12

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA APLICACION DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES AL CONTROL DE INVENTARIOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

FRANCISCO JAVIER GARCIA GARCIA

DIRECTOR DE TESIS: HORTENSIA CANO GRANADOS

MEXICO, D. F. NOVIEMBRE DE 1999.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

UNA APLICACION DE LA INVESTIGACION DE OPERACIONES AL CONTROL DE INVENTARIOS.

realizado por FRANCISCO JAVIER GARCIA GARCIA

Con número de cuenta 9251940-2 , pasante de la carrera de ACTUARIA.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de tesis Propietario	ACT.	HORTENSIA CANO GRANADOS
Propietario	ACT.	BENIGNA CUEVAS PINZON
Propietario	ACT.	LETICA DANIEL ORANA
Suplente	ACT.	MARIA AURORA VALDEZ MICHEL
Suplente	ACT.	ESTEBAN NICANOR ANGELES HERNANDEZ

Consejo Departamental de Matemáticas.

M en A. P. MARIA DEL PILAR ALONSO REYES

Agradezco a dios por haberme permitido concluir con mis estudios de licenciatura, por darme vida, y salud y unos padres tan maravillosos que siempre han estado a mi lado particularmente en esos momentos tan difíciles que han estado a mi lado al igual que tú que siempre me han apoyado y se que tengo su cariño y su amor igual que tú.

Por que se que existen igual que tú mi Dios, gracias por que a lo largo de la vida me has enseñado tantas cosas, gracias por hacerme sentir que existo y por la vida misma.

En especial a mis padres:

Virginia García Sánchez
Alfredo García Arreola

Gracias por darme la vida, los quiero mucho, son el mejor ejemplo para mi.

A mis hermanos:

Que han sido fuente de inspiración

A Kenya y Luis A.

A mis tres amores:

A mi director Hortensia Cano Granados.

Gracias por su apoyo y paciencia para hacer posible este trabajo.

INDICE

INTRODUCCIÓN.

La presente investigación se realizó con el fin de mostrar a la población estudiantil, así como a la población en pleno desarrollo profesional el papel que las matemáticas tienen en la vida diaria.

El presente trabajo lo dedicamos al desarrollo de la aplicación de la investigación de operaciones a la teoría o control de inventarios, ya que si hacemos un poquito de memoria, a lo largo de nuestras vidas siempre estamos utilizando y manejando los inventarios con las matemáticas.

Este trabajo, lo que se persigue es mostrar que en la mayoría de los casos, en los que interviene la producción y los servicios, es posible interpretarlos de manera óptima haciendo uso de la *teoría de inventarios* bajo la *influencia* de la *investigación de operaciones*.

Aquí se muestra un caso clásico de los modelos de inventarios y es importante mencionar que existen "*n*" modelos de inventarios y que el caso clásico que mencionamos es llamado *"del lote económico"*; así se da la pauta a que el espíritu estudiantil e investigador, empuje, a recorrer diversos caminos de la teoría de inventarios con el fin de acercarnos o ¿por qué no? a superar el conocido "justo a tiempo" de los Japoneses, que citamos en el capitulo II. Es importante saber que no es fácil pero el reto es interesante.

El presente trabajo consta de cinco partes, en la primera se da la *definición de inventario*, se explica la importancia que tienen los mismos, las consecuencias que se tienen debido a su mala aplicación o a su mal manejo y damos algunos conceptos que se consideran importantes en esta teoría.

En la segunda parte se entra de lleno al estudio de algunos modelos o métodos para el manejo de inventarios, que se consideran importantes como lo son: modelos básicos, modelo de reemplazo gradual, justo a tiempo, el modelo ABC, etc.

Como ya se han dado algunos modelos o métodos que nos permiten desempeñar un buen manejo del inventario, nos hacemos la siguiente pregunta *¿cómo sería este manejo de inventarios, mediante la investigación de operaciones?*. Pues bien en la tercera sección se muestra la *relación* que se da entre la *investigación de operaciones y la teoría de inventarios*, se analiza y se justifica la aplicación de esta teoría.

Para el siguiente capitulo se muestra una aplicación del modelo, dando una explicación de su interpretación.

Finalmente, damos las conclusiones de este trabajo.

Capítulo I

CONCEPTOS PRELIMINARES.

DEFINICIÓN DE INVENTARIO.

Por *inventario* se entiende un conjunto de recursos útiles que se encuentran ociosos en algún momento. Estos recursos incluyen además de las cosas materiales, el dinero, las maquinas, el talento físico de los individuos.

Diremos también, que los inventarios forman un vínculo entre la producción y la venta de un producto, es decir, mercancías en proceso.

Los inventarios presentan uno de los elementos más importantes de la empresa, pues gran parte de sus recursos están invertidos aquí el cual suele ser la fuente principal de ingresos.

En años recientes se ha prestado mucha atención a los problemas primordiales de inventario, los cuales son:

- Determinación de su cantidad.
- Determinación de su valor monetario.

Pues ya que individualmente inventarios y existencias son palabras que envuelven la idea dinámica del recuento físico.

Existen varias acepciones del termino *inventario, sólo se mencionan algunas:*

"Son materias primas y materiales, artículos terminados y los que están en proceso de producción, mercancías en existencia o en tránsito, mercancías en consignación que posee una empresa al final del periodo contable".

Pero la definición más aceptada es la siguiente:

Inventario es el conjunto de bienes tangibles pertenecientes a una persona :

- que se tienen para vender en curso normal de los negocios,
- que están en proceso de producción para venderse después, y
- que están en disposición de ser consumidos en la producción de bienes o servicios que se van a vender.

El control de inventarios se relaciona estrechamente con planeación y organización.

Desde el punto de vista de la empresa, los inventarios representan una inversión, se requiere capital para tener los materiales a la mano en cualquier etapa de su elaboración.

Los inventarios son acopios de bienes y de existencias. Una de las principales funciones de los inventarios consiste en el desacople o en la separación de etapas sucesivas en las operaciones. Las existencias almacenadas están representadas generalmente en:

- materias primas
- trabajos en proceso
- productos terminados
- implementos

IMPORTANCIA DE LOS INVENTARIOS.

Como ya es sabido, el control y mantenimiento de un inventario de bienes físicos es un problema común de todas las empresas. Existen varias razones para *mantener un inventario, estas incluyen protección contra la variación de la* demanda, mantenimiento de un flujo constante de producción al establecer una función de desacoplamiento entre las diferentes etapas de la producción, y la reducción del costo global de los materiales al aprovechar los descuentos por volumen. Además los inventarios pueden ayudar a incrementar la tasa de producción y a reducir los costos de manufactura.

La razón fundamental de mantener inventarios radica en el hecho de ser físicamente imposible y económicamente impráctico que cada elemento llegue con precisión al lugar en el cual se requiere y lo haga exactamente en el momento en que se necesita.

El objetivo en el control de inventarios es encontrar la estrategia que genere los costos mínimos de operación a lo largo de un horizonte de planeación.

¿POR QUÉ LLEVAN INVENTARIOS LAS ORGANIZACIONES?

Nivel	Razón
Fundamentales (Primarias)	Imposibilidad física de obtener el volumen adecuado de existencias en el momento exacto en el que se requieren. Económicamente no es práctico obtener el volumen adecuado de existencias en el momento exacto en el que se requieren.
Secundarias	Recuperación favorable de la inversión Margen para reducir la incertidumbre. Desacoplar las operaciones. Nivelar o igualar la producción. Reducir los costos de manejo de materiales. Compras masivas o al mayoreo.

El inventario debe ser considerado como una inversión y debe requerir de fondos junto con otras inversiones contempladas por la empresa.

Es importante considerar el concepto de Eficiencia Marginal del Capital (EMC). Este concepto sostiene que una empresa debe invertir en aquellas alternativas que proporcionan una mayor recuperación que los costos del capital de los préstamos.

