

11



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

“Estimación del coeficiente de rugosidad en cauces con métodos inversos”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL

P R E S E N T A

BASALDUD CRUZ CARLOS *Antonio*



DIRECTOR: Dr. MOISÉS BEREZOWSKY VERDUZCO

MÉXICO, D.F.

2000

280654



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
FING/DCTG/SEAC/UTIT/213/99

Señor
CARLOS ANTONIO BASALDUD CRUZ
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **DR. MOISES BEREZOSKY VERDUZCO**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

"ESTIMACION DEL COEFICIENTE DE RUGOSIDAD EN CAUCES CON METODOS INVERSOS. "

- I. INTRODUCCION
- II. CALCULO DE PERFILES
- III. RESISTENCIA AL FLUJO EN CUACES ARENOSOS
- IV. BASES TEORICAS DE LOS METODOS INVERSOS
- V. APLICACION A LA INGENIERIA. OBTENCION DEL COEFICIENTE DE RUGOSIDAD EN RIOS
- VI. APLICACION AL RIO SAMARIA.
- CONCLUSIONES
- BIBLIOGRAFIA

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria a 19 de mayo de 2000.
EL DIRECTOR

M. en C. GERARDO FERRANDO BRAVO
GFB/GMP/mstg.

A MIS PADRES

Un agradecimiento muy especial y sincero al Dr. Moisés Berezowsky por todo el apoyo, orientación y la inmensa paciencia que ha consagrado para el desarrollo de esta tesis.

ÍNDICE

Introducción	1
1. Cálculo de perfiles	7
1.1. Hipótesis básicas	7
1.2. Ecuaciones fundamentales	8
1.3. Clasificación de perfiles de flujo gradualmente variado	14
1.4. Método de solución	18
1.5. Parámetros geométricos	22

2.	Resistencia al flujo en cauces arenosos	25
2.1.	Propiedades de sedimentos	25
2.1.1.	Clasificación de los sedimentos	27
2.2.	Ecuaciones de resistencia	30
3.	Bases teóricas de los métodos inversos	55
3.1.	Técnicas de solución del método inverso	58
3.2.	Método variacional adjunto	62
3.2.1.	Descripción del método	64
3.2.2.	Función de costo	68
3.3.	Técnicas de optimización	72
3.3.1.	Multiplicadores de Lagrange	78
3.3.2.	Búsqueda de la sección de Oro	80
4.	Aplicación a la Ingeniería. Obtención del coeficiente de rugosidad en ríos	85
4.1.	Planteamiento del método variacional adjunto	86
4.2.	Proceso iterativo de solución	94
4.3.	Ejemplo de aplicación	95
5.	Aplicación al río Samaria.	107
6.	Conclusiones	123
	Anexos A y B	127
	Referencias bibliográficas	139

INTRODUCCIÓN

El propósito del presente trabajo es analizar la aplicación de los métodos inversos en la estimación de parámetros como una alternativa de solución. Para llevar acabo dicha finalidad, se analiza un problema en particular que consiste en determinar el coeficiente de rugosidad en cauces.

En el campo de la Ingeniería existe un sin fin de fenómenos físicos a los que se enfrenta el ingeniero, los cuales son representados mediante modelos matemáticos; dichos modelos pretenden reproducir el fenómeno cuando se definen los diversos factores que intervienen dentro del mismo. A estos factores se les

denomina parámetros, y a partir de los valores que estos tomen se puede predecir el comportamiento aproximado del fenómeno físico.

Básicamente existen dos tipos de metodologías de modelación para resolver problemas: directas e inversas. Se le denomina metodología directa al proceso de inferir el comportamiento del fenómeno a partir de valores conocidos de los parámetros que se emplean en el modelo matemático. Cuando por algún motivo, los valores de los parámetros no son conocidos, o no es posible obtenerlos explícitamente a partir de los datos del problema, una forma de deducirlos es utilizando mediciones de algunos parámetros observables. Al procedimiento antes descrito, se le conoce como metodología inversa de modelación. Debe tenerse en cuenta que estas metodologías no siempre son exactas, ya que su aplicación está limitada por las diferentes teorías empleadas para la predicción y por los errores que se comenten en las mediciones.

Se utilizará el siguiente ejemplo para ilustrar los dos tipos de metodologías antes descritos. La ecuación de transporte de masa en un fluido se define de la siguiente forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} = E \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

donde:

- C* concentración del contaminante
- t* tiempo (s)
- x* dirección del flujo
- E* coeficiente de dispersión longitudinal (m²/s)
- V* velocidad media (m/s)

Esta expresión se aplica para describir el comportamiento de un contaminante tras ser arrojado en un flujo de agua considerando los fenómenos de transporte convectivo y dispersión longitudinal.

El planteamiento de la metodología directa consiste en determinar la concentración del contaminante a partir de los valores de V y E para un tiempo y distancia cualquiera. En cambio, la metodología inversa consiste en determinar el valor del coeficiente de dispersión longitudinal, E , a partir de mediciones de la concentración y del valor de V en distintas secciones.

¿Por qué la necesidad de un método inverso para determinar el valor del parámetro?. Un valor aproximado de los parámetros se puede establecer utilizando diferentes alternativas de solución; por ejemplo soluciones analíticas, exploración del dominio del modelo, métodos de prueba y error, métodos estadísticos, etc.; sin embargo, las soluciones que se obtienen al utilizar cualquiera de las opciones anteriores no garantizan obtener un valor óptimo del parámetro. El problema se complica aun más cuando el parámetro por determinar está distribuido en el espacio. Cuando esto sucede, es indispensable utilizar un modelo que considere la distribución del parámetro en dicho espacio y que al mismo tiempo lo relacione con otros parámetros. La mayoría de los modelos que representan parámetros distribuidos involucran derivadas ordinarias o parciales y obtener una solución analítica resulta complicado.

En años recientes, se han desarrollado una gran cantidad de procedimientos sistemáticos para la asimilación de datos basados en métodos de control óptimo; el método variacional adjunto pertenece a este tipo de procedimientos. Sasaki (1970) introdujo dos diferentes métodos de análisis variacional: el método de restricción frágil y el método de restricción fuerte. De este último se deriva el método variacional adjunto. El método variacional adjunto tiene la ventaja de que en su desarrollo se

introduce una ecuación de modelo que considera las variaciones de los parámetros distribuidos en el espacio.

El método variacional adjunto consiste en minimizar un funcional o función de costo, que representa el desajuste entre los datos observados o medidos y los resultados obtenidos de la modelación. La minimización del funcional se lleva a cabo utilizando como restricción la ecuación, o ecuaciones, del modelo. Para su solución se emplean los multiplicadores de Lagrange que incorporan una nueva ecuación al problema, llamada ecuación adjunta. A partir de esta ecuación, se determinan los valores de los multiplicadores; posteriormente, con las variables del modelo y los multiplicadores, se calcula el gradiente del funcional. Finalmente, con este gradiente se realiza una nueva estimación del parámetro en cuestión empleando algún método de optimización, como el del gradiente conjugado.

Como ya fue mencionado, el problema que se va a resolver en esta tesis consiste en determinar el coeficiente de rugosidad en un tramo de un cauce. De las características que se pueden conocer en un río, la rugosidad tiene una gran importancia, ya que el perfil hidráulico (elevación de la superficie libre del agua) depende de esta característica. Para determinar el efecto de la rugosidad en la pérdida de energía se puede recurrir a diversas expresiones o métodos empíricos como por ejemplo Manning o Chezy, que involucran un coeficiente de rugosidad representativo del material que se tenga en la sección del río.

Al construir obras civiles en un río, como por ejemplo: puentes, obras de protección, bordos, etc., se debe conocer la elevación que alcance la superficie libre del agua, la cual está en función de la rugosidad. Además, de que dichas obras cumplen una función específica, deben ser seguras. Por ello, la importancia de que al hacer un estudio, se utilicen los valores adecuados de cada uno de los parámetros involucrados en el problema.

Antes de iniciar el proceso de solución, para el tramo de estudio, es necesario determinar una serie de secciones interiores separadas por distancias relativamente pequeñas. Para cada sección definida es indispensable conocer sus características topográficas (cauce natural), pues a partir de estas se obtendrán los parámetros geométricos de la sección (área, radio hidráulico, ancho de superficie libre). En todas las secciones, o solo en algunas, pueden tenerse mediciones de la elevación de la superficie libre del agua para poder implementar el método inverso de solución.

Conviene resaltar que aquí se considera un flujo permanente y como modelo se utilizará la ecuación dinámica para flujo gradualmente variado expresada en forma diferencial.

El presente trabajo está estructurado de la forma siguiente: en el capítulo 1 se describen las ecuaciones fundamentales utilizadas en este trabajo y un método para calcular perfiles hidráulicos; en el capítulo 2 se describen varios métodos de resistencia al flujo y algunas propiedades de los sedimentos que se toman en cuenta para el desarrollo y aplicación de estos métodos; el capítulo 3 contiene una descripción básica del método variacional adjunto y la teoría sobre algunos métodos de optimización utilizados durante el proceso de solución del método inverso; el capítulo 4 contiene el desarrollo del esquema de solución del método variacional adjunto para determinar el coeficiente de rugosidad y un ejemplo sencillo de aplicación; por último, en el capítulo 5 se aplica el método al río Samaria. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo.

I. CÁLCULO DE PERFILES

I.1. HIPÓTESIS BÁSICAS.

El flujo gradualmente variado es el flujo permanente cuyo tirante varía gradualmente en la dirección del canal mientras que las características hidráulicas del flujo permanecen constantes en el intervalo de tiempo en consideración.

Para el desarrollo del presente trabajo se aceptan las hipótesis siguientes:

- a) el flujo es permanente
- b) las líneas de corriente tienen muy poca curvatura, de manera que la distribución de presiones es hidrostática

- c) los cambios de tirantes son pequeños en longitudes relativamente grandes
- d) la pendiente de la plantilla es pequeña, y por consiguiente, los tirantes normal al fondo y vertical son prácticamente iguales
- e) la distribución de velocidades en cada sección es la misma y para fines prácticos el coeficiente de corrección de Coriolis se considera $\alpha = 1$
- f) la pérdida de energía predominante es la de fricción
- g) el coeficiente de rugosidad se supone constante en el tramo en consideración.

Para el cálculo de la pendiente de fricción en una sección se utilizan las mismas formulas que en flujo uniforme.

I.2. ECUACIONES FUNDAMENTALES.

El flujo gradualmente variado se puede describir por medio de las siguientes ecuaciones:

- ❖ ecuación de continuidad
- ❖ ecuación de la energía

De esta ultima puede obtenerse la ecuación dinámica del flujo gradualmente variado, la cual describe la forma en que se comporta el perfil hidráulico a lo largo de un canal. A continuación se explica brevemente cada una de estas ecuaciones.

Ecuación de continuidad

Se basa en el principio de conservación de la masa. Al tomar en cuenta el flujo de masa en un volumen de control, se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial (\rho V A)}{\partial s} ds + \frac{\partial}{\partial t} (\rho A ds) = 0 \quad (1.1)$$

donde:

- ρ densidad del liquido
- V valor medio de la velocidad (que se considera representativo de toda la sección)
- A área de la sección transversal
- s coordenada curvilínea siguiendo el eje del volumen de control
- t tiempo

Si se considera flujo permanente, las derivadas con respecto al tiempo que aparecen en la ec. (1.1) se eliminan y resulta:

$$\frac{\partial (\rho V A)}{\partial s} ds = 0 \quad (1.2)$$

o bien,

$$\rho V A = \text{constante} \quad (1.3)$$

si además el fluido es incompresible ($\rho = \text{cte}$):

$$Q = V A = \text{constante} \quad (1.4)$$

La expresión anterior indica que el gasto es constante en cualquier sección del volumen de control. Para dos secciones cualquiera 1 y 2, elegidas en un mismo escurrimiento, es válida la relación siguiente:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q \quad (1.5)$$

La ec. 1.5 se cumple, únicamente, si no existen entradas o salidas de gasto entre las secciones 1 y 2, puesto que si esto sucediera, el gasto no sería el mismo en dichas secciones.

Ecuación de energía.

La energía total del agua en un punto de cualquier línea de corriente que pase a través de la sección transversal de un canal, se puede expresar como: la energía total en un punto cualquiera es igual a la suma de la carga de posición, la carga de presión y la carga de velocidad. La energía total E en el punto A sobre una línea de corriente del flujo se puede escribir de la forma siguiente:

$$E_A = z_A + d_A \cos \theta + \alpha \frac{v_A^2}{2g} \quad (1.6)$$

donde:

- z_A elevación del punto A medida desde el plano de referencia
- d_A profundidad del punto A debajo de la superficie libre del agua
- θ ángulo de la pendiente del fondo del canal
- α coeficiente de Coriolis
- v_A velocidad en el punto A

En general, cada línea de corriente que pasa por la sección transversal del canal, tiene una carga de velocidad diferente, debido a la distribución no uniforme de la velocidad en el escurrimiento. Solamente para un flujo ideal la carga de velocidad es idéntica para todos los puntos de la sección transversal.

Para pendientes muy pequeñas, con ángulo $\theta < 8^\circ$, se acepta que $\cos\theta \approx 1$, y por tanto, $y = d$; además, de las hipótesis iniciales, el coeficiente de Coriolis $\alpha = 1$. Al incluir las consideraciones anteriores en la ec 1.6, la expresión se simplifica como:

$$E_A = z_A + y_A + \frac{v_A^2}{2g} \quad (1.7)$$

La expresión anterior representa la energía total en un punto; para considerar la energía total en toda la sección basta hacer la consideración de que todos los puntos comprendidos en dicha sección tienen la misma velocidad, en consecuencia la misma carga de velocidad. Conforme al principio de conservación de la energía, la energía total en la sección 1 aguas arriba es igual a la energía total en la sección 2 aguas abajo más la pérdida de energía, h_f , entre las dos secciones. Lo anterior se expresa como sigue:

$$E_1 = E_2 + h_f$$

o bien:

$$z_1 + y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_f \quad (1.8)$$

La expresión anterior es conocida como ecuación de la energía para flujo a superficie libre. Con esta se puede determinar el tirante en la sección 2 si se conoce el tirante en la sección 1, o viceversa.

Para evaluar h_f , que se debe básicamente a la fricción que se produce entre el flujo y las paredes del canal, se pueden utilizar cualquiera de los métodos expuestos en el siguiente capítulo. Si en la ec. 1.8 se omiten los términos, z_i , entonces se obtiene la energía específica para una sección medida respecto al fondo del canal, siendo únicamente función de la profundidad del flujo.

Ecuación dinámica del flujo gradualmente variado.

Se obtiene a partir de la ecuación de la energía y representa la pendiente de la superficie libre del agua respecto al eje x , coincidente con la plantilla del canal, donde x representa la distancia a lo largo de la plantilla. Para esta ecuación, es necesario derivar la ecuación de la energía en una sección con respecto de x .

La energía total para un punto cualquiera está dada por la ec. 1.7 y al diferenciar con respecto de x , se llega a la expresión siguiente:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d}{dx} \left(z + y + \frac{V^2}{2g} \right) \quad (1.9)$$

Apoyándose en la figura 1.1, la pendiente de la línea de energía es S_f , la pendiente de la plantilla es S_o que se define como el ángulo de inclinación de la plantilla respecto de la horizontal. Se supone S_o positiva si la inclinación es descendente hacia aguas abajo y negativa en caso contrario. S_f se define como sigue:

$$S_f = -\frac{dE}{dx}$$

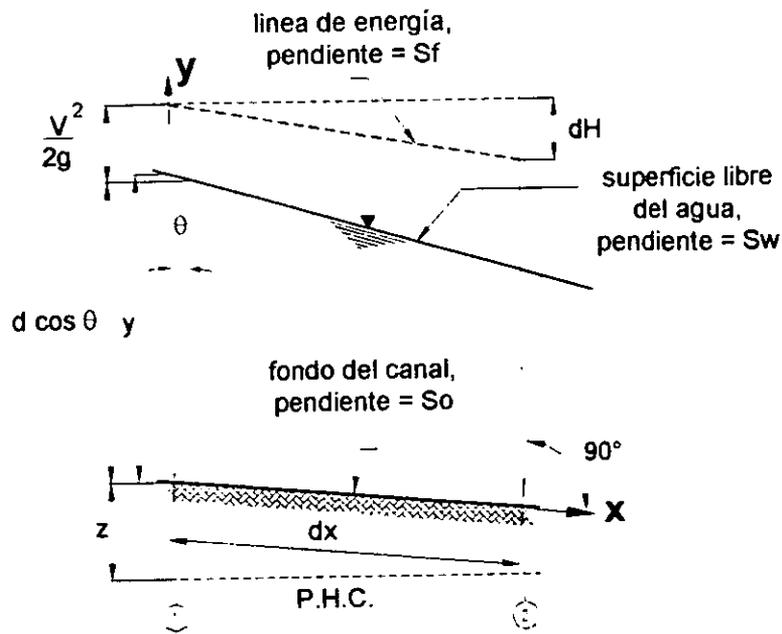


Fig. 1.1 Derivación de la ecuación dinámica para flujo gradualmente variado

Sustituyendo el valor de S_f en la ec. 1.9, se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \left(z + y + \frac{V^2}{2g} \right) + S_f = 0 \quad (1.10)$$

La ec. 1.10 es una variación de la ecuación dinámica y dicha expresión será utilizada posteriormente para resolver la metodología inversa de modelación.

Por definición, de la figura 1.1 se tiene que:

$$S_o = \tan \theta = -\frac{dz}{dx}$$

si se sustituye la expresión anterior en la ec. 1.10 se llega a:

$$\frac{d}{dx} \left(y + \frac{V^2}{2g} \right) + S_f - S_0 = 0 \quad (1.11)$$

siendo, además:

$$\frac{d}{dx} \left(y + \frac{V^2}{2g} \right) = \frac{dE}{dx} = (1 - F_r^2) \frac{dy}{dx} \quad (1.12)$$

sustituyendo la ec. 1.12 en la ec. 1.11, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - F_r^2} \quad (1.13)$$

Esta es la ecuación dinámica para flujo gradualmente variado, expresada en forma diferencial.

I.3. CLASIFICACIÓN DE LOS PERFILES DE FLUJO GRADUALMENTE VARIADO

La clasificación de los perfiles se hace en función de la relación $\frac{dy}{dx}$ dada por la ec. 1.13; la forma en que se desarrolla el perfil depende básicamente de la pendiente del canal, los valores de S_0 y F_r^2 , y la zona en la que se aloje el perfil. La figura siguiente muestra la forma en que se definen tres zonas, a partir de los tirantes crítico y normal, que son útiles para clasificar los perfiles.

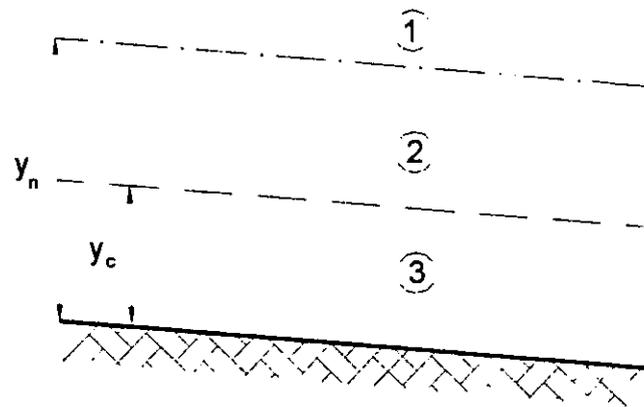


Fig. 1.2 Zonas de formación de perfiles

Cualquiera que sea la pendiente, para un gasto dado y sección del canal, las líneas que indican la altura del tirante normal y crítico, dividen el espacio en tres zonas dentro de las cuales queda definido cualquier perfil con tirante y . En cada zona existe un perfil distinto que es válido dentro de los límites de esa zona.

La pendiente del canal se puede clasificar en: negativa o adversa, positiva y nula o cero. Una pendiente positiva se puede clasificar de acuerdo con la magnitud que tenga el tirante normal en relación con el tirante crítico, como sigue:

pendiente suave	sí $y_n > y_c$	perfil tipo M
pendiente crítica	sí $y_n = y_c$	perfil tipo C
pendiente pronunciada	sí $y_n < y_c$	perfil tipo S

De acuerdo a la zona en que se aloje, existen perfiles M1, M2, M3 para pendiente suave; C1, C2, C3 para pendiente crítica; S1, S2, S3 para pendiente pronunciada; A2, A3 para pendiente adversa y H2, H3 para pendiente horizontal.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, existen diferentes formas para el perfil de la superficie libre, 13 en total, y que se muestran en la fig. 1.3

Tipos de perfiles:

Perfiles tipo M: son los más comunes. El perfil M1 es el llamado remanso y se presenta aguas arriba de vertedores, compuertas, estrechamientos, presas, pilas de puentes, etc.; es un perfil largo, del orden de kilómetros. El M2 se presenta cerca de las secciones que producen tirantes críticos, cambios de pendiente de suave o fuerte o al final de un canal descargando a un nivel más bajo; en general, comparado con el perfil M1, es un perfil corto (cientos de metros). El M3 se presenta aguas debajo de una compuerta o en el cambio de pendiente fuerte a suave; comúnmente, termina en un salto hidráulico y es más corto que el M2.

Perfiles tipo S: El perfil S1 corresponde a un remanso en un canal con pendiente fuerte; en general, principia después de un salto hidráulico. El perfil S2 se encuentra al inicio de canales de gran pendiente o en el cambio de una pendiente suave a una fuerte. El S3 se presenta aguas debajo de una compuerta o en la transición de una pendiente fuerte a otra pendiente de menor magnitud, pero también en régimen supercrítico. Estos perfiles son cortos (decenas o cuando mucho cientos de metros).

Perfiles tipo C: Para este tipo de perfil solo existen el C1 y el C3, debido a que los tirantes normal y crítico coinciden. Cuando el perfil tiende al tirante crítico, lo hace en forma gradual, pero en general, se presentan ondulaciones en la superficie libre del agua propias del estado crítico. Estos perfiles son de corto desarrollo.

	Perfiles en la zona 1 $y > y_n$ $y > y_c$	Perfiles en la zona 2 $y_n \geq y \geq y_c$ $y_c \leq y \leq y_n$	Perfiles en la zona 3 $y < y_n$ $y < y_c$
Pendiente subcrítica $S_0 < S_c$			
Pendiente Crítica $S_0 = S_c$			
Pendiente supercrítica $S_0 > S_c$			
Pendiente Horizontal $S_0 = 0$	∞ Ninguna	∞ 	∞
Pendiente Adversa $S_0 < 0$	Ninguna		

Nota: La flecha (\rightarrow) indica el sentido de cálculo

Fig. 1.3 Clasificación de los perfiles de flujo gradualmente variado

Perfiles tipo H: Cuando se tiene una pendiente horizontal o nula, no existe un tirante normal, en este caso solo hay dos perfiles: el H2 y el H3, que son el caso límite de los perfiles M2 y M3 ya discutidos.

Perfiles tipo A: Solamente existen los perfiles A2 y A3; son extremadamente cortos.

Para definir el sentido de cálculo de los perfiles se introduce el concepto de sección control. Una sección de control es una estructura que fija una relación única entre tirante y gasto, por ejemplo: compuertas, cimacios, vertedores, caídas, etc., así como el flujo uniforme y una sección que provoque el tirante crítico. Considerando el comportamiento de la ecuación diferencial y la forma de los perfiles puede deducirse que los perfiles en que el tirante es subcrítico se calculan hacia aguas arriba (perfiles H2, M1, M2, C1, C2, S1 y A2); los perfiles en que el tirante es supercrítico se calculan hacia aguas abajo (perfiles H3, M3, C3, S3 y A3).

I.4. MÉTODO DE SOLUCIÓN

A continuación se describe un método de cálculo de perfiles hidráulicos enfocado principalmente al flujo subcrítico que es la condición más común de la práctica en ríos. Para determinar el perfil se emplea el método de pasos ya que se adapta a condiciones variables: distancia entre secciones cualesquiera, secciones transversales irregulares, rugosidad diferente a lo largo del río, etc.; además de ser relativamente sencillo. Durante el proceso iterativo de solución se hace uso del método numérico de Newton-Raphson.

