UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DESARROLLO DEL CURSO DEL NUEVO PROGRAMA PARA MATEMÁTICAS IV DEL BACHILLERATO INCORPORADO A LA UNAM

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A N :

ALONSO REYES MARÍA DEL PILAR

FLORES DÍAZ JOSÉ CARLOS

Director de Tesis: M. en C. Agustín Ontiveros Pineda

IVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: DESARROLLO DEL CURSO DEL NUEVO PROGRAMA PARA MATEMATICAS IV DEL BACHILLERATO INCORPORADO A LA UNAM.

realizado por ALONSO REYES MARIA DEL PILAR
FLORES DIAZ JOSE CARLOS

Con número de cuenta 7729196-7
7840538-1 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de tesis
Propietario M. en C. AGUSTIN ONTIVEROS PINEDA

Propietario M. en C. MIGUEL LARA APARICIO

Propietario MAT. JULIO CESAR GUEVARA BRAVO

Suplente M. en C. RINA BETZABETH OJEDA CASTAÑEDA

Suplente ING. ENRIQUE LEMUS VAZQUEZ.

Consejo Departamental de MATEMATICAS
MAT. JULIO CESAR GUEVARA BRAVO

CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Queremos agradecer al M. en C. Agustín Ontiveros Pineda que con su experiencia y comentarios logró que este trabajo pudiera realizarse.

A los sinodales

M. en C. Miguel Lara Aparicio
Mat. Julio César Guevara Bravo
M. en C. Rina B. Ojeda Castañeda.
Ing. Enrique Lemus Vázquez

Por su esfuerzo y trabajo al revisar estas notas, por sus observaciones y comentarios que permitieron mejorarlo y enriquecerlo, gracias.

AGRADECIMIENTOS

Especial agradecimiento es necesario para alguien que siempre y a su manera me ha enseñado que la lucha cotidiana se da desde cualquier ámbito, que lo importante estriba en perseguir un ideal, con principios sólidos y sobre todo con la fe en uno mismo, gracias José Antonio Flores Díaz.

Que se le puede decir como muestra de agradecimiento a alguien que siempre ha confiado en uno, que ha sido compañera en muchas tareas tanto en la Secretaría de Educación Pública hace casi tres lustros, como en la docencia que compartimos desde hace casi diez años, cada cual a su estilo pero los dos siempre bajo un mismo objetivo, la transmisión de la belleza de nuestra razón profesional de vida: las matemáticas. María del Pilar Alonso Reyes, un infinito de gracias.

A mis alumnas y alumnos, es difícil enumerar a cada uno de ellos, no obstante, es necesario reconocer que ellos son la causa y el efecto principal del presente trabajo, ellos conforman la motivación más grande que tengo para continuar en la búsqueda de mejoras al proceso de enseñanza de las matemáticas y de apoyos al proceso de aprendizaje de las mismas.

Gracias a mis superiores, todos ellos mis amigos, que en su momento me han apoyado al permitir que me desarrollara en lo que ha sido mi vida, la educación, tanto para continuar en el difícil y noble camino de la docencia como en las actividades a las que ellos me han encomendado en el sector educativo, gracias también porque con sus comentarios me han enriquecido personalmente y enriquecido mi práctica docente.

Gracias a todos aquellos que de alguna manera han sido, son y serán parte de mi vida y que han aportado elementos para que hoy sea lo que soy, y que de alguna manera no quiero dejar de reconocerlos.

Por último un agradecimiento muy especial a la preparatoria del Liceo Mexicano Japonés A. C. y a todo su personal, por brindarme la oportunidad de formar parte de ella como docente por casi una década al frente de los grupos 4020 y 5020, ya que ésta experiencia, se ve cristalizada en el presente trabajo.

Este trabajo lo dedico

A ti Alfredo para que te guste la Matemática como a tus padres.

A Eduardo por todo lo que compartimos juntos.

A mis padres y hermanos que siempre me han apoyado y ayudado en todo lo que pueden.

Pilar

Gracias Carlos, porque con tu colaboración y tu entusiasmo logramos concluir un proyecto que teníamos desde hace tiempo atrás.

Deseo agradecer a la Facultad de Ciencias, porque a través de los cursos que imparto puedo darme cuenta de las limitantes que hay en la enseñanza y permitirme aportar un pequeño trabajo para intentar mejorar parte de estos problemas.

Agradezco también a la preparatoria del Liceo Mexicano Japonés, ya que con el material que nos proporcionó pudimos desarrollar este trabajo que puede ayudar a la mejor comprensión de la materia.

Pilar

Í N D I C E

Página

INTRODUCCIÓN

1. Conjuntos 1
   1.1. Definición de conjunto 1
   1.2. Notación 2
   1.3. Operaciones entre conjuntos y su representación gráfica 2
   1.4. Leyes de DeMorgan 9
   1.5. Conjunto potencia 12

2. Sistemas de numeración 15
   2.1. Breve reseña histórica 15
   2.2. Sistemas de numeración 18
      2.2.1. Sistema de numeración indo arábigo 18
      2.2.2. Sistema de numeración sexadecimal 23
      2.2.3. Sistema de numeración de base cuatro 24
      2.2.4. Sistema de numeración duodecimal 29
      2.2.5. Sistema de numeración binario 30
      2.2.6. Sistema de numeración octal 31
      2.2.7. Sistema de numeración hexadecimal 35

3. Conjuntos de números y sus propiedades 42
   3.1. Números Naturales 42
      3.1.1. Definición del conjunto de números naturales 42
      3.1.2. Axiomas que cumple el conjunto de números naturales 43
   3.2. Números Enteros 46
      3.2.1. Definición del conjunto de números enteros 46
      3.2.2. Axiomas que cumple el conjunto de números enteros 47
   3.3. Números Racionales 50
      3.3.1. Definición del conjunto de números racionales 50
      3.3.2. Axiomas que cumple el conjunto de números racionales 50
      3.3.3. Repaso de operaciones con números racionales y su 49
      descomposición en primos 54
         3.3.3.1. Descomposición en primos 54
         3.3.3.2. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 55
      3.3.4. Números decimales 58
      3.3.5. Propiedad de densidad 62
      3.3.6. Repaso en el manejo de expresiones algebraicas con coeficientes enteros y racionales 67

3.4. Irracionales 72
3.4.1. Definición del conjunto 72
3.5. Números Reales 72
3.5.1. Definición del conjunto de números reales 72
3.5.2. Axiomas que cumple el conjunto de números reales 72
3.5.3. Estructuras en las que se reconoce el uso de las propiedades de los conjuntos de números 76

4. Operaciones con monomios y polinomios 81
4.1. Adición de monomios y polinomios 82
4.2. Producto de monomios y polinomios 83
4.3. Cociente de monomios y polinomios 85
4.4. Valor de un polinomio de monomios y polinomios 90

5. Productos notables y factorización 94
5.1. Factor común 94
5.2. Cuadrado de un binomio 96
5.3. Factorización de un trinomio cuadrado perfecto 97
5.4. Cubo de un binomio y su factorización 98
5.5. Producto de dos binomios 99
5.5.1. Descomposición de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ 100
5.6. Producto de dos binomios conjugados y su factorización 101
5.7. Descomposición de dos factores de la suma o diferencia de dos potencias iguales 103
5.8. Otras factorizaciones 105
5.9. Fórmula del binomio de Newton 107

6. Ecuaciones de primer grado con una incógnita 111
6.1. Propiedades de las igualdades 112
6.2. Ecuaciones con coeficientes enteros 117
6.3. Ecuaciones con coeficientes fraccionarios 123
6.4. Ecuaciones con coeficientes literales 126
6.5. Ecuaciones de forma racional que conducen a soluciones de ecuaciones de primer grado 127

7. Resolución de problemas que conducen a ecuaciones de primer grado con una incógnita 132
7.1. Resolución de problemas 132
7.1.1. Problemas sobre números 133
7.1.2. Problemas sobre mezclas 137
7.1.3. Problemas sobre movimiento 140

7.1.4. Problemas sobre geometría 143
7.1.5. Problemas sobre trabajo 145
7.1.6. Problemas sobre edad 148
7.1.7. Problemas varios 149

8. Desigualdades 155
8.1. Propiedades de las desigualdades 155
8.2. Resolución de las desigualdades 157
8.3. Representación de las soluciones mediante la notación matemática 160
8.4. Representación de las soluciones a través de la forma gráfica 163
8.5. Problemas que inducen a plantear su solución por medio de desigualdades 167
8.6. Valor absoluto 171
8.6.1. Solución de valor absoluto con igualdades 171
8.6.2. Solución de valor absoluto con desigualdades 174

9. Graficación de rectas y desigualdades lineales 178
9.1. Introducción al plano cartesiano 178
9.2. Gráfica de una línea recta 179
9.2.1. Ordenada al origen y pendiente y pendiente de una recta 183
9.2.2. Ecuación de la recta dado un punto y la pendiente 190
9.3. Gráfica de desigualdades 192
9.4. Graficación del valor absoluto 198

10. Sistemas de ecuaciones lineales 203
10.1. Clasificación de sistemas 203
10.2. Métodos de solución 204
10.2.1. Método gráfico 204
10.2.2. Método de reducción (suma y resta) 206
10.2.3. Método de igualación 211
10.2.4. Método de sustitución 214
10.2.5. Determinantes 217
10.2.5.1. Deducción de la fórmula de determinantes de un sistema de ecuaciones de dos por dos 218
10.2.5.2. Sistema de ecuaciones con más de dos variables 222
10.2.5.3. Uso de determinantes con sistemas de ecuaciones que contienen las variables en el denominador de la expresión 232
10.3. Problemas que conducen en su solución a sistemas de ecuaciones lineales 236

11. Ecuaciones de segundo grado 250
11.1. Ecuación cuadrática 250
11.2. Métodos de solución 250
11.2.1. Resolución de ecuaciones incompletas 250
11.2.1.1. Formas que sólo tienen elemento al cuadrado y el término independiente 251
11.2.1.2. Forma con elementos cuadrático y lineal 253
11.2.2. Resolución de la forma completa
11.2.2.1. Factorización 254
11.2.2.2. Completación el trinomio cuadrado perfecto 254
11.2.2.3. Deducción de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado 258
11.3. Soluciones de formas que conducen a ecuaciones cuadráticas cuyas raíces no necesariamente son soluciones de la ecuación 265
11.4. Graficación de las formas cuadráticas 273
11.5. Análisis del tipo de soluciones 278
11.5.1. Análisis del discriminante 279
11.5.2. Características de las raíces de la ecuación cuadrática 279
11.6. Problemas que conducen a ecuaciones de segundo grado con una incógnita 281
11.7. Ecuaciones de grado mayor que dos que pueden resolverse por las técnicas para el grado dos 289
11.8. Desigualdades con formas cuadráticas 295
11.9. Desigualdades con formas racionales 300

COMENTARIOS 307

ANEXOS 312

BIBLIOGRAFÍA 320

I N T R O D U C C I Ó N

Un plan de estudios implica la lista de materias que generan el concepto educativo que se pretende de un nivel escolar o de una carrera. Éste debe considerar los elementos educativos que el Estado pretende en cada nivel educativo.

En el caso que atañe a este trabajo es el temario de una materia en particular del plan curricular del nivel bachillerato de las escuelas incorporadas a la UNAM, ésta es la de Matemáticas IV.

Este temario ha tenido diversas reformas durante su existencia, algunas están recabadas en el anexo A, de alguna manera corresponden a corrientes filosóficas de lo que es la matemática, como al mismo tiempo de lo que se debe ver y lo que se pretende que los alumnos conozcan, dominen o al menos revisen, como antecedente a cualquier nivel profesional; pero en general todas las versiones tienen algo en común que es el ordenamiento secuencial de los temas que aborda la Secundaria General, que es el nivel inmediato anterior.

Este antecedente es importante ya que los alumnos vienen de un sistema en el cual la Secretaría de Educación Pública, proporciona un material matemático de lenguaje algebraico, estructuras básicas algebraicas, geometría plana y trigonometría, pero revisando un poquito de cada cosa en cada año escolar, lo que ha generado que los alumnos consideren que la matemática es fragmentada y que no tiene relación un tema con otro; es decir, estructuran su pensamiento matemático a través de la ruptura y no de la ilación lógica y consecuente para resolver cualquier problema. Este sistema ha generado que el alumno de secundaria memorice estructuras para pasar los exámenes, pero como no tiene sentido de unión y de deducción olvida inmediatamente la técnica estudiada y no la vuelve a recordar si es que no se la recuerdan continuamente.

Con este antecedente el temario de la materia de Matemáticas IV, plantea una especie de recordatorio de lo que se vio en la mayoría de los tres años de la Secundaria, nada más que ordenado e intentando darle consecución a cada tema.

No se pretende analizar si los cambios que se establecieron en el temario son congruentes o no con la realidad de la enseñanza de la matemática a nivel bachillerato, lo que se quiere hacer es, más bien, un cuaderno de trabajo que les permita a los alumnos cubrir el material que en su mayoría debe contener el temario de la materia pero de una manera un poco más clara. Los alumnos por lo regular se quejan de que los libros de texto traen muy pocos ejemplos resueltos y que no observan ni se dan cuenta de los posibles cambios que se pueden establecer en cualquier técnica o análisis matemático; por lo que este trabajo trae diversos ejemplos agrupados en clasificaciones, para precisamente facilitar este problema.

No se trata en lo más mínimo de dar una nueva versión de definiciones o de teoría matemática a la ya conocida, sino que se pretende que, en muchos de los temas, se usen las definiciones más fáciles de entender a su lenguaje para, de esta manera, la adquisición del conocimiento.

Cada uno de los capítulos abarca los temas que se mencionan en el temario, algunos más desarrollados que otros, esto debido a la experiencia en el área y otras veces porque se considera, que hay temas que no son tan necesarios desarrollar de manera exhaustiva. Se pretende además introducir al alumno en un lenguaje matemático un poco más riguroso que el que venía manejando en la Secundaria, con el fin de que pueda leer un texto matemático y se acerque al lenguaje de la materia, que sí es universal.

No existen conclusiones del trabajo debido a que éste no es una investigación educativa es una propuesta, pero sí se presentan comentarios sobre los puntos no desarrollados del temario y de la necesidad de dar el temario como lo proponemos en este documento.

CAPÍTULO 1

CONJUNTOS.

1.1 DEFINICIÓN DE CONJUNTO.

Para iniciar el estudio de la teoría de conjuntos, se empezará con una definición:

Un conjunto es un grupo de elementos, elementos que pueden tener o no una relación entre ellos.

Ejemplo:

Un árbol, una serpiente, un librero y un disco compacto forman un conjunto.

En particular, para el objeto de estudio, se considerará como un conjunto a:

El grupo de elementos que tienen una o varias características en común

Habrá que notar la diferencia entre la primera definición de conjunto y la segunda. En la segunda definición a diferencia de la primera, se sugiere la posibilidad de que no haya elementos en el conjunto

Utilizando el ejemplo anterior se observa que.

El árbol y la serpiente son seres vivos, no así el librero y el disco compacto.
El librero y el disco compacto son elaborados por el hombre, el árbol y la serpiente, no.

- ¿Cómo puede ser posible que un conjunto no tenga elementos?, no es fácil comprender esto; para ayudar a entenderlo, se verán los siguientes ejemplos.

  - Mencione a todos los elementos del conjunto de seres humanos, que puedan vivir sin los dos riñones.

  - ¿Cuáles son los elementos del conjunto de peces que viven en tierra firme?.

  - Diga cuáles son los elementos del conjunto de carreteras pavimentadas que une a Europa con América.

La respuesta para los ejemplos es la misma, los conjuntos tienen ningún elemento.

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas del alfabeto A, B, C. los elementos de los conjuntos se denotan con las letras minúsculas a, b, c, etc.

1.2 NOTACIÓN.

Para relacionar nuestro lenguaje oral con el escrito, es necesario que se incorpore al lenguaje simbólico las siguientes expresiones.

<u>**Si se dice**</u>	**se <u>escribe</u>**
A es el conjunto	A =
x pertenece al conjunto A	$x \in A$
x **NO** pertenece al conjunto A	$x \notin A$
Forma explícita del conjunto, <u>(descripción del conjunto por extensión)</u>	A= {1,2,3,4}
	Forma abreviada del conjunto Si se quiere decir, por ejemplo, el conjunto A contiene los números desde el uno hasta el 50, se escribirán los primeros números separados por comas, luego una coma y tres puntos seguidos de otra coma y el último número de la sucesión, esto es A= {1,2,...,50}
Conjunto de x formado por los números pares (descripción del conjunto por comprensión).	B= {x/x es par}

Donde x/ se lee "el conjunto de las x tal que" y se refiere a todos los elementos que poseen la característica que se enuncia a continuación, entonces de acuerdo al ejemplo, éste se leería así: el conjunto de las x tal que x es par.

Observe que existen dos formas de describir un conjunto i) por *EXTENSIÓN*, cuando se anotan todos y cada uno de los elementos que conforman el conjunto y ii) por *COMPRENSIÓN*, cuando sólo se anota la característica en común de los elementos que conforman el conjunto.

1.3. OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS Y SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

Antes de iniciar con las operaciones entre conjuntos, se hace referencia a las siguientes características. Dados dos conjuntos:

Un conjunto contenido en otro, es cuando todos los elementos del conjunto A, son también elementos del conjunto B, si esto ocurre entonces se concluye que el conjunto A está incluido en el conjunto B, dicho de otra forma:

$A \subset B$ El conjunto A está contenido en el conjunto B, o

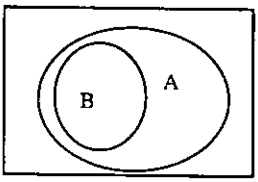
$B \supset A$ El conjunto B contiene al conjunto A

Cuando un conjunto está contenido en otro se llama subconjunto. En el caso de que $A = B$, es decir que el conjunto A y el conjunto B tengan exactamente los mismos elementos, se dirá que el conjunto A es subconjunto propio de B, y viceversa.

Ejemplo: $A = \{1,2,...,10\}$, $B = \{1,3,7,9\}$, entonces $B \subset A$

Representación gráfica de un conjunto que está contenido en otro:

Para la representación gráfica de los conjuntos, se utilizará la propuesta elaborada por John Venn y Leonhard Euler, mejor conocida como DIAGRAMA DE VENN-EULER[1].



En este caso se dice que $B \subset A$ o $A \supset B$

[1] Recibe este nombre combinado en honor a los matemáticos que fueron los primeros en crear los diagramas. En Estados Unidos e Inglaterra se use el nombre de Venn y en los otros paises de Europa el de Euler.

Un conjunto intersecado con otro conjunto, se tiene cuando alguno de los elementos del conjunto A, puede ser también elemento del conjunto B, se concluye que el conjunto A y el conjunto B tienen elementos comunes:

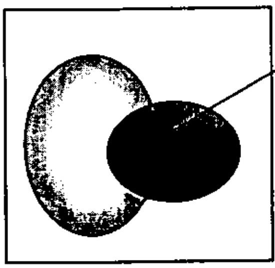
Suponiendo que $x \in A$ — El elemento x pertenece al conjunto A, y que

$x \in B$ — El elemento x pertenece al conjunto B,

entonces el elemento x pertenece al conjunto A y al conjunto B.

Ejemplo: $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,3,5,7\}$, entonces el conjunto en común será $\{1,3\}$

Representación gráfica de conjuntos que tienen elementos comunes:



Intersección de los conjuntos A y B

En este caso se dice que la intersección de los conjuntos A y B es no vacía.

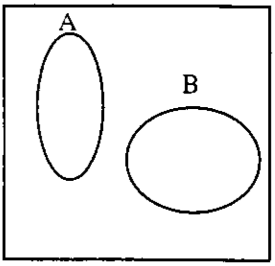
Un conjunto ajeno o disjunto a otro conjunto, cuando ninguno de los elementos del conjunto A, es elemento del conjunto B, se concluye que el conjunto A es un conjunto ajeno al conjunto B, dicho de otra forma:

Suponiendo que $x \in A$ — El elemento x pertenece al conjunto A

y que $x \notin B$ — El elemento x no pertenece al conjunto B

Ejemplo: $A = \{2,4,6,8,10\}$, $B = \{1,3,5,7,9\}$, entonces no hay un solo elemento de A que pertenezca a B.

Representación gráfica de conjuntos ajenos:



En este caso se dice que A y B son conjuntos ajenos.

En la teoría de conjuntos existen diversas operaciones que se pueden realizar entre ellos, de las cuales se abordarán las operaciones de **UNIÓN, INTERSECCIÓN, DIFERENCIA** y **COMPLETACIÓN.**

Es importante señalar, que las operaciones que a continuación se trabajarán se realizan con conjuntos y no con elementos de los conjuntos.

❖ UNIÓN DE CONJUNTOS

Se define como la unión de dos conjuntos A y B, al conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A o pertenecen al conjunto B o a ambos. Y se denota como:

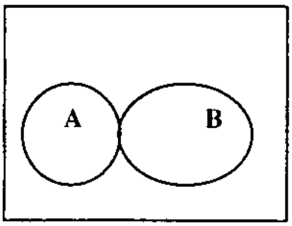
$A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}$;
$A \cup B$ se lee A unión B

Ejemplo:

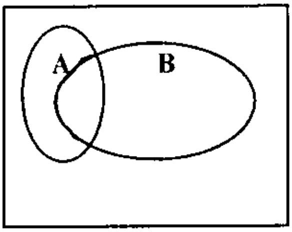
La unión de $A = \{1,2,3,4\}$ con $B = \{3,4,6\}$, da como resultado $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$

Note que si el conjunto que se calcula es $B \cup A$, el resultado es el mismo.

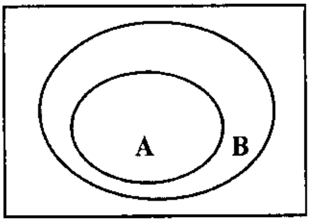
Y su representación gráfica es el siguiente diagrama de Venn-Euler:



Conjuntos ajenos o disjuntos: $A \cup B$, en este caso el conjunto resultante son todos los elementos de A y B.



En este caso los conjuntos están intersecados, así que en su unión, $A \cup B$, sólo hay que considerar una sola vez los elementos comunes a ambos conjuntos.



Conjunto contenido en otro $A \cup B$. el conjunto solución es el conjunto que contiene al conjunto menor.

❖ INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS:

Se define como la intersección de dos conjuntos A y B, al conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A y al conjunto B, se denota como:

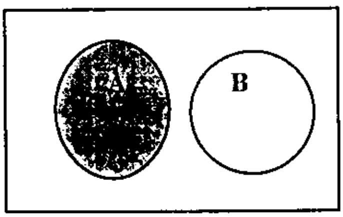
$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$;
$A \cap B$ se lee como A intersección B

Ejemplo

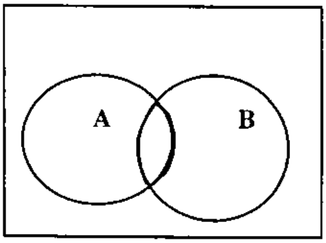
La intersección del conjunto A= {1,2,3,4,5} con el conjunto B = {2,3,4}, da como resultado el conjunto $A \cap B = \{2,3,4\} = B$.

Note que si el conjunto que se calcula es $B \cap A$. el resultado sería idéntico.

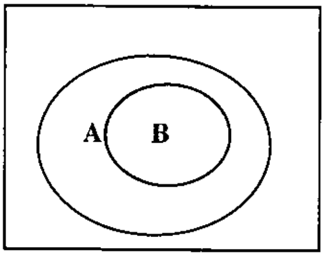
Representación gráfica de la intersección de dos conjuntos.



Conjuntos ajenos o disjuntos $A \cap B$. estos conjuntos no tienen elementos en su intersección. como resultado se obtiene al ***conjunto vacío***, que se denota por { } o por $\varnothing$.



Conjuntos intersecados $A \cap B$, el resultado es la parte común de las gráficas del conjunto A y del conjunto B.



Conjunto contenido en otro $A \cap B$, el resultado es el conjunto contenido en el conjunto mayor.

❖ DIFERENCIA DE DOS CONJUNTOS: A - B

La diferencia de dos conjuntos A y B, se define como el conjunto formado por los elementos que están en A y que no están en B, se denota como:

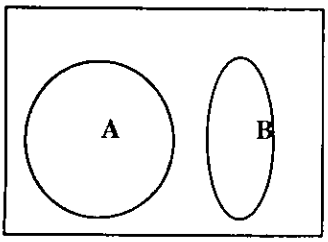
$A - B = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}$;
A - B se lee como A menos B

Ejemplo

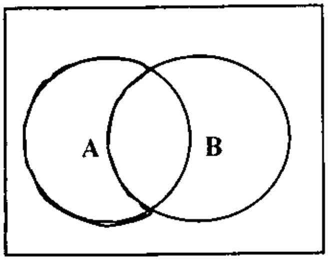
Sean los conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{2,3,4\}$, entonces $A-B = \{1,5\}$

Note que si se calcula el conjunto B - A el resultado cambia, en el ejemplo el resultado es el conjunto vacío $\varnothing$.

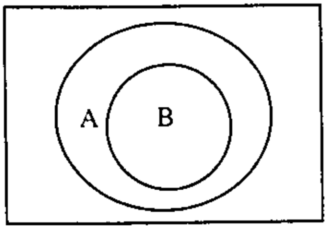
Representación gráfica de la diferencia de dos conjuntos.



Cuando los conjuntos son ajenos o disjuntos, se tiene que A-B es el resultado de esta operación entre conjuntos con estas características es el propio conjunto A



Cuando los conjuntos están intersecados, A - B, es el resultado son los elementos que están en el espacio del conjunto A y no los elementos de la intersección.



Cuando los conjunto presentan una relación de uno contenido en el otro, A-B es el resultado son los elementos que están en el espacio del conjunto A y no en el conjunto B, o sea el conjunto ∅.

Ejemplo

Sean los conjuntos $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $B = \{2,3,...,10\}$, entonces:

$A - B = \{1\}$

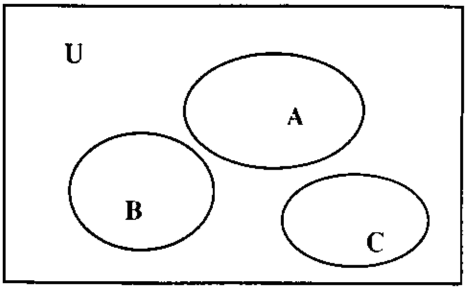
$B - A = \{7,8,9,10\}$

❖ COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO.

Antes de definir el complemento de un conjunto, se mencionará la existencia de un conjunto particular, el ***conjunto universal***, que es el conjunto que contiene a todos los conjuntos de la misma categoría o naturaleza. El conjunto universal se denota por U o bien por **Ω.**

Representación gráfica

Es el conjunto que contiene a otros de la misma categoría.



Entonces el complemento del conjunto A se define como el conjunto de elementos que pertenecen a U, y que no pertenecen al conjunto A, se denota como,

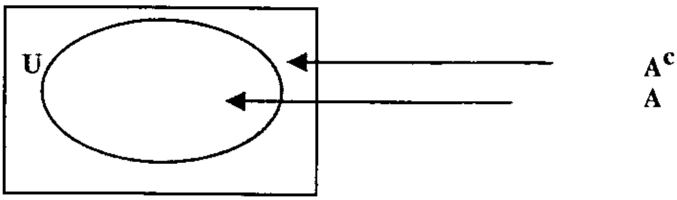
$A^c = \{x/x \in \mathbf{U} \text{ y } x \notin A\}$

A^c se lee como A complemento o complemento de A. Varios autores lo escriben como A` o como A°. Aquí se usará A^c.

Ejemplo

Sean los conjuntos **U** = {hombres y mujeres}, A = {mujeres}, entonces el conjunto A^c = {hombres}.

Representación gráfica



A^c el complemento de A.

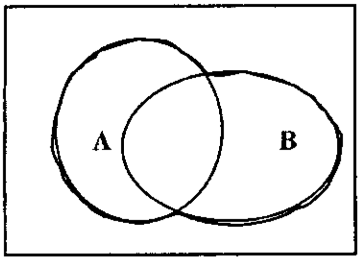
1.4 LEYES DE DeMORGAN.

Las siguientes expresiones se cumplen para cualesquiera par de conjuntos.

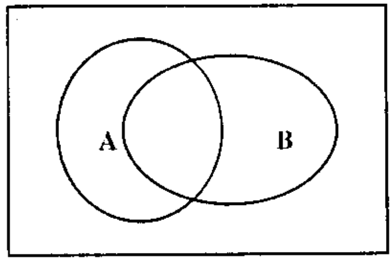
La 1ª . Ley de DeMorgan dice que el conjunto complemento de la unión de dos conjuntos equivale a la intersección de los conjuntos complementos de los conjuntos originales.

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Representación gráfica



=

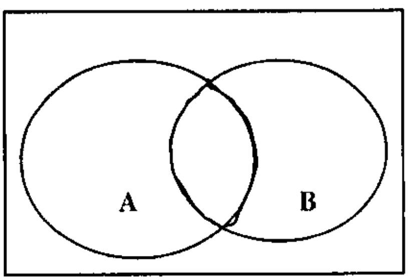


□ $(A \cup B)^c$ = □ $A^c \cap B^c$

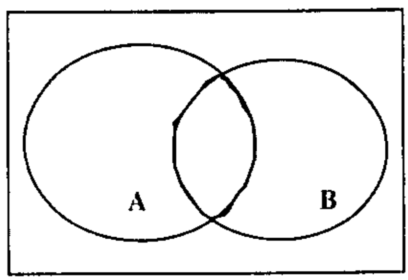
La 2a. Ley de DeMorgan, dice que el conjunto complemento de la intersección de dos conjuntos equivale a la unión de los conjuntos complementos de los conjuntos originales.

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Representación gráfica



=



□ $(A \cap B)^c$ = □ $A^c \cup B^c$

Ejemplo:

Sean los conjuntos $U = \{1,2,...,10\}$, $A = \{2,4,6,8,10\}$, $B = \{1,3,5\}$, desarrolle las dos leyes de DeMorgan.

1a. Ley

Primero se encuentra el conjunto $A \cup B$, lo que da como resultado el conjunto $\{1,2,3,4,5,6,8,10\}$

Después se obtiene su complemento $(A \cup B)^c$, lo que da como resultado el conjunto $\{7,9\}$

Se obtiene los conjuntos complementos A^c , lo que da como resultado el conjunto $\{1,3,5,7,9\}$

Y B^c , lo que da como resultado el conjunto $\{2,4,6,8,9,10\}$

Se obtiene la intersección de estos dos últimos conjuntos $A^c \cap B^c$, lo que da como resultado el conjunto $\{7,9\}$

Y por lo tanto $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ se cumple.

2a. Ley

Primero se encuentra el conjunto $A \cap B$, lo que da el conjunto $\varnothing$

Después se obtiene su complemento $(A \cap B)^c$, lo que da el conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Se obtiene los conjuntos complementos A^c , lo que da el conjunto $\{1,3,5,7,9\}$y B^c, generando el conjunto $\{2,4,6,8,9,10\}$

Se obtiene la unión de estos dos últimos conjuntos $A^c \cup B^c$, lo que da el conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Y por lo tanto $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ se cumple.

Ejercicios

1) Realice lo mismo con los siguientes conjuntos, $U = \{1,2,\dots,10\}$, $A = \{2,4,6,8,10\}$ y $B = \{1,3,5\}$.

2) Sean $\Omega = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; $A = \{2, 4, 6, 10\}$ y $B = \{8, 12, 14\}$. Calcular:

a) $A \cup B$

b) B^c

c) $A \cap B$

d) A^c

e) A - B

$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
$B^c = \{2, 4, 6, 10\} = A$
$A \cap B = \emptyset$
$A^c = \{8, 12, 14\} = B$
$A - B = \{2, 4, 6, 10\}$

3) Sean $\Omega = \{a, b, c, d, ...l, m, n\}$; $A = \{a, b, e, j, k, l\}$; $B = \{b, e, f, l, m, n\}$ y $C = \{a, d, g, h, i, n\}$ Calcular:

a) $A \cup B$
b) $A - C$
c) B^c
d) $A \cap B \cap C$
e) $B \cap C$
f) $A \cap C$

$A \cup B = \{a, b, e, j, k, l, f, m, n\}$
$A - C = \{b, e, j, k, l\}$
$B^c = \{a, c, d, g, h, i, j, k\}$
$A \cap B \cap C = \emptyset$
$B \cap C = \{n\}$
$A \cap C = \{a\}$

1.5 CONJUNTO POTENCIA.

El conjunto potencia del conjunto A es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A que pueden ser determinados por el mismo conjunto A, se denota por $\mathscr{P}_A$.

Ejemplo:

Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$, entonces $\mathscr{P}_A$ estará formado por

$\mathscr{P}_A = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},$ subconjuntos de 1 elemento
$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},$

$\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},$ subconjuntos de 2 elementos
$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},$
$\{1,4,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,4,5\},\{3,4,5\},$ subconjuntos de 3 elementos
$\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{2,3,4,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},$ subconjuntos de 4 elementos
$\{1,2,3,4,5\},$ subconjuntos de 5 elementos
$\varnothing\}$ y el conjunto vacío.

Como se puede ver en este ejercicio el conjunto potencia tiene 32 elementos, que corresponde a la cuenta de 2^n, donde n es el número de elementos del conjunto, así $2^5 = 32$. En este momento no se deducirá de donde proviene el conteo de 2^n, pero es una ayuda saber cuantos elementos se esperan en el conjunto potencia de un conjunto A cualquiera.

E J E R C I C I O S

GRUPO 1.

Sean los conjuntos **U** = $\{1,2,\ldots,10\}$, $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,7,9\}$ y $C = \{2,4,8,10\}$, realice lo siguiente:

a) $A \cup B$.
b) $A^c \cap C^c$
c) A^c
d) B^c
e) C^c
f) $A-B$
g) $B-C$
h) $A \cup (B \cap C)$
i) $(A \cup B \cup C)^c$
j) $(A \cap B \cap C)^c$
k) $(A \cap B)-(B \cup A)$
l) $(A \cup B)^c-(C \cap A \cup B)^c$

GRUPO 2.

1.- Hallar todos los subconjuntos de $S = \{a,b,c,d\}$.

2.- Diga si son falsas o verdaderas las siguientes proposiciones:
Sean $T = \{a, b, c, d\}$; $R = \{a, b\}$; $S = \{a, b, c\}$

a) $R \subseteq R$
b) $S \subset T$
c) $S \subset R$
d) $3 \in S$

e) $\varnothing \subset T$

f) $\varnothing \in S$

g) $a \subset T$

h) $T \supset (\mathscr{P}_S)$

3. Sean $U = \{1,2,\ldots,10\}$; $H = \{1,2,3,4\}$; $J = \{3,4,5\}$; $K = \{7,8,9\}$; $L = \{5,6,7,8,9,10\}$. Halle los siguientes conjuntos

a) H^c

b) L^c

c) $H \cup J$

d) $H \cup K$

e) $K \cup L$

f) $H \cap J$

g) $K \cap L$

h) $J \cap K$

i) $H^c \cap J^c$

j) $(H \cap J)^c$

k) $(H \cup J)^c$

l) $H^c \cap K^c$

m) $H^c \cup \varnothing$

n) $H^c \cap \varnothing$

o) $(H \cap J) \cup K$

p) $H \cap J \cup K)$

q) $(H \cup K) \cap (J \cup K)$

r) $(H-K)^c \cap (J-L)$

s) $(K \cap J)^c - (J \cup L)^c$

t) $[(J-K)-[(H \cap L)^c \cup (J^c \cap K^c)]]-H^c$

4.- Dibuje un diagrama de Venn-Euler que muestre:

a) $A \cup (B \cap C)$

b) $(A \cup B) \cup C$

c) $(A^c \cap B^c) \cap C^c$

d) $(A \cap B) \cap C^c$

5.- Utilizar los diagramas de a), b) y c) para comprobar

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

CAPÍTULO 2

SISTEMAS DE NUMERACIÓN.

2.1. BREVE RESEÑA HISTÓRICA.

ORIGENES DEL SISTEMA DE NUMERACION

Sin duda, el progreso del hombre durante los últimos siglos en las áreas científicas y tecnológicas es, en parte, atribuible al desarrollo de la forma de expresar los números. El sistema numérico actual es la culminación de muchos siglos de desarrollo y producto de las mejoras a los diferentes sistemas numéricos que hasta ahora han existido.

Si se parte del hecho que un sistema de numeración es un modo de representar o expresar números, que implica dos cosas: un conjunto de símbolos y algunas reglas para combinar los símbolos.

Los primeros sistemas de numeración fueron con un sólo símbolo o una marca en alguna superficie, cada marca representaba la unidad, sin que esto signifique que los antepasados hayan tenido el concepto de número como una entidad abstracta. En realidad, las marcas en las paredes de las cuevas o las muescas en los palos sirvieron simplemente para llevar la cuenta.

Es propio de un sistema de numeración usar un símbolo tal como |||| para denotar lo que ahora se llama número cuatro; de cualquier modo, es fundamental la suposición de que el número expresado es la suma de los números simbolizados por cada una de las marcas.

El primer gran paso, ocurrió cuando se empezaron a agrupar las marcas para comprenderlas con mayor facilidad. El número empleado para agrupar, tuvo alguna relación con un objeto físico común; así, por los cinco dedos de una mano, surgió el cinco como grupo básico; en igual forma surge el grupo diez, por los dedos de ambas manos, y el grupo veinte por los dedos de todas las extremidades[1].

Casi al mismo tiempo que se empezaron a agrupar las marcas, se vislumbró la posibilidad de establecer un sistema para la agrupación de aquellas, paralelamente se empezó también a prestar atención a los símbolos que usaban.

---

[1] Muchos autores concuerdan con esta forma de deducción, pero otros opinan que no se debió a la relación corporal.

La marca /, comúnmente se uso en grupo como //// //// //// ////. Sin embargo, cuando se trataba de leer estos símbolos rápidamente el total representado, se tenían problemas de interpretación, entonces se buscó tener distintos símbolos para representar grupos de diferente cantidad, pero empleando todavía un número particular como base para la agrupación.

El sistema egipcio de numeración, indicaba estos puntos con bastante claridad, observando los números empleados por este sistema se puede ver que el número diez se empleó como base para agrupar, y se observan también los símbolos con que representaban los grupos de diferente cantidad. Realizando una comparación entre el numeral egipcio y el numeral decimal, uno puede darse cuenta de que los egipcios no tenían un sistema posicional, esto significa que un numeral del sistema egipcio no se alteraba aunque se cambiara el orden de los símbolos. Por ejemplo, en el sistema egipcio, treinta y dos podía escribirse de varias formas:

∩∩∩|| o ∩|∩|∩ o ∩||∩∩[2]

No obstante, la primera forma era la más común, en cada caso, el numeral representaba la suma de los números indicados por los símbolos. En cambio en la actualidad la posición de los símbolos que se emplean cambia el significado de los numerales, aunque se tengan los mismos símbolos 105 no es lo mismo que 501. Por otra parte, el sistema egipcio no tenía un símbolo que representara al cero ni se necesitaba de él.

A pesar de lo desarrollado, el sistema egipcio de numeración presenta varias desventajas, por ejemplo, un cálculo puede ser muy engorroso, aunado a esto la dificultad de generar un consenso en cuanto al o los símbolos a utilizar para agrupaciones mayores.

La numeración babilónica ofrecía características que no tenían los sistemas semejantes al egipcio, este sistema presentaba indicios de un sistema de notación posicional, ya que el mismo símbolo se empleaba para representar diferentes grupos de distinta cantidad, según su posición en el numeral

El sistema babilónico de numeración sólo utilizaba dos símbolos, Y y≺, se utilizaban para escribir todos los numerales, pero se presentaban problemas en la interpretación, ya que no había manera de indicar la ausencia de un grupo de determinada cantidad, el símbolo 0 en el sistema numérico desempeña este papel.

[2] Los símbolos utilizados tienen un valor de 10 = ∩ y de 1 = | para los egipcios.

Hasta ahora se ha visto que es necesario contar con un sistema de notación posicional, como el que actualmente se usa, éste no comenzó a desarrollarse sino cuando se concibieron los sistemas estructurales:

- La aceptación de símbolos sencillos para la representación de los números, y que representaban a los números que se simbolizan con los signos: 1,2,3,...,9.

- La combinación de estos símbolos para formar numerales de números mayores y la posición del símbolo significaba el número a que se refería.

- Se reconoció la necesidad de un símbolo representativo del cero y el símbolo fue adoptado.

Aún después de este progreso, tardó tiempo para que el sistema decimal de notación posicional se difundiera.

NÚMERO Y NUMERAL

Número y numeral son dos términos matemáticos que suelen confundirse. Estos términos no son sinónimos y los principios de numeración no pueden aplicarse eficientemente mientras no se distinga el significado preciso de estas dos palabras.

¿Qué es número? Básicamente, es una idea asociada a un conjunto de objetos, la misma idea de número le permite asociarse con otros conjuntos equivalentes. Recuerde que conjuntos equivalentes son aquellos en que sus elementos pueden ponerse en correspondencia uno a uno sus elementos.

Todos los siguientes conjuntos tienen una propiedad común, que consiste en ser equivalente al mismo conjunto. Esta propiedad, ajena a la naturaleza de los elementos de los conjuntos, se llama número cinco.

Obsérvese que esto se obtiene mediante el último símbolo del conjunto estándar,

{"1", "2", "3", "4", "5" }.

A = {Θ,∇, ,☆, ✚ }

B = {a, b, c, d, e }

$C = \{/, ▲, ×, □, ♠\}$

De igual modo {"1"}, puede emplearse para identificar la propiedad común de todos los conjuntos equivalentes, y esa propiedad se llama número uno; {"1", "2"}, puede emplearse para identificar la propiedad común de todos los conjuntos a los que este equivale, la propiedad se llama número dos, etcétera.

¿Qué es un numeral?. Un numeral es un símbolo empleado para representar un número. Los numerales, entonces, son como vehículo para comunicar ideas de números.

Examinando algunos numerales: 5, ~~////~~, V, 2+3, (2x2) +1, 7 - 2.

Todos estos numerales representan el número cinco. El hecho es que el símbolo 5 es el más simple –al menos lo es para los que casi nacimos con este símbolo; ¡quizá los romanos pensaban que V era el símbolo más sencillo para representar el número cinco!-, pero de ninguna manera significa esto que las otras formas sean menos correctas para representar la idea del número cinco.

También es necesario hacer una distinción entre los conceptos de sistema de numeración y sistema numérico. El sistema numérico es mucho más general que el concepto de sistema de numeración, el sistema numérico tal como el sistema de números enteros es, como su nombre lo indica, un sistema de números independiente de los símbolos usados para representar a áquellos, un sistema de numeración es la manera de representar los números mediante símbolos de acuerdo con reglas específicas que no conciernen directamente a las propiedades de los números.

2.2. SISTEMAS DE NUMERACIÓN.

2.2.1. SISTEMA DE NUMERACIÓN INDOARÁBIGO

Todos los sistemas de numeración tienen ciertas características en común: Sólo se emplea un número limitado de símbolos.

En particular el sistema indoarábigo es un sistema posicional con símbolos adoptados para el cero, uno, dos, tres, etcétera; hasta el nueve, el siguiente número, diez, desempeña un oficio especial en este sistema y se llama base del sistema, por lo tanto el sistema se llama decimal, por ser diez su base.

A los símbolos del conjunto { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } frecuentemente se les llama dígitos: son numerales que representan los números del cero al nueve.

Para escribir un símbolo que represente el diez, y para los números mayores de nueve, se usa dos o más dígitos, escritos de acuerdo con un modelo determinado por el sistema posicional.

Viendo el numeral de un número que requiera varios dígitos y considerando lo que significa el sistema posicional. El número quinientos sesenta y nueve se escribe 569.

5 6 9

que significa (cinco x cien) + (seis x diez) +(nueve x uno).

El dígito 9 ocupa la posición 0, el dígito 6 ocupa la posición 1, y el dígito 5 ocupa la posición 2.

A cada posición se le asigna un número que es el valor posicional de dicho lugar: el valor posicional del lugar 0 es uno; diez es el valor posicional de la posición 1, y cien es el valor posicional de la posición 2.

En el sistema de base diez el valor posicional asignado a cada posición varía de diez en diez, de tal modo que el valor de una posición es diez veces mayor que el valor de la posición inmediata, situada a la derecha. El valor posicional es un número asignado a una posición independiente del dígito que la ocupa. Es decir, un dígito cualquiera puede ocupar cualquier posición.

El número representado por el dígito 5 en el numeral 569 es un producto. Es el producto del número cinco por el valor posicional asignado a la posición 2, que es cien. El número representado por el dígito 6 es el producto de seis por el valor posicional asignado a la posición 1, que es diez. El 9 representa el producto de nueve por el valor posicional asignado a la posición 0, o sea uno.

Todo el numeral representa la suma de los tres productos:

$$\begin{aligned} 569 &= (5\text{X}100) + (6\text{X}10) + (9\text{X}1) \\ &= \quad 500 \quad + \quad 60 \quad + \quad 9 \\ &= \qquad 569 \end{aligned}$$

Resumiendo:

Los dos principios básicos del sistema indoarábigo son el principio de notación posicional y el principio aditivo. El principio de notación posicional incluye dos ideas:

- Hay un número asignado a cada posición en el numeral. Éste se llama valor posicional de la posición.

- Cada dígito representa el producto del número que simboliza por el valor posicional asignado a su posición.

El principio aditivo significa que el número simbolizado es la suma de los productos de que se habla.

El sistema posicional puede, por supuesto, tener otra base diferente de diez; de hecho, todo número natural mayor que uno puede emplearse como base de un sistema posicional.

El sistema posicional que se ocupa en la actualidad también se emplea para escribir numerales que no representan números enteros.

Para eso se emplea el punto decimal y los valores posicionales menores que uno se asigna a las posiciones situadas a la derecha de la posición 0.

Todo esto conduce a pensar en los

EXPONENTES

En el sistema de numeración decimal –de base diez- se sabe que 1, 10, 10X10, 10X10X10, etcétera; desempeñan un importante oficio. Con excepción del primero, todos los demás constan de un sólo número, empleado como factor una o varias veces y pueden escribirse de una manera condensada; entonces,

$$1 = 10^0,$$
$$10 = 10^1$$
$$10X10 = 10^2$$
$$10X10X10 = 10^3$$
$$10X10X10X10 = 10^4$$

El numeral 10^4 se llama forma exponencial del número 10,000.

El número que se repite como factor, en este caso 10, se llama ***base*** de esta expresión. El índice en el extremo superior a la derecha de la base se usa para señalar cuantas veces se toma ésta como factor. El superíndice se llama ***exponente***.

Entonces, en

$$10^5= 10X10X10X10X10$$

la base es 10 y el exponente es 5. Se lee como diez a la quinta potencia. La expresión "10^4" como diez a la cuarta potencia. La expresión "10^3" como diez a la tercera potencia o diez al cubo. La expresión "10^2" como diez a la segunda potencia o diez al cuadrado. Se llama ***potencias*** de diez a los siguientes números: $10^0 = 1$, $10^1= 10$, $10^2= 100$, $10^3= 1000$, etcétera.

La base de una potencia puede ser cualquier número natural y también cero si el exponente no es cero.

Entonces, la tercera potencia de cinco es: $5^3= 5X5X5 = 125$.

El numeral 125 tiene la forma exponencial 5^3.

Si el exponente es uno, se dice que la potencia es igual a la base:

$$3^1= 3$$
$$2^1= 2$$
$$10^1= 10$$

Cuando el exponente es cero y no es cero la base, la potencia se define como uno:

$$5^0=1$$
$$10^0= 1$$
$$4^0= 1$$

Considérese los números:

$$10^0= 1,$$
$$10^1=10,$$
$$10^2=10\times 10 = 100,$$
$$10^3=10\times 10\times 10 = 1\ 000,$$
$$10^4=10\times 10\times 10\times 10 = 10\ 000,$$
$$10^5=10\times 10\times 10\times 10\times 10 = 100\ 000,$$
$$10^6=10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10 = 1\ 000\ 000.$$

Observe que 10^6 es otra expresión para 1 000 000; este numeral consta de un "1" seguido por seis "0".

De igual modo: $10^7= 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10\times 10 = 10\ 000\ 000.$

10^7 puede representarse por un numeral compuesto de un "1" seguido por siete "0".

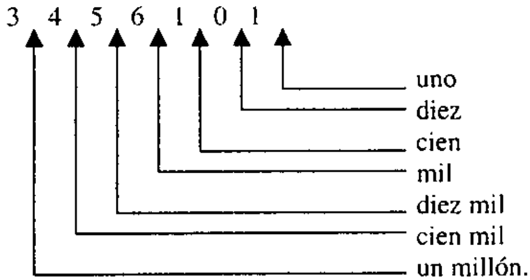
Esto es cierto en general, si n es cualquier número natural, entonces el número 10^n puede representarse por un numeral que conste de un "1" seguido por n "0".

$$10^8= 100\ 000\ 000,$$
$$10^{10}= 10\ 000\ 000\ 000.$$

NOTACIÓN DESARROLLADA

Para escribir numerales en el sistema decimal el número diez se emplea como base.

Cualquier posición después de la posición 0 tiene un valor posicional diez veces mayor que la posición inmediata a la derecha, esto es:



Considérese, por ejemplo, el número cuyo numeral de base diez es 352.

$$
\begin{aligned}
352 &= 300+50+2 \\
&= (3\times 100) + (5\times 10) + (2\times 1) \\
&= (3\times 10\times 10) + (5\times 10) + (2\times 1) \\
\\
&= (3\times 10) + (5\times 10) + (2\times 10);
\end{aligned}
$$

también :

$$
\begin{aligned}
1\,684 &= 1\,000 + 600 + 80 + 4 \\
&= (1\times 1\,000) + (6\times 100) + (8\times 10) + (4\times 1) \\
&= (1\times 10\times 10\times 10) + (6\times 10\times 10) + (8\times 10) + (4\times 1) \\
&= (1\times 10) + (6\times 10) + (8\times 10) + (4\times 10);
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
34\,026 &= 30\,000 + 4\,000\,0 + 20 + 6 \\
&= (3\text{x } 10\,000) + (4\text{x}1000) + (0\text{x}100) + (2\text{x}10) + (6\text{x}1) \\
&= (3\text{x}10\text{x}10\text{x}10\text{x}10)+(4\text{x}10\text{x}10\text{x}10)+(0\text{x}10\text{x}10)+(2\text{x}10)+(6\text{x}1) \\
&= (3\text{x}104) + (4\text{x}103) + (0\text{x}102) + (2\text{x}101) + (6\text{x}100).
\end{aligned}
$$

Esta forma de expresar un número se llama *notación desarrollada.*

Nótese que cuando un numeral, que representa a un número entero, tiene tres dígitos, la potencia de diez más alta en la notación desarrollada es dos (3 – 1); cuando el numeral tiene cuatro dígitos, la potencia de diez más alta es tres (4–1); cuando el numeral tiene cinco dígitos, la potencia de diez más alta es cuatro (5-1)

En términos generales, si el numeral que representa un número entero tiene n. dígitos, la potencia de diez más alta es ($n - 1$).

2.2.2. SISTEMA DE NUMERACIÓN SEXADECIMAL

En la antigua Mesopotamia, las primeras formas de escritura aparecen hacia el tercer milenio antes de nuestra era y se caracterizan por la utilización de símbolos estilizados para representar las cosas, transformándose de unas formas cilíndricas a otras de forma triangular, escritura cuneiforme.

El símbolo ▼ representa la unidad y se repite hasta nueve veces para representar el número 9.

El símbolo ◀ representa el número 10 y se repite combinándolo con la unidad para representar los números del 11 al 59. A partir del 60, se utilizan las mismas combinaciones de dos signos, teniendo en cuenta, sin embargo, que entra en juego el principio de la posición.

Los textos babilónicos no revelan claramente la presencia de un símbolo específico para el cero, no obstante, empleaban comúnmente un espacio en blanco más o menos destacado.

Así el conjunto formado por: ◀ ▼, puede significar el número 11, el número 11*60, el número $11*60^2$. Sin embargo en ciertos textos se utiliza el símbolo ⫶ para indicar el sitio del cero.

A pesar de todo, se tiene que admitir que este sistema mixto (base 10 y base 60) fue el primer sistema posicional entre los antiguos.

La representación numérica de los números se ve facilitada en la medida en que el contexto esté claramente definido, por ejemplo, el número 7424 en base 60 se representa como sigue:

$$7424_{(60)} = 2,3,44 \text{ ó } 2*60^2 + 3*60 + 44$$

es decir

7424₍₆₀₎ = ▼▼ ▼▼▼ ◀◀◀◀▼▼▼▼

ó

⫶7424₍₆₀₎ = ▼▼ ⫶ ▼▼▼ ⫶ ◀◀◀◀▼▼▼▼

donde los espacios han sido sustituidos por ⫶.

Es importante observar que por divisiones sucesivas del número 7424 y residuos por 60, siguiendo el método propuesto para la conversión del sistema decimal a cualquier otro sistema numérico se tiene que

- **El primer residuo es el número 44, 7424 entre 60 arroja como resultado 123.**
- **Al dividir 123 por 60 se obtiene como 2 cociente, y de residuo 3.**
- **El último residuo es 2**

El principio de la posición o del valor según el lugar del símbolo, favoreció a los babilonios a la hora de escribir fracciones. Sí el escriba babilónico deseaba escribir la fracción $1 + \frac{1}{2}$ o mejor, $1 + \frac{30}{60}$, en base 60, bastaba con utilizar la expresión simbólica

▼<<<

Sin embargo esta expresión puede prestarse a confusión, ya que puede significar $1 + \frac{30}{60}$ ó $\frac{1}{60} + \frac{30}{(60)^2}$, etc. Es así como los babilonios podían sumar y multiplicar con la misma facilidad que hoy nos permite nuestro sistema decimal.

2.2.3. SISTEMA DE NUMERACIÓN DE BASE CUATRO

Un estudio de sistemas de numeración de bases diferentes de diez, refuerza la comprensión del propio sistema de base diez. Considere el siguiente ejemplo:

En cierta escuela se planeaba un día deportivo. A cada maestro se le preguntó cuántos equipos de muchachos podría proporcionar para los siguientes eventos:

1) béisbol	9 muchachos en cada equipo
2) fútbol	11 muchachos en cada equipo
3) boliche	4 muchachos en cada equipo
4) carrera de relevos	10 muchachos en cada equipo

Equipos para el día deportivo

Evento	Número de jugadores por equipo	Número de equipos	Número de reservas
béisbol	nueve	4	1
fútbol	once	3	4
boliche	cuatro	9	1
básquet	cinco	7	2
relevos	diez	3	7

La señorita Pérez que tiene 37 muchachos en su clase, remitió al director la información dada en el cuadro anterior. Examinando el sistema de agrupación que usó la señorita Pérez para llenar el cuadro, se tiene.

Para béisbol, se agrupó en conjuntos de nueve:

XXXXXXXXX XXXXXXXXXX XXXXXXXXX XXXXXXXXX X (4 X nueve) + 1

Para fútbol, agrupó conjuntos de once:

XXXXXXXXXXX XXXXXXXXXXX XXXXXXXXXXX XXXX (3 X once) + 4

Para boliche, agrupó en conjuntos de cuatro:

XXXX XXXX XXXX XXXX XXXX XXXX XXXX XXXX XXXX X (9 X cuatro) + 1

Para basquet, agrupó en conjuntos de cinco:

XXXXX XXXXX XXXXX XXXXX XXXXX XXXXX XXXXX XX (7 X cinco) + 2

Para relevos, agrupó en conjuntos de diez:

XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX XXXXXXX(3 x diez) + 7

En el caso del béisbol –nueve en cada equipo- TREINTA Y SIETE se expresó de esta manera: (4×nueve)+1.

¿Puede abreviarse esta forma? Sí, puede escribirse como 4 si se entiende que el símbolo "4" representa cuatro grupos de nueve en lugar de tres grupos de diez. Una manera adecuada de escribir lo anterior es:

4_{nueve}.

donde la palabra "nueve" escrita como subíndice, indica que el "1" representa un grupo de nueve (base). El símbolo 46_{nueve} se lee "cuatro, uno, base nueve".

Al examinar el resto del cuadro se observa que treinta y siete también puede escribirse como:

34_{once}, 91_{cuatro}, 72_{cinco}

Es evidente que el número de objetos de un conjunto determinado siempre es el mismo - en este caso treinta y siete -, no importa cómo se agrupen los objetos ni con que numerales se represente el agrupamiento.

En cualquier sistema de numeración de notación posicional, los símbolos son escogidos para los números cero, uno, dos y así sucesivamente: pero sin incluir la base. Por ejemplo, en el sistema decimal hay símbolos para los números cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.

En el sistema de base cuatro, hay símbolos para los números cero, uno, dos, tres. Cada uno de los cuales representa un número asociado con un conjunto modelo, como se muestra:

{ }	0
{ x }	1
{ xx }	2
{ xxx }	3.

Ahora que se han visto los símbolos del sistema de base cuatro. ¿Qué numeral se empleará para representar el número del conjunto{ xxxx } ?

Aplicando el principio de notación posicional se escribirá con dos dígitos :

10_{cuatro} y se leerá este numeral "uno, cero, base cuatro" esto significa un conjunto de cuatro elementos y no más. Aplicando el mismo procedimiento se puede observar que los numerales para los números siguientes son:

{ (xxxx) x }	11_{cuatro} un cuatro y uno
{ (xxxx) xx }	12_{cuatro} un cuatro y dos
{ (xxxx) xxx }	13_{cuatro} un cuatro y tres
{ (xxxx) (xxxx) }	20_{cuatro} dos cuatros
{ (xxxx) (xxxx) x }	21_{cuatro} dos cuatros y uno

.   .   .
.   .   .
.   .   .

{ (xxxx) (xxxx) (xxxx) xx } 32_{cuatro} tres cuatros y dos
{ (xxxx) (xxxx) (xxxx) xxx } 33_{cuatro} tres cuatros y tres

Ahora que se está familiarizado con los posibles numerales de dos dígitos de base cuatro, ¿Cómo se puede escribir el numeral del conjunto que tiene un miembro más que el último que se ha visto, es decir:

{ (xxxx) (xxxx) (xxxx) xxx←x } ?

Cuando se añade un miembro más, se tienen cuatro conjuntos de cuatro:

{ (xxxx) (xxxx) (xxxx) (xxxx) }

Se ha formado un nuevo grupo –dentro de las llaves- y el número asociado con él es cuatro cuatros. Si se tiene un grupo cualquiera de cuatro, y se forma un nuevo grupo, se trabaja entonces con base cuatro. El numeral para este nuevo grupo es 100_{cuatro}. Esto significa un conjunto de cuatro cuatros, ningún conjunto de cuatros y ninguna unidad. El numeral 100_{cuatro} se lee "uno, cero, cero, base cuatro". Ahora considerando el agrupamiento en este conjunto:

{ (xxxx) (xxxx) (xxxx) (xxxx)   (xxxx) xx }

El numeral para el número de este conjunto de objetos es 112_{cuatro} . Esto es un grupo de cuatro cuatros, un grupo de cuatros y dos unidades.

Los valores posicionales de la base cuatro - tiene posiciones 0, 1, 2, etcétera como en la base diez, pero el valor posicional asignado a cada posición es diferente al del sistema de base diez. La posición cero, a la derecha, tiene valor posicional uno, o 4^0. Después de ésta, cada valor posicional es cuatro veces el valor posicional de la posición inmediata a la derecha. La posición 1 tiene el valor posicional de la base, en este caso cuatro. La posición 2 tiene un valor posicional de (cuatro x cuatro) o sea dieciséis. El valor posicional de la posición 3 es sesenta y cuatro.

Por lo que el número representado por el numeral 312_{cuatro} en notación desarrollada es,

$$312_{\text{cuatro}} = (\text{tres} \times \text{dieciséis}) + (\text{uno} \times \text{cuatro}) + (\text{dos} \times \text{uno})$$

El dígito 2 ocupa la posición 0, el dígito 1 ocupa la posición 1 y el dígito 3 ocupa la posición 2. Cada posición tiene asignado un número que es el valor posicional de dicha posición. Uno es el valor posicional de la posición 0; cuatro es el valor posicional de la posición 1, y dieciséis es el valor es el valor posicional de la posición 2. Cualquier dígito de estos, 0, 1, 2, 3, en base cuatro puede ocupar cualquier posición.

Para encontrar un numeral de base diez que simbolice el número representado por el numeral 312_{cuatro} , se necesita aplicar el principio de notación posicional. El número representado por cada dígito en este numeral es un producto. El número representado por el dígito 3 es el producto de 3 por el valor posicional asignado a la posición 2; en este caso dieciséis. El número representado por el dígito 1 es el producto de uno por el valor posicional asignado a la posición 1; esto es, cuatro. El número representado por el dígito 2 es el producto de dos por el valor posicional asignado a la posición cero, o sea uno. Por último, el numeral completo representa la suma de los tres productos:

$$312_{cuatro} = [3\times(\text{cuatro}\times\text{cuatro})]+(1\times\text{cuatro})+(2\times\text{uno})$$

En numerales de base diez, se tiene,

$$\begin{aligned}&(3\times 16_{diez}) + (1\times 4_{diez}) + (2\times 1_{diez})\\ &= 48_{diez} + 4_{diez} + 2_{diez}\\ &= 54_{diez}\end{aligned}$$

Asimismo, 323cuatro $=54_{diez}$; esto es 323_{cuatro} y 54_{diez} son numerales que representa el mismo número, cincuenta y cuatro.

Para escribir un numeral de base diez que signifique el número representado por 132_{cuatro}, primero se expresa el número en notación desarrollada:

$$\begin{aligned}132\text{cuatro} &= [1\times (\text{cuatro}\times\text{cuatro})] + (3\times\text{cuatro}) + (2\times\text{uno})\\ &= (1\times 4^{2}{}_{diez}) + (3\times 4^{1}{}_{diez}) + 2\times 4^{0}{}_{diez})\\ &= 16_{diez} + 12_{diez} + 2_{diez}\\ &= 30_{diez}\end{aligned}$$

Los siguientes conjuntos (figura 3) muestran que el mismo número de elementos se representa por 132_{cuatro} y 30_{diez}.

