

16  
2 ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GATOS DE SCHRODINGER EN  
UNA TRAMPA DE PAUL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
FÍSICO

PRESENTA:  
PEDRO ANTONIO QUINTO SU

DIRECTOR DE TESIS:  
DRA. ROCIO JAUREGUI RENAUD

280165



MEXICO, D.F.

JUNIO 1999

TESIS CON  
ALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



LIBERTAD NACIONAL  
JUSTITIA  
MEXICO

**MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO**  
**Jefa de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: Gatos de Schrodinger en una Trampa de Pauli

realizado por PEDRO ANTONIO QUINTO SU

con número de cuenta 9650474-3 , pasante de la carrera de FISICA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DRA. ROCIO JAUREGUI RENAUD

*Rocio Jauregui Renaud*

Propietario

DR. JOSE FRANCISCO RECAMIER ANGELINI

*Jose Francisco Recamier Angelini*

Propietario

DR. OCTAVIO CASTAÑOS GARZA

*Castanos*

Suplente

DR. RAMON LOPEZ PEÑA

*Ramon Lopez Pena*

Suplente

DR. CARLOS VILLARREAL LUJAN

*Carlos Villarreal Lujan*

*Patricia Goldstein Menache*  
**Consejo Departamental de Física**  
**DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE**

## Agradecimientos

Quiero agradecer a los doctores

- Ramón López Peña
- Octavio Castaños Garza
- Carlos Villarreal Luján
- José Recamier Angelini
- Rocio Jáuregui Renaud

por haber revisado este trabajo y por sus valiosas sugerencias.

Al profesor Javier Gonzalez Pichardo por la formación musical que me inculcó durante diez años junto con su esposa.

Al Dr. José Leonel Torres quien me apoyó y orientó dándome la oportunidad de trabajar en sus proyectos durante dos veranos en Morelia, así como a su esposa Claudia.

Al Dr. Carlos Villarreal por el apoyo y los consejos que me brindó.

Muy especialmente a la Dra. Rocio Jáuregui a quien admiro por sus enseñanzas y por las incontables horas que me dió de su tiempo, sin su apoyo no hubiera sido posible la realización de este trabajo.

A mis amigos como Dulce, Julio, y los demás de Colima; a Mercedes, Alina, Fernando, compañeros de secundaria y preparatoria; a los de la facultad y otros que no puedo nombrar por cuestiones de espacio.

A mis padres: Pedro Quinto Diez y Magali Alejandra Su Aguilar por haberme apoyado incondicionalmente en todas las actividades que he realizado y por la guía que me dieron a lo largo de mi vida.

A mi hermano Leonardo Quinto Su.

A mis abuelos, tíos y primos.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Gatos de Schrödinger y el proceso de medición en la teoría cuántica	1
1.2	Decoherencia	3
1.3	Objetivos	3
<b>2</b>	<b>Trampas Electromagnéticas</b>	<b>4</b>
2.1	Trampas para iones	4
2.1.1	Trampa de Penning	5
2.1.2	Trampa de Paul	6
2.2	Enfriamiento láser de átomos confinados	8
2.2.1	Confinamiento fuerte	9
2.2.2	Confinamiento débil	10
2.2.3	Régimen Lamb-Dicke	10
<b>3</b>	<b>Dinámica cuántica del oscilador paramétrico</b>	<b>11</b>
3.1	Comportamiento dinámico de un sistema cuántico	11
3.2	Hamiltoniano cuadrático	12
3.3	Distribución de Wigner	15
<b>4</b>	<b>Acoplamiento entre el estado interno y de movimiento en un ión confinado</b>	<b>19</b>
4.1	Estados de movimiento e internos del ión	19
4.2	Interacción del ión con campos electromagnéticos aplicados (adicionales a los de la trampa)	20
4.3	Transiciones Raman estimuladas de dos fotones	22
4.4	Manipulación del estado cuántico	27
4.5	Enfriamiento al estado cero	27
4.5.1	Estados de número	28
4.5.2	Cambio en el estado interno (acarreadores)	28
4.5.3	Estados coherentes	29
<b>5</b>	<b>Experimento en el NIST (Creación del gato)</b>	<b>30</b>
5.1	Resultados (NIST)	34
<b>6</b>	<b>Simulación numérica del experimento</b>	<b>34</b>
6.1	Relación entre $W_{dinamica}$ y $W_{sec}$	35
6.2	Conclusiones	47
<b>A</b>	<b>Estados Coherentes</b>	<b>49</b>
A.1	Estados Coherentes de un solo modo	50
A.2	Estados coherentes, pares e impares	51
<b>B</b>	<b>Álgebra</b>	<b>53</b>

<b>C</b>	<b>Interacción de la radiación con átomos</b>	<b>53</b>
C.1	Interacción entre el campo de radiación y el campo del electrón .	54
C.2	Aproximación dipolar . . . . .	54
C.3	Comparación entre $e\vec{r} \cdot \vec{E}$ y $\frac{e}{m}\vec{p} \cdot \vec{A}$ (los dos evaluados en $\vec{r}_0$ ) . . .	55

# 1 Introducción

## 1.1 Gatos de Schrödinger y el proceso de medición en la teoría cuántica

El comportamiento cuántico de un sistema físico se encuentra contenido en la función de onda, que siempre puede ser escrita como una superposición de estados cuánticos, cada uno caracterizado por una amplitud de probabilidad compleja. Las observables físicas son obtenidas mediante funcionales cuadráticas de la función de onda por lo que en general se tienen interferencias entre esas amplitudes.

La lógica del mundo cuántico choca con nuestra intuición clásica. Una partícula tiene probabilidad de encontrarse simultáneamente en lugares distintos y comportarse como una onda sujeta a fenómenos de interferencia. Dos partículas que “vuelan” separándose pueden ser “enredadas” y exhibir propiedades no locales.

Uno de los aspectos más intrigantes de la mecánica cuántica, se ilustra vívidamente por la famosa paradoja Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) [1, 2, 3]. La mecánica cuántica predice que en un par de partículas “enredadas” moviéndose en direcciones opuestas se presentarían resultados de medición incompatibles con nuestros conceptos intuitivos sobre localidad y realidad. El formalismo cuántico dice que el detectar una de las partículas tiene un efecto inmediato en la otra, aún cuando se encuentren muy separadas, incluso cuando se encuentran fuera del rango de interacción. Ésto se ha verificado recientemente mediante experimentos [4]. Este comportamiento no-clásico se espera de cualquier sistema hecho de dos partes cuya función de onda no puede ser escrita, en cualquier base, como un producto directo de subespacios independientes. Se dice que las partes del sistema están enredadas.

Es muy difícil entender estos efectos cuánticos debido a que nuestra intuición se basa en la observación de la naturaleza a nivel macroscópico, donde todos estos fenómenos “raros” se “desvanecen”. Hemos desarrollado una intuición del mundo donde las interferencias entre partículas no tienen lugar. Una de las principales dificultades en la teoría cuántica es precisamente definir el límite entre el mundo microscópico y el macroscópico y entender cómo los efectos cuánticos desaparecen progresivamente cuando aumenta el tamaño del sistema que se investiga.

Schrödinger ilustró esta dificultad en su famosa paradoja de “gato” [5] que describe un procedimiento hipotético para reproducir en escala macroscópica una superposición microscópica de estados cuánticos. En ella menciona a un

gato dentro de una caja junto con un solo átomo en estado excitado. El fotón emitido por el átomo es usado para liberar una sustancia que lo mate. Debido a que a cualquier tiempo existe una amplitud de probabilidad de que el fotón sea emitido y otra de que el átomo continúe excitado, ¿eso significa que el gato se encuentra, antes de ser observado (i.e. antes de que se abra la caja), en una superposición lineal de estados de muerte y vida?

Uno puede dar a esta pregunta una respuesta muy simple y operacional: si el gato estuviera en un estado de superposición, debería ser posible diseñar un experimento sensible a la interferencia entre el "gato vivo" y el "gato muerto". En otras palabras, la física del gato en la caja debería ser diferente de la situación clásica donde uno conoce que el gato está muerto con una cierta probabilidad o vivo con la probabilidad complementaria, sin interferencia entre estas dos posibilidades. Para un sistema tan complejo como un gato, que claramente no puede ser descrito por una función de onda, el resultado de un experimento de este tipo es bastante obvio y es por supuesto imposible que se observe algún efecto de interferencia. El punto es entender precisamente el por qué, en general, la coherencia de un objeto macroscópico no es observable y poner un límite superior al tamaño o energías de los sistemas tipo "gatos de Schrödinger" realizables.

Esta discusión es importante porque se encuentra conectada directamente a la teoría de la medición en física cuántica. Uno puede decir que el gato es un medidor macroscópico para detectar el fotón. El estado "muerto" corresponde a la posición del medidor cuando el fotón ha sido emitido, mientras que el estado "vivo" corresponde a la posición del medidor cuando aún no hay fotón. Uno puede también reemplazar el gato por un medidor con dos posiciones y replantear la discusión en términos similares. La cuestión real es "¿por qué no vemos términos de interferencia entre los estados de un medidor macroscópico?" o "¿por qué un medidor evoluciona instantáneamente a una u otra posición?". Puesta de esta manera, la discusión obviamente se relaciona con el problema del colapso de la función de onda en mecánica cuántica.

La paradoja de la medición se ha discutido largamente durante las últimas seis décadas [6]. Entre las varias explicaciones dadas para la no-observación de coherencias cuánticas a nivel macroscópico, las teorías de decoherencia parecen ser las más convincentes. Usan el amortiguamiento irreversible de las coherencias macroscópicas, debido al inevitable acoplamiento del sistema al medio ambiente. Esta perturbación transforma la superposición que involucra a distintos estados del medidor en una mezcla estadística descrita por una matriz de densidad diagonal, para la cual toda la información puede ser analizada en términos clásicos. La naturaleza del proceso de relajación define la base en que esta matriz de densidad es diagonal, removiendo la ambigüedad cuántica del estado de superposición del "objeto microscópico+medidor", que puede ser expresado en varias bases arbitrarias.

Un parámetro importante en estas discusiones es el tamaño del aparato, el tamaño del medidor. Debido a que la coherencia cuántica existe en la microescala de sistemas pequeños y desaparece en escalas grandes de objetos macroscópicos, debería haber una escala intermedia "mesoscópica" en la que el proceso de decoherencia sea lo suficientemente lento para que sea accesible

experimentalmente.

## 1.2 Decoherencia

Cuando el sistema se lleva a una superposición de estados macroscópicos diferentes, la información sobre esta superposición se fuga al medio ambiente inevitable e irreversiblemente a una razón que se incrementa con la separación entre las partes; ésto hace que las coherencias cuánticas sean aleatorizadas eficientemente.

La relación con la complementariedad es impresionante; como se expone en [7], el ambiente está observando el camino seguido por el sistema, suprimiendo los efectos de interferencia y “rareza” cuánticas. La fuerte dependencia de la razón de decoherencia con el tamaño del sistema y la separación de sus partes es un distintivo de este fenómeno, que lo hace distinto de otras manifestaciones de relajación (e.g., decaimiento del estado excitado).

En sistemas macroscópicos este proceso es tan eficiente que sólo vemos su resultado final: el mundo clásico alrededor de nosotros. ¿Podrían prepararse sistemas mesoscópicos? - algún lugar entre los mundos microscópico y macroscópicos -, donde ocurra la decoherencia, pero con suficiente lentitud para ser observada. Hasta recientemente, éso sólo podía ser imaginado como experimentos pensados. Pero los avances tecnológicos han hecho posible esos experimentos y han abierto este campo a la investigación experimental.

## 1.3 Objetivos

- Entender algunos de los experimentos que se han efectuado para obtener realizaciones de estados de gato.
- En el camino, aprender sobre las técnicas para atrapar átomos y manipular sus estados cuánticos.
- Reportar simulaciones numéricas de un experimento concreto y calcular las propiedades esperadas del estado cuántico final más allá de las idealizaciones que dieron origen al diseño del experimento.

La tesis está organizada de la siguiente forma: En la capítulo 2 se describen las trampas electromagnéticas para átomos (iones); en particular la trampa de Paul, que es la que se utilizó en los experimentos objeto de esta tesis. Asimismo, se describen algunas de las técnicas de enfriamiento necesarias para observar características cuánticas en el movimiento de los átomos confinados.

En la capítulo 3 se trata el comportamiento dinámico esperado para describir el movimiento de un ión confinado en una trampa de Paul. Básicamente encontramos el operador de evolución para un Hamiltoniano cuadrático general y se da una breve introducción a la función de distribución de Wigner.

En la capítulo 4 se tratan los estados internos y de movimiento de los átomos y el cómo se acoplan experimentalmente. Para ello se estudian las interacciones entre átomos y campos electromagnéticos.

En el capítulo 5 se describen brevemente los experimentos, y los resultados de nuestra simulación numérica se reportan en el capítulo 6.

Finalmente, se presentan las conclusiones que resultan de comparar nuestra simulación con la idealización en la que no se consideran las no linealidades ni los aspectos ligados al carácter no estático de la trampa. Comparamos nuestros resultados con los del experimento que se reportó en la literatura.

## 2 Trampas Electromagnéticas

En este capítulo se muestra el principio general para el funcionamiento de las trampas electromagnéticas para iones, se describen los principios generales de funcionamiento de las trampas de Penning y de Paul. Esta última se trata con más detalle debido a que es la que se utilizó en los experimentos por el grupo de Wineland en el NIST. Finalmente se describen algunas técnicas de enfriamiento laser de átomos confinados.

### 2.1 Trampas para iones

Para confinar un ión se necesitan potenciales que lo atraigan en las tres direcciones:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Este tipo de potenciales no se puede lograr sólo con un potencial electrostático, debido al teorema de Earnshaw, que nos dice que en una situación electrostática en ausencia de cargas no se puede tener un potencial que sea atractivo en las tres direcciones. Lo anterior se sigue de la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (1)$$

Se quiere un potencial tipo oscilador armónico en las tres direcciones, es decir, un potencial del tipo:

$$\Phi = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 \quad (2)$$

Para que el potencial anterior cumpla con la ecuación de Poisson se necesita que al menos una de las constantes del oscilador  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sea negativa, es decir, repulsiva, debido a que deben satisfacer

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad (3)$$

Por lo anterior, para confinar un ión se necesitan campos electrostáticos y magnetostáticos combinados, o bien campos dependientes del tiempo.

Las trampas de Penning y de Paul en su diseño original usan el mismo conjunto básico de electrodos, estos electrodos tienen la forma de las equipotenciales correspondientes a un potencial cuadrupolar de la forma

$$\phi(r, z) = -\frac{U_0}{R_0^2}(2z^2 - r^2)$$

donde  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $R_0^2 = r_0^2 + 2z_0^2$  es una constante geométrica que depende de la trampa.

En el capítulo 5 se describen brevemente los experimentos, y los resultados de nuestra simulación numérica se reportan en el capítulo 6.

Finalmente, se presentan las conclusiones que resultan de comparar nuestra simulación con la idealización en la que no se consideran las no linealidades ni los aspectos ligados al carácter no estático de la trampa. Comparamos nuestros resultados con los del experimento que se reportó en la literatura.

## 2 Trampas Electromagnéticas

En este capítulo se muestra el principio general para el funcionamiento de las trampas electromagnéticas para iones, se describen los principios generales de funcionamiento de las trampas de Penning y de Paul. Esta última se trata con más detalle debido a que es la que se utilizó en los experimentos por el grupo de Wineland en el NIST. Finalmente se describen algunas técnicas de enfriamiento laser de átomos confinados.

### 2.1 Trampas para iones

Para confinar un ión se necesitan potenciales que lo atraigan en las tres direcciones:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Este tipo de potenciales no se puede lograr sólo con un potencial electrostático, debido al teorema de Earnshaw, que nos dice que en una situación electrostática en ausencia de cargas no se puede tener un potencial que sea atractivo en las tres direcciones. Lo anterior se sigue de la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (1)$$

Se quiere un potencial tipo oscilador armónico en las tres direcciones, es decir, un potencial del tipo:

$$\Phi = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 \quad (2)$$

Para que el potencial anterior cumpla con la ecuación de Poisson se necesita que al menos una de las constantes del oscilador  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sea negativa, es decir, repulsiva, debido a que deben satisfacer

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad (3)$$

Por lo anterior, para confinar un ión se necesitan campos electrostáticos y magnetostáticos combinados, o bien campos dependientes del tiempo.

Las trampas de Penning y de Paul en su diseño original usaron el mismo conjunto básico de electrodos, estos electrodos tienen la forma de las equipotenciales correspondientes a un potencial cuadrupolar de la forma

$$\phi(r, z) = -\frac{U_0}{R_0^2}(2z^2 - r^2)$$

donde  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $R_0^2 = r_0^2 + 2z_0^2$  es una constante geométrica que depende de la trampa.

### 2.1.1 Trampa de Penning

Esta trampa se caracteriza porque el confinamiento de los electrones o iones se logra mediante un potencial electrostático cuadrupolar y un campo magnético uniforme.

En la figura 1 se muestra una trampa de Penning típica cuyos electrodos tienen la forma de hipérbolas de revolución para generar el potencial electrostático cuadrupolar. El campo magnético uniforme lleva la dirección que se marca como eje z.

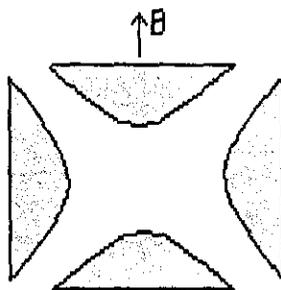


Figura 1: Electrodos de la trampa de Penning.

El movimiento de las partículas cargadas en la trampa (figura 2) puede descomponerse en tres partes: una oscilación axial, un movimiento circular rápido de ciclotrón en un radio pequeño y uno en una órbita circular mayor con menor velocidad (movimiento de magnetrón). La combinación de estos dos últimos da como resultado un movimiento en epiciclos sobre el plano xy.

El movimiento circular de ciclotrón se debe a la interacción del electrón o ión con el campo magnético; la frecuencia  $\omega_c$  está dada por  $\omega_c = |eB|/mc$  (en una descripción clásica). La oscilación armónica a lo largo del eje z es producida por el potencial electrostático cuadrupolar  $V = V_0(z^2 - \rho^2/2)/2d^2$  con una frecuencia  $\omega_z = \sqrt{eV_0/mc^2}$ . El movimiento largo de magnetrón es un círculo en una cima de potencial efectivo; a pesar de que este movimiento es inestable, se acopla lentamente al ambiente haciéndose estable. Para disminuir el radio del movimiento de magnetrón se utiliza una técnica de enfriamiento, de tal forma que el movimiento ocupe un volumen muy pequeño donde los campos son más homogéneos.

Algunas frecuencias típicas son (parámetros típicos para un electrón) [8]: para el movimiento de ciclotrón  $\nu_c = 164.4\text{GHz}$ , para el axial  $\nu_z = 64.42\text{MHz}$ , y para el de magnetrón  $\nu_m = 11.85\text{kHz}$ .

La detección del ión suele depender de su oscilación en la dirección z, esta

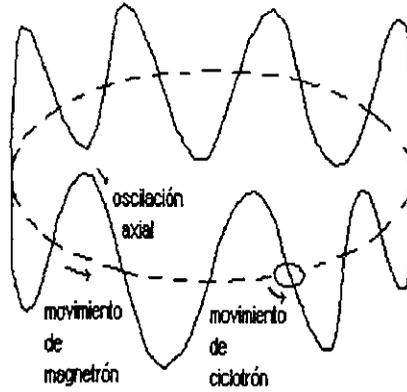


Figura 2: Movimiento en la trampa de Penning.

induce cargas imágenes en los electrodos que producen una corriente alterna en un circuito que está conectado a un detector. El circuito es un LRC que extrae energía del ión a través del capacitor.

Todo lo anterior corresponde a una descripción clásica del movimiento del electrón o ión dentro de la trampa, esta descripción es suficiente mientras los cuantos de energía  $\hbar\omega$  de los movimientos sean mucho menores que la energía térmica  $k_B T$ , es decir,  $E_c, E_m, E_z \ll k_B T$ . Esta condición se cumple en la mayoría de los experimentos reportados en la literatura. Dados los valores de las frecuencias típicas, el enfriamiento de los movimientos axial y magnetrónico hasta llegar al punto cero no ha sido posible. El caso de enfriamiento del movimiento ciclotrónico hasta hacer necesaria una descripción cuántica se encuentra reportado en [9].

