{t/}q_{xy}}{D_{xy}}$$

Utilizamos el nuevo conmutado:

$$\overset{!}{A}_{xy:n|} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_{x+t:y+t}}{D_{xy}}$$

$$\boxed{\overset{!}{A}_{xy:n|} = \frac{M_{xy} - M_{x+n:y+n}}{D_{xy}}}$$

Generalizando este resultado:

$$\boxed{\overset{!}{A}_{x_1x_2..x_m:n|} = \frac{M_{x_1x_2..x_m} - M_{x_1+n:x_2+n:..:x_m+n}}{D_{x_1x_2..x_m}}}$$

6.2.3 Seguro dotal Mixto.

Si el termino del seguro es de n años y denotamos **$A_{xy:\overline{n}|}$** la **P.N.U** de esta póliza e igualamos compromisos tenemos:

$$l_{xy}A_{xy:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{t+1}\, d_{x+t:y+t} + V^{n}\, l_{x+n:y+n}$$

$$A_{xy:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{t+1} \frac{{}_{t/}q_{xy}}{l_{xy}} + \frac{V^{n}\, l_{x+n:y+n}}{l_{xy}}$$

Multiplicamos y dividimos por $V^{x+y/2}$:

$$A_{xy:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{(x+y/2)+t+1} \frac{d_{x+t:y+t}}{V^{(x+y/2)}\, l_{xy}} + \frac{V^{(x+y/2)+n}\, l_{x+n:y+n}}{V^{(x+y/2)}\, l_{xy}}$$

$$A_{xy:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} V^{(x+y/2)+t+1} \frac{{}_{t/}q_{xy}}{D_{xy}}$$

Utilizamos el conmutado:

$$A_{xy:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{C_{x+t:y+t}}{D_{xy}} + \frac{D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

Denotamos $\dfrac{D_{x+n:y+n}}{D_{xy}} = \overset{1}{A}_{xy:\overline{n}|}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{A_{xy:\overline{n}|} = \overset{1}{A}_{xy:\overline{n}|} + A_{xy:\overset{1}{\overline{n}|}}} \\ &\mathbf{A_{xy:\overline{n}|} = \frac{M_{xy} - M_{x+n:y+n} + D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}} \end{aligned}}$$

Generalizamos a m vidas:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{A_{x_1x_2..x_m:\overline{n}|} = \overset{1}{A}_{x_1x_2..x_m:\overline{n}|} + A_{x_1x_2..x_m:\overset{1}{\overline{n}|}}} \\ &\mathbf{A_{x_1x_2..x_m:\overline{n}|} = \frac{M_{x_1x_2..x_m} - M_{x_1+n:x_2+n:..:x_m+n} + D_{x_1+n:x_2+n:..x_m+n}}{D_{x_1x_2..x_m}}} \end{aligned}}$$

6.2.4 Seguro diferido n años

La **P.N.U** de un seguro **O.V** diferido n años estará dada por:

$$lxyn/Axy = V^{n+1} dx+n:y+n + V^{n+2} dx+n+1:y+n+1 + \ldots\ldots$$

$$n/Axy = \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1} \frac{dx+t:y+t}{lxy}$$

$$n/Axy = \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1}\ t/qxy$$

Multiplicamos y dividimos por $V^{x+y/2:}$

$$n/Axy = \sum_{t=n}^{\infty} \frac{V^{(x+y/2)+t+1}\ dx+t:y+t}{V^{(x+y/2)}\ lxy}$$

$$n/Axy = \sum_{t=n}^{\infty} V^{(x+y/2)+t+1} \frac{dx+t:y+t}{Dxy}$$

Utilizamos el conmutado:

$$n/Axy = \sum_{t=n}^{\infty} \frac{Cx+t:y+t}{Dxy}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{n/Axy = \dfrac{Mx+n:y+n}{Dxy}} \\ \\ \mathbf{n/Axy = nExyAx+n:y+n} \end{array}}$$

Generalizando para m vidas

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{n/Ax_1x_2..x_m = \dfrac{Mx_1+n:x_2+n:...:x_m+n}{Dx_1x_2..x_m}} \\ \\ \mathbf{n/Ax_1x_2..x_m = nEx_1x_2..x_mAx_1+n:x_2+n:..:x_m+n} \end{array}}$$

6.2.5 Seguro temporal a m años y diferido a n años.

$$\mathbf{{}_{n/m}A_{xy} = {}_{n/}\overset{!}{A}_{xy:m|}}$$

$$l_{xy}\,{}_{n/}\overset{!}{A}_{xy:m|} = V^{n+1} d_{x+n:y+n} + V^{n+2} d_{x+n+1:y+n+1} + \ldots\ldots + V^{n+m} d_{x+n+m-1:y+n+m-1}$$

$${}_{n/}\overset{!}{A}_{xy:m|} = \sum_{t=n}^{n+m-1} V^{t+1} \frac{d_{x+t:y+t}}{l_{xy}}$$

$${}_{n/}\overset{!}{A}_{xy:m|} = \sum_{t=n}^{n+m-1} V^{t+1}\, {}_{t/}q_{xy}$$

Multiplicamos y dividimos por $V^{x+y/2}$:

$${}_{n/}\overset{!}{A}_{xy:m|} = \sum_{t=n}^{n+m-1} \frac{V^{(x+y/2)+t+1}\, d_{x+t:y+t}}{V^{x+y/2}\, l_{xy}}$$

$${}_{n/}\overset{!}{A}_{xy:m|} = \sum_{t=n}^{n+m-1} V^{(x+y/2)+t+1} \frac{d_{x+t:y+t}}{D_{xy}}$$

Utilizamos el conmutado:

$${}_{n/}\overset{!}{A}_{xy:m|} = \sum_{t=n}^{n+m-1} \frac{C_{x+t:y+t}}{D_{xy}}$$

$${}_{n/}\overset{!}{A}_{xy:m|} = \frac{M_{x+n:y+n} - M_{x+n+m:y+n+m}}{D_{xy}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{{}_{n/}\overset{!}{A}_{xy:m|} = \frac{M_{x+n:y+n}}{D_{xy}} - \frac{M_{x+n+m:y+n+m}}{D_{xy}}} \\ \mathbf{{}_{n/}\overset{!}{A}_{xy:m|} = {}_{n/}A_{xy} - {}_{n+m}A_{xy}} \end{array}}$$

Generalicemos para m vidas:

$$\boxed{\begin{array}{l} n/A_{x_1x_2..x_m:\overline{m}|} = \dfrac{M_{x_1+n:x_2+n:..:x_m+n}}{D_{x_1x_2..x_m}} - \dfrac{M_{x_1+n+m:x_2+n+m:..:x_m+n+m}}{D_{x_1x_2..x_m}} \\ n/A_{x_1x_2..x_m:\overline{m}|} = n/A_{x_1x_2..x_m} - {}_{n+m}A_{x_1x_2..x_m} \end{array}}$$

6.2.6 El seguro dotal a m años diferido n años

$$n/A_{xy:\overline{m}|} = \sum_{t=n}^{n+m-1} V^{t+1} \frac{d_{x+t:y+t}}{l_{xy}} + \frac{V^{n+m}\, l_{x+n+m:y+n+m}}{l_{xy}}$$

$$n/A_{xy:\overline{m}|} = \sum_{t=n}^{n+m-1} V^{t+1}\, {}_{t/}q_{xy} + \frac{V^{n+m}\, l_{x+n+m:y+n+m}}{l_{xy}}$$

Multiplicamos y dividimos por $V^{x+y/2}$:

$$n/A_{xy:\overline{m}|} = \sum_{t=n}^{n+m-1} V^{(x+y/2)+t+1} \frac{d_{x+t:y+t}}{V^{x+y/2}\, l_{xy}} + \frac{V^{(x+y/2)+n+m}\, l_{x+n+m:y+n+m}}{V^{x+y/2}\, l_{xy}}$$

$$n/A_{xy:\overline{m}|} = \sum_{t=n}^{n+m-1} V^{(x+y/2)+t+1} \frac{d_{x+t:y+t}}{D_{xy}} + \frac{V^{(x+y/2)+n+m}\, l_{x+n+m:y+n+m}}{D_{xy}}$$

Utilizamos el conmutado:

$$n/A_{xy:\overline{m}|} = \sum_{t=n}^{n+m-1} \frac{C_{x+t:y+t} + D_{x+n+m:y+n+m}}{D_{xy}}$$

Recordemos que:

$$\frac{D_{x+n:y+n}}{D_{xy}} = A_{xy:\overline{n}|}^{\;\;1}$$

$$n/Axy{:}\overline{m}| = \frac{Mx+n{:}y+n - Mx+n+m{:}y+n+m + Dx+n+m{:}y+n+m}{Dxy}$$

$$n/Axy{:}\overline{m}| = n/\overset{!}{A}xy{:}\overline{m}| + nExy\ Ax+n{:}y+n{:}\overset{!}{\overline{m}}|$$

Generalizando para m vidas

$$n/Ax_1X_2..X_m{:}\overline{m}| = \frac{Mx_1+n{:}x_2+n{:}...{:}x_m+n - Mx_1+n+m{:}x_2+n+m{:}...{:}x_m+n+m + Dx_1+n+m{:}x_2+n+m{:}...{:}x_m+n+m}{Dx_1x_2..x_m}$$

$$n/Ax_1x_2..x_m{:}\overline{m}| = n/\overset{!}{A}x_1x_2..x_m{:}\overline{m}| + nEx_1x_2..x_m\ Ax_1+n{:}x_2+n{:}...{:}x_m+n{:}\overset{!}{\overline{m}}|$$

6.3 Relación entre seguros y anualidades

Tomemos nuestros conmutados desarrollemos:

$Cxy = V^{(x+y/2)+1}\ dxy$

Poniendo en otros términos nuestra expresión tenemos:

$Cxy = V^{(x+y/2)+1}\ (\ lxy - lx+1{:}y+1\ )$

Distribuyendo:

$Cxy = V^{(x+y/2)+1}\ lxy - V^{(x+y/2)+1}\ \ lx+1{:}y+1$

$\mathbf{Cxy = V\ Dxy - Dx+1}$

Ahora veamos el otro conmutado:

$Mxy = \sum_{t=0}^{\infty} Cx+t{:}y+t$

$Mxy = \sum_{t=0}^{\infty} Cx+t{:}y+t = \sum_{t=0}^{\infty} (V\ Dx+t{:}y+t - Dx+t+1{:}y+t+1) = VNxy - Nx+1{:}y+1$

$\mathbf{Mxy = VNxy - Nx+1{:}y+1}$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en las primas netas únicas de seguros obtenemos las equivalencias entre anualidades y seguros.

6.3.1 Seguro vitalicio.

$$Axy = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} \frac{dx+t:y+t}{lxy}$$

$$Axy = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\, t/qxy$$

Sabemos que:

$$t/qxy = \frac{lx+t:y+t - lx+t+1:y+t+1}{lxy} = \frac{dx+t:y+t}{lxy}$$

Sustituyamos nuestra expresión anterior correspondiente a t/qxy:

$$Axy = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} \frac{(lx+t:y+t - lx+t+1:y+t+1)}{lxy}$$

$$Axy = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} (tPxy - t+1Pxy)$$

$$Axy = \sum V^{t+1} \left(\frac{lx+t:y+t}{lxy} \right) - \sum V^{t+1} \frac{(lx+t+1:y+t+1)}{lxy}$$

$$Axy = V \sum V^{t} \left(\frac{lx+t:y+t}{lxy} \right) - \sum V^{t+1} \frac{(lx+t+1:y+t+1)}{lxy}$$

Multiplicamos y dividimos ambos miembros por $V^{x+y/2}$:

$$Axy = V \sum V^{(x+y/2)+t} \left(\frac{lx+t:y+t}{V^{x+y/2}\, lxy} \right) - \sum V^{(x+y/2)+t+1} \frac{(lx+t+1:y+t+1)}{V^{x+y/2}\, lxy}$$

$$Axy = V \sum_{t=0}^{\infty} \frac{Dx+t:y+t}{Dxy} - \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(Dx+t+1:y+t+1)}{Dxy}$$

$$Axy = \frac{VNxy - Nx+1:y+1}{Dxy}$$

$$\boxed{Axy = V\ddot{a}xy - axy}$$

Otra forma de obtenerlo y más sencilla es sustituir la equivalencia de nuestro conmutado en el resultado final.

$$Axy = \frac{Mxy}{Dxy}$$

$$Axy = \frac{Mxy}{Dxy} = \frac{VNxy - Nx+1:y+1}{Dxy}$$

Finalmente:

$$\mathbf{Axy = V\ddot{a}xy - axy}$$

Generalizando para m vidas:

$$\boxed{A_{x_1x_2..x_m} = V\ddot{a}_{x_1x_2..x_m} - a_{x_1x_2..x_m}}$$

Otra expresión podría encontrarse a partir de que $axy = \ddot{a}xy - 1$

$$Axy = V\ddot{a}xy - (\ddot{a}xy - 1)$$

$$Axy = V\ddot{a}xy - \ddot{a}xy + 1$$

$$Axy = \ddot{a}xy\,(V - 1) + 1$$

$$Axy = 1 - (1 - V)\,\ddot{a}xy$$

Sabemos que $1 - V = d$

$$\mathbf{Axy = 1 - d\ddot{a}xy}$$

6.3.2 Seguro temporal

Vayamos a los conmutados.

$$\overset{1}{A}_{xy:\overline{n|}} = \frac{M_{xy} - M_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

$$\overset{1}{A}_{xy:\overline{n|}} = \frac{(VN_{xy} - N_{x+1:y+1}) - (VN_{x+n:y+n} - N_{x+n+1:y+n+1})}{D_{xy}}$$

$$\overset{1}{A}_{xy:\overline{n|}} = \frac{(VN_{xy} - VN_{x+n:y+n}) - (N_{x+1:y+1} - N_{x+n+1:y+n+1})}{D_{xy}}$$

$$\overset{1}{A}_{xy:\overline{n|}} = \frac{V(N_{xy} - N_{x+n:y+n})}{D_{xy}} - \frac{(N_{x+1:y+1} - N_{x+n+1:y+n+1})}{D_{xy}}$$

$$\boxed{\overset{1}{A}_{xy:\overline{n|}} = V\,\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} - a_{xy:\overline{n|}}}$$

Generalicemos para m vidas:

$$\boxed{\overset{1}{A}_{x_1x_2..x_m:\overline{n|}} = V\,\ddot{a}_{x_1x_2..x_m:\overline{n|}} - a_{x_1x_2...x_m:\overline{n|}}}$$

6.3.3 Seguro dotal Mixto.

Vayámonos a los conmutados.

