



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL SPLINE CUBICO COMO METODO DE SOLUCION DE INTEGRALES DE FOURIER

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

J U A N C O N T R E R A S



DIRECTOR DE TESIS: M. en C. JOSE LUIS NAVARRO URRUTIA



280848



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

" EL SPLINE CUBICO COMO METODO DE SOLUCION DE INTEGRALES DE FOURIER "

realizado por JUAN CONTRERAS

con número de cuenta 8250134-1 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario M. en C. ~~JOSE LUIS NAVARRO URRUTIA~~

Propietario M. en C. JOSE LOPEZ ESTRADA

Propietario M. en C. ~~ARCELO...~~ RODRIGON SEGURA

Suplente M. en C. M. GUADALUPE IBARGUENGOYTIA

Suplente M. en C. BEATRIZ VALADEZ BAUTISTA

Consejo Departamental de MATEMATICAS

Dr. Hecor Mendez Lango
FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
MATEMATICAS

SEÑOR, TE AGRADEZCO LA OPORTUNIDAD
POR NO DEJARME DESFALLECER Y PERMITIRME
LLEGAR Y CUMPLIR TU VOLUNTAD.

SEÑORA, APELE A TU BONDAD Y ME ESCUCHASTE
GRACIAS POR TODO.

A MI FAMILIA:

AILIN

JEANNETTE AMEYALLI

IVÁN ALEJANDRO

AARÓN ERNESTO

CON TODO EL AMOR QUE LES TENGO Y AGRADECIMIENTO POR ESTAR A MI LADO, POR LAS PENAS Y ALEGRÍAS QUE ME HAN BRINDADO, ESPERANDO QUE ESTA SEA LA MÁS PEQUEÑA DE LAS SEMILLAS QUE SIEMBRO EN SUS CORAZONES Y QUE SIGAMOS JUNTOS PARA VER FLORECER SUS FRUTOS.

A MI MADRE Y A SILVESTRE.
A MIS HERMANOS.

POR TODO SU APOYO, GRACIAS.

A LA FAMILIA GARCÍA BELTRÁN.

POR LA EDUCACIÓN QUE ME INCULCARÓN, POR SU
CARIÑO Y COMPRENSIÓN. POR SU APOYO Y
PROTECCIÓN, POR HABERME ACEPTADO COMO
UNO MÁS DE USTEDES.

EL SEÑOR LES BENDIGA A TODOS

AL LIC. ADOLFO GARCÍA BUSTAMANTE
LIC. ALENA GARCÍA GARRIDO.

POR SU TODO SU APOYO, SUS CONSEJOS Y
AMISTAD.

AL LIC. HÉCTOR DARÍO CHÁVEZ SILVA.

POR SU AMISTAD, CONSEJOS Y APOYO

A TODOS AQUELLOS QUE DE UNA Ú OTRA FORMA
HAN ESTADO CERCA.
AMIGOS
COMPAÑEROS DE TRABAJO
Y TODOS AQUELLOS QUE HAN SIGNIFICADO
ALGO EN MI VIDA Y QUE SIN CONDICIÓN ME HAN TENDIDO SU MANO

A LA UNIVERSIDAD:

POR LA OPORTUNIDAD QUE ME BRINDO
PARA SEGUIR ESTUDIANDO.

A LA FACULTAD:

POR RECIBIRME EN SU SENO.

A MIS MAESTROS Y COMPAÑEROS:

POR SU DEDICACIÓN Y APOYO

AL PROF. JOSÉ LUIS NAVARRO URRUTIA.

POR TENERME LA PACIENCIA DURANTE TANTO
TIEMPO, POR SU AMISTAD SIN MEDIDA.

ÍNDICE	PÁGINA
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I SERIES TRIGONOMÉTRICAS DE FOURIER	3
CAPÍTULO II INTEGRAL DEFINIDA	12
CAPÍTULO III INTEGRACIÓN NUMÉRICA	34
CAPÍTULO IV INTERPOLACIÓN	46
CAPÍTULO V ESPACIOS VECTORIALES SPLINE	58
CAPÍTULO VI SPLINE CÚBICO	77
CAPÍTULO VII LOS COEFICIENTES DE FOURIER	83
CAPÍTULO VIII EL SPLINE CÚBICO PARA LAS INTEGRALES DE FOURIER	100
CONCLUSIÓN	120
BIBLIOGRAFÍA	121

INTRODUCCIÓN.

El objetivo de este trabajo es dar a conocer los problemas que se presentan al querer encontrar los Coeficientes de Fourier de cualquier función continua; los cuales se deben obtener si además queremos conocer la serie de Fourier de dicha función.

Al calcular los Coeficientes de Fourier, se tiene que calcular una integral definida, la cual se puede obtener por el método analítico. Pero si se quiere calcular esta integral por algún método numérico, se presentan dificultades en la exactitud del resultado por lo que se darán antecedentes de éstas en Capítulo Segundo, así como la alternativa para lograr el resultado.

En el Tercer Capítulo se plantea que conociendo un conjunto finito de datos es posible obtener numéricamente la integral de cualquier función que pasa por estos puntos, tomando en cuenta solamente las ordenadas de los mismos.

En el Capítulo Cuarto se aproxima dicha función continua por un polinomio y el problema que ahora se presenta, es conocer de que grado de exactitud es conveniente para aproximar a la función. Se dan opciones de grados de exactitud por medio de grados del polinomio, ya que es más fácil integrar un polinomio que cualquier función continua.

Además se considera el problema de que, dado un polinomio del grado lo más grande posible, lograr que los resultados sean del todo confiables.

En el Capítulo Sexto se plantea la alternativa de probar que los polinomios sean polinomios Spline y al teoría que existe alrededor de estos se describe en el Capítulo Quinto.

Por último se tratará de evitar duplicación de trabajo y las ventajas que se obtienen al utilizar los polinomios trigonométricos, pues al obtener, en el Séptimo Capítulo, los Coeficientes de Fourier con la función Coseno , se puede obtener la información para la función Seno e inversamente.

Asimismo, las ventajas de la simetría de dichas funciones para así poder reducir el número de evaluaciones, es lo que se ve en el Capítulo Octavo en el cálculo de las Integrales de Fourier y para lograr esto se dan los antecedentes necesarios, aclarando que por ser tan extenso, sólo se dan los esbozos necesarios para ello.

CAPÍTULO
I

La idea de este capítulo es expresar una función en términos de una base ortogonal que nos permita determinar quienes son los Coeficientes de Fourier, de tal forma que se adecue a nuestro fin y nos facilite nuestro trabajo, en este caso, la formada por senos y cosenos, por lo que se plantea el siguiente tema.

SERIES TRIGONOMÉTRICAS DE FOURIER

Sea

$$V = C [a, b] \text{ el espacio de las funciones continuas en } [a, b]$$

con producto escalar \bullet, \bullet , y sea

$$f(x) \in V$$

Dada una base, con

$$\Phi = \{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)\}$$

se tiene que

$$f(x) = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \dots + a_n \phi_n(x)$$

entonces, deseamos conocer quienes son los

$$\{a_i\}_{i=1}^n$$

en términos de la base, por lo que una posible solución sería

$$\begin{aligned} f(x), \phi_j(x) &= \{a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \dots + a_n \phi_n(x)\}, \phi_j(x) \\ &= \{a_1 \langle \phi_1(x), \phi_j(x) \rangle + a_2 \langle \phi_2(x), \phi_j(x) \rangle + \dots + a_n \langle \phi_n(x), \phi_j(x) \rangle\} \end{aligned}$$

entonces

$$f(x), \phi_j(x) = a_i \Leftrightarrow \langle \phi_i(x), \phi_j(x) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

por lo que es necesario que nuestra base Φ sea ortonormal.

Dada una función $f(x) \in V$, donde la cardinalidad del conjunto Φ es ahora infinita, tenemos que $\forall f(x) \in V$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(x) \quad (1.1)$$

donde $\{\phi_i(x)\}$ es una base ortonormal.

Considerando que el producto escalar de dos funciones se puede expresar como

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (1.2)$$

entonces, una familia ortogonal de funciones

$$\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$$

deberá satisfacer

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ k & \text{si } m = n \end{cases} \quad (1.3)$$

De acuerdo a lo anterior, será conveniente utilizar una cierta base ortogonal en términos de senos y cosenos, cuya demostración de ortogonalidad se da como sigue

Apoyándonos en las siguientes igualdades

$$a) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)dx = 0 \text{ para } m \neq 0 \quad (1.4)$$

$$b) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx = 0 \text{ para } n \neq 0 \quad (1.5)$$

demostraremos

$$c) \quad \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \neq 0 \end{cases} \quad \langle 1.6 \rangle$$

$$d) \quad \langle \text{sen}(mx), \text{sen}(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx)\text{sen}(nx)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \neq 0 \end{cases} \quad \langle 1.7 \rangle$$

$$e) \quad \langle \text{sen}(mx), \cos(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx)\cos(nx)dx = 0 \quad \forall m, n \quad \langle 1.8 \rangle$$

tal que, las funciones

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots, \text{sen } x, \text{sen } 2x, \dots, \text{sen } nx$$

formen un conjunto de funciones ortogonales en $[-\pi, \pi]$

Demostración:

i)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)dx &= \frac{1}{m} \text{sen}(mx) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{m} [\text{sen}(m\pi) - \text{sen}(m(-\pi))] = 0 \end{aligned}$$

con $m \neq 0$, por lo que (1.4) se cumple.

ii)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx)dx &= -\frac{1}{m} \cos(mx) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{1}{m} [\cos(m\pi) - \cos(m(-\pi))] = 0 \end{aligned}$$

para todo m , con lo que (1.5) queda demostrada.

iii)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \neq 0 \end{cases}$$

utilizando la identidad trigonométrica

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)] dx \\ &= \frac{1}{2(m+n)} \left[\text{sen}((m+n)x) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m-n)} \left[\text{sen}((m-n)x) \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2(m+n)} [\text{sen}((m+n)\pi) + \text{sen}((m+n)\pi)] + \\ &\quad + \frac{1}{2(m-n)} [\text{sen}((m-n)\pi) + \text{sen}((m-n)\pi)] = 0 \end{aligned}$$

si $m \neq n$

Ahora si $m = n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx) dx$$

utilizando la identidad trigonométrica

$$\cos^2(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(2mx)) dx \\ &= \frac{1}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4} (\sin(2mx)) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} (\pi + \pi) + \frac{1}{4} (\sin(2m\pi) + \sin(2m\pi)) = \frac{2}{2} \pi + 0 \\ &= \pi \end{aligned}$$

con lo que se demuestra (1.6)

iv)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \neq 0 \end{cases}$$

utilizando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

y con $m \neq n$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((m+n)x) - \cos((m-n)x)] dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} \operatorname{sen}((m+n)x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{m-n} \operatorname{sen}((m-n)x) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2(m+n)} [\text{sen}((m+n)\pi) + \text{sen}((m+n)\pi)] \\
&\quad + \frac{1}{2(m-n)} [\text{sen}((m-n)\pi) + \text{sen}((m-n)\pi)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

para $m=n$, aplicando la identidad trigonométrica

$$\text{sen}^2(a) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2a))$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx)\text{sen}(nx)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(mx)dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(2mx))dx \\
&= \frac{1}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4m} \text{sen}(mx) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2} (2\pi) - \frac{1}{4m} (\text{sen}(m\pi) + \text{sen}(m\pi)) = \pi
\end{aligned}$$

con lo que se demuestra (1.7)

v)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx)\cos(nx)dx = 0 \quad \forall m \text{ y } n$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\text{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)]$$

para $m \neq n$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sen}((m+n)x) + \operatorname{sen}((m-n)x)]dx \\ &= -\frac{1}{2(m+n)} \cos((m+n)x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(m-n)} \cos((m-n)x) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ahora si $m = n \neq 0$, ya que si $m = n = 0$, la integral seria cero, se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(mx)dx$$

y utilizando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(2a) = 2 \operatorname{sen}(a)\cos(a)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(2mx)dx \\ &= -\frac{1}{4m} \cos(2mx) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

con lo que queda demostrada la ecuación (1.8).

Con las demostraciones de las condiciones (1.4)-(1.8), se dice que la ecuación (1.3), es una base ortogonal, y con estos resultados podemos expresar cualquier $f(x) \in V$ en términos de nuestra base como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + \dots + b_1 \operatorname{sen}(x) + b_2 \operatorname{sen}(2x) + \dots \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) \end{aligned} \tag{1.9}$$

que es la SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER, y que utilizaremos para determinar los coeficientes

$$\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$$

como sigue

Sea

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) \quad (1.10)$$

multiplicando (1.10) por $\cos(mx)$ ambos lados de la ecuación e integrando en el intervalo $[-\pi, \pi]$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \right) \cos(mx) dx \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx) \right) \cos(mx) dx \end{aligned}$$

ahora intercambiando de orden los signos de integración y sumatoria, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \cos(mx) dx \end{aligned}$$

entonces podemos definir

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = a_m \pi$$

por lo tanto

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx \quad (1.11)$$

ahora, si integramos nuestra base (1.9)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} a_0 (2\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx = 0 \end{aligned}$$

y si evaluamos (1.11) en $m = 0$, se tiene

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0$$

Análogamente, para b_0 , multiplicando (1.9) por $\sin(mx)$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = b_m \pi \end{aligned}$$

por lo tanto

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx \quad (1.12)$$

si sustituimos m por n en (1.11) y (1.12), se tiene:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

con lo que se determina el valor de los coeficientes, que era nuestro problema a resolver.

Este tema se volverá a ver, con mayor detalle en otro capítulo mas adelante, el cual será básico para nuestro objetivo.

**CAPÍTULO
II**

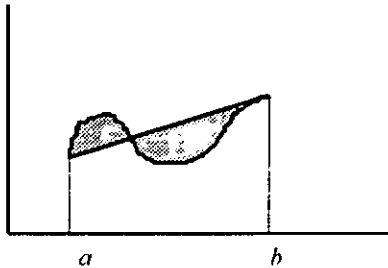
Es importante para los fines que tenemos conocer la teoría del cálculo de fórmulas de cuadratura, por lo que en este capítulo se hace mención de los principales aspectos para la determinación de estas, así como los aspectos teóricos de la Interpolación de Polinomios.

INTEGRAL DEFINIDA

Un problema relativamente común, es el cálculo de la integral de Riemann

$$I(f) \equiv I_a^b(f) \equiv \int_a^b f(x) dx$$

Aquí f es una función continua por partes sobre $[a, b]$, sin embargo, es usualmente suave cuando su aplicación es por partes, (es una función continua, pero la función sobre el segmento suave no se puede calcular en computadora).



en análisis uno puede aprender varias técnicas para resolver esta integral, y su expresión simple está definida por $I(f)$

Si esto es posible, se dice que la integral tiene solución analítica y que su solución se puede expresar en “forma cerrada”, sin embargo, estas dos ideas no proponen más que la expresión analítica, conocida matemáticamente, prefiriendo esta a la expresión original de la integral.

De cualquier modo, en varios casos, una representación analítica cerrada de la integral no existe, solo el residuo de la evaluación numérica. En varios casos esto es igualmente preferible cuando la solución de la forma cerrada es conocida.

El cálculo numérico de $I(f)$ también se denomina “cuadratura numérica”, esta idea nos recuerda la “cuadratura del círculo”, el problema de construir un cuadrado, usando sólo regla y compás, que tiene el área del círculo unitario y no tiene solución por la importancia de π .

Actualmente el significado del término “cuadratura” surge de la construcción del cuadrado de igual área; muy frecuentemente uno encuentra la idea de integración numérica, que al mismo tiempo es la solución de ecuaciones diferenciales, de hecho, el cálculo de la integral $I(f)$ corresponde formalmente a la solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned}y'(x) &= f(x) \\y(a) &= 0 \\x &\in [a, b]\end{aligned}$$

ya que

$$y(b) = I(f)$$

FÓRMULAS DE CUADRATURA.

Daremos algunas de las propiedades de la integral de Riemann, definiendo $a < b$.

Para la integral definida

$$\begin{aligned}I_a^b &= I: C[a, b] \rightarrow \mathfrak{R} \\f &\rightarrow I(f) = \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

se dice que es una forma lineal positiva sobre el espacio $C[a, b]$, (de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$), esto es

a) I es lineal.

Para toda función continua f, g y $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$,

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$$

b) I es positiva

Si f es no negativo, entonces la integral $I(f)$, tampoco lo es

$$f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$$

c) Para la adición, la integral es aditiva con respecto a una partición del intervalo de la integración, esto es, $\forall \tau \in [a, b]$, se tiene que:

$$I_a^\tau + I_\tau^b = I_a^b$$

Primero iniciaremos con el cálculo, respondiendo al problema de la condición de la integral. para esto, diremos como medir la perturbación de δf del integrando. Si elegimos la norma suprema (según la norma estándar sobre C_0), entonces, sobre el intervalo de integración infinita, la perturbación se puede definir. para esto usamos la L^1 -norma.

$$\|f\|_1 \equiv \int_a^b |f(x)| dx = I(|f|)$$

Lema 1

La condición absoluta y relativa del problema de cuadratura

$$(I, f), I(f) = \int_a^b f$$

con respecto de la L^1 -norma $\|\cdot\|_1$, es

$$k_{abs} = 1$$

en relación a

$$k_{rel} = \frac{I(|f|)}{|I(f)|}$$

Demostración

Para alguna $\delta f \in L^1[a, b]$, la perturbación de la integral se puede estimar por

$$\left| \int_a^b (f - \delta f) - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b \delta f \right| \leq \int_a^b |\delta f| = \|\delta f\|_1,$$

donde la igualdad se da para una perturbación positiva.

En el concepto absoluto, la perturbación es, por lo tanto, un problema mínimo, en nuestra opinión, sin embargo, esperamos dificultades cuando el radio de la integral del valor

absoluto y el valor absoluto de la integral es muy grande, y el problema es así mal condicionado.

Obviamente, esto es completamente análogo a la condición de la adición (con respecto a la resta), un riesgo para la condición relativa viene de los integrandos demasiado oscilatorios que suceden en varias aplicaciones.

Ya la integración de una oscilación simple de la función seno, sobre un periodo simple, está mal condicionada con respecto al concepto del error relativo, pero por supuesto esperamos que un método para el cálculo de la integral conserve sus propiedades estructurales.

La meta de la cuadratura numérica es, sin embargo, la construcción de las formas lineales positivas

$$\begin{aligned} I: C[a,b] &\rightarrow \mathfrak{R} \\ f &\rightarrow I(f) \end{aligned}$$

cuya aproximación a la integral I es lo mejor posible esto es

$$I(f) \rightarrow I(f)$$

es pequeña.

Ejemplo:

De la definición de la integral de Riemann, el método más obvio para el cálculo de I es la suma Trapezoidal

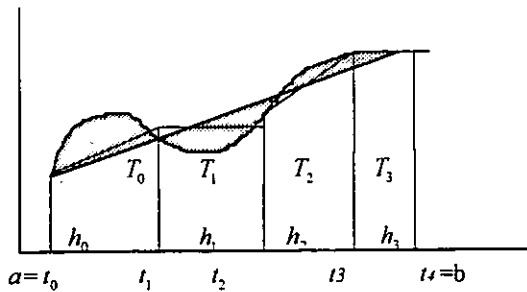


fig. 2

Particionando el intervalo en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$, de longitud $h_i = x_i - x_{i-1}$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

y aproximando la integral $I(f)$ por la suma de las áreas de los trapezoides

$$T^{(n)} = \sum_{i=1}^n T_i$$

$$T_i = \frac{h_i}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i))$$

La suma trapezoidal $T^{(n)}$, es obviamente una forma lineal, interpretando esto como una aplicación de la regla trapezoidal

$$T = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) \quad (1)$$

a los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$.

Considerando la suma trapezoidal con respecto a las sumas superior e inferior de Riemann

$$R_{min}^n = \sum_{i=1}^n k_i \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$R_{max}^n = \sum_{i=1}^n k_i \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

es obvio que

$$R_{min}^n \leq T^n \leq R_{max}^n$$

para f continua en $C^0[\alpha, b]$, la convergencia de la sumas de Riemann implican la convergencia de las sumas trapezoidales

$$R_{min}^n \leq T^n \leq R_{max}^n \rightarrow I(f)$$

para $n \rightarrow \infty, h_i \leq h \rightarrow 0$, por lo que se dice que la aproximación del error es más exacta.

La suma trapezoidal es un ejemplo simple para una fórmula de cuadratura, por lo que se tiene la siguiente

Definición 1.

Una fórmula de cuadratura 1, para el cálculo de la integral definida es una suma

$$I(f) = (b - a) \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i) \quad (2)$$

con los nodos x_0, \dots, x_n , y pesos $\lambda_0, \dots, \lambda_n$, tal que

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \quad (3)$$

La condición (3) refiere que los pesos garantizan que una fórmula de cuadratura es exacta, es decir,

$$I(1) = I(1) = b - a$$

esto es, que además la fórmula de cuadratura es positiva si todos los pesos lo son, es decir:

$$I \text{ es positiva} \Leftrightarrow \lambda_k \geq 0 \forall k = 0, \dots, n$$

Esto significa que para todas las propuestas prácticas, sólo las fórmulas de cuadratura con pesos positivos son interesantes, pero si este es el caso entonces la suma de los valores absolutos de los pesos

$$\sum_{i=0}^n |\lambda_i| \geq 1 \quad (4)$$

es medible. En cuanto a la fórmula de cuadratura, se desvía de los requerimientos positivos, porque de los resultados del producto escalar no tenemos que preocuparnos, sobre la estabilidad de la evaluación de una fórmula de cuadratura.

FÓRMULA DE NEWTON-COTES

La idea de la suma trapezoidal consiste en sustituir la función f por una aproximación f' , aquí la interpolación lineal para la cuadratura puede ser fácilmente llevada a cabo, y ver $I(f)$ como una aproximación de $I(f')$, es decir

$$I(f) \cong I(f')$$

Aquí por supuesto, sólo se puede usar la aproximación lineal, como en el caso de la regla trapezoidal (1) excepto en aproximaciones arbitrarias.

En particular para los nodos x_0, \dots, x_n , la función

$$I(x) \equiv P(f|x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

es el polinomio de interpolación de f , donde $L_i \in P_n$, es el i -ésimo polinomio de Lagrange para los nodos x_j , es decir: $L_i(x_j) = \delta_{ij}$. Este paso nos da las fórmulas de cuadratura

$$I(f) \equiv I(P(f|x_0, \dots, x_n)) = (b-a) \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i)$$

donde los pesos

$$\lambda_i \equiv \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x) dx$$

dependen de la elección de los nodos x_0, \dots, x_n .

Es claro, de la construcción, que de las fórmulas de cuadratura, las cuales son definidas de esta forma, son exactamente para polinomios $p \in P_n$, de grado mayor o igual que n .

$$I(P) = I(P_n(P)) = I(P) \text{ para } P_n$$

y dados los nodos x_j , la fórmula de cuadratura es ya determinada únicamente por esta propiedad.

Lema 2

Para $n+1$ pares de nodos x_0, \dots, x_n , diferentes, existe una y solo una fórmula de cuadratura

$$I(f) = (b-a) \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i)$$

que es exacta $\forall P \in P_n$, de grado menor o igual a n .

Demostración

--

Utilizaremos los polinomios de Lagrange $L_m \in P_n$, aplicados al nodo x_i , que se supone está integrado exactamente sobre la fórmula de cuadratura

$$I(L_m) = I(L_m) = (b-a) \sum_{j=0}^n \lambda_j L_m(x_j) = (b-a) \sum_{j=0}^n \lambda_j \delta_{ij} = (b-a)\lambda_i$$

$$\Rightarrow \lambda_i = (b-a)^{-1} I(L_m) = \lambda_m$$

En el caso especial de nodos equidistantes

$$h_i = h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + ih \quad i = 0, \dots, n$$

Las fórmulas de cuadratura construidas, son las fórmulas de Newton-Cotes, y el término para el peso λ_m , de Newton-Cotes, se simplifica sustituyéndolo por

$$s \equiv \frac{x-a}{h_i}$$

entonces

$$\lambda_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{j=0, j \neq m}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} dx = \frac{1}{n} \int_a^b \prod_{j=0, j \neq m}^n \frac{s-j}{i-j} ds$$

Los pesos λ_m son independientes de los límites del intervalo y sólo se calculan una vez.

n	$\lambda_{0n}, \dots, \lambda_{mn}$	error	Nombre de la regla
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{h^2}{12} f''(x)$	Trapezoidal
2	$\frac{3}{6} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{3}{6}$	$\frac{h^4}{90} f^{(4)}(x)$	Simpson-Kepler
3	$\frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{8}$	$\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(x)$	Newton 3/8
4	$\frac{7}{90} \quad \frac{32}{90} \quad \frac{12}{90} \quad \frac{32}{90} \quad \frac{7}{90}$	$\frac{8h^7}{935} f^{(6)}(x)$	Milne

tabla 1

En la tabla 1, listamos los pesos de orden $n=4$, y por lo tanto, también la fórmula de cuadratura es positiva para los ordenes $n=1, \dots, 7$. Los ordenes mayores son menos interesantes, ya que iniciando en $n=8$, los pesos negativos pueden ocurrir, por lo tanto la constante de Lebesgue, es la cantidad característica que se da en (4) sobre el factor de normalización $(b-a)^{-1}$ y es la condición numérica del polinomio de interpolación del polinomio de integración

Asimismo, en la tabla 1 tenemos ya asignados la aproximación de los errores respectivos a las fórmulas de Newton-Cotes (para integrandos muy suaves) expresados como una potencia del número de paso h y una derivada sobre un punto intermedio $\tau \in [a,b]$, observándose que para los ordenes iguales $n=2, 4$, la potencia de h y el grado de la derivada, tienen saltos en 2.

En lo que sigue chequearemos esas estimaciones por las dos primeras fórmulas, para lo cual uno puede ver el principio de n impar.

Antes de iniciar, recordemos una variante no tan obvia del Teorema del valor medio, el cual encontraremos varias veces en la demostración de las cuentas de aproximación.

Lema 3

Sean $g, h \in C[a, b]$, donde g tiene un sólo signo, i.e. $g(x) \leq 0$ o $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b h(x)g(x)dx = h(\tau) \int_a^b g(x)dx$$

para alguna $\tau \in [a, b]$.

Demostración

Supongamos, sin perder la generalidad de que $g \geq 0$, que

$$\min_{x \in [a,b]} h(x) \int_a^b g(s)ds \leq \int_a^b h(s)g(s)ds \leq \max_{x \in [a,b]} h(x) \int_a^b g(s)ds$$

para la función continua

$$F(x) \equiv \int_a^x h(s)g(s)ds - h(x) \int_a^b g(s)ds$$

$\exists x_0, x_1 \in [a, b] \ni F(x_0) \geq 0$ y $F(x_1) \leq 0$

por lo tanto, por el Teorema del valor medio, $\exists \tau \in [a, b] \ni F(\tau) = 0$, tal que

$$\int_a^b h(x)g(x) = h(\tau) \int_a^b g(x)dx$$

como se quería.

Lema 4

Sea $f \in C^2[a, b]$, una función continua, doblemente diferenciable, entonces, la aproximación al error de la regla trapezoidal

$$T = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

con $h=b-a$ se puede expresar como

$$T - \int_a^b f = \frac{h^3}{12} f''(\tau) \quad \forall \tau \in [a, b]$$

Demostración

Usando el residuo de Newton, el interpolante lineal $P = P_1(x)$ satisface

$$f(x) = P(x) - [x, a, b]f(t-a)(t-b)$$

donde la segunda diferencia dividida puede expresarse como

$$[t, a, b]f = \frac{f(\tau)}{2}$$

entonces, con una $\tau = \tau(x) \in [a, b]$ independiente de x , se tiene que

$$\int_a^b f = \int_a^b P(x)dx + \int_a^b [x, a, b] \underbrace{f(x-a)(x-b)}_{\leq 0} dx$$

$$T + \frac{f''(\tau)}{2} \int_a^b \underbrace{(x-a)(x-b)}_{= -\frac{(b-a)^2}{6}} dx$$

para alguna $\tau \in [a, b]$, por lo tanto,

$$T - \int_a^b f = \frac{h^3}{12} f''(\tau)$$

Lema 5 (Regla de Kepler)

$$S = \frac{b-a}{6} (f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b))$$

es exacta para polinomios $Q \in P_3$.

Para $f \in C^4([a, b])$, la aproximación del error de $h \equiv \frac{b-a}{2}$, se puede expresar como

$$S - \int_a^b f = \frac{f^{(4)}(\tau)}{90} h^5$$

con $\tau \in [a, b]$.

Demostración

Sea $Q \in P_3$, recordando la fórmula del residuo de Newton, la interpolación cuadrática

$P = P_2(Q)$, sobre los nodos $a, b, \frac{a+b}{2}$; cumple

$$Q(x) = P(x) + \underbrace{\gamma(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}_{=w_3(x)} Q$$

donde

$$\gamma = \frac{Q'''(x)}{6} \in \mathfrak{R}$$

es constante, entonces, para la integral

$$\int_a^b Q = \int_a^b P + \gamma \int_a^b w_3(x) dx = S$$

por lo que $\int_a^b w_k$ de la función básica de Newton se cancela para alguna k , por lo tanto, la regla de Kepler, es exacta para polinomios de grado 3.

En el caso de que $f \in C^4([a, b])$, existe la interpolación de Hermite

$$Q = P_3(f) \in P_3,$$

con respecto a los nodos

$$x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = \frac{a+b}{2}, x_3 = b$$

Para la descripción de la aproximación del error de Q usaremos el residuo de Newton.

$$f(x) = Q(x) + [x, a, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, b] f \underbrace{\left((x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x-b) \right)}_{= w_4(x) \neq 0}$$

La estimación del residuo sobre la integral y la aplicación del teorema del valor medio

$$\int_a^b f = S + \frac{f^{(4)}(\tau)}{4!} \underbrace{\int_a^b w_4(x) dx}_{= -\frac{4}{15}b^3}$$

que nos da de nuevo, el mismo resultado.

Como ya se vio en el ejemplo 1, de la suma trapezoidal, las fórmulas de cuadratura se pueden construir particionando el intervalo en n -subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, con $i=0, \dots, n$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Por lo tanto, recordando la aditividad de la integral

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f$$

Esto es

$$I(f) = \sum_{i=1}^n I_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)$$

es posiblemente la mejor aproximación de la integral, donde $I_{x_{i-1}}^{x_i}$ indica una fórmula de

cuadratura arbitraria sobre $[x_{i-1}, x_i]$.

En lo siguiente diremos que el error de aproximación de la suma trapezoidal se deriva del error de aproximación de la regla trapezoidal

Lema 6

Sea $h = \frac{b-a}{n}$, y x_i los nodos equidistantes $x_i = a + ih$, para $i=0, \dots, n$ y sea

$$T_i = \frac{h}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i))$$

la regla trapezoidal sobre $[x_{i-1}, x_i]$, con $i=0, \dots, n$, entonces para $f \in C^2([a,b])$, el error de aproximación de la suma trapezoidal

$$T(h) = \sum_{i=1}^n T_i - h \left(\frac{1}{2} f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) \right)$$

se puede expresar como

$$T(h) - \int_a^b f = \frac{(b-a)^2}{12} f''(\tau), \quad \tau \in [a,b]$$

Demostración

Por el lema 3, $\exists \tau_i \in [x_{i-1}, x_i]$, \exists

$$T_i - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \frac{h^3}{12} f''(\tau_i)$$

\therefore

$$T(h) - \int_a^b f = \sum_{i=1}^n \left(T_i - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \right) = \sum_{i=1}^n \frac{h^3}{12} f''(\tau_i) = \frac{(b-a)h^2}{12} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\tau_i)$$

ya que

$$\min_{x \in [a,b]} f''(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\tau_i) \leq \max_{x \in [a,b]} f''(x)$$

por el teorema del valor intermedio, existe $\tau \in [a,b]$, tal que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^n(\tau_i) = f^n(\tau)$$

entonces

$$T(h) - \int_a^b f = \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\tau)$$

como se pedía.

CUADRATURA DE GAUSS-CHRISTOFFEL

En la construcción de la fórmula de Newton-Cotes, iniciando con $n+1$ nodos x_i , determinaremos los pesos λ_i , de tal forma que la fórmula de cuadratura integre exactamente a polinomios hasta de grado n . ¿Podemos conseguirlo si colocamos los nodos a nuestra disposición?

La respuesta sería para el problema más general de integrales de peso

$$I(f) \equiv \int_a^b w(x) f(x) dx$$

que se definieron anteriormente, con la introducción de los polinomios ortogonales.

Sea w una función positiva de peso $w(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$, tal que la norma

$$\|P\| \equiv (P, P)^{1/2} = \left(\int_a^b w(x) P(x)^2 dx \right)^{1/2} < \infty$$

está definida y es finita para todo $P \in P_k$, $k \in \mathbb{N}$. El intervalo aquí puede ser infinito y esto sólo es importante a los momentos correspondientes

$$\mu_k \equiv \int_a^b x^k w(x) dx$$

que son limitados.

Por la definición de la condición absoluta, mediremos la perturbación δf de una forma natural respecto a la L^2 -norma de peso

$$\|f\|_1 = \int_a^b w(x)|f(x)|dx = I(|f|)$$

de esta forma, el resultado del lema 1, resulta valido también para las integrales de peso, sólo se cambia la interpretación de $I(f)$.

En la tabla 2, se enlistan las funciones más comunes de peso, así como los intervalos correspondientes.

$w(x)$	$[a, b]$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1, 1]$
e^{-x}	$[0, \infty)$
e^{-x^2}	$[-\infty, \infty]$
1	$[-1, 1]$

tabla 2

CONSTRUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE CUADRATURA

Nuestra meta es la construcción de fórmulas de cuadratura de la forma

$$I_n(f) \cong \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\tau_i)$$

cuya aproximación a la integral $I(f)$, es la mejor posible, es decir, para n dado, buscaremos los $n+1$ nodos

$$\tau_{0n}, \dots, \tau_{nn}$$

y los $n+1$ pesos

$$\lambda_{0n}, \dots, \lambda_{nn}$$

donde los polinomios de grado menor o igual a N se puedan integrar exactamente, es decir:

$$I_n(P) = I(P), \quad \forall P \in P_n$$

Si primero intentamos estimar, que el grado N pueda lograrse para un n dado, entonces, se nota que se tienen $2n-2$ parámetros (respectivamente $n+1$ nodos y pesos), en nuestra

disposición como $n+1$ coeficientes opuestos al polinomio de grado N . lo mejor que se puede esperar es, por lo tanto, que el polinomio sobre el grado $N \leq 2 + 1$, puede integrarse exactamente.

Como los nodos de integración entran en la fórmula de cuadratura en una forma no lineal. entonces no es muy simple calcular los grados de libertad, por lo que buscaremos que camino nos ayudara en la solución del problema.

Lema 7

Si I_n es exacta para todos los polinomios $P \in P_{2n+1}$, entonces los polinomios $\{P_j\}$, que están definidos por su raíz de representación original

$$P_{j+1}(x) = (x - \tau_0) \cdots (x - \tau_n) \in P_{n+1}$$

son ortogonales con respecto al producto escalar, que está inducido por w

$$(f, g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx$$

Demostración

Para $j < n+1$. se tiene que $P_{n+1} P_j \in P_{2n+1} \ni$

$$\begin{aligned} (P_j, P_{n+1}) &= \int_a^b w P_{n+1} P_j \\ &= 1(P_j, P_{n+1}) - \sum_{i=0}^n \lambda_{in} P_j(\tau_{in}) \underbrace{P_{n+1}(\tau_{in})}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto los nodos τ_i , que se buscan, tienen que ser raíces de los polinomios ortogonales por partes $\{P_j\}$, de grado $P_j = j$. Estos polinomios ortogonales no son desconocidos para nosotros. recordando que existe una y sólo una familia $\{P_j\} \ni P_j \in P_j$, con un coeficiente principal i.e.

$$P_j(x) = x^j \ni (P_k, P_j) = \delta_{kj} (P_k, P_k)$$

se tiene que las raíces de esos polinomios ortogonales son reales y están en $[a, b]$.

Construiremos por lo tanto y de una forma única, candidatos para la integración de los nodos τ_n , de la fórmula de cuadratura I_n , las raíces del polinomio ortogonal P_{n+1} .

Una vez que los nodos son determinados, no existe elección para los pesos, por lo que al menos los polinomios $P \in P_n$, hasta el grado n , se integran exactamente. Los pesos

$$\lambda_{i,n} = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_m(x) dx$$

tienen que ser elegidos con el polinomio de Lagrange

$$L_m(\tau_m) = \delta_{ij}$$

esto en principio sólo garantiza exactitud para polinomios de grado n , con lo que es más que suficiente.

Lema 8

Sean $\tau_{0n}, \dots, \tau_{nn}$, las raíces del $(n+1)$ -ésimo polinomio ortogonal P_{n+1} , entonces alguna fórmula de cuadratura

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(\tau_{in})$$

cumple que I_n es exacta en $P_n \Leftrightarrow I_n$ es exacta en P_{2n+1}

Demostración

Suponiendo que

$$I_n \text{ es exacta en } P_n \text{ y } P_{2n+1} \Rightarrow \exists Q, R \in P_n \ni P = QP_{n+1} + R$$

y como

$$P_n \perp P_{n+1}$$

se tiene que

$$\int_a^b wP = \underbrace{\int_a^b wQP_{n+1}}_{=0} + \int_a^b wR = \int_a^b wR = I_n(R)$$

esto es

$$I_n(R) = \sum_{i=0}^n \lambda_n R(\tau_n) = \sum_{i=0}^n \lambda_n \left(Q(\tau_n) \underbrace{P_{n+1}(\tau_n)}_{=0} + R(\tau_n) \right) = I_n(R)$$

\therefore

$I \in P_{2n-1}$ es exacta

Resumiremos nuestro resultado como sigue

Teorema 1

Si existen únicamente nodos τ_0, \dots, τ_n y pesos $\lambda_0, \dots, \lambda_n$, determinados, tales que la fórmula de cuadratura

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^n \lambda_n f(\tau_n)$$

integra exactamente todos los polinomios de grado menores o iguales a $2n+1$, esto es

$$I_n(P) = \int_a^b w P, \text{ para } P \in P_{2n+1}$$

los nodos τ_n , son las raíces del $(n+1)$ -ésimo polinomio ortogonal P_{n+1} , con respecto a la función de peso w y los pesos

$$\lambda_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_n(x) dx$$

Con los polinomios de Lagrange

$$L_n = (\tau_j) = \delta_{ij}$$

Además los pesos son todos positivos $I\lambda_n > 0 \Rightarrow I_n$ es una forma lineal positiva y satisface la ecuación

$$\lambda_n = \frac{1}{P'_{n+1}(\tau_n) P_n(\tau_n)} (P_n, P_n) \quad (1)$$

..

Demostración

Sólo tenemos que verificar la positividad de los pesos y su representación en 1.

Suponiendo que $Q \in P_{2n-1}$, es un polinomio tal que τ_{kn} es el único nodo que no desaparece es decir, $Q(\tau_{kn}) = 0, i \neq k$ y $Q'(\tau_{kn}) \neq 0$, entonces, es obvio que

$$\int_a^b w Q = \lambda_{kn} Q(\tau_{kn}) \Rightarrow \lambda_{kn} = \frac{1}{Q(\tau_{kn})} \int_a^b w Q$$

\therefore

$$Q(x) = \left(\frac{P_{n-1}(x)}{x - \tau_{kn}} \right)$$

entonces $Q \in P_{2n}$, cumple con la propiedad donde $Q(\tau_{kn}) = P_{n+1}'(\tau_{kn})^2$, por lo que los pesos satisfacen

$$\lambda_{kn} = \frac{1}{Q(\tau_{kn})} \int_a^b w Q = \int_a^b w \left(\frac{P_{n+1}(x)}{P_{n+1}'(\tau_{kn}) P_n(x - \tau_{kn})} \right)^2 dx > 0$$

es decir, todos los pesos son positivos.

Para verificar la fórmula (1), se tiene que

$$Q(x) = \left(\frac{P_{n-1}(x)}{x - \tau_{kn}} \right) P_n(x)$$

De nuevo $Q \in P_{2n}$, cumple con las propiedades requeridas, y se sigue que

$$\lambda_{kn} = \left(\frac{1}{P_{n+1}'(\tau_{kn}) P(\tau_{kn})} \right) \int_a^b w(x) \left(\frac{P_{n+1}(x)}{(x - \tau_{kn})} \right) P_n(x) dx$$

Sea el polinomio

$$\frac{P_{n+1}(x)}{(x - \tau_{kn})}$$

que tiene de nuevo, de coeficiente principal 1, entonces,

$$\frac{P_{n+1}(x)}{(x - \tau_{kn})} = P_n(x) + Q_{n-1}(x) \ni Q_{n-1} \in P_{n-1}$$

Ya que $P_n \perp P_{n-1}$, se sigue que

$$\lambda_{kn} = \left(\frac{1}{P_{n+1}(\tau_{kn})P(\tau_{kn})} \right) (P_n, P_n)$$

por lo tanto, las fórmulas de cuadratura I, son las fórmulas de Gauss-Christoffell para las funciones de peso w . Para el caso de las fórmulas de Newton-Cotes, es fácil deducir el error de aproximación de exactitud para un cierto grado del polinomio

Teorema 2

Para alguna función $f \in C^{2n+2}$, el error de aproximación de la cuadratura de Gauss-Christoffel se puede expresar de la forma

$$\int_a^b w f - I_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\tau)}{(2n+2)!} (P_{n+1}, P_{n+1}), \tau \in [a, b]$$

Demostración

Utilizando el residuo de Newton para la interpolación de Hermite, $P \in P_{2n+1}$, para los $2n+2$ nodos $\tau_{0n}, \tau_{0n}, \dots, \tau_{nn}, \tau_{nn}$

$$f(x) = P(x) + [x, \tau_{0n}, \tau_{0n}, \dots, \tau_{nn}, \tau_{nn}] f \cdot \underbrace{(x - \tau_{0n})^2 \cdots (x - \tau_{nn})^2}_{= \rho_{n+1}(x)^2 \geq 0}$$

como I integra exactamente la interpolación P, se sigue que

$$\int_a^b w f = \int_a^b w P + \frac{f^{(2n+2)}(\tau)}{(2n+2)!} \int_a^b w P^2$$

$$\sum_{i=0}^n \lambda_{in} \underbrace{P(\tau_{in})}_{= f(\tau_{in})} P(\tau_{in}) + \frac{f^{(2n+2)}(\tau)}{(2n+2)!} (P_{n+1}, P_{n+1})$$

CUADRATURA DE GAUSS-CHEBYSEV

Sea la función de peso

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \in [-1,1]$$

entonces el polinomio de Chebishev T_k , con el que ya estamos familiarizados, es ortogonal porque

$$\int_0^1 \frac{T_k(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi & \text{si } k = j = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } k = j > 0 \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

son los polinomios ortogonales con coeficiente principal, entonces

$$P_n(x) = 2^{1-n} T_n(x)$$

las raíces de P_{n-1} (respectivamente T_{n-1}), son los nodos de Chebishev

$$\tau_m = \cos \frac{2i+1}{2n+1} \pi, i = 0, \dots, n$$

usando 1, una forma fácil de calcular los pesos para $n > 0$ sería

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \frac{1}{2^{-n} T_{n+1}(\tau_m) 2^{1-n} T_n(\tau_m)} T_{n+1} \int_{-1}^1 \frac{2^{2-2n} T_n^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{2^{n/2}}{T_{n-1}(\tau_m) T_n(\tau_m)} \\ &= \frac{\pi}{n+1} \end{aligned}$$

entonces, la cuadratura de Gauss-Chebyshev, en su forma simple es

$$I_n(f) = \frac{\pi}{n+1} \sum_{i=1}^n f(\tau_i) \text{ con } \tau_i = \cos \frac{2i-1}{2n+2} \pi$$

Por el teorema 2 y porque $(T_{n+1}, T_n) = \frac{\pi}{2}$, el error de aproximación satisface:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx - I_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n+1)!} f^{(2n+2)}(\tau), \tau \in [-1, 1]$$

En la tabla 3, se enlistan algunos nombres de clases de polinomios ortogonales, así como sus funciones de peso asociados.

$w(x)$	$[a, b]$	CLASES DE POLINOMIOS ORTOGONALES
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1, 1]$	Chebyshev T_n
e^{-x}	$[0, \infty]$	Laguerre L_n
e^{-x^2}	$[-\infty, \infty]$	Hermite H_n
1	$[-1, 1]$	Legendre P_n

tabla 3

Son de particular interés las cuadraturas de Gauss-Hermite y Gauss-Legendre, que permiten la aproximación de integrales sobre intervalos infinitos (con solución exacta para los polinomios $P \in P_{2n+1}$).

**CAPÍTULO
III**

INTEGRACIÓN NÚMERICA

Al lector tal vez le sorprenda la idea de realizar integraciones por medio de computadora, y es seguro que ya se han escrito programas de este tipo, los cuales pueden ser una ayuda para estudiantes en exámenes (siempre y cuando puedan utilizar su computadora en el aula de aplicación), pero es de poco uso para el matemático formal. Lo anterior se puede ver con el siguiente ejemplo:

La integral

$$\int_1^b e^{-x^2} dx$$

no se puede resolver por no existir función matemática elemental cuya derivada sea

$$e^{-x^2}$$

Por lo tanto, este es un tipo de problema de integración donde se emplea la integración numérica.

Cuando se realiza integración por computadora es necesario restringir el trabajo a integrales definidas de la forma

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Dados los valores de a y b y la definición de $f(x)$, I es tan sólo un número, por lo tanto el objetivo será, calcular este número con la exactitud requerida en forma particular.

El valor de I puede interpretarse con más facilidad como un área y la integración numérica, a menudo se le conoce como Cuadratura del área, lo que significa obtener el valor de la misma.

Al trazar la gráfica de $f(x)$ en una hoja de papel milimétrico, es posible obtener una estimación burda de I , al contar los cuadrados que forman su área, tomando en cuenta los cuadrados parciales, siendo esta la forma más elemental de integración numérica.

Es importante que desde el principio se tome en cuenta que existe una dificultad intrínseca en lo que se quiere realizar, ya que la integración está definida desde el punto de vista matemático, como un proceso de obtención de límite y se necesitarán un número infinito de operaciones aritméticas para resolver con exactitud una integral.

Aunque con una computadora es posible efectuar un gran número de operaciones en poco tiempo, el número de dichas operaciones siempre es lento, por lo tanto, en el mejor de los

casos. es de esperar una aproximación al valor de la integral.

Una primera etapa para evaluar en forma numérica la integral

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

consiste en dividir el área representada por I en un cierto número de bandas como se muestra en la siguiente figura

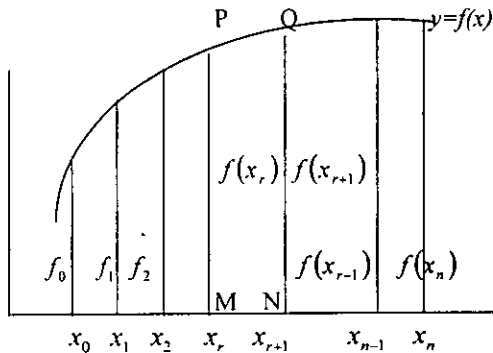


fig. 1

Por lo regular, las bandas son del mismo ancho, de manera que si tomamos n bandas. el ancho de la banda será de

$$h = \frac{b-a}{n}$$

ahora, por conveniencia, escribiremos

$$x_r = a + rh$$

$$f_r = f(x_r)$$

De lo anterior. consideremos primero la banda central que va de x_r a x_{r+1} . y que h sea suficientemente pequeña. por lo que una aproximación al área de esta banda, está dada por el área del trapecio $MNPQ$. cuyo arco se reemplaza por una recta y el área del trapecio es la longitud promedio de los dos lados paralelos multiplicados por la distancia entre ellos. eso implica que el área será igual a

$$\frac{1}{2}h(f_r + f_{r+1})$$

por lo tanto, el área total bajo la curva puede aproximarse al obtener la suma de las áreas de n trapecios, es decir,

$$I \equiv \frac{1}{2}h(f_0 + f_1) + \frac{1}{2}h(f_1 + f_2) + \dots + \frac{1}{2}h(f_n + f_{n+1})$$

$$\Rightarrow$$

$$I \equiv h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right)$$

Esta última ecuación se conoce como la Regla del Trapecio y es de exactitud lineal, es decir, el resultado sería correcto si la función $f(x)$ fuese lineal.

Uno de los problemas más complicados en la integración numérica, es decidir que tan grande debe ser n , a fin de obtener la exactitud deseada o necesaria.

ERROR EN LA REGLA DEL TRAPECIO

Al utilizar la Serie de Taylor tenemos que

$$f(x_r + b) = a_0 + a_1b + a_2b^2 + a_3b^3 + \dots$$

\ni

$$a_m = \frac{1}{m!}f^{(m)}(x_r) = \frac{1}{m!}f_r^{(m)}$$

\Rightarrow

$$\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x)dx = \int_0^h f(x_r + b)db$$

$$= \left[Da_0b + \frac{a_1b^2}{2} + \frac{a_2b^3}{3} + \dots \right]_0^h$$

$$= a_0h + \frac{a_1h^2}{2} + \frac{a_2h^3}{3} + \dots \quad \text{i)}$$

y con la Regla del Trapecio, la integral

$$\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x) dx$$

se aproxima por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h(f_r + f_{r+1}) &= \frac{1}{2} h[a_0 + (a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots)] \\ &= a_0 h + \frac{a_1 h^2}{2} + \frac{a_2 h^3}{2} + \dots \quad \text{ii)} \end{aligned}$$

Comparando las ecuaciones i) y ii), sin tomar en cuenta aquellos términos que tengan h^4 o potencias mayores de h , entonces, se ve que el error en la aproximación es cercano a

$$-\frac{1}{6} a_2 h^3 = \frac{h^3}{12} f_r''$$

siendo este el error en una banda, por lo tanto, el error total en n bandas es aproximadamente

$$-\frac{1}{12} n h^3 f''$$

donde f'' es un valor promedio de f_r'' , entonces

$$-\frac{1}{12} h^2 (b-a) f'' \quad \text{iii)}$$

Aquí es importante señalar que el error es de orden h^2 , o de orden $1/n^2$

De la fórmula iii), resulta claro que el error tiende a cero conforme n tiende a infinito. En la práctica, el factor debe limitarse a un valor finito de n .

REGLA DE SIMPSON

En vez de considerar una sola banda de x_r a x_{r+1} , se consideran dos bandas juntas, esto es, de x_{r-1} a x_{r+1} , entonces, análogamente al caso anterior, utilizaremos la Serie de Taylor

$$f(x_r + b) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3 + \dots$$

tal que

$$a_m = \frac{1}{m!} f_r^{(m)}$$

⇒

$$\begin{aligned} \int_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} f(x) dx &= \int_h f(x_r + b) db \\ &= 2a_0 h + \frac{2a_2 h^3}{3} + \frac{2}{5} a_4 h^5 + \dots \end{aligned}$$

∃

$$a_0 = f_r = f(x_r)$$

y

$$\begin{aligned} f_{r-1} + f_{r+1} &= a_0 - a_1 h + a_2 h^2 - a_3 h^3 + a_4 h^4 \\ &\quad + a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + a_4 h^4 \\ &= 2a_0 + 2a_2 h^2 + 2a_4 h^4 + \dots \end{aligned}$$

y puede verse con facilidad que

$$\frac{1}{3} h(f_{r-1} + f_{r+1}) + \frac{1}{3} h f_r = 2a_0 h + \frac{2}{3} a_2 h^3 + \frac{2}{5} a_4 h^5$$

∴

$$\int_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} f(x) dx \cong \frac{2}{3} h(f_{r-1} + f_r + f_{r+1})$$

con un error aproximado de

$$\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) a_4 h^5 = -\frac{4}{15} a_4 h^5 = -\frac{1}{90} h^5 f_r^{(4)}$$

Si el intervalo (a, b) se hubiera dividido en n ; donde n sea par, se podría escribir como

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\cong \frac{1}{3} h \{ (f_0 + f_1 + f_2) + (f_2 + 4f_3 + f_4) + \dots + \\ &\quad + (f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \} \end{aligned}$$

que no es otra cosa que la expresión de la Regla de Simpson, siendo el error de aproximación

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{90} \frac{n}{2} h^5 f^{(iv)} &= -\frac{1}{180} (b-a) h^4 f^{(iv)} \\
 &= -\frac{1}{180} \frac{(b-a)^5}{n^4} f^{(iv)}
 \end{aligned}$$

Otra fórmula de integración es la siguiente

Si se toman 3 bandas a la vez y se considera a n como múltiplo de 3, se tiene la regla de los 3/8, esto es

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &\cong \frac{3}{8} h \{ (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) + (f_3 + 3f_4 + 3f_5 + f_6) + \dots + \\
 &\quad + (f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n) \}
 \end{aligned}$$

que tiene un error de

$$-\frac{1}{80} (b-a) h^4 f^{(iv)}$$

FÓRMULAS DE CUADRATURA

Ahora podemos verlo de la siguiente manera

Sea

$$\begin{aligned}
 \int_a^{a+h} f(x) dx &= h \{ w_0 f(a) + w_1 f(a+h) \} \\
 \ni \\
 x_1 &= a+h
 \end{aligned}$$

Aquí se nos presenta el siguiente problema ¿quienes son w_0 y w_1 ?

Sea

$$h = b - a$$

$$x = a + hu \Rightarrow dx = hdu$$

\Rightarrow

$$\int_0^1 f(a + hu) du = w_0 f(0) + w_1 f(1)$$

entonces se tiene lo siguiente

$$\text{si } f(x) \text{ es lineal} \Rightarrow f(x) = c + du$$

\Rightarrow

$$a) \text{ si } f(x) \equiv 1$$

$$\int_0^1 du = w_0 = 1 = w_0 + w_1$$

$$b) \text{ si } f(x) \equiv u$$

$$\int_0^1 du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} = w_1$$

\Rightarrow

$$w_0 = w_1 = \frac{1}{2}$$

\therefore

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = \int_a^{a+h} (\text{lineal}) dx = h \left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(a+h) \right]$$

$$= \frac{h}{2} [f(a) + f(a+h)]$$

el resultado anterior es la fórmula del Trapecio.

Ahora si tenemos

$$\int_a^{a+2h} f(x) dx = \int_a^{a+h} f(x) dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x) dx = h \{ w_0 f(a) + w_1 f(a+h) + w_2 f(a+2h) \}$$

\Rightarrow

$$x = a + hu \Rightarrow dx = hdu$$

..

entonces

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \int_0^2 (\text{cuadrática})dx = w_0 f(0) + w_1 f(1) + w_2 f(2)$$

\Rightarrow

a) si $f(x) \equiv 1$

$$\int_0^2 du = u \Big|_0^2 = 2 = w_0 + w_1 + w_2$$

b) si $f(x) \equiv u$

$$\int_0^2 u du = \left. \frac{u^2}{2} \right|_0^2 = 2 = w_1 + 2w_2$$

c) si $f(x) \equiv u^2$

$$\int_0^2 u^2 du = \left. \frac{u^3}{3} \right|_0^2 = \frac{8}{3} = w_1 + 4w_2$$

entonces

$$w_1 = \frac{4}{3}$$

$$w_0 = w_2 = \frac{1}{3}$$

\therefore

$$\int_a^{a+h} \text{cuadrática} = \frac{h}{3} [f(0) + 4f(1) + f(2)]$$

y se tiene que es exacta para cúbicas

d) si $f(x) = u^3$

..

$$\int_0^2 u^3 du = \left. \frac{u^4}{4} \right|_0^2 = 4 = w_1 + 8w_2$$

e.d.

$$4 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$$

Podemos verlo también de otra forma

Dados los siguientes puntos

X	Y
-h	y ₀
0	y ₁
H	y ₂

se tiene que

$$\int_{-h}^h f(x) dx = \int_{-h}^h (\text{cuadrática}) dx$$

$$\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \left. \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right|_{-h}^h$$

$$= \frac{2}{3} ah^3 + 2ch$$

Aquí nos preguntamos ¿quienes son a y c?

$$y_0 = f(-h) = a(-h)^2 + b(-h) + c$$

⇒

$$y_0 = ah^2 - bh + c$$

$$y_1 = f(0) = c$$

$$y_2 = f(h) = ah^2 + bh + c$$

por lo tanto

$$b = \frac{y_2 - y_0}{2h} \quad y \quad a = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} (\text{cuadrática}) dx \\ &= \frac{2}{3} ah^3 + 2ch \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2} \right] h^3 + 2(y_1)h \\ &= \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2] \end{aligned}$$

Análogamente

$$\int_{x_0}^{x_0+3h} f(x) dx \cong \frac{3}{8} h [y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3]$$

En términos generales, y como se vio en el capítulo de Interpolación, se tiene que

$$f(x) = y_0 + \Delta y_0 \binom{k}{1} + \Delta^2 y_0 \binom{k}{2} + \Delta^3 y_0 \binom{k}{3} + \dots$$

Sea

$$k = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow dx = hdk$$

por lo tanto

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx = \int_0^1 \left[y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \Delta^3 y_0 + \dots \right] h dx$$

$$\begin{aligned} &\equiv h \left[ky_0 + \frac{k^2}{2} \Delta y_0 + \left[\frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{4} \right] \Delta^2 y_0 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{k^4}{24} - \frac{k^3}{6} + \frac{k^2}{6} \right] \Delta^3 y_0 + \dots \right]_0 \\ &= h \left[ny_0 + \frac{n^2}{2} \Delta y_0 + \left[\frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{4} \right] \Delta^2 y_0 + \left[\frac{n^4}{24} - \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{6} \right] \Delta^3 y_0 + \dots \right] \end{aligned}$$

entonces, se tiene que

a) para $n=1$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &= h \left[ny_0 + \frac{n^2}{2} \Delta y_0 \right] = h \left[y_0 + \frac{1}{2} (y_1 - y_0) \right] \\ &= \frac{h}{2} [y_0 + y_1] \end{aligned}$$

que es la fórmula del Trapecio

b) Si $n=2$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= h \left[ny_0 + \frac{n^2}{2} \Delta y_0 + \left[\frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{4} \right] \Delta^2 y_0 \right] \\ &= h \left[2y_0 + 2\Delta y_0 + \left[\frac{8}{6} - 1 \right] \Delta^2 y_0 \right] \\ &= h \left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3} (y_2 - 2y_1 + y_0) \right] \\ &= \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \end{aligned}$$

el resultado anterior nos da la fórmula de Simpson

c) Por último veamos cuando $n=3$

$$\begin{aligned}\int_0^n f(x)dx &= h \left[ny_0 + \frac{n^2}{2} \Delta y_0 + \left[\frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{4} \right] \Delta^2 y_0 + \left[\frac{n^4}{24} - \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{4} \right] \Delta^3 y_0 \right] \\ &= h \left[3y_0 + \frac{n}{2} \Delta y_0 + \frac{n}{4} \Delta^2 y_0 + \frac{3}{8} \Delta^3 y_0 \right] \\ &= h \left[3y_0 + \frac{9}{2} (y_1 - y_0) + \frac{9}{4} (y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{3}{8} (y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) \right] \\ &= \frac{3}{8} h (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)\end{aligned}$$

Este resultado nos da la regla de Simpson de 3/8.

Hasta aquí hemos visto como combinar los métodos de Interpolación con la Integración Numérica, para obtener las fórmulas de Cuadratura, que sirven para el cálculo del área bajo la curva.

CAPÍTULO
IV

INTERPOLACIÓN

Dada una serie de puntos en el plano, deseamos conocer una función que pase por estos y sea "ideal", para lo cual enunciaremos el teorema de Weierstrass (de Aproximación)

Teorema.- Sea f una función que está definida y es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces dado $\varepsilon > 0$, \exists un polinomio P tal que

$$f(x) - P(x) < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Pero, para nuestro objetivo ¿quién es $P(x)$?

En este caso, sabemos que los polinomios son funciones reales de variable real y son de la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad n > 0$$

a_0, \dots, a_n variables reales.

Además, son una herramienta muy útil en la aproximación de funciones, por su facilidad para poder determinar sus derivadas y/o integrales, ya que su resultado es otro polinomio. Una forma de verlo sería como sigue:

Sea

$$f(x) = P_n(x) + \text{error},$$

entonces

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$$

$\forall x \in B_\delta(x_0), \exists x_0$ es fijo.

Esta expresión no es otra cosa que el teorema de Taylor, pero se presentan problemas en

sólo punto. Podemos plantear otra forma de ver nuestro problema.

Dados $n+1$ puntos, entonces

$$P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n$$

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n$$

⋮

$$P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n$$

cuya expresión es igual a

$$\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_n(x_0) \\ P_n(x_1) \\ \vdots \\ P_n(x_n) \end{bmatrix}$$

la cual se puede expresar como una forma matricial $Ax=b$ donde A es conocida como la matriz de Vandermonde, pero para nuestros intereses este método tampoco nos es útil ya que es demasiado susceptible de errores debido a que su condicional es “demasiado grande”.

Derivado de lo anterior, podemos ver ahora un método que nos ayudará a resolver nuestro problema inicial, para lo que será necesario utilizar el teorema de Lagrange y para comprender esto veamos un ejemplo.

Dados los puntos

$$P_0(0,-5), P_1(1,1), P_2(2,9), P_3(3,25), P_4(4,55), P_5(5,105)$$

podemos construir la tabla siguiente

x_i	y_i
0	-5
1	1
2	9
3	25
4	55
5	105

tab.1

Aquí podemos determinar lo siguiente:

$$x_{i-1} = x_0 + (i - 1)h$$

$$x_i = x_0 + ih$$

$$x_{i+1} = x_0 + (i + 1)h$$

donde h es el incremento de paso igualmente espaciado, por lo que $h = x_i - x_{i-1}$, y como en nuestro ejemplo estamos dando la misma diferencia, entonces $h=1$ y para los

$$y_{i+1}, y_i, y_{i-1}$$

sus diferencias serían las siguientes

$$y_{i+1} - y_i$$

$$y_i - y_{i-1}$$

entonces

$$\Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1}$$

De lo anterior podemos construir la siguiente tabla:

x	y	Δy	Δy^2	Δy^3	Δy^4
0	5				
		1 - (-5) = 6			
1	1		8 - 6 = 2		
		9 - 1 = 8		8 - 2 = 6	
2	9		16 - 8 = 8		6 - 6 = 0
		25 - 9 = 16		14 - 8 = 6	
3	25		30 - 16 = 14		6 - 6 = 0
		55 - 25 = 30		20 - 14 = 6	
4	55		50 - 30 = 20		
		105 - 55 = 50			
5	105				

tab.2

y ahora determinamos el polinomio que necesitamos y es de la siguiente forma

$$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

y si utilizamos diferencias divididas, de acuerdo a la tabla anterior, tenemos

x	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Δy	Δy^2	Δy^3	Δy^4
0	d	$a+b+c$			
1	$a+b+c+d$	$7a+3b+c$	$6a+2b$	$6a$	
2	$8a+4b+2c+d$	$19a+5b+c$	$12a+2b$	$6a$	0
3	$27a+9b+3c+d$	$37a+7b+c$	$18a+2b$	$6a$	0
4	$64a+16b+4c+d$	$61a+9b+c$	$24a+2b$		
5	$125a+25b+5c+d$				

tab.3

igualando los coeficientes de las tabla 2 y 3

	tab.1	tab.2
y	-5	d
Δy	6	$a+b+c$
$\Delta^2 y$	2	$6a+2b$
$\Delta^3 y$	6	$6a$
$\Delta^4 y$	0	0

es decir

$$\begin{aligned}
 d &= -5 \\
 a+b+c &= 6 \\
 6a+2b &= 2 \\
 6a &= 6
 \end{aligned}$$

entonces, se tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 a &= 1 \\
 b &= -2 \\
 c &= 7 \\
 d &= -5
 \end{aligned}$$

con lo que el polinomio que se buscaba queda de la forma

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\
 &= x^3 - 2x^2 + 7x - 5
 \end{aligned}$$

evaluando en la tabla 2

x_i	$y_i = P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$
$x_0 = 0$	$0 - 2(0) + 7(0) - 5 = -5$
$x_1 = 1$	$1 - 2(1) + 7(1) - 5 = 1$
$x_2 = 2$	$8 - 2(4) + 7(2) - 5 = 9$
$x_3 = 3$	$27 - 2(9) + 7(3) - 5 = 25$
$x_4 = 4$	$64 - 2(16) + 7(4) - 5 = 55$
$x_5 = 5$	$125 - 2(25) + 7(5) = 105$

Con esto vemos que el método anterior es factible para la aproximación.

Ahora veamos que pasa para un punto cualquiera.

Sea

$$x_k = 1.5 \text{ entonces}$$

$$x_k = x_0 + kh$$

\Rightarrow

$$k = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{1.5 - 1}{1} = 0.5$$

tenemos ahora que, el valor más próximo a x_k es $x_0 = 1$, y de la tabla 2 se tiene que

$$\begin{aligned}
 y_0 &= 1 \\
 \Delta y_0 &= 8 \\
 \Delta^2 y_0 &= 8 \\
 \Delta^3 y_0 &= 6
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 y_k &= y_0 + \binom{k}{1} \Delta y_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{k}{3} \Delta^3 y_0 \\
 &= 1 + \binom{0.5}{1} 8 + \binom{0.5}{2} 8 + \binom{0.5}{3} 6 \\
 &= 1 + (0.5)8 + \frac{(0.5)(0.5-1)}{2!} 8 + \frac{(0.5)(0.5-1)(0.5-2)}{3!} 6 \\
 &= 1 + 4 - 1 + 0.375 \\
 &= 4.375
 \end{aligned}$$

Aquí nos preguntaremos ¿qué pasa si se evalúa $x=1.5$ en $P_3(x)$? Tenemos que

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$$

entonces

$$\begin{aligned}
 P_3(1.5) &= (1.5)^3 - 2(1.5)^2 + 7(1.5) - 5 \\
 &= \binom{3}{2} - 2\binom{3}{2} + 7\binom{3}{2} - 5 \\
 &= \binom{27}{8} - 2\binom{9}{4} + \binom{21}{2} - \frac{10}{2} \\
 &= \binom{27}{8} - \binom{18}{4} + \binom{11}{2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{27}{8} - \frac{36}{8} + \frac{44}{8}$$

$$= \frac{35}{8}$$

$$= 4.375$$

Observamos que por las dos formas se llega al mismo resultado, por lo que el ejemplo queda linealizado.

Aquí podemos realizar la siguiente comparación:

i)

Puntos		Diferencia de las y_i	Resultado
x_i	y_i		
x_{i+1}	y_{i+1}	$y_{i+1} - y_i$	
x_{i+2}	y_{i+2}	$y_{i+2} - y_{i+1}$	$(y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$

ii)

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_i = y_{i+2} - y_i &\Rightarrow \Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) \\ &= \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) \\ &= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \end{aligned}$$

Nótese que el resultado de i) y ii) es el mismo.

Resumiendo lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i \\ \Delta^2 y_i &= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \\ \Delta^3 y_i &= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i \\ \Delta^4 y_i &= y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} + y_i \end{aligned} \right\} \cong \begin{cases} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & 1 & -3 & 3 & -1 \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{cases}$$

Podemos decir que la anterior es una estructura semejante a la del triángulo de Pascal, entonces se tendrá que las diferencias de las y , serán

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_0 &= y_1 - y_0 \\ \Delta y_1 &= y_2 - y_1 \\ \Delta y_2 &= y_3 - y_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_0 + \Delta y_0 \\ y_2 = y_1 + \Delta y_1 \\ y_3 = y_2 + \Delta y_2 \end{cases}$$

por lo que

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 \Rightarrow \Delta y_1 = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$

por ser lineal.

Resumiendo ;

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \\ y_2 &= y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \\ y_3 &= y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = (1 + \Delta)y_0 \\ y_2 = (1 + \Delta)^2 y_0 \\ y_3 = (1 + \Delta)^3 y_0 \\ \vdots \\ y_k = (1 + \Delta)^k y_0 \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 y_k &= y(y_k) = (1 + \Delta)^k y_0 \\
 &= y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \\
 &= y_0 + \binom{k}{1} \Delta y_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{k}{3} \Delta^3 y_0 + \dots + \binom{k}{k} \Delta^k y_0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos afirmar que un polinomio de grado k se puede utilizar para interpolar a puntos uniformes e igualmente espaciados.

Otro ejemplo sería el siguiente:

Quiero calcular un punto más abajo de mi tabla, esto es, si quiero encontrar un valor entre 4 y 5, diríamos que se complica en virtud de que no hay valores para poderla calcular, pero ya dijimos que este método es para cualquier punto, entonces, lo que se puede hacer, es tomar los puntos de abajo hacia arriba de la tabla o en todo caso invertirla, quedando como sigue:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
5	105	-50			
4	55	-30	20	-6	
3	25	-16	14	-6	0
2	9	-8	8	-6	0
1	1	-6	2		
0	-5				

En esta tabla nos damos cuenta que al invertirse las columnas, los incrementos impares son negativos y de acuerdo al razonamiento anterior se tiene lo siguiente:

Encontrar los coeficientes para el polinomio

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

realizando las siguientes comparaciones

	tab. 3	tab. 2
y	105	$125a+25b+5c+d$
Δy	-50	$-61a-9b-c$
$\Delta^2 y$	20	$24a+2b$
$\Delta^3 y$	-6	$-6a$
$\Delta^4 y$	0	0

entonces

$$\left. \begin{array}{l} -6 = -6a \\ 20 = 24a + 2b \\ -50 = -61a - 9b - c \\ 105 = 125a + 25b + 5c + d \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 7 \\ d = -5 \end{cases}$$

por lo que el polinomio que se busca es

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$$

que es el mismo polinomio que se encontró en el ejemplo anterior, con lo que se demuestra que el método es para todo punto de nuestra tabla.

De lo anterior se puede afirmar que

$$y(x) = y_0 + \binom{k}{1} \Delta y_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{k}{3} \Delta^3 y_0 + \dots + \binom{k}{k} \Delta^k y_0 = f(x) = P_k(x)$$

\therefore

$$y_k = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 + \dots + a_j k^j$$

Retomando nuestro problema inicial, con la condición de que ahora los puntos no sean igualmente espaciados, nos planteamos lo siguiente: ¿Quién es el polinomio $P_n(x) \ni f(x) = P_n(x)$?

a) Para todo $k=0$ se tiene el caso lineal

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, se sabe que por dos puntos distintos pasa una y sólo una recta,

entonces, se tiene lo siguiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = y_0 + m(x - x_0)$$

$$= y_0 + \frac{(y_1 - y_0)(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

\therefore

$$y = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

por lo tanto $y(x)$ es una combinación lineal de polinomios de grado 1, el cual se puede definir como

$$P_1(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1$$

$$\ni$$

$$L_j(x) = P_j(x)$$

b) Para $k=2$, se tiene el caso cuadrático, para el cual se toman tres puntos

$$P_2(x_0) = y_0; P_2(x_1) = y_1, P_2(x_2) = y_2$$

entonces

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

es decir, $y(x)$ es una combinación lineal de grado 2 y se expresa como

$$P_2(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$$

donde $L_j(x)$ es un polinomio cuadrático y sabemos que la suma de polinomios cuadráticos es cuadrática.

c) Para $k=n$, el caso general, se consideran $(n+1)$ puntos

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

Por lo tanto

$$L_{ni}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_n)}$$

para cada punto (x_i, y_i) , entonces

$$P_n(x) = L_{n,0}(x)y_0 + L_{n,1}(x)y_1 + \dots + L_{n,n}(x)y_n$$

que es una combinación de polinomios de grado n y la suma de polinomios de grado n , es un polinomio de grado n .

Por lo tanto tenemos que

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x)y_i$$

el cual se puede expresar como

$$y = P_n(x) = \sum_{i=0}^n \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \right] y_i$$

que es el polinomio clásico de Lagrange.

Hasta aquí hemos visto algunos métodos de interpolación básicos, dejando para más adelante el análisis del Spline Cúbico, herramienta clave para el presente trabajo.

CAPÍTULO
V

ESPACIOS VECTORIALES SPLINE

En este capítulo analizaremos algunos espacios de funciones polinomiales, por pedazos, denominados “Espacios Vectoriales Splines”, con la finalidad de ver la gran utilidad en la teoría de aproximación e interpolación.

ESPACIOS LINEALES.

Sea P_n una partición arbitraria en $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $\exists a = x_1, \dots, x_n = b$, donde $I_i = [x_i, x_{i+1}]$,

y sea $s(x)$ una función dada, tal que sea continua por pedazos de polinomio de grado menor o igual a uno en cada intervalo, o sea,

$$S_{1,0}(P_n(x)) = \{s: I \rightarrow \mathbb{R} \exists s \in C^0[I], s|_{x_i} = P_i, \text{ polinomio de grado } \leq 1, i = 1, \dots, n-1\} \quad (1)$$

la definición anterior, y que utilizaremos para cada uno de los espacios subsecuentes, nos indica que estos son espacios spline lineales que dependen de la partición y lo podemos ver en la siguiente gráfica:

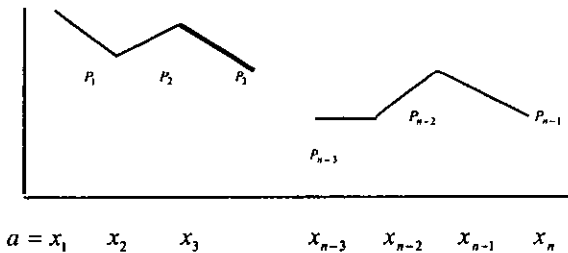


Fig. 1

Para demostrar que los espacios spline son espacios vectoriales, se emplean razonamientos análogos a los que se siguen para demostrar que el espacio de funciones continuas es un espacio vectorial, para lo cual demostraremos la ecuación 1.

Si s, x_i es de la forma $a_i x + b_i$, con s continua en x_2, \dots, x_{n-1} , entonces

$$\begin{aligned} a_i x_{i+1} + b_i &= a_{i+1} x_{i+1} + b_{i+1} \\ a_i x_{i+1} + b_i - a_{i+1} x_{i+1} - b_{i+1} &= 0 \end{aligned}$$

Este es un sistema de ecuaciones que puede expresarse en forma matricial $Ax=0$, donde

$$A = \begin{bmatrix} x_2 & 1 & -x_2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_n & -1 \end{bmatrix}$$

$$x' = [a_1 \quad b_1 \quad a_2 \quad b_2 \quad \cdots \quad a_{n-1} \quad b_{n-1} \quad a_n \quad b_n]$$

$$\Rightarrow s \in S_{1,0} \Leftrightarrow s(x)x_i = P_i \quad i \in [1, n-1]$$

$$\Leftrightarrow Ax = 0$$

es decir, existe una correspondencia biunívoca entre $S_{1,0}$ y el núcleo de A , por lo tanto

$$\dim(S_{1,0}) = \dim(N(A))$$

A es una matriz de orden $(n-2) * 2(n-1)$ y rango $n-2$, entonces

$$\begin{aligned} \dim(S_{1,0}) &= \dim(N(A)) \\ &= 2n-2 - n + 2 \\ &= n \end{aligned}$$

por lo tanto la dimensión del espacio 1.1, es $P_n = n$.

ESPACIOS SPLINE CUADRÁTICOS

Utilizando la secuencia de la expresión de 1.1, para el espacio del spline cuadrático queda como sigue:

$$S_{2,0}(P_n(x)) = \{s: I \rightarrow \mathfrak{R} \ni s \in C^0[I], s|x_i\} = P_i, \text{ polinomio de grado } \leq 2, i = 2, \dots, n-1 \quad (2)$$

lo que se representa en la figura 1.2

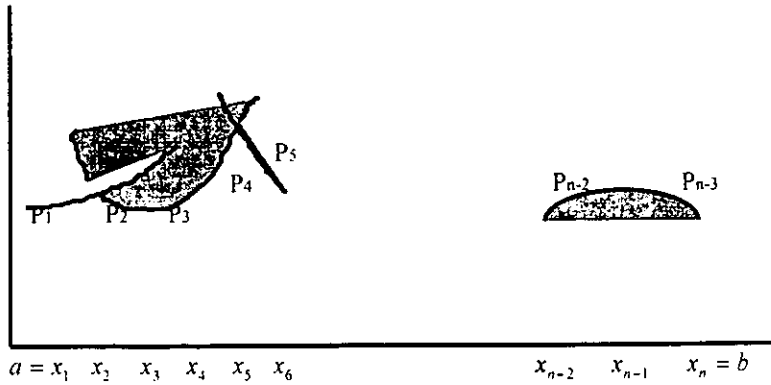


fig.2

En esta gráfica se puede observar que en los nodos de “puntos de unión” no se pegan suavemente, entonces podemos determinar que la forma para las P_i es

$$a_i x^2 + b_i x + c_i$$

por lo que se requieren determinar tres parámetros por cada pedazo de polinomio, y por la condición de continuidad se tiene que:

$$\begin{aligned} a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i &= a_{i+1} x_{i+1}^2 + b_{i+1} x_{i+1} + c_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-2 \\ \Rightarrow \\ a_{i+1} x_{i+1}^2 + b_{i+1} x_{i+1} + c_{i+1} - a_i x_{i+1}^2 - b_i x_{i+1} - c_i &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

cuya expresión matricial quedaría como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} x_2^2 & x_2 & 1 & -x_2^2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 & x_3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -x_{n-1}^2 & -x_{n-1} & -1 \end{pmatrix}$$

A es de orden $(n-2) * 3(n-1)$ y

$$x = [a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad \dots \quad a_{n-1} \quad b_{n-1} \quad c_{n-1}]$$

es el vector de los $3(n-1)$ parámetros por determinar, por lo tanto

$$s \in S_{2,0}(p_n(x)) \Leftrightarrow s|x_i = P_i \quad i \in [1, n-1]$$

$$\Leftrightarrow Ax = 0$$

y la dimensión del spline cuadrático es

$$\begin{aligned} \dim(S_{2,0}) &= \dim(N(A)) \\ &= 3(n-1) - (n-2) \\ &= 2n-1 \end{aligned}$$

Podemos decir ahora, que existen subespacios de (2), que por sus características son de gran utilidad en diferentes aplicaciones, en este sentido podemos ver lo siguiente:

SUBESPACIO DE SPLINE PARABÓLICO

Para este caso se tiene que

$$S_{2,1}(P_n(x)) = \{s: I \rightarrow \mathfrak{R} \ni s \in C^1[I], s|x_i = P_i, \text{ polinomio de grado } \leq 2, i = 2, \dots, n-1\} \quad (3)$$

donde el spline es diferenciable y la gráfica sería la siguiente:

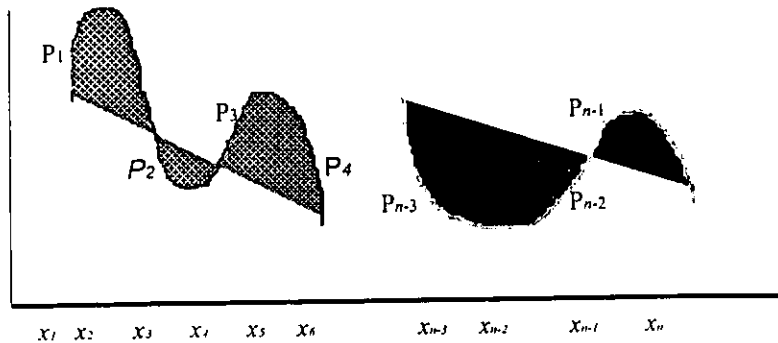


fig. 3

En este caso, cada pedazo del polinomio es de la forma

$$a_i x^2 + b_i x + c_i$$

y se requiere determinar $3(n-1)$ parámetros.

Por la condición de continuidad debe ser cierta y para la condición de la continuidad en la derivada se tiene que

$$s'(x) = 2a_i x + b_i \Rightarrow 2a_i x_{i+1} + b_i = 2a_{i+1} x_{i+1} + b_{i+1}$$

$$\therefore 2a_i x_{i+1} + b_i - 2a_{i+1} x_{i+1} - b_{i+1} = 0$$

cuya expresión matricial quedaría

$$A = \begin{bmatrix} 2x_2 & 1 & -2x_2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -2x_{n-1} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

es de orden $(n-2) * 3(n-1)$ y

$$x' = [a_1 \ b_1 \ c_1 \ \dots \ a_{n-1} \ b_{n-1} \ c_{n-1}]$$

Entonces, por la continuidad de s y s' forman la matriz B

$$B = \begin{bmatrix} x_2^2 & x_2 & -x_2^2 & x_2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_2 & 1 & 0 & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -2x_{n-1} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

que es de orden $2(n-2) * 6(n-1)$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \dim(S_{2,1}) &= \dim(N(B)) \\ &= 3(n-1) - 2(n-2) \\ &= n+1 \end{aligned}$$

que es la dimensión del spline parabólico.

Observación 1: La dimensión del espacio es el número de parámetros por determinar menos el número de condiciones.

ESPACIOS SPLINE CÚBICOS.

En este caso el espacio queda como sigue

$$S_{3,0}(P_n(x)) = \{s : I \rightarrow \mathbb{R} \exists s \in C^0[I], s|x_i\} = P_i, \text{ polinomio de grado } \leq 3, i = 1, \dots, n-1 \quad (4)$$

denominado también espacio de polinomios cúbicos de Lagrange por pedazos, queda completamente establecido si cada polinomio se determina por 4 parámetros, esto es

$$a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

entonces se requieren $4n-4$ parámetros por determinar y por la observación 1 se tiene que

$$\begin{aligned} \dim(S_{3,0}) &= 4(n-1) - (n-2) \\ &= 3n-2 \end{aligned}$$

El espacio 1.12 tendría una gráfica como la que sigue,

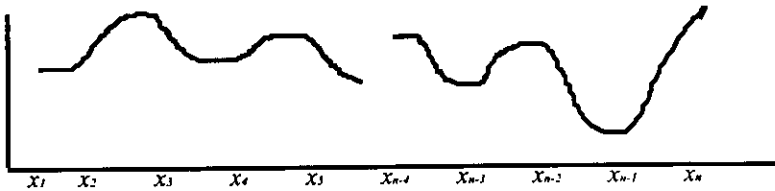


fig. 4

En este caso al pedir que la 1ª derivada sea continua en x_i , se denomina también el espacio de Hermite polinomial cúbico por pedazos, que se expresaría como

$$S_{3,1}(P_n(x)) = \{s : I \rightarrow \mathbb{R} \exists s \in C^1[I], s|x_i\} = P_i, \text{ polinomio de grado } \leq 3, i = 1, \dots, n-1 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dim(S_{3,1}) &= 4(n-1) - 2(n-2) \\ &= 2n \end{aligned}$$

aun cuando el espacio (5) es suave en los nodos, la 2ª derivada puede no ser continua, entonces para esto se construye el subespacio

$$S_{3,2}(P_n(x)) = \{s : I \rightarrow \mathfrak{R} \ni s \in C^2[I], s|x_i\} = P_i, \text{ polinomio de grado } \leq 3, i = 1, \dots, n-1 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dim(S_{3,2}) &= 4(n-1) - 3(n-2) \\ &= n+2 \end{aligned}$$

este también es llamado el espacio Spline Cúbico polinomial, y por sus cualidades de suavidad es muy útil en varias aplicaciones, en particular para nuestro objetivo. Su gráfica sería la siguiente:

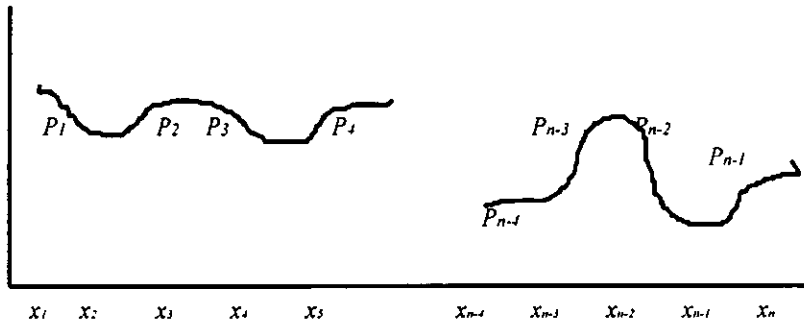


fig. 5

Dados los anteriores espacios, se pueden construir, en términos generales, espacios spline, cuyos componentes sean pedazos de polinomios de grado $\leq m$, por ejemplo

$$S_{m,0}(P_n(x)) = \{s : I \rightarrow \mathfrak{R} \ni s \in C^0[I], s|x_i\} = P_i, \text{ polinomio de grado } \leq m, i = 1, \dots, n-1 \quad (7)$$

Aquí se tiene que cada polinomio es de la forma

$$\alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$\Rightarrow \exists (m+1)(n-1)$ parámetros por determinar para establecer el espacio de P_n dada, entonces la dimensión de (7) es

$$\begin{aligned} \dim(S_{m,0}) &= (m+1)(n-1) - (n-2) \\ &= m(n-1) + 1 \end{aligned}$$

Un subespacio de (7) que sea k veces diferenciable en los nodos y cada pedazo de polinomio tenga a lo más grado m es

$$S_{m,k}(P_n(x)) = \{s : I \rightarrow \mathfrak{R} \exists s \in C^k [I], s|x_i = P_i, \text{ polinomio de grado } \leq m, i = 1, \dots, n-1\} \quad (8)$$

con dimensión

$$\dim(S_{m,k}) = (m+1)(n-1) - (k+1)(n-2)$$

Hasta lo que se ha visto, la diferenciabilidad ha sido indistintamente igual en todos los nodos, sin embargo, se pueden elegir diferentes grados de diferenciabilidad y en nodos distintos.

Una de las razones por las cuales surge este tipo de condiciones, se debe a que, para algunos problemas no se requiere igual diferenciabilidad en todo el intervalo de interés .

Para indicar los diferentes grados de diferenciabilidad en nodos diferentes se utiliza un vector V de dimensión $n-2$, en general, en el espacio

$$S_{m,(k_2, \dots, k_{n-1})}(P_n(x)) = \left\{ \begin{array}{l} s : I \text{ es } k_i \text{ veces diferenciable, } i = 2, \dots, n-1; \\ s|x_i = P_i, \text{ polinomio de grado } \leq m, i = 1, \dots, n-1 \end{array} \right\} \quad (9)$$

la diferenciabilidad de s en el i -ésimo nodo se especifica en el i -ésimo elemento del vector

$$V = (k_1, \dots, k_{n-1})$$

EJEMPLO:

$$S_{2,(0,1)}(P_n(x)) = \left\{ \begin{array}{l} s : I \rightarrow \mathfrak{R} | s \text{ en } x_i \text{ es } k_i \text{ veces diferenciable, } i = 2,3; \\ s|x_i = P_i, \text{ polinomio de grado } \leq 2, i = 1,2,3 \end{array} \right\} \quad (10)$$

por lo que las condiciones de continuidad en (10) permiten obtener

$$a_1 x_2^2 + b_1 x_2 + c_1 = a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + c_2$$

$$a_2 x_3^2 + b_2 x_3 + c_2 = a_3 x_3^2 + b_3 x_3 + c_3$$

\Rightarrow

$$a_1 x_2^2 + b_1 x_2 + c_1 - a_2 x_2^2 - b_2 x_2 - c_2 = 0 \quad (11)$$

$$a_2 x_3^2 + b_2 x_3 + c_2 - a_3 x_3^2 - b_3 x_3 - c_3 = 0$$

entonces el sistema matricial de (11), $A_i x = 0$ queda

$$A_i = \begin{bmatrix} x_2^2 & x_2^2 & 1 & -x_2^2 & -x_2^2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3^2 & x_3^2 & 1 & -x_3^2 & -x_1^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$x' = [a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad a_2 \quad b_2 \quad c_2 \quad a_3 \quad b_3 \quad c_3]$$

donde A es la matriz de coeficientes y x el vector de parámetros por determinar, por lo que $s' \in x_j$ debe ser continua.

Puesto que

$$P_i' = 2a_i x_i + b_i, i = 1, 2, 3$$

\Rightarrow

$$2a_2 x_2 + b_2 = 2a_3 x_3 + b_3$$

\therefore

$$2a_2 x_2 + b_2 - 2a_3 x_3 - b_3 = 0 \quad (13)$$

integrando esta condición en (11), colocándola después de la condición de continuidad $s \in x_3 \Rightarrow$

$$A_2 = \begin{bmatrix} x_2^2 & x_2 & 1 & -x_2^2 & -x_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3^2 & x_3 & 1 & -x_3^2 & -x_3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_3 & 1 & 0 & -2x_3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

que es de orden $3(3) \times 3$, y su dimensión

$$\begin{aligned} \dim(S_{2,(0,1)}(P_i(x))) &= 3(3) - 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Para calcular la dimensión de un subespacio

$$S_{m,(k_2, \dots, k_{n-1})}(P_n(x)) = \left\{ \begin{array}{l} s: I \rightarrow \mathfrak{R} \ni s \in x_i \text{ es } k_i \text{ veces diferenciable, } i = 2, \dots, n-1; \\ s|_{x_i} = P_i, \text{ polinomio de grado } \leq m, i = 1, \dots, n-1 \end{array} \right\}$$

dado que existen $n-1$ polinomios de grado menor o igual que m , cuyos coeficientes que en total deben determinarse son $(n-1) \times (m+1)$ incógnitas y por otra parte las condiciones de

diferenciabilidad en cada nodo $x_i, i = 2, \dots, n-1$ es k_i , además de la continuidad de s en cada nodo, por lo tanto se tienen en total

$$\sum_{i=2}^{n-1} (k_i + 1)$$

condiciones, entonces

$$\dim\left(S_{m\{k_2, \dots, k_{n-1}\}}(P_n(x))\right) = (m+1)(n-1) - \sum_{i=2}^{n-1} k_i + 1$$

Una de las aplicaciones más importantes de las funciones polinomiales por pedazos se lleva a cabo en los problemas de interpolación y que es un punto importante en la estructura de este trabajo es la interpolación spline cúbica. Dado un conjunto de datos

$$\{(x_i, f(x_i)), i = 1, \dots, n\}$$

se desea ajustar una función polinomial por pedazos, es decir, s , de tal forma que los puntos

$$(x_i, f(x_i)), i = 2, \dots, n-1$$

se toman como la unión de los pedazos del polinomio

$$P_i \text{ y } P_{i+1}, i = 1, n-2$$

En este caso se dice que la interpolación es en los puntos de quiebre, lo que se puede ver en la figura 6

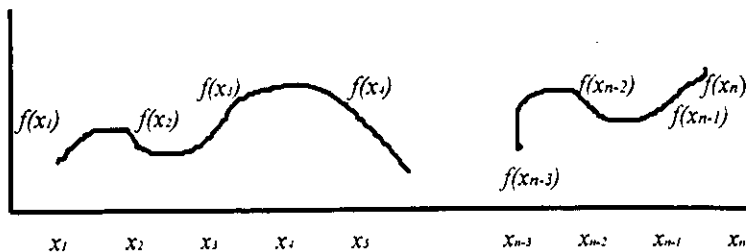


fig. 6

Esta forma de interpolación ha sido utilizada durante mucho tiempo, sin embargo no hay nada que impida interpolar en cualquier otro punto que no sea de quiebre, y que es lo que se analizara en este tema y las ventajas que se pueden obtener interpolando de esta forma.

INTERPOLACIÓN EN LOS PUNTOS DE QUIEBRE.

Sean

$$\{(x_i, f(x_i))\} \quad i = 1, \dots, n$$

datos conocidos, en donde

$$a = x_1, \dots, x_n = b, [a, b] \subset \mathbb{R}.$$

Se elige la interpolante s a f , que consta de pedazos de polinomios cuadráticos, tal que si

$$I_i = [x_i, x_{i+1}] \Rightarrow s|_{I_i} = P_i, i = 1, \dots, n-1$$

es un polinomio cuadrático, por lo tanto

$$P_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

\Rightarrow

$$f(x_i) = p_i(x_i)$$

$$f(x_{i+1}) = p_i(x_{i+1})$$

constituyen dos condiciones para cada polinomio.

Dado que son 3 parámetros por determinar para cada polinomio, tenemos un grado de libertad para cada pedazo de polinomio a ser determinado, eligiéndose como sigue:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

$$P_i(x_{i+\frac{1}{2}}) = V_{i+\frac{1}{2}} \quad i = 1, \dots, n-1$$

donde V_2, V_3, \dots, V_n , se pueden elegir de distintas maneras

a) De consideraciones locales, se puede hacer $V_{i+1} = f(x_{i+1})$, si se dispone de información para interpolar también en $x_{i+\frac{1}{2}}$.

b) Siguiendo el proceso para hacer de s un spline parabólico se puede determinar

$$V_i, \quad i = 2, \dots, n-1$$

Para generar el sistema lineal resultante para los parámetros V_i , se escribe el i -ésimo polinomio en la forma de Newton

$$P_i(x) = P_i(x_i) + (x - x_i)P_i(x_i, x_{i+\frac{1}{2}}) + (x - x_i)(x - x_{i+\frac{1}{2}})P_i(x_i, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1})$$

simplificando

$$D_i^+ = P_i[x_i, x_{i+\frac{1}{2}}] = \frac{P_i[x_{i+\frac{1}{2}}] - P_i[x_i]}{[x_{i+\frac{1}{2}} - x_i]} = \frac{V_{i+1} - f(x_i)}{\Delta x_i/2} \quad (15)$$

$$D_{i+1}^- = P_i[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1}] = \frac{P_i[x_{i+1}] - P_i[x_{i+\frac{1}{2}}]}{[x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}}]} = \frac{f(x_{i+1}) - V_{i+1}}{\Delta x_i/2} \quad (16)$$

expresando $P_i[x_i, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1}]$, en términos de (15) y (16), obtenemos

$$\begin{aligned} P_i[x_i, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1}] &= \frac{P_i[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1}] - P_i[x_i, x_{i+\frac{1}{2}}]}{[x_{i+1} - x_i]} \\ &= \frac{D_{i+1}^- - D_i^+}{\Delta x_i} \end{aligned} \quad (17)$$

reescribiendo $P_i(x)$ en términos de (15), (16) y (17)

$$P_i(x) = \frac{P_i(x_i)(x - x_i)D_i^+ + (x - x_i)(x - x_{i+\frac{1}{2}})(D_{i+1}^- - D_i^+)}{\Delta x_i} \quad (18)$$

y su derivada con respecto a x es

$$\begin{aligned}
 P_i'(x) &= D_i^* + \frac{(D_{i+1}^- - D_i^*)}{\Delta x_i} (x - x_i)(x - x_{i+1}) \\
 &= D_i^* + \frac{(D_{i+1}^- - D_i^*)}{\Delta x_i} (2x - x_i - x_{i+1})
 \end{aligned}$$

por lo que

$$P_i'(x_i) = D_i^* + \frac{(D_{i+1}^- - D_i^*)}{\Delta x_i} (x_i - x_{i+1}) \quad (19)$$

En (19) se sustituye Δx_i por una expresión semejante para obtener

$$\begin{aligned}
 P_i'(x_i) &= D_i^* + \frac{(D_{i+1}^- - D_i^*)}{-2(x - x_{i+1})} (x - x_{i+1}) \\
 &= D_i^* - \frac{(D_{i+1}^- - D_i^*)}{2} = \frac{(2D_i^* - D_{i+1}^- + D_i^*)}{2}
 \end{aligned}$$

∴

$$P_i'(x_i) = \frac{(3D_i^* - D_{i+1}^-)}{2} \quad (20)$$

dado que esta es la derivada del i -ésimo polinomio, necesitamos la $(i-1)$ -ésima derivada para establecer la condición de continuidad de la primera derivada de $P_i \in x, i = 2, \dots, n-1$

De (18) se obtiene

$$P_{i-1}(x) = P_{i-1}(x_{i-1}) + D_{i-1}^* (x - x_{i-1}) + \frac{(D_i^- - D_{i-1}^*)}{\Delta x_{i-1}} (x - x_{i-1})(x - x_{i-1}) \quad (21)$$

⇒

$$\begin{aligned}
 P_{i-1}'(x) &= D_{i-1}^* + \frac{(D_i^- - D_{i-1}^*)}{\Delta x_{i-1}} (x - x_{i-1})(x - x_{i-1}) \\
 &= D_{i-1}^* + \frac{(D_i^- - D_{i-1}^*)}{\Delta x_{i-1}} (2x - x_{i-1} - x_{i-1})
 \end{aligned}$$

evaluando P_{i-1}' en x ,

$$\begin{aligned}
P_{i-1}^i(x_i) &= D_{i-1}^- + \frac{(D_i^- - D_{i-1}^*)}{\Delta x_{i-1}} (2x_i - x_{i-1} - x_{i-2}) \\
&= D_{i-1}^- + \frac{(D_i^- - D_{i-1}^*)}{\Delta x_{i-1}} \left(\Delta x_{i-1} + \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \right) \\
&= D_{i-1}^- + \frac{(D_i^- - D_{i-1}^*)}{\Delta x_{i-1}} \left(\frac{3\Delta x_{i-1}}{2} \right) \\
&= D_{i-1}^- + \frac{3(D_i^- - D_{i-1}^*)}{2}
\end{aligned}$$

∴

$$P_{i-1}^i(x_i) = \frac{(3D_i^- - D_{i-1}^*)}{2} \quad (22)$$

de modo que la condición de continuidad para la 1ª derivada de P_{i-1}^i en $x_i, i = 2, \dots, n-1$ implica que

$$P_{i-1}^i(x_i) = P_i(x_i) \quad (23)$$

⇒

$$\frac{3D_i^- - D_{i-1}^*}{2} = \frac{3D_i^+ - D_{i+1}^-}{2} \quad (\text{por 2.10 y 2.12})$$

∴

$$3D_i^- - D_{i-1}^* = 3D_i^+ - D_{i+1}^- \quad (24)$$

entonces por (15) y (16)

$$3P_{i-1}^i(x_{i-1/2}, x_i) - P_{i-1}(x_{i-1}, x_{i-1/2}) = 3P_i(x_i, x_{i+1/2}) - P_i(x_{i+1/2}, x_i)$$

⇒

$$3 \frac{f(x_i) - V_i}{\Delta x_{i-1/2}} - \frac{V_i - f(x_{i-1})}{\Delta x_{i-1/2}} = 3 \frac{V_{i+1} - f(x_i)}{\Delta x_{i/2}} - \frac{f(x_{i+1}) - V_{i+1}}{\Delta x_{i/2}}$$

⇒

$$3 \frac{f(x_i) - V_i}{\Delta x_{i-1}} - \frac{V_i - f(x_{i-1})}{\Delta x_{i-1}} = 3 \frac{V_{i+1} - f(x_i)}{\Delta x_i} - \frac{f(x_{i+1}) - V_{i+1}}{\Delta x_i}$$

..

simplicando se tiene que

$$\frac{4V_i}{\Delta x_{i-1}} + \frac{4V_{i+1}}{\Delta x_i} = \frac{3f(x_i) + f(x_{i+1})}{\Delta x_{i-1}} + \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{\Delta x_i}$$

que es un sistema de $n-2$ ecuaciones y $n-1$ incógnitas $V_i, i = 2, \dots, n$, que se puede escribir como

$$\frac{4V_i}{\Delta x_{i-1}} + \frac{4V_{i+1}}{\Delta x_i} = b_i \quad (25)$$

donde

$$b_i = \frac{3f(x_i) + f(x_{i+1})}{\Delta x_{i-1}} + \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{\Delta x_i}$$

este sistema tiene solución única si alguna de las incógnitas, por decir V_2 puede ser dada por una condición adicional. Además como (25) se puede expresar en la forma recursiva

$$V_{i+1} = b_i \frac{\Delta x_i}{4} - V_i \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} \quad (26)$$

las incógnitas restantes también son determinadas.

Para entender más el grado de libertad disponible, se consideran dos splines parabólicos de interpolación s y \bar{s} , que se establecen por (25), con los mismos datos, pero con diferentes elecciones de V_2 . Así la diferencia

$$s_i = s - \bar{s} \quad (27)$$

es un spline parabólico en $[a, b]$, que vale cero en sus puntos de quiebre y en a y b . De tal forma que de (26) resulta

$$s_i(x_{i+1}) = \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} s_i(x_{i-1}) \quad (28)$$

si V_2 esta dado, entonces $i=1$, de modo que

$$V_2 = s_1(x_2)$$

y por (28)

$$s_1(x_{i+1}) = (-1)^{i-1} s_1(x_2) \frac{\Delta x_i}{\Delta x_1}, i = 2, \dots, n-1$$

pero, si todos los datos están uniformemente espaciados, es decir,

$$h = \frac{b-a}{n-1}$$

y

$$x_i = a + (i-1)h \quad i = 1, \dots, n$$

los spline interpolantes quedan expresados en la forma de Newton

$$\begin{aligned} s(x) &= P(x_i) + (x-x_i)D_i^- + (x-x_i)(x-x_{i+1}) \frac{(D_{i+1}^- - D_i^-)}{\Delta x_{i-1}} \\ &= P(x_i) + (x-x_i) \frac{V_{i+1} s(x_i)}{h_2} + (x-x_i)(x-x_{i+1}) \left[\frac{s(x_{i+1}) - V_{i+1} - V_{i+1} + s(x_{i+1})}{h_2} \right] \end{aligned}$$

por lo que

$$s(x) = P_i(x_i) + \frac{2}{h}(x-x_i)V_{i+1} - \frac{2}{h}(x-x_i)s(x_i) + \frac{2\alpha}{h^2}s(x_{i+1}) - \frac{4\alpha}{h^2}V_{i+1} + \frac{2\alpha}{h^2}s(x_i)$$

y

$$\bar{s}(x) = \bar{P}_i(x_i) + \frac{2}{h}(x-x_i)\bar{V}_{i+1} - \frac{2}{h}(x-x_i)\bar{s}(x_i) + \frac{2\alpha}{h^2}\bar{s}(x_{i+1}) - \frac{4\alpha}{h^2}\bar{V}_{i+1} + \frac{2\alpha}{h^2}\bar{s}(x_i)$$

restando las dos ecuaciones anteriores se tiene

$$\begin{aligned} s(x) - \bar{s}(x) &= \frac{(V_{i+1} - \bar{V}_{i+1})2(x-x_i)}{h} - 4\alpha \frac{V_{i+1} - \bar{V}_{i+1}}{h^2} \\ &= (V_{i+1} - \bar{V}_{i+1}) \left[\frac{2(x-x_i)}{h} - \frac{4(x-x_i)(x-x_{i+1})}{h^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (V_{i+1} - \bar{V}_{i+1}) 2(x - x_i) \frac{\left[1 - 2\left(\frac{x - x_{i+1}}{h}\right)\right]}{h} \\
&= (V_{i+1} - \bar{V}_{i+1}) 2(x - x_i) \frac{\left[1 - 2\left(\frac{x - x_i - h_2}{h}\right)\right]}{h} \\
&= (V_{i+1} - \bar{V}_{i+1}) 2(x - x_i) \frac{\left[1 - 2\left(\frac{x - x_i}{h} + \frac{h}{h}\right)\right]}{h} \\
&= [s(x_i) - \bar{s}(x_i)] (-1)^{(i-1)} 2(x - x_i) \frac{\left[2 - 2\left(\frac{x - x_i}{h}\right)\right]}{h} \\
s_i(x) &= [s(x_i) - \bar{s}(x_i)] (-1)^{(i-1)} P\left(\frac{x - x_i}{h}\right)
\end{aligned}$$

∃

$$P\left(\frac{x - x_i}{h}\right) = 4(x - x_i) \frac{\left[1 - \left(\frac{x - x_i}{h}\right)\right]}{h}$$

tiene características muy interesantes, como se observa en el siguiente

Lema .- Sea P de grado 2 con ceros reales distintos de α y β , entonces

$$P(x) = A(x - \alpha)(x - \beta) \ni h = \beta - \alpha$$

⇒

$$P\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) = A\left(\frac{h}{2}\right)\left(-\frac{h}{2}\right) = -A\frac{h^2}{4}$$

∴

$$A = -4 \frac{P\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right)}{h^2}$$

entonces

--

$$P(x) = P\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) \left[-4ht \left(\frac{h(t-1)}{h} \right) \right] = P\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) 4t(1-t)$$

$$t = \frac{x - \alpha}{h}$$

Una observación importante es, que si la diferencia entre dos polinomios cuadráticos, es un polinomio con dos raíces reales y distintas α_0 y α_1 , entonces

$$d(x) = d(x_1) 4t(1-t) \quad t = \frac{(x - \alpha_0)}{(\alpha_1 - \alpha_0)}$$

es un polinomio cuadrático con su máximo en el punto medio, ver fig. 7

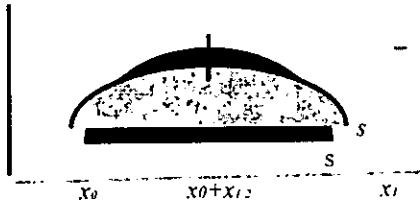


fig. 7

si aplicamos lo anterior a nuestro caso, esto nos muestra que la elección de V_2 está basada en un dato local, digamos como el valor de f en un punto adicional, esta elección afectará globalmente al interpolante s , ver fig. 8

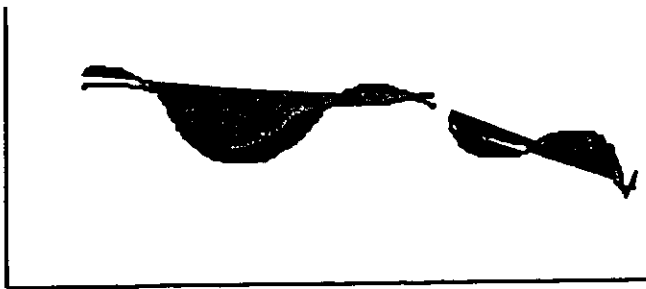


fig. 8

Hemos visto aspectos teóricos generales sobre las condiciones de existencia y continuidad de los polinomios splines, como un preámbulo al modelo que requerimos.

**CAPÍTULO
VI**

SPLINE CÚBICO

En este tema analizaremos un método de cálculo para polinomios de grado 3, de los que ya se vio la teoría general en el capítulo anterior, y que es fundamental para el objetivo de nuestro trabajo.

Sea $f \in [a, b]$, y dando una partición de a y b , tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

y sea I un intervalo dado, entonces

$$1.- I[x_i, x_{i+1}] \equiv S_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$$

(S_i es un intervalo cúbico por pedazos).

$$2.- S(x_i) = f(x_i) = S_i(x_i) \text{ para todo } i=0, 1, \dots, n, \text{ con } n+1 \text{ puntos}$$

De 1 y 2, se tiene que existen n intervalos y $4n$ incógnitas, por lo que deben existir, entonces, $4n$ condiciones; ahora si existen $n+1$ puntos, entonces existen $n-1$ puntos interiores y $3(n-1)$ condiciones si

$$a) S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$$

$$b) S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$$

$$c) S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$$

entonces, vemos que se tienen $3n-3$ condiciones más $n+1$ de los puntos interiores, quedando ahora $4n-2$.

Aquí tenemos que nos faltan 2 condiciones, las cuales se pueden dar en los extremos, esto es

1) Es natural o de frontera libre

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$$

2) Es de frontera restringida

$$S'(x_0) = f'(x_0) \text{ dada}$$

$$S'(x_n) = f'(x_n) \text{ dada}$$

ó

$$S''(x_0) = f''(x_0)$$

$$S''(x_n) = f''(x_n)$$

3) Es periódico

Realizando una reparametrización

$$S'_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

nos significa el siguiente problema, ¿quienes son los conjuntos $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}, \{d_i\}$?

Si tenemos que

$$S'_i(x_i) = a_i = f'_i(x_i) = y_i \text{ con } x_{i+1} - x_i = h$$

entonces

$$S'_i(x) = a_i + b_i h + c_i h^2 + d_i h^3$$

\Rightarrow

$$a_{i+1} = a_i + b_i h + c_i h^2 + d_i h^3$$

aplicando la Primera derivada

$$S'_i(x) = b_i + 2c_i h + 3d_i h^2$$

ahora si $S'_i(x) = b_i$, tenemos

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h + 3d_i h^2$$

que es igual a la condición b)

Para la Segunda derivada

$$S''(x) = 2c + 6d/h \text{ (para } x, \text{ se tiene que } x-x_i=0)$$

Para el caso c)

$$c_{i+1} = c_i + 3d/h$$

por lo tanto

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) = 2c_{i+1} = 2c_i + 6d/h$$

entonces se tiene que

$$a_i = y_i$$

$$b_i = S'_i(x_i)$$

$$c_i = \frac{S''_i(x_i)}{2}$$

de lo anterior tenemos que

$$c_{i+1} = c_i + 3d/h$$

⇒

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h}$$

sustituyendo en b_{i+1}

$$\begin{aligned} b_{i+1} &= b_i + 2c_i h + 3d_i h^2 \\ &= b_i + 2c_i h + 3\left(\frac{c_{i+1} - c_i}{3h}\right)h^2 \\ &= b_i + (2c_i h - c_i h) + c_{i+1} h \\ &= b_i + (c_i - c_{i+1})h \end{aligned}$$

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

sustituyendo los valores anteriores en a_{i+1}

$$\begin{aligned}a_{i+1} &= a_i + b_i h + c_i h^2 + d_i h^3 \\&= a_i + b_i h + c_i h^2 + \left(\frac{c_{i+1} - c_i}{3h}\right) h^3 \\&= a_i + b_i h + c_i h^2 + \left(\frac{c_{i+1} - c_i}{3}\right) h^2 \\&= a_i + b_i h + \left(c_i h^2 - \frac{c_i h^2}{3}\right) + \left(\frac{c_{i+1}}{3}\right) h^2 \\&= a_i + b_i h + \frac{2}{3} c_i h^2 + \left(\frac{c_{i+1}}{3}\right) h^2 \\&= a_i + b_i h + (2c_i + c_{i+1}) \frac{h^2}{3}\end{aligned}$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned}b_i h &= (a_{i+1} - a_i) - (2c_i + c_{i+1}) \frac{h^2}{3} \\&\Rightarrow \\b_i &= \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h} - (2c_i + c_{i+1}) \frac{h}{3}\end{aligned}$$

ahora si bajamos un índice

$$\begin{aligned}b_i &= b_{i-1} + (c_i + c_{i-1})h \\&\Rightarrow \\ \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h} - (2c_i + c_{i+1}) &= \left[\frac{(a_i - a_{i-1})}{h} - (2c_{i-1} + c_i) \frac{h}{3} \right] + (c_i + c_{i-1})h\end{aligned}$$

esto implica que

$$(2c_{i-1} + c_1) \frac{h}{3} - (2c_i + c_{i+1}) \frac{h}{3} - c_i h + c_{i-1} h = \frac{(a_i - a_{i-1})}{h} - \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h}$$

$$2c_{i-1} h + 2c_i h - 2c_i h - (c_{i+1} h - 3c_{i-1} h - 3c_i h) = \frac{3(a_i - a_{i-1})}{h} - \frac{3(a_{i+1} - a_i)}{h}$$

cambiando signos y sumando

$$c_{i-1} h + 4c_i h + c_{i+1} h = 3 \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h} - 3 \frac{(a_i - a_{i-1})}{h}$$

aplicando diferencias divididas tenemos la siguiente tabla

x	y	Δy	Δy^2
x_0	y_0	$\frac{a_1 - a_0}{h}$	
x_1	y_1		$\frac{a_2 - a_1}{h} - \frac{a_1 - a_0}{h}$ $2h$
x_2	y_2	$\frac{a_2 - a_1}{h}$	$\frac{a_3 - a_2}{h} - \frac{a_2 - a_1}{h}$ $2h$
x_3	y_3	$\frac{a_3 - a_2}{h}$	$\frac{a_4 - a_3}{h} - \frac{a_3 - a_2}{h}$ $2h$
x_4	y_4	$\frac{a_4 - a_3}{h}$	

operando en la segunda columna tenemos

$$3 \left[\frac{a_{i+1} - a_i}{h} - \frac{a_i - a_{i-1}}{h} \right] 2h = 6h$$

y dando la condición

$$\begin{aligned} S''(x_0) = 0 = S''(x_n) \\ \Rightarrow \\ c_0 = 0 \text{ y } c_n = 0 \end{aligned}$$

y que también lo podemos representar en forma matricial. esto es

$$\begin{bmatrix} h & & & & & \\ h & 4h & h & & & \\ & h & 4h & h & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & h & 4h & h \\ & & & & & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

la matriz anterior la podemos expresar como $Ax=b$, y decimos que es una Matriz Diagonal Dominante. lo que implica que tiene inversa, es decir

$$x=A^{-1}b$$

por lo que tiene solución única. lo cual permite afirmar que el spline existe y tiene solución única.

**CAPÍTULO
VII**

LOS COEFICIENTES DE FOURIER

En este capítulo analizaremos de una forma más profunda los Coeficientes de Fourier, tema que ya se vio en el primer capítulo, en una forma simple, cuando se analizaron las series trigonométricas, y el cual es básico para nuestro objetivo, en este sentido, nos concretamos a checar las funciones seno y coseno como sigue:

Sean las funciones

$$S_k = \int_0^\pi f(\theta) \operatorname{sen} k\theta d\theta \quad \text{y} \quad C_k = \int_0^\pi f(\theta) \operatorname{cos} k\theta d\theta$$

en donde

$$\operatorname{sen} k\theta \in [0, \pi] = \left[0, \frac{\pi}{k}\right], \left[\frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}\right], \left[\frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}\right], \dots, \left[\frac{(k-1)\pi}{k}, \frac{k\pi}{k}\right]$$

Como se ve, en los intervalos anteriores la función cambia de signo constantemente y es constante en

$$\left[\frac{i\pi}{k}, \frac{(i+1)\pi}{k}\right]$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned} S_k &= \int_0^\pi f(\theta) \operatorname{sen} k\theta d\theta = \sum_{n=0}^{k-1} \int_{\frac{n\pi}{k}}^{\frac{(n+1)\pi}{k}} f(\theta) \operatorname{sen} k\theta d\theta \\ &= \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \int_{\frac{n\pi}{k}}^{\frac{(n+1)\pi}{k}} f\left(\frac{n\pi + x}{k}\right) \operatorname{sen} x dx \end{aligned}$$

y aplicando un cambio de variable como sigue

$$x = k\theta - n\pi \Rightarrow dx = kd\theta$$

∴

$$\frac{dx}{k} = d\theta$$

y

$$k\theta = x + n\pi \Rightarrow \theta = \frac{x + n\pi}{k}$$

por lo que

$$S_k = \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} x dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) \quad \text{con } w_1 = w_2 = 1$$

Aquí consideramos que x_1, x_2 son los ceros de la ecuación

$$\pi(x) = x^2 - \pi x + 2 = 0$$

entonces

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \alpha \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} - \alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{1 - \frac{8}{\pi^2}} \right) \cong 0.1017308$$

obteniéndose el error

$$\begin{aligned} E &= f^{2m} \left(\frac{\xi}{2m}! \int_0^{\pi} w(x) [\pi(x)]^2 dx \right. \\ &= f^{2m} \left(\frac{\xi}{24} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x (x^2 - \pi x + 2)^2 dx \right. \\ &= k_1 f^{2m}(\xi) \\ \Rightarrow \\ k_1 &= \frac{10 - \pi^2}{6} \cong 0.022 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} x dx &= f\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + f\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) + k_1 f^{2m}(\xi) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \int_0^{\pi} f\left(\frac{n\pi + x}{k}\right) \operatorname{sen} x dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left[f\left(\frac{n\pi + \tau_1 + \alpha}{k}\right) + f\left(\frac{n\pi + \tau_1 - \alpha}{k}\right) \right] + E$$

donde

$$E = k_1 \frac{\sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n}{k^2} f''\left(\frac{\xi_n}{k}\right) \text{ con } \xi_n \in (n\pi, (n+1)\pi)$$

Con este resultado determinamos el valor para la función seno: análogamente analizaremos el valor para la función coseno como sigue

Sea

$$C_k = \int_0^\pi f(\theta) \cos k\theta d\theta$$

donde $\cos k\theta$ cambia de signo en el intervalo

$$\cos k\theta \in [0, \pi] = [0, \frac{\pi}{2k}] \left[\frac{\pi}{2k}, \frac{2\pi}{3k} \right] \left[\frac{2\pi}{3k}, \frac{3\pi}{4k} \right], \dots, \left[\frac{(2k-1)\pi}{2k}, \frac{2k\pi}{2k} \right]$$

aunque en este caso se requiere para los extremos de los intervalos un tratamiento por separado, sin embargo, la aproximación gaussiana por pedazos a la función en estudio, se puede obtener con la misma frecuencia uniforme que la utilizada para la función seno.

Considerando que la función de peso $\cos k\theta$ cambia de signo en el punto medio de cada intervalo, tenemos que

$$C_k = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \int_0^\pi f\left(\frac{n\pi + x}{k}\right) \cos x dx$$

∴

$$\int_0^\pi f(x) \cos x dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + E$$

Sin tener una garantía de éxito por el cambio de signo de la función de peso en el punto

$$x = \frac{\pi}{2}$$

entonces

$$\int_0^{\pi} x^0 \cos x dx = w_1 + w_2 = M_0$$

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = w_1 x_1 + w_2 x_2 = M_1$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = M_2$$

$$\int_0^{\pi} x^3 \cos x dx = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = M_3$$

lo que nos da cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas x_1, x_2, w_1, w_2 , por lo tanto

$$\pi(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2 = 0$$

lo que nos conduce a los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\alpha_2 w_1 + \alpha_2 w_2 = \alpha_2 M_0$$

$$\alpha_1 w_1 x_1 + \alpha_1 w_2 x_2 = \alpha_1 M_1$$

$$w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = M_2$$

\Rightarrow

$$\left(x_1^2 + \underbrace{\alpha_1 x_1}_{=0} + \alpha_2 \right) w_1 + \left(x_2^2 + \underbrace{\alpha_1 x_2}_{=0} + \alpha_2 \right) w_2 = M_2 + \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_0$$

por lo tanto

$$M_2 + \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_0 = 0$$

$$\alpha_2 w_1 x_1 + \alpha_2 w_2 x_2 = \alpha_2 M_1$$

$$\alpha_1 w_1 x_1^2 + \alpha_1 w_2 x_2^2 = \alpha_1 M_2$$

$$w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = M_3 \Rightarrow$$

$$\dots \left(x_1^3 + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_1 \right) w_1 + \left(x_2^3 + \alpha_1 x_2^2 + \alpha_2 x_2 \right) w_2 = M_3 + \alpha_1 M_2 + \alpha_2 M_1$$

Si $M_1^2 \neq M_0 M_2$, entonces se tiene una solución única, la que podemos representar por un sistema matricial $Ax=b$ cuyo $\det A \neq 0$, esto es

$$\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_0 = -M_2$$

$$\alpha_1 M_2 + \alpha_2 M_1 = -M_3$$

\Rightarrow

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_0 \\ M_2 & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M_2 \\ -M_3 \end{pmatrix}$$

esto se garantiza si la función de peso $0 \leq w \in [a, b]$.

Ahora como tenemos que x_1, x_2 están determinadas como las raíces de la ecuación

$$\pi(x) = x^2 - \pi x + 2 = 0$$

y w_1, w_2 se determinan de las ecuaciones

$$\int_0^{\pi} x^0 \cos x dx = w_1 + w_2 = M_0$$

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = w_1 x_1 + w_2 x_2 = M_1$$

lo que nos lleva a la siguiente ecuación

$$\pi(x) = x^2 - \pi x + 6 - \frac{\pi^2}{2}$$

donde x_1 y x_2 son los ceros de

$$x^2 - \pi x + 6 - \frac{\pi^2}{2} = 0$$

\Rightarrow

$$x_1 = \frac{\pi}{8} - \beta \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{7\pi}{8} + \beta \quad \text{con} \quad \beta = \sqrt{\frac{3\pi^2 - 24}{2}} - \frac{3\pi}{8} = 0.0060191$$

entonces

..

$$M_2 + M_1\alpha_1 + M_0\alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$x_1^2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 = 0 \ni M_1 \neq M_0 x_1$$

Si tenemos ahora la siguiente ecuación

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(1) + E$$

tal que x_2 está asignado, entonces se tienen tres parámetros x_1, w_1, w_2 .

Observación:

$$M_r = \int_0^1 x^{\binom{2r+1}{2}} dx = \frac{2}{2r+3} \quad r = 0,1,2$$

entonces

$$w_1 + w_2 = \frac{2}{3}$$

$$w_1 x_1 + w_2 = \frac{2}{5}$$

$$w_1 x_1^2 + w_2 = \frac{2}{7}$$

esto implica que

$$(x - x_1)(x - 1) = x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

lo que nos da

$$M_2 + M_1\alpha_1 + M_0\alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$x_1^2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 = 0$$

que se transforma en

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{7} + \frac{2}{5}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 &= 0 \\ 1 + \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

entonces

$$\alpha_1 = -\frac{10}{7}, \alpha_2 = \frac{3}{7}$$

por lo que

$$\pi(x) = \frac{7x^2 - 10x + 3}{7}$$

entonces

$$x_1 = \frac{3}{7}, x_2 = 1$$

y se tiene que

$$\left. \begin{aligned} w_1 + w_2 &= \frac{2}{3} \\ w_1 x_1 + w_2 &= \frac{2}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} w_1 + w_2 &= \frac{2}{3} \\ \frac{3}{7} w_1 + w_2 &= \frac{2}{5} \end{aligned} \right.$$

∴

$$w_1 = \frac{7}{10}, w_2 = \frac{1}{5}$$

de lo cual resulta

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{7}{10} f\left(\frac{3}{7}\right) + \frac{1}{5} f(1) + E$$

con la condición $E=0$ para

$$f'(x) = 1$$

$$f(x) = x$$

$$f(x) = x^2$$

pero

$$E \neq 0 \text{ si } f'(x) = x^3.$$

esto implica que se tiene una precisión de grado dos, ahora, si los pesos asociados son de igual magnitud y signo opuesto, se tiene que

$$w_1 = -w_2 = \frac{1}{3\pi_8 + \beta} \cong 0.8444900$$

por lo que

$$E = \int_0^{\pi} \pi(x)^2 \cos x dx$$

$\cos x$ cambia de signo en $x = \frac{\pi}{2}$

Sea

$$\pi(x)^2 \cos x = v'(x)$$

$$\Rightarrow$$

$$v(x) = \int_0^x \pi(s)^2 \cos s ds$$

si tenemos que

$$v'(x) \geq 0 \text{ si } x \in [0, \pi/2] \Big\}$$

$$v'(x) \leq 0 \text{ si } x \in [\pi/2, \pi] \Big\}$$

entonces $v(x)$ tiene máximo positivo en $\frac{\pi}{2}$, y considerando que

$$v'(\pi - x) = -v'(x)$$

tenemos

$$v(x) = \int_0^x \pi(x)^2 \cos s ds \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \in (0, \pi) \\ = 0 & \text{en } x = 0 \text{ y en } x = \pi \end{cases}$$

\Rightarrow

$$E = - \int_0^{\pi} v(x) dx = -f''(\xi) \int_0^{\pi} v(x) dx$$

\Rightarrow

$$E = -k_2 f''(\xi) \ni k_2 = 336 - \frac{24\pi^2}{240} - \pi^4 \cong 0.0072$$

\Rightarrow

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = \frac{1}{3\pi_8 - \beta} [f(\pi_8 - \beta) - f(\pi_8 + \beta)] - k_2 f''(\xi)$$

por lo tanto

$$\int_0^{\pi} f(\theta) \cos k\theta d\theta = \frac{1}{k(3\pi_8 + \beta)} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left[f\left(\frac{n\pi + \pi_8 - \beta}{k}\right) - f\left(\frac{n\pi + \pi_8 + \beta}{k}\right) \right] + E$$

tal que

$$E = \frac{-k_2 \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n f''\left(\frac{\xi_n}{k}\right)}{k^6}, \xi_n \in (n\pi, (n+1)\pi)$$

Con este resultado, determinamos los valores para los Coeficientes de Fourier, que era el objetivo de este capítulo. Ahora se da un ejemplo para la función

$$f(\theta) = e^{n\theta}$$

Sea

$$\int_0^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen} k\theta d\theta = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left[f\left(\frac{n\pi + \pi_4 + \alpha}{k}\right) + f\left(\frac{n\pi + \pi_4 - \alpha}{k}\right) \right] + E$$

\ni

$$E = \frac{k_1 \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n f''\left(\frac{\xi_n}{k}\right)}{k^5}, \xi_n \in (n\pi, (n+1)\pi)$$

se tiene que

$$S_k = \frac{k}{a^2 + k^2} (1 - e^{u\pi} \cos k\pi)$$

$$= \frac{\cosh\left\{\left(\frac{\pi_1 - \alpha}{k}\right)a\right\}}{k \cosh \frac{\pi_1}{2k}} (1 - e^{u\pi} \cos k\pi) + E$$

y

$$C_k = -\frac{a}{a^2 + k^2} (1 - e^{u\pi} \cos k\pi)$$

$$= -\frac{\operatorname{senh}\left\{\left(\frac{3\pi_8 + \beta}{k}\right)a\right\}}{k(3\pi_8 + \beta) \cosh \frac{\pi_8}{2k}} (1 - e^{u\pi} \cos k\pi) + E$$

entonces, se obtienen los siguientes valores

$$\frac{E}{S_k} = \frac{k_1}{2} \left(\frac{a}{k}\right)^4 + 0 \left(\frac{a^6}{k^6}\right) \quad \text{con } \frac{k_1}{2} \cong 0.011$$

$$\frac{E}{C_k} = \frac{k_2}{2} \left(\frac{a}{k}\right)^4 + 0 \left(\frac{a^6}{k^6}\right) \quad \text{con } \frac{k_2}{2} \cong 0.036$$

Si $f(x) = f(x + 2\pi)$ es una función periódica, entonces

$$\begin{cases} 1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos rx, \dots \\ 1, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \dots, \operatorname{sen} rx, \dots \end{cases}$$

considerando las siguientes funciones (ya analizadas al principio)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} jx \operatorname{sen} kx dx = 0 \quad j \neq k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos jx \cos kx dx = 0 \quad j \neq k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } jx \cos kx dx = 0$$

podemos determinar la función

$$f(x) \equiv a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \text{sen } kx)$$

∋

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - a_0 - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \text{sen } kx) \right]^2 dx = \text{minimo}$$

⇒

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[-f(x) - a_0 - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \text{sen } kx) \right] dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos rx \left[f(x) - a_0 - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \text{sen } kx) \right] dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } rx \left[f(x) - a_0 - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \text{sen } kx) \right] dx = 0 \quad r = 1, 2, \dots, n$$

entonces se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2 kx dx = \pi \quad k \neq 0$$

por lo tanto

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad k \neq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen } kx dx$$

si consideramos que $f(x) = f(-x)$ es una función par entonces

$$b_k = 0 \Rightarrow f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

y

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

pero si $f(-x) = -f(x)$ es función impar, entonces

$$a_0 = a_k = 0$$

\Rightarrow

$$f(x) \cong \sum_{k=1}^n b_k \sin kx$$

tal que

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

EJEMPLO: Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ x & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ \pi/2 & \text{si } x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

entonces

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi/2} x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \pi/2 dx \right] = \frac{3\pi}{16}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 \cos kx dx + \int_0^{\pi/2} x \cos kx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \pi/2 \cos kx dx \right]$$

$$= -\frac{1}{k^2 \pi} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{2} \right)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 \operatorname{sen} kx dx + \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} kx dx + \int_{\pi}^{\pi} \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} kx dx \right]$$

$$= -\frac{1}{k^2 \pi} \left(\operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} - \frac{k\pi}{2} \cos k\pi \right)$$

por lo tanto

$$f(x) = \frac{3\pi}{6} - \frac{1}{\pi} \cos x - \frac{1}{2\pi} \cos 2x - \frac{1}{9\pi} \cos 3x - \dots$$

$$+ \left(\frac{2+\pi}{2\pi} \right) \operatorname{sen} x - \frac{1}{9} \operatorname{sen} 2x + \left(\frac{3\pi-2}{9\pi} \right) \operatorname{sen} 3x - \dots$$

\Rightarrow

$$f(x) \cong 0.589 - 0.318 \cos x - 0.159 \cos 2x$$

$$+ 0.818 \operatorname{sen} x - 0.250 \operatorname{sen} 2x$$

$$x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$$

Ahora si $f(x)$ es periódica

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

pero sus sectores son conocidos solamente en un conjunto discreto de puntos igualmente espaciados, e.d., $2N+1$ puntos

$$-\pi, -\frac{(N-1)\pi}{N}, \dots, -\frac{\pi}{N}, 0, \frac{\pi}{N}, \frac{2\pi}{N}, \dots, \frac{(N-1)\pi}{N}, \pi$$

pero si

$$f(-\pi) = f(\pi)$$

entonces existen $2N$ datos independientes que diferencian los coeficientes de $2N$ términos de la aproximación. entonces

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \text{ por lo que } x_r = \frac{r\pi}{N}, \quad r = -N+1, -N+2$$

los valores $f(x_r) = f_r$, están dados. entonces, hay solamente $2N$ funciones

$$\begin{cases} 1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos Nx \\ \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \dots, \operatorname{sen}(N-1)x \end{cases}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x_r &= 0 \\ \cos(N-1)x_r &= \cos Nx_r \cos x_r \\ &= (-1)^r \cos x_r \\ &= \cos(N-1)x_r \end{aligned}$$

entonces

$$\sum_{r=-N+1}^N \operatorname{sen} jx_r \operatorname{sen} kx_r = 0 \quad j \neq k$$

$$\sum_{r=-N+1}^N \cos jx_r \cos kx_r = 0 \quad j \neq k$$

$$\sum_{r=-N+1}^N \operatorname{sen} jx_r \cos kx_r = 0 \quad j, k \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$$

ahora

$$\sum_{r=-N+1}^N \operatorname{sen}^2 kx_r = \sum_{r=-N+1}^N \cos^2 kx_r = N \quad k \neq 0, k \neq N$$

$$\sum_{r=-N+1}^N 1 = 2N, \quad \sum_{r=-N+1}^N \cos^2 Nx_r = 2N$$

\Rightarrow

$$f(x) \cong A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx) \quad \text{donde } n \neq N$$

por lo que

$$\sum_{r=-N+1}^N \left[f(x_r) - A_0 - \sum_{k=1}^n (A_k \cos kx_r + B_k \sin kx_r) \right]^2 = \text{minimo}$$

$$\Rightarrow$$

$$A_0 = \frac{1}{2N} \sum_{r=-N+1}^N f(x_r)$$

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{r=-N+1}^N f(x_r) \cos kx_r, \quad k \neq 0, N$$

$$B_k = \frac{1}{N} \sum_{r=-N+1}^N f(x_r) \sin kx_r,$$

$$A_N = \frac{1}{2N} \sum_{r=-N+1}^N f(x_r) \cos Nx_r, \quad \forall n \leq N$$

Pero, si $n=N$, entonces

$$A_0 = \frac{1}{2N} \left(\frac{1}{2} f_{-N} + f_{-N+1} + \dots + f_{-1} + f_0 + f_1 + \dots + f_{N-1} + f_N \right)$$

$$A_k = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{2} f_{-N} \cos kx_{-N} + f_{-N+1} \cos kx_{-N+1} + \dots + f_{-1} \cos kx_{-1} + f_0 \cos kx_0 + \right. \\ \left. + f_1 \cos kx_1 + \dots + f_{N-1} \cos kx_{N-1} + \frac{f_N \cos kx_N}{2} \right)$$

$$B_k = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{2} f_{-N} \sin kx_{-N} + f_{-N+1} \sin kx_{-N+1} + \dots + f_{-1} \sin kx_{-1} + f_0 \sin kx_0 + \right. \\ \left. + f_1 \sin kx_1 + \dots + f_{N-1} \sin kx_{N-1} + \frac{f_N \sin kx_N}{2} \right)$$

$$A_N = \frac{1}{2N} \left(\frac{1}{2} f_{-N} \cos Nx_{-N} + f_{-N+1} \cos Nx_{-N+1} + \dots + f_{-1} \cos Nx_{-1} + f_0 \cos Nx_0 + \right. \\ \left. + f_1 \cos Nx_1 + \dots + f_{N-1} \cos Nx_{N-1} + \frac{f_N \cos Nx_N}{2} \right)$$

¿Qué pasa si $f_{-N} = f_n \ni h = \frac{\pi}{N}$?

Podemos ver que las ecuaciones son idénticas si usamos la regla Trapezoidal para aproximación. esto es

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, k < n$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

y para el propósito de cálculo, tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \\ &= F(x) + G(x) \quad (\text{funcion par} + \text{funcion impar}) \end{aligned}$$

entonces como $x_{-r} = -x_r; x_0 = 0$

$$A_0 = \frac{1}{N} \left(\frac{F_0}{2} + F_1 + F_2 + \dots + F_{N-1} + \frac{F_N}{2} \right)$$

$$A_k = \frac{2}{N} \left(\frac{F_0}{2} + F_1 \cos kx_1 + F_2 \cos kx_2 + \dots + F_{N-1} \cos kx_{N-1} + \frac{F_N}{2} \cos kx_N \right)$$

$$A_N = \frac{1}{N} \left(\frac{F_0}{2} - F_1 + F_2 - \dots + (-1)^{N-1} F_{N-1} + (-1)^N \frac{F_N}{2} \right)$$

$$B_k = \frac{2}{N} (G_1 \sin x_1 + G_2 \sin x_2 + \dots + G_{N-1} \sin kx_{N-1})$$

Veamos que pasa para $N=6$

TABLA COSENO

	X	DATOS	$\cos x$	$\cos 2x$	$\cos 3x$	$\cos 4x$	$\cos 5x$	$\cos 6x$
0.605	0	$\frac{1}{2}(f_0 + f_0) = F_0$	1	1	1	1	1	1
1.245	$\pi/6$	$\frac{1}{2}(f_1 + f_1) = F_1$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	0	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	-1
1.300	$\pi/3$	$\frac{1}{2}(f_2 + f_2) = F_2$	1/2	-1/2	-1	-1/2	$1/2$	1
1.250	$\pi/2$	$\frac{1}{2}(f_3 + f_3) = F_3$	0	-1	0	1	0	-1
1.195	$2\pi/3$	$\frac{1}{2}(f_4 + f_4) = F_4$	-1/2	-1/2	1	-1/2	-1/2	1
1.095	$5\pi/6$	$\frac{1}{2}(f_5 + f_5) = F_5$	$-\sqrt{3}/2$	1/2	0	-1/2	$\sqrt{3}/2$	-1
0.535	π	$\frac{1}{2}(f_6 + f_6) = F_6$	-1	1	-1	1	-1	1
		$6 A_0$	$3 A_1$	$3 A_2$	$3 A_3$	$3 A_4$	$3 A_5$	$3 A_6$

TABLA SENO

	X	DATOS	$\text{sen } x$	$\text{sen } 2x$	$\text{sen } 3x$	$\text{sen } 4x$	$\text{sen } 5x$
0.075	$\pi/6$	$\frac{1}{2}(f_1 - f_1) = G_1$	1/2	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	1/2
0.100	$\pi/3$	$\frac{1}{2}(f_2 - f_2) = G_2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$
0.150	$\pi/2$	$\frac{1}{2}(f_3 - f_3) = G_3$	1	0	-1	0	1
0.145	$2\pi/3$	$\frac{1}{2}(f_4 - f_4) = G_4$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$
0.085	$5\pi/6$	$\frac{1}{2}(f_5 - f_5) = G_5$	1/2	$-\sqrt{3}/2$	1	$-\sqrt{3}/2$	1/2
			$3 B_1$	$3 B_2$	$3 B_3$	$3 B_4$	$3 B_5$

Ahora si esto lo vemos en forma empirica, se tiene

0	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
f	1.21	1.32	1.46	1.40	1.34	1.18	1.07	1.01	1.05	1.10	1.11	1.17	1.21
X	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$-5\pi/6$	$-2\pi/3$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/6$	0

Encontramos que los valores obtenidos son los siguientes

$A_0 = 1.204$	
$A_1 = 0.081$	$B_1 = 0.165$
$A_2 = 0.062$	$B_2 = 0.001$
$A_3 = 0.012$	$B_3 = 0.003$
$A_4 = 0.006$	$B_4 = -0.007$

Así encontramos los coeficientes de Fourier, con lo que se concluye este capítulo.

**CAPÍTULO
VIII**

EL SPLINE CÚBICO PARA LAS INTEGRALES DE FOURIER

En los temas vistos anteriormente, analizamos aspectos generales que nos ayudaran a formalizar nuestro objetivo principal de este trabajo, que es el cálculo de los coeficientes de Fourier por medio del Spline Cúbico.

Para lograr lo anterior, daremos tres puntos de vista distintos, que nos facilitaran el resumen de este trabajo.

EL SPLINE CÚBICO.

Calcular la integral

$$\int_a^b f(x) \cos wx dx$$

Aquí realizaremos un cambio, $f(x)$ la reemplazamos por el spline $s(x)$ donde

$$s(x) \Big|_{[x_{j-1}, x_j]} = M_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1} h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} \\ + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

⇒

$$h_j = x_j - x_{j-1} \quad j = 1, 2, \dots, N \text{ y } M_j$$

en este sentido M_j está definida por la continuidad de $s'(x)$ en x_j , $j=1, 2, \dots, N-1$.

Aquí tomamos los puntos de la siguiente forma

x	y
$a=x_0$	y_0
x_1	y_1
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮
$b=x_n$	y_n

de lo anterior, tenemos la siguiente ecuación

$$M_{j-1} \frac{h_j}{6} + M_j \frac{h_j + h_{j+1}}{3} + M_{j+1} \frac{h_{j+1}}{6} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}$$

junto con

$$s'(a) = f'(a)$$

$$s'(b) = f'(b)$$

ahora, integrando por partes, se tiene que

$$\int_a^b s(x) \cos wx dx = \frac{1}{w} s(x) \operatorname{sen} wx \Big|_a^b + \frac{1}{w} \int_a^b s'(x) \operatorname{sen} wx dx$$

$$\begin{aligned} u &= s(x) & v' &= \cos wx & u &= s'(x) & v' &= \operatorname{sen} wx \\ u' &= s'(x) & v &= \frac{\operatorname{sen} wx}{w} & u' &= s''(x) & v &= \frac{\cos wx}{w} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{w^2} s'(x) \cos wx \Big|_a^b - \frac{1}{w^2} \int_a^b s''(x) \cos wx dx$$

$$u = s''(x) \quad v' = \cos wx$$

$$u' = s'''(x) \quad v = \frac{\operatorname{sen} wx}{w}$$

$$- \frac{1}{w^3} s''(x) \operatorname{sen} wx \Big|_a^b + \frac{1}{w^3} \int_a^b s'''(x) \operatorname{sen} wx dx$$

pero, para s''' podemos aplicar la sustitución de los valores determinados al principio de este capítulo, esto es

$$\begin{aligned} \int_a^b s'''(x) \operatorname{sen} wx dx &= \frac{1}{w^3} \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{M_j - M_{j-1}}{h_j} \right) \operatorname{sen} wx dx \\ &= -\frac{1}{w^4} \sum_{j=1}^n \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j} (\cos x_j - \cos x_{j-1}) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \int_a^b y(x) \cos wx dx &= \left[\frac{y_N}{w} - \frac{M_N}{w^3} \left(1 - \frac{\text{sen } wh}{wh} \right) \right] (\text{sen } wb) \\
 &+ \left[-\frac{y_0}{w} + \frac{M_0}{w^3} \left(1 - \frac{\text{sen } wh}{wh} \right) \right] (\text{sen } wa) \\
 &+ \left[\frac{y_N - y_{N-1}}{w^2 h} + \left(\frac{2M_N + M_{N-1}}{6w^2} \right) h - \frac{M_N}{w^4 h} (1 - \cos wh) \right] (\cos wb) \\
 &+ \left[\frac{y_0 - y_1}{w^2} + \left(\frac{2M_0 + M_1}{6w^2} \right) h - \frac{M_0}{w^4 h} (1 - \cos wh) \right] (\cos wa) \\
 &- \frac{4 \text{sen}^2 wh}{w^4 h} \left(\sum_{j=1}^{N-1} M_j \cos wx_j \right)
 \end{aligned}$$

lo anterior es demasiado útil cuando wh es pequeña por los errores de redondeo, por lo tanto

$$\begin{aligned}
 f_k &= y_{k-1} - \frac{h^2}{6} M_{k-1} \quad k=1,2,\dots,N+1 \\
 \Rightarrow \\
 \Delta f_k &= f_{k+1} - f_k = \left(y_k - \frac{h^2}{6} M_k \right) - \left(y_{k-1} - \frac{h^2}{6} M_{k-1} \right) \\
 &= y_k - y_{k-1} - \frac{h^2}{6} (M_k - M_{k-1})
 \end{aligned}$$

ahora se tiene que

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 f_k &= \Delta(\Delta f_k) = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k \\
 &= (y_{k+1} - y_k) - \frac{h^2}{6} (M_{k+1} - M_k) - (y_k - y_{k-1}) - \frac{h^2}{6} (M_k - M_{k-1})
 \end{aligned}$$

--

$$= \left(\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\approx \delta^2 y_k} \right) - \frac{h^2}{6} \left(\frac{M_{k+1} + 2M_k - M_{k-1}}{\approx \delta^2 M_k} \right)$$

pero tenemos que

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k-1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} = \frac{h_{k+1}}{6} M_{k-1} + \frac{h_k + h_{k-1}}{2} M_k + \frac{h_k}{6} M_{k+1}$$

y además

$$\Delta^2 f_k = \delta^2 y_k = \frac{h^2}{6} \delta^2 M_k = h^2 M_k$$

entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} u_j \Delta^2 f_j &= u_1 \Delta^2 f_1 + u_2 \Delta^2 f_2 + \dots + u_{N-1} \Delta^2 f_{N-1} \\ &= 2u_0 f_1 - f_1 u_{-1} \dots \\ &\quad \dots - f_2 u_0 \dots + f_N u_{N-2} - 2f_N u_{N-1} + f_{N+1} u_{N+1} + \sum_{j=0}^{N-1} \Delta^2 u_{j-2} f_j \\ &= f_1 (2u_0 - u_{-1}) - f_2 u_0 \dots \\ &\quad \dots + f_N (u_{N-2} - 2u_{N-1}) \dots \\ &\quad \dots + f_N u_{N-1} + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta^2 u_{j-2} f_j \end{aligned}$$

aquí podemos realizar lo siguiente

Sea

$$u_j = \cos \omega x_j$$

entonces

$$\begin{aligned}\Delta^2 u_i &= u_{i,2} - 2u_{i,1} + u_i \\ &= \cos w(x_{i,2}) - 2 \cos w(x_{i,1}) + \cos w(x_i) \\ &= \cos w(x_{i,1} + h) - 2 \cos w(x_{i,1}) + \cos w(x_{i,1} - h)\end{aligned}$$

aplicando aquí una igualdad trigonométrica tenemos

$$\begin{aligned}&= \cos wx_{i,1} \cos wh - \operatorname{sen} wx_{i,1} \operatorname{sen} wh - 2 \cos wx_{i,1} \\ &+ \cos wx_{i,1} \cos wh - \operatorname{sen} wx_{i,1} \operatorname{sen} wh \\ &= 2 \cos wx_{i,1} (\cos wh - 1) \\ &- (1 - \cos wh) - \left(1 - \left(\frac{1 + \cos 2wh}{2} \right) \right) \\ &= -4 \operatorname{sen}^2 \frac{wh}{2} * \cos wx_{i,1}\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N-1} \cos wx_i (\Delta^2 f_i) &= \left(f_1 - f_2 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{wh}{2} f_1 \right) \cos wx_0 - f_1 \operatorname{sen} wh \operatorname{sen} wx_0 \\ &+ \left[(f_{N+1} - f_N) \cos wh + f_N (\cos 2wh - \cos wh) \right] \cos wx_N \\ &+ \left[(f_{N-1} - f_N) \operatorname{sen} wh + f_N (\operatorname{sen} 2wh - \operatorname{sen} wh) \right] \operatorname{sen} wx_N \\ &- 4 \operatorname{sen}^2 \frac{wh}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \cos wx_{i,1} f_i\end{aligned}$$

aquí se tiene que

..

$$\sum_{j=1}^{N-1} M_j$$

están expresados en términos de

$$\sum_{j=1}^{N-1} \left(y_j - \frac{h^2}{6} M_j \right) \cos wx_j$$

resolviendo para

$$\sum_{j=1}^{N-1} M_j \cos wx_j$$

y sustituyéndolo en la primera fórmula obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned} \int_a^b s(x) \cos wx dx &= \frac{h}{1 - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^2 \frac{wh}{2}} \left\{ [\alpha y_N - \beta M_N] \operatorname{sen} wb - [\alpha y_0 - \beta M_0] \operatorname{sen} wa \right. \\ &\quad + \left[\gamma y_N - \delta \left(y_{N-1} - \frac{h^2}{3} M_N - \frac{h^2}{6} M_{N-1} \right) \right] \cos wb \\ &\quad + \left[\gamma y_0 - \delta \left(y_1 - \frac{h^2}{3} M_0 - \frac{h^2}{6} M_1 \right) \right] \cos wa \\ &\quad \left. + \varepsilon \sum_{j=1}^{N-1} y_j \theta \cos wx_j \right\} \end{aligned}$$

donde $\theta = wh$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\theta} \left(1 - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} \right) \\ &= \frac{\theta}{12} \left(1 - \frac{2\theta^2}{15} + \frac{19\theta^4}{1680} - \frac{13\theta^6}{25200} + \frac{293\theta^8}{19958400} + \theta(\theta^{10}) \right) \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{h^2}{\theta^2} \left(1 - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \right)$$

$$= \frac{\theta h^2}{180} \left(1 - \frac{\theta^2}{21} + \frac{\theta^4}{1008} - \frac{\theta^6}{83160} + \frac{\theta^8}{10378368} + \theta(\theta^{10}) \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{(\theta_2)^2} \cos \theta \right)$$

$$= \frac{5}{12} - \frac{13\theta^2}{180} + \frac{353\theta^4}{60980} - \frac{31\theta^6}{113400} + \frac{\theta^8}{118272} + \theta(\theta^{10})$$

$$\delta = \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{(\theta_2)^2} \right)$$

$$= -\frac{1}{12} - \frac{\theta^2}{90} + \frac{5\theta^4}{12096} - \frac{\theta^6}{129600} + \frac{\theta^8}{11404800} + \theta(\theta^{10})$$

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}}{(\theta_2)^4}$$

$$= 1 - \frac{\theta^2}{6} + \frac{\theta^4}{80} - \frac{17\theta^6}{36240} + \frac{31\theta^8}{1814400} + \frac{(\theta^{10})}{2661120}$$

Ahora como

$$s'(a) = y_0$$

y

$$s'(b) = y_1$$

se tiene que

$$y_1 - y_0 - \delta \left(y_1 - \frac{h^2}{3} M_0 - \frac{h^2}{6} M_1 \right) = \frac{\varepsilon}{2} y_0 - \delta h y_0'$$

y

$$Z'_{N'} - \delta \left(y_{N-1} - \frac{h^2}{3} M_N - \frac{h^2}{6} M_{N-1} \right) = \frac{\varepsilon}{2} y_N - \delta h y'_N$$

Este mismo procedimiento se realiza para

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin wx dx &= \frac{h}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \frac{wh}{2}} \left\{ \left[\alpha y_N - \beta M_N \right] \cos wh + \left[\alpha y_0 - \beta M_0 \right] \cos wa \right. \\ &\quad + \left(\frac{\varepsilon}{2} y_N + \delta h y'_N \right) \sin wh \\ &\quad + \left(\frac{\varepsilon}{2} y_0 - \delta h y'_0 \right) \sin wa \\ &\quad \left. + \varepsilon \sum_{j=1}^{N-1} y_j \sin wx \right\} \end{aligned}$$

Hemos encontrado mediante el Spline Cúbico los Coeficientes de Fourier, que era el objetivo de este trabajo, pero también se pueden calcular aplicando la interpolación cuadrática, esto es:

Dado el intervalo $[a, b]$ cuya estructura es de $2n$ partes iguales de tamaño h , entonces

$$\begin{aligned} b &= a + 2nh \\ \ni \\ kh &= \theta \quad \text{con } x_r = a + rh, \quad r \in Z^+ = \mathbb{N} \\ \Rightarrow \\ \varphi_r &= \varphi(a + rh) \\ \varphi'_r &= \varphi'(a + rh) \\ \varphi''_r &= \varphi''(a + rh) \end{aligned}$$

cuya localización se encuentra dentro de

$$B_h = (x_r) = (x_r - h, x_r + h) = (x_{r-1}, x_r, x_{r+1})$$

por lo que podemos aplicar una ecuación cuadrática de la forma

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= .A + b(x - x_r) + C(x - x_r)^2 \\ \Rightarrow \\ \varphi(x_r) &= \varphi_r = .A\end{aligned}$$

entonces

$$\varphi_{r+1} = \varphi(x_{r+1}) = \varphi_r + Bh + Ch^2$$

$$\varphi_{r-1} = \varphi(x_{r-1}) = \varphi_r - Bh + Ch^2 \quad (\text{considerando que } h^2 = -h^2)$$

restando las ecuaciones anteriores

$$\begin{aligned}\varphi_{r+1} - \varphi_{r-1} &= 2Bh \\ \Rightarrow\end{aligned}$$

$$B = \frac{\varphi_{r+1} - \varphi_{r-1}}{2h}$$

y

$$\varphi_{r+1} + \varphi_{r-1} = 2\varphi_r + 2Ch^2$$

por lo que

$$C = \frac{\varphi_{r+1} + \varphi_{r-1} - 2\varphi_r}{2h^2}$$

Ahora, como tenemos que

$$\varphi(x) = .A + B(x - x_r) + C(x - x_r)^2$$

$$\varphi'(x) = B + 2C(x - x_r) \quad (\varphi''(x) = 2C)$$

$$\varphi'(x_r) = \varphi'_r = B = \frac{\varphi_{r+1} - \varphi_{r-1}}{2h}$$

entonces

..

$$\begin{aligned}\varphi'(x_{r+1}) &= \varphi'_{r+1} = B + 2Ch \\ &= \frac{\varphi_{r+1} - \varphi_{r-1}}{2h} + 2 \frac{(\varphi_{r+1} + \varphi_{r-1} - 2\varphi_r)h}{2h^2}\end{aligned}$$

∴

$$\varphi'_{r+1} = \frac{3\varphi_{r+1} + \varphi_{r-1} - 4\varphi_r}{2h}$$

y

$$\begin{aligned}\varphi'(x_{r-1}) &= \varphi'_{r-1} = B - 2Ch \\ &= \frac{\varphi_{r+1} - \varphi_{r-1}}{2h} - 2 \frac{(\varphi_{r+1} + \varphi_{r-1} - 2\varphi_r)h}{2h^2} \\ &= \varphi_{r+1} - \varphi_{r-1} - \frac{2\varphi_{r+1}}{2h} - 2\varphi_{r-1} + 4\varphi_r\end{aligned}$$

∴

$$\varphi'_{r-1} = 4\varphi_r - \frac{\varphi_{r+1}}{2h} - 3\varphi_{r-1}$$

Aplicando integración por partes, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} \operatorname{sen} kx \varphi(x) dx &= -\frac{\cos kx}{k} \varphi'(x) \Big|_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} + \frac{1}{k} \int_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} \cos kx \varphi'(x) dx \\ u &= \varphi(x) \quad v' = \operatorname{sen} kx \\ u' &= \varphi'(x) \quad v = -\frac{\cos kx}{k}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$= \frac{2C}{k^2} \cos kx \Big|_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} + \frac{\varphi''(x)}{k^2} \int_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} \operatorname{sen} kx$$

Entonces nuestra ecuación queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\int_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} \operatorname{sen} kx \varphi(x) &= -\frac{\cos kx_{r+1}}{k} \varphi_{r+1} + \frac{\cos kx_{r-1}}{k} \varphi_{r-1} + \frac{\operatorname{sen} kx_{r+1}}{k^2} \varphi'_{r+1} \\ &\quad - \frac{\operatorname{sen} kx_{r-1}}{k^2} \varphi'_{r-1} + \frac{2C}{k^2} (\cos kx_{r+1} - \cos kx_{r-1})\end{aligned}$$

∴

por lo tanto y sustituyendo los valores antes mencionados, se tiene que

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\cos kx_{r+1}}{k} \varphi_{r+1} + \frac{\cos kx_{r-1}}{k} \varphi_{r-1} \\
 & + \frac{\sin kx_{r+1}}{k^2} \left(\frac{3\varphi_{r+1} + \varphi_{r-1} - 4\varphi_r}{2h} \right) - \frac{\sin kx_{r-1}}{k^2} \left(\frac{-\varphi_{r+1} - 3\varphi_{r-1} + 4\varphi_r}{2h} \right) \\
 & + \frac{2}{k^3} \left(\frac{\varphi_{r+1} + \varphi_{r-1} - 2\varphi_r}{2h^2} \right) (\cos kx_{r+1} - \cos kx_{r-1}) \\
 & = \frac{(\varphi_{r+1} \cos kx_{r-1} - \varphi_{r-1} \cos kx_{r+1})}{k} - \left(\frac{\sin kx_{r+1} - \sin kx_{r-1}}{2hk^2} \right) (\varphi_{r+1} - \varphi_{r-1}) \\
 & + \left\{ \frac{\sin kx_{r+1} + \sin kx_{r-1} + \cos kx_{r+1} - \cos kx_{r-1}}{hk} \right\} \left(\frac{\varphi_{r+1} + \varphi_{r-1} - 2\varphi_r}{hk^2} \right)
 \end{aligned}$$

aquí aplicamos las siguientes igualdades

$$\cos kx_{r+1} = \cos\{k(x_r + h)\} = (kx_r + kh) = (kx_r + \varphi)$$

$$= \cos kx_r \cos \varphi + \sin kx_r \sin \varphi$$

$$\cos kx_{r-1} = \cos\{k(x_r - h)\} = (kx_r - kh) = (kx_r - \varphi)$$

$$= \cos kx_r \cos \varphi + \sin kx_r \sin \varphi$$

$$\sin kx_{r+1} = \sin\{k(x_r + h)\} = (kx_r + kh) = (kx_r + \varphi)$$

$$= \sin kx_r \cos \varphi + \sin \varphi \cos kx_r$$

$$\sin kx_{r-1} = \sin\{k(x_r - h)\} = (kx_r - kh) = (kx_r - \varphi)$$

$$= \sin kx_r \cos \varphi - \sin \varphi \cos kx_r$$

realizando algunas reducciones obtenemos

$$\int_{x_{r-1}}^{x_r} \text{sen} kx \varphi(x) dx = 2 \text{sen} kx_r (\varphi_{r-1} + \varphi_{r-1} - 2\varphi_r) \left(\frac{\cos \varphi - \frac{\text{sen} \varphi}{\varphi}}{k\varphi} \right) \\ + \cos kx_r (\varphi_{r-1} + \varphi_{r-1}) \frac{\text{sen} \varphi}{k\varphi} \\ + \frac{\cos kx_{r-1} (\varphi_{r-1}) - \cos kx_{r+1} (\varphi_{r+1})}{k}$$

por lo tanto

$$\int_a^b \text{sen} kx \varphi(x) dx = \sum_{r=1}^n \int_{x_{r-2}}^{x_{2r}} \text{sen} kx \varphi(x) dx \\ = \left\{ \frac{\cos ka\varphi(a) - \cos kb\varphi(b)}{k} \right\} \\ + \left\{ \frac{2(\cos \varphi - \frac{\text{sen} \varphi}{\varphi})}{k\varphi} \right\} \sum_{r=1}^n \text{sen} kx_{2r-1} (\varphi_{2r} + \varphi_{2r-2} - 2\varphi_{2r-1}) \\ + \frac{\text{sen} \varphi}{k\varphi} \sum_{r=1}^n \cos kx_{2r-1} (\varphi_{2r} - \varphi_{2r-2})$$

Pero

$$\sum_{r=1}^n \cos kx_{2r-1} (\varphi_{2r} - \varphi_{2r-2}) = -\varphi_0 \cos kx_1 + \varphi_{2n} \cos kx_{2n+1} \\ + \sum_{r=1}^n \varphi_{2r} (\cos kx_{2r-1} - \cos kx_{2n+1}) \quad (1)$$

Aquí se tiene que

$$\cos kx_{2r-1} = \cos \{k(x_{2r} - h)\} = (\cos kx_{2r} - kh) = (kx_{2r} - \varphi)$$

$$\begin{aligned}
&= \cos kx_{2r} \cos \varphi + \operatorname{sen} kx_{2r} \operatorname{sen} \varphi \\
-\cos kx_{2r-1} &= \cos\{k(x_{2r} + h)\} = (kx_{2r} + kh) = (kx_{2r} + \varphi) \\
&= \cos kx_{2r} \cos \varphi \mp \operatorname{sen} kx_{2r} \operatorname{sen} \varphi \\
&= \operatorname{sen} kx_{2r} \operatorname{sen} \varphi
\end{aligned}$$

entonces (1)

$$= -\varphi_0 \cos kx_1 + \varphi_{2n} \cos kx_{2n+1} + 2 \operatorname{sen} \varphi \sum_{r=1}^n \varphi_{2r} \operatorname{sen} kx_{2r} \quad (\text{i})$$

Análogamente, para el *sen*

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^n \operatorname{sen} kx_{2r-1} (\varphi_{2r} + \varphi_{2r-2} - 2\varphi_{2r-1}) &= \varphi_0 \operatorname{sen} kx_1 - \varphi_{2n} \operatorname{sen} kx_{2n+1} \\
&+ 2 \cos \varphi \sum_{r=1}^n \operatorname{sen} kx_{2r} \varphi_{2r} \\
&- 2 \sum_{r=1}^n \operatorname{sen} kx_{2r-1} \varphi_{2r-1} \quad (\text{ii})
\end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo (1) y (2) en la fórmula original, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b \operatorname{sen} kx \varphi(x) dx &= \left\{ \frac{\cos ka\varphi(a) - \cos kb\varphi(b)}{k} \right\} \\
&+ \left\{ 2 \cos \varphi \frac{(\cos \varphi - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\varphi})}{k\varphi} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\varphi} \right\} \sum_{r=1}^n \operatorname{sen} kx_{2r} (2\varphi_{2r}) \\
&- \left\{ 4 \frac{(\cos \varphi - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\varphi})}{k\varphi} \right\} \sum_{r=1}^n \operatorname{sen} kx_{2r-1} (2\varphi_{2r-1})^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{\left(2 \cos \varphi - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\varphi} \right)}{k \varphi} \right\} [\operatorname{sen} k(a+h)\varphi(a) - \operatorname{sen} k(a+b)\varphi(b)]^* \\
& + \frac{\operatorname{sen} \varphi}{k \varphi} [-\operatorname{cos} k(a+h)\varphi(a) + \operatorname{cos} k(a+b)\varphi(b)]^*
\end{aligned}$$

pero

$$\operatorname{sen} k(a+h) = \operatorname{sen} ka \cos \varphi + \operatorname{cos} ka \operatorname{sen} \varphi$$

$$\operatorname{sen} k(b+h) = \operatorname{sen} kb \cos \varphi + \operatorname{cos} kb \operatorname{sen} \varphi$$

$$\operatorname{cos} k(a+h) = \operatorname{cos} ka \cos \varphi - \operatorname{sen} ka \operatorname{sen} \varphi$$

$$\operatorname{cos} k(b+h) = \operatorname{cos} kb \cos \varphi - \operatorname{sen} kb \operatorname{sen} \varphi$$

entonces, sustituyendo en * estas quedan como sigue

$$\begin{aligned}
& + \left\{ 2 \operatorname{cos} \varphi \frac{\left(\operatorname{cos} \varphi - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\varphi} \right) \operatorname{sen}^2 \varphi}{k \varphi} \right\} [\operatorname{sen} ka \varphi(a) - \operatorname{sen} kb \varphi(b)] \\
& + \left\{ 2 \operatorname{sen} \varphi \frac{\left(\operatorname{cos} \varphi - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\varphi} \right) \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \varphi}{k \varphi} \right\} [\operatorname{cos} ka \varphi(a) - \operatorname{cos} kb \varphi(b)]
\end{aligned}$$

por lo tanto la fórmula principal se transforma en

$$\begin{aligned}
\int_a^b \operatorname{sen} kx \varphi(x) dx & = \left\{ 1 + \operatorname{sen} \varphi \frac{\operatorname{cos} \varphi}{\varphi} - 2 \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\varphi^2} \right\} \left[\frac{\operatorname{cos} ka \varphi(a) - \operatorname{cos} kb \varphi(b)}{k} \right] \\
& + \left\{ 1 + \frac{\operatorname{cos}^2 \varphi - 2 \operatorname{sen} \varphi \frac{\operatorname{cos} \varphi}{\varphi}}{k \varphi} \right\} \left[\operatorname{sen} ka \varphi(a) + 2 \sum_{r=1}^n \operatorname{sen} kx_r \varphi(x_r) - \operatorname{sen} kb \varphi(b) \right]
\end{aligned}$$

$$- \left\{ \frac{(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\varphi})}{k \varphi} \right\} \sum_{r=1}^n \operatorname{sen} k x_{2r-1} \varphi(x_{2r-1})$$

pero tenemos que

$$\begin{aligned} & - \operatorname{sen} ka \varphi(a) + 2 \sum_{r=1}^n \operatorname{sen} k x_{2r} \varphi(x_{2r}) - \operatorname{sen} kb \varphi(b) \\ & = 2 \sum_{r=1}^n \operatorname{sen} k x_{2r} \varphi(x_{2r}) - \operatorname{sen} ka \varphi(a) - \operatorname{sen} kb \varphi(b) \\ & = 2(\text{la suma de todas las coordenadas pares de la curva } y = \operatorname{sen} ka \varphi(a)) \\ & \quad - \text{la primera y la ultima coordenada} \\ & = 2S_{2r} - \operatorname{sen} ka \varphi(a) - \operatorname{sen} kb \varphi(b) \end{aligned}$$

aquí tenemos además que

S_{2r-1} = suma de todas las coordenadas impares de la curva $y = \varphi(x) \operatorname{sen} kx$

$$\sum_{r=1}^n \varphi(x_{2r-1}) \operatorname{sen} k x_{2r-1}$$

por lo tanto

$$\int_a^b \operatorname{sen} kx \varphi(x) dx = h \left[\alpha \{ \cos ka \varphi(a) - \cos kb \varphi(b) \} + \beta S_{2r} + \delta_{2r-1} \right]$$

o

$$\alpha = \frac{1}{\varphi} + \frac{\cos \varphi \operatorname{sen} \varphi}{\varphi^2} - 2 \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\varphi^3}$$

pero

$$\frac{1}{k} = \frac{h}{\varphi} = \frac{h}{kh}$$

entonces

$$\beta = 2 \left[\left(\frac{1 + \cos^2 \varphi}{\varphi^2} \right) - 2 \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\varphi^3} \right]$$

$$\delta = 4 \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi^3} - \frac{\cos \varphi}{\varphi^2} \right)$$

esta es la ecuación que reemplaza a la fórmula de Simpson, aún cuando k es grande, pero que pasa si k es pequeña, es decir, cuando $\varphi \rightarrow 0$; en este caso se tiene que

$$\alpha = \frac{2\varphi^3}{45} - \frac{2\varphi^5}{315} + \frac{2\varphi^7}{4725}$$

$$\beta = \frac{2}{3} + \frac{2\varphi^2}{15} - \frac{4\varphi^4}{105} + \frac{2\varphi^6}{567} - \frac{4\varphi^8}{22275}$$

$$\gamma = \frac{4}{3} - \frac{2\varphi^2}{15} + \frac{\varphi^4}{270} - \frac{\varphi^6}{11340} + \frac{\varphi^8}{997920}$$

\Rightarrow

$$\alpha \rightarrow 0; \quad \beta \rightarrow \frac{2}{3}; \quad \gamma \rightarrow \frac{1}{3}$$

por lo tanto

$$\int_a^b \sin kx \varphi(x) dx = h \left[\frac{2}{3} S_{2r} + \frac{4}{3} S_{2r-1} \right] = \frac{h}{3} [2S_{2r} + 4S_{2r-1}]$$

que es la fórmula de Simpson.

Por último, veamos que pasa con el caso de la interpolación lineal

Sean

$$h = \frac{x_N - x_0}{N} = \frac{b - a}{N}$$

$$y = f(x) = f(x_n) + \frac{(x - x_n)}{h} (f(x_{n+1}) - f(x_n))$$

..

entonces

$$\int_a^b f(x) \cos wx dx = (\text{puntos interiores}) + (\text{puntos extremos})$$

esto es

$$\int_a^b f(x) \cos wx dx = C_1 + C_2$$

donde

$$C_1 = y \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) \cos wx_n$$

$$C_2 = f(x_0) \left\{ -\operatorname{sen} \frac{wx_0}{w} + Z \operatorname{sen} w \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \right\}$$

$$+ f(x_N) \left\{ \operatorname{sen} \frac{wx_N}{w} - Z \operatorname{sen} w \left(x_N - \frac{h}{2} \right) \right\}$$

o

$$y = \frac{4}{w^2 h} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{wh}{2} \right)$$

$$Z = \frac{2}{w^2 h} \operatorname{sen} \left(\frac{wh}{2} \right)$$

pero C_1 es similar a la forma Trapezoidal, salvo en la sustitución de wh por y .

De la misma forma para

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen} wx dx$$

donde

$$f(x) = f(x_n) + \frac{(x - x_n)}{h} (f(x_{n+1}) - f(x_n))$$

entonces

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen} wx dx = \int_a^b f(x) \operatorname{sen} wx dx \cong S_1 + S_2$$

Por lo tanto

$$S_1 = y \sum_{n=1}^{N-1} f(x_n) \operatorname{sen} wx_n$$

y

$$S_2 = f(x_0) \left\{ \cos \frac{wx_0}{w} + Z \cos w \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \right\} \\ + f(x_N) \left\{ -\cos \frac{wx_N}{w} + Z \cos w \left(x_N - \frac{h}{2} \right) \right\}$$

Aquí es importante considerar que $|wh| \geq \pi$, por que si no, entonces no se tienen las identidades anteriores, esto es

$$i) \quad \text{si } wh = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{sen}^2 \left(\frac{wh}{2} \right) \cong 0$$

$$ii) \quad \text{si } wx_0 = (2j+1) \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \text{y } wh = k\pi$$

\Rightarrow

$$\cos wx_n \cong 0$$

$$iii) \quad \text{si } wx_0 = j \in \pi, \quad \text{y } wh = k\pi$$

\Rightarrow

$$\operatorname{sen} wx_n \cong 0$$

Ahora, retomando la interpolación cuadrática de la siguiente forma

Sea $x \in [x_n, x_{n+1}]$, y que la función está dada por

$$y(x) = y(x_n) + \left\{ \frac{x - x_n}{h} \right\} f(x_{n+1}) - f(x_n) + a_n (x - x_n)(x - x_{n+1})$$

tomemos los siguientes puntos

x_{n-1}	$f(x_{n-1})$
x_n	$f(x_n)$
x_{n+1}	$f(x_{n+1})$
x_{n+2}	$f(x_{n+2})$

Entonces, para la función

$$\int_a^b f(x) \cos wx dx$$

la contribución será

$$a_n \left\{ \frac{x_{n+1} - x_n}{w^2} \right\} [\cos wx_{n+1} + \cos wx_n] - \left(\frac{2}{w^3} \right) [\sin wx_{n+1} - \sin wx_n]$$

Pregunta: ¿Bajo qué condiciones esta contribución se anula?

Respuesta.- a) cuando

$$\cos wx_{n+1} = -\cos wx_n$$

\Rightarrow

$$wh = (2k + 1)\pi$$

\Rightarrow

$$\sin wx_{n+1} = -\sin wx_n$$

\therefore

$$\sin wx_n = 0$$

$$\Rightarrow wx_n = j\pi$$

por lo anterior necesitamos pedir que

$$\cosh = (2k + 1)\pi$$

$$wx_n = j\pi$$

Para la función

$$\int_a^b f(x) \sin wx dx$$

la contribución de a_n está dada por

$$a_n \left\{ \frac{x_{n+1} - x_n}{w^2} \right\} [\text{sen } wx_{n+1} + \text{sen } wx_n] + \left(\frac{2}{w^3} \right) [\cos wx_{n+1} - \cos wx_n]$$

Pregunta: ¿Bajo que condiciones esta contribución se anula?

Respuesta.-

$$\text{sen } wx_{n+1} = -\text{sen } wx_n$$

⇒

$$\text{sen } wx_n = 0$$

⇒

$$wx_n = j\pi, j \in \mathbb{Z}$$

y

$$\cos wx_{n+1} = \cos wx_n$$

⇒

$$wh = (2k+1) \frac{\pi}{2}$$

entonces

$$\int_{x_0}^x f(x) \cos wx dx \cong C_1 + C_2$$

$$\cong \left\{ \frac{4}{w^2 h} \right\} (-1)^j \left[\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^j f(x_0 + nh) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (-1)^N f(x_0 + Nh) \right] \text{ con } h = (2k+1) \frac{\pi}{w}$$

y

$$\int_{x_0}^x f(x) \text{sen } wx dx \cong \left\{ \frac{4}{w^2 h} \right\} (-1)^j \left[\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^j f(x_0 + nh) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (-1)^N f(x_0 + Nh) \right] \text{ con } x_N = x_0 + Nh$$

..

CONCLUSIÓN

Vistos los temas donde se analizaron los Coeficientes de Fourier, así como el cálculo de las integrales, queda demostrado que la técnica de Interpolación con Splines (Polinomios Cúbicos por Pedazos), es lo más adecuado para obtener la mejor aproximación a cualquier función continua con un polinomio de grado fijo.

Además de obtener la mejor aproximación al integrar los Splines de la función en cuestión, ya que existen funciones de las cuales no se pueden obtener su integral analítica, pero si obtener una aproximación numérica de cierto grado de precisión, fijado de antemano.

Asimismo, vemos las ventajas que se obtienen con las funciones trigonométricas Seno y Coseno, ya que se prueba que son funciones ortogonales, así como el beneficio que se tiene al introducir polinomios ortogonales en el contexto inicial.

BIBLIOGRAFÍA

- 1.- ANÁLISIS NUMÉRICO.- Richard I. Burden.
Editorial Iberoamérica.
- 2.- APPLIED NUMERICAL ANALYSIS.- Curtis F. Gerald-Patrick O. Whetley.
Editorial Addison-Wesley.
- 3.- ELEMENTARY NUMERICAL ANALYSIS AND ALGORITHMIC APPROACH.-
S.D. Conte-Carl de Boor.
Editorial Mc. Graw-Hill.
- 4.- INTRODUCTION TO NUMERICAL ANALYSIS.- F.B. Hildebrand.
Editorial Tata Mc. Graw-Hill.
- 5.- NUMERICAL ALGORITHMS WITH C.- Gisela Engeln-Müllges & Frank Uhlig.
Editorial Springer-Verlag.
- 6.- NUMERICAL ANALYSIS.- Ian Jacques & Colin Judd.
Editorial Chapman and Hall.
- 7.- NUMERICAL MATHEMATICS, THEORY AND COMPUTER APPLICATIONS.-
Carl-Erik Fröberg.
Editorial Mc. Graw-Hill.
- 8.- NUMERICAL METHODS FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS.- Richard W.
Hamming.
Editorial Dover.
- 9.- NUMERICAL METHODS, SOFTWARE AND ANALYSIS.- Jhon R. Rice.
Editorial Mc. Graw-Hill.

TESIS URGENTES

ROBERTO MOYA

Offset * Libros * Folletos * Masters

Rep. de Cuba 99 Desp. 24

Col. Centro Historico C.P. 06020

México, D.F. Aun costado de

Santo Domingo

PRESUPUESTOS GRATIS

Tel. 5521-9800