### 2.1.2 Trampa de Paul

Esta trampa utiliza un campo eléctrico cuadrupolar dependiente del tiempo.

El potencial del campo cuadrupolar es cuadrático en sus coordenadas cartesianas:

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2r_0^2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) \quad (4)$$

debido a que  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ; entonces una configuración posible para el potencial en tres dimensiones es

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{r_0^2 + 2z_0^2}(r^2 - 2z^2) \quad (5)$$

con  $2z_0^2 = r_0^2$  y  $r^2 = x^2 + y^2$ .

El campo eléctrico es:

$$E_r = -2 \frac{\Phi_0}{r_0^2 + 2z_0^2} r, \quad (6)$$

$$E_z = 4 \frac{\Phi_0}{r_0^2 + 2z_0^2} z.$$

La fuerza es atractiva en  $r$ , pero repulsiva en  $z$ . Este problema se evita cambiando periódicamente el signo de la fuerza eléctrica, para ello se usa un voltaje periódico.

Si el voltaje  $\Phi_0 = U + V \cos \omega t$  las ecuaciones de movimiento son

$$\ddot{r} + \frac{2e}{m(r_0^2 + 2z_0^2)} (U + V \cos \omega t) r = 0 \quad (7)$$

$$\ddot{z} - \frac{4e}{m(r_0^2 + 2z_0^2)} (U + V \cos \omega t) z = 0 \quad (8)$$

que tienen la forma de las ecuaciones de Mathieu.

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau) z = 0; \quad (9)$$

comparando (7) con (9) se obtiene (para  $r$ )

$$a_r = \frac{8eU}{m\omega^2(r_0^2 + 2z_0^2)}, \quad (10)$$

$$q_r = -\frac{4eV}{m\omega^2(r_0^2 + 2z_0^2)}.$$

Las ecuaciones anteriores dan origen a soluciones acotadas sólo bajo ciertas condiciones, en este caso el movimiento de los iones puede ser descrito como una oscilación lenta (secular) con frecuencias fundamentales  $\omega_{r,z} \approx \beta_{r,z} \omega / 2$  modulada por un micromovimiento, una oscilación mucho más rápida.

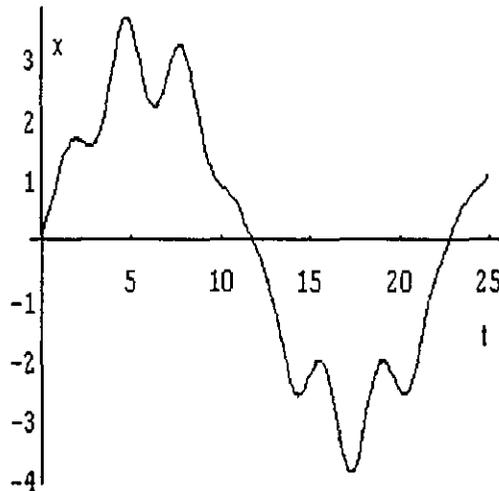


Figura 3: Movimiento estable típico en una trampa de Paul.

Para valores pequeños de  $a_z$  y  $q_z$  el movimiento secular representa el movimiento lento resultante de un potencial efectivo; el potencial efectivo surge porque el movimiento se lleva a cabo en un campo inhomogéneo, donde la fuerza promedio sobre el ión no se cancela a cero en un ciclo completo del potencial efectivo (también llamado pseudopotencial); éste está dado (para  $z$ ) por

$$V_{ef} = \frac{1}{8}m(a_z + \frac{1}{2}q_z^2)\omega^2 z^2. \quad (11)$$

la frecuencia de oscilación en este potencial es

$$\omega'_z = \frac{1}{2}\beta_z\omega \quad (12)$$

donde

$$\beta_z^2 = a_z + \frac{1}{2}q_z^2. \quad (13)$$

Debido a que los parámetros  $a$  y  $q$  dependen de la razón carga-masa de los iones, el potencial puede ser usado como un aparato que seleccione iones de acuerdo a sus masas. De hecho la trampa de Paul surgió hace más de cuarenta años del grupo de Paul [10] en Bonn del trabajo en filtros de masa lineales. Versiones modificadas de esta concepción han sido desarrolladas por distintos grupos, sin embargo, la idea general es la misma.

## 2.2 Enfriamiento láser de átomos confinados

Las técnicas de enfriamiento utilizando láseres han sido tema de abundante estudio en los últimos años. La sofisticación alcanzada en este campo sobrepasa con mucho las necesidades de este trabajo. Por ello nos restringiremos únicamente al enfriamiento Doppler y al de dispersión Raman que de hecho se trata en detalle en el siguiente capítulo.

El enfriamiento del estado de movimiento o del centro de masa de átomos confinados utilizando láseres presenta características distintas dependiendo de si el confinamiento es "fuerte" o "débil". Si el confinamiento es fuerte, el espectro de absorción se compone de "bandas", una de las cuales se encuentra a la frecuencia de resonancia, mientras que las otras son generadas por el efecto Doppler; el caso de confinamiento débil equivale al del átomo libre.

Consideramos la situación especial cuando el o los átomos se encuentran confinados en todas las direcciones, suponemos que el confinamiento se debe a fuerzas de oscilador, que los "resortes" se encuentran atados a un bloque masivo y que actúan independientemente, además de que pueden tener distintas constantes  $k$  dando lugar a distintas frecuencias de oscilación  $\Omega_i$  donde se supone que  $\Omega_i \ll \omega_0$ ,  $i = x, y, z$ , ( $\omega_0$  es la frecuencia de resonancia de la transición de dipolo eléctrico).

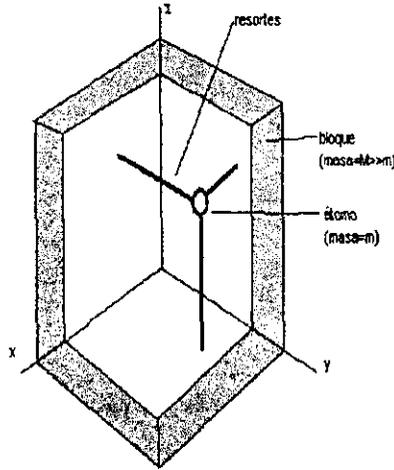


Figura 4: Representación idealizada de un átomo confinado.

### 2.2.1 Confinamiento fuerte

Cuando el confinamiento es fuerte,  $\gamma \propto 1/\tau \ll \Omega_i$  ( $\gamma$  es el ancho de la línea,  $\tau$  es el tiempo de decaimiento), las características "gruesas" del espectro de absorción son alteradas de manera significativa. Podemos ver esto si consideramos el campo eléctrico óptico visto por un átomo particular. Si la radiación incidente (onda plana) se dirige sobre el eje  $x_i$  ( $i = x, y, z$ )

$$\vec{E}_{\text{atomo}} = \vec{E}_0 \sin(kx_i - \omega t), \quad (14)$$

donde  $k$ ,  $\omega$ ,  $x_i$  son el número de onda, la frecuencia de la radiación incidente y la coordenada atómica respectivamente

$$x_i = x_a \sin(\Omega_i t + \phi_i), \quad (15)$$

donde  $x_a$  es la amplitud de oscilación y  $\phi_i$  es un factor de fase.

Escogiendo  $\phi_i = 0$  tenemos

$$\vec{E}_{\text{atomo}} = \vec{E}_0 \sin(kx_a \sin \Omega_i t - \omega t). \quad (16)$$

Esta expresión es similar a la señal derivada de un oscilador de frecuencia  $\omega$  que se encuentra modulado a una frecuencia  $\Omega_i$  con índice de modulación  $kx_a$ . La ecuación (16) puede expandirse en términos de una serie de funciones de Bessel y da origen al espectro que se muestra en la figura 5.

Para el enfriamiento, podemos sintonizar la radiación incidente a una de las bandas menores. Entonces, se puede hacer que un átomo absorba predominantemente fotones de energía  $h(\omega_0 + m\Omega_i)$  ( $m$  es un entero negativo) reemitiendo fotones con energía promedio de  $h\omega_0$ , dando lugar a un enfriamiento neto.

El enfriamiento sigue hasta que el número cuántico vibracional es  $[11, 12]$   $\langle n_x \rangle \simeq \langle n_y \rangle \simeq \langle n_z \rangle \simeq 5/16(\gamma^2/\Omega_i^2)$ . Entonces  $\langle n \rangle_{\text{min}} \approx (\gamma/2\Omega_i)^2 \ll 1$ .

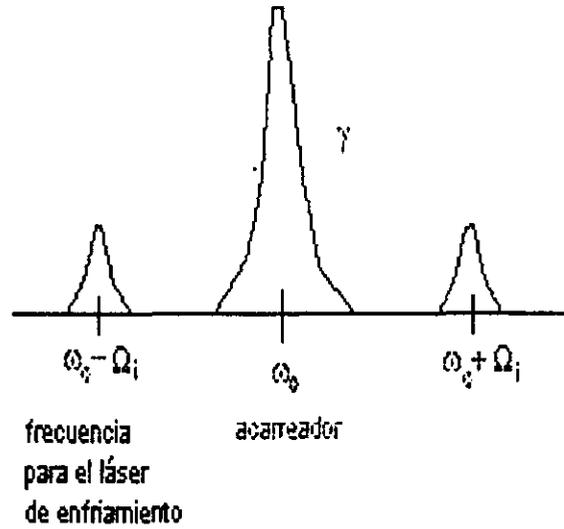


Figura 5: Absorción como función de la frecuencia del láser, confinamiento fuerte.

### 2.2.2 Confinamiento débil

Cuando  $\gamma \gg \Omega_i$ , el periodo de oscilación del centro de masa atómico es mucho mayor que el tiempo de decaimiento óptico (equivale a que el átomo se encuentre libre). Entonces, en un periodo de oscilación, la velocidad atómica gradualmente alcanza el valor donde la radiación incidente es desplazada a la resonancia. En este límite se trata la interacción de la radiación con el átomo como si ocurriera en un instante. Esto es razonable debido a que el átomo pierde memoria de la fase óptica en el periodo de una oscilación, por lo que la coherencia (que da lugar a las bandas) en oscilaciones sucesivas puede despreciarse.

Una diferencia importante del caso del átomo libre es que el momento del fotón es transferido al movimiento del centro de masa del bloque con el átomo. En el límite en que la masa del bloque se hace infinita, el cambio en la velocidad del centro de masa por evento de dispersión se hace cero y el cambio en energía debe ocurrir en la energía cinética del átomo confinado.

La temperatura mínima de enfriamiento para átomos libres es [11]  
 $kT_{min} = 1/2h\gamma$ .

### 2.2.3 Régimen Lamb-Dicke

Hay un caso especial en el confinamiento fuerte cuando la amplitud del movimiento es tan pequeña que las amplitudes de las varias bandas se hacen suficientemente pequeñas para ser ignoradas [13]. Este es llamado régimen de Lamb-Dicke, en éste, el movimiento posee una amplitud que es mucho menor que  $\lambda/2\pi$ , donde

$\lambda$  es la longitud de onda de la luz radiada. La importancia es que toda la radiación (o equivalentemente toda la absorción) se concentra en el "acarreador", quedando libre del efecto Doppler a primer orden.

El parámetro Lamb-Dicke,  $\eta$ , da una idea de que tan grande es la amplitud del estado base comparado con la longitud de onda de la radiación. Se define por

$$\eta = kx_0 = k\sqrt{\hbar/2m\omega} \quad (17)$$

donde  $k = 2\pi/\lambda$  y  $x_0 = \sqrt{\hbar/2m\omega}$  es la dispersión de la función de onda del estado base en el pozo de potencial, que tiene frecuencia de oscilación  $\omega$ .

### 3 Dinámica cuántica del oscilador paramétrico

De acuerdo a lo visto en la sección anterior el movimiento de un ión en una trampa de Paul puede describirse en términos del oscilador paramétrico. En este capítulo se obtiene el operador de evolución para un hamiltoniano cuadrático dependiente del tiempo. Asimismo se calculan algunos elementos de matriz que requeriremos al considerar la interacción del átomo con un campo electromagnético monocromático.

#### 3.1 Comportamiento dinámico de un sistema cuántico

Para describir el desarrollo en el tiempo de un sistema cuántico, se postula la existencia de un Hamiltoniano  $H$  para el sistema y se requiere que el vector de estado para el sistema  $|\psi(t)\rangle$  cambie en acuerdo con la ecuación de Schrödinger.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle, \quad (18)$$

donde  $H$  debe tratarse como una observable del sistema y por tanto debe ser hermitiano.

Pueden surgir dos casos. En el primero  $H$  es independiente del tiempo. En ese caso podemos integrar formalmente (18) y obtener

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad (19)$$

donde

$$U(t, t_0) = \exp\left[-i\frac{H(t-t_0)}{\hbar}\right], \quad (20)$$

y  $|\psi(t_0)\rangle$  es el estado del sistema al tiempo  $t_0$ .

De la ecuación anterior se sigue que  $U$  satisface la ecuación

$$i\hbar \frac{dU}{dt} = HU; \quad (21)$$

de (19), en  $t = t_0$ ,  $U$  debe satisfacer la condición inicial

$\lambda$  es la longitud de onda de la luz radiada. La importancia es que toda la radiación (o equivalentemente toda la absorción) se concentra en el "acarreador", quedando libre del efecto Doppler a primer orden.

El parámetro Lamb-Dicke,  $\eta$ , da una idea de que tan grande es la amplitud del estado base comparado con la longitud de onda de la radiación. Se define por

$$\eta = kx_0 = k\sqrt{\hbar/2m\omega} \quad (17)$$

donde  $k = 2\pi/\lambda$  y  $x_0 = \sqrt{\hbar/2m\omega}$  es la dispersión de la función de onda del estado base en el pozo de potencial, que tiene frecuencia de oscilación  $\omega$ .

### 3 Dinámica cuántica del oscilador paramétrico

De acuerdo a lo visto en la sección anterior el movimiento de un ión en una trampa de Paul puede describirse en términos del oscilador paramétrico. En este capítulo se obtiene el operador de evolución para un hamiltoniano cuadrático dependiente del tiempo. Asimismo se calculan algunos elementos de matriz que requeriremos al considerar la interacción del átomo con un campo electromagnético monocromático.

#### 3.1 Comportamiento dinámico de un sistema cuántico

Para describir el desarrollo en el tiempo de un sistema cuántico, se postula la existencia de un Hamiltoniano  $H$  para el sistema y se requiere que el vector de estado para el sistema  $|\psi(t)\rangle$  cambie en acuerdo con la ecuación de Schrödinger.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle, \quad (18)$$

donde  $H$  debe tratarse como una observable del sistema y por tanto debe ser hermitiano.

Pueden surgir dos casos. En el primero  $H$  es independiente del tiempo. En ese caso podemos integrar formalmente (18) y obtener

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad (19)$$

donde

$$U(t, t_0) = \exp\left[-i \frac{H(t - t_0)}{\hbar}\right], \quad (20)$$

y  $|\psi(t_0)\rangle$  es el estado del sistema al tiempo  $t_0$ .

De la ecuación anterior se sigue que  $U$  satisface la ecuación

$$i\hbar \frac{dU}{dt} = HU; \quad (21)$$

de (19), en  $t = t_0$ ,  $U$  debe satisfacer la condición inicial

$$U(t_0, t_0) = I, \quad (22)$$

Como  $H$  es hermitiano, se sigue de (20) que

$$U^\dagger(t, t_0) = \exp\left[\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}\right] = U^{-1}(t, t_0), \quad (23)$$

que muestra que  $U$  es un operador unitario. Se puede decir que el estado del sistema al tiempo  $t$  se desarrolla en una forma completamente causal en el sentido de que esta determinado por  $\Psi(t = t_0)$  por una transformación unitaria.

Como cualesquiera dos funciones de  $H$  conmutan, es fácil ver de (20) que  $U$  satisface la propiedad de grupo

$$U(t, t_2) = U(t, t_1)U(t_1, t_2), \quad (24)$$

donde  $t > t_1 > t_2$ .

En el segundo caso, cuando  $H$  depende explícitamente del tiempo, la solución a (18) no está dada por

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int H(t') dt'\right] |\psi(t_0)\rangle. \quad (25)$$

Lo anterior se debe a que en general  $\int H(t') dt'$  no conmuta con  $H(t)$ , por lo que al tratar de diferenciar la exponencial, el orden de los factores sería ambiguo. Hay que notar que el que dos operadores conmuten en un tiempo no asegura que lo hagan en tiempos distintos.

Cuando  $H$  depende explícitamente del tiempo, podemos buscar una solución de la forma

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \quad (26)$$

Al sustituir lo anterior en (18), vemos que  $U$  satisface

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} |\psi(t_0)\rangle = H(t)U |\psi(t_0)\rangle. \quad (27)$$

como  $|\psi(t_0)\rangle$  es completamente arbitrario, se sigue que  $U$  debe satisfacer (21) sujeto a la condición inicial (22).

La solución a la ecuación (21) no es trivial, para tratarla existen métodos perturbativos y algebraicos [14, 15], entre otros.

### 3.2 Hamiltoniano cuadrático

Consideramos el hamiltoniano como en [14, 15, 16]

$$H = \frac{a(t)}{2} p^2 + \frac{b(t)}{2} (pq + qp) + \frac{c(t)}{2} q^2, \quad (28)$$

se usan unidades naturales,  $m = \hbar = c(0) = 1$ .

Las constantes de movimiento pueden construirse a partir de la formulación Hamiltoniana del teorema de Noether [17]. Las invariantes se escriben en la forma

$$p_0(t) = h_1(t)p - \frac{1}{a(t)}[\dot{h}_1(t) - h_1(t)b(t)]q, \quad (29)$$

$$q_0(t) = h_2(t)p - \frac{1}{a(t)}[\dot{h}_2(t) - h_2(t)b(t)]q, \quad (30)$$

donde  $h_k(t)$  con  $k=1,2$ , denotan las soluciones independientes a las ecuaciones clásicas de movimiento:

$$\ddot{h}_k(t) - \dot{h}_k(t)\left[\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right] + h_k(t)[- \dot{b}(t) + a(t)c(t) - b^2(t) + b(t)\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}] = 0. \quad (31)$$

Si se escoge que las constantes de movimiento sean los operadores de posición y momento al tiempo  $t = 0$ , las soluciones a la ecuación anterior (clásica) están completamente determinadas por las condiciones iniciales

$$h_1(t=0) = 1, \dot{h}_1(t=0) = b(0), \quad (32)$$

$$h_2(t=0) = 0, \dot{h}_2(t=0) = -a(0). \quad (33)$$

Las constantes de movimiento pueden ser reescritas en forma matricial, y la matriz que conecta los operadores de posición y momento con las constantes de movimiento es una matriz bidimensional simpléctica. Esto significa que las ecuaciones (30) y (31) denotan una transformación canónica y que las relaciones de conmutación de las constantes de movimiento son idénticas a las de los operadores de posición y momento. Otra forma conveniente de expresar las constantes de movimiento es en términos de los operadores de creación y aniquilación dependientes del tiempo:

$$\begin{pmatrix} A(t) \\ A^\dagger(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^* & M_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix}, \quad (34)$$

donde se define

$$M_1 = \frac{1}{2}\left[(1 + i\frac{b}{a})(h_1 - ih_2) - \frac{1}{a}(\dot{h}_2 + ih_1)\right], \quad (35)$$

$$M_2 = \frac{1}{2}\left[(-1 + i\frac{b}{a})(h_1 - ih_2) - \frac{1}{a}(\dot{h}_2 + ih_1)\right], \quad (36)$$

$|M_1|^2 - |M_2|^2 = 1$ .  $a^\dagger$  y  $a$  son los operadores de creación y destrucción en  $t = 0$ .