Tenemos algunas equivalencias y sustituyamos:

$$A_{xy:\overline{n|}} = \overset{1}{A}_{xy:\overline{n|}} + A_{xy:\overset{1}{\overline{n|}}}$$

$$A_{xy:\overline{n|}} = \frac{M_{xy} - M_{x+n:y+n} + D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

$$A_{xy:n|} = \frac{(VN_{xy} - N_{x+1:y+1}) - (VN_{x+n:y+n} - N_{x+n+1:y+n+1})}{D_{xy}} + \frac{D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

$$A_{xy:n|} = \frac{(VN_{xy} - VN_{x+n:y+n}) - (N_{x+1:y+1} - N_{x+n+1:y+n+1})}{D_{xy}} + \frac{D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

$$A_{xy:n|} = V\frac{(N_{xy} - N_{x+n:y+n})}{D_{xy}} - \frac{(N_{x+1:y+1} - N_{x+n+1:y+n+1})}{D_{xy}} + \frac{D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

$$\mathbf{A_{xy:n|} = V\ddot{a}_{xy:n|} - \frac{(N_{x+1:y+1} - N_{x+n+1:y+n+1})}{D_{xy}} + \frac{D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}}$$

Analicemos el segundo miembro:

$$\sum_{t=1}^{n} D_{x+t:y+t} = D_{x+1:y+1} + D_{x+2:y+2} + \ldots\ldots + D_{x+n:y+n}$$

A esta sumatoria le antecede el signo menos:

$$-\sum_{t=1}^{n} D_{x+t:y+t} = -D_{x+1:y+1} - D_{x+2:y+2} - \ldots\ldots - D_{x+n:y+n} + \mathbf{D_{x+n:y+n}}$$

Tenemos una nueva sumatoria:

$$\sum_{t=1}^{n-1} D_{x+t:y+t} = D_{x+1:y+1} + D_{x+2:y+2} + \ldots\ldots + D_{x+n-1:y+n-1}$$

Por lo que:

$$\sum_{t=1}^{n-1} D_{x+t:y+t} = N_{x+1:y+1} - N_{x+n-1:y+n-1} = a_{xy:n-1|}$$

Regresando:

$$\boxed{\mathbf{A_{xy:n|} = V\ddot{a}_{xy:n|} - a_{xy:n-1|}}}$$

Generalizando para m vidas:

$$\boxed{\mathbf{A_{x_1x_2..x_m:n|} = V\ddot{a}_{x_1x_2..x_m:n|} - a_{x_1x_2..x_m:n-1|}}}$$

6.3.4 Seguro diferido n años

Analicemos a partir de los conmutados.

Tomemos nuestra expresión básica:

$$\mathbf{M_{xy} = VN_{xy} - N_{x+1:y+1}}$$

$$n/A_{xy} = \frac{M_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

$$n/A_{xy} = \frac{VN_{x+n:y+n} - N_{x+n+1:y+n+1}}{D_{xy}}$$

$$n/A_{xy} = \frac{VN_{x+n:y+n}}{D_{xy}} - \frac{N_{x+n+1:y+n+1}}{D_{xy}}$$

$$\boxed{\mathbf{n/A_{xy} = V\, n/\ddot{a}_{xy} - n/a_{xy}}}$$

Generalizando para m vidas:

$$\boxed{\mathbf{n/A_{x_1x_2..x_m} = V\, n/\ddot{a}_{x_1x_2..x_m} - n/a_{x_1x_2..x_m}}}$$

6.3.5 Seguro temporal a m años y diferido a n años.

Analicemos a partir de los conmutados:

Sabemos:

$$\mathbf{M_{xy} = VN_{xy} - N_{x+1:y+1}}$$

$$n/A_{xy:\overline{m|}} = \frac{M_{x+n:y+n} - M_{x+n+m:y+n+m}}{D_{xy}}$$

$$n/A_{xy:\overline{m|}} = \frac{(VN_{x+n:y+n} - N_{x+n+1:y+n+1}) - (VN_{x+n+m:y+n+m} - N_{x+n+m+1:y+n+m+1})}{D_{xy}}$$

$$n/A_{xy:\overline{m|}} = \frac{(VN_{x+n:y+n} - VN_{x+n+m:y+n+m}) - (N_{x+n+1:y+n+1} - N_{x+n+m+1:y+n+m+1})}{D_{xy}}$$

$$\overset{!}{n/A}xy:m| = \frac{V(Nx+n:y+n - Nx+n+m:y+n+m) - (Nx+n+1:y+n+1 - Nx+n+m+1:y+n+m+1)}{Dxy}$$

$$\overset{!}{n/A}xy:m| = \frac{V(Nx+n:y+n - Nx+n+m:y+n+m)}{Dxy} - \frac{(Nx+n+1:y+n+1 - Nx+n+m+1:y+n+m+1)}{Dxy}$$

$$\boxed{\mathbf{\overset{!}{n/A}xy:m| = Vn/m\ddot{a}xy - n/m\ddot{a}xy}}$$

Generalizando para m vidas

$$\boxed{\mathbf{\overset{!}{n/A}x_1x_2..x_m:m| = Vn/m\ddot{a}x_1x_2..x_m - n/m\ddot{a}x_1x_2..x_m}}$$

6.3.6 El seguro dotal a m años diferido n años

Analicemos desde los conmutados:

$$\mathbf{Mxy = VNxy - Nx+1:y+1}$$

$$n/Axy:m| = \frac{Mx+n:y+n - Mx+n+m:y+n+m + Dx+n+m:y+n+m}{Dxy}$$

$$n/Axy:m| = \frac{(VNx+n:y+n - Nx+n+1:y+n+1) - (VNx+n+m:y+n+m - Nx+n+m+1:y+n+m+1)}{Dxy} + \frac{Dx+n+m:y+n+m}{Dxy}$$

$$n/Axy:m| = \frac{(VNx+n:y+n - VNx+n+m:y+n+m) - (Nx+n+1:y+n+1 - Nx+n+m+1:y+n+m+1)}{Dxy} + \frac{Dx+n+m:y+n+m}{Dxy}$$

$$n/Axy:m| = V\frac{(Nx+n:y+n - Nx+n+m:y+n+m)}{Dxy} - \frac{(Nx+n+1:y+n+1 - Nx+n+m+1:y+n+m+1)}{Dxy} + \frac{Dx+n+m:y+n+m}{Dxy}$$

$$n/Axy:m| = Vn/m\ddot{a}xy - \frac{(Nx+n+1:y+n+1 - Nx+n+m+1:y+n+m+1)}{Dxy} + \frac{Dx+n+m:y+n+m}{Dxy}$$

Analicemos esta sumatoria:

$\sum_{t=n}^{n+m} Dx+t+1:y+t+1 = Dx+n+1:y+n+1 + Dx+n+2:y+n+2 + \ldots..+Dx+n+m:y+n+m$

A toda esta sumatoria le antecede el signo menos por lo tanto:

$-\sum_{t=n}^{n+m} Dx+t+1:y+t+1 = -Dx+n+1:y+n+1 - Dx+n+2:y+n+2 - \ldots..-Dx+n+m:y+n+m + \mathbf{Dx+n+m:y+n+m}$

$-\sum_{t=n}^{n+m-1} Dx+t+1:y+t+1 = -Dx+n+1:y+n+1 - Dx+n+2:y+n+2 - \ldots..-Dx+n+m-1:y+n+m-1$

Redefiniendo nuevamente el signo menos:

$\sum_{t=n}^{n+m-1} Dx+t+1:y+t+1 = Dx+n+1:y+n+1 + Dx+n+2:y+n+2 + \ldots..+Dx+n+m-1:y+n+m-1 = Nx+n+1:y+n+1 - Nx+n+m:y+n+m$

$$n/Axy:m| = Vn/m\ddot{a}xy - \frac{(Nx+n+1:y+n+1 - Nx+n+m:y+n+m)}{Dxy}$$

$$\boxed{\mathbf{n/Axy:m| = Vn/m\ddot{a}xy - n/\ddot{a}xy - (n+m-1)/\ddot{a}xy}}$$

Generalizando para m vidas

$$\boxed{\mathbf{n/Ax_1x_2..x_m:m| = Vn/m\ddot{a}x_1x_2..x_m - n/\ddot{a}x_1x_2..x_m - (n+m-1)/\ddot{a}x_1x_2..x_m}}$$

6.4 Seguros Variables

Se le denomina a aquel seguro que da un beneficio por muerte, pudiendo ser creciente o decreciente.

6.4.1 seguro creciente de vida entera

El cual provee un beneficio por muerte de $1.0 en el primer año, de $2.0 en el segundo año y así sucesivamente.

Será denotado por: $\mathbf{(IA)x_1x_2..x_m}$

Debemos recordar que al igual de lo que sucedió con las anualidades variables la base es t/Ax.

Analicemos para dos vidas:

$$(IA)xy= \sum_{t=0}^{\infty} t/Axy = \frac{1}{Dxy} \sum_{t=0}^{\infty} Mx+t:y+t$$

Desarrollando la segunda sumatoria tenemos:

$$\sum_{t=0}^{\infty} Mx+t:y+t = Mxy +Mx+1:y+1 + Mx+2:y+2 + ...$$

Podremos definir otro conmutado:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_{t=0}^{\infty} Mx+t:y+t = Mxy +Mx+1:y+1 + Mx+2:y+2 + ... = Rxy \\ \sum_{t=1}^{\infty} Mx+t:y+t = Mx+1:y+1 + Mx+2:y+2 + Mx+3:y+3 + ... =Rx+1:y+1 \end{array}}$$

Por lo que una expresión para este tipo de seguro:

$$\boxed{\mathbf{(IA)xy = \frac{Rxy}{Dxy}}}$$

Para m vidas:

$$\boxed{\mathbf{(IA)x_1x_2..x_m = \frac{Rx_1x_2..x_m}{Dx_1x_2..x_m}}}$$

6.4.2 Seguro creciente temporal a n años.

Es aquel que proporciona un beneficio por muerte de \$1.0 en el primer año , incrementandose en \$1.0 cada año, suspendiendose el beneficio por muerte después de n años:

Será denotado por:

$$(IA)xy:n| = \sum_{t=0}^{n-1} t/n\text{-}tAxy = \frac{1}{Dxy} \sum_{t=0}^{n-1} Mx+t+1:y+t+1 - Mx+n+1:y+n+1$$

Desarrollemos la primera sumatoria:

$0/nAxy + 1/n\text{-}1Axy + 2/n\text{-}2Axy + ...+ n\text{-}1/1Axy$

Tomando como base el:

$n/mAxy = n/Axy - n+m/Axy$

Desarrollando:

$(0/Axy - n/Axy) + (1/Axy - n/Axy) + (2/Axy - n/Axy) + ...+ (n\text{-}1/Axy - n/Axy)$

Ahora tomamos de base el:

$$n/Axy = \frac{Mx+n:y+n}{Dxy}$$

Desarrollando:

$(Mxy + Mx+n:y+n) + (Mx+1:y+1 - Mx+n:y+n) + (Mx+2:y+2 - Mx+n:y+n) + ...+ (Mx+n\text{-}1:y+n\text{-}1 - Mx+n:y+n)$

Aquí nos da la siguiente sumatoria considerando únicamente los primeros sumandos.