Las empresas de manufactura y de servicios se interesan por igual en la recuperación de la inversión o recuperación de los activos aplicados.

Los inventarios también pueden ser útiles cuando desacoplan las operaciones, esto es, cuando separan las operaciones de manera que el abastecimiento de una operación sea independiente de otro abastecimiento. El desacoplamiento sirve para dos fines:

- El primero, se requiere que los inventarios disminuyen las dependencias entre etapas sucesivas de operación, de manera que las fallas en la producción en una etapa no ocasione que etapas ulteriores tengan que detenerse.
- El segundo fin es, que las unidades de las organizaciones programen sus operaciones de una manera independiente con respecto a las otras unidades.

Los inventarios también pueden ayudar con la nivelación de la producción ya que los productos pueden ser construidos en los periodos de demanda baja y se pueden utilizar en los periodos de demanda mayor (por tal motivo hay que evitar los altos costos de los cambios en los ritmos de producción y en el nivel de la fuerza de trabajo).

Para cuando la demanda varia considerablemente, se requiere de alguna protección contra los altos costos que se originan al no tener existencias. Es posible utilizar inventarios como amortiguadores o protecciones contra estas anomalias. Las existencias de seguridad se pueden emplear para protegerse contra los "fuera de existencias" ocasionadas por una demanda inesperada durante el tiempo en espera del surtido del pedido.

Uno de los objetivos de los inventarios es el de indicar, la cantidad de los fondos que se cree pueden ser generados, con las ventas de sus componentes.

Un objetivo conexo, es presentar información con miras a los inventarios que ayudan a los inversionistas, y otros a pronosticar los futuros movimientos

Un tercer objetivo se dice que es aquel de la presentación del valor de los articulos de las empresas pero el más conocido de los objetivos de los inventarios es, el de poder hacer la tentativa de comparar los costos del periodo con los ingresos del mismo para calcular la utilidad neta.

Las ventajas de los inventarios son diversas, las cuales podemos resumir diciendo que la empresa es más flexible. Por otro lado las desventajas obviamente son, el costo total de mantener el inventario (una desventaja puede ser caer en el desuso del mismo).

Se ha explicado la importancia que tienen los inventarios por varias razones, la razón fundamental es que, desde el punto de vista físico y económico, resulta poco práctico que cualquier producto que deba estar en existencia sea abastecido exactamente cuando se necesita. En el control de inventarios, se hace necesario establecer una estrategia de operación, es decir, un conjunto de decisiones que nos indiquen cuando reabastecer las existencias y cuántas existencias hay que reabastecer; estas decisiones en general se realizan dentro del marco de un sistema de inventarios a cantidad/orden (Q/R) o de un sistema de inventarios periódico.

Por tanto, el objetivo del control de inventarios es encontrar la estrategia de operación de costo mínimo a lo largo de un horizonte de planeación.

PROBLEMAS POR EL MAL MANEJO DE LOS INVENTARIOS.

Un sistema formal de administración de inventarios puede producir ahorros sustanciales para una compañía, dichos ahorros se obtienen de diferentes formas, dependiendo de la situación particular de la compañía.

Algunas fuentes comunes para dichos ahorros son:

- un costo menor de compra
- un aumento en la disponibilidad de fondos internos
- menores costos de operación
- menor costo unitario de producción
- confiabilidad en la entrega por parte de la producción
- un mejor servicio a los clientes en el suministro de productos.

Cuando una compañía es pequeña y el número de artículos en inventarios es pequeño, el control de inventarios de bienes físicos se basa en las determinaciones intuitivas del gerente de compras, quien decide que artículos comprar, cuándo comprarlos y en qué cantidades.

Sin embargo conforme la compañía crece, entonces requiere una mayor variedad de partidas de inventario con distintas proporciones de utilización, los sistemas informales empiezan a crear problemas que pueden resultar en mayores costos y en interrupciones de la producción y el suministro del producto terminado. Desafortunadamente saber cuando los inventarios están mal administrados no es fácil ya que existe una gran variedad de síntomas.

Algunos síntomas que pueden indicar que existe la necesidad de contar con una administración científica de inventarios son:

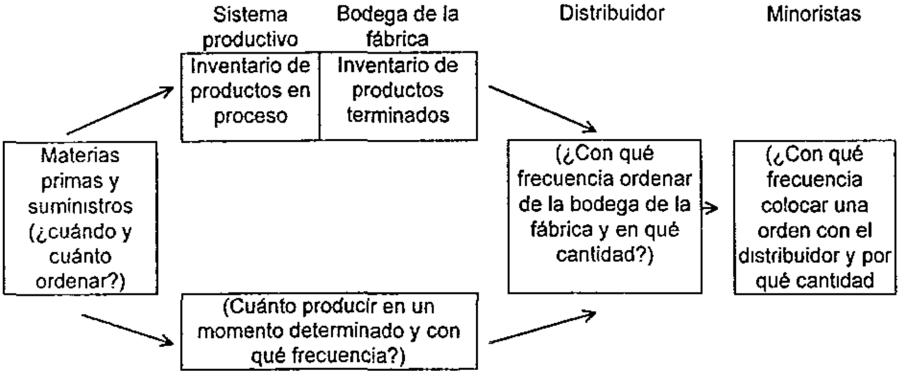
a) La cantidad de inventario aumenta más rápido que el crecimiento de las ventas.
b) Se presentan faltantes de productos o artículos provocando la interrupción de la producción o retrasos en las entregas a los clientes.
c) Los costos administrativos relacionados con el acopio, la expedición y el

mantenimiento de inventarios se tornan muy elevados.

d) Se tienen existencias muy excesivas de algunos artículos y existencias muy reducidas de otros.

e) Algunos artículos se pierden o extravían y, las proporciones de desperdicio y obsolencia son demasiado elevadas.

Por lo antes mencionado damos los puntos de reabastecimiento de un sistema de *producción - distribución*.



Principales puntos de abastecimiento

En el cuadro anterior se identifican los principales puntos de reabastecimiento en un sistema de producción-distribución, desde la adquisición de materias primas y suministros, pasando por el proceso productivo y culminando con la disponibilidad del producto terminado para su consumo.

En la parte inicial del sistema se requiere contar con existencias de materias primas y suministros con el fin de llevar acabo el proceso productivo con un costo mínimo y dentro del programa establecido.

Como parte del proceso de conversión dentro del sistema productivo, los inventarios de productos en proceso se transforman en inventarios de productos terminados.

Será necesario contar con lineamientos de estrategia para determinar el tamaño de los inventarios de seguridad necesarios para absorber los efectos de las demoras en producción y las variaciones aleatorias en la demanda por parte de los distribuidores.

La función de los distribuidores y minoristas es poner los productos a disposición de los consumidores a partir de los inventarios de productos terminados.

Aún cuando los detalles de los problemas de cada uno de los niveles del sistema de producción-distribución pueden variar, es conveniente hacer notar que las cuestiones básicas de estrategia de cada etapa se relaciona con el proceso de reabastecimiento del inventario y se concentra en qué tanto y cuándo ordenar. Existe una clase general de problemas para los cuales los conceptos de cantidades de orden económica (EOQ que más adelante se estudiara con detalle), proveen importantes perspectivas.

COSTOS POR FALTA DE EXISTENCIAS.

Los costos por falta de existencias son los que ocasiona la demanda cuando las existencias se agotan, es decir, son los costos de ventas pérdidas o de pedidos no surtidos cuando las ventas se pierden ante la falta de confianza del cliente.

A continuación se mencionan algunos de los costos que se consideran más importantes, en los que se incurre cuando se hace un mal manejo o mala administración de los inventarios.

COSTOS PENALES.

Los costos penales están asociados con los costos de oportunidad o costos reales, generados al no satisfacer la demanda en un momento dado.

Otro costo penal o "fuera de existencias" ocurre cuando por falta de inventario, se tiene que recurrir a las emergencias. En esta situación, el costo penal esta asociado por lo menos con dos factores.

a) La carga innecesaria de obreros y
b) La repetición innecesaria de muchas actividades.