Para escribir mediante un numeral de base cuatro un número representado por un numeral de base diez, imagínese los objetos en conjuntos modelo en grupos de cuatro. Entonces, si se tienen 46 objetos (46_{diez}) ¿puede formarse un conjunto de dieciséis objetos? Si, se puede formar *dos* conjuntos de dieciséis objetos y entonces se colocarán "2" en la posición 2. Se tienen agrupados treinta y dos objetos y catorce sin agrupar. ¿Se pueden formar conjuntos de cuatro objetos cada uno, de estos catorce objetos? Si, escribiendo "3" en la posición 1 . Sobran dos objetos, por tanto se escriben "2" en la posición 0.

De acuerdo con esto se tiene:

$$\begin{aligned}46_{diez} &= 32_{diez} + 12_{diez} + 2_{diez}\\ &= (2\times 16_{diez}) + (3\times 4_{diez}) + 2_{diez}\\ &= (2\times\text{cuatro}^{2}) + (3\times\text{cuatro}^{1}) + (2\times\text{cuatro}^{0})\\ &= 232_{cuatro}\end{aligned}$$

Entonces, 46_{diez} y 232_{cuatro} representan el mismo número.

2.2.4. SISTEMA DE NUMERACIÓN DUODECIMAL

Se ha visto cómo construir un sistema de numeración de base distinta de diez. Aunque empleando la base cuatro, que es menor que diez, se puede también emplear una base mayor que diez.

Convendría tener una base relacionada con las unidades comunes de medida. Muchas unidades están basadas en doce. Hay doce pulgadas en un pie, doce horas en la carátula de un reloj y doce huevos en una docena.

Un sistema de numeración de base doce se llama ***sistema duodecimal***.

En el sistema duodecimal se tienen doce símbolos, y se forman grupos de doce (docena), doce docenas (gruesa), doce docenas de docenas, etcétera.

Se requieren nuevos símbolos. Los símbolos A y B frecuentemente se usan para diez y once, respectivamente. Los doce dígitos son:

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B}

En el sistema duodecimal se agrupan en conjuntos de doce. Entonces, el numeral para esta colección es

{ xxxxxxxxxxxx   xxx }

es 13_{doce} (se lee "uno, tres, base doce", "una docena y tres") porque se tiene una docena (doce) y tres unidades.

Cuando los símbolos A y B se usan para diez y once en el sistema duodecimal se tienen algunos numerales interesantes, tales como

AOB_{doce}
AOO_{doce}
ABB_{doce}
BA_{doce}

¿Cuál es el numeral decimal que expresa el numeral AOB_{doce}?

Usando el mismo método para cambiar un numeral de base diez a base doce que es el que se usa para cambiar de base diez a base cuatro.

Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
35_{diez} &= 24_{diez} + 11_{diez} \\
&= (2\times doce^1) + (B\times doce^0) \\
&= 2B_{doce},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
148_{diez} &= 144_{diez} + 4_{diez} \\
&= (1\times doce^2) + (0\times doce^1) + (4\times doce^0) \\
&= 104_{doce}
\end{aligned}
$$

2.2.5. SISTEMA DE NUMERACIÓN BINARIO

Desde un punto de vista práctico, el sistema de notación posicional más importante, exceptuando el decimal, es probablemente el de base dos, llamado ***sistema binario*** de numeración. El trabajo de las modernas computadoras electrónicas está basado en la notación binaria para los números. De aquí la atención especial que se le conceda a este sistema de numeración.

El sistema binario requiere sólo dos símbolos 0 y 1. Los valores posicionales de este sistema son potencias de dos, que son: uno, dos × dos, dos × dos × dos, y así sucesivamente. El numeral binario para dos es 10_{dos} puesto que,

$$10_{dos} = (1 \times dos) + (0 \times uno)$$

Los numerales binarios se agrupan de dos en dos, tal como en el sistema decimal se agrupa de diez en diez.

Se verán algunos numerales binarios:

$$
\begin{aligned}
1\,101_{dos} &= (1 \times dos^3) + (1 \times dos^2) + (0 \times dos^1) + (1 \times dos^0) \\
&= (1 \times ocho) + (1 \times cuatro) + (0 \times dos) + (1 \times uno) \\
&= (1 \times 8_{diez}) + (1 \times 4_{diez}) + (0 \times 2_{diez}) + (1 \times 1_{diez}) \\
&= 8_{diez} + 4_{diez} + 0 + 1_{diez} \\
&= 13_{diez}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
11\,011_{dos} &= (1 \times dos^4) + (1 \times dos^3) + (0 \times dos^2) + (1 \times dos^1) + (1 \times dos^0) \\
&= (1 \times dieciséis) + (1 \times ocho) + (0 \times cuatro) + (1 \times dos) + 1 \\
&= (1 \times 16_{diez})+(1 \times 8_{diez})+(0 \times 4_{diez})+(1 \times 2_{diez})+(1 \times 1_{diez}) \\
&= 16_{diez} + 8_{diez} + 0 + 2_{diez} + 1_{diez} \\
&= 27_{diez}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
111\ 111_{dos} &= (1 \times dos^5) + (1 \times dos^4) + (1 \times dos^3) + (1 \times dos^2) \\
&\quad + (1 \times dos_1) + (1 \times dos_0) \\
&= (1 \times \text{treinta y dos}) + (1 \times \text{dieciséis}) + (1 \times \text{ocho}) \\
&\quad + (1 \times \text{cuatro}) + (1 \times \text{dos}) + (1 \times \text{uno}) \\
&= (1 \times 32_{diez}) + (1 \times 16_{diez}) + (1 \times 8_{diez}) + (1 \times 4_{diez}) \\
&\quad + (1 \times 2_{diez}) + (1 \times 1_{diez}) \\
&= 32_{diez} + 16_{diez} + 8_{diez} + 4_{diez} + 2_{diez} + 1_{diez} \\
&= 63_{diez}
\end{aligned}
$$

Se puede cambiar numerales decimales a numerales binarios por los mismos métodos empleados para cambiar numerales de base diez a base cuatro. Por ejemplo, para obtener el numeral binario correspondiente a 12_{diez}.

$$
\begin{aligned}
12_{diez} &= 8_{diez} + 4_{diez} \\
&= (1 \times 8_{diez}) + (1 \times 4_{diez}) + (0 \times 2_{diez}) + (0 \times 1_{diez}) \\
&= (1 \times dos^3) + (1 \times dos^2) + (0 \times dos^1) + (0 \times dos^0) \\
&= 1\ 100_{dos}
\end{aligned}
$$

Dos ejemplos más:

$$
\begin{aligned}
27_{diez} &= 16_{diez} + 8_{diez} + 2_{diez} + 1_{diez} \\
&= (1 \times 16_{diez})+(1 \times 8_{diez})+(0 \times 4_{diez})+(1 \times 2_{diez})+(1 \times 1_{diez}) \\
&= (1 \times dos^4) + (1 \times dos^3) + (0 \times dos^2) + (1 \times dos^1) + (1 \times dos^0) \\
&= 11\ 011_{dos},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
31_{diez} &= 16_{diez} + 8_{diez} + 4_{diez} + 2_{diez} + 1_{diez} \\
&= (1 \times 16_{diez}) + (1 \times 8_{diez}) + (1 \times 4_{diez}) + (1 \times 2_{diez}) + (1 \times 1_{diez}) \\
&= (1 \times dos^4) + (1 \times dos^3) + (1 \times dos^2) + (1 \times dos^1) + (1 \times dos^0) \\
&= 11\ 111_{dos}
\end{aligned}
$$

2.2.6. SISTEMA DE NUMERACIÓN DE BASE OCHO (OCTAL)

Se ha dicho que el uso del sistema binario es esencial para trabajar las computadoras electrónicas. La razón consiste en que un circuito eléctrico puede estar abierto o cerrado, sólo hay estas dos posibilidades. El sistema binario tiene sólo dos símbolos 0 y 1. Apareando los miembros de estos dos conjuntos

Circuito abierto	$\leftrightarrow$	0
Circuito cerrado	$\leftrightarrow$	1

Se otiene la correspondencia siguiente: cuando el circuito está abierto, la computadora registra 0; y cuando está cerrada, registra 1.

El gran número de dígitos requerido para escribir los numerales binarios hacen el sistema engorroso. Por ejemplo, mientras que cuarenta y cinco en numerales decimales requiere dos dígitos solamente, el numeral binario requiere seis

$$45_{diez} = 101\ 101_{dos}$$

Los numerales $1\ 023_{diez}$ y 1111111111_{dos} representan el mismo número.

Los numerales binarios se convierten fácilmente en numerales de base ocho y los numerales de base ocho requieren menos numerales que los numerales binarios.

Por ejemplo:

$$132_{ocho} = 1011010_{dos}$$

En el sistema base ocho hay ocho símbolos,

$$\{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$$

Sus valores posicionales son $ocho^0$, $ocho^1$, $ocho^2$, etcétera

El numeral 15_{ocho} representa $(1 \times ocho^1) + (5 \times ocho^0)$, o sea trece.

¿Que número representa 132_{ocho}?

$$\begin{aligned} 132_{ocho} &= (1 \times ocho^2) + (3 \times ocho^1) + (2 \times ocho^0) \\ &= (1 \times 64_{diez}) + (3 \times 8_{diez}) + (2 \times 1_{diez}) \\ &= 64_{diez} + 24_{diez} + 2_{diez} \\ &= 90_{diez} \end{aligned}$$

Por tanto, 132_{ocho} representa el número noventa.

Ahora viendo como se puede escribir el numeral de base ocho para 1110101_{dos}.

Primero inserte comas de tal forma que los dígitos queden en grupos de tres, empezando por la derecha,

$$1{,}110{,}101_{dos}$$

Este numeral puede transformarse en numeral de base ocho como sigue:

$$\begin{aligned} 1{,}110{,}101_{dos} = {} & [(1 \times dos^6)] + [(1 \times dos^5) + (1 \times dos^4) + (0 \times dos^3)] \\ & + [(1 \times dos^2) + (0 \times dos^1) + (1 \times dos^0)] \end{aligned}$$

Nótese que los primeros paréntesis angulares encierran el número representado por "1" en la posición 6, el segundo, encierra el número representado por "110" y el tercero encierra el número representado por "101".

Véanse las tres expresiones encerradas en paréntesis angulares:

$$\begin{aligned}
1 \times \text{dos}^6 &= \text{sesenta y cuatro} \\
&= 1 \times \text{ocho}^2, \\
(1 \times \text{dos}^5) + (1 \times \text{dos}^4) + (0 \times \text{dos}^3) &= \text{treinta y dos} + \text{dieciséis} + \text{cero} \\
&= 32_{\text{diez}} + 16_{\text{diez}} + 0 \\
&= 48_{\text{diez}} \\
&= 6 \text{ x ocho}^1, \\
(1 \times \text{dos}^2) + (0 \times \text{dos}^1) + (1 \times \text{dos}^0) &= \text{cuatro} + \text{cero} + \text{uno} \\
&= 4_{\text{diez}} + 0_{\text{diez}} + 1_{\text{diez}} \\
&= 5 \text{ x uno} \\
&= 5 \text{ x ocho}^0
\end{aligned}$$

Anotando esto junto, tenemos

$$\begin{aligned}
1{,}110{,}101_{\text{dos}} &= (1 \times \text{ocho}^2) + (6 \times \text{ocho}^2) + (5 \times \text{ocho}^0) \\
&= 165_{\text{ocho}}
\end{aligned}$$

Este ejemplo puede sugerir que el proceso requerido para convertir el numeral $1{,}110{,}101_{\text{dos}}$ al numeral 165_{ocho} no es sencillo. Hay, sin embargo, una relación directa entre ambos numerales.

Véase otra vez el número

$$1{,}110{,}101_{\text{dos}}$$

Hay tres grupos dígitos: 1, 110, 101, Considérese cada grupo como un numeral de base dos. ¿Que números representan estos numerales binarios?

"1" representa uno;
"110" representa seis;
"101" representa cinco.

El numeral binario $11{,}001{,}100{,}101{,}011{,}111_{\text{dos}}$ convertido al correspondiente de base ocho seria $3\ 1\ 4\ 5\ 3\ 7_{\text{ocho}}$. Aquí el numeral binario tiene *diecisiete* dígitos, mientras que el numeral de base ocho tiene sólo seis.

Una computadora puede operar con numerales binarios de 36 dígitos; cantidad que se indica con 12 dígitos en el sistema de base ocho.

$$4167_{\text{ocho}} = 100{,}001{,}110{,}111_{\text{dos}}$$

Si se quiere convertir un numeral de base ocho en binario, para alimentar una computadora se procede así: considere, por ejemplo, el numeral $4\ 167_{\text{ocho}}$. Tome cada dígito de base ocho por separado y expréselo en notación binaria, como lo muestra el cuadro XI.

Observe que en todos estos sistemas numéricos se presentan las siguientes características:

1. Todo sistema de numeración de notación posicional tiene una base que puede ser cualquier número entero mayor que uno.

   Un sistema de numeración de base uno es imposible porque sus valores posicionales serían potencias de uno, y cualquier potencia de uno es uno.

2. El número de símbolos de un sistema es igual a su base. Estos símbolos, también llamados dígitos, son numerales para los números enteros menores que la base. Entonces, los numerales empleados en el sistema de base siete son:
$$\{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

3. A cada posición del numeral se asigna un valor posicional que es, a su vez, potencia de la base. El valor posicional asignado a la posición 0 es $base^0 = 1$. El valor posicional asignado a la posición 1 es $base^1$. El valor posicional asignado a la posición 2 es $base^2$, etcétera Nótese que el exponente corresponde a la posición en el numeral.

Al escribir numerales en un sistema posicional, se observan los siguientes requisitos y convenciones:

1. Debe emplearse más de un dígito para escribir el numeral que represente a la base o a un número mayor que la base. El *símbolo* 10 *representa a la base, sea la que se esté empleando.* El numeral 10 representa $(1 \times \text{base}) + 0$

2. La base del sistema que se está usando se indica como subíndice a la derecha del numeral. El subíndice se escribe con letras.

3. Cada dígito de un numeral representa un número. Este número es el producto del número representado por el dígito y el valor posicional de la posición que ocupa el dígito en el numeral.

   Por ejemplo, considérese el numeral 546_{siete} :

   El dígito 5 esta en la posición 2 del numeral; el valor posicional asignado a la posición 2 es siete^2, por tanto el dígito 5 representa el número (cinco x siete^2).

   De igual modo el dígito 4 representa el producto (4 x siete^1) y el dígito 6 representa el producto (seis x siete^0) o (seis x uno).

4. El número representado por el numeral 546_{siete} es la suma de los productos mencionados anteriormente.

Entonces, 546 en base siete expresa la suma.

546_{siete} = (cinco × siete × siete) + (cuatro × siete) + (seis × uno), o sea el número doscientos setenta y nueve.

2.2.7. SISTEMA DE NUMERACIÓN HEXADECIMAL

Como nace o de donde surge

Los modernos equipos de cómputo actuales no utilizan el sistema decimal para representar valores numéricos, en su lugar se hace uso del sistema binario, también llamado complemento de dos. Es importante entender cómo representan las computadoras los valores numéricos, en este apartado se analizan varios conceptos importantes relacionados con los sistemas binario y hexadecimal y la organización binaria de datos (bits, nibbles, bytes y palabras).

Los sistemas de cómputo modernos trabajan utilizando la lógica binaria. Las computadoras representan valores utilizando dos niveles de voltaje, generalmente 0V y 5V, con estos niveles se representan exactamente dos valores diferentes, por conveniencia se utilizan los valores cero y uno. Estos dos valores por coincidencia corresponden a los dígitos utilizados por el sistema binario.

Formatos binarios

En un sentido estricto, cada número binario contiene una cantidad infinita de dígitos, también llamados bits que son una abreviatura de binary digits, por ejemplo, se puede representar el número siete de las siguientes formas:

- 111
- 00000111
- 0000000000000111

Por conveniencia se ignora cualquier cantidad de ceros a la izquierda, sin embargo, como las instrucciones compatibles con algunos procesadores computacionales trabajan con grupos de ocho bits a veces es más fácil extender la cantidad de ceros a la izquierda en un múltiplo de cuatro u ocho bits, por ejemplo, el número siete se representa así: 0111_2 o 00000111_2. También es conveniente separar en grupos de cuatro dígitos los números binarios grandes, por ejemplo, el valor binario 1010111110110010 puede ser escrito así 1010 1111 1011 0010. Además, en una cadena binaria se designa al dígito de la extrema derecha como el bit de posición cero y cada bit subsiguiente se le asignará el siguiente número sucesivo, de esta manera un valor binario de ocho bits utiliza los bits cero al siete: $X_7\ X_6\ X_5\ X_4\ X_3\ X_2\ X_1\ X_0$

Al bit cero se le conoce como el bit de bajo orden en tanto que al bit de la extrema izquierda diferente de cero se le llama bit de alto orden.

Organización de datos

En términos matemáticos un valor puede tomar un número arbitrario de bits, pero las computadoras por el contrario, generalmente trabajan con un número específico de bits, desde bits sencillos pasando por grupos de cuatro bits (llamados nibbles), grupos de ocho bits (bytes), grupos de 16 bits (words o palabras) y aún más. Como se verá más adelante, existe una buena razón para utilizar este orden.

Bits.- La más pequeña cantidad de información en una computadora binaria es el bit, éste solamente es capaz de representar dos valores diferentes.

Nibbles.- Un nibble es una colección de cuatro bits, esto no representaría una estructura interesante si no fuera por los números hexadecimales. Se requieren cuatro bits para representar un sólo dígito hexadecimal. Con un nibble se pueden representar 16 valores diferentes, en el caso de los números hexadecimales, cuyos valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, y F son representados con cuatro bits.

Bytes.- Un byte está compuesto de ocho bits y es el elemento de dato más pequeño direccionable por un procesador, esto significa que la cantidad de datos más pequeña a la que se puede tener acceso en un programa es un valor de ocho bits.

Words (palabras).- Una palabra (word) es un grupo de 16 bits enumerados de cero hasta quince, y al igual que el byte, el bit 0 es el bit de bajo orden en tanto que el número quince es el bit de alto orden. Una palabra contiene dos bytes, el de bajo orden que está compuesto por los bits 0 al 7, y el de alto orden en los bits 8 al 15. Naturalmente, una palabra puede descomponerse en cuatro nibbles.

El gran problema con el sistema binario es la verbosidad. Para representar el valor 202_{10} se requieren ocho dígitos binarios, la versión decimal sólo requiere de tres dígitos y por lo tanto los números se representan en forma mucho más compacta con respecto al sistema numérico binario. Desafortunadamente las computadoras trabajan en sistema binario y aunque es posible hacer la conversión entre decimal y binario, ya se vio que no es precisamente una tarea cómoda. El sistema de numeración hexadecimal, o sea de base 16, resuelve este problema (es común abreviar hexadecimal como hex aunque hex significa base seis y no base dieciséis). El sistema hexadecimal es compacto y proporciona un mecanismo sencillo de conversión hacia el formato binario, debido a esto, la mayoría del equipo de cómputo actual utiliza el sistema numérico hexadecimal. Como la base del sistema hexadecimal es 16, cada dígito a la izquierda del punto hexadecimal representa tantas veces un valor sucesivo potencia de 16, por ejemplo, el número 1234_{16} es igual a

$1*16^3 + 2*16^2 + 3*16^1 + 4*16^0$

lo que da como resultado:

$4096 + 512 + 48 + 4 = 4660_{10}$

Cada dígito hexadecimal puede representar uno de dieciséis valores entre 0 y 15_{10}. Como sólo se cuenta con los diez dígitos decimales, es necesario "inventar" seis dígitos adicionales para representar los valores entre 10_{10} y 15_{10}. En lugar de crear nuevos símbolos para éstos dígitos, se utilizan las letras A a la F. La conversión entre hexadecimal y binario es sencilla, considere la siguiente tabla:

Binario	Hexadecimal
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Esta tabla contiene toda la información necesaria para convertir de binario a hexadecimal y viceversa. Para convertir un número hexadecimal en binario, simplemente sustituya los correspondientes cuatro bits para cada dígito hexadecimal, por ejemplo, para convertir $0ABCD_h$ en un valor binario:

0	A	B	C	D	(Hexadecimal)
0000	1010	1011	1100	1101	(Binario)

Por comodidad, todos los valores numéricos empezarán con un dígito decimal; los valores hexadecimales terminan con la letra h y los valores binarios terminan con la letra b. La conversión de formato binario a hexadecimal es casi igual de fácil, en primer lugar se necesita asegurar que la cantidad de dígitos en el valor binario es múltiplo de 4, en caso contrario se deben agregar ceros a la izquierda del valor, por ejemplo el número binario

1011001010, la primera etapa es agregarle dos ceros a la izquierda para que contenga doce ceros: 001011001010. La siguiente etapa es separar el valor binario en grupos de cuatro bits, así: 0010 1100 1010. Finalmente se busca en la tabla de arriba los correspondientes valores hexadecimales dando como resultado, 2CA, y siguiendo la convención establecida: $02CA_h$.

El ágil manejo de los distintos sistemas numéricos es esencial para el estudio de los circuitos digitales. A pesar de estar acostumbrados al sistema decimal, el sistema binario es el más utilizado durante el diseño, prueba e implantación de circuitos, partiendo de la lógica booleana. Mientras tanto el sistema hexadecimal provee una notación más compacta, y es utilizado para la enumeración de las localidades de memoria.

Conversiones entre los sistemas Hexadecimal y Binario.

Los sistemas binario y decimal también son sistemas posicionales. Se puede decir que la única diferencia está en la base. Es muy fácil expresar esos sistemas en forma decimal. Hay que hacer notar que en el sistema hexadecimal las letras A, B, C, D, E, F representan los números del 10 al 15 en sistema decimal.

1011001 (base2) = 1*64 + 0*32 + 1*16 + 1*8 + 0*4 + 0*2 +1*1 = 89 (base 10)
10CF (base 16) = 1*4096 + 0*256 + 12*16 + 15*1 = 4303 (base 10)

A partir de los ejemplos anteriores es notoria la facilidad con que se puede convertir cualquier sistema numérico al sistema decimal. Estos métodos son algorítmos, y muchas veces la mente no funciona de esa forma: la práctica con el manejo de los sistemas permite hacer conversiones de manera más sencilla.

La conversión de un número decimal a otro sistema consiste en dividir sucesivamente el número deseado entre la base a la que se desea convertirlo; los residuos de las divisiones van conformando el número en la nueva base, desde su dígito menos significativo hasta su dígito más significativo.

Ejemplo.

Se convertirá el número 217 decimal a su equivalente binario:

217 / 2 = 108 residuo 1 (éste es el bit menos significativo)
108 / 2 = 54, residuo 0
54 / 2 = 27, residuo 0
27 / 2 = 13, residuo 1
13 / 2 = 6, residuo 1
6 / 2 = 3, residuo 0
3 / 2 = 1, residuo 1
1 / 2 = 0, residuo 1

Obteniendo así que 217 (base 10) = 1101 1001 (base 2)

De igual manera se podría convertir este número decimal a hexadecimal, pero una vez que se cuenta con su equivalente binario, hay una manera más sencilla de convertirlo: cada nibble, es decir, cada grupo de cuatro bits, representa un dígito hexadecimal. De esta forma, el número 217 decimal está representado por:

217 (base 10) = 11001 1001 (base 2) = D9 (base 16)

Es importante hacer notar la conveniencia de agrupar los números binarios en nibbles, con el fin de facilitar la visualización de su equivalente hexadecimal. Además hay que hacer la aclaración de que se puede encontrar los números hexadecimales diferenciados de los otros sistemas mediante dos etiquetas; así, se observa que él número 0xD9 y el número D9h es el número D9 hexadecimal. Pese a se utilizan las letras hexadecimales mayúsculas, éstas pueden escribirse según el gusto personal, sin embargo esto es algo que se debe establecer desde un principio.

Como ya se mencionó las computadoras se basan un sistema binario cada uno de estos dispositivos del sistema corresponde a la unidad de medida de un bit, pero las computadoras no toman directamente el código tal cual, sino que usan un sistema de codificación que permite transformar símbolo por símbolo..

Existen varios códigos binarios entre los que se tiene el Binary Coded Decimal (BCD) que en español es traducido como: Codificación Decimal en Binario. Este código utiliza 4 bits para cada símbolo:

Decimal	**BCD**
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Por ejemplo si se quiere representar 14 sería:

1	4	
0001	0100	00010100

974

9	7	4	
1001	0111	0100	100101110100

En la actualidad existe un sistema que es muy utilizado para el comercio que es el de barras, este código conocido como Universal Product Code (UPC) Código Universal de Producto, usa 7 bits para cada símbolo del sistema decimal, su tabla de conversión tiene dos grupos de codificación; una de ellas para leerse de derecha a izquierda y la otra de izquierda a derecha. Se aplica para elaboración del código de barras, aunque existen muchos códigos de barras el más conocido es el UPC.

Ejemplo de una tabla de codificación:

Dígitos del sistema decimal	**Codificación del UPC**	
	Izquierda	**Derecha**
0	0001101	1110010
1	0011001	1100110
2	0010011	1101100
3	0111101	1000010
4	0100011	1011100
5	0110001	1001110
6	0101111	1010000
7	0111011	1000100
8	0110111	1001000
9	0001011	1110100

Cada cifra en el sistema decimal se representa mediante su equivalencia en la tabla leída al revés.

Por ejemplo regresando al 14, éste se representaría como:

1	4	
1100110	1011100	14 = 11001101011100

974

9	7	4	
1110100	1000100	1011100	974 = 111010010001001011100

En el comercio se aplica el código de barras que consiste en usar dos tipos de barras de igual ancho: una barra blanca y una negra, la negra representa el "1" y la blanca el "0" Mediante combinaciones de las barras se pueden codificar a los diez dígitos del sistema decimal. Cuando en un número se combinan las barras, se pueden producir barras más anchas que otras; esa anchura representa la unión de dos o más bits. Así que lo importante en un código de barras es la anchura y no la altura. Este código se utiliza a través de un lector óptico donde se lee la información del código binario que se transmite a una computadora, la cual por medio de un sistema reconoce el código y puede llevar a cabo diversas operaciones, como el de reconocimiento del precio, dar de baja mercancías, dar de alta, etcétera

Ejemplo de estos códigos son,

7 501701 331026

7 501284 300037

CAPÍTULO 3

CONJUNTOS DE NÚMEROS Y SUS PROPIEDADES.

Notación utilizada en este capítulo:

Conjuntos de números:

N = Conjunto de los números naturales, {1, 2, 3...}. El cero no se incluye en N
Z = Conjunto de los números enteros, {...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}
Q = Conjunto de los números racionales.
II = Conjunto de los números irracionales.
R = Conjunto de los números reales.
C = Conjunto de los números complejos

Notación lógica: Cabe Aclarar que en este tema se dará la simbología usada para la estructura lógica en la matemática, pero lo que se quiere para este nivel no es ese uso sino trabajar la notación como forma la estructura sintáxica de escribir en el lenguaje matemático, por lo que nunca se estarán estableciendo estructuras lógicas.

$\ni$	=	tal que
$\therefore$	=	por tanto
{ }	=	conjunto
i. e.	=	es decir
$\in$	=	pertenece
$\notin$	=	no pertenece
∇	=	absurdo

3.1. NÚMEROS NATURALES.

3.1.1. DEFINICIÓN DEL CONJUNTO.

El conjunto de los números naturales, N, está formado por los números que permiten contar. Así de esta manera son los números que se asocian inmediatamente con la cuenta de objetos y de la posesión de los mismos.

Ejemplo: 3, 10, 1000, 23598, etcétera.

3.1.2. AXIOMAS QUE CUMPLE EL CONJUNTO.

Como conjunto, los elementos que pertenecen a los naturales reúnen diversas características, las cuales permiten determinar, si algún elemento pertenece o no a los números naturales como las características con las operaciones básicas. A dichas características se les conoce con el nombre de **PROPIEDADES** o **AXIOMAS**.

Las propiedades de los números naturales son:

1.- CERRADURA DE LA ADICIÓN

Ejemplo:

$2 \in N$, $4 \in N$, $4+2= 6 \in N$
Para todos $a, b \in N$, $a + b \in N$

El resultado de la suma debe de ser de igual naturaleza que los sumandos.

Para cualesquiera dos números naturales se tiene que con la suma se obtiene un número natural, por lo que se dice que los números naturales son cerrados bajo la suma.

- Para cualesquiera dos números naturales se tiene que con la resta, el resultado puede o N ser un número natural, por lo que se dice que los números naturales no son cerrados bajo la resta.

Por ejemplo si se toma la diferencia $2 - 4 = -2$ el cual no es un número natural.

2.- CERRADURA DEL PRODUCTO

Para todos $a, b \in N$, $ab \in N$

Ejemplo: $2 \in N$, $3 \in N$, entonces $2(3) = 6 \in N$

Para cualesquiera dos elementos que sean números naturales se tiene que su producto es un número natural.

- La división no tiene cerradura, porque hay elementos que no la cumplen, ya que el cociente no necesariamente es natural, como por ejemplo,
  $3 \div 5 = 3/5$ el cual no es un número natural.

3.- PROPIEDAD CONMUTATIVIDAD DE LA ADICIÓN

Para todos a, b$\in$ N, $a + b = b + a$
El orden en que se suman varios elementos no altera el resultado.

Ejemplo:

3, 7$\in$ N , entonces $7 + 3 = 3 + 7 = 10$

4.- PROPIEDAD CONMUTATIVIDAD DEL PRODUCTO

Para todos a, b,$\in$ N, $ab = ba$
El orden de los factores no altera el producto

Ejemplo:
3, 4$\in$ N , entonces $3(4) = 4\,(3) = 12$

5.- PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA ADICIÓN

Para todos a, b, c $\in$ N, $a + (b + c) = (a + b) + c$
Para sumar sólo se sabe hacer de dos elementos en dos, por lo que la suma es igual no importa el orden en que se sume y como se asocie.
Ejemplo:
2, 3, 7 $\in$ N , entonces $2 + (3 + 7) = (2 + 3) + 7 = 12$
$$2 + 10 \quad = \quad 5 + \quad 7 = 12$$

Observe que sólo se cambia de lugar el paréntesis, no se permutan los números.

6.- PROPIEDAD ASOCIATIVIDAD DEL PRODUCTO

Para todos a, b, c $\in$ N, $a(bc\,) = (ab)c$
Para multiplicar, nuevamente, sólo puede hacerse de dos en dos por lo que se debe escoger el orden de asociación y esto no altera al producto.
Ejemplo:

$2, 3, 4 \in N$, entonces $4\,[2\,(3)] = [4\,(2)\,]\,(3)$

$$4\,(6) = (8)\,3$$
$$24 = 24$$

- No hay asociatividad en la resta ni en la división.

Por ejemplo $(2-3)+5 = -1+5 = 4$ en cambio si muevo los paréntesis para asociar de otra manera quedaría, por citar un caso. $2-(3+5) = 2-8 = -6$ que es totalmente diferente a 4 que es el caso anterior.

7.- PROPIEDAD DEL NEUTRO MULTIPLICATIVO

El neutro multiplicativo es 1

Existe $1 \in N$, $a \in N \ni 1(a) = a$

Quiere decir que existe un elemento natural que al momento de multiplicar ese elemento por otro natural no altera a ese número.

- No existe neutro aditivo en los N porque el $0 \notin N$ y cualquier otro número que se ocurra poner en el papel del 1 resulta que adiciona en la suma elementos al otro número que se compara.

8.- PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTO CON RESPECTO A LA SUMA, QUE SE ABREVIARÁ SIMPLEMENTE COMO PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

Para todos $a, b, c \in N$, $a\,(b+c) = ab + ac$

Esta propiedad muestra la forma abreviada de una suma, esto es

$$\underbrace{(b+c)+(b+c)+\ldots+(b+c)}_{a\ \text{veces}} = \underbrace{b+b+\ldots+b}_{a\ \text{veces}} + \underbrace{c+c+\ldots+c}_{a\ \text{veces}} = ab + ac$$

Ejemplo:

$2\,(8) = 2\,(3+5) = 2\,(3) + 2\,(5) = 6 + 10 = 16$

El nombrar las propiedades de este conjunto básicamente es para poder resolver ecuaciones, pero antes que nada se verá como se reconocen en algunos ejemplos.

$2+4 = 4+2$	Se está usando la propiedad conmutativa de

	la adición.
$4(1 + 8) = 4(1) + 4(8)$	Propiedad distributividad.
$3(2) = 6$	Propiedad de cerradura del producto.
$5(3) = 3(5)$	Propiedad conmutatividad del producto.

Resolución de ecuaciones en los naturales

Ejercicio: Sean $y, z, n \in N$

1) $y + 3 = 8$
Para poder resolver este planteamiento, claramente se ve que el número que se necesita es 5 el cual pertenece a los naturales, entonces $y = 5$

2) $2z + 3 = 15$
Nuevamente para este caso el número natural que se requiere para que este planteamiento sea una igualdad es $z = 6$.

3) $3(n + 2) = n + 7$
Para atacar este problema se requiere pasar a una ecuación que sea equivalente, por lo que se hace necesario aplicar la propiedad distributividad:

$$\begin{aligned} 3n + 3(2) &= n + 7 \\ 3n + 6 &= n + 7 \\ 3n + 6 &= n + 6 + 1 \end{aligned}$$

Lo que se necesita es que $3n = n + 1$, lo cual es imposible en el conjunto de los números naturales, ya que si se piensa en $n = 1$, esto daría como resultado 3 lo que es igual a 2. En este caso se dirá que esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números naturales, lo cual indica que existen otros números que pueden solucionar problemas que surgen en la resolución de ecuaciones.

3.2. NÚMEROS ENTEROS.

3.2.1. DEFINICIÓN DEL CONJUNTO.

Los números enteros están formados por los números naturales, lo números naturales con signo negativo a los que se les llamará números negativos y el cero; el conjunto de números enteros se denota como $Z = \{...-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...\}$, observe que $N \subset Z$.

3.2.2. AXIOMAS QUE CUMPLE EL CONJUNTO.

Al igual que los números naturales los números enteros cumplen con ciertas características, las que se indican a continuación.

Propiedades de los números enteros:

1.- CERRADURA DE LA ADICIÓN

Para todos $a, b \in Z$, $a + b \in Z$
El resultado de la suma debe de ser de igual naturaleza que los sumandos.

Ejemplo: $-3 - 5 = -8 \in Z$
$-3 + 5 = 2 \in Z$

2.- CERRADURA DEL PRODUCTO

Para todos $a, b \in Z$, $ab \in Z$
Para este caso significa que al multiplicar dos números enteros cualesquiera siempre su producto es un número entero.

Ejemplo: $(-2)(6) = -12 \in Z$

3- CERRADURA DE LA DIFERENCIA

Para todos $a, b \in Z$, $a - b \in Z$
Dados dos números enteros cualesquiera su diferencia siempre es un número entero.

Ejemplo: $5 - 3 = 2 \in Z$
$-3 - (4) = -3 - 4 = -7 \in Z$

4.- CONMUTATIVIDAD DE LA ADICIÓN

Para todos $a, b \in Z$, $a + b = b + a$

El orden de la suma en el conjunto de los números enteros no altera al resultado.

5.- CONMUTATIVIDAD DEL PRODUCTO-

$\forall$ a, b $\in$ Z, ab = ba

El orden en que se múltiple en el conjunto de los números enteros no altera al producto.

6.-ASOCIATIVIDAD DE LA ADICIÓN

Para todos a, b $\in$ Z, a + (b + c) = (a + b) + c

Para sumar tres elementos se debe hacer de dos en dos y esta propiedad indica que puede realizarse la suma en el orden que sea.

7.- ASOCIATIVIDAD DEL PRODUCTO.

Para todos a, b, c$\in$Z, a (bc) = (ab) c

Lo mismo que en conjunto de los números naturales, se tiene que para multiplicar más de dos números enteros, esto debe realizarse de dos en dos en el orden que sea.

8.- NEUTRO ADITIVO

Se debe pensar en un elemento entero que al momento de sumarse a otro número entero no altere a este número, así que el único posible candidato de cumplir esto es el cero.

El neutro aditivo es el 0.

Existe 0$\in$Z, a$\in$Z $\ni$ a + 0 = 0 + a = a

Ejemplo: 4 + 0 = 4

-7 + 0 = 7

9.- NEUTRO MULTIPLICATIVO

Aquí hay que sugerir lo mismo que con el neutro anterior, un número entero que al multiplicarse por otro número entero no altere a ese número.

Existe 1$\in$Z, a$\in$Z $\ni$ a (1) = 1(a) = a

10.- PROPIEDAD DISTRIBUTIVIDAD

Para todos a, b, c$\in$Z, a (b + c) = ab + ac
Al igual que la propiedad en los naturales esta es la forma abreviada de la suma de dos números repetidas, en este caso a veces.

11.-INVERSO ADITIVO

Esta propiedad lo que indica es que debe de existir un número entero que al ser sumado con otro número entero, la suma debe de dar cero.

Para todos a$\in$Z, $\exists$ -a$\in$Z $\ni$ a + (-a) = -a + a = 0

Ejemplo: 2$\in$Z, - 2$\in$Z $\ni$ 2 + (-2) = 0

-4$\in$Z, 4$\in$Z $\ni$ -4 + 4 = 0.

Nuevamente el ver este conjunto es por la necesidad de resolución de ecuaciones que estén en este conjunto.

3x + 10 = 7

Para resolverla se requiere de un elemento entero que multiplicado por 3 y sumado con 10 de 7, este número es –1.

Habrá otras ecuaciones que aún planteada con enteros no tenga solución en este conjunto, debido a que no se tienen elementos que la resuelvan, por ejemplo.

2(k+3) = 1

Aplicando la propiedad distributividad:

2(k) + 2(3) = 1

Cerrado los productos queda:

2k + 6 = 1
2k + 5 + 1 = 1

Equivalentemente se requiere que. 2k +5 = 0
Para resolver esta última expresión se necesita un entero que multiplicado por 2 de –5, para que al sumarlo con 5 de cero.
Si se procede entonces con los primeros negativos, leyéndolos de izquierda a derecha da:

$2(-1) + 5 = -2 + 5$
$= 3$ el cual es diferente de cero

$2(-2) + 5 = -4 + 5$
$= 1$ el cual es diferente de cero

$2(-3) + 5 = -6 + 5$
$= -1$ el cual es diferente de cero

Si se continúa con la comparación resulta que ningún entero resuelve esa ecuación. Por lo que es necesario otro tipo de números para resolverla.

3.3. NÚMEROS RACIONALES.

3.3.1. DEFINICIÓN DEL CONJUNTO.

Los números racionales se definen como el conjunto de números formados por todos aquéllos que se puedan representar como un número fraccionario, es decir, un cociente formado por dos números enteros, donde el denominador debe de ser diferente de cero.

Los números racionales se definen como: $Q = \left\{ x / x = \frac{p}{q},\ \text{donde}\ p, q \in Z;\ q \neq 0 \right\}$

Pensando en los conjuntos N y Z, ¿Estarán estos conjuntos contenidos en Q?, ¿Se podrá representar a los elementos de N y de Z como el resultado de un cociente?, por supuesto, ya que todo número natural o entero es el resultado de ese número entre el uno.

El anterior comentario, permite entonces pensar en las propiedades que el conjunto de números racionales posee, a que se relaciona a continuación.

3.3.2. AXIOMAS QUE CUMPLE EL CONJUNTO DE NÚMEROS RACIONALES

1.- CERRADURA DE LA ADICIÓN

Para todos $\frac{p}{q}, \frac{r}{t} \in Q$, $q \neq 0, t \neq 0$ Se define la suma como: $\frac{p}{q} + \frac{r}{t} = \frac{pt + rq}{qt}$ el numerador es un entero ya que por los axiomas de los enteros el producto de enteros es entero y la suma lo es también, analizando lo mismo para el denominador se tiene que tanto numerador como denominador son números enteros, por tanto, la suma de racionales es racional.

$\therefore \quad \frac{p}{q}+\frac{r}{t}\in Q$

Ejemplo:

$$\frac{7}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7(4)+3(1)}{3(4)}=\frac{28+3}{12}=\frac{31}{12}$$

2.- CERRADURA DE LA SUSTRACCIÓN:

Para todos $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{t}\in Q$, $q\neq 0, t\neq 0$ Se define la diferencia como: $\frac{p}{q}-\frac{r}{t}=\frac{pt-rq}{qt}$

Analizando nuevamente numerador y denominador, se puede ver que en el numerador se está definiendo a un número entero ya que está formado por la diferencia de números enteros, la cual es un número entero, por los axiomas antes, vistos; y el denominador es número un entero ya que se forma por el producto de números enteros. $\therefore \quad \frac{p}{q}-\frac{r}{t}\in Q$

Ejemplo:

$$\frac{3}{4}-\frac{8}{5}=\frac{3(5)-8(4)}{4(5)}=\frac{15-32}{20}=-\frac{17}{20}$$

3.- CERRADURA DEL PRODUCTO

Para todos $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{t}\in Q$, $q\neq 0, t\neq 0$ Se define el producto como: $\frac{p}{q}\left(\frac{r}{t}\right)=\frac{pr}{qt}$

Como numerador y denominador están formados por productos de números enteros, se tiene que cada uno es un número entero, por tanto, cumple con la definición de racional.

$\therefore \quad \frac{p}{q}\left(\frac{r}{t}\right)\in Q$

Ejemplo:

$$\frac{3}{5}\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{3(-2)}{5(3)}=-\frac{6}{15}=-\frac{2}{5}$$

...

4.- CERRADURA DEL COCIENTE

Para todos $\frac{p}{q}, \frac{r}{t} \in Q$, $q \neq 0, t \neq 0$ Se define el producto como: $\frac{p}{q} \div \frac{r}{t} = \frac{pt}{qr}$

El cociente está definido a través de productos de enteros, tanto en el numerador como en el denominador, por lo que el cociente es un número racional. $\therefore \quad \frac{p}{q} \div \frac{r}{t} \in Q$

Ejemplo:

$$\frac{20}{9} \div \frac{2}{5} = \frac{20(5)}{2(9)} = \frac{100}{18} = \frac{50}{9}$$

5.- CONMUTATIVIDAD DE LA ADICION

Para todos $\frac{p}{q}, \frac{r}{t} \in Q$, entonces $\frac{p}{q} + \frac{r}{t} = \frac{r}{t} + \frac{p}{q}$

Como en los casos de los dos conjuntos anteriores, naturales y enteros se tiene que el orden de los sumandos no altera la suma.

6.- CONMUTATIVIDAD DEL PRODUCTO

Para todos $\frac{p}{q}, \frac{r}{t} \in Q$, entonces $\frac{p}{q}\left(\frac{r}{t}\right) = \frac{r}{t}\left(\frac{p}{q}\right)$

7.- ASOCIATIVIDAD DE LA ADICION

Para todos $\frac{p}{q}, \frac{r}{t}, \frac{s}{w} \in Q$, entonces $\frac{p}{q}\left(\frac{r}{t} + \frac{s}{w}\right) = \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{t}\right) + \frac{s}{w}$

8.- ASOCIATIVIDAD DEL PRODUCTO

Para todos $\frac{p}{q}, \frac{r}{t}, \frac{s}{w} \in Q$, entonces $\frac{p}{q}\left(\frac{r}{t}\left[\frac{s}{w}\right]\right) = \left(\frac{p}{q}\left[\frac{r}{t}\right]\right)\frac{s}{w}$

9.- DISTRIBUTIVIDAD (producto sobre suma y resta)

Para todos $\frac{p}{q}, \frac{r}{t}, \frac{s}{w} \in Q$, entonces $\frac{p}{q}\left(\frac{r}{t}+\frac{s}{w}\right)=\frac{pr}{qt}+\frac{ps}{qw}$

Ejemplo:

$$\frac{1}{4}\left(3+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}(3)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{6+1}{8}=\frac{7}{8}$$

10.- NEUTRO ADITIVO

Para todos $\frac{p}{q} \in Q$, existe $0 \in Q \ni \frac{p}{q}+0=\frac{p}{q}$

11.- NEUTRO MULTIPLICATIVO

Para todos $\frac{p}{q} \in Q, \exists\ 1 \in Q \ni \frac{p}{q}(1)=\frac{p}{q}$

12.- INVERSO ADITIVO

Para toda $\frac{p}{q} \in Q \ \exists\ -\frac{p}{q} \in Q \ni \frac{p}{q}+\left(-\frac{p}{q}\right)=0$

Ejemplo

$4 \in Q$, existe $-4 \in Q \ni 4+(-4)=4-4=0$

$-\frac{7}{2} \in Q$, existe $\frac{7}{2} \in Q \ni \frac{-7}{2}+\frac{7}{2}=\frac{-7+7}{2}=\frac{0}{2}=0$

13.- INVERSO MULTIPLICATIVO

Para todos $\frac{p}{q} \in Q$, existe $\frac{1}{\frac{p}{q}}=\frac{q}{p} \in Q \ni \frac{p}{q}\left(\frac{q}{p}\right)=1$

Es importante hacer la aclaración que el cero no tiene inverso multiplicativo. ya que no se tiene expresión para $\frac{1}{0}$.

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} \in Q, \quad \text{existe } \frac{4}{3} \in Q \ \ni \ \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3(4)}{4(3)} = \frac{12}{12} = 1$$

Como puede verse con los números racionales se tienen las propiedades que ya tenían los naturales y los enteros y aumentan la cerradura del cociente y el inverso multiplicativo. En conclusión, se tiene: $N \subset Z \subset Q$

Algunas características comunes de los números se estudiarán en este conjunto de los racionales, pero se aplicará inmediatamente en los naturales o enteros.

Así, en este caso, se mencionarán a los ***Números primos***, éstos son los números que sólo pueden dividirse entre sí mismos y la unidad, es importante saber qué es un número primo, porque cualquier natural se puede factorizar por el producto de números primos.

3.3.3. REPASO DE OPERACIONES DE LOS NÚMEROS RACIONALES Y SU DESCOMPOSICIÓN EN PRIMOS.

3.3.3.1 DESCOMPOSICIÓN EN PRIMOS:

Como se han definido a los primos se puede determinar a los primeros primos: 2, 3, 5,7, 11, 13, ... Para construir los primos comprendidos entre un cierto número, Eratóstenes creó un método, llamado criba[1]. El método se explicará para un caso concreto. Por ejemplo supóngase que se desea saber cuáles son los primos entre 1 y 30. Lo que hay que hacer es lo siguiente:

- Escribir todos los números del 1 al 30.
- Tachar los números que son múltiplos del primer primo (2)
- Tachar los números que son múltiplos del segundo primo (3)
- Tachar los múltiplos del tercer primo (5)
- Continuar así hasta que el primer múltiplo de un primo supere 30.

[1] El nombre de criba se refiere precisamente a la forma del almacen de granos.

♦ Los números que quedaron sin tachar son los primos.

Explícitamente sería:

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

Por lo que los primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29
Para descomponer cualquier natural en sus factores primos, se seguirán las reglas de la división y siempre empezando, por comodidad con el número dos, luego con el tres, etcétera.

$8 = (2)(2)(2) = 2^3$
$32 = (2)(2)(2)(2)(2) = 2^5$
$6 = 2(3)$

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 265 & 5 \\ 53 & 53 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1242 & 2 \\ 621 & 3 \\ 207 & 3 \\ 69 & 3 \\ 23 & 3 \end{array}$$

$144 = 2^3(3^2)$ $\qquad 265 = 5(53)$ $\qquad 1242 = 2(3^4)$

3.3.3.2. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO Y MÁXIMO COMÚN DIVISOR.

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de a, b, c, es el múltiplo más pequeño de a, b y c; al cual dividen a, b, y c. Está formado de todos los factores que integran la descomposición en primos con el exponente mayor.

Ejemplo = m. c. m. de 36, 8, 121 y 15

36	8	121	15	2	
18	4	121	15	2	2^3
9	2	121	15	2	
9	2	121	15	3	3^2
3		121	5	3	
1		121	5	5	5
		121	1	11	11^2
		11		11	
		1			

$36 = (2^2)3^2$; $8 = 2^3$; $121 = 11^2$; $15 = 3(5)$

Por lo que el m.c.m. de 36, 8,121 y 15 es $2^3(3^2)(11^2)(5) = 8(9)(121)(5) = 40(9)(121) = (360)(121) = 43560$

El máximo común divisor de a, b, c, es el número más grande que divide a a, b, y c simultáneamente. No todas las combinaciones de números lo tienen. Se obtiene tomando los elementos comunes de grado mayor, en todos los números comparados.

Ejemplo: Halle el m. c. d. de 32, 48 y 64

32	48	64	2
16	24	32	2
8	12	16	2
4	6	8	2
2	3	4	2
1	3	2	2
	3	1	3
	1		

Se observa $32 = 2^5$; $48 = 2^4(3)$ y $64 = 2^6$

Por lo que el m.c.d. = 2^4 (intersección de las descomposiciones factoriales de los números planteados, esto haciendo una extensión del concepto de intersección de conjuntos).

En los siguientes ejercicios se usará el mínimo común múltiplo, para resolver algunas estructuras aritméticas.

1) $3\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3(3)}{3(5)} = \frac{3}{5}$

2) $$9\left(\frac{2}{3}+\frac{14}{9}-\left[\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right]\right)=9\left(\frac{6+14}{9}-\left[\frac{3-9}{12}\right]\right)$$
$$=9\left(\frac{20}{9}+\frac{6}{12}\right)$$
$$=9\left(\frac{20}{9}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=9\left(\frac{40+9}{18}\right)$$
$$=9\left(\frac{49}{18}\right)$$
$$=\frac{49}{2}$$

Puede observarse que el m.c.m. entre 3 y 9 es 9; y entre 6 y 4 es 12

3) $$\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{6}-\frac{5}{18}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{4+3-5}{18}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{2}{18}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{18}$$

Para este caso el M.C.M. entre 9, 6 y 18 es 18

4) $$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{30}+6\right)=\left(\frac{8-3}{12}\right)\left(\frac{1+180}{30}\right)$$
$$=\left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{181}{30}\right)$$
$$=\frac{181}{12(6)}$$
$$=\frac{181}{72}$$

5) $\frac{11}{12} \div \frac{1}{7} = \frac{11(7)}{12(1)} = \frac{77}{12}$

6) $$\left(3+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{17}{3}\right)\div\frac{1}{6}=\left(\frac{9+2}{3}\right)\left(\frac{17}{3}\right)\div\frac{1}{6}$$
$$=\left(\frac{11}{3}\right)\left(\frac{17}{3}\right)\div\frac{1}{6}$$
$$=\frac{187}{9}\div\frac{1}{6}$$
$$=\frac{187(6)}{9}$$
$$=\frac{2(187)}{3}$$
$$=\frac{374}{3}$$

3.3.4. NÚMEROS DECIMALES.

♣ **Conversión de expresiones racionales a decimales:**

Un número decimal se obtiene de un número racional escrito en forma de cociente si se divide el numerador entre el denominador. Así por ejemplo

$\frac{3}{4} = 0.75$

$\frac{1}{8} = 0.125$

$\frac{13}{4} = 3.25$

$\frac{1}{3} = 0.\overline{33}$

$$\frac{2}{3} = 0.\overline{66}$$

$$\frac{45}{21} = 2.142857\overline{142857}$$

Se recuerda que la raya encima del número o de un conjunto de números, significa ese número o ese conjunto de números se repiten infinitamente.

♣ Conversión de una expresión decimal a una racional:

Existen dos tipos de números decimales de longitud finitas(decimales finitos) como 3.21, 0.78241, -312.422 que tienen las característica de que la expresión decimal termina, pero hay otros que tienen una infinidad de decimales, pero que repiten cierto número o conjunto de números por siempre como: 0.33333... , 0.1212121212... , 3.1115151515... ,14.32105555... .

Al número o números repetidos se les llama longitud del período del decimal:

La pregunta natural será si existen números con decimales infinitos y que no se les pueda establecer un período. La respuesta es si, y estos números tendrán la característica que no pueden ser expresados como el cociente de dos números naturales, por lo que no pueden ser racionales y ellos solos formarán un nuevo conjunto que se denominará el conjunto de los números irracionales (que no son racionales).

De esta manera se puede concluir que:

Q Números Racionales son los decimales finitos o los decimales infinitos periódicos.

II Números Irracionales son los decimales infinitos no periódicos.

a) Decimales finitos:

Un número decimal finito puede ser convertido a un número escrito en forma de cociente. al expresarse como el número decimal multiplicado por 10 elevado a la potencia de tantas posiciones decimales tenga el número y dividido entre esa potencia.

Ejemplos:

$$3.311 = \frac{3311}{1000}$$

$$7.4 = \frac{74}{10}$$

$$-11.8321 = -\frac{118321}{10000}$$

b) Decimales periódicos

Para convertir decimales periódicos a números expresados en forma de cocient. proceda de la siguiente manera.

1) Fíjese en el período del número decimal.

2) Iguale a una variable el número decimal.

3) Multiplique esa ecuación por el múltiplo de 10 correspondiente a 10 elevado a la potencia del período.

4) Reste del resultado anterior, la primera ecuación.

5) Despeje la variable.

6) Si es necesario elimine el punto decimal recorriéndolo del numerador y agregando tantos ceros como sea necesario.

Ejemplos:

1) $x = 0.\overline{5252}$

Como puede verse el conjunto de números que forman el período es 5 y dos, es decir, el período es de dos números, por lo que se multiplicará a x por 100

$$\begin{aligned} 100x &= 52.52\overline{52} \\ -\quad x &= -\ 0.\overline{5252} \\ \hline 99x &= 52 \\ x &= \frac{52}{99} \end{aligned}$$

2) $$x = 1.\overline{121}$$

$$1000x = 1121.\overline{121}$$

$$- \quad x = - \ 1.\overline{121}$$

$$999x = 1120$$

$$x = \frac{1120}{999}$$

Como puede apreciarse el período consta de 3 números, por lo que hay que multiplicar por 1000.

3) $x = 3.\overline{0202}$

$$100x = 302.\overline{0202}$$

$$- \quad x = - \ 3.\overline{0202}$$

$$99x = 299.0$$

$$x = \frac{299}{99}$$

Aquí el período es de dos números, así que se multiplica por 100.

4) $$x = 0.\overline{83348334}$$

$$10000x = 8334.\overline{83348334}$$

$$-x = - \ 0.\overline{83348334}$$

$$9999x = 8334.0$$

$$x = \frac{8334}{9999}$$

El período correspondiente es de 4 números, por lo que hay que multiplicar por 10,000.

5) $$x = 62.0\overline{1414}$$

$$100x = 6201.4\overline{1414}$$

$$-x = -62.01414$$

$$99x = 6138.4$$

$$x = \frac{3138.4}{99}$$

$$x = \frac{31384}{990}$$

El período es de dos números, por lo que hay que multiplicar por 100.

Observe que todavía existe una parte decimal por lo que, en este caso, se multiplica nuevamente por 10

$$x = \frac{15692}{495}$$

tanto al numerador como al denominador y lo que se obtiene es quitar la parte decimal.

6)

$$x = 333.781\overline{832832}$$
$$1000x = 333781.\overline{832832}$$
$$-x = -\ 333.781\overline{832832}$$
$$999x = 333448.051$$
$$999000x = 333448051$$
$$x = \frac{333448051}{999000}$$

El período consta de tres números, así que la primera parte se multiplica por 1000 y al diferenciar por el original todavía quedan decimales (3), por lo que hay que multiplicar, tanto numerador como denominador por 1000 y se cancela la parte decimal sobrante.

7)

$$x = 1.0057\overline{247}$$
$$1000x = 1005.7\overline{247}$$
$$-x = -\ 1.0057\overline{247}$$
$$999x = 1004.719$$
$$999000x = 1004719$$
$$x = \frac{1004719}{999000}$$

3.3.5. PROPIEDAD DE DENSIDAD

La propiedad de densidad establece que entre dos números racionales siempre existe otro racional.

$\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, entre ellos está por ejemplo $\frac{2}{4}$ que es el punto medio.

1) $\dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}{2}=\dfrac{\dfrac{4}{4}}{2}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{4}$

2) $\dfrac{\dfrac{7}{15}+\dfrac{41}{9}}{2}=\dfrac{\dfrac{21+205}{45}}{2}=\dfrac{\dfrac{226}{45}}{2}=\dfrac{226}{2(45)}=\dfrac{113}{45}$

Como puede verse en este ejemplo el punto medio es obtenido con: $PM=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ donde x_1 y x_2 representan los puntos entremos que se dan.

Encontrar los puntos medios de los racionales que se enuncian en cada inciso.

a) Entre $\dfrac{1}{9}$ y $\dfrac{11}{3}$

$$PM=\dfrac{\dfrac{1}{9}+\dfrac{11}{3}}{2}=\dfrac{\dfrac{1+33}{9}}{2}=\dfrac{\dfrac{34}{9}}{2}=\dfrac{34}{2(9)}=\dfrac{17}{9}$$

b) Entre $\dfrac{1}{11}$ y $\dfrac{15}{2}$

$$PM=\dfrac{\dfrac{1}{11}+\dfrac{15}{2}}{2}=\dfrac{\dfrac{2+165}{22}}{2}=\dfrac{\dfrac{167}{22}}{2}=\dfrac{167}{2(22)}=\dfrac{167}{44}$$

c) Entre $\dfrac{3}{7}$ y 7

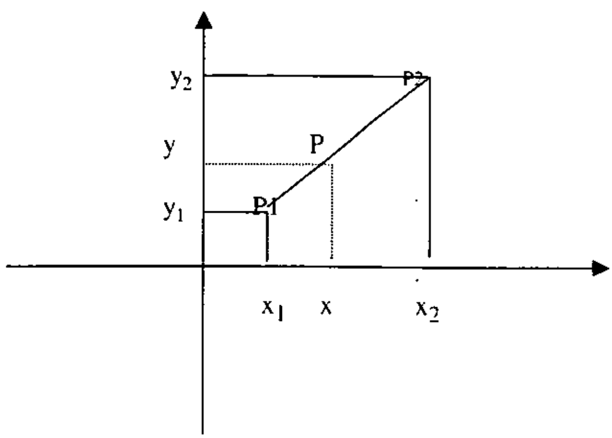
$$PM=\dfrac{\dfrac{3}{7}+7}{2}=\dfrac{\dfrac{3+49}{7}}{2}=\dfrac{\dfrac{51}{7}}{2}=\dfrac{51}{14}$$

Sin embargo, uno quisiera encontrar racionales entre dos dados, no necesariamente por puntos medios, sino cualquier división, entonces para calcularlos se utilizará el siguiente teorema.

Teorema: *Si P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) son los extremos de un segmento P_1P_2, las coordenadas (x, y) de un punto P que divide a este segmento en la razón dada* $r = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$.

son :

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} \qquad \text{con } r \neq -1$$



Ejemplos.

a) Encontrar el primer tercio entre 3 y 9

Lo que se quiere entonces es dividir en tercios y encontrar el valor del primero de estas divisiones, por lo que la razón correspondiente se calcula de la siguiente manera:

$$r = \frac{\text{Lo que se ha avanzado}}{\text{Lo que falta por avanzar}} = \frac{1}{2}$$

El numerador cubre las unidades de las divisiones que se han avanzado para llegar al punto solicitado, mientras que el denominador mide lo que falta, en unidades, por avanzar para cubrir el final del segmento

Utilizando las ecuaciones dadas en el teorema para encontrar el primer tercio se tiene:

$$\frac{3+\frac{1}{2}(9)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{3+\frac{9}{2}}{\frac{2+1}{2}}=\frac{\frac{6+9}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{15}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{15}{3}=5$$

Así que el primer tercio entre 3 y 9 es 5.

Si ahora se desea encontrar el quinto octavo, se tiene que $r=\frac{5}{3}$ y por tanto el punto buscado es

$$\frac{3+\frac{5}{3}(9)}{1+\frac{5}{3}}=\frac{3+5(3)}{\frac{3+5}{3}}=\frac{3+15}{\frac{8}{3}}=\frac{18}{\frac{8}{3}}=\frac{3(18)}{8}=\frac{3(9)}{4}=\frac{27}{4}$$

El valor buscado es $\frac{27}{4}$

b) Si se desea por ejemplo encontrar el primer cuarto, el tercer séptimo y el segundo quinto entre 1 y 8/5, entonces:

Primer cuarto(PC) entonces $r=\frac{1}{3}$ $PC=\frac{1+\frac{1}{3}\left(\frac{8}{5}\right)}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1+\frac{8}{15}}{\frac{3+1}{3}}$

$$=\frac{\frac{15+8}{15}}{\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{\frac{23}{15}}{\frac{4}{3}}$$

$$=\frac{3(23)}{15(4)}$$

$$=\frac{23}{20}$$

Tercer séptimo(TS) entonces $r = \frac{3}{4}$ $TS = \dfrac{1+\frac{3}{4}\left(\frac{8}{5}\right)}{1+\frac{3}{4}} = \dfrac{1+\frac{3(2)}{5}}{\frac{4+3}{4}}$

$$= \frac{1+\frac{6}{5}}{\frac{7}{4}}$$

$$= \frac{\frac{5+6}{5}}{\frac{7}{4}}$$

$$= \frac{\frac{11}{5}}{\frac{7}{4}}$$

$$= \frac{11(4)}{7(5)}$$

$$= \frac{44}{35}$$

Segundo quinto (SQ) entonces $r = \frac{2}{3}$ $SQ = \dfrac{1+\frac{2}{3}\left(\frac{8}{5}\right)}{1+\frac{2}{3}} = \dfrac{1+\frac{16}{15}}{\frac{5}{3}}$

$$= \frac{\frac{31}{15}}{\frac{5}{3}}$$

$$= \frac{3(31)}{15(5)}$$

$$= \frac{31}{25}$$

3.3.6. REPASO EN EL MANEJO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS CON COEFICIENTES ENTEROS Y RACIONALES.

Para el desarrollo de las operaciones con expresiones ...gebraicas se deben tomar en cuenta las siguientes indicaciones:

a) Si es posible simplificar las fracciones dadas.

b) Si las fracciones son de distinto denominador, en : caso de la suma o de la resta, utilizar el mínimo común múltiplo.

c) Efectuar las multiplicaciones derivadas de las operaciones.

d) Reducir términos semejantes.

e) Si es posible simplificar la expresión lo más que se pueda.

f) En el caso de la multiplicación y de la división exprese cada término, en sus factores, para que se pueda simplificar más fácilmente.