En el método algebraico, el operador de evolución del Hamiltoniano (28) debe ser un elemento del grupo simpléctico en dos dimensiones. Entonces se propone

$$U(t) = \exp(c_0 K_0) \exp(c_- K_+) \exp(c_+ K_-), \quad (37)$$

donde se definen los operadores

$$K_0 = \frac{1}{2}(a^\dagger a + \frac{1}{2}), \quad (38)$$

$$K_+ = \frac{1}{2}a^{\dagger 2}, \quad (39)$$

$$K_- = \frac{1}{2}a^2. \quad (40)$$

Sustituyendo el *ansatz* (37) en la ecuación para el operador de evolución (21), se obtienen ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden para los coeficientes  $c$  con las condiciones iniciales  $c_0(0) = c_+(0) = c_-(0) = 0$ . Se llega a que

$$c_0 = -2 \ln(M_1), \quad (41)$$

$$c_+ = M_2^*/M_1, \quad (42)$$

$$c_- = -M_2 M_1. \quad (43)$$

Si escogemos que la frecuencia secular sea el valor de la frecuencia en  $t = 0$  ( $\Omega(t=0) = \omega_s$ ), entonces los estados de número evolucionan de acuerdo con

$$U|n\rangle_{\omega_s}, \quad (44)$$

donde  $U(t) = e^{c_0 \frac{1}{2}(a^\dagger a + \frac{1}{2})} e^{c_- \frac{1}{2}a^2} e^{c_+ \frac{1}{2}a^{\dagger 2}}$ . Las dos últimas exponenciales en la ecuación anterior representan un operador de compresión, por lo que si el estado inicial fuera el estado base se generaría un estado comprimido.

Más adelante en las ecuaciones que describen nuestro sistema requeriremos conocer el comportamiento de los elementos de matriz asociados al operador ( $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ ) entre los estados  $|n(t)\rangle = U|n\rangle_{\omega_s}$

$$\langle \vec{n} | U^\dagger e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} U | \vec{m} \rangle_{\omega_s}, \quad (45)$$

La interacción puede descomponerse en términos de los operadores de aniquilación y de creación asociados a cada una de las direcciones  $i$ ,  $a_i$  y  $a_i^\dagger$ , usando

$$x_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_i^\dagger + a_i).$$

En el apéndice B se muestra que

$$e^{-c_0 a^\dagger a/2} f(a, a^\dagger) e^{c_0 a^\dagger a/2} = f(a e^{c_0/2}, a^\dagger e^{-c_0/2}), \quad (46)$$

$$e^{-c_- a^{\dagger 2}/2} f(a, a^\dagger) e^{c_- a^{\dagger 2}/2} = f(a + c_- a^\dagger, a^\dagger), \quad (47)$$

$$e^{-c_+ a^2/2} f(a, a^\dagger) e^{c_+ a^2/2} = f(a, a^\dagger - c_+ a), \quad (48)$$

entonces

$$U^\dagger f(a, a^\dagger) U = f([a + c_- (a^\dagger - c_+ a)] e^{c_0/2}, [a^\dagger - c_+ a] e^{-c_0/2}), \quad (49)$$

Aplicando esta ecuación para  $f = e^{ik_i x_i}$  se obtiene

$$\begin{aligned} U^\dagger \exp[ik\sqrt{\hbar/2m\omega}(a^\dagger + a)] U &= \exp[ik\sqrt{\hbar/2m\omega}(a^\dagger(e^{-c_0/2} + c_- e^{c_0/2}) \\ &+ a(e^{c_0/2} - c_+ c_- e^{c_0/2} - c_+ e^{-c_0/2}))], \end{aligned} \quad (50)$$

al simplificar se obtiene

$$U^\dagger \exp[i\eta(a^\dagger + a)] U = \exp[i\eta(a\xi + a^\dagger \xi^*)], \quad (51)$$

donde  $\xi = M_1^* - M_2^*$ .

Al evaluar el elemento de matriz, se obtiene

$$\begin{aligned} \langle n | U^\dagger \exp[i\eta(a^\dagger + a)] U | m \rangle_{\omega_s} &= \\ \frac{e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}}{\sqrt{n!m!}} \sum_p^{(m,n)_<} \frac{(n-p+1)!}{(p)!(m-n+p)!} i^{(m-n+2p)} \zeta^{*(p)} \zeta^{-(m-n+p)}, \end{aligned} \quad (52)$$

donde  $(n, m)_<$  significa el menor de  $n, m$  y  $\zeta = \eta\xi$

### 3.3 Distribución de Wigner

Clásicamente, el conocer la distribución de probabilidad en el espacio fase implica que se pueden predecir todas las características estadísticas de un sistema. Todo esto es mucho más sutil en Mecánica Cuántica. Primero, debido a que el principio de incertidumbre de Heisenberg nos impide medir posición y momento simultáneamente y con precisión. Pero como tampoco podemos observar los estados cuánticos directamente, entonces podemos utilizar los conceptos de estados como si fueran entidades existentes. Usamos sus propiedades para predecir las estadísticas de las observaciones. Entonces podemos utilizar una distribución cuántica del espacio fase  $W(\alpha, \alpha^*, t)$ , pero debido a que el espacio fase es "cuántico", la distribución de probabilidad  $W(\alpha, \alpha^*, t)$  puede ser negativa, por lo que se le llama a  $W(\alpha, \alpha^*, t)$  una distribución de cuasi-probabilidad.

De todas las representaciones en el espacio fase, la distribución de Wigner es la más natural, cuando uno busca un análogo mecánico-cuántico de una distribución de probabilidad clásica.

Siguiendo el tratamiento de la referencia [18, 19]: Se define la función característica del operador A o función generadora de momentos como

$$C_A(\xi, t) = \text{Tr} \rho(t) e^{i\xi A} = \sum_{\phi} p_{\phi} \langle \phi(t) | e^{i\xi A} | \phi(t) \rangle. \quad (53)$$

donde  $p_\phi$  es la probabilidad de tener el estado  $\phi$ . La función característica para A determina los elementos de la matriz diagonal para el operador de densidad en la representación de A. Esta es la información necesaria para determinar los momentos de A.

$$\langle A^l(t) \rangle = \frac{\partial^l}{\partial (i\xi)^l} C_A(\xi, t)|_{\xi=0}. \quad (54)$$

Considerando el caso del oscilador descrito por los operadores  $a, a^\dagger$ , el operador de densidad será función de  $a$  y  $a^\dagger$  con traza unitaria.

$$\text{tr} \rho(a, a^\dagger, t) = 1. \quad (55)$$

Hay formas útiles de definir las funciones características dependiendo de los momentos de interés, una de ellas es:

$$C^{(w)}(\xi, t) = \langle e^{i\eta(\xi a + \xi^* a^\dagger)} \rangle, \quad (56)$$

a la que se le llama función característica de Wigner, esta nos da los momentos simétricos

$$\langle (\xi a + \xi^* a^\dagger)^l \rangle = \frac{\partial^l}{\partial (i\eta)^l} C^w(\xi, t)|_{\eta=0} = \text{tr} \rho(t) |\xi a + \xi^* a^\dagger|^l. \quad (57)$$

Luego se muestra que el operador de densidad para un modo del campo de radiación puede ser determinado de la función característica.

La transformada de Fourier de  $C^{(w)}$  es

$$W(\alpha, \alpha^*, t) = \eta^2 \int e^{-i\eta(\xi\alpha + \xi^*\alpha^*)} C^{(w)}(\xi, t) \frac{d^2\xi}{\pi}, \quad (58)$$

que es la función de distribución de Wigner.

Podemos eliminar el factor  $\eta$  definiendo  $\xi' = \eta\xi$  y  $\xi^{*'} = \eta\xi^*$ .

Normalmente la distribución de Wigner se expresa en términos de  $p$  y  $q$ , introduciendo un cambio de variables

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega q + ip) \quad (59)$$

Se define  $P(p, q, t)$  en términos de  $W(\alpha, \alpha^*, t)$  tal que

$$\int W(\alpha, \alpha^*, t) \frac{d^2\alpha}{\pi} = \int \int_{-\infty}^{\infty} P(p, q, t) dp dq = 1, \quad (60)$$

se llega a que

$$P(p, q, t) = W(\alpha, \alpha^*, t) \frac{1}{2\pi\hbar} = \frac{1}{4\pi^2} \int e^{-i(\lambda q + \mu p)} C^{(w)}(\lambda, \mu, t) d\lambda d\mu, \quad (61)$$

donde  $\lambda = \eta(\xi + \xi^*)\sqrt{\omega/2\hbar}$  y  $\mu = i\eta(\xi - \xi^*)/\sqrt{2\hbar\omega}$ .

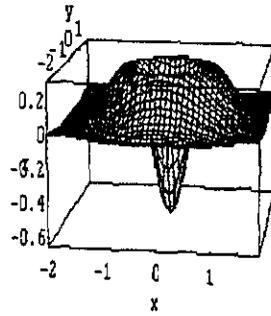


Figura 6: Función de Wigner para el estado de número  $n=1$ .

Para un estado coherente [20]  $\alpha(q_0, p_0)$ ,  $P(p, q) \propto \exp[-(q - q_0)^2 - (p - p_0)^2]$ . Esta gráfica se muestra en la figura 7. En la figura 6 se muestra la distribución de Wigner para el estado de número  $n=1$ , notar que es negativa en el origen, lo que indica la naturaleza no clásica de ese estado.

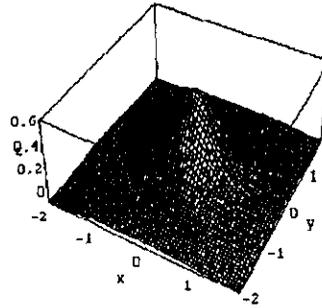


Figura 7: Función de Wigner para el estado de  $\alpha=0$ .

Una superposición de estados coherentes en  $q_0$  y en  $-q_0$  (estados de gato  $|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle$ )

$$P(p, q) \propto \exp[-(q - q_0)^2 - p^2] + \exp[-(q + q_0)^2 - p^2] + 2 \exp(-q^2 - p^2) \cos(2pq_0)$$

posee dos picos en las amplitudes coherentes  $\pm q_0$ , como para los estados individuales, sin embargo, la estructura de interferencia en medio de los picos muestra la superposición cuántica de ambas amplitudes (figura 9), mostrando oscilaciones rápidas con frecuencia dada por la distancia  $2q_0$ . La función de Wigner se hace negativa, lo que indica el comportamiento no clásico del estado de gato de Schrödinger.

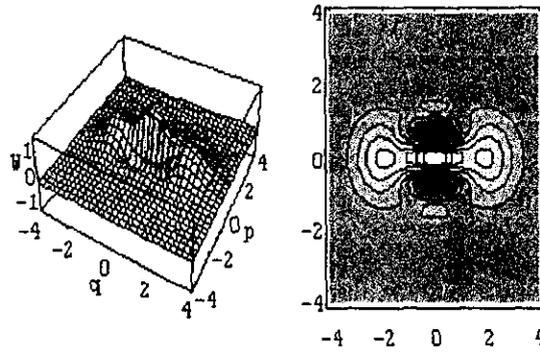


Figura 8: Estado de gato  $|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle$  en  $q_0 = \pm 2$ .  
 $P(p, q) \propto \exp[-(q - q_0)^2 - p^2] + \exp[-(q + q_0)^2 - p^2] + 2 \exp(-q^2 - p^2) \cos(2pq_0)$ .

La función de distribución de Wigner puede obtenerse también a partir de las funciones  $Q_k$  [21, 22] que se definen como

$$Q_k(\alpha) = \langle k | D^\dagger(\alpha) \rho D(\alpha) | k \rangle. \quad (62)$$

donde  $D(-\alpha) = D^\dagger(\alpha) = \exp(\alpha^\dagger a - \alpha a^\dagger)$ .

Notar que  $Q_0(\alpha)/\pi$  es la quasi distribución de probabilidad  $Q$ . Reescribiendo (62), obtenemos

$$\begin{aligned} Q_k(\alpha) &= \frac{1}{k!} \langle 0 | a^k D^\dagger(\alpha) \rho D(\alpha) (a^\dagger)^k | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{k!} \langle \alpha | (a - \alpha)^k \rho (a^\dagger - \alpha^\dagger)^k | \alpha \rangle \\ &= \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2k}}{k!} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{j,j'=0}^k \frac{(\alpha^*)^{n-j} \alpha^{m-j'}}{n!m!} \\ &\times (-1)^{-j-j'} \binom{k}{j} \binom{k}{j'} \sqrt{(m+j)!(n+j)!} \rho_{n+j', m+j}. \end{aligned} \quad (63)$$

La función de Wigner para cada punto  $\alpha$  en el plano complejo puede determinarse por la suma simple

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Q_n(\alpha). \quad (64)$$

En la práctica la suma se lleva hasta un  $n_{max}$  finito.

El grupo del NIST en la referencia [23] reporta la construcción de las funciones de Wigner para los estados de movimiento de un ión confinado en una trampa de Paul a partir de las  $Q_k$  para el estado  $|n=1\rangle$  y un estado coherente de  $(\alpha \simeq 1.5)$ . Para el estado  $|n=1\rangle$ , toman  $n_{max} = 3$ .

## 4 Acoplamiento entre el estado interno y de movimiento en un ión confinado

En este capítulo se describe el mecanismo de dispersión Raman de dos fotones ampliamente utilizado por el grupo de NIST para generar estados cuánticos de movimiento de iones. Primero describiremos brevemente los efectos que una onda electromagnética plana tiene sobre un átomo y como esta interacción acopla el estado de movimiento con los estados interno. Después describiremos la forma en que la dispersión inelástica de los fotones puede usarse para alterar y enredar estos estados.

### 4.1 Estados de movimiento e internos del ión

En este capítulo se trata el caso particular en el que el ión se encuentra confinado en un potencial tipo oscilador armónico estático. Este podría corresponder al oscilador con la frecuencia secular de una trampa de Paul en cuyo caso estamos ignorando al micromovimiento. El hamiltoniano para el movimiento en la dirección  $i$  está dado por

$$H_{cm} = \hbar\omega_i \hat{n}_i \quad (65)$$

$$i = x, y, z$$

donde  $\hat{n}_i = a_i^\dagger a_i$ ,  $a_i$  y  $a_i^\dagger$  son los operadores de destrucción y creación del oscilador armónico para un modo en la dirección  $i$  (no se tomó en cuenta la energía del vacío  $\hbar\omega_i/2$ ). El operador para la posición  $x_i$  está dado por

$$x_i = x_i^0 (a_i + a_i^\dagger), \quad (66)$$

donde  $x_i^0 = (\hbar/2m\omega_i)^{1/2}$  coincide con la dispersión de la función de onda del punto cero (vacío):  $x_i^0 = {}_{cm} \langle 0 | x_i^2 | 0 \rangle_{cm}^{1/2}$ . Entonces un estado puro general de movimiento en una dirección ( $i = x, y, z$ ) puede ser escrito como

$$\Psi_{mov} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-in_i\omega_i t} |n_i\rangle_{cm}, \quad (67)$$

donde los  $C_n$  son complejos y  $|n_i\rangle_{cm}$  es el estado propio para una dirección del hamiltoniano de oscilación  $H_{cm}$ .

En cuanto al estado interno del ión, nos interesa la situación donde sólo intervienen dos estados. En este caso resulta conveniente representar el sistema de dos niveles en su analogía con el momento magnético de un espín de  $1/2$  en un campo magnético estático. En esta representación equivalente, asumimos que un momento magnético (ficticio)  $\vec{\mu} = \mu_M \vec{S}$  (donde  $\vec{S}$  es el operador de espín ( $S = 1/2$ )) es puesto en un campo magnético  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ . El Hamiltoniano puede ser escrito como

$$H_i = \hbar\omega_0 S_z, \quad (68)$$

donde  $S_z$  es el operador para la componente z del espín y  $\omega_0 = -\mu_M B_0/\hbar$  es la frecuencia de resonancia. Típicamente la frecuencia de resonancia interna será mucho más grande que cualquier frecuencia de modo de movimiento  $\omega_0 \gg \omega_z$ . Llamamos a los estados internos  $|J\rangle = |\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$  que representan espín hacia arriba y espín hacia abajo, respectivamente, y, para conveniencia, asumiremos  $\mu_M < 0$  de tal manera que la energía del estado  $|\uparrow\rangle$  es mayor que la del estado  $|\downarrow\rangle$ .

$$H_i |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0 |\downarrow\rangle, \quad (69)$$

$$H_i |\uparrow\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 |\uparrow\rangle. \quad (70)$$

Un estado puro general del sistema de dos niveles está dado por

$$\Psi_i = C_\downarrow e^{i\frac{\omega_0 t}{2}} |\downarrow\rangle + C_\uparrow e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}} |\uparrow\rangle, \quad (71)$$

donde  $|C_\downarrow|^2 + |C_\uparrow|^2 = 1$ .

Los operadores de ascenso y descenso son  $S_+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$  y  $S_- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$ .

El operador de evolución para los estados internos es  $U_i = e^{-i\omega_0 S_z t}$ , por lo que  $U^\dagger S_+ U = S_+ e^{i\omega_0 t}$  y  $U^\dagger S_- U = S_- e^{-i\omega_0 t}$ .

En el contexto visto en esta sección el ion quedaría descrito en general por una función de onda

$$|\Psi\rangle = \sum_{J=\uparrow,\downarrow} \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} C_{M_z, \vec{n}}(t) |J\rangle |\vec{n}\rangle_{cm} \quad (72)$$

donde

$$|\vec{n}\rangle_{cm} = |n_x\rangle_{cm} |n_y\rangle_{cm} |n_z\rangle_{cm}. \quad (73)$$

## 4.2 Interacción del ión con campos electromagnéticos aplicados (adicionales a los de la trampa)

Primero se considera la situación donde se aplica un solo campo electromagnético (clásico, periódico) a un ión restringido a moverse en la dirección  $x_i$  en un potencial armónico con frecuencia  $\omega_i$ . Se consideran situaciones donde los campos causan transiciones entre estados internos, de movimiento, o ambos (enredamiento). Si suponemos que los niveles internos se encuentran acoplados por campos eléctricos, el Hamiltoniano de interacción es (ver apéndice C)

$$H_I = -\vec{\mu}_d \cdot \vec{E}(x_i, t), \quad (74)$$

donde  $\vec{\mu}_d$  es el operador de dipolo eléctrico para la transición interna y  $\vec{E}$  es una onda plana propagándose sobre la dirección  $x_i$  y polarizada en la dirección  $x_j$  ( $i \neq j$ ),  $\vec{E} = E_1 \hat{x}_j \cos(k_i x_i - \omega t + \phi) = E_1 \hat{x}_j (\exp(i(k_i x_i - \omega t + \phi)) + c.c.)/2$ , donde  $\omega$  es la frecuencia,  $k$  es el número de onda  $2\pi/\lambda$  y  $\lambda$  es la longitud de onda.

En el análogo equivalente de espín 1/2, se asume que un campo magnético que se propaga sobre la dirección  $x_i$  y que está polarizado en la dirección  $x_j$  ( $j \neq i$ )  $\vec{B} = B_1 \hat{x}_j \cos(k_i x_i - \omega t + \phi)$ , interactuando con el espín ficticio  $\vec{\mu} = \mu_M \vec{S}$ . Para un átomo de dos niveles (o espín 1/2) podemos expresar a  $\vec{\mu}$  como  $\vec{\mu} = (\uparrow |\vec{\mu}| \downarrow) S_+ + (\downarrow |\vec{\mu}| \uparrow) S_-$ . Entonces, para el análogo al espín, la ecuación (76) se reemplaza por:

$$H_I = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(x_i, t) = \hbar \Omega (S_+ + S_-) (e^{i(k_i x_i - \omega t + \phi)} + e^{-i(k_i x_i - \omega t + \phi)}), \quad (75)$$

donde  $\hbar \Omega = -\mu_M B_1/4$  (o  $-\mu_d E_1/4$  para un dipolo eléctrico). Asumiremos que los tiempos de vida de los niveles son grandes; en este caso, el espectro de las transiciones excitadas por la onda está bien resuelto si  $\Omega$  es suficientemente pequeño.