COSTOS DE MANEJO Y ALMACENAJE.

Algunos costos marginales varían directamente con el tamaño de los inventarios. Hay costos de manejo requerido para colocar los materiales en el inventario y para sacarlos de allí, y costos asociados con el almacenamiento, tales como los de seguros, impuestos, renta, obsolencia, deterioro y los costos de capital. Si aumenta el promedio de los inventarios, aumentarán también estos costos, y viceversa.

COSTOS DE ESCASEZ

Nos podemos preguntar ¿en qué costos incurrimos si se nos terminan las existencias?, la falta de una pieza puede ser la causa de que haya mano de obra ociosa en una línea de producción, y de que aumente el costo de la mano de obra, por tener que ejecutar las operaciones fuera de secuencia.

OTROS CONCEPTOS.

TIEMPO DE ESPERA (ENTREGA).

El tiempo de espera es el lapso que transcurre entre el momento en que se ordena un artículo o se decide fabricar, y el momento en que se entrega al cliente o se termina su producción.

Si los tiempos de entrega de producción o de reorden pueden conocerse con certeza, se les llama deterministicos, si puede existir la incertidumbre se les llama aleatorios. En el primer caso la longitud de este tiempo puede ser cero, es decir, cuando la entrega es instantánea, o mayores que cero.

Los modelos deterministas pueden ser ajustados cuando los tiempos de espera se conocen con certeza, así el punto de reorden (R*) se calcula de la siguiente manera:

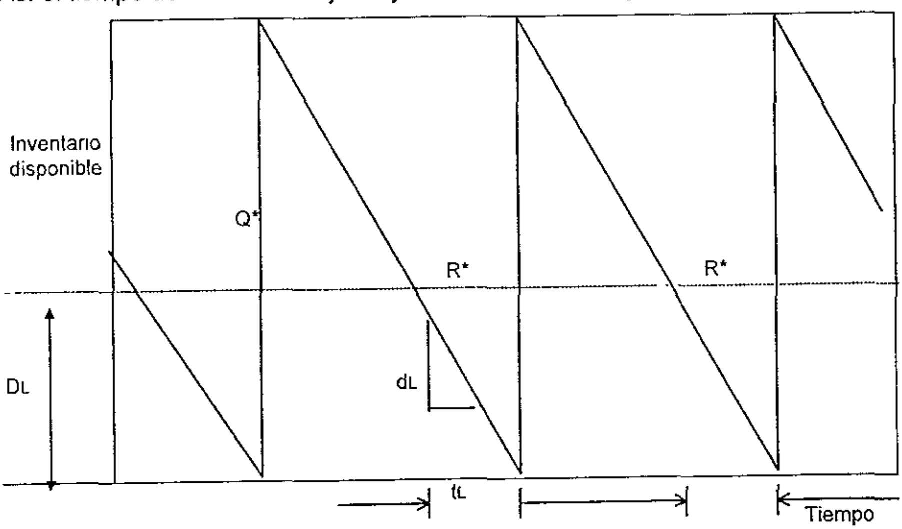
R* = Existencias de seguridad + Demanda durante el tiempo de espera.

R* = 0 + (tiempo de espera)

(demanda/unidad de tiempo)

R* = (T) (D)

Así el tiempo de reorden se ajusta y se muestra en la siguiente figura:



Tiempos de reorden con tiempos de espera.

En esta figura se ve la demanda total durante el tiempo de espera, (d), es igual al producto del tiempo perdido por la demanda por unidad de tiempo.

En R* se puede colocar *un pedido de* Q* *unidades*. La orden real de Q* llegará t tiempo más tarde.

Durante el tiempo entre la realización del periodo y su llegada, d unidades serán pedidas y por consiguiente, el inventario se reducirá.

Ejemplo:

Una cadena de expendios de hamburguesas cuenta con una tienda local que consume *anualmente* 730 *cajas de vasos de seis onzas* de papel. Los costos del pedido son de 15 dólares, y los de manejo de 30% de la inversión promedio de inventarios; y una caja tiene un costo de 12 dólares. Se sabe con certeza que el tiempo de espera en la entrega es de 5 días. Se desea establecer la estrategia de operación óptima.

El siguiente modelo que se utiliza lo deducimos en el capitulo II.

Tenemos que:

Datos:

$D = 730$
$S = 15$
$I = 0.3$
$C = 12$

Fórmula:

$Q^* = \sqrt{2DS/IC}$

Sustitución:

$$Q^* = \sqrt{2(730)(15)/(0.3)(12)}$$

$$Q^* = 77.99 \approx 78$$

Luego:

$$TL = 5$$

$$DL = (730/365)$$

Fórmula:

$$R^* = (TL)\ (DL)$$

Sustitución:

$$R^* = 5DL = 5(730/365)$$

$$= 10$$

$$R^* = 10$$

Es decir, la estrategia de operación sería ordenar 78 cajas cuando las existencias disponibles lleguen a 10 cajas.

NIVEL ÓPTIMO

Cantidad rentable a pedir, es decir ¿cuánto pedir?.

La cantidad rentable a pedir (EOQ) es un concepto importante en la compra de materia prima y el almacenamiento de inventarios de productos terminados y en transito, el pedir puede significar tanto la compra del artículo como su producción.

Punto de pedir.

¿Cuándo pedir? además de conocer cuánto pedir, la empresa también necesita saber cuándo pedir. Cuando en este caso significa la cantidad que debe disminuir el inventario para indicar que debe hacerse un nuevo pedido por una cierta cantidad EOQ para reabastecer un artículo al nivel deseado.

CONTROL DE INVENTARIOS.

El control de inventarios es la técnica diseñada para mantener elementos en existencia, ya sean mercancías o servicios, a niveles deseados .

Las dos cuestiones que uno quiere contestar al controlar el inventario de un producto, o un grupo de productos o servicios son las siguientes:

¿Cuánto ordenar o producir?

¿Qué tan frecuente ordenar o producir?

Las organizaciones de manufactura que están orientadas hacia el producto enfrentan situaciones mucho más tangibles en relación con los inventarios que las organizaciones en mano de obra y orientadas hacia la prestación de servicios.

En proceso de manufactura, siendo así que la atención se centra principalmente sobre un producto físico, el énfasis es en los materiales y en el control de los mismos.

En el sector de servicios, la atención se centra en el servicio y es muy poco el énfasis que se pone en materiales y existencias. En muchos casos, los servicios se consumen a medida que se generan y no se almacenan para consumo posterior. Entonces es en los procesos de manufactura más que en la prestación de servicios en donde se espera dedicar mas atención considerable al control de inventarios.

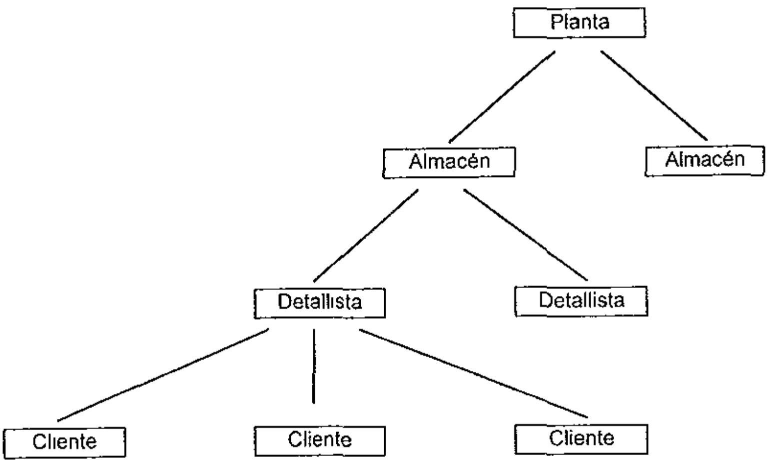
El concepto básico de la administración de producción/operaciones, independientemente del medio institucional específico, se centra en la conversión de insumos para la producción de bienes o servicios.