I) SUMA DE FRACCIONES.

Ejemplo:

Sume las siguientes expresiones $\frac{3}{2a}$ y $\frac{a-2}{6a^2}$ No es posible simplificar estas fracciones, tal cual si no se operan como racionales, encontrando el mínimo común múltiplo entre los denominadores, en este caso $6a^2$, hay que recordar que éste se forma por el mínimo común múltiplo de los coeficientes numéricos y todas las letras con grado mayor de las expresiones.

$$\frac{3}{2a}+\frac{a-2}{6a^2}=\frac{3(3a)}{6a^2}+\frac{a-2}{6a^2}=\frac{9a}{6a^2}+\frac{a-2}{6a^2}$$

Sumando los numeradores: $\frac{9a+a-2}{6a^2}=\frac{10a-2}{6a^2}$

Realice las siguientes sumas.

a) $$\frac{x-2}{4}+\frac{3x+2}{6}=\frac{3(x-2)+2(3x+2)}{12}$$
$$=\frac{3x-6+6x+4}{12}$$
$$=\frac{9x-2}{12}$$

b) $$\frac{a+3b}{3ab}+\frac{a^2b-4ab^2}{5a^2b^2}=\frac{5ab(a+3b)+3(a^2b-4ab^2)}{15a^2b^2}$$
$$=\frac{5a^2b+15ab^2+3a^2b-12ab^2}{15a^2b^2}$$
$$=\frac{8a^2b+3ab^2}{15a^2b^2}$$
$$=\frac{ab(8a+3b)}{15a^2b^2}$$
$$=\frac{8a+3b}{15ab}$$

c) $$\frac{2a-3}{3a}+\frac{3x+2}{10x}+\frac{x-a}{5ax}=\frac{10x(2a-3)+3a(3x+2)+6(x-a)}{30ax}$$
$$=\frac{20ax-30x+9ax+6a+6x-6a}{30ax}$$
$$=\frac{29ax-24x}{30ax}$$
$$=\frac{x(29a-24)}{30ax}$$
$$=\frac{29a-24}{30a}$$

II) RESTA DE FRACCIONES.

Ejemplo

Reste las siguientes expresiones $\quad \frac{a+2b}{3a} \quad \frac{4ab^2-3}{6a^2b}$

El mcd de $3a$ y de $6a^2b$ es $6a^2b$, por lo tanto

$$\frac{a+2b}{3a}-\frac{4ab^2-3}{6a^2b}=\frac{2ab(a+2b)-(4ab^2-3)}{6a^2b}$$
$$=\frac{2a^2b+4ab^2-4ab^2+3}{6a^2b}$$
$$=\frac{2a^2b+3}{6a^2b}$$

Realice las siguientes restas:

1) $$\frac{a+5b}{a^2}-\frac{b-3}{ab}=\frac{b(a+5b)-a(b-3)}{a^2b}$$
$$=\frac{ab+5b^2-ab+3a}{a^2b}$$
$$=\frac{5b^2+3a}{a^2b}$$

2) $$\frac{y-2x}{20x}-\frac{x-3y}{24y}=\frac{6(y-2x)-5(x-3y)}{120xy}$$
$$=\frac{6y-12x-5x+15y}{120xy}$$
$$=\frac{21y-17x}{120xy}$$

3) $$\frac{3-x}{5x}-\frac{x^2+2x+3}{3x^2}=\frac{3x(3-x)-5(x^2+2x+3)}{15x^2}$$
$$=\frac{9x-3x^2-5x^2-10x-15}{15x^2}$$

$$= \frac{-8x^2 - x - 15}{15x^2}$$

III) MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES.

Multiplique $\frac{2a}{3b^3}$, $\frac{3b^2}{4x}$, $\frac{x^2}{2a^2}$

$$\left(\frac{2a}{3b^3}\right)\left(\frac{3b^2}{4x}\right)\left(\frac{x^2}{2a^2}\right) = \frac{2(3)abbxx}{2(3)(4)bbbxaa}$$

$$= \frac{x}{4ba}$$

Realice las siguientes multiplicaciones

a) $$\frac{xy - 2y^2}{x^2 + xy}\left(\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - 2xy}\right) = \frac{y(x - 2y)}{x(x + y)}\left(\frac{(x + y)^2}{x(x - 2y)}\right)$$

$$= \frac{y(x - 2y)(x + y)(x + y)}{xx(x + y)(x - 2y)}$$

$$= \frac{y(x + y)}{x^2}$$

b) $$\frac{(a + 2b)^2}{3}\left(\frac{2(a + 2b)}{(a + 2b)^2}\right) = \frac{2(a + 2b)^2(a + 2b)}{3(a + 2b)^2}$$

$$= \frac{2(a + 2b)}{3}$$

c) $$\frac{x(x^3 + 27)}{x(x^2 - x + 1)}\left(\frac{x(x^3 + 1)}{x^2(x - 3)^2}\right)\left(\frac{x^2}{x(x - 3)^2}\right) = \frac{x^5(x^3 + 27)(x^3 + 1)}{x^3(x^2 - x + 1)(x - 3)^4}$$

$$= \frac{x^2(x^3 + 27)(x^3 + 1)}{(x^2 - x + 1)(x - 3)^4}$$

IV) DIVISIÓN DE FRACCIONES.

Para llevar acabo la división entre dos expresiones algebraicas fraccionarias, invierta el divisor y haga la multiplicación.

Divida $\frac{4a^2}{3b^2}$ entre $\frac{2ax}{9b^3}$

$$\frac{4a^2}{3b^2} \div \frac{2ax}{9b^3} = \frac{4a^2(9b^3)}{2ax(3b^2)}$$
$$= \frac{2(3)ab}{x}$$
$$= \frac{6ab}{x}$$

Realice las siguientes divisiones:

a) $$\frac{3a^2}{a^2+6ab+9b^2} \div \frac{5a^3}{ab(a+3b)} = \frac{(3a^2)(ab(a+3b))}{(5a^3)(a^2+6ab+9b^2)}$$
$$= \frac{3b(a+3b)}{5(a^2+6ab+9b^2)}$$
$$= \frac{3ab+9b^2}{5a^2+30ab+45b^2}$$

b) $$\frac{x^3y}{4(5x+1)} \div \frac{xy}{(20+x)(5x+1)} = \frac{x^3y(20+x)(5x+1)}{xy4(5x+1)}$$
$$= \frac{x^2(20+x)}{4}$$

c) $$\frac{5xy(x+1)}{2x^2y} \div \frac{4xy(2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{5xy(x+1)(x+1)^2}{4xy(2x+1)2x^2y}$$

$$= \frac{5(x+1)^3}{2x^2y(2x+1)}$$

3.4. IRRACIONALES.

3.4.1. DEFINICIÓN DEL CONJUNTO.

II.- Números irracionales :

Son aquellos números decimales que no pueden escribirse de la forma $\frac{p}{q}$ donde p y q son enteros, es decir, que no son números racionales.

Ejemplos :

$\sqrt{\text{No. primo}}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $e = 2.7182818\ldots$, $\pi = 3.1415\ldots..$, $0.02002000200002\ldots$

3.5. REALES.

3.5.1 DEFINICIÓN DEL CONJUNTO.

Los números reales $\Re$ son el resultado de la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales, en escritura notacional se escribe así:

$$\Re = Q \cup II$$

Observe que los conjuntos de números se relacionan de la siguiente forma:

$$N \subset Z \subset Q \subset \Re$$

Por tanto el conjunto de los reales heredan las propiedades de los naturales, enteros y racionales..

Observe también que $II \subset \Re$.

Ejercicio de clasificación de los números

El objetivo es el de clasificar el número sègún al conjunto donde pertenece.

a) $-2 \in Z, Q, \Re$

b) $1 \in N, Z, Q, \Re$

c) $0 \in Z, Q, \Re$

d) $\frac{3}{2} \in Q, \Re$

e) $-\sqrt{21}$ $\quad 21 \in , \Re$

f) $\sqrt{11} \in \text{II}, \Re$

g) $-\frac{14}{4} \in Q, \Re$

h) $\sqrt{16} \in Z, Q, \Re$

3.5.2. AXIOMAS QUE CUMPLE EL CONJUNTO DE NÚMEROS REALES.

Propiedades de $\Re$

1.- CERRADURA DE LA ADICIÓN

Para todos $x, y \in \Re$, entonces $x + y \in \Re$

2.- CERRADURA DE LA SUSTRACCIÓN.

Para todos $x, y \in \Re$, entonces $x - y \in \Re$

3.- CERRADURA DEL PRODUCTO

Para todos $x, y \in \Re$, entonces $xy \in \Re$

4.- CERRADURA DE LA DIVISIÓN

Para todos $x, y \in \Re$, entonces $\frac{x}{y} \in \Re$, $y \neq 0$

5.- CONMUTATIVIDAD DE LA ADICIÓN

Para todos $x, y \in \Re$, $x + y = y + x$

6.- CONMUTATIVIDAD DEL PRODUCTO

Para todos $x, y \in \Re$, entonces $xy = yx$

7.- ASOCIATIVIDAD DE LA ADICIÓN

Para todos $x, y, z \in \Re$, entonces $x + (y + z) = (x + y) + z$

8.- ASOCIATIVIDAD DEL PRODUCTO

Para todos $x, y, z \in \Re$, entonces $x(yz) = (xy)z$

9.- NEUTRO ADITIVO

Para todos $x \in \Re$, existe $0 \in \Re \ni x + 0 = x$

10.- NEUTRO MULTIPLICATIVO

Para todos $x \in \Re$, existe $1 \in \Re \ni x(1) = x$

11.- INVERSO ADITIVO

Para todos $x \in \Re$, existe $-x \in \Re \ni x + (-x) = 0$

12.- INVERSO MULTIPLICATIVO

Para todos $x \in \Re$, existe $\frac{1}{x} \in \Re$, $x \neq 0 \ni x\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

13.- PROPIEDAD DISTRIBUTIVIDAD:

Para todos $x, y, z \in \Re$, entonces $x (y + z) = x y + x z$

CAMPO :

Se le llama CAMPO al conjunto que cumple las propiedades del 1 hasta la 13, como por ejemplo los conjuntos Q y $\Re$.

14.- PROPIEDAD DE DENSIDAD

Para todos $x, y \in \Re$, existe $z \in \Re$ que está entre x, y

La propiedad de densidad dice que entre dos números reales siempre se puede encontrar otro número real.

Adicionalmente los conjuntos de números pueden cumplir las siguientes propiedades.
Propiedades Algebraicas:

1.- PROPIEDAD REFLEXIVA

Para todos $x \in \Re$, entonces $x = x$, todo número es igual a sí mismo.

2.- PROPIEDAD DE SIMETRÍA

Para todos $x, y \in \Re$, entonces $x = y$ o $y = x$

$2x + 1 = 1$ y puedo leerlo también: $1 = 2x + 1$
Dos números o expresiones iguales, son iguales siempre.

3.- PROPIEDAD TRANSITIVA

Para todos x, y z ∈ $\Re$ $x = y$ $y = z$, entonces $x = z$
Esta propiedad afirma que si existen dos números iguales a un tercero, entonces son iguales entre si.

3.5.3. ESTRUCTURAS DONDE SE RECONOCE EL USO DE PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS.

a) $5 + \pi = \pi + 5$ Propiedad conmutatividad de la adición

b) $\sqrt{7}(1) = \sqrt{7}$ Propiedad del neutro multiplicativo

c) $2\left(\frac{3}{7} - 8\right) = 2\left(\frac{3}{7}\right) - 2(8)$ Propiedad de distribución.

d) $2 = \frac{4}{2}$ y $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} \Rightarrow 2 = \frac{8}{4}$ Propiedad transitiva

e) $-7 + 7 = 0$ Propiedad del inverso aditivo

f) $2(4) = 8$ Propiedad de cerradura del producto

g) $\frac{3}{4} + \left(2 + \frac{13}{2}\right) = \left(\frac{3}{4} + 2\right) + \frac{13}{2}$ Propiedad asociatividad de la adición

h) $9 = \frac{18}{2} \Rightarrow \frac{18}{2} = 9$ Propiedad de simetría.

E J E R C I C I O S

A) Resolver las siguientes operaciones que se indican:

1) $\frac{7}{8} + \frac{5}{32} + \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right] =$

2) $\frac{1}{8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}-\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{10}\right)=$

3) $\frac{13}{8}-\frac{3}{8}-\frac{8}{8}+\left(\frac{19}{21}-\frac{4}{21}\right)=$

4) $40-\frac{11}{42}\div\left(31-\frac{2}{35}\right)=$

5) $\frac{6}{9}+\frac{15}{25}-\frac{8}{15}=$

6) $\dfrac{\frac{7}{11}+\frac{1}{121}+\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{12}}=$

7) $\frac{7}{8}\left(\frac{8}{11}\right)\left(\frac{22}{14}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=$

8) $\left(2-\frac{1}{4}\right)\left(6+\frac{2}{3}\right)=$

9) $\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{2}{9}\right)\div\left(36-\frac{1}{3}\right)(-1+2)=$

10) $\left(\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}\right)\div\frac{11}{3}=$

11) $\left(10\div\frac{5}{6}\right)\left(7+\frac{3}{4}\right)\div\left(2+\dfrac{1}{3-\frac{1}{4}}\right)=$

12) $\dfrac{\left(\frac{7}{8}+1+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{6}\right)9}{\left(2+\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right)}=$

13) $$\left(\frac{\dfrac{8}{\frac{1}{4}}+2}{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{8}{\frac{1}{4}}}\right)\left(\frac{6}{5}\right)=$$

14) $$\frac{2-\dfrac{2}{5}+3\left(-\dfrac{3}{2}\right)}{2+\dfrac{\frac{1}{2}+3}{5-\frac{1}{3}}}=$$

15) $$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}=$$

B.- Expresar en forma decimal los siguientes números

1) $\dfrac{16}{46}$

2) $\dfrac{11}{30}$

3) $\dfrac{13}{121}$

4) $\dfrac{3}{13}$

5) $\dfrac{1}{10}$

C.- Convertir a la forma $\frac{p}{q}$ los siguientes decimales:

1) 0.32

2) 0.06006

3) $4.00\overline{883}$

4) $0.\overline{1868}$

5) $15.0\overline{75}$

6) $-6.018\overline{01824}$

7) $-21.00\overline{6}$

D.- Nombrar la propiedad ejemplificada

1) $5 + 0 = 5$

2) $(2 + 7)(0) = 2(0) + 7(0)$

3) $0(1) = 0$

4) $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$

5) $1(+) = 1$

E.- Si A es el conjunto de los números naturales pares ¿ Qué propiedad de los naturales cumple ?

F.- Si B es el conjunto de los enteros impares, ¿Qué propiedades de los enteros cumple?.

G.- Ocupando la propiedad de densidad de los racionales, dar dos racionales que se encuentren entre:

C A P Í T U L O 4

4.1. OPERACIONES CON MONOMIOS Y POLINOMIOS.

Como parte inicial de los trabajos de este capítulo se plantean algunas definiciones de expresiones utilizadas en el mismo, con la finalidad de establecer criterios comunes.

Expresión Algebraica.-Son valores desconocidos que constan de coeficientes numéricos, letras que indican el valor desconocido y todo tipo de operaciones.

ejemplos: $4x^2 + 3$
$7x^2$
$6xyz + 3a$
$(2y^2 + z)^2$

Término .- Es una expresión que consta de coeficiente numérico y letras.

Ejemplos $7x^2$
$8xyz$
x^3z

Términos semejantes.- Son términos o expresiones que tienen las mismas variables (literales) y grados iguales (exponentes), los números pueden ser diferentes (coeficientes).

Ejemplos $3xy, 7yx, 10xy$
$10yx^2, y2x^2$

Variables :.-Se identifican con las últimas letras del alfabeto

Coeficientes literales .- Se identifican con las primeras letras del alfabeto.

Ejemplo $3axz$ donde 3 y a son coeficientes; x y z son variables.

Las diferentes expresiones algebraicas se pueden clasificar por el número de términos que las forman, así se tienen a los: *monomios* y *polinomios*.

Monomio:.- Es una expresión algebraica que consta de un término.

Ejemplos

$7x$, $4y$, $3xyz$, $-w$, son monomios.

<u>Binomio</u>:.- Es una expresión algebraica que consta de 2 términos separados por un operador suma o diferencia.

Ejemplos

$7x + 4y$, $3xyz - w$

<u>Trinomio</u> .- Es una expresión algebraica que consta de 3 términos, separados por operadores suma o resta.

Ejemplos:

$3x^7 + 7 + 4y$, $-5x^2y^2 - a + 3y^2$.

<u>Polinomio</u> .- Tiene más de un término separados por operadores suma o diferencia.

4.1. ADICIÓN DE MONOMIOS Y POLINOMIOS.

Para sumar o restar expresiones algebraicas basta con sumar o restar los términos semejantes, esto es,

a) $$\begin{aligned} 1 - x^2 + x^4 + x^3 + 3x + (-x^6 - 30x^2 + 15x + 24) &= -x^6 + x^4 + x^3 - \underline{30x^2 - x^2} + \underline{3x + 15x} + 24 + 1 \\ &= -x^6 + x^4 + x^3 - 31x^2 + 18x + 25 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 7a^3b + 5ab^3 - 8a^2b^2 + b^4 - (5a^4 + 9a^3b - 4ab^3 + 6b^4) &= -5a^4 + \underline{7a^3b - 9a^3b} - 8a^2b^2 + \underline{5ab^3 + 4ab^3} \\ &\quad + \underline{b^4 - 6b^4} \\ &= -5a^4 - 2a^3b - 8a^2b^2 + 9ab^3 - 5b^4 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x^2 + 5 + 2x - 6 - (x - 4 - 1 - (x + 6)) &= x^2 + 5 + 2x - 6 - (x - 4 - x + 6) \\ &= x^2 + 5 + 2x - 6 - (2) \\ &= x^2 + 2x - 6 - 2 \\ &= x^2 + 2x - 8 \end{aligned}$$

d) $x^3 + 1 + 5x^3 + 7 - x^3 - (9x + 4) - (-3x^2 - x + 1) = x^3 + 1 + 5x^3 + 7 - x^3 - 9x - 4 + 3x^2 + x - 1$
$= 5x^3 + 3x^2 - 8x + 3$

e) $x^4 + x^2 - 3 - (-3x + 5 - x^3) - 5x^2 + 4x + x^4 - (-7x^3 + 8x^2 - 3x + 4 - (x4 - 3) = x^4 + x^2 - 3 +$
$3x - 5 + x^3 - 5x^2 + 4x + x^4 - (-7x^3 + 8x^2 - 3x + 4 - x4 + 3)$
$= 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 7x - 8 + 7x^3 - 8x^2 + 3x - 4x^4 - 3$
$= 3x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 10x - 15$

f) $m^4 - 1 - m^3 + 8m^2 - 6m + 5 - 7m - m^2 + 1 - (m^5 - 16 - 16m^4 + 7m^2 - 3) = m^4 - m^3 + 7m^2 -$
$13m + 5 - m^5 + 16 + 16m^4 - 7m^2 + 3$
$= - m^5 + 17m^4 - m3 - 13m + 24$

5) $a^5 - 7a^3x^2 + 9 - 20a^4x + 21a^2x^3 - 19ax^4 - (x^5 - 7ax^4 + 9a^3x^2 - 80 - 4 - 5 + 18a^3x^2 - 8) - 9xa^4$
$- 17a^3x^2 + 11a^2x^3 - (a^5 + 36) = -9xa^4 - 2a^4x + 61a^3x^2 + 3^2ax^3 - 12ax^4 - 3x^5 + 53$

4.2. PRODUCTO DE MONOMIOS Y POLINOMIOS.

Antes de llevar a cabo multiplicaciones con monomios y polinomios, es conveniente que mencionen las *Leyes de los exponentes.*

1) $a^b a^c = a^{b+c}$

2) $a^b a^{-c} = a^{b-c}$

3) $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

4) $(a^b)^c = a^{bc}$

5) $(a^b)^{1/c} = a^{b/c}$

6) $a^0 = 1$

7) $a^1 = a$

Ejemplos.

a) $\frac{1}{3}x(x^2 + 5x - 3) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{3}{3}x = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 - x$

b) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b\right)\frac{2}{5}a^2 = \frac{a^3}{5} - \frac{4}{15}a^2b$

c) $\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}xy - \frac{1}{4}y^2\right)\frac{3}{2}y^3 = \frac{3}{6}x^2y^3 - \frac{6}{10}xy^4 - \frac{3}{8}y^5 = \frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{3}{5}xy^4 - \frac{3}{8}y^5$

d) $(am - am^{-1} + am^2)(-2a) = -2a^2m + 2a^2m^{-1} - 2a^2m^2$

e) $(a^4 - 6a^3 + 9a^2x^2 - 8)(3bx^3) = 3a^4bx^3 - 18a^3bx^3 + 27a^2bx^5 - 24bx^3$

f) $-4a^4m^2(a^3 - 5a^2b - 8ab^2) = -4a^7m^2 + 20a^6bm^2 + 32a^5b^2m^2$

g) $(x^{a+5} - 3x^{a+4} + x^{a+3} - 5x^{a+1})(-2x^2) = -2x^{a+7} + 6x^{a+6} - 2x^{a+5} + 10x^{a+3}$

h) $(x^2 + 3xy)(6x + 2xyz) = 6x^3 + 2x^2yz + 18x^2y + 6x^2y^2z$

i) $(x^3 + x^2 + x)(x^2 - 1) = x^5 + x^4 + x^3 - x^3 - x^2 - x - x^5 + x^4 - x^2 - x$

j) $(m^3 + n^3 + 6mn^2 - 5m^2n)(m^3 - 4mn^2 - n^3) = m^6 - 4m^4n^2 - m^3n^3 + m^3n^3 - 4mn^5 - n^6 + 6m^4n^2 - 24m^2n^4 - 6mn^5 - 5m^5n + 20m^3n^3 + 5m^2n^4 = m^6 - 5m^5n + 2m^4n^2 + 20m^3n^3 - 19m^2n^4 - 10mn^5 - n^6$

k) $$\begin{aligned} 3x(x + 3x)(x - 2)(x + 1) &= (3x^2 + 9x^2)(x^2 + x - 2x - 2) \\ &= 12x^2(x^2 - x - 2) \\ &= 12x^4 - 12x^3 - 24x^2 \end{aligned}$$

l) $(3x - 1)(x^2 - 2x + 1)(x - 1)(x + 1) = (3x^3 - 6x^2 + 3x - x^2 + 2x - 1)(x^2 + x - x - 1)$

$$= (3x^3 - 7x^2 + 5x - 1)(x^2 - 1)$$
$$= 3x^5 - 3x^3 - 7x^4 + 7x^2 + 5x^3 - 5x - x^2 + 1$$
$$= 3x^5 - 7x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 5x + 1.$$

4.3. COCIENTE DE MONOMIOS Y POLINOMIOS.

Para efectuar las siguientes operaciones se recuerda que sólo se pueden eliminar expresiones semejantes, siempre y cuando éstas se presenten en el numerador y en el denominador como factores de la expresión.

Polinomio entre monomio :

1)
$$\frac{3x^2y^3 - 5a^2x^4}{-3x^2} = \frac{\cancel{x^2}\left(3y^3 - 5a^2x^2\right)}{-3\cancel{x^2}}$$
$$= \frac{x^2}{x}\left(\frac{3y^3 - 5a^2x^2}{-3}\right)$$
$$= \frac{3y^3 - 5a^2x^2}{-3}$$

2)
$$\frac{4x^8 - 10x^6 - 5x^4}{2x^3} = \frac{x^4\left(4x^4 - 10x^2 - 5\right)}{2x^3}$$
$$= \frac{x\left(4x^4 - 10x^2 - 5\right)}{2}$$

3)
$$\frac{8m^9n^2 - 10m^7n^4 - 20m^5n^6 + 12m^3n^8}{2m^2} = \frac{2m^3n^2(4m^6 - 5m^4n^2 - 10m^2n^4 + 6mn^6)}{2m^2}$$
$$= mn^2(4m^6 - 5m^4n^2 - 10m^2n^4 + 6mn^6)$$

4)
$$\frac{x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 15x}{5x} = \frac{x\left(x^3 - 5x^2 - 10x + 15\right)}{5x}$$
$$= \frac{x^3 - 5x^2 - 10x + 15}{5}$$

5) $$\frac{6a^8b^8 - 3a^6b^6 - 2a^2b^3}{3a^2b^3} = \frac{a^2b^3(6a^6b^5 - 3a^4b^3 - 2)}{3a^2b^3}$$
$$= \frac{6a^6b^5 - 3a^4b^3 - 2}{3}$$

Polinomio entre binomio :

La regla para dividir expresiones algebraicas es:

1. Ordenas tanto divisor como dividendo de mayor a menor considerando para esto a una variable , la que se, pero la misma en ambas expresiones.
2. Se procede a dividir a través de pensar en el producto, así en este caso se toma el primer elemento de divisor y el primero del dividendo y se procede a tratar de igualar el dividendo a través del producto de un término con el der divisor. Ese término ira en el cociente.
3. La multiplicación se hace con toda la expresión del divisor y se anota con signo contrario abajo del dividendo y se suma. Este resultado será un primer residuo.
4. Se vueleve a realizar el paso 2 con el primer término del divisor y el primero del residuo. El proceso continua (2, 3) hasta eu el residuo contiene una expresión algebraica con menor grado que el divisor.

1) $$\frac{a^2 + 2a - 3}{a + 3} \Rightarrow \begin{array}{r|l} & a - 1 \\ \hline a+3 & a^2 + 2a - 3 \\ & \underline{-a^2 - 3a} \\ & \quad -a - 3 \\ & \quad \underline{+a + 3} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

Paso 2. Comparando a del divisor y a^2 del dividendo, lo que se requiere es una a en el cociente, ya que al multiplicar a(a) da como resultado a^2 .

Paso 3. Se multiplica la a del cociente con la expresión del divisor, es decir a(a + 3) obteniendo $-a^2 - 3a$, con el signo contrario y sumando con el dividendo da –a –3.

Paso 4 Como en el divisor ya está la a lo que se requiere para igualar el primer residuo es entonces –1. se procede a multiplicar ese –1 por toda la expresión del divisor y se le cambia de signo y se suma al primer residuo. En este caso el segundo resoduo es cero.

2) $\dfrac{-15x^2-8y^2+22xy}{y+2x} \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} & \frac{-15}{2}x + \frac{39}{4}y \\ \hline 2x+y & -15x^2 - 8y^2 + 22xy \\ & 15x^2 + \frac{15}{2}xy \\ \hline & -8y^2 + \frac{39}{2}xy \\ & -\frac{39}{4}y^2 - \frac{39}{2}xy \\ \hline & -\frac{71}{4}y^2 \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{r|l} & a^{x-1} - b^{n-1} \\ \hline a-b & a^x - a^{x-1}b - ab^{n-1} + b^n \\ & \underline{-a^x + a^{x-1}b} \\ & \quad - ab^{n-1} + b^n \\ & \quad \underline{+ ab^{n-1} - b^n} \\ & \quad 0 \end{array}$$

Polinomio entre polinomio :

1)

$$\begin{array}{r|l} & x^3 + 2x^2 - x \\ \hline x^2 - 2x + 5 & x^5 + \qquad 12x^2 - 5x \\ & \underline{-x^5 + 2x^4 - 5x^3} \\ & 2x^4 \ -5x^3 + 12x^2 - 5x \\ & \underline{-2x^4 + 4x^3 - 10x^2} \\ & -x3 + 2x^2 - 5x \\ & \underline{+x3 + 2x^2 + 5x} \\ & 0 \end{array}$$

2) $\dfrac{4y^4 - 13y^2 + 4y^3 - 3y - 20}{2y+5}$

$$2y^3 - 3y^2 + y - 4$$

$$2y + 5 \;\big|\; 4y^4 + 4y^3 - 13y^2 - 3y\,20$$

$$\underline{-4y^4 - 10y^3}$$

$$-6y^3 - 13y^2 - 3y - 20$$

$$\underline{+6y^3 + 15y^2}$$

$$2y^{2} \cdot 3y - 20$$

$$\underline{-2y^2 - 5y}$$

$$-8y - 20$$

$$\underline{+8y + 20}$$

$$0$$

3)

$$y^2 + 1$$

$$y^4 - 2y^2 + 2 \;\big|\; y^6 - y^4 - 4y + 2 + a^6 + 2a^5$$

$$\underline{-y^6 + 2y^4 \qquad -2y^2}$$

$$y^4 - 4y + 2 + a^6 + 2a\,5 - 2y^2$$

$$\underline{-y^4 \qquad -2 \qquad +2y^2}$$

$$-4y \quad + a^6 + 2a^5$$ residuo

4)

$$5a^4 - 4a^3 + 2a^2 - 3a$$

$$a^4 - 2a^2 + 2 \;\big|\; 5a^8 - 4a^7 - 8a^6 + 5a^5 + 6a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 6a$$

$$\underline{-5a^8 \qquad +10a^6 \qquad -10a^4}$$

$$-4a^7 + 2a^6 + 5a^5 - 4a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 6a$$

$$\underline{+4a^7 \qquad -8a^5 \qquad +8a^3}$$

$$2a^6 - 3a^5 - 4a^4 + 6a^3 + 4a^2 - 6a$$

$$\underline{-2a^6 \qquad +4a^4 \qquad -4a^2}$$

$$-3a^5 \qquad +6\,0^3 \qquad -6a$$

$$\underline{+3a^5 \qquad -6a^3 \qquad +6a}$$

$$0$$

5)

$$y^2 - 2y - 1$$

$$y^4 + -2y + 2 \;\big|\; y^6 - 2y^5 - y^4 + 4y^3 - 4y + 2$$

$$\underline{y\,6 \qquad +2y\,3 \qquad -2y^2}$$

$$-2y^5 - y^4 + 6y^3 - 4y + 2 - 2y^2$$

$+2y^5 \quad +4y \quad - \quad 4y^2$

$-y^4 + 6y^3 \quad +2 - 6y2$

$+y^4 \quad +2 \quad -2y$

$6y^3 \quad +4 - 6y^2 - 2y = 6y^3 - 6y^2 - 2y + 4$

6)

$m^3 + 1$

$m^3 + m^2 - 4m - 1 \,\big|\, m^6 + m^5 - 4m4 + m^2 - 4m - 1$

$-m^6 - m^5 + 4m^4$

$m^2 - 4m - 1 + m^3$

$-m^2 + 4m + 1 - m^3$

0

7)

$8x^3 - 25.5x^2 + 38.25x - 62.875$

$2x + 3 \qquad 16x^4 - 27x^3 - 11x + 2$

$-16x^4 - 24x^3$

$-51x^3 - 11x + 2$

$+51x^3 \quad +76.5x^2$

$-11x + 2 + 76.5x^2$

$-114.75x \quad -76.5x^2$

$-125.75x + 2$

$+125.75x + 188.625$

190.625

$y^2 - 2y + 1$

$y^4 - 2y^2 + 2 \,\big|\, y^6 - 2y^5 - y^4 + 4y^3 - 4y + 2$

$-y^6 \quad 2y^4 \quad -2y^2$

$0 - 2y^5 + y^4 + 4y^3 - 4y + 2 - 2y^2$

$+2y^5 \quad -4y^3 \quad +4y$

$0 \quad 0 \quad 0$

$y^4 \quad +2 - 2y^2$

$-y^4 \quad -2 + 2y^2$

0

4.4. VALOR DE UN POLINOMIO.

En ciertas ocasiones es importante evaluar los polinomios así que se debe indicar el valor que se necesite sustituir en el polinomio y encontrar su valor numérico de este último.

Por ejemplo si se tiene el polinomio $a^2 - 2ab + b^2$ y se quiere saber que valor toma cuando $a = -1$ y $b = 2$, entonces lo que se debe de hacer es sustituir esos valores dados en el polinomio y operar lo correspondientemente indicado, esto es: $(-1)^2 - 2(-1)(2) + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$

Esto se debe hacer para cada polinomio que se quiera evaluar, dependiendo de los valores que se den a cada variable.

Suponga que se mantiene que $a = -1$, $b = 2$ y $c = -\frac{1}{2}$ y se quieren evaluar:

a) $$a^4 - 3a^3 + 2ac - 3bc = (-1)^4 - 3(-1)^3 + 2(-1)\left(-\frac{1}{2}\right) - 3(2)\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= 1 + 3 + 1 + 3 = 8$$

b) $$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} - \frac{bc}{a} = \frac{(-1)(2)}{-\frac{1}{2}} + \frac{(-1)\left[-\frac{1}{2}\right]}{2} - \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)}{-1}$$
$$= \frac{-2}{-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{2} + \frac{\frac{2}{2}}{-1}$$
$$= -2(-2) + \frac{1}{2(2)} - \frac{1}{1}$$
$$= 4 + \frac{1}{4} - 1$$
$$= \frac{13}{4}$$

c) $$(a+b+c)^2-(a-b-c)^2+c=\left(-1+2-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-1-2+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$
$$=\left(\frac{-2+4-1}{2}\right)^2-\left(\frac{-2-4+1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$
$$=\left[\frac{1}{2}\right]^2-\left(\frac{-5}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{25}{4}-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1-25-2}{4}$$
$$=\frac{-26}{4}=-\frac{13}{2}$$

Agregando ahora que x = -2, y = 1, m = 3

d) $$(3x-2y)(2a-4b)+4x^2y^2-\frac{m-x}{2}=(3(-2)-2(1))(2(-1)-4(2))+4(-2)^2(1)^2-\frac{3+2}{2}$$
$$=(-6-2)(-2-8)+16-\frac{5}{2}$$
$$=(-8)(-10)+\frac{32-5}{2}$$
$$=80+\frac{27}{2}$$
$$=\frac{160+27}{2}=\frac{187}{2}$$

e) $$\frac{3a}{x}+\frac{2y}{m}+\frac{3m}{y}+2\left(x^3-y^2+4\right)=\frac{2(-1)}{-2}+\frac{2(1)}{3}+\frac{3(3)}{1}+2\left((-2)^3-1+4\right)$$
$$=\frac{-2}{-2}+\frac{2}{3}+9+2(-8+3)$$
$$=1+\frac{2}{3}+9-10$$
$$=\frac{2}{3}$$

f) $x^2(x-y+m)-(x-y)(x^2+y^2-b)+m^2-c=(-2)^2(-2-1+3)-(-2+1)(4+1-2)+9+\frac{1}{2}$

$$=4(0)-(-1)(3)+\frac{18+1}{2}$$

$$=3+\frac{19}{2}$$

$$=\frac{25}{2}$$

E J E R C I C I O S

Ejercicio 1: Realice las siguientes divisiones:

a) $\dfrac{5a^5+6a^4+5a^8-4a^7-8a^6-2a^3+4a^2-6a}{a^4-2a^2+2}$

b) $\dfrac{4y^3-2y^5+y^6-y^4-4y+2}{y^4+2-2y^2}$

c) $\dfrac{m^6+m^5-4m^4-4m+m^2-1}{m^3+m^2-4m-1}$

d) $\dfrac{16x^4-27x^3-11x+2}{2x+3}$

Ejercicio 2: Efectúe las operaciones que se indican en cada inciso.

1) $a-7+a^3+a^5-a^{4-}6a^2-+8-5a^2-11a+26-(-4a^3+a^2-a^4-15+16a^3-8a^2-7a)=$

2) $m^4-1-m^3+8m^2-6m+5-7m-m^2+1(m^5-16-(16m^4+7m^2-3))=$

3) $\frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{5}a + \frac{5}{6}a^4 - \frac{3}{8}a - \left(\frac{3}{4}a^3 + \frac{1}{6}a + \frac{3}{8}a^4\right) + \frac{1}{5}a$

4) $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)\left(-\frac{3}{5}xy^2\right)\left(\frac{10}{3}x^3\right)$

5) $(x4 - x^3 + x^2 - x + 1)(3x^2 + 4x - 2) =$

6) $(x^{2+6} + 3x^6 - 4x^{b+1})(-2x - 10x^{2b+1} - 4x^{3b}) =$

7) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x\right)\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{10}x\right)$

8) $(x + y)(x + y) - 3(x - y)(x - y)(x + y)(x - y) + x(y - x)$

9) $\dfrac{3y^5 + 5y^2 - 12y + 10}{y^2 + 2}$

10) $\dfrac{5y^8 - 3y^7 - 11y^6 + 11y^5 - 17y^4 - 3y^3 - 4y^2 - 2y}{5y^4 - 3y^3 + 4y^2 + 2y}$

11) $\dfrac{3a^{5m-3} - 23a^{5m-2} + 5a^{5m-1} + 46a^{5m} - 30a^{5m+1}}{a^{3m} + 6a^{3m-1} - 8a^{3m-2}}$

CAPÍTULO 5

PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN.

Antes de abordar los temas de factorización es conveniente definir algunos elementos, como son:

Producto Notable .- es la expresión resultante de multiplicar dos o más factores y que siempre se cumple y por eso son llamados notables.

Factorización .- También conocida como Descomposición Factorial, es una expresión algebraica que se convierte en el producto de factores.

Como ejemplos de factorización se tienen:

La factorización de un monomio, la cual se puede hallar por inspección simple de la expresión. Así por ejemplo si uno se pregunta, ¿cuál es la factorización de 15ab?

La factorización de 15ab es (3*5*a*b); ¿Y la de un polinomio?, ¿será así de fácil?.

Las factorizaciones conocidas de un polinomio son 9 básicas y sus derivaciones, aunque hay que aclarar que no todo polinomio puede ser factorizado, es oportuno el conocer y saber identificar cuáles pueden ser factorizados, pues esto ayudará, y mucho, a la resolución de ecuaciones, problemas, etcétera.

Es importante mencionar que no se trata de factorizar por factorizar, sino se trata de buscar cual es la mejor factorización, y cómo saber esto, parece sencillo pero no lo es, pues áquella que permita continuar el trabajo algebraico de una manera más accesible y más sencilla, no es a veces fácil encontrar.

Se comenzará revisando los casos más simples de factorización, para después incrementar el grado de dificultad de las factorizaciones, pero no se piense que es nada más por complicar el estudio de las matemáticas, sino al contrario.

5.1. FACTOR COMÚN.

El caso de factor común es el más sencillo de aplicar, pero también tiene sus problemas si no se da uno cuenta de cual es ese factor común.

Al realizar las siguiente factorización, se tiene

$24a^2xy^2 - 36x^2y^4$

Poder factorizar esta estructura implica preguntarse que hay común entre minuendo y sustraendo, así 24 y 36 son pares, por lo que al menos comparten como divisor al dos, en particular comparten como divisor al número 12. Para el caso de las letras ambos tienen x y tienen y, entonces lo común es revisar que tengan la misma letra con el exponente más grande posible, en este caso sería xy^2.

Por lo que la factorización quedaría:

1) $24a^2xy^2 - 36x^2y^4 = 6xy^2(4a^2 - 6xy^2) = 12xy^2\,(2a^2 - 3xy^2)$

2) $x - x^2 + x^3 - x^4 = x(1 - x + x^2 - x^3) = x(1 - x) + x^3(1 - x) = (1-x)(x + x^3) = x(1 - x)(1 + x^2)$

elementos comunes

3) $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x = x(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

Se puede ver que la x es común en todos los sumandos.

elementos comunes

4) $(x + m)(x + 1) - (x + 1)(x - n) = (x + 1)((x + m) - (x - n)) = (x + 1)(x + m - x + n)$
$= (x+1)(m+n)$

5) $(a + b - 1)(a^2 + 1) - a^2 - 1 = (a + b - 1)(a^2 + 1) - (a^2 + 1) = (a^2 + 1)(a + b - 1 - 1) =$
$(a^2 + 1)(a + b - 2)$

elementos comunes

elementos comunes

6) $(3x + 2)(x + y - z) - (3x + 2) - (x + y - 1)(3x + 2) = (3x + 2)(x + y - z - 1 - x - y + 1)$
$= (3x + 2)(-z) = -z(3x + 2)$

7) $2a^2x + 2ax^2 - 3ax = ax\,(2a + 2x + 3)$

Los tres sumandos comparten ax

8) $12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3 + 48m^5n^4 = 12m^2n(1 + 2mn - 3m^2n^2 + 4m^3n^3)$
Los sumandos comparten $12m^2n$.

9) $a^2 - a^{16} + a^{12} - a^8 + a^4 - a^2 = a^2(1 - a^{14} + a^{10} - a^6 + a^2 - 1) = a^2(-a^{14} + a^{10} - a^6 + a^2) =$
$a^4(-a^{12} + a^8 - a^4 + 1)$
Todos los sumandos comparten a^4.

10) $-m - n + x(m + n) = -(m + n) + x(m + n) = (m + n)(-1 + x)$

elementos comunes

11) $a^3(a - b - 1) - b^2(a - b - 1) = (a - b - 1)(a^3 - b^2)$

elementos comunes

12) $(1 + 3a)(x + 1) - 2a(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)((1 + 3a) - 2a + 3) = (x + 1)(4 + a)$

elementos comunes

elementos comunes

13) $(m + n)(a - 2) + (m - n)(a - 2) = (a - 2)((m + n) + (m - n) = (a - 2)(m + n + m - n) =$
$2m(a - 2)$

elementos comunes

14) $a^2 + ab + ax + bx = a(a + b) + x(a + b) = (a + x)(a + b)$.
Común la a   común la x

Elementos comunes   elementos comunes

15) $x^2 - a^2 + x - a^2x = x(1 + x) - a^2(1 + x) = (x - a^2)(1 + x)$.

Elementos comunes

5.2. CUADRADO DE UN BINOMIO.

El cuadrado de un binomio forma parte de los productos notables.

Dada la expresión
$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Para $(a + b)^2$: El cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término, expresado algebraicamente como $a^2 + 2ab + b^2$.

Y para $(a - b)^2$, la expresión es: el cuadrado del primer término, menos el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término, expresado algebraicamente como $a^2 + 2ab + b^2$.

5.3. FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO.

Para factorizar una expresión como un trinomio cuadrado perfecto, primero se tiene que demostrar que en verdad se trata de una expresión que reúne las características para ser un trinomio cuadrado perfecto, las características que hay que demostrar tiene un trinomio para ser un trinomio cuadrado perfecto son las siguientes:

Se toma la expresión ordenada con respecto a uno de los términos, sí el primer y tercer término tienen raíz cuadrada exacta, y sí el segundo término es más (menos) el doble producto del primer término por el segundo, entonces se puede afirmar que se trata de un trinomio cuadrado perfecto, y su factorización sería $(a + b)^2$ o $(a - b)^2$.

Realice las siguientes factorizaciones:

1) $36 + 12\,m^2 + m^4 =$ Al analizar esta expresión se observa que $\sqrt{36} = 6$ y $\sqrt{m^4} = m^2$ estas dos raíces si las multiplico por dos es exactamente el término de en medio, por lo que la factorización es $(6 + m^2)^2$

2) $4x^2 - 12\,x\,y + 9y^2 = (2x - 3y)^2$

Raiz 2x 3y y al verificar el segundo término, éste es $2(2x)(3y)$

3) $9b^2 - 30\,a^2 b + 25\,a^4 = (3b - 5a^2)^2$

4) $49m^6 - 70am^3n^2 + 25a^2n^4 = (7m^3 - 5an^2)^2$

4) $400x^{10} + 40x^5 + 1 = (20x^5 + 1)^2$

5) $9(x - y)^2 + 12(x - y)(x + y) + 4(x + y)^2 = (3(x - y) + 2(x + y))^2 = (3x - 3y + 2y + 2x)^2 = (5x - y)^2$

5.4. CUBO DE UN BINOMIO Y SU FACTORIZACIÓN.

Si se cuenta con la expresión a + b; ¿cuál es la expresión que representa elevar al cubo ese binomio?

Es decir, se tiene $(a + b)^3$ es equivalente a $(a + b)(a + b)(a + b)$, pero tomando los dos primeros términos, se sabe que es igual $(a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$; y al efectuar esta multiplicación resulta $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Lo que indica que el cubo de un binomio, es el primer término al cubo, más tres veces el producto del cuadrado del primer término por el segundo término, más tres veces el producto del primer término por el cuadrado del segundo término, más el cubo del segundo término.

En caso de que el binomio esté relacionado con el signo menos, entonces a los términos resultantes se les alternan los signos, el signo positivo para el primer y tercer término, y el negativo para el segundo y cuarto términos.

Para realizar la factorización de un polinomio de cuatro términos, que se crea pudiera representar al cubo de un binomio, lo primero que debiera hacerse es verificar que se cumplan con las condiciones descritas anteriormente.

Ejercicios

Desarrolle los siguientes binomios al cubo

1) $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

2) $(x - 2)^3 = x^3 - 3(x^2)(2) + 3(x)(2^2) - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

3) $(4x + 5)^3 = (4x)^3 + 3(4x)^2(5) + 3(4x)(5^2) + 5^3 = 64x^3 + 240x^2 + 300x + 125$

4) $(x^2 - 3y)^3 = x^6 - 9x^4y + 27x^2y^2 - 27y^3$

5) $(2x + 3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

Para factorizar las siguientes expresiones se debe proceder verificando la regla anterior.

1) $1 - 3a + 3a^2 - a^3 = (1 - a)^3$
Raiz 1 a y se cumple la regla el segundo término es el triple del cuadrado del primero por el segundo y el tercer término es el triple producto del primero por el cuadrado del segundo.

2) $27m^3 + 108m^2n + 144mn^2 + 64n^3 = (3m + 4n)^3$

3) $8 + 36x + 54x^2 + 27x^3 = (2 + 3x)^3$

4) $64x^3 + 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3 = (4x + 5y)^3$

5) $m^3 - 3am^2n + 3a^2mn^2 - a^3n^3 = (m - an)^3$

5.5. PRODUCTO DE DOS BINOMIOS.

El desarrollo del producto de dos binomios es el siguiente:

Sean $(a + b)$ y $(c + d)$, el resultado de multiplicar ambos binomios es $= ac + ad + bc + bd$, cuando los dos binomios tienen términos distintos.

Caso aparte, se presenta si uno de los términos que componen cada binomio es el mismo término, entonces se tendrá el siguiente resultado: $(x + e)(x + f) = x^2 + x(e + f) + ef$, que puede ser leído como $x^2 + bx + c$, donde $b = (e + f)$ y $c = ef$; por lo tanto en el proceso inverso de factorización, se buscará entonces dos números que sumados den b y que multiplicados den c.

Es de hacerse notar que el signo del segundo término está determinado por el signo de la expresión mayor, en caso de tener signos contrarios los segundos términos de los binomios.

5.5.1. DESCOMPOSICIÓN DE UN TRINOMIO DE LA FORMA $X^2 + BX + C$

Utilizando el punto anterior, realice las siguientes factorizaciones.

1) $x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$ Note que $5(2) = 10$ y que $5 + 2 = 7$

2) $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$ Note que $5 - 2 = 3$ y que $5(-2) = -10$

3) $x^2 - 5x - 36 = (x - 9)(x + 4)$

4) $m^2 - 20m - 300 = (m - 30)(m + 10)$

5) $a^2 + 42a + 432 = (a + 24)(a + 18)$

6) $a^2 + 4a + 3 = (a + 3)(a + 1)$

7) $c^2 + 5c - 24 = (c + 8)(c - 3)$

8) $a^2 + 7a - 18 = (a + 9)(a - 2)$

8) $x^2 - 17x - 60 = (x - 20)(x + 3)$

9) $c^2 + 24c + 135 = (c + 9)(c + 15)$

10) $y^2 + 50y + 336 = (y + 8)(y + 42)$

11) $m^2 - 8m - 1008 = (m - 37)(m + 28)$

Nótese que para encontrar los dos números buscados en los ejercicios 9, 10 y 11 fue necesario efectuar la descomposición factorial en primos de los términos independientes.

135	5	336	2	1008	2
27	3	168	3	504	2
9	3	84	2	552	2
3	3	42	2	126	2
1		21	3	63	3
		7	7	21	3
		1		7	7
				1	

5.6. PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CONJUGADOS Y SU FACTORIZACIÓN.

Se les llama binomios conjugados a las expresiones que tienen la siguiente característica:

El binomio $x + y$ tiene como binomio conjugado al binomio $x - y$,

Por lo anterior el producto de dos binomios conjugados, estaría representado por $(x + y)(x - y) = x^2 + xy - yx - y^2$, que responde al desarrollo del producto de dos binomios, pero al reducir términos comunes el resultado se abrevia como sigue $x^2 - y^2$.

Con base a lo descrito en el párrafo anterior, si se encuentra con un binomio de la forma $a^2 - b^2$, éste se puede factorizar como $(a + b)(a - b)$.

Factorice las siguientes expresiones:

1) $25 - 36x^4 = (5 - 6x^2)(5 + 6x^2)$

2) $64m^2 - (m - 2n)^2 = (8m - (m - 2n))(8m + (m - 2n)) = (8m - m + 2n)(8m + m - 2n) =$
$(7m + 2n)(9m - 2n)$

3) $1 - 9a^2b^4c^6d^8 = (1 - 3ab^2c^3d^4)(1 + 3a^2b^2c^2d^4)$

4) $25x^2y^4 - 121 = (5xy^2 - 11)(5xy^2 + 11)$

5) $\dfrac{a^2}{36} - \dfrac{x^6}{25} = \left(\dfrac{a}{6} - \dfrac{x^3}{5}\right)\left(\dfrac{a}{6} + \dfrac{x^3}{5}\right)$

6) $4x^{2n} - \dfrac{1}{9} = \left(2x^n - \dfrac{1}{3}\right)\left(2x^n + \dfrac{1}{3}\right)$

7) $a^{2n}b^{4n} - \dfrac{1}{25}a^{10n} = \left(a^n b^{2n} - \dfrac{1}{5}a^{5n}\right)\left(a^n b^{2n} - \dfrac{1}{5}a^{5n}\right)$

8) $(m - n)^2 - 16 = ((m - n) - 4))((m - n) + 4) = (m - n - 4)(m - n + 4)$

9) $(2a + b + c)^2 - (a + b)^2 = (2a + b + c - (a + b))(2a + b + c + a + b) = (a + c)(3a + 2b + c)$

10) $(a + 2x + 1)^2 - (a + x - 1)^2 = (a + 2x + 1 - a - x + 1)(a + 2x + 1 + a + x - 1) =$
$(x + 2)(2a + 3x)$

11) $(7x + y)^2 - 81 = ((7x + y) - 9)(7x + y + 9) = (7x + y - 9)(7x + y + 9)$

5.7. DESCOMPOSICIÓN DE FACTORES DE LA SUMA O DIFERENCIA DE DOS POTENCIAS IGUALES.

Para la factorización de una expresión que sea de la forma $a^n + b^n$ o $a^n - b^n$, n en el conjunto de los números naturales, se debe tomar en cuenta lo siguiente:

- $a^n - b^n$ es divisible por $a - b$ siendo n par o impar.
- $a^n + b^n$ es divisible por $a + b$ siendo n impar.
- $a^n - b^n$ es divisible por $a + b$ cuando n es par.
- $a^n + b^n$ nunca es divisible por $a - b$.

Ejemplos

a) $1 + 1000x^6$

Según la regla $1 + 1000x^6$ puede ser dividido por $1 + 10x^2$, lo que daría como resultado $1 - 10x^2 + 100x^4$

Siendo su factorización

$$1 + 1000x^6 = (1 + 10x^2)(1 - 10x^2 + 100x^4)$$

b) $1 + a^3$

$1 + a^3$ puede ser dividido por $(1 + a)$ dando como resultado $a^2 - a + 1$

$$1 + a^3 = (1 + a)(a^2 - a + 1)$$

c) $x^7 + 1$

$x^7 + 1$ es dividido por $(x + 1)$ y el resultado que se obtiene es $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

$x^7 + 1 = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

d) $y^6 - 1$

$y^6 - 1$ es dividido por $y^2 - 1$, por lo que su resultado es $y^4 + y^2 + 1$

$y^6 - 1 = (y^2 - 1)(y^4 + y^2 + 1)$

Se empezará con la factorización de sumas o diferencias de términos al cubo.

1) $8 + b^3 = (2 + b)(4 - 2b + b^2)$

2) $c^3 + b^3 = (2 + b)(4 - 2b + b^2)$

3) $c^3 - b^3 = (c - b)(c^2 + cb + b^2)$

4) $8x^3 + y^3 = (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$

5) $1 + 343n^3 = (1 + 7n)(1 - 7n + 49n^2)$

6) $x^3 y 6 - 216 y^9 = (x y^2 - 6y^3)(x^2 y^4 + 6 x y^5 + 36 y^6)$

7) $a^3 b^3 x^3 + 1 = (1 + abx)(1 - abx + a^2 b^2 x^2)$

8) $1000x^3 - 1 = (1 + 10x)(100x^2 + 10x\ 11)$

9) $8x^9 - 125y^3z^6 = (2x^3 - 5yz^2 + 25y^2z^4)$

10) $27 + (m-n)^3 = (3 + m - n)(9 - 3(m-n) + (m-n)^2) = (3 + m - n)(9 - 3m + 3n + m^2 - 2mn + n^2) = (3 + m - n)(m^2 + n^2 - 2mn - 3m + 3n + 9)$

11) $(m-2)^3 - (m-3)^3 = ((m-2) - (m-3))((m-2)^2 + (m-2)(m-3) + (m-3)^2) = (m - 2 - m + 3)(m^2 - 4m + 4 + m^2 - 2m - 3m + 6 + m^2 - 6m + 9) = (3m^2 - 15m^2 - 15m + 19)$

12) $(x + 2y)^3 + 1 = (x + 2y) + 1)((x + 2y)^2 - (x + 2y) + 1) = (x + 2y + 1)(x^2 + 4xy + 4y^2 - x - 2y + 1) = (x + 2y + 1)(x^2 + 4y^2 + 4xy - x - 2y + 1)$

13) $27x^3 - (x-y)^3 = (3x - (x-y))(9x^2 + 3x(x-y) + (x-y)^2) = (3x - x + y)(9x^2 + 3x^2 - 3xy + x^2 - 2xy + y^2) = (2x.+y)(13x^2 - 5xy + y^2)$

14) $(x-y)^3 - (x+y)^3 = ((x-y) - (x+y))((x-y)^2 + (x-y)(x+y) + (x+y)^2) = (x - y - x - y)(x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + xy - xy - y^2 + x^2 + 2xy + y^2) = (-2y)(3x^2 + y^2) = -6x^2y - 2y^3$

5.8. OTRAS FACTORIZACIONES.

Para factorizar se pueden mezclar métodos, pero siempre se requiere que se observe con cuidado la expresión y que se resuelva la primera pregunta que es si existe algo común en las expresiones que pueda ser factorizada. Par factorizar puede ser útil encontrar el m.c.m. de la expresiones algebraicas[1].

Diferencia de cuadrados

1) $n^2 + 6n + 9 - c^2 = (n + 3)^2 - c^2 = (n + 3 - c)(n + 3 + c)$

Trinomio cuadrado perfecto

Diferencia de cuadrados

2) $1 - a^2 + 2ax - x^2 = (1 - a)^2 - x^2 = (1 - a - x)(1 + a - x)$.

Trinomio cuadrado perfecto

3) $225a^2 - 169b^2 + 1 + 30a + 26bc - c^2 = 225a^2 + 30a + 1 - 169b^2 + 26bc - c^2 = (15a^2 + 1)^2 - (169b^2 + 26bc - c^2) = (15a + 1)^2 - (13b - c)^2 = (15a + 1 - (13b - c))(15a + 1 + (13b - c)) = (15a + 1 - 13b + c)(15a + 1 + 13b - c)$

[1] El Mínimo Común Múltiplo (mcm) de dos o más expresiones algebraicas se obtiene descomponiendo cada expresión en sus factores primos, el mcm es el resultado de multiplicar todos los factores primos, sean estos comunes o no, cada uno de los factores elevados a la máxima potencia, dentro de la descomposición factorial.

Ejemplos

a) $4ax^2 - 8axy + 4ay^2$, $6b^2x - 6b^2y$

Descomponiendo en factores cada una de ellas se obtiene:

$4ax^2 - 8axy + 4ay^2 = 2(2)a(x - y)^2$
$6b^2x - 6b^2y = 2(3)b^2(x - y)$

Y por lo tanto, el mcm será: $2(2)(3)ab^2(x - y)^2$.

b) $m^2 - mn$, $mn + n^2$, $m^2 - n^2$, procediendo de igual manera, se obtiene

$m^2 - mn = m(m - n)$
$mn + n^2 = n(m + n)$
$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$

Por lo que el mcm es: $mn(m + n)(m - n)$

c) $(x + 1)^3$, $x^3 + 1$, $x^2 - 2x - 3$, descomponiendo estas expresiones se obtiene

$(x + 1)^3 = (x + 1)(x + 1)(x + 1)$
$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$
$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$

Por tanto, el mcm es: $(x + 1)^3(x^2 - x + 1)(x - 3)$

4) $4x^2 + 25y^2 - 36 + 20xy = (4x^2 + 20xy + 25y^2) - 36 = (2x + 5y)^2 - 36 = (2x + 5y - 6)(2x + 5y + 6)$.

5) $16a^2 - 1 - 10m + 9x^2 - 24ax - 25m^2 = (16a^2 - 24ax + 9x^2) - 25m^2 - 10m - 1 = (16a^2 - 24ax + 9x^2) - (25m^2 + 10m + 1) = (4a - 3x)^2 - (5m + 1)^2 = ((4a - 3x) - (5m + 1))((4a - 3x) + (5m + 1) = (4a - 3x - 5m - 1)(4a - 3x + 5m -1)$

6) $a^2 - 6ay + 9y^2 - 4x^2 = (a - 3y)^2 - 4x^2 = ((a - 3y) - 2x)((a - 3y + 2x) = (a - 3y - 2x)(a - 3y + 2x)$

7) $4a^2 - x^2 + 4x - 4 = (4a^2) + (-x^2 + 4x -4) = (-x^2 + 4x - 4) + 4a^2 = 4a^2 - (x - 2)^2 = (2a - (x - 2))(2a + (x - 2)) = (2a - x + 2)(2a + x - 2)$.

8) $2am- x^2 - 9 + a^2 + m^2 - 6x = (a^2 + 2am + m^2)- x^2 - 6x - 9 = a^2 + 2am + m^2 - (x^2 + 6x + 9)= (a+m)^2 - (x + 3y)^2 = (a +m -x - 3y)(a + m +x+ 3y)$

5.9. FÓRMULA DEL BINOMIO DE NEWTON.

El binomio de Newton está dado por el desarrollo de un binomio elevado a la potencia n. determinado de la siguiente forma:

En el caso de la suma x + y, todos los términos tienen signo positivo.

$$(x + y)^n = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} y + a_{(n-2)} x^{(n-2)} y^2 + \ldots + a_2 x^2 y^{(n-2)} + a_1 x y^{(n-1)} + a_0 y^n$$

En el caso de la diferencia x – y, los términos van alternando sus signos. el primer término tiene signo positivo. el segundo negativo, el tercero positivo, y así sucesivamente.

$(x - y)^n = a_n x^n - a_{(n-1)} x^{(n-1)} y + a_{(n-2)} x^{(n-2)} y^2 - \ldots - a_2 x^2 y^{(n-2)} + a_1 x y^{(n-1)} - a_0 y^n$

Donde las constantes a_n se establecen, tomando como base el Triángulo de Pascal, como sigue:

1	**para $(x + y)^0$**
1 1	**para $(x + y)^1$**
1 2 1	**para $(x + y)^2$**
1 3 3 1	**para $(x + y)^3$**
1 4 6 4 1	**para $(x + y)^4$**
1 5 10 10 5 1	**para $(x + y)^5$**
.	
.	
.	

Por ejemplo desarrollando binomios.

a) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

b) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

c) $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

d) $(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

Observe como todos los coeficientes se toman del triángulo de Pascal y los grados de la primera variable van disminuyendo hasta llegar a cero, mientras que los grados de la segunda van creciendo hasta llegar al grado del binomio.

E J E R C I C I O S

Realice las siguientes factorizaciones:

1) $8m^2 - 12mn$

2) $2a^2x + 2ax^2 - 3ax$

3) $25x^7 - 10x^5 + 15x^3 - 5x^2$

4) $a^{20} - a^{16} + a^{12} - a^8 + a^4 - a^2$

5) $1 - x + 2a(1 - x)$

6) $a(x - 1) - (a + 2)(x - 1)$

7) $x(a+2) - a - 2 + 3(a+2)$

8) $3a - b^2 + 2b^2x - 6ax$

9) $20ax - 5bx - 2by + 8ay$

10) $a^2b^3 - n^4 + a^2b^3x^2 - n^4x^2 - 3a^2b^3x + 3n^4x$

11) $1 - 2a^3 + a^6$

12) $a^2 - 24am^2x^2 + 144m^4x^4$

13) $4 - 4(1-a) + (1-a)^2$

14) $25 - 36x^4$

15) $256a^{12} - 289b^4m^{10}$

16) $a^{2n} - b^{2n}$

17) $(a-b)^2 - (c-d)^2$

18) $1 - (5a+2x)^2$

19) $(2x+1)^2 - (x+4)^2$

20) $4x^2 + 25y^2 - 36 + 20xy$

21) $25 - x^2 - 16y^2 + 8xy$

22) $9x^2 + 4y^2 - a^2 - 12xy - 25b^2 - 10ab$

23) $16m^4 - 25m^2n^2 + 9n^4$

24) $121x^4 - 133x^2y^4 + 36y^8$

25) $81a^4 + 64b^4$

26) $c^2 + 5c - 24$

27) $20 + a^2 - 21^a$

28) $x^2 + 15x + 56$

29) $a^2 + a - 380$

30) $5 + 4x - x^2$

31) $25x^2 - 5(5x) - 84$

32) $x^4 + 5abx^2 - 36a^2b^2$

33) $20y^2 + y - 1$

34) $15a^2 - 8a - 12$

35) $14x^4 - 454x^2 - 14$

36) $30\,x^{10} - 91x^5 - 30$

37) $1 + 12a^2b - 6ab - 8a^3b^3$

38) $m^3 - 3am^2n + 3a^2mn^2 - a^3n^3$

39) $x^3 - 27$

40) $1 + 343n^3$

41) $x^9 + y^9$

42) $(2a - b)^3 - 27$

43) $243 - 32b^5$

44) $1 + 128x^{14}$

CAPÍTULO 6

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

Para comenzar el estudio de la resolución de ecuaciones, se considera necesario empezar planteando las definiciones pertinentes para el desarrollo del capítulo.