Se puede transformar al esquema de interacción (IP), donde se supone que  $H_0 = H_i + H_{osc}$  y  $V_{int} = H_I$ . En esta representación tenemos  $H \rightarrow H'_I = U_0^\dagger(t) H_I U_0(t)$  donde  $U_0(t) = \exp(-i(H_0/\hbar)t)$  ( $H_0 = H_{cm} + H_i$ ). Si se hace la aproximación de onda rotante, es decir, despreciando términos  $\exp(\pm i(\omega + \omega_0)t)$ , obtenemos (ver Apéndice B)

$$H'_I = \hbar \Omega [S_+ \exp(i\eta_i [a e^{-i\omega_i t} + a^\dagger e^{i\omega_i t}]) e^{i(-\delta t + \phi)} + c.c.] \quad (76)$$

donde  $\delta = \omega - \omega_0$  y  $\eta_i = k\sqrt{\hbar/2m\omega_i}$  es el parámetro Lamb-Dicke

Cuando el criterio de confinamiento Lamb-Dicke se satisface, la ecuación anterior puede desarrollarse en serie de Taylor:

$$H'_I = \hbar \Omega [S_+ \{1 + i\eta_i (a_i e^{-i\omega_i t} + a_i^\dagger e^{i\omega_i t}) - \frac{\eta_i^2}{2} (a_i e^{-i\omega_i t} + a_i^\dagger e^{i\omega_i t})^2 + \dots\} e^{i(-\delta t + \phi)} + c.c.] \quad (77)$$

se obtienen términos de tipo  $\eta_i a_i \exp i(-\omega_i t - \delta t)$ ,  $\eta_i^2 a_i^2 \exp i(-2\omega_i t - \delta t)$ ,  $\eta_i a_i^\dagger \exp i(\omega_i t - \delta t)$ , por lo que dependiendo de la frecuencia de la radiación va a ser el tipo de interacción dominante, ya que el término en el que se cancelen las exponenciales será el de más peso. Esto se ve más claramente al considerar los elementos de matriz

$$\langle J', n'_i | H'_I | J, n_i \rangle \quad (78)$$

donde como antes  $J$  denota los estados internos y  $n$  los del centro de masa. El orden  $n'_i - n_i$  del acoplamiento vibracional se selecciona sintonizando la frecuencia del campo (la diferencia de frecuencias  $\delta$ ). Por ejemplo, si el campo se sintoniza a la primera banda "roja" ( $\delta = -\omega_i$ ), podemos aproximar (escogiendo  $\phi = -\pi/2$ )

$$H'_I \simeq \hbar \eta_i \Omega (S_+ a_i + S_- a_i^\dagger). \quad (79)$$

Este hamiltoniano coincide con el de Jaynes-Cummings que describe el acoplamiento de un átomo de dos niveles a un solo modo del campo de radiación

(cuantizado). El problema que se describió, el acoplamiento de un sólo átomo de dos niveles al movimiento (armónico) del átomo, es totalmente análogo; la diferencia es que el oscilador armónico asociado con un solo modo del campo de radiación en QED de cavidades, es reemplazado por el de movimiento del átomo.

Las ecuaciones para las amplitudes ( $C_{\uparrow,1}$ ) de la función de onda se obtienen de la ecuación de Schrödinger  $i\hbar\partial\Psi/\partial t = H_I\Psi$ . Nos interesan las transiciones resonantes, es decir, donde  $\delta = \omega_i(n'_i - n_i)$ . Sin embargo, debido a que queremos considerar realizaciones no ideales, supondremos que  $\delta = \omega_i(n'_i - n_i) + \Delta$ , donde  $\Delta \ll \omega_i, \Omega$ .

Los coeficientes son [24]

$$\dot{C}_{\uparrow, n'_i} = -i^{1+|n_i - n'_i|} e^{-i(\Delta t - \phi)} \Omega_{n'_i, n_i} C_{\downarrow, n_i}, \quad (80)$$

$$\dot{C}_{\downarrow, n_i} = -i^{1-|n_i - n'_i|} e^{i(\Delta t - \phi)} \Omega_{n'_i, n_i} C_{\uparrow, n'_i}, \quad (81)$$

donde  $\Omega_{n_i, n'_i}$  es la frecuencia de Rabi entre  $n_i$  y  $n'_i$ , está dada por

$$\Omega_{n'_i, n_i} = \Omega |\langle n'_i | e^{i\eta_i(a_i + a_i^\dagger)} | n_i \rangle| = \quad (82)$$

$$\Omega \exp[-\eta_i^2/2] (n_i < n'_i) / n_i > !)^{1/2} \eta_i^{|n'_i - n_i|} L_{n_i < n'_i}^{|n_i - n'_i|}(\eta_i^2)$$

donde  $n_i < (n_i >)$  es el menor (mayor) de  $n'_i$  y  $n_i$ , y  $L_{n_i}^\alpha$  es el polinomio generalizado de Laguerre

$$L_n^\alpha(X) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} X^m / m!. \quad (83)$$

En el límite Lamb-Dicke, que corresponde a la condición  $\langle \Psi_{mov} | k^2 z^2 | \Psi_{mov} \rangle \ll 1$ ,  $\eta \ll 1$ , (pero el inverso no es necesariamente cierto) podemos evaluar  $\Omega_{n, n'}$  en el orden más bajo

$$\Omega_{n'_i, n_i} = \Omega_{n_i, n'_i} = \Omega \eta_i^{|n'_i - n_i|} (n_i > ! / n_i < !)^{1/2} (|n_i - n'_i|!)^{-1}. \quad (84)$$

Nos interesan principalmente tres tipos de transiciones: el acarreador donde ( $n_i = n'_i$ ), la primera banda roja ( $n'_i = n_i - 1$ ) y la primera banda azul ( $n'_i = n_i + 1$ ) cuyas frecuencias de Rabi son  $\Omega$ ,  $\eta\Omega n_i^{1/2}$  y  $\eta\Omega(n_i + 1)^{1/2}$  respectivamente (en el límite Lamb-Dicke).

### 4.3 Transiciones Raman estimuladas de dos fotones

Las transiciones Raman se refieren a transiciones inelásticas. Pero cuando hablamos de transiciones Raman de dos fotones nos referimos a las transiciones que se dan entre dos niveles que no se encuentran acoplados a través de una transición dipolar, sino a través de un tercer nivel que actúa como puente [24, 25, 26] como se muestra en la figura 9. Asumimos que el láser 1 tiene acoplamiento sólo entre el estado intermediario  $|0\rangle$  y el estado  $|2\rangle$  ( $|1\rangle$ ). Similarmente, el láser 2

tiene acoplamiento sólo entre el estado  $|0\rangle$  y el estado  $|1\rangle$  ( $|\uparrow\rangle$ ); experimentalmente ésto se logra ajustando las polarizaciones de los láseres.

Los dos campos clásicos de los láseres son

$$\vec{E}_i = \hat{e} E_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_{Li} t + \phi_i), i \in 1, 2. \quad (85)$$

acoplan el nivel  $|0\rangle$  a los niveles  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$ , con frecuencias de "acoplamiento"

$$g_{01} = |\vec{\mu}_{0J} \cdot \vec{E}_{0J}|/2\hbar \quad (86)$$

donde  $\vec{\mu}_{0J} = \langle 0|\vec{\mu}|J\rangle$  ( $\vec{\mu} = e\vec{r}$ ), es el elemento de matriz del dipolo entre los estados  $|0\rangle$  y  $|J\rangle$  ( $J = 1, 2$ ).

Las frecuencias de los dos haces son iguales a

$$\omega_1 = \omega_{01} - \Delta - \delta, \quad (87)$$

$$\omega_2 = \omega_{02} - \Delta. \quad (88)$$

donde  $\omega_{0J}$  es la frecuencia de transición entre los estados  $|0, n\rangle$  y  $|J, n\rangle$ .

Usualmente se elige  $\delta$  como múltiplo entero de una de las frecuencias seculares del movimiento del centro de masa, por ejemplo,  $\delta = -\omega_x$  para enfriar en la dirección  $x$ .

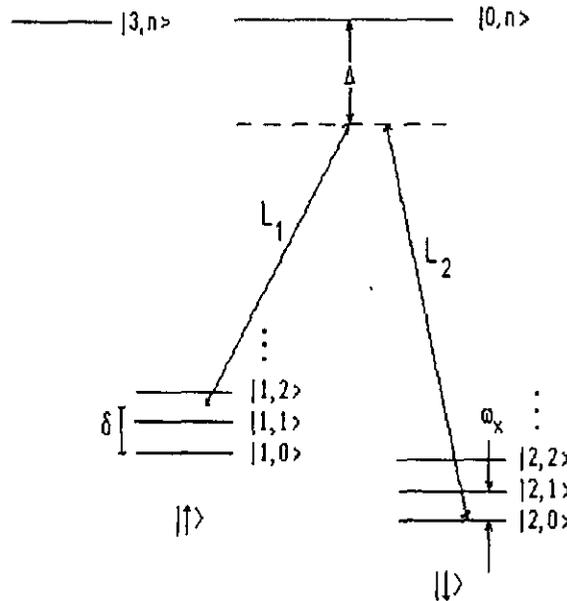


Figura 9: Transición Raman, los niveles de energía se denotan como  $|J, n_x\rangle$ , donde  $J = 0, 1, 2$  denota el estado interno y  $n_x$  la vibración del centro de masa en la dirección  $x$ .

La función de onda se escribe como

$$\Psi = \sum_{J,\bar{n}} C_{J,\bar{n}} |J\rangle |\bar{n}\rangle_{cm}. \quad (89)$$

El comportamiento del sistema puede ser descrito por las ecuaciones de amplitud

$$\frac{dC_{J\bar{n}}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \sum_{J'\bar{n}'} C_{J'\bar{n}'} V_{J\bar{n},J'\bar{n}'} - \frac{\gamma_J}{2} C_{J\bar{n}}. \quad (90)$$

donde  $V_{J\bar{n},J'\bar{n}'}$  es el elemento de matriz de la perturbación  $-\vec{\mu} \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$  y  $\gamma_J = \gamma\delta_{J,0}$  es el decaimiento espontáneo de  $|0\rangle$ .

El elemento de matriz de la interacción toma la forma

$$V_{J\bar{n},J'\bar{n}'} = \langle J|\vec{\mu}|J'\rangle_{cm} \langle \bar{n}|U^\dagger [Re\vec{E}]U|\bar{n}\rangle_{cm}. \quad (91)$$

donde  $U$  es el operador de evolución determinado por el Hamiltoniano tipo oscilador de la trampa.

En el caso particular que se escojan los estados internos  $J$  como estados  $(F, m_F)$ , donde  $F$  es el momento angular total y  $m_F$  es su proyección sobre un eje determinado el elemento de matriz del operador de dipolo puede evaluarse usando el teorema de Wigner-Eckart [27]

$$\langle J|\vec{\mu}|J'\rangle = C_{F_J,1,F_{J'}}^{M_J,K,M_{J'}} \hat{e}^{(K)*} \langle J||\mu||J'\rangle e^{i(E_J - E_{J'})t/\hbar}, \quad (92)$$

donde

$$e^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x + i\hat{e}_y)$$

$$e^{(0)} = \hat{e}_z$$

$$e^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x - i\hat{e}_y)$$

En los experimentos reportados, los estados internos  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  resultan de la estructura hiperfina del estado base del átomo de  $^9Be^+$ :

$$|0\rangle = {}^2P_{3/2}(F=2, M_F=2)$$

$$|1\rangle = {}^2S_{1/2}(F=1, M_F=1)$$

$$|2\rangle = {}^2S_{1/2}(F=2, M_F=2)$$

Para ser específicos consideramos el caso en el que el láser 1 se encuentra polarizado en dirección  $\pi$  ( $\hat{e}^{(0)}$ ), y el láser 2 está polarizado sobre la dirección  $\hat{e}_y$ .

$$\begin{aligned} Re\vec{E} &= -\frac{|E_1|}{2} \left( \frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{e}^{(1)} + \hat{e}^{(-1)}) \right) \left[ e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \phi_1)} + e^{-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \phi_1)} \right] \\ &+ \frac{|E_2|}{2} \hat{e}^{(0)} \left[ e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t + \phi_2)} + e^{-i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t + \phi_2)} \right] \end{aligned} \quad (93)$$

Al sustituir la expresión anterior en las ecuaciones (90), (91) y (92) y escribiendo  $(E_0 - E_{1,2})/\hbar = \omega_{01,02}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{C}_{0,\bar{n}} &= -\frac{\gamma}{2}C_{0,\bar{n}} + \frac{1}{2\sqrt{2}\hbar}\langle 0||\mu||1\rangle e^{i\omega_{01}t}|E_1|\sqrt{\frac{3}{5}}_{cm} \langle \bar{n}|U^\dagger e^{i(\bar{k}_1\cdot\bar{r}-\omega_1t+\phi_1)} \\ &+ e^{-i(\bar{k}_1\cdot\bar{r}-\omega_1t+\phi_1)}U|\bar{n}'\rangle_{cm}C_{1,\bar{n}'} - \frac{i}{2\hbar}\langle 0||\mu||2\rangle e^{i\omega_{02}t}|E_2| \\ &\times \sqrt{\frac{2}{3}}_{cm} \langle \bar{n}|U^\dagger e^{i(\bar{k}_2\cdot\bar{r}-\omega_2t+\phi_2)} + e^{-i(\bar{k}_2\cdot\bar{r}-\omega_2t+\phi_2)}U|\bar{n}'\rangle_{cm}C_{2,\bar{n}'} \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{1,\bar{n}} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}\hbar}\langle 0||\mu||1\rangle^* e^{-i\omega_{01}t}|E_1|\sqrt{\frac{3}{5}}_{cm} \langle \bar{n}|U^\dagger e^{i(\bar{k}_1\cdot\bar{r}-\omega_1t+\phi_1)} \\ &+ e^{-i(\bar{k}_1\cdot\bar{r}-\omega_1t+\phi_1)}U|\bar{n}'\rangle_{cm}C_{0,\bar{n}} \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{2,\bar{n}} &= -\frac{i}{2\hbar}\langle 0||\mu||2\rangle^* e^{-i\omega_{02}t}|E_2|\sqrt{\frac{2}{3}}_{cm} \langle \bar{n}|U^\dagger e^{i(\bar{k}_2\cdot\bar{r}-\omega_2t+\phi_2)} \\ &+ e^{-i(\bar{k}_2\cdot\bar{r}-\omega_2t+\phi_2)}U|\bar{n}'\rangle_{cm}C_{0,\bar{n}} \end{aligned} \quad (96)$$

al despreciar los términos del tipo  $\pm 2\omega_{01,02}$  en las ecuaciones anteriores

$$\begin{aligned} \dot{C}_{0,\bar{n}} &= -\frac{\gamma}{2}C_{0,\bar{n}} + \frac{1}{2\sqrt{2}\hbar}\langle 0||\mu||1\rangle|E_1|\sqrt{\frac{3}{5}}_{cm} \langle \bar{n}|U^\dagger \\ &\times e^{i(\bar{k}_1\cdot\bar{r}+(\Delta+\delta)t+\phi_1)}U|\bar{n}'\rangle_{cm}C_{1,\bar{n}'} - \frac{i}{2\hbar}\langle 0||\mu||2\rangle \\ &\times |E_2|\sqrt{\frac{2}{3}}_{cm} \langle \bar{n}|U^\dagger e^{i(\bar{k}_2\cdot\bar{r}+\Delta t+\phi_2)}U|\bar{n}'\rangle_{cm}C_{2,\bar{n}'} \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{1,\bar{n}} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}\hbar}\langle 0||\mu||1\rangle^*|E_1|\sqrt{\frac{3}{5}}_{cm} \\ &\times \langle \bar{n}|U^\dagger e^{-i(\bar{k}_1\cdot\bar{r}+(\Delta+\delta)t+\phi_1)}U|\bar{n}'\rangle_{cm}C_{0,\bar{n}} \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{2,\bar{n}} &= -\frac{i}{2\hbar}\langle 0||\mu||2\rangle^*|E_2|\sqrt{\frac{2}{3}}_{cm} \\ &\times \langle \bar{n}|U^\dagger e^{-i(\bar{k}_2\cdot\bar{r}+\Delta t+\phi_2)}U|\bar{n}'\rangle_{cm}C_{0,\bar{n}} \end{aligned} \quad (99)$$

Si escribimos

$$C_{0,\bar{n}} = \tilde{C}_{0,\bar{n}}(t)e^{i\Delta t} \quad (100)$$

Se pueden suprimir las oscilaciones rápidas de  $\Delta$  para poder resolver numéricamente.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{C}}_{0,\bar{n}} &= -[\frac{\gamma}{2} + i\Delta]\tilde{C}_{0,\bar{n}} + \frac{1}{2\sqrt{2}\hbar}\langle 0||\mu||1\rangle|E_1|\sqrt{\frac{3}{5}}_{cm} \langle \bar{n}|U^\dagger \\ &\times e^{i(\bar{k}_1\cdot\bar{r}+\delta t+\phi_1)}U|\bar{n}'\rangle_{cm}C_{1,\bar{n}'} - \frac{i}{2\hbar}\langle 0||\mu||2\rangle \end{aligned}$$

$$\times |E_2| \sqrt{\frac{2}{3}} \langle \vec{n} | U^\dagger e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \phi_2)} U | \vec{n}' \rangle_{cm} C_{2, \vec{n}'} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{1, \vec{n}} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}\hbar} \langle 0 | |\mu| | 1 \rangle^* |E_1| \sqrt{\frac{3}{5}} \\ &\times \langle \vec{n} | U^\dagger e^{-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \delta t + \phi_1)} U | \vec{n}' \rangle_{cm} \tilde{C}_{0, \vec{n}'} \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{2, \vec{n}} &= -\frac{i}{2\hbar} \langle 0 | |\mu| | 2 \rangle^* |E_2| \sqrt{\frac{2}{3}} \\ &\times \langle \vec{n} | U^\dagger e^{-i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \phi_2)} U | \vec{n}' \rangle_{cm} \tilde{C}_{0, \vec{n}'} \end{aligned} \quad (103)$$

En trabajos previos se asumió que  $\delta \ll g_{0J}^2, \Delta$ . En esta aproximación el estado  $|0\rangle$  puede ser eliminado adiabáticamente, es decir, se considera que  $\tilde{C}_0$  varía poco y con lentitud, de manera que  $\dot{\tilde{C}}_{0, \vec{n}}$  es despreciable y la ecuación (99) se reduce a una ecuación algebraica. Sustituyendo la expresión resultante para  $\tilde{C}_{0, \vec{n}}$  y realizando la aproximación de onda rotante obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{C}_{1, \vec{n}}^{(0)} &= -\left(\frac{\gamma}{2} + i\Delta\right)^{-1} |g_{01}|^2 \langle \vec{n} | U^\dagger U | \vec{n}'' \rangle C_{1, \vec{n}''} \\ &+ i g_{01} g_{02} \langle \vec{n} | U^\dagger e^{i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} + (\phi_2 - \phi_1)} U | \vec{n}'' \rangle e^{-i\delta t} C_{2, \vec{n}''} \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{2, \vec{n}}^{(0)} &= -\left(\frac{\gamma}{2} + i\Delta\right)^{-1} |g_{02}|^2 \langle \vec{n} | U^\dagger U | \vec{n}'' \rangle C_{2, \vec{n}''} \\ &+ i g_{01} g_{02} \langle \vec{n} | U^\dagger e^{-i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} + (\phi_2 - \phi_1)} U | \vec{n}'' \rangle e^{i\delta t} C_{1, \vec{n}''} \end{aligned} \quad (105)$$

donde  $g_{01} = |E_1| \sqrt{3/5} \langle 1 | |\mu| | 0 \rangle / (2\hbar)$ ,  $g_{02} = |E_2| \sqrt{2/3} \langle 2 | |\mu| | 0 \rangle / (2\hbar)$ ,  $\eta_k = (\delta \vec{k} \cdot \hat{x} + \delta \vec{k} \cdot \hat{y} + \delta \vec{k} \cdot \hat{z})$ ,  $\delta k = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$  y  $\delta = \omega_{01} - \omega_{02} + \omega_2 - \omega_1$ .

Si en las ecuaciones anteriores sustituimos  $\gamma = 0$ ,  $\phi_1 - \phi_2 = 0$  y realizamos la aproximación secular  $U = \exp(-i\omega_i a_i^\dagger a_i)$ , entonces la dependencia temporal de los elementos de matriz de interacción va a ser  $e^{i\omega_i(n_i - n_i'')t}$ , por lo que los términos que van a tener más peso serán aquellos en los que se elimine esa dependencia temporal con  $e^{i\delta t}$ .