En flujo subcrítico, el cálculo se realiza desde una sección aguas abajo, en la que se conoce el nivel de la superficie libre del agua, hacia aguas arriba. Si

consideramos un tramo de río limitado por las secciones j y $j-1$ localizadas aguas arriba y aguas abajo del tramo, respectivamente, con una separación entre las secciones igual a Δx (fig. 1.4) la ecuación de la energía para el tramo de interés se escribe como:

$$H_j + \frac{Q^2}{2g A_j^2} = H_{j-1} + \frac{Q^2}{2g A_{j-1}^2} + h_f \quad (1.14)$$

donde:

- H es la elevación de la superficie libre del agua, $H = z + y$
- Q gasto o caudal

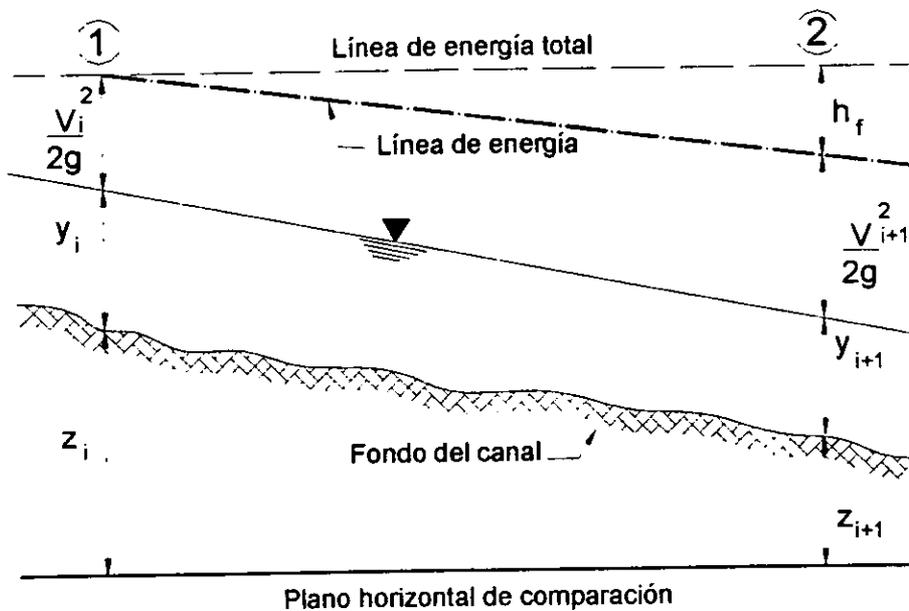


Fig. 1.4 Aplicación de la ecuación de la energía

El término h_f engloba todas las pérdidas de energía en el tramo: pérdidas por curvatura, por estrechamiento, por la resistencia al flujo (fricción), etc.; si hubiera otros tipos de pérdidas no asociadas al cauce, por ejemplo las causadas por las pilas de los puentes, etc., se deben sumar a h_f . La pérdida más importante es la debida a la resistencia al flujo y será la que se considere en el análisis y que se relaciona con la llamada pendiente de fricción media en el tramo. La pérdida por fricción para el tramo entre j y $j+1$ se define como sigue:

$$h_f = \frac{(S_j + S_{j+1})\Delta x}{2} = \frac{S_j \Delta x}{2} + \frac{S_{j+1} \Delta x}{2} \quad (1.15)$$

Sustituyendo la ec. 1.15 en la ec. 1.14 y agrupando los términos que son conocidos para cada una de las secciones definidas, se llega a:

$$H_j + \frac{Q^2}{2gA_j^2} - \frac{S_j \Delta x}{2} = H_{j+1} + \frac{Q^2}{2gA_{j+1}^2} + \frac{S_{j+1} \Delta x}{2} \quad (1.16)$$

Puesto que se conoce el nivel del agua en la sección $j+1$, se pueden valuar todos los términos del lado derecho de la ec. 1.16. Ahora el problema es determinar la elevación del agua en la sección j aguas arriba; en este método se procede iterativamente proponiendo valores de H_j , de tal manera que se satisfaga la ecuación.

Para hacer las iteraciones de manera más sencilla y rápida, se emplea el método de Newton-Raphson. Si el término del lado derecho se expresa como sigue:

$$ENER1 = H_{j+1} + \frac{Q^2}{2gA_{j+1}^2} + \frac{1}{2}S_{j+1} \Delta x$$

y se sustituye en la ec. 1.16, se obtiene:

$$\Delta E_j = \left[H_j + \frac{Q^2}{2gA_j^2} - \frac{1}{2} S_j \Delta x \right] - ENER1 \quad (1.17)$$

En el caso de que un valor de H_j satisfaga la ec. 1.17, hará que $\Delta E_j = 0$; por ello, cualquier otro valor de H_j producido en la iteración i que no satisfaga la ec. 1.17 provocara que ΔE_j^i no sea nulo.

Con el método de Newton-Raphson, el valor de H_j en la siguiente iteración se obtiene como:

$$H_j^{i+1} = H_j^i - (\Delta H_j)^i$$

donde:

$$(\Delta H_j)^i = \frac{\Delta E_j^i}{\frac{dE}{dH}} \cong \left[\frac{\Delta E_j}{1 - Fr_j^2 - \frac{1}{2} \Delta x \frac{dS}{dH_j}} \right] \quad (1.18)$$

donde:

Fr número de Froude del flujo

$\frac{dS}{dH_j}$ derivada de la pendiente de fricción con respecto al tirante

En algunos casos, como cuando las secciones son muy irregulares, o se cambia de configuración de flujo, no se logra una rápida convergencia con este método. Berezowsky y Jiménez (1993) proponen el siguiente procedimiento para obtener un buen resultado en un menor número de iteraciones: en las primeras 10 iteraciones se emplea la siguiente ecuación en lugar de la ec. 1.18:

$$(\Delta H_j)^i = \left[\frac{\Delta E_j}{1 - \frac{1}{2} \Delta x \frac{dS}{dH_j}} \right] \quad (1.19)$$

esto equivale a suponer que el número de Froude es pequeño; si aun no se ha llegado a la solución, en las siguientes iteraciones se emplea:

$$(\Delta H_j)^i = C_2 (\Delta E_j)^i \quad (1.20)$$

donde:

C_2 constante empírica con un valor aproximado de 0.1.

I.5 PARÁMETROS GEOMÉTRICOS

Corresponden a las propiedades de una sección del canal y son muy importantes en el cálculo de perfiles. Cuando se calcula el perfil hidráulico en un canal artificial, los parámetros geométricos se obtienen de manera muy sencilla, ya que se pueden expresar matemáticamente en función de la profundidad del flujo y de las dimensiones de la sección. En ríos, el procedimiento de cálculo no es tan simple, pues las secciones transversales pueden ser de forma muy irregular y variar

constantemente de un lugar a otro; si la geometría de la sección es sencilla, esta puede aproximarse a una sección trapecial o rectangular, sin embargo, en la mayoría de los ríos la geometría de la sección transversal es muy compleja y aproximarla a una sección regular puede provocar grandes errores, principalmente al realizar el cálculo del radio hidráulico.

Obtener los parámetros geométricos durante el cálculo del perfil, implica que se tengan que realizar una gran cantidad de operaciones. Para simplificar este procedimiento puede trabajarse con tablas que involucran las principales características geométricas de la sección transversal del río, elevación, área, radio hidráulico y ancho de superficie libre (E-A-R-T). A partir de los planos de topografía de las secciones transversales se elaboran tablas de coordenadas de los puntos elegidos para cada sección. Para diferentes elevaciones de la superficie libre del agua se determina el área, radio hidráulico, ancho de superficie libre, y con objeto de reducir el número de operaciones durante el cálculo del perfil, se reduce el número de parejas de datos de manera que se pueda emplear una interpolación lineal.

II. RESISTENCIA AL FLUJO EN CAUCES ARENOSOS

II.1 PROPIEDADES DE SEDIMENTOS

Se designa con el nombre sedimento al material producto de procesos físicos o químicos que destruyen y transforman a las rocas o suelo y que es acarreado por el agua y el viento. Cuando la estructura es alterada por la acción de los agentes físicos y químicos, se dice que la roca ha sido intemperizada. Todos los procesos de intemperización pueden incluirse en dos grupos: los que causan la desintegración física o mecánica de las rocas (cambios periódicos de la temperatura, congelación y

los efectos físicos de la flora y la fauna sobre las rocas); y aquellos que originan la descomposición química de la misma (oxidación, hidratación, carbonatación, efectos químicos de la vegetación). Los productos finales de un proceso de desintegración físico son las gravas y arenas, cuando mucho limos, en casos espaciales arcillas; del proceso de descomposición química, se obtienen las arcillas. Las fuentes del sedimento pueden clasificarse en dos grandes grupos, artificiales y naturales.

Naturales:

- a) Erosión de la superficie del terreno: la capa delgada y frágil del suelo experimenta la acción del viento y la lluvia. El viento acarrea, levanta y transporta las partículas de suelo, en tanto que la lluvia al impactarse contra el terreno, mueve o arranca partículas de suelo o roca.
- b) Erosión del cauce principal y sus tributarios: cuando se inicia el escurrimiento se crean arroyos, como consecuencia de las irregularidades topográficas. Cuando aumentan su caudal, obtienen una gran capacidad erosiva y de transporte. De esta manera, el río transporta materiales de diversos tamaños, que son depositados a lo largo de su perfil longitudinal.
- c) Movimientos naturales del terreno: los deslizamientos de grandes masas de tierra y roca, dejan material suelto y sin protección. Con el transcurso del tiempo, este material llega a las corrientes.

Artificiales:

- a) Destrucción de la vegetación: el desmonte, la quema y el despejado de extensas zonas boscosas, con el propósito de abrir terrenos para cultivo, son las actividades que producen una mayor cantidad de sedimentos.

- b) Obras de ingeniería: la construcción de carreteras, presas, ciudades, etc., hace que grandes volúmenes de materiales sean removidos. Parte de estos materiales quedan más sueltos que en su estado natural y quedan expuestos sin protección alguna, lo que facilita su transporte hacia las corrientes y cuerpos de agua.
- c) Explotación de minas y canteras: todos los procesos relacionados con esta actividad, fracturan rocas y suelo, producen una gran cantidad de partículas pequeñas o polvo.
- d) Desechos urbanos e industriales: materiales arrastrados por el drenaje y que son arrojados a ríos y lagos.

Los agentes de transporte pueden ser: el agua (suelos aluviales o fluviales); el hielo o glaciar (suelos de glaciar o acarrees glaciales); el viento (suelos eólicos como el loes y las dunas de arena) y la gravedad (suelos coluviales, como los de talud o depósito de ladera).

II.1.1 CLASIFICACIÓN DE LOS SEDIMENTOS

Los sedimentos naturales están constituidos por una gran variedad de partículas de diferentes tamaños y formas. Por la resistencia que oponen a ser arrastrados y el comportamiento al ser transportados por una corriente, se pueden distinguir dos clases de sedimentos: cohesivos y no cohesivos, sin embargo, también existen materiales con características mixtas.

Suelo no cohesivo o friccionante: también denominado material granular, es el formado por granos gruesos, como las arenas y gravas. En este tipo de material la fuerza de gravedad predomina fuertemente sobre cualquier otra, lo que significa que el peso de las partículas es la fuerza principal que se resiste a las fuerzas de arrastre

o al empuje de la corriente. Dado que la fuerza de gravedad está siempre presente, al disminuir el empuje del agua, las partículas se detienen, caen y se depositan; por tanto, el empuje que debe ejercer el flujo para mover o transportar tales partículas es función del peso de cada una de ellas. Cuando las partículas se depositan, se apoyan directamente sobre otras partículas y dejan espacios entre ellas, teniendo cada partícula varios puntos de apoyo. El comportamiento mecánico e hidráulico de los sedimentos no cohesivos está definido por la compactación del depósito, es decir, el grado de acomodo alcanzado por las partículas y la orientación de las mismas.

Suelo cohesivo: es el formado por partículas de grano muy fino, constituidas por minerales de arcilla, que se mantiene unidas entre sí por la fuerza de cohesión, la cual se opone a que las partículas sean separadas del conjunto del que forman parte. En este tipo de sedimento, la fuerza de cohesión es mucho mayor al peso propio de cada partícula y es la que se opone al arrastre provocado por el flujo de agua. Una vez que la cohesión ha sido vencida, las partículas desprendidas tienden a comportarse como un suelo no cohesivo, aunque siempre serán transportadas con mayor facilidad.

La interacción entre flujo de agua y suelo no cohesivo ha sido estudiada con mayor detenimiento que las existentes entre flujo de agua y suelo cohesivo, debido a que a lo largo de una corriente abundan mucho más los materiales no cohesivos. Las principales características que interesan de un sedimento no cohesivo, se refieren a las partículas que forman el sedimento, consideradas como entes aislados:

- Densidad y peso específico
- Tamaño
- Forma
- Velocidad de caída

No basta con estudiar las propiedades de las partículas individuales, ya que el comportamiento de una partícula aislada es muy diferente al que muestra cuando esta formando parte de un conjunto, por ello, también se requiere estudiar las propiedades de un conjunto o volumen grande de partículas.

- Relaciones entre pesos y volúmenes
- Distribución de los tamaños de las partículas
- Velocidad de caída
- Angulo de fricción interna o de reposo

Al tratar con problemas de ríos, es de interés conocer las propiedades de un conjunto de partículas, como por ejemplo la distribución de sus tamaños.

El análisis mecánico de una muestra natural de sedimentos permite separarla en diferentes fracciones, según los tamaños de las partículas. El cribado y el análisis de suspensión con hidrómetro son los métodos que se siguen para el análisis mecánico. El primero se utiliza para obtener las fracciones correspondientes al material relativamente grueso, como las gravas y las arenas; el otro, se emplea para determinar las fracciones del material fino, como las arcillas y limos.

Para un material casi uniforme o con poca dispersión en los tamaños de sus partículas, se ha considerado que un valor central, como la media (D_m) o la mediana (D_{50}), es suficiente para definir el tamaño de estos materiales. Sin embargo, los modelos que se han desarrollado para simular curvas de distribución granulométricas, indican que se requieren por lo menos de dos parámetros para describir completamente el tipo de material: una medida de tendencia central y la desviación que hay respecto de ese valor central.

Existen diversas formas de representar gráficamente una distribución de tamaños: histograma, polígono de frecuencias relativas y polígono de frecuencias relativas acumuladas. Las representaciones gráficas de la distribución de frecuencias suelen dibujarse con frecuencias o porcentajes como ordenadas, y aberturas de las mallas (tamaños o diámetros de las partículas) como abscisas. La representación más empleada en fluvial es la curva de distribución de frecuencias acumuladas del tipo menor, que se llama comúnmente curva granulométrica.

Después de cribar cada una de las muestras y hacer su representación gráfica, se observa que existen diferencias entre las curvas granulométricas. Si se cribara simultáneamente el material de todas las muestras, se obtendría una sola curva granulométrica que sería representativa del grupo; dicha curva es la llamada curva granulométrica efectiva o característica del material de que se trata.

Una vez dibujada la curva granulométrica efectiva, es fácil determinar cualquier diámetro característico de las partículas que constituyen el material. La determinación de los diámetros característicos debe realizarse después de analizar si la curva granulométrica puede ajustarse a una distribución teórica, ya que en caso afirmativo la determinación de los diámetros característicos es mucho más rápida y efectiva.

II.2 ECUACIONES DE RESISTENCIA

Las pérdidas de energía son debidas principalmente al efecto de fricción entre el líquido y las paredes que lo aíslan. Dicha fricción se transforma principalmente en calor, no aprovechado, que se considera como una pérdida de energía.

En un río cuyo fondo está constituido principalmente por material arenoso y si el flujo no tiene la capacidad de mover el sedimento, la resistencia al flujo se debe únicamente a los granos del material. Para estimar un coeficiente de rugosidad en función de un diámetro característico del sedimento, se puede emplear diversas expresiones. Por ejemplo, Strickler propuso que para un canal cuyo fondo está constituido por arena uniforme:

$$n = \frac{D^{1/6}}{21.1} \quad (2.1)$$

donde

D diámetro característico de los granos de arena, en m.

Otros autores han propuesto expresiones similares para los casos en los que el material del fondo no es uniforme. Meyer-Peter y Müller propusieron:

$$n = \frac{D_{90}^{1/6}}{26} \quad (2.2)$$

donde

D_i diámetro del material por debajo del cual queda el i por ciento del peso de la muestra del suelo.

Una vez que se ha encontrado el valor de n , se puede determinar el coeficiente C de Chezy mediante la siguiente relación:

$$C = \frac{R_h^{1/6}}{n}$$

donde

R_h radio hidráulico

C coeficiente de fricción de Chezy

Si el flujo tiene la capacidad de mover el sedimento, el fondo sufrirá una modificación presentándose las llamadas configuraciones de fondo. En general se identifican tres condiciones o regímenes de flujo, según el tipo de configuración: el fondo no se mueve, consecuentemente, no se presentan configuraciones; régimen inferior, se caracteriza por la presencia de rizos y dunas; régimen superior, se advierte la presencia de antidunas. Además existe una transición entre cada régimen.

Simons y Richardson (1961) hicieron una descripción de las configuraciones con base en observaciones de laboratorio, partiendo de la condición de que el flujo no podía mover el sedimento. Durante la prueba aumentaban el gasto, de tal manera que el esfuerzo cortante del flujo se incrementaba y se van formando las configuraciones que se muestran en la figura 2.1.

Estos autores propusieron la siguiente clasificación:

Régimen inferior o lento, $F_r < 1$.

1. Fondo plano sin arrastre
2. Rizos
3. Dunas con rizos sobreimpuestos
4. Dunas
5. Transición de dunas a fondo plano

Régimen superior o rápido, $F_r > 1$.

1. Fondo plano con arrastre
2. Ondas estacionarias simétricas
3. Antidunas

Los números de Froude, F_r , anotados en la clasificación son indicativos, ya que se ha observado que puede haber fondo plano con arrastre para números de Froude menores a uno.

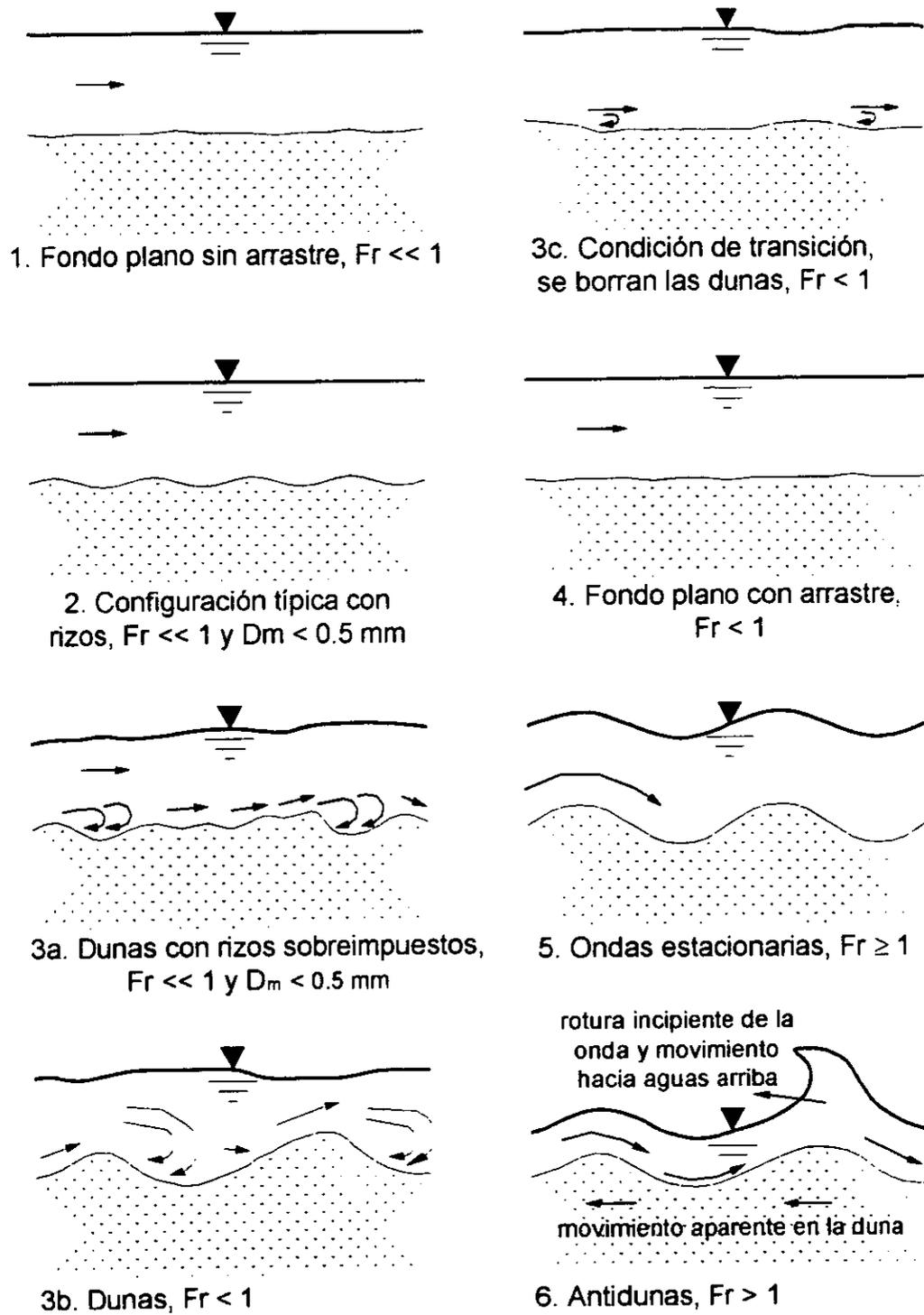


Fig. 2.1 Configuraciones de fondo en cauces arenosos

No existe una expresión general que permita calcular los coeficientes de rugosidad n y C cuando hay formas de fondo, sin embargo, se pueden emplear diversos procedimientos para fijar cualquiera de estos parámetros. La dificultad reside en evaluar el coeficiente de rugosidad pues no hay un método exacto que permita seleccionar un valor de n o C . Para establecer su valor aproximado se puede recurrir a tablas, fotografías, formulas o a la experiencia misma.

Para establecer el valor de C de Chezy, se cuenta con fórmulas y tablas para este propósito. Algunas de las más importantes fórmulas son: Ganguillet y Kutter, Bazin y Kozeny; Sotelo (1989) incluye una tabla que contiene fórmulas obtenidas experimentalmente. Para el coeficiente n se cuenta tanto con expresiones como con tablas de valores; además existe una solución nomográfica de la fórmula de Manning con la cual se puede determinar el valor de n en función de la velocidad, pendiente y los parámetros geométricos; en Chow (1983) se exhibe una tabla con valores recomendados para canales de varias clases. En ella se muestran los valores mínimo, normal y máximo, de mucha utilidad como guía para una selección rápida de n . También presenta una serie de fotografías de canales típicos acompañadas por una breve descripción de las condiciones del canal y los correspondientes valores de n .

Los métodos para determinar la resistencia al flujo, en general, son de dos tipos:

- ❖ Los que consideran la resistencia al flujo de manera global, es decir, que no separan la resistencia generada por los granos y la asociada a las formas de fondo.
- ❖ Los que dividen la resistencia al flujo en dos partes: una debida a la rugosidad de los granos y otra a las formas de fondo.

En un cauce se pueden presentar dos condiciones de fondo plano: una cuando la velocidad es pequeña y no existe arrastre de material que forma dunas o rizos; otra, cuando la velocidad es muy grande y existe arrastre de material. Para ambas condiciones de fondo plano se utiliza la siguiente expresión para determinar la pendiente de fricción:

$$S = \frac{Q^2}{75.1 g A^2 D_{65} \left(\frac{h}{D_{65}} \right)^{1.25}} \quad (2.3)$$

A continuación se presentan brevemente seis métodos de resistencia al flujo: se incluyen los métodos de Manning y de Chezy, pues son los mas empleados en la práctica. De los cuatro métodos restantes, uno considera la resistencia global y tres de ellos la dividen. Conviene aclarar que existen muchos otros métodos de resistencia al flujo, aquí solo se presentan algunos de ellos. De acuerdo con lo presentado en el capítulo primero, para el cálculo del perfil, se requiere conocer las expresiones para calcular tanto la pendiente de fricción como su derivada con respecto del tirante.

➤ **Métodos de Manning-Strickler y de Chezy**

La velocidad media con la ecuación de Manning es:

$$U = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2} \quad (2.4)$$

y la ecuación de Chezy:

$$U = C \sqrt{RS} \quad (2.5)$$

donde:

- U es la velocidad media en el canal.
- n coeficiente de rugosidad de Manning
- C coeficiente de fricción de Chezy
- R radio hidráulico
- S pendiente del fondo

Los coeficientes C y n no tienen un valor constante ya que dependen de un gran número de factores, entre los que destacan: sedimentación, rugosidad superficial, vegetación, irregularidad del canal, erosión, tirante y gasto.

Durante el proceso de cálculo del perfil, para determinar la pendiente de fricción, basta con despejar a S de las ecuaciones 2.4 o 2.5; después se deriva con respecto del tirante h .

Siguiendo el procedimiento antes descrito, se obtienen las siguientes expresiones; para el método de Manning:

$$S = \left(\frac{Qn}{AR^{2/3}} \right)^2 \quad \text{y} \quad \frac{dS}{dh} = -S \left[\frac{4}{3R} + \frac{2B}{A} \right] \quad (2.6)$$

para el método de Chezy:

$$S = \frac{Q^2}{C^2 A^2 R} \quad \text{y} \quad \frac{dS}{dh} = -S \left[\frac{1}{R} + \frac{2B}{A} \right] \quad (2.7)$$

Estos métodos no reproducen por si mismos la resistencia al flujo de las distintas configuraciones del fondo; se requiere ir modificando la n o C conforme cambia el gasto.

Procedimiento de cálculo de la pendiente de fricción y su derivada

Conocidos Q y n , para un tirante dado:

1. se calculan el área, radio hidráulico y ancho de superficie
2. con el grupo de ecuaciones 2.6 o 2.7 se evalúa la pendiente de fricción y su respectiva derivada

➤ **Métodos de Cruickshank y Maza**

Para determinar la velocidad media en un flujo turbulento sobre lechos móviles, estos autores relacionan los tres parámetros adimensionales siguientes:

$$\frac{h}{D_{50}}, \frac{hS}{\Delta D_{50}}, \frac{US}{\Delta \omega_{50}} \quad (2.8)$$

donde:

- Δ $=(\gamma_s - \gamma) / \gamma$, peso específico relativo del sedimento sumergido
- γ_s peso volumétrico del material del cauce
- γ peso volumétrico del agua
- ω_{50} velocidad de la caída de las partículas con diámetro D_{50}

El primer parámetro adimensional es una medida de la escala de turbulencia en relación con el diámetro representativo de las partículas del fondo; el segundo considera los esfuerzos relativos; el último mide la intensidad necesaria para mantener el sedimento en suspensión y representa la relación del trabajo realizado por el flujo (por unidad de volumen y por unidad de tiempo), necesario para mantener en suspensión a una unidad de volumen de material con velocidad de caída ω_{50} . Conviene aclarar que estos autores representan el material en suspensión con el D_{50}

y al material del lecho con el D_{34} . La velocidad de caída ω_{50} se calcula con la ecuación de Rubey

$$\omega_{50} = F_1 \sqrt{\Delta g D_{50}} \quad (2.9)$$

donde:

$$F_1 = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36\nu^2}{\Delta g D_{50}^3}} - \sqrt{\frac{36\nu^2}{\Delta g D_{50}^3}} \quad (2.10)$$

ν es la viscosidad cinemática del agua

En la fig. A.1 se muestra el diagrama de resistencia al flujo propuesto por Cruickshank y Maza; en la parte izquierda se encuentra la zona de régimen inferior (para rizos y dunas), en la derecha se presenta la de régimen superior (para antidunas) y en la parte central la que representa la transición. Con base en datos de campo y laboratorio, obtuvieron por regresión las siguientes expresiones.