$Mxy + Mx+1:y+1 + Mx+2:y+2 + ...+ Mx+n\text{-}1:y+n\text{-}1 = \sum_{t=0}^{n-1} Mx+t:y+t = Rxy - Rx+n:y+n$

Regresando tenemos:

$$(IA)xy:\overset{!}{n|} = \frac{Rxy - Rx+n:y+n - nMx+n:y+n}{Dxy}$$

Generalizando para m vidas:

$$(IA)x_1x_2..x_m:\overset{!}{n|} = \frac{Rx_1x_2..x_m - Rx_1+n:x_2+n:..:x_m+n - nMx_1+n:x_2+n:..:x_m+n}{Dx_1x_2..x_m}$$

6.4.3 Seguro de vida entera*****

Es aquel que proporciona un beneficio por muerte que se incrementa solamente durante n años y permanece constante en n.
Veamos para dos vidas

Será denotado por:

$(I n\rceil A)xy$

Desarrollemos:

$$(I n\rceil A)xy = \sum_{t=0}^{n-1} t/Axy = \frac{1}{Dxy} \sum_{t=0}^{n-1} Mx+t+1:y+t+1$$

Desarrollando la primera sumatoria:

$0/Axy + 1/Axy + 2/Axy + \ldots\ldots + n-1/Axy$

Tomando de base:

$$\mathbf{n/Axy = \frac{Mx+n:y+n}{Dxy}}$$

Reexpresando cada sumando tenemos:

$Mxy + Mx+1:y+1 + Mx+2:y+2 + \ldots\ldots + Mx+n-1:y+n-1 = \sum_{t=0}^{n-1} Mx+t:y+t = Rxy - Rx+n:y+n$

Regresando tenemos:

$$\boxed{\mathbf{(I n\rceil : A)xy = \frac{Rxy - Rx+n:y+n}{Dxy}}}$$

Para m vidas:

$$\boxed{\mathbf{(I n\rceil : A)x_1x_2..x_m = \frac{Rx_1x_2..x_m - Rx_1+n:x_2+n:..:x_m+n}{Dx_1x_2..x_m}}}$$

6.4.4 Seguro temporal decreciente

Es aquel que provee un beneficio inicial por muerte de $',' decreciendo $1.0 cada año, sin pago de la suma asegurada si la muerte ocurre después de n años.

Esta denotado por:

$$\overset{!}{(DA)}_{xy:n|} = \sum_{t=1}^{n} \overset{!}{A}_{xy:t|} = \sum_{t=1}^{n} \frac{M_{x+1:y+1} - M_{x+t+1:y+t+1}}{D_{xy}}$$

Desarrollemos la primera sumatoria:

$$\overset{!}{A}_{xy:1|} + \overset{!}{A}_{xy:2|} + \overset{!}{A}_{xy:3|} + \ldots\ldots + \overset{!}{A}_{xy:n|}$$

Tomando de base:

$$\overset{!}{A}_{xy:n|} = \frac{M_{xy} - M_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

Sustituyendo tenemos:

$$\frac{(M_{xy} - M_{x+1:y+1}) + (M_{xy} - M_{x+2:y+2}) + \ldots\ldots + (M_{xy} - M_{x+n:y+n})}{D_{xy}}$$

Analicemos los segundo sumandos:

$$M_{x+1:y+1} + M_{x+2:y+2} + M_{x+3:y+3} + \ldots\ldots + M_{x+n:y+n} = \sum_{t=1}^{n} M_{x+t:y+t} = R_{x+1:y+1} - R_{x+n+1:y+n+1}$$

Regresando tenemos:

$$nM_{xy} - (R_{x+1:y+1} - R_{x+n+1:y+n+1})$$

$$\boxed{\overset{!}{(DA)}_{xy:n|} = \frac{nM_{xy} - (R_{x+1:y+1} - R_{x+n+1:y+n+1})}{D_{xy}}}$$

Para m vidas:

$$(DA)_{x_1x_2..x_m:\overline{n|}} = \frac{nM_{x_1x_2..x_m} - (R_{x_1+1:x_2+1:..:x_m+1} - R_{x_1+n+1:x_2+n+1:..:x_m+n+1})}{D_{x_1x_2..x_m}}$$

6.4.5 Relación entre la anualidad creciente y seguro creciente

Sabemos que:

$\sum_{t=0}^{\infty} Mx+t:y+t = Rxy$

Pero podemos sustituir el valor de Mx+t:y+t:

$\sum_{t=0}^{\infty} VNx+t:y+t - Nx+t+1:y+t+1$

$\sum_{t=0}^{\infty} VNx+t:y+t - \sum_{t=0}^{\infty} Nx+t+1:y+t+1$

$V\sum_{t=0}^{\infty} Nx+t:y+t - \sum_{t=0}^{\infty} Nx+t+1:y+t+1 = VSxy - Sx+1:y+1$

Tomando la primera anualidad variable tenemos:

$$(IA)xy = \frac{Rxy}{Dxy} = \frac{VSxy - Sx+1:y+1}{Dxy}$$

$$(IA)xy = V\frac{Sxy}{Dxy} - \frac{Sx+1:y+1}{Dxy}$$

$$(IA)xy = V\,(I\ddot{a})xy - (Ia)xy$$

Generalicemos para m vidas:

$$(IA)_{x_1x_2..x_m} = V\,(I\ddot{a})_{x_1x_2..x_m} - (Ia)_{x_1x_2..x_m}$$

6.4.6 Otros tipos de seguros crecientes

Estudiaremos tres.

El primero de ellos:

Es aquel donde la suma asegurada es hecho en el momento de ocurrir la muerte.

Su prima neta única estará dada por:

$$(I\bar{A})xy = \frac{1}{Dx} \sum_{t=0}^{\infty} (t+1)\, \bar{C}x{+}t{:}y{+}t$$

Desarrollando la sumatoria tenemos:

$$\bar{C}xy + 2\bar{C}x{+}1{:}y{+}1 + 3\bar{C}x{+}2{:}y{+}2 + 4\bar{C}x{+}3{:}y{+}3 +$$

Desarrollando tenemos:

$$\bar{C}xy + \bar{C}x{+}1{:}y{+}1 + \bar{C}x{+}2{:}y{+}2 + \bar{C}x{+}3{:}y{+}3 + \ldots\ldots = \sum_{t=0}^{\infty} \bar{C}x{+}t{:}y{+}t = \bar{M}xy$$

$$+\bar{C}x{+}1{:}y{+}1 + \bar{C}x{+}2{:}y{+}2 + \bar{C}x{+}3{:}y{+}3 + \ldots\ldots = \sum_{t=1}^{\infty} \bar{C}x{+}t{:}y{+}t = \bar{M}x{+}1{:}y{+}1$$

$$+ \bar{C}x{+}2{:}y{+}2 + \bar{C}x{+}3{:}y{+}3 + \ldots\ldots = \sum_{t=2}^{\infty} \bar{C}x{+}t{:}y{+}t = \bar{M}x{+}2{:}y{+}2$$

Esto será igual a:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \bar{M}x{+}t{:}y{+}t = \frac{\bar{R}xy}{Dxy}$$

$$\boxed{(I\bar{A})xy = \frac{\bar{R}xy}{Dxy}}$$

Para m vidas

$$\boxed{(I\bar{A})x_1x_2..x_m = \frac{\bar{R}x_1x_2..x_m}{Dx_1x_2..x_m}}$$

El segundo y el tercero surgen al suponer que el beneficio por muerte se incrementa a intervalos que son fracciones de año y su análisis es similar al utilizado en vida simple.

El segundo de ellos es donde la suma asegurada es pagada al final del año en que ocurre la muerte.

Será denotado por:

$$(I^{(m)}A)xy = \frac{1}{Dxy} \sum_{t=0}^{\infty} \left(t + \frac{m+1}{2m}\right) Cx+t:y+t$$

Desarrollando tenemos:

$$\frac{(m+1)}{2m}Cxy + \left(Cx+1:y+1 + \frac{m+1}{2m} Cx+1:y+1\right) + \left(2Cx+2:y+2 + \frac{m+1}{2m} Cx+2:y+2\right)+\ldots\ldots$$

Desarrollando los primeros sumandos:

$$Cx+1:y+1 + 2Cx+2:y+2 + 3Cx+3:y+3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Cx+1:y+1 + Cx+2:y+2 + Cx+3:y+3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \sum_{t=1}^{\infty} Cx+t:y+t = Mx+1:y+1$$

$$+ Cx+2:y+2 + Cx+3:y+3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \sum_{t=2}^{\infty} Cx+t:y+t = Mx+2:y+2$$

$$+ Cx+3:y+3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \sum_{t=3}^{\infty} Cx+t:y+t = Mx+3:y+3$$

Así continuamos:

$$\boldsymbol{\sum_{t=1}^{\infty} Mx+t:y+t = Rx+1:y+1}$$

Ahora analicemos los segundos sumandos.

$$\frac{(m+1)}{2m}Cxy + \left(\frac{m+1}{2m} Cx+1:y+1\right) + \left(\frac{m+1}{2m} Cx+2:y+2\right)+\ldots\ldots$$

$$\frac{m+1}{2m}(Cxy + Cx+1:y+1 + Cx+2:y+2+\ldots\ldots)$$

$$\frac{m+1}{2m}\left(\sum_{t=0}^{\infty} Cx+t :y+t\right)$$

$$\boldsymbol{\frac{m+1}{2m}(Mxy)}$$

Regresando tenemos:

$$\boxed{(I^{(m)}A)_{xy} = \frac{R_{x+1:y+1} + \frac{m+1}{2m}(M_{xy})}{D_{xy}}}$$

Para m vidas

$$\boxed{(I^{(m)}A)_{x_1x_2..x_m} = \frac{R_{x_1+1:x_2+1:..:x_m+1} + \frac{m+1}{2m}(M_{x_1x_2..x_m})}{D_{x_1x_2..x_m}}}$$

Analicemos el tercero caso.

Considerando que la suma asegurada es pagada en el momento en que ocurre la muerte.

Estará denotada por:

$$(I^{(m)}\bar{A})_{xy} = \frac{1}{D_{xy}} \sum_{t=0}^{\infty} \left(t + \frac{m+1}{2m}\right) \bar{C}_{x+t:y+t}$$

Desarrollando tenemos:

$$\frac{(m+1)}{2m}\bar{C}_{xy} + \left(\bar{C}_{x+1:y+1} + \frac{m+1}{2m}\bar{C}_{x+1:y+1}\right) + \left(2\bar{C}_{x+2:y+2} + \frac{m+1}{2m}\bar{C}_{x+2:y+2}\right) + \ldots\ldots$$

Desarrollando los primeros sumandos:

$$\bar{C}_{x+1:y+1} + 2\bar{C}_{x+2:y+2} + 3\bar{C}_{x+3:y+3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\bar{C}_{x+1:y+1} + \bar{C}_{x+2::y+2} + \bar{C}_{x+3:y+3} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \sum_{t=1}^{\infty} \bar{C}_{x+t:y+t} = \bar{M}_{x+1:y+1}$$

$$+ \bar{C}_{x+2:y+2} + \bar{C}_{x+3:y+3} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \sum_{t=2}^{\infty} \bar{C}_{x+t:y+t} = \bar{M}_{x+2:y+2}$$

$$+ \bar{C}_{x+3:y+3} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \sum_{t=3}^{\infty} \bar{C}_{x+t:y+t} = \bar{M}_{x+3:y+3}$$

Así continuamos:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \mathbf{\bar{M}x{+}t{:}y{+}t = \bar{R}x{+}1{:}y{+}1}$$

Ahora analicemos los segundos sumandos:

$$\frac{(m+1)}{2m}\bar{C}xy + \left(\frac{m+1}{2m}\bar{C}x+1{:}y+1\right) + \left(\frac{m+1}{2m}\bar{C}x+2{:}y+2\right)+.......$$

$$\frac{m+1}{2m}(\bar{C}xy + \bar{C}x+1{:}y+1 + \bar{C}x+2{:}y+2+.......)$$

$$\frac{m+1}{2m}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\bar{C}x+t{:}y+t\right)$$

$$\mathbf{\frac{m+1}{2m}(\bar{M}xy)}$$

Regresando tenemos:

$$\boxed{\mathbf{(\bar{I}^{(m)}\bar{A})\,xy = \frac{\bar{R}x+1{:}y+1 + \frac{m+1}{2m}(\bar{M}xy)}{Dxy}}}$$

Para m vidas:

$$\boxed{\mathbf{(\bar{I}^{(m)}\bar{A})\,x_1x_2..x_m = \frac{\bar{R}x_1{+}1{:}x_2{+}1{:}..{:}x_m{+}1 + \frac{m+1}{2m}(\bar{M}x_1x_2..x_m)}{Dx_1x_2..x_m}}}$$

Si en el seguro anterior hacemos que $m\to\infty$ obtenemos:

$$\lim_{m\to\infty}(\bar{I}^{(m)}\bar{A})\,xy = \lim_{m\to\infty}\frac{\bar{R}x+1{:}y+1 + \frac{m+1}{2m}(\bar{M}xy)}{Dxy}$$

$$(\overline{I}\,\overline{A})xy = \frac{\overline{R}x+1:y+1 + \frac{1}{2}(\overline{M}xy)}{Dxy}$$

Para m vidas:

$$(\overline{I}\,\overline{A})\,x_1x_2..x_m = \frac{\overline{R}x_1+1:x_2+1:..:x_m+1 + \frac{1}{2}(\overline{M}x_1x_2..x_m)}{Dx1x2..xm}$$

6.5 Seguros pagaderos en el momento de la muerte.

En la vida cotidiana la suma asegurada es pagada en el momento en que se comprueba la muerte. En nuestras expresiones anteriores la suma asegurada se supone será pagada al final del año en que fallece el asegurado, por lo que ahora debemos de hacer ajuste a nuestras anteriores con el fin de que la suma asegurada sea pagada al final del m-esimo de año en que ocurre el deceso.