Si  $\delta = \omega_i(n_i'' - n_i)$ , despreciando los términos oscilantes

$$\dot{C}_{1, n_i''}^{(0)} = i \frac{|g_{01}|^2}{\Delta} C_{1, n_i''} - \Omega_{n_i'', n_i} C_{2, n_i} \quad (106)$$

$$\dot{C}_{2, n_i}^{(0)} = i \frac{|g_{02}|^2}{\Delta} C_{2, n_i} - \Omega_{n_i'', n_i}^* C_{1, n_i''} \quad (107)$$

donde

$$\Omega_{n_i'', n_i} = \frac{g_{01} g_{02}}{\Delta} \langle n_i'' | e^{in_i(a_k + a_k^\dagger)} | n_i \rangle, \quad (108)$$

Los términos  $|g_{01}|^2/\Delta$  y  $|g_{02}|^2/\Delta$  son los desplazamientos ópticos de Stark de los niveles  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  respectivamente, que pueden ser eliminados de las ecuaciones para las amplitudes incluyéndolos en las definiciones de las energías para los

estados  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$ , o equivalentemente, sintonizando la diferencia de frecuencias  $\delta$  de los haces Raman para compensar por esos desplazamientos.

Estas ecuaciones muestran una dependencia en la diferencia de los vectores de onda de los láseres de la forma  $\vec{k}_2 - \vec{k}_1$ . Esto es, se inducen transiciones en los estados vibracionales  $|n_x\rangle_{cm} \rightarrow |n'_x\rangle_{cm}$  con una distorsión menor en el movimiento vibracional sobre los ejes  $y, z$  al escoger  $\delta\vec{k} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$  sobre el eje  $x$ .

En este caso el Hamiltoniano efectivo que corresponde al de la ecuación (75) se reemplaza por

$$H_I = \hbar\Omega(S_+ + S_-)[e^{i[(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} + (\omega_1 - \omega_2)t + (\phi_2 - \phi_1)]} + c.c.], \quad (109)$$

Al realizar un tratamiento similar al anterior (que se hizo para la interacción con un campo electromagnético), pasando a la IP (con la aproximación de onda rotante) obtenemos

$$H_I = \hbar[\Omega S_+ e^{i[(k_2 - k_1)x_i^0(a_i e^{-i\omega_i t} + a_i^\dagger e^{i\omega_i t}) - \delta t + (\phi_2 - \phi_1)]} + c.c.], \quad (110)$$

El parámetro Lamb-Dicke es  $\eta_i = (k_2 - k_1)x_i^0$ , donde  $x_i^0 = \sqrt{\hbar/2m\omega_i}$ .

Al igual que antes, en el régimen Lamb-Dicke, se puede hacer una expansión en serie de Taylor. Es el mismo caso que el anterior, sólo que se reemplazó  $k$  por  $k_1 - k_2$  y  $\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_0$ . El orden en el acoplamiento vibracional se escoge mediante la diferencia en las frecuencias de los láseres.

Cuando se toman los estados  $|\vec{n}\rangle$  dependientes del tiempo, los elementos de matriz en las ecuaciones (104) y (105) deben reemplazarse por (52), que equivale a tomar una  $\vec{\eta}$  dependiente del tiempo. En la referencia [28] tratan específicamente este problema.

#### 4.4 Manipulación del estado cuántico

Como punto de partida para todas las manipulaciones cuánticas de los estados, se necesitará inicializar el ión o iones en estados puros conocidos. Usando técnicas estándar de bombeo óptico, podemos preparar a los iones en el estado interno  $|\downarrow\rangle$ . Generalmente la inicialización del estado vibracional se hace enfriando el movimiento al punto cero.

#### 4.5 Enfriamiento al estado cero

Cuando un ión es introducido en una trampa electromagnética usualmente su energía es del orden de varios eV, por lo que se utilizan varias etapas para el enfriamiento. Típicamente la primera etapa consiste en permitir que el ión interactúe con un gas (generalmente helio, debido a que es ligero y poco reactivo) a baja presión ( $\simeq 10^{-6}$  mbar) para que pierda energía mediante colisiones. La temperatura baja entonces a la temperatura ambiente.

Las siguientes etapas involucran enfriamiento por medio de láseres.

Mediante enfriamiento Doppler el ión se enfría a su estado base electrónico; las temperaturas mínimas que se obtienen con el enfriamiento Doppler son del orden de 1 mK para iones en trampas de Paul.

El enfriamiento al estado base vibracional se obtuvo recientemente [32] utilizando haces Raman en la etapa final.

La sintonía relativa de los haces Raman es puesta a una banda menor (primera roja) de las transiciones Raman estimuladas entre  $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$ , induciendo principalmente la transición  $|\uparrow\rangle|n_i\rangle_{cm} \leftrightarrow |\downarrow\rangle|n_i - 1\rangle_{cm}$ .

Para enfriamiento efectivo, requerimos [26] que

$$\beta_J = \frac{R_J}{\hbar\omega_i} \ll 1, \quad (111)$$

donde  $R_J = (\hbar k_J)^2 / 2m$  es la energía de retroceso para la transición  $|0\rangle \rightarrow |J\rangle$  ( $J = \uparrow, \downarrow$ ). También se tienen transiciones Raman espontáneas. Cuando  $\beta \ll 1$ , la dispersión espontánea se lleva a cabo predominantemente con  $\Delta n_i = 0$ . Entonces el enfriamiento puede ocurrir por medio de transiciones Raman estimuladas  $|\uparrow\rangle|n_i\rangle_{cm} \rightarrow |\downarrow\rangle|n_i - 1\rangle_{cm}$ , seguidas de transiciones Raman espontáneas  $|\downarrow\rangle|n_i - 1\rangle_{cm} \rightarrow |\uparrow\rangle|n_i - 1\rangle_{cm}$ .

En este caso el enfriamiento por transiciones Raman estimuladas es esencialmente lo mismo que el enfriamiento usando una transición óptica angosta.

#### 4.5.1 Estados de número

Una vez que se inicializa el ión en el estado base vibracional e interno, se crean los estados de número sintonizando los láseres Raman a bandas azules [29], como se vió en la sección anterior.

#### 4.5.2 Cambio en el estado interno (acarreadores)

Si uno desea manipular los estados internos sin afectar los estados de movimiento, se puede utilizar nuevamente la dispersión Raman de dos fotones.

Haciendo que los láseres se propaguen en la misma dirección, i.e.  $\vec{k}_1 - \vec{k}_2 \simeq \vec{0}$  y que su diferencia de frecuencias  $\delta = 0$ .

De esta forma  $e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x}} \simeq 1$ , por lo que las poblaciones de los estados internos oscilan con frecuencia de Rabi.

$$\Omega_{n_i, n_i}^{\uparrow, \downarrow} = \frac{g_{01} g_{02}}{\Delta}. \quad (112)$$

En la siguiente figura se puede apreciar la diferencia entre las frecuencias de Rabi secular y dinámica.

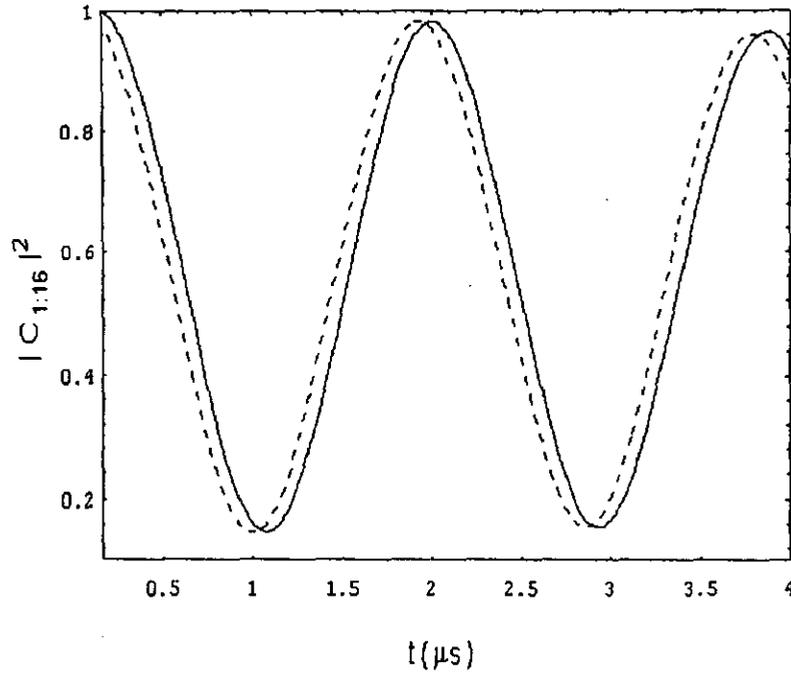


Figura 10: Variación de las poblaciones del estado  $J=1$ ,  $n=16$ . Aproximación secular (línea segmentada) y considerando el micromovimiento (línea continua).

### 4.5.3 Estados coherentes

Podemos crear estados coherentes de movimiento; estos estados son lo más cercanos a estados clásicos de movimiento. Esto puede lograrse si el átomo se encuentra sujeto a una fuerza clásica espacialmente uniforme derivable de un potencial  $-\vec{f}(t) \cdot \vec{x}_i$ . Para un ión que comienza en el estado  $|n_i = 0\rangle$ , esta fuerza crea un desplazamiento que lleva a un estado coherente  $|\alpha\rangle$  definido por  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  donde  $\alpha$  es un número complejo.

Esta fuerza clásica puede obtenerse aplicando un campo eléctrico homogéneo que oscila con frecuencia  $\omega$ :  $\vec{E}(t) = \hat{x}_i E_{x_i} \sin(\omega t - \phi)$ . El Hamiltoniano de interacción correspondiente (en la visión (IP) de interacción para el movimiento  $U = e^{-i\omega_i a_i^\dagger a_i}$ , no se afectan los estados internos) está dado por

$$H_I' = -qE_i x_i^0 (a_i e^{-i\omega_i t} + a_i^\dagger e^{i\omega_i t}) \sin(\omega t - \phi), \quad (113)$$

donde podemos escribir  $\sin(\omega t - \phi) = -i(e^{i(\omega t - \phi)} - e^{-i(\omega t - \phi)})/2$ . Al insertar la expresión de  $\sin(\omega t - \phi)$  evaluado en  $\omega = \omega_i$  en la ecuación anterior, y realizando la aproximación de onda rotante RWA (despreciando términos que van como  $\exp(\pm 2\omega_i t)$ ), se obtiene

$$H_I' = i\hbar[\Omega_1 a_i^\dagger - \Omega_1 a_i], \quad (114)$$

donde  $\Omega_1 = -qE_i x_i^0 \exp(i\phi)/(2\hbar)$ . El operador de evolución para el Hamiltoniano anterior es

$$U = e^{-iH_I'(t-t_0)/\hbar} = e^{i(\Omega_1 t) a_i^\dagger - (\Omega_1 t)^* a_i} = D(\Omega_1 t), \quad (115)$$

que corresponde al operador de desplazamiento descrito en el apéndice A (con  $t_0 = 0$ ).

Otra forma de crear un estado coherente a partir del estado  $|0\rangle_{cm}$  es utilizando dispersión Raman efectiva sobre el mismo estado interno, afectando solamente los estados de movimiento <sup>1</sup>. El hamiltoniano efectivo (en la IP de movimiento) equivalente a la ecuación (109) es

$$H_I' = \hbar\Omega [e^{i\eta_i(a_i c^{-i\omega_i t} + a_i^\dagger e^{i\omega_i t})} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i(\phi_2 - \phi_1)} | c.c. ] \quad (116)$$

Si nos encontramos en el régimen Lamb-Dicke, podemos expandir la primera exponencial de la ecuación anterior, si además  $\omega_2 - \omega_1 = \omega_i$ ,  $\phi_2 - \phi_1 = \phi$  y  $\Omega \ll \omega_z$  (utilizando la aproximación de onda rotante).

$$H_I' = \hbar\Omega i\eta_i (a_i^\dagger e^{i\phi} - a_i e^{-i\phi}) \quad (117)$$

Entonces el operador de evolución es

$$U = e^{\Omega\eta_i (a_i^\dagger e^{i\phi} - a_i e^{-i\phi})t} = D(\Omega\eta_i e^{i\phi}t). \quad (118)$$

Sin embargo, en los experimentos hay limitantes que impiden que se creen estados coherentes con módulos arbitrariamente grandes de  $\alpha$ , ya que conforme el desplazamiento es mayor, los efectos no lineales adquieren mayor relevancia.

La ventaja de este método con respecto al anterior es que pueden ser creados estados coherentes para un estado interno predeterminado, mientras que con el mecanismo anterior el estado coherente se obtiene indistintamente del estado interno involucrado.

## 5 Experimento en el NIST (Creación del gato)

En el experimento de la trampa de iones hecho por D. Wineland, y colaboradores [30] en NIST en Boulder, Colorado, un ión de berilio es monitoreado, este es manipulado y detectado de forma muy refinada por secuencias de pulsos laser.

El ión de  ${}^9\text{Be}^+$  es guardado en un resonador coaxial basado en una trampa de Paul ( $r_0 \simeq 170\mu\text{m}$ ,  $z_0 \simeq 130\mu\text{m}$ ). Se aplica un potencial  $V_0 \cos(\Omega_0 t)$  al anillo ( $V_0 \simeq 600\text{V}$ ,  $\Omega_0/2\pi \simeq 231\text{MHz}$ ), produciendo en el pseudopotencial (secular) oscilaciones de frecuencias  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)/2\pi \simeq (11.2, 18.2, 29.8)\text{MHz}$  sobre los ejes principales de la trampa. Una vez que ión  ${}^9\text{Be}^+$  se carga en la trampa, su vida es de aproximadamente 6h (precisión  $< 10^{-8}\text{Pa}$ ).

<sup>1</sup>En este caso las polarizaciones pueden ser  $\sigma^+/\sigma^-$  y  $\sigma^-$  para el ejemplo visto en la sección anterior

donde  $\Omega_1 = -qE_i x_i^0 \exp(i\phi)/(2\hbar)$ . El operador de evolución para el Hamiltoniano anterior es

$$U = e^{-iH'_1(t-t_0)/\hbar} = e^{i(\Omega_1 t) a_i^\dagger - (\Omega_1 t)^* a_i} = D(\Omega_1 t), \quad (115)$$

que corresponde al operador de desplazamiento descrito en el apéndice A (con  $t_0 = 0$ ).

Otra forma de crear un estado coherente a partir del estado  $|0\rangle_{cm}$  es utilizando dispersión Raman efectiva sobre el mismo estado interno, afectando solamente los estados de movimiento <sup>1</sup>. El hamiltoniano efectivo (en la IP de movimiento) equivalente a la ecuación (109) es

$$H'_I = \hbar\Omega [e^{i\eta_i(a_i e^{-i\omega_i t} + a_i^\dagger e^{i\omega_i t})} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} e^{i(\phi_2 - \phi_1)} + \text{c.c.}] \quad (116)$$

Si nos encontramos en el régimen Lamb-Dicke, podemos expandir la primera exponencial de la ecuación anterior, si además  $\omega_2 - \omega_1 = \omega_i$ ,  $\phi_2 - \phi_1 = \phi$  y  $\Omega \ll \omega_z$  (utilizando la aproximación de onda rotante).

$$H'_I = \hbar\Omega i\eta_i (a_i^\dagger e^{i\phi} - a_i e^{-i\phi}) \quad (117)$$

Entonces el operador de evolución es

$$U = e^{\Omega\eta_i (a_i^\dagger e^{i\phi} - a_i e^{-i\phi})t} = D(\Omega\eta_i e^{i\phi}t). \quad (118)$$

Sin embargo, en los experimentos hay limitantes que impiden que se creen estados coherentes con módulos arbitrariamente grandes de  $\alpha$ , ya que conforme el desplazamiento es mayor, los efectos no lineales adquieren mayor relevancia.

La ventaja de este método con respecto al anterior es que pueden ser creados estados coherentes para un estado interno predeterminado, mientras que con el mecanismo anterior el estado coherente se obtiene indistintamente del estado interno involucrado.

## 5 Experimento en el NIST (Creación del gato)

En el experimento de la trampa de iones hecho por D. Wineland, y colaboradores [30] en NIST en Boulder, Colorado, un ión de berilio es monitoreado, este es manipulado y detectado de forma muy refinada por secuencias de pulsos laser.

El ión de  ${}^9\text{Be}^+$  es guardado en un resonador coaxial basado en una trampa de Paul ( $r_0 \simeq 170 \mu\text{m}$ ,  $z_0 \simeq 130 \mu\text{m}$ ). Se aplica un potencial  $V_0 \cos(\Omega_0 t)$  al anillo ( $V_0 \simeq 600\text{V}$ ,  $\Omega_0/2\pi \simeq 231\text{MHz}$ ), produciendo en el pseudopotencial (secular) oscilaciones de frecuencias  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)/2\pi \simeq (11.2, 18.2, 29.8)\text{MHz}$  sobre los ejes principales de la trampa. Una vez que ión  ${}^9\text{Be}^+$  se carga en la trampa, su vida es de aproximadamente 6h (presión  $< 10^{-8}\text{Pa}$ ).

<sup>1</sup>En este caso las polarizaciones pueden ser  $\sigma^+/\sigma^-$  y  $\sigma^-$  para el ejemplo visto en la sección anterior

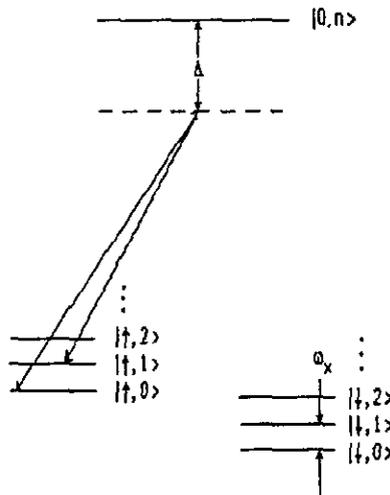


Figura 12: Creación de estados coherentes con transiciones Raman, láseres de desplazamiento ( $|J, n_i\rangle$ ).

El ión tiene dos niveles de energía relevantes, a los que se llama, por simplicidad,  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  ( $|\uparrow\rangle$  y  $|\downarrow\rangle$ ). Son dos niveles hiperfinos del estado base del ión ( $\gamma/2\pi = 19.4\text{MHz}$ ).

El estado  $|2\rangle$  puede ser detectado selectivamente aplicando un láser polarizado de detección  $d$  sintonizado a una frecuencia que acopla este estado a un nivel excitado predeterminado diferente de  $|1\rangle$ . Cuando el ión decae nuevamente a su estado base, emite fotones de fluorescencia. El estado  $|1\rangle$ , que no interactúa con el láser  $d$ , se anuncia por la ausencia de luz dispersada, una medición nula.

A continuación se presentan los pasos que se siguieron en el experimento del NIST para crear el estado de gato.

- Preenfriamiento Doppler (para llevar al régimen Lamb-Dicke).
- Enfriamiento (Raman) por bandas (se obtiene el estado  $|0\rangle_{cm}$  de movimiento el 98% del tiempo en el estado hiperfino  $|2\rangle$ ).
- Pulso  $\pi/2$  con los acarreadores (no cambian el estado externo  $|0\rangle_{cm}$  pero transfieren la mitad de la población al otro nivel hiperfino).
- Láseres de desplazamiento (además de crear un estado coherente en el estado externo, lo enreda con uno de los estados internos).
- Pulso  $\pi$  en los acarreadores (invierten las poblaciones, las cambian de estado hiperfino).
- Desplazamiento
- Medir

El láser de enfriamiento pone al ión en su estado base vibracional. Su función de onda de movimiento es entonces un paquete Gaussiano localizado en el centro de la trampa. El ancho del paquete, unos pocos nanómetros, se debe a las fluctuaciones cuánticas del punto-cero del ión oscilante. El ión frío se encuentra inicialmente en el estado hiperfino  $|2\rangle$ .