Para rizos y dunas:

$$\frac{U}{\omega_{50}} = 7.58 \left(\frac{h}{D_{34}} \right)^{0.634} \left(\frac{S}{\Delta} \right)^{0.456} \quad (2.11)$$

válida si

$$\frac{1}{S} \geq 83.5 \left(\frac{h}{\Delta D_{34}} \right)^{0.350}$$

para antidunas:

$$\frac{U}{\omega_{50}} = 6.50 \left(\frac{h}{D_{24}} \right)^{0.644} \left(\frac{S}{\Delta} \right)^{0.352} \quad (2.12)$$

válida si

$$\frac{1}{S} \geq 66.5 \left(\frac{h}{\Delta D_{24}} \right)^{0.382}$$

De manera análoga al método de Manning, de la ecuación 2.11 o 2.12, se despeja el valor de S y se obtiene su derivada.

En régimen inferior:

$$S = \Delta \left[\frac{Q}{7.58 \omega_{50} A (h D_{24})^{0.634}} \right]^{2.193} \quad (2.13)$$

válida si

$$S \leq \frac{1}{83.5 (h D_{24})^{0.350}} \quad (2.13a)$$

y en régimen superior:

$$S = \Delta \left[\frac{Q}{6.50 \omega_{50} A (h D_{24})^{0.644}} \right]^{2.841} \quad (2.14)$$

válida si

$$S \leq \frac{1}{66.5 (h D_{84})^{0.382}} \quad (2.14a)$$

Las derivadas son; para régimen inferior:

$$\frac{dS}{dh} = -S \left[\frac{1.39}{h} + \frac{2.193 B}{A} \right] \quad (2.15)$$

— y superior:

$$\frac{dS}{dh} = -S \left[\frac{1.83}{h} + \frac{2.841 B}{A} \right] \quad (2.16)$$

Procedimiento de cálculo de la pendiente de fricción y su derivada

Conocidos D_{50} , ω_{50} , D_{84} , Δ y Q , para un tirante dado:

1. Se calcula la pendiente de fricción con la ec. 2.13 de régimen inferior
2. Se verifica el régimen con la ec. 2.13a. Si cumple se pasa al paso 5
3. Se calcula la pendiente de fricción con la ec. 2.14 de régimen superior
4. Se verifica el régimen con la ec. 2.14a. Si es correcto se pasa al paso 5. Si no se cumple ninguna de las dos condiciones, S se obtiene con la ec. 2.13a de la zona de transición
5. Con la ec. 2.15 o 2.16 se calcula la derivada de S

➤ **Método de Einstein y Barbarossa**

Estos autores separan la resistencia total al flujo en dos componentes: la resistencia de superficie, que considera el tamaño y graduación de los sedimentos en la superficie del fondo; y la resistencia de forma, que incluye el efecto de la forma, altura y distancia entre ondulaciones.

El esfuerzo tangencial τ_0 del fondo en contacto con el fluido se define como:

$$\tau_0 = \gamma R S \quad (2.17)$$

Se divide el radio hidráulico de la expresión anterior en dos partes: una que corresponde a la resistencia de grano, R' , y una que corresponde a la resistencia de forma, R'' . La ec. 2.17 se escribe como:

$$\tau_0 = \gamma R' S + \gamma R'' S \quad (2.18)$$

es decir, el esfuerzo total se compone de la suma del que se debe a la resistencia más el debido a las formas de fondo:

$$\tau_0' = \gamma R' S \quad (2.19a)$$

$$\tau_0'' = \gamma R'' S \quad (2.19b)$$

La velocidad de fricción o velocidad asociada al esfuerzo cortante total del fondo se define como:

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{g R S} \quad (2.20)$$

Si se toman en cuenta las ecs. 2.19a y 2.19b y la velocidad asociada al esfuerzo cortante, se definen la velocidad de fricción asociada a la rugosidad de los granos, y la debida a las ondulaciones del lecho, con:

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0'}{\rho}} = \sqrt{g R' S} \quad (2.21a)$$

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0''}{\rho}} = \sqrt{g R'' S} \quad (2.21b)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ec. 2.18, se tiene:

$$U_*^2 = (U_*')^2 + (U_*'')^2 \quad (2.22)$$

Einstein y Barbarossa calculan las pérdidas por fricción debidas sólo a las partículas con la ecuación de Keulegan:

$$\frac{U}{U_*} = 5.75 \log \left(12.27 \frac{R'}{D_{65}} x \right) \quad (2.23)$$

donde x es un factor de corrección que toma en cuenta los efectos de viscosidad.

Este factor se obtiene de la fig. A.2 con el valor de D_{65}/δ' ; δ' es el espesor de la subcapa viscosa y se define como:

$$\delta' = \frac{11.6\nu}{U_*'} \quad (2.24)$$

La pérdida por fricción debida a las formas de fondo depende de la cantidad de transporte de sedimentos y no es fácil de determinar. Los autores valoraron dichas pérdidas en función del llamado parámetro de Einstein, ψ' , definido por:

$$\psi = \frac{\Delta D_{35}}{R' S} \quad (2.25)$$

En la fig. A.3 se muestra la correlación del parámetro de Einstein con la relación U / U_*' ; con dicha figura se determina la velocidad media que considera las ondulaciones.

Para este método, la obtención de la pendiente de fricción es bastante complicada, debido al proceso iterativo que se requiere para calcular la velocidad media. La expresión para la pendiente de fricción resulta:

$$S = \frac{J}{10^{fac}} \quad (2.26)$$

donde:

$$J = 12.27 \Delta k \left(\frac{\alpha \sqrt{k}}{FD_{65}} \right)^{1/\beta} \quad (2.27)$$

$$fac = \frac{FD_{65} \left(\frac{FD_{65}}{\alpha \sqrt{k}} \right)^{1/2\beta}}{5.75 \sqrt{\Delta k}} \quad (2.28)$$

$$FD_{65} = \sqrt{k} \alpha (\psi')^p \quad (2.29)$$

$$k = \frac{D_{35}}{D_{65}} \quad (2.30)$$

$$\alpha = 8.185 + 3.059 \text{Ln}(h/D_{65}) \quad (2.31)$$

$$\beta = -0.588 + 2.080E - 3 \text{Ln}(h/D_{65}) \quad (2.32)$$

La ec. 2.29 es una modificación, propuesta por García (1982), de la ecuación original dada por la expresión siguiente:

$$FD_{65} = \frac{Q}{A(gD_{65})^{0.5}} \quad (2.33)$$

Los valores de α y β definidos por las ecs. 2.31 y 2.32, eliminan la necesidad de utilizar la fig. A.3.

La expresión para la derivada es:

$$\frac{dS}{dh} = \left[z \left(\frac{B}{A} + \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \left(\frac{fac}{2} \text{Ln}10 - 1 \right) + fac \frac{B}{A} \text{Ln}10 \right] \quad (2.34)$$

donde:

$$z = \frac{1}{\beta} \qquad \alpha' = \frac{3.059}{h}$$

Procedimiento de cálculo de la pendiente de fricción y su derivada

Conocidos D_{35} , D_{65} , Δ y Q , para un tirante dado:

1. Se calcula FD_{65} con la ec. 2.33
2. Se calculan α y β con las ecs. 2.31 y 2.32 y ψ' con la ec. 2.29

3. Si ψ' es ≤ 0.5 o ≥ 20 la pendiente de fricción se calcula con la ec. 2.3
4. Si ψ' esta dentro de los límites de formas de fondo, se calcula fac con la ec. 2.28 y J con la ec. 2.27
5. Se obtiene la pendiente con la ec. 2.26
6. Si la pendiente de fricción calculada en el paso 5 es menor que la de fondo plano, se utiliza esta última
7. Con la ec. 2.34 se calcula la derivada de S

➤ **Método de Engelund y Hansen**

Estos autores consideran que la pendiente de la línea de energía S se divide en dos partes:

$$S = S' + S'' \quad (2.35)$$

donde S' es la pendiente que incluye la resistencia de superficie y S'' es la pendiente debida a la resistencia de forma. Los esfuerzos cortantes asociados a la resistencia de superficie y de forma resultan:

$$\tau_0' = \gamma R S' \quad (2.36a)$$

$$\tau_0'' = \gamma R S'' \quad (2.36b)$$

Para estimar la resistencia de las formas de fondo consideraron las pérdidas debidas a la zona de separación aguas abajo de las dunas; para ello emplearon la formula de pérdidas por expansión de Carnot.

Las pérdidas por fricción asociadas a la rugosidad total del cauce y a la de los granos, las calculan con la ecuación de Darcy-Weisbach. En un fondo que presenta

ondulaciones, solo una parte del esfuerzo cortante total τ_0 está relacionado con la formación de dunas y el transporte de sedimentos; si τ'_0 es el componente efectivo del cortante que actúa en un lecho cubierto con dunas, este debería quedar incluido en las relaciones que describen el transporte de sedimento.

En forma adimensional los parámetros son:

$$\theta = \frac{RS}{\Delta D_{35}} \quad (2.37)$$

$$\theta' = \frac{R'S}{\Delta D_{35}} \quad (2.38)$$

donde

θ esfuerzo cortante adimensional total

θ' esfuerzo cortante adimensional que toma en cuenta la resistencia de los granos.

Engelund concluyo que debería existir una relación tal que:

$$\theta' = \theta'(\theta) \quad (2.39)$$

En la figura A.4, se muestran los resultados obtenidos por Engelund que permite obtener θ' a partir del valor de θ . La gráfica muestra dos curvas y en la parte central una zona de transición; la curva de abajo corresponde a régimen inferior y está asociada a dunas (no incluyeron los rizos en sus datos) y la parte de arriba corresponde al régimen superior, es decir, fondo plano y antidunas. Para la zona de régimen inferior propusieron la ecuación:

$$\theta' = 0.06 + 0.40 \theta^2 \quad (2.40)$$

En el intervalo de transición ($0.4 \leq \theta \leq 1.533$), en la figura A.4 se obtienen dos valores de la función, una para régimen inferior y otro para el superior.

Es obvio que en caso de que el fondo sea plano

$$\theta = \theta \quad (2.41)$$

y en caso de tener antidunas, los valores se obtienen directamente de la figura A.4.

En lugar de la ecuación de Keulegan que emplea Einstein (ec. 2.23) proponen utilizar una ley de potencia de la forma:

$$\frac{U}{U_*} = 9.45 \left(\frac{R'}{2D_{65}} \right)^{1/8} \quad (2.42)$$

En la figura A.5 se muestra una gráfica, propuesta por Engelund, para clasificar el régimen en el que se encuentra el flujo.

Para este método, las expresiones que se utilizan para determinar la pendiente de fricción, provienen de una modificación hecha por Cholley, con el objeto de lograr una solución continua y univaluada, al mismo tiempo evitar las iteraciones.

Propone reemplazar las ecs. 2.40 y 2.41, por una función del tipo:

$$\theta' = a \theta^b \quad (2.43)$$

donde a y b son constantes que dependen del tipo de régimen.

Berezowsky y Jiménez (1989a) proponen los valores de la siguiente tabla:

Configuración del fondo	Rango de θ	a	b
Fondo plano	$\theta \leq 0.055$	1	1
Dunas 1	$0.055 < \theta \leq 0.300$	0.143	0.328
Dunas 2	$0.300 < \theta < 0.900$	0.439	1.259
Dunas 3	$0.900 \leq \theta < 1.080$	0.698	5.760
Fondo plano	$1.080 \leq \theta$	1.000	1.000

Tabla 2.1 Constantes a y b para el método de Engelund y Hansen

La ecuación general para determinar la pendiente de fricción resulta:

$$S = \left[\frac{Q^2}{75.1 g A D_{65} [k \Delta a (h' k \Delta D_{65})^b]^{1.25}} \right]^{\exp b} \quad (2.44)$$

donde:

$$\exp b = \frac{1}{1 + 1.25(b - 1)}$$

Al emplear la ecuación anterior, se logra una transición suave y continua entre la zona de dunas y la de régimen superior. En el régimen inferior, el método original se ajusta por si mismo a la condición de fondo plano, por lo que no requiere modificación alguna. La expresión para evaluar la derivada es:

$$\frac{dS}{dh} = \frac{-S}{1 + 5.4(b - 1)} \left[\frac{(5.4)b}{h} + 2 \frac{B}{A} \right] \quad (2.45)$$

donde h se obtiene de la tabla 2.1; en el caso de tener fondo plano, $h=1$, por lo que

$$\frac{dS}{dh} = -S \left[\frac{5}{4h} + 2 \frac{B}{A} \right] \quad (2.46)$$

Procedimiento de cálculo de la pendiente de fricción y su derivada

Conocidos D_{35} , D_{65} , Δ y Q , para un tirante dado:

1. Se calcula la pendiente de fricción para fondo plano con la ec. 2.3 con $a=1$ y $b=1$
2. Se calcula el valor de θ con al ec. 2.43
3. Si θ es menor a 0.055, o mayor que 1.08, la pendiente es la obtenida en el paso 1; de lo contrario, se escogen los valores de a y b correspondientes al segundo renglón de la tabla 2.1
4. Se calcula S con la ec. 2.44
5. Se calcula el valor de θ con la ec. 2.43
6. Si θ está dentro de los límites correspondientes al renglón de la tabla 2.1, la pendientes es la obtenida en el paso 4; de lo contrario se escogen los valores de a y b del siguientes renglón de la tabla y se regresa al paso 4

➤ Método de Van Rijn

Este autor divide también las pérdidas en dos partes: una debida a la rugosidad de los granos y otra a las formas de fondo. Supone que las dimensiones de las formas dependen principalmente del transporte del sedimento en suspensión. En su descripción del fenómeno introduce dos parámetros: el primero considera las

características de las partículas del sedimento, D_s , y el segundo el transporte de sedimentos, T ; dichos parámetros están definidos como:

$$D_s = D_{s0} \left(\frac{\Delta}{\nu^2} g \right)^{1/3} \quad (2.47)$$

$$T = \frac{(U^i)^2 - (U_{*cr})^2}{(U_{*cr})^2} \quad (2.48)$$

donde U_{*cr} es la velocidad asociada al esfuerzo cortante crítico y se calcula con el criterio de Shields.

La fig. A.6 presenta una gráfica de D_s contra T , en la que se anotan las diversas configuraciones de fondo encontradas por Van Rijn. Su método es aplicable si T es menor de 25. En la fig. A.7 se muestra el diagrama de Shields modificado que permite calcular directamente el esfuerzo cortante crítico adimensional como función de D_s ; dicho esfuerzo se define como:

$$\theta_{cr} = \frac{(U_{*cr})^2}{\Delta g D_{s0}} \quad (2.49)$$

de donde se despeja U_{*cr} ; si se combinan las expresiones de Chezy, ec 2.5 y la ec 2.21a, se encuentra la siguiente relación entre U^i y la velocidad media

$$U^i = \left(\frac{\sqrt{g}}{C'} \right) U \quad (2.50)$$

donde C' es el coeficiente de Chezy que toma en cuenta únicamente la resistencia al flujo de los granos.

Van Rijn sugiere calcularlo como:

$$C' = 18 \log \left(\frac{12 R}{3 D_{90}} \right) \quad (2.51)$$

Este autor realizó un extenso trabajo experimental en el que midió las dimensiones de dunas para un amplio rango de flujos; encontró la correlación entre las dimensiones de las dunas y el transporte de sedimentos. Las dimensiones de las dunas resultan ser función del diámetro D_{50} , del tirante h y del parámetro de transporte T . En las figuras A.8 y A.9 se presentan los resultados de sus experimentos; Van Rijn propuso las siguientes expresiones:

$$\frac{H}{h} = 0.11 \left(\frac{D_{50}}{h} \right)^{0.30} (1 - e^{-0.50T})(25 - T) \quad (2.52)$$

$$\frac{H}{\lambda} = 0.015 \left(\frac{D_{50}}{h} \right)^{0.30} (1 - e^{-0.50T})(25 - T) \quad (2.53)$$

donde:

- H altura de las dunas
- λ longitud de las dunas

Para determinar la rugosidad equivalente de un fondo móvil propuso calcular la rugosidad de grano k_{sg} y la de las formas k_{sf} . La de grano se asocia al diámetro D_{90}

como lo indica la ec 2.51, esto es $k_{sg} = 3 D_{90}$; van Rijn propone obtener la rugosidad de las formas de fondo con:

$$k_{sf} = 1.1 H (1 - e^{-25\psi}) \quad (2.54)$$

donde:

$\psi = H / \lambda$ es la relación de esbeltez de las dunas.

La rugosidad total es la suma de los dos valores, o sea

$$k_s = 3 D_{90} + 1.1 H (1 - e^{-25\psi}) \quad (2.55)$$

el coeficiente global de Chezy será entonces:

$$C = 18 \log \left(\frac{12 R}{k_s} \right) \quad (2.56)$$

La velocidad media se obtiene con la ec. 2.5. Según la fig. A.6, si $T \leq 0.0$, el fondo es plano y no existe transporte de sedimentos, por lo que $k_s = 3 D_{90}$ (es decir que, $C = C'$). Si $T \geq 25$ el fondo tiende a ser plano, al barrerse las dunas, y también $k_s = 3 D_{90}$. No se consideran antidunas.

Este autor emplea la ecuación de Chezy y obtiene la pendiente de fricción y su derivada con el grupo de ecs. 2.7, pero C se obtiene en función de la rugosidad de los granos y de las formas de fondo.

Procedimiento de cálculo de la pendiente de fricción y su derivada

Conocidos D_{50} , Δ y Q , para un tirante dado:

1. Se calcula el parámetro D_* 2.47
2. θ_{cr} se obtiene de la figura A7 y U_{*cr} con la ec. 2.49
3. Se calcula U_*' con las ecs. 2.50 y 2.51
4. Se calcula T con la ec. 2.48
5. Si $T \leq 0$ o $T \geq 25$ el coeficiente C de Chezy se calcula con la ec. 2.51. Si T está entre 0 y 25 se calcula:
 6. la altura y la longitud de las dunas con las ecs. 2.52 y 2.53
 7. la rugosidad k_s con la ec. 2.55
 8. el coeficiente de Chezy con la ec. 2.56
 9. la pendiente de fricción y su derivada con el grupo de ecs. 2.7

III. BASES TEORICAS DE LOS MÉTODOS INVERSOS

El construir un modelo matemático que caracterice un fenómeno físico, implica definir una serie de elementos que pretenden describir el fenómeno de manera aproximada. Dichos elementos se llaman parámetros o variables del modelo. La idea fundamental al establecer un modelo es poder predecir las variables de interés para distintas condiciones. Los variables de interés están definidas de tal forma que son dependientes de los restantes parámetros del modelo.

En general, estos parámetros pueden ser medidos y, consecuentemente, se les llaman parámetros observables. Resolver un problema directo consiste en predecir el valor de la variable dependiente en función de los parámetros restantes del modelo. En cambio, resolver un problema inverso reside en inferir los parámetros del modelo a partir de valores medidos de las variables observables. De esta forma se puede deducir el valor correcto del parámetro en función de valores medidos.

El principal problema que enfrentan estos dos tipos de modelación, consiste en la posible sobredeterminación o indeterminación de los parámetros. En el caso de la indeterminación, esta se debe a dos factores: la falta de datos suficientes y las incertidumbres experimentales. En el primer caso se tiene un número indeterminado de soluciones y es necesario proporcionar información adicional para particularizar el problema. El segundo factor está relacionado con la imprecisión del conocimiento, ya que las teorías físicas que permiten la solución del problema, son aproximaciones de una realidad más compleja.

Conforme a lo antes expuesto, los problemas cuya modelación involucre variables o parámetros observables, se pueden resolver tanto por metodologías directas como inversas. La agudeza para aplicar cualquiera de las metodologías anteriores, radica en la facilidad o complejidad con que se puedan determinar los parámetros del modelo. Un caso trascendental se presenta cuando no es posible obtenerlos directamente, y la única solución factible es suponerlos de manera arbitraria. Es ante esta problemática que puede ser aplicada la metodología inversa de modelación, y su procedimiento de solución puede ser tan simple como despejar el parámetro que se desea obtener. Sin embargo, no siempre el procedimiento es tan sencillo, por lo que se recurre a las diversas técnicas de solución existentes.

En el cuadro 3.1 se presentan una serie de problemas en donde pueden aplicarse dichas metodologías.

Campo de estudio	Modelo Matemático	Metodología directa	Metodología inversa
Estructuras: flexión	$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$	Obtener el valor de la flecha (y) a partir de E , I y M	Inferir el valor de E a partir de la flecha, I y M
Hidráulica: régimen uniforme	$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S^{1/2}$	Obtener el gasto a partir del tirante, geometría, n , S_0 .	Inferir el tirante a partir de Q , S_0 y la geometría del canal.
Geotecnia: consolidación unidimensional	$\Delta H = m_v \Delta \sigma'_v H$	Obtener el asentamiento a partir de m_v , $\Delta \sigma'_v$ y H	Inferir el coeficiente de variación volumétrica a partir de ΔH , $\Delta \sigma'_v$ y H
Sanitaria: transporte de Masa	$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} = E \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$	Obtener la concentración a partir de V y E .	Inferir el coeficiente de dispersión a partir de V y C .
Hidráulica: flujo gradualmente variado	$\frac{d}{dx} \left[H + \frac{Q^2}{A^2 2g} \right] + S_f = 0$	Obtener las elevaciones H , a partir de Q , S_0 y n	Determinar el valor de n a partir de Q , H y S_0 .

Cuadro 3.1 Ejemplos de metodologías directas e inversas

El último ejemplo del cuadro 3.1 será aprovechado en este trabajo con la finalidad de analizar la aplicabilidad de la metodología inversa al inferir el valor del coeficiente de rugosidad, n , a partir de mediciones de la elevación de la superficie libre del agua, H .

III.1 TÉCNICAS DE SOLUCIÓN DE UN MÉTODO INVERSO

El propósito de la metodología inversa es intercambiar información entre los datos y los parámetros involucrados en el modelo; esto se logra al considerar los tres aspectos siguientes:

- ◆ Información experimental, la cual está relacionada con los valores reales de las variables o parámetros observables y es obtenida a partir de mediciones experimentales o en campo.
- ◆ Información previa, que se obtiene de forma independiente a las mediciones y corresponde a los valores de los parámetros; por ejemplo, en el caso de un proceso iterativo la información previa de los parámetros del modelo, es la generada en la iteración anterior a la que se está analizando.
- ◆ Información teórica, que implica utilizar leyes físicas para relacionar los parámetros del modelo con los parámetros observables o datos.

En la última década, el desarrollo de técnicas para la asimilación de datos ha mejorado de manera impresionante la precisión y la consistencia de los métodos. En los últimos 30 años, la mayoría de los esquemas registrados, básicamente, pertenecen a una de las tres diferentes clases de algoritmos:

- Métodos de interpolación polinomial local
- Métodos de interpolación estadística óptima
- Métodos de análisis numérico variacional

Los métodos de interpolación polinomial local ajustan funciones polinomiales a los datos observados en las inmediaciones de cada punto de una malla. Tienen la gran ventaja de ser simples y eficientes.

Los de interpolación estadística óptima asignan pesos a una combinación lineal de desviaciones observadas de un grupo de estimaciones con el propósito de minimizar el error cuadrático medio. La información estadística necesaria son el primer y segundo momentos, es decir, la media y la varianza de las variables observadas y de las desconocidas. Estas se utilizan para desarrollar las combinaciones lineales en función de la desviación estándar de un grupo de estimaciones. Para conocer la desviación estándar es necesario conocer el valor de la varianza, y para determinar el valor de la varianza es preciso conocer la media. La principal ventaja de este método es que produce una aproximación práctica y consistente al manipular un gran juego de observaciones heterogéneas. Sin embargo, también tiene ciertas dificultades; una de ellas es que en algunos casos contribuyen al suavizado excesivo de los campos analizados y elimina desarrollos que son poco significativos desde el punto de vista estadístico, pero que pueden ser muy importantes para la correcta predicción de problema.

La tercera clasificación de esquemas de asimilación de datos, minimiza un desajuste entre los datos observados y los resultados del análisis, y al mismo tiempo satisface una restricción, generalmente, expresada por una o varias ecuaciones diferenciales. Este tercer método puede ser resuelto de dos formas. La primera consiste en transformar el problema con restricciones a un problema sin restricciones; para lo cual, se puede emplear la técnica de los multiplicadores de Lagrange. La segunda alternativa consiste en utilizar técnicas de control óptimo que se basa en el uso de una ecuación dinámica adjunta. La principal ventaja de obtener problemas sin restricciones, es que estos se pueden resolver mediante algoritmos de optimización clásica, como el del paso descendente o del gradiente conjugado.

Antes de iniciar con la descripción de los métodos, es importante tomar en cuenta dos conceptos básicos del análisis de solución. Estos conceptos son:

- **Estabilidad:** es la propiedad de un procedimiento de ser sensible a pequeños errores en los valores de los datos. Si la información previa se utiliza de manera adecuada, se garantiza la estabilidad del procedimiento.