Ecuación.- Es una igualdad, en la que se presentan una o varias incógnitas, y que sólo se verifica para determinados valores de las incógnitas, cuenta siempre con un signo de igual.

Igualdad . - Es la expresión matemática que indica que dos expresiones algebraicas representan el mismo valor. En el caso que la igualdad se verifique siempre, independientemente de los valores que tengan las incógnitas, a esa igualdad se le llamará IDENTIDAD.

Toda ecuación está formada por dos miembros, el primer miembro es la expresión algebraica que aparece a la izquierda del signo igual, por lo tanto el segundo miembro es la expresión algebraica que aparece a la derecha del signo de igualdad. Cada miembro está formado por términos.

A las ecuaciones de primer grado se les puede clasificar de acuerdo a la estructura de la ecuación. así se tiene:

ECUACIONES NÚMERICAS, las cuales se identifican porque las únicas literales que aparecen son las variables;

ECUACIONES LITERALES, la característica de estas ecuaciones es que además de las variables aparecen dentro de sus términos otras literales;

ECUACIONES ENTERAS, son aquellas donde los coeficientes de todos sus términos son números enteros;

ECUACIONES FRACCIONARIAS, son aquellas ecuaciones donde al menos uno de los coeficientes de algún término es una expresión fraccionaria.

El **GRADO** de una ecuación de una sola incógnita está determinado por el exponente mayor al que esté elevado la incógnita.

Las ecuaciones de primer grado tienen una solución, por lo que se dice que solamente tienen una raíz, y por lo tanto resolver una ecuación de primer grado, equivale a decir encontrar la raíz que hace que la expresión se vuelva una identidad.

6.1. PROPIEDADES DE LAS IGUALDADES.

Como toda estructura matemática, las ecuaciones de primer grado poseen propiedades emanadas del siguiente axioma:

Teniendo una ecuación, si se desarrolla la misma operación con los mismos valores en cada miembro de la igualdad, entonces la igualdad se mantiene.

Propiedades:

a) Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo número, entonces la igualdad se mantiene.

Éste resultado, es consecuencia de la aplicación de las propiedades de los números reales, en específico, la existencia del inverso aditivo y la cerradura bajo la suma.

b) Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica o divide por una cantidad diferente de cero, entonces la igualdad se mantiene.

Este resultado, es consecuencia de la aplicación de las propiedades de los números reales, en específico, la existencia del inverso multiplicativo y la cerradura bajo la multiplicación.

c) Si a los miembros de una ecuación se les eleva a la misma potencia, o se les extrae la misma raíz, entonces la igualdad se mantiene.

Si se entiende a la potenciación como una multiplicación abreviada, entonces el resultado, es consecuencia de la aplicación de las propiedades de los números reales, en específico, la existencia del inverso multiplicativo y la cerradura bajo la multiplicación.

Para resolver una ecuación de primer grado, se propone la siguiente metodología de trabajo:

- Observe los dos miembros de la ecuación, y desarrolle las operaciones indicadas en cada uno de ellos como primer paso.

- Como segundo paso, seleccione alguno de los miembros, el cual le servirá para ubicar en ese lado de la ecuación a todos los términos que contengan a la variable, los otros términos quedarán en el otro miembro.

- Realice las operaciones indicadas entre los términos comunes.

- Si al término de esas operaciones, la variable presenta un coeficiente distinto de uno, entonces divida cada miembro por el valor del coeficiente, considere que para realizar esto no importa que el coeficiente sea positivo o negativo, pues lo que importa es que el coeficiente de la variable sea la unidad.

Antes de iniciar la solución de ecuaciones de manera inmediata se harán algunas ecuaciones utilizando claramente y paso a paso las propiedades de los conjuntos de números donde estén definidas,

Resuelva en el conjunto de los enteros Z.

a) $x + 9=1$
b) $3y +7 =10$
c) $2(p + 6) - 7 = 3 - 2(p + 3)$
d) $(v - 1)(v + 1) = (v + 1)(v + 2) + 3$

a)

$x + 9 = 1$	
$x + 9 - 9 = 1-9$	Propiedad inverso aditivo.
$x + 0 = -8$	Propiedad cerradura.
$x = -8$	

b)

$3y + 7 = 10$	
$3y + 7 - 7 = 10 - 7$	Propiedad inverso aditivo.
$3y + 0 = 3$	Propiedad cerradura.
$3y = 3$	

No hay inverso multiplicativo en Z.

c)

$2(p + 6) - 7 = 3 - 2(p + 3)$	
$2p +12 - 7 = 3 - 2p - 6$	Propiedad distributiva y cerradura.
$2p + 5 = - 2p - 3.$	Propiedad cerradura

$2p + 5 - 5 = 2p - 3 - 5$	Propiedad inverso aditivo.
$2p + 0 = - 2p - 8$	Propiedad cerradura.
$2p + 2p = - 2p + 2p - 8$	Propiedad inverso aditivo.
$4p = 0 - 8$	Propiedad cerradura.
$4p = -8$	Propiedad cerradura.

No hay inverso multiplicativo en Z.

d)

$(v - 1)(v + 1) = (v + 1)(v + 2) + 3$	
$v^2 + v - v - 1 = v^2 + 2v + v + 2 + 3$	Propiedad distributiva.
$v^2 - 1 = v^2 + 3v + 5$	Propiedad cerradura.
$v^2 - v^2 - 1 = v^2 - v^2 + 3v + 5$	Propiedad inverso aditivo.
$0 - 1 = 0 + 3v + 5$	Propiedad cerradura.
$-1 - 3v = 3v - 3v + 5$	Propiedad inverso aditivo.
$-1 - 3v = 0 + 5$	Propiedad cerradura.
$-1 + 1 - 3v = 5 - 1$	Propiedad inverso aditivo.
$0 - 3v = 4$	Propiedad cerradura.
$-3v = 4$	

No hay inverso multiplicativo en Z.

Resolución de ecuaciones en el conjunto de los racionales:

a)

$8x - 9 = 5x - 3$	
$8x - 9 - 5x = 5x - 5x - 3$	Inverso aditivo
$3x - 9 = - 3$	Conmutatividad y cerradura de la adición.
$3x - 9 + 9 = - 3 + 9$	Inverso aditivo
$3x + 0 = 6$	Cerradura, neutro aditivo
$3x = 6$	Cerradura
$\frac{3}{3}x = \frac{6}{3}$	Inverso multiplicativo
$x = 2 \in Q$	

Este ejemplo se desarrolló aplicando las propiedades del conjunto, se verá que en cada renglón se aplicaron a lo más dos de ellas aunque no sean mencionadas.

b)

$4 + \frac{x}{2} = 3\left(\frac{x}{7} + \frac{3x}{2} - 1\right) + x$	
$4 + \frac{x}{2} = \frac{3(x)}{7} + \frac{3(3x)}{2} - 3(1) + x$	Propiedad de distribución
$4 + \frac{x}{2} = \frac{3x}{7} + \frac{9x}{2} - 3 + x$	Cerradura del pructo

$4+\frac{x}{2}=\frac{3x}{7}+\frac{9x}{2}+x-3$	P. Comutatividad de la adición
$4+\frac{x}{2}=\frac{2(3x)+7(9x)+14x}{14}-3$	Cerradura de la adición
$4+\frac{x}{2}=\frac{6x+63x+14x}{14}-3$	Cerradura del producto
$4+\frac{x}{2}=\frac{83x}{14}-3$	Cerradura de la adición
$4+\frac{x}{2}-\frac{83x}{14}=\frac{83x}{14}+\frac{83x}{14}-3$	Agregar el inverso aditivo
$4+\frac{x}{2}-\frac{83x}{14}=0-3$	P. Cerradura adición y consecuencia del inverso
$4+\frac{x}{2}-\frac{83x}{14}=-3$	Consecuencia del neutro aditivo
$4+\frac{7(x)-83x}{14}=-3$	Cerradura de la adición
$4-\frac{76x}{14}=-3$	Cerradura de la adición
$-4+4-\frac{76x}{14}=-3-4$	Aumentar el inverso aditivo
$0-\frac{76x}{14}=-3-4$	Propiedad de ccerradura adición y consecuencia del inverso
$-\frac{76x}{14}=-7$	Consecuencia del neutro aditivo
$-\frac{76}{14}\left(\frac{-14}{76}\right)x=-7\left(\frac{-14}{76}\right)$	Aumento de una constante (inverso multiplicativo)
$(1)x=-7\left(\frac{-14}{76}\right)$	Consecuencia del inv. mult.
$x=\frac{98}{76}$	Cerradura del producto

Como puede verse en este ejercico las propiedades de los racionales fueron aplicadas paso a paso.

Ejercicio : Poner al lado de cada paso algebraico el nombre de la propiedad ocupada en el conjunto de $\Re$.

a)

$6x - 7 = 2x + 5$	
$6x - 7 + 7 = 2x + 5 + 7$	Inverso aditivo
$6x = 2x + 12$	Cerradura de la adición y neutro aditivo
$6x - 2x = 2x - 2x + 12$	Inverso aditivo
$4x = 0 + 12$	Cerradura de la sustracción.
$4x = 12$	Neutro aditivo
$\frac{1}{4}(4x) = 12\left(\frac{1}{4}\right)$	Inverso multiplicativo
$x = 3$	Cerradura del producto

b)

$(8x - 2)(3x + 4) = (4x + 3)(6x - 1)$	
$24x^2 + 32x - 6x - 8 = 24x^2 - 4x + 18x - 3$	Distributiva y cerradura del producto.
$24x^2 + 26x - 8 = 24x^2 + 14x - 3$	Cerradura de la adición.
$-24x^2 + 24x^2 + 26x - 8 = 24x^2 + 24x^2 + 14x - 3$	Inverso aditivo.
$0 + 26x\ 8 = 0 + 14x - 3$	Cerradura de la adición.
$26x - 8 = 14x - 3$	Existencia neutro aditivo.
$26x - 8 + 8 = 14x - 3 + 8$	Inverso aditivo.
$26x + 0 = 14x + 5$	Cerradura de la adición.
$26x = 14x + 5$	Neutro aditivo.
$26x - 14x = 14x - 14x + 5$	Inverso aditivo.
$12x = 0 + 5$	Cerradura de la sustracción.
$12x = 5$	Neutro aditivo.
$\left[\frac{1}{12}\right](12x) = 5\left[\frac{1}{12}\right]$	Inverso multiplicativo.
$x = \frac{5}{12}$	Cerradura del producto.

c)

$6(x - 3) + 3 = 2(x - 1) + x$	
$6x - 18 + 3 = 2x - 2 + x$	Distributiva y cerradura del producto.
$6x - 15 = 2x + x - 2$	Cerradura de la adición y p. Conmutativa.
$6x - 15 = 3x - 2$	Cerradura de la adición.
$-6x + 6x - 15 = -6x\ 3x - 2$	Inverso aditivo.
$0 - 15 = -3x - 2$	Cerradura de la adición.

$-15+0=-3x-2$	Conmutativa de la adición.
$-15=-3x-2$	Neutro aditivo.
$3x-15=-3x+3x-2$	Inverso aditivo.
$3x-15=0-2$	Cerradura de la adición.
$3x-15=-2+0$	Conmutatividad de la adición.
$3x-15=-2$	Neutro aditivo.
$3x-15+15=-2+15$	Inverso aditivo.
$3x+0=13$	Cerradura de la adición.
$3x=13$	Neutro aditivo.
$\left(\frac{1}{3}\right)(3x)=13\left(\frac{1}{3}\right)$	Inverso multiplicativo.
$x=\frac{13}{3}$	Cerradura del producto.

6.2. ECUACIONES CON COEFICIENTES ENTEROS.

Para resolver ecuaciones enteras, utilice la metodología propuesta.

1)
$$8x-4+3x=7x+x+14$$
$$11x-4=8x+14$$
$$11x-8x=4+14$$
$$3x=18$$
$$x=\frac{18}{3}$$
$$x=6$$

2)
$$3x+101-4x=33+108-16x-100$$
$$-x+101=41-16x$$
$$-x+16x=41-101$$
$$15x=-60$$
$$x=-\frac{60}{15}$$
$$x=-4$$

3)
$$30x-(-x+6)+(-5x+4)=-(5x+6)-(-8x+3)$$
$$30x+x-6-5x+4=-5x-6+8x-3$$
$$26x-2=3x-9$$

$$26x - 3x = -9 + 2$$
$$23x = -7$$
$$x = -\frac{7}{23}$$

4)
$$11x + 5x - 1 = 65x - 36$$
$$16x - 1 = 65x - 36$$
$$16x - 65x = -36 + 1$$
$$-49x = -35$$
$$x = \frac{-35}{-49}$$
$$x = \frac{5}{7}$$

5)
$$16 + 7x - 5 + x = 11x - 3 - x$$
$$11 + 8x = 10x - 3$$
$$8x - 10x = -3 - 11$$
$$-2x = -14$$
$$x = \frac{-14}{-2}$$
$$x = 7$$

6)
$$(3x + 8 - (-15 + 6x - (-3x + 2))) = (-3 + 2x - (5x + 4)) - 4$$
$$(3x + 8 - (-15 + 6x + 3x - 2)) = (-3 + 2x - 5x - 4) - 4$$
$$(3x + 8 - (-17 + 9x)) = (-7 - 3x) - 4$$
$$(3x + 8 + 17 - 9x) = -7 - 3x - 4$$
$$(-6x + 25) = -11 - 3x$$
$$6x - 25 = 11 + 3x$$
$$3x = 36$$
$$x = \frac{36}{3}$$
$$x = 12$$

7)
$$15x - 10 = 6x - (x + 2) - x + 3$$
$$15x - 10 = 6x - x - 2 - x + 3$$

$$15x - 10 = 4x + 1$$
$$15x - 4x = 1 + 10$$
$$11x = 11$$
$$x = \frac{11}{11}$$
$$x = 1$$

8)

$$10(x - 9) + x - 3 = -7(2 - (x + 4)) + 3x$$
$$10x - 90 + x - 3 = -7(2 - x - 4) + 3x$$
$$11x - 93 = -14 + 7x + 28 + 3x$$
$$11x - 93 = 10x + 14$$
$$11x - 10x = 14 + 93$$
$$x = 107$$

9)

$$5x - 2(x + 4) - 7x + 1 = -4(x - 3 + 2x - 1)$$
$$5x - 2x - 8 - 7x + 1 = -4x + 12 - 8x + 4$$
$$-4x - 7 = -12x + 16$$
$$-4x + 12x = 16 + 7$$
$$8x = 23$$
$$x = \frac{23}{8}$$

10)

$$3x + (-5x - 4(x + 3)) = -(5x + 6) - (7x - 5 + (4x - 1) - (3x + 2))$$
$$3x + (-5x - 4x - 12) = -(5x + 6) - (7x - 5 + 4x - 1 - 3x - 2)$$
$$3x - 5x - 4x - 12 = -5x - 6 - 7x + 5 - 4x + 1 + 3x + 2$$
$$-6x - 12 = -13x + 2$$
$$-6x + 13x = 2 + 12$$
$$7x = 14$$
$$x = \frac{14}{7}$$
$$x = 2$$

Para la resolución de las siguientes ecuaciones habrá que auxiliarse de:

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2}$$
$$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 = a^2 + ab - ba - b^2$$

1)

$$(3x - 1)^2 - 5(x - 2) - (2x + 3)^2 - (5x + 2)(x - 1) = 0$$
$$9x^2 - 6x + 1 - 5x + 10 - 4x^2 - 12x - 9 - (5x^2 - 5x + 2x - 2) = 0$$
$$5x^2 - 23x + 2 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$4 - 20x = 0$$
$$-20x = -4$$
$$x = \frac{4}{20}$$
$$x = \frac{1}{5}$$

2)

$$7(x - 4)^2 - 3(x + 5)^2 = 4(x + 1)(x - 1) - 2$$
$$7(x^2 - 8x + 16) - 3(x^2 + 10x + 25) = 4(x^2 - 1) - 2$$
$$7x^2 - 56x + 112 - 3x^2 - 30x - 75 = 4x^2 - 4 - 2$$
$$4x^2 - 86x + 37 = 4x^2 - 6$$
$$4x^2 - 4x^2 - 86x = -6 - 37$$
$$-86x = -43$$
$$x = \frac{43}{86}$$
$$x = \frac{1}{2}$$

3)

$$2(3x + 3) - 4(5x - 3) = x(x - 3) - x(x + 5)$$
$$6x + 6 - 20x + 12 = x^2 - 3x - x^2 - 5x$$
$$-14x + 18 = -8x$$
$$-14x + 8x = -18$$
$$-6x = -18$$
$$x = \frac{-18}{-6}$$
$$x = 3$$

4) $-3(2x + 7) + (-5x + 6) - 8(1 - 2x) - (x - 3) = 0$

$$-6x - 21 - 5x + 6 - 8 + 16x - x + 3 = 0$$
$$4x - 20 = 0$$
$$4x = 20$$
$$x = \frac{20}{4}$$
$$x = 5$$

5) $$(x-2)^2 + x(x-3) = 3(x+4)(x-3) - (x+2)(x-1) + 2$$
$$x^2 - 4x + 4 + x^2 - 3x = 3(x^2 - 3x + 4x - 12) - (x^2 - x + 2x - 2) + 2$$
$$2x^2 - 7x + 4 = 3x^2 - 9x + 12x - 36 - x^2 + x - 2x + 2 + 2$$
$$2x^2 - 7x + 4 = 2x^2 + 2x - 32$$
$$2x^2 - 2x^2 - 7x - 2x = -32 - 4$$
$$-9x = -36$$
$$x = \frac{-36}{-9}$$
$$x = 4$$

6) $$3(5x-6)(3x+2) - 6(3x+4)(x-1) - 3(9x+1)(x-2) = 0$$
$$(15x - 18)(3x + 2) - 6(3x^2 - 3x + 4x - 4) - 3(9x^2 - 18x + x - 2) = 0$$
$$(45x^2 + 30x - 54x - 36) - 6(3x^2 - 3x + 4x - 4) - 3(9x^2 - 18x + x - 2) = 0$$
$$45x^2 + 30x - 54x - 36 - 18x^2 + 18x - 24x + 24 - 27x^2 + 54x - 3x + 6 = 0$$
$$21x - 6 = 0$$
$$21x = 6$$
$$x = \frac{6}{21}$$
$$x = \frac{2}{7}$$

7) $$14x - (3x - 2) - (5x + 2 - (x - 1)) = 0$$
$$14x - 3x + 2 - (5x + 2 - x + 1) = 0$$
$$11x + 2 - 5x - 2 + x - 1 = 0$$
$$7x - 1 = 0$$
$$7x = 1$$
$$x = \frac{1}{7}$$

8)

$$(x+1)(x+2)(x-3)=(x-2)(x+1)(x+1)$$
$$(x^2+2x+x+2)(x-3)=(x-2)(x^2+2x+1)$$
$$(x^2+3x+2)(x-3)=x^3+2x^2+x-2x^2+4x-2$$
$$x^3-3x^2+3x^2-9x+2x-6=x^3-3x-2$$
$$x^3-7x-6=x^3-3x-2$$
$$x^3-x^3-7x+3x=-2+6$$
$$-4x=4$$
$$x=\frac{4}{-4}$$
$$x=-1$$

9)

$$(x+1)^3-(x-1)^3=6x(x-3)$$
$$(x^3+3x^2+3x+1)-(x^3-3x^2+3x-1)=6x^2-18x$$
$$x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1=6x^2-18x$$
$$-18x+6x^2-6x^2=-2$$
$$18x=-2$$
$$18x=-2$$
$$x=-\frac{2}{18}$$
$$x=-\frac{1}{9}$$

10)

$$3(x-2)^2(x+5)=(x+1)^2(x-1)+3$$
$$3(x^2-4x+4)(x+5)=3(x^2+2x+1)(x-1)+3$$
$$3(x^3+5x^2-4x^2-20x+4x+20)=3(x^3-x^2+2x^2-2x+x-1)+3$$
$$3x^3+15x^2-12x^2-60x+12x+60=3x^3-3x^2+6x^2-6x^2-6x+3x-3+3$$
$$3x^3+3x^2-48x+60=3x^3-3x^2-3x$$
$$-3x^3+3x^3+3x^2-48x+60=3x^2-3x$$
$$-3x^2+3x^2-48x+60=-3x$$
$$-48x+3x=-60$$
$$-45x=-60$$
$$x=\frac{-60}{-45}$$
$$x=\frac{4}{3}$$

6.3. ECUACIONES CON COEFICIENTES FRACCIONARIOS.

Para la resolución de este tipo de ecuaciones se sugiere el siguiente procedimiento:

- Obtenga el mínimo común múltiplo de todos los denominadores existentes en un miembro de la ecuación, esto se realiza para los dos miembros.
- Realice las operaciones indicadas en cada miembro de la ecuación.
- Realice la multiplicación por cada uno de los mínimos comunes múltiplos, obteniéndose una ecuación entera.
- Proceda como se sugirió al inicio del presente capítulo.

Haciendo algunos ejemplos

1)

$$\frac{x-2}{4}+\frac{3x+2}{6}=0$$
$$\frac{3(x-2)+2(3x+2)}{12}=0$$
$$\frac{3x-6+6x+4}{12}=0$$
$$\frac{9x-2}{12}=0$$
$$9x-2=0(12)$$
$$9x-2=0$$
$$9x=2$$
$$x=\frac{2}{9}$$

2)

$$\frac{3}{4}x-\frac{1}{5}+2x=\frac{5}{4}-\frac{3}{20}x$$
$$\frac{3}{4}x+2x+\frac{3}{20}x=\frac{5}{4}+\frac{1}{5}$$
$$\frac{15x+40x+3x}{20}=\frac{25+4}{20}$$

$$\frac{58x}{20}=\frac{29}{20}$$

$$x=\frac{19}{20}\left(\frac{20}{58}\right)$$

$$x=\frac{1}{2}$$

3)

$$4-\frac{10x+1}{6}=4x-\frac{16x+3}{4}$$

$$\frac{24-10x-1}{6}=\frac{16x-16x-3}{4}$$

$$23-10x=-\frac{3}{4}(6)$$

$$23-10x=-\frac{9}{2}$$

$$-10x=\frac{-9-46}{2}$$

$$-10x=-\frac{55}{2}$$

$$x=\frac{22}{20}$$

$$x=\frac{11}{10}$$

4)

$$\frac{3}{5}\left(\frac{2x-1}{6}\right)-\frac{4}{3}\left(\frac{3x+2}{3}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{x-2}{3}\right)+\frac{1}{5}=0$$

$$\frac{6x-3}{30}-\frac{12x+8}{9}-\frac{x-2}{15}+\frac{1}{5}=0$$

$$\frac{2x-1}{10}-\frac{12x+8}{9}-\frac{x-2}{15}+\frac{1}{5}=0$$

$$\frac{18x-9-120x-80-6x+12+18}{90}=0$$

$$\frac{-108x-59}{90}=0$$

$$-108x-59=0(90)$$

$$-108x=59$$

$$x = -\frac{59}{108}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

5)

$$\frac{60 - 3x - 5}{6} = \frac{72 + 22 - 3x}{24}$$

$$\frac{55 - 3x}{6} = \frac{94 - 3x}{24}$$

$$(55 - 3x)24 = (94 - 3x)6$$

$$(55 - 3x)24 = (94 - 3x)6$$

$$1320 - 72x = 564 - 18x$$

$$-72x + 18x = 564 - 1320$$

$$-54x = -876$$

$$x = \frac{876}{54}$$

$$x = \frac{438}{27}$$

6)

$$\frac{5}{4}x - \frac{3}{17}(x - 20) - (2x - 1) = \frac{x + 24}{34}$$

$$\frac{5}{4}x - \frac{3}{17}x + \frac{60}{17} - (2x - 1) = \frac{x + 24}{34}$$

$$\frac{85x - 12x + 240 - 68(2x - 1)}{68} = \frac{x + 24}{34}$$

$$\frac{85x - 12x + 240 - 136x + 68}{68} = \frac{x + 24}{34}$$

$$\frac{-63}{68}x + \frac{308}{68} = \frac{x + 24}{34}$$

$$\frac{-63x}{68} - \frac{x}{34} = \frac{24}{34} - \frac{308}{68}$$

$$\frac{-63x - 2x}{68} = \frac{48 - 308}{68}$$

$$\frac{-65x}{68} = -\frac{260}{68}$$

$$x = -\frac{260}{68}\left(-\frac{68}{65}\right)$$

$$x = \frac{260}{65}$$

$$x = \frac{52}{13}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

6.4. ECUACIONES CON COEFICIENTES LITERALES.

Para la resolución de las ecuaciones literales de primer grado, se procede de igual forma que para las ecuaciones numéricas fraccionarias, salvo el hecho que la factorización es fundamental, ya que no se pueden hacer cerraduras de productos y de sumas.

Ejemplos:

1)

$$a(x + a) - x = a(a + 1) + 1$$
$$ax + a^2 - x = a^2 + a + 1$$
$$ax - x = a^2 + a + 1 - a^2$$
$$x(a - 1) = a + 1$$
$$x = \frac{a + 1}{a - 1}$$

2)

$$a(x + b) + x(b - a) = 2b(2a - x)$$
$$ax + ab + xb - xa = 4ab - 2bx$$
$$ab + xb = 4ab - 2bx$$
$$xb + 2bx = 4ab - ab$$
$$3bx = 3ab$$
$$x = \frac{3ab}{3b}$$
$$x = a$$

3)

$$x^2 + a^2 = (a + x)^2 - a(a - 1)$$
$$x^2 + a^2 = a^2 + 2ax + x^2 - a^2 + a$$
$$x^2 - 2ax - x^2 = a^2 - a^2 + a - a^2$$
$$-2ax = a - a^2$$
$$-2ax = a(1 - a)$$

$$x = \frac{a(1-a)}{-2ax}$$
$$x = \frac{a-1}{2}$$

4)
$$x(a+b) - 3 - a(a-2) = 2(x-1) - x(a-b)$$
$$ax + bx - 3 - a^2 + 2a = 2x - 2 - ax + bx$$
$$ax + bx - 2x + ax - bx = -2 + 3 - 2a + a^2$$
$$2ax - 2x = a^2 - 2a + 1$$
$$x(2a-2) = (a-1)^2$$
$$x = \frac{(a-1)^2}{(2a-2)}$$
$$x = \frac{a-1}{2}$$

5)
$$x(3-2b) - 1 = x(2-3b) - b^2$$
$$3x - 2bx - 1 = 2x - 3bx - b^2$$
$$3x - 2bx - 2x + 3bx = 1 - b^2$$
$$x + bx = 1 - b^2$$
$$x(1+b) = (1+b)(1-b)$$
$$x = 1 - b$$

6.5. ECUACIONES DE FORMA RACIONAL QUE CONDUCEN A SOLUCIONES DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

1)
$$\frac{3}{5} + \frac{3}{2x-1} = 0$$
$$\frac{3(2x-1) + 15}{5(2x-1)} = 0$$
$$6x - 3 + 15 = 0$$
$$6x + 12 = 0$$
$$6x = -12$$
$$x = -\frac{12}{6}$$
$$x = -2$$

2)

$$\frac{2}{4x-1}=\frac{3}{4x+1}$$

$$2(4x+1)=3(4x-1)$$
$$8x+2=12x-3$$
$$8x-12x=-3-2$$
$$-4x=-5$$
$$x=\frac{5}{4}$$

3)

$$\frac{5x+8}{3x+4}=\frac{5x+2}{3x-4}$$
$$(3x-4)(5x+8)=(3x+4)(5x+2)$$
$$15x^2+24x-20x-32=15x^2+6x+20x+8$$
$$4x-32=26x+8$$
$$4x-26x=32+8$$
$$-22x=40$$
$$x=-\frac{40}{22}$$
$$x=-\frac{20}{11}$$

4)

$$\frac{1}{3x-3}+\frac{1}{4x+4}=\frac{1}{12x-12}$$
$$\frac{1}{3x-3}+\frac{1}{4x+4}-\frac{1}{12x-12}=0$$
$$\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{12(x-1)}=0$$
$$\frac{4(x+1)+3(x-1)-(x+1)}{12(x-1)(x+1)}=0$$

$$\frac{4x+4+3x-3-x-1}{12(x-1)(x+1)}=0$$
$$4x+4+3x-3-x-1=0$$
$$6x=0$$
$$x=0$$

E J E R C I C I O S

A.- Estando en el conjunto de los racionales, mencione que propiedades fueron ocupadas en cada paso de la resolución de la ecuación:

$$-\frac{5x+7}{3x+1}+\frac{3x}{3x+1}=2$$ ______________________

$$\frac{3x}{3x+1}-\frac{5x+7}{3x+1}=2$$ ______________________

$$\frac{3x-(5x+7)}{3x+1}=2$$ ______________________

$$\frac{3x-5x+7}{3x+1}=2$$ ______________________

$$\frac{-2x+7}{3x+1}=2$$ ______________________

$$\frac{-2x+7}{3x+1}(3x+1)=2(3x+1)$$ ______________________

$$(-2x+7)(1)=2(3x)+2(1)$$ ______________________

$$-2x+7=6x+2$$ ______________________

$$-2x+7-7=6x+2-7$$ ______________________

$$-2x+0=6x-5$$ ______________________

$$-2x-6x=6x-6x-5$$ ______________________

$$-8x=0-5$$ ______________________

$$-8x=-5$$ ______________________

$$-8x\left(\frac{-1}{8}\right)=-5\left(-\frac{1}{8}\right)$$ ______________________

$$(1)x=\frac{5}{8}$$ ______________________

$$x = \frac{5}{8}$$ ____________________

B.- Resuelva en los racionales, ejemplificando paso a paso la propiedad a ocupar en la resolución.

$$4 + \frac{x}{2} = 3x + \frac{1}{2}$$

C.- Resuelva paso a paso las siguientes ecuaciones :

a) $x - (2x + 1) = 8 - (3x + 3)$
b) $(5 - 3x) - (-4x + 6) = (8x + 11) - (3x - 6)$
c) $15x + (-6x + 5) - 2 - (-x + 3) = -(7x + 23) - x + (3 - 2x)$
d) $16x - [3x - (9 - 9x)] = 30x + [-(3x + 2) - (x + 3)]$
e) $9x - (5x + 1) - \{2 + 8x - (7x - 5)\} + 9x = 0$
f) $71 + \{-5x + (-2x + 3)] = 25 - [-(3x + 4) - (4x + 3)]$

D.- Resolver las siguientes ecuaciones

1) $9y - 11 = -10 + 12y$

2) $5y + 6y - 81 = 7y + 102 + 65y$

3) $8x - 15x - 30x - 51x = 53x + 31x - 172$

4) $15x + (-6x + 5) - 2 - ((-x + 3) = -(7x + 23) - x + (3 - 2x)$

5) $-\{3x + 8 - [-15 + 6x - (-3x + 2) - (5x + 4)] - 29\} = -5$

6) $7(18 - x) - 6(3 - 5x) = -(7x + 9) - 3(2x + 5) - 12$

7) $(x + 1)(2x + 5) = (2x + 3)(x - 4) + 5$

8) $2(x - 3)^2 - 3(x + 1)^2 + (x - 5)(x - 3) + 4(x^2 - 5x + 1) = 4x^2 - 12$

9) $5(1 - x)^2 - 6(x^2 - 3x - 7) = x(x - 3) - 2x(x + 5) - 2$

10) $3(x-2)^2(x+5) = 3(x+1)^2(x-1) + 3$

11) $\frac{2}{3x} - \frac{5}{x} = \frac{7}{10} + \frac{3}{2x} + 1$

12) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = -\frac{x-5}{5}$

13) $\frac{4x+1}{3} = \frac{4x-1}{3} - \frac{13+2x}{6} - \frac{x-3}{2}$

14) $\frac{3}{5} + \frac{2}{2x} = \frac{3}{5x} + 1$

15) $\frac{3(2x-1)}{30} - \frac{4(3x+2)}{12} - \frac{x-2}{15} + \frac{1}{5} = 0$

16) $\frac{10x-7}{15x+3} = \frac{3x-8}{12} - \frac{10x-4}{20x+4}$

17) $\frac{1+2x}{3x^2} - \frac{1-2x}{1-3x} = -\frac{3x-14}{1-9x^2}$

18) $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$

19) $1 - ax^2 = (1-3x)(1+3x)$

20) $\frac{3x-1}{x^2+7x+12} = \frac{1}{2x+6} + \frac{7}{6x+24}$

CAPÍTULO 7

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE CONDUCEN A ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

7.1. PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS

Ya conocidas las técnicas de resolución de ecuaciones de primer grado, lo importante es la aplicación de esto en la resolución de problemas que conducen a este tipo de ecuaciones.

Lo primero que se aplicará es traducir frases que comúnmente se utilizan en los textos del problema y que se deben manejar en lenguaje matemático.
Así por ejemplo cuando se dice:

a) Tres menos que 5 veces un número se escribiría:
   x = número
   5x = 5 veces el número
   La frase quedaría = 3 – 5x

b) La suma de dos números er . s consecutivos
   x = primer entero de lo . secutivos
   x + 1 = Segundo entero qu . gue al primero
   La frase quedaría = x + x + .

c) El número de mujere en una b. da es 6 más que el doble de varones.
   x = número de varones
   2x = doble de varones
   La oración quedaría = 6 + 2x

Como se observa lo que se tiene . . ir haciendo es interpretar frases u oraciones que impliquen la estructura matemática.

Cuando se lee un texto de un problema lo importante es desestructurar en frases que permitan encontrar las relaciones entre las variables que puedan conducir a construir la ecuación que resuelva el problema.

Revisando un caso y como se desglosa queda:
Ejemplo 1

Este año Pepe vendió cinco menos que el doble de lo que vendió el año pasado.

PASO 1. Definir la variable que sirva de intérprete del problema

Llamando x = a lo que vendió el año pasado

PASO 2. Encontrar en el texto la frase que relacione la variable
Este año vendió cinco menos que el doble de lo que vendió el año pasado:
Vendió este año = $2x - 5$

Ejemplo 2
Ciento veintidos camiones se querían enviar en ferrocarril, pero dos de ellos no caben en los carros de ferrocarril. Había 8 carros de ferrocarril, cada uno con el mismo número de camiones. ¿Cuántos camiones había en cada carro?

PASO 1: La variable estaría indicada en el texto: cada uno con el mismo número de camiones.
Sea x = Número de camiones en cada carro de ferrocarril

PASO 2: Había 8 carros de ferrocarril = $8x$
Total de camiones = 122
Total de camiones debe ser igual a los que hay en cada carro de ferrocarril más los dos que no caben, esto se expresa como:
$8x + 2 = 122$

7.2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cuando se tiene un problema lo primero que se debe de hacer es leerlo completamente, para que se pueda determinar qué variables dependen de otras y cómo se plantearía el problema en la pregunta que se quiere resolver.

7.2.1. PROBLEMAS SOBRE NÚMEROS

❖ 1.- *La suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en 8. Hallar los números.*

En el problema se nota que hay dos números uno menor y otro mayor el cual es más grande por 8 unidades. esto se plantearía:

x = número menor.
x+8 = número mayor.

La frase que relaciona es que la suma de los dos números es 106:

$$\mathbf{x + x + 8 = 106}$$
$$2x + 8 = 106$$
$$2x = 106 - 8$$
$$2x = 98$$
$$x = \frac{98}{2}$$
$$x = 49$$

Por lo tanto:

El número menor = x = 49 El número mayor = x + 8 = 57

❖ 2.- *Hallar dos números enteros consecutivos cuya suma sea 103.*

x = primer número de los consecutivos
x + 1 = segundo número de los consecutivos
La frase quedaría

$$\mathbf{x + x + 1 = 103}$$
$$2x = 103 - 1$$
$$x = \frac{102}{2}$$
$$x = 51$$

Por lo tanto:

El primero de los números consecutivos = x = 51 El segundo de los números consecutivos = x + 1 = 52

❖ 3.- *Hallar dos números enteros pares consecutivos cuya suma sea 194.*

x = entero par
$x + 2$ = entero par consecutivo.

La suma de los enteros es

$$\mathbf{x + x + 2 = 194}$$
$$2x + 2 = 194$$
$$2x = 194 - 2$$
$$x = \frac{192}{2}$$
$$x = 96$$

Por lo tanto:

El primer entero par = $x = 96$
El entero par consecutivo del anterior = $x + 2 = 98$

❖ 4.- *Dividir 454 en 3 partes sabiendo que la menor es 15 unidades más pequeña que la de en medio y 70 unidades más pequeña que la mayor.*

Para definir las variables hay que notar que existe dependencia entre las variables. La menor depende de la de en medio, así que la principal variable es la de en medio.
$x - 15$ = número pequeño
x = número de en medio
$x + 70 - 15$ = número mayor
Como se pide dividir 454 en tres partes, implica que esas tres partes sumadas dan 454, así que la ecuación es esta suma ya definidas las variables.

$$\mathbf{x - 15 + x + x + 70 - 15 = 454}$$
$$3x + 40 = 454$$
$$3x = 454 - 40$$
$$3x = 414$$
$$x = \frac{414}{3}$$
$$x = 138$$

por lo tanto:

El número más pequeño = $x - 15 = 123$
El número de en medio $x = 138$
El número mayor = $x + 70 - 15 = 193$

❖ 5.- *Dividir 642 en dos partes tales que cada una exceda a la otra en 36 unidades.*

x = primer número
x + 36 = segundo número
La frase principal es dividir 642 en dos partes, por lo que la ecuación es sumar las dos variables e igualarlas a 642.

$$\mathbf{x + x + 36 = 642}$$
$$2x = 642 - 36$$
$$2x = 606$$
$$x = \frac{606}{2}$$
$$x = 303$$

Por lo tanto:

El primer número = x = 303
El segundo número = x + 36 = 339

❖ 6.- *La suma de dos números es 121, cuando el número mayor se suma al cuádruple del menor la suma es 235. Hallar el número mayor.*

x= número mayor
121-x= número menor

$$x + 4(121 - x) = 235$$
$$x + 484 - 4x = 235$$
$$-3x = 235 - 484$$
$$-3x = -249$$
$$x = \frac{-249}{-3}$$
$$x = 83$$

Por lo tanto:

El número mayor = x = 83
El número menor = 121 – x = 121 – 83 = 38

❖ 7.- *Dividir el número 106 en dos partes tales que la mayor exceda a la menor en 24.*

x = parte mayor del número

106 - x = parte menor del número

$$\mathbf{x - 24 = 106 - x}$$
$$x = 106 - x + 24$$
$$106 - x + 24 = x$$
$$- x - x = 130$$
$$- 2x = - 130$$
$$x = \frac{130}{2}$$
$$x = 65$$

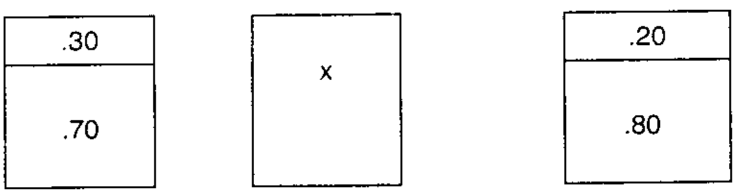
Por lo tanto:

El número mayor = x = 65 El número menor = 106 – x = 106 – 65 = 41

7.2.2. PROBLEMAS SOBRE MEZCLAS

❖ 1.- *¿Qué tanta agua se debe agregar a 2 litros de un desinfectante que contiene 30% de ingrediente activo para formar una solución que contenga sólo 20%?.*

x = agua a agregar



La ecuación debe reflejar la cantidad de ingrediente activo, así que del dibujo la composición indica que de dos litros hay que quitar el 70% y agregar agua para así disminuir la cantidad de ingrediente activo para llegar a la composición solicitada.

$$\mathbf{(2)(.70) + x = (2 + x)(.80)}$$
$$1.40 + x = 1.60 + 0.80x$$
$$x - 0.80x = 1.60 - 1.40$$
$$x = \frac{0.2}{0.2}$$

$$x = 1$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{Hay que agregar 1 litro de agua.}}$$

❖ 2.- *En una lechería hay 200 kg. de leche con 3% de grasa. ¿Cuántos kg. de leche descremada se deben extraer para que el resto tenga un 3.6% de grasa?.*

x = leche descremada

0.97		
.03	x	.036

Lo importante es conseguir la mezcla deseada, así que se pone la cantidad de grasa y esto es la multiplicación de 200 kilogramos de leche por su composición por kilo (0.97) a esto hay que quitarle la leche y lograr la composición deseada.

$$\mathbf{200(.97) - x = (200 - x)(0.964)}$$
$$194 - x = 192.8 - 0.964x$$
$$-x + 0.964x = 192.8 - 194$$
$$-0.036x = -1.2$$
$$x = \frac{-1.2}{-0.036}$$

$$x = \frac{100}{3}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{x = \frac{100}{3} \text{ kg. de leche descremada}}$$

❖ 3.- *Una solución contiene 40 gramos de azúcar en 200 gramos de agua. ¿Qué tanta azúcar se debe agregar para que la solución sea al 50%?*

x = azúcar

40grms de azúcar	agua	Nueva mezcla al 50% de azúcar

$$0.2(200)+x=(200+x)(0.5)$$
$$40+x=100+\frac{x}{2}$$
$$x-\frac{x}{2}=60$$
$$\frac{x}{2}=60$$
$$x=120$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{Agregar 120 gramos de azúcar}}$$

- *4.- En el oro de 14 quilates hay 14 partes de oro y 10 partes de otro metal usualmente cobre, la aleación de algunas monedas es de 90% de oro y 10% de cobre. ¿Cuántos gramos de oro puro se deben agregar a 24 gramos de oro de 14 quilates para preparar una aleación para dichas monedas?.*

x = gramos de oro.

$$14+x=21.6+0.9x$$
$$x-0.9x=21.6-14$$
$$0.1x=7.6$$
$$x=\frac{7.6}{0.1}$$
$$x=76$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{Agregar 76 gramos de oro puro}}$$

❖ 5.- *Un comerciante mezcla té de $20 el kilo con otro de $33 el kilo para lograr 20 kg. de una mezcla de $25 por kilo ¿Cuántos kilos se necesitan de cada clase de té?.*

té de $20 = x kg.
té de $33 = 20-x kg.

$$\mathbf{20x + 33(20 - x) = 20 * 25}$$
$$20x + 660 - 33x = 500$$
$$-13x = -660 + 500$$
$$-13x = -160$$
$$x = \frac{-160}{-13}$$

Por lo tanto:

té de $20 = x kg. = 160/13 kg.
té de $33 = 20 - x kg. = 100/13 kg.

7.2.3. PROBLEMAS SOBRE MOVIMIENTO

❖ 1.- *En cierto momento parten dos aviones del mismo aeropuerto y viajan en sentidos opuestos a 350 y 325 km./h. respectivamente. ¿Cuántas horas tardarán en hallarse a 2025 km. de distancia uno del otro?.*

V_1 = 350 km./h Primer avión.
V_2 = 325 km./h Segundo avión.
2025 = distancia que los separa
t = tiempo que logren esa separación
d_1 = distancia del avión 1
$2025 - d_1$ = distancia del avión 2

$$\mathbf{350 = \frac{d_1}{t}}$$
$$\mathbf{325 = \frac{225 - d_1}{t}}$$

$$350t = d_1$$

$$-(325t-2025) = d_1$$

$$\begin{aligned} 350t &= -325t + 2025 \\ 2025 &= (350 + 325)t \\ 2025 &= 675t \\ t &= \frac{2025}{675} \\ t &= 3 \text{ horas} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$\boxed{\text{Se hallarán a 2025 Km. De distancia después de tres horas.}}$

❖ 2.- *En una carrera alrededor de la pista de 150m. X y Y corren a la velocidad de 325 y 300 m./min. respectivamente. ¿En cuántos minutos llevará X una ventaja de 150 m.?.*

V_x = 325m./min.
V_y = 300m. /min.
t = tiempo en que se van a separar 150m.
d_1 = distancia del corredor x
150-d_1 = distancia del corredor Y

$$325 = \frac{d_1}{t}$$

$$300 = \frac{d_1 - 150}{t}$$

$$\begin{aligned} 325t &= d_1 \\ 300t + 150 &= d_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 325t &= 300t + 150 \\ (300-325)t &= -150 \\ -25t &= -150 \\ t &= \frac{-150}{-25} \\ t &= 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$\boxed{\text{En 6 minutos x llevará una ventaja de 150 m.}}$

❖ 3.- *Un avión ha estado volando durante 1 hora cuando un cambio de dirección del viento duplicó su velocidad efectiva, si el viaje fue de 240 km. y se emplearon 2.5 horas ¿Qué distancia recorrió el avión durante la primera hora?.*

V_1 = velocidad inicial
d_1 = distancia recorrida en la primera hora
V_2 = velocidad duplicada 2 V_1
d_2 = distancia recorrida en la siguiente velocidad
t_2 = 3/2 hora
t_1 = 1 hora
distancia total = 240
$d_2 = 240 - d_1$

$$V_1 = \frac{d_1}{t_1}$$

$$V_1 = \frac{d_1}{1}$$

$$V_2 = 2V_1 = \frac{(240 - d_1)2}{3}$$

$$\mathbf{V_1 = \frac{240 - d_1}{3}}$$

$$d_1 = \frac{240 - d_1}{3}$$

$$3d_1 = 240 - d_1$$

$$4d_1 = 240$$

$$d_1 = \frac{240}{4}$$

$$d_1 = 60$$

Por lo tanto:

Recorrió durante la primera hora 60 kilómetros

❖ 4.-*En 4 semanas un avión recorrió 4641 Km. Si cada semana recorrió los 11 decimos de lo que recorrió la semana anterior ¿Cuántos kilómetros recorrió en cada semana?.*

$A = \ x = 1a.$ semana

$B = \frac{11}{10}x = 2a.$ semana

$C = \left(\frac{11}{10^2}\right)^2 x = 3a$ semana

$D = \ \left(\frac{11}{10^3}\right)^3 \ x = 4a$ semana

$$\mathbf{x + \frac{11}{10}x + \left(\frac{11}{10^2}\right)^2 \ x + \left(\frac{11}{10^3}\right)^3 x = 4641}$$

$$x + \frac{11}{10}x + \frac{121}{100}x + \frac{1331}{1000}x = 4641$$

$$\frac{x\,(1000 + 1100 + 1210 + 1331)}{1000} = 4641$$

$$4641x = 4641(1000)$$
$$x = 1000$$

Por lo tanto:

A recorrió 1000 km.
B recorrió 1100 km.
C recorrió 1210 km.
D recorrió 1331 km.

7.2.4. PROBLEMAS SOBRE GEOMETRÍA

❖ 1.-*Una cancha de tenis de 14 cm. de largo excede en 1m. al doble de su ancho. ¿Cuál es su ancho?.*

x = ancho
2x + 1 = largo

$$\mathbf{x + 2x + 1 = 14}$$

$$3x = 14 - 1$$
$$x = \frac{13}{3}$$

Por lo tanto:

El ancho $= x = \dfrac{13}{3}$
El largo $= 2x + 1 = 2\left(\dfrac{13}{3}\right) + 1 = \dfrac{26}{3} + 1 = \dfrac{29}{3}$

- 2.- *El largo e una casa rectangular es el triple del ancho, el perímetro es de 192 m. Encontrar el largo y el ancho*

x = ancho
3x = largo

$$\mathbf{2x + 2(3x) = 192}$$
$$2(x + 3x) = 192$$
$$4x = 96$$
$$x = \frac{96}{4}$$
$$x = 24$$

Por lo tanto:

Ancho de la casa = x = 24
Largo de la sala = 3x = 72

- 3.- *La longitud de un campo rectangular excede a su ancho en 30 m. Si la longitud se disminuye en 20 m. Y el ancho aumenta en 15 el área se disminuye en 150 m^2. Hallar las dimensiones del cuadrado.*

x = ancho del campo
x + 30 = longitud del campo
x(x + 30) = área original del campo
x + 15 = nuevo ancho
x +30 – 20 = nuevo largo

$(x + 15)(x+30 - 20) =$ nueva área

$$\mathbf{(x + 15)(x+30 - 20) + 150 = x(x + 30)}$$
$$x^2 + 15x + 10x + 360 = x^2 - 30x$$
$$5x = 300$$
$$x = 60$$

Por lo tanto:

$\boxed{\text{Ancho = 60 m y largo = 90m.}}$

7.2.6. PROBLEMAS SOBRE TRABAJO

❖ 1.-*Un grupo de tarjetas pueden ser procesadas en 20 min. por una máquina "A", otra máquina "B" puede procesar el mismo número de tarjetas en 12 minutos ¿En cuánto tiempo ambas máquinas pueden procesar las tarjetas?.*

A- tarda 20 minutos en procesar.
B- tarda 10 minutos en procesar.
x = número que llevaría procesar con las 2 maquinas

$\frac{1}{20}$ = trabajo de la máquina A en 1 minuto.

$\frac{1}{12}$ = trabajo de la máquina B en 1 minuto.

$$\mathbf{\frac{x}{20} + \frac{x}{12} = 1}$$
$$\frac{12x + 20x}{240} = 1$$
$$12x + 20x = 240$$
$$32x = 240$$
$$x = \frac{240}{32}$$
$$x = 7.5$$

Por lo tanto:

$\boxed{\text{Las dos máquinas juntas pueden procesar en 7.5 minutos}}$

❖ 2.- *Una llave puede llenar un tanque en 5 horas, otra lo puede llenar en 3 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán juntas en llenar el tanque?*

Llave I tarda 5 horas
Llave II tarda 3 horas
x = tiempo que tardarán juntas.

$\frac{1}{5}$ = trabajo de la llave I en 1 hora.

$\frac{1}{3}$ = trabajo de la llave II en 1 hora.

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{3}=1$$
$$\frac{3x+5x}{15}=1$$
$$8x=15$$
$$x=\frac{15}{8}$$

Por lo tanto:

Las dos llaves tardan juntas en llenar el tanque $x=\frac{15}{8}$ de hora

❖ 3.- *Hay dos incineradores, cada uno de los cuales puede eliminar el desperdicio de un día en 20 hrs., junto con un tercer incinerador eliminan los desperdicios en 6 horas, ¿En qué tanto tiempo puede hacer todo el trabajo el tercer incinerador?.*

Incinerador I tarda 20 horas en eliminar.
Incinerador II tarda 20 horas en eliminar.
x = número de horas que tarda III.
5 tiempo total de los tres.

$$\frac{6}{20}+\frac{6}{20}+\frac{6}{x}=1$$
$$\frac{12}{20}+\frac{6}{x}=1$$

$$\frac{12x+6}{20x}=1$$

$$12x+6=20x$$

$$20x-12x=6$$

$$8x=6$$

$$x=3/4$$

Por lo tanto:

En ¾ de hora pueden los dos incineradores hacer el trabajo juntos.

❖ 4.- *Una alberca tiene dos tubos de alimentación. Uno llena la alberca en 3 horas y otro en 6 horas, el tubo de desagüe vacía la alberca en 4 horas. En cierta ocasión se quedó abierto el tubo de desagüe mientras se llenaba la alberca con ambos tubos. ¿En cuánto tiempo se llenó la alberca?*

Tubo A= tarda 3 horas en llenar la alberca.
Tubo B= tarda 6 horas en llenar la alberca.
4 horas tarda en vaciarse.
x = en cuanto tiempo se vacío la alberca.

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{6}}+\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{4}}=\mathbf{1}$$

$$\frac{4x+2x-3x}{12}=1$$

$$\frac{3x}{12}=1$$

$$x=4$$

Por lo tanto:

Se llenará la alberca bajo esas condiciones en 4 horas.

❖ 5.- *Una niveladora es más rápida que otra y limpia un campo en la mitad del tiempo que la otra, juntas emparejan un campo en 1 hora 30 minutos. ¿Cuánto tardará la niveladora más rápida en hacer el trabajo?*

x = tiempo de la niveladora lenta A.

$2x$ = Tiempo de la niveladora rápida B.

$$\frac{\frac{3}{2}}{x}+\frac{\frac{3}{2}}{2x}=1$$

$$\frac{3}{2x}+\frac{3}{4x}=1$$

$$\frac{6+3}{4x}=1$$
$$9=4x$$
$$x=\frac{9}{4}$$

Por lo tanto:

x = velocidad de la niveladora rápida A.= 9/4
2x = velocidad de la niveladora rápida B.=18/4

7.2.7. PROBLEMAS SOBRE EDAD

❖ 1.- *Las edades de un padre y su hijo suman 83 años, la edad del padre excede en 3 años al triple de la edad del hijo, hallar ambas edades.*

x = edad del padre
y = edad del dijo

$$\mathbf{x = 3y + 3}$$
$$y + 3y + 3 = 83$$
$$4y + 3 = 83$$
$$4y = 83 - 3$$
$$4y = 80$$
$$y = \frac{80}{4}$$
$$y = 20$$

Por lo tanto:

$\boxed{\text{La edad del padre es 63 años y la edad del hijo es 20 años.}}$

❖ 2.- *La edad de A es el triple de la B y dentro de cinco años será el doble hallar las edades actuales*

Edad actual de A = 3x
Edad actual de B = x
Edad de A dentro de 5 años = 3x + 5
Edad de B dentro de 5 años = x + 5

$$\mathbf{3x + 5 = 2(x + 5)}$$
$$3x + 5 = 2x + 10$$
$$3x - 2x = 10 - 5$$
$$x = 5$$

Por lo tanto:

$\boxed{\text{La edad actual de A es 15 años y la de B es de 5 años}}$.

❖ 3.- *La edad de un padre es el triple de la edad de su hijo, la edad que tenía el padre hace cinco años era el doble de la edad que tendrá su hijo dentro de 10 años . Hallar las edades actuales.*

Edad actual del hijo = x
Edad actual del padre = 3x
Edad del padre hace 5 años = 3x – 5
Edad del hijo dentro de 10 años = x + 10

$$\mathbf{3x - 5 = 2(x + 10)}$$
$$3x - 5 = 2x + 20$$
$$3x - 2x = 20 + 5$$
$$x = 25$$

Por lo tanto:

$\boxed{\text{La edad del hijo es 25 años y la del padre es 75 años.}}$

7.2.8. PROBLEMAS VARIOS

❖ 1.- *El peso total de una cápsula espacial fue de 864 kg., si los dispositivos pesaban el doble de la cápsula vacía, en tanto que el equipo de observación y registro de datos pesaban la mitad. Hallar el peso de cada una de las tres partes.*

x = peso de la cápsula vacía
$2x$ = peso de los dispositivos
$\frac{x}{2}$ = peso del equipo de observación y registro de datos.

$$\mathbf{2x + x + \frac{x}{2} = 864}$$

$$3x + \frac{x}{2} = 864$$

$$\frac{7x}{2} = 864$$

$$x = \frac{864}{7}(2)$$

$$x = 246$$

Por lo tanto:

Peso cápsula vacía = x = 246 Peso de los dispositivos = $2x$ = 792 Peso del equipo de observación y de registro de datos = $\frac{x}{2} = 123$

❖ 2.- *En una sala hay tres lámparas iguales, un radio que consume 1/3 de los wats que consume cada lámpara y un calentador que consume 15 veces cada lampara, si todos los objetos se consumen simultáneamente el consumo total de 1.1 kilo - wats. ¿Cuántos wats consume el radio?.*

x = consumo de la lámpara
$\frac{x}{3}$ = consumo del radio
$15x$ = consumo del calentador

$$\mathbf{3x + 15x + \frac{x}{3} = 1100}$$

$$18x + \frac{x}{3} = 1100$$

$$\frac{54x + x}{3} = 1100$$

$$\frac{55x}{3} = 1100$$

$$x = \frac{1100}{55}(3)$$

$$x = \frac{3300}{55}$$

$$x = 60$$

Por lo tanto:

Consumo de cada lámpara = x = 60 wats
El consumo del radio = $\frac{x}{3}$ = 20 wats
El consumo del calentador =15x = 900 wats

❖ 3.- *A y B empiezan a jugar con igual suma de dinero cuando B ha perdido los 3 cuartos del dinero con que empezó a jugar, lo que ha ganado A es 24 pesos más que la tercera parte de la que le queda a B. ¿Con cuánto empezaron a jugar?.*

x = suma de dinero

$\frac{3}{4}x$ = lo que perdió B

$24 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{4}x\right)$ = ganancia de A

$$\mathbf{\frac{3}{4}x = 24 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{4}x\right)}$$

$$\frac{3}{4}x = 24 + \frac{x}{12}$$

$$\frac{3}{4}x - \frac{x}{12} = 24$$
$$\frac{9x - x}{12} = 24$$
$$\frac{8}{12}x = 24$$
$$\frac{2}{3}x = 24$$
$$x = 24\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$x = 36$$

Por lo tanto:

Empezaron a jugar tanto A y B con $36

❖ 4.- *El numerador de una fracción excede al denominador en 22 si al numerador se le resta 15, la diferencia entre la fracción primitiva y la nueva es 3. Hallar la fracción primitiva.*

x = denominador
x + 22 = numerador

$$\mathbf{\frac{x+22}{x} - \frac{x+22-15}{x} = 3}$$
$$\frac{x+22+15-x-22}{x} = 3$$
$$15 = 3x$$
$$x = \frac{15}{3}$$
$$x = 5$$

Por lo tanto:

El numerador de la fracción es: 27
El denominador de la fracción es 5
La fracción es $\frac{27}{5}$

E J E R C I C I O S

1. Si 5 se le restan de 6 veces a un número el resultado es 67, encontrar el número.

2. El largo de un parque excede en 25 m. al doble de su ancho y se necesitan 650m. de maya de alambre para cercarlo. Hallar las dimensiones

3. El mayor de dos enteros consecutivos es mayor que la mitad del menor más 4.¿Cuáles son los menores valores posibles de los enteros?.

4. Dos ángulos de un triángulo son iguales pero el tercer ángulo es 23 grados menor que 2.5 veces la suma de los otros 2. ¿Cuánto mide cada ángulo?

5. Un tren de carga sale de Guadalajara a la 1 a.m. a una velocidad de 30 km./ hr., a las 7 a.m. sale otro tren de la misma estación y viaja a razón de 80 km./ hr. ¿En qué tiempo alcanza el segundo tren al carguero?.

6. Un barco debe conservar una velocidad promedio de 22 nudos para mantener su itinerario en un viaje de 10 horas: Durante las primeras 4 horas el mal tiempo le obligó a reducir su velocidad a 16 nudos ¿Cuál debe ser su velocidad durante el resto del viaje para mantener su promedio?
   si se necesita 1 nudo = 1.852 km /hr.

7. En una tienda se venden almendras a \$36 el kilo, nueces a \$26 el kilo y cacahuates a \$13 el kilo. El propietario desea hacer una mezcla de 21 kg. de los 3 artículos para venderse a \$20 el kilo. Si además usa el doble del kilo de cacahuates que de nueces. ¿Cuántos ha de usar de cada cosa?.

8. Un químico tiene dos soluciones de ácido sulfúrico, la primera tiene la mitad de ácido sulfúrico y la mitad de agua; la segunda contiene ¾ partes de ácido sulfúrico y ¼ de agua. Desea obtener con ellas 10 litros de una solución que contenga 2/3 de ácido y 1/3 de agua. ¿Cuántos litros de cada solución tiene que usar?.

9. Un ingeniero determinó que para soportar el peso de un edificio la cimentación debía tener un área de $496 m^2$ apoyados en el subsuelo, la construcción va a ser rectangular y su cimentación ha de tener 2 m. de espesor. Si la longitud interior de la cimentación es el doble del ancho interior, hallar las dimensiones.

10. Una máquina pone etiquetas a 1200 latas por hora y otra las pone a 900 latas por hora. Si la máquina más rápida comienza una hora mas tarde que la otra. ¿Cuánto tardarán ambas en poner etiquetas a 8500 latas por hora?

11. Si trabajan juntos 3 hombres que pintan un local en 6 horas. el primero sólo tarda el doble del segundo y éste tarda 6 horas más que el tercero. ¿Cuánto tardará el más lento en pintar todo el local?.

12. Una persona invirtió cierta cantidad al 5% mensual y el doble al 6% mensual. Si el interés anual de ambas cantidades es de $289. Hallar cada cantidad.

CAPÍTULO 8

DESIGUALDADES

En este capítulo se revisará el trabajo algebraico en las desigualdades, por lo que primero se hace importante especificar la notación que se utilizará.

Una comparación elemental cuado se tienen dos números es ver si éstos son iguales o uno es mayor a l otro, para este segundo caso se presenta el concepto de desigualdad, los elementos comparados no son iguales, por lo que un miembro es mayor o menor que el otro. Cabe aclarar que se puede tener una combinación y considerar que se dan dos posibilidades en la comparación de dos miembros y ser éstos iguales o bien mayor o menor.

El símbolo $<$ significa menor que ($a < b$; a es menor que b),

$\leq$ menor o igual a ($a \leq b$; a es menor o igual a b),

$>$ mayor que ($a > b$; a es mayor que b),

$\geq$ mayor o igual a ($a \geq b$; a es mayor o igual a b).

8.1. PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Desigualdad: $4 < 6$

1) Si a ambos lados de la desigualdad se les multiplica, por ejemplo por -2, entonces se tiene lo siguiente:

   Del lado izquierdo $4(-2) = -8$ del lado derecho $6(-2) = -12$

   Así: $-8 > -12$

   Como puede verse cambió el sentido de la desigualdad.