Comencemos por analizar la PNU de un seguro OV por $A^{(m)}xy$:

Analicemos para dos vidas:

$$Axy^{(m)} = \frac{1}{lxy}\left(V^{1/m}\,(lxy - lx_{+1/m:}y_{+1/m}) + V^{2/m}\,(lx_{+1/m:}y_{+1/m} - lx_{+2/m:}\,y_{+2/m}) + ...\right)$$

$$Axy^{(m)} = -\frac{1}{lxy} \sum_{t=1}^{\infty} V^{t/m}\, \Delta lx_{+(t-1)/m}:y_{+(t-1)/m}$$

Veamos el comportamiento para t=1

$-(\Delta lxy) = -(lx_{+1/m:}y_{+1/m} - lxy) = lx - lx+1/m:y+1/m$

1/m representa la magnitud del intervalo entre cada argumento.

Si a esta expresión hacemos que $m \rightarrow \infty$,el seguro que se obtiene es el que es pagadero en el momento en que ocurre la muerte.

La notación utilizada para este tipo de seguros consiste en señalar con una barra la A.

6.5.1 Seguro de vida entera pagadero al momento de ocurrir la muerte.

$$\bar{A}xy = \lim_{m\to\infty} Axy^{(m)}$$

$$\bar{A}xy = -\frac{1}{lxy} \lim_{m\to\infty} \sum_{t=1}^{\infty} V^{t/m} \Delta lx +_{(t-1)/m}:y +_{(t-1)/m}$$

Sabemos que el lim $1/m \to 0$,

Entonces $lx + (t-1)/m:y + (t-1)/m \to dlx+t:y+t$

Lo sabemos porque lo demostramos en el capítulo I.

$$\mu x = \frac{1}{lx} (-) \frac{d}{dx} lx$$

Por lo que podemos definir:

$dlx+t = -lx+t\ \mu x+t\ dt$

Para dos vidas

$dlx+t:y+t = -lx+t:y+t\ \mu x+t:y+t\ dt$

Regresando:

$$\bar{A}xy = -\frac{1}{lxy} \int_0^{\infty} V^t -lx+t:y+t\ \mu x+t:y+t\ dt$$

$$\bar{A}xy = \frac{1}{lxy} \int_0^{\infty} V^t\ lx+t:y+t\ \mu x+t:y+t\ dt$$

$$\bar{A}xy = \int_0^{\infty} V^t \frac{lx+t:y+t}{lxy} \mu x+t:y+t\ dt$$

$$\bar{A}xy = \int_0^{\infty} V^t\ tPxy\ \mu x+t:y+t\ dt$$

Integrando por partes:

$uv - \int vdu$

sea:

$u = V^t$

$du = V^t \log V\, dt$(sea $\log V = -\delta$)

$dv = l_{x+t:y+t}\, \mu_{x+t:y+t}$

$v = -l_{x+t:y+t}$

Regresando:

$$\overline{A}_{xy} = \frac{1}{l_{xy}} \left(\left(V^t (-l_{x+t:y+t} \Big|_0^\infty \right) - \int_0^\infty -l_{x+t:y+t} -\delta\, V^t dt \right)$$

$$\overline{A}_{xy} = \frac{1}{l_{xy}} \left(\left(V^t (-l_{x+t:y+t} \Big|_0^\infty \right) - \delta \int_0^\infty l_{x+t:y+t}\, V^t dt \right)$$

Cuando evaluamos en el limite superior, como es una función de supervivencia $l_{x+t:y+t}$ nos da (pon bien estas letras)

$$\overline{A}_{xy} = \left(\frac{V^t}{l_{xy}} (-l_{x+t:y+t} \Big|_0 \right) - \delta \int_0^\infty V^t \frac{l_{x+t:y+t}}{l_{xy}} dt$$

$$\overline{A}_{xy} = 1 - \delta \int_0^\infty V^t \frac{l_{x+t:y+t}}{l_{xy}} dt$$

$$\overline{A}_{xy} = 1 - \delta \int_0^\infty {}_tP_{xy}\, V^t dt$$

El resultado de la integral representa una anualidad continua:

$$\mathbf{\bar{A}xy = 1 - \delta\, \bar{a}xy}$$

Retomando la expresión:

$$\int_0^\infty V^t\, tPxy\mu x{+}t{:}y{+}t$$

Ahora multiplicamos y dividimos por $V^{x+y/2}$.

$$\int_0^\infty \frac{V^{(x+y/2)+t}\, lx{+}t{:}y{+}t}{V^{x+y/2}\, lxy}\, \mu x{+}t{:}y{+}t\, dt$$

De la cual obtenemos:

$$\int_0^\infty \frac{Dx{+}t{:}y{+}t}{Dxy}\, \mu x{+}t{:}y{+}t\, dt$$

$$\frac{1}{Dxy} \int_0^\infty Dx{+}t{:}y{+}t\, \mu x{+}t{:}y{+}t\, dt$$

A partir de la expresión anterior definimos dos nuevos conmutados:

$$\bar{C}xy = \int_0^1 Dx{+}t{:}y{+}t\, \mu x{+}t{:}y{+}t\, dt$$

$$\bar{M}xy = \int_0^\infty Dx{+}t{:}y{+}t\, \mu x{+}t{:}y{+}t\, dt$$

Con las cuales podemos dar otra expresión para nuestro seguro en cuestión.

$$\mathbf{\bar{A}xy} = = \frac{1}{Dxy} \int_0^\infty Dx{+}t{:}y{+}t\, \mu x{+}t{:}y{+}t\, dt$$

$$\mathbf{\bar{A}xy = \frac{\bar{M}xy}{Dxy}}$$

6.5.2 Seguro temporal a n años pagadero al momento de ocurrir la muerte

$$\bar{A}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n V^t\, {}_tP_{xy}\, \mu_{x+t:y+t}\, dt$$

Integrando por partes:

$$uv - \int v\,du$$

sea:

$u = V^t$
$du = V^t \log V\, dt$ (sea $\log V = -\delta$)

$dv = l_{x+t:y+t}\, \mu_{x+t:y+t}$
$v = -l_{x+t:y+t}$

Regresando:

$$\bar{A}_{xy:\overline{n}|} = \frac{1}{l_{xy}}\left(\left(V^t(-l_{x+t:y+t}\right)\Big|_0^n\right) - \int_0^n -l_{x+t:y+t}\,(-\delta V^t)\,dt)$$

$$\bar{A}_{xy:\overline{n}|} = \frac{1}{l_{xy}}\left(\left(V^t(-l_{x+t:y+t}\right)\Big|_0^n\right) - \delta\int_0^n l_{x+t:y+t}\, V^t dt)$$

$$\bar{A}_{xy:\overline{n}|} = \frac{1}{l_{xy}}\left(\left(V^t(-l_{x+t:y+t}\right)\Big|_0^n\right) - \delta\int_0^n \frac{l_{x+t:y+t}}{l_{xy}}\, V^t dt$$

$$\bar{A}_{xy:\overline{n}|} = \frac{1}{l_{xy}}((V^n(-l_{x+n:y+n})) + 1 - \delta\int_0^n \frac{l_{x+t:y+t}}{l_{xy}}\, V^t dt$$

El primer sumando lo multiplicamos y dividimos por $V^{x+y/2}$

$$\bar{A}_{xy:\overline{n}|} = \left(\frac{-V^{(x+y/2)+n}\, l_{x+n:y+n}}{V^{x+y/2}\, l_{xy}}\right) + 1 - \delta\int_0^n {}_tP_{xy}\, V^t dt$$

$$\bar{A}^{1}_{xy:n|} = \left(-\frac{D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}\right) + 1 - \delta\int_0^n {}_tP_{xy}\, V^t dt$$

$$\bar{A}^{1}_{xy:n|} = -{}_nE_{xy} + 1 - \delta\int_0^n {}_tP_{xy}\, V^t dt$$

El resultado de la integral representa una anualidad temporal continua.

$$\mathbf{\bar{A}^{1}_{xy:n|} = 1 - {}_nE_{xy} - \delta\, \bar{a}_{xy:n|}}$$

Demos otra expresión a partir de nuestros conmutados:

$$\bar{M}_{xy} = \int_0^\infty D_{x+t:y+t}\, \mu_{x+t:y+t}\, dt$$

$$\bar{M}_{x+n:y+n} = \int_n^\infty D_{x+t:y+t}\, \mu_{x+t:y+t}\, dt$$

Con las cuales podemos dar otra expresión para este seguro.

$$\mathbf{\bar{A}^{1}_{xy:n|} = \frac{\bar{M}_{xy} - \bar{M}_{x+n:y+n}}{D_{xy}}}$$

6.5.3 Seguro diferido n años pagadero al ocurrir el fallecimiento

$${}_{n/}\bar{A}_{xy} = \int_n^\infty V^t\, {}_tP_{xy}\, \mu_{x+t:y+t}\, dt$$

Integrando por partes

$uv - \int vdu$

Sea

$u = V^t$

$du = V^t \log V\, dt$ (sea $\log V = -\delta$)

$dv = l_{x+t:y+t}\, \mu_{x+t:y+t}$

$v = -l_{x+t:y+t}$

Regresando:

$$n/\bar{A}_{xy} = \frac{1}{l_{xy}}((V^t(-l_{x+t:y+t} \,|_n^{\infty}) - \int_n^{\infty} -l_{x+t:y+t}(-\delta V^t)\,dt)$$

$$n/\bar{A}_{xy} = \frac{1}{l_{xy}}((V^t(-l_{x+t:y+t} \,|_n^{\infty}) - \delta\int_n^{\infty} l_{x+t:y+t}\; V^t dt)$$

$$n/\bar{A}_{xy} = (V^t(\frac{-l_{x+t:y+t}}{l_{xy}} \,|_n^{\infty}) - \delta\int_n^{\infty} \frac{l_{x+t:y+t}}{l_{xy}}\; V^t dt$$

Como sucedió en el primer caso cuando evaluamos en el límite superior nos da cero.

$$n/\bar{A}_{xy} = (\frac{V^n -l_{x+n:y+n}}{l_{xy}})) - \delta\int_n^{\infty} \frac{l_{x+t:y+t}}{l_{xy}}\; V^t dt$$

El primer sumando lo multiplicamos y dividimos por $V^{x+y/2}$

$$n/\bar{A}_{xy} = (\frac{-V^{(x+y/2)+n}\, l_{x+n:y+n}}{V^{x+y/2}\, l_{xy}}) - \delta\int_n^{\infty} {}_tP_{xy}\; V^t dt$$

$$n/\bar{A}_{xy} = (\frac{-D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}) - \delta\int_n^{\infty} {}_tP_{xy}\; V^t dt$$

$$n/\bar{A}_{xy} = -{}_nE_{xy} - \delta\int_n^{\infty} {}_tP_{xy}\; V^t dt$$

El resultado de la integral representa una anualidad diferida n años continúa.

$$\mathbf{n/\bar{A}_{xy} = -{}_nE_{xy} - \delta\; n/\bar{a}_{xy}}$$

6.5.4 Seguro dotal a n años pagadero al momento de fallecimiento.

$$\bar{A}_{xy:n|} = \bar{A}^{1}_{xy:n|} + \bar{A}_{xy:\overset{1}{n|}}$$

El primer sumando ya demostramos a que es igual, simplemente sustituyamos.

$$\bar{A}^{1}_{xy:n|} = 1 - {}_{n}E_{xy} - \delta\, \bar{a}_{xy:n|}$$

El segundo sumando también podemos ya definirlo:

$$\bar{A}_{xy:\overset{1}{n|}} = \frac{D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

Debe notarse que no se verá afectado el seguro dotal puro.

Con lo cual podemos dar otra expresión para nuestro seguro en cuestión:

$$\bar{A}_{xy:n|} = 1 - {}_{n}E_{xy} - \delta\, \bar{a}_{xy:n|} + {}_{n}E_{xy}$$

$$\boxed{\bar{A}_{xy:n|} = 1 - \delta\, \bar{a}_{xy:n|}}$$

Otra expresión para este tipo de seguros en términos de conmutados seria:

$$\boxed{\bar{A}_{xy:n|} = \frac{\bar{M}_{xy} - \bar{M}_{x+n:y+n} + D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}}$$

6.6 Seguros del ultimo Superviviente

Para resolver seguros del último superviviente se sigue la misma técnica que se utilizó en probabilidades y anualidades.

Si observamos el seguro de $1.0 que es pagado al final de cada año de la muerte del último superviviente de (x) y (y).

$$A_{\overline{xy}} = A_x + A_y - A_{xy}$$

Para tres vidas (x) (y) (z)

$$A_{\overline{xyz}} = A_x + A_y + A_z - A_{xy} - A_{xz} - A_{yz} + A_{xyz}$$

Para resolver otros tipos de seguros como los temporales, continuos, diferidos se sigue la misma técnica.