INVENTARIOS MULTIETAPAS.

Los inventarios multietapas, se generan cuando las partes se elaboran en más de una etapa en el proceso de producción secuencial, ya que existe una interacción entre los elementos del inventario en las diferentes etapas, resulta un problema difícil de resolver el establecimiento de niveles equilibrados de inventarios en las diversas etapas y para el sistema general.

INVENTARIOS MULTIESCALONADOS.

En los sistemas intervienen distintos niveles institucionales en la transformación de materias primas en productos para el consumidor, cada nivel se denomina un escalón Los inventarios multiescalonados, que se ilustran en la siguiente figura incluyen productos almacenados en los distintos niveles de un sistema de distribución.



Representación de inventarios multiescalonados.

Un sistema no tendría que reaccionar a un incremento de la demanda cambiando los inventarios en proporción directa al incremento de la demanda. Ya que algunas veces surge alguna complicación en una estructura multiescalonada de inventarios. Estudios estadísticos concluyeron que un incremento en la demanda puede ser atendido con un incremento menor en los inventarios, es decir, no proporcional De manera inversa también sucede, es decir, cuando la demanda decrece, los inventarios no pueden disminuir en la misma proporción.

Capítulo II

MODELOS O MÉTODOS PARA EL CONTROL DE INVENTARIOS

MODELOS BÁSICOS DE CONTROL DE INVENTARIOS.

Antes de empezar con los modelos básicos de inventarios se da una explicación de, el modelamiento de los mismos. El método para modelar situaciones que involucren inventarios es sencilla y directa, ya que el propósito es obtener una estrategia de operación, siguiendo los cuatro sencillos pasos que a continuación se enuncian.

- Examinar cuidadosamente la situación de inventarios, tomando en cuenta las características y las suposiciones referentes a la situación.

- Desarrollar en forma narrativa la ecuación total de costos.

- Transformar la ecuación total de costos de la forma narrativa, a la forma lógica abreviada de las matemáticas.

- Optimizar la ecuación de costos encontrando el óptimo de qué tanto ordenar (lote económico) y cuándo ordenar (punto de reorden).

En esté trabajo se diseñan modelos sólo para el sistema Q/R, aún cuando la metodología general se puede utilizar con el sistema periódico. Es necesario recordar también que las situaciones de inventarios se pueden clasificar como *deterministas (variables conocidas con certeza) o como estocásticas* (variables probabilísticas).

Variables en los modelos de inventarios.

Para los modelos que se enuncian utilizaremos la siguiente notación:

D demanda anual en unidades
Q cantidad ordenada
Q* cantidad óptima ordenada
R punto de reorden
TL tiempo de espera
S costo de operación o de adquisición de la orden
I costo de manejo por unidad expresado en por ciento
C costo del producto individual; el costo de adquisición del producto
K costo de la falta de existencia por unidad
P tasa de operación, unidades por Período
DL demanda durante el tiempo de espera, demanda total durante el tiempo de espera
CT costos relevantes totales anuales.

MODELO DETERMINISTA DE INVENTARIOS.

La noción más antigua comúnmente denominada fórmula de lote económico, fue sugerida por Ford Harris en 1915, aparentemente la obtuvo de forma independiente R. H. Wilson, que fue quien la popularizó y en su honor algunas veces se menciona como fórmula de Wilson.

Es importante mencionar que este modelo de inventarios supone que:

1) El inventario esta siendo controlado en un punto (en el almacén, o con materia prima por ejemplo).
2) La demanda es determinista y a una tasa anual constante conocida.
3) No se permite escasez o falta de existencias.
4) El tiempo de espera es constante independiente de la demanda.
5) El costo de adquisición por unidad es fijo.

Podemos hacer más simple este caso, suponiendo que el tiempo de espera es cero, es decir, que la entrega es instantánea.

Luego la pregunta obvia es: ¿Cómo se puede ver la ecuación del costo relevante total anual (CT)?

De la ecuación:

Costos totales = costo del producto + costo de orden o adquisición + (costo de manejo) (costos cíclicos) (existencias de seguridad) + (costos de inexistencias) (ventas pérdidas) (pedidos pendientes).

Nota:

Siempre hay existencias, y el costo anual de productos adquiridos se excluye, ya que el costo de adquisición por unidad es fijo. Sólo se incluyen los costos que se pueden afectar por la selección de Q.

Ajustándola a esta situación tenemos que:

El costo relevante total anual = costo de adquisición + costo de manejo

Desarrollando la ecuación tenemos que:

CT = (costo de orden) (número de ordenes colocadas / año) + (costo de manejo de una unidad) (número promedio de unidades manejadas)

CT = S (número de ordenes colocadas/año) + IC (número promedio de ordenes)

Pero el número de ordenes colocadas por año se puede expresar en términos de la demanda anual y por la cantidad ordenada.

Demanda anual = (cantidad ordenada en cada periodo) (número de órdenes colocadas)

Pero como el

Número de ordenes colocadas / año = demanda anual / cantidad ordenada en cada pedido.

Número de ordenes colocadas / año = D / Q

Ahora nos preguntamos ¿cómo se puede determinar el inventario promedio anual por año?, ¿Cuál es inventario máximo, el mayor que puede haber en cualquier momento? Es la cantidad Q ordenada. ¿Cuál es el inventario más bajo? ¿Como hay que ordenar cuando las existencias están totalmente vacías? El más bajo es cero.

Este modelo, en el que los inventarios varían de máximo a mínimo, y luego de nuevo a máximo, se denomina ciclo. Para cualquier ciclo el inventario promedio sería:

Inventario Promedio / ciclo = (Inventario máximo + Inventario mínimo) / 2

Inventario Promedio = (Q + 0) / 2

= Q / 2

El inventario promedio es independiente del tiempo.

Sustituyendo, entonces tenemos que:

$$CT = S\ (D / Q) + IC\ (Q / 2)$$

De aquí que:

- Mientras Q crece, crecen los costos de mantener existencias, pero menores los costos totales de pedir.
- Mientras Q decrece, menor será el costo de mantener existencias, pero mayores los costos totales de pedir.

Entonces estamos interesados en la compensación entre las economías que retribuye el hacer pedidos de mayor tamaño y el costo adicional de mantener inventarios adicionales.

La cantidad óptima a pedir es aquella cantidad, Q*, que minimiza los costos totales del inventario durante el periodo de planeación.

De esta ecuación de costo total se puede obtener la fórmula para la cantidad *óptima ordenada, la cantidad en el punto mínimo de la curva de costo total.*

Al tomar la derivada de:

$T = C(Q / 2) + O(S / Q)$ respecto de Q

$$(dT / dQ) = (d / dQ) (CQ / 2)(d / dQ)(SO / Q)$$

$$= (C / 2) - (SO) / (Q)^2$$

Ahora igualando a cero (por cuestiones del Calculo diferencial) tenemos que:

$$(C / 2) - (SO) / (Q)^2 = 0$$

Resolviendo para Q, se tiene que:

$$(SO) / (Q)^2 = (C / 2)$$

$$(2SO /C) = Q^2$$

Por lo tanto:

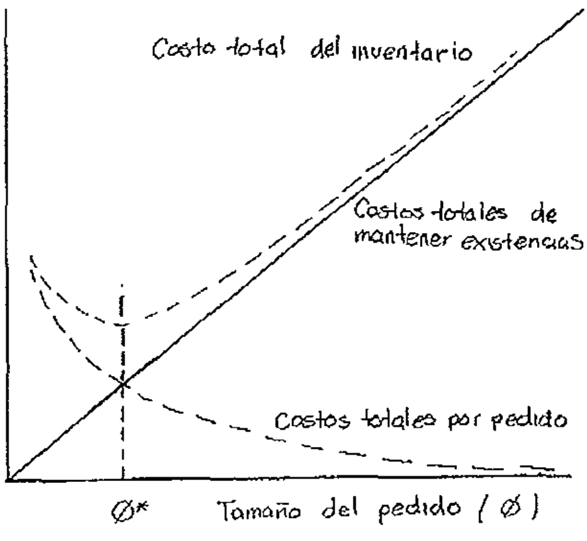
$$2(O)(S)/C = Q^*$$

Como la entrega es instantánea, el punto de reorden se debería establecerse en el punto mínimo posible, cero, para evitar el manejo de un exceso de existencias, entonces tenemos la siguiente estrategia de operación:

Orden $Q^* = \sqrt{2DS / IC}$

En el punto $R^* = 0$

La función EOQ se muestra en la siguiente figura:



En general el modelo EOQ brinda una regla para decidir cuándo reponer existencias y la cantidad a reponer.