Los láseres  $a, b$  (Raman) son los “acarreadores” que inducen oscilaciones de Rabi coherentes entre  $|2\rangle$  y  $|1\rangle$ . Como ya habíamos mencionado, las transiciones en el acarreador no alteran de manera significativa el estado de movimiento debido a que los haces  $ab$  se propagan en la misma dirección ( $\vec{k}_1 - \vec{k}_2 \approx \vec{0}$ ). La frecuencia de Rabi de dos fotones para los haces acarreadores  $ab$  es  $\Omega/2\pi \approx 250\text{kHz}$  que se propagan en la misma dirección, o un tiempo de exposición para un pulso  $\pi$  de aproximadamente  $1\mu\text{s}$ .

Ajustando la duración del pulso se puede obtener cualquier superposición deseada de los dos estados internos del ión.

Los láseres  $b, c$  (Raman) son de desplazamiento, se propagan en direcciones tales que la diferencia de sus vectores de onda  $\delta k$  apunta casi sobre el eje  $x$  de la trampa, por lo que el movimiento en las direcciones  $y, z$  es altamente insensible a ellos.

La diferencia de frecuencias de los láseres se sintoniza cerca de  $\omega_x$ , el efecto es formalmente equivalente a aplicar el operador de desplazamiento al estado de movimiento. Esta fuerza promueve el estado inicial del punto cero  $|0\rangle_{cm}$  a un estado coherente  $|\alpha\rangle$ . La magnitud de  $\alpha$  depende del tiempo de aplicación de los láseres de desplazamiento como  $\alpha = \eta\Omega_d\tau$ , donde  $\eta = 0.205(5)$  es el parámetro de Lamb-Dicke y  $\Omega_d/2\pi \approx 300\text{kHz}$  es la fuerza del acoplamiento de los haces de desplazamiento.

Los láseres de desplazamiento ( $b, c$ ) afectan sólo el estado de movimiento correlacionado con el estado interno  $|1\rangle$ , debido a que el haz  $c$  se encuentra polarizado en  $\sigma^-$  y no puede acoplar el estado interno  $|2\rangle$  a algún estado virtual  ${}^2P_{1/2}$ . Esta selectividad de la fuerza de desplazamiento provee enredamiento cuántico del estado interno con el estado externo de movimiento. Las polarizaciones de los tres haces Raman  $a, b, c$  son  $\pi, \sigma^+/\sigma^-$ , y  $\sigma^-$  respectivamente. El eje de cuantización es definido por un campo magnético de  $0.20\text{mT}$ . Cada haz Raman contiene  $\approx 1\text{mW}$  de potencia a  $\approx 313\text{nm}$ .

La secuencia de pulsos láser para crear un estado de gato de Shrödinger en una descripción ideal [30] se encuentra en la siguiente tabla

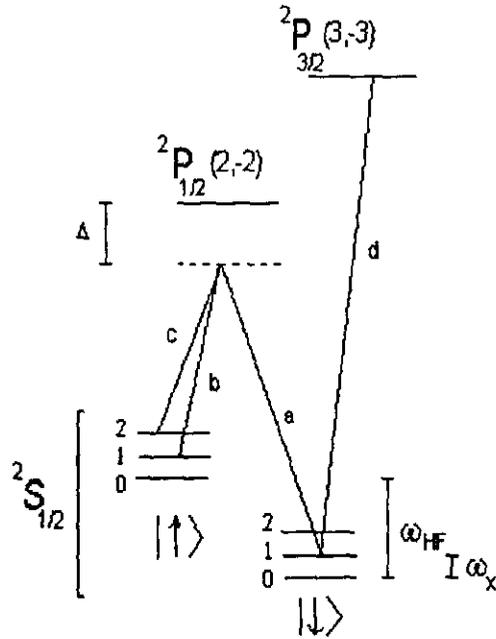


Figura 13: Láseres que se utilizan en la creación del estado de gato. Los niveles de energía se denotan por  $(F, m_F)$ , donde  $F$  es el momento angular total y  $m_F$  es la proyección sobre el eje de cuantización.

Paso	Función	Duración Aproximada ( $\mu s$ )	Fase	Estado Creado (Estado inicial: $ \downarrow_i 0\rangle_e$ )
1	Acarreador, pulso $\pi/2$	0.5	$\mu$	$ \downarrow_i 0\rangle_e - ie^{-i\mu} \uparrow_i 0\rangle_e/\sqrt{2}$
2	Desplazamiento	$\tau$	$-\phi/2$	$ \downarrow_i 0\rangle_e - ie^{-i\mu} \uparrow_i \alpha e^{-i\phi/2}\rangle_e/\sqrt{2}$
3	Acarreador, pulso $\pi$	1.0	$\nu$	$ e^{i(\nu-\mu)}\downarrow_i \alpha e^{-i\phi/2}\rangle_e + ie^{-i\nu} \uparrow_i 0\rangle_e/\sqrt{2}$
4	Desplazamiento	$\tau$	$\phi/2$	$ e^{i(\nu-\mu)}\downarrow_i \alpha e^{-i\phi/2}\rangle_e + ie^{-i\nu} \uparrow_i \alpha e^{i\phi/2}\rangle_e/\sqrt{2}$
5	Acarreador, pulso $\pi/2$	0.5	0	$1/2 \downarrow_i [\alpha e^{-i\phi/2}\rangle_e - ie^{i\delta} \alpha e^{i\phi/2}\rangle_e] - i/2 \uparrow_i [\alpha e^{-i\phi/2}\rangle_e + ie^{i\delta} \alpha e^{i\phi/2}\rangle_e]$

$$\delta = \mu - 2\nu + \pi.$$

El primer paso, un pulso  $\pi/2$  en el acarreador divide la función de onda en una superposición igual de los estados  $|2\rangle|0\rangle_{cm}$  y  $|1\rangle|0\rangle_{cm}$ . En el segundo paso los láseres de desplazamiento excitan el movimiento correlacionado con la componente  $|1\rangle$  a un estado coherente  $|\alpha e^{-i\phi/2}\rangle_{cm}$ . En el paso 3 un pulso  $\pi$  en el acarreador cambia los estados internos de la superposición. En el paso 4, los láseres de desplazamiento excitan el movimiento correlacionado con la componente  $|1\rangle$  (que se encontraba en el edo.  $|0\rangle_{cm}$ ) a un segundo estado coherente

$|\alpha e^{i\phi/2}\rangle_{cm}$ .

El estado creado después del paso 4 es una superposición de dos estados coherentes independientes, cada uno correlacionado (enredado) con un estado interno del ión, en la forma del experimento pensado de Schrödinger.

Finalmente se aplica un pulso  $d$  del laser de detección y se ve la fluorescencia en un pequeño intervalo de tiempo.

Los estados vibracionales  $|\alpha\rangle_{cm}$  evolucionan bajo el hamiltoniano armónico con valores medios cuánticos  $\langle x(t) \rangle$  y  $\langle p(t) \rangle$  idénticos a los dados por las ecuaciones clásicas de movimiento con condiciones iniciales  $x_0 = Re(\alpha)$  y  $p_0 = Im(\alpha)$ . Entonces una superposición de estados coherentes  $|\alpha\rangle_{cm}$  y  $|\alpha\rangle_{cm}$  corresponde a una superposición de estados que clásicamente poseen condiciones iniciales opuestas (gato vivo y muerto en el experimento de Schrödinger).

Se verifica la superposición de los estados coherentes recombinando los paquetes de onda coherentes en el paso final 5. Esto crea el siguiente estado enredado.

$$|\Psi\rangle = |2\rangle_i |S_-\rangle_e - i|1\rangle_i |S_+\rangle_e \quad (119)$$

con

$$|S_{\pm}\rangle_e = \frac{|\alpha e^{-i\phi/2}\rangle_e \pm e^{i\delta} |\alpha e^{i\phi/2}\rangle_e}{2} \quad (120)$$

Para  $\phi = \pi$  y  $\delta = 0$ , los estados  $|S_{\pm}\rangle_e$  (cuando se normalizan apropiadamente) son conocidos como estados de gato par e impar.

## 5.1 Resultados (NIST)

La mayor de las amplitudes de estados coherentes que midieron fue de  $\alpha \approx 2.97(6)$  ( $\tau \leq 10\mu s$ ), que corresponde a un promedio de  $\langle n \rangle \approx 9$  cuantos de vibración en el estado de movimiento. Esto indica una separación espacial máxima de  $4\alpha x_0 = 83(3)nm$ , que es mayor que el tamaño de un paquete de ondas  $x_0 = 7.1(1)nm$ . Es claro que los paquetes de onda se encuentran separados en el espacio fase.

Experimentalmente miden  $P_2(\phi)$ , que comparan con lo que predice la teoría para un estado de gato. Sus mediciones concuerdan muy bien para  $\alpha$  de 1 a 2.9.

Conforme se aumenta el valor de  $\alpha$  se pierde contraste en la señal, hasta que ya no pueden medir para  $\alpha \simeq 2.9$ . Piensan que lo anterior se puede deber a la decoherencia o a otras fuentes que calientan al ión.

## 6 Simulación numérica del experimento

Para simular la creación de los estados de gato, se usó un programa [25] que resuelve las ecuaciones (94)(95)y(96) para los acarreadores con  $\vec{k}_1 - \vec{k}_2 = \vec{0}$  y

$|\alpha e^{i\phi/2}\rangle_{cm}$ .

El estado creado después del paso 4 es una superposición de dos estados coherentes independientes, cada uno correlacionado (enredado) con un estado interno del ión, en la forma del experimento pensado de Schrödinger.

Finalmente se aplica un pulso  $d$  del laser de detección y se ve la fluorescencia en un pequeño intervalo de tiempo.

Los estados vibracionales  $|\alpha\rangle_{cm}$  evolucionan bajo el hamiltoniano armónico con valores medios cuánticos  $\langle x(t) \rangle$  y  $\langle p(t) \rangle$  idénticos a los dados por las ecuaciones clásicas de movimiento con condiciones iniciales  $x_0 = Re(\alpha)$  y  $p_0 = Im(\alpha)$ . Entonces una superposición de estados coherentes  $|\alpha\rangle_{cm}$  y  $|\alpha\rangle_{cm}$  corresponde a una superposición de estados que clásicamente poseen condiciones iniciales opuestas (gato vivo y muerto en el experimento de Schrödinger).

Se verifica la superposición de los estados coherentes recombinando los paquetes de onda coherentes en el paso final 5. Esto crea el siguiente estado enredado.

$$|\Psi\rangle = |2\rangle_i |S_-\rangle_e - i|1\rangle_i |S_+\rangle_e \quad (119)$$

con

$$|S_{\pm}\rangle_e = \frac{|\alpha e^{-i\phi/2}\rangle_e \pm e^{i\delta} |\alpha e^{i\phi/2}\rangle_e}{2} \quad (120)$$

Para  $\phi = \pi$  y  $\delta = 0$ , los estados  $|S_{\pm}\rangle_e$  (cuando se normalizan apropiadamente) son conocidos como estados de gato par e impar.

## 5.1 Resultados (NIST)

La mayor de las amplitudes de estados coherentes que midieron fue de  $\alpha \approx 2.97(6)$  ( $\tau \leq 10\mu s$ ), que corresponde a un promedio de  $\langle n \rangle \approx 9$  cuantos de vibración en el estado de movimiento. Esto indica una separación espacial máxima de  $4\alpha x_0 = 83(3)nm$ , que es mayor que el tamaño de un paquete de ondas  $x_0 = 7.1(1)nm$ . Es claro que los paquetes de onda se encuentran separados en el espacio fase.

Experimentalmente miden  $P_2(\phi)$ , que comparan con lo que predice la teoría para un estado de gato. Sus mediciones concuerdan muy bien para  $\alpha$  de 1 a 2.9.

Conforme se aumenta el valor de  $\alpha$  se pierde contraste en la señal, hasta que ya no pueden medir para  $\alpha \approx 2.9$ . Piensan que lo anterior se puede deber a la decoherencia o a otras fuentes que calientan al ión.

## 6 Simulación numérica del experimento

Para simular la creación de los estados de gato, se usó un programa [25] que resuelve las ecuaciones (94)(95)y(96) para los acarreadores con  $\vec{k}_1 - \vec{k}_2 = \vec{0}$  y

otras ecuaciones similares para los desplazadores con  $k_{1x} = -k_{2x}$  ( $k_{1y} = k_{2y}$ ,  $k_{1z} = k_{2z}$ ) con las polarizaciones apropiadas de los haces.

Se toman en cuenta los tres niveles  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  y  $|0\rangle$ , el decaimiento espontáneo del nivel  $|0\rangle$ , la dependencia temporal de los estados externos del centro de masa del ión debido al micromovimiento de la trampa y el tiempo de encendido y apagado de los láseres ( $\simeq 10^{-7}$  s).

Para iniciar, se asume que el ión se encuentra en el estado  $|2\rangle|0\rangle_{cm}$  y se comienza por aplicar el primer acarreador (pulso  $\pi/2$ ), se obtienen los coeficientes  $C$  y se introducen como condiciones iniciales para el siguiente paso que sería el primer desplazamiento y así sucesivamente hasta llegar al último acarreador (pulso  $\pi/2$ ). Este programa utiliza los mismos parámetros que se utilizaron en el experimento del NIST.

Los resultados que se obtienen con el programa (coeficientes  $C_{Jn}$ ) se analizan calculando la función de distribución de Wigner a partir de (64), que no considera el micromovimiento. Por lo que para poder interpretar nuestros resultados (que consideran el micromovimiento) es necesario ver las diferencias en las funciones de Wigner cuando se considera el micromovimiento y cuando no.

## 6.1 Relación entre $W_{dinamica}$ y $W_{sec}$

Sean  $A$  y  $A^\dagger$  los operadores con el micromovimiento, y  $a$  y  $a^\dagger$  los seculares.

Como se vió antes, estos se encuentran relacionados mediante

$$|n(t)\rangle_D = U|n\rangle_{sec} \quad (121)$$

entonces

$$Q_{D,k} = {}_D\langle k|D_D^\dagger(\alpha)\rho D_D(\alpha)|k\rangle_D \quad (122)$$

donde

$$D_D(\alpha) = e^{\alpha A^\dagger - \alpha^* A}, \quad (123)$$

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}. \quad (124)$$

entonces

$$\begin{aligned} Q_{D,k} &= {}_{sec}\langle k|U^\dagger D_D(\alpha)\rho D(\alpha)U|k\rangle_{sec} = {}_{sec}\langle k|U^\dagger D_D(\alpha)UU^\dagger \rho UU^\dagger D(\alpha)U|k\rangle_{sec} \\ &= {}_{sec}\langle k|D(\alpha)U^\dagger \rho U D(\alpha)|k\rangle_{sec} = {}_{sec}\langle k|D(\alpha)\hat{\rho}D(\alpha)|k\rangle_{sec} \end{aligned} \quad (125)$$

donde  $\hat{\rho} = U^\dagger \rho U$ .

$Q_{dinamica}$  sólo difiere de  $Q_{sec}$  en que en la última se utiliza  $\rho$ , mientras que en la primera se usa  $\hat{\rho}$ .

Al usar la ecuación (58), entonces

$$W_{sec}(\alpha, \alpha^*, t) = \int e^{-i(\xi\alpha + \xi^*\alpha^*)} \text{tr}\rho(t) e^{i(\xi a + \xi^* a^\dagger)} \frac{d^2\xi}{\pi} \quad (126)$$

y  $W_D$

$$W_D(\alpha, \alpha^*, t) = \int e^{-i(\xi\alpha + \xi^*\alpha^*)} \text{tr}\rho(t) e^{i(\xi A + \xi^* A^\dagger)} \frac{d^2\xi}{\pi} \quad (127)$$

entonces

$$W_D(\alpha, \alpha^*, t) = \int e^{-i(\xi\alpha + \xi^*\alpha^*)} \text{tr}\rho(t) U e^{i(\xi a + \xi^* a^\dagger)} U^\dagger \frac{d^2\xi}{\pi} \quad (128)$$

hay que evaluar

$$U e^{i(\xi a + \xi^* a^\dagger)} U^\dagger = \exp(ac^{-c_0/2}(\xi + \xi^* c_+) + a^\dagger e^{c_0/2}(\xi^* - \xi^* c_+ c_- - \xi c_-)) \quad (129)$$

si definimos  $g = e^{-c_0/2}(\xi + \xi^* c_+) = (\xi M_1 + \xi^* M_2^*)$ , entonces encontramos que  $e^{c_0/2}(\xi^* - \xi^* c_+ c_- - \xi c_-) = g^*$ , por lo que podemos reescribir la ecuación (128) como

$$W_D(\alpha, \alpha^*, t) = \int e^{-i(\xi\alpha + \xi^*\alpha^*)} \text{tr}\rho(t) e^{i(ga + a^\dagger g^*)} U \frac{d^2\xi}{\pi} \quad (130)$$

al realizar un cambio de variable:

$$\begin{aligned} W_D(\alpha, \alpha^*, t) &= \int e^{-i(g(\alpha M_1^* - \alpha^* M_2) + g^*(\alpha^* M_1 - \alpha M_2^*))} \text{tr}\rho(t) e^{i(ag + a^\dagger g^*)} \frac{d^2g}{\pi} \\ &= \int e^{-i(g\hat{\alpha} + g^*\hat{\alpha}^*)} \text{tr}\rho(t) e^{i(ag + a^\dagger g^*)} \frac{d^2g}{\pi} = W_{sec}(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^*, t) \end{aligned} \quad (131)$$

donde  $\hat{\alpha} = (\alpha M_1^* - \alpha^* M_2)$ .

Vemos que calculamos  $W_D$ , por lo que no se ven los efectos de compresión que se esperaban del micromovimiento que se reportan en [14], ya que estos desaparecen al deformar el espacio de las  $\alpha$  a  $\hat{\alpha}$ .

A continuación se muestran las funciones de Wigner obtenidas para estados de gato de Schrödinger con un tiempo de desplazamiento  $\tau = 4\mu s$  con  $n_{max} = 12$ ,  $\tau = 6\mu s$  con  $n_{max} = 16$  y  $\tau = 8\mu s$  con  $n_{max} = 24$ . El estado es  $|\downarrow\rangle[|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle]/2 + |\uparrow\rangle[|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle]/2$ .

También se muestran las magnitudes de los coeficientes  $C_{Jn}$  para cada estado interno.

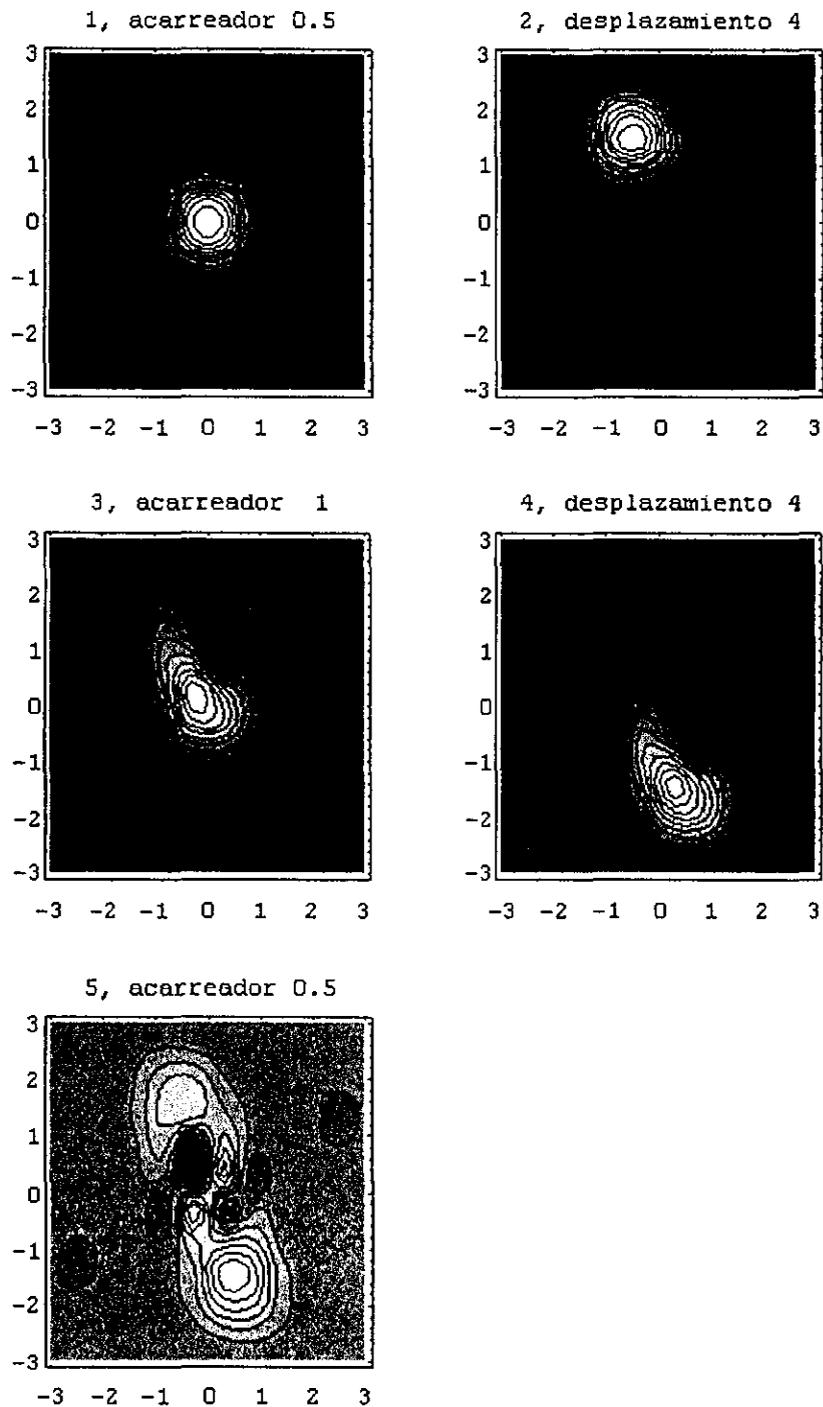


Figura 14: Evolución de la función de Wigner para el estado  $|1\rangle$  con  $\tau = 4\mu s$ . Aunque el primer láser de desplazamiento cumple con su función de crear un estado aproximadamente coherente, el acarreador no es capaz de intercambiar totalmente el movimiento del centro de masa en tre los estados  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$ . A pesar de ello, el estado final muestra los aspectos esenciales de un gato de Schrödinger, es decir, dos regiones prácticamente desconexas donde la función de Wigner es máxima y una región intermedia con efectos de interferencia.