- **Robustez:** es la propiedad de la metodología según la cual, el procedimiento converge, desde cualquier valor inicial, a un valor óptimo sin que se presenten cambios considerables en el valor final.

Algunas de las técnicas que pueden ser utilizadas para resolver un problema inverso, son las siguientes:

❖ **Soluciones analíticas:**

Se utilizan cuando es posible obtener una expresión analítica que relaciona la información experimental, previa y teórica.

❖ **Exploración sistemática del espacio del modelo:**

Si el número de parámetros involucrados en el modelo es menor de 4 y la predicción del valor numérico de los parámetros por medio de correlaciones físicas no resulta muy compleja, se puede definir una malla en el espacio del modelo sobre la cual se infieren los parámetros en cada uno de los nodos y, después, utilizar estos parámetros en forma directa para evaluar la información obtenida

❖ Método de prueba y error:

Consiste en proponer un valor arbitrario inicial del parámetro x_0 y calcular su valor de la forma $v_{cat} = f(x_0)$, el cual debe compararse con un valor v_{obs} . Se itera hasta que se encuentre un valor de x tal que $v_{cat} \cong v_{obs}$, es decir, hasta un valor del parámetro que no mejore significativamente la diferencia entre los datos observados y los calculados.

❖ Método de Monte Carlo:

Si el número de parámetros es muy grande y predecir el valor numérico de los parámetros observables por medio de correlaciones físicas no es complejo, la exploración del espacio del modelo se reemplaza por una exploración aleatoria.

❖ Cálculo del punto de máximo valor esperado:

En general, los modelos no tienen un número pequeño de parámetros e inferir su valor numérico es muy complicado. En este caso la única solución práctica es aplicar una técnica que, sin grandes dificultades, alcance como resultado un punto que maximice la función que los relaciona. Si dicha función es diferenciable para cada uno de los parámetros, el punto máximo se puede encontrar usando métodos de gradiente.

❖ Método de mínimos cuadrados:

Este método es muy utilizado debido a su sencillez. Su desventaja es la falta de robustez, es decir, es muy sensible a un pequeño número de grandes errores en los datos. El punto central del método, es minimizar una función de ajuste que mide el error entre datos observados y el modelo.

Se utiliza el criterio de la suma de cuadrados de los errores para el ajuste entre los datos:

$$S = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2$$

donde ϵ es la diferencia que existe entre los parámetros observables y los calculados. Si el valor de S es muy próximo a cero se tendrá un mejor ajuste de los valores de los parámetros.

Para su solución se pueden utilizar algunos de los métodos antes mencionados:

- Exploración sistemática del espacio del modelo
- Prueba y error
- Monte Carlo
- Métodos de optimización clásica

III.2 MÉTODO VARIACIONAL ADJUNTO

La mayoría de los modelos matemáticos para la simulación de fluidos implican parámetros desconocidos, como por ejemplo: coeficientes de fricción, coeficientes de viscosidad turbulenta, coeficientes de arrastre del viento, etc., y en algunas ocasiones, condiciones iniciales y de frontera. El valor apropiado de estos parámetros, comúnmente se determina con la ayuda de datos obtenidos por medio de modelos de ajuste. Como una alternativa, se pueden utilizar metodologías de modelación inversa para obtener sistemáticamente el parámetro requerido.

Últimamente, el método variacional adjunto ha recibido una mayor atención y ha sido empleado para estimar parámetros en modelos de fricción y modelos de difusión de las fuerzas del viento en océanos, estimación de velocidad en un modelo oceánico, modelos de flujo subterráneo, estimación de factores de fricción y tirantes de agua en canales, etc. A pesar de haber sido usados en diversas aplicaciones complejas, los métodos adjuntos y las técnicas de modelado inverso están llenos de dificultades. Como menciona Yeh (1986), el problema inverso a menudo está mal planteado y además lleno de inestabilidades, particularmente si se están buscando parámetros distribuidos en el dominio del espacio-tiempo; sin embargo, hay situaciones bajo las cuales se puede determinar una solución satisfactoria, aunque en un sentido limitado. Será importante, por consiguiente, poder entender las circunstancias que permiten encontrar una solución del problema.

El problema inverso puede definirse como sigue: sea una función de relación

$$p(x,y,t) = F(c^2(x,y,t))$$

entre un parámetro $c^2(x,y,t)$ y $p(x,y,t)$ donde p representa las variables dependientes del modelo, por ejemplo, $U(x,y,t)$, $V(x,y,t)$ y $h(x,y,t)$. El problema inverso será entonces determinar c^2 en base a $p(x,y,t)$ y la relación inversa $c^2(x,y,t) = R(p(x,y,t))$.

Se dice que este problema está bien planteado si y sólo si:

- 1) A cada p le corresponde una solución $c^2(x,y,t)$; por tanto existe una solución
- 2) La solución es única para cualquier $p(x,y,t)$ dado
- 3) La solución depende continuamente de $p(x,y,t)$: por ende la solución es estable

Si el problema inverso no satisface uno o más de estos tres requisitos, se dice que está mal planteado.

El procedimiento básico en el método variacional adjunto consiste en minimizar un funcional que representa el desajuste entre los datos observados y los resultados del modelado. Para ello se hace uso de la técnica de minimización forzada, la cual involucra los multiplicadores de Lagrange que conducen a ecuaciones adicionales, conocidas como ecuaciones adjuntas, a partir de las cuales se determinan los multiplicadores.

Las variables del modelo y los multiplicadores de Lagrange permiten el cálculo del gradiente del funcional original; este gradiente se usa para minimizar el funcional, generalmente, por el método de gradiente conjugado o paso descendente.

III.2.1 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Como ya fue mencionado, la finalidad de este método es minimizar un funcional que mida la distancia entre los datos del modelo y las observaciones. El campo primario de interés son los modelos dependientes del tiempo, cuyo modelo matemático puede ser escrito como:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = F(x; c) \quad (3.1)$$

donde:

- x es un vector cuyos componentes son las variables dependientes
- t el tiempo
- c el vector que contiene los parámetros del modelo

F puede ser un operador lineal o no lineal. De acuerdo con Smedstad y O'Brien (1991), se supone que el sistema descrito por la ec. 3.1 no es cerrado, por lo que debe ser proporcionada información adicional para obtener una solución única del sistema. La información adicional está dada por una variable de control y , que puede consistir en: condiciones iniciales, condiciones de frontera, algunos de los parámetros del problema o una combinación de estos.

Cuando se ha definido y es posible determinar una solución única $x(y)$, de la ec. 3.1; es importante comprender que la variable de control y debe pertenecer a un grupo de controles admisibles y_{ad} , esto es, y_{ad} debe ser físicamente posible para el caso que se este analizando. Para determinar y_{ad} se puede usar información física sobre las condiciones iniciales o los parámetros usados como variables de control.

El principal interés es obtener una solución de la ec. 3.1 lo más próximo posible a las observaciones x' . Esta proximidad puede ser definida de diferentes formas; es habitual definir una función del costo J que mide la distancia entre la solución de la ec. 3.1 y las observaciones. El problema variacional puede ser formulado como un problema (P):

Encontrar y^* que pertenece a y_{ad} y minimiza la función de costo J .

donde y^* representa el y óptimo.

El planteamiento previamente enunciado, corresponde a un problema de minimización restringida, en el que la ecuación de modelo, ec. 3.1, representa la restricción a dicho planteamiento. Sasaki (1970) introdujo dos diferentes métodos de análisis variacional, el método de restricción frágil relacionado con el método de penalización; y el método de restricción fuerte.

El método de restricción frágil consiste en minimizar el funcional E definido por:

$$E(x, y) = J(x, y) + \alpha \|G(x; c)\|^2 \quad (3.2)$$

donde α es un factor predefinido y G está dado por:

$$G(x; c) = \frac{\partial x}{\partial t} - F(x; c) \quad (3.3)$$

La aproximación que se seguirá aquí, es el método de restricción fuerte; el cual está basado en la técnica clásica de los multiplicadores de Lagrange. Puede construirse un lagrangiano $L(x, \lambda, y)$ de la forma:

$$L(x, \lambda, y) = J(x, y) + [\lambda, G(x; c)] \quad (3.4)$$

donde:

- λ vector cuyos componentes son los multiplicadores del lagrangiano
- $[.]$ representa un producto interno del funcional $G(x; c)$, definido en el espacio a que pertenece.

Éste es el formalismo del método de restricción fuerte según Sasaki (1970). El problema de minimización restringido (P) es reemplazado así por un problema sin restricción con respecto a las variables x , λ y y . Usando este formalismo se asegura que las observaciones satisfacen exactamente a las restricciones.

Puede ser demostrado que el problema de determinar los puntos estacionarios del funcional $J(x, y)$ bajo la restricción $G(x; c) = 0$, es equivalente al problema de determinar los puntos estacionarios de la ec. 3.4, con respecto a las variables x , λ y

y. Las ecuaciones que expresan que el lagrangiano es estacionario, son llamadas ecuaciones de Euler-Lagrange del problema (P).

La condición óptima de Euler-Lagrange está dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*, y^*) = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x^*, \lambda^*, y^*) = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x^*, \lambda^*, y^*) = 0 \quad (3.7)$$

de donde se obtienen x^* , λ^* y y^* .

La ec. 3.5 devuelve la ecuación original del modelo. El operador en la ec. 3.6 es el operador adjunto de la ec. 3.5. Es común llamar a la ec. 3.6 la ecuación adjunta de 3.5. La ecuación del modelo propagará información hacia adelante, mientras la ecuación adjunta propagará información hacia atrás. La última ecuación, proporciona el gradiente de L con respecto a las variables de control. El gradiente juega un papel importante para determinar la mejor solución, ya que es uno de los factores principales en los algoritmos de optimización para encontrar el mínimo de la función de costo.

Como puede observarse de estas ecuaciones, el análisis variacional completo depende de la elección del funcional J y de la restricción G . El método de solución también es una parte importante del análisis. Hay otros algoritmos clásicos para resolver el problema restringido (P).

Es posible formular el método de ecuaciones adjuntas sin introducir los multiplicadores de Lagrange. Técnicas óptimas de control que de hecho son técnicas para minimizar un funcional, como la función de costo, pueden usarse para calcular el gradiente de la función de costo con respecto a las variables de control. Usando estas técnicas es necesario resolver la ecuación de modelo, ec. 3.1, y la ecuación adjunta de forma linearizada de la ecuación de modelo

III.2.2 FUNCIÓN DE COSTO

El objetivo del método variacional adjunto es encontrar una solución que sea lo más próxima posible a las observaciones y, para ello se emplea un funcional llamado función de costo. La función de costo, J , está elaborada de manera que mide la distancia o desajuste, entre los resultados del modelo y las observaciones, y por lo tanto, debe tener la propiedad de norma.

Existen numerosas formas de funcionales J que pueden ser consideradas, y cada una de ellas dará un resultado diferente para la solución del modelo. El método variacional hace uso de las derivadas de J , la función del costo, por consiguiente, debe ser diferenciable.

Es común escoger J como el cuadrado de la norma euclidiana, la cual mide la magnitud de dicha función. En este caso la magnitud de la función resulta ser el desajuste entre los datos medidos y los que resulta del modelo. Como el propósito es minimizar dicha función, lo que en realidad se está haciendo es minimizar el desajuste entre los datos.

J puede definirse entonces como:

$$J(x, c) = \frac{1}{2} (x - x')^T K_x (x - x') + \frac{1}{2} (c - c')^T K_c (c - c') \quad (3.8)$$

donde:

- x' y c' denotan una variable observada o estimada
- x y c denotan una variable calculada
- K_x y K_c representan matrices de validez especificadas.

Las matrices de validación dependen de la varianza del error en cada punto de observación y proporcionan información sobre la calidad de los datos. Si los errores en las observaciones no están correlacionados, entonces las matrices de validación son diagonales. Las matrices K_x y K_c siempre son definidas como simétricas positivas. Las observaciones no pueden estar disponibles en todas partes, por lo que, para los puntos donde no hay observación alguna, las matrices de validación son iguales a cero.

El primer término en la ec. 3.8 es llamado desajuste de los datos y será una condición para la ecuación adjunta. El último término en dicha ecuación se agrega a la función de costo porque el objetivo de esta investigación es estimar los parámetros en el modelo. Agregando este término, la nueva estimación de los parámetros no estará demasiado lejos de la suposición inicial. En otras palabras, minimiza los resultados de la función de costo en la solución, la cual se espera que esté próxima a las observaciones y los nuevos valores de los parámetros sean muy próximos de los estimados. Otra manera de agregar más información sería usar la solución de una simulación previa del modelo como observaciones.

Esquema general del procedimiento de solución.

El procedimiento del método variacional para la asimilación de los datos y estimación del parámetro puede formularse de la manera siguiente:

1. Se elige una primera estimación de los parámetros de control
2. Se integra el modelo hacia adelante para el periodo sobre el cual se tienen las observaciones
3. Se calcula el desajuste de los datos $(x-x')$
4. Se integra hacia atrás en el tiempo la ecuación adjunta forzada por el desajuste de los datos
5. Se calcula el gradiente de L con respecto a las variables de control
6. Se usa el gradiente de L en un algoritmo de optimización, para encontrar un nuevo valor de los parámetros de control que hacen que la función de costo se dirija hacia su mínimo
7. Se revisa si se ha encontrado la solución óptima. Esto se puede hacer verificando la norma de ∇J o el valor de J para ver si este es menor a una tolerancia establecida
8. Si éste no es el caso, se repite el procedimiento arriba descrito, usando los nuevos valores de los parámetros de control como una nueva estimación y se continua el proceso iterativo hasta encontrar una solución satisfactoria.

Al intentar encontrar el mínimo de la función de costo, no se puede esperar que el mínimo sea exactamente cero. Experiencia en varias aplicaciones muestra que la disminución en el valor de la función de costo o su gradiente es a lo sumo un par de órdenes de magnitud. Experiencias en Hidrología, estimando parámetros en flujo subterráneo usando la técnica del método variacional, muestra que confiando en

la norma del gradiente como la única medida de convergencia a la solución óptima pueden llevar un número innecesario de iteraciones. Una manera mejor de determinar si se ha encontrado la solución óptima, sería verificar y ver si la relación:

$$\frac{\|\nabla J\|}{\|\nabla J_0\|}$$

es menor a una tolerancia prescrita, donde $\|\nabla J_0\|$ denota la norma del gradiente durante la primera iteración. De acuerdo con los resultados obtenidos en varias aplicaciones, puede esperarse que la reducción en la tolerancia sea de una magnitud de 1×10^{-2} .

Análogamente, en lugar de verificar el valor absoluto de J , la proporción J / J_0 debe ser menor a una tolerancia especificada. La disminución en la propia función de costo puede no ser una buena medida de cómo se aproxima la solución al mínimo.

Intentar ajustar un modelo a las observaciones reales es una tarea difícil. Dependiendo de la complejidad del modelo y su capacidad de predecir el mundo real puede no ser posible reducir el valor de la función de costo grandes ordenes de magnitud. Si la suposición inicial para los parámetros está cerca del valor óptimo, no se puede esperar que la función de costo o su gradiente experimente una disminución muy grande. Esto no significa que el proceso de minimización no ha tenido éxito.

Durante las primeras iteraciones, la reducción en el valor de la función de costo suele ser rápida. Después de esta disminución inicial, la reducción por cada iteración será más lenta. La meta será mantener el número de iteraciones por debajo de aproximadamente 15 - 20. Si es necesario continuar con iteraciones extensas, puede ser cambiado el algoritmo de minimización.

III.3 TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN

Hay diferentes métodos iterativos de optimización disponibles para minimizar la función definida por la ec. 3.4. De los métodos que involucran el gradiente de la función, el más antiguo y el más simple para determinar el punto óptimo de la función multivariable es el método de paso descendente. Algunos de los algoritmos actuales más avanzados son resultado de una modificación del método de paso descendente básico, de tal forma que los nuevos algoritmos han mejorado sus propiedades de convergencia.

Los problemas complejos de ingeniería pueden tener un gran número de variables, N , y en tales casos la mejor alternativa de un método de optimización es el algoritmo de gradiente conjugado el cual tiene un mejor ritmo de convergencia que el método de paso descendente. Hay métodos con mejores índices de convergencia que el algoritmo de gradiente conjugado, por ejemplo: método de Newton. Estos métodos tienen índices cuadráticos en su ritmo de convergencia, pero la desventaja es que requieren del almacenamiento de matrices Hessianas de tamaño $N \times N$, de las segundas derivadas del funcional. Los algoritmos de gradiente conjugado requieren el almacenamiento de unos cuantos vectores de magnitud N .

El algoritmo del gradiente conjugado es un método iterativo para la minimización sin restricciones de una función general de N variables. El método produce una mejor aproximación al mínimo, de una función no lineal, con cada iteración. Durante cada iteración se hace una estimación de la mejor manera, para cambiar cada componente del vector x y producir la máxima reducción en el desajuste de los datos. La dirección de búsqueda, se obtiene combinando información sobre el gradiente de la función original, con información de las iteraciones anteriores para producir una nueva dirección de búsqueda.

El algoritmo también estima el tamaño del paso óptimo que debe usarse para encontrar la magnitud de los cambios a lo largo de la dirección de la búsqueda. El método de gradiente conjugado se ha aplicado con éxito en varias aplicaciones para minimizar la función de costo usada en un análisis variacional.

Método de gradiente conjugado.

El método de gradiente conjugado, o más generalmente el método de la dirección conjugada se analiza, únicamente, para una función cuadrática. El problema que se considera es el problema de minimizar la función del costo descrita por la ec. 3.8. Éste es un problema de minimización sin restricciones y puede escribirse en la forma siguiente:

$$J(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + b^T x + c \tag{3.9}$$

donde:

- $J(x)$ representa la función del costo
- x vector que representa las N variables, x_0, \dots, x_{N-1} , de la función
- Q se define como una matriz simétrica positiva
- b un vector
- c una constante
- x^T representa la transpuesta de x

Se supone que $J(x)$ puede escribirse como una función cuadrática similar a la ec. 3.9. En general, un algoritmo iterativo para resolver la ec. 3.9, toma la forma:

$$x_{k+1} = x_k + a_k d_k \tag{3.10}$$

donde:

d_k es un vector dirección de búsqueda

α_k es un tamaño de paso óptimo

La ec. 3.10 está referida a un método de gradiente generalizado (o simplemente un método de gradiente).

Sea

$$g_k = \nabla J(x_k) \tag{3.11}$$

el gradiente de J con respecto a x_k . Si se usa el método de paso descendente, la dirección de búsqueda d_k está dada simplemente por $-g_k$, es decir, el gradiente negativo de la función.

Para el desarrollo de este método se exponen un par de propiedades útiles de las direcciones conjugadas:

Definición: dada una matriz simétrica Q y dos vectores d_i y d_j , se dice que son conjugados con respecto a Q si $d_i^T Q d_j = 0$ para $i \neq j$. Si $Q = I$, entonces la definición anterior es equivalente a la noción usual de ortogonalidad.

Teorema: si Q se define positivo y los vectores d_i son mutuamente conjugados, entonces éstos vectores son linealmente independientes.

Para un grupo dado de N vectores linealmente independientes v_0, v_1, \dots, v_{N-1} , es posible definir un grupo de direcciones conjugadas d_0, d_1, \dots, d_{N-1} de la manera siguiente. Suponiendo que:

$$d_0 = v_0 \tag{3.12}$$

se define

$$d_i = v_i + \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} d_j \quad (3.13)$$

para $i = 1, \dots, n-1$. Los coeficientes a_{ij} se escogen de forma tal que los d_i sean conjugados a las direcciones anteriores d_{i-1}, \dots, d_0 .

Multiplicando la ec. 3.13 por $Q d_i$ para $l = 0, \dots, i-1$ resulta:

$$d_i^T Q d_i = v_i^T Q d_i + \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} d_j^T Q d_i = 0 \quad (3.14)$$

Si todos los a_{ij} anteriores se han escogido de manera que d_0, \dots, d_{i-1} sean conjugados, entonces:

$$d_j^T Q d_i = 0 \quad (3.15)$$

De la ec. 3.14, se tiene:

$$a_{ij} = -\frac{v_i^T Q d_j}{d_i^T Q d_j} \quad (3.16)$$

para todo $i = 0, \dots, N-1$ y $j = 0, \dots, i-1$. El grupo de vectores d_0, \dots, d_{N-1} definidos por las ecs. 3.12 a 3.16 son conjugados con respecto a Q .

El procedimiento anterior puede usarse para desarrollar el método de gradiente conjugado. El primer paso es suponer que:

$$v_0 = -g_0 \quad (3.17)$$

El paso inicial está en la dirección del gradiente negativo de J y es idéntico a la dirección del método de paso descendente. El resto de los vectores v se escogen como $v_1 = -g_1, \dots, v_{N-1} = -g_{N-1}$. Usando la ec. 3.10 se consigue:

$$x_1 = x_0 + a_0 d_0 \quad (3.18)$$

La próxima dirección conjugada d_1 se encuentra usando las ecs. 3.13 y 3.16 con $v_1 = -g_1$.

$$d_1 = -g_1 + \frac{g_1^T Q d_0}{d_0^T Q d_0} d_0 \quad (3.19)$$

De la ec. 3.9

$$g_{k+1} - g_k = Q(x_{k+1} - x_k) \quad (3.20)$$

y usando la ec. 3.10

$$g_1 - g_0 = Q(x_1 - x_0) = a_0 Q d_0 \quad (3.21)$$

La ec. 3.9 puede escribirse ahora como

$$d_1 = -g_1 + \frac{g_1^T (g_1 - g_0)}{d_0^T (g_1 - g_0)} d_0 \quad (3.22)$$

El proceso puede repetirse sucesivamente y el resultado es

$$d_k = -g_k + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{g_k^T (g_{j+1} - g_j)}{d_j^T (g_{j+1} - g_j)} d_j \quad (3.23)$$

Esta expresión puede simplificarse usando el hecho de que

$$g_k^T d_j = 0 \quad (3.24)$$

para $j = 0, \dots, k-1$. El subespacio medido por d_0, \dots, d_{k-1} también es el subespacio medido por g_0, \dots, g_{k-1} , por lo que

$$g_k^T g_j = 0 \quad (3.25)$$

para $j = 0, \dots, k-1$. La ec. 3.23 se reduce entonces a

$$d_k = -g_k + \beta_k d_{k-1} \quad (3.26)$$

donde

$$\beta_k = \frac{g_k^T (g_k - g_{k-1})}{d_{k-1}^T (g_k - g_{k-1})} \quad (3.27)$$

Si se usan nuevamente las ecs. 3.24, 3.25 y 3.26 para d_{k-1} , la expresión para β puede reescribirse como

$$\beta_k = \frac{g_k^T g_k}{g_{k-1}^T g_{k-1}} \quad (3.28)$$

Es importante notar que para calcular la nueva dirección d_k , sólo es necesario saber la actual dirección, los gradientes anteriores de J y la dirección anterior d_{k-1} . Hay un problema al usar el algoritmo de gradiente conjugado descrito anteriormente. Si el número de variables es grande, como en algunos problemas de ingeniería, el método puede producir una dirección de búsqueda no muy eficiente, después de unas iteraciones, debido a la pérdida de conjugacidad. Han existido varios intentos para evitar este efecto. Uno fue usar un reinicio periódico con la dirección del método de

paso descendente; sin embargo, hay una desventaja al usar esta variante. La reducción al reiniciar la iteración es a menudo pequeña comparada con la reducción que ocurriría sin reiniciar el método.

III.3.1 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

En un problema de optimización se puede emplear alguno de estos dos diferentes procedimientos: el método de sustitución directa y el método de variación forzada. Ambos métodos se caracterizan por una distinción entre las variables.

Para el método de sustitución directa, algunas de las variables se eliminan en función de las variables restantes. Obviamente, la elección de las variables que se van a eliminar es arbitraria. Esta también es una característica del método de variación forzada, donde la primer variación m , es determinada en función de las $n-m$ variaciones restantes. De esta manera los métodos no son proporcionales con respecto al tratamiento de las variables.

Para evitar tales distinciones, esto es, tratar cada variable de igual forma y al mismo tiempo preservar la integridad de las restricciones, se puede emplear el método de los multiplicadores de Lagrange, en el cual se introducen ciertas constantes artificiales indeterminadas dentro del problema. En este método existen $n - m$ ecuaciones que deben ser resueltas (n es el número de variables y m es el número de restricciones).

Condiciones necesarias

Para iniciar el desarrollo, es bueno hacer notar que una condición necesaria para la existencia de un óptimo local es que dy , definido como:

$$dy = \sum_{i=1}^n \frac{dy}{dx_i} dx_i \tag{3.29}$$

debe anularse, esto es $dy = 0$, para todas las variaciones admisibles.

Las variables admisibles son las variaciones que satisfacen:

$$g(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2) = 0 \tag{3.30}$$

donde $g(x_1, x_2) = 0$ es la restricción de la función objetivo; (x_1^*, x_2^*) es un máximo o mínimo, dependiendo del objetivo del problema, y debe cumplirse que $g(x_1^*, x_2^*) = 0$ y dx_1 y dx_2 son los desplazamientos admisibles. Entonces

$$dg_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad \text{para } k=1,2,\dots,m \tag{3.31}$$

Por otra parte, en el punto estacionario restringido x^* ,

$$g_k^* = g_k(x^*) = 0 \quad \text{para } k=1,2,\dots,m \tag{3.32}$$

Si se multiplica la ec. 3.31 por una constante λ_k , se forma dF :

$$dF = dy + \sum_{k=1}^m \lambda_k dg_k \tag{3.33}$$

esto es;

$$dF = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots \right) + \lambda_1 \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n} dx_n \right) + \dots + \lambda_m \left(\frac{\partial g_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n} dx_n \right)$$

Agrupando términos en dx_i , de la ecuación anterior

$$dF = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \right) dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \right) dx_n \quad (3.34)$$

o bien:

$$dF = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \right) dx_i \quad (3.35)$$

Esta función debe anularse para todas las variaciones admisibles:

$$dF = 0 \quad (3.36)$$

Es importante hacer notar que la función objetivo modificada no puede ser examinada en la forma usual para determinar si el punto estacionario es un máximo o un mínimo, sin embargo, esta puede ser utilizada solamente para determinar la posible localización de un máximo o un mínimo.