SENSIBILIDAD DEL MODELO.

Haremos una comparación de la sensibilidad de los costos totales de cualquier sistema operativo, con los costos totales, de un sistema óptimo de inventarios (CT*) usando la relación CT / CT*.

La realizaremos calculando CT / CT*, como función de Q / Q*.

$$CT/CT^* = (S\,(D/Q) + IC\,(Q/2)) \,/\, (S\,(D/Q^*) + IC\,(Q^*/2)$$

pero como $\qquad Q^* = \sqrt{2DS/IC}$

Sustituyendo y resolviendo algebraicamente tenemos que:

$$CT/CT^* = \tfrac{1}{2}(Q^*/Q + Q/Q^*)$$

Notése que la relación de costos totales en esta ecuación se expresa únicamente en términos de Q y Q*. Si la cantidad ordenada (Q) se encuentra muy cerca de Q* óptima, la relación CT / CT* es ligeramente mayor que la unidad. A *medida que* Q se aleja de Q* se puede esperar que CT / CT* crezca. Gráficamente la relación Q / Q* y CT / CT* para el caso del tamaño del lote simple o lote económico de la ecuación anterior se muestra en la siguiente figura:

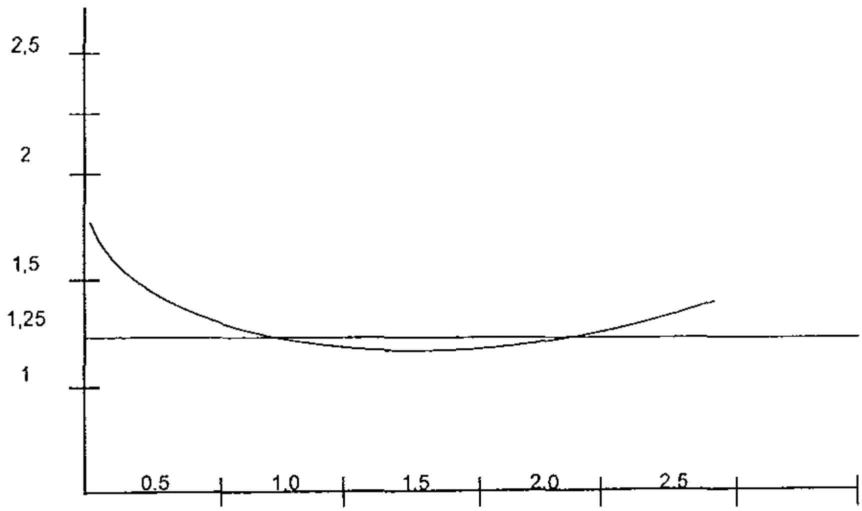


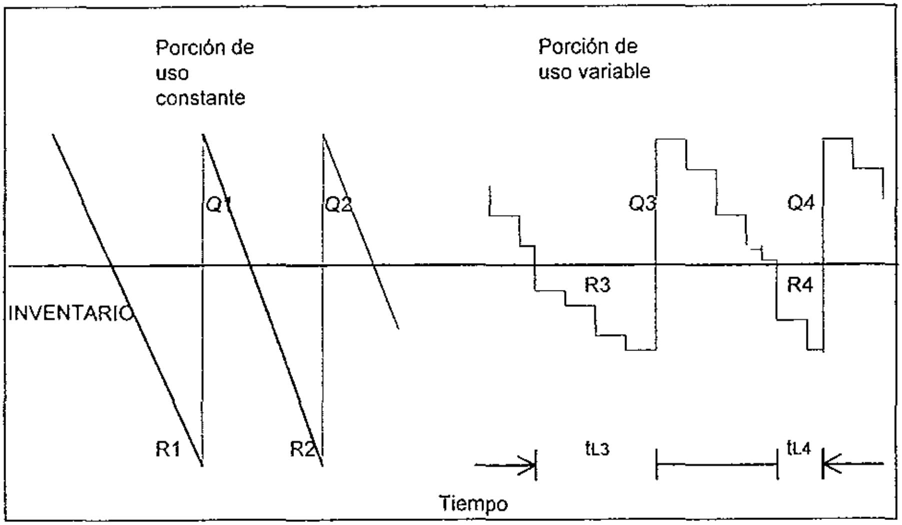
Figura de sensibilidad

Obsérvese lo plano de la curva en la cercanía del punto mínimo, 1.0 en ambos ejes. Si la Q real se encuentra alejada de la óptima en cualquier dirección por un factor de dos, los costos se han incrementado solamente en un 25%.

SISTEMA DE INVENTARIO Q / R.

Una forma práctica de establecer un sistema de inventario es llevar la cuenta de cada artículo que sale del almacén y *colocar una orden por más existencias* cuando el inventario llegue a un nivel predeterminado, es decir, el punto de reorden. La orden deberá tener una dimensión fija, es decir, el volumen, la cual estará predeterminada.

En la siguiente figura se ilustran dos sistemas de inventario Q / R.



Sistemas de inventarios Q/R.

En el sistema de la izquierda, la demanda del inventario y la proporción de uso se conocen y son constantes, el tiempo de reabastecimiento se supone cero, en un caso sencillo como este no habría necesidad de tener existencias de seguridad, ya que la entrega es instantánea y la demanda del artículo inventariado se conoce con certeza, por tanto R*i* se fijará en cero unidades.

En el lado derecho la demanda es variable, no se sabe por adelantado cuando se terminará el inventario o que tan rápido se hará. Es difícil establecer una estrategia de operación más económica cuando varía la demanda, como lo es en este caso, y aún más difícil cuando también varía el tiempo de reorden.

La teoria de inventarios puede dividirse en función de la forma como se toma una decisión. Existen decisiones a partir de revisiones continuas o revisiones periódicas del inventario.

Los dos sistemas principales para determinar las cantidades disponibles en el inventario son:

- El sistema periódico y
- El sistema perpetuo.

SISTEMA DE INVENTARIO PERPETUO.

Este sistema se basa en tener información sobre las existencias y su valor en todo momento. Esta información permite administrar el inventario y ayuda a tomar buenas decisiones para mejorar la productividad de la empresa al:

- Mantener niveles óptimos de existencias de productos o mercancías.
- Prevenir y evitar faltantes.
- Mantener un servicio sin interrupciones