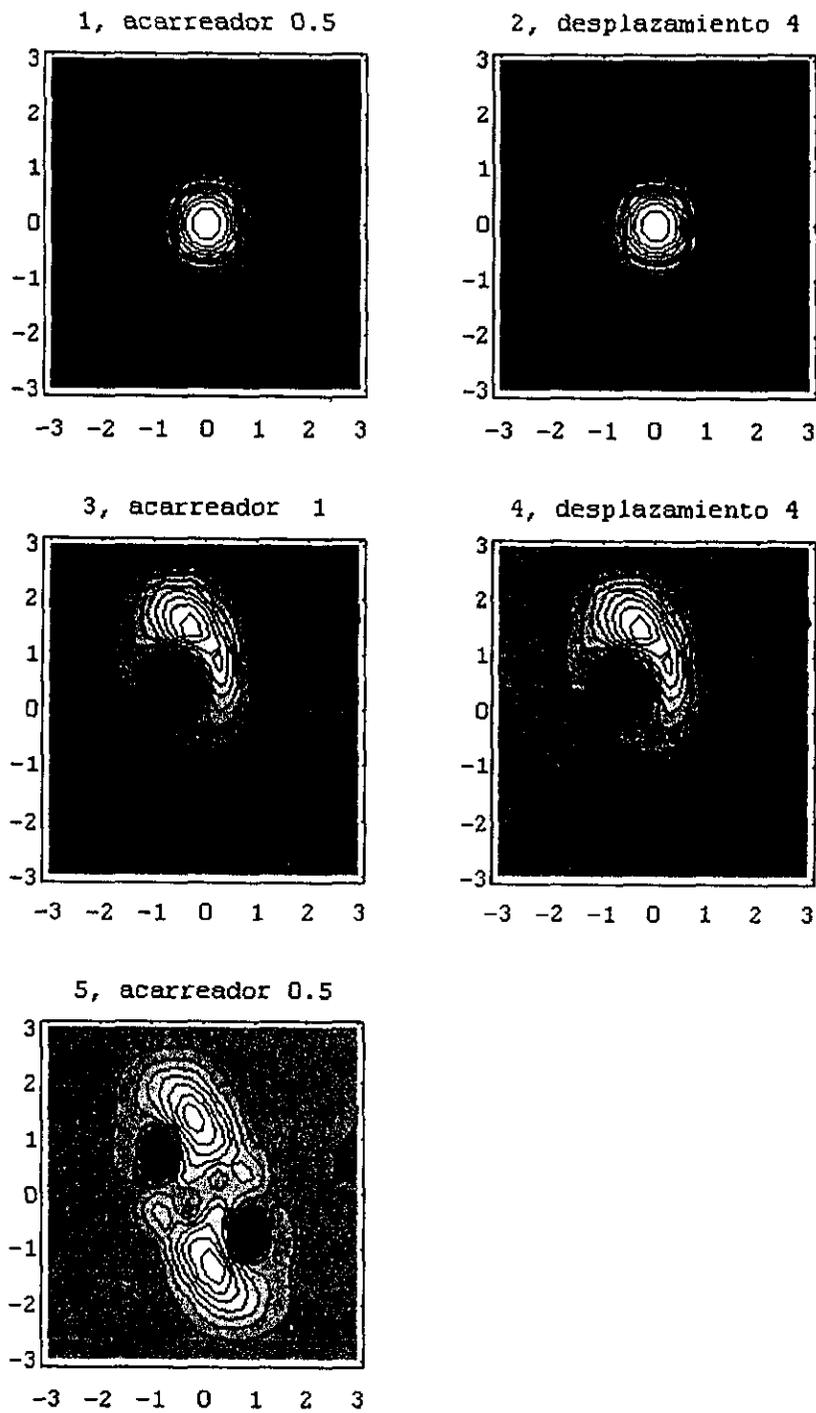


Figura 15: Evolución de la función de Wigner para el estado  $|2\rangle$  con  $\tau = 4\mu s$ . Aquí notamos que el estado  $|2\rangle$  evoluciona de forma complementaria al  $|1\rangle$ . La función de Wigner del estado final también tiene las propiedades de un gato de Schrödinger.

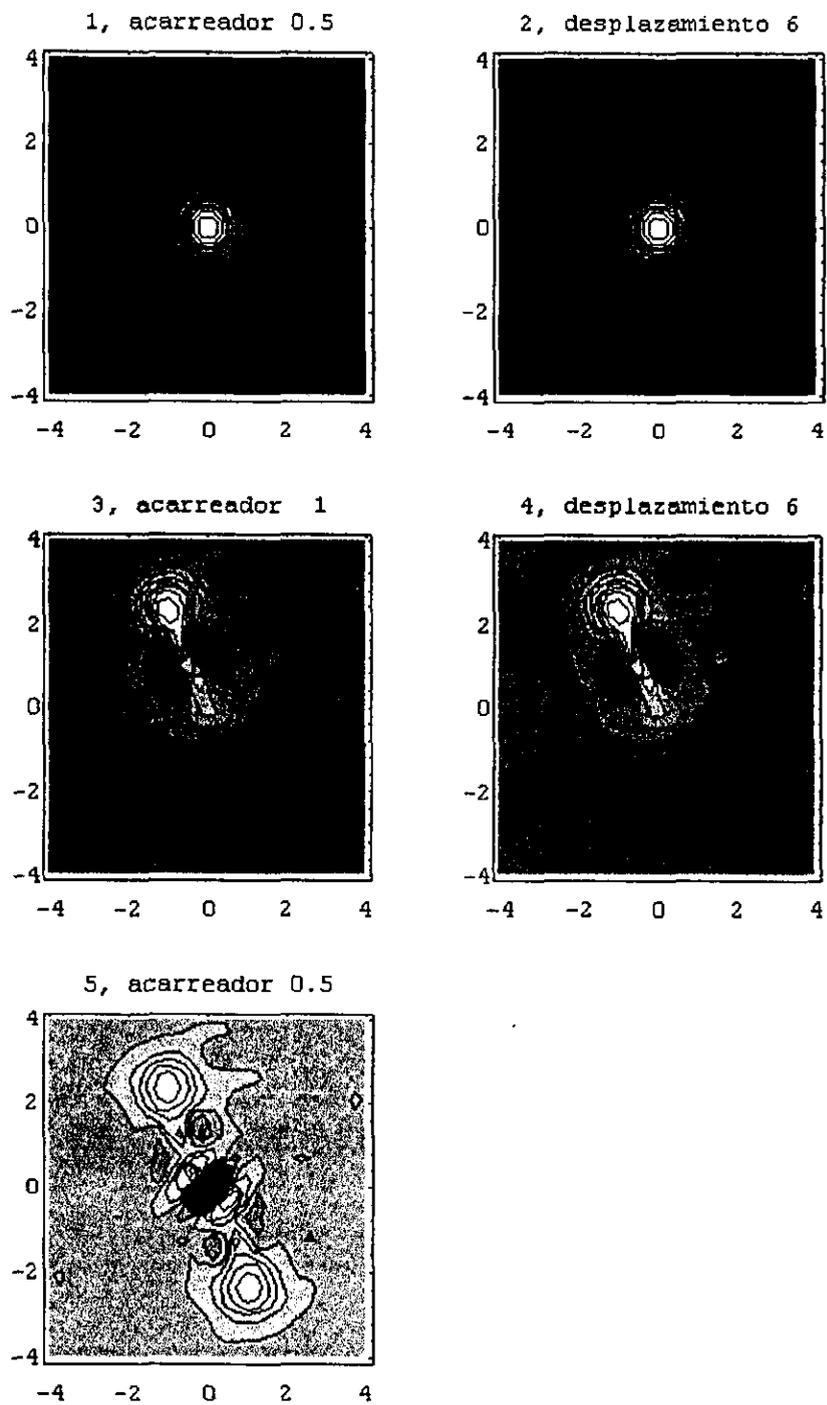


Figura 18: Evolución la función de Wigner para el estado  $|2\rangle$  con  $\tau = 6\mu s$ .

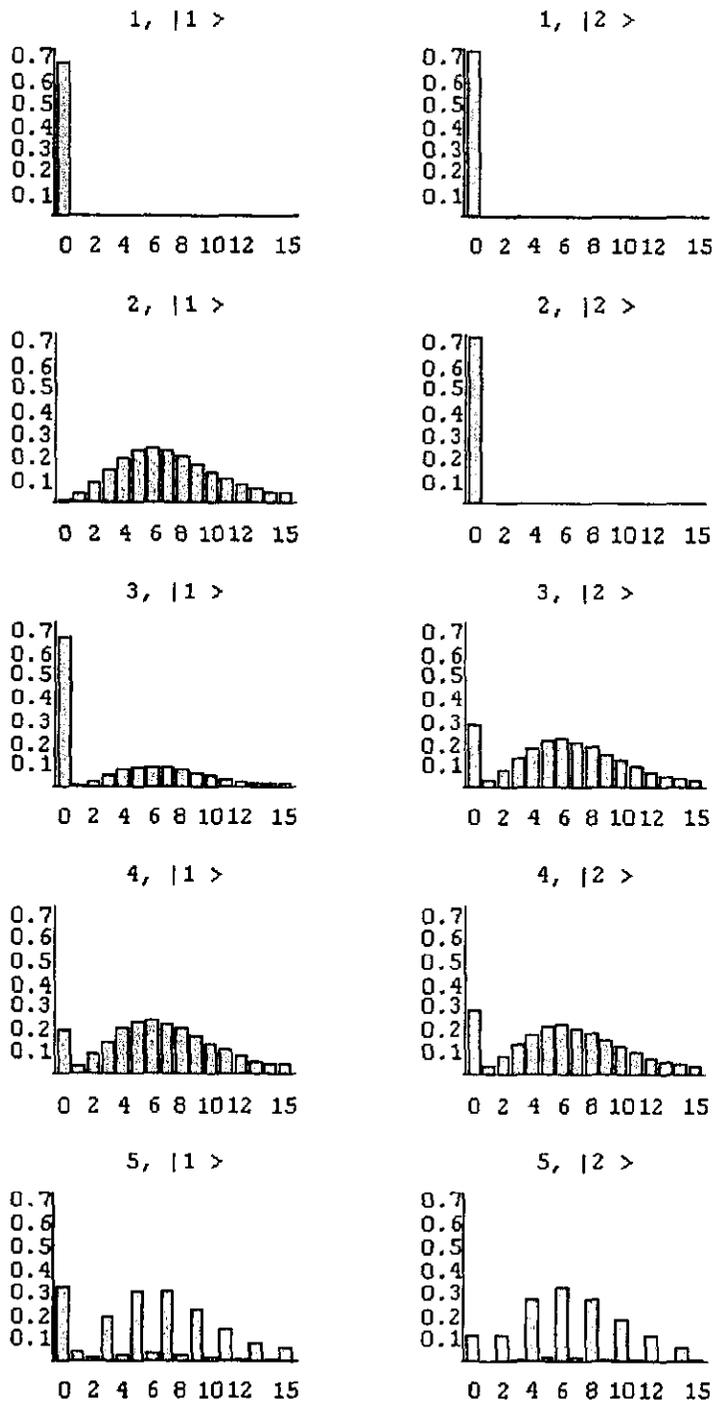


Figura 19: Magnitud de los coeficientes  $C_{Jn}$  para los estados  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  con  $\tau = 6\mu s$ .

## A Estados Coherentes

Clásicamente un campo electromagnético consiste de ondas con amplitud y fase bien definidas. Éste no es el caso cuando se trata el campo cuánticamente. Hay fluctuaciones asociadas con ambas, la amplitud y la fase del campo. Un campo electromagnético en un estado de número  $|n\rangle$  posee una amplitud bien definida pero una fase completamente incierta, mientras que un campo en un estado coherente posee la misma cantidad de incertidumbre en las dos variables.

Se muestra que un estado base desplazado de un oscilador armónico simple satisface esta propiedad y que el paquete de onda oscila sinusoidalmente en el potencial de oscilador sin cambiar de forma. Este paquete de ondas coherente siempre posee incertidumbre mínima, y se parece al campo clásico tanto como la mecánica cuántica lo permite. El vector de estado correspondiente es el de estado coherente  $|\alpha\rangle$ , que es el estado propio de la parte de frecuencia positiva del operador de campo eléctrico, o, equivalentemente, el estado propio del operador de destrucción del campo  $a$ .

El operador de campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  puede separarse en su parte de frecuencia positiva  $\vec{E}^+(\vec{r}, t)$  y la parte de frecuencia negativa  $\vec{E}^-(\vec{r}, t)$ . Existen estados que son estados propios de la parte de frecuencia positiva y negativa del campo en el sentido de las relaciones

$$E_{\mu}^+(\vec{r}, t)|\rangle = \epsilon_{\mu}(\vec{r}, t)|\rangle \quad (132)$$

$$\langle|\rangle E_{\mu}^-(\vec{r}, t) = \langle|\rangle \epsilon_{\mu}^*(\vec{r}, t) \quad (133)$$

la función  $\epsilon_{\mu}(\vec{r}, t)$  juega el papel de un valor propio. Es posible encontrar estados propios  $|\rangle$  que corresponden a opciones arbitrarias de la función de valor propio  $\epsilon_{\mu}(\vec{r}, t)$ , dado que obedecen las ecuaciones de Maxwell satisfechas por el operador de campo  $E_{\mu}(\vec{r}, t)$  y contienen solo términos de frecuencia positiva en sus resoluciones de Fourier.

La importancia de los estados propios definidos por las ecuaciones (136) y (137) se ve en el hecho que causan que las funciones de correlación de la forma  $G_{\mu\nu}^1 = \text{tr} \rho E_{\mu}^-(\vec{r}, t) E_{\nu}^+(\vec{r}, t)$  se factoricen. ( $\rho = |\rangle\langle|$ ).

A los estados propios  $|\rangle$  se les ha llamado coherentes.

La parte de frecuencia positiva del operador de campo se escribe.

$$\vec{E}^+(\vec{r}, t) = i\sum \left(\frac{1}{2}\hbar\omega_k\right)^{1/2} a_k \vec{u}_k(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} \quad (134)$$

Las funciones de los valores propios  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , definidos por la ecuación (138) claramente deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell, al igual que el operador  $\vec{E}^+(\vec{r}, t)$ . Entonces poseen una expansión en modos normales similar a la ecuación anterior. En otras palabras, podemos introducir un conjunto de números complejos  $\alpha_k$  que nos permiten escribir la función del valor propio como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i\sum \left(\frac{1}{2}\hbar\omega_k\right)^{1/2} \alpha_k \vec{u}_k(\vec{r}) \exp -i\omega_k t. \quad (135)$$

Como las funciones de modo  $\tilde{u}_k(r)$  forman un conjunto ortogonal, se sigue que el estado propio  $|\rangle$  para el campo obedece la sucesión infinita de relaciones.

$$a_k|\rangle = \alpha_k|\rangle \quad (136)$$

para todos los modos  $k$ . Para encontrar los estados que satisfacen estas relaciones, buscamos estados  $|\alpha_k\rangle_k$  de los modos individuales que individualmente obedecen las relaciones

$$a_k|\alpha_k\rangle_k = \alpha_k|\alpha_k\rangle_k \quad (137)$$

## A.1 Estados Coherentes de un solo modo

Para encontrar el estado  $|\alpha\rangle$  que satisface

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (138)$$

se comienza tomando el producto escalar en ambos lados de la ecuación anterior con el estado excitado  $n$ , se encuentra la relación de recurrencia

$$(n+1)^{1/2}\langle n+1|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle \quad (139)$$

para los productos escalares  $\langle n|\alpha\rangle$ . De la relación de recurrencia se encuentra que

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}}\langle 0|\alpha\rangle. \quad (140)$$

Estos productos escalares son los coeficientes de expansión del estado  $|\alpha\rangle$  en términos del conjunto completo  $|n\rangle$ . Tenemos

$$|\alpha\rangle = \sum |n\rangle\langle n|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle. \quad (141)$$

La magnitud al cuadrado del vector es

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2}. \quad (142)$$

Si se normaliza el estado  $|\alpha\rangle$  tal que  $\langle \alpha|\alpha\rangle = 1$  podemos definir su fase escogiendo

$$\langle 0|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}. \quad (143)$$

Entonces los estados coherentes del oscilador toman la forma

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle \quad (144)$$

y

$$\langle \alpha | = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum \frac{(\alpha^*)^n}{(n!)^{1/2}} \langle n |. \quad (145)$$

Estas formas muestran que el número de ocupación promedio del estado  $n$  está dado por una distribución de Poisson con valor medio  $|\alpha|^2$ .

Un acercamiento alternativo a los estados coherentes es utilizando el operador de desplazamiento  $D$ , que actúa sobre las amplitudes  $a$  y  $a^\dagger$ .  $D$  es función del parámetro complejo  $\beta$ .

$$D^{-1}(\beta)aD(\beta) = a + \beta, \quad (146)$$

$$D^{-1}(\beta)a^\dagger D(\beta) = a^\dagger + \beta^*. \quad (147)$$

Si  $|\alpha\rangle$  es un estado coherente, se sigue que  $D^{-1}(\beta)|\alpha\rangle$  es un estado propio de  $a$  correspondiente al valor propio  $\alpha - \beta$ ,

$$aD^{-1}(\beta)|\alpha\rangle = (\alpha - \beta)D^{-1}(\beta)|\alpha\rangle. \quad (148)$$

En particular si  $\beta = \alpha$

$$aD^{-1}(\alpha)|\alpha\rangle = 0 \quad (149)$$

Debido a que el estado base del oscilador se define por la relación  $a|0\rangle$ , se sigue que  $D^{-1}(\alpha)|\alpha\rangle$  es sólo el estado base,  $|0\rangle$ . Los estados coherentes son, en otras palabras, sólo formas desplazadas del estado base (vacío) del oscilador

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle \quad (150)$$

La forma explícita del operador de desplazamiento es

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} \quad (151)$$

## A.2 Estados coherentes, pares e impares

La acción del operador de inversión en los operadores  $a$  y  $a^\dagger$  es

$$IaI = -a, Ia^\dagger I = -a^\dagger \quad (152)$$

El operador  $D(\alpha)$  no es invariante con respecto al cambio de signo en la coordenada  $x$ :

$$ID(\alpha)I = D(-\alpha) \quad (153)$$

Se pueden construir dos operadores, de los cuales cada uno genera representaciones irreducibles de grupo consistiendo de dos elementos, el operador unidad y el de inversión  $I$ . Estos son, primero, el operador

$$\cosh(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) = \frac{1}{2}[D(\alpha) + D(-\alpha)] = D_+(\alpha), \quad (154)$$

genera la representación simétrica, y segundo, el operador

$$\sinh(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) = \frac{1}{2}[D(\alpha) - D(-\alpha)] = D_-(\alpha), \quad (155)$$

genera la representación antisimétrica de este grupo (unidad, e  $I$ ).