Si queremos dar la expresión general para Seguros del Ultimo superviviente.

$$\overline{Ax_1x_2x_3...x_m} = \sum Ax_1-\sum Ax_1x_2+\sum Ax_1x_2x_3-.....+(-1)^{m+1}Ax_1x_2..x_m$$

6.7 Seguros de Grupo Generalizado

Cabe mencionar que las dos técnicas del método Z serán aplicables también para seguros de grupo generalizado. Una vez mencionando lo anterior pasemos al siguiente punto.

6.8 Seguros Contingentes

6.8.1 Seguro contingente de vida entera

Abordemos un seguro contingente de vida conjunta de \$1.0 pagadero al final del año en que muere (x). estando (y) con vida.

Como podemos observar es un seguro de dos vidas:

$$Axy= \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} t/qxy$$

Para poder resolver este seguro tendremos que redefinir algunos conmutados.

Definamos lo siguiente:

$$t/qxy = \frac{dx+t \bullet ly+t+ ½}{lxly}$$

Definido lo anterior sustituyamos nuestra expresión en el resultado anterior:

$$Axy= \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} \frac{dx+t \bullet ly+t+ ½}{lxy}$$

Multiplico numerador y denominador por $V^{x+y/2}$:

$$Axy= \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} \frac{dx+t \bullet ly+t+ ½}{lxy} \frac{(V^{x+y/2})}{(V^{x+y/2})}$$

Distribuyendo

$$\overset{!}{A}xy = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{V^{(x+y/2)+t+1}}{V^{x+y/2}} \frac{dx+t \cdot ly+t+\frac{1}{2}}{lxy}$$

Definamos conmutados contingentes:

$$\boxed{\begin{array}{l} V^{(x+y/2)+t+1}\, dx+t \cdot ly+t+\frac{1}{2} = \overset{\_1\_}{C}x+t:y+t \\ \\ \sum_{t=0}^{\infty} \overset{\_1\_}{C}x+t:y+t = \overset{1}{M}xy \end{array}}$$

Regresamos a nuestra expresión:

$$\overset{!}{A}xy = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\overset{\_1\_}{C}x+t:y+t}{Dxy} = \frac{\overset{1}{M}xy}{Dxy}$$

$$\boxed{\overset{!}{A}xy = \frac{\overset{1}{M}xy}{Dxy}}$$

6.8.2 Seguro contingente Temporal

$$\overset{!}{A}xy:n| = \sum_{t=0}^{n} V^{t+1}\, t/\overset{!}{q}xy$$

Anteriormente se hizo la siguiente observación:

$$\boxed{t/\overset{!}{q}xy = \frac{dx+t \cdot ly+t+\frac{1}{2}}{lxly}}$$

Sustituyamos nuestra expresión en el resultado anterior:

$$\overset{!}{A}xy:n| = \sum_{t=0}^{n} V^{t+1} \frac{dx+t \cdot ly+t+\frac{1}{2}}{lxy}$$

Multiplico numerador y denominador por $V^{x+y/2}$:

$$\overset{!}{A}_{xy:n|} = \sum_{t=0}^{n} V^{t+1} \frac{d_{x+t} \cdot l_{y+t+½}}{l_{xy}} \frac{(V^{x+y/2})}{(V^{x+y/2})}$$

Distribuyendo:

$$\overset{!}{A}_{xy:n|} = \sum_{t=0}^{n} \frac{V^{(x+y/2)+t+1}}{V^{x+y/2}} \frac{d_{x+t} \cdot l_{y+t+½}}{l_{xy}}$$

Definimos nuevos conmutados contingentes;

$$V^{(x+y/2)+t+1}\, d_{x+t} \cdot l_{y+t+½} = \overset{\_1\_}{C}_{x+t:y+t}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \overset{\_1\_}{C}_{x+t:y+t} = \overset{1}{M}_{xy}$$

Regresamos a nuestra expresión:

$$\overset{!}{A}_{xy:n|} = \sum_{t=0}^{n} \frac{\overset{\_1\_}{C}_{x+t:y+t}}{D_{xy}} = \frac{\overset{1}{M}_{xy} - \overset{\_1\_}{M}_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

$$\overset{!}{A}_{xy:n|} = \frac{\overset{1}{M}_{xy} - \overset{\_1\_}{M}_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

6.8.3 Seguro contingente diferido n años.

$$n/\overset{!}{A}_{xy} = \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1}\, t/\overset{!}{q}_{xy}$$

Veamos la siguiente expresión:

$$t/\overset{!}{q}_{xy} = \frac{d_{x+t} \cdot l_{y+t+½}}{l_x l_y}$$

Sustituyamos nuestra expresión en el resultado anterior:

$$n/\overset{!}{A}xy= \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1} \frac{dx+t\bullet\ ly+t+ ½}{lxy}$$

Multiplico numerador y denominador por $V^{x+y/2}$:

$$n/\overset{!}{A}xy= \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1} \frac{dx+t\bullet\ ly+t+ ½}{lxy} \frac{(V^{x+y/2})}{(V^{x+y/2})}$$

Distribuyendo:

$$n/\overset{!}{A}xy= \sum_{t=n}^{\infty} \frac{V^{(x+y/2)+t+1}}{V^{x+y/2}} \frac{dx+t\bullet\ ly+t+ ½}{lxy}$$

Definimos conmutados contingentes:

$\mathbf{V^{(x+y/2)+t+1}\ dx+t\bullet\ ly+t+ ½ = \overset{\_1\_}{C}x+t{:}y+t}$
$\mathbf{\sum_{t=0}^{\infty} \overset{\_1\_}{C}x+t{:}y+t = \overset{1}{M}xy}$

Regresamos:

$$n/\overset{!}{A}xy= \sum_{t=n}^{\infty} \frac{\overset{\_1\_}{C}x+t{:}y+t}{Dxy} = \frac{\overset{1}{M}xy}{Dxy}$$

$\mathbf{n/\overset{!}{A}xy= \frac{\overset{\_1\_}{M}x+n;y+ny}{Dxy}}$

6.8.4 Seguro contingente diferido n años y temporal a m

$$n/m\overset{!}{A}xy= \sum_{t=n}^{m} V^{t+1} t/\overset{!}{q}xy$$

Veamos la siguiente expresión:

$$\boxed{{}_{t/}q_{\overset{1}{x}y} = \frac{d_{x+t} \cdot l_{y+t+1/2}}{l_x l_y}}$$

Sustituyamos nuestra expresión en el resultado anterior:

$${}_{n/m}A_{\overset{1}{x}y} = \sum_{t=n}^{m} V^{t+1} \frac{d_{x+t} \cdot l_{y+t+1/2}}{l_{xy}}$$

Multiplico numerador y denominador por $V^{x+y/2}$:

$${}_{n/m}A_{\overset{1}{x}y} = \sum_{t=n}^{m} V^{t+1} \frac{d_{x+t} \cdot l_{y+t+1/2}}{l_{xy}} \frac{(V^{x+y/2})}{(V^{x+y/2})}$$

Distribuyendo:

$${}_{n/m}A_{\overset{1}{x}y} = \sum_{t=n}^{m} \frac{V^{(x+y/2)+t+1}}{V^{x+y/2}} \frac{d_{x+t} \cdot l_{y+t+1/2}}{l_{xy}}$$

Definimos conmutados contingentes:

$$\boxed{\begin{array}{l} V^{(x+y/2)+t+1} d_{x+t} \cdot l_{y+t+1/2} = \overset{1}{C}_{x+t:y+t} \\ \sum_{t=0}^{\infty} \overset{1}{C}_{x+t:y+t} = \overset{1}{M}_{xy} \end{array}}$$

Regresamos:

$${}_{n/m}A_{\overset{1}{x}y} = \sum_{t=n}^{m} \frac{\overset{1}{C}_{x+t:y+t}}{D_{xy}} = \frac{\overset{1}{M}_{xy}}{D_{xy}}$$

$$\boxed{{}_{n/m}A_{\overset{1}{x}y} = \frac{\overset{1}{M}_{x+n:y+n} - \overset{1}{M}_{x+n+m:y+n+m}}{D_{xy}}}$$

6.8.5 Otros resultados

6.8.5.1 Seguro Ordinario de vida

Cuando e conoce el valor de $\overset{!}{A}xy$ el complemento resulta $\dot{A}xy$, obteniendo de ambos la siguiente equivalencia.

$$\mathbf{Axy = \overset{!}{A}xy + \overset{!}{A}xy}$$

Revisemos otro resultado:

$$\overset{2}{A}xy = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\ t/\overset{2}{q}xy$$

Utilizando resultados del Capítulo I.

$$\overset{2}{A}xy = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\ (t/qx - t/\overset{1}{q}xy)$$

De lo cual obtenemos:

$$\overset{2}{A}xy = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\ t/qx - \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\ t/\overset{1}{q}xy$$

$$\mathbf{\overset{2}{A}xy = Ax - \overset{1}{A}xy}$$

Otro resultado es:

$$\overset{3}{A}xyz = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\ t/\overset{3}{q}xyz$$

Al utilizar nuestros resultados del Capitulo I:

Revisemos el siguiente resultado:

$$t/\overset{3}{q}xyz = \int_{t}^{\infty}\ (1-tPy)(1-tPz)tPx\mu x+tdt$$

Distribuimos:

$$\overset{3}{{}_{t/}q_{xyz}} = \int_t^\infty (1- {}_tP_y - {}_tP_z + {}_tP_{yz})\,{}_tP_x\,\mu_{x+t}\,dt$$

$$\overset{3}{{}_{t/}q_{xyz}} = \int_t^\infty ({}_tP_x - {}_tP_{xy} - {}_tP_{xz} + {}_tP_{xyz})\,\mu_{x+t}\,dt$$

Con lo cual obtenemos:

$$\overset{3}{{}_{t/}q_{xyz}} = {}_{t/}q_x - {}_{t/}\overset{!}{q}_{xy} - {}_{t/}\overset{!}{q}_{xz} + {}_{t/}\overset{!}{q}_{xyz}$$

Sustituimos nuestro valor en la expresión inicial:

$$\overset{3}{A_{xyz}} = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\, {}_{t/}\overset{1}{q}_x - {}_{t/}\overset{1}{q}_{xy} - {}_{t/}\overset{1}{q}_{xz} + {}_{t/}q_{xyz}$$

De lo cual obtenemos:

$$\overset{3}{A_{xyz}} = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\, {}_{t/}q_x - \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\, {}_{t/}\overset{1}{q}_{xy} - \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\, {}_{t/}\overset{1}{q}_{xz} + \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\, {}_{t/}\overset{1}{q}_{xyz}$$

$$\boxed{\mathbf{\overset{3}{A}_{xyz} = A_x - \overset{1}{A}_{xy} - \overset{1}{A}_{xz} + \overset{1}{A}_{xyz}}}$$

Visto este análisis podemos obtener las expresiones para los seguros contingentes temporales y diferidos.

6.8.5.2 Seguros temporales

Nuevamente tenemos la siguiente expresión:

$$\boxed{\mathbf{A_{xy:n|} = \overset{!}{A}_{xy:n|} + \overset{!}{A}_{xy:n|}}}$$

Otro resultado:

$$\overset{2}{A}_{xy:n|} = \sum_{t=0}^{n} V^{t+1}\, {}_{t/}\overset{2}{q}_{xy}$$

Utilizamos nuestros resultados del Capítulo I:

$$\overset{2}{A}xy:n| = \sum_{t=0}^{n} V^{t+1} (t/qx - \overset{1}{t}/qxy)$$

De lo cual obtenemos:

$$\overset{2}{A}xy:n| = \sum_{t=0}^{n} V^{t+1}\, t/qx - \sum_{t=0}^{n} V^{t+1}\, \overset{1}{t}/qxy$$

$$\boxed{\mathbf{\overset{2}{A}xy:n| = Ax:n| - \overset{1}{A}xy:n|}}$$

Otro resultado:

$$\overset{3}{A}xyz:n| = \sum_{t=0}^{n} V^{t+1}\, \overset{3}{t}/qxyz$$

Revisemos el siguiente resultado:

$$t/\overset{3}{q}xyz = \int_{t}^{\infty} (1-tPy)(1-tPz)tPx\mu x+tdt$$

Distribuimos:

$$t/\overset{3}{q}xyz= \int_{t}^{\infty} (1- tPy -tPz+tPyz)tPx\mu x+tdt$$

$$t/\overset{3}{q}xyz = \int_{t}^{\infty} (tPx- tPxy -tPxz+tPxyz)\mu x+tdt$$

Con lo cual obtenemos:

$$t/\overset{3}{q}xyz = t/qx - t/\overset{1}{q}xy-t/\overset{1}{q}xz+t/\overset{1}{q}xyz$$

Sustituimos nuestro valor en la expresión inicial:

$$\overset{3}{A}xyz:n| = \sum_{t=0}^{n} V^{t+1}\, t/qx - t/\overset{1}{q}xy-t/\overset{1}{q}xz+t/\overset{1}{q}xyz$$