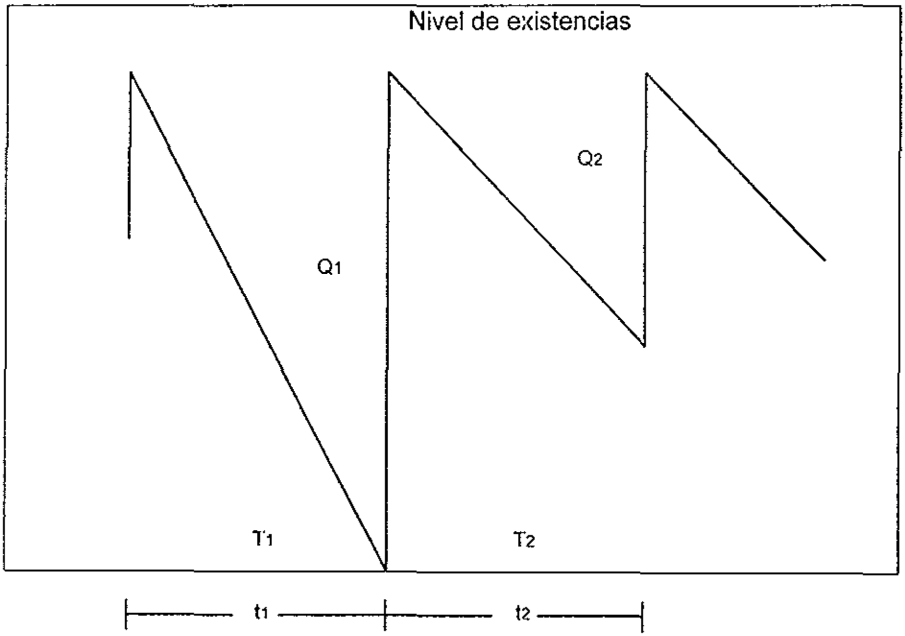
Es decir, el sistema de inventario perpetuo se considera muy valioso debido a que se permite planear las necesidades del inventario, dado que un saldo del *inventario se tiene en cualquier momento del tiempo*, por esta razón, el sistema de inventario perpetuo se considera más favorable que el sistema de inventario periódico.

Toda entidad que necesite tener buena información para su administración, puede contar con un sistema de inventario perpetuo.

SISTEMA DE INVENTARIO PERIÓDICO.

El inventario se determina mediante un recuento físico al final del Período; Un sistema de inventario periódico proporciona un control de unidades y le brinda a un negocio las *ventajas principales que se pueden obtener conforme* el sistema de inventario perpetuo, dado que las pérdidas en inventario, pueden determinarse mediante recuentos físicos y las cantidades de inventario se tienen disponibles para ayudar a la administración del inventario.

En el sistema de inventario periódico se examina el inventario únicamente en intervalos previamente determinados, periódicos, y luego se reordenar una cantidad igual a un nivel de existencias base preestablecidos, esta situación se muestra en la figura siguiente:



Sistema de inventario periódico.

Como se puede notar el nivel de inventario se examina en los instantes T1 y T2 y las ordenes son colocadas para las cantidades Q1 y Q2.

En el sistema periódico t1 = t2, pero Q1 no necesariamente es igual a Q2.

Notemos que la dimensión del lote económico en el sistema Q / R, y los niveles de existencias base en el sistema periódico determinan lo que se va a ordenar; el punto de reorden en el sistema Q /R y el tiempo entre ordenes en el sistema periódico determinan cuando se debe ordenar.

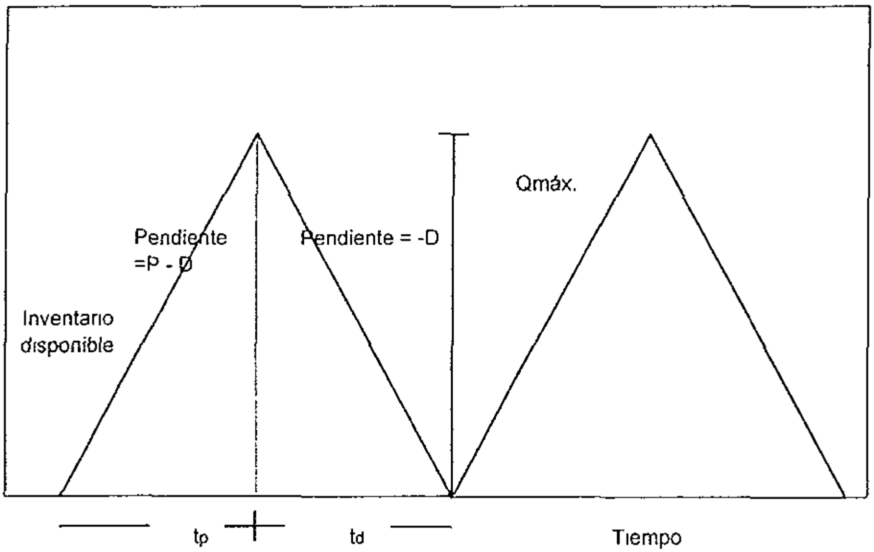
MODELO DE REEMPLAZO GRADUAL.

En algunas ocasiones una parte del abastecimiento es instantánea después de ordenarlo, pero el resto de las unidades son enviadas poco a poco en el *transcurso del tiempo, es decir, cuando la orden se coloca,* el proveedor inicia la producción de las unidades, que son abastecidas de manera continua al comprador.

Mientras estas unidades están siendo agregadas al inventario (haciéndolo crecer), los clientes sacan unidades del inventario (haciéndolo disminuir).

Consideremos el caso en el que el ritmo del abastecimiento (P) sea mayor que el de los retiros (D). En cierto tiempo entonces, se habrá producido la cantidad ordenada, y los inventarios netos habrán aumentado.

El nivel de inventario, sin embargo, nunca llegará a nivel tan alto como el del modelo del lote económico (la cantidad ordenada). Esta situación se ilustra en la siguiente figura:



Situación de inventarios de remplazo gradual
(tasa de ritmo o producción finita)

Como también se cumplen las otras suposiciones del modelo del lote económico, la ecuación de los costos totales anuales para este modelo es:

Costos pertinentes globales = Costo de adquisición + Costo de manejo.

La que podemos escribir de la siguiente manera:

$$CT = S(D / Q) + IC(\text{Número promedio de unidades})$$

Como se puede notar, el inventario máximo nunca llega a Q, sino que es algo menor, es decir, el inventario promedio no es Q/2.

Teniendo en cuenta que la pendiente de la gráfica es P-D y la pendiente negativa es -D, se puede encontrar el inventario máximo, Qmax a partir de:

pendiente = incrementa / decrementa

$$P-D = Q_{max} / t_p$$

Donde:

P es el ritmo de abastecimiento

D son los retiros.

Pero el tiempo que se requiere para producir un lote es:

$$t_p = Q / P$$

y sustituyendo tenemos que:

$$P-D = Q_{max} / (Q/P).$$

$$Q_{max} = Q(P-D) / P.$$

El inventario promedio es entonces:

Inventario promedio = (I. Máximo + I. mínimo) /2

Y como el inventario mínimo es cero, entonces se tiene que:

$$\text{Inventario promedio} = Q(P-D) / 2P$$

Y la ecuación de los costos totales a ser minimizada para el caso de la corrección por reemplazo gradual es:

$$CT = S(D/Q) + IC(Q/2\ ((P-D)/P))$$

La cual nos da lo siguiente:

$$Q^* = \sqrt{(2DS / IC)(P / (P - D))}$$

Aquí como la producción y el reabastecimiento se inician simultáneamente. El *punto óptimo de reorden* estaría de nuevo en R* = 0.

Obsérvese que para esta estrategia de operación, la fórmula para Q* es idéntica para la formula del modelo del lote económico, a excepción del factor de corrección finita.

OTROS MODELOS

CLASIFICACIÓN CON BASE EN ¿QUÉ CONTROLAR?

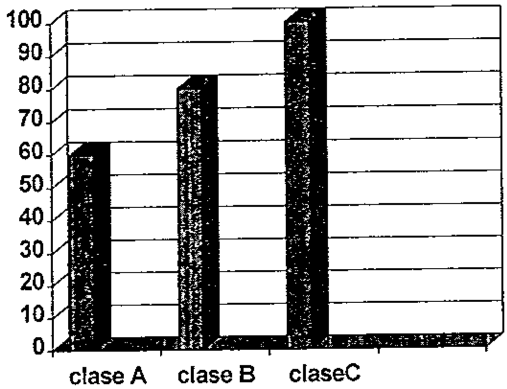
Se han señalado los diferentes tipos de inventario que existen, inventarios de materias primas, trabajo en proceso, en transito y de bienes terminados. Otra forma de clasificar los inventarios es por el valor de la inversión de la empresa. Si una empresa fuera a categorizar los artículos del inventario por medio del valor en decremento por artículo.