III.3.2 BÚSQUEDA DE LA SECCIÓN DE ORO

Este es un método numérico de búsqueda secuencial para funciones unidimensionales con restricciones; se caracteriza por utilizar un numero de puntos, colocados a distancias iguales dentro de un intervalo de exploración.

Para la exploración de dicho intervalo, el método utiliza las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{\tau^2} = 0.381966$$

$$\frac{1}{\tau} = 0.618034$$

donde τ se obtiene al dar solución a la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\tau} = \tau - 1$$

la cual se puede describir de la siguiente forma

$$\tau^2 - \tau - 1 = 0$$

y para dicha ecuación cuadrática se obtienen las siguientes soluciones:

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \qquad \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

donde el primer término corresponde a τ .

El segundo término es $1 - \tau$.

$$\tau = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1.618034$$

El valor de τ también se puede obtener de la relación:

$$\frac{F_n}{F_{n+1}}$$

la cual para un valor de n suficientemente grande converge al valor de 1.618033989.

El primer paso de aplicación de este método es determinar un intervalo, el cual contiene el punto óptimo, en este caso un mínimo. Lo anterior se logra cuando existen tres números a , b y c , tales que cumplen con las siguientes relaciones:

$$a < b < c$$

$$f(a) > f(b) < f(c)$$

Este método garantiza que cada nueva evaluación de la función irá aislando el punto óptimo en un intervalo, justamente, 0.618034 veces el tamaño del intervalo precedente.

Para el desarrollo de este trabajo, dicho método se emplea para determinar el valor óptimo de K , es decir, que produce el menor desajuste entre los datos. A continuación se presenta el procedimiento que sigue este método para determinar el óptimo.

Procedimiento de aplicación del método

1. Se obtienen 2 valores, a y c que contienen el mínimo
2. Se buscan los siguientes puntos interiores

$$x_1^k = 0.381966(c^k - a^k) + a^k$$

$$x_2^k = 0.618034(c^k - a^k) + a^k$$

3. Se evalúan los puntos anteriores en la función, obteniendo $M(x_1^k)$ y $M(x_2^k)$
4. Si $M(x_1^k) > M(x_2^k)$; se fija $a^{k+1} = x_1^k$; $x_1^{k+1} = x_2^k$; $c^{k+1} = c^k$; $k = k - 1$, y se empieza desde el paso 2, calculando solamente x_2^k .
Si $M(x_1^k) < M(x_2^k)$; se fija $c^{k+1} = x_2^k$; $x_2^{k+1} = x_1^k$; $a^{k+1} = a^k$; $k = k - 1$, y se empieza desde el paso 2, calculando solamente x_1^k .
5. Se repite el procedimiento anterior hasta que $x_2^k - x_1^k < \epsilon$, donde ϵ es la tolerancia para el problema.

IV. APLICACIÓN A LA INGENIERÍA. OBTENCIÓN DEL COEFICIENTE DE RUGOSIDAD EN RÍOS.

Una vez que se ha descrito el desarrollo matemático a seguir en la aplicación del método variacional adjunto y el de los métodos de optimización requeridos durante el proceso de solución del mismo, el siguiente paso será aplicarlo a la ecuación de modelo, dada por la ec. 1.12, para obtener la correspondiente ecuación adjunta; después se realizarán algunas aplicaciones sencillas para observar el comportamiento de dicha metodología y dar conclusiones sobre su aplicabilidad.

IV.1 PLANTEAMIENTO DEL MÉTODO VARIACIONAL ADJUNTO

El problema principal es determinar el valor del coeficiente de rugosidad involucrado en la ecuación del flujo gradualmente variado, expresada en su forma diferencial:

$$\frac{d}{dx} \left[H + \frac{Q^2}{A^2 2g} \right] + S_f = 0 \quad (4.1)$$

La ec. 4.1 es al mismo tiempo la ecuación de modelo y la restricción en el esquema de minimización. Ahora bien, siguiendo la estructura de la función de costo, propuesta por Smedstad y O'Brien (1991), se escribe en este caso como:

$$J(H, n) = \frac{1}{2} K_H \int (H - H')^2 dx + \frac{1}{2} K_n L (n - n')^2 \quad (4.2)$$

donde:

- H elevaciones del agua calculadas
- H' elevaciones del agua medidas
- n nueva estimación del coeficiente de rugosidad obtenida a partir del método inverso
- n' estimación inicial o anterior del coeficiente de rugosidad
- K_H y K_n coeficientes de validación
- L longitud del tramo analizado

Como ya fue mencionado, el último término en la función de costo se agrega porque incluye la estimación del parámetro, y este asegura que la nueva estimación no este demasiado lejos de la suposición inicial. En el segundo término de la ec. 4.2 no se ha establecido una integral; esto se debe a que se considera un coeficiente de rugosidad constante en todo el tramo de estudio. Por último, debe hacerse notar que la variable de control que se introduce en el problema es el mismo parámetro por obtener, es decir, el coeficiente de rugosidad n .

Una vez establecida la función de costo, el objetivo del método es minimizar dicha ecuación, sujeta a la restricción dada por la expresión 4.1. Para llevar a cabo lo antes descrito, se redefine el problema de tal forma que se tenga un problema de minimización sin restricciones. Dicha modificación, se lleva acabo introduciendo los multiplicadores de Lagrange, λ , en la función de costo:

$$L(H, \lambda, n) = \frac{1}{2} K_H \int (H - H')^2 dx + \frac{1}{2} K_H L(n - n')^2 + \int \lambda \left[\frac{d}{dx} \left(H + \frac{Q^2}{A^2 2g} \right) + S_f \right] dx \quad (4.3)$$

El siguiente paso es aplicar las condiciones de Euler-Lagrange, para determinar los puntos estacionarios (los cuales corresponden al mínimo de la función de costo). La primera variación de L con respecto a λ , igualada a cero, da como resultado:

$$\frac{\partial L(H, \lambda, n)}{\partial \lambda} = 0$$

$$\int \delta \lambda \left[\frac{d}{dx} \left(H + \frac{Q^2}{A^2 2g} \right) + S_f \right] dx = 0 \quad (4.4)$$

de donde resulta

$$\frac{d}{dx} \left(H + \frac{Q^2}{A^2 2g} \right) + S_f = 0 \quad (4.5)$$

Como puede observarse, la ec. 4.5, es idéntica a la ecuación original de modelo. Ahora, a partir de la primera variación de L con respecto a H, se obtiene la ecuación adjunta:

$$\frac{\partial L(H, \lambda, n)}{\partial H} = 0$$

$$K_H \int (H - H) \delta H \, dx + \int \lambda \left[\frac{d}{dx} \left(1 + \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{-2A}{A^4} \frac{dA}{dH} \right) \right) + \frac{dS_f}{dH} \right] \delta H \, dx = 0 \quad (4.6)$$

de la ec. 2.5:

$$\frac{dS_f}{dH} = -S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) \quad (4.7)$$

y por definición

$$\frac{dA}{dH} = B \quad (4.8)$$

considerando la definición de numero de Froude:

$$F_r^2 = \frac{Q^2 B}{A^2 g A} \quad (4.9)$$

Sustituyendo las ecs. 4.7 a 4.9 en la ec. 4.6, se llega a:

$$K_H \int (H - H') \delta H dx + \int \lambda \left[\frac{d}{dx} (1 - F_r^2) - S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) \right] \delta H dx = 0 \quad (4.10)$$

Al simplificar términos, la ec 4.10 queda expresada como:

$$K_H \int (H - H') \delta H dx + \int \lambda \frac{d}{dx} \delta H dx - \int \lambda \frac{d}{dx} (F_r^2) \delta H dx - \int \lambda S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) \delta H dx = 0 \quad (4.11)$$

Ahora, se integran en esta ecuación sólo los dos términos que involucran una derivada con respecto a x , con el propósito de eliminar dicha derivada. Integrando por partes se llega a:

$$\begin{aligned} K_H \int (H - H') \delta H dx + \lambda \delta H \Big|_{x_i}^{x_f} - \int \frac{d\lambda}{dx} \delta H dx - \lambda F_r^2 \delta H \Big|_{x_i}^{x_f} + \int (F_r^2) \frac{d\lambda}{dx} \delta H dx \\ - \int \lambda \left[S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) \right] \delta H dx = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ordenando

$$\begin{aligned} K_H \int (H - H') \delta H dx - \int \frac{d\lambda}{dx} \delta H dx + \int (F_r^2) \frac{d\lambda}{dx} \delta H dx - \int \lambda \left[S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) \right] \delta H dx \\ + \lambda \delta H \Big|_{x_i}^{x_f} - \lambda F_r^2 \delta H \Big|_{x_i}^{x_f} = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Según Yu y O'Brien (1991), Smedstad y O'Brien (1991) y Richardson (1993), se deben aplicar la siguiente condición de frontera en la ecuación adjunta:

- La variable adjunta λ debe ser cero al inicio y al final del tramo analizado, de esta forma se obtiene que:

$$\lambda_{x_i} = 0 \qquad \lambda_{x_f} = 0$$

Al aplicar la condición anterior en la ec. 4.13, los dos últimos términos se eliminan y al ordenar los términos se llega a la expresión siguiente:

$$\int \left[K_H (H - H') + \frac{d\lambda}{dx} (-1 + F_r^2) - \lambda S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) \right] \delta H dx = 0 \quad (4.14)$$

por lo que la ecuación adjunta resultante es:

$$K_H (H - H') + \frac{d\lambda}{dx} (-1 + F_r^2) - \lambda S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) = 0 \quad (4.15)$$

Puede observarse que esta ecuación es parecida a la ecuación original del modelo, en la que aparecen algunos términos y cambiaron signos. El cambio de signo se debe a que la ec. 4.15 propagara información hacia atrás en el dominio de la distancia, siempre y cuando, el primer término de esta ecuación sea utilizado como término fuente o sumidero.

Siguiendo las recomendaciones de Yu y O'Brien (1991), Smedstad y O'Brien (1991) y Panchang y Richardson (1993), conviene modificar la escala de la solución del problema relacionando los coeficientes de validación.

Si se define:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{K_H} \qquad K = \frac{K_n}{K_H} \qquad (4.16)$$

y se sustituyen en la ec. 4.15, esta se modifica de la siguiente manera:

$$(H - H') + \frac{d\lambda'}{dx}(-1 + F_r^2) - \lambda' S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) = 0$$

$$\frac{d\lambda'}{dx}(-1 + F_r^2) - \lambda' S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) + (H - H') = 0 \qquad (4.17)$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, cuya solución analítica se puede obtener por el método de separación de variables. El procedimiento para obtener la solución puede verse en el anexo B de este trabajo. La solución es:

$$\lambda' = \frac{(H - H') \left(1 - e^{-\frac{S_f \left[\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right]}{-1 + F_r^2}} \right)}{-S_f \left[\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right]} \qquad (4.18)$$

La primera variación de L, ec. 4.3, con respecto al parámetro, n , analizado es:

$$\frac{\partial L(H, \lambda, n)}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial n} - \int \lambda 2 n' \frac{Q^2}{(AR_n^3)^2} dx = 0 \quad (4.19)$$

Si el último término de la ec. 4.19 se multiplica y divide al mismo tiempo por n' y se toma en cuenta la ec. de Manning, esta se reduce a:

$$\frac{\partial J}{\partial n} - \int \frac{2 \lambda S_f}{n'} dx = 0 \quad (4.20)$$

De la ec. 4.2 se obtiene:

$$\frac{\partial J}{\partial n} = \frac{1}{2} K_n L (n - n')^2 = K_n L (n - n') \quad (4.21)$$

Si de la ec. 4.21 se despeja n , se llega a:

$$n = n' + \frac{1}{K_n L} \left(\frac{\partial J}{\partial n} \right) \quad (4.22)$$

Despejando el término $\partial J / \partial n$ de la ec. 4.20 y sustituyéndolo en la ec. 4.22, se obtiene:

$$n = n' + \frac{1}{K_n L} \left(- \int \frac{2 \lambda S_f}{n'} dx \right) \quad (4.23)$$

donde el signo dentro del paréntesis se debe a la utilización de un método de gradiente en un problema de minimización. El término entre paréntesis representa el gradiente de la función de costo con respecto al parámetro analizado.

Realizando el mismo cambio de variables que se hizo a la ec. 4.15, al sustituir las expresiones 4.16, la ec. 4.23 toma la forma:

$$n = n' + \frac{1}{KL} \left(- \int \frac{2 \lambda' S_f}{n'} dx \right) \quad (4.24)$$

El parámetro K , es un parámetro libre que se utiliza para regular la velocidad y rendimiento del proceso iterativo. Además, es una medida de los pesos relativos asignados en el funcional al término de desajuste de los datos y al término de información previa del parámetro. Se ha encontrado que algunos valores de este parámetro disminuyen el rendimiento del esquema de minimización; su valor inicial es difícil de establecer. La integral de la ec 4.24, durante el proceso iterativo del método inverso, se calcula con el método numérico del trapecio.

Para resolver el problema anterior, se utiliza la propuesta de Panchang y Richardson (1993), en la cual se elimina la subjetividad del valor K al explorar el rango de sus valores para determinar, cual genera el menor error. Para llevar a cabo esta propuesta, en este trabajo se utilizó el método de búsqueda de la sección de oro expuesto en el subcapítulo III.3.2.

También se ha empleado el criterio de convergencia propuesto por Smedstad y O'Brien (1991), que sugiere revisar que la relación $\|\nabla J\| / \|\nabla J_0\|$ sea menor a una tolerancia previamente establecida. Estos mismos autores sugieren que el valor para dicha tolerancia sea $\|\nabla J\| / \|\nabla J_0\| \leq 10^{-2}$.

IV.II PROCESO ITERATIVO DE SOLUCIÓN

El proceso iterativo de solución basado en el método variacional adjunto para obtener estimaciones del parámetro n , se plantea en los siguientes pasos. Este procedimiento se deriva del procedimiento general expuesto en el capítulo III.

1. Se supone un primer valor del coeficiente de rugosidad n
2. Con este primer valor se calcula el perfil hidráulico, con el método descrito en el capítulo I de esta tesis
3. Se calcula el desajuste de los datos $(H - H')$ en cada una de las secciones donde se tengan datos medidos
4. Se determinan los valores de λ' con la ec. 4.18, para las secciones en que se calculó el desajuste entre los datos
5. Empleando los valores, tanto de $(H - H')$ como de λ' , se calcula el gradiente de la función de costo, ∇J , representado por el término entre paréntesis de la ec. 4.24
6. Con el gradiente de la función de costo se aplica la ec. 4.24, utilizando un valor inicial para K y un método de gradiente sin restricciones, para obtener una nueva estimación del parámetro n
7. Se emplea el método de la sección de oro para optimizar K , de tal manera que el parámetro estimado resultante, produzca el menor desajuste posible
8. Se revisa si el criterio de convergencia, $\|\nabla J\| / \|\nabla J_0\| \leq 10^{-2}$, del proceso de minimización se cumple
9. En caso de no cumplirse el criterio, se regresa al paso 2, utilizando la nueva estimación de n para calcular el perfil hidráulico.

IV.III EJEMPLO DE APLICACIÓN

Para comprobar la eficiencia del método variacional adjunto, en la predicción del coeficiente de rugosidad, se realiza un ejemplo, cuyo coeficiente de rugosidad es conocido de antemano. Se tomaron los datos de un ejemplo en el cual el objetivo es determinar el perfil hidráulico, tipo M1. Los datos empleados aparecen en Berezowsky y Gómez (1986). De este modo, los tirantes obtenidos del cálculo del perfil se emplean como valores medidos u observados en el proceso de solución de la metodología inversa de modelación.

Los datos son lo siguientes: el canal trapecial de la figura 4.1 conduce un gasto de $200 \text{ m}^3/\text{s}$ con una pendiente de plantilla de 0.001, un coeficiente de rugosidad de Manning de 0.018, un ancho de plantilla de 20 m y un talud de 2; el tirante y_0 antes del vertedor es de 4.5 m.

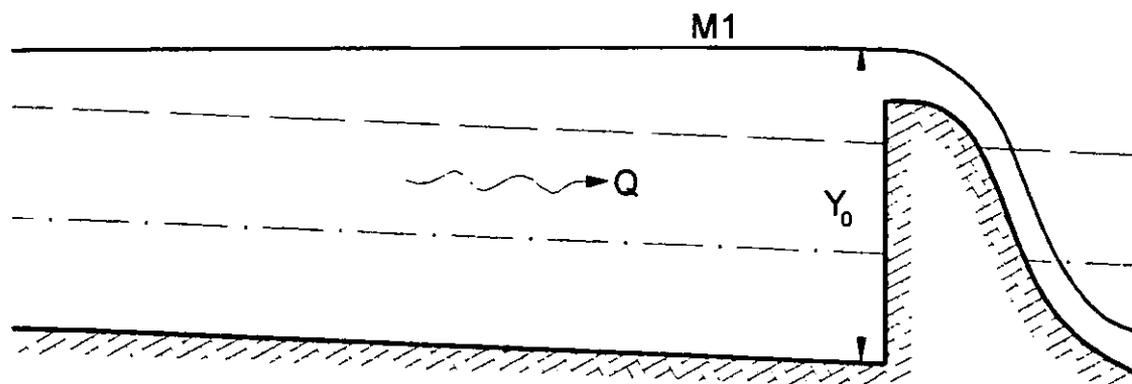


Fig. 4.1 Perfiles tipo M

Para dicho canal, mediante la ecuación de Manning de flujo uniforme se obtiene el tirante normal $y_n = 2.7$ m; de la condición de régimen crítico se obtiene el tirante crítico $y_c = 2.02$ m. Con la ecuación de Manning y considerando el tirante crítico se obtiene $S_c = 0.0028$.

Tomando como origen la sección antes del vertedor, en ella se tiene: $x_0 = 0.0$ m y $y_0 = 4.5$ m. La longitud del perfil se calcula con el método de integración directa entre la sección inicial y final para la que $y = 1.01y_n$, es decir, $y_n = 2.727$ m, ya que por convención se acepta que en ese punto termina el perfil. Tal longitud es:

$$L = - 3\ 352.524 \text{ m}$$

Para el cálculo del perfil de la superficie libre del agua, con el método descrito en el capítulo I de esta tesis, se emplea un $\Delta x = - 100$ m, que se considera un valor suficientemente pequeño en comparación con la longitud total del perfil. Los resultados de dicho cálculo se muestran en la siguiente tabla:

Secc.	x	y	Secc.	x	Y
34	0	4.5000	17	-1700	3.1868
33	-100	4.4106	16	-1800	3.1318
32	-200	4.3221	15	-1900	3.0805
31	-300	4.2345	14	-2000	3.0331
30	-400	4.1481	13	-2100	2.9896
29	-500	4.0628	12	-2200	2.9500
28	-600	3.9788	11	-2300	2.9144
27	-700	3.8963	10	-2400	2.8826
26	-800	3.8153	9	-2500	2.8546
25	-900	3.7361	8	-2600	2.8301
24	-1000	3.6587	7	-2700	2.8089
23	-1100	3.5834	6	-2800	2.7907
22	-1200	3.5104	5	-2900	2.7752
21	-1300	3.4399	4	-3000	2.7621
20	-1400	3.3721	3	-3100	2.7511
19	-1500	3.3071	2	-3200	2.7420
18	-1600	3.2453	1	-3400	2.7343

Tabla 4.1 Tirantes calculados

Como ya se había mencionado, los valores de los tirantes calculados se utilizaran como datos observados. Se realizaron varias pruebas para tener una mayor cantidad de resultados y dar conclusiones sobre la aplicabilidad de esta técnica para resolver el problema. Siguiendo el procedimiento iterativo de solución antes descrito, se obtiene los siguientes resultados.

Prueba 1

Se utilizaron datos medidos en las 34 secciones de estudio en que fue dividido el canal. El resto de los datos se muestra en la siguiente tabla:

Datos	
n inicial	0.50
Tirante inicial y_i	4.5 m
Gasto Q	200 m ³ /s
Tolerancia perfil	0.0015
No de iteraciones máx.	15
K inicial	500
n final	0.01789
iteraciones realizadas	8

Tabla 4.2 Datos de la prueba No 1

Como puede observarse, la aproximación del coeficiente de fricción es muy buena, existe una mínima diferencia entre el valor que fue utilizado para calcular el perfil hidráulico ($n = 0.018$). Sin embargo, el valor de n puede mejorar o empeorar dependiendo del valor inicial que se le dé al parámetro K . La fig. 4.2 muestra la forma en que fue variando el perfil hidráulico en relación con las iteraciones. Puede observarse que para las iteraciones finales, las diferencias entre los tirantes son ya muy pequeñas.

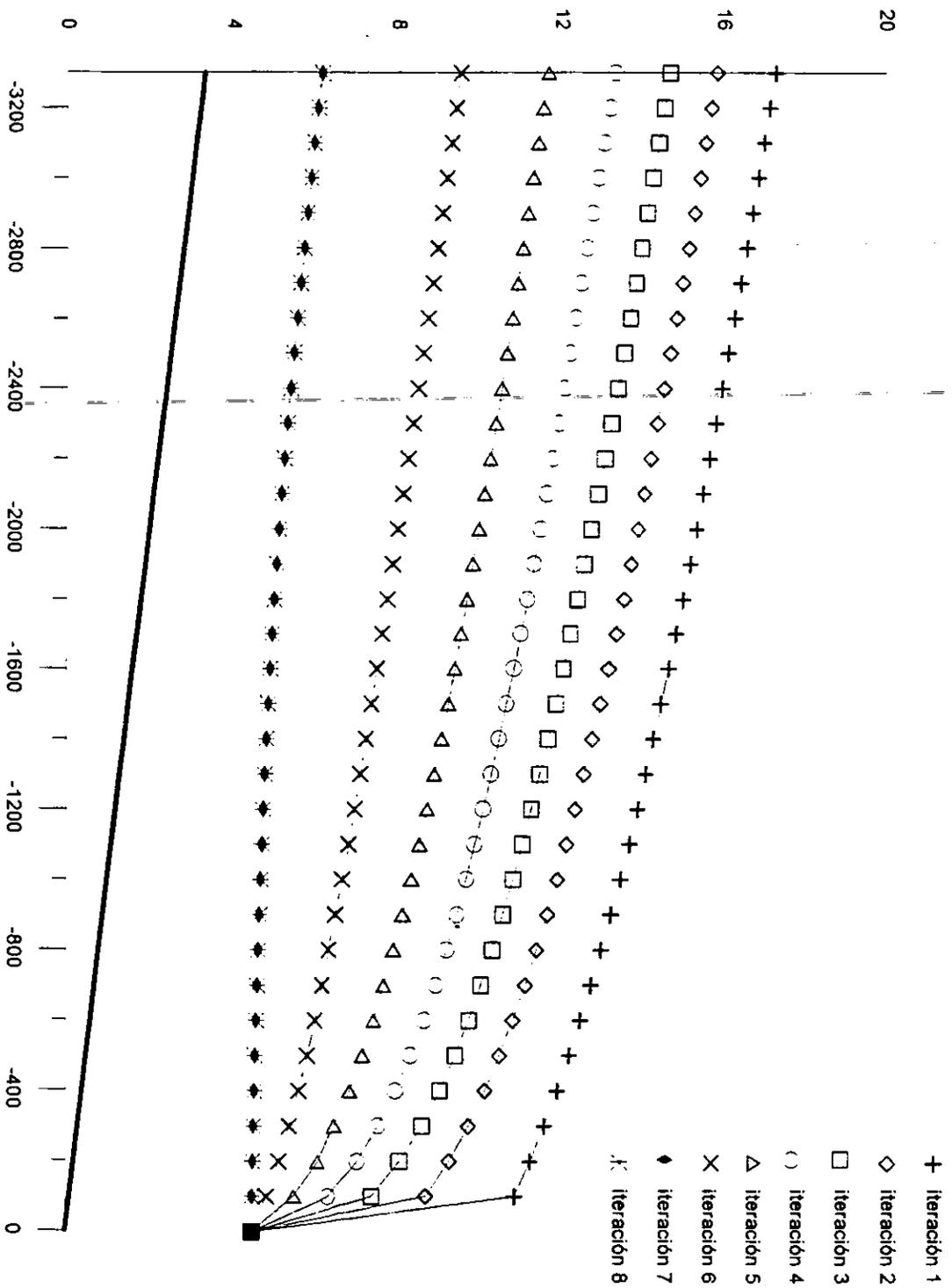


Fig. 4.2 Variación del perfil de la superficie libre del agua

Es importante explorar la forma en que este método converge; esto puede ser apreciado mediante una grafica en la cual se registre el cambio de magnitud del gradiente en cada iteración. La siguiente figura muestra la variación de $\|\nabla J\|/\|\nabla J_0\|$ (gradiente de la función de costo) con cada iteración. Este es el criterio de convergencia usado en este trabajo.