   Propiedades:

- $a \leq b$ y c = constante negativa, entonces, $ac \geq bc$
- $a \geq b$ y c = constante negativa, entonces, $ac \leq bc$

Nota: se puede utilizar $>$ en vez de $\geq$, o bien $<$ en vez de $\leq$

Desigualdad: $4 < 6$

2) Si a ambos lados de la desigualdad se dividen, por ejemplo entre -2, entonces se tiene lo siguiente:

Del lado izquierdo $\frac{4}{-2} = -2$ y del lado derecho $\frac{6}{-2} = -3$

Así $-2 > -3$

Nuevamente puede apreciarse que la desigualdad cambió de sentido.

Propiedades:

- $a \leq b$ y c = constante negativa, entonces, $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$
- $a \geq b$ y c= constante negativa, entonces, $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

Nota: se puede utilizar $>$ en vez de $\geq$, o bien $<$ en vez de $\leq$

Si se mantiene una desigualdad y si se le suma una constante ya sea positiva o negativa la desigualdad se mantiene, es decir:

Propiedades:

- $a \leq b$ y c = constante negativa, entonces, $a + c \leq b + c$
- $a \geq b$ y c= constante negativa, entonces, $a + c \geq b + c$
- $a \leq b$ y c = constante positiva, entonces, $a + c \leq b + c$
- $a \geq b$ y c= constante positiva, entonces, $a + c \geq b + c$

Nota: se puede utilizar $>$ en vez de $\geq$, o bien $<$ en vez de $\leq$

8.2. RESOLUCIÓN DE LAS DESIGUALDADES

Para resolver las desigualdades se hace necesario conservar las propiedades antes mencionadas y seguir las reglas que para resolver ecuaciones se tienen. De esta forma resulta que si uno quiere resolver una desigualdad lo que hay que revisar es:

Paso 1: Revisar cuál es la variable y como está descrita en la desigualdad, es decir, tiene coeficientes enteros, hay coeficientes racionales, existen factores, como están relacionados estos últimos, etc.

Paso 2: El objetivo es manipular algebraicamente la estructura de tal forma que la desigualdad mantenga de un sólo lado la variable en cuestión y del otro los términos independientes.

Paso 3: Dejar expresada la variable con coeficiente uno en un sólo lado de la desigualdad y del otro el resultado de su variación.

Ejercicios sobre la resolución de desigualdades

a) $\mathbf{2x - 3 > 5x - 1}$

$$\begin{aligned} 2x - 5x &> -1 + 3 \\ -3x &> 2 \\ x &< \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

b) $\mathbf{3(x - 1) + 4 \geq 5x - 3(x + 2)}$

$$\begin{aligned} 3x - 3 + 4 &\geq 5x - 3x - 6 \\ 3x + 1 &\geq 2x - 6 \\ 3x - 2x &\geq -6 - 1 \\ x &\geq -7 \end{aligned}$$

c) $\mathbf{2x - 4x + 6 \geq -3(x + 2)}$

$$\begin{aligned} 2x - 4x + 6 &\geq -3x - 6 \\ -2x + 3x &\geq -6 - 6 \\ x &\geq -12 \end{aligned}$$

d) $\mathbf{-x + 2 - 3(x + 1) < 5(x - 1)}$

$$-x + 2 - 3x - 3 \quad < 5x - 5$$
$$-4x - 1 < 5x - 5$$
$$-4x - 5x < -5 + 1$$
$$-9x < -4$$
$$x > \frac{4}{9}$$

e) $\mathbf{-x + 1 > -5(x - 2) + 4}$

$$-x + 1 > -5x + 10 + 4$$
$$4x > 10 + 4 - 1$$
$$4x > 13$$
$$x > \frac{13}{4}$$

e) $\mathbf{-11x - 12(x + 8) - 2x < -\frac{x}{4} + 2}$

$$-11x - 12x - 96 -2x < -\frac{x}{4} + 2$$
$$-25x -96 < -\frac{x}{4} + 2$$
$$-25x + \frac{x}{4} < 2 + 96$$
$$4(-25x + \frac{x}{4}) < (2 + 96)4$$
$$-99x \; < 392$$
$$x > \frac{-392}{99}$$

g) $\mathbf{\frac{-5x}{2} - \frac{4x}{3} + 2x - 3 < \frac{5}{7} - \frac{1}{3}x + 1}$

$$\frac{-15x - 8x + 12x}{6} < \frac{12}{7} - \frac{1}{3}x + 3$$
$$\frac{-11x}{6} - \frac{x}{3} < \frac{12}{7} + 3$$

$$\frac{-11x+2x}{6}<\frac{12+21}{7}$$

$$\frac{-9x}{6}<\frac{33}{7}$$

$$x>\frac{33}{7}\left(\frac{-2}{3}\right)$$

$$x>\frac{11}{7}(-2)$$

$$x>\frac{-22}{7}$$

h) $$\frac{-x+2}{2}\geq\frac{1}{2}$$

$$2\left(\frac{-x+2}{2}\right)\geq\frac{1}{2}(2)$$

$$-x+2\geq 1$$

$$-x\geq 1-2$$

$$-x\geq -1$$

$$x\leq 1$$

i) $\mathbf{7(y+3)-5(y-3)\geq 2(y+20)-4}$

$$7y+21-5y+15 \geq 2y+40-4$$

$$2y+36 \geq 2y+36$$

$$2y-2y \geq 36-36$$

$0 \geq 0$ - incongruente porque cero nunca es mayor que cero, lo que está indicando es que está desigualdad no es válida como tal, sino que solamente la igualdad es posible, por lo que si uno quiere evaluar para ver los resultados simepre dará la igualdad como solución.

j) $\mathbf{-3(2+5c)>1-5(3c-1)}$

$$-6-15c>1-15c+5$$

$$-15c+15c>1+5+6$$

$$0>12$$

$12<0$ Incongruente, no hay solución porque 12 nunca es menor que cero. Cuando esto sucede está indicando que no hay valores en los reales que satisfagan el eneunciado de la desigualdad

k) $-\frac{3}{7}(2+5x) > 1-\frac{5}{7}(3x-1)$

$$-\frac{6}{7} - \frac{15}{7}x > 1 - \frac{15}{7}x + \frac{5}{7}$$

$$-\frac{15}{7}x + \frac{15}{7}x > 1 + \frac{5}{7} + \frac{6}{7}$$

$$0 > 1 + \frac{11}{7}$$

$$0 > \frac{18}{7}$$

El resultado es incongruente por lo que no hay solución

8.3. REPRESENTACIÓN DE LAS SOLUCIONES A TRAVÉS DE LA NOTACIÓN MATEMÁTICA.

Las desigualdades quedan resueltas como se muestran en el apartado anterior, pero se hace necesario representar esa solución en términos de la notación matemática, ya que así uno puede interpretar y aprender a leer cualquier tipo de escritura de estas soluciones.

Antes de revisar como se representaran las soluciones de los ejemplos resueltos anteriormente se hace necesario mencionar que las variaciones que pueda tener una variable se representan de dos formas notacionales, siendo éstas: intervalos y desigualdades.

Un intervalo es una variación que se denota a través de paréntesis o corchetes, sus extremos conservan orden, es decir, el extremo izquierdo siempre es menor que el derecho y pueden ser de cuatro tipos como los siguientes:

(a, b) donde $a < b$ y significa que la variación de la variable está comprendida entre los números a y b, pero que no llega a ser a y ser b específicamente.

[a, b] nuevamente $a < b$, la variación está entre a y b, pero puede llegar a tomar los valores de los extremos, o sea a o b.

(a,b] este intervalo es una combinación, ya que significa que no puede tomar la variable el valor a pero si el b

[a,b) lo mismo que el intervalo anterior la variable puede llegar a tomar el valor a, pero no el b.

La otra opción de decir lo mismo en términos del uso de desigualdades es la siguiente correspondiendo a los intervalos antes mencionados

- $a < x < b$ corresponde al significado de (a,b)
- $a \leq x \leq b$ corresponde al significado [a,b]
- $a < x \leq b$ corresponde al significado (a,b]
- $a \leq x < b$ corresponde al significado [a,b)

Ejercicios que relacionan intervalos y desigualdades.

1) $x \geq 0$ equivalentemente es $x \in [0, \infty)$

2) $7 < x < 13$ equivalentemente es $x \in (7,13)$

3) $-2 < x < 4$ o $7 \leq x < 10$ equivalentemente es $x \in \{(-2,4) \cup [7,10)\}$

4) $-3 < x < \infty$ equivalentemente es $x \in (-3, \infty)$

5). $2 \leq x$ equivalentemente es $x \in [2, \infty)$

6) $-\infty < x \leq -2$ equivalentemente es $x \in (-\infty, -2]$

Para los casos ya mencionados de desigualdades y tomando ahora las características de la notación matemática sobre la solución queda entonces ver como se representarían las soluciones.

Revisando la desigualdad del inciso a): $2x - 3 > 5x - 1$, la solución [1] obtenida fue $x < \frac{-2}{3}$.

El resultado se leería que la solución de esta desigualdad es un conjunto de números y no solamente uno y que es cualquiera que sea estrictamente menor que $\frac{-2}{3}$, en otras palabras

[1] Estas desigualdades si no especifican el conjunto en el cual se resuelven implican que los resultados están en los reales.

indica que la solución es cualquier número lo más pequeño que se ocurra hasta lo más cercano a $\frac{-2}{3}$ sin llegar a ser ese valor[2], por lo que escribir la solución sería:

Solución $=\left\{x \in \Re / -\infty < x < -\frac{2}{3}\right\}$ Esta forma de expresión es manteniendo las desigualdades.

Solución $=\left\{x \in \Re / \ x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)\right\}$ Esta segunda forma es expresando la solución a través de intervalos.

Caso del inciso b)

$3(x - 1) + 4 \geq 5x - 3(x + 2)$
Solución; $x \geq -7$, se expresaría:

Solución $=\{x \in \Re / -7 \leq x < \infty\}$.

Solución $=\{x \in \Re / \ x \in [-7, \infty)\}$

Caso inciso c)

$2x - 4x + 6 \geq -3(x + 2)$
Solución: $x \geq -12$, se expresaría:

Solución $=\{x \in \Re / -12 \leq x < \infty\}$.

Solución $=\{x \in \Re / \ x \in [-12, \infty)\}$

Como puede observarse en los incisos b) y c) se tiene que la desigualdad se expresa en su resultado con una simbología que tiene en este caso $\geq$, que para poderlo expresar en términos de intervalos se requiere utilizar la notación de corchete para indicar que los extremos son tocados, así se diría por ejemplo del inciso c) que la solución puede ser -12 o cualquier valor real mayor estrictamente a éste.

[2] Es importante notar que esto debe expresarse con una simbología por lo que para decir lo más pequeño se usa la notación $-\infty$, que indica que puedo hacer el número lo más pequeño que se me ocurra y se lee menos infinito. NO INDICA UN NÚMERO. Si se tuviera el caso contrario es decir que la solución puede ser tan grande como se me ocurra entonces se indicará ∞ y se leerá simplemente infinito.

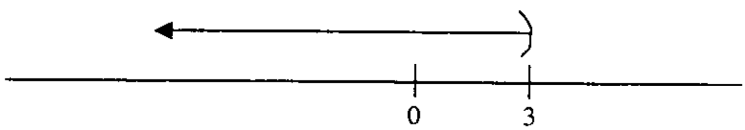
De aquí se puede concluir que si la solución tiene > o < se usa (o). Si en cambio se tiene ≤ o ≥ se introducen [o] según sea la variación indicada.

Todas las demás soluciones de las siguientes desigualdades son parecidas a lo anteriormente escritas.

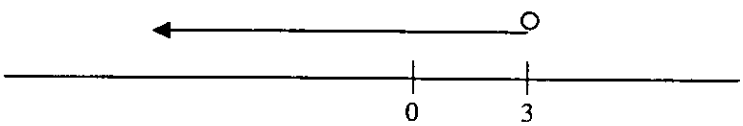
8.4. REPRESENTACIÓN DE LAS SOLUCIONES A TRAVÉS DE LA FORMA GRÁFICA

Uno puede representar las soluciones a través de la recta real y mostrar gráficamente la solución y su variación expresada, nuevamente debe de haber un convenio para escribir la notación, así si la desigualdad en su solución implica un < o > hay que interpretar que no se toca nunca el extremo indicado por lo que la gráfica llevará (o), según sea el caso o bien o, lo que indica que la variación es abierta (no alcanza el extremo). Si se está usando ≤ o ≥ se usarán [o], nuevamente según sea el caso o bien • y expresa que la variación es cerrada (alcanza a tocar el extremo).

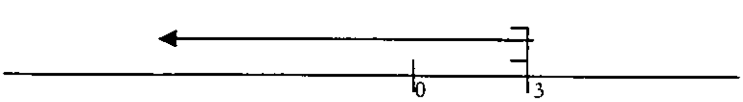
Por ejemplo si se tiene que un resultado es $x < 3$ la representación quedaría:



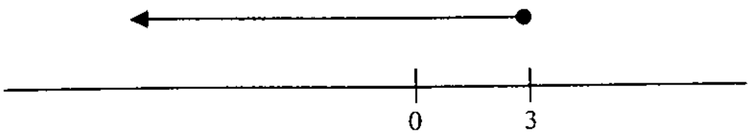
O bien



Si la solución fuera por ejemplo $x \leq 3$ entonces la representación quedaría:



O bien



EJEMPLO:

$$1)\quad \mathbf{\frac{2x-1}{7x-8} > -3}$$

$$2x - 1 > -3(7x - 8)$$

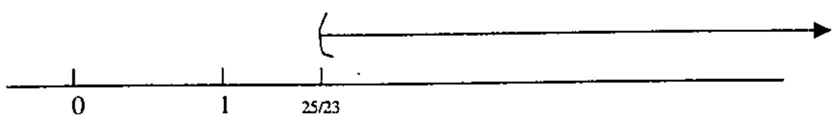
$$2x - 1 > -21x + 24$$

$$2x + 21x > 24 + 1$$

$$23x > 25$$

$$x > \frac{25}{23}$$

Solución Gráfica:



Recordando la notación:

$$\text{Solución} = \left\{ x \in \Re / \frac{25}{23} < x < \infty \right\}.$$

Solución $= \left\{ x \in \Re / \ x \in \left(\dfrac{25}{23}, \infty \right) \right\}$.

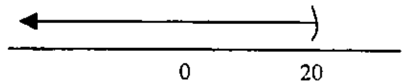
2) $\mathbf{5 > \dfrac{x}{4}}$

$20 > x$

$x < 20$

sol $= \{x \in \Re / -\infty < x < 20\}$

$= \{x \in \Re / x \in (-\infty, 20)\}$

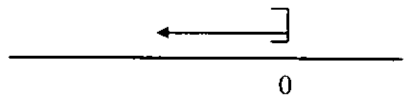


3) $\mathbf{7\,n \leq 0}$

$n \leq 0$

sol $= \{n \in \Re / -\infty < n \leq 0\}$

$= \{n \in \Re / n \in (-\infty, 0]\}$



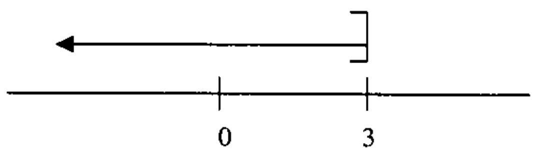
4) $\mathbf{-18w \geq -39}$

$w \leq \dfrac{-39}{-13}$

$w \leq 3$

sol $= \{w \in \Re / -\infty < w \leq 3\}$

$= \{w \in \Re / w \in (-\infty, 3]\}$



5) $\mathbf{5a - 1 \geq 9}$

$5a \geq 9 + 1$

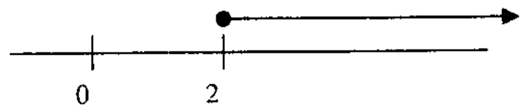
$5a \geq 10$

$a \geq \dfrac{10}{5}$

$a \geq 2$

sol $= \{a \in \Re / 2 \leq a < \infty\}$

$= \{a \in \Re / a \in [2, \infty)\}$



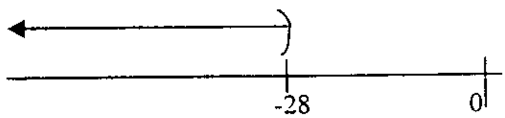
6) $7 + \frac{z}{4} < 0$

$\frac{z}{4} < -7$

$z < -7(4)$

$z < -28$

sol = $\{z \in \Re / -\infty < z < -28\}$
$= \{z \in \Re / z \in (-\infty, -28)\}$



E J E R C I C I O S

Encontrar las soluciones de las siguientes desigualdades y escribirlas en forma de notación tanto de desigualdad como de intervalo.

1.- $x - 3 > 2x - 7$

2.- $5(x - 8) + \frac{x - 3}{2} < 0$

3.- $\frac{2x - 1}{4} - \frac{1}{3}x \leq \frac{5}{7}x - 2$

4.- $\frac{x - 4}{x + 5} \geq \frac{3}{4}$

5.- $\frac{2(a + x)}{b} < x - 7$

6.- $\frac{2x-3}{2}-\frac{3(4x-1)5}{}\leq 4$

7.- $\frac{-2}{5x+3}>2$

8.- $\frac{1}{2x+1}<\frac{3}{x+1}$

9.- $14>\frac{x}{3}+10>2$

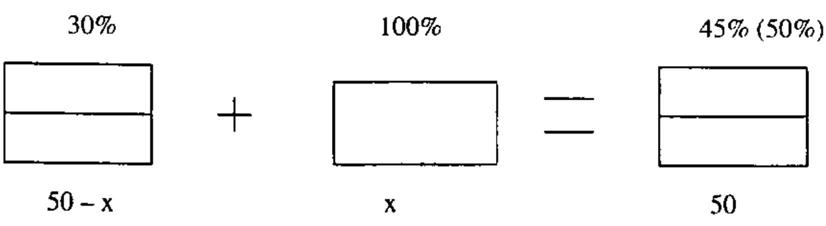
10.- $-4\leq 2x\leq 12$

11.- $-1\leq 5-4x<10$

8.5 PROBLEMAS QUE INDUCEN A PLANTEAR SU SOLUCIÓN A TRAVÉS DE DESIGUALDADES.

♣ *1.- ¿Cuántos centímetros cúbicos de 50 de una solución ácida al 30% es necesario reemplazar con ácido puro, a fin de aumentar la concentración del ácido a un porcentaje entre 45 y 50%?*

x = cantidad de ácido que hay que aumentar = cantidad de la mezcla de 30% que hay que quitar



Como se quiere que la nueva concentración esté entre 45 y 50, implica que hay dos cotas en el planteamiento, quedando:

$$\mathbf{45(50) \leq 30(50-x)+100x \leq 50(50)}$$

$$2250 \leq 1500-30x+100x \leq 2500$$

$$2250-1500 \leq 70x \leq 2500-1500$$

$$750 \leq 70x \leq 1000$$

$$\frac{75}{7} \leq x \leq \frac{100}{7}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{x está entre } \frac{75}{7} \text{ y } \frac{100}{7}}$$

♣ 2.- *¿En qué intervalo debe fijarse un termostato en temperatura Celsius a fin de mantener la temperatura en un recinto entre 68 y 77 grados Fahrenheit?. La relación entre Fahrenheit y Celsius es F = 9c/5 + 32.*

Como se quiere que esa relación esté entre 68 y 77 la desigualdad estará dada por:

$$\mathbf{68 < \frac{9c}{5} + 32 < 77}$$

$$68-32 < \frac{9c}{5} < 77-32$$

$$36 < \frac{9c}{5} < 45$$

$$36\left(\frac{5}{9}\right) < c < 45\left(\frac{5}{9}\right)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{El termostato debe fijarse entre 20 y 25 grados Celsius.}}$$

♣ 3.- *Las calificaciones de un alumno en la clase de matemáticas antes de presentar el último examen, fueron: 7.5, 9.2, 6.8 y 7.6. La calificación ideal es 10. Para obtener B de calificación, el alumno debe tener un promedio mayor o igual a 8 y menor que 9. Para obtener MB, debe obtener un promedio mayor o igual 9. ¿Cuál es la* *calificación más baja que puede obtener el estudiante a fin de que su promedio esté en el intervalo de calificación B?.¿Es posible que el alumno obtenga un promedio suficientemente alto como para alcanzar una MB?*

x = calificación a obtener

$$\text{Promedio} = \frac{7.5+9.2+6.8+7.6+x}{5} = \frac{31.1+x}{5}$$

Como el promedio se pretende que esté entre 8 y 9, la desigualdad sería.

$$\mathbf{8 \leq \frac{31.1+x}{5} < 9}$$

$$8(5) \leq 31.1+x < 9(5)$$

$$40 \leq 31.1+x < 45$$

$$40-31.1 \leq x < 45-31.1$$

$$8.9 \leq x < 13.9$$

Por lo tanto:

Lo mínimo que puede sacar en su último examen para obtener una B es 8.9

Para obtener una MB requeriría obtener una calificación en su último parcial de 13.9, lo cual es imposible, ya que sólo se puede obtener como máximo en un examen 10.

♣ *4.- Una agencia de renta de automóviles tiene dos planes de arrendamiento de carros tamaño mediano.*
Plan A: $1700 a la semana con kilometraje limitado
Plan B: $900 a la semana con 1.50 por kilómetro
¿Qué intervalo de kilometraje semanal hace más barato el plan B que el A?

x = Kilometraje

Dado el hecho de que se quiere comparar dos planes, se propone la desigualdad como es el enunciado de la pregunta, el plan B menor que el plan A.

$$\mathbf{900+1.50x \le 1700}$$

$$1.50x \le 1700-900$$

$$1.50x \le 800$$

$$x \le \frac{800}{1.5}$$

$$x \le \frac{1600}{3}$$

El resultado es:

$\boxed{\text{Conviene cuando el kilometraje es menor o igual 533.3 km.}}$

E J E R C I C I O S

Resolver los siguientes problemas

1.- Las puntuaciones obtenidas por una jugadora de boliche en cuatro juegos fueron 142, 136, 154 y 158. ¿Qué puntuaciones debe obtener en su siguiente partido de modo que su promedio en los 5 juegos esté entre 150 y 165?.

2.- Cierta marca de gasolina sin plomo contiene 3% del ingrediente G-90. La misma marca de gasolina extra sin plomo contiene el 12% del ingrediente G-90. El propietario de un automóvil observa que su carro trabaja menos, durante más tiempo, si llena el tanque de gasolina, cuya capacidad es 40 litros, con una mezcla de gasolina sin plomo y de gasolina extra sin plomo que contiene entre el 7% y el 9% del ingrediente G-90. Si la persona desea obtener el mejor rendimiento al menor costo. ¿Con qué mezcla de gasolinas debe llenar el tanque de su carro?.

3.- El tiempo que se requiere en cierta fábrica para armar una mesa es de 20 minutos y para una silla de 30 minutos. La fábrica dispone de un número de 126 horas de trabajo, pero puede proveer trabajo hasta por 140 hrs. Al día si se producen 4 sillas por cada mesa hallar el mínimo y el máximo de sillas que se pueden fabricar.

4.- Un agricultor necesita 0.12 ha. De terreno para cosechar una tonelada de maíz y 0.24 de ha. Para una tonelada de trigo. Posee un total de 192 ha. De terreno de cultivo y desea usar la mitad cuando menos. Si decide sembrar el doble de maíz que de trigo, hallar. A) El máximo y b) el mínimo de número de toneladas que puede cosechar.

8.6. VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número es la parte positiva del mismo. en términos físicos su equivalente sería el concepto de distancia recorrida sin considerar el sentido de la dirección.

La notación que se usa para indicar el valor absoluto de un número o expresión. es encerrar ésta entre barras, es decir, utilizar $|\quad|$. Se puede pedir el valor absoluto de 8, esto se escribiría: $|\ 8\ |$ o bien el valor absoluto de $3x - 1$, se escribiría $|3x - 1|$.

$$\text{Definición de Valor Absoluto: } |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Ejemplo:

$$|\ 8\ | = 8$$

$$|\ -8\ | = 8$$

8.6.1. SOLUCIÓN DE VALORES ABSOLUTOS CON IGUALDADES.

1) $\mathbf{|\ 4x - 1\ | = 3}$

Salen los dos casos como se da en la definición (1)

- Primer caso: si es positivo

$4x - 1 = 3$

$4x = 3 + 1$

$4x = 4$

- Segundo caso: si es negativo

$-(4x - 1) = 3$

$-4x + 1 = 3$

$-4x = 2$

$x = 1$

$$x = \frac{2}{-4}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Comprobación:

$| 4-1 | = | 3 | = 3$

$| 4(-1/2)-1 | = |-2-1 | = | -3 | = 3$

2) $$\left| \frac{3}{2}(x - 4) + 6x - 1 \right| = \frac{1}{4}$$

$$\left| \frac{3x}{2} - 6 + 6x - 1 \right| = \frac{1}{4}$$

$$\left| \frac{15}{2}x - 7 \right| = \frac{1}{4}$$

- Primer caso: si es positivo

$(15/2)(x)-7 = ¼$

$(15/2)(x) = ¼+7$

$x = (¼+7)(2/15)$

$$x = \frac{29}{4}\left(\frac{2}{15}\right)$$

$$x = \frac{29}{30}$$

- Segundo caso: si es negativo

$-((15/2)(x)-7) = ¼$

$-(15/2)(x) = ¼-7$

$$x = \left(\frac{1}{4} - 7\right)\left(\frac{-2}{15}\right)$$

$$x = \frac{-27}{4}\left(\frac{-2}{15}\right)$$

$$x = -\frac{27}{30}$$

3) $$\left|\frac{2(x-1)+6x}{\frac{x}{2}+4\left(x+\frac{3}{6}\right)}\right|=8$$

$$\left|\frac{2x-2+6x}{\frac{x}{2}+4x+2}\right|=8$$

$$\left|\frac{8x-2}{\frac{9x}{2}+2}\right|=8$$

- Primer caso: si es positivo

$$\frac{8x-2}{\frac{9x}{2}+2}=8$$

$$\begin{aligned} 8x-2 &= 8((9/2)\,x+2) \\ 8x-2 &= 36x+16 \\ 8x-36x &= 16+2 \\ -28x &= 18 \end{aligned}$$

$$x=\frac{-18}{28}$$

$$x=-\frac{9}{14}$$

- Segundo caso: si es negativo

$$-\frac{8x-2}{\frac{9x}{2}+2}=8$$

$$\begin{aligned} -8x+2 &= 8((9/2)\,x+2) \\ -8x+2 &= 36x+16 \\ -8x-36x &= 16-2 \\ -44x &= 14 \end{aligned}$$

$$x=\frac{-14}{44}$$

$$x=\frac{-7}{22}$$

4) $$\left|\frac{x+1}{3x+2}\right|=\frac{3}{4}$$

- Primer caso: si es positivo

$$\frac{x+1}{3x+2}=\frac{3}{4}$$

- Segundo caso: si es negativo

$$-\left(\frac{x+1}{3x+2}\right)=\frac{3}{4}$$

$4(x+1) = 3(3x+2)$	$-8x-4 = 3(3x+2)$
$8x+4 = 6x+6$	$-8x-4 = 9x+6$
$8x-6x = 6-4$	$-8x-9x = 6+4$
$4x = 2$	$-17x = 10$
$x = \frac{1}{2}$	$x = \frac{-10}{17}$

8.6.2. SOLUCIÓN DE VALORES ABSOLUTOS CON DESIGUALDADES.

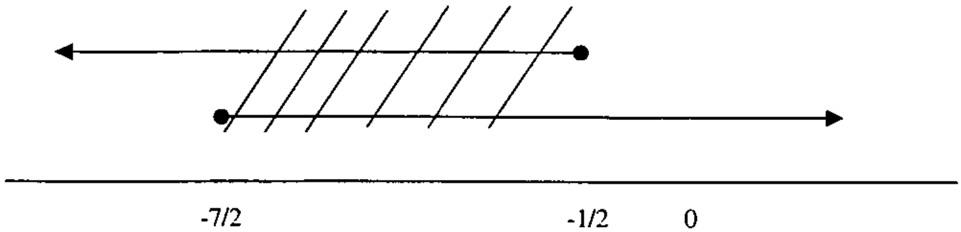
1) $|2x+4| \leq 3$

♦ Primer caso: si es positivo	♦ Segundo caso: si es negativo
$2x+4 \leq 3$	$-(2x+4) \leq 3$
$2x \leq 3-4$	$-2x \leq 3+4$
$2x \leq -1$	$-2x \leq 7$
$x \leq -\frac{1}{2}$	$x \geq \frac{-7}{2}$

y

El valor absoluto cuando está comparado con el símbolo de menor o igual, tendrá como estructura lógica resolverse con y, es decir, intersecando las soluciones que den los dos casos. Así en este ejemplo se tendrá como solución la intersección de las áreas que genera $x \leq -\frac{1}{2}$ y el área de $x \geq \frac{-7}{2}$

Solución Gráfica:



$$Sol = \left\{x \in \Re / -\frac{7}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in \Re / x \in \left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right]\right\}$$

2) $\left|\frac{-3}{4}(x+5)+x+\frac{1}{2}\right| < 2$

$$\left|\frac{-3x}{4}-\frac{15}{4}+x+\frac{1}{2}\right| < 2$$

$$\left|\frac{x}{4}-\frac{13}{4}\right| < 2$$

y

- Primer caso: si es positivo

$$\frac{x}{4}-\frac{13}{4} < 2$$

$$\frac{x}{4} < 2+\frac{13}{4}$$

$$\frac{x}{4} < \frac{8+13}{4}$$

$$\frac{x}{4} < \frac{21}{4}$$

$$x < 21$$

- Segundo caso: si es negativo

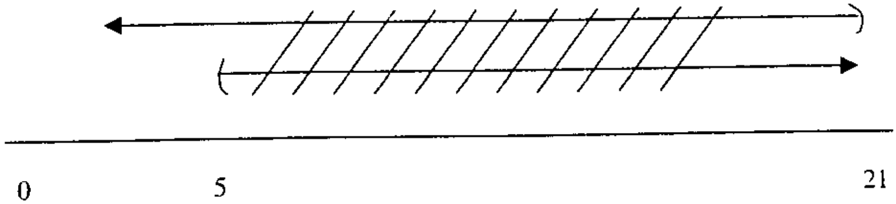
$$-\left(\frac{x}{4}-\frac{13}{4}\right) < 2$$

$$-\frac{x}{4} < 2-\frac{13}{4}$$

$$-\frac{x}{4} < \frac{8-13}{4}$$

$$-\frac{x}{4} < -\frac{5}{4}$$

$$x > 5$$



Sol $= \{x \in \Re / 5 < x < 21\} = \{x \in \Re / x \in (5{,}21)\}$

3) $\left|\frac{5}{2}(x+6)+3\right| \geq 2$

$$\left|\frac{5}{2}x + 15 + 3\right| \geq 2$$

$$\left|\frac{5}{2}x + 18\right| \geq 2$$

- Primer caso: si es positivo

$$\frac{5}{2}x + 18 \geq 2$$

$$\frac{5}{2}x \geq 2 - 18$$

$$x \geq -16\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$x \geq -\frac{32}{5}$$

o

- Segundo caso: si es negativo

$$-\left(\frac{5}{2}x + 18\right) \geq 2$$

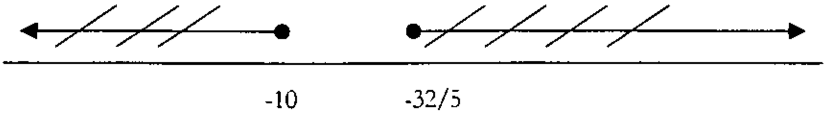
$$-\frac{5}{2}x \geq 2 + 18$$

$$x \leq 20\left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$x \leq -10$$

En este caso cuando la desigualdad tiene el mayor o mayor igual, se tiene que resolver con un o, lo que implicará que para estructurar la solución los conjuntos que resulten de los dos posibles casos se unen y eso genera la solución general de la desigualdad.

En este caso se tiene:



$$\text{Sol} = \left\{x \in \Re / -\infty < x \leq -10,\ -\frac{32}{5} \leq x < \infty\right\} = \left\{x \in \Re / x \in \left\{(-\infty,-10] \cup \left[-\frac{32}{5},\infty\right)\right\}\right\}$$

4. $\mathbf{3|5x - 4(x+1)| > 5}$

- Primer caso: si es positivo

$3(5x - 4x - 4) > 5$

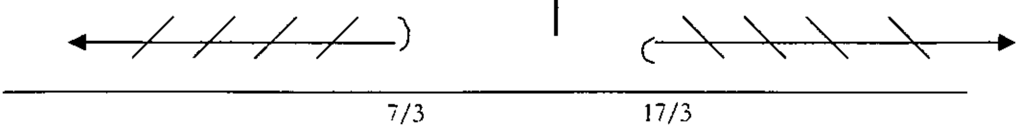
$$3(x - 4) > 5$$
$$3x - 12 > 5$$
$$3x > 5 + 12$$
$$x > \frac{17}{3}$$

o

- Segundo caso: si es negativo

$-3(5x - 4x - 4) > 5$

$$-3(x - 4) > 5$$
$$-3x + 12 > 5$$
$$-3x > 5 - 12$$
$$x < \frac{7}{3}$$



$$\text{Sol} = \left\{x \in \Re / -\infty < x < \frac{7}{3},\ \frac{17}{3} < x < \infty\right\} = \left\{x \in \Re / x \in \left\{\left(-\infty,\frac{7}{3}\right) \cup \left(\frac{17}{3},\infty\right)\right\}\right\}$$

5) $\mathbf{\frac{|2x-3|}{7} > 4x+1}$

- Primer caso: si es positivo

- Segundo caso: si es negativo

$$\frac{2x-3}{7} > 4x+1$$

$$2x - 3 > 7(4x+1)$$

$$2x - 3 > 28x + 7$$

$$2x - 28x > 7 + 3$$

$$-26x > 10$$

$$x < \frac{-10}{26}$$

$$x < -\frac{5}{13}$$

o

$$-\frac{2x-3}{7} > 4x+1$$

$$-2x + 3 > 7(4x+1)$$

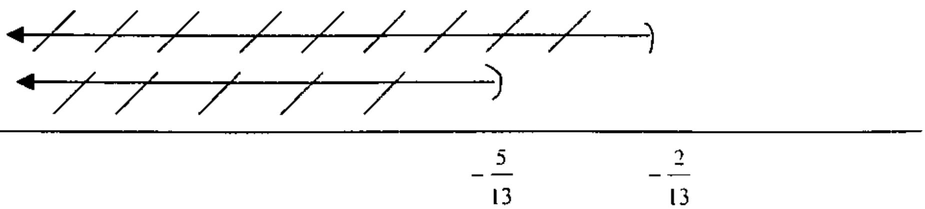
$$-2x + 3 > 28x + 7$$

$$-2x - 28x > 7 - 3$$

$$-30x > 4$$

$$x < \frac{4}{-30}$$

$$x < -\frac{2}{15}$$



$$\text{Sol} = \left\{x \in \Re / -\infty < x < -\frac{2}{13}\right\} = \left\{x \in \Re / x \in \left(-\infty, \frac{-2}{13}\right)\right\}$$

6) $\left|\frac{\mathbf{12x - 3(4x - 8)}}{\mathbf{2}}\right| \geq \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{3}}$

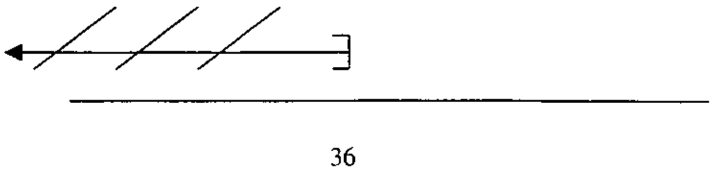
$$\left|\frac{12x - 12x + 24)}{2}\right| \geq \frac{x}{3}$$

$$\left|\frac{24}{2}\right| \geq \frac{x}{3}$$

$$12 \geq \frac{x}{3}$$

$$3(12) \geq x$$

$36 \geq x$



$\text{Sol} = \{x \in \Re / -\infty < x < 36\} = \{x \in \Re / x \in (-\infty, 36)\}$

7) $\dfrac{|\mathbf{x-3}|}{\mathbf{2}} \leq \dfrac{\mathbf{5x-3}}{\mathbf{2}}$

y

- Primer caso: si es positivo

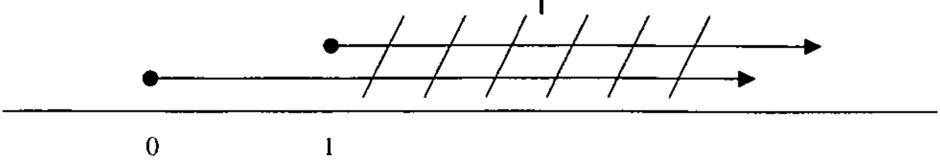
$$\frac{x-3}{2} \leq \frac{5x-3}{2}$$

$$\begin{aligned} x - 3 &\leq 5x - 3 \\ x - 5x &\leq -3 + 3 \\ -4x &\leq 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

- Segundo caso: si es negativo

$$-\frac{x-3}{2} \leq \frac{5x-3}{2}$$

$$\begin{aligned} -(x-3) &\leq 5x - 3 \\ -x + 3 &\leq 5x - 3 \\ -x - 5x &\leq -3 - 3 \\ -6x &\geq -6 \\ x &\geq 1 \end{aligned}$$



$\text{Sol} = \{x \in \Re / 1 \leq x \leq \infty\} = \{x \in \Re / x \in [1, \infty)\}$

8) $\left|\frac{3}{4}(x-3)\right| < \frac{2x-7}{3}$

$$\left|\frac{3}{4}x - \frac{9}{4}\right| < \frac{2x-7}{3}$$

- Primer caso: si es positivo

$$\frac{3x-9}{4} < \frac{2x-7}{3}$$

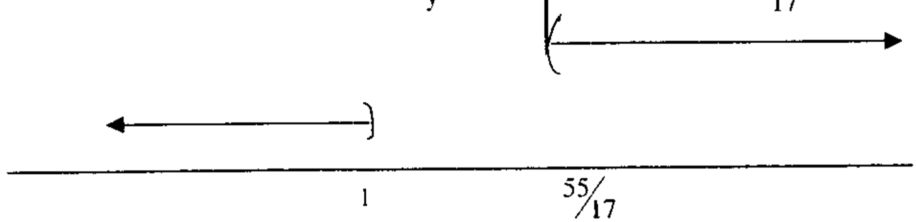
$$3(3x-9) < 4(2x-7)$$
$$9x-27 < 8x-28$$
$$9x-8x < -28+27$$
$$x < 1$$

y

- Segundo caso: si es negativo

$$-\frac{3x-9}{4} < \frac{2x-7}{3}$$

$$-3(3x-9) < 4(2x-7)$$
$$-9x+27 < 8x-28$$
$$-9x-8x < -28-27$$
$$-17x < -55$$
$$x > \frac{55}{17}$$



Sol = ∅ ya que como se pide la intersección de las dos rayas y éstas están apuntando a lados diferentes y se observa claramente que no se intersecan, entonces la solución dará al conjunto vació

9) $\left|\frac{2x-1}{x-4}\right| > 9$

- Primer caso: si es positivo

- Segundo caso: si es negativo

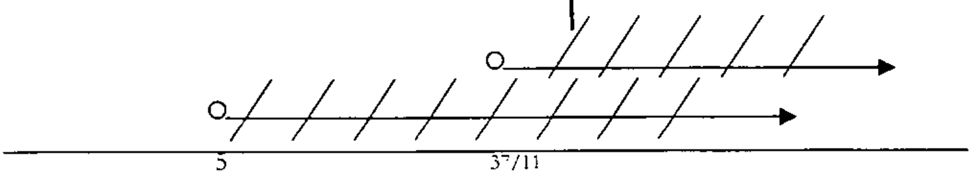
$$\frac{2x-1}{x-4} > 9$$

$$2x - 1 > 9(x-4)$$
$$2x - 1 > 9x - 36$$
$$2x - 9x > 1 - 36$$
$$-7x < -35$$
$$x > \frac{35}{7}$$
$$x > 5$$

$$-\frac{2x-1}{x-4} > 9$$

$$-2x + 1 > 9(x-4)$$
$$-2x + 1 > 9x - 36$$
$$-2x - 9x > -1 - 36$$
$$-11x < -37$$
$$x > \frac{37}{11}$$

o



$$\text{Sol} = \{x \in \Re \,/\, 5 < x < \infty\} = \{x \in \Re \,/\, x \in (5, \infty)\}$$

E J E R C I C I O S

Resuelva las siguientes desigualdades con valor absoluto.

1.- $\frac{x}{2} - \frac{5}{6} > 4$

2.- $x - 2 < x + 5$

3.- $\frac{2x+5}{4-x} = 7$

4.- $\left|\dfrac{2x-1}{x-4}\right| = 9$

5.- $|3x+4| \geq 7(5x-12)$

6.- $\dfrac{|x+3|}{7} \leq x-1$

7.- $|x-2+5(4x+3)| = 5$

8.- $|x-2| = |7x-3|$

9.- $\left|\dfrac{4}{5-2x}\right| < \dfrac{1}{3x+1}$

10.- $|2x-1+3(x+8)| \geq 7$

C A P Í T U L O 9

GRAFICACIÓN DE RECTAS Y DESIGUALDADES LINEALES

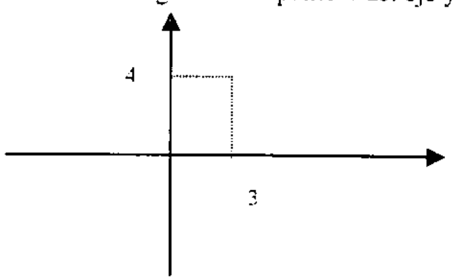
Dado el conocimiento de las ecuaciones lineales con una incógnita, así como de desigualdades con la misma característica, se vuelve necesario saber como representar a ambas en forma gráfica, para lo cual se comenzará primero que nada a definir el plano cartesiano, la localización de puntos y culminar con las técnicas de graficación para rectas y desigualdades.

9.1. INTRODUCCIÓN AL PLANO CARTESIANO

El plano cartesiano es el cruce de dos rectas reales, que sirve para poder graficar en términos de área. El eje horizontal es conocido como el eje de las abscisas (Eje de las x) y el vertical es el eje de las ordenadas (eje de las y). Para localizar en el plano lo que se requiere ahora son puntos, los cuales corresponderán a la siguiente notación:

A(x, y) donde A es el nombre del punto, el paréntesis indica el punto cuyo primer valor numérico o literal corresponde al valor en el eje de las abscisas y el segundo al eje de las ordenadas. La localización de un punto se hace a través de ambos ejes, primero localizando el valor del eje x y lanzando una vertical hasta cruzar con la horizontal que vendrá de la indicación del eje y.

Así por ejemplo si el punto es A(3.4) hay que localizar el tres en el eje x y el 4 en el eje y, lanzar una recta vertical imaginaria del valor 3 y el punto se encontrará en el corte que hacen esa recta u una horizontal imaginaria del punto 4 del eje y.

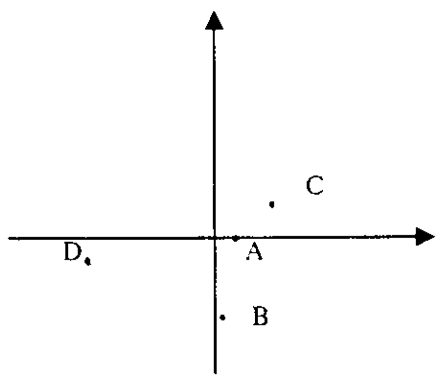


Al punto en cuestión se le conoce también como par ordenado.

Aquí el valor que puedan tomar cualesquiera de los dos valores puede ser diverso, así pudiera ser natural, entero, racional, irracional, en fin cualquier real. No tienen porque guardar algún orden entre el valor de la x y el valor de la y, de esta forma se pueden tener los siguientes puntos, por citar algunos ejemplos:

$$A(1,0);\quad B\left(\frac{1}{3},-3\right);\quad C\left(\sqrt{7},\frac{20}{11}\right);\quad D(-9,-1)$$

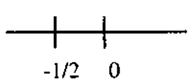
Si se pretende localizar estos puntos estarían:



9.2.- GRÁFICA DE UNA LÍNEA RECTA

Cuando en ecuaciones se resolvieron ecuaciones de este tipo: $2x + 1 = 0$

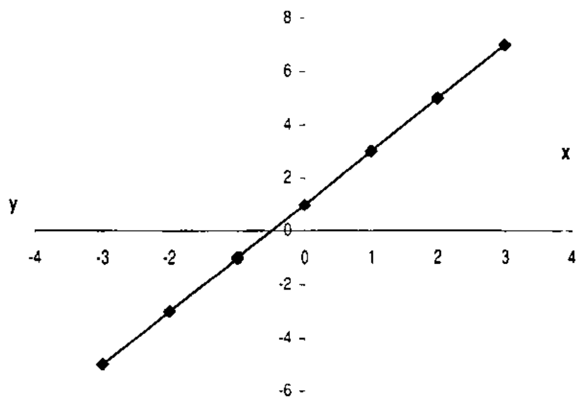
Lo que se encontraba es una solución específica que era $x = -1/2$ y se representaba en la recta real de la siguiente manera:



Si se quiere generalizar este concepto, entonces en vez de igualar a cero se pondrá un valor y que dependerá de lo que valga x:

y = 2 x + 1 - donde x = variable independiente, es decir, toma cualquier valor real.
- y = variable dependiente, es decir, toma valores indicados por la relación donde está x.

Para poderla graficar se hace necesario construir una tabla de valores, en la cual se pondrá a x los valores que se deseen, cualesquiera y y tomará los correspondientes al valor x según la fórmula que indique la relación entre x y y. En este ejemplo la tabla será de la siguiente forma:

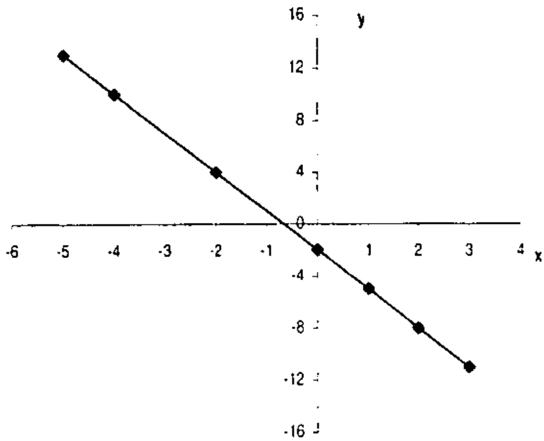


Ejercicio : Graficar las rectas que se indican en cada inciso.

1) $3x + y + 2 = 0$

$y = -3x - 2$

x	y = - 3 x - 2
- 4	y = - 3 (- 4) - 2 = 10
- 2	y = - 3 (- 2) - 2 = 4
0	y = - 3 (0) - 2 = - 2
1	y = - 3 (1) - 2 = - 5
3	y = - 3 (3) - 2 = - 11



2) $2x - 3y = 0$

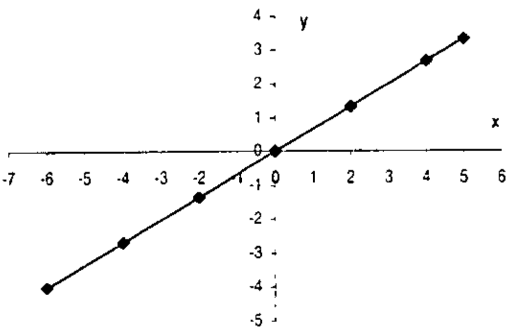
$-3y = -2x$

$y = \dfrac{-2x}{-3}$

$y = \dfrac{2x}{3}$

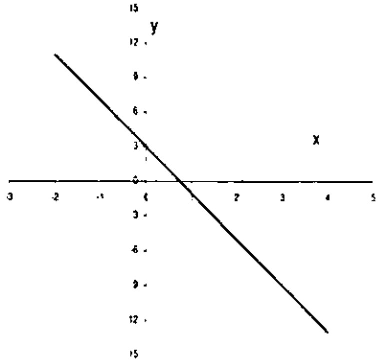
$y = \dfrac{2}{3}x$

x	$y = \dfrac{2x}{3}$
-4	$y = \dfrac{2}{3}(-4) = \dfrac{-8}{3}$
-2	$y = \dfrac{2}{3}(-2) = -\dfrac{4}{3}$
0	$y = \dfrac{2}{3}(0) = 0$
2	$y = \dfrac{2}{3}(2) = \dfrac{4}{3}$
4	$y = \dfrac{2}{3}(4) = \dfrac{8}{3}$



3) $-y = 4x - 3$

x	$y = -4x + 3$
0	$y = -4(0) + 3 = 3$
1	$y = -4(1) + 3 = -1$
2	$y = -4(2) + 3 = -5$
3	$y = -4(3) + 3 = -9$
-1	$y = -4(-1) + 3 = 7$

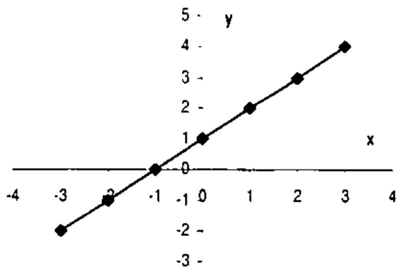


4) $-3x + 3y - 3 = 0$

$3y = 3x + 3$

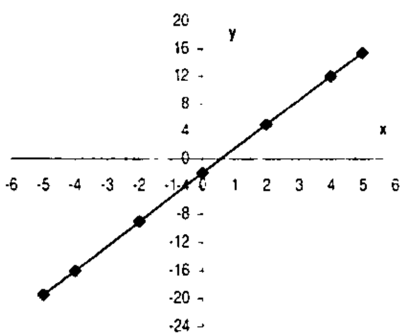
$y = x + 1$

x	$y = x + 1$
-1	$y = (-2)+1=-1$
-1	$y = (-1)+1= 0$
0	$y = (0)+1= 1$
1	$y = (1)+1= 2$
2	$y = (2)+1 = 3$



5) $y = \dfrac{7x - 4}{2}$

x	$y = (7x - 4)/2$
- 4	$y = \dfrac{7(-4) - 4}{2} = -1$
- 2	$y = \dfrac{7(-2) - 4}{2} = -9$
0	$y = \dfrac{7(0) - 4}{2} = -2$
2	$y = \dfrac{7(2) - 4}{2} = 5$
4	$y = \dfrac{7(4) - 4}{2} = 12$

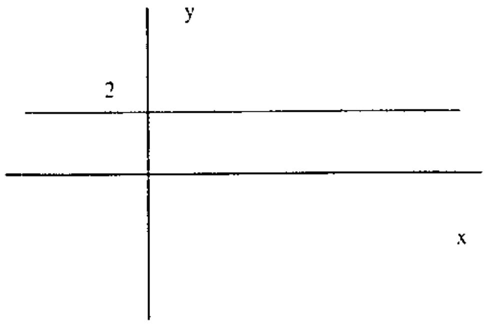


Existen otras rectas que son importantes revisar y que confunden mucho al lector, por el tipo de regla de asociación que expresan. El primer tipo de ellas son las rectas horizontales paralelas al eje x cuya ecuación sólo tiene a y igualada con una constante.

$$y = \text{constante}$$

$y = 2$

x	y
-3	2
-2	2
0	2
4	2
8	2

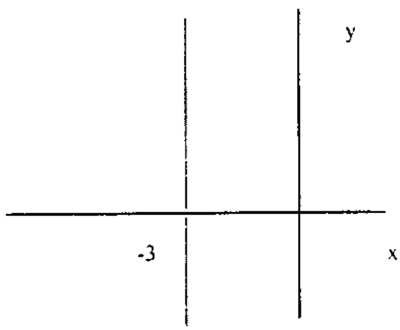


La otra recta importante y cuya regla de asociación parece todavía más extraña es la recta vertical paralela al eje y

La regla de asociación es, x = constante.

$x = -3$

x	y
-3	0
-3	1
-3	-1
-3	-4
-3	6



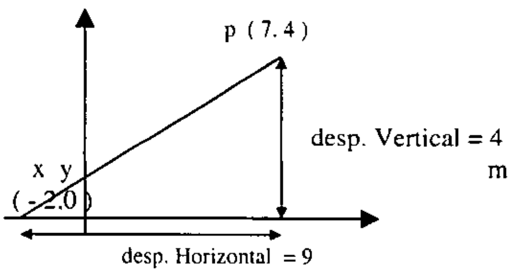
9.2.1.ORDENADA AL ORIGEN Y PENDIENTE

De todas las rectas que se graficaron anteriomente se puede establecer una constante en la regla de asociación que se gráfica, esto es que siempre queda $y = mx + b$, es decir, y queda igualada con una constante que multiplica a x y otro término independiente. A la constante que multiplica a la x se le llama pendiente de la recta y al término independiente ordenada al origen.

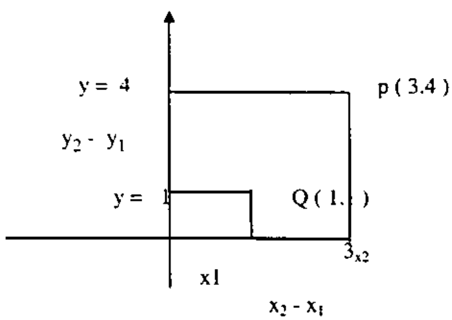
Dado esto se puede establecer que la b, ordenada al origen, es el corte que hace la recta con el eje de las y, y en particular el punto que determina en el eje está dado por (0,b).

El concepto de pendiente se tiene ya establecido de manera intuitiva, ya que cada vez que se sube una loma por lo regular se menciona la pendiente que tiene esa loma, y se siente a través de la fuerza que se ejerce para atraernos hacia abajo y que se intenta romper para seguir ascendiendo. Ese concepto intuitivo es la pendiente que en términos físicos se define como:

$$\textbf{Pendiente } (m) = \frac{\textbf{desplazamiento vertical}}{\textbf{desplazamiento horizontal}}$$



$$m = \frac{4}{9}$$



$$m = \frac{\text{des. vertical}}{\text{des.horizontal}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{4-1}{3-1} = \frac{3}{2}$$

Ejercicio:
Calcular las pendientes de las rectas que pasan por los puntos P y Q.

a) P (-1, 4) y Q (-4, -3)

$$m = \frac{-3-4}{-4-(-1)} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

b) $P\left(\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y Q (-1 , 0)

$$m = \frac{0-\frac{1}{4}}{-1+\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{-4+1}{4}} = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

c) $P\left(\frac{4}{7}, \frac{-1}{4}\right)$ y $Q\left(\frac{3}{2}, 8\right)$

$$m = \frac{8+\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}-\frac{4}{7}} = \frac{\frac{33}{4}}{\frac{21-8}{14}} = \frac{\frac{33}{4}}{\frac{13}{14}} = \frac{33(14)}{13(4)} = \frac{33(7)}{13(2)} = \frac{231}{26}$$

d) P (-3, -6) y Q (-8, -1)

$$m = \frac{-1-(-6)}{-8-(-3)} = \frac{5}{-5} = -1$$

e) P (-7, 6) y Q (2 ,3)

$$m = \frac{3-6}{2-7} = \frac{3}{5}$$

f) P (3,0) y Q (3,9)

$m = \frac{9-0}{3-3} = \frac{9}{0}$ Esto implica que no existe la pendiente y los puntos están colocados uno arriba del otro.

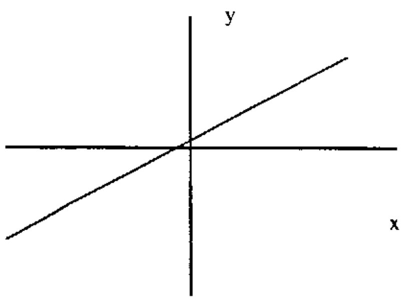
g) P (8, 3) y Q (-4, 3)

$$m = \frac{3-3}{-4-8} = \frac{0}{-12} = 0$$ Esto implica que la pendiente es de una recta horizontal

En todos estos ejemplos sobre pendientes pudo observarse que algunos números salieron positivos y otros fueron negativos, y los dos últimos casos muy especiales, que fue el de dividir entre cero y el que el numerador fuera cero.

Si la pendiente sale positiva implica que la recta es creciente, leyendo la forma creciente de izquierda a derecha, es decir:

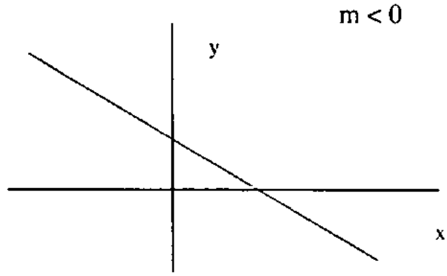
$m > 0$



izquierda $\longrightarrow$ derecha

Cuando la pendiente es negativa, entonces la recta es decreciente, esto es:

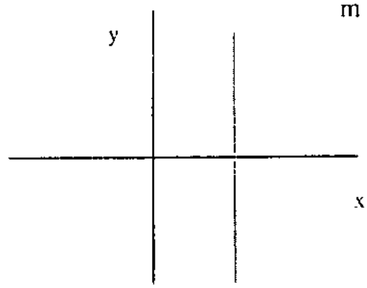
$m < 0$



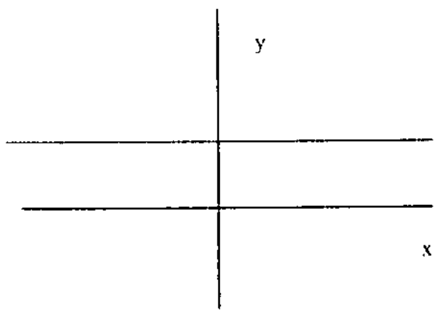
izquierda $\longrightarrow$ derecha

Cuando la recta es vertical, paralela al eje y entonces no existe la pendiente y son los casos que salen con el denominador en cero:

m no existe



Si la recta es horizontal paralela al eje x, entonces la pendiente es cero ya que no hay avance en el eje y y eso es lo que genera que el numerador de la fórmula de la pendiente sea cero.



Ordenada al origen = intersección de la recta con el eje y (b)

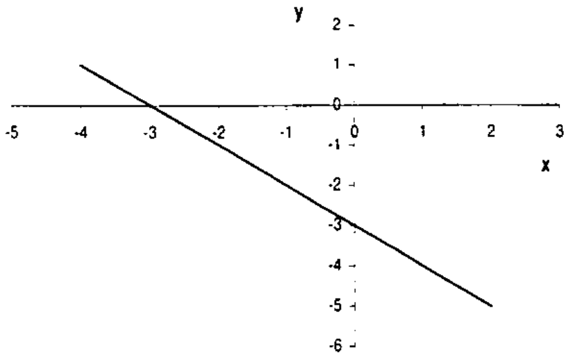
Con la pendiente y la ordenada al origen es posible graficar la recta, haciendo:

a) Localizar la ordenada al origen, contando los puntos que se indiquen en el eje y.

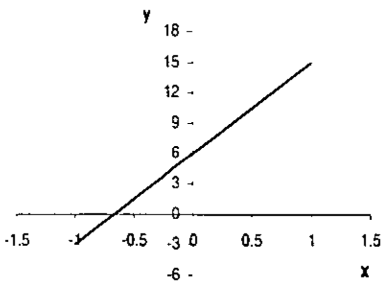
b) A partir de la ordenada al origen localizar la pendiente, primero desplazándose lo que indique el numerador de m hacia arriba o hacia abajo según el signo, es decir, si m es positiva hay que avanzar hacia arriba, si por el contrario es negativa se desplaza hacia abajo. Del punto encontrado por el numerador se localizan las unidades indicadas en el denominador hacia la derecha. Éste será un segundo punto, la recta se encontrará trazando la unión de este punto y el que determina la ordenada al origen.