Con base en este desglose, en el cual una proporción relativamente pequeña de artículos representa gran parte del valor total del inventario, es razonable para la empresa el dedicar más cuidado y atención a controlar los artículos más valiosos, esto se puede lograr asignando una clasificación, por ejemplo " A" y revisarlos con más frecuencia, los otros artículos " B" y " C" justificarían revisiones cada vez menos rigurosas y menos oportunas.
A menudo este sistema se denomina, de forma muy apropiada, como el método de control de inventarios ABC.

En pocas palabras, el método de control de inventarios ABC controla los artículos más costosos.

CLASIFICACIÓN ABC DE LAS PARTIDAS DE INVENTARIO.

En la práctica no se da la misma atención ni el mismo esfuerzo de control para todos los productos o artículos, ya que el distinto valor de las partidas de inventario, sugiere que la atención debe concentrarse en los artículos de mayor valor y dar una menor consideración a los artículos de menor valor, esto se muestra en la siguiente figura.



En la cual una quinta parte de los artículos representan el 60% del valor del inventario, otra quinta parte de los artículos representa el 20% del valor y, finalmente el mayor porcentaje de artículos, es decir, tres quintas partes representa sólo el 20% del valor total del inventario.

Debido a las razones expuestas, la clasificación de las partidas de inventario de acuerdo al grado de control necesario da la pauta a concentrar los más grandes esfuerzos en aquellos puntos donde los beneficios sean mayores.

Controles de partidas clase A

Se requiere de un control estrecho para partidas de inventario con altos costos de faltantes y para aquellas partidas que representan una parte importante del valor total del inventario.

Este control puede quedar reservado a las materias primas que se utilizan de forma constante en volúmenes extremadamente elevados, para esto se debe hacer un suministro constante de estos materiales en cantidades que equiparen la proporción de utilización, ya que existen cambios periódicos en la velocidad del flujo conforme la demanda, y a posición del inventario sufre cambios.

Se mantienen suministros mínimos como protección contra las fluctuaciones de demanda y posibles interrupciones en el suministro, realizando una supervisión lo suficientemente estrecha sobre los niveles de inventario.

Las variaciones en las proporciones de utilización son absorbidas rápidamente por el tamaño de la orden periódica que se emplee. Además el riesgo de sufrir una escasez prolongada es pequeña debido a la estrecha supervisión. Y se justifica con las existencias de seguridad que brinden un excelente nivel de servicio para artículos cuyo costo de faltantes sea importante.

Controles para partidas clase B

Estas partidas pueden ser controladas mediante un sistema de revisiones periódicas, los parámetros de revisión son con menor frecuencia que en las del caso de las partidas de clase A.
Los costos de faltantes de existencias para estas partidas, deberán ser de moderados a bajos y las existencias de seguridad deberán brindar un control adecuado de los faltantes, aún cuando la colocación de órdenes ocurra con menos frecuencia.

Controles para partidas clase C

Estas partidas representan la mayor parte de las partidas de inventario y un sistema de controles diseñados pero rutinarios deben ser adecuados para su control.
Un sistema de punto de reabastecimiento que no requiera una evaluación física de las existencias generalmente será suficiente. Para cada una de estas partidas, las acciones necesarias son activadas cuando los inventarios se reducen hasta el punto de reabastecimiento, si la utilización cambia las ordenes serán activadas antes o después del promedio, siempre y cuando se establezca la compensación necesaria.
Se pueden realizar revisiones semestrales o anuales de los parámetros del sistema para actualizar las proporciones de utilización.

JUSTO A TIEMPO (JIT)

Un sistema de control de inventarios desarrollado por los japoneses llamado justo a tiempo, o JIT, rompe con el concepto convencional de mantener grandes cantidades en existencia contra la incertidumbre.

El objetivo básico de JIT es producir o recibir un artículo requerido en el momento exacto en el que se necesita, o "justo a tiempo".

Inventarios de todos tipos serían así reducidos a un mínimo, o en algunos casos a cero.

La reducción de los costos por mantenimiento de inventarios, son uno de los resultados más obvios del sistema JIT, conjuntamente con mejoras en la productividad.

Lo que se necesita para hacer funcionar un sistema "justo a tiempo".

En primer lugar la concentración geográfica es muy importante, ya que son necesarios tiempos en tránsito relativamente cortos de la planta del vendedor a las plantas del cliente (menos de un día), si la operación de producción del cliente va a obtener las partes que requiere justo a tiempo.
Por ejemplo una fábrica debería tener la mayoría de sus proveedores localizados dentro de un radio de 100 km, alrededor de sus plantas, generando así un tiempo de espera, o reemplazo de materias primas que se hace más y más breve, llegando a tener un inventario de cero.

Otro aspecto muy importante es tener una calidad confiable. En el proceso de utilización siempre debe ser capaz de confiar en recibir sólo partes buenas de sus proveedores. El concepto consiste en que cada operación debe considerar a la siguiente operación como el cliente final. Algo muy importante es que los esfuerzos de control de calidad están dirigidos a controlar el proceso de producción, más no a la inspección para separar lo malo.

Es bueno tener una red de proveedores manejables, es decir, un número mínimo de proveedores ayudan a hacer funcionar los sistemas justo a tiempo.

El sistema de transportación controlada. Esto se puede llevar a cabo utilizando transporte propio o bajo contratación con ellos, así las entregas de cada proveedor ocurren varias veces al día en momentos programados con *anticipación*.

Lotes de tamaño pequeño. Gran parte de las empresas japonesas que utilizan sistemas justo a tiempo requieren que el tamaño de los lotes sea menor del 10% de la utilización de un día, la idea es lograr un lote del tamaño de una pieza para que cada vez que un producto sea producido, también se produzca una de cada una de las otras partes que lo componen.

Eficiencia en el manejo y recepción de material. Las empresas japonesas en su mayor parte han eliminado las operaciones de recepción formales, secciones completas de plantas actúan como áreas de recepción y las partes son entregadas tan cerca como sea posible de los puntos de uso.

Un compromiso firme con la administración, el sistema justo a tiempo abarca toda la planta. La administración debe hacer disponibles los recursos de la empresa para asegurarse de que el sistema funciona y debe mantenerse firme durante los periodos de conversión al sistema Justo a Tiempo, aunque cuando el proceso pueda ser muy duro y prolongado.[1]

CAUSA -EFECTO JIT

Cuando la competencia y calidad por parte de los japoneses se hizo tan evidente, originalmente se pensó que las razones estaban enraizadas en su cultura y en el apoyo dado al empleo de por vida. Los apoyos cultural y ambiental del medio ambiente de trabajo son sin duda importantes, pero las causas realmente importantes se encuentran en lo que sucede en la planta misma. Un análisis del sistema operativo japonés produce resultados que son bastante predecibles. El sistema demanda un proceso inagotable de mejoría, que comienza con un intento de reducir el tamaño de los lotes de producción.

Reducción del tamaño del lote.

Para un costo de inventario dado, menores costos de instalación resultan en una EOQ de menor tamaño, como se mencionó anteriormente.

Esta lógica ha conformado la base para muchos métodos de control de inventarios. La diferencia en la práctica, sin embargo, es que los japoneses no aceptan como dados los costos de instalación. En lugar de ello, dedican gran parte de sus esfuerzos a reducir estos costos de instalación a través del diseño de herramientas, de dispositivos rápidamente modificables y de procedimientos cuidadosamente desarrollados.

El objetivo es reducir los costos de instalación hasta el punto que EOQ = 1 unidad. Desde luego, si EOQ = 1 unidad, los beneficios inmediatos son una reducción de los inventarios de producto en proceso y una mayor flexibilidad para cambiar la producción de un producto a otro.

Eliminación de inventarios de seguridad.