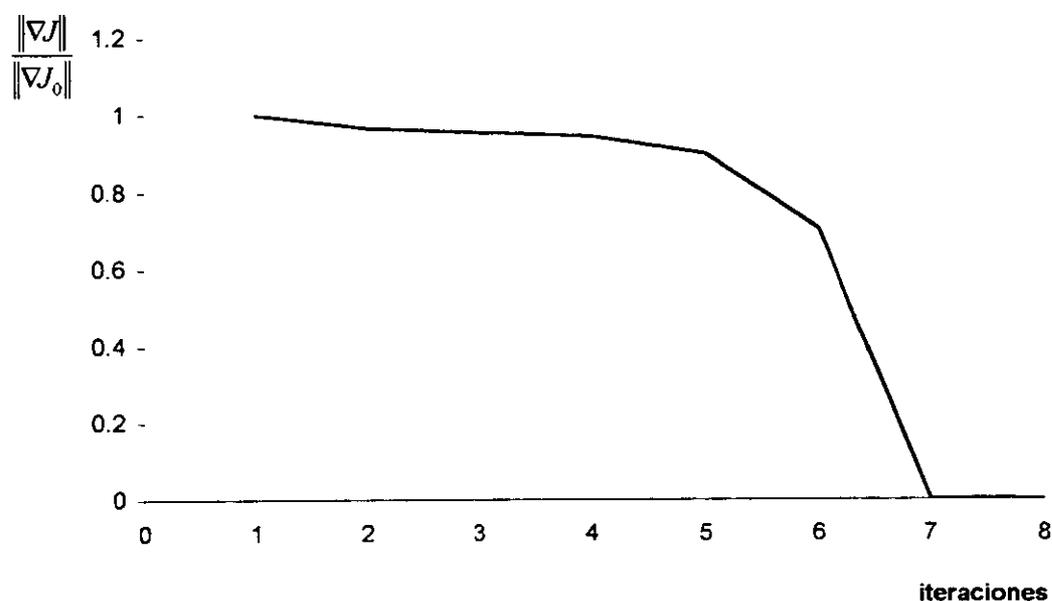


Fig. 4.3 Variación del gradiente de la función de costo en función del número de iteraciones

Se puede observar que el método tiene una convergencia muy rápida, la reducción mayor que experimenta la relación de gradientes se presenta en la iteración 6 y esto puede ser debido al valor inicial de K . Para estos mismo datos existe un valor de K que hace que el número de iteraciones se reduzca y que el método llegue a su mínimo con mayor rapidez.

La siguiente figura muestra la forma en que el coeficiente n cambia con respecto de las iteraciones. Se observa que a partir de la séptima iteración, el coeficiente n permanece casi constante.

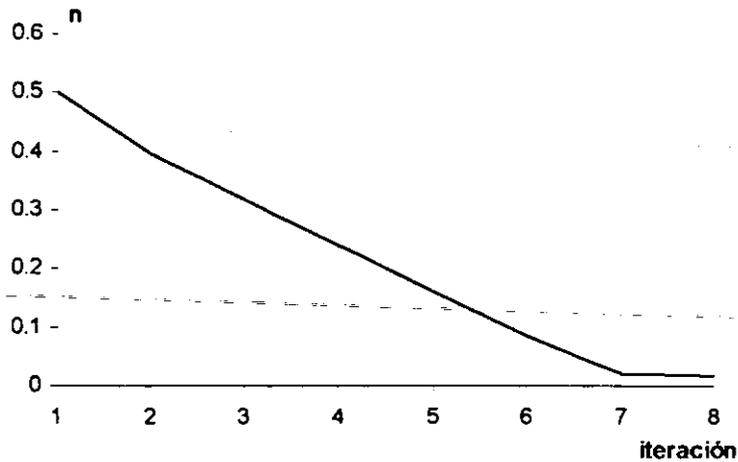
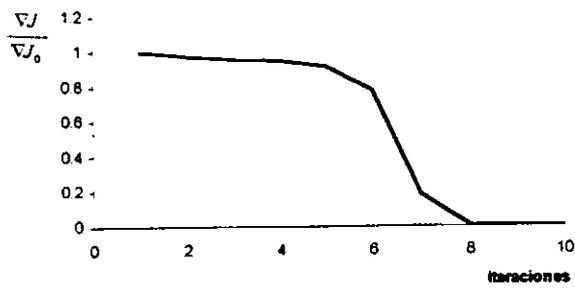


Fig. 4.4 Variación del coeficiente n

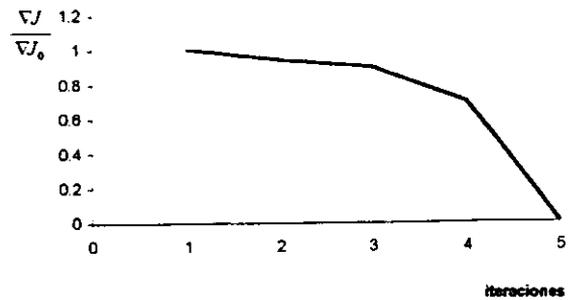
A continuación se muestra una tabla con resultados de pruebas que se realizaron con los mismos datos de la prueba No 1, pero variando el valor inicial de K , en donde, con $K = 200$ se obtuvo el mínimo número de iteraciones.

Valor inicial de n (0.5)			
K inicial	n final	iteraciones	K final
600	0.01803	10	661
200	0.01798	5	661
1500	0.01808	13	661
300	0.01800	9	661

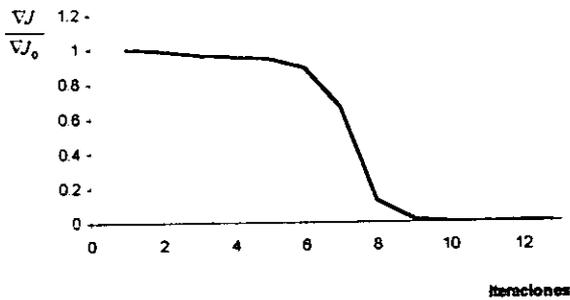
Tabla 4.3 Resultados de las pruebas



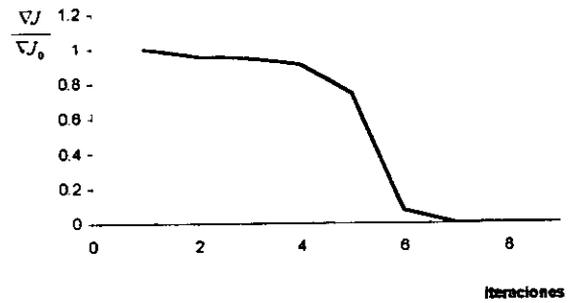
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 4.5 Ritmos de convergencia del gradiente, para diferentes valores de K ;

(a) $K = 600$; (b) $K = 200$; (c) $K = 1500$; (d) $K = 300$

Prueba 2

La segunda prueba consiste en utilizar valores medidos sólo en algunas de las secciones; esto se hace porque, en general se dispone de mediciones en pocas secciones.

De las 34 secciones iniciales, se considera que se conocen los valores en seis, la tabla 4.4 muestra el tirante medido en las secciones elegidas. Cabe mencionar que la elección de dichas secciones se hizo de manera arbitraria.

Secc.	x	Y	Secc.	x	Y
34	0	4.5000	12	-2200	2.9500
27	700	3.8963	7	-2700	2.8089
19	-1500	3.3071	1	-3400	2.7343

Tabla 4.4 Tirantes medidos

Y con los siguientes datos, siguiendo el procedimiento anterior, se obtienen los siguientes resultados. La fig. 4.6 muestra la variación del perfil hidráulico.

Datos	
n inicial	0.50
Tirante inicial y_i	4.5 m
Gasto Q	200 m ³ /s
Tolerancia perfil	0.0015
No de iteraciones máx.	15
K inicial	400
n final	0.01812
iteraciones realizadas	10

Tabla 4.5 Datos de la prueba No 2

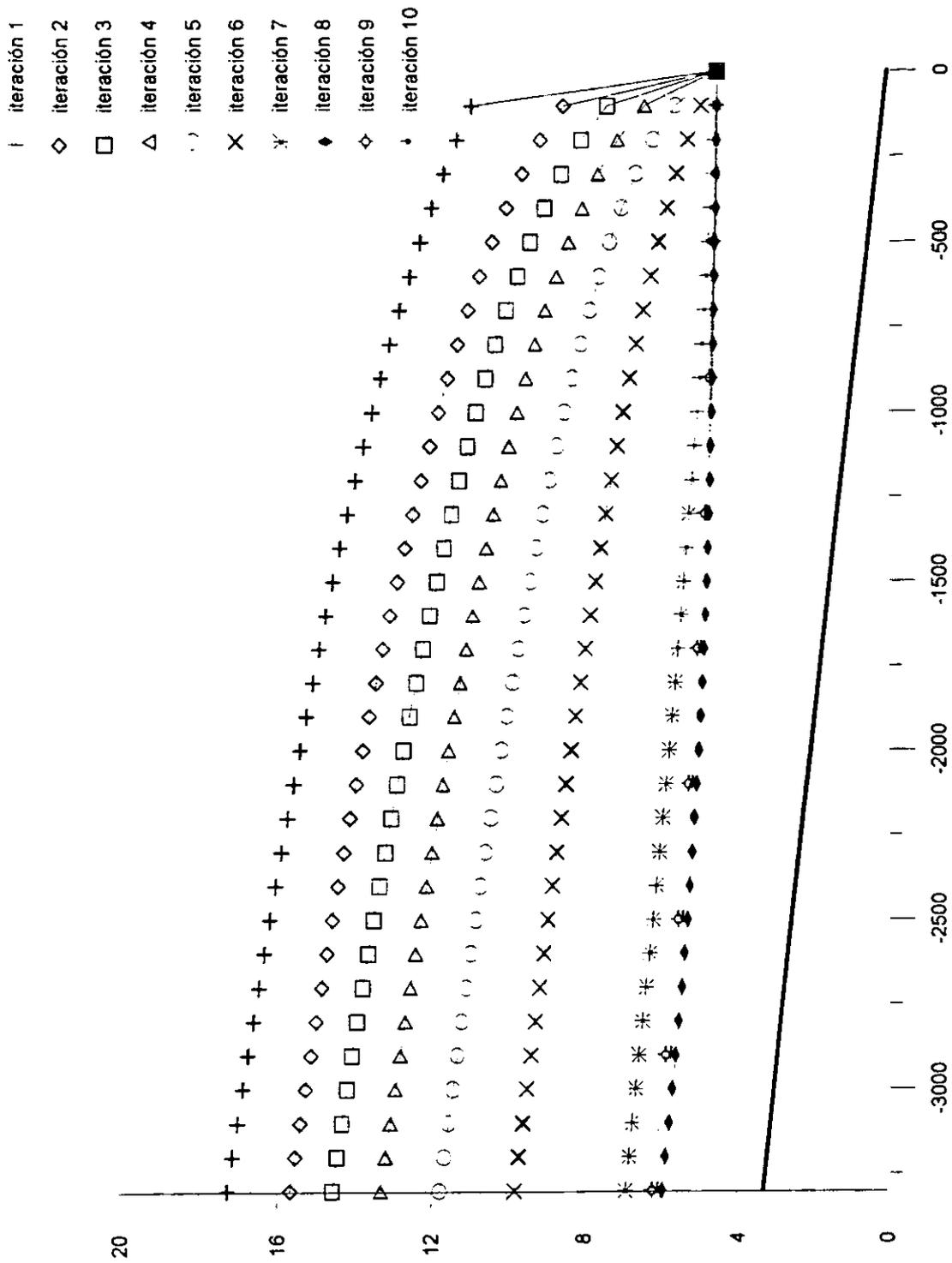


Fig. 4.6 Variación del perfil de la superficie libre del agua

La variación del gradiente fue muy similar a la que se experimentó cuando se utilizaron datos medidos en las 34 secciones. Esta variación se muestra en la siguiente figura:

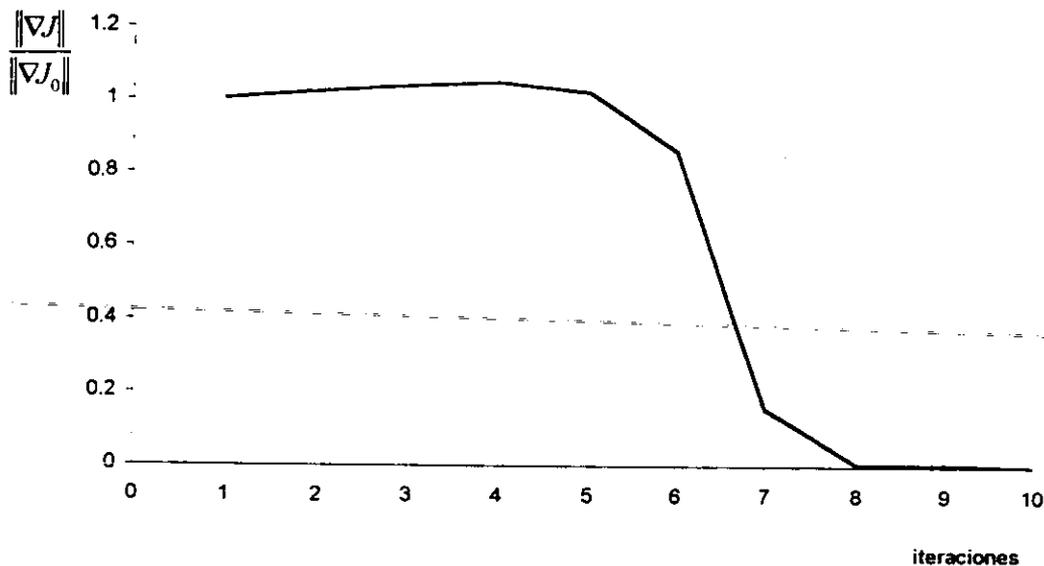


Fig. 4.7 Variación del gradiente con las iteraciones

En este caso, lo único que cambia es el valor inicial de K , sin embargo, el método converge a un valor muy aceptable del parámetro n . Análogamente, en este caso también se hicieron variaciones en el valor de K . Los resultados se presentan en la siguiente tabla.

Valor inicial de n (0.5)			
$K_{inicial}$	n_{final}	iteraciones	K_{final}
400	0.01812	10	661
250	0.01813	9	661
1000	0.01813	11	661
600	0.01785	9	661

Tabla 4.6 Resultados de la prueba No 2

Es evidente que al aplicar el método inverso se obtienen excelentes resultados. Lo cual indica que su aplicabilidad es apta para resolver problemas. Sin embargo, el problema resuelto puede parecer algo sencillo y los resultados en este caso podrían ser poco representativos o mostrar una interpretación incorrecta con relación a la aplicación de la metodología. En el siguiente capítulo de esta tesis, se aplicará esta metodología a un problema más complejo para tener mejor información sobre su aplicabilidad.

V. APLICACIÓN AL RÍO SAMARIA.

Se pretende calcular el coeficiente de rugosidad para un tramo de aproximadamente 73 km del río Mezcalapa-Samaria localizado aguas abajo de la Presa Peñitas, en el Estado de Tabasco (Fig. 5.1).

Se dispone de tablas que contienen las curvas de los parámetros geométricos para las 23 secciones transversales cuya localización se muestra en la fig. 5.1 y, en el tabla 5.1 se presentan las longitudes de separación entre cada una de las secciones.

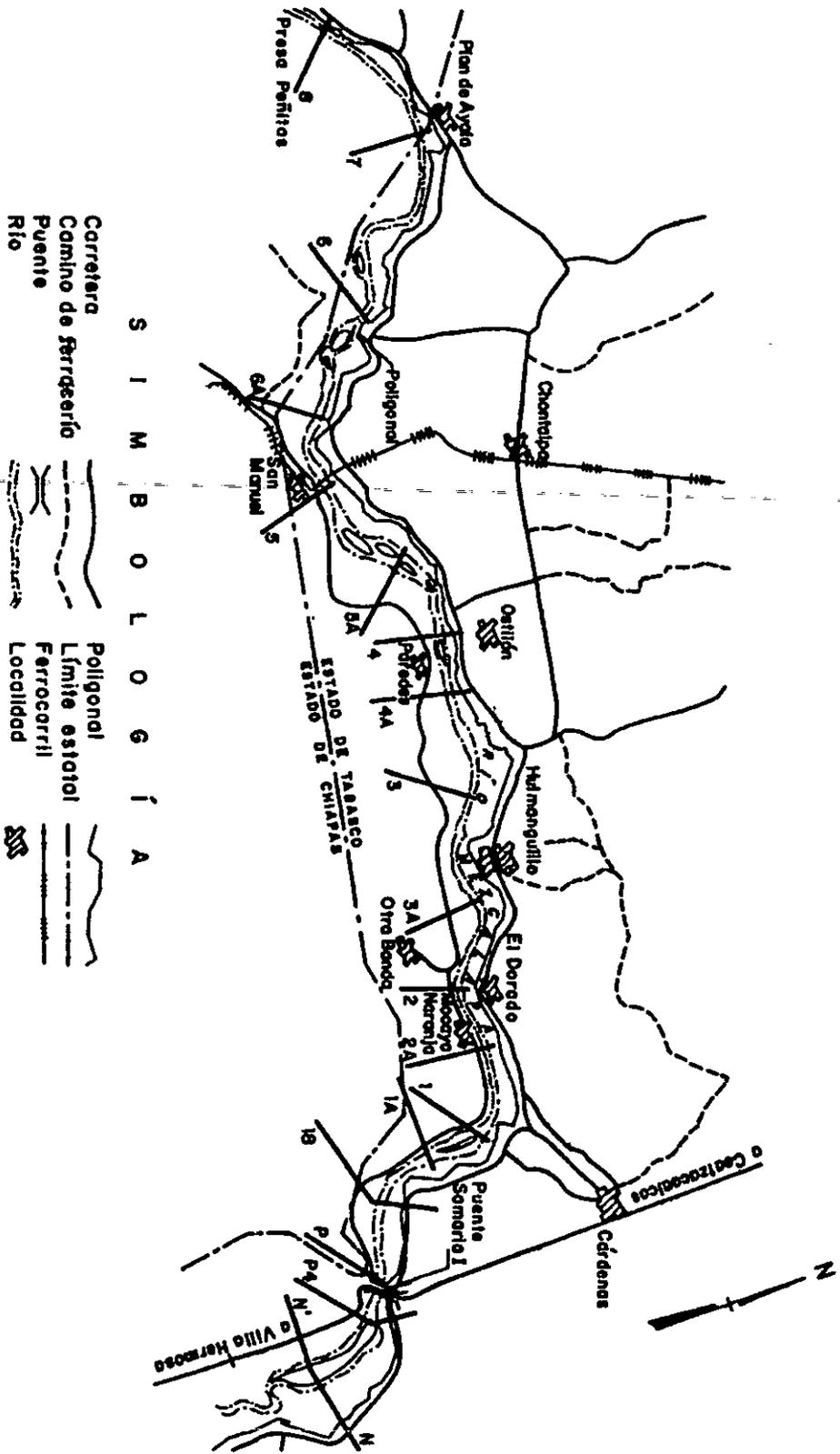


Fig. 5.1 Localización de las secciones transversales del Río Mezcalapa-Samaria

Sección	Distancia (m)	Sección	Distancia (m)	Sección	Distancia (m)
8	3900	5A	6270	2	1400
78	3900	4	5170	2A2	1400
7	6000	4A	2520	2A	2460
67	6000	34A	2500	2A1	2400
6	6000	3	1680	12A	2400
6A	3850	3A	2560	1	1860
5	3400	3A2	2500	1A1	2000
		23A	2500	1A	
Longitud total del tramo en estudio 72670 m					

Tabla 5.1 Longitudes de separación entre secciones

La información antes mencionada se tomo de Berezowsky y Jiménez (1993), a partir de los datos topográficos de las secciones se preparan tablas de coordenadas para cada una de ellas y, con distintas elevaciones de la superficie libre, H , se calculan las curvas de parámetros geométricos (área, radio hidráulico y ancho de la superficie). Una vez definidas las curvas, se puede reducir el número de valores por emplear al dejar solo aquellos puntos que acentúen cambios notables en dichas curvas. Esto disminuye notablemente la cantidad de cálculos durante la obtención del perfil.

La tabla 5.2 presenta las coordenadas de la sección transversal "1A" y en la fig. 5.2a se representa gráficamente la sección. En las figs. 5.2b, c y d se muestran las curvas E-A, E-R y E-B obtenidas para dicha sección.

Distancia x (m)	Elevación y (m)						
213	18.45	540	15.36	850	16.21	941	16.83
230	10.26	670	15.51	880	17.19	955	16.64
251	14.46	687	15.41	901	16.96	959	17.29
360	14.61	790	15.46	903	15.38	983	15.64
386	14.21	830	16.16	904	16.41	990	17.56
421	15.31	834	17.21	915	16.27	1000	17.66
510	16.06	846	17.21				

Tabla 5.2 Coordenadas de la sección transversal 1A

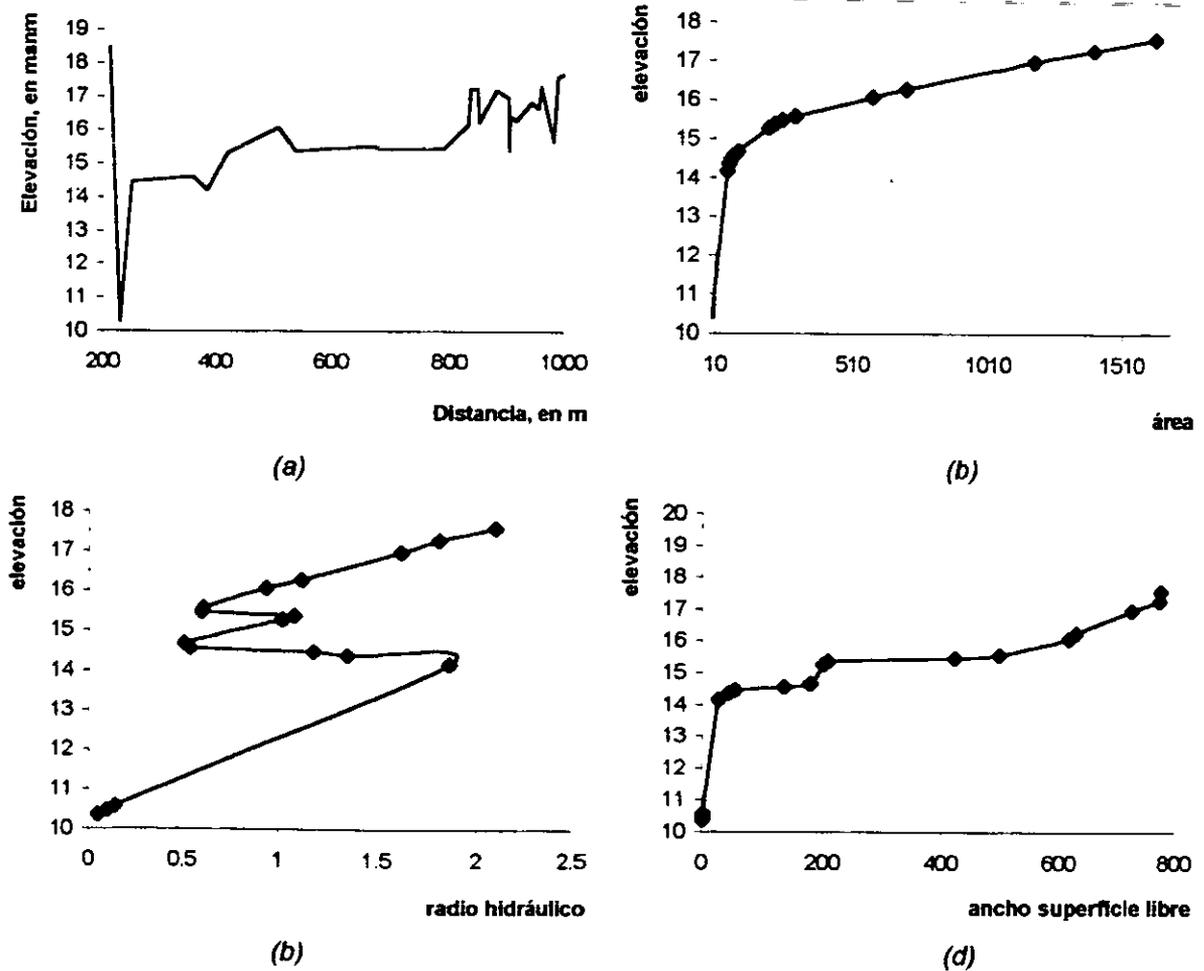


Fig. 5.2 Características de la sección 1A. (a) sección transversal; (b) curva E-A; (c) curva E-R; (d) curva E-B.

Después de realizar los cálculos necesarios con los datos topográficos, se obtienen los parámetros geométricos que se presentan en las tablas 5.3.