Es obvio que las funciones

$$|\alpha_+\rangle = D_+(\alpha)|0\rangle, \quad (156)$$

$$|\alpha_-\rangle = D_-(\alpha)|0\rangle$$

son par e impar, respectivamente, y la paridad de estas funciones con respecto a  $\alpha$  es la misma que con respecto a  $x$ . Por lo que se les llama estados coherentes pares e impares.

Estos estados son ortogonales:

$$\langle\beta_-|\alpha_+\rangle = 0 \quad (157)$$

Al usar la expansión (144) de los estados coherentes en términos de estados de número, se puede escribir las expansiones correspondientes a los estados coherentes pares e impares:

$$|\alpha_+\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum \alpha^{2n} [(2n)!]^{-1/2} |2n\rangle$$

$$|\alpha_-\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum \alpha^{2n+1} [(2n+1)!]^{-1/2} |2n+1\rangle \quad (158)$$

Los estados normalizados tienen la forma:

$$|\hat{\alpha}_+\rangle = N_+(|\alpha|)|\alpha_+\rangle; |\hat{\beta}_-\rangle = N_-(|\beta|)|\beta_-\rangle, \quad (159)$$

donde

$$N_+(|\alpha|) = 2^{\frac{1}{2}} (1 + \exp -2|\alpha|^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$N_-(|\beta|) = 2^{\frac{1}{2}} (1 - \exp -2|\beta|^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (160)$$

A los estados pares e impares también se les llama estados de gato, ya que están dados por una combinación lineal de estados coherentes, como se puede ver de (154) y (155).

$$|\alpha\rangle_{\pm} = N_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle), \quad (161)$$

con

$$N_+ = \frac{\exp|\alpha|^2/2}{2\sqrt{\cosh|\alpha|^2}}, \quad (162)$$

$$N_+ = \frac{\exp|\alpha|^2/2}{2\sqrt{\sinh|\alpha|^2}}, \quad (163)$$

## B Álgebra

A continuación se van a dar algunas propiedades de operadores que actúan sobre funciones de  $a$  y  $a^\dagger$  [18].

si  $x$  es un número complejo.

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} \dots \quad (164)$$

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}. \quad (165)$$

$$e^{xa^2} a^\dagger e^{-xa^2} = a^\dagger + 2xa. \quad (166)$$

$$e^{xa^2} a e^{-xa^2} = a. \quad (167)$$

$$e^{xa^{\dagger 2}} a e^{-xa^{\dagger 2}} = a - 2xa^\dagger. \quad (168)$$

$$e^{-xa^{\dagger 2}} a e^{xa^{\dagger 2}} = a + 2xa^\dagger. \quad (169)$$

este operador deja igual a  $a^\dagger$ .

$$e^{xa^\dagger a} f(a, a^\dagger) e^{-xa^\dagger a} = f(ae^{-x}, a^\dagger e^x). \quad (170)$$

## C Interacción de la radiación con átomos

Una función de onda general  $\Psi(x)$  para un átomo puede expandirse en términos de un conjunto completo de funciones de onda que obedecen la ecuación de Schrödinger estacionaria

$$H_0 \Psi_{jb}(x) = \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi_{jb}(x) = E_j \Psi_{jb}(x) \quad (171)$$

donde  $V$  es el potencial de interacción debido al núcleo y a los electrones. El subíndice  $j$  denota los estados propios de energía y  $b$  se refiere a otros números cuánticos asociados al estado del sistema. Entonces

$$\Psi(x, t) = \sum a_{jb} \Psi_{jb}(x) \exp -iE_j t/\hbar \quad (172)$$

$$|\alpha\rangle_{\pm} = N_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle), \quad (161)$$

con

$$N_+ = \frac{\exp|\alpha|^2/2}{2\sqrt{\cosh|\alpha|^2}}, \quad (162)$$

$$N_- = \frac{\exp|\alpha|^2/2}{2\sqrt{\sinh|\alpha|^2}}, \quad (163)$$

## B Álgebra

A continuación se van a dar algunas propiedades de operadores que actúan sobre funciones de  $a$  y  $a^\dagger$  [18].

si  $x$  es un número complejo.

$$e^A B e^{-A} = B + |A, B| + \frac{1}{2!} \dots \quad (164)$$

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}. \quad (165)$$

$$e^{xa^2} a^\dagger e^{-xa^2} = a^\dagger + 2xa. \quad (166)$$

$$e^{xa^2} a e^{-xa^2} = a. \quad (167)$$

$$e^{xa^{\dagger 2}} a e^{-xa^{\dagger 2}} = a - 2xa^\dagger. \quad (168)$$

$$e^{-xa^{\dagger 2}} a e^{xa^{\dagger 2}} = a + 2xa^\dagger. \quad (169)$$

este operador deja igual a  $a^\dagger$ .

$$e^{xa^\dagger a} f(a, a^\dagger) e^{-xa^\dagger a} = f(ae^{-x}, a^\dagger e^x). \quad (170)$$

## C Interacción de la radiación con átomos

Una función de onda general  $\Psi(x)$  para un átomo puede expandirse en términos de un conjunto completo de funciones de onda que obedecen la ecuación de Schrödinger estacionaria

$$H_0 \Psi_{jb}(x) = \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi_{jb}(x) = E_j \Psi_{jb}(x) \quad (171)$$

donde  $V$  es el potencial de interacción debido al núcleo y a los electrones. El subíndice  $j$  denota los estados propios de energía y  $b$  se refiere a otros números cuánticos asociados al estado del sistema. Entonces

$$\Psi(x, t) = \sum a_{jb} \Psi_{jb}(x) \exp -E_j t/\hbar \quad (172)$$

$$|\alpha\rangle_{\pm} = N_{\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle), \quad (161)$$

con

$$N_+ = \frac{\exp|\alpha|^2/2}{2\sqrt{\cosh|\alpha|^2}}, \quad (162)$$

$$N_- = \frac{\exp|\alpha|^2/2}{2\sqrt{\sinh|\alpha|^2}}, \quad (163)$$

## B Álgebra

A continuación se van a dar algunas propiedades de operadores que actúan sobre funciones de  $a$  y  $a^\dagger$  [18].

si  $x$  es un número complejo.

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} \dots \quad (164)$$

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}. \quad (165)$$

$$e^{xa^2} a^\dagger e^{-xa^2} = a^\dagger + 2xa. \quad (166)$$

$$e^{xa^2} a e^{-xa^2} = a. \quad (167)$$

$$e^{xa^{\dagger 2}} a e^{-xa^{\dagger 2}} = a - 2xa^\dagger. \quad (168)$$

$$e^{-xa^{\dagger 2}} a e^{xa^{\dagger 2}} = a + 2xa^\dagger. \quad (169)$$

este operador deja igual a  $a^\dagger$ .

$$e^{xa^\dagger a} f(a, a^\dagger) e^{-xa^\dagger a} = f(ae^{-x}, a^\dagger e^x). \quad (170)$$

## C Interacción de la radiación con átomos

Una función de onda general  $\Psi(x)$  para un átomo puede expandirse en términos de un conjunto completo de funciones de onda que obedecen la ecuación de Schrödinger estacionaria

$$H_0 \Psi_{jb}(x) = \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi_{jb}(x) = E_j \Psi_{jb}(x) \quad (171)$$

donde  $V$  es el potencial de interacción debido al núcleo y a los electrones. El subíndice  $j$  denota los estados propios de energía y  $b$  se refiere a otros números cuánticos asociados al estado del sistema. Entonces

$$\Psi(x, t) = \sum a_{jb} \Psi_{jb}(x) \exp -E_j t / \hbar \quad (172)$$

## C.1 Interacción entre el campo de radiación y el campo del electrón

El Hamiltoniano que describe la interacción entre el campo electromagnético y un electrón (despreciando el spin del electrón, tratamiento no relativista) es

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + eV(\vec{x}) + eU(\vec{x}, t) \quad (173)$$

donde  $V(\vec{x})$  es el potencial electrostático del átomo,  $\vec{p}$  es el momento del electrón,  $\vec{A}$  y  $U(\vec{r}, t)$  son el potencial vectorial y escalar del campo externo (electromagnético). Puede notarse que en la ecuación anterior se cambió  $\vec{p}$  por  $\vec{p} - e\vec{A}$  y se agregó el término  $eU$  al Hamiltoniano anterior para el electrón; a esto se le llama el acoplamiento mínimo.

La forma del del Hamiltoniano es

$$H = H_{el} + H_I + H_{campo} \quad (174)$$

donde

$$H_{el} = \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + eV(x) \right) \quad (175)$$

se refiere al movimiento libre de los electrones, y  $H_I$  describe la interacción de los electrones con el campo de luz.  $H_I$  puede escribirse en dos partes

$$H_{I,1} = \left( -\frac{e}{m} \vec{A} \cdot \vec{p} \right) \quad (176)$$

$$H_{I,2} = \left( -\frac{e^2}{2m} \vec{A}^2 \right) \quad (177)$$

El término  $A^2$  hace contribuciones despreciables a los procesos en que sólo se involucra un fotón (ya que  $A^2$  involucra términos con dos operadores). Incluso para los procesos de dos fotones la contribución de los términos de  $A^2$  es pequeña.

## C.2 Aproximación dipolar

Consideremos que el electrón que se encuentra confinado en el potencial  $V(\vec{r})$  del núcleo que se encuentra en  $\vec{r}_0$ . El átomo se encuentra inmerso en una onda electromagnética plana descrita por  $\vec{A}(\vec{r}_0 + \vec{r}, t)$ . El potencial vectorial puede ser escrito en la aproximación dipolar,  $\vec{k} \cdot \vec{r} \ll 1$  como

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}_0 + \vec{r}, t) &= \vec{A}(t) \exp[i\vec{k} \cdot (\vec{r}_0 + \vec{r})] = \vec{A}(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}_0)(1 + i\vec{k} \cdot \vec{r} + \dots) \\ &\approx \vec{A}(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}_0). \end{aligned} \quad (178)$$

El que esta aproximación se justifique en la región óptica puede verse de la siguiente manera.

Para una onda plana del modo:

$$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp ikx$$

En la región óptica la longitud de onda del fotón es mucho mayor que la dimensión lineal del átomo  $\lambda_{foton} = \frac{1}{|k|} \gg r_{atomo}$  debido a que  $\lambda_{foton} \sim 10^3 \text{ \AA}$  y  $r_{atomo} \sim 1 \text{ \AA}$ . entonces sustituyendo A en la ecuación de Schrödinger

$$\left( \frac{-\hbar^2}{2m} [\nabla - \frac{ie}{\hbar} \vec{A}(\vec{r}_0, t)]^2 + V(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (179)$$

En la ecuación anterior se asumió que el potencial externo U es cero y se utiliza la norma de Coulomb  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ .

La ecuación anterior se simplifica al definir una nueva función de onda  $\Phi(\vec{r}, t)$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \exp\left[\frac{ie}{\hbar} \vec{A}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{r}\right] \Phi(\vec{r}, t) \quad (180)$$

Al sustituir (180) en (179)

$$i\hbar \left[ \frac{ie}{\hbar} \vec{A} \cdot \vec{r} \Phi(\vec{r}, t) + \dot{\Phi}(\vec{r}, t) \right] \exp\left(\frac{ie\vec{A} \cdot \vec{r}}{\hbar}\right) = \exp\left(\frac{ie\vec{A} \cdot \vec{r}}{\hbar}\right) \left[ \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \right] \Phi(\vec{r}, t) \quad (181)$$

Al cancelar el factor exponencial y reordenar términos, se obtiene

$$i\hbar \dot{\Phi}(\vec{r}, t) = [H_0 - c\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0, t)] \Phi(\vec{r}, t) \quad (182)$$

donde  $H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) = \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r})$ , (también se usó  $\vec{E} = -\dot{\vec{A}}$ ) entonces

$$H = H_0 + H_I \quad (183)$$

$$H_I = -c\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0, t) \quad (184)$$

### C.3 Comparación entre $c\vec{r} \cdot \vec{E}$ y $\frac{e}{m} \vec{p} \cdot \vec{A}$ (los dos evaluados en $\vec{r}_0$ )

De las reglas de Mecánica Cuántica se sabe que:

$$\vec{p} = m\vec{v} = -m\frac{i}{\hbar} [\vec{r}, H_0] \quad (185)$$

Si consideramos un átomo de dos niveles  $|g\rangle$  y  $|e\rangle$  (estado base y excitado respectivamente) y vemos cual es el efecto de la transición de g a e debido al Hamiltoniano de interacción:

$$\langle e | H_I | g \rangle \quad (186)$$

con el término  $e\vec{r} \cdot \vec{E}$ :

$$\langle e|\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0, t)|g\rangle = e\vec{E}(\vec{r}_0, t)\langle e|\vec{r}|g\rangle \quad (187)$$

con el término  $e\vec{p} \cdot \vec{A}/m$ :

$$\begin{aligned} \frac{e}{m}\vec{A}(\vec{r}_0, t)\langle e|\vec{p}|g\rangle &= \frac{e}{m}\vec{A}(\vec{r}_0, t)\langle e|(\vec{r}H_0 - H_0\vec{r})|g\rangle\left(\frac{-mi}{\hbar}\right) \\ &= \frac{ei}{\hbar}\vec{A}(\vec{r}_0, t)\langle e|(\vec{r}H_0|g\rangle - \langle e|H_0\vec{r}|g\rangle) = ei\omega_{ge}\vec{A}(\vec{r}_0, t)\langle e|\vec{r}|g\rangle. \end{aligned} \quad (188)$$

Se utilizó:  $\langle e|\vec{r}H_0|g\rangle = \hbar\omega_g\langle e|\vec{r}|g\rangle$ ,  $\langle e|H_0\vec{r}|g\rangle = \hbar\omega_e\langle e|\vec{r}|g\rangle$ , y  $\omega_{ge} = \omega_e - \omega_g$ . Sabemos que  $\frac{\partial A^\pm(\vec{r}_0, t)}{\partial t} = \mp\omega A^\pm(\vec{r}_0, t)$  y que  $\vec{E}(\vec{r}_0, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_0, t)}{\partial t}$ , por lo que la ecuación (188) toma la forma de (187) siempre y cuando  $\omega$  que es la frecuencia del campo sea muy parecida a  $\omega_{ge}$

El Hamiltoniano de interacción (en la aproximación del dipolo evaluado en  $r_0 = 0$ )

$$\begin{aligned} H_I &= -e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0, t) \\ &= i\sum_{k,ij}(\hbar\omega_k/2\epsilon_0V)^{1/2}\epsilon_k d_{ij}[a_k \exp(-i\omega_k t) - a_k^\dagger \exp(i\omega_k t)]|i\rangle\langle j|. \end{aligned} \quad (189)$$

Para un átomo de dos niveles  $i,j$  solo tienen dos valores: 1,2

$$H_I = i\sum_k \hbar g_k [a_k \exp(-i\omega_k t) - a_k^\dagger \exp(i\omega_k t)](|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) \quad (190)$$

donde

$$\hbar g_k = (\hbar\omega_k/2\epsilon_0V)^{1/2}\epsilon_k \cdot d_{12} \quad (191)$$

se asume que  $d_{12} = d_{21}$

## Bibliografía

- [1] A.Einstein,B.Podolsky,N.Rosen, Phys.Rev. **47**,477(1935).
- [2] E.Hagley,X.Maitre,G.Nogues,C.Wunderlich,M.Brune and S.Haroche. Phys. Rev. Lett. **79**,1(1997).
- [3] S.Haroche. Physics Today, July 1998.
- [4] P.Meystre D.Walls Editors, *Nonclassical Effects in Quantum Optics*. AIP, 1991.
- [5] E.Schrödinger, Naturwissenschaften **23**, 807, 823 y 844 (1935), traducido al inglés en J.A. Wheeler, W.Zurek, *Quantum Theory of Measurement*, Princeton U.P., Princeton, N.J.(1983).
- [6] D.Giulini,E.Joos,C.Kiefer,J.Kupsch,I.-O.Stamatescu, N.D.Zeh. it Decoherence and the Appearance of a Clasical World in Quantum Theory. Springer, New York (1996).
- [7] W.H.Zurek, Physics Today, October 1991.
- [8] L.S.Brown and G.Gabrielse, Rev.Mod.Phys. **58**,233(1986)
- [9] S. D.S.Hall, G.Gabrielse. Phys. Rev. Lett. **77**,1962(1996).
- [10] W.Paul, Rev.Mod.Phys. **62**,531(1990).
- [11] D.J. Wineland,W.M. Itano. Phys.Rev.A **20**,1521(1979).
- [12] D.J.Wineland and W.M.Itano. Physics Today, June 1977.
- [13] R.C.Thompson it Quantum Optics with Trapped Ions. *Latin-American School of Physics XXXI ELAF, New Perspectives on Quantum Mechanics*, edited by S.Hacyan, R.Jáuregui, R.López-Peña. AIP Conferencce Proceedings (1998).
- [14] O.Castaños,R.Jáuregui,R.López-Peña,J.Recamier and V.I.Manko. Phys.Rev.A, **55**, 1208(1997).
- [15] V.V.Dodonov and V.I.Man'ko, *Invariants and Evolution of Nonstationary Quantum Systems*, edited by M.A. Markov. Proceedings of the Lebedev Physics Institute Vol.183 (Nova Science, Commack, N.Y., 1989).
- [16] Elizabeth Padilla. Tesis de licenciatura: Estados Coherentes Generalizados de Sistemas Cuánticos. Julio 1996.
- [17] O.Castaños,R.López-Peña and V.I. Manko. J.Phys.A **27**, 1751(1994.)
- [18] Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*. Wiley.
- [19] Hillery,M.,R.F.O'Connel,M.O.Scully and E.P.Wigner, Phys. Rep. **106**(1984) 121.

- [20] Leonhardt U. *Measuring the quantum state of light* (Cambridge University Press, 1997).
- [21] Cahill, K.E. and R.J.Glauber, Phys.Rev. 177(1969a)1857.
- [22] Cahill, K.E. and R.J.Glauber, Phys.Rev. 177(1969a)1857.
- [23] D.Leibfried, D.M.Meekhof, B.E.King, C.Monroe, W.M.Itano and D.J. Wineland. Phys.Rev.Lett. 77,4281(1996).
- [24] D. J. Wineland, C. Monroe, W. M. Itano, D. Leibfried, B. E. King, D. M. Meekhof, J.Res.Natl.Inst.Stand.Tech. 103,259 (1998).
- [25] R.Jáuregui, J.Recamier, P.A.Quinto-Su. Por publicar.
- [26] D.j. Heinzen and D.J. Wineland. Phys. Rev. A. 42,2977(1990).
- [27] B.R.Holstein, *Topics in Advanced Quantum Mechanics*. Addison Wesley.
- [28] P.J.Bardroff, C.Leichtle, G. Schrade and W.P.Schleich. Phys.Rev.Lett.77, 2198(1996).
- [29] D.M.Meekhof, C.Monroe, B.E.King, W.M.Itano and D.J. Wineland. Phys.Rev.Lett. 76,1796(1995).
- [30] C.Monroe, D.M.Meekhof, B.E.King and D.J. Wineland. Science, 272, 24 May 1996.
- [31] S.Haroche, M.Brune, J.M.Raimond, E.Hagley, C.Wunderlich, A.Mali, J.Dreyer and X.Maitre. Generation of a Schrodinger cat of radiation and observation of its decoherence.
- [32] C.Monroe, D.M.Meekhof, B.E.King, S.R.Jeffers, W.M.Itano and D.J. Wineland. Phys.Rev.Lett. 75,4011(1995).