Los inventarios de seguridad llevan a cabo la función de absorber las variaciones en la intensidad de flujo dentro de los sistemas de producción. Uno de los efectos directos de la reducción de los tamaños de lote para una producción JIT (justo a tiempo) son menores inventarios de producto en proceso dentro del sistema.

Entre mayores sean las variaciones, mayor será el inventario de seguridad requerido para aislar cada una de las operaciones que forman parte de la secuencia de efectos de la falta de suministros de materiales.

---

[1] Según vicepresidente de General Motors corporación: Robert B. Stone

Los japoneses reconocen la función de los inventarios de seguridad, pero la tratan de una manera filosófica bastante diferente de lo común.

Al eliminar sistemáticamente una parte de los inventarios de seguridad, los gerentes japoneses exponen a los trabajadores que provocan una variación en el flujo.

Cuando los problemas que provocan la variación han sido resueltos, los gerentes japoneses eliminan una cantidad adicional del inventario de seguridad. A los trabajadores no se les permite nunca tornarse complacientes. Confrontan continuamente el reto de perfeccionar el proceso. Los inventarios totales se reducen y la productividad mejora. Este resultado conduce a índices regulares de producción como consecuencia de un número menor de interrupciones debidas a problemas de calidad, lo cual reduce la necesidad de contar con inventarios de seguridad. El mejor índice de desperdicio y de control de calidad resulta de la reducción lotes y de la producción JIT también resulta en índices de producción más estables debido a que existen menos interrupciones en el flujo que de lo contrario se presentarían como consecuencia de una calidad inadecuada.

Además, existen ciertos efectos indirectos que influyen en la producción justo a tiempo, estos efectos incluyen menores costos de mantenimiento de inventarios, menor cantidad de espacio y equipo para manejar el inventario, menos contabilidad relacionada con los inventarios y una menor necesidad de un control físico de inventario.

Mejora de la productividad.

Los efectos en la productividad del sistema operativo japonés son bastante evidentes. La estrecha vinculación entre los trabajadores que producen una mayor concientización de los problemas y sus causas, junto con la intervención de la administración para reducir los inventarios de seguridad, producen los efectos en producción tales como:

- Inventarios con un menor tamaño del lote
- Menores inventarios de seguridad
- Menor cantidad de desperdicio
- Menor cantidad de mano de obra directa desperdiciada en labores de procesamiento
- Menores costos indirectos asociados con los inventarios
- Menor espacio para los inventarios
- Menos contabilidad para el manejo de inventarios
- Menor esfuerzo para el control físico del inventario.
- Menor cantidad de materiales, mano de obra e insumos indirectos para una producción igual o mayor, es decir, mayor productividad.

- Menor inventario en el sistema, es decir, una respuesta más rápida en el mercado, mejores pronósticos y *menos administración*.

Estas mejoras en la productividad resultan de los esfuerzos de los trabajadores como parte de un sistema estrechamente vinculado. Dado que la mayor parte del sistema es manejado por los trabajadores y sus supervisores, los costos de administración son bajos y los gerentes quedan libres para dedicarse a la reducción de cuestiones estratégicas.

Capítulo III

LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES EN EL MANEJO DE INVENTARIOS.

MODELO DE INVENTARIO DE PRODUCCIÓN.

De los problemas que se pueden atacar entre otros esta el de producción, es decir, se quiere que la producción sea la que se requiera para satisfacer la demanda sin que nos falte pero que tampoco nos sobre, en otras palabras se requiere producir el óptimo.

Digamos que una compañía produce un articulo en un periodo de cuatro meses. Las demandas de los cuatro meses son *100, 200, 180* y *300 unidades* respectivamente. Una demanda para un mes en curso se puede satisfacer a través de:

- Producción excesiva en un mes anterior, almacenada para un futuro consumo.
- Producción en el mes actual.
- Producción excesiva en un mes posterior, para cubrir pedidos de meses anteriores.

El costo de producción variable por unidad en un mes cualquiera es de $ 4.00. La unidad producida para consumo posterior incurrirá en un costo de almacenamiento a razón de $ 0.50 por unidad por mes. Por otra parte, los artículos ordenados en meses anteriores incurren en un costo de penalización de $ 2.00 por unidad por mes

La capacidad de producción para elaborar el producto varía cada mes dependiendo de los otros artículos que se produzcan. Los cálculos de los cuatro meses siguientes son: 50, 180, 280 y 270 unidades respectivamente.

El objetivo es formular el plan de inventario de producción a costo mínimo, la siguiente teoría es la adecuada para tratar estas situaciones y dar la solución óptima y es usada para la administración de operaciones.

Este tipo de problemas se pueden formular como un modelo de transporte. La equivalencia entre los elementos de los sistemas de producción y transporte se establece de la siguiente manera:

EQUIVALENCIA ENTRE LOS SISTEMAS DE PRODUCCIÓN Y DE TRANSPORTE

Sistema de transporte.	Sistema de producción.
1 Fuente i	1. Periodo de producción i
2. Destino j	2. Periodo de demanda j
3. Oferta de la fuente i	3. Capacidad de producción i

4. Demanda en el destino j

5. Costo de transporte de la fuente i al destino j.

4. Demanda del Período j

5. Costo de producción e inventario del período i al j.

En la siguiente tabla se presenta un resumen del problema como un modelo de transporte El costo de " transporte" unitario del periodo i al j es:

$$
C_{ij} = \begin{cases} \text{Costo de producción en i} & i = j \\ \text{Costo de producción en i más costo de almacenamiento de i a j} & i < j \\ \text{Costo de producción en i más costo de penalización de i a j} & i > j \end{cases}
$$

La definición de Cij indica que la producción en el periodo *i* para el mismo periodo (i = j) sólo generará costo de producción.

Si en el periodo *i* se produce para periodos a futuro (i < j) se incurre en un costo de almacenamiento adicional.

De la misma manera, la producción en i para cubrir pedidos hechos con anterioridad (i > j) incurre en un costo de penalización adicional.

EL ALGORITMO DE TRANSPORTE.

Dado que el problema a resolver es:

$$
Min\ Z = \sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\ X_{ij}
$$

sujeto a:

$$
\begin{aligned} X_{1j} + X_{2j} + \dots + X_{ij} &= A_i \qquad i = 1, \dots, m \quad * \\ X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{ij} &= B_j \qquad j = 1, \dots, n \quad ** \end{aligned}
$$

$$
X_{ij} > 0.
$$

Donde A_i y B_j son números enteros positivos, para un mejor entendimiento se establecen dos matrices, una de costos y otra de flujos, de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{ll|ccccc|c}
 & & \multicolumn{5}{c|}{\text{Destinos}} & \\
 & & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \text{oferta} \\
\hline
 & 1 & C11 & C12 & C13 & \cdots & C1n & A1 \\
 & 2 & C21 & C22 & C23 & \cdots & C2n & A2 \\
 & . & & & & & & \\
\text{Orígenes} & . & & & & & & \\
 & . & & & & & & \\
 & . & & & & & & \\
 & m & Cm1 & Cm2 & Cm3 & \cdots & Cmn & Am \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{\text{Demanda}} & B1 & B2 & B3 & \cdots & Bn &
\end{array}
$$

Costos

$$
\begin{array}{ll|ccccc|c}
 & & \multicolumn{5}{c|}{\text{Destinos}} & \\
 & & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \text{Oferta} \\
\hline
 & 1 & X11 & X12 & X13 & \cdots & X1n & A1 \\
 & 2 & X21 & X22 & X23 & \cdots & X2n & A2 \\
 & . & & & & & & \\
\text{Orígenes} & . & & & & & & \\
 & . & & & & & & \\
 & m & Xm1 & Xm2 & Xm3 & \cdots & Xmn & Am \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{\text{Demanda}} & B1 & B2 & B3 & \cdots & Bn &
\end{array}
$$

Flujos

En el caso en el que la capacidad de producción sea mayor que el consumo o demanda, entonces se añade un centro de consumo artificial $n+1$ cuyos costos