Elev. (m)	Área (m ²)	Radio (m)	Ancho (m)	Elev. (m)	Área (m ²)	Radio (m)	Ancho (m)	Elev. (m)	Área (m ²)	Radio (m)	Ancho (m)
Sección 8											
35.00	0.85	0.12	6.81	35.03	0.27	0.12	9.03	35.04	0.58	0.12	4.81
36.50	41.68	0.87	47.64	36.47	51.36	0.72	65.72	35.52	8.80	0.28	30.75
38.25	133.25	2.33	55.88	38.34	144.15	1.48	153.14	36.24	34.80	0.90	38.20
38.75	171.48	1.82	92.86	40.07	501.16	2.16	229.51	36.48	50.06	0.55	91.02
39.50	248.90	2.16	113.59	42.59	1185.59	3.12	297.31	36.73	78.91	0.58	134.23
39.75	280.43	1.67	165.86	44.08	1687.54	3.76	409.52	37.93	259.39	1.53	167.54
40.75	481.20	2.07	230.16	45.95	2389.51	5.44	414.54	39.13	474.44	2.51	186.43
47.20	2055.96	7.87	255.26					39.37	520.09	2.59	197.72
								39.61	571.21	2.50	225.07
								40.58	820.16	2.76	292.56
								41.06	975.22	2.68	358.82
								41.54	1181.12	2.35	497.39
								42.21	1547.15	2.59	590.98
								42.78	1922.91	2.59	734.51
								43.91	2860.71	3.18	890.86
Sección 67											
34.02	0.14	0.08	4.51	33.02	1.43	0.09	15.33	31.49	11.06	0.14	76.48
34.77	39.15	0.48	60.30	34.13	55.53	0.74	75.27	32.14	75.94	0.65	117.44
35.27	69.16	0.59	94.96	34.32	70.27	0.74	94.25	32.80	163.83	1.08	151.08
36.00	166.21	0.77	247.69	34.51	93.63	0.59	158.50	33.12	220.16	1.13	194.16
36.80	277.72	1.38	252.00	34.88	181.28	0.59	306.09	33.45	300.10	0.92	326.59
38.13	654.75	2.55	251.21	35.44	396.12	0.98	375.20	34.11	545.14	1.33	410.22
38.93	838.35	2.74	251.11	39.07	1782.44	4.44	399.03	36.07	1359.66	3.23	419.24
40.48	1811.84	3.15	251.11								
42.02	2463.07	4.27	523.67								
Sección 6 A											

Tabla 5.3 Parámetros geométricos de las secciones transversales del río Samaria

Elev. (m)	Área (m ²)	Radio (m)	Ancho (m)	Elev. (m)	Área (m ²)	Radio (m)	Ancho (m)	Elev. (m)	Área (m ²)	Radio (m)	Ancho (m)
Sección 5											
30.04	1.17	0.07	16.70	28.16	1.65	0.09	18.58	25.57	0.81	0.06	13.72
30.60	33.36	0.37	89.97	29.05	50.19	0.66	76.13	26.44	37.35	0.54	69.35
31.03	80.32	0.60	134.36	30.12	155.12	0.98	121.37	27.47	132.42	1.22	107.78
31.45	151.98	0.71	213.50	30.47	238.07	0.60	357.31	27.64	153.63	0.96	159.41
31.73	220.29	0.76	290.23	31.01	436.04	0.97	413.83	27.99	224.94	0.88	253.40
32.15	368.80	0.91	402.67	31.54	702.04	1.17	563.52	28.34	348.87	0.69	502.24
32.29	430.06	0.88	487.19	32.07	1034.91	1.42	693.74	28.68	564.02	0.82	684.85
32.57	578.11	1.08	536.35	32.61	1415.16	1.85	726.29	30.58	1906.63	2.61	727.04
36.00	2449.56	4.39	555.68	33.32	2086.09	1.78	976.38				
Sección 4 A											
23.23	2.44	0.10	24.99	21.77	3.27	0.09	13.54	20.32	0.68	0.11	5.92
24.99	72.08	1.40	51.05	24.02	18.71	1.54	38.50	21.85	23.06	0.98	23.23
25.18	82.40	1.41	58.03	24.39	32.87	1.80	69.30	23.39	70.20	1.82	37.72
25.57	113.91	1.02	111.33	24.74	108.91	1.19	101.21	23.61	78.70	1.86	41.25
25.97	192.00	0.66	291.01	25.10	125.25	0.81	132.15	24.05	127.82	0.49	257.28
26.55	414.76	0.94	439.44	25.39	260.32	0.92	212.32	24.49	277.71	0.56	491.63
26.94	610.41	1.05	578.10	26.61	1001.98	1.37	517.23	24.93	549.78	0.75	728.31
27.33	867.97	1.18	732.37	27.75	1940.79	2.24	833.85	25.36	879.02	1.15	758.85
27.73	1171.95	1.46	799.68	27.91	2330.69	2.56	836.73	26.68	1881.60	2.45	764.83
28.90	2291.49	2.13	1072.41								
Sección 34 A											
Sección 3											

Tabla 5.3 Parámetros geométricos de las secciones transversales del río Samaria (continuación)

Elev. (m)	Área (m ²)	Radio (m)	Ancho (m)	Elev. (m)	Área (m ²)	Radio (m)	Ancho (m)	Elev. (m)	Área (m ²)	Radio (m)	Ancho (m)
Sección 3 A											
20.66	0.41	0.10	3.83	20.13	1.82	0.06	30.40	19.57	1.45	0.04	58.40
21.52	10.19	0.52	19.14	21.01	46.41	0.55	72.15	20.00	30.45	0.32	89.60
21.73	16.18	0.33	48.61	21.93	175.79	0.80	199.21	20.34	69.63	0.35	152.06
21.94	29.28	0.35	81.98	22.65	288.86	1.12	280.12	21.00	175.61	0.80	202.40
22.79	125.57	0.75	165.38	22.93	433.72	1.26	320.83	21.66	293.24	0.84	301.66
23.65	293.67	1.26	231.32	23.67	747.06	1.44	476.04	21.97	438.10	1.16	361.88
23.86	350.98	1.09	319.79	24.00	974.59	1.55	602.57	22.87	892.05	1.48	568.89
24.28	527.15	0.99	528.52	24.29	1193.52	1.62	632.60	23.27	1187.88	1.62	640.01
24.50	657.18	0.97	671.24	25.37	1943.11	2.60	744.96	24.31	1862.11	2.51	704.99
25.35	1250.04	1.77	701.80					24.88	2205.92	2.20	748.17
25.77	1560.34	2.10	739.62								
27.50	2839.66	3.78	734.65								
Sección 2											
18.98	5.17	0.07	70.51	18.56	3.27	0.08	31.68	17.95	0.86	0.08	10.29
19.56	64.78	0.41	156.83	19.15	65.35	0.36	190.12	18.27	13.63	0.18	77.06
20.15	172.97	0.83	208.80	20.02	320.22	0.95	316.83	18.59	56.33	0.26	214.93
20.59	280.36	0.97	287.99	20.41	435.84	1.07	364.36	18.75	99.89	0.33	306.68
20.13	434.38	1.05	413.34	21.27	871.29	1.58	487.13	19.71	454.97	1.09	417.33
21.91	862.34	1.58	544.08	22.11	1317.82	2.22	625.74	20.03	606.88	1.19	510.21
22.20	1045.19	1.50	695.99	22.45	1633.66	2.53	641.58	20.66	943.20	1.72	546.45
22.50	1257.13	1.70	737.18	23.09	1993.66	2.81	681.19	21.30	1319.19	2.09	628.03
23.27	1828.19	2.47	739.69					22.58	2123.09	3.35	630.69
Sección 2 A											
Sección 3 A 2											
Sección 23 A											

Tabla 5.3 Parámetros geométricos de las secciones transversales del río Samaria (continuación)

Elev. (m)	Área (m ²)	Radio (m)	Ancho (m)	Elev. (m)	Área (m ²)	Radio (m)	Ancho (m)	Elev. (m)	Área (m ²)	Radio (m)	Ancho (m)
Sección 2 A1				Sección 12 A				Sección 1			
17.00	0.11	0.04	7.62	15.85	5.45	0.04	8.71	14.72	0.54	0.06	8.58
17.72	54.46	0.40	206.93	16.38	29.41	0.35	76.24	15.10	10.32	0.25	41.24
18.32	223.27	0.71	294.06	16.79	54.46	0.48	130.69	15.48	30.85	0.48	63.91
19.04	490.13	0.99	490.11	17.05	92.57	0.71	164.46	15.99	75.10	0.69	108.88
19.34	653.47	1.11	520.59	17.57	217.82	0.75	289.50	16.49	155.10	0.70	219.47
20.40	1350.52	2.08	653.47	18.06	402.97	0.85	435.64	17.00	290.78	0.91	319.31
				18.56	686.14	1.03	567.43	17.26	386.71	0.89	431.82
				19.05	980.20	1.39	693.76	17.51	519.79	0.85	608.23
				19.94	1557.43	2.14	790.69	18.02	885.16	1.07	827.81
								18.40	1214.06	1.35	895.99
Sección 1 A1				Sección 1 A							
12.60	0.08	0.07	1.09	10.51	0.22	0.12	1.75				
13.95	14.85	0.68	5.45	12.73	21.53	1.18	17.45				
14.59	39.62	0.71	11.98	14.21	55.11	1.89	27.93				
15.28	79.21	0.72	118.71	14.90	98.94	0.54	180.81				
16.05	282.18	0.74	292.97	15.19	192.27	0.97	197.53				
16.68	475.25	0.92	544.55	15.44	246.67	0.69	356.97				
17.07	732.67	1.07	686.14	15.69	366.37	0.69	525.45				
18.40	1633.67	2.04	893.07	16.93	503.65	0.85	588.59				
				16.92	1153.56	1.59	720.25				
				17.66	1716.92	2.18	785.36				

Tabla 5.3 Parámetros geométricos de las secciones transversales del río Samaria (continuación)

En el mencionado estudio se estimó un coeficiente de rugosidad $n = 0.022$; las elevaciones reportadas de la superficie libre del agua para cada una de las secciones se presentan en la siguiente tabla:

Sección	Cadenamiento (km)	Elevación (m)	Sección	Cadenamiento (km)	Elevación (m)
8	0.00	40.81	3A	51.19	24.29
78	3.90	39.90	3A2	53.75	23.12
7	7.80	38.96	23A	56.25	22.21
67	13.80	37.48	2	58.75	21.20
6	19.80	35.98	2A2	60.15	20.56
6A	25.80	34.03	2A	61.55	20.05
5	29.65	32.60	2A1	64.01	19.28
5A	33.05	31.25	12A	66.41	18.53
4	39.32	28.82	1	68.81	17.65
4A	44.49	26.88	1A1	70.67	16.88
34A	47.01	25.96	1 ^a	72.67	16.12
3	49.51	25.07			

Tabla 5.4 Elevaciones reportadas de la superficie libre del agua

Ahora que ya se dispone de todos los datos necesarios, se aplica la metodología inversa de modelación. Los datos iniciales son:

Datos	
n inicial	0.10
Tirante inicial y_i	16.12 m
Gasto Q	540 m ³ /s
Tolerancia perfil	0.0015
No de iteraciones máx.	15
K inicial	900
n final	0.02249
iteraciones realizadas	4

Tabla 5.5 Datos iniciales del procedimiento

El error entre el valor conocido y el que resulta del método inverso es de un 0.0455 por ciento, lo cual resulta despreciable y se obtuvo en un pequeño número de iteraciones. La fig. 5.3 muestra la forma en que cambia el perfil con las iteraciones.

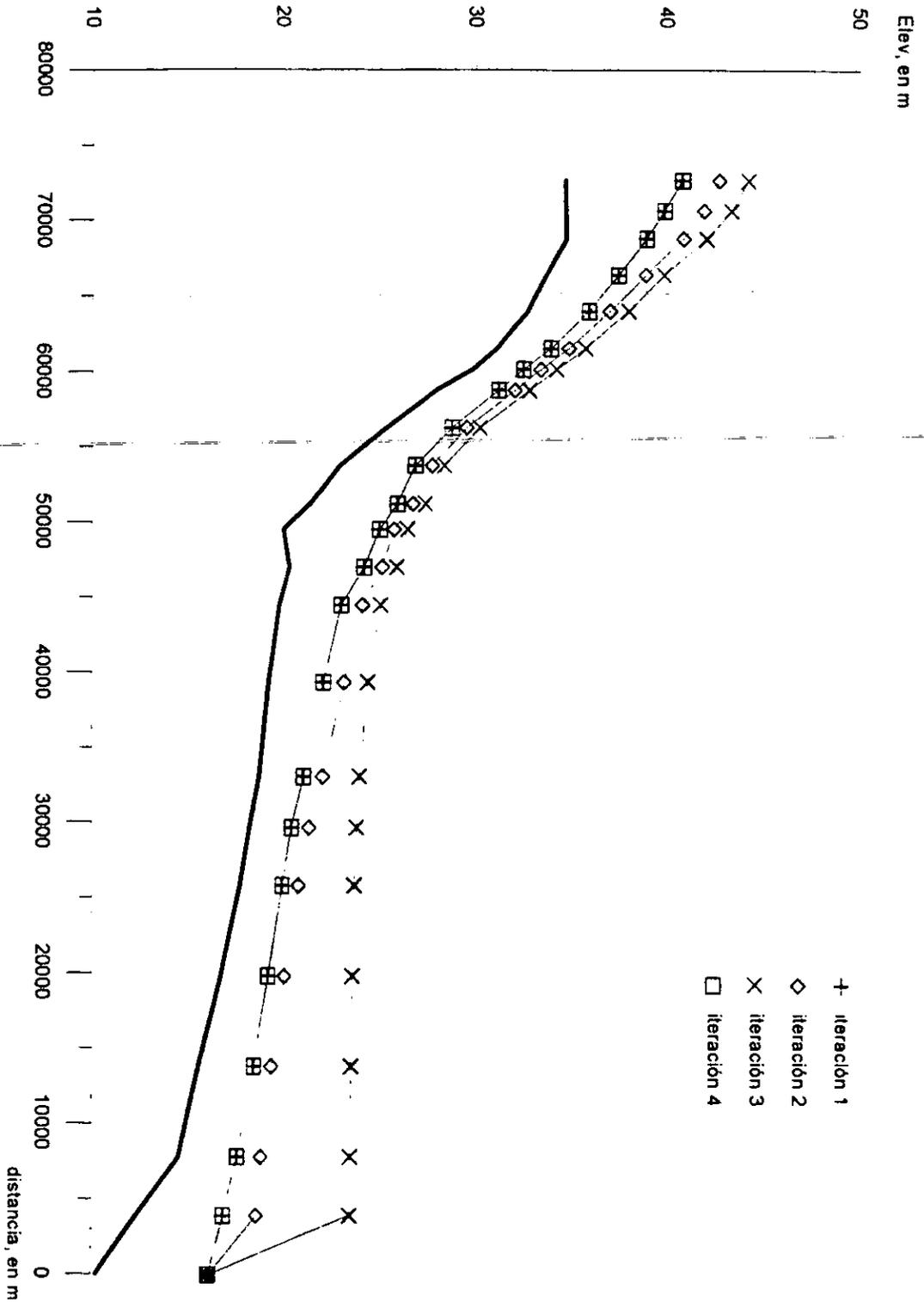


Fig. 5.3 Variación del perfil hidráulico

Puede observarse que la convergencia hacia el valor mínimo, fue mucho más rápida en comparación con el ejemplo desarrollado en el capítulo IV. La siguiente figura muestra la forma en que disminuyó la relación $\|\nabla J\|/\|\nabla J_0\|$ con respecto del número de iteraciones.



Fig. 5.4 Ritmo de convergencia del método inverso

De manera análoga a la primer prueba realizada en el capítulo anterior, en esta también se utilizaron diferentes valores para el parámetro K para observar la variación del resultado. El siguiente tabla presenta los resultados:

Valor inicial de n (0.5)		
K inicial	n final	No iteraciones
950	0.02201	3
450	0.02199	4
1500	0.02243	18
700	0.02245	12

Tabla 5.6 Resultados de las pruebas

Puede verse que no existe una gran diferencia entre los resultados obtenidos y que el valor inicial de K no afecta el valor final de n , pero si el número de iteraciones.

En un cauce natural es mucho más complicado tener datos medidos en todas las secciones. Para probar la aplicabilidad de esta metodología bajo estas condiciones, se tomaran datos medidos de manera aleatoria y se aplica el método inverso. Las secciones elegidas se presentan en la siguiente tabla:

Sección	Cadenamiento (km)	Elevación (m)	Sección	Cadenamiento (km)	Elevación (m)
8	0.00	40.81	3A	51.19	24.29
6A	25.80	34.03	2A	61.55	20.05
3	49.51	25.07	1ª	72.67	16.12

Tabla 5.7 Elevaciones medidas de la superficie libre del agua

Los datos iniciales para el procedimiento y el resultado se presentan en el tabla 5.8:

Datos	
n inicial	0.10
Tirante inicial y_i	16.12 m
Gasto Q	540 m ³ /s
Tolerancia perfil	0.0015
No de iteraciones máx.	15
K inicial	950
n final	0.02214
iteraciones realizadas	6

Tabla 5.8 Datos iniciales del procedimiento

El error producido entre los resultados, con datos medidos en todas las secciones y en solo algunas de ellas, es de apenas el 0.5906 por ciento; mientras el error que resulta entre el valor conocido de n y el resultado anterior es del 0.6364 por ciento.

Ambos errores son insignificantes, ya que la diferencia de valores del parámetro n no produce un cambio significativo en los valores de H .

Las siguientes graficas muestran la variación que presentaron tanto el perfil hidráulico como la relación $\frac{\|\nabla J\|}{\|\nabla J_0\|}$ con relación al número de iteraciones.

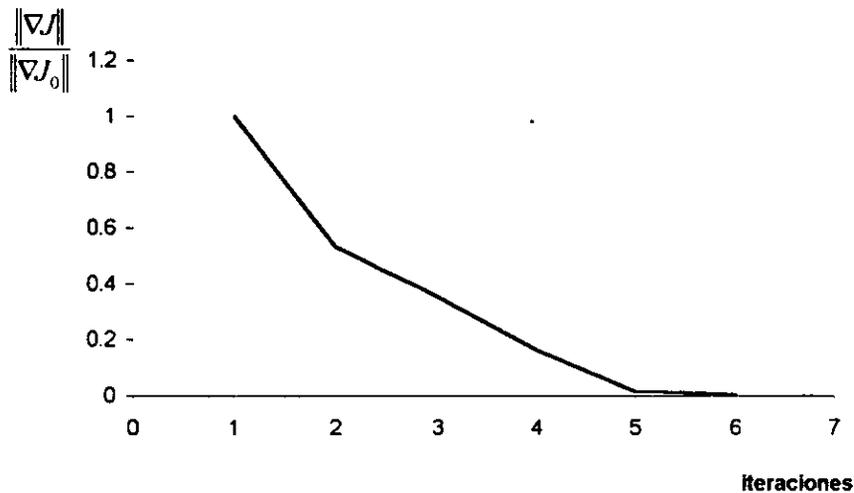


Fig. 5.5 Ritmo de convergencia del método inverso

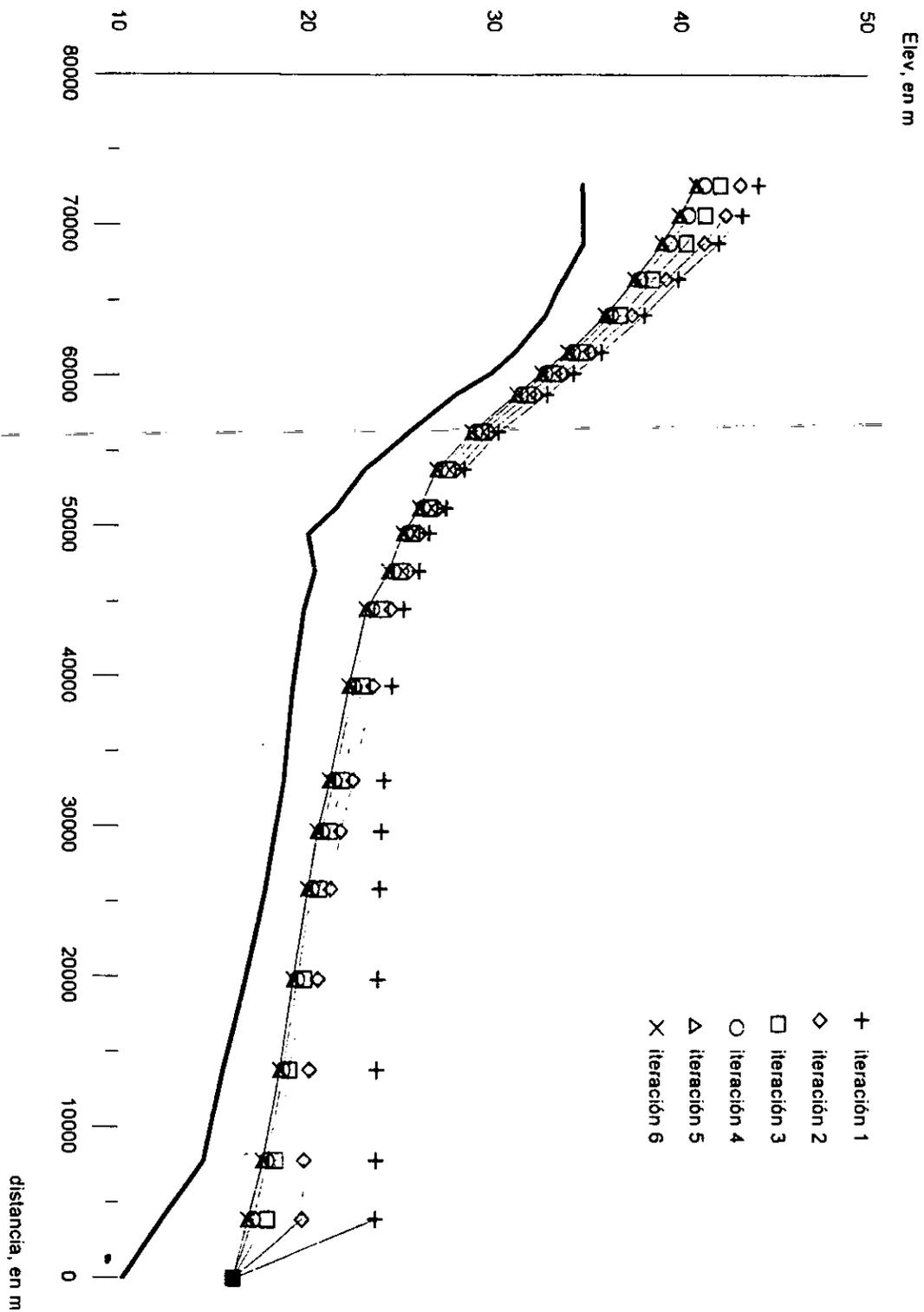


Fig. 5.6 Variación del perfil hidráulico

De forma similar, se aplicaran diversos valores de K para observar el cambio en los resultados. La tabla 5.9 muestra dichos resultados:

Valor inicial de n (0.5)		
K inicial	n final	No iteraciones
950	0.02214	6
450	0.02204	4
1500	0.02240	7
700	0.02197	5

Tabla 5.9 Resultados de prueba

Después de realizar varias pruebas, se descubrió que para valores de K menores a 450, en algunas ocasiones el método no converge o proporciona valores incoherentes del parámetro; es recomendable empezar con un valor mayor a este.

Un intervalo dentro del cual puede ubicarse el valor inicial de K es:

$$500 < K < 1000$$

Por último se puede decir que no importa el número de secciones que se tomen en cuenta para recurrir al método inverso, ya que en pruebas realizadas se observó que el resultado final es aproximadamente igual al que se obtiene el hacer uso de todas las secciones. El único problema será establecer un valor inicial de K , lo cual no resulta muy complejo si se sigue la recomendación anterior.

CONCLUSIONES

- ❖ Los problemas de Ingeniería que involucran parámetros, se pueden resolver tanto por metodologías directas como inversas. Cuando en la modelación del problema se involucren parámetros que no pueden ser medidos, se puede aplicar la metodología inversa de modelación como una alternativa de solución.
- ❖ En el caso de emplear un método inverso, no importa la cantidad de parámetros que se deseen inferir; el método variacional adjunto tiene grandes ventajas y requiere un igual número de ecuaciones del modelo que parámetros por determinar que puedan ser empleadas como restricciones.

- ❖ El valor final del parámetro buscado depende de los valores iniciales que se den durante el procedimiento. Sin embargo, en general no se tendrán diferencias significativas en los valores finales del parámetro estimado; de los resultados puede verse que en ningún caso la diferencia entre valores finales es mayor al 1 por ciento. La diferencia será el número de iteraciones realizadas para llegar al valor mínimo deseado.

- ❖ Lo anterior implica que el método no garantiza una solución única para parámetro, sin embargo, el valor que se obtiene al final del procedimiento es aceptable. Este método no puede clasificarse como robusto, ya que el valor final del parámetro depende en gran medida del valor que inicialmente se de al coeficiente K . Habrá valores de K que proporcionen valores incorrectos o ilógicos del parámetro; al mismo tiempo el valor de K regulará la velocidad del método haciendo que se tengan que realizar un determinado del iteraciones.

- ❖ En conclusión, el objetivo de este trabajo es analizar la aplicabilidad de la metodología inversa; se deduce que la aplicación del método variacional adjunto como una metodología inversa de modelación, es aceptable y reconocida como un procedimiento alternativo para resolver problemas, ya que minimiza apropiadamente el desajuste entre los datos medidos y los resultados arrojados por el modelo, dando un valor adecuado del parámetro.

Por último, se proponen las siguientes recomendaciones a aquellos que se interesen en utilizar el procedimiento descrito en esta tesis:

- ❖ El valor inicial para el parámetro K debe estar ubicado entre los siguientes valores: $500 < K < 1000$; con esto se garantiza que el método proporcionara un valor adecuado del parámetro analizado y al mismo tiempo se realizará el menor número posible de iteraciones.
- ❖ La estimación inicial del coeficiente de rugosidad, puede hacerse basándose en otras expresiones que permitan obtener un valor congruente del mismo. Pero si se tiene la incertidumbre sobre dicho valor, basta con utilizar un valor alto del parámetro y usar este como estimación inicial en el procedimiento del método inverso.
- ❖ Se pueden utilizar otros métodos de optimización en lugar de los que se proponen en este trabajo, dado que constantemente los métodos son modificados y adquieren mejores propiedades para su aplicación.

ANEXO A

Este anexo contiene las gráficas que se emplean en los métodos de resistencia al flujo descritos en el capítulo II.