De lo cual tenemos:

$$A_{\overset{3}{x}yz:n|} = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\, {}_{t/}q_{\overset{1}{x}} - \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\, {}_{t/}q_{\overset{1}{x}y} - \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\, {}_{t/}q_{\overset{1}{x}z} + \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\, {}_{t/}q_{\overset{1}{x}yz}$$

$$\boxed{\mathbf{A_{\overset{3}{x}yz:n|} = A_{\overset{1}{x}:n|} - A_{\overset{1}{x}y:n|} - A_{\overset{1}{x}z:n|} + A_{\overset{1}{x}yz:n|}}}$$

6.8.5.3 Seguros diferidos n años

Tenemos la siguiente expresión:

$$\boxed{\mathbf{{}_{n/}A_{xy} = {}_{n/}A_{\overset{!}{x}y} + {}_{n/}A_{x\overset{!}{y}}}}$$

Revisemos otro resultado:

$${}_{n/}A_{\overset{2}{x}y} = \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1}\, {}_{t/}q_{\overset{2}{x}y}$$

Utilizando resultados del Capitulo I:

$${}_{n/}A_{\overset{2}{x}y} = \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1}\, ({}_{t/}q_{x} - {}_{t/}q_{\overset{1}{x}y})$$

De lo cual obtenemos:

$${}_{n/}A_{\overset{2}{x}y} = \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1}\, {}_{t/}q_{x} - \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1}\, {}_{t/}q_{\overset{1}{x}y}$$

$$\boxed{\mathbf{{}_{n/}A_{\overset{2}{x}y} = {}_{n/}A_{x} - {}_{n/}A_{\overset{1}{x}y}}}$$

Otro resultado es:

$${}_{n/}A_{\overset{3}{x}yz} = \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1}\, {}_{t/}q_{\overset{3}{x}yz}$$

Revisemos el siguiente resultado:

$${}_{t/}q_{\overset{3}{x}yz} = \int_{t}^{\infty} (1-{}_tP_y)(1-{}_tP_z)\,{}_tP_x\,\mu_{x+t}\,dt$$

Distribuimos

$$t/q^{3}_{xyz}= \int_t^{\infty} (1- {}_tP_y - {}_tP_z + {}_tP_{yz})\, {}_tP_x \mu_{x+t} dt$$

$$t/q^{3}_{xyz} = \int_t^{\infty} ({}_tP_x - {}_tP_{xy} - {}_tP_{xz} + {}_tP_{xyz}) \mu_{x+t} dt$$

Con lo cual tenemos:

$$t/q^{3}_{xyz} = t/q_x - t/q^{!}_{xy} - t/q^{!}_{xz} + t/q^{!}_{xyz}$$

Sustituimos nuestro valor en la expresión inicial:

$$n/A^{3}_{xyz} = \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1}\, t/q^{1}_{x} - t/q^{1}_{xy} - t/q^{1}_{xz} + t/q_{xyz}$$

De lo cual:

$$n/A^{3}_{xyz} = \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1}\, t/q_x - \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1}\, t/q^{1}_{xy} - \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1}\, t/q^{1}_{xz} + \sum_{t=n}^{\infty} V^{t+1}\, t/q^{1}_{xyz}$$

$$\boxed{\mathbf{n/A^{3}_{xyz} = n/A^{1}_{x} - n/A^{1}_{xy} - n/A^{1}_{xz} + n/A_{xyz}}}$$

6.8.5.4 Seguro Diferido a n años y temporal a m

Tenemos la siguiente expresión:

$$\boxed{\mathbf{n/mA_{xy} = n/mA^{!}_{xy} + n/mA^{!}_{xy}}}$$

Revisemos:

$$n/mA^{2}_{xy} = \sum_{t=n}^{m} V^{t+1}\, t/q^{2}_{xy}$$

Utilizando resultados del Capitulo I:

$$n/mA^{2}_{xy} = \sum_{t=n}^{m} V^{t+1} (t/q_x - t/q^{1}_{xy})$$

De lo cual:

$$n/m\overset{2}{A}_{xy} = \sum_{t=n}^{m} V^{t+1}\, t/q_x - \sum_{t=n}^{m} V^{t+1}\, t/\overset{1}{q}_{xy}$$

$$\boxed{n/m\overset{2}{A}_{xy} = n/mA_x - n/m\overset{1}{A}_{xy}}$$

Otro resultado es:

$$n/m\overset{3}{A}_{xyz} = \sum_{t=n}^{m} V^{t+1}\, t/\overset{3}{q}_{xyz}$$

Revisemos separadamente el siguiente resultado:

$$t/\overset{3}{q}_{xyz} = \int_t^{\infty} (1-{}_tP_y)(1-{}_tP_z)\,{}_tP_x\,\mu_{x+t}\,dt$$

Distribuimos:

$$t/\overset{3}{q}_{xyz}= \int_t^{\infty} (1- {}_tP_y - {}_tP_z + {}_tP_{yz})\,{}_tP_x\,\mu_{x+t}\,dt$$

$$t/\overset{3}{q}_{xyz} = \int_t^{\infty} ({}_tP_x - {}_tP_{xy} - {}_tP_{xz} + {}_tP_{xyz})\,\mu_{x+t}\,dt$$

Con lo cual:

$$t/\overset{3}{q}_{xyz} = t/q_x - t/\overset{1}{q}_{xy} - t/\overset{1}{q}_{xz} + t/\overset{1}{q}_{xyz}$$

Sustituimos nuestro valor en la expresión inicial:

$$n/m\overset{3}{A}_{xyz} = \sum_{t=n}^{m} V^{t+1}\, t/q_x - t/\overset{1}{q}_{xy} - t/\overset{1}{q}_{xz} + t/\overset{1}{q}_{xyz}$$

De lo cual:

$$n/mA_{xyz}^{\;3} = \sum_{t=n}^{m} V^{t+1}\, t/q_x - \sum_{t=n}^{m} V^{t+1}\, t/q_{xy}^{1} - \sum_{t=n}^{m} V^{t+1}\, t/q_{xz}^{1} + \sum_{t=n}^{m} V^{t+1}\, t/q_{xyz}^{1}$$

$$\boxed{\mathbf{n/mA_{xyz}^{\;3} = n/mA_x - n/mA_{xy}^{1} - n/mA_{xz}^{1} + n/mA_{xyz}^{1}}}$$

6.9 Seguros contingentes pagaderos en el momento de la muerte

Recordemos un resultado de vida simple:

$$\mathbf{\bar{A}_x = \int_0^\infty V^t\, {}_tP_x \mu_{x+t} dt}$$

Revisemos el resultado para dos vidas:

$$\mathbf{\bar{A}_{xy}^{1} = \int_0^\infty V^t\, {}_tP_{xy} \mu_{x+t} dt}$$

Para tres vidas

$$\mathbf{\bar{A}_{xyz}^{1} = \int_0^\infty V^t\, {}_tP_{xyz} \mu_{x+t} dt}$$

Otro resultado:

$$\bar{A}_{xy}^{2} = \int_0^\infty V^t (1-{}_tP_y)\, {}_tP_x \mu_{x+t} dt$$

Distribuimos:

$$\bar{A}_{xy}^{2} = \int_0^\infty V^t\, {}_tP_x \mu_{x+t} dt - \int_0^\infty {}_tP_{xy} \mu_{x+t} dt$$

Reexpresamos:

$$\mathbf{\bar{A}_{xy}^{2} = \bar{A}_x - \bar{A}_{xy}^{1}}$$

Revisemos el siguiente resultado

$$\bar{A}^{2}_{xyz} = \int_0^{\infty} V^t \, {}_tP_x \, {}_tP_{yz}^{[1]} \, \mu_{x+t} dt$$

Resolvemos

$${}_tP_{yz}^{[1]}$$

m=2
r=1

$$Z^1(1-2Z) = Z - 2Z^2 = {}_tP_y + {}_tP_z - 2\,{}_tP_{yz}$$

Regresamos

$$\bar{A}^{2}_{xyz} = \int_0^{\infty} V^t \, {}_tP_x ({}_tP_y + {}_tP_z - 2\,{}_tP_{yz}) \, \mu_{x+t} dt$$

Distribuimos

$$\bar{A}^{2}_{xyz} = \int_0^{\infty} V^t ({}_tP_{xy} + {}_tP_{xz} - 2\,{}_tP_{xyz}) \, \mu_{x+t} dt$$

Separando obtenemos:

$$\boldsymbol{\bar{A}^{2}_{xyz} = \bar{A}^{1}_{xy} + \bar{A}^{1}_{xz} - 2\bar{A}^{1}_{xyz}}$$

Este mismo resultado puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\bar{A}^{2}_{xyz} = \bar{A}^{2}_{xy_1z} + \bar{A}^{2}_{xyz_2}}$$

Otro resultado:

$$\bar{A}^{3}_{xyz} = \int_0^{\infty} V^t (1-{}_tP_y)(1-{}_tP_z)\,{}_tP_x \;\mu_{x+t} dt$$

Resolvemos:

$$\bar{A}^{3}_{xyz} = \int_0^\infty V^t\,(1-{}_tP_y-{}_tP_z+{}_tP_{yz})\,{}_tP_x\;\mu_{x+t}dt$$

$$\bar{A}^{3}_{xyz} = \int_0^\infty V^t\,({}_tP_x-{}_tP_{xy}-{}_tP_{xz}+{}_tP_{xyz})\;\mu_{x+t}dt$$

Regresamos:

$$\mathbf{\bar{A}^{3}_{xyz} = \bar{A}_x - \bar{A}^{1}_{xy} - \bar{A}^{1}_{xz} + \bar{A}^{1}_{xyz}}$$

Pasemos al siguiente resultado:

$$\bar{A}^{1}_{\overline{xy}:z} = \int_0^\infty V^t\,{}_tP_z\,{}_tP^{1}_{\overline{xy}}\;\mu_{x+t:y+t}dt$$

Resolvemos:

${}_tP^{1}_{\overline{xy}}$

m=2
r=1

$Z^1(1-Z) = Z - Z^2 = {}_tP_x + {}_tP_y - {}_tP_{xy}$

Regresamos:

$$\bar{A}^{1}_{\overline{xy}:z} = \int_0^\infty V^t\,{}_tP_z({}_tP_x + {}_tP_y - {}_tP_{xy})\,(\mu_{x+t:y+t})dt$$

Distribuimos:

$$\bar{A}^{1}_{\overline{xy}:z} = \int_0^\infty V^t\,({}_tP_{xz} + {}_tP_{yz} - {}_tP_{xyz})\,(\mu_{x+t:y+t})dt$$

Recordemos que solo se consideran aquellos que tiene congruencia:

Separando obtenemos:

$$\mathbf{\bar{A}^{1}_{\overline{xy}:z} = A^{1}_{xz} + A^{1}_{yz} - A^{\overset{1}{\cap}}_{xy:z}}$$

Sabemos que:

$$\bar{A}^{1}_{\overset{\frown}{xy}:z} = A^{1}_{xyz} + A^{1}_{xyz}$$

Regresamos:

$$\bar{A}^{1}_{xy:z} = A^{1}_{xz} + A^{1}_{yz} - (A^{1}_{xyz} + A^{1}_{xyz})$$

Simplificando:

$$\mathbf{\bar{A}^{1}_{xy:z} = A^{1}_{xz} + A^{1}_{yz} - A^{1}_{xyz} - A^{1}_{xyz}}$$

Otro resultado:

$$\bar{A}^{2}_{\overset{\frown}{xy}:z} = \int_0^\infty V^t (1-{}_tP_z)\, {}_tP_{xy}\, \mu_{x+t:y+t}\, dt$$

Distribuimos

$$\bar{A}^{2}_{\overset{\frown}{xy}:z} = \int_0^\infty V^t ({}_tP_{xy}\, \mu_{x+t:y+t} - {}_tP_{xyz}\, \mu_{x+t:y+t})\, dt$$

Reexpresamos:

$$\bar{A}^{2}_{\overset{\frown}{xy}:z} = \bar{A}_{xy} - \bar{A}^{1}_{\overset{\frown}{xy}:z}$$

Sabemos:

$$\bar{A}^{1}_{\overset{\frown}{xy}:z} = A^{1}_{xyz} + A^{1}_{xyz}$$

Regresamos:

$$\bar{A}^{2}_{\overset{\frown}{xy}:z} = A_{xy} - (A^{1}_{xyz} + A^{1}_{xyz})$$

Simplificando

$$\bar{A}_{\overset{2}{\frown}{xy}:z} = A_{xy} - A^{1}_{xyz} - A^{1}_{xyz}$$

6.10 Evaluación de seguros contingentes bajo las leyes de mortalidad

6.10.1 Evaluación de seguros contingentes bajo la Ley de Gompertz

Para obtener una expresión para m vidas de seguros contingentes pagaderos en el momento de la muerte bajo Gompertz debemos considerar lo siguiente:

$$\mu x = BC^x$$

y

$$\bar{A}x = \int_0^\infty V^t\, tPx\mu x{+}tdt$$

Por lo anterior podemos definir:

$$\bar{A}\overset{1}{x_1}x_2..x_m = \int_0^\infty V^t\, tPx_1x_2..x_m\mu x_1{+}tdt$$

Sustituimos la fuerza de mortalidad bajo Gompertz:

$$\bar{A}\overset{1}{x_1}x_2..x_m = \int_0^\infty V^t\, tPx_1x_2..x_mBC^{x1+t}dt$$

