

47



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Quimica



BALANCEO DE

EXAMENES PROFESIONALES  
FACULTAD DE QUIMICA

ECUACIONES QUIMICAS

TESIS

Que para obtener el Título de

INGENIERO QUIMICO

p r e s e n t a

FRANCISCO JAVIER FERNANDEZ MADINAVEITIA



México D. F.

230844  
2000



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

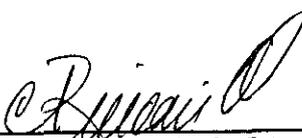
JURADO ASIGNADO:

Presidente: Prof. Cesar Alejandro Rincón Orta  
Vocal: Prof. S. Gustavo Garduño Sánchez  
Secretario: Prof. Elizabeth Nieto Calleja  
1<sup>er</sup> Suplente: Prof. José Agustín Texta Mena  
2<sup>o</sup> Suplente: Prof. José Agustín Panting Magaña

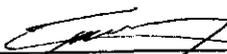
Sítio donde se desarrolló el tema:

Facultad de Química, U.N.A.M.

Asesor del tema:

  
Prof. Cesar Alejandro Rincón Orta

Supervisor Técnico:

  
Prof. Caritino Moreno Padilla

Sustentante:

  
Francisco Javier Fernández Madinaveitia

## Índice

Prólogo	1
Capítulo I. El concepto de Número de Oxidación	3
Capítulo II Ecuaciones Iónicas Redox	7
II.i) Balanceo de Ecuaciones Iónicas Redox	8
II.ii) Tabla de Balanceo por el Método Ion – Electrón	10
Capítulo III Óxido Reducción	11
III.i) Oxidación – Reducción	12
III.ii) Balanceo de Ecuaciones Redox	13
III.ii) Tabla de Balanceo por el Método Redox	15
Capítulo IV Generalidades de los Métodos Químicos para el Balanceo de Reacciones Químicas	16
IV.i) Algo para Memorizar	17
IV.ii) Comparación entre los Métodos Químicos para el Balanceo de Reacciones Químicas	18
IV.iii) Ejemplos de Balanceo de Reacciones por estos Métodos	19
IV.iv) Breve Discusión sobre estos Métodos	27
Capítulo V Método Algebraico para Balancear Ecuaciones Químicas	34
V.i) Fundamento Matemático	35
V.i.i) Ejemplos	48
V.ii) Balanceo de Reacciones Químicas	52
V.iii) Ejemplos Detallados	55
Capítulo VI Ejemplos de Balanceo Algebraico	61
Apéndice A	84
Apéndice B	95
Conclusiones	98
Bibliografía	101

## PRÓLOGO

## **Sobre el balanceo de ecuaciones que representan reacciones químicas**

En muchas ocasiones conviene representar una reacción química por medio de una expresión en la que aparecen las fórmulas de los reactivos por un lado y las de los productos por el otro. Los primeros se separan de los segundos por una flecha que indica el sentido natural de la reacción.

Los coeficientes que anteceden a cada fórmula están pensados para representar las cantidades de unos y otros, por lo que deben ser tales que satisfagan la premisa fundamental que asegura que en toda la reacción química las cantidades de los elementos se conserven sin cambio y por lo tanto el número de átomos de cada especie química debe mantenerse sin variación. Es decir, para cada elemento, el número de átomos que esté presente en los reactivos debe coincidir con el de los productos.

Calcular estos coeficientes de modo que cumplan la condición anterior, es lo que se conoce genéricamente como el problema de balancear una ecuación.

En este trabajo se analizan brevemente los llamados "métodos químicos" para balancear reacciones y se describe el procedimiento algebraico, que para el caso en el que lo único que interese sea la asignación de los coeficientes, resuelve todos los problemas de balanceo de reacciones químicas – aún los que son llamados "reacciones de estequiometría confusa", que en algunos casos se usan como "toritos" o retos para los balanceadores y aún suelen usarse para asignar tareas que den "puntos a quienes los resuelvan".

# CAPÍTULO I

## El concepto de número de oxidación.

El número de oxidación (o estado de oxidación<sup>1</sup>) puede ser definido como el número de electrones que un átomo cede, gana o comparte con otro para formar enlaces y moléculas. Este número puede ser positivo, negativo o cero. Cuando el número de oxidación es cero, se puede considerar que el átomo está en estado libre neutro. Cuando este es positivo, es decir, con una carga mayor que cero, indica que el átomo tiene menos electrones que en su estado neutro. De la misma manera, cuando este tiene una carga negativa, indica que tiene un número mayor de electrones que cuando está en estado neutro. Obviamente, se observa que el electrón tiene carga negativa.

El número de oxidación de un átomo es igual al número de electrones que ha ganado o perdido para formar su ión. Tomemos el ejemplo del cloruro de sodio, cuya fórmula es NaCl. En este caso, el sodio ha cedido un electrón, por lo que su número de oxidación es +1, y se puede representar  $\text{Na}^+$ . De la misma manera, al formar un enlace con el cloro, este último gana un electrón, por lo que su carga ahora es de -1, representado por  $\text{Cl}^-$ . En el caso del agua,  $\text{H}_2\text{O}$ , podemos observar algo similar, ya que los hidrógenos ceden un electrón cada uno, representándose su fórmula como  $\text{H}_2^+$ , lo que es el equivalente a decir que tenemos dos  $\text{H}^+$ . El oxígeno, por su parte, y al ser sólo un átomo, recibe una carga de -2, quedando como  $\text{O}^{2-}$ .

Cabe aclarar que la separación de cargas es un poco arbitraria, ya que en realidad, los electrones son compartidos entre los átomos, pero la diferencia de electronegatividades confieren un mayor tiempo de posesión de los mismos por parte del átomo en el que mayor sea. Esto se puede ver de manera mas clara en los enlaces covalentes, donde los electrones son compartidos de manera muy similar, y el número de oxidación se asigna dependiendo de las

---

<sup>1</sup> Debido a la polémica y contradicciones encontradas en libros con respecto a estos dos términos, se utilizarán indistintamente en esta tesis.



El número de oxidación asignado a un átomo es siempre entero, ya sea que este se presente en forma iónica o en compuesto. Este valor permite seguir el comportamiento de los electrones en las reacciones. Estos números tienen una gran importancia y utilidad en la química, ya sea para escribir fórmulas, predecir reacciones y propiedades de los compuestos formados, como herramienta en el balanceo de reacciones, por mencionar algunos.

Las reglas generales para asignar números de oxidación se presentan en la siguiente tabla<sup>3</sup>:

1. Todos los elementos en estado libre (no combinados con otros elementos) tienen un número de oxidación de cero. (i.e. Na, Cu, H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, entre otros).
2. H tiene un estado de oxidación de +1, excepto en combinación con metales, en donde toma el valor de -1 (i.e. NaH, CaH<sub>2</sub>, entre otros).
3. El oxígeno toma un valor de -2, excepto en los peróxidos, en donde es -1 y en el OF<sub>2</sub>, en donde es +2.
4. El número de oxidación de un elemento metálico en un compuesto iónico, es siempre positivo.
5. Cuando se tiene un enlace covalente, el número de oxidación del elemento más electronegativo es negativo.
6. La suma algebraica de los números de oxidación debe ser cero.
7. La suma algebraica del número de oxidación de un ión poliatómico, es igual a la carga del ión.

---

<sup>3</sup> ídem

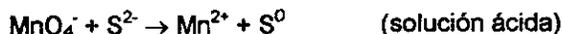
## CAPÍTULO II

## Ecuaciones iónicas redox:

La principal diferencia entre el balanceo de ecuaciones de tipo iónicas redox y ecuaciones redox, es el manejo de los iones. Adicionalmente a tener el mismo número de elementos a cada lado de la ecuación, las cargas netas también deben de ser iguales. Al hacer la asignación de los números de oxidación, se debe considerar la carga de los iones. En muchos casos, el balanceo de ecuaciones por este método es mucho más sencillo que por redox.

Para este tipo de balanceo, existen muchos métodos, pero el mas conocido es el método del ion electrón, por lo que será el que se ilustre a continuación.

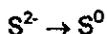
Para la explicación de este método, se tomará la reacción del ion permanganato con el ion del azufre.<sup>4</sup>



1. Se escriben las dos semirreacciones, una conteniendo el elemento que se oxida y la otra el que se reduce.



2. Se balancean los elementos que no sean ni oxígeno ni hidrógeno.
3. A continuación se balancean el oxígeno y el hidrógeno, recordando que la solución es ácida. La oxidación no requiere de O ni de H, pero si requiere de  $4\text{H}_2\text{O}$  al lado derecho y  $8\text{H}^+$  al lado izquierdo.



---

<sup>4</sup> Hein. Best. Pattison. Arena. "Introduction to General, Organic and Biochemistry".

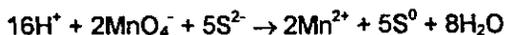
4. Se balancea cada semirreacción eléctricamente con electrones.



5. Se iguala la ganancia y pérdida de electrones, multiplicando igualando la cantidad de electrones



6. Se suman algebraicamente las dos semirreacciones cancelando los electrones de cada lado para obtener la ecuación balanceada.



*Nótese que ambos lados de la ecuación tienen la misma carga de +4 y los números de átomos de cada elemento están balanceados.*

A continuación se presenta la tabla general de balanceo por este método:<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup> "Química", Charles E. Mortimer, ed. Iberoamericana, México 1983

### Método del ion-electrón para balancear ecuaciones de óxido reducción

1. Divida la ecuación en dos ecuaciones parciales esquemáticas.
2. Balancee los átomos que cambian sus números de oxidación en cada ecuación parcial.
3. Equilibre los átomos de O e H en cada ecuación parcial.
  - a) En las reacciones de solución ácida:
    - i) Por cada átomo de oxígeno que se necesita, agregue una molécula de  $H_2O$  en el lado de la ecuación parcial que presente la deficiencia de oxígeno.
    - ii) Agregue  $H^+$  donde se necesite equilibrar el hidrógeno.
  - b) En las reacciones de solución alcalina:
    - i) Por cada átomo de oxígeno que se necesita, agregue dos iones de  $OH^-$  al lado de la ecuación parcial que es deficiente en O y agregue una molécula de  $H_2O$  al lado opuesto.
    - ii) Por cada átomo de hidrógeno que se necesita agregue una molécula de agua al lado de la ecuación parcial que es deficiente en H y agregue un ion  $OH^-$  al lado opuesto.
4. A cada ecuación parcial, agregue electrones en tal forma que la carga neta sobre el lado izquierdo de la ecuación sea igual a la carga neta del lado derecho.
5. Si es necesario, multiplique una o ambas ecuaciones parciales por factores que igualen la cantidad de electrones perdidos en una ecuación parcial y la cantidad de electrones ganados en la otra.
6. Sume las ecuaciones parciales. En la adición, cancele los términos comunes en ambos lados de la ecuación final.

## CAPÍTULO III

## Oxidación-Reducción:

La oxidación-reducción, también llamada redox<sup>6</sup>, es un proceso químico en el cual el número de oxidación de un elemento cambia. El proceso involucra la transferencia completa de electrones en el caso de enlaces iónicos o solo la transferencia parcial de electrones para formar enlaces covalentes.

Se llama oxidación al incremento en el valor del número de oxidación de un elemento debido a la pérdida de electrones. De manera inversa, la reducción es la disminución en el valor del número de oxidación de un átomo por la ganancia de electrones., por ejemplo, una oxidación es cuando el valor del número de oxidación varía de 0 a +1, o de -3 a 0, o de +2 a +3, por mencionar algunos. El cambio inverso, es decir, de 0 a -1, y demás, es la reducción. Cabe mencionar que uno se debe dar junto con el otro.

***Oxidación: Aumento en el número de oxidación.***

***Pérdida de electrones.***

***Reducción: Decremento en el número de oxidación.***

***Ganancia de electrones.***

En una reacción química, la sustancia que causa el incremento en el número de oxidación de otra, se conoce como **agente oxidante**. La sustancia que provoca la disminución del número de oxidación de otra, es llamada **agente reductor**.

---

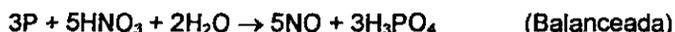
<sup>6</sup> Oxidación-reducción y redox se utilizarán de manera indistinta en el presente trabajo.

• Balanceo de ecuaciones<sup>7</sup> Redox:

Existen muchas ecuaciones redox que pueden ser balanceadas por simple inspección, o por prueba y error (tanteo):



El balanceo de este tipo de ecuaciones es simple, por lo que ahora se presenta un caso que ya no lo es tanto:



Para este caso, el método del tanteo puede llegar a tomar un tiempo no tan corto, lo cual es totalmente innecesario.

Un método sistemático de balanceo de reacciones de óxido reducción basado en la transferencia de electrones de las sustancias que se oxidan o se reducen es el conocido como "Método Redox". Tomemos en consideración la siguiente reacción:

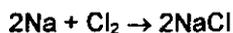


En esta reacción, cada sodio que participa pierde un electrón (se oxida), mientras que cada cloro lo gana (se reduce). Como la molécula de cloro es diatómica, son dos los electrones que va a ganar, por lo que son necesarios dos átomos de sodio para proveerlos.

---

<sup>7</sup> Nótese que se usa el término ecuación en lugar de reacción, tal y como aparece en Hein. Best. Pattison. Arena. "Introduction to General, Organic and Biochemistry".

Esta reacción se puede escribir como dos semirreacciones, una de oxidación y otra de reducción:



Como se puede observar, los electrones intercambiados se colocan como reactivos o productos en las semirreacciones, ya para que en ambos casos sean los mismos, se multiplica una semirreacción por los electrones en la otra y viceversa, así, a la hora de sumarlas, de manera algebraica, estos se eliminan, quedando la reacción balanceada.

La manera más práctica de localizar los elementos que se oxidan o se reducen, es la de observar cuáles son los números de oxidación que cambian, y con ellos hacer las semirreacciones, considerando a los electrones como cargas negativas y colocándolos a sus lados correspondientes.

Cuando en la reacción se hayan presentes elementos que no son sujetos a esta modificación en su número de oxidación, es necesario que, después de haber balanceado las sustancias que se oxidaron o redujeron, se balanceen sencillamente por tanteo<sup>8</sup>, cuidando de no alterar los coeficientes que ya se obtuvieron.

Los pasos generales para este método se presentan a continuación:

---

<sup>8</sup> Este paso puede llegar a no ser tan sencillo como se plantea.

1. Identificar los números o estados de oxidación de cada elemento.
2. Identificar que elementos cambian su número de oxidación cuando pasan de reactivos a productos.
3. Con los elementos que cambian su número de oxidación, plantear las semirreacciones en el orden que sea.
4. Realizar el balance de masa si es necesario, esto es, si el elemento que cambia su número de oxidación aparece más de una vez, realizar primero un balance de masa.
5. Realizar el balance de cargas planteando las desigualdades pertinentes, agregando electrones como cargas negativas para convertir la desigualdad en igualdad.
6. Multiplicar por los factores pertinentes de manera que el número de electrones perdidos y ganados se iguale.
7. Sumar las semirreacciones y verificar que los electrones se anulen.
8. Anotar los coeficientes obtenidos en la reacción general en las sustancias que hayan cambiado sus números de oxidación en el proceso redox.
9. Balancear por tanteo lo que no haya cambiado de estado de oxidación.

La mayor parte de la literatura sobre este método y el de ion electrón, presenta casos simples, en los que solo un elemento se oxida y solo un se reduce, o que el número de oxidación de este es siempre el mismo. Para no abundar tanto en ejemplos en cada uno de los métodos, los ejemplos atípicos se presentarán más adelante.

## CAPÍTULO IV

### Algo para memorizar:

A continuación se presenta una lista simple de algunos conceptos que se pueden memorizar para simplificar los métodos químicos de balance de reacciones así como para predecir reacciones:

- a) Si se reduce un halógeno libre, el producto de la reducción debe ser el ion halogenuro (carga = 1-).
- b) Si se oxida un metal la valencia siempre será positiva.
- c) Las reducciones del ácido nítrico concentrado producen  $\text{NO}_2$ , mientras que la reducción del ácido nítrico diluido puede producir  $\text{NO}$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{NH}_4^+$  u otros productos, según la naturaleza del agente reductor y del grado de dilución.
- d) El ion permanganato,  $\text{MnO}_4^-$ , se reduce a  $\text{Mn}^{2+}$  en solución ácida. El producto de reducción del permanganato en solución neutra o alcalina puede ser  $\text{MnO}(\text{OH})$ ,  $\text{MnO}_2$  o  $\text{MnO}_4^{2-}$ .
- e) Si se reduce un peróxido, el producto de reducción debe contener oxígeno en el estado de oxidación 2-. Por ejemplo el agua o el  $\text{OH}^-$ . Si se oxida un peróxido, se forma oxígeno molecular.



- f) El dicromato,  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ , se reduce en solución ácida hasta  $\text{Cr}^{3+}$ .

- Comparación entre los métodos químicos de balanceo de reacciones:<sup>9</sup>

Ambos métodos conducen a la reacción balanceada. El método del ion - electrón tiene dos ventajas sobre el redox:

1. Permite identificar a aquellas especies de un sistema químico que reaccionan de aquellas que no lo hacen. El uso de las fórmulas completas sólo es útil cuando se calculan las masas que reaccionan.

2. Las medias reacciones dadas, gracias a las ecuaciones parciales del método del ion - electrón, en realidad pueden ocurrir independientemente. Muchas reacciones de oxidación reducción pueden llevarse a cabo como procesos de celdas galvánicas para producir un potencial eléctrico. Esto puede hacerse colocando el agente reductor y el agente oxidante en frascos separados y estableciendo las conexiones eléctricas entre ambos. Se ha encontrado que la reacción que tiene lugar en cada frasco corresponde exactamente a una reacción parcial escrita de acuerdo con las reglas para el método del ion - electrón.

Aunado a estas razones de fundamento químico, está la ventaja de que el método del ion - electrón es más simple de aplicar que el método redox, y esto hace que sea más rápido de obtener la reacción balanceada.

Algunos químicos prefieren utilizar el método del ion - electrón para las reacciones de oxidación - reducción que se llevan a cabo en soluciones acuosas diluidas, en donde los iones libres tienen existencia más o menos independiente, y utilizan el método del estado de oxidación

---

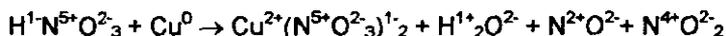
<sup>9</sup> Jerome L. Rosenberg, L. M. Epstein. "Química general" Serie Schaum

o redox para las reacciones de oxidación - reducción entre sustancias químicas sólidas, o para las reacciones en medios ácidos concentrados.

### Algunos ejemplos más complejos:

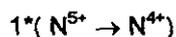
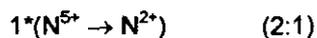
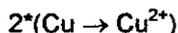
Ahora se presentan algunos balanceos por los métodos de redox y/o ion-electrón algo más complejos para ilustrar las posibles dificultades de los métodos:

La siguiente reacción se balanceará por ambos métodos:

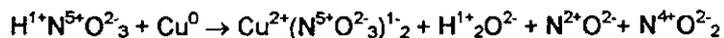


Nótese que no son solo dos los elementos que cambian de número de oxidación.

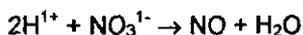
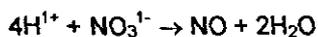
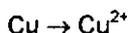
REDOX:



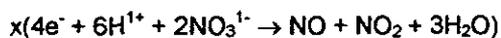
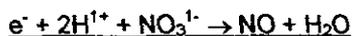
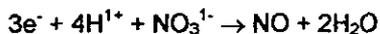
ION-ELECTRÓN:



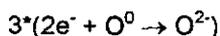
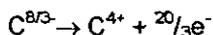
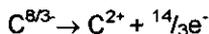
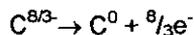
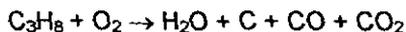
Balance de masa:



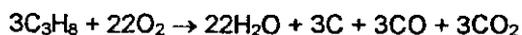
Balance de cargas:



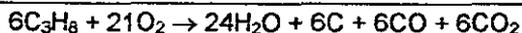
La reacción siguiente, se balanceará por el método redox de dos maneras distintas. Como se advertirá, aún cuando el método es el mismo, se obtienen resultados diferentes.<sup>10</sup>



Como se puede ver, se pueden multiplicar las reacciones de los carbonos por tres, y la relación es de 22:3. Lo cual indica que la reacción tiene los siguientes coeficientes:



La reacción no está balanceada aún, pero si ajustamos por tanteo el agua primeramente y después el oxígeno, multiplicando todo por 2 para eliminar fracciones, queda como sigue:



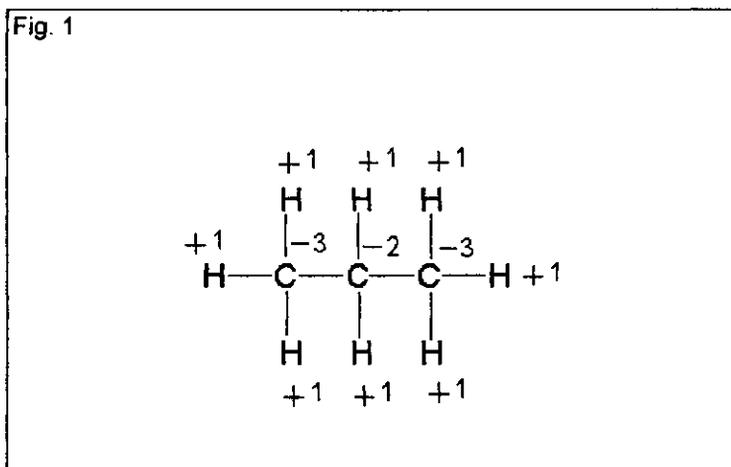
La cual ya está balanceada.

<sup>10</sup> Como se verá posteriormente, el método matemático tiene la capacidad de presentar las diferentes posibilidades en muchas reacciones en las que los métodos antes mencionados solo presentan una.

Ahora, el método redox se aplicará utilizando las semirreacciones que se llevan a efecto y se trabajará individualmente con cada una de ellas:



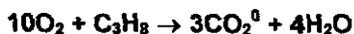
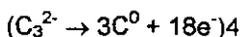
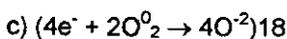
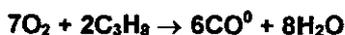
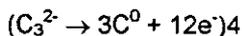
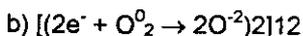
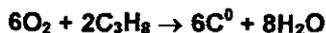
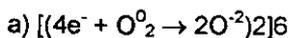
Cabe mencionar que, en este caso, el carbono trabaja con números de oxidación distintos, como se ilustra en la figura 1., y que el valor correcto debería ser de  $\frac{8}{3}$ . No obstante, si se aplica la regla de que se resta el número de enlaces carbono - carbono a la suma de los números de oxidación de los átomos de carbono, esta queda como 6-, y el resultado es de  $\frac{6}{3}$ , ponderado entre el número de carbonos, esto es, 2- ; éste será el número de oxidación con que se trabaje.



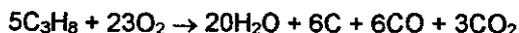
Las semirreacciones que se presentan, que también se pueden considerar como reacciones en paralelo son:

- a)  $\text{O}_2 + \text{C}_3\text{H}_8 \rightarrow \text{C}^0 + \text{H}_2\text{O}$
- b)  $\text{O}_2 + \text{C}_3\text{H}_8 \rightarrow \text{C}^{2+}\text{O} + \text{H}_2\text{O}$
- c)  $\text{O}_2 + \text{C}_3\text{H}_8 \rightarrow \text{C}^{4+}\text{O}_2 + \text{H}_2\text{O}$

El balanceo redox para cada una de estas reacciones es como sigue:



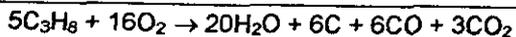
Como se puede observar, estos balanceos individuales no están balanceados, y al sumarlos se obtiene:



La reacción no está balanceada aún, pero el método redox indica que al final se puede hacer un ajuste del oxígeno, que es el único que no ha quedado balanceado, por lo que es necesario balancearlo por tanteo, quedando como sigue.

Antes, cabe hacer notar que, en este caso, aún cuando el oxígeno cambia de número de oxidación es necesario realizar el tanteo con él. Esto no debería de ser así, ya que en las reglas se expresa que no es necesario hacer balanceo por tanteo en elementos que cambian su valencia.

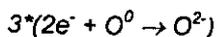
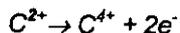
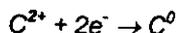
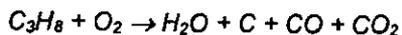
Sin embargo, en este caso se rompe la regla:



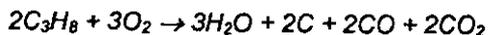
Ahora sí, la reacción está balanceada.

- Una situación muy común:

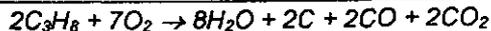
*Considérese que el balanceador no es tan bueno en la asignación de los números de oxidación y comete el siguiente error al asignar los valores de las valencias a los átomos de carbono, esto es, se les asigna una valencia de 2+:*



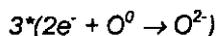
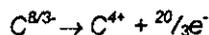
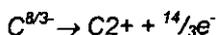
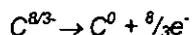
*Como se puede ver, la relación es de 2:3, lo que nos lleva a la reacción balanceada, con los coeficientes en enteros, como sigue:*



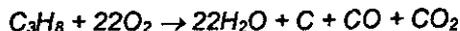
La reacción no está balanceada aún, pero si ajustamos por tanteo el agua primero y después el oxígeno, queda como sigue:



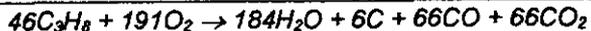
La cual ya está balanceada.



Como se puede ver, la relación es de 22:1, lo que nos lleva a la reacción balanceada, con los coeficientes en enteros, como sigue:

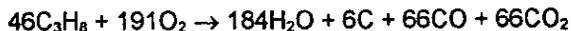
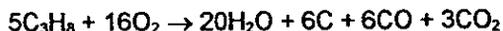
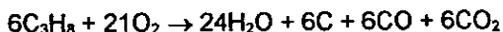


La reacción no está balanceada aún, pero si ajustamos por tanteo, queda como sigue:



La cual ya está balanceada.

Obsérvese en este caso una particularidad:



En todos los casos, las reacciones están balanceadas, pero los coeficientes son distintos. Las reacciones, excepto en el caso de la primera y la tercera, en donde una es tres veces mayor que la otra son necesariamente distintos. Este caso merece especial atención, ya que permite ver que, aún cuando se ha establecido con anterioridad que *la correcta asignación de las valencias parece ser fundamental para el balanceo de reacciones*, en realidad no lo es.

Volviendo a las estequiometrías obtenidas con anterioridad, se observa que son distintas; tres en este caso. Aquí surge la pregunta **¿Cuál es la estequiometría correcta?** Puede advertirse que todas son correctas (en papel y balanceo), pero la reacción sí se ve afectada. Ahora se puede preguntar, ¿Cuál es la estequiometría que corresponde a la reacción efectuada?. Es tarea de la termodinámica contestar esta última pregunta.

La particularidad más importante de estos métodos, es la determinación del número de oxidación del carbono. En la química del carbono o química orgánica, resulta difícil y, por lo tanto, es frecuente cometer errores.

Otra particularidad que se presenta en estos métodos, es el balanceo por tanteo al final del balanceo por el método redox o el método ion - electrón. Hay ocasiones en que éste no es tan sencillo, y el resultado toma tiempo.

Para solventar estos problemas, existe el método matemático, el cual no solo balancea las ecuaciones, sino que existen casos en que corrige la colocación de los reactivos y productos, dice en qué casos no se lleva a cabo reacción alguna y cuándo participan o no las sustancias en la reacción.

### Breve discusión sobre estos métodos:

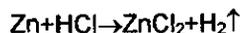
A continuación se presenta una breve discusión sobre algunas de las características de los métodos químicos de balanceo de reacciones.

En el método redox se utilizan especies que no tienen existencia real, como por ejemplo en el  $K_2Cr_2O_7$ , el número de oxidación del cromo es  $Cr^{6+}$ , el cual solo es posible obtener en condiciones extremadamente energéticas.

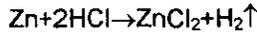
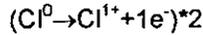
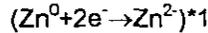
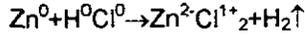
En este mismo método, los valores de las valencias que se presentan, casi siempre, por comodidad, son números enteros, lo cual no es totalmente cierto en el caso de muchos átomos, cuyas electronegatividades son similares y, por tanto, tienen enlaces covalentes. De hecho, si se respeta la regla de que las sumas de las valencias tiene que ser de cero, el método redox balancea estas reacciones de la misma manera.

En el método ion - electrón se plantean que todos los enlaces son iónicos, y como se vio en el inciso anterior, esto no siempre es cierto.

Como se ha visto, el balanceo de reacciones por éstos métodos, en realidad carece del fundamento químico que se supone tienen, ya que es meramente arbitraria la asignación de valencias, como se puede apreciar en el caso del primer balanceo del inciso de "Un caso muy común". En realidad se trata únicamente de *atajos* que debidos a la relación de cargas, generan un balance de masa que da una aproximación a la solución, balanceando los elementos que intervienen en estos "cambios de estado de oxidación", y es por ello que el balancear por tanteo al final de cada método es necesario. Y como para muestra basta un botón, véase el siguiente ejemplo:

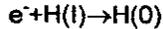
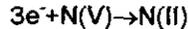
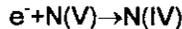
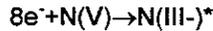


Las valencias de cada elemento serán de cero en todos los compuestos, a excepción del cloruro de zinc, ya que para poder balancear por el método redox es necesario que haya una oxidación y una reducción.



Para ilustrar un poco mejor el balanceo por métodos químicos, se presenta una reacción no tan simple que se balanceará por el método redox.<sup>11</sup>

La reacción es la que sigue:



La única reacción de oxidación es la que corresponde al cinc, todas las demás son reacciones de reducción, por esta razón es el cinc el que intervendrá oxidándose en todas las reacciones.

La primera y la segunda reacción están marcadas con un \* porque el Zn(II) se encuentra en dos formas:  $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$  y  $\text{Zn}(\text{NH}_2)_2$ ; y el N(III-) está como:  $\text{NH}_4\text{NO}_3$  y  $\text{Zn}(\text{NH}_2)_2$ . La forma en que se trabajará el Zn(III) es  $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$ , ya que la otra forma exige un cambio en el estado de oxidación del nitrógeno. El  $\text{Zn}(\text{NH}_2)_2$  será tratado considerando la reacción de  $\text{N}(\text{V}) + 8\text{e}^- \rightarrow \text{N}(\text{III-})$  cuando se hable de las dos formas del N(III-).

Se puede tomar en cuenta que serán cinco las reacciones involucradas, ya que son cuatro las reacciones de reducción y una reacción de oxidación<sup>12</sup>; pero,

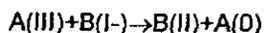
<sup>11</sup> Reacción balanceada por Tomás Rocha Rinza

<sup>12</sup> Recuérdese que esta última será común en todas las reacciones

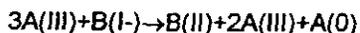
además, una de las reacciones de reducción tiene dos formas del reductor ( $\text{NH}_4\text{NO}_3$  y  $\text{Zn}(\text{NH}_2)_2$ ) y así ya están consideradas todas las especies de la reacción.

Nota:

Téngase la reacción



Si B(II) está asociado en su especie con A(III) en una relación 1:2, debemos sumar dos A(III) de cada lado de la reacción para que el balanceo final sea correcto, quedando:

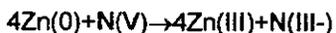
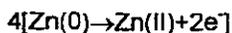


Se debe llegar a una reacción en donde los átomos involucrados en la reacción redox estén todos asociados de acuerdo a las especies químicas:

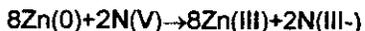
Si B(II) se asocia en su especie química con C(II-), no es necesario balancear con C(II-) ya que este no interviene en la reacción redox.

Se podrá balancear después con simples adiciones de compuestos que contengan a esta especie en un lado de la reacción.

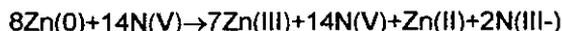
Volviendo a la reacción que se estaba analizando, se obtiene que la primera reacción es con el N(III-), considerado en la especie  $\text{Zn}(\text{NH}_2)_2$ :



Como la especie considerada es  $\text{Zn}(\text{NH}_2)_2$ , se necesitan al menos dos N(III-), por ello se multiplica la reacción por dos:



El último término está asociado con un Zn(II), pero los restantes Zn(II) están asociadas con 14N(V)<sup>13</sup>, por ello se suman 14N(V) del primer miembro y del segundo:



Ahora, todas las especies oxidadas y reducidas están "casi completas". Si se escriben las especies queda:



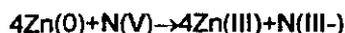
Como se puede observar, los hidrógenos y el oxígeno no están balanceados aún. Hay 48 oxígenos del lado izquierdo y 42 del derecho, así como 16 hidrógenos del lado izquierdo y 4 del lado derecho. Esto se puede balancear con moléculas de agua, añadiendo seis de estas al lado derecha de la reacción:



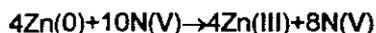
Nótese que como el hidrógeno y el oxígeno no cambian sus valencias, no hay que preocuparse de ellos, el balanceo se resuelve con la adición de agua a un lado de la reacción.

La segunda reacción es la del N(III-), considerado como la especie  $\text{NH}_4\text{NO}_3$ .

Partiendo de la reacción anterior:



Cada N(III-) está asociado con un N(V) y cada Zn(II) con dos N(V), es por ello que se suman nueve N(V) en ambos miembros de la reacción:




---

<sup>13</sup> especie  $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$

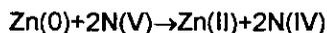
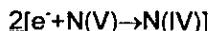
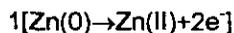
Si se pasa esto a especies químicas, queda:



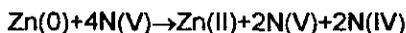
Para balancear el oxígeno y el hidrógeno, se necesitan agregar tres moléculas de agua al lado derecho de la reacción:



La tercera reacción es la del N(V), considerado como la especie  $\text{NO}_2$



Cada  $\text{Zn}(\text{II})$  está asociado con dos  $\text{N}(\text{V})$ , por lo que se suman dos de estos a cada lado de la reacción:



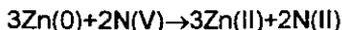
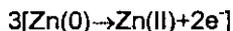
Pasando esto a las especies químicas, queda como sigue:



Se hace lo mismo que en los casos anteriores para balancear el oxígeno y el hidrógeno:



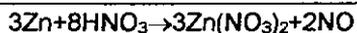
La cuarta reacción es la del N(II), cuya especie es el NO.



Como hay tres Zn(II), se deben de añadir seis N(V) a cada miembro de la reacción:



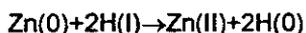
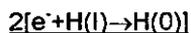
Pasando esto a las especies químicas, queda como sigue:



Se hace lo mismo que en los casos anteriores para balancear el oxígeno y el hidrógeno:



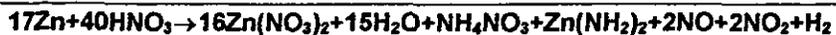
Balanceando la quinta reacción, se tiene lo siguiente:



Como esta reacción está balanceada, solo se pasa a las especies químicas:



Si ahora se suman todas las reacciones parciales obtenidas, se obtiene la reacción general balanceada:



Ojo: Véase el tratamiento algebraico de este problema en el capítulo IV y compárese

- I. El grado de dificultad de cada método y
- II. La precisión con que aparecen los resultados.

## CAPÍTULO V

## Fundamento Matemático

Como se dijo anteriormente, se describirá el método algebraico para balancear ecuaciones que representan reacciones químicas y con el objeto de sentar las bases teóricas de éste, se comenzará con el desarrollo de la parte matemática correspondiente – que es en realidad, un capítulo de álgebra lineal- posponiendo la formalización y algunas demostraciones pertinentes para los apéndices A y B.

### Sistema de ecuaciones.

Llamaremos "sistema (\*)  $m \times n$  de ecuaciones lineales reales", a una colección de ecuaciones de la forma:

$$*i) \dots a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = k_i \quad i=1, \dots, m$$

en las que las  $a_{ij}$ s y las  $k_i$ s son números reales. Las primeras son los coeficientes y las segundas los términos independientes. Las  $x_j$ s son variables que toman siempre valores reales, y se llaman incógnitas.

Cuando cada una de las  $k_i$ s vale cero, el sistema se conoce como "homogéneo" y es claro que a cada sistema se le puede asociar uno de estos: "su sistema homogéneo asociado", simplemente haciendo que cada término independiente valga cero, y conservando sin cambio los coeficientes.

Definición. Llamaremos "vector de  $\mathfrak{R}^n$ " a una colección de ordenada de  $n$  números reales, y diremos que el vector  $\vec{c}=(c_1, \dots, c_n)$  es una solución de la ecuación  $i$ -sima del sistema\*), sí (y sólo sí)  $a_{i1}c_1 + \dots + a_{in}c_n = k_i$

En este caso también se dice que el vector  $\vec{c}$  "satisface" la ecuación  $i$ -sima - o que los valores de las incógnitas lo hacen -.

La colección de todas las soluciones de la ecuación  $i$ -ésima se denotará como  $S_i$ . Finalmente diremos que  $\bar{c}$  es una solución particular del sistema si y solo si  $\bar{c}$  satisface a cada una de las  $m$  ecuaciones.

Si llamamos  $S = \{\bar{c} \in \mathbb{R}^n; \bar{c} \text{ satisface a cada ecuación de } (*)\}$  al conjunto de todas las soluciones del sistema, debe ser obvio que  $S$  es la intersección de todas las  $S_i$ ,  $i=1, \dots, m$ .

Resolver un sistema de ecuaciones, es determinar explícitamente (ver mas adelante) quién es  $S$ .

Cabe mencionar los siguientes comentarios:

1. Si para alguna ecuación  $*_i$ ,  $S_i$  es todo  $\mathbb{R}^n$ , (por ejemplo si  $*_i$  es  $0x_1+0x_2+0x_3=0$ ), obviamente  $S_i=\mathbb{R}^3$ . En efecto, para cualquier terna adecuada de números  $(c_1, c_2, c_3)$  se cumple que  $0c_1+0c_2+0c_3=0$ . En este caso, en la expresión  $S=S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n$  el  $i$ -ésimo factor puede suprimirse (la ecuación  $*_i$  puede borrarse del sistema).

Esta observación debe ser clara, ya que si  $A$  es un conjunto contenido en  $X$ ,  $(S_i \subset \mathbb{R}^n) A \cap X = A$ .

2. Si para alguna  $i$ ,  $S_i$  es vacío, (la ecuación  $*_i$  no tiene solución, como por ejemplo si  $*_i$  fuera:  $0x_1+0x_2+0x_3=1$ ), entonces  $S=\emptyset$ , ya que la intersección de conjuntos está contenida en cada factor.  $S \subset S_i = \emptyset$ .

En este caso se dirá que el sistema es inconsistente.

3. Como se menciona anteriormente, resolver el sistema  $(*)$  es describir  $S$ . Por supuesto que el sistema mismo es una descripción de  $S$ , pero esta no es efectiva en el sentido de que no permite ni encontrar fácilmente soluciones ni decidir si un vector  $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$  es o no solución del sistema.

Desde el punto de vista del álgebra, si  $S$  no es vacío ( $(*)$  tiene al menos una solución) entonces  $S$  consta de un solo elemento (el sistema se llamará "determinado") o bien de una infinidad no numerable de ellos (sistemas consistentes, pero indeterminados)<sup>14</sup>.

Este segundo caso es el que interesa, ya que es el que se presenta en los problemas de balanceo, por lo que debemos especificar que significa "describir  $S$  en forma explícita". Considérense los siguientes ejemplos:

a) Sea  $(*_a)$  el sistema  $(*_a) \bullet \bullet \bullet$

$$\begin{aligned} x+y &= 10 \\ x-y &= 2 \end{aligned}$$

La solución de  $S_1$  de la primera ecuación consta de todos los puntos de la recta  $y=10-x$  (ordenada al origen 10 y pendiente  $-1$ ), mientras que  $S_2$  es la recta  $y=x-2$ .

Obviamente, la solución  $S_a$  de  $(*_a)$  es el punto de intersección de estas rectas, a saber, el punto  $(6,4)$ ; por lo que  $S_a = \{(6,4)\}$ , o  $x=6, y=4$

b) Sea  $(*_b)$  el sistema  $(*_b) \bullet \bullet \bullet$

$$\begin{aligned} x+y &= 10 \\ x+y &= 2 \end{aligned}$$

Cuyas soluciones parciales son los puntos de dos rectas paralelas.  $S_b$  resulta vacío. El sistema es inconsistente.

Finalmente, si

c) Sea  $(*_c)$  el sistema  $(*_c) \bullet \bullet \bullet$

$$\begin{aligned} x+y &= 10 \\ x+y &= 10 \end{aligned}$$

Tanto  $S_1$  como  $S_2$  son los puntos de la misma recta – que coinciden con  $S_c$ ,  $y=10-x$ .

$S$  se puede describir como:

$$\begin{aligned} x &= 10-t \\ y &= t \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

<sup>14</sup> Esto se debe a que  $S$  es el trasladado de un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$ , por lo que resulta un punto (solución inicial), una recta o una variedad lineal de dimensión mayor.

Que es la expresión "paramétrica" de la solución, o bien:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$t \in \mathbb{R}$  a la que se llamará "la forma vectorial paramétrica" – que, como se verá mas adelante, es la que resultará más conveniente para nuestros fines, ya que permitirá una interpretación que admite algunas consideraciones teóricas interesantes -.

Los sistemas anteriores – que deliberadamente se han escogido muy sencillos – se resuelven normalmente por el método conocido como "suma y resta". Método que se analizará con objeto de generalizarlo para que resulte aplicable en casos mas complicados.

Así, se supondrá que el problema es resolver el sistema

$$*_{b} \quad x+y=10$$

$$x-y=2$$

¿Cómo se procede?

a) Se multiplica la ecuación 2 por  $-1$ , y luego se suma con la ecuación 1.

Entonces

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=10 \\ -x+y=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=10 \\ 2y=8 \end{cases}$$

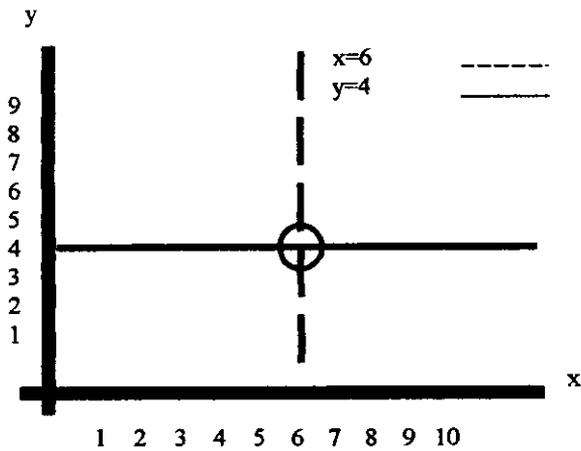
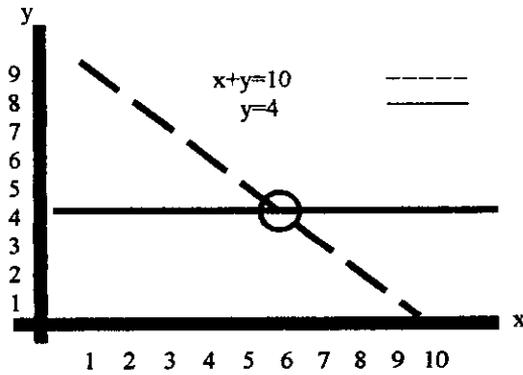
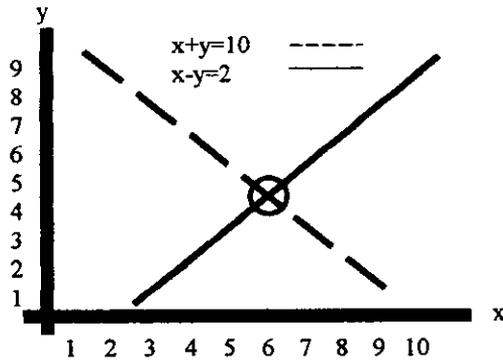
En este sistema ( $*_{b1}$ ), se divide la ecuación 2 entre 2 (multiplicarla por  $\frac{1}{2}$ ) y la nueva ecuación se resta de la 1.

$$\begin{cases} x+y=10 \\ 2y=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=10 \\ y=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=6 \\ 2y=8 \end{cases}$$

Esta última expresión muestra explícitamente la solución  $S_b$ .

Nótese que se ha ido cambiando el problema original por los siguientes:

Encontrar la intersección  $l_1 \cap l_2$ .



que, sin embargo, tienen la misma solución.

Puede suceder que los procedimientos que se usen para resolver un problema cambiándolo por otro, introduzcan soluciones del último, que por no serlo del original se conocen como "soluciones extrañas" y también pasa que se pierden soluciones al problema original.

Ejemplo: Se desea resolver la ecuación

$$x - 2 = \sqrt{x}$$

Entonces se eleva al cuadrado:  $x^2 - 4x + 4 = x$  o sea,  $x^2 - 5x + 4 = 0$ , es decir,

$(x-4)(x-1) = 0$  cuyas soluciones son, obviamente,  $x=4$ ,  $x=1$ . La primera satisface (1) pero no así la segunda ( $x=1$ ) que resulta una raíz extraña.

El hecho que en el caso que se analizó  $S$  no cambie cuando  $*_b$  se transforma en  $*_{b1}$  o en  $*_{b2}$  por medio de las llamadas "operaciones elementales" – multiplicar una ecuación por cualquier constante no cero, sumar una ecuación a otra, o cambiar el orden de las ecuaciones – es un teorema importante que se debe demostrar.<sup>15</sup>

Volviendo al primer ejemplo, nótese que se puede esquematizar el procedimiento que se sigue por medio de diagramas que muestran tanto el estado inicial del sistema como las diferentes etapas del proceso. En efecto:

- 1) El sistema (\*) puede representarse como el arreglo matricial siguiente:

$$A^* \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

En el que sólo aparecen los coeficientes y los términos independientes.

---

<sup>15</sup> Ver teorema 1, apéndice B

A este arreglo se le llamará "la matriz aumentada" del sistema original. (Cuando sólo aparezcan los coeficientes, se dirá que lo que resulta es "la matriz del sistema". En este caso:  $A) \dots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  lo sería).

2) Se representan, después, las operaciones - elementales - que se fueron haciendo como operaciones en los renglones de la matriz  $A^*$ , agregando una instrucción codificada que sirve para recordar - y dejar registrada - la operación efectuada. Así, la matriz  $A^*$  se va transformando de la siguiente manera:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{R_2(-1)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{R_2+R_1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}_{R_2(\frac{1}{2})} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{R_1-R_2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = A^2$$

Nótese que la instrucción coincide con el renglón al que se aplica. Así, en

la matriz  $A: \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} R_i(3) + R_2(-2)$  significa que al triple del renglón i-simo

se le resta el doble del renglón 2 y que el resultado de las operaciones efectuadas (multiplicar  $R_1$  por 3,  $R_2$  por  $-2$  y efectuar la suma) se escribe como el nuevo renglón i-simo.

Tómese en cuenta también que el proceso - que se conoce como "diagonalización de la matriz  $A^*$ " - termina cuando se obtiene una matriz "escalonada bien bonito" (en forma hermitica normal) que se describe como aquella en que todos los renglones que constan de ceros -si es que existen - están hasta abajo. Todos los renglones no ceros, tienen como primera componente no cero, un uno, que está mas a la derecha de todo uno que corresponda al principio de otro renglón que esté arriba. (escalonada). Además

debe cumplirse que en la columna en la que esté un uno inicial, todas las demás entradas deben de ser ceros (escalonada bien bonito).

Se presentan algunos ejemplos:

$$1) \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2) \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3) \dots \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4) \dots \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Las matrices 1), 2) y 3) están escalonadas bien bonito, mientras que la 4) está escalonada, pero no bien bonito.

Finalmente se observa que cuando la matriz aumentada  $A^*$  que representa un sistema de ecuaciones, está escalonada bien bonito; el sistema representado permite la mejor manera de expresar su solución. Así, en el ejemplo

$$A^* : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{dice que: } x=6; y=4.$$

Con el objeto de ilustrar los casos posibles que pueden presentarse al utilizar el método algebraico matricial para resolver sistemas de ecuaciones, se desarrollaran en detalle los ejemplos siguientes – otra vez, deliberadamente simples –:

$$\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=6 \end{array} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ R_3 - 2R_1 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_3 - R_2 \\ R_3 - R_2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_3 \left(-\frac{1}{2}\right) \\ R_2 - R_3 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 - R_3 \\ R_2 - R_3 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

que está escalonada *bien bonito* y que corresponde al sistema – de obvia solución–

$$x=1$$

$$y=1$$

$$z=1$$

El sistema es determinado.  $S=\{(1,1,1)\}$  y nótese que esto se debe a que al determinar el proceso de diagonalización, el número de renglones diferentes de cero que aparecen en la matriz A, es igual al de los no cero de la matriz aumentada, y coincide con el número de incógnitas del sistema.

Véase otro ejemplo:

$$\begin{array}{l} x+2y+3z=6 \\ 4x+5y+6z=15 \\ 7x+8y+9z=20 \end{array} \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 20 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 - 4R_1 \\ R_3 - 7R_1 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & -6 & -12 & -22 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2(-\frac{1}{3}) \\ R_3(-1) \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 12 & 22 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 - 2R_2 \\ R_3 - 6R_2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Al llegar a este último paso se nota que el tercer renglón corresponde a una ecuación sin solución ( $S_3 = \emptyset$ ). En efecto, para ninguna terna ordenada de números reales ( $c_1, c_2, c_3$ ) sucede que  $0c_1 + 0c_2 + 0c_3 = 4$ . Por lo tanto,  $S = \emptyset$  y el sistema resulta ser inconsistente. Nótese, también, que en este caso, en la matriz diagonalizada, que todavía pudo transformarse en:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mediante las operaciones  $R_2 - 3R_3(\frac{1}{4})$ ;  $R_4(\frac{1}{4})$ , el número de renglones diferentes de cero en la matriz aumentada es mayor que al número de renglones no cero de la matriz del sistema.

Tercer ejemplo:

Cámbiese la tercer ecuación del segundo ejemplo por:  $7x+8y+9z=24$ .

En este caso:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 & 24 \end{pmatrix}$$

que finalmente queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que está escalonada bien bonito y que corresponde al sistema (equivalente):

$$x - z = 0$$

$$(*)' \dots y - 2z = 3$$

La tercera ecuación se eliminó, porque su solución es todo  $\mathbb{R}^3$ . El proceso de eliminar incógnitas ya no puede seguir, y se nota que cada valor que se asigne a Z, corresponde a una pareja de números que completan una solución particular de (\*), por lo que se considerará a Z como "un parámetro", pudiendo describirse (\*) de cualquiera de las maneras siguientes:

$$a) \dots \begin{matrix} x = t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{matrix} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

que, como ya se dijo, corresponden a las formas explícitas "paramétrica" y "vectorial paramétrica" que se ha aceptado como formas válidas de expresar la solución del sistema.

Obsérvese que en la matriz final, el número de renglones no cero de la matriz aumentada, coincide con el de la del sistema (en este caso, dos) y que el número de parámetros (uno) es la diferencia entre el número de incógnitas menos el número de renglones no cero de cualquiera de las matrices, la aumentada o la del sistema. Dado a que esta situación no es casual, por conveniencia se da la siguiente:

**Definición:** Se llamará rango de una matriz  $A$  al número de renglones distintos de cero que quedan en la matriz, una vez que esta se ha diagonalizado bien bonito.

Caben las aclaraciones siguientes:

- 1) Para cada matriz  $A$ , el rango resulta independiente del procedimiento que se haya seguido para diagonalizarla – en el entendido de que este proceso se haya realizado legítimamente, es decir, por medio de operaciones elementales solamente – aun que éstas se realicen en diferente orden.
- 2) El proceso de diagonalizar bien bonito una matriz (real  $m \times n$ ) siempre es posible, y
- 3) En álgebra lineal se define el rango de una matriz como la dimensión del subespacio de  $\mathfrak{R}^n$  generado por los renglones (que es el mismo que la dimensión del subespacio de  $\mathfrak{R}^m$  generado por las columnas), y que coincide con el número que se está definiendo.

Resumiendo las observaciones, se concluye con el siguiente teorema, cuya demostración se omite apuntando que es un resultado conocido del álgebra, y que puede consultarse en su forma resumida en el apéndice A, y en forma completa en casi cualquier libro de álgebra lineal.

**Teorema:** Sean:

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = k_1 \\ (*) \dots & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = k_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = k_m \end{aligned} \quad \text{un sistema real } m \times n \text{ de ecuaciones}$$

lineales,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

La matriz del sistema, y cuyo rango es  $r(A)$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & k_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & k_m \end{pmatrix} \in M(m \times (n+1), \mathbb{R})$$

La matriz aumentada, rango  $r(A^*)$ .

Entonces (\*) tiene solución (el sistema no es inconsistente) si y solo si  $r(A)=r(A^*)$  y la solución tiene tantos grados de libertad (parámetros) como  $n-r(A)$ .

(Si  $n=r(A)$ , el sistema tiene solución única).

### Algunos ejemplos:

Sistema:

$$X+3y-2z=-7$$

$$4x+y+3z=5$$

$$2x-5y+7z=19$$

Matriz:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 7 & 19 \end{array} \right)$$

Matriz escalonada:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -11 & 11 & 33 \\ 0 & -11 & 11 & 33 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Representación paramétrica

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sistema:

$$2x+6y+z=7$$

$$x+2y-z=-1$$

$$5x+7y-4z=9$$

Matriz:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & -4 & 9 \end{array} \right)$$

Matriz escalonada:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & 4 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 14 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1.5 & 4.5 \\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & 1.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 5.5 & 27.5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & 1.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Representación paramétrica

$$X = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Sistema

$$x+y-z+3w=1$$

$$y-z-4w=0$$

$$x+2y-2z-w=6$$

$$4x+7y-7z=9$$

Matriz

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & -7 & 0 & 9 \end{array} \right)$$

Matriz escalonada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -12 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Representación paramétrica

$$S = \emptyset$$

**Sistema de ecuaciones inconsistente.**

Sistema

$$X + 2y + 4z = 2$$

$$2x + 4y + 3z = 1$$

$$x + 2y - z = 7$$

Matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

Matriz escalonada:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Representación paramétrica

$$S = \emptyset$$

**Sistema de ecuaciones inconsistente.**

## Balanceo de reacciones químicas

Habiendo expuesto someramente la herramienta matemática que se utilizará, ahora se aplicará en el problema específico objeto de este escrito: balanceo de ecuaciones (en los cuales se omitirán las "instrucciones"). Para ello se comenzará con las observaciones siguientes:

Una observación importante es el hecho de que, al resolver un problema de balance de ecuaciones químicas por el método algebraico, la única información que se proporciona al modelo matemático es el balance de materia – número de átomos de cada especie en los reactivos menos número de átomos en los productos, debe de ser cero -. A pesar de esta limitación, si se parte de moléculas completas, en las reacciones de oxidación – reducción, el intercambio de electrones queda asimismo bien acomodado, a condición, claro, de que la ecuación esté bien planteada. Cuando esto no es así, el método algebraico lo detecta y señala el error. Véanse los ejemplos dos y tres mas adelante.

Si la ecuación por balancear representa una reacción química real, la solución algebraica tiene al menos un grado de libertad – al menos un parámetro – debido al hecho que, como en una receta de cocina, se pueden poner múltiplos de las cantidades de reactivos, para obtener los correspondientes múltiplos de las cantidades de productos. En general, los grados de libertad indican el número de reacciones simultáneas que pueden considerarse en cada caso, y el método algebraico permite identificarlas, aunque no dice en que proporción se da cada una de ellas, lo que permite asignar a cada parámetro, valores arbitrarios que dan lugar a reacciones bien balanceadas, esencialmente distintas entre sí. – véase ejemplo uno -.

En realidad, estos grados de libertad no existen. Lo que sucede es que en una reacción química, el balance de materia no es el único factor a considerar. Existen otros que el método algebraico no contempla, como pueden ser: concentraciones de los reactivos o temperatura del proceso, y en general,

constantes termodinámicas que fijan los valores reales que deben asignarse a los parámetros.

A pesar de estas limitaciones, el método algebraico es el más efectivo para balancear ecuaciones químicas. Aún las llamadas "*Reacciones de estequiometría confusa*" se resuelven con toda precisión y muy fácilmente, discriminando entre reacciones posibles e imposibles como se apunta en investigaciones hechas a este respecto, y que aparecen publicadas en revistas como "Chemical Education", por mencionar alguna.

Otra observación importante que debe considerarse aquí, es el hecho de que cuando se resuelve un problema utilizando herramienta matemática, el resultado debe interpretarse cuidadosamente ya que al modelar la situación que se trate, suelen omitirse restricciones que son inherentes a la naturaleza de éstas, pero no al álgebra.

Muchas veces se deben considerar sólo soluciones positivas – como en el caso de componentes de mezclas – o soluciones enteras – si se trata de problemas de poblaciones, por ejemplo -. Cuando se usa el método algebraico para balancear ecuaciones químicas, los resultados deben escogerse entre los que son congruentes con el problema químico que se planteó. En este caso, debe ser claro que cuando el valor de un coeficiente resulta negativo, la solución algebraica indica que la molécula a la que dicho coeficiente corresponda, debe cambiarse de lado en la ecuación y consecuentemente, transformarse de producto a reactivo o viceversa. Véase el ejemplo dos, mas adelante, en el que el signo negativo que aparece para el coeficiente del agua es esencial (no puede eliminarse ni cambiarse de signo). En esa reacción, el agua es necesariamente, un producto y no un reactivo.

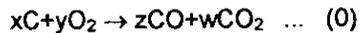
Existen muchos casos en que estos signos negativos, que obviamente alteran la forma en que deben interpretarse las reacciones, no son esenciales. Un artificio algebraico – un cambio adecuado en la base del espacio de soluciones – arregla el problema, restableciendo la interpretación a una compatible con la reacción química original.

El algoritmo producido en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Química, tiene incorporada una instrucción que realiza este trabajo, permitiendo balancear e interpretar perfectamente todas y cada una de las reacciones que se le propongan, con la única restricción de que se trate de reacciones posibles. Cuando esto no es así, el método funciona igualmente bien, haciendo obvia la interpretación de la ecuación como correspondiente a una reacción que no es química. Repitiendo: Cuando se desee interpretar a los elementos básicos – vectores de una base del espacio de soluciones – como reacciones parciales que intervienen simultáneamente en una reacción general, debe de tenerse la precaución de evitar en cada uno de estos vectores básicos, los coeficientes negativos. (Véanse ejemplos tres, cuatro y cinco más adelante).

Antes de pasar a los ejemplos, hagamos la observación final. Al plantear las ecuaciones de balance de materia, siempre se obtendrán sistemas homogéneos, ya que para cada elemento, cantidad de este en los reactivos menos la cantidad en los productos, debe de ser cero, por lo que, en lo sucesivo, al aplicar el método matricial omitiremos los términos independientes que forman una columna de ceros, que, por tanto, se mantiene invariante bajo operaciones elementales en los renglones – cero mas cero es cero y cero por  $k$  es cero para toda  $k \in \mathfrak{R}$  - y solamente estarán presentes en el paso final. Nótese, además, que esta observación, que se trata de sistemas homogéneos, garantiza que los problemas que se plantean, siempre tienen solución, aunque algunas veces ésta pueda estar constituida únicamente por el vector cero. (Véase ejemplo tres).

Ahora si, se propondrán algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Considérese el problema (trivial (27)) de balancear la siguiente ecuación:



En donde x, y, z, w son números enteros que deben encontrarse. El balance de materia de cada elemento proporciona la siguiente información:

$$C: x - z - w = 0$$

$$O: 2y - z - 2w = 0$$

Que utilizando el método matricial queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

cuya solución general es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathcal{R}$$

haciendo s=1, t=0 se obtiene la reacción



mientras que si tomamos s=0, t=1, queda



Nótese que el método algebraico aclara que se puede pensar en las dos reacciones simultáneas (1) y (2) y que los valores que se asignen a los parámetros s y t dicen qué tanto de cada reacción está presente en el proceso. Si, por ejemplo, ambas reacciones se produjeran en igual proporción -s=t=1-, se tendría:



mientras que si la primera se produjera el doble de veces que la segunda,  $s=2$ ,  $t=1$ , el balance final sería:



Obsérvese que la reacción final queda bien balanceada, cualesquiera que sean los números que se asignen a los parámetros, cuyo número dice cuantas reacciones simultáneas están presentes.

Por supuesto, se insiste aquí, cuando se quema carbón en un ambiente determinado, la reacción es única. El número de parámetros independientes es siempre uno, y los valores que cada variable toma queda bien determinado, como ya se mencionó con anterioridad, por otros factores termodinámicos como la temperatura o la energía libre, por mencionar algunos.

Ejemplo 2: Se trata de balancear la ecuación de la reacción química, obviamente mal planteada, siguiente:



que proporciona la información – matriz – siguiente:

$$\begin{matrix} K: \\ S: \\ H: \\ O: \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ o sea:}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que se trata de una sola reacción (un solo parámetro) y que el coeficiente  $x_3$  que corresponde al agua, al ser negativo muestra que en esta reacción, la mencionada agua no es un reactivo, sino un producto y que, por lo tanto, la ecuación debió ser:



Ejemplo 3: Ahora, se pretende balancear una reacción químicamente imposible, a saber:



se tiene:

$$\begin{array}{l} C: \\ Cl: \\ Cu: \\ H: \\ O: \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

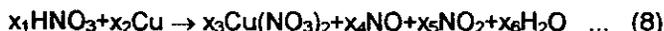
cuya única solución es  $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$ .

Es decir, se trata de una reacción imposible, como se mencionó con anterioridad, que sólo se balancea poniendo nada de nada para obtener nada de nada.

Como se vio en el ejemplo dos, el signo menos de la tercera variable – el coeficiente del agua – muestra una inconsistencia esencial en el planteamiento de la reacción, que se corrige simplemente cambiando de lado al agua en la ecuación. El tercer ejemplo, en cambio, muestra una reacción que no puede darse ya que en ella hay un elemento – el cobre – que cambia de estado de oxidación sin que aparezca ningún otro cuyo cambio pudiera compensar al anterior.

Ahora se ejemplificará el procedimiento de “Cambio de Base” que se debe usar cuando en la solución del problema de balancear una ecuación química bien planteada aparecen coeficientes negativos en los elementos básicos (vectores que componen una base del espacio de soluciones).

Ejemplo 4: Se trata de balancear la ecuación:



que da lugar a la matriz

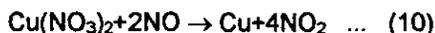
$$\begin{array}{l} H: \\ Cu: \\ O: \\ N: \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

la cual dice que se trata de dos reacciones simultáneas, y que la solución – correcta – es la generada por los vectores (0, -1, -1, -2, 4, 0) y (8, 3, 3, 2, 0, 4).

Ahora bien, mientras que el segundo vector corresponde a la reacción:



el vector primero corresponde a la "reacción"



que no es admisible como parte de la solución química.

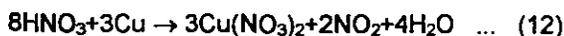
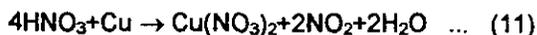
Háganse las observaciones siguientes:

1. La pseudo reacción (10) está bien balanceada.
2. Cualquier combinación lineal de (9) y (10), queda bien balanceada.
3. Cualquier versión de la ecuación (8) que esté bien balanceada, es una combinación lineal de (9) y (10).
4. Cualesquiera dos ecuaciones que sean soluciones de (8) (y por lo tanto combinación lineal de (9) y (10)) que sean linealmente independientes (esencialmente distintas, es decir, que no sea una múltiplo de la otra), generan el mismo espacio de soluciones.

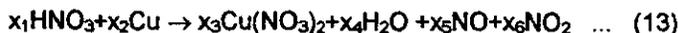
De acuerdo con esta última observación, si tomamos como base a la ecuación (9) y a la semisuma (9) + (10), obtendremos la solución general:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

que dice que la reacción propuesta puede interpretarse como la superposición de las dos reacciones simultáneas:



Este resultado es el mismo que se obtiene si en el planteamiento de la ecuación original (8) se hubiera corrido el término que corresponde al agua dos lugares a la izquierda. Es decir:



Otro ejemplo semejante:

Ejemplo 5: Se trata de balancear la ecuación



que cuando se trata de resolver por el método ión – electrón o de oxidación – reducción, conduce a complicaciones bastante severas, de lo que se convencerá cualquiera que trate de hacerlo, a pesar de que, como puede verse,  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$  proporciona una solución particular.

El algebraico dice:

$$\begin{array}{l} Na: \\ O: \\ Cl: \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución es:

$$So = \{x(2, -1, 1, 0) + y(-1, 2, 0, 1), x, y \in \mathbb{R}\}$$

Otra vez: En la base de  $So$  aparecen coeficientes negativos que no permiten una interpretación directa como suma de subreacciones simultáneas, pero haciendo un cambio de base pertinente, que puede consistir en cambiarla por los vectores que se obtienen haciendo primero  $x=2, y=1$  y sumando, y luego  $x=1, y=2$  y sumar,  $So$  queda expresado como las combinaciones lineales de  $(3, 0, 2, 1)$  y  $(0, 3, 1, 2)$  que corresponden, ahora si, a las reacciones teóricas:



Si ahora, por ejemplo, se toman una y una, dividiendo entre tres los coeficientes, se tiene como caso particular el balance ya conocido:



En el siguiente capítulo se desarrollarán varios ejemplos ilustrativos de posibles situaciones cuyos planteamientos y soluciones se dan sin mayor explicación.

## CAPÍTULO VI



Ecuaciones paramétricas

$$x_1 = 10s$$

$$x_2 = 1176s$$

$$x_3 = 1399s$$

$$x_4 = 35s$$

$$x_5 = 1176s$$

$$x_6 = 420s$$

$$x_7 = 660s$$

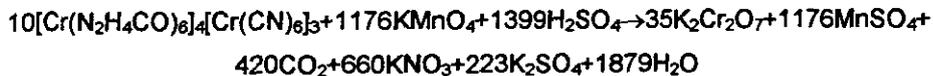
$$x_8 = 223s$$

$$x_9 = 1879s \quad s \in \mathbb{Z}$$

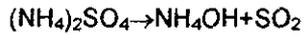
El vector paramétrico queda

$$\bar{X} = s \begin{pmatrix} 10 \\ 1176 \\ 1399 \\ 35 \\ 1176 \\ 420 \\ 660 \\ 223 \\ 1879 \end{pmatrix}$$

La reacción queda:



Sea la reacción



Matriz asociada

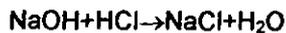
$$\begin{array}{l} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ N: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ H: \begin{pmatrix} 8 & -5 & 0 \end{pmatrix} \\ S: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ O: \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matriz escalonada

$$\begin{array}{l} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ N: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ H: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ S: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ O: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Como se puede observar, la solución no existe, lo que indica que esta no es una reacción química, no se puede llevar a cabo.

Sea la reacción



Matriz asociada

$$\begin{array}{l} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \\ Na: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ O: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ H: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ Cl: \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matriz escalonada

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \text{Na:} & \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \\ \text{O:} & \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \\ \text{H:} & \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ \text{Cl:} & \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Ecuaciones paramétricas

$$x_1 = 1s$$

$$x_2 = 1s$$

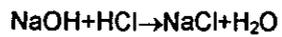
$$x_3 = 1s$$

$$x_4 = 1s \quad s^- Z$$

El vector paramétrico queda

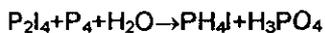
$$\bar{X} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La reacción queda



La cual ya estaba balanceada

Sea la reacción



Matriz asociada

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ P: & 2 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ I: & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ H: & 0 & 0 & 2 & -4 & -3 \\ O: & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{array}$$

Matriz escalonada

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ P: & 16 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ I: & 0 & 32 & 0 & 0 & -13 \\ H: & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ O: & 0 & 0 & 0 & 4 & -5 \end{array}$$

Ecuaciones Paramétricas

$$\begin{aligned} x_1 &= 10s \\ x_2 &= 13s \\ x_3 &= 128s \\ x_4 &= 40s \\ x_5 &= 32s \quad s^- Z \end{aligned}$$

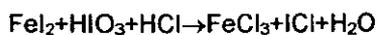
El vector paramétrico queda

$$\bar{X} = s \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 128 \\ 40 \\ 32 \end{pmatrix}$$

La reacción queda



Sea la reacción



Matriz asociada

$$\begin{array}{c} x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \\ \text{Fe:} \\ \text{I:} \\ \text{H:} \\ \text{O:} \\ \text{Cl:} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz escalonada

$$\begin{array}{c} x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \\ \text{Fe:} \\ \text{I:} \\ \text{H:} \\ \text{O:} \\ \text{Cl:} \end{array} \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & -13 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones paramétricas

$$x_1 = 4s$$

$$x_2 = 5s$$

$$x_3 = 25s$$

$$x_4 = 4s$$

$$x_5 = 13s$$

$$x_6 = 15s \quad s^- \ Z$$

El vector paramétrico queda

$$\bar{X} = s \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 25 \\ 4 \\ 13 \\ 15 \end{pmatrix}$$

La reacción queda:



Sea la reacción



Matriz asociada

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ K: & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Cl: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ O: & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ H: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matriz escalonada

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ K: & \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \\ Cl: & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ O: & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \\ H: & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

### Ecuaciones paramétricas

$$x_1 = 2s + 5t$$

$$x_2 = 12s + 6t$$

$$x_3 = 2s + 5t$$

$$x_4 = 6s + 3t$$

$$x_5 = 6s + 0t$$

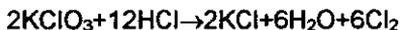
$$x_6 = 0s + 6t \quad s, t \in \mathbb{Z}$$

Los vectores paramétricos quedan

$$\bar{X} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Algunas posibles soluciones son:

Usando  $s=1, t=0$ :



Usando  $s=0, t=1$ :



Usando  $s=t=1$  o sumando las semirreacciones:



Usando  $s=3, t=2$ :



Usando  $s=2, t=3$ :



Como se puede observar, todos los resultados son esencialmente distintos, a  $s$  y  $t$  se les pueden asignar los valores que se desee.

Sea la reacción



Matriz asociada

$$\begin{array}{l} \text{As:} \\ \text{S:} \\ \text{H:} \\ \text{N:} \\ \text{O:} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -4 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz escalonada

$$\begin{array}{l} \text{As:} \\ \text{S:} \\ \text{H:} \\ \text{N:} \\ \text{O:} \end{array} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x_1 &= 1s + 1t \\ x_2 &= 16s + 40t \\ x_3 &= 2s + 2t \\ x_4 &= 5s + 5t \\ x_5 &= 4s + 40t \\ x_6 &= 12s + 0t \\ x_7 &= 0s + 12t \quad s, t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Los vectores paramétricos quedan

$$\bar{X} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 40 \\ 2 \\ 5 \\ 40 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Algunas posibles soluciones son:

Usando  $s=1, t=0$ :



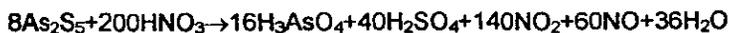
Usando  $s=0, t=1$ :



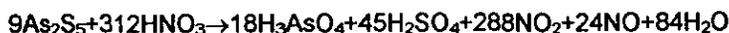
Usando  $s=t=1$ :



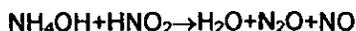
Usando  $s=5, t=3$ :



Usando  $s=2, t=7$ :



Sea la reacción



Matriz asociada

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ N: & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ H: & \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ O: & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matriz escalonada

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ N: & (6 & 0 & 0 & -4 & -1) \\ H: & (0 & 6 & 0 & -8 & -5) \\ O: & (0 & 0 & 6 & -14 & -5) \end{array}$$

Ecuaciones paramétricas

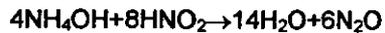
$$\begin{aligned} x_1 &= 4s + 1t \\ x_2 &= 8s + 5t \\ x_3 &= 14s + 5t \\ x_4 &= 6s + 0t \\ x_5 &= 0s + 6t \quad s, t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Los vectores paramétricos quedan

$$\vec{X} = s \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 14 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Algunas posibles soluciones son:

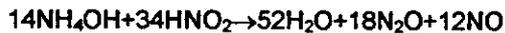
Usando  $s=1, t=0$ :



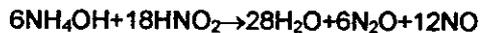
Usando  $s=0, t=1$



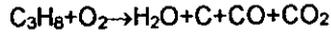
Usando  $s=3, t=2$



Usando  $s=1, t=2$



Sea la reacción



Matriz asociada

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ C: & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ H: & \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ O: & \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matriz escalonada

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ C: & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ H: & \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & -4 & -7 & -10 \end{pmatrix} \\ O: & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ecuaciones paramétricas

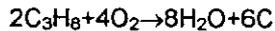
$$\begin{aligned} x_1 &= 2s + 2t + 2u \\ x_2 &= 4s + 7t + 10u \\ x_3 &= 8s + 8t + 8u \\ x_4 &= 6s + 0t + 0u \\ x_5 &= 0s + 6t + 0u \\ x_6 &= 0s + 0t + 6u \quad s, t, u \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Los vectores paramétricos quedan

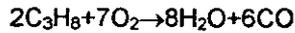
$$\vec{X} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Algunas posibles soluciones son:

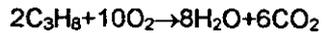
Usando  $s=1, t=u=0$ :



Usando  $s=u=0, t=1$ :



Usando  $s=t=0, u=1$ :



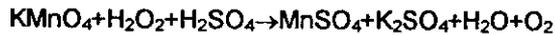
Usando  $s=t=u=1$ :



Usando  $s=3, t=2, u=5$ :



Sea la reacción



Matriz asociada

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ K: & \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ Mn: & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ O: & 4 & 2 & 4 & -4 & -4 & -1 & -2 \\ H: & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ S: & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Matriz escalonada

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ K: & \left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ Mn: & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -5 & 6 \\ O: & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & -6 \\ H: & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ S: & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \end{array} \right) \end{array}$$

## Ecuaciones paramétricas

$$x_1 = -2s + 4t$$

$$x_2 = 5s - 6t$$

$$x_3 = -3s + 6t$$

$$x_4 = -2s + 4t$$

$$x_5 = -1s + 2t$$

$$x_6 = 2s + 0t$$

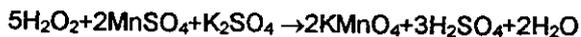
$$x_7 = 0s + 2t \quad s, t \in \mathbb{Z}$$

Los vectores paramétricos quedan

$$\bar{X} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Algunas posibles soluciones son:

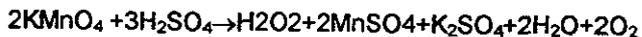
Usando  $s=1, t=0$ :



Usando  $s=0, t=1$

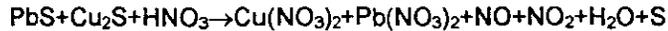


Usando  $s=1, t=1$



Como se puede observar, en estos casos, algunos de los reactivos y productos fueron reacomodados, es decir, pasaron de reactivo a producto y viceversa.

Sea la reacción:



La matriz asociada es

$$\begin{array}{c}
 \text{Pb:} \\
 \text{S:} \\
 \text{Cu:} \\
 \text{H:} \\
 \text{N:} \\
 \text{O:}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 3 & -6 & -6 & -1 & -2 & -1 & 0
 \end{pmatrix}$$

La matriz escalonada o matriz de molecularidades es

$$\begin{array}{c}
 \text{Pb:} \\
 \text{S:} \\
 \text{Cu:} \\
 \text{H:} \\
 \text{N:} \\
 \text{O:}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -8 \\
 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 3 & -8 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0
 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones paramétricas quedan

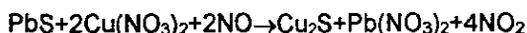
$$\begin{aligned}
 x_1 &= 1s - 3t + 8u \\
 x_2 &= -1s + 3t - 4u \\
 x_3 &= 0s + 8t + 0u \\
 x_4 &= -2s + 6t - 8u \\
 x_5 &= 1s - 3t + 8u \\
 x_6 &= -2s + 2t + 0u \\
 x_7 &= 4s + 0t + 0u \\
 x_8 &= 0s + 4t + 0u \\
 x_9 &= 0s + 0t + 4u \quad \text{s, t, u} \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Los vectores paramétricos quedan

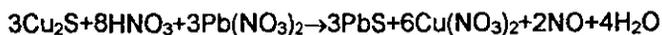
$$\bar{X} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 8 \\ 6 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \\ -8 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Algunas posibles soluciones son:

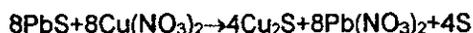
Usando  $s=1, t=u=0$ :



Usando  $t=1, s=u=0$ :



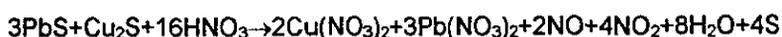
Usando  $s=t=0, u=1$



Usando  $s=t=u=1$ :

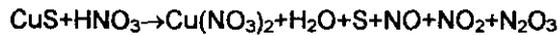


Usando  $s=1, t=2, u=1$ :



Observando este ejemplo, hay que considerar que los reactivos y productos se pueden intercambiar dependiendo de los valores que se den a los parámetros, sin embargo, también existe la posibilidad de asignar valores tales que la reacción original no se modifique.

Sea la reacción:



La matriz asociada es

$$\begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \text{Cu:} & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{S:} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{H:} & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{N:} & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ \text{O:} & 0 & 3 & -6 & -1 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}$$

La matriz escalonada o matriz de molecularidades es

$$\begin{array}{cccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \text{Cu:} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -4 \\ \text{S:} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -6 \\ \text{H:} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3 & -1 & -4 \\ \text{N:} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ \text{O:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & -4 \end{array}$$

Las ecuaciones paramétricas quedan

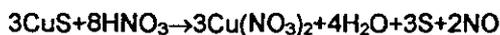
$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + 3s + 1t + 4u \\ x_2 &= 0 + 8s + 4t + 12u \\ x_3 &= 0 + 3s + 1t + 4u \\ x_4 &= 0 + 4s + 2t + 6u \\ x_5 &= 1 + 3s + 1t + 4u \\ x_6 &= 0 + 2s + 0t + 0u \\ x_7 &= 0 + 0s + 2t + 0u \\ x_8 &= 0 + 0s + 0t + 2u \quad s, t, u \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Los vectores paramétricos quedan

$$\bar{X} = s \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Algunos posibles resultados son:

Usando  $s=1, t=u=0$ :



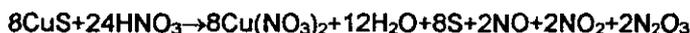
Usando  $s=u=0, t=1$ :



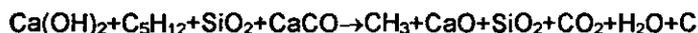
Usando  $s=t=0, u=1$ :



Usando  $s=t=u=1$ :



Sea la reacción:



La matriz asociada es

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
Ca:	1	0	0	1	0	-1	0	0	0	0
O:	2	0	2	1	0	-1	-2	-2	-1	0
H:	2	12	0	0	-3	0	0	0	-2	0
C:	0	5	0	1	-1	0	0	-1	0	-1
Si:	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0

La matriz escalonada o matriz de molecularidades es

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\
 \text{Ca:} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\
 \text{O:} & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -13 & -3 & -3 \\
 \text{H:} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 \text{C:} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
 \text{Si:} & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 12 & 0 & -56 & -12 & -12
 \end{array}$$

Las ecuaciones paramétricas quedan

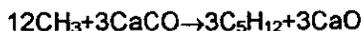
$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0s + 0t + 6u + 3v + 0w \\
 x_2 &= -3s + 0t + 13u + 3v + 3w \\
 x_3 &= 0s + 3t + 0u + 0v + 0w \\
 x_4 &= 3s + 0t - 6u - 3v + 0w \\
 x_5 &= -12s + 0t + 56u + 12v + 12w \\
 x_6 &= 3s + 0t + 0u + 0v + 0w \\
 x_7 &= 0s + 3t + 0u + 0v + 0w \\
 x_8 &= 0s + 0t + 3u + 0v + 0w \\
 x_9 &= 0s + 0t + 0u + 3v + 0w \\
 x_{10} &= 0s + 0t + 0u + 0v + 3w \quad s, t, u, v, w \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Los vectores paramétricos quedan

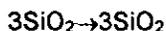
$$\bar{X} = s \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \\ -12 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 0 \\ -6 \\ 56 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Algunas posibles soluciones son:

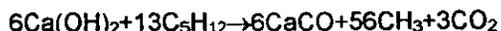
Usando  $s=1, t=u=v=w=0$ :



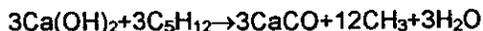
Usando  $s=u=v=w=0, t=1$ :



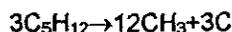
Usando  $s=t=v=w=0, u=1$ :



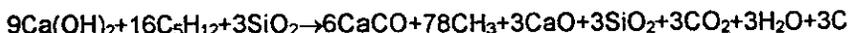
Usando  $s=t=u=w=0, v=1$ :



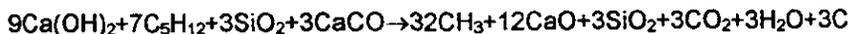
Usando  $s=t=u=v=0, w=1$ :



Usando  $s=t=u=v=w=1$ :

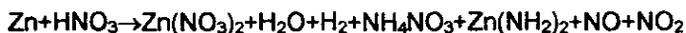


Usando  $s=4, t=u=v=w=1$ :



En este ejemplo se muestran varios casos de intercambio de productos y reactivos, así como una igualdad indicando que no hubo reacción, ya que si sólo se pone un reactivo, el producto es el mismo. Así mismo, se muestra un caso de disociación, la cual puede ser debida a condiciones termodinámicas que el método no contempla.

Sea la reacción



La matriz asociada es

$$\begin{array}{cccccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ \text{Zn:} & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \text{H:} & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ \text{N:} & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -4 & -2 & -1 & -1 \\ \text{O:} & 0 & 3 & -6 & -1 & 0 & -3 & 0 & -1 & -2 \end{array}$$

La matriz escalonada o matriz de molecularidades es

$$\begin{array}{cccccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ \text{Zn:} & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -8 & -16 & -3 & -1 \\ \text{H:} & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 10 & -16 & -4 & -2 \\ \text{N:} & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & -8 & -14 & -3 & -1 \\ \text{O:} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -6 & -2 & -1 \end{array}$$

Las ecuaciones paramétricas quedan

$$\begin{aligned} x_1 &= 2s + 8t + 16u + 3v + 1w \\ x_2 &= 4s + 20t + 32u + 8v + 4w \\ x_3 &= 2s + 8t + 14u + 3v + 1w \\ x_4 &= 0s + 6t + 12u + 4v + 2w \\ x_5 &= 2s + 0t + 0u + 0v + 0w \\ x_6 &= 0s + 2t + 0u + 0v + 0w \\ x_7 &= 0s + 0t + 2u + 0v + 0w \\ x_8 &= 0s + 0t + 0u + 2v + 0w \\ x_9 &= 0s + 0t + 0u + 0v + 2w \quad s, t, u, v, w \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Los vectores paramétricos quedan

$$\bar{X} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 8 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 16 \\ 32 \\ 14 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Algunas posibles soluciones son:

Usando  $s=1, t=u=v=w=0$ :



Usando  $t=1, s=u=v=w=0$ :



Usando  $u=1, s=t=v=w$ :



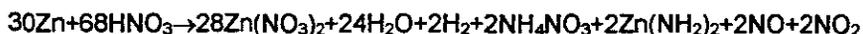
Usando  $v=1, s=t=u=w$ :



Usando  $w=1, s=t=u=v=0$ :



Usando  $s=t=u=v=w=1$ :



Aquí se ejemplifican claramente las cinco semirreacciones que se llevan a cabo, y que la reacción última es resultado de las sumas de las anteriores, pero no hay que olvidar que los parámetros pueden adquirir cualquier valor real.

## APÉNDICE A

**Definición 1.** Sea  $\{V, \oplus\}$  un grupo abeliano, y  $\{K, +, \bullet\}$  un campo.  $V$  es un espacio vectorial sobre  $K$  si existe una operación binaria  $*$ ;  $K \times V \rightarrow V$  tal que si  $*$  ( $k, \bar{x}$ ) se denota  $k \bar{x}$ , entonces:

$$i) \quad k(\bar{x} \oplus \bar{y}) = k \bar{x} \oplus k \bar{y}$$

$$ii) \quad (h \oplus k) \bar{x} = h \bar{x} \oplus k \bar{x}$$

$$iii) \quad h(k \bullet x) = (h \bullet k) \bar{x} \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in V, \quad \forall h, k \in K$$

$$iv) \quad 1 \bar{x} = \bar{x}$$

A los elementos de  $V$  se les llama *vectores*, y a los de  $K$  *escalares*.

Cuando  $K$  es el campo  $\mathfrak{R}$  de los números reales, se dice que  $V$  es un *espacio vectorial real*, (si  $K$  es  $\mathbb{C}$ ,  $V$  es un espacio vectorial complejo, etcétera).

**Ejemplo 1** Si  $G = \{0\}$  con  $0+0 = 0$ , y  $\forall \alpha \in K, \alpha 0 = 0$ ,  $G$  es un espacio vectorial sobre cualquier campo  $K$ , y se llama el espacio vectorial *cero* o 'trivial'.

**Ejemplo 2** Todo campo  $K$  es un espacio vectorial sobre cualquiera de sus subcampos. ( $\mathbb{C}$  es un espacio vectorial real, o un espacio vectorial sobre  $\mathbb{Q}, \dots$ ).

**Ejemplo 3** Sea  $K$  un campo,  $K^n = K_1 \times \dots \times K_n$  ( $n$  factores).

Entonces,  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $K^n$  resulta un espacio vectorial sobre  $K$ , si se define para

$$\bar{a} = (\dots, a_i, \dots) \text{ y } \bar{b} = (\dots, b_i, \dots), \alpha \in K: \quad \bar{a} \oplus \bar{b} = (\dots, a_i + b_i, \dots), \alpha \bar{a} = (\dots, \alpha a_i, \dots).$$

**Nota 1** En los cursos de álgebra lineal se demuestra que todo espacio vectorial de dimensión finita  $n$  (ver definición 5) sobre un campo  $K$  es isomorfo a  $K^n$  (indistinguible desde el punto de vista de sus propiedades algebraicas) y en ese sentido se justifica la afirmación de que "de alguna manera", los  $K^n$  son los espacios vectoriales más importantes, entre los de dimensión finita.

**Ejemplo 4** Si  $G = M(m \times n; K)$ , las matrices de  $m \times n$  con coeficientes en un campo  $K$ ,  $G$  es un espacio vectorial sobre  $K$ , si se define la suma de matrices y la multiplicación por escalares de manera conveniente.

Explícitamente, si  $M = (a_{ij})$ ,  $N = (b_{ij})$ , entonces  $M + N = (a_{ij} + b_{ij})$ , es decir,  $M + N$  es la matriz de  $m \times n$  que tiene en el  $i$ -ésimo renglón y  $j$ -ésima columna al resultado de sumar los correspondientes coeficientes de  $M$  y de  $N$ .

También se define para  $\alpha \in K$   $\alpha M = (\alpha a_{ij})$

**Ejemplo 5** Si  $G = K[x]$  el anillo de los polinomios es una indeterminada  $x$  con coeficientes en un campo  $K$ , con la suma y la multiplicación por un escalar definidas en la forma usual,  $G$  es un espacio vectorial sobre el campo  $K$ .

**Ejemplo 6** Sea  $W$  un espacio vectorial sobre un campo  $K$  y  $S$  un conjunto no vacío. Se define  $G = \{f: S \rightarrow W\}$  el conjunto de las funciones de  $S$  en  $W$ , se le da estructura de grupo definido para  $f, g \in G$ ,  $f + g: S \rightarrow W$  como la función que asocia a cada  $x \in S$ , el resultado de sumar, (en  $W$ ),  $f(x)$  con  $g(x)$ .  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ . Y si se define para  $\alpha \in K$ ,  $\alpha f(x) = \alpha(f(x))$ , entonces  $G$  resulta un espacio vectorial sobre  $K$ .

**Definición 2.** Sea  $W$  un espacio vectorial sobre un campo  $K$ .  $W \subset V$  es un subespacio de  $V$ , si:

- i)  $\theta \in W$
- ii)  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in W, \bar{x} + \bar{y} \in W$
- iii)  $\forall \bar{x} \in W, \forall \alpha \in K, \alpha \bar{x} \in W$

**Nota 2** La definición de subespacio suele darse diciendo que un subconjunto de  $W$  de  $V$  es un subespacio de  $V$  si  $W$  es un espacio vectorial (sobre el mismo campo  $K$ ) con las 'operaciones inducidas en  $W$  por las de  $V$ '.

Se demuestra después que  $W \subset V$  es un subespacio de  $V$  si y sólo si  $W$  satisface las condiciones i), ii) y iii) de arriba, de manera que ambas definiciones son equivalentes. Optamos por la primera que tiene la ventaja de evitar la discusión

sobre 'operaciones inducidas' y que además es la que se usa con más frecuencia para comprobar que un subconjunto de  $V$  es un subespacio de  $V$ .

**Nota 3** La condición i) puede cambiarse por i')  $W \neq \emptyset$  que no es la misma que i). Obviamente  $i) \Rightarrow i')$ , pero no al revés, sin embargo al tomarse junto con ii) y iii) forman conjuntos de proposiciones equivalentes.

**Definición 3.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $K$ , y  $\beta = \{ x_i \}_{i \in I}$  un subconjunto de vectores de  $V$ .  $\bar{x} \in V$  es una *combinación lineal* de  $\beta$  si  $\bar{x}$  es una "suma formal"  $\bar{x} = \sum_{i \in I} a_i x_i$  en donde todos los coeficientes son cero, excepto un número finito de ellos, (lo que se expresa diciendo que "casi todos los coeficientes son cero").

**Definición 4.** Una *base*  $\beta \subset V$  es un subconjunto de vectores de  $V$  que tiene la propiedad de que cada  $\bar{x} \in V$  se puede expresar en forma única como combinación lineal de  $\beta$ .

**Nota 4** Por "forma única" debe entenderse que si  $\bar{x} = \sum_{i \in I} a_i x_i = \bar{x} = \sum_{i \in I} b_i x_i$ , entonces  $a_i = b_i, \forall i \in I$ , aunque por supuesto, los sumandos pueden aparecer en cualquier otro orden, y en ese sentido quizá sería mejor decir que los coeficientes son los que son únicos.

**Nota 5** El que cada  $\bar{x} \in V$  sea combinación lineal de  $\beta$ , equivale a decir que " $\beta$  genera a  $V$ ". O que " $\beta$  es un conjunto generador de  $V$ ", y el hecho de que cada combinación lineal de  $\beta$  tenga una expresión única es lo que se conoce como independencia lineal. En realidad, la definición más conocida de "independencia lineal" es la que afirma que  $\beta \subset V$  es linealmente independiente si y sólo si cada vez que una combinación lineal de  $\beta$  sea cero, cada coeficiente tiene que ser necesariamente cero.

Otra definición es la que dice que  $\beta$  es linealmente independiente si y sólo si ninguno de sus vectores es combinación lineal de los otros.

Otra más:  $\beta$  es linealmente independiente si y sólo si no es linealmente dependiente. (en este caso debe precisarse lo que se entiende por "linealmente dependiente").

Las cuatro definiciones son equivalentes.

Puede decirse pues – y eso es lo que se acostumbra – que una base de  $V$  es un subconjunto de  $V$  linealmente independiente, que genera a  $V$ .

Entre los ejemplos más conocidos, citaremos:

Ejemplo 1 si  $e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$   $i = 1, \dots, n$ ,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  es la "base canónica" de  $\mathfrak{R}^n$

Ejemplo 2  $\{1, x, x^2, \dots\}$  es la base canónica de  $\mathfrak{R}[x]$ .

Ejemplo 3  $\left\{ \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \right\}$

es la base canónica del espacio  $M(2 \times 2 ; \mathfrak{R})$  cuyos elementos son las matrices cuadradas de  $2 \times 2$  con coeficientes reales.

Nota 6 "Canónico" es un término impreciso, que se utiliza para designar a la forma más 'natural' o que 'proporciona más información a simple vista' y que en general es 'la más usada'.

Así por ejemplo, se habla de las ecuaciones canónicas de las cónicas:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	para las circunferencias
$y - k = 4p(x - h)^2$	para las parábolas verticales
$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	para las elipses y
$\pm \frac{(x - h)^2}{a^2} \pm \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	para las hipérbolas

y también se llama "canónico" el orden usual de los números naturales.

Aceptamos los siguientes resultados (cuyas demostraciones se pueden encontrar en cualquier libro de álgebra lineal).

**Teorema 1** Todo espacio vectorial tiene al menos una base.

**Nota 7** Aquí se hace necesario aceptar que

- $\emptyset$  es linealmente independiente
- La combinación lineal vacía (una suma formal con cero sumandos), es el vector cero.

**Teorema 2.** Si un conjunto finito de  $\beta \subset V$  es una base de  $V$ , entonces cualquier otra base de  $V$  tiene el mismo número de elementos que  $\beta$ .

**Nota 8** Se sigue de aquí y del teorema 1, que para todo espacio vectorial  $V$ , o bien todas sus bases son infinitas, o todas son finitas de la misma cardinalidad. En el primer caso, se dice que " $V$  es de dimensión infinita". En el segundo, hay un número bien definido – el número de elementos de cada una de ellas –, que se conoce como la dimensión de  $V$ .

Así en el ejemplo 1,  $\dim \mathfrak{R}^n = n$ , en el ejemplo 2,  $\dim \mathfrak{R}[x] = \infty$ , y en el ejemplo 3,  $\dim M(2 \times 2 ; \mathfrak{R}) = 4$ .

(En general,  $\dim M(m \times n ; \mathfrak{R}) = mn$ )

**Definición 5.** Si un espacio vectorial  $V$  tiene una base finita (con un conjunto finito de vectores), se dice que es de dimensión finita, y si ese no es el caso, es decir, si todas las bases de  $V$  tienen una infinidad de vectores (son infinitas), entonces  $V$  es de dimensión infinita.

En los ejemplos anteriores,  $\mathfrak{R}^n$  y  $M(2 \times 2 ; \mathfrak{R})$  son de dimensión finita, mientras que  $\mathfrak{R}[x]$  no lo es.

**Teorema 3.** Si  $\gamma \subset V$  es un conjunto linealmente independiente, entonces existe  $\beta$  una base de  $V$  tal que  $\gamma \subset \beta$ . (En forma equivalente suele decirse que "todo conjunto  $\gamma \subset V$  linealmente independiente, puede completarse a una base").

**Teorema 3'.** Si  $\beta$  genera a  $V$ , existe un subconjunto  $\gamma \subset \beta$ , que es linealmente independiente, y que genera a  $V$ . (Todo conjunto generador de  $V$ , contiene una base de  $V$ ).

**Definición 6.** Se define el producto punto de dos vectores  $\bar{x} = (a_1, \dots, a_n)$  y  $\bar{y} = (b_1, \dots, b_n)$  como  $\bar{x} \cdot \bar{y} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ . Considérese ahora la

**Definición 7.** En  $\mathfrak{R}^n$ ,  $\bar{x}$  es **ortogonal** a  $\bar{y}$  si  $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$ . Así, por ejemplo,

$$(1,0) \perp (0,1) \text{ y } (1,0,0) \perp (0,1,0).$$

**Nota 9** La definición de ortogonalidad puede extenderse a espacios que tengan asociado cualquier producto escalar no degenerado pero en estas notas sólo nos interesan los espacios  $\mathfrak{R}^n$  y la geometría euclidiana, por lo que no abundaremos en el tema.

**Definición 8.** La norma (euclidiana) de  $\bar{x} \in \mathfrak{R}^m$  es:  $\|\bar{x}\| = (\bar{x} \cdot \bar{x})^{1/2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2}$

Ejemplos:  $\|(1,0,0)\| = 1$  y  $\|(1,2,3)\| = \sqrt{14}$ . Se puede ver que en el caso  $n = 2$ , esta definición reproduce el Teorema de Pitágoras.

**Nota 10** Apuntamos aquí, que también existen otras normas, (en las que tampoco estamos interesados). Los espacios que tienen alguna norma se llaman **espacios normados**.

**Definición 9.** En un espacio normado, un vector  $\bar{x}$  es **unitario** si  $\|\bar{x}\| = 1$

**Ejemplo 1** En  $\mathfrak{R}^n$ , para cada  $i = 1, \dots, n$   $e_i$  es unitario.

**Ejemplo 2**  $\bar{x} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \in \mathfrak{R}^3$  también es unitario.

**Definición 10.** Sea  $\beta = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} \subset \mathfrak{R}^n$ .  $\beta$  es un conjunto **ortonormal** si  $\|\bar{x}_i\| = 1$   $i=1, \dots, n$  y  $\forall i, j, \bar{x}_i \perp \bar{x}_j$ .

**Nota 11** Observe que todo conjunto finito ortonormal es linealmente independiente. En efecto, si  $\bar{0} = a_1 \bar{x}_1 + \dots + a_n \bar{x}_n$ , entonces para cada  $i = 1, \dots, n$  se

tiene que  $\vec{0} \bullet \vec{x}_1 = 0$ , y  $(a_1 \vec{x}_1 + \dots + a_n \vec{x}_n) \bullet \vec{x}_i = a_i (\vec{x}_i \bullet \vec{x}_i) = a_i \quad i = 1, \dots, n$ . Por lo tanto  $a_i =$ ,  $i=1, \dots, n$ .

**Teorema 4.** Todo espacio vectorial real de dimensión finita  $n$ , tiene bases ortogonales y todo subconjunto ortogonal, linealmente independiente puede completarse a una base ortogonal.

**Definición 11.** Sea  $W \subset V$  un subespacio de un espacio vectorial real de dimensión finita. El complemento ortogonal de  $W$ ,  $W^\perp$  es:

$$W^\perp = \{ \vec{x} \in V; \vec{x} \perp \vec{y} \quad \forall \vec{y} \in W \}$$

Ejemplo 1. Si  $W = \{ (a, b, 0) \in \mathbb{R}^3; a, b \in \mathbb{R} \}$ , entonces,  $W^\perp = \{ (0, 0, c) \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R} \}$ .

Ejemplo 2. Si  $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - z = 0 \}$ , entonces  $W^\perp = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3; \vec{x} = t(2, 3, -1), t \in \mathbb{R} \}$ .

**Teorema 5.** Si  $W \subset V$  es un subespacio de un espacio  $V$  de dimensión finita  $n$  y  $W^\perp$  es su complemento ortogonal, entonces  $W^\perp$  es un subespacio de  $V$ , y  $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ .

**Nota 12.** Si  $W \subset V$  es un subespacio de  $V$  y  $\beta$  es un subconjunto de  $V$  tal que cada  $\vec{x} \in W$  es combinación lineal de  $\beta$  ( $\beta$  genera a  $W$ ), entonces:  $W^\perp = \{ \vec{x} \in V; \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \forall \vec{y} \in \beta \}$ .

**Corolario.** Sea  $(*_H)$  un sistema homogéneo de ecuaciones lineales, y  $A = (a_{ij})$  la matriz de sus coeficientes.

Definamos a  $\beta = \{ A_1, \dots, A_m \}$ , en donde  $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$  es el  $i$ -ésimo renglón de  $A$  y sea  $W$  el subespacio generado por  $\beta$ . Entonces el conjunto  $S_0 \subset \mathbb{R}^n$  de soluciones de  $*_H$  es precisamente el complemento ortogonal de  $W$ , es decir:  $S_0 = W^\perp$ .

En efecto,  $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n) \in S_0 \Leftrightarrow$  para cada  $i, i=1, \dots, n$ ,

$$A_i \cdot \vec{c} = (a_{i1} c_1 + \dots + a_{in} c_n) = 0, \text{ es decir } \vec{c} \in S_0 \Leftrightarrow \vec{c} \perp A_i \quad \forall i \in \beta.$$

Si se define  $r(A) = \dim W$ , se tiene que  $n = \dim S_0 + r(A)$  o sea:

$\dim S_0 = n - r(A)$  y esta última igualdad permite decir que  $S_0$  es un espacio vectorial (subespacio de  $\mathfrak{R}^n$ ) con  $n - r(A)$  parámetros (o grados de libertad).

La dimensión de  $W$  coincide con el número máximo de vectores linealmente independientes que pueden formarse con los elementos de  $\beta$ , que es, a su vez, el orden del determinante diferente de cero de mayor orden, que puede obtenerse del conjunto de submatrices cuadradas de la matriz  $A$ .

La observación anterior tiene como consecuencia inmediata el hecho de que en una matriz  $A$ , el espacio generado por sus renglones tiene la misma dimensión que el que generan sus columnas a pesar de que el primero es un subespacio de  $\mathfrak{R}^n$  mientras que el segundo lo es de  $\mathfrak{R}^m$ .

Nota 13. Se llama submatriz de una matriz  $A$ , la que resulta suprimir de  $A$  algunos renglones, algunas columnas, o renglones y columnas. Así por ejemplo,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , y  $E$  son submatrices de  $A$  si:

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Bmatrix} \quad B = \begin{Bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{Bmatrix} \quad C = (1 \ 2 \ 3) \quad D = (2 \ 3) \quad E = (5)$$

Nota 14. El orden en el que aparecen las incógnitas en un sistema lineal de ecuaciones es irrelevante en tanto se conserven "alineadas" correctamente dentro del mismo, por lo que siempre pueden escribirse de manera que las primeras  $r$  correspondan a las  $r$  columnas linealmente independientes de la matriz del sistema – a la que estamos suponiendo de rango  $r$  -.

Así por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ (*) \quad x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 4y + z &= 7 \end{aligned}$$

cuya matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  es de rango 2, tiene por columnas:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,

en donde la segunda es el doble de la primera, (y por lo tanto, forman un conjunto con sólo dos vectores linealmente independientes). Nótese sin embargo que \* es equivalente a:

$$\begin{aligned} x + 3z + 2y &= 6 \\ x - z + 2y &= 2 \\ 2x + z + 4y &= 7 \end{aligned}$$

cuya matriz tiene, en sus dos primeras columnas a los elementos que forman una base del subespacio de  $\mathfrak{R}^3$  generado por todas las columnas.

Obsérvese finalmente que todo sistema lineal de ecuaciones puede escribirse en la forma:

$$(**) x_1 A^1 + x_2 A^2 + \dots + x_n A^n = K, \text{ en donde cada } A^j \text{ es } \begin{Bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{Bmatrix} \text{ la } j\text{-ésima columna de}$$

la matriz del sistema y  $K = \begin{Bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{Bmatrix}$  es el vector de los términos independientes.

Es claro que (\*\*) tiene solución si y sólo si existe  $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathfrak{R}^n$  tal que  $c_1 A^1 + c_2 A^2 + \dots + c_n A^n = K$ , es decir, si y sólo si el subespacio de  $\mathfrak{R}^m$  generado por las columnas es igual al que generan éstas, mas el vector K).

Otra vez: (\*\*) tiene solución si  $\{\{A^1, \dots, A^n, K\}\}$  lo cual pasa si y solo si  $\dim\{A^1, \dots, A^n\} = \dim\{\{A^1, \dots, A^n, K\}\}$  (ya que el primero es subespacio del segundo).

Resumiendo: (\*\*) tiene solución, ( $S_0 \neq \emptyset$ ), si  $r(A) = r(A^*)$ .

Debe quedar claro, pues, que si  $r(A) = r(A^*) = r$  y  $\{A^1, \dots, A^r\}$  son columnas linealmente independientes y por lo tanto base del espacio generado por ellas entonces para cada selección (arbitraria) de valores  $c_{r+1}A^{r+1} + \dots + c_n A^n$  está en el subespacio generado por las columnas y por lo tanto es combinación lineal de los elementos de la base. Es decir, para cada selección arbitraria de valores  $(c_{r+1}, \dots, c_n)$  para los parámetros, existe una única colección de  $r$  números  $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$  tales que  $(c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n) \in S_1$ .

## APÉNDICE B

En este apéndice se demostrará el teorema que asegura que las operaciones elementales efectuadas en los renglones de un sistema de ecuaciones lineales, no altera al conjunto  $S_0$  de sus soluciones.

Sea (\*) el sistema:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= k_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= k_m \end{aligned}$$

que también puede escribirse como:  $A_1 \bullet x = k_1, A_2 \bullet x = k_2, \dots, A_m \bullet x = k_m,$

en donde, por supuesto, para cada  $i, i=1, \dots, m, A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}),$  y  $\bar{x}$  es  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n).$

Recuérdese que  $c$  en  $\mathfrak{R}^n$  es solución de \* si y solo si  $A_i \bullet c = k_i \quad i=1, \dots, m$

y que  $S_0 = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m$  en donde  $S_i \quad i=1, \dots, m$  es la solución de la  $i$ -ésima ecuación.

**Teorema 1:** Las operaciones elementales efectuadas en los renglones (\*), no alteran  $S_0$ .

Demostración: Sea (\*) el sistema que resulta de cambiar el renglón  $i$  por el renglón  $j$  y  $S'_0$  el conjunto de soluciones de (\*).

Entonces  $S_0 = S_1 \cap \dots \cap S_i \cap \dots \cap S_j \cap \dots \cap S_m$  y  $S'_0 = S_1 \cap \dots \cap S_j \cap \dots \cap S_i \cap \dots \cap S_m$  que son, obviamente, iguales, ya que la intersección de conjuntos es conmutativa.

Sea ahora (\*)' el sistema que resulta de multiplicar el renglón  $A_i$  de (\*) por una constante  $k, k \neq 0$ .

El nuevo sistema, cuyo conjunto solución es  $S_0^*$ , es ahora:

$$A_1 \bullet \bar{x} = k_1, \dots, kA_i \bullet \bar{x} = kk_i, \dots, A_m \bullet \bar{x} = k_m.$$

La única solución alterada – la  $i$ -ésima – tiene las mismas soluciones que la original, ya que si:  $A_i \bullet \bar{x} = k_i$  ( $\bar{x} \in S_i$ ), multiplicando ambos lados por  $k$ , se obtiene  $k(A_i \bullet x) = kA_i \bullet \bar{x} = kk_i$  y por lo tanto  $x \in S_i^*$ .

Luego  $S_i \subset S_i^*$ . Recíprocamente, si un vector  $\bar{x}$  satisface  $kA_i \bullet \bar{x} = kk_i$  ( $\bar{x} \in S_i^*$ ), entonces, ya que  $k \neq 0$ ,  $i/k(kA_i \bullet \bar{x}) = 1/k(kk_i)$ . Es decir  $A_i \bullet \bar{x} = k_i$ . Luego  $S_i^* \subset S_i$  por lo tanto  $S_i = S_i^*$ . Los otros factores  $S_j$  no sufrieron cambio alguno. Entonces  $S_0 = S_0^*$ .

Finalmente, supóngase que en (\*), al renglón  $i$ -ésimo se le suma el  $j$ -ésimo. Entonces las soluciones de (\*) satisfacen las condiciones:

$$A_i \bullet \bar{x} = k_i,$$

$A_j \bullet \bar{x} = k_j$  y por lo tanto también satisfarán  $A_i \bullet \bar{x} + A_j \bullet \bar{x} = k_i + k_j$ , es decir  $(A_i + A_j) \bullet \bar{x} = k_i + k_j$  que la que se requiere satisfacer para garantizar que  $S_0 \subset S_0^*$ .

Ahora, si  $\bar{x}$  satisface  $(A_i + A_j) \bullet \bar{x} = k_i + k_j$

$$A_j \bullet \bar{x} = k_j$$

( $\bar{x} \in S_0^*$ ), restando miembro a miembro queda que  $A_i \bullet \bar{x} = k_i$  por lo que  $\bar{x} \in S_0$ , es decir  $S_0 \supset S_0^*$ , por lo tanto  $S_0 = S_0^*$ .

## CONCLUSIONES

En esta tesis no se intentó restar o eliminar la importancia de los números de oxidación, ya que se reconoce la misma en la química, como tal se demuestra en la predicción de reacciones. Lo que se pretendió demostrar es que la mejor opción para el balanceo de reacciones químicas es el método algebraico.

Sin embargo, lo que sí se demuestra es que los métodos químicos para balancear reacciones, como el Redox y el ión electrón que se basan en los números de oxidación, como se ha visto durante el desarrollo del presente trabajo, carecen de un fundamento químico, ya que a las valencias se les asigna, o puede asignárseles, un valor arbitrario, obviamente respetando la "Ley Cero" (la suma de valencias de una molécula debe ser cero) y siempre balancearán la reacción.

Los métodos de balanceo químico son de gran ayuda didáctica, ya que facilitan la comprensión del comportamiento de los iones y electrones en una reacción química. Pero no se debe olvidar que los valores asignados a las valencias son enteros, y en realidad esto no siempre es así. En varios casos, estos valores deben considerarse fraccionarios. Con esto también se demuestra que la asignación de los números de oxidación puede ser arbitraria.

El método matemático no solo ignora los valores de los números de oxidación, sino que facilita los balanceos de las reacciones químicas incluso en los casos de reacciones de estequiometría "confusa". Con este método no existe el concepto de la reacción que "No se puede balancear", como llega a presentarse en el caso de los otros métodos, o que el balanceo es muy complicado. Puede balancear fácilmente cualquier reacción química. Esto es debido a que lo único que hace es el balance de masa de los átomos, de la misma manera en que hace el balance de una ecuación matemática, ya que, al final de cuentas, una reacción se puede ver como una ecuación, una igualdad.

Entre las múltiples ventajas de este método es que es capaz de indicar si la reacción es posible o no, mostrando también en los casos que se dé, qué reactivos y productos participan en la misma y cuáles no, y, dependiendo de las cantidades de cada reactivo y/o producto, cómo esta se lleva a cabo.

También muestra, cuando sea el caso, las semirreacciones que dan lugar a la reacción planteada, ya que los vectores generados indican las mismas. Esta particularidad permite predecir no solo una estequiometría, como con los otros métodos, sino que da una cantidad infinita de las mismas, dependiendo de las semirreacciones. Pero hay que tener especial cuidado con este punto en particular, ya que los valores de los parámetros no deben ser arbitrarios, sino que están sujetos a las condiciones termodinámicas particulares de cada reacción.

Otra ventaja del método matemático es que, en los casos que la reacción no haya sido planteada correctamente, por medio de los signos de los coeficientes indica si el reactivo es, en realidad, producto o el producto reactivo; determina si hay que intercambiar las posiciones de los mismos.

Una limitante de este método, es que la reacción debe estar completa, ya que en el caso de los métodos químicos, hay ocasiones en que, aunque no se haya planteado originalmente la molécula del agua en reactivos o productos, estos la predicen. Sin embargo, en estos casos, lo que el método matemático hará es indicar que esa reacción, como fue planteada, no es posible.

El balanceo matemático, a final de cuentas, es una simple herramienta para el químico, que simplifica y expedita el problema del balanceo de las reacciones, pero se insiste, quien use este método debe ser muy cuidadoso en la interpretación de los resultados cuando asigne los valores de los parámetros, que como ya se dijo, estos no son arbitrarios y dependen de diversos factores.

## BIBLIOGRAFÍA

## Bibliografía

- Prof. César Rincón Orta  
Apuntes de Álgebra Lineal  
Universidad Autónoma de México
- Prof. Gustavo Garduño Sánchez  
Apuntes de Química General  
Universidad Autónoma de México
- Garritz – Rincón  
Educación Química  
Revista de la Facultad de Química  
CAPRICHIO VALENCIANO (¿Tiene alguna interpretación física el método de balanceo por Números de Oxidación?)  
Vol. VII, número 4  
Páginas 190 - 195  
U.N.A.M.  
1996
- Garritz – Rincón  
Educación Química  
Revista de la Facultad de Química  
CAPRICHIO VALENCIANO (Fundamentos matemáticos del balanceo por Números de Oxidación)  
Vol. VIII, número 2  
Páginas 76 - 86  
U.N.A.M.  
1997

Garriz -- Rincón

Educación Química

Revista de la Facultad de Química

CAPRICHIO VALENCIANO (Valencia y Número de Oxidación, corolario para docentes)

Vol. VIII, número 3

Páginas 130 - 140

U.N.A.M.

1997

- Cruz-Garriz, Diana, Chamizo, José A., Garriz, Andoni  
"Estructura Atómica" Un enfoque químico  
Fondo Educativo Interamericano  
(Facultad de Química, U.N.A.M.)  
1986
- Hein, Best, Pattison  
"Introduction to General, Organic and Biochemistry"  
Editorial Arena  
1985
- Charles E. Mortimer  
"Química"  
Editorial Iberoamericana  
1983
- Jerome, L. Rosenberg, L.M. Epstein  
"Química general"  
Serie Schaumm  
Editorial Mc. Graw Hill  
1985