Ejercicio obtener la ecuación de las siguientes gráficas

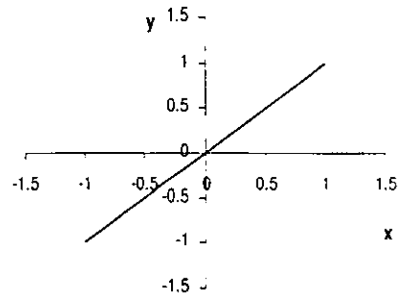
a) $b = -3$, $m = -1$



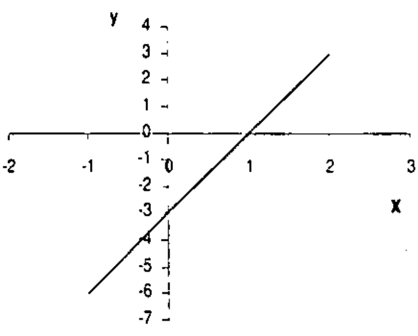
b) b = 6, m = 9



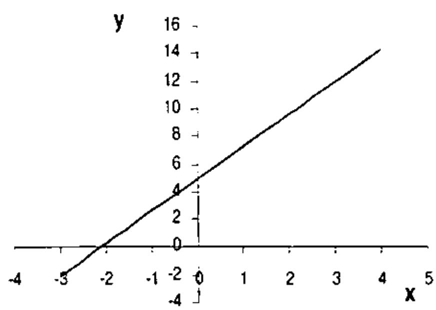
c) b = 0 , m = 1



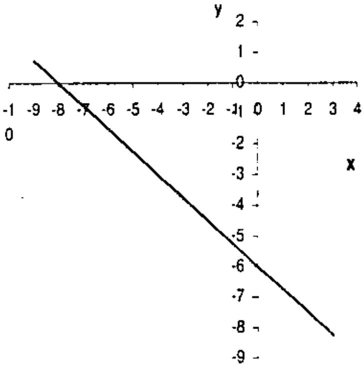
c) b = -3, m = 3



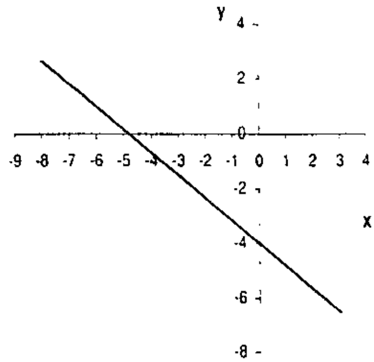
d) b = 5 m = 7/3 y



e) $b = -6$, $m = -3/4$

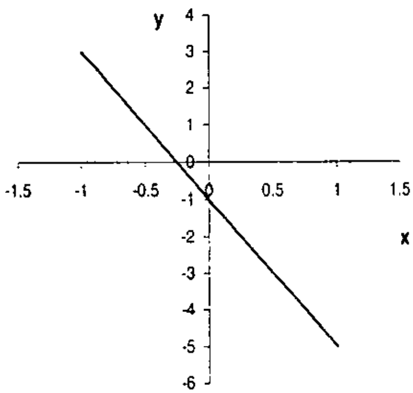


f) $b = -4$, $m = -5/6$

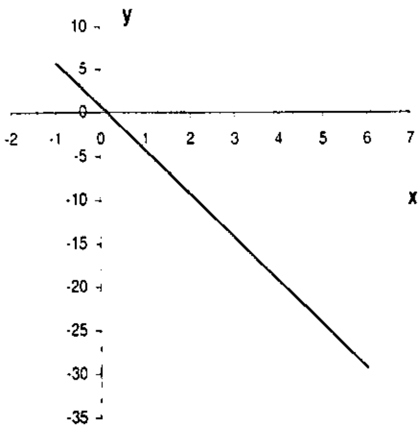


Como se vio en la tabulación las rectas tienen por ecuación la forma $y = mx + b$ por lo que se da la pendiente y la ordenada al origen y con sólo ellas se puede trazar su gráfica sin necesidad de tabular.

a) $y = -4x - 1$

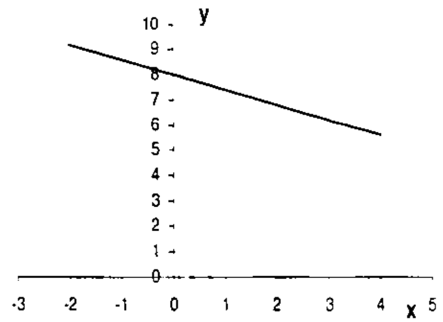


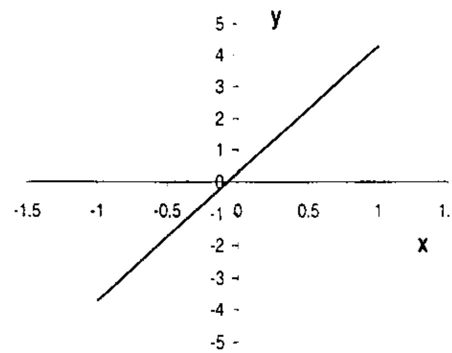
b) $y = -5x + 3/4$



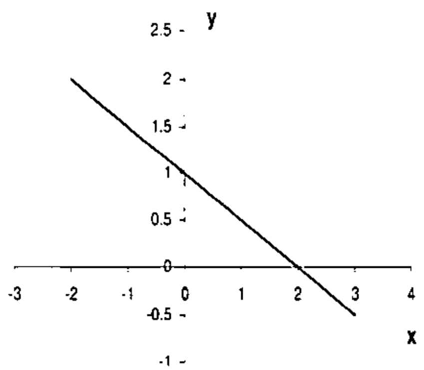
c) $y = -\frac{5}{3}x + 8$

d) $y = 4x + \frac{2}{7}$

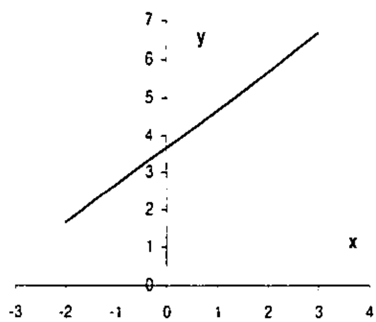




e) $y = -\frac{1}{2}x + 1$



f) $y = x + \frac{11}{3}$



9.2.2. ECUACIÓN DE LA RECTA DADO UN PUNTO Y LA PENDIENTE.

Cuando se tiene un punto por el cual pasa la recta y la pendiente de esa recta, se puede calcular su ecuación a través de la ecuación ya conocida que es la de pendiente y ordenada al origen. Esto es, por ejemplo, se supondrá que se tiene que la recta pasa por el punto P(3,1) y tiene pendiente $m = 4$, entonces:

$y = mx + b$

$1 = 4(3) + b$ lo que se hizo en este paso es sustituir el punto en x e y y el valor de m.

$1 = 12 + b$

$b = -11$ encontrado el valor de b, se vuelve a tomar la ecuación $y = mx + b$ y se evalúan en ella m y b, quedando:

$y = 4x - 11$

Esta es una forma de encontrar esa ecuación, otra forma es a través de la pendiente de la recta, ya que se puede considerar, al punto P(3,1) y a otro punto Q(x,y) y obtener la pendiente, esto es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$4 = \frac{1 - y}{3 - x}$$

$$1 - y = 4(3 - x)$$

$$1 - y = 12 - 4x$$

$$-y = 12 - 1 - 4x$$

$$y = 4x - 11$$

Como puede observarse ambos métodos produjeron la misma ecuación de la recta. Si este último método se quiere generalizar lo que se haría es dar un punto $P(x_1,y_1)$ que son valores conocidos y dar la pendiente. Evaluar en la fórmula de la pendiente y despejar el valor de y, quedando:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

Usualmente la ecuación que se maneja es la segunda y se hace el despeje de y cuando ya se sustituyeron los datos.

Ejemplos:

a) m= - 3

$P\left(-\frac{1}{3},4\right)$

$$y-4=-3\left(x-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$y-4=-3x-\frac{3}{3}$$

$$y-4=-3x-1$$

$$y=-3x-1+4$$

$$y=-3x+3$$

b) P(2,3) m = 4

$y - y = m (x - x,)$

$y + 3 = 4 (x - 2)$

$y = 4 x - 8 - 3$

$y = 4 x - 11$

c) m = -3 $P\left(-\frac{1}{3},4\right)$

$$y-4=-3\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

$y - 4 = - 3x - 1$

$y = - 3x - 1 + 4$

$y = - 3 x + 3$

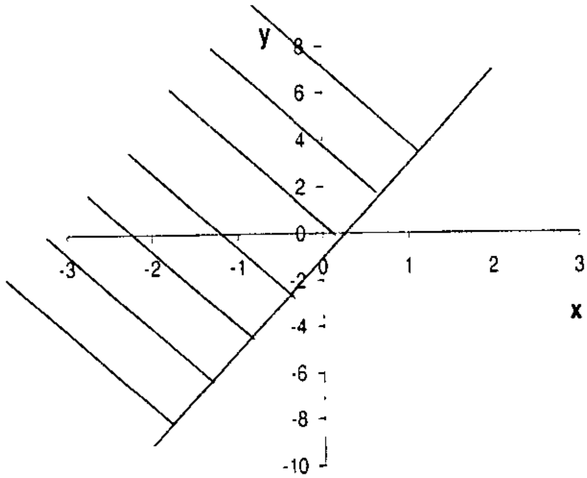
9.3. GRÁFICA DE DESIGUALDADES

Graficar las desigualdades se vuelve una tarea fácil. ya que lo importante es graficar la recta y después localizar el plano que determina la desigualdad así:

Si uno desea graficar esta desigualdad $y \geq 4x - 1$ lo primero que hay que hacer es

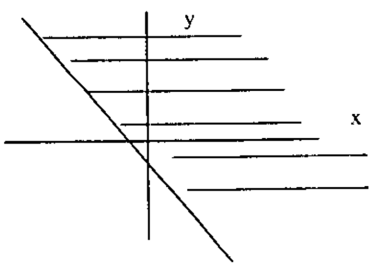
1) Encontrar la recta que determina. $y = 4x - 1$

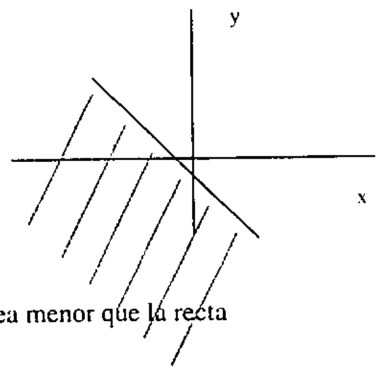
2) Situarse encima de la recta y determinar que es mayor a esa recta, ya que en este caso es la desigualdad solicitada.[1]



Entonces si se tienen rectas y se quiere encontrar áreas por ejemplo.

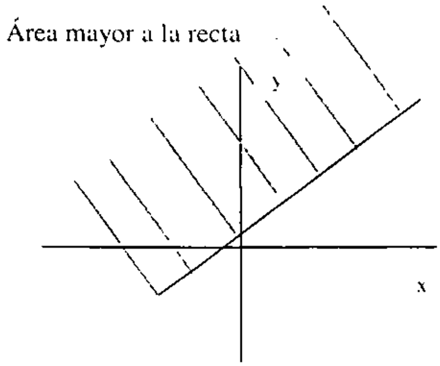
Área mayor que la recta

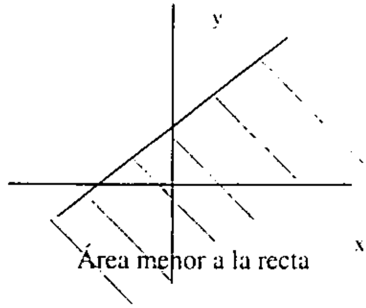


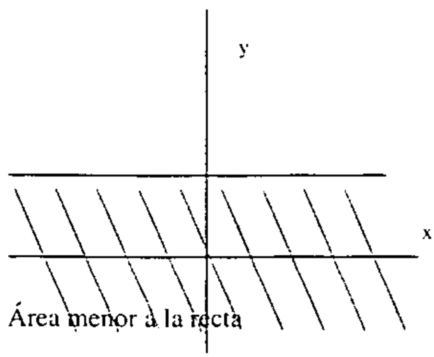


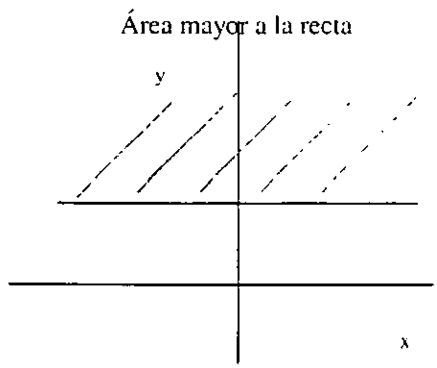
Área menor que la recta

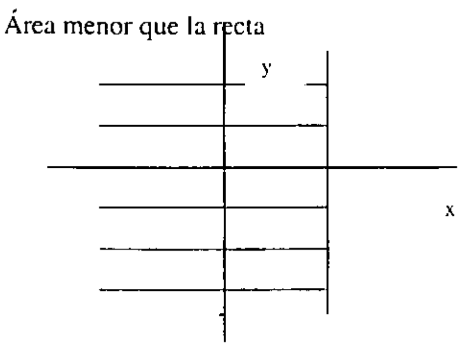
[1] Para representar las desigualdades con $\leq$ y $\geq$ resulta difícil, por lo que si están del mismo color la recta y el área significa que se está representando esas desigualdades. Para el caso de las desigualdades estrictas se usarán diferentes colores para la recta y para la región de la desigualdad.

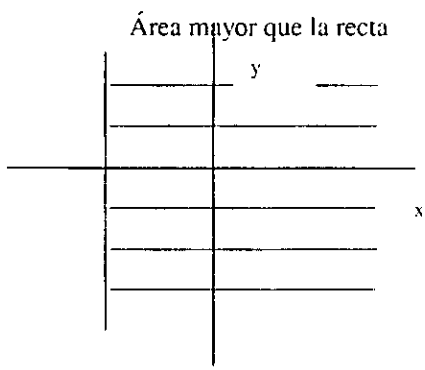












Dado lo anterior resulta entonces un trabajo fácil localizar las áreas.

Ejercicios. Localizar las áreas que se indican en cada inciso:

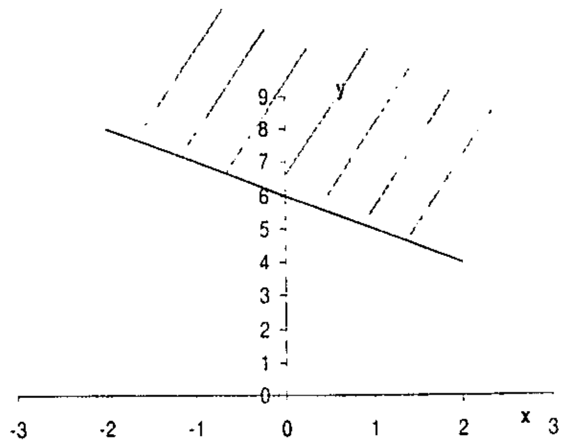
1) $x + y > 6$

$y > -x + 6$

recta

$y = -x + 6$

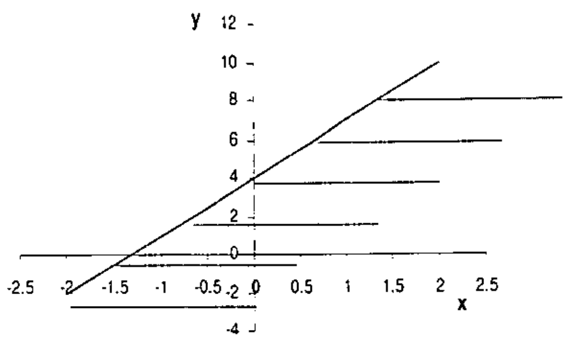
$y > -x + 6$



b) $y - 3x \leq 4$

$y \leq 4 + 3x$

$y \leq 3x + 4$



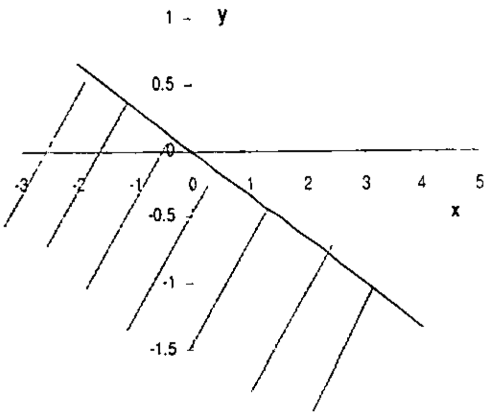
3) $2x + 6y \le 0$

$$6y \le -2x$$

$$y \le -\frac{2x}{6}$$

$$y \le -\frac{1}{3}x + 0$$

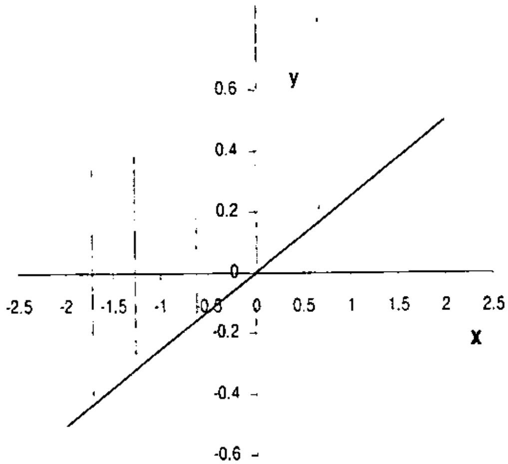
y



4) $x < 4y$

$$4y > x$$

$$y > \frac{x}{4}$$

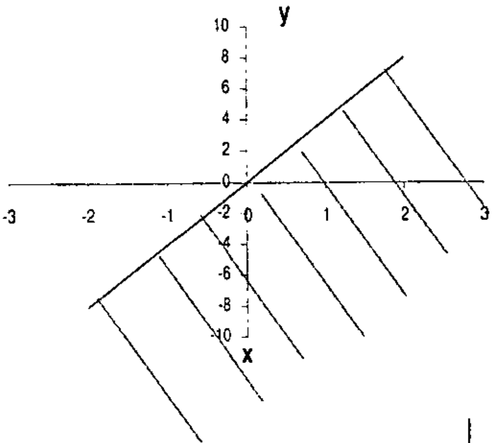


5) $8x - 2y \geq 0$

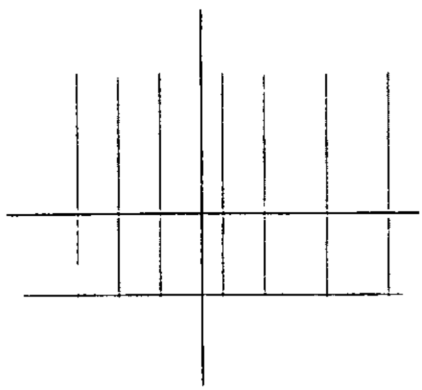
$$-2y \geq -8x$$

$$y \leq \frac{-8x}{-2}$$

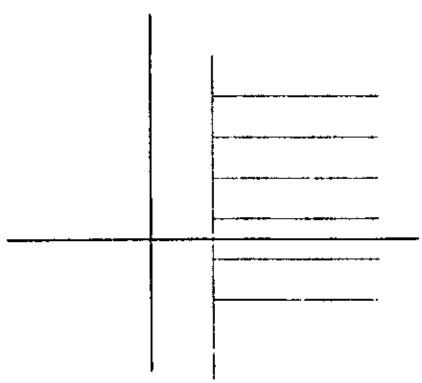
$$y \leq 4x$$



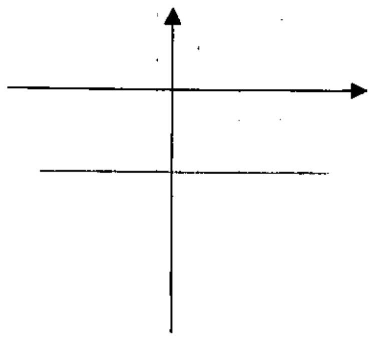
6) $y \geq -3$



7) $x > 2$



$y > -\frac{1}{2}$

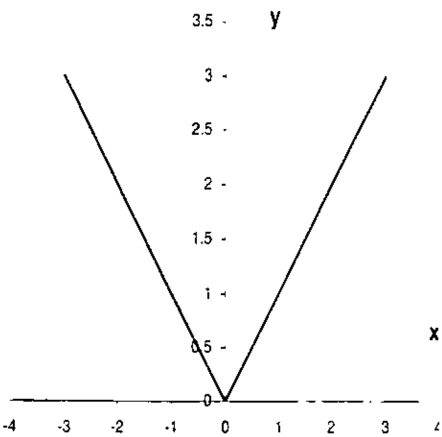


9. 4. GRAFICACIÓN DEL VALOR ABSOLUTO

Los valores absolutos son combinaciones de rectas, que por lo general resultarán tener la forma de V, ya sean cerradas o abiertas, verticales u horizontales. Para encontrar la gráfica se hace necesario tabular valores, es importante que salga la V, ya que se pueden tabular valores que generen sólo un lado del valor absoluto.

a) $y < | x |$

x	y	
-3	3	P(-3,3)
-2	2	Q(-2,2)
-1	1	R (-1,1)
0	0	S (0,0)
1	1	T (1,1)
2	2	V (2,2)
3	3	Z (3,3)

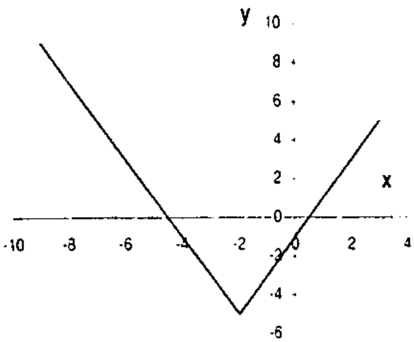


$y > |3x + 2|$

Graficar un valor absoluto implica encontrar esa V, para poderlo hacer de una manera fácil, es dar los valores que rodeen el número que determina el cero dentro de las barras, así en este ejemplo se tiene que $3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2/3$.

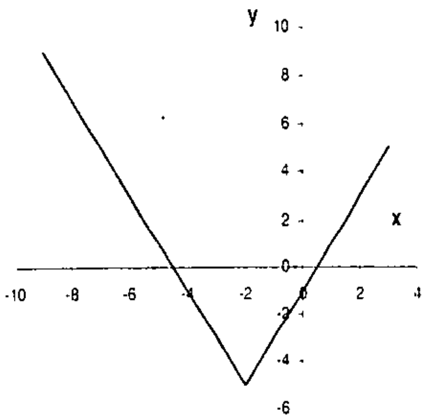
b) $y > |3x + 2|$

x	$y = \lvert 3x + 2 \rvert$
- 3	$\lvert -9 + 2 \rvert = 7$
- 2	$\lvert -6 + 2 \rvert = 4$
- 1	$\lvert -3 + 2 \rvert = 1$
0	2
1	5
2	8
3	11



c) $y = |2x + 4| - 5$

x	$y = \lvert 2x + 4 \rvert - 5$
-4	$y = \lvert -8 + 4 \rvert - 5 = -1$
-3	$y = \lvert -6 + 4 \rvert - 5 = -3$
-1	$y = -2 + 4 - 5 = - - 3$
0	$y = \lvert 4 \rvert - 5 = -1$
1	$y = \lvert 2 + 4 \rvert - 5 = 1$
3	$y = \lvert 6 + 4 \rvert - 5 = 5$
5	$y = \lvert 10 + 4 \rvert - 5 = 9$

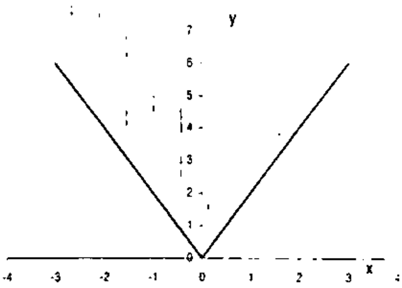


9.5. GRAFICACIÓN DE DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

Para graficar desigualdades hay que graficar primero el valor absoluto como fue visto en el punto anterior y después localizar el área como si fueran dos rectas, también ya explicado en la sección de gráficas de desigualdades.

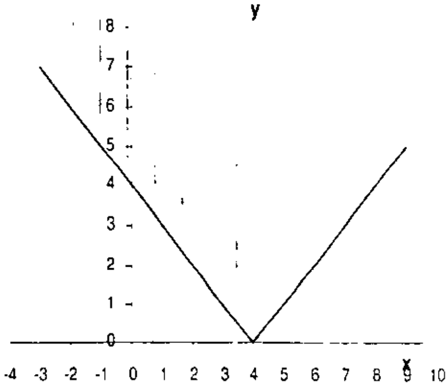
d) $y \geq |2X|$

x	$y = \|2X\|$
-3	$\|-6\| = 6$
- 2	$\|-4\| = 4$
- 1	$\|-2\| = 2$
0	0
1	2
2	4



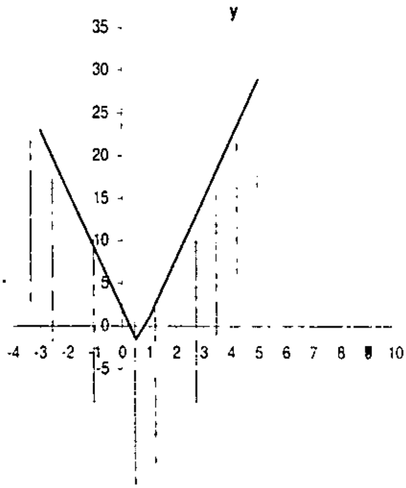
e) $y > |-x + 4|$

x	y
-3	$\|3 + 4\| = 7$
-2	$\|2 + 4\| = 6$
- 1	$\|1 + 4\| = 5$
0	4
1	$\|-1+4\| = 3$
4	$\|-4 + 4\| = 0$
2	$\|-2+4\| = 2$
7	$\|-7 + 4\| = +3$



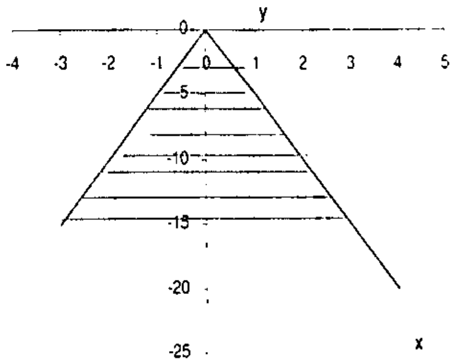
f) $y \leq |7x - 4| - 2$

x	y
- 3	$\|-21 - 4\| - 2 = 23$
- 1	$\|-7 - 4\| - 2 = 9$
0	$\|-4\| - 2 = 2$
2	$\|14 - 4\| - 2 = 8$
3	$\|21 - 4\| - 2 = 15$
5	$\|35 - 4\| - 2 = 29$



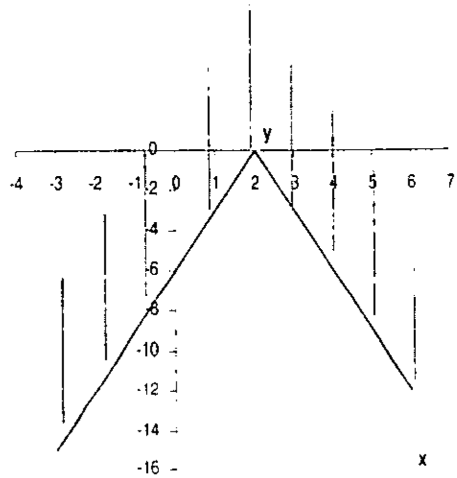
g) $y < -\,|-5x|$

x	y
-2	$-\,|10| = -10$
-1	$-\,|5| = -5$
0	$-\,|0| = 0$
1	$-\,|-5| = -5$
2	$-\,|-10| = -10$
3	$-\,|-15| = -15$



h) $y \geq -\,|3x - 6|$

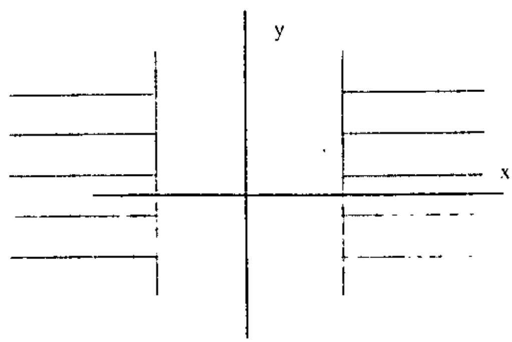
x	y
- 2	$-\,|-6-6| = -12$
0	$-\,|0-6| = -6$
2	$-\,|6-6| = 0$
4	$-\,|12-6| = -6$
5	$-\,|15-6| = -9$
-1	$-\,|-3-6| = -9$



i)) $4 < |x|$

$|x| > 4$

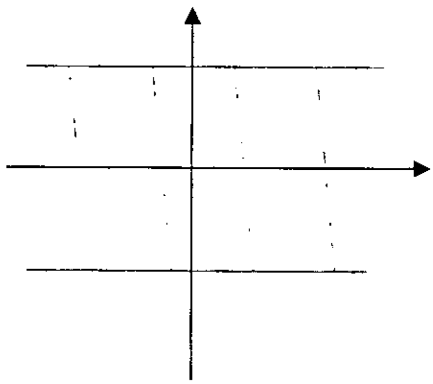
$x > 4$ o $x < -4$



j) $6 \geq |y|$

$|y| \leq 6$

$-6 \leq y \leq 6$



E J E R C I C I O S

Graficar los siguientes ejercicios.

$a) y = 3x + 8$

$b) y - x = 5x - 2y + 8$

$c) y - 1 = 6x + 2$

$d) y = 3x - 5 + 8$

$e) y = \dfrac{7x - 9}{4}$

$f) y = 2x - 3 - 2x$

$g) y < \dfrac{8x - 1}{5}$

$h) y > 6x - \dfrac{4}{3}$

$i) 5x - 3 \leq y - 7$

$j) 2 - 3y \geq \dfrac{5x - 1}{8}$

$k) y \leq 2x - 8$

CAPÍTULO 10

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

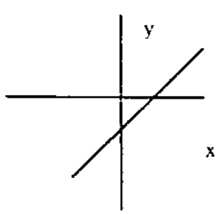
Un sistema de ecuaciones lineales es aquel formado por un conjunto de ecuaciones que tienen exponente uno. El número de variables determina el número de ecuaciones que conforman el sistema.

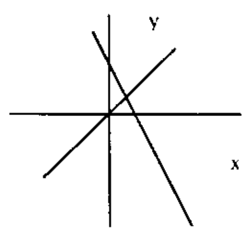
10.1. CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS

Los sistemas de ecuaciones pueden clasificarse en:

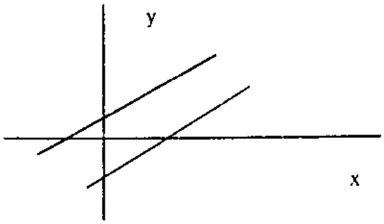
$$\begin{cases} \text{Consistente} \begin{cases} \text{Dependiente} \\ \text{Independiente} \end{cases} \\ \text{Inconsistente} \end{cases}$$

Sistema consistente es cuando el sistema tiene solución, es decir, cuando las rectas se cruzan o se enciman.





Sistema incosistente es cuando el sistema no tiene solución, en este caso las rectas no se cortan y por tanto serían paralelas.



Sistemas independientes: son los sistemas consistentes que tienen una sola solución común.

Sistemas dependientes son los sistemas consistentes que están una recta encima de otra, es decir, tienen una infinidad de soluciones.

10.2. MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Los métodos que se conocen para resolver sistemas de dos por dos son los siguientes:

a) Gráfico
b) Suma y resta (reducción)
c) Igualación
d) Sustitución
e) Determinantes
  i) Cramer
  ii) Menores

10.2.1 MÉTODO GRÁFICO

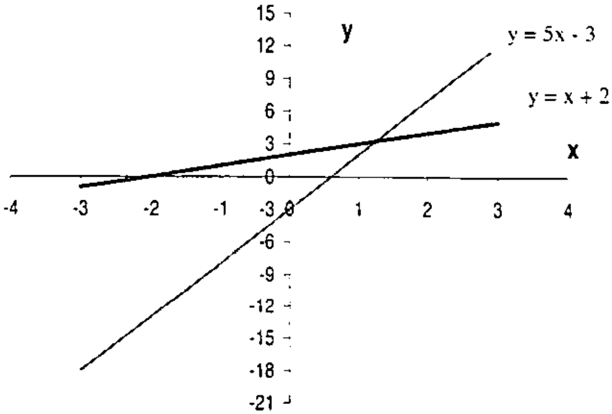
Para resolver un sistema por este método se desarrollará un ejemplo con . cual se puede ver el algoritmo de solución.

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 5x - 3 \end{cases}$$

ALGORITMO.

1.- Graficar en un mismo plano las rectas que conforman el sistema de ecuaciones.

2.- Calcular aproximadamente las coordenadas x, y del punto donde se cortan las rectas.

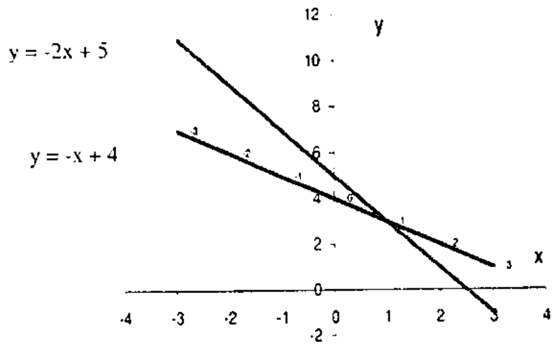


La solución es el punto de intersección de las rectas, así que en este caso es P(1.2, 3). Cabe aclarar que esto es aproximado y depende de la graficación.

Ejercicios

b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ equivalentemente hay que poner el sistema en términos de las y

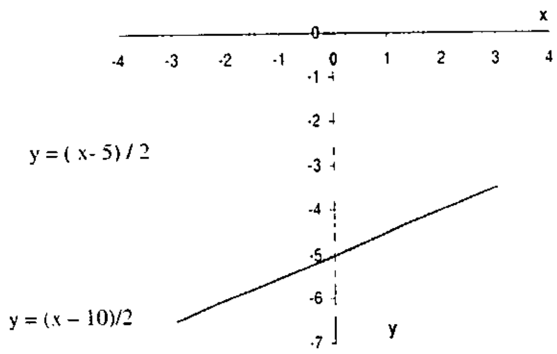
$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$$



Para este caso el punto de intersección de las rectas es P(1, 3), aproximadamente.

d) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} y = \dfrac{x-5}{2} \\ y = \dfrac{x-10}{2} \end{cases}$



Como puede apreciarse en este caso el sistema forma un par de rectas paralelas, por lo que es inconsistente y no tiene solución.

10.2.2. MÉTODO DE REDUCCIÓN: (SUMA Y RESTA)

ALGORITMO.

1) Ordenar el sistema (Debajo de las "x's" las "x's" y debajo de las "y's" las "y's").

2) Escoger que variables tienen coeficientes que permiten más fácilmente hacerse iguales y de signo contrario. (A través de multiplicar por un número a una o las dos ecuaciones)..

3) Se suman las ecuaciones quedando una ecuación de primer grado con una incógnita.

4) Se sustituye la solución encontrada en 4) en cualquiera de las dos ecuaciones originales y se resuelve la ecuación resultante.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -2x + 8y = 10 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 2 \\ \underline{-2x + 8y = 10} \\ 0 + 5y = 12 \\ y = \frac{12}{5} \end{array}$$

$$2x - 3\left(\frac{12}{5}\right) = 2$$

$$2x - \frac{36}{5} = 2$$

$$2x = 2 + \frac{36}{5}$$

$$2x = \frac{46}{5}$$

$$x = \frac{23}{5}$$

Solución: $\mathbf{P}\left(\frac{23}{5}, \frac{12}{5}\right)$

b) $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \Rightarrow -10x - 4y = -2 \\ -2x + 4y = 3 \Rightarrow -2x + 4y = 3 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} -10x - 4y = -2 \\ -2x + 4y = 3 \end{array}$$

$-12x \quad = 1$

$$x = -\frac{1}{12}$$

$-2(-\,^1\!/_{12}\,) + 4y = 3$

$1/6 + 4y = 3$

$$4y = 3 - \frac{1}{6}$$

$$y = \frac{17}{6}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$y = \frac{17}{24}$$

Solución: $\mathbf{P\left(\frac{-1}{12}, \frac{17}{24}\right)}$

c) $\begin{cases} 3x - 7y = 4 & \Rightarrow \quad 6x - 14y = 8 \\ 2x + 4y = -5 & \Rightarrow \quad -6x - 12y = 15 \end{cases}$

$-26y = 23$

$y = -23/26$

despejando...

$-2x + 4y = -5$

$2x = -5 - 4y$

$x = (-5 - 4y)/2$

$x = -5/2 - 2(-23/26)$

$x = (-65 + 46)/26$

$x = -19/26$

Solución: $\mathbf{P\left(\frac{-19}{26}, \frac{23}{26}\right)}$

d).
$$\begin{cases} \dfrac{r}{5} - \dfrac{s}{3} = 1 \\ \dfrac{s}{6} + \dfrac{r}{10} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{r}{10} - \dfrac{s}{6} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{r}{10} + \dfrac{s}{6} = -2 \end{cases}$$

$$\frac{2r}{20} = -\frac{3}{2}$$

$$r = \frac{-15}{2}$$

despejando...

$$-\frac{s}{3} = 1 - \frac{r}{5}$$

s =-3(1 – r/5)

$$s = 3\left(1 - \frac{-\frac{15}{2}}{5}\right)$$

s =-3 (1 + 3/2)

s =-3(5/2)

s = -15/2

Solución: $\mathbf{P\left(\frac{-15}{2}, \frac{-15}{2}\right)}$

e)
$$\begin{cases} 3p - q = 10 \\ 2p - q = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 3p - q = 10 \\ -2p + q = -7 \end{array}$$

----

p = 3

despejando...

2(3) - q = 7

6 – q = 7

-q = 1

q = -1

Solución: P(3, -1)

f) $\begin{cases} 3r - 4s = 1 & \Rightarrow \quad 3r - 4s = 1 \\ 7r - 2s = -1 & \Rightarrow \quad -14r + 4s = 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} -11r &= 3 \\ \mathbf{r} &= \mathbf{-3/11} \end{aligned}$$

despejando...

$s = (1 - 3r)/-4$

$$s = \frac{1 - \frac{3(-3)}{11}}{-4}$$

$$s = \frac{\frac{20}{11}}{-4}$$

$s = -20/44 = -10/22 = -5/11$

Solución: $\mathbf{P\left(\frac{-3}{11}, \frac{-5}{11}\right)}$

g) $\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{3}{10}y = \frac{1}{10} \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}x - \frac{3}{10}y\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{3}{4}\right) \\ \frac{-3}{10}\left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{-3}{10}\right) \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{6}{20}x - \frac{9}{40}y = \frac{3}{40} \\ \frac{-9}{20}x + \frac{9}{40}y = \frac{-3}{50} \end{cases}$$

$$\frac{-3}{20}x = \frac{15-12}{200}$$

$$\frac{-3}{20}x = \frac{3}{200}$$

$$x = \frac{3}{200}\left(\frac{-20}{3}\right)$$
$$x = \frac{-1}{10}$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{-1}{10}\right) - \frac{3}{4}y = \frac{1}{5}$$
$$\frac{-3}{20} - \frac{3}{4}y = \frac{1}{5}$$
$$\frac{-3}{4}y = \frac{1}{5} + \frac{3}{20}$$
$$\frac{-3}{4}y = \frac{7}{20}$$
$$y = \frac{7}{20}\left(\frac{-4}{3}\right)$$
$$y = \frac{-7}{15}$$

Solución: $\mathbf{P\left(\frac{-1}{10}, \frac{-7}{15}\right)}$

10.2.3. MÉTODO DE IGUALACIÓN

ALGORITMO

1. Se despeja de ambas ecuaciones la misma variable.

2. Se igualan sus despejes quedando una ecuación con una sola incógnita.

3. Se resuelve la ecuación de 2.

4. La solución de 3. Se sustituye en cualquiera de los despejes.

Ejemplos.

a) $2x + 5y = -1$ $\qquad x = (-1 - 5y)/2$
$3x + 2y = -4$ $\qquad x = (-4 - 2y)/3$

$$(-1 - 5y)/2 = (-4 - 2y)/3$$
$$3(-1 - 5y) = 2(-4 - 2y)$$
$$-3 - 15y = -8 - 4y$$
agrupando
$$-15y + 4y = -8 + 3$$
$$-11y = -5$$
$$y = 5/11$$

utilizando el despeje...

$$x = \frac{-1-5\left(\frac{5}{11}\right)}{2}$$
$$x = (11-25)/22$$
$$x = -36/22$$
$$x = -18/11$$

Solución: (-18/11, 5/11)

b) $2x - y = 5$ $\quad$ $y = -(5 - 2x)$
$(1/2)x + 3y = 2$ $\quad$ $y = (-4 - (1/2)x)/3 = (4 - x)/6$

$$-5 + 2x = (4-x)/6$$
$$-30 + 12x = 4 - x$$
agrupando
$$12x + x = 30 + 4$$
$$13x = 34$$
$$x = 34/13$$

utilizando el despeje...

$$y = -5 + 2(34/13)$$
$$y = -5 + 68/13$$
$$y = -3/13$$

Solución: (-34/13, -3/13)

c) $\begin{cases} y + 8x = 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$ $\quad$ $y = -8x$, $\quad y = 5 - x$

$$-8x = 5 - x$$
$$-8x + x = 5$$
agrupando
$$-7x = 5$$
$$x = -5/7$$

utilizando el despeje...

$$y = -8(-5/7)$$
$$y = 40/7$$

Solución: (-5/7, 40/7)

d)·
$$\begin{cases} 2x - 5y = 3/4 \\ 15x + 3y = 4 \end{cases} \qquad \begin{aligned} y &= (-3/4 + 2x)/5 \\ y &= (4 - 15x)/3 \end{aligned}$$

$$(-3/4 + 2x)/5 = (4 - 15x)/3$$
$$-9/4 + 6x = 20 - 75x$$
$$6x + 75x = 20 + 9/4$$

agrupando

$$81x = 89/4$$
$$x = 89/324$$

utilizando el despeje...

$$y = \frac{\frac{-3}{4} + 2\left(\frac{89}{324}\right)}{5}$$
$$y = \frac{\frac{-3}{4} + \frac{178}{324}}{5}$$
$$y = -13/324$$

Solución: (-5/7, 40/7)

e)
$$\begin{cases} 7x + 12y = 112 \\ -9x + 40y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{112 - 7x}{12} \\ y = \dfrac{30 + 9x}{40} \end{cases}$$

$$\frac{112 - 7x}{12} = \frac{30 + 9x}{40}$$
$$40(112 - 7x) = 12(30 + 9x)$$
$$4480 - 28x = 360 + 108x$$
$$-28x - 108x = 360 - 4480$$
$$-136x = -4120$$

$$x = \frac{-4120}{-28} = \frac{2060}{14} = \frac{1030}{7}$$

$$y = \frac{30 + 9\left(\frac{1030}{7}\right)}{40} = \frac{\frac{210 + 9270}{7}}{40} = \frac{9480}{7(40)} = \frac{237}{7}$$

Solución: $\mathbf{P\left(\frac{1030}{37}, \frac{237}{7}\right)}$

10.2.4. MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

ALGORITMO.

1. Se escoge una variable a despejar de cualquiera de las ecuaciones y se despeja.

2. Ya despejada la variable, se sustituye su valor en la ecuación que no se ocupo en el paso 1., quedando una ecuación incógnita, la cual se resuelve.

3. Encontrando el valor de la variable en el paso 2. Se sustituye en el despeje del paso 1.

Ejemplos

a) $3x + 2y = -1 \quad \Rightarrow \quad -2y = -1 - 3x \quad \Rightarrow y = (3x + 1)/2$

$7x - 2y = -3$

Sustituyendo en la segunda ecuación

$$7x - 2\left(\frac{3x + 1}{2}\right) = -3$$

$$7x - 3x - 1 = -3$$

$$4x = -2$$

$$x = -1/2$$

$$y = (3x+1)/2$$

$$y = (3(-1/2)+1)/2$$

$$y = (-1/2)/2$$

$$y = -1/4$$

Solución: (-1/2,-1/4)

b) $\begin{cases} y - 5x + 4 = 0 \\ 7y + 5 + 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 5x - 4$

$\Rightarrow 7(5x - 4) + 5 + 3x = 0$

$\Rightarrow 35x + 3x - 28 + 5 = 0$

$\Rightarrow 38x = 23$

$\Rightarrow x = 23/38$

$y = 5(23/38) - 4$

$y = (115/38) - 4$

$y = -37/38$

Solución: (23/38,-37/38)

c) $\begin{cases} 18z + x + 27 = 0 \\ z + 16 + 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow z = -6x - 16$

$18(-6x - 16) + x + 27 = 0$

$\Rightarrow -108x - 288 + 27 + x = 0$

$\Rightarrow -107x - 261 = 0$

$\Rightarrow -107x = 261$

$\Rightarrow x = -261/107$

$z = -6(-261/107) - 16$

$$z = \frac{1566}{107} - 16$$

$z = -146/107$

Solución: (-261/107,-146/107)

d) $\begin{cases} x - \frac{3}{2}y = 27 \\ 2x - 6y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 27 + \frac{3}{2}y$

$$
\begin{aligned}
2(27 + 3/2y) - 6y &= 3\\
54 + 3y - 6y &= 3\\
-3y &= -51\\
y &= 51/3\\
y &= 17
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= 27 + (17)3/2\\
x &= 27 + 51/2\\
x &= 105/2
\end{aligned}
$$

Solución: (105/2,17)

e) $\begin{cases} 2t + 3m = 4 \\ t - 4m = 7 \end{cases} \quad \Rightarrow t = 7 + 4m$

$$
\begin{aligned}
2(7 + 4m) + 3m &= 4\\
14 + 8m + 3m &= 4\\
11m &= -10\\
m &= -10/11
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t &= 7 + 4(-10/11)\\
t &= 7 - 40/11\\
t &= 37/11
\end{aligned}
$$

Solución: (-10/11,37/11)

f) $\begin{cases} 5 - b = x + 8 \\ \dfrac{2(x+1)}{5} + \dfrac{3(b+1)}{5} = 14 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = -3 - b$

$$
\frac{2(-3-b+1)}{5} + \frac{3(b+1)}{5} = 14
$$

$$
\frac{-6 - 2b + 2 + 3b + 3}{5} = 14
$$

$$
\begin{aligned}
-1 + b &= 14(5)\\
b &= 70+1\\
b &= 71
\end{aligned}
$$

$$x = -3 - b$$
$$x = -3 - 71$$
$$x = -74$$

Solución: P(71, -74)

10.2.5. DETERMINANTES

El determinante es una estructura matemática que involucra la operación abreviada de cuatro números y se define como:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Ejercicios

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (4)(-1) - 3(5) = -4 - 15 = -19$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = (2)\left(\frac{1}{4}\right) + (2) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

c) $\begin{vmatrix} \frac{1}{11} & 6 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{11}\right)(3) - 6(-4) = \frac{3}{11} + 24 = \frac{267}{11}$

d) $\begin{vmatrix} -3 & -8 \\ \frac{-1}{3} & 6 \end{vmatrix} = (-3)(6) + 8\left(\frac{-1}{3}\right) = -18 - \frac{8}{3} = -\frac{62}{3}$

e) $\begin{vmatrix} \frac{-3}{7} & \frac{-1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = \left(\frac{-3}{7}\right)\left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{-4}{7} + \frac{5}{4} = \frac{-16+35}{28} = \frac{19}{28}$

10.2.5.1. DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE DETERMINANTES DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DE DOS POR DOS.

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

$$y = \frac{-a_1 x + c_1}{b_1}$$

$$y = \frac{-a_2 x + c_2}{b_2}$$

$$\frac{-a_1 x + c_1}{b_1} = \frac{-a_2 x + c_2}{b_2}$$

$$(-a_1 x + c_1)b_2 = (-a_2 x + c_2)b_1$$

$$-b_2 a_1 x + c_1 b_2 = -b_1 a_2 x + c_2 b_1$$

$$-b_2 a_1 x + b_1 a_2 x = c_2 b_1 - c_1 b_2$$

$$-x(b_2 a_1 - b_1 a_2) = c_2 b_1 - c_1 b_2$$

$$x = \frac{c_2 b_1 - c_1 b_2}{-(b_2 a_1 - b_1 a_2)}$$

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{b_2 a_1 - b_1 a_2}$$

Sustituyendo este valor en el despeje de y queda:

$$y = \frac{-a_1 x + c_1}{b_1}$$

$$y = \frac{-a_1\left(\dfrac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{b_2 a_1 - b_1 a_2}\right) + c_1}{b_1}$$

$$y=\frac{\dfrac{-a_1c_1b_2+a_1c_2b_1+c_1b_2a_1-c_1b_1a_2}{b_2a_1-b_1a_2}}{b_1}$$

$$y=\frac{a_1c_2b_1-c_1b_1a_2}{b_1(b_2a_1-b_1a_2)}$$

$$y=\frac{b_1(a_1c_2-c_1a_2)}{b_1(b_2a_1-b_1a_2)}$$

$$y=\frac{a_1c_2-c_1a_2}{b_2a_1-b_1a_2}$$

Revisando nuevamente el sistema de ecuaciones original: $a_1x+b_1y=c_1$
$a_2x+b_2y=c_2$

y definiendo:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$$

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{b_2a_1-b_1a_2}\qquad\qquad y=\frac{a_1c_2-c_1a_2}{b_2a_1-b_1a_2}$$

Puede observarse que son los determinantes arriba descritos, entonces las soluciones de x e y se pueden escribir como:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}\qquad\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Es importante hacer notar que los determinantes están relacionados, así el determinante general del sistema, Δ, se construye por los coeficientes de las variables x e y, cuando el sistema de ecuaciones está ordenado. El determinante Δ_x, es muy parecido al general, salvo que la columna que tiene a los coeficientes de x, son sustituidos por los términos independientes, lo mismo pasa para el determinante de y, Δ_y, ya que los coeficientes de la variable x se mantienen y los de y son sustituidos por los términos independientes.

Ejemplos:

a) $\begin{cases} -2x + \frac{1}{11}y = -3 \\ \frac{3}{2}x - \frac{7}{3}y = 1 \end{cases}$

Para resolver este sistema por el método de determinantes, se procede a encontrar los tres determinantes necesario, el general y los correspondientes a las variables x e y.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & \frac{1}{11} \\ \frac{3}{2} & \frac{-7}{3} \end{vmatrix} = -2\left(\frac{-7}{3}\right) - \frac{1}{11}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{14}{3} - \frac{3}{22} = \frac{264-9}{66} = \frac{255}{66} = \frac{85}{22}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & \frac{1}{11} \\ 1 & \frac{-7}{3} \end{vmatrix} = -3\left(\frac{-7}{3}\right) - \left(\frac{1}{11}\right) = 7 - \frac{1}{11} = \frac{77-1}{11} = \frac{76}{11}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = -2(1) + 3\left(\frac{3}{2}\right) = -2 + \frac{9}{2} = \frac{-4+9}{2} = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\frac{76}{11}}{\frac{85}{22}} = \frac{152}{85} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{85}{22}} = \frac{11}{17}$$

Solución: $\mathbf{P\left(\frac{152}{85}, \frac{11}{17}\right)}$

b) $\begin{cases} 2m + 11n = 265 \\ \quad\ -5n = 316 + 2m \end{cases}$

$$2m + 11n = 265$$
$$=> -2m - 5n = 316$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 22 = 12$$

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} 265 & 11 \\ 316 & -5 \end{vmatrix} = -1325 - 3476 = -4801$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 265 \\ -2 & 316 \end{vmatrix} = 632 + 530 = 1162$$

$$x = \frac{\Delta_m}{\Delta} = \frac{-4801}{12} \qquad y = \frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{1162}{12} = \frac{581}{6}$$

Solución: $\mathbf{P\left(\frac{-4801}{12}, \frac{581}{6}\right)}$

c) $\begin{cases} \dfrac{5x}{3} - y = 0 \\ \dfrac{5}{4}x + \dfrac{2}{3}y = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{5}{4} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{10}{9} + \frac{5}{4} = \frac{40+45}{36} = \frac{95}{36}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0\left(\frac{2}{3}\right) - (-1)\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} = \frac{5}{3}\left(\frac{-1}{2}\right) + 0\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{-5}{6}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{95}{36}} = \frac{-18}{95} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\frac{-5}{6}}{\frac{95}{36}} = \frac{-6}{19}$$

Solución: $\mathbf{P}\left(\frac{-18}{95}, \frac{-6}{19}\right)$

i) $\begin{cases} 2x = 6 - 5t & \Rightarrow \quad 2x + 5t = 6 \\ 3t = -4 + 6x & \qquad -6x + 3t = -4 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 30 = 36$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 20 = 38$$

$$\Delta_t = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 36 = 28$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{38}{36} = \frac{19}{18} \qquad t = \frac{\Delta_t}{\Delta} = \frac{28}{36} = \frac{14}{18}$$

Solución: $\mathbf{P}\left(\frac{19}{18}, \frac{14}{18}\right)$

10.2.5.2. SISTEMA DE ECUACIONES CON MÁS DE DOS VARIABLES

Los sistemas de ecuaciones no se quedan en el caso de dos ecuaciones y dos incógnitas, éstos pueden crecer y por tanto tener sistemas bastante grandes, como ejemplo se procederá a ver un caso de 3 por 3.

$$\begin{cases} \quad x - y \quad = 12 \\ 3x + 8y + z = 3 \\ 4x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Se pueden tener sistemas de ecuaciones de más de dos variables y pueden utilizarse cualesquiera de los métodos vistos anteriormente, ya sea puros, es decir, sólo usando un método o usarlos mezclados, con el fin de optimizar la solución. Para el caso del ejemplo mostrado se procederá a resolverlo a través de alguno de los métodos vistos anteriormente y además viendo el caso a través de determinantes.

Despejando de la primera ecuación a cualquiera de las dos variables se tiene:
$x = 12 + y$

Se sustituye en las otras dos ecuaciones restantes:
$3(12 + y) + 8y + z = 3$
$4(12 + y) + 2y - z = 0$

Reduciendo el sistema queda:
$36 + 3y + 8y + z = 3$
$48 + 4y + 2y - z = 0$

$$\begin{aligned} 11y + z &= -33 \\ 6y - z &= -48 \\ \hline 17y \quad &= -81 \\ y &= \frac{-81}{17} \end{aligned}$$

$$6y - z = -48$$

$$6\left(\frac{-81}{17}\right) - z = -48$$

$$z = \frac{-486}{17} + 48$$

$$z = \frac{-486 + 816}{17} = \frac{330}{17}$$

$$x = 12 + y$$

$$x = 12 + \frac{-81}{17}$$

$$x = \frac{204-81}{17} = \frac{123}{17}$$

Solución: $\mathbf{P\left(\frac{123}{17}, \frac{-81}{17}, \frac{330}{17}\right)}$

Resolviendo el caso ahora por determinantes quedaría encontrar ahora cuatro determinantes y la solución se conformaría como:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Esto se está haciendo generalizando los resultados vistos para determinantes para el caso 2×2.

Donde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 12 \\ 3 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Del sistema general:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1x = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2x = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3x = d_3 \end{cases}$$

Lo que importa ahora para poder resolver por este camino es definir como se resuelve un determinante de tres por tres. El primer método que se revisará es el de Cramer, que es la generalización del de dos por dos: la suma de las multiplicaciones de los extremos más la diferencia de las multiplicaciones de los medios:

ALGORITMO:

1. Aumentar las dos primeras columnas
2. Multiplicar los elementos que conforman la primera diagonal, empezando por la izquierda.
3. Sumar a lo anterior la multiplicación de los tres elementos que conforman la segunda diagonal.
4. Sumar a lo anterior la multiplicación de los tres elementos de la tercera diagonal.
5. Restar la multiplicación de los tres elementos que conforman la diagonal de regreso, leyéndola desde la izquierda superior.
6. Restar la multiplicación de los tres elementos de la siguiente diagonal, también leyéndola por la izquierda.
7. Restar la multiplicación de los últimos tres elementos de la diagonal formada también por la izquierda que se hace del determinante original.

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right. = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3 - c_1b_2a_3$$

Análogo se puede definir de manera vertical:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1$$

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

Como puede verse las dos formas producen el mismo resultado, salvo permutaciones en los factores de cada producto.

En los determinantes del ejercicio se tiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -1 \\ 3 & 8 \\ 4 & 2 \end{matrix} = -8 - 4 - 3 - 2 = -17$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 12 & -1 \\ 3 & 8 \\ 0 & 2 \end{matrix} = -96 - 3 - 24 = -123$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 12 \\ 3 & 3 \\ 4 & 0 \end{matrix} = -3 + 48 + 36 = 81$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 12 \\ 3 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -1 \\ 3 & 8 \\ 4 & 2 \end{matrix} = -12 + 72 - 6 - 384 = -330$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Solución: $\mathbf{P\left(\frac{123}{17}, \frac{-81}{17}, \frac{330}{17}\right)}$

2) $2m - 2n - p = 1$
$m - n + 2p = 2$ Equivalentemente $\begin{cases} 2m - 2n - p = 1 \\ m - n + 2p = 2 \end{cases}$

$$2p + m = 3 - n \qquad\qquad m + n + 2p = 3$$

Tomando el determinante general del sistema se tiene:

$$\Delta = \begin{array}{ccc|cc} 2 & -2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} = 2(-1)(2)+(-2)(2)(1)+(-1)(1)-(-2)(1)(2)-(2)(2)(1)-(1)(-1)(1)$$

$$= -4 + (-4) + (-1) - (-4) - 4 - 1 = -4 - 4 - 1 + 4 - 4 - 1 = -14 + 4 = -10$$

Tomando el determinante correspondiente a la variable m queda:

$$\Delta_m = \begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} = 1(-1)(2) + (-2)(2)(3) + (-1)(2)(1) - (-1)(2)(2) - (1)(2)(1)$$

$$- (-1)(-1)(3) = -2 - 12 - 2 + 8 - 2 - 3 = -21 + 8 = -13$$

$$\Delta_n = \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{array} = 2(2)(2) + 1(2)(1) + (-1)(1)(3) - (1)(1)(2) - (2)(2)(3) - (-1)(2)(1) =$$

$$8 + 2 - 3 - 2 - 12 + 2 = 12 - 17 = -5$$

$$\Delta_p = \begin{array}{ccc|cc} 2 & -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} = 2(-1)(3) + (-2)(2)(1) + (1)(1)(1) - (-2)(1)(3) - (2)(2)(1)$$

$$- (1)(-1)(1) = -6 - 4 + 1 + 6 - 4 + 1 = -14 + 8 = -6$$

$$m = \frac{\Delta m}{\Delta} \qquad n = \frac{\Delta n}{\Delta} \qquad p = \frac{\Delta p}{\Delta}$$

$$m = \frac{13}{5}, \qquad n = \frac{1}{2}, \qquad p = \frac{3}{5}$$

3) $\begin{cases} x + 2y = 30 \\ 2y - z = 2 \\ 4x - 3y + z = 0 \end{cases}$

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right| = 1\,(2)(1) + (2)(-1)(4) + (0)(0)(\quad - (2)(0)(1) - (1)(-1)(-3) -$$

$$0(2)(4) = 2 - 8 - 3 = 2 \quad 11 = -$$

$$\Delta_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 30 & 2 & 0 & 30 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right| = (30)(2)(1) + (2)(-1 \quad 0) + (0)(\quad)(-3) - (2)(2)(1) -$$

$$(30)(-1)(-3) - (0)(2)(0) = 60 - 4 - 90 = 60 - 94 = -34$$

$$\Delta_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 30 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right| = (1)(2)(1) + (30)(-1)(4) + (0) - (30)(0)(2) - (1)(-1)(0)$$

$$- (0)(2)(4) = 2 - 120 = -118$$

$$\Delta_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 30 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 4 & -3 \end{array}\right| = (1)(2)(0) + (2)(2)(4) + (30)(0)(-3) - (2)(0)(0)$$

$$- (1)(2)(-3) - (30)(2)(4) = 16 + 6 - 240 = -218$$

$x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$ $\qquad$ $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$ $\qquad$ $z = \dfrac{\Delta z}{\Delta}$

$x = -\dfrac{34}{-9}$ $\qquad$ $y = -\dfrac{118}{9}$ $\qquad$ $z = -\dfrac{218}{9}$

DETERMINANTES POR MENORES.

Otra forma de resolver determinantes es através de la técnica de desarrollar determinanantes de orden menor. en este caso en determinantes de tamaño 3 x 3. se tienen que desarrollar determinantes de orden 2 x 2.

Para hacer esto se tiene que desarrollar de la siguiente manera:

1. Tomar el primer elemento de la primera columna y multiplicarlo por su determinante menor. que se forma por los cuatro números que surgen de tapar el renglón y la columna de ese primer número.

2. Tomar el segundo número de la primera columna y restarlo al producto del paso uno. pero antes hay que multiplicarlo por el determinante de orden menor que se forma a través de tapar a su renglón y su columna y copiar los cuatro números resultantes.

3. Sumar a lo anterior el producto del tercer número de la primera columna con su determinante formado. igualmente que los anteriores. de los números que salen de tapar la columna y el reglón correspondiente a ese número de la primera columna.

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} = a \begin{matrix} & \\ e & f \\ h & i \end{matrix} - d \begin{matrix} b & c \\ & \\ h & i \end{matrix} + f \begin{matrix} b & c \\ e & f \\ & \end{matrix} = a \begin{matrix} e & f \\ h & i \end{matrix} - d \begin{matrix} b & c \\ h & i \end{matrix} + f \begin{matrix} b & c \\ e & f \end{matrix}$$

Ejemplos:

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 1 \end{matrix} = 2 \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{matrix} - (-4) \begin{matrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{matrix} + (-5) \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 2(4 - 4) + 4(2 - 12) - 5(1 - 6)$$

$$4(-10) - 5(-5) = 40 + 25 = -15$$

Tomando el ejercicio anterior:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 3 + 4(-2) = -1 - 8 = -9$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 30 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 30\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (30)(2 - 3) - 2(2) = -34$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 30 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 30 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 4(-30) = -118$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 30 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 30 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 30 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4(4 - 60) = 6 + 4(-56) = -218$$

Como puede observarse los determinantes coinciden con los resultados anteriores donde se uso la regla de Cramer.

Con este método se pueden desarrollar determinantes de orden mayor a tres, de una manera más sencilla que utilizando los métodos anteriormente vistos. Por ejemplo si uno desea resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2z + w = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = -1 \\ 4x + z + w = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1)\left((1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) - 2\left((0)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) +$$

$$3\left((0)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) - 4\left((0)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 2 - 2 - 2(-2(2-1)) + 3(-2+1) - 4(2 + 2(-1)) = -2(-2) - 3 - 4(0) = 4 - 3 = 1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\left((0)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) - 1\left((0)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = 2(2-1) - (-2+1)$$

$$= 2 + 1 = 3$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1)\left((1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) - 2\left((0)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) +$$

$$3\left((0)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) - 4\left((0)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (2+1) - 2(2-1) + 3(-2+1) - 4(+2+1) = 3 - 2 - 3 - 12 = -14$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1)\left((1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) - 2\left((0)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) +$$

$$3\left((0)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) - 4\left((0)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -1 - 2 - 2\,(0) + 3(0) - 4(-1 - 2) = -3 + 12 = 9$$

$$\Delta_w = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)\left((1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) - 2\left((0)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) +$$

$$3\left((0)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) - 4\left((0)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= 1 + 2 - 2\,(0) + 3(0) - 4\,(2 + 2) = 3 - 16 = -13$$

El resultado de cada variable sería:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-14}{1} = -14, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{9}{1} = 9, \qquad w = \frac{\Delta_w}{\Delta} = \frac{-13}{1} = -13$$

10.2.5.3. USO DE DETERMINANTES CON SISTEMAS DE ECUACIONES QUE INVOLUCRAN LAS VARIABLES EN EL DENOMINADOR DE LA EXPRESIÓN.