Factorizamos:

$$\bar{A}\overset{1}{x_1}x_2..x_m = \int_0^\infty V^t\, tPx_1x_2..x_mBC^t(C^{x1})dt$$

Sacamos fuera de la integral C^{x1}:

$$\bar{A}\overset{1}{x_1}x_2..x_m = C^{x1}\int_0^\infty V^t\, tPx_1x_2..x_mBC^tdt$$

Multiplico y divido $C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}$:

$$\bar{A}^{\,1}_{x_1x_2..x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}} \int_0^\infty V^t\, tP_{x_1x_2..x_m} BC^t(C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm})dt$$

Distribuimos:

$$\bar{A}^{\,1}_{x_1x_2..x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}} \int_0^\infty V^t\, tP_{x_1x_2..x_m}(BC^tC^{x1}+BC^tC^{x2}+..+BC^tC^{xm})dt$$

$$\bar{A}^{\,1}_{x_1x_2..x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}} \int_0^\infty V^t\, tP_{x_1x_2..x_m}(BC^{x1+t}+BC^{x2+t}+..+BC^{xm+t})dt$$

$$\bar{A}^{\,1}_{x_1x_2..x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}} \int_0^\infty V^t\, tP_{x_1x_2..x_m}(\mu x_1+t+\mu x_2+t+..+\mu x_m+t)dt$$

Reexpresamos:

$$\bar{A}^{\,1}_{x_1x_2..x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}} \bar{A}_{x_1x_2..\underline{x_m}}$$

Pero sabemos por haberlo demostrado en el capitulo I que:

$$\boxed{{}_\infty q^{\,1}_{x_1x_2..x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}}}$$

Sustituimos:

$$\boxed{\bar{A}^{\,1}_{x_1x_2..x_m} = {}_\infty q^{\,1}_{x_1x_2..x_m}\bar{A}_{x_1x_2..\underline{x_m}}}$$

Otra expresión retomando lo anterior será:

Sabemos que bajo Gompertz se da la siguiente equivalencia:

$$\boxed{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm} = C^{w}}$$

$$\bar{A}^{\,1}_{x_1x_2..x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}}\,\bar{A}_{x_1x_2..x_m}$$

Sustituimos y obtenemos:

$$\boxed{\bar{A}^{\,1}_{x_1x_2..x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{w}}\,\bar{A}_{x_w}}$$

Tenemos una equivalencia para la fuerza de mortalidad

$$\mu_w = \mu x_1+\mu x_2+..+\mu x_m$$

Sin problema alguno podemos sustituir esta equivalencia en:

$$\bar{A}^{\,1}_{x_1x_2..x_m} = \frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}}\,\bar{A}_{x_1x_2..x_m}$$

De lo cual tenemos:

$$\boxed{\bar{A}^{\,1}_{x_1x_2..x_m} = \frac{\mu x_1}{\mu x_1+\mu x_2+..+\mu x_m}\,\bar{A}_{x_w}}$$

Ahora obtengamos las expresiones correspondientes a Makeham.

6.10.2 Evaluación de seguros contingentes bajo la Ley de Makeham

Es posible también obtener una expresión para m vidas de seguros contingentes pagaderos en el momento de la muerte bajo Makeham debemos considerar:

$$\mu x = A+BC^{x}$$

y

$$\bar{A}x = \int_0^{\infty} V^t\, tPx\mu x+tdt$$

Dado lo anterior:

$$\bar{A}_{x_1x_2..x_m} = \int_0^\infty V^t\, tP_{x_1x_2..x_m}\mu_{x_1+t}dt$$

Sustituimos la fuerza de mortalidad bajo Makeham:

$$\bar{A}_{x_1x_2..x_m} = \int_0^\infty V^t\, tP_{x_1x_2..x_m}A+BC^{x1+t}dt$$

Factorizamos:

$$\bar{A}_{x_1x_2..x_m} = \int_0^\infty V^t\, tP_{x_1x_2..x_m}A+BC^t(C^{x1})dt$$

Dividimos en dos integrales:

$$\bar{A}_{x_1x_2..x_m} = \int_0^\infty V^t\, tP_{x_1x_2..x_m}A\ dt+\int_0^\infty V^t\, tP_{x_1x_2..x_m}BC^t(C^{x1})dt$$

Sacamos fuera de la integral C^{x1} y A:

$$\bar{A}_{x_1x_2..x_m} =A\int_0^\infty V^t\, tP_{x_1x_2..x_m}\ dt+C^{x1}\int_0^\infty V^t\, tP_{x_1x_2..x_m}BC^t dt$$

Multiplico y divido el segundo sumando por $C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}$:

$$\bar{A}_{x_1x_2..x_m} =A\int_0^\infty V^t tP_{x_1x_2..x_m}\ dt+\frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}}\int_0^\infty V^t\, tP_{x_1x_2..x_m}BC^t(C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm})dt$$

Observemos únicamente el segundo miembro:

$$\frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}}\int_0^\infty V^t\, tP_{x_1x_2..x_m}(BC^tC^{x1}+BC^tC^{x2}+..+BC^tC^{xm})dt$$

$$\frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}}\int_0^\infty V^t\, tP_{x_1x_2..x_m}(BC^{x1+t}+BC^{x2+t}+..+BC^{xm+t})dt$$

Siguiendo con el segundo sumando ahora sumamos y restamos mA:

$$\frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}}\int_0^\infty V^t\, tPx_1x_2..x_m(A+BC^{x1+t}+A+BC^{x2+t}+..+A+BC^{xm+t}-mA)dt$$

Reexpresamos la fuerza de mortalidad y obtenemos:

$$\frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}}\int_0^\infty V^t\, tPx_1x_2..x_m(\mu x_1+t+\mu x_2+t+..+\mu x_m+t-mA)dt$$

Reexpresamos:

$$\frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}}\int_0^\infty V^t\, tPx_1x_2..x_m(\mu x_1+t:x_2+t:..:x_m+t-mA)dt$$

Distribuimos:

$$\frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}}\left[\int_0^\infty V^t\, tPx_1x_2..x_m(\mu x_1+t:x_2+t:..:x_m+tdt-\int_0^\infty V^t\, tPx_1x_2..x_m\, mA)dt\right]$$

En la integral del segundo sumando factorizamos mA:

$$\frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}}\left[\int_0^\infty V^t\, tPx_1x_2..x_m\mu x_1+t:x_2+t:..:x_m+tdt-mA\int_0^\infty V^t\, tPx_1x_2..x_m\, dt\right]$$

Regresamos:

$$\bar{A}^{!}x_1x_2..x_m=A\int_0^\infty V^t tPx_1x_2..x_m\, dt+\frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}}\left[\int_0^\infty V^t\, tPx_1x_2..x_m\mu x_1+t:x_2+t:..:x_m+tdt-mA\int V^t\, tPx_1x_2..x_m\, dt\right]$$

Observamos que la primera y tercera integral son dos anualidades continuas:

$$\bar{A}^{!}x_1x_2..x_m=A\bar{a}x_1x_2..x_m+\frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}}\left[\int_0^\infty V^t\, tPx_1x_2..x_m\mu x_1+t:x_2+t:..:x_m+tdt-mA\bar{a}x_1x_2..x_m\right]$$

Veamos que la segunda integral es un seguro pagadero en el momento de la muerte:

$$\bar{A}^{!}x_1x_2..x_m=A\bar{a}x_1x_2..x_m+\frac{C^{x1}}{C^{x1}+C^{x2}+..+C^{xm}}\left[\bar{A}x_1x_2..x_m-mA\bar{a}x_1x_2..x_m\right]$$

Bajo Makeham se da la siguiente equivalencia:

$$\boxed{C^{x_1}+C^{x_2}+..+C^{x_m} = mC^{w}}$$

Sustituimos:

$$\boxed{\bar{A}^{1}_{x_1x_2..x_m} = A\bar{a}_{ww..w} + \frac{C^{x_1}}{mC^{w}}\left[\bar{A}_{ww..w} - mA\bar{a}_{ww..w}\right]}$$

Haciendo un cambio de variable

$A = -\log S$

Sustituimos:

$$\bar{A}^{1}_{x_1x_2..x_m} = (-\log S)\bar{a}_{ww..w} + \frac{C^{x_1}}{mC^{w}}\left[\bar{A}_{ww..w} - m(-\log S)\bar{a}_{ww..w}\right]$$

Distribuimos 1/m:

$$\bar{A}^{1}_{x_1x_2..x_m} = (-\log S)\bar{a}_{ww..w} + \frac{C^{x_1}}{C^{w}}\left[\frac{1}{m}\bar{A}_{ww..w} - \frac{m}{m}(-\log S)\bar{a}_{ww..w}\right]$$

$$\bar{A}^{1}_{x_1x_2..x_m} = (-\log S)\bar{a}_{ww..w} + \frac{C^{x_1}}{C^{w}}\left[\frac{1}{m}\bar{A}_{ww..w} + (\log S)\bar{a}_{ww..w}\right]$$

Reexpresamos:

$$\boxed{\bar{A}^{1}_{x_1x_2..x_m} = \frac{C^{x_1}}{C^{w}}\left[\frac{1}{m}\bar{A}_{ww..w} + (\log S)\bar{a}_{ww..w}\right] - \log S\,\bar{a}_{ww..w}}$$

6.11 Seguros Contingentes compuestos

Al igual que en las probabilidades contingentes y anualidades contingentes el orden de fallecimiento de los integrantes es importante. El individuo al que será pagado el seguro será señalado en la parte superior, los demás son colocados en la parte inferior.

De modo de ejemplificar veamos el siguiente ejercicio:

$$A_{\overset{2}{\underset{1}{x}}yz} = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\ {}_{t/}q_{\overset{2}{\underset{1}{x}}yz}$$

Para obtener el valor dentro de la sumatoria primero desarrollemos este tipo de probabilidad contingente.

$${}_{t/}q_{\overset{2}{\underset{1}{x}}yz} = \int_t^{\infty} (1-{}_tP_x)\,{}_tP_{yz}\,\mu_{y+t}\,dt$$

Distribuimos:

$${}_{t/}q_{\overset{2}{\underset{1}{x}}yz} = \int_t^{\infty} ({}_tP_{yz}-{}_tP_{xyz})\,\mu_{y+t}\,dt$$

$${}_{t/}q_{\overset{2}{\underset{1}{x}}yz} = \int_t^{\infty} {}_tP_{yz}\,\mu_{y+t}\,dt - \int_t^{\infty} {}_tP_{xyz}\,\mu_{y+t}\,dt$$

Reexpresamos en términos de la primera muerte:

$$\boxed{{}_{t/}q_{\overset{2}{\underset{1}{x}}yz} = {}_{t/}q_{\overset{1}{y}z} - {}_{t/}q_{\overset{1}{x}yz}}$$

Regresamos y sustituimos esta equivalencia en nuestra sumatoria:

$$A_{\overset{2}{\underset{1}{x}}yz} = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} \left({}_{t/}q_{\overset{1}{y}z} - {}_{t/}q_{\overset{1}{x}yz}\right)$$

Distribuimos:

$$A_{\overset{2}{\underset{1}{x}}yz} = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\ {}_{t/}q_{\overset{1}{y}z} - \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\ {}_{t/}q_{\overset{1}{x}yz}$$

Reexpresando tenemos:

$$\mathbf{A_{\overset{2}{\underset{1}{x}}yz} = A_{\overset{1}{y}z} - A_{\overset{1}{x}yz}}$$

Otro resultado sería:

$$\overset{2}{A}_{xyz} = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\ {}_{t/}\overset{2}{q}_{xyz}$$

Para obtener el valor dentro de la sumatoria primero desarrollemos este tipo de probabilidad contingente.

$${}_{t/}\overset{2}{q}_{xyz} = \int_t^{\infty} ({}_tP_y)\ {}_tP_{\overline{[1]}{xz}}\ \mu_{y+t}dt$$

Resolvemos el último superviviente:

$${}_tP_{\overline{[1]}{xz}}$$

m=2
r=1

$$Z^1(1-2Z) = Z - 2Z^2$$

Regresamos:

$$\mathbf{{}_tP_{\overline{[1]}{xz}} = {}_tP_x + {}_tP_z - 2{}_tP_{xz}}$$

Regresamos a la integral:

$${}_{t/}\overset{2}{q}_{xyz} = \int_t^{\infty} ({}_tP_y)({}_tP_x + {}_tP_z - 2{}_tP_{xz})\ \mu_{y+t}dt$$

Distribuimos:

$${}_{t/}\overset{2}{q}_{xyz} = \int_t^{\infty} ({}_tP_{xy}+{}_tP_{yz}-2{}_tP_{xyz})\mu_{y+t}dt$$

$${}_{t/}\overset{2}{q}_{xyz} = \int_t^{\infty} {}_tP_{xy}\mu_{y+t}dt + \int_t^{\infty} {}_tP_{yz}\mu_{y+t}dt - 2\int_t^{\infty} {}_tP_{xyz}\mu_{y+t}dt$$

Reexpresamos en términos de la primera muerte:

$$\boxed{{}_{t/}\overset{2}{q}_{xyz} = {}_{t/}\overset{1}{q}_{xy} + {}_{t/}\overset{1}{q}_{yz} - 2\,{}_{t/}\overset{1}{q}_{xyz}}$$

Regresamos y sustituimos esta equivalencia en nuestra sumatoria:

$$A_{x\overset{2}{y}z} = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} \left({}_{t/}q_{x\overset{1}{y}} + {}_{t/}q_{y\overset{1}{z}} - 2\,{}_{t/}q_{xy\overset{1}{z}}\right)$$

Distribuimos:

$$A_{x\overset{2}{y}z} = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\,{}_{t/}q_{x\overset{1}{y}} + \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\,{}_{t/}q_{y\overset{1}{z}} - 2\sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\,{}_{t/}q_{xy\overset{1}{z}}$$

Reexpresando tenemos:

$$\mathbf{A_{x\overset{2}{y}z} = A_{x\overset{1}{y}} + A_{\overset{1}{y}z} - 2A_{x\overset{1}{y}z}}$$

Veamos lo siguiente:

$$A_{\underset{3}{x}:\overline{yz}} = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\,{}_{t/}q_{\underset{3}{x}:\overline{yz}}$$

Para obtener el valor dentro de la sumatoria primero desarrollemos este tipo de probabilidad contingente.

$${}_{t/}q_{\underset{3}{x}:\overline{yz}} = \int_t^{\infty} ({}_tP_x)\,{}_tP_{\overline{yz}}\,\mu_{y+t:z+t}\,dt$$

Resolvemos el último superviviente:

$${}_tP_{\overline{yz}} = {}_tP_y + {}_tP_z - {}_tP_{yz}$$

Regresamos a la integral:

$${}_{t/}q_{\underset{3}{x}:\overline{yz}} = \int_t^{\infty} ({}_tP_x)\,({}_tP_y + {}_tP_z - {}_tP_{yz})\,\mu_{y+t:z+t}\,dt$$

Distribuimos:

$${}_{t/}q_{\underset{3}{x}:\overline{yz}} = \int_t^{\infty} ({}_tP_{xy} + {}_tP_{xz} - {}_tP_{xyz})\,\mu_{y+t:z+t}\,dt$$

$${}_{t/}q_{\underset{3}{x}:\overline{yz}} = \int_t^{\infty} {}_tP_{xy}\,\mu_{y+t}\,dt + \int_t^{\infty} {}_tP_{xz}\,\mu_{z+t}\,dt - \int_t^{\infty} {}_tP_{xyz}\,\mu_{y+t:z+t}\,dt$$

Reexpresamos en términos de la primera muerte:

$$t/q_{\underset{3}{\overline{x:yz}}} = t/q_{\overset{1}{x}y} + t/q_{\overset{1}{x}z} - t/q_{\overset{\overset{1}{\frown}}{x}:yz}$$

Otra expresión sería:

$$t/q_{\underset{3}{\overline{x:yz}}} = t/q_{\overset{1}{x}y} + t/q_{\overset{1}{x}z} - t/q_{\overset{1}{x}yz} - t/q_{\overset{1}{x}yz}$$

Sustituimos esta equivalencia en nuestra sumatoria:

$$A_{\underset{3}{\overline{x:yz}}} = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} \left(t/q_{\overset{1}{x}y} + t/q_{\overset{1}{x}z} - t/q_{\overset{1}{x}yz} - t/q_{\overset{1}{x}yz}\right)$$

Distribuimos:

$$A_{\underset{3}{\overline{x:yz}}} = \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1}\, t/q_{\overset{1}{x}y} + \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} t/q_{\overset{1}{x}z} - \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} t/q_{\overset{1}{x}yz} - \sum_{t=0}^{\infty} V^{t+1} t/q_{\overset{1}{x}yz}$$

Reexpresando tenemos:

$$\mathbf{A_{\underset{3}{\overline{x:yz}}} = A_{\overset{1}{x}y} + A_{\overset{1}{x}z} - A_{\overset{1}{x}yz} - A_{\overset{1}{x}yz}}$$

6.12 Seguros contingentes compuestos pagaderos en el momento de la muerte.

Para el análisis de estos tipos de seguros se seguirán las mismas indicaciones dadas en la sección anterior, sin dejar de observar que estos tipos de seguros son contingentes y pagaderos en el momento de la muerte.

$$\bar{A}\,_{\underset{1}{x}y\overset{2}{z}} = \int_{0}^{\infty} V^{t} (1-tPx)tPyz \;\mu z+tdt$$

Resolvemos:

$$\bar{A}^{2}_{\underset{1}{x}yz} = \int_0^{\infty} V^t\,({}_tP_{yz} - {}_tP_{xyz})\ \mu_{z+t}\,dt$$

Dividimos en dos integrales:

$$\bar{A}^{2}_{\underset{1}{x}yz} = \int\sum_{t=0}^{\infty} V^t\,{}_tP_{yz}\,\mu_{z+t}\,dt - \int\sum_{t=0}^{\infty} V^t\,{}_tP_{xyz}\ \mu_{z+t}\,dt$$

Regresamos:

$$\mathbf{\bar{A}^{2}_{\underset{1}{x}yz} = \bar{A}^{1}_{yz} - \bar{A}^{1}_{xyz}}$$

El siguiente ejemplo:

$$\bar{A}^{3}_{x\underset{1}{y}z} = \int_0^{\infty} V^t\,(1-{}_tP_z)\,{}_tP_{xy}\,\mu_{y+t}\bar{A}_{x+t}\,dt$$

Resolvemos:

$$\bar{A}^{3}_{x\underset{1}{y}z} = \int_0^{\infty} V^t\,({}_tP_{xy} - {}_tP_{xyz})\ \mu_{y+t}\bar{A}_{x+t}\,dt$$

Dividimos en dos integrales:

$$\bar{A}^{3}_{x\underset{1}{y}z} = \int_0^{\infty} V^t\,{}_tP_{xy}\,\mu_{y+t}\bar{A}_{x+t}\,dt - \int_0^{\infty} V^t\,{}_tP_{xyz}\ \mu_{y+t}\bar{A}_{x+t}\,dt$$

Regresamos:

$$\mathbf{\bar{A}^{3}_{x\underset{1}{y}z} = \bar{A}^{2}_{xy} - \bar{A}^{2:3}_{x:\underset{1}{y}z}}$$

El siguiente ejemplo:

$$\bar{A}^{2}_{x\underset{1}{y}zw} = \int_0^{\infty} V^t\,(1-{}_tP_z)\,{}_tP_{xyw}\,\mu_{w+t}\,dt$$

Resolvemos:

$$\bar{A}\,\underset{1}{\overset{2}{xyzw}} = \int_0^\infty v^t \left({}_tP_{xyw} - {}_tP_{xyzw}\right) \mu_{w+t}\,dt$$

Dividimos en dos integrales:

$$\bar{A}\,\underset{1}{\overset{2}{xyzw}} = \int_0^\infty v^t\, {}_tP_{xyw}\,\mu_{w+t}\,dt - \int_0^\infty v^t\, {}_tP_{xyzw}\,\mu_{w+t}\,dt$$

Regresamos:

$$\mathbf{\bar{A}\,\underset{1}{\overset{2}{xyzw}} = \bar{A}^{1}_{xyw} - \bar{A}^{1}_{xyzw}}$$

Otro resultado:

$$\bar{A}\,\underset{2\;1}{\overset{3}{xyzw}} = \int_0^\infty v^t (1-{}_tP_w)\,{}_tP_{xyz}\,\mu_{x+t}\,\bar{A}^{\,1}_{y+t:z+t}\,dt$$

Resolvemos:

$$\bar{A}\,\underset{2\;1}{\overset{3}{xyzw}} = \int_0^\infty v^t \left({}_tP_{xyz} - {}_tP_{xyzw}\right) \mu_{x+t}\,\bar{A}^{\,1}_{y+t:z+t}\,dt$$

Dividimos en dos integrales:

$$\bar{A}\,\underset{2\;1}{\overset{3}{xyzw}} = \int_0^\infty v^t\, {}_tP_{xyz}\,\mu_{x+t}\,\bar{A}^{\,1}_{y+t:z+t}\,dt - \int_0^\infty v^t\, {}_tP_{xyzw}\,\mu_{x+t}\,\bar{A}^{\,1}_{y+t:z+t}\,dt$$

Regresamos:

$$\boxed{\mathbf{\bar{A}\,\underset{2\;1}{\overset{3}{xyzw}} = \bar{A}\,\underset{1}{\overset{2}{xyz}} - \bar{A}\,\underset{1}{\overset{2:3}{x:y:zw}}}}$$

Otro resultado:

$$\bar{A}_{\overset{\;\;4}{\underset{2\;1}{xyzw}}} = \int_0^\infty v^t\,(1-{}_tp_w)\,{}_tp_{xyz}\,\mu^{\;\;2}_{x+t:\overline{y+t:z+t}}\,dt$$

Resolvemos:

$$\bar{A}_{\overset{\;\;4}{\underset{2\;1}{xyzw}}} = \int_0^\infty v^t\,({}_tp_{xyz}-{}_tp_{xyzw})\,\mu^{\;\;2}_{x+t:\overline{y+t:z+t}}\,dt$$

Dividimos en dos integrales:

$$\bar{A}_{\overset{\;\;4}{\underset{2\;1}{xyzw}}} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xyz}\,\mu^{\;\;2}_{x+t:\overline{y+t:z+t}}\,dt - \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xyzw}\;\mu^{\;\;2}_{x+t:\overline{y+t:z+t}}\,dt$$

Regresamos:

$$\boxed{\bar{A}_{\overset{\;\;4}{\underset{2\;1}{xyzw}}} = \bar{A}_{\overset{3}{\underset{1}{xyz}}} - \bar{A}_{\overset{3:4}{\underset{1}{xy:z:w}}}}$$

Otro resultado:

$$\bar{A}_{\overset{3:4}{\underset{2\;\;1}{x:y:zw}}} = \int_0^\infty v^t\,(1-{}_tp_w)\,{}_tp_{xyz}\,\mu_{x+t:\overline{y+t}}\,dt$$

Resolvemos:

$$\bar{A}_{\overset{3:4}{\underset{2\;\;1}{x:y:zw}}} = \int_0^\infty v^t\,({}_tp_{xyz}-{}_tp_{xyzw})\,\mu_{x+t:\overline{y+t}}\,dt$$

Dividimos en dos integrales:

$$\bar{A}_{\overset{3:4}{\underset{2\;\;1}{x:y:zw}}} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xyz}\,\mu_{x+t:\overline{y+t}}\,dt - \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xyzw}\;\mu_{x+t:\overline{y+t}}\,dt$$

Regresamos:

$$\boxed{\bar{A}_{\overset{3:4}{\underset{2\;\;1}{x:y:zw}}} = \bar{A}_{\overset{2:3}{\underset{1}{x:y:z}}} - \bar{A}_{\overset{2:3:4}{\underset{1}{x:y:zw}}}}$$

CONCLUSIONES

Conclusiones

Los alcances del área actuarial son ilimitados como lo es su estructura matemática, por tal motivo se trato de dar las bases técnico-teoricas para su conocimiento y que sirvan para profundizar su estudio posterior.

Recordando que el actuario debe ser capaz de hacer predicciones, lo más certero y apegado a la realidad, basado como es bien sabido en la matemática. Y con ello poder solucionar problemas de incertidumbre social, como lo podrían ser la muerte, retiro, incertidumbre económica.

Con este estudio también se dan las bases no solo para el análisis del área de Seguros sino también Pensiones y Retiro hoy tan de moda.

Cabe señalar que durante el estudio me pude dar cuenta de la importancia que tiene para los actuariales resultados de Calculo Diferencial Integral, Matemáticas Financieras, Álgebra Superior, Probabilidad, Estadística, Seguros de vida, Seguros de personas, que sin ellos resultaría casi imposible su estudio.

El proporcionar a los alumnos dicha herramienta debe ser para facilitar su estudio, pero cabe mencionar que no excluye por ningún motivo el estudio de lo ya estudiado. Esto debe verse como un todo, de modo tal que haga más enriquecedor su conocimiento.

BIBLIOGRAFIA

Bibliografía

De la Cueva, Benjamin Matemáticas Financieras (Ed.Porrua, S. A. Av. República Argentina 15. México, 1986)

Arizmendi Peimbert, Hugo et-al, Calculo Primer Curso (Ed. Addison-Wesley Iberoaméricana, México 1987)

Jordan, Jr. Chester Wallace. Life Contingencies (Chicago Illinois: The Society of Actuaries, Second Edition, 1967)

Spiegel, Murray R. Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas (Ed. McGraw-Hill,Primera Edición, México 1979)

Bowers,Jr. Newton L. et-al. Actuarial Mathematics (Atasca, Illinois: The Society of Actuaries, First Edition. 1986)

Rensoli Castañeda, Rene. Probabilidades, Anualidades y Seguros de Grupo (Tesis, Fac. de Ciencias, UNAM,1984)

Olivares Valdivia, Carlos Alberto. Funciones Biometricas (Tesis: Anualidades Contingentes, Seguros, Primas, Reservas, Fac. de Ciencias, UNAM, México 1988)

Pérez Tejada-López, F.Alonso. Proyecto de Texto para Calculo Actuarial I (Tesis, Fac. De Ciencias, UNAM , 1985)