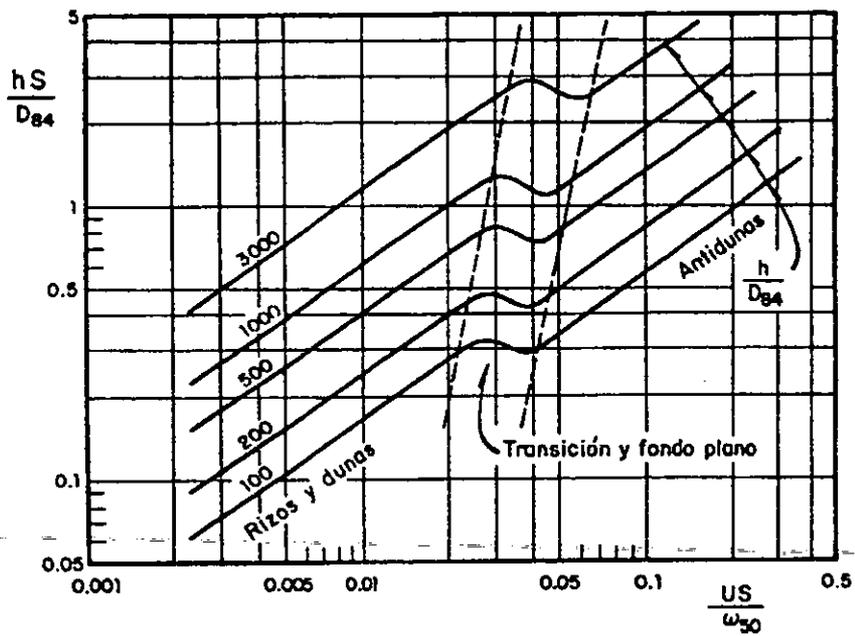


Fig. A1 Diagrama para obtener la resistencia al flujo en cauces arenosos, según Cruickshank y Maza

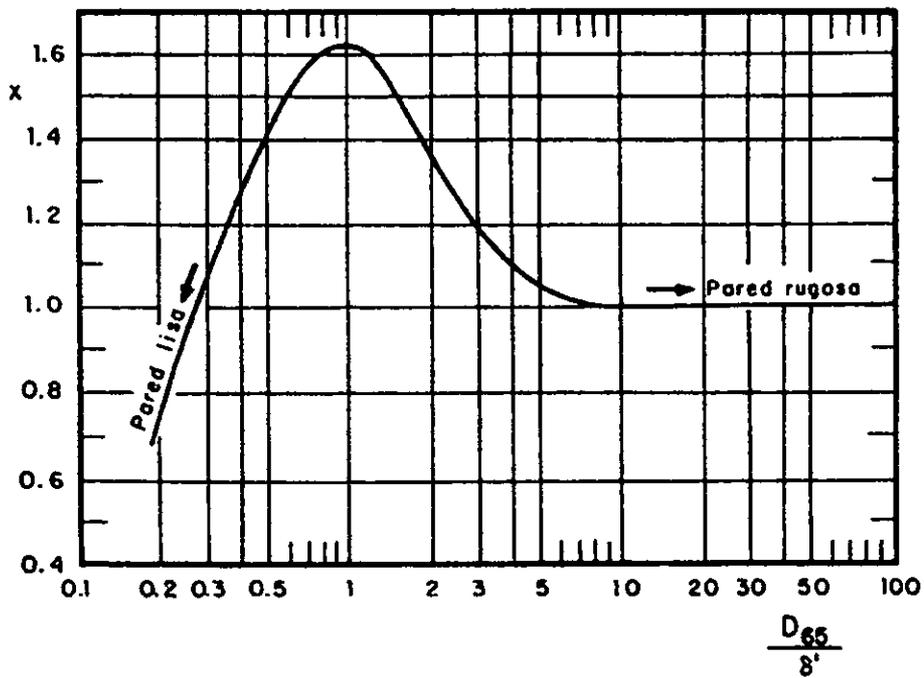


Fig. A2 Factor de corrección x , método de Einstein

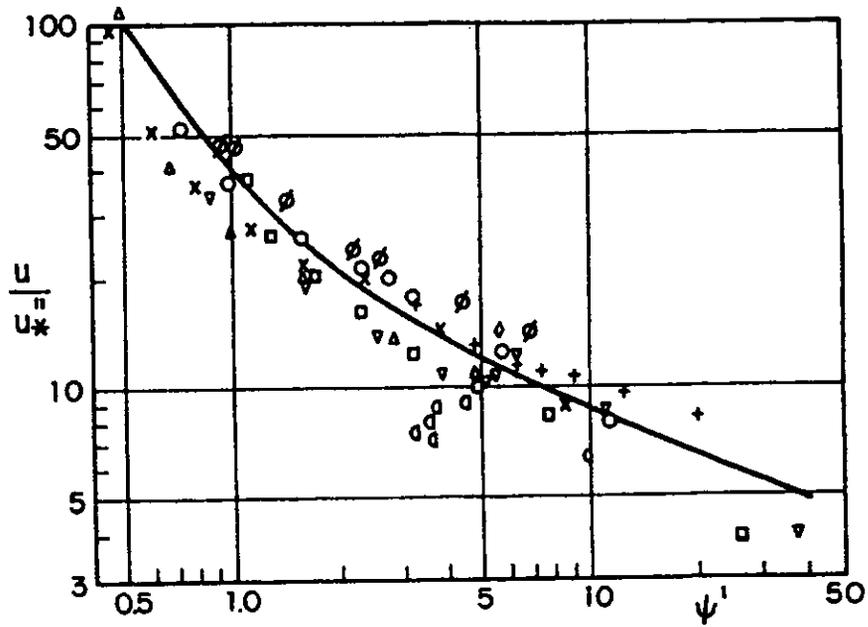


Fig. A3 Resistencia al flujo debido a las formas de fondo para el método de Einstein

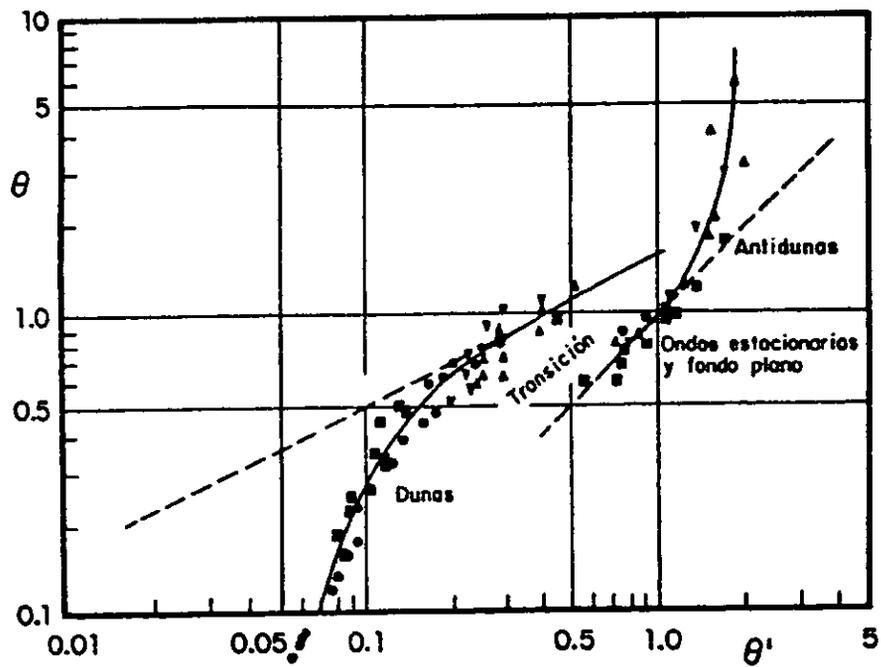


Fig. A4 Relación entre θ y θ' , según Engelund

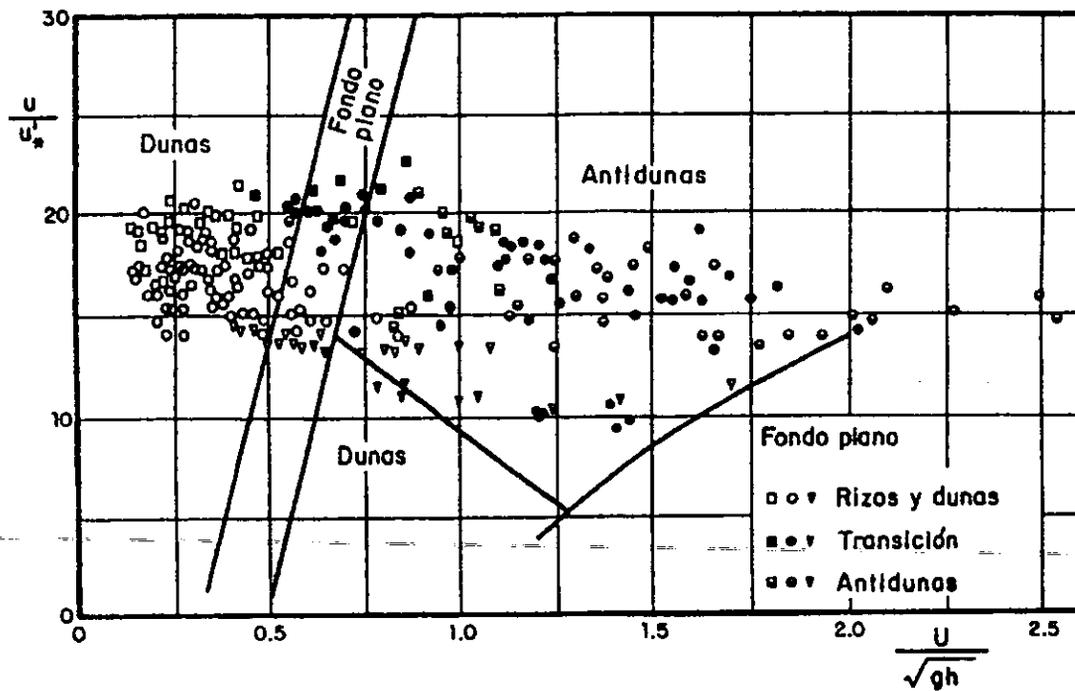


Fig. A5 Criterio de Engelund y Hansen para definir el tipo de configuración de fondo

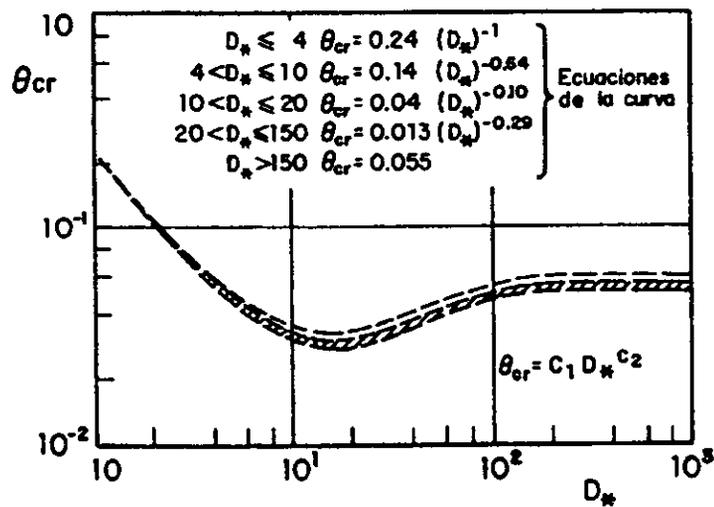


Fig. A7 Inicio del movimiento de las partículas.

Diagrama de Shields modificado

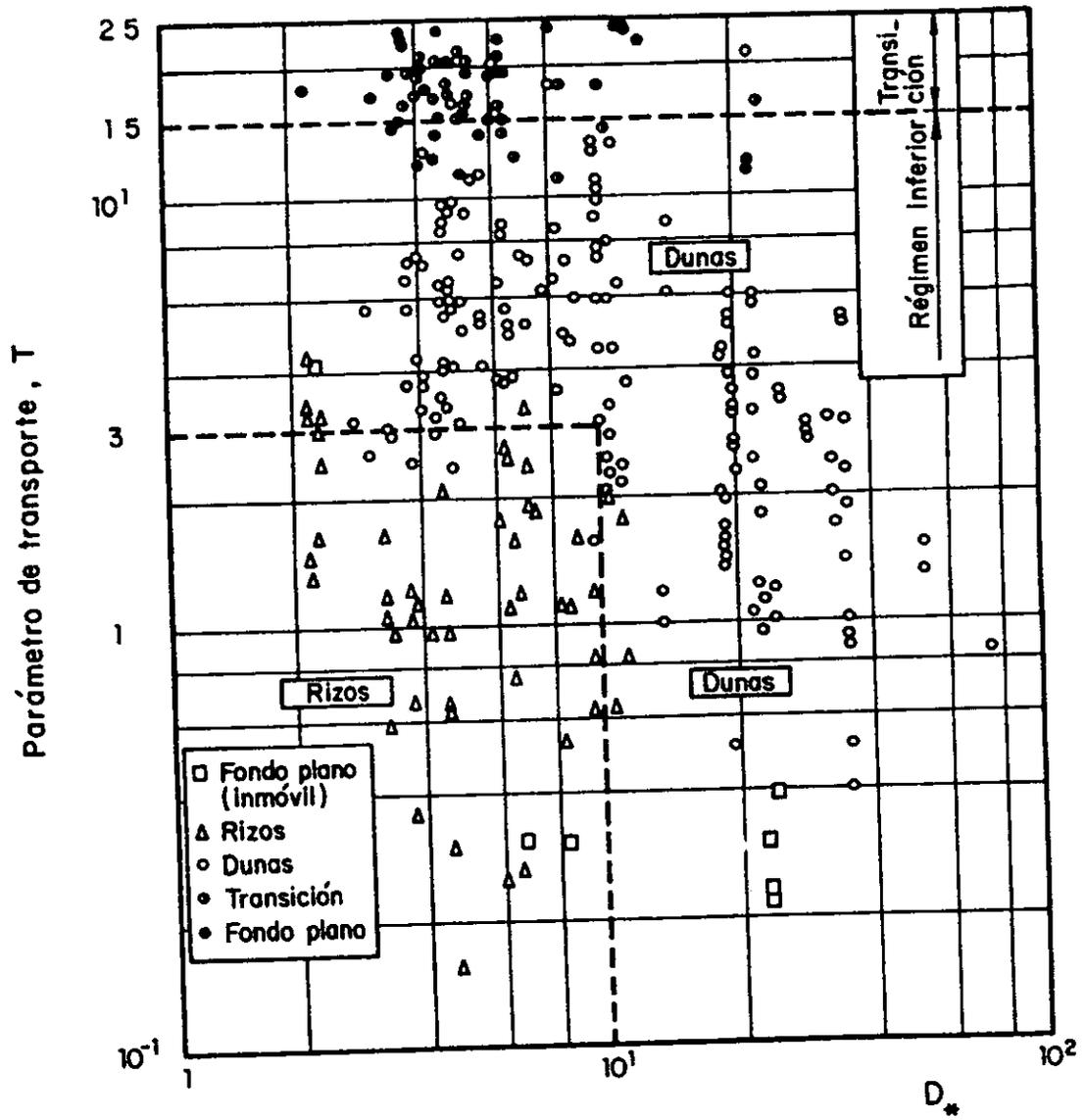


Fig. A6 Clasificación de las formas de fondo, según van Rijn

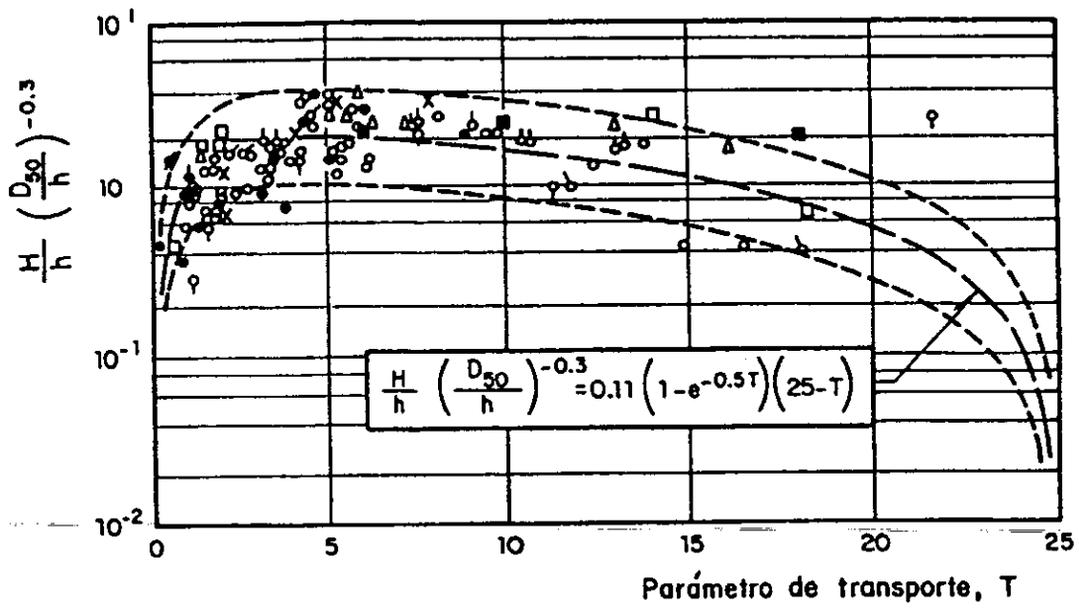


Fig. A8 Altura relativa de las dunas, según van Rijn

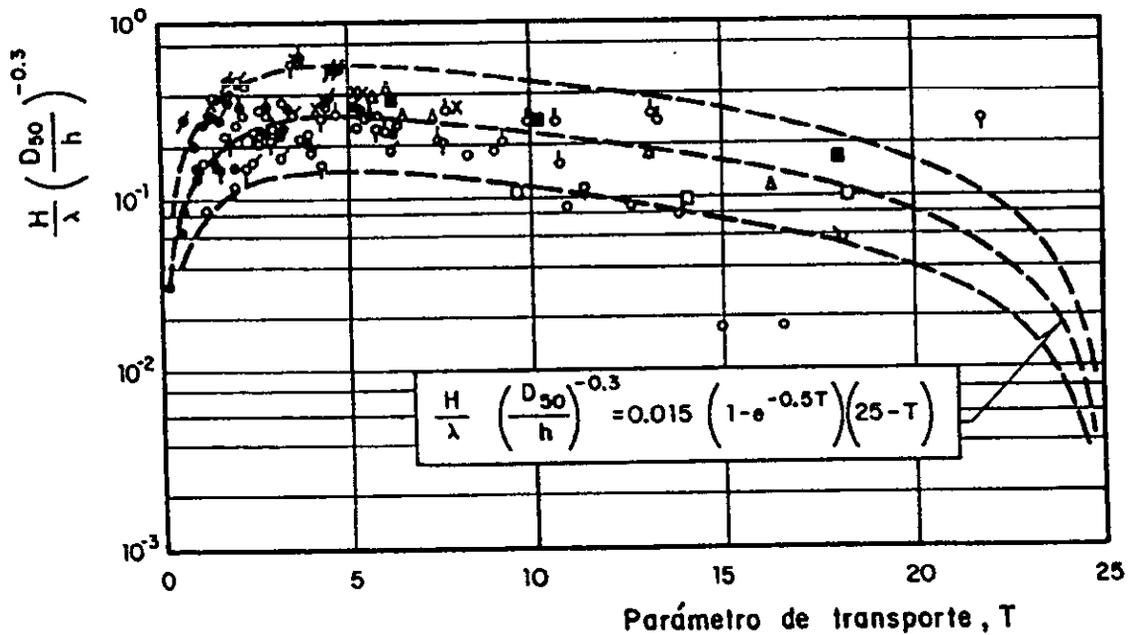


Fig. A9 Relación altura / longitud de dunas, según van Rijn

ANEXO B

En este anexo se presenta el desarrollo algebraico para obtener la solución analítica de la ec. 4.20 por medio del método de separación de variables:

La ec a.20 es:

$$d\lambda (-1 + F_r^2) - \lambda' S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) dx + (H - H) dx = 0 \quad (\text{A.1})$$

separando términos en dx y $d\lambda'$, se llega a:

$$d\lambda'(-1 + F_r^2) + dx \left[(H - H') - \lambda' S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) \right] = 0$$

$$\frac{d\lambda'(-1 + F_r^2)}{\left[(H - H') - \lambda' S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) \right]} + dx = 0 \quad (\text{A.2})$$

integrando ambos términos se obtiene:

$$x - \frac{(-1 + F_r^2)}{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)} \text{Ln} \left[(H - H') - \lambda' S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) \right] = C \quad (\text{A.3})$$

El propósito es obtener una solución analítica para obtener los valores de λ , por consiguiente se debe obtener una ecuación que defina el valor de λ :

$$x - C = \frac{(-1 + F_r^2)}{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)} \text{Ln} \left[(H - H') - \lambda' S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) \right]$$

$$\frac{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) (x - C)}{(-1 + F_r^2)} = \text{Ln} \left[(H - H') - \lambda' S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) \right]$$

$$e^{\frac{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) (x-C)}{(1-F_r^2)}} = (H - H') - \lambda' S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)$$

$$\lambda' S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) = (H - H') - e^{\frac{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) (x-C)}{(1-F_r^2)}}$$

$$\lambda' = \frac{(H - H') - e^{\frac{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) (x-C)}{(1-F_r^2)}}}{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)} \quad (\text{A.4})$$

Para determinar el valor de la constante de integración C , se emplean las siguientes condiciones iniciales:

$$\text{cuando: } x = 0 \quad \lambda' = 0$$

sustituyendo en la ec. A.4, se llega a:

$$0 = (H - H') - e^{\frac{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) (-C)}{(1-F_r^2)}} \quad (\text{A.5})$$

despejando C de la ecuación anterior resulta:

$$\ln(H - H') = \frac{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) (-C)}{(1 + F_r^2)} \quad (\text{A.6})$$

$$(-1 + F_r^2) \operatorname{Ln}(H - H') = S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) (-C)$$

$$C = - \frac{(-1 + F_r^2) \operatorname{Ln}(H - H')}{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)} \quad (\text{A.7})$$

Sustituyendo el valor de C en la ec. A.4, se tiene:

$$\lambda' = \frac{(H - H') e^{\frac{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)}{(-1 - F_r^2)} \left(x + \frac{(-1 - F_r^2) \operatorname{Ln}(H - H')}{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)} \right)}}{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)} \quad (\text{A.8})$$

realizando operaciones algebraicas:

$$\lambda' = \frac{(H - H') e^{\frac{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)}{(-1 - F_r^2)} \left(x + \frac{(-1 - F_r^2) \operatorname{Ln}(H - H')}{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)} \right)}}{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)}$$

$$\lambda' = \frac{(H - H') e^{\left(\frac{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)}{(-1 - F_r^2)} x + \frac{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)}{(-1 - F_r^2)} \frac{(-1 - F_r^2) \operatorname{Ln}(H - H')}{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)} \right)}}{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)}$$

$$\lambda = \frac{(H - H') e^{-\frac{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) x + \text{Ln}(H - H')}}}{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)}$$

$$\lambda = \frac{(H - H') e^{-\frac{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) x} + \text{Ln}(H - H')}}{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)}$$

$$\lambda = \frac{(H - H')(H - H') e^{-\frac{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) x}}}{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)}$$

$$\lambda = \frac{(H - H') \left(1 - e^{-\frac{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right) x}} \right)}{S_f \left(\frac{4}{3R_h} + \frac{2B}{A} \right)} \tag{A.9}$$

La ec. A.9 es la solución analítica que se emplea en el proceso iterativo del método variacional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Smedstad, O. M. y O'Brien, J. J. (1991), Variational data assimilation and parameter estimation in an equatorial Pacific Ocean model, *Progress in oceanography*, Vol. 26, pp. 179-241.
2. Sasaki, Y. (1970), Some basic formalisms in numerical variational analysis, *Monthly Weather Review*, Vol. 98, pp. 875-883.
3. Panchang, V. G. y Richardson, J. E. (1993), Inverse adjoint estimation of eddy viscosity for coastal flow models, *Journal of hydraulic Engineering*, Vol. 119(4), pp. 506-524.

4. Das, S. K. y Lardner R. W. (1991), On the estimation of parameters of hydraulic models by assimilation of periodic tidal data, *Journal of geophysical research*, Vol. 96, No C8, pp. 15,187-15,196.
5. Berezowsky, M. y Jiménez, C. (1993), Cálculo de perfiles en ríos de fondo arenoso con métodos de resistencia al flujo de hidráulica fluvial.
6. Berezowsky, M. y Gómez, M. (1986), Solución numérica de la ecuación diferencial del flujo gradualmente variado.
7. Alarcón, P. (1997), Estimación de parámetros con métodos inversos. Tesis Profesional, UNAM, México, DF.
8. Tarantola, A. (1987), *Inverse problem theory. Methods for data fitting and model parameter estimation*. Elsevier, Amsterdam.
9. Beveridge, G. S. G. y Schechter, R. S. (1970), *Optimization, theory and practice*, Mc Graw-Hill, Kogakusha, Tokyo.
10. Denn, M. M. (1939), *Optimization by variational methods*, Mc Graw-Hill
11. Sotelo, G. (1986), *Hidráulica II*. Facultad de Ingeniería, UNAM, México, DF.
12. Chow, V. (1983), *Hidráulica de los canales abiertos*, Ed. Diana, México.
13. Frank, A. Jr. (1991), *Ecuaciones diferenciales*, Mc Graw-Hill, México.

14. Berezowsky, M. Y Jiménez, A. (1989), Friction slope computations for mathematical models, Proc of the international symposium on sediment transport modeling, ASCE, Nueva Orleans, EUA, pp. 136-141.
15. García, M. (1982), Fricción en cauces arenosos. Estado del arte, tesis de maestría, DEPFJ, UNAM, México, DF.