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2x} - \dfrac{2}{y} = -7 \\ \dfrac{9}{2x} + \dfrac{5}{y} = 12 \end{cases}$$

Equivalentemente se puede ver como:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2\left(\dfrac{1}{y}\right) = -7 \\ \dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1}{x}\right) + 5\left(\dfrac{1}{y}\right) = 12 \end{cases}$$ definiendo $\dfrac{1}{x} = w$ y $\dfrac{1}{y} = z$ el sistema queda

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}w - 2z = -7 \\ \dfrac{9}{2}w + 5z = 12 \end{cases}$$

El determinante general es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{3}{2} & -2 \\ \dfrac{9}{2} & 5 \end{vmatrix} = \frac{15}{2} + 9 = \frac{33}{2}$$

El determinante de w es:

$$\Delta w = \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = -35 + 24 = -11$$

El determinante de z es:

$$\Delta z = \begin{vmatrix} \dfrac{3}{2} & -7 \\ \dfrac{9}{2} & 12 \end{vmatrix} = 18 + \frac{63}{2} = \frac{36+63}{2} = \frac{93}{2}$$

Las soluciones para w y z quedan:

$$w = \frac{\Delta w}{\Delta} = \frac{-11}{\frac{33}{2}} = \frac{-22}{33} = \frac{-2}{3} \quad \text{y} \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\frac{99}{2}}{\frac{33}{2}} = \frac{99}{33} = 3$$

Regresando a las variables x e y queda:

$$w=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{w}=\frac{1}{\frac{-2}{3}}=-\frac{3}{2} \quad \text{y} \qquad z=\frac{1}{y}\Rightarrow y=\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$$

Estas ecuaciones no necesariamente se deben de resolver por determinantes, puede ocuparse cualquiera de los métodos vistos anteriormente.

Por ejemplo si se tiene el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=1 \\ \dfrac{-4}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

Se puede resolver por el método de suma y resta, multiplicando por dos a la primera ecuación se igualarán los coeficientes de la variable x

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x}-\dfrac{6}{y}=2 \\ \dfrac{-4}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\frac{-1}{y}=\frac{1}{2}$$

$$y=-2$$

Sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones originales se tiene:

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{-2}=1$$

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{2}=1$$

$$\frac{2}{x}=1-\frac{3}{2}$$

$$\frac{2}{x}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{4}$$

$$x=-4$$

La solución es **P(-4, -2)**

E J E R C I C I O S

1) Trazar las gráficas y dar la solución aproximada.

a) $y = 3 - x$
$y = 1 + x$

b) $\begin{cases} \dfrac{2x - 4y}{2} = 6 \\ -3x + 4y = 2 \end{cases}$

2) Resolver por determinantes

a) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 5x - 4y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y + 7 = z \\ -x + z - 3y = 2 \\ -2x - 3y + 4z = 1 \end{cases}$ Cramer

c) $\begin{cases} -x + y + z = -3 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ \dfrac{1}{2}x - 4y + \dfrac{3}{4}z = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ por menores

3) Resolver los siguientes sistemas por los métodos que se indican en cada inciso

a) $\begin{cases} 5x - 3y = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{3}{4}x - 5y = \dfrac{-5}{3} \end{cases}$ Suma y resta

b) $\begin{cases} 7x + 9 = 5y \\ \dfrac{x - 7y}{4} = 9 \end{cases}$ Igualación

c) $\begin{cases} 6x - 3y = 9x + 8y + 9 \\ \dfrac{5x}{8} - 3 = \dfrac{6}{7} \end{cases}$ Sustitución

10.3. PROBLEMAS QUE CONDUCEN EN SU SOLUCIÓN A SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Problemas de geometría

♣ *1.- Un marco cuadrado de 30 cm. de lado rodea dos impresos rectangulares iguales cada uno de los cuales mide 4 cm. más de largo que de ancho. El perímetro del marco es de 16 cm. menos que la suma del perímetro de los impresos. Hallar el perímetro de los impresos.*

Perímetro = 4(30) = 120 cm.
x = ancho impreso
y = largo impreso
En la frase el impreso mide 4 cm. Más de largo que de ancho se transforma en la ecuación x + 4 = y
El perímetro del marco es de 16 cm.menos que la suma del perímetro de los impresos. da la otra ecuación.

$$\begin{cases} x + 4 = y \\ 4x + 4y = 120 + 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -4 \\ 4x + 4y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x + y = 34 \\ \underline{x - y = -4} \\ 2x = 30 \\ x = 15 \end{array}$$

$x - y = -4$ sustituyendo la solución de x
$15 - y = 4$

$$-y = -19$$
$$y = 19$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{ancho} = 15 \text{ cm y largo} = 19\text{cm.}}$$

♣ 2.- *Un jardín cuadrado de 45cm. de lado, está en el centro de un parque rectangular de 150 m. más de largo que de ancho. El perímetro del parque es 20 m. menor que el cuádruple del perímetro del jardín. Hallar las dimensiones del parque.*

x = largo del parque.
y = ancho del parque
180 = perímetro del jardín
La frase el parque rectanguler de 150 m. más de largo que de ancho, da la ecuación x = y + 150. El perímetro implica dos veces el ancho más dos veces el largo, generando la expresión 2x + 2y y esto debe ser igualado al cuádruple del del perímetro del jardín menos 20.

$$\begin{cases} x = y + 150 \\ 2x + 2y = 4(180) - 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 150 \\ 2x + 2y = 720 - 20 \end{cases}$$

$$2(x - y) = 2(150)$$
$$2x + 2y = 700$$

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 300 \\ 2x + 2y &= 700 \\ 4x &= 1000 \\ x &= \frac{1000}{4} \\ x &= 250 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 2y &= 700 \\ 2y &= 700 - 2x \\ 2y &= 700 - 300 \\ 2y &= \frac{206}{2} \\ y &= 103 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{Largo del parque} = 250\text{m} \quad \text{ancho del parque} = 103\text{m.}}$$

Problemas sobre mezclas

♣ *3.- Un equipo compró 7 bates de beisbol y cinco pelotas a $ 169.5, después compró 3 bates y 6 pelotas a $130.5. ¿Cuál es el precio de cada objeto?.*

x = precio bat. c/u
y = precio pelota c/u

$$\begin{array}{r} 7x + 5y = 169.50 \\ 3x + 6y = 130.50 \\ x + 15y = 508.50 \\ \underline{x - 42y = -913.5} \\ -27y = -405 \\ y = \frac{405}{27} \\ y = \frac{135}{9} \\ y = 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x + 6(15) = 130.5 \\ 3x = 130.5 - 90 \\ 3x = 40.5 \\ x = \frac{40.5}{3} \\ x = 13.5 \end{array}$$

Por lo tanto:

El precio del bat es $13.50, y el de la pelota es $15.00

♣ *4.- Una cantidad de dinero al 6% y otra al 4% da un interés de 570, si se intercambian las cantidades el interés aumentará en $60 ¿Cuáles son las cantidades invertidas?.*

x = cantidad de dinero invertida al 6%
y = cantidad invertida al 4 %
La tasa debe pasarse al tanto por uno así el 6% = 0.06
La tasa del 4% será entonces 0.04

Interés = 570 = 0.06x + 0.04y
Aumento del interés = 60 + 570 = 0.06y +.04x

$$\begin{array}{r} 0.06x + 0.04y = 570 \\ 0.04x + 0.06y = 630 \end{array}$$

Equivalentemente:

$$6x + 4y = 57000$$

$$4x + 6y = 63000$$

$$\begin{array}{r} 12x + 8y = 114000 \\ -12x - 18y = -189000 \\ \hline -10y = -75000 \\ y = 7500 \end{array}$$

$$x = \frac{63000 - 6y}{4}$$

$$x = \frac{63000 - 6(7500)}{4}$$

$$x = 9675$$

Por lo tanto:

La cantidad invertida al 6% es 9675 y la cantidad de dinero invertida al 4% es \$7500

♣ 5.- *Un capital invertido al 6% anual durante cierto número de años produce un interés de \$150 mayor que el capital mismo, si se invierte al 5% durante la mitad del tiempo anterior el interés es \$ 375 menor que el capital ¿Cuál es el capital?.*

x = capital
y = tiempo

$$x\,(0.06)\,y = 150 + x$$
$$x\,(0.05\,)\frac{y}{2} = x - 375$$

$$0.06\,xy = x + 150$$
$$0.05\frac{xy}{2} = x - 375$$

$$\begin{array}{r} 6xy = 100x + 15000 \\ 5xy = 200x - 75000 \\ 30xy = 500x + 75000 \\ -30xy = -1200x + 450000 \\ \hline 0 = -700x + 525000 \end{array}$$

$$- 700x + 525000 = 0$$
$$-700x = -525000$$
$$x = -\frac{525000}{-700}$$
$$x = 750$$

$$y = \frac{15000}{x}$$
$$y = \frac{15000}{750}$$
$$y = 20$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{El capital invertido es \$750 a veinte años}}$$

♣ 6.- *Una persona mezcla té de 13.20 el kg. Con otro de $ 9.60 el kg. Si intercambia las cantidades se ahorra $ 12.00 en una mezcla de 100 kg. Hallar la razón entre los pesos de los dos tés en la mezcla original.*

x = Kilos de té de $13.20 el kilogramo
y = Kilos de té de $9.60 el kilogramo
x + y = 100 kg.

Té de $13.2 x	Té de $9.60 y	100kg. de $12

$$13.2x + 9.60y = 100(12)$$

Las dos ecuaciones son entonces

$$x + y = 100$$
$$13.2x + 9.60y = 1200$$

$$x + y = 100$$
$$132x + 96y = 12000$$

$$-132x - 132y = -13200$$
$$132x + 96y = 12000$$

$$-36y = -1200$$

$$y = \frac{1200}{36} = \frac{200}{6} = \frac{100}{3}$$

$$x = 100 - y$$

$$x = 100 - \frac{100}{3} = \frac{300-100}{3} = \frac{200}{3}$$

Por lo tanto:

Del té de \$13.20 hay que poner 33.3kg. y del té de \$9.6 se ponen 66.6kg.

Problemas sobre velocidad

♣ 7.- *Un ciclista viaja 1 km. En 3 minutos a favor del viento y regresa en 4 minutos contra el viento. Hallar la velocidad del ciclista sin que sea alterada por el viento.*

x = vel. Ciclista
y = vel. Viento

$$v = \frac{d}{t}$$

Velocidad a favor del viento = x + y
Velocidad en contra del viento = x – y

$$x + y = \frac{1}{3}$$

$$x - y = \frac{1}{4}$$

$$2x = \frac{4+3}{12}$$

$$2x = \frac{7}{12}$$

$$x + y = \frac{1}{3}$$

$$x - y = \frac{1}{4}$$

$$2x = \frac{4 + 3}{2}$$

$$2x = \frac{7}{12}$$

$$x = \frac{7}{24}$$

$$y = \frac{1}{3} - x$$

$$y = \frac{1}{3} - \frac{7}{24}$$

$$y = \frac{8 - 7}{24}$$

$$y = \frac{1}{24}$$

Por lo tanto:

Velocidad del ciclista es 7/24 y la velocidad del ciento 1/24

♣ *8.- En un vuelo de ida y vuelta de 1105 km. Se emplearon 7 horas y media. La parte del vuelo a favor del viento empleó una hora menos que la otra mitad. Hallar la velocidad del avión en aire tranquilo y la velocidad del viento.*

x= vel avión
y = vel. viento

$$v = \frac{d}{t}$$

v = x
dt = 1105 km.
Tr = 7.5 h.

$$x + y = \frac{552.5}{31.25}$$

$$x - y = \frac{552.5}{4.25}$$

$$\begin{aligned} x - y &= 130 \\ \underline{x + y} &\underline{= 170} \\ 2x &= 300 \\ x &= 150 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 150 - y &= 130 \\ -y &= 130 - 150 \\ -y &= -20 \end{aligned}$$

$$y = 20$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{Velocidad del avión 150 km./h y la velocidad del viento 20km/h}}$$

♣ *9.- Fernando recorrió en su bicicleta 15 km. En una hora y cuarto, contra el viento, a favor del viento hizo 3/4 de hora. ¿Cuál es la velocidad de Fernando sin que el aire lo modifique ?*

x = vel. Fernando
y = vel. viento
x + y = velocidad de Fernando a favor del viento
x – y = velocidad de Fernando en contra del viento

$$v = \frac{d}{t}$$

$$x - y = \frac{15}{1.25}$$
$$x + y = \frac{15}{0.75}$$

$$2x = \frac{15}{\frac{5}{4}} + \frac{15}{\frac{3}{4}}$$
$$2x = 12 + 20$$
$$x = 16$$

$$y = \frac{15}{0.75} - x$$
$$y = \frac{15}{\frac{3}{4}} - 16$$
$$y = 20 - 16 = 4$$

Por lo tanto:

La velocidad de Fernando es de 16 Km/h y la del viento de 4 km/h

Problemas sobre edad

♣ *10.- Hace 5 años Manuel tenía 2/3 de la edad de Juan. Dentro de 10 años tendrá 5 de la edad de Juan. ¿Qué edad tiene cada uno?.*

x = edad actual de Juan
y = edad actual de Manuel
x - 5 = edad Juan hace 5 años
y - 5 = edad Manuel hace 5 años
x + 10 = edad Juan dentro de 10 años
y + 10 = edad Manuel dentro de 10 años

$$y - 5 = \frac{2}{3}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{2x}{3} - \frac{10}{3} + 5$$

$$y + 10 = \frac{5}{6}(x + 10) \qquad y = \frac{5x}{6} + \frac{25}{3} - 10$$

$$\frac{2x}{3} + \frac{-10 + 15}{3} = \frac{5x}{6} + \frac{25 - 30}{3}$$

$$\frac{2x}{3} + \frac{5}{3} = \frac{5x}{6} - \frac{5}{3}$$

$$\frac{2x}{3} - \frac{5x}{6} = -\frac{5}{3} - \frac{5}{3}$$

$$\frac{4x - 5x}{6} = -\frac{10}{3}$$

$$x = \frac{60}{3}$$

$$x = 20$$

$$y - 5 = \frac{2}{3}(20 - 5)$$

$$y = \frac{2}{3}(15) + 5$$

$$y = 10 + 5$$

$$y = 15$$

Por lo tanto:

La edad de Juan es de 20 años y la edad dre Manueal de 15 años.

♣ *11.- María tiene el doble de la edad que tenía Ana, cuando María tenía la edad que Ana tiene ahora (hace 13 años). En tres años más María tendrá el triple de la edad que Ana tenía hace 4 años. Hallas las* edades actuales.

x = edad actual de Ana
y = edad actual de Maria
x + 3 = edad de Ana en 3 años
y + 3 = edad de María en 3 años
x - 4 = edad de Ana hace 4 años

$$y = 2(x - 3)$$
$$y + 3 = 3(x - 4)$$
$$2x - 6 = 3x - 12 - 3$$
$$2x - 3x = -15 + 6$$
$$-x = -9$$
$$x = 9$$

$$y = 2(9 - 3)$$
$$y = 12$$

Por lo tanto .

La edad de Ana es 9 años y la de Maria de 12 años.

Problemas sobre fracciones.

♣ *12.- El denominador excede en 5 unidades al numerador, si se resta uno del denominador la fracción que resulta vale 1/3*

x = numerador
y = denominador

$$y - 5 = x \qquad \Rightarrow \qquad y - x = 5$$
$$\frac{x}{y-1} = \frac{1}{3} \qquad\qquad 3x = y - 1$$

$$\begin{array}{r} y - x = 5 \\ -y + 3x = -1 \\ \hline 2x = 4 \\ x = 2 \end{array}$$

$$y = x + 5$$
$$y = 7$$

Por lo tanto:

$\boxed{\text{La fracción es } 2/7}$

♣ *13.- El denominador es 3 unidades mayor que el numerador si se resta 1 al numerador y el denominador no se modifica el valor de la fracción es 1/2.*

x = numerador
y = denominador

$$x = y - 3$$

$$\frac{x-1}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{y-3-1}{y} = \frac{1}{2}$$

$$2(y-4) = y$$

$$2y - 8 - y = 0$$

$$y - 8 = 0$$

$$y = 8$$

$$x = y - 3$$

$$x = 8 - 3$$

$$x = 5$$

Por lo tanto:

$\boxed{\text{La fracción es } 5/8}$

Problemas varios.

♣ *14.- La diferencia entre el doble de un número y otro menor es 21, la suma del menor y el doble del mayor es 27.¿Cuáles son los números?*

x = No. menor = 3
y = No. mayor = 12

$$2y - x = 21 \Rightarrow \quad 2y = 21 + x$$

$$x + 2y = 27 \qquad 2y = 27 - x$$

$$21 + x = 27 - x$$

$$2x = 27 - 21$$

$$2x = 6$$
$$x = 3$$

$$2y = 21 + 3$$
$$2y = 24$$
$$y = 12$$

Por lo tanto:

Número menor = 3   Número mayor = 12

♣ *15.- Si un panadero ordena el triple de lo acostumbrado de harina de trigo entero, ordenaría 11 kg. más que de la harina blanca, si ordena sólo el doble su orden sería de 2kg. menos que la de harina blanca ¿Cuánto ordena usualmente de cada una?.*

x = orden usual de harina entera
y = orden usual de harina blanca

$$3x - 11 = y \qquad\qquad \begin{array}{r} 3x - 11 = y \\ \underline{-2x - 2 = -y} \\ x - 13 = 0 \\ x = 13 \end{array}$$
$$2x + 2 = y$$

$$2\,(13) + 2 = y$$
$$26 + 2 = y$$
$$y = 28$$

Por lo tanto:

Orden usual de harina entera = 13 kg.   Orden usual de harina blanca = 28 kg.

E J E R C I C I O S

1. El precio del boleto para cierto evento es de $ 12 500. para el público en general y de $15,000 para estudiantes. Se vendieron 450 boletos con un total aproximadamente. de $7,777.500 ¿ Cuántos boletos de cada tipo se compraron?.

2. Una línea aérea vuela de los Angeles a. Alburkerke con una escala en Phoenix. La tarifa a Phoenix es de US $45. mientras que el pasaje a Alburkerke cuesta US $60. en los Angeles abordarán el avión. 185 pasajeros y la compañía recibió en total US $10.500 ¿Cuántos pasajeros viajarán a Phoenix?.

3. Un hombre rema en un bote 1000 metros contra una corriente constante en 10 minutos. Después rema con la misma corriente a su favor. cubriendo 600 metros en 5 minutos. Encuentre la velocidad de la corriente y la velocidad equivalente a la que puede remar en aguas tranquilas.

4. Una mujer ha invertido $ 10,000,000, que le reditúan tazas de interés simple del 8% y 7% respectivamente. Si cada año recibe un interés de 772,000 ¿Cuánto tiene invertido en cada fondo?.

5. Para llenar un tanque de almacenamiento de agua de 300 galones. se emplea un tubo único de entrada: para proveer de agua de riego a los campos de los alrededores. se pueden utilizar 2 tubos idénticos de salida. Se necesitan 5 horas para llenar el tanque cuando los dos tubos de salida están abiertos. Cuando uno de ellos se haya cerrado, sólo toma 3 horas el llenado del tanque. Encuentre los flujos de entrada y de salida del tanque.

6. Una fábrica de objetos de plata tiene dos aleaciones, la primera contiene 35% de plata y la segunda 60%. ¿Qué cantidad debe utilizar de cada una para obtener 100 g. de una aleación que contenga 50% de plata?.

7. Un avión viaja 1200 millas en 2 horas volando con viento de cola. El viaje de regreso contra el viento le toma 2 horas y media. Encuentre la velocidad del avión y la del viento.

8. Una pequeña fábrica de muebles produce sofás y sillones reclinables. cada sofá requiere 8 horas de trabajo y US$ 60 de material. mientras que un sillón reclinable puede hacerse en 6 horas con US$ 3635. La compañía dispone de 340 horas de trabajo por semana y puede pagar US$ 2250 de material.¿ Cuántos sofás y sillones reclinables pueden hacerse si se utilizan todas las horas de trabajo y todos los materiales?.

9. Un granjero prepara una mezcla de avena y maíz para alimentar a su ganado cada onza de maíz contiene 3 g. de proteína. y 24 g. de carbohidratos ¿Cuántas onzas de cada uno pueden usarse para cubrir los requerimientos nutricionales de 200 g. de proteína? y 1320 g. de carbohidratos por comida?.

10. Francisco y Jaime caminan en direcciones opuestas, cuando están a una distancia de 9 cuadras entre ellos. Francisco ha caminado 1.5 cuadras menos que el doble de la distancia que ha caminado Jaime. Hallar la distancia caminada por cada uno de ellos.

11. El numerador es igual a la suma de los dos dígitos del denominador. El valor de la fracción es _1/7. denominador se aumentan en 3 unidades la fracción que resulta tiene valor de 1/4.

CAPÍTULO 11

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

11.1 ECUACIÓN CUADRÁTICA

Ya anteriormente se ha visto la teoría sobre ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales, ahora se revisará el concepto de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, para introducir los métodos de solución y sus gráficas, que darán cabida a una gran familia geométrica, las cónicas

Una ecuación cuadrática con una variable es aquella que tiene a la variable con grado 2, como ejemplo puede mencionarse

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

La forma general de la ecuación cuadrática completa es: $ax^2 + bx + c = 0$

- a, b, c, son constantes reales, $a \neq o$, esta petición es necesaria, ya que si a fuera cero, entonces lo que se tendría es una ecuación de primer grado con una incógnita y ya se sabría como resolverla.

Ejemplos $x^2 + 5x - 4 = 0$, $2x^2 + 11x + 3 = 0$, $\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{4}x - 8 = 0$

Puede haber casos en los cuales se tiene la variable al cuadrado pero le faltan las combinaciones con exponente 1 o 0 como:

$ax^2 + c = 0$ forma incompleta faltándole el término lineal

$ax^2 + bx = 0$ forma incompleta faltándole el término independiente

11.2. MÉTODOS DE SOLUCIÓN

11.2.1. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES INCOMPLETAS

11.2.1.1. FORMA QUE SÓLO TIENE ELEMENTO AL CUADRADO Y EL TÉRMINO INDEPENDIENTE

Esta primera ecuación incompleta es bastante sencilla, ya que sólo necesita manipuleo algebraico para poder ser despejada la variable.

$$ax^2 + c = 0$$

Para dejar libre la x hay que primero pasar al término independiente del otro lado de la igualdad.

$$ax^2 = - c$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación por el inverso multiplicativo de a:

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

Aplicando la operación inversa de la potencia queda:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Aquí hay que recordar que al obtener una raíz cuadrada siempre se obtienen dos raíces, ya que como se presenta la estructura al cuadrado no se sabe de cual provino, es decir, por ejemplo si uno dice que 4 es el cuadrado de un número, puede ser del número 2 ya que 2 × 2 da 4, pero también puede ser que se el número –2 el que al cuadrado da 4, así que para evitar confusiones siempre se deben poner los dos posibles resultados. La excepción a esta regla sería la raíz de cero ya que ésta es única y sólo es el cero.

Otra llamada importante, para hacerse notar en esta ecuación es que el subradical pareciera negativo, recuérdese que se está haciendo la resolución de manera general, por lo que los coeficientes tendrán cualquier signo, lo importante en este caso es que el subradical sea positivo o no se podrá obtener ninguna raíz, ya que se recordará que un número al cuadrado siempre es positivo.

Ejemplos:

a) $\mathbf{3x^2 + 6 = 0}$

$$3x^2 = - 6$$

$$x^2 = - \frac{6}{3}$$

$x^2 = -2 \rightarrow$ No hay solución ya que no existe ningún real que elevado al cuadrado sea negativo

b) $\mathbf{-8x^2 + 166 = 0}$

$$-8x^2 = -166$$

$$x^2 = -\frac{166}{-8}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{166}{8}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{83}{4}}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{83}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{83}}{2} \\ x_2 = -\dfrac{\sqrt{83}}{2} \end{cases}$$

c) $\mathbf{9x^2 - 25 = 0}$

$$9x^2 = 25$$

$$x^2 = \frac{25}{9}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{25}{9}}$$

$$x = \pm\frac{5}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{3} \\ x_2 = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

d) $\mathbf{27 - y^2 = 0}$

$$-y^2 + 27 = 0$$

$$-y^2 = -27$$

$$y^2 = 27$$

$$y = \pm\sqrt{27} \rightarrow \begin{cases} y_1 = \sqrt{27} \\ \\ y_2 = -\sqrt{27} \end{cases}$$

e) $\mathbf{\frac{1}{9} - 4v^2 = 0}$

$$-4v^2 = -\frac{1}{9}$$

$$v^2 = \left(-\frac{1}{9}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$v^2 = \frac{1}{36}$$

$$v = \pm\frac{1}{6} \rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{1}{6} \\ \\ v_2 = \frac{-1}{6} \end{cases}$$

11.2.1.2. FORMA CON ELEMENTOS CUADRÁTICO Y LINEAL

$$ax^2 + bx = 0$$

Ambos sumando tienen en común una x, por lo que factorizándola queda:

$$x\,(a\,x + b) = 0$$

Este producto es igual cero si uno de los dos factores es cero o ambos factores son cero, esto es:

$$x_1 = 0 \qquad \text{o} \qquad a\,x + b = 0$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

Ejemplos

a) $\mathbf{5x^2 - 3x = 0}$

$$x(5x - 3) = 0$$

$x_1 = 0$ o $5x_2 - 3 = 0$

$x_2 = \frac{3}{5}$

b) $\mathbf{k^2 - 7k = 0}$

$k(k - 7) = 0$

$k_1 = 0$ o $k_2 - 7 = 0$

$k_2 = 7$

c) $\mathbf{t^2 - 6t = 0}$

$t(t - 6) = 0$

$t_1 = 0$ o $t_2 - 6 = 0$

$t_2 = 6$

d) $\mathbf{y^2 = 12y}$

$y^2 - 12y = 0$

$y(y - 12) = 0$

$y_1 = 0$ o $y_2 - 12 = 0$

$y_2 = 12$

e) $\mathbf{9s - s^2 = 0}$

$-s^2 + 9s = 0$

$s(-s + 9) = 0$

$s_1 = 0$ o $-s_2 + 9 = 0$

$-s_2 = -9$

$s_2 = 9$

11.2.2. FORMA COMPLETA

11.2.2.1. MÉTODO DE FACTORIZACIÓN.

Si el trinomio que se está revisando es factorizable, entonces se puede proceder primero a factorizarlo y con eso resolver la ecuación de la siguiente manera:

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

Este trinomio es factorizable, ya que 5(4) = 20 que es el tercer término y –5-4 = -9 que es el segundo término, entonces puede ser expresado como:

$$(x - 5)(x - 4) = 0$$

Para que un producto sea cero, se necesita que el primer factor sea el cero o bien sea el segundo, o ambos esto significa:

$$x - 5 = 0 \qquad\qquad x - 4 = 0$$
$$x_1 = 4 \qquad\qquad x_2 = 4$$

Esto significa que como cada factor es cero, se regresa a ecuaciones de primer grado con una incógnita, que son relativamente fáciles de resolver, y esas soluciones que se encuentran son las soluciones de la ecuación cuadrática completa.

Ejemplos

a) $\mathbf{x^2 - 3x + 2 = 0}$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$
$$x - 2 = 0 \qquad \text{o} \qquad x - 1 = 0$$
$$x_1 = 2 \qquad\qquad x_2 = 1$$

b) $\mathbf{x^2 + 2x + 1 = 0}$

$$(x + 1)(x + 1) = 0$$
$$x + 1 = 0 \qquad \text{o} \qquad x + 1 = 0$$
$$x_1 = -1 \qquad\qquad x_2 = -1$$

c) $\mathbf{1 + 4x + 4x^2 = 0}$

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$
$$(2x + 1)(2x + 1) = 0$$
$$(2x + 1)^2 = 0$$

$$2x + 1 = 0$$
$$2x = -1$$
$$x_1 = -\frac{1}{2} = x_2$$

d) $\mathbf{x^2 + 25 - 10x = 0}$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$
$$(x-5)(x-5) = 0$$
$$x - 5 = 0$$
$$x_1 = 5$$
$$x_2 = 5$$

e) $\mathbf{x^2 - 19x + 90 = 0}$

$$(x - 10)(x - 9) = 0$$

$x - 10 = 0$ o $x - 9 = 0$

$x_1 = 10$ $\quad$ $x_2 = 9$

f) $\mathbf{x^2 + 33x + 90 = 0}$

$$(x + 30)(x + 3) = 0$$

$x + 30 = 0$ o $x + 3 = 0$

$x_1 = -30$ $\quad$ $x_2 = -3$

g) $\mathbf{14 - 15y + y^2 = 0}$

$$y^2 - 15y + 14 = 0$$
$$(y - 14)(y - 1) = 0$$

$y - 14 = 0$ o $y - 1 = 0$

$y_1 = 14$ $\quad$ $y_2 = 1$

h) $\mathbf{8x^2 - 14x + 3 = 0}$

$$(8x)^2 - 14(8x) + 24 = 0$$

$(8x - 12)(8x - 2) = 0$

$8x - 12 = 0$ o $8x - 2 = 0$

$x_1 = \frac{12}{8}$ $x_2 = \frac{2}{8}$

$x_1 = \frac{3}{2}$ $x_2 = \frac{1}{4}$

i) $\mathbf{2y^2 + 7y + 3 = 0}$

$(2y)^2 + 7(2y) + 6 = 0$

$(2y + 6)(2y + 1) = 0$

$2y + 6 = 0$ o $2y - 1 = 0$

$y_1 = -\frac{6}{2}$ $y_2 = \frac{-1}{2}$

$y_1 = -3$

j) $\mathbf{5x^2 - 2x - 7 = 0}$

$(5x)^2 - 2(5x) - 35 = 0$

$(5x - 7)(5x + 5) = 0$

$5x - 7 = 0$ o $5x - 5 = 0$

$x_1 = \frac{7}{5}$ $x_2 = \frac{5}{5}$

$x_2 = 1$

k) $\mathbf{24w^2 - 14w - 3 = 0}$

$(24w)^2 - 14(24w) - 72 = 0$

$(24w + 4)(24w - 18) = 0$

$24w + 4 = 0$ o $24w - 18 = 0$

$w_1 = \frac{-4}{24}$ $w_2 = \frac{18}{24}$

$w_1 = -\frac{1}{6}$ $w_1 = -\frac{3}{4}$

11.2.2.2. MÉTODO COMPLETANDO EL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Si el trinomio que se está tratando de resolver no es factorizable, otro método alternativo para resolver la ecuación es completando el trinomio cuadrado perfecto, para poder factorizarlo y resolver la ecuación.

$$x^2 + 16x - 5 = 0$$

Para que se complete la forma del trinomio cuadrado perfecto se requiere que la mitad del coeficiente de la variable lineal esté al cuadrado, esto porque hay que recordar que un binomio al cuadrado se comporta como: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Entoces en la ecuación hay que aumentar en ambos lados de la misma el cuadrado de 8

$$x^2 + 16x + 8^2 = 5 + 64$$

Como los tres primeros términos ya hacen el trinomio cuadrado perfecto, se factoriza:

$$(x + 8)^2 = 69$$

Se procede a resolver está ecuación para encontrar la solución o soluciones de la ecuación original.

$$x + 8 = \pm\sqrt{69}$$
$$x_1 = -8 + \sqrt{69}$$
$$x_2 = -8 - \sqrt{69}$$

Ejemplos

a) $\mathbf{x^2 - 5x - 4 = 0}$

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 4 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 4 + \frac{25}{4}$$
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{16 + 25}{4}$$
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{41}{4}$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{41}{4}}$$

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{41}{4}}$$

$$x_1=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{41}{4}}$$

$$x_2=\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{41}{4}}$$

b) $\mathbf{x^2 - 2x + 2 = 0}$

$$x^2 - 2x = -2$$

$$x^2 - 2x + 1^2 = -2 + 1$$

$$(x + 1)^2 = -1$$

$x+1=\pm\sqrt{-1}$ Esto es absurso ya que no existen las raíces cuadradas de números reales negativos

c) $\mathbf{y^2 - 12y + 36 = 4}$

$$y^2 - 12y = 4 - 36$$

$$y^2 - 12y = -32$$

$$y^2 - 12y + 6^2 = -32 + 36$$

$$y^2 - 12y + 6^2 = 4$$

$$(y - 6)^2 = 4$$

$$y-6=\pm\sqrt{4}$$

$$y-6=\pm 2$$

$$y_1=6+2=8$$

$$y_2=6-2=4$$

d) $\mathbf{k^2 - 5k = 16}$

$$k^2-5k+\left(\frac{5}{2}\right)^2=16+\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(k-\frac{5}{2}\right)^2=16+\frac{25}{4}$$

$$\left(k-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{64+25}{4}$$

$$\left(k-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{89}{4}$$

$$\left(k-\frac{5}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{89}{4}}$$

$$k-\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{89}}{2}$$

$$k_1=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{89}}{2}$$

$$k_2=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{89}}{2}$$

e) $\mathbf{t^2+\frac{2}{11}t-3=0}$

$$t^2+\frac{2}{11}t+\left(\frac{1}{11}\right)^2=3+\left(\frac{1}{11}\right)^2$$

$$\left(t+\frac{1}{11}\right)^2=\frac{33+1}{121}$$

$$\left(t+\frac{1}{11}\right)^2=\frac{34}{121}$$

$$t+\frac{1}{11}=\pm\sqrt{\frac{34}{121}}$$

$$t_1=-\frac{1}{11}+\sqrt{\frac{34}{121}}=\frac{-1+\sqrt{34}}{11}$$

$$t_2=-\frac{1}{11}-\sqrt{\frac{34}{121}}=\frac{-1-\sqrt{34}}{11}$$

11.2.2.3. DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA GENERAL PARA RESOLVER ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

Para resolver las escuaciones de segundo grado existe una fórmula que es deducida a través del método anteriormente visto, es decir, completando el trinomio cuadrado perfecto. Nada más que en este caso no se tienen coeficientes numéricos sino literales, pero se procede de igual modo.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos

a) **$3x^2 + 7x - 4 = 0$**

Utilizando la fórmula general se tiene que a = 3, b = 7 y c = -4

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - (4)(3)(-4)}}{6}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 48}}{6}$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{97}}{6}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-7+\sqrt{97}}{6}\\[2ex] x_2=\dfrac{-7-\sqrt{97}}{6}\end{cases}$$

b) $\mathbf{2x^2 - x - 6 = 0}$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-(4)(2)(-6)}}{4}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{4}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{49}}{4}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1+7}{4}=2\\[2ex] x_2=\dfrac{1-7}{4}=\dfrac{-3}{2}\end{cases}$$

c) $\mathbf{4x^2 - 8x - 21 = 0}$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64-(4)(4)(-21)}}{8}$$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64+336}}{8}$$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{400}}{8}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-8+\sqrt{400}}{8}=-1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{2}\\[2ex] x_2=\dfrac{-8-\sqrt{400}}{8}=-1-\dfrac{5}{2}=\dfrac{-7}{2}\end{cases}$$

d) $\mathbf{u^2 - 18u = 7}$ $\Rightarrow u^2-18u-7=0$

$$u=\frac{18\pm\sqrt{324-(4)(1)(-7)}}{2}$$

$$u = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 28}}{2}$$

$$u = \frac{18 \pm \sqrt{352}}{2} \rightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{18 + \sqrt{352}}{2} \\ \\ u_2 = \dfrac{18 - \sqrt{352}}{2} \end{cases}$$

e) $\mathbf{w^2 + 14w = -49}$

$w^2 + 14\,w + 49 = 0$

$$w = \frac{14 \pm \sqrt{196 - (4)(1)(49)}}{2}$$

$$w = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 196}}{2}$$

$$w = \frac{14}{2} = 7$$

f) $\mathbf{x^2 = 2 - 10x}$

$x^2 + 10x - 2 = 0$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - (4)(1)(-7)}}{2}$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 28}}{2}$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{352}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{18 + \sqrt{352}}{2} \\ \\ x_2 = \dfrac{18 - \sqrt{352}}{2} \end{cases}$$

g) $\mathbf{3ax^2 + 8x + ax - 3a = 0}$

$3ax^2 + x(8 + a) - 3a = 0$

$$x = \frac{-[8+a] \pm \sqrt{(8+a)^2 - (4)(3)(-3a)}}{6}$$

$$x = \frac{-8-a \pm \sqrt{64+16a+a^2+36a}}{6}$$

$$x = \frac{-8-a \pm \sqrt{64+52a+a^2}}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-8-a+\sqrt{64+52a+a^2}}{6} \\ \\ x_2 = \dfrac{-8-a-\sqrt{64+52a+a^2}}{6} \end{cases}$$

h) $\mathbf{bx^2 + b5 + 3xb = 0}$

$bx^2 + 3bx + 5b = 0$

$$x = \frac{-3b \pm \sqrt{9b^2 - (4)(b)(5b)}}{2b}$$

$$x = \frac{-3b \pm \sqrt{9b^2 - 20b^2}}{2b}$$

$$x = \frac{-3b \pm \sqrt{-11b^2}}{2b} \rightarrow \begin{cases} \text{No hay solución} \end{cases}$$

i) $\mathbf{5r^2 + 4r + br - r + 3r + 2 = 0}$

$5r^2 + 6r + br + 2 = 0$

$5r^2 + r(6 + b) + 2 = 0$

$$r = \frac{-[6+b] \pm \sqrt{(6+b)^2 - (4)(5)(2)}}{10}$$

$$r = \frac{-6-b \pm \sqrt{36+12b+b^2-200}}{10}$$

$$r = \frac{-6-b \pm \sqrt{-164+12b+b^2}}{10} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-6-b+\sqrt{-164+12b+b^2}}{10} \\ \\ x_2 = \dfrac{-6-b-\sqrt{-164+12b+b^2}}{10} \end{cases}$$

E J E R C I C I O S

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 + x - 7 = 0$ fórmula general

b) $\frac{4}{3}x^2 - 4x + 5 = 0$ completando el trinomio cuadrado perfecto

c) $\frac{16x^2 - 3x}{8} = 9$ Fórmula general

d) $x^2 + 20x + 9 = 0$ Factorización

e) $(x+1)(x-3) = (2x-9)(5x+8)$ Completando el trinomio cuadrado perfecto

f) $x^2 - 8x + 2 = 0$

g) $x^2 - 5x$

11.3. SOLUCIONES DE FORMAS QUE CONDUCEN A ECUACIONES CUADRÁTICAS CUYAS RAÍCES NO NECESARIAMENTE SON SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN.

a) $\mathbf{x + \sqrt{4x+1} = 5}$

Esta ecuación presenta una raíz, la cual es necesaria que sea tratada para poder despejar la variable x, así que como primer paso se dejará de un lado de la ecuación la expresión con la raíz y del otro lado se pasarán los demás términos.

$$\sqrt{4x+1} = 5 - x$$

Para eliminar la raíz se elevan ambos miembros al cuadrado, quedando:

$$4x + 1 = (5 - x)^2$$

Se procede a desarrollar el binomio al cuadrado

$$4x + 1 = 25 - 10x + x^2$$

Se pasan todos los términos para el miembro izquierdo

$$-x^2 + 4x + 10x + 1 - 25 = 0$$

$$-x^2 + 14x - 24 = 0$$

Se resuelve la ecuación cuadrática resultante por el método que más convenga.

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{(14)^2 - (4)(-1)(-24)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{100}}{-2}$$

$$x = \frac{-14 \pm 10}{-2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4}{-2} = 2 \\ \\ x_2 = \dfrac{-24}{-2} = 12 \end{cases}$$

Aparentemente se tienen dos soluciones de la ecuación cudrática, pero como están involucradas expresiones con raíces se hace necesario checar si ambas soluciones son verdaderamente raíces de la ecuación original.

Esto se hará sustituyendo en la ecuación original cada una de las supuestas soluciones y revisando si se mantiene la igualdad.

$x_1 = 2$ $\sqrt{4(2)+1} = 5 - 2 \quad ?$ $\sqrt{9} = 3$ $3 = 3$ Lo cual es correcto así que $x_1 = 2$ es solución.	$x_2 = 12$ $\sqrt{4(12)+1} = 5 - 12 \quad ?$ $\sqrt{49} \neq -7$ $7 = -7$ Como puede verse en este caso 12 no es solución ya que se obtuvo un signo que no se tiene en el otro lado.

Otro tipo de ejemplo es cuando se manejan en la ecuación dos raíces.

$$\text{b)}\quad \sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}=4$$

Se procede de manera similar al caso anterior, es decir, se deja de un lado de la ecuación una de las dos raíces.

$$\sqrt{5x-1}=-\sqrt{x+3}+4$$

Se elevan al cuadrado cada lado de la ecuación, para cancelar la raíz del lado izquierdo.

$$5x-1=\left(-\sqrt{x+3}+4\right)^2$$
$$5x-1=x+3-8\sqrt{x+3}+16$$

Se disminuye la expresión sumando los términos semejantes

$$5x-1=x+19-8\sqrt{x+3}$$

Se deja pasar los demás términos que no están involucrados en la raíz de un sólo lado de la ecuación, con el fin de hacer todo lo que ya se explicó en el ejemplo a), ya que se llegó a una ecuación de ese tipo.

$$5x-1-x-19=-8\sqrt{x+3}$$
$$4x-20=-8\sqrt{x+3}$$

Nuevamente se elevan al cuadrado cada lado de la ecuación y se disminuyen las expresiones resultantes

$$(4x-20)^2=\left(-8\sqrt{x+3}\right)^2$$
$$16x^2-160x+400=64(x+3)$$
$$16x^2-160x+400=64x+192$$
$$16x^2-160x-64x+400-192=0$$
$$x^2-14x+13=0$$

Se resuelve la ecuación cuadrática resultante por el método que más convenga.

$$x=\frac{14\pm\sqrt{(14)^2-4(1)(13)}}{2}$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196-52}}{2}$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{144}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{28+12}{2} = 20 \\ \\ x_2 = \dfrac{28-12}{2} = 8 \end{cases}$$

Revisando si las dos posibles soluciones son tales que da:

$x_1 = 20$ $\sqrt{5(20)-1} + \sqrt{20+3} = 4 \quad ?$ $\sqrt{99} + \sqrt{23} \neq 4$ Como puede verse no deja la igualdad por lo tanto no es solución de la ecuación.	$x_2 = 8$ $\sqrt{5(8)-1} + \sqrt{8+3} = 4 \quad ?$ $\sqrt{39} + \sqrt{11} \neq 4$ Como puede verse en este caso 8 tampoco es solución de la ecuación

Ahora se verá un caso con tres raíces.

c) $\quad \mathbf{\sqrt{6-x} + \sqrt{x+7} - \sqrt{12x+1} = 0}$

Se pasará al otro lado de la ecuación una de las raíces

$$\sqrt{6-x} + \sqrt{x+7} = \sqrt{12x+1}$$

Se elevan al cuadrado cada lado de la ecuación

$$\left(\sqrt{6-x} + \sqrt{x+7}\right)^2 = \left(\sqrt{12x+1}\right)^2$$

$$6 - x + 2\sqrt{6-x}\sqrt{x+7} + x + 7 = 12x + 1$$

Se suman los términos semejantes y se deja de un solo lado la expresión de la raíz

$$13 + 2\sqrt{(6-x)(x+7)} = 12x + 1$$
$$2\sqrt{(6-x)(x+7)} = 12x + 1 - 13$$
$$2\sqrt{(6-x)(x+7)} = 12x - 12$$
$$\sqrt{(6-x)(x+7)} = 6x - 6$$

$$\left(\sqrt{(6-x)(x+7)}\right)^2=(6x-6)^2$$
$$(6-x)(x+7)=36x^2-72x+36$$
$$6x+42-x^2-7x=36x^2-72x+36$$
$$-x^2-36x^2+6x-7x+72x+42-36=0$$
$$-37x^2+71x+6=0$$

Se resuelve la ecuación cuadrática resultante por el método que más convenga.

$$x=\frac{-71\pm\sqrt{(71)^2-4(-37)(6)}}{(-37)2}$$
$$x=\frac{-71\pm\sqrt{5041+888}}{-74}$$
$$x=\frac{-71\pm\sqrt{5929}}{-74}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-1+77}{-74}=-\dfrac{76}{74}=-\dfrac{38}{37}\\[2ex] x_2=\dfrac{-1-77}{-74}=\dfrac{78}{74}=\dfrac{39}{37}\end{cases}$$

Revisando si las dos posibles soluciones son tales que da:

$x_1=\frac{-38}{37}$ $\sqrt{6+\frac{38}{37}}+\sqrt{-\frac{38}{37}+7}-\sqrt{12\left(\frac{-38}{37}\right)+1}=0$? $\sqrt{\frac{260}{37}}+\sqrt{\frac{-221}{37}}-\sqrt{\frac{-419}{37}}\neq 0$ Como puede verse ni siquiera existen dos de la raíces en la ecuación, por lo tanto no es solución de la ecuación.	$x_2=\frac{39}{37}$ $\sqrt{6-\frac{39}{37}}+\sqrt{\frac{39}{37}+7}-\sqrt{12\left(\frac{39}{37}\right)+1}=0$? $\sqrt{\frac{-183}{37}}+\sqrt{\frac{298}{37}}-\sqrt{\frac{505}{37}}\neq 0$ Como puede verse en este tampoco existe una raíz por lo que x_2 no es solución de la ecuación

d) $\sqrt{\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{x}+\mathbf{8}}}=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{x}}$

$$x+\sqrt{x+8}=4x$$
$$\sqrt{x+8}=3x$$
$$x+8=9x^2$$
$$-9x^2+x+8=0$$
$$9x^2-x-8=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(9)(-8)}}{18}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+288}}{18}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{289}}{18}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1+17}{18}=1\\[2ex] x_2=\dfrac{1-17}{18}=-\dfrac{16}{18}=-\dfrac{8}{9}\end{cases}$$

Revisando si las dos posibles soluciones son tales que da:

$x_1=1$ $\sqrt{1+\sqrt{1+8}}=2\sqrt{1}$? $\sqrt{1+3}=2$ $2=2$ Como puede verse deja la igualdad, por lo tanto es solución de la ecuación.	$x_2=-8/9$ $\sqrt{-\frac{8}{9}+\sqrt{-\frac{8}{9}+8}}=2\sqrt{-\frac{8}{9}}$? Como puede verse en este caso se tiene desde un principio la raíz cuadrada de un número negativo, cosa que no existe y por lo cual no puede ser solución

e) $\mathbf{2x-\sqrt{x-1}=3x-7}$

$$\sqrt{x-1}=2x-3x+7$$

$$\sqrt{x-1}=x-7$$

$$x-1=x^2-14x+49$$

$$x^2-14x-x+49+1=0$$

$$x^2-15x+50=0$$

$$x=\frac{15\pm\sqrt{(-15)^2-4(1)(50)}}{2}$$

$$x=\frac{15\pm\sqrt{225-200}}{2}$$

$$x=\frac{15\pm\sqrt{25}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{15+5}{2}=10\\[2ex] x_2=\dfrac{15-5}{2}=5\end{cases}$$

Revisando si las dos posibles soluciones son tales que da:

$x_1 = 10$ $20-\sqrt{10-1}=30-7 \quad ?$ $20-\sqrt{9} \neq 23$ $17 \neq 3$ Como puede verse no deja la igualdad, por lo tanto no es solución de la ecuación.	$x_2 = 5$ $10-\sqrt{5-1}=15-7 \quad ?$ $10-2=8$ $8=8$ Como puede verse en este caso se mantiene la igualdad, por lo que el valor 5 si es solución

f)

$$\sqrt{\mathbf{x-3}}+\sqrt{\mathbf{2x+1}}=\sqrt{\mathbf{5x+16}}$$

$$\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{2x+1}\right)^2=\left(\sqrt{5x+16}\right)^2$$

$$x-3+2\sqrt{(x-3)(2x+1)}+2x+1=5x+16$$

$$\sqrt{2x^2+x-6x-3}=\frac{5x+16-3x+2}{2}$$

$$\sqrt{2x^2-5x-3}=\frac{2x+18}{2}$$

$$\sqrt{2x^2-5x-3}=x+9$$

$$2x^2-5x-3=x^2+18x+81$$

$$2x^2-5x-3-x^2-18x-81=0$$

$$x^2-23x-84=0$$

$$x=\frac{23\pm\sqrt{(-23)^2-4(1)(-84)}}{2}$$

$$x=\frac{23\pm\sqrt{529+336}}{2}$$

$$x=\frac{23\pm\sqrt{865}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{23+\sqrt{865}}{2}\\[2ex] x_2=\dfrac{23-\sqrt{865}}{2}\end{cases}$$

Revisando si las dos posibles soluciones son tales que da:

$x_1 = \frac{23+\sqrt{865}}{2}=26.2$	$x_2 = \frac{23-\sqrt{865}}{2}=-3.25$

$\sqrt{26.2-3}+\sqrt{2(26.2)+1}=\sqrt{5(26.2)+16}$? $\sqrt{23.2}+\sqrt{53.4}=\sqrt{147}$? $12.12=12.12$ Como puede verse deja la igualdad, por lo tanto es solución de la ecuación.	$\sqrt{-3.2-3}+\sqrt{2(-3.2)+1}=\sqrt{5(-3.2)+16}$? $\sqrt{-6.2}+\sqrt{-5.4}=\sqrt{-.2}$? Como puede verse en este caso no existen las raíces, por lo que el valor de x_2 no es solución

E J E R C I C I O S

Resolver las siguientes ecuaciones, comprobando si los resultados son verdaderos.

1. $\sqrt{x^2+5}=3$

2. $x-1=\sqrt{x+1}$

3. $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=3$

4. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=0$

5. $\sqrt{3x-6}+\sqrt{2x-6}=1$

6. $\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x-1}$

7. $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2x+1}$

8. $\sqrt{13+3\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}}=5$

11.4. GRAFICACIÓN DE LAS FORMAS CUADRÁTICAS

1) x^2 - 5x+ 6 = 0 Esta forma es la que se resolvió como ecuación, ahora se verá cual es la variación de ella a través de introducir la variable y a la expresión anterior, quedando:

$$y = x^2 - 5x + 6$$

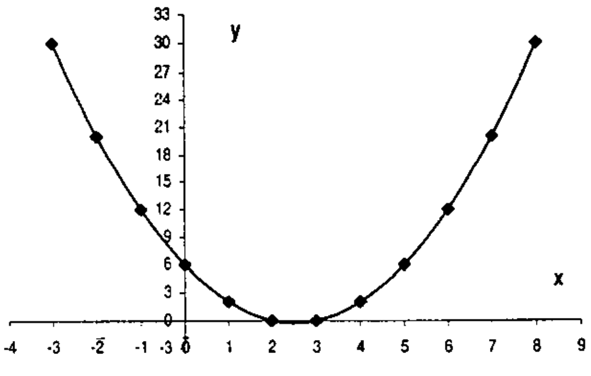
Si al querer resolver esta expresión igualada a cero, es decir cuando la y = 0, lo que se encuentran son las intersecciones con el eje de la x, a estos cortes que son las soluciones de la ecuación se les conoce como raíces. En general una ecuación de segundo grado se esperaría que tuviera dos cortes con el eje x, pero se verá en las gráficas que esto no necesariamente sucede, quedando expresiones que darán dos cruces, otras un sólo cruce y las últimas ningún cruce con el eje x.

Para graficar se procederá a realizar una tabulación dando a x los valores que se deseen y más de dos.

$(x - 3)(x - 2) = 0$
$x_1 = 3$
$x_2 = 2$

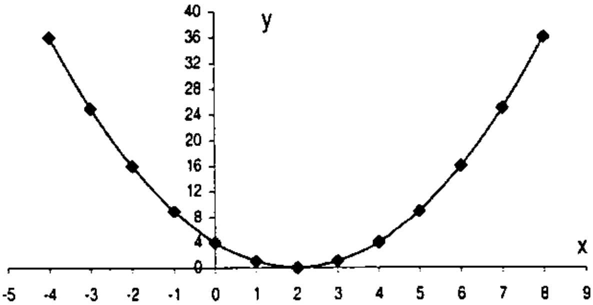
soluciones reales, estos números representan el corte en el eje de las x

x	y
-1	$y = 1 + 5 + 6 = 12$
0	$y = 6$
1	$y = 1 - 5 + 6 = 2$
2	$y = 4 - 10 + 6 = 0$
3	$y = 9 - 15 + 6 = 0$
-2	$y = 4 + 10 + 6 = 20$
4	$y = 16 - 20 + 6 = 2$



2) $y = x^2 - 4x + 4$
Tomando la ecuación con cero en y queda:
$x^2 - 4x + 4 = 0$
$(x - 2) (x - 2) = 0$
x = 2 una raíz de multiplicidad 2, lo que indica que el vértice está en ese punto.

x	y
-4	16 + 16 + 4 = 36
-3	9 + 12 + 4 = 25
-2	4 + 8 + 4 = 16
-1	1 + 4 + 4 = 9
0	4
1	1 - 4 + 4 = 1
2	4 - 8 + 4 = 0
3	9 - 12 + 4 = 1
4	16 – 16 + 4 = 4

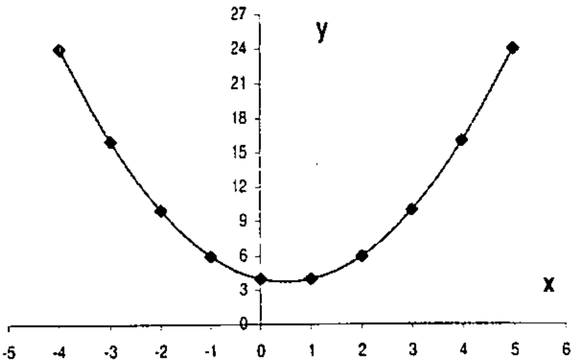


3) $y = x^2 - x + 4$

$x^2 - x + 4 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-(4)(4)(1)}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-15}}{2}$ no hay solución, indicando que la figura no corta al eje x, por lo que está arriba de él o bien abajo.

x	y
-4	16 + 4+4 = 24
-3	9 + 3 + 4 = 16
-2	4 + 2 + 4 = 10
-1	1 + 1 + 4 = 6
0	4
1	1 - 1 + 4 = 4
2	4 - 2 + 4 = 6
3	9 - 3 + 4 = 10
4	16 - 4 + 4 = 16



Como puede verse en estos tres ejemplos todas las figuras fueron *cuerdas de saltar*, es decir, las figuras que se forman de una ecuación de segundo grado son llamadas parábolas. La técnica simple para poderla trazar es encontrando lasolución de la ecuación igualada a cero, ya que esto indicarán los cortes con el eje x y por tanto se sabra de que forma s la parábola.

Para terminar esta parte se harán dos ejercicios más para enfatizar la técnica de la graficación de parábolas.

a) $-10x^2 + 23x + 5 = y$

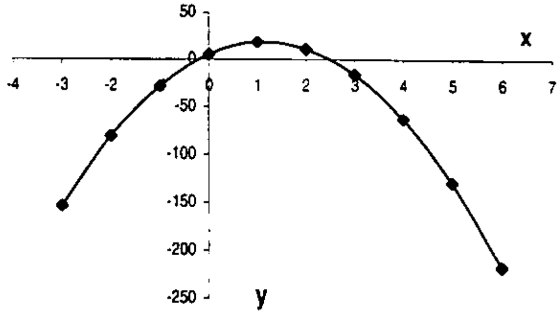
Encontrando la solución de esta ecuación igualada a cero se tiene que.

$$x = \frac{-23 \pm \sqrt{(23)^2 - 4(-10)(5)}}{-20}$$

$x_1 = -\frac{1}{5}$ y $x_2 = \frac{5}{2}$

Esto indica que hay dos cortes en el eje de las x, por lo que la figura cruza el eje, generando la loma arriba del eje x o bien un valle abajo de ella. Para ver la gráfica se tabulará lo correspondiente.

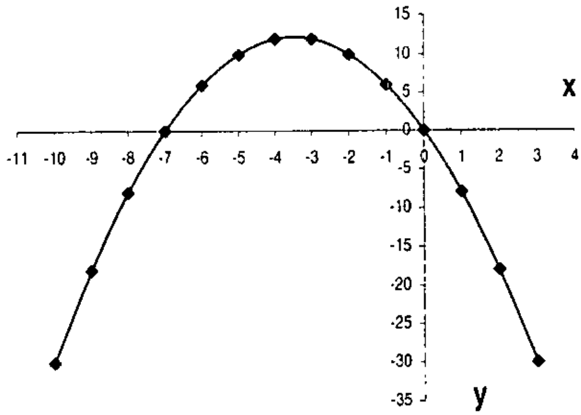
x	y
-4	-154
-3	-81
-2	-28
-1	5
0	18
1	11
2	-16
3	-63
4	-130



b) Graficar $y = -x^2 - 7x$

Resolviendo la ecuación igualada a cero queda, -x(x+7) = 0, por lo que las raíces son $x_1 = 0$ y $x_2 = -7$, por lo que esta figuara cruza el eje de las x dos veces y por tanto la cuerda de saltar está hacia arriba o hacia abajo. Comparando con el ejercicio anterior puede concluirse que la loma está por arriba del eje x, ya que el coeficiente de la variable cuadrática es negativo.

x	y
-10	-30
-9	-18
-8	-8
-7	0
-6	6
-5	10
-4	12
-3	12
-2	10
-1	6
0	0
1	-8
2	-18
3	-30



Como puede verse en los cinco ejercicios de graficación de las formas cuadráticas, siempre se roearon en las tabulaciones a las soluciones que salieron de las ecuaciones igualadas a cero, esto es importante, ya que permite encontrar la figura de la cuerda de saltar de una manera más eficiente.

E J E R C I C I O S

Graficar las siguientes expresiones cuadráticas.

1. $y = 2x^2 - 3x + 4$

2. $y = (x - 9)^2$

3. $y = 6x^2 - 3x + 8$

4. $y = x^2 - \frac{1}{3}x - 10$

11.5. ANÁLISIS DEL TIPO DE SOLUCIONES

11.5.1. ANÁLISIS DEL DISCRIMINANTE

El subradical puede indicar la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas, así:

- $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm 0}{2a} = \dfrac{-b}{2a}$ Es única, por lo que se dice que solo hay una solución real y esta raíz es de multiplicidad dos.

- $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$ Por lo que las dos soluciones son diferentes y se dice que son dos soluciones reales.

- $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\text{número negativo}}}{2a}$ Por lo que no es posible obtener la raíz y se dice que no existen las raíces reales o bien son dos raíces diferentes pero imaginarias.

Ejemplos

a) $\mathbf{x^2 + 4x + 3 = 0} \quad \Rightarrow \quad b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(3) = 4 > 0$ Tiene dos raíces reales y diferentes.

b) $\mathbf{x^2 - 2x + 8 = 0} \quad \Rightarrow \quad b^2 - 4ac = 4 - 4(1)(8) = -28 < 0$ No tiene dos raíces reales y diferentes.

c) $\mathbf{3x^2 + 4x + 2 = 0}$ $\Rightarrow$ $b^2 - 4ac = 16 - 4(3)(2) = -8 < 0$ No tiene dos raíces reales y diferentes.

d) $\mathbf{m^2 - 8m + 2 = 0}$ $\Rightarrow$ $b^2 - 4ac = 64 - 4(1)(2) = 56 > 0$ Tiene dos raíces reales y diferentes.

e) $\mathbf{a^2 + 7a + 5 = 0}$ $\Rightarrow$ $b^2 - 4ac = 49 - 4(1)(5) = 29 > 0$ Tiene dos raíces reales y diferentes.

e) $\mathbf{v^2 - 20v + 20 = 0}$ $\Rightarrow$ $b^2 - 4ac = 400 - 4(1)(20) = 320 > 0$ Tiene dos raíces reales y diferentes.

f) $\mathbf{A^2 - \frac{2}{3}A + 1 = 0}$ $\Rightarrow$ $b^2 - 4ac = \frac{4}{9} - 4(1)(1) = \frac{-32}{9} < 0$ No tiene dos raíces reales y diferentes.

11.5.2. CARACTERÍSTICAS DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CUARÁTICA

- **Adición:** $\mathbf{x_1 + x_2}$

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-2b}{2a} \\
&= \frac{-b}{a}
\end{aligned}
$$

- **Producto** $\mathbf{x_1 x_2}$

$$x_1x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2+4ac-b^2}{4a^2}$$

$$= \frac{a}{c}$$

Como puede verse la suma de las raíces y el producto de ellas mismas tiene relación con los coeficientes de la forma general de segundo grado. es decir:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Si a esta forma se le divide entre a, queda:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Como se puede apreciar el coeficiente de la x es $-(x_1 + x_2)$ y el término independiente es x_1x_2 , así que construir ecuaciones dadas las raíces resulta sencillo. sin necesidad de plantear una ecuación.

Ejemplos

a) $\mathbf{x_1 = 3}$ **y** $\mathbf{x_2 = 4}$ $\Rightarrow$ $x_1 + x_2 = 7 = -\dfrac{b}{a}$

$x_1x_2 = 12 = \dfrac{c}{a}$

Se puede construir la ecuación quedando: $x^2 -7x + 12 = 0$

b) $\mathbf{x_1 = -15}$ **y** $\mathbf{x_2 = -2}$ $\Rightarrow$ $x_1 + x_2 = -17 = -\dfrac{b}{a}$

$x_1x_2 = 30 = \dfrac{c}{a}$

La ecuación es: $x^2 -17x + 30 = 0$

c) $x_1 = -4/7$ y $x_2 = 1/2$ $\Rightarrow$ $x_1 + x_2 = -\frac{1}{14} = -\frac{b}{a}$

$$x_1 x_2 = -2/7 = \frac{c}{a}$$

La ecuación es: $x^2 - \frac{1}{14}x - \frac{2}{7} = 0$

11.6. PROBLEMAS QUE CONDUCEN A ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

♣ *1. Un hombre que está en una ciudad dispone de 12 hrs. Libres. ¿Qué distancia podrá recorrer hacia el campo en un auto que va a 50 Km/h, si el viaje de vuelta debe hacerlo en un caballo que anda 10 Km/h.*

Tiempo = t = 12 hrs.
Velocidad en auto = V1 = 50
Velocidad en caballo = V2 = 10
Recorre la misma distancia de ida que de regreso
t1 + t2 = 12

$$V = \frac{d}{t}$$

$$t_1 = \frac{d}{V_1}$$

$$t_2 = \frac{d}{V_2}$$

$$t_1 + t_2 = 12$$

$$\frac{d}{V_1} + \frac{d}{V_2} = 12$$

$$\frac{d}{50} + \frac{d}{10} = 12$$

$$\frac{d + 5d}{50} = 12$$

$$\frac{6d}{50} = 12$$

$$d = 12\left(\frac{50}{6}\right)$$
$$d = 100$$
$$t_1 = \frac{100}{50} = 2$$
$$t_2 = \frac{100}{10} = 10$$

Por lo tanto:

Distancia recorrida 100 Km. Empleó 2 hrs. en ir y 10 en regresar

♣ 2.- *Cierto número de personas alquila un camión para una excursión, si hubieran ido 10 personas más cada una hubiera pagado \$50 menos y si hubieran ido 6 personas menos cada una hubiera pagado \$50 más ¿Cuántas personas iban en la excursión y cuánto pago cada una?*

x = número de personas
y = lo que pago cada persona
xy = total de pago de la excursión

(x + 10) (y – 50) = pago si hubieran ido 10 personas más
(x + 10) (y - 50) = xy
(x – 6) (y + 50) = pago si hubieran ido 6 personas menos
(x – 6) (y + 50) = xy

$$\mathbf{xy + 10y - 50x - 500 = xy - 6y + 50x - 300}$$
$$10y + 6y - 50x - 50x - 500 + 300 = 0$$
$$16y - 100x - 200 = 0$$
$$4y - 25x - 50 = 0$$
$$y = \frac{50 + 25x}{4}$$
$$(x + 10)\left(\frac{50 + 25x}{4} - 50\right) = x\left(\frac{50 + 25x}{4}\right)$$
$$(x + 10)\left(\frac{50 + 25x - 100}{4}\right) = \left(\frac{50x + 25x^2}{4}\right)$$
$$(x + 10)\left(\frac{150 + 25x}{4}\right) = \frac{50x + 25x^2}{4}$$

$$\frac{150x + 25x^2 + 1500 + 250x}{4} = \frac{50x + 25x^2}{4}$$

$$\frac{400x}{4} + \frac{25x^2}{4} + \frac{1500}{4} = \frac{50x}{4} + \frac{25x^2}{4}$$

$$100x - 12x = 375$$

$$88x = 375$$

$$x = \frac{375}{88} = 4$$

$$y = \frac{50 + 25x}{4}$$

$$y = \frac{50 + 25\left(\frac{375}{88}\right)}{4} = \frac{4400 + 9375}{352}$$

$$y = \frac{13775}{352} = 264$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{Fueron a la excursión 264 personas y les costó \$4.00}}$$

♣ *3.- Un número es el triple de otro y la diferencia de sus cuadrados es 1800. Hallar los números.*

x = primer número
3x = segundo número

$$(3x)^2 - x^2 = 1800$$

$$9x^2 - x^2 = 1800$$

$$8x^2 = 1800$$

$$x^2 = \frac{1800}{8}$$

$$x^2 = 225$$

$$x = \pm\sqrt{225}$$

$$x = 15$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{El primer número es 15 y el segundo 45}}$$

♣ *4.- La longitud de una sala excede a su ancho en 4m si cada dimensión se aumenta en 4m. En área será el doble. Hallar las dimensiones.*

x = longitud de la sala
x – 4 = ancho de la sala
x(x – 4) = área

$$\mathbf{(x+4)(x-4+4) = x(x-4)2}$$
$$(x+4)x = 2x(x-4)$$
$$x+4 = 2(x-4)$$
$$x+4 = 2x-8$$
$$x-2x = -4-8$$
$$-x = -12$$
$$x = 12$$

Por lo tanto:

La longitud de la sala es de 12 m y el ancho de 8 m.

♣ *5.- Una compañía de 180 hombres esta dispuesta en filas, el número de soldados de cada fila es 8 más que el número de filas que hay ¿Cuántas filas hay y cuántos soldados hay en cada fila?*

x = número de filas
x + 8 = número de soldados

$$\mathbf{x(x+8) = 180}$$
$$x^2 + 8x = 180$$
$$x^2 + 8x - 180 = 0$$
$$(x+18)(x-10) = 0$$
$$x_1 = -18 \qquad x_2 = 10$$

Por lo tanto:

Hay 10 filas y 18 soldados en cada fila

♣ 6.-. Se lanza una pelota hacia arriba a una velocidad inicial de 64 pies/seg. el número de pies s sobre el nivel del suelo después de t segundos está dado por, $s = -16t^2 + 64t$

a) ¿En cuánto tiempo alcanzará el proyectil una altura de 48 pies?
b) ¿En cuánto tiempo regresa al suelo?
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

$$\mathbf{48 = -16t^2 + 64t}$$

$$16t^2 - 64t + 48 = 0$$

$$t = \frac{64 \pm \sqrt{4096 - 4(16)(48)}}{2(16)}$$

$$t = \frac{64 \pm \sqrt{4096 - 3072}}{32}$$

$$t = \frac{64 \pm \sqrt{1024}}{32}$$

$$t = \frac{64 \pm 32}{32} \rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{32}{32} = 1 \\ t_2 = \frac{93}{32} = 3 \end{cases}$$

d) ¿En cuánto tiempo regresa al suelo?
$0 = -16t^2 + 64t$

$$16t^2 - 64t = 0$$

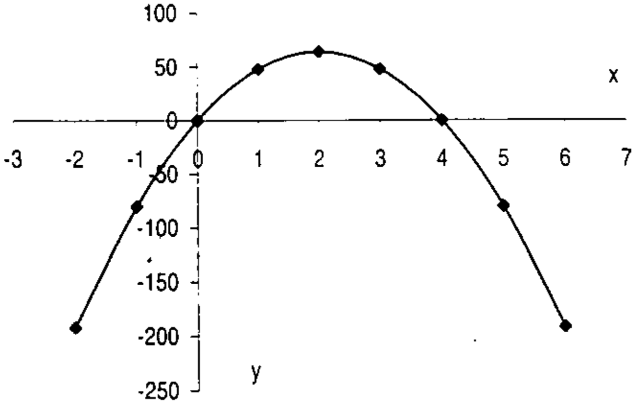
$$16t(t - 4) = 0$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = 4$$

X	y
-2	-192
-1	-80
0	0
1	48
2	64
3	48
4	0
5	-80
6	-192

Caída del proyectil



Como puede verse de la gráfica que regresa al suelo cuando vale exactamente y cero, así que es en 4 segundos y alcanza la altura máxima de 64 cuando llega al segundo 2.

♣ *7.- Un tren emplea cierto tiempo en recorrer 240 Km. Si la velocidad hubiera sido 20Km/h más que la que llevaba hubiera tardado 2 hrs. menos en recorrer dicha distancia ¿En qué tiempo recorrió los 240 Km?*

distancia = 240 Km.

$V_2 = V_1 + 20$

$t_2 = t_1 - 2$

$V_1 = \frac{240}{t_1}$

$$V_2 = \frac{240}{t_2} \Longrightarrow V_1 + 20 = \frac{240}{t_1 - 2} \Longrightarrow \frac{240}{t_1} + 20 = \frac{240}{t_1 - 2}$$

$$\frac{240 + 20t1}{t_1} = \frac{240}{t_1 - 2}$$

$$(t_1 - 2)(240 + 20t_1) = 240\, t_1$$

$$240t_1 + 20t^2_1 - 480 - 40t_1 - 240t_1 = 0$$

$$20t^2_1 - 40t_1 - 480 = 0$$

$$t_1^2 - 4t_1 - 24 = 0$$
$$(t_1 - 6)(t_1 + 4) = 0$$
$$t_1 = 6 \qquad t_2 = -4$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{Tiempo} = 6 \text{ hrs.}}$$

♣ *8. Encuentre el número que sumado con su recíproco [illegible] 21.*

x = número
1/x = al número recíproco.

$$x + \frac{1}{x} = \frac{58}{21}$$
$$\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{58}{21}$$
$$21x^2 + 21 = 58x$$
$$21x^2 - 58x + 21 = 0$$

$$x = \frac{58 \pm \sqrt{(58)^2 - 4(21)^2}}{2(21)}$$

$$x = \frac{58 \pm \sqrt{1600}}{42}$$

$$x = \frac{58 \pm 40}{42}$$

$$x_1 = \frac{58 + 40}{42} = \frac{98}{42} = \frac{49}{21}$$
$$x_2 = \frac{58 - 40}{42} = \frac{18}{42} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

Por lo tanto:

Hay dos posibles soluciones $\frac{49}{21}$ y $\frac{3}{7}$

E J E R C I C I O S

1. Se quiere poner una cerca alrededor de una hortaliza cuadrada. Si la reja cuesta $1 por pie y el costo de cercar es $50 por pie cuadrado halle el tamaño del huerto que puede cercarse a un costo de $120.

2. La diagonal de un polígono es un segmento de recta que une cualesquiera 2 vértices no adyacentes. El punto de diagonales de un polígono de N lados es $\frac{N(N-1)}{2}$ ¿Cuántos lados debe tener un polígono si el número de sus diagonales es 35? ¿Podría haber un polígono con 100 diagonales?

3. La distancia que viaja un automóvil en el tiempo que transcurre entre el momento que el conductor decide aplicar el freno y el momento en que el automóvil se detiene, se conoce como la distancia de frenado. Si un auto viaja a una velocidad x en millas/ hora, la distancia de frenado "d" en pies está dada aproximadamente por la ecuación

$$d = x \ + \frac{x}{20}$$

   a) Calcular la distancia de frenado cuando la velocidad es de 55 millas/hora.
   b) Una vaca está parada tranquilamente a la mitad del camino. Si empieza a reaccionar cuando el carro se encuentra a 120 pies de la vaca. ¿Cuál es la velocidad mayor a la que puede el carro evitar el choque contra la vaca?

4. Una familia que posee dos autos realiza un recorrido de 500 km. Conduciendo un auto la esposa y el otro el esposo. Ambos realizan el viaje con una velocidad constante y la velocidad con la que conduce la esposa es 10km/h. Mayor que la del esposo. Ella realiza el recorrido en una hora menos que el esposo. Encontrar las velocidades de cada uno.

5. Encontrar las dimensiones de un rectángulo, de tal manera que su área sea 1200 cm^2 si su perímetro es de 140 cms.

6. Un agricultor se ve en la necesidad de cercar 10,000 m^2 de su propiedad, la cual es rectangular y colinda con un río, por lo cual no necesita cercar dicho lado. Encontrar las dimensiones del terreno cercado si él dispone de 300 m. De cerca y desea que el terreno cercado sea también rectangular.

7. Encuentre tres pares consecutivos cuya suma de cuadrados es 683.

11.7. ECUACIONES DE GRADO MAYOR A DOS QUE PUEDEN RESOLVERSE POR LAS TÉCNICAS VISTAS PARA EL GRADO DOS.

a) $\mathbf{x^4 - 1 = 0}$

$x^4 = 1$

$x = 1^{1/4}$

$x_1 = 1$ o $x_2 = -1$

b) $\mathbf{x^4 - 16 = 0}$

$x^4 = 16$

$x = 16^{1/4}$

$x_1 = 2$ o $x_2 = -2$

Note que en los dos ejercicios anteriores se obtienen raíces pares por lo que las soluciones implican dos signos.

c) $\mathbf{x^3 + 8 = 0}$

$x^3 = -8$

$x = (-8)^{1/3}$

$x = -2$

En este ejercicio se obtiene una ríz impar por lo que la solución es única y no dos como en los ejercicios donde la raíz es par.

d) $\mathbf{x^5 + 15 = 0}$

$x^5 = -15$

$x = (-15)^{1/5}$

e) $\mathbf{x^4 + 9x^2 + 20 = 0}$

$$x^2 = \frac{-9 \pm \sqrt{81-4(1)(20)}}{2}$$

$$x^2 = \frac{-9 \pm \sqrt{81-80}}{2}$$

$$x^2 = \frac{-9 \pm \sqrt{1}}{2} \rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{-9+1}{2} = -4 \\ \\ x^2 = \dfrac{-9-1}{2} = -5 \end{cases}$$

Ambos resultados no son posibles dado que no se cumple que el cuadrado de un número real sea negativo, por lo tanto la ecuación no tiene solución.

f) **$4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$**

$$x^2 = \frac{37 \pm \sqrt{1369-4(4)(9)}}{8}$$

$$x^2 = \frac{37 \pm \sqrt{1369-144}}{8}$$

$$x^2 = \frac{37 \pm \sqrt{1225}}{8} \rightarrow \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{37+35}{8} = \dfrac{72}{8} = 9 \rightarrow \begin{cases} x_{11} = 3 \\ \\ x_{12} = -3 \end{cases} \\ \\ x_2^2 = \dfrac{37-35}{8} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_{21} = \dfrac{1}{2} \\ \\ x_{22} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

g) **$x^{10} - 33x^5 + 32 = 0$**

$$x^5 = \frac{33 \pm \sqrt{(33)^2 - 4(1)(32)}}{2}$$

$$x^5 = \frac{33 \pm \sqrt{961}}{2}$$

$$x^5=\frac{33\pm 31}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1^5=\dfrac{33+31}{2}=\dfrac{64}{2}=32\rightarrow\{x_1=\sqrt[5]{32}=2\\[2ex] x_2^5=\dfrac{33-31}{2}=\dfrac{2}{2}=1\rightarrow\{x_2=\sqrt[5]{1}=\end{cases}$$

h) $\mathbf{2x^{1/2}-5x^{1/4}+2=0}$

$$x^{1/4}=\frac{5\pm\sqrt{(5)^2-4(1)(4)}}{4}$$

$$x^{1/4}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}$$

$$x^{\frac{1}{4}}=\frac{5\pm 3}{4}\rightarrow\begin{cases}x_1^{1/4}=\dfrac{5+3}{4}=\dfrac{8}{4}=2\rightarrow\{x_1=2^4=16\\[2ex] x_2^{1/4}=\dfrac{5-3}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\rightarrow\left\{x_2=\left[\dfrac{1}{2}\right]^4=\dfrac{1}{16}\right.\end{cases}$$

i) $\mathbf{x^4-3x^2-4=0}$

$$x^2=\frac{3\pm\sqrt{(3)^2+4(1)(4)}}{2}$$

$$x^2=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}$$

$$x^2=\frac{3\pm 5}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1^2=\dfrac{3+5}{2}=\dfrac{8}{2}=4\rightarrow\begin{cases}x_1=2\\ x_{12}=-2\end{cases}\\[2ex] x_2^2=\dfrac{3-5}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1\ \text{Lo cual no puede ser solución}\end{cases}$$

j) $\mathbf{x^2(3x^2 + 2) = 4(x^2 - 3) + 13}$

$$3x^4 + 2x^2 = 4x^2 - 12 + 13$$

$$3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-1)}}{6}$$

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6}$$

$$x^2 = \frac{2 \pm 4}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{2+4}{6} = \dfrac{6}{6} = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{12} = -1 \end{cases} \\ x_2^2 = \dfrac{2-4}{6} = \dfrac{-2}{6} = \dfrac{-1}{3} \text{ Lo cual no puede ser solución} \end{cases}$$

k) $\mathbf{x^8 - 41x^4 + 400 = 0}$

$$x^4 = \frac{41 \pm \sqrt{(41)^2 - 4(1)(400)}}{2}$$

$$x^4 = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 1600}}{2}$$

$$x^4 = \frac{41 \pm 9}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1^4 = \dfrac{41+9}{2} = \dfrac{50}{2} = 25 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt[4]{25} \\ x_{12} = -\sqrt[4]{25} \end{cases} \\ x_2^4 = \dfrac{41-9}{2} = \dfrac{32}{2} = 16 \rightarrow \begin{cases} x_{12} = 2 \\ x_{22} = -2 \end{cases} \end{cases}$$

l) $\mathbf{x^3 - 9x^{3/2} + 8 = 0}$

$$x^{3/2} = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(1)(8)}}{2}$$

$$x^{3/2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2}$$

$$x^{3/2} = \frac{9 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1^{3/2} = \frac{9+7}{2} = \frac{16}{2} = 8 \rightarrow \{x_1 = (8\ )^{2/3} = (8^2)^{1/3} = (64\ )^{1/3} = 4 \\ x_2^{3/2} = \frac{9-7}{2} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow \{x_2 = (1)^{2/3} = 1 \end{cases}$$

m) $\mathbf{3x = 16\sqrt{x} - 5}$

$$3x - 16\sqrt{x} + 5 = 0$$

$$x^{1/2} = \frac{16 \pm \sqrt{(16)^2 - 4(3)(5)}}{2(3)}$$

$$x^{1/2} = \frac{16 \pm \sqrt{256-60}}{6}$$

$$x^{1/2} = \frac{16 \pm 14}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1^{1/2} = \frac{16+14}{6} = \frac{30}{6} = 5 \rightarrow \{x_1 = (5)^2 = 25 \\ x_2^{1/2} = \frac{16-14}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow \left\{x_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\right. \end{cases}$$

n) $\mathbf{25x^4 + 9x^2 - 16 = 0}$

$$x^2 = \frac{-9 \pm \sqrt{(9)^2 - 4(25)(-16)}}{2(25)}$$

$$x^2 = \frac{-9 \pm \sqrt{81+1600}}{50}$$

$$x^2 = \frac{-9 \pm 41}{50} \rightarrow \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{-9+41}{50} = \dfrac{32}{50} = \dfrac{16}{25} \rightarrow \begin{cases} x_{11} = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5} \\ x_{12} = -\sqrt{\dfrac{16}{25}} = -\dfrac{4}{5} \end{cases} \\ x_2^2 = \dfrac{-9-41}{50} = \dfrac{-50}{50} = -1 \text{ No es posible que un número al cuadrado sea negativo} \end{cases}$$

E J E R C I C I O S

Resolver las siguientes ecuaciones.

1. $x^4 + 16x^2 - 225 = 0$

2. $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$

3. $x - x^{1/2} - 30 = 0$

4. $x^{-4} - 8x^{-2} - 9 = 0$

5. $(4x^2 - 5)^2 - 3(4x^2 - 5) - 20 = 0$

6. $x^2 + x + \dfrac{12}{x^2 + x} = 8$

7. $x^{-2} - 8x^{-1} - 12 = 0$

8. $\dfrac{x-1}{x} + 2 = 3\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

11.8. DESIGUALDADES CON FORMAS CUADRÁTICAS

Introducidos los métodos de solución de ecuaciones cuadráticas se vuelve necesario analizar la resolución de desigualdades que involucran estructuras cuadráticas.

a) $x(x + 1) > 0$

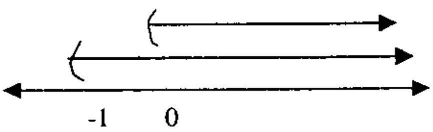
Para resolver esta desigualdad lo que hay que plantearse es que un producto es positivo cuando sus dos factores son positivos o bien cuando los dos factores son negativos. De esta manera se resolverán dos casos que conformarán las posibles soluciones de esta desigualdad.

♠ Caso I

Los dos factores son positivos

$x > 0$ y $x + 1 > 0$

$x > 0$ $x > -1$



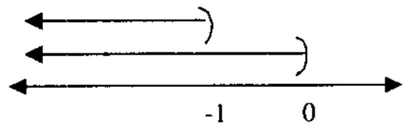
o

♠ Caso II

Los dos factores son negativos

$x < 0$ y $x + 1 < 0$

$x < 0$ $x < -1$



Solución = $\{x \in \Re / -\infty < x < -1,\ 0 < x < \infty\} = \{x \in \Re / x \in \{(-\infty, -1) \cup (0, \infty)\}\}$

b) $(5x - 3)(2x + 4) \leq 0$

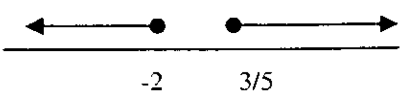
Para este caso un producto es negativo si uno de los dos factores es negativo y el otro es positivo, de esta manera se tienen los dos casos.

♠ Caso I

El primer factor es positivo y el segundo negativo.

$5x - 3 \geq 0$ y $2x + 4 \leq 0$

$x \geq \frac{3}{5}$ $x \leq -2$



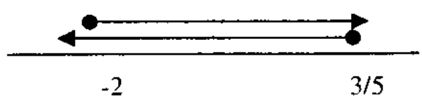
o

♠ Caso II

El primer factor es negativo y el segundo positivo.

$5x - 3 \leq 0$ y $2x + 4 \geq 0$

$x \leq \frac{3}{5}$ $x \geq -2$



$$\text{Solución} = \left\{x \in \Re / -2 \le x \le \frac{3}{5}\right\} = \left\{x \in \Re / x \in \left[-2, \frac{3}{5}\right]\right\}$$

c) Generalizando el método se puede resolver estructuras con más de dos factores.

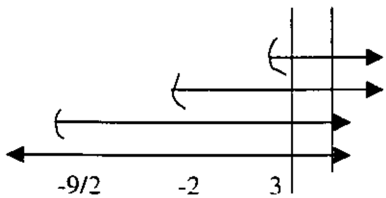
$$(x + 2)(x - 3)(2x + 9) > 0$$

Para resolver esta desigualdad hay que plantearse los posibles casos que pueden suceder: Los tres factores son positivos o bien dos de los factores son negativos y uno positivo, este último caso determina tres.

I Los tres factores son positivos

$x + 2 > 0$ y $x - 3 > 0$ y $2x + 9 > 0$

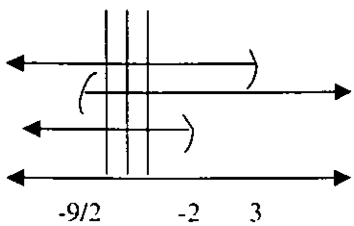
$x > -2$ $\quad$ $x > 3$ $\quad$ $x > -\frac{9}{2}$



II Los dos primeros factores son negativos y el tercero es positivo.

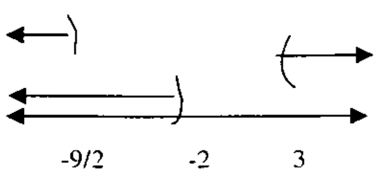
$x + 2 < 0$ y $x - 3 < 0$ y $2x + 9 > 0$

$x < -2$ $\quad$ $x < 3$ $\quad$ $x > -\frac{9}{2}$



III El primero y el último de los factores son negativos y el segundo es positivo.

$x + 2 < 0$ y $x - 3 > 0$ y $2x + 9 < 0$



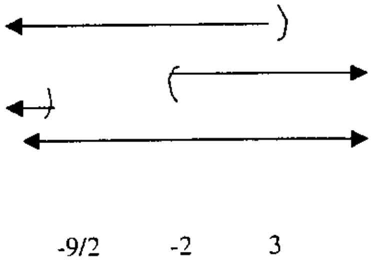
$x < -2$ $\qquad x > 3$ $\qquad x < -\frac{9}{2}$

La solución es el vacío

IV El primer factor es positivo y el segundo y tercer factor son negativos.

$x + 2 > 0 \quad y \quad x - 3 < 0 \quad y \quad 2x + 9 < 0$

$x > -2 \qquad x < 3 \qquad x < -\frac{9}{2}$



La solución es el vacío.

Solución = $\{x \in \Re / -4.5 < x < -2, 3 < x < \infty\} = \{x \in \Re / x \in \{(-4.5, -2) \cup (3, \infty)\}\}$

d) $\mathbf{x^2 + 6x + 5 \geq 0}$

Si el trinomio es factorizable se procede como los casos anteriores.

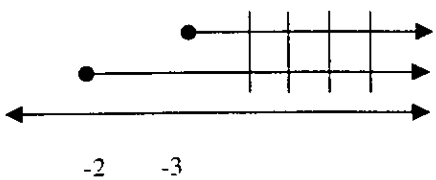
$x^2 + 6x + 5 = (x + 3)(x + 2) \geq 0$

♠ Caso I

Los dos factores son positivos

$x + 3 \geq 0 \quad y \quad x + 2 \geq 0$

$x \geq -3 \qquad x \geq -2$



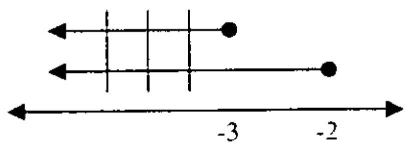
o

♠ Caso II

Los dos factores son negativos

$x + 3 \leq 0 \quad y \quad x + 2 \leq 0$

$x \leq -3 \qquad x \leq -2$



Solución = $\{x \in \Re / -\infty < x \leq -3, -2 \leq x < \infty\} = \{x \in \Re / x \in \{(-\infty, -3] \cup [-2, \infty)\}\}$

e) $\mathbf{12x^2 - 10x - 2 < 0}$

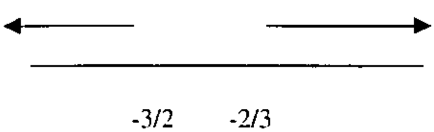
Como $12x^2 - 10x - 2 = (6x + 4)(2x - 3) < 0$

♠ Caso I

El primer factor es positivo y el segundo negativo.

$6x + 4 > 0$ y $2x - 3 < 0$

$x > -\frac{2}{3}$ $x < -\frac{3}{2}$



Solución es el vacío.

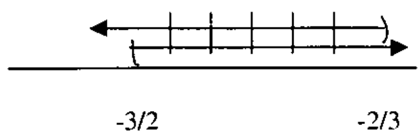
o

♠ Caso II

El primer factor es negativo y el segundo positivo.

$6x + 4 < 0$ y $2x - 3 > 0$

$x < -\frac{2}{3}$ $x > -\frac{3}{2}$



Solución = $\left\{x \in \Re / \frac{-2}{3} < x < \frac{3}{2}\right\} = \left\{x \in \Re / x \in \left(\frac{-2}{3}, \frac{3}{2}\right)\right\}$

f) Si el trinomio es o no factorizable puede resolverse por el método de completar el trinomio cuadrado perfecto.

$\mathbf{x^2 - 7x - 9 \leq 0}$

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} \leq 9 + \frac{49}{4}$$

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 \le \frac{36+49}{4}$$

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 \le \frac{85}{4}$$

Cuando se quiere obtener la raíz cuadrada de un número, resulta que puede haber dos raíces, por ejemplo 2 y –2 al cuadrado producen 4, por lo que la única opción de indicar que esto sucede cuando no se conocen los valores explícitamente es con el valor absoluto, de esta manera se tiene:

$$\left|x-\frac{7}{2}\right| \le \sqrt{\frac{85}{4}}$$

$$-\sqrt{\frac{85}{4}} \le x-\frac{7}{2} \le \sqrt{\frac{85}{4}}$$

$$\frac{7-\sqrt{85}}{2} \le x \le \frac{7+\sqrt{85}}{2}$$

$$\text{Solución} = \left\{x \in \Re \,/\, \frac{7-\sqrt{85}}{2} \le x \le \frac{7+\sqrt{85}}{2}\right\} = \left\{x \in \Re \,/\, x \in \left[\frac{7-\sqrt{85}}{2}, \frac{7+\sqrt{85}}{2}\right]\right\}$$

g) $\mathbf{2x^2 + 14x + 10 \ge 0}$

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} \ge -5 + \frac{49}{4}$$

$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2 \ge \frac{-20+49}{4}$$

$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2 \ge \frac{29}{4}$$

$$\left|x+\frac{7}{2}\right| \ge \frac{\sqrt{29}}{2}$$

o

$$x + \frac{7}{2} \geq \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$x \geq \frac{-7 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x + \frac{7}{2} \leq -\frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$x \leq \frac{-7 - \sqrt{29}}{2}$$

Solución =

$$\left\{x \in \Re / -\infty < x \leq \frac{-7 - \sqrt{29}}{2}, \quad \frac{-7 + \sqrt{29}}{2} \leq x < \infty\right\} =$$

$$\left\{x \in \Re / x \in \left\{\left(-\infty, \frac{-7 - \sqrt{29}}{2}\right] \cup \left[\frac{-7 + \sqrt{29}}{2}, \infty\right)\right\}\right\}$$

11.9. DESIGUALDADES CON FORMAS RACIONALES

a) $\mathbf{\frac{1}{x-4} > 0}$

Al igual que los casos anteriores de los factores este caso se resuelve de igual modo. Para que el cociente sea positivo sólo se necesita que el denominador sea positivo, ya que el uno es de por si positivo.

$x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 4$

Solución = $\{x \in \Re / 4 < x < \infty\} = \{x \in \Re / x \in (4, \infty)\}$

b) $\mathbf{\frac{5}{x^2 - 3x} < 0}$

Esta desigualdad puede suceder cuando el denominador es menor que cero.

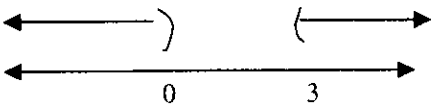
$x^2 - 3x < 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-3) < 0$

♠ Caso I

El primer factor es positivo y el segundo negativo.

$x > 0 \quad$ y $\quad x - 3 < 0$

$x > 0 \quad\quad\quad\quad x < 3$



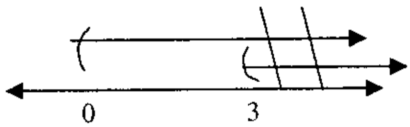
La solución es el vacío.

♠ Caso II

El primer factor es negativo y el segundo positivo.

$x < 0 \quad$ y $\quad x - 3 > 0$

$x < 0 \quad\quad\quad\quad x > 3$



Solución = $\{x \in \Re / 3 < x < \infty\} = \{x \in \Re / x \in (3, \infty)\}$

c) $\dfrac{-3}{x^2 + 8x + 2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3}{x^2 + 8x + 2} < 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 8x + 2 < 0$$

$$x^2 + 8x + 16 < -2 + 16$$

$$(x+4)^2 < 14$$

$$x + 4 < \sqrt{14}$$

$$-\sqrt{14} < x + 4 < \sqrt{14}$$

$$-4 - \sqrt{14} < x < -4 + \sqrt{14}$$

Solución = $\{x \in \Re / -4 - \sqrt{14} < x < -4 + \sqrt{14}\} = \{x \in \Re / x \in (-4 - \sqrt{14}, -4 + \sqrt{14})\}$

d) $\dfrac{x}{5x + 8} > 0$

Esto sucede cuando ambos numerador y denominador son positivos o bien negativos, así se tienen dos casos.

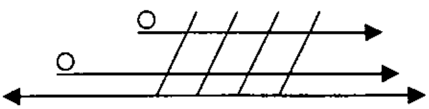
o

♠ Caso I

Numerador y denominador son positivos

$x > 0$ y $5x + 8 > 0$

$x > 0$ $x > -\frac{8}{5}$



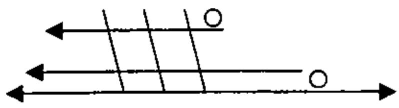
-8/5 0

♠ Caso II

Numerador y denominador son negativos

$x < 0$ y $5x + 8 < 0$

$x < 0$ $x < -\frac{8}{5}$



-8/5 0

$$\text{Solución} = \left\{ x \in \Re / -\infty < x < -\frac{8}{5},\ 0 < x < \infty \right\} = \left\{ x \in \Re / x \in \left\{ \left(-\infty, -\frac{8}{5} \right) \cup (0, \infty) \right\} \right\}$$

e) $\mathbf{\frac{2x - 8}{10 - x} \leq 0}$

Lo importante de este caso es que el denominador nunca puede ser cero así que en las desigualdades que impliquen al denominador se tomarán estrictas, es decir sin el igual a cero.

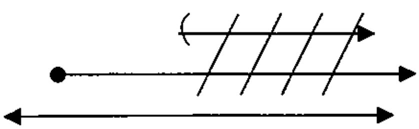
o

♠ Caso I

El numerador es positivo y el denominador es negativo.

$2x - 8 \geq 0$ y $10 - x < 0$

$x \geq 4$ $x > 10$



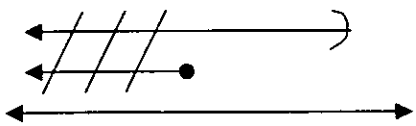
4 10

♠ Caso II

El numerador es negativo y el denominador es positivo.

$2x - 8 \leq 0$ y $10 - x > 0$

$x \leq 4$ $x < 10$



4 10

Solución = $\{x \in \Re / -\infty < x \leq 4,\ 10 < x < \infty\} = \{x \in \Re / x \in \{(-\infty,4] \cup (10,\infty)0\}\}$

f) $\dfrac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{x^2-5x+1}} > \mathbf{0}$

Este caso generará en los dos casos básicos, otros dos casos más.

♠ Caso I

Numerador y denominador son positivos

$x + 3 > 0 \quad$ y $\quad x^2 - 5x + 1 > 0$

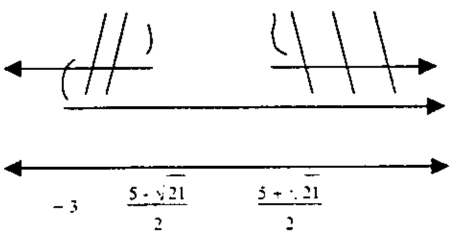
$x > -3 \qquad x^2 - 5x + \dfrac{25}{4} > -1 + \dfrac{25}{4}$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 > \frac{21}{4}$$

$$\left|x - \frac{5}{2}\right| > \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$x - \frac{5}{2} > \frac{\sqrt{21}}{2} \quad \text{o} \quad x - \frac{5}{2} < -\frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$x > \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2} \quad \text{o} \quad x < \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}$$



o

♠ Caso II

Numerador y denominador son negativos

$x + 3 < 0 \quad$ y $\quad x^2 - 5x + 1 < 0$

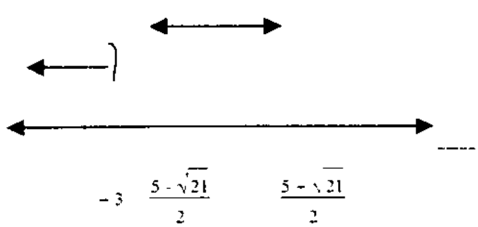
$x < -3 \qquad x^2 - 5x + \dfrac{25}{4} < -1 + \dfrac{25}{4}$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 < \frac{21}{4}$$

$$\left|x - \frac{5}{2}\right| < \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{21}}{2} < x - \frac{5}{2} < \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{5}{2} < x < \frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{5}{2}$$



La solución es el vacío

Solución =
11

$$\left\{x \in \Re / -3 < x < \frac{5-\sqrt{21}}{2} , \ \frac{5+\sqrt{21}}{2} < x < \infty \right\} = \left\{x \in \Re / x \in \left\{\left(-3, \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}, \infty\right)\right\}\right\}$$

h) $\dfrac{(\mathbf{x}+\mathbf{2})(\mathbf{x}-\mathbf{5})}{\mathbf{2x}-\mathbf{8}} \geq \mathbf{0}$

o

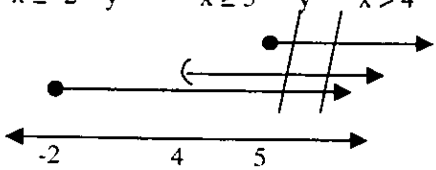
♠ Caso I

Numerador y denominador son positivos

$(x+2)(x-5) \geq 0$ y $2x - 8 > 0$

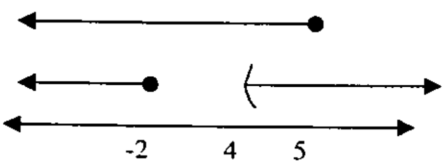
$x+2 \geq 0$ y $x-5 \geq 0$ y $x > 4$

$x \geq -2$ y $x \geq 5$ y $x > 4$



$x+2 \leq 0$ y $x-5 \leq 0$ y $x > 4$

$x \leq -2$ y $x \leq 5$ y $x > 4$



La solución es el vacío.

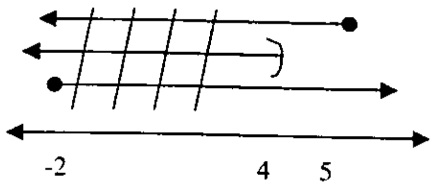
♠ Caso II

Numerador y denominador son negativos

$(x+2)(x-5) \leq 0$ y $2x - 8 < 0$

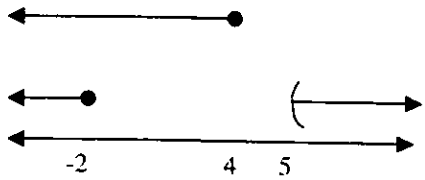
$x+2 \geq 0$ y $x-5 \leq 0$ y $x < 4$

$x \geq -2$ y $x \leq 5$ y $x < 4$



$x+2 \leq 0$ y $x-5 \geq 0$ y $x < 4$

$x \leq -2$ y $x \geq 5$ y $x < 4$



La solución es el vacío.

Solución = $\{x \in \Re / -2 \leq x < 4,\ 5 \leq x < \infty\} = \{x \in \Re / x \in \{[-2,4) \cup [5,\infty)\}\}$

Como pudo apreciarse en los ejercicios. para resolver estas desigualdades es necesario conservar y entender las estructuras lógicas con las que se desarrollan. además siempre recordando que la o implica unión y la y es la intersección de conjuntos.

E J E R C I C I O S

Resolver las siguientes desigualdades.

a) $(4x + 8)(3 - x) > 0$

b) $(3x - 5)(3x) < 0$

c) $(10x - 3)(2x + 2)(x - 1) \geq 0$

d) $(x+2)7x \leq 0$

e) $5x^2 - 3x + 4 > 0$

f) $-x^2 + 4x - \frac{1}{2} < 0$

g) $\frac{10}{x+4} \geq 0$

h) $\frac{-7}{10(x-3)} \leq 0$

i) $\frac{3x-9}{5x+4} \leq 0$

j) $\frac{(2x-3)(x^2-x)}{x-8} > 0$

C O M E N T A R I O S

GENERALES

En la enseñanza de la matemática su subrayan las estructuras abstractas, especialmente en el álgebra. Actualmente se profundiza en el rigor lógico, en la comprensión, contraponiendo ésta a los aspectos operativos y manipulativos, conduciendo de forma natural al énfasis en la fundamentación a través de las nociones de la teoría de conjuntos y en el cultivo del álgebra, que fomentan actividades cercanas a la tautología y al reconocimiento de nombres, que es lo que el álgebra ofrece en el nivel elemental.

La actividad matemática se enfrenta a diversas estructuras que se prestan a diversos tratamientos peculiares que deben incluir una simbolización adecuada (los elementos que conforman la estructura), una manipulación racional rigurosa (las relaciones entre los elementos), y un conocimiento efectivo de la realidad en que se inscribe (primero de forma mental y luego en el modelo de realidad exterior), aunque no de manera sencilla sino que tiene que afrontar la complejidad del símbolo y su representación, y la complejidad de la estructura formal de pensamiento (lógica matemática)

Una manera de acercarse al estudio de las matemáticas en general y al álgebra en particular es a través de la historia del desarrollo de la matemática, que permite, entre otras cosas observar que éste es semejante al de las otras ciencias, por aproximaciones sucesivas, por experimentos, por tentativas hasta alcanzar formas más maduras, aunque siempre perfectibles, ganando con ello cierto interés y atractivo.

La matemática es sobre todo saber hacer, es una ciencia en la que el método predomina sobre el contenido, por ello se concede gran importancia al estudio de las cuestiones que se refieren a los procesos mentales de resolución de problemas.

Dada la rapidez en que la vida se desarrolla actualmente lo más valioso que se da a los jóvenes son procesos de pensamiento útiles que proporcionan contenidos que rápidamente se convierten en ideas pasadas de moda, incapaces de combinarse con otras para abordar los problemas del presente, para ello es necesario estimular la resolución autónoma de verdaderos problemas más que la mera transmisión de recetas en cada materia.

Dados los avances tecnológicos actuales es cada vez más necesario ir incorporando actividades relacionadas tanto con la calculadora manual como con las computadoras, acentuando la comprensión de los procesos matemáticos que en la ejecución de ciertas rutinas, preparando a los alumnos a tener y mantener un diálogo inteligente con estas herramientas y con las que en un futuro cercano aparezcan.

Una parte importante en la enseñanza de la matemática es la motivación en el proceso, es, y esto tiene que ver con la historia de la matemática, tratar de hacer patente los impactos mutuos entre los avances sociales, culturales, en el desarrollo de la humanidad y el propio desarrollo de la matemática..

Una de las principales causas del fracaso de los estudiantes es un posicionamiento inicial afectivo totalmente destructivo de sus propias potencialidades en este campo, provocado muchas veces por una inadecuada introducción por parte de los maestros, por eso es necesario intentar que los estudiantes perciban un sentimiento estético en la matemática, para que con ello se involucren en ella de un modo más personal y humano.

Se considera importante que el proceso de aprendizaje matemático en los estudiantes se da de manera parecida a la que el matemático utiliza al enfrentarse con el problema de matematización de la parte de realidad de que se ocupa.

Consideramos de suma importancia que en el proceso de enseñanza y el aprendizaje el estudiante de la matemática aborde los momentos históricos en que los diferentes temas han surgido, permitiendo con ello conocer la evolución de las ideas de las que pretendemos ocupamos, y con ello el lugar que ocupan en las distintas aplicaciones y en la teoría que de ellas se han derivado.

Asimismo sería bueno señalar que el acercamiento al tema en cuestión se puede dar de forma directa a la generación de modelos de la realidad en donde se sabe aparezcan las estructuras matemáticas en cuestión.

Consideramos también que es necesario explotar y explorar la riqueza de experiencias, percepciones y conceptualizaciones que los estudiantes presentan, para enriquecer el trabajo en el aula, pues la participación grupal en la construcción de los saberes individuales le da fortaleza a los conocimientos adquiridos y beneficia la dinámica grupal, generando con ello espacios de creación, e impulsando procesos que permiten mejorar la autoestima individual y grupal ante el problema del aprendizaje de la matemática.

Si en la enseñanza de la matemática se utiliza un esquema de resolución de problemas, ésta pondera los procesos de pensamiento y los procesos de aprendizaje, considerando a los contenidos matemáticos como el campo de operaciones donde se concretan formas de pensamiento eficaces.

Se considera importante que el alumno manipule los objetos matemáticos, que active su propia capacidad mental, que ejercite su creatividad, que adquiera confianza en sí mismo, que se prepare para nuevos retos, para resolver otro tipo de problemas científicos así como los de su vida cotidiana, que haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental, que reflexione sobre su propio pensamiento a fin de mejorarlo, que se divierta con su propia actividad mental.

Si se logra ejercitar este tipo de enseñanza se alcanzará proporcionar a los jóvenes capacidad autónoma para resolver sus problemas, capacidad de adaptación al medio y sus circunstancias, hábitos con valor universal no limitados al mundo matemático.

PARTICULARES

Un tema importante de señalar en el programa presentado es que éste es muy amplio, lo que conduce a tener cierta logística para su alcance en las escuelas donde se da. Primero que nada debe ser un curso que debe darse diariamente, tanto para cubrir los temas, como para que los alumnos practiquen en clase los métodos y las técnicas vistas en cada tema.

La cantidad de temas que se pretenden en este programa es el intento de ordenar el material del álgebra que se revisó en el nivel inmediato anterior, el cual se caracteriza de revisar un poquito de todo en cada año, enseñando a los alumnos que la matemática no está relacionada entre sí y mucho menos con las demás ciencias. En este sentido es indispensable cubrir los temas, pero no se puede ir desarrollando cada uno a través de la motivación y deducción de los alumnos, cabe mencionar que el programa es para un control incorporado a la UNAM, lo que implica que los programas deben verse, ya que están siempre controlados y supervisados por inspectores de la UNAM. Este último punto se vuelve una acotación álgida, ya que si bien uno quisiera que la enseñanza de la matemática fuera de manera más deductiva, así como más aplicativa, jamás se acabaría el programa y lo que se lograría es que los alumnos siguieran con sus lagunas sobre temas que debe saber manipular y desarrollar. Claro que esto genera un tipo de pensamiento y de alumnos en la preparatoria y es algo de los que uno debe de estar consciente. Tal vez si se deseará que esto cambiará se tendría que dar más horas de enseñanza a la materia y capacitar a sus profesores al pensamiento matemático.

Cabe aclarar que el saber manipular y aprender técnicas, no es del todo malo si se logra, ya que permite el avance de la matemática y permite al mismo tiempo, que los alumnos observen que la estructura del programa no es tan difícil y es bastante deductiva.

Por último otra consideración a hacer es que en estas notas pretendimos generar muchos ejercicios, debido a que los alumnos en esta edad requieren de ejemplos donde se vea claramente el método o los métodos usados, ya que con ellos aprenderán a enfrentar los problemas, como a manipular sus estructuras algebraicas de una manera más eficiente. Al mismo tiempo se intenta que lleven una forma lógica de resolver problemas y ecuaciones, como el que se enfrenten a la lectura de conceptos matemáticos de una manera más formal de la acostumbrada, deduciendo algunas estructuras que pueden comprender y captar de una manera sencilla, por eso es que se ocupa, por ejemplo, el que trabajen la notación matemática para escribir la solución de las ecuaciones.

ANEXO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN

COLEGIO DE: **MATEMÁTICAS.**

PROGRAMA DE ESTUDIOS DE LA ASIGNATURA DE: **MATEMÁTICAS IV.**

CLAVE: **0480**

AÑO ESCOLAR EN QUE SE IMPARTE: **CUARTO.**

CATEGORÍA DE LA ASIGNATURA: **OBLIGATORIA.**

CARÁCTER DE LA ASIGNATURA: **TEÓRICA.**

	TEÓRICAS	PRACTICAS	TOTAL
No. de horas semanarias	05	0	05
No. de horas anuales estimadas	150	0	150
CRÉDITOS	20	0	20

2. PRESENTACIÓN

a) Ubicación de la materia en el plan de estudios.
El curso de Matemáticas IV se ubica en el mapa curricular de la Escuela Nacional Preparatoria en el cuarto año del bachillerato, es una materia obligatoria del núcleo básico con carácter teórico y forma parte del área de formación.

b) Exposición de motivos y propósitos generales del curso.
La enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria presenta, a través de este programa, cambios significativos en la estructura y secuencia de los contenidos y principalmente en su enfoque metodológico, pues se orienta hacia un aprendizaje basado en la solución de problemas.
Por medio de los contenidos propuestos, el alumno ahora conocerá, comprenderá y aplicará la simbología de los conjuntos, las diferentes bases numéricas, las propiedades de los números reales y las operaciones fundamentales con expresiones algebraicas el planteamiento, resolución e interpretación de problemas de ésta y otras disciplinas, principalmente de la Física, la Química, la Economía, que se resuelven en términos de una ecuación, una desigualdad o un sistema de ecuaciones o un sistema de desigualdades. La aplicación de esta metodología privilegia el trabajo en el aula, ya que el profesor identificará con el grupo problemas "tipo", posibles de resolver con el paradigma en cuestión.
Esta metodología parte del planteamiento de problemas simples que irán aumentando su complejidad en el tratamiento de un mismo tema; para cada problema el profesor establecerá mecanismos de análisis de los componentes conceptuales y operativos del problema en cuestión, a fin de que el alumno, en lo posible, lo racionalice, identifique sus elementos las relaciones entre ellos y, finalmente, encuentre sus posibilidades de representación, de solución, y de interpretación, por lo que la tendencia metodológica de este programa es constituirse en una etapa intermedia del desarrollo curricular de la enseñanza de las Matemáticas en el bachillerato y de tránsito progresivo de una enseñanza lineal y algorítmica a una enseñanza de construcción. Para evaluar los alcances de este método de trabajo se hace necesario que el profesor luego de plantear y analizar problemas y procedimientos de solución con el grupo, supervise, en clase, la parte operativa de la ejecución y proporcione retroalimentación al alumno, sobre las operaciones correspondientes.
Para desarrollar este programa de estudio se requiere de la formación permanente de los profesores; de una revisión periódica de los programas y de la producción de materiales de apoyo en *software* o cuadernos de trabajo que ejerciten, en el aula, la parte operativa de los problemas de cada tema y los programas de asesoría.
En materia de seguimiento y evaluación de los programas, los profesores identificarán y evaluarán de manera colegiada y diagnóstica aquellos conocimientos técnicos e

instrumentales que el alumno debió adquirir en el nivel anterior para medir su eficacia y pronosticar su rendimiento en el nivel actual. Los resultados de este estudio, permitirán nuevas estructuraciones y dosificaciones (adiciones y supresiones temáticas), que sean más funcionales para los propósitos de cada curso y que acerquen, progresivamente, la enseñanza de las Matemáticas a un modelo basado en la construcción del conocimiento.

Propósitos:

Reafirmar y enriquecer los conocimientos del Álgebra previamente adquiridos, para aplicarlos correctamente en el desarrollo de nuevos conceptos, así como, en la solución de problemas de otras disciplinas afines, para que el alumno comprenda que las Matemáticas son un lenguaje y una herramienta que lo vincula con su entorno social.

Los cambios propuestos contribuirán al desarrollo del perfil del alumno a través de los siguientes aspectos que deberán considerarse en la estrategia de evaluación de este programa:

1. La capacidad del alumno para aplicar lo que ha aprendido durante el curso en el planteamiento y resolución de problemas de ésta y otras disciplinas.
2. El reconocimiento de los aspectos matemáticos que se relacionan entre sí, logrando aprendizajes significativos.
3. La importancia de las Matemáticas, su relación con otras ciencias, con los avances científicos y tecnológicos y con la sociedad.
4. La habilidad del alumno para la búsqueda, organización y aplicación de la información que obtiene en el análisis de problemas de la realidad.
5. La capacidad del alumno de aplicar las técnicas de estudio de las Matemáticas en otras disciplinas.
6. La capacidad del alumno de aplicar los conocimientos matemáticos en actividades cotidianas para mejorar su calidad de vida y la de los demás a través de desarrollar una actitud seria y responsable.
7. La aplicación de las Matemáticas en el análisis de problemas ambientales que ayuden al educando a la mejor comprensión de éstos, que lo conducirá a actuar de una manera sana y productiva.
8. La capacidad de trabajar en equipo en actividades dentro del aula, en la resolución de problemas que impliquen el intercambio y la discusión de ideas.
9. Desarrollar el interés del alumno por la asignatura e inclusive por una carrera del área Físico-matemáticas e ingenierías, que se refleje en un incremento de la matrícula en el área 1 del sexto año del bachillerato.
10. Incrementar la participación de los alumnos en concursos de Matemáticas, que fomenten su superación académica.

c) Características del curso o enfoque disciplinario.

La enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Nacional Preparatoria, en el nivel medio superior, está planeada de tal manera que en los tres años que incluyen este ciclo, el alumno adquiera los conocimientos indispensables para desarrollar las competencias matemáticas que le demanda el nivel superior.

El eje conductor de los tres cursos, desde el punto de vista operativo es el Álgebra y desde el punto de vista metodológico la simulación y la aproximación progresiva a la sistematización y a la modelación. Esta enseñanza cubre las tres etapas que presenta su mapa curricular: en el cuarto año, etapa de introducción, se imparte el curso de Matemáticas IV (Álgebra), cuyo contenido se detallará más adelante; en el quinto año, etapa de profundización, se desarrolla la asignatura Matemáticas V (Geometría analítica).En el sexto año, etapa de orientación, los cursos son: Matemáticas VI, áreas I y II (Cálculo diferencial e integral para las áreas Físico-matemáticas e ingenierías y Ciencias biológicas y de la salud), Matemáticas VI, área III (Cálculo diferencial e integral para el área de Ciencias sociales) Matemáticas VI área IV (Cálculo diferencial e integral para el área de Humanidades y artes).

Cada asignatura es la base de la inmediata superior, los conectivos entre estos tres programas son las funciones.

Además de los cursos de carácter obligatorio se imparten dos asignaturas con carácter optativo: Temas selectos de Matemáticas en el área I y Estadística y probabilidad en las áreas I, II, III y IV.

El curso Matemáticas IV está planeado para impartirse con cinco horas de clase a la semana. Está estructurado en tres bloques, a saber: en el primero se definen la simbología, el lenguaje algebraico, los sistemas de numeración y el campo de los números reales. El segundo es el operativo o instrumental aquí se reafirman las operaciones fundamentales con polinomios. En el tercero, se aplican los dos primeros, planteando un conjunto de problemas tipo procedentes de otras disciplinas: a fin de exponer el tema y modelar con los alumnos diversas aproximaciones de solución a ellos. En este proceso el profesor establecerá mecanismos de análisis de los componentes conceptuales y operativos del problema a fin de que el alumno en lo posible racionalice: el problema, sus elementos, las relaciones entre ellos y finalmente, sus posibilidades de representación y de solución.

Los ejes conductores de este programa son las relaciones y en particular las funciones puesto que las ecuaciones y las desigualdades son relaciones.

Durante el curso se pretende que el alumno adquiriera capacidad de raciocinio, habilidad en el manejo del lenguaje algebraico, destreza en las operaciones algebraicas de suma, multiplicación y potenciación con expresiones algebraicas y capacidad para determinar si la solución encontrada es la adecuada.

Los contenidos de Matemáticas IV agrupados como se ha mencionado, permiten visualizar al Álgebra como un todo estructurado, en primer lugar están los símbolos, el lenguaje y el campo de los números en donde se opera con monomios y polinomios efectuando productos notables y factorizaciones; con fracciones algebraicas y expresiones con radicales. Esto es el lenguaje y la herramienta que acercará a la posible solución del problema tipo planteado por el profesor.

Para evaluar se pedirá al alumno la identificación de las partes de un problema, la organización de estas partes, la relación entre ellas, la representación, la solución y la posible aplicación a otros problemas.

La tendencia metodológica de estos programas es constituirse en una etapa intermedia del desarrollo curricular entre una enseñanza lineal y algorítmica y el desarrollo del constructivismo.
En el trabajo de seguimiento de los programas se buscará un incremento paulatino de la interdisciplina, para tal efecto los profesores realizarán seminarios con las áreas afines o de aplicación de las Matemáticas a fin de identificar campos de aplicación, bancos de problemas y guías para profesores y alumnos.
Paralelamente el Colegio elaborará materiales de apoyo (*software* educativo y materiales escritos) y diseñará programas de asesoría, para éstos fines se cuenta con la infraestructura necesaria, concretamente los laboratorios de cómputo, los de creatividad y los avanzados de ciencias experimentales (LACE), instalados en cada uno de los nueve planteles de la Escuela Nacional Preparatoria, en donde el profesor desarrollará proyectos de investigación y trabajará conjuntamente con los alumnos interesados en profundizar en algunos aspectos de modelación experimental.

d) Principales relaciones con materias antecedentes, paralelas y consecuentes.
El curso de Matemáticas IV tiene como antecedentes los cursos de: Matemáticas, Física, Química, Español, Dibujo, Geografía, Historia universal y Música del nivel medio básico. Las Matemáticas, en la secundaria, tienen como finalidad profundizar en la Aritmética y la Geometría euclidiana en el plano, introducir conocimientos de Álgebra, Trigonometría y elementos de Estadística y probabilidad; Matemáticas IV retoma estos conocimientos, dándoles mayor alcance y profundidad; Física, Química y Geografía aportan problemas de aplicación para el desarrollo de los cursos de Matemáticas; los conocimientos adquiridos en los cursos de Español permiten comprender el simbolismo, el lenguaje común y el planteamiento de problemas cotidianos; la Historia universal da cuenta de la evolución humana, del desarrollo intelectual del hombre unido al de las Matemáticas; Música y Dibujo son un apoyo didáctico en el Álgebra.
Son materias paralelas Lengua española, cuyo conocimiento permite la comunicación y el entendimiento; Física III que aporta innumerables problemas de aplicación, Lógica cuya relación es fundamental, dado que la finalidad de ambas es plantear, analizar y resolver problemas, Dibujo, Geografía e Informática representan la posibilidad de analizar aspectos aplicados de las Matemáticas.
Para las materias consecuentes Matemáticas V, Química III, Biología IV y Educación para la salud, Matemáticas IV representa una herramienta teórica fundamental.

e) ESTRUCTURACIÓN LISTADA DEL PROGRAMA

UNIDADES.

I. *CONJUNTOS.* En esta unidad se abordan los conceptos fundamentales de la Teoría de los Conjuntos para proporcionar la herramienta y el lenguaje de operación para las unidades posteriores.

II. *SISTEMAS DE NUMERACIÓN.* En esta unidad se estudian los sistemas de numeración de las diversas culturas hasta nuestros días, resaltando la importancia del sistema de numeración base diez (decimal), el cual será desarrollado a profundidad abordando sus propiedades a través de la siguiente unidad.

III. *EL CAMPO DE LOS NÚMEROS REALES.* En esta unidad a partir de los números naturales y para resolver problemas cotidianos se muestra la necesidad de ir ampliando los conjuntos numéricos. Se formalizan las operaciones con números reales y se menciona la existencia de los números imaginarios y los complejos. Se opera con valor absoluto, notación científica y logaritmos. Al término de esta unidad será necesario pasar de la representación numérica a la representación simbólica para generalizar las reglas operativas de las Matemáticas. Se resuelven problemas significativos para el alumno.

IV. OPERACIONES CON MONOMIOS Y POLINOMIOS. En esta unidad se revisan las operaciones fundamentales con monomios y polinomios dándoles mayor alcance que en los cursos anteriores. A través del desarrollo de los contenidos de esta unidad se propicia la mecanización de las operaciones fundamentales del Álgebra, las cuales se sistematizan y simplifican en el desarrollo de la siguiente unidad.

V. PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN. En esta unidad se realiza un estudio completo de los productos notables y su respectiva factorización. Se abordan factorizaciones de mayor dificultad. La adquisición de los conocimientos expuestos en esta unidad, sumados con los de la unidad posterior constituyen la herramienta necesaria para resolver problemas de aplicación.

VI. OPERACIONES CON FRACCIONES Y RADICALES. En esta unidad se abordan los teoremas del factor y del residuo, y la división sintética, se opera con fracciones simplificándolas a su mínima expresión. Se abordan operaciones con radicales. Al término de esta unidad el alumno estará en posibilidad de aplicar los conocimientos adquiridos en el planteamiento algebraico de problemas que modelan diversas situaciones.

VII. *ECUACIONES Y DESIGUALDADES.* En esta unidad se estudian los métodos para resolver ecuaciones y desigualdades. Se resuelven problemas planteados como una ecuación o una desigualdad de primero o de segundo grado en una variable, pretendiendo que el alumno infiera que hay situaciones de su entorno que se expresan en términos de una sola variable con una o más soluciones posibles, pero que también existen acontecimientos que requieren, para representarse, de más de una variable como se tratará en la siguiente unidad.

VIII. SISTEMAS DE ECUACIONES Y DE DESIGUALDADES. En esta unidad se resuelven algebraicamente sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con tres variables, así como problemas expresados como tales. Se resuelven sistemas de dos desigualdades de primer grado en dos variables y los problemas expresados como un sistema de desigualdades.

3. PROPUESTA GENERAL DE ACREDITACIÓN

a) Actividades o factores.
El alumno demostrará su capacidad de análisis, de síntesis e interpretación lógica de la información adquirida a través de la aplicación de los conocimientos adquiridos en el curso en el planteamiento y resolución de problemas concretos: se propone que estas actividades sean evaluadas individualmente y por equipo durante el desarrollo de cada unidad.
Propuesta de actividades o factores a evaluar:
Exámenes.
Investigaciones bibliográficas y de aplicación a la asignatura correspondiente.
Ejercicios.
Tareas.

b) Carácter de la actividad.
Individual: exámenes, investigaciones y tareas.
En equipo: ejercicios e investigaciones.

c) Periodicidad.
Exámenes cada vez que el profesor lo considere conveniente en función del volumen de información que se maneje y de acuerdo con los periodos que acuerde el H. Consejo Técnico de ENP.
Investigaciones permanentes durante la unidad.
Ejercicios permanentes durante la unidad.

Tareas permanentes durante el curso.

d) Porcentaje sobre la calificación sugerido.

Exámenes	75 %
Investigación	15 %
Ejercicios	5 %
Tareas	5 %

4. PERFIL DEL ALUMNO EGRESADO DE LA ASIGNATURA

La asignatura Matemáticas IV contribuye a la construcción del perfil general del egresado de la siguiente manera; que el alumno:
Adquiera los lenguajes y reglas básicas para la indagación y el estudio.
Maneje inductiva y deductivamente los conocimientos aritméticos y algebraicos fundamentales.
Adquiera la herramienta y el lenguaje matemático que le permitan resolver problemas de ésta y otras disciplinas así como de la vida cotidiana.

5. PERFIL DEL DOCENTE

Características profesionales y académicas que deben reunir los profesores de la asignatura

El curso deberá ser impartido por profesores que sean titulados en la licenciatura de las siguientes carreras: matemático, actuario, físico, ingeniero civil, ingeniero químico, ingeniero mecánico electricista, ingeniero electrónico e ingeniero en computación.
Los profesores deben cumplir con los requisitos que marca el EPA y lo establecido en el Sistema de Desarrollo del Personal Académico de la Escuela Nacional Preparatoria (SIDEPA) así como participar permanentemente en los programas de formación y actualización de la disciplina, que la Escuela Nacional Preparatoria pone a su disposición.

BIBLIOGRAFÍA

1. Baldor, Aurelio. *Álgebra*. Publicaciones cultural, México 1983.

2. Collete, Jean Paul. *Historia de las Matemáticas I*. Siglo XXI editores, México 1986.

3. Dolciani, Mary; Berman, Simon y Freilich, Julius. *Álgebra Moderna*. Publicaciones Cultural. Vigésima edición, México 1986.

4. Lovaglia, Florence; Elmore, Merrit A. y Conway, Donald. *Álgebra*. Harla, México 1972.

5. Nichols, Eugene D,; Helmer, Ralph T. y Garland, E. Henry. *Álgebra Moderna*. CECSA, tercera edición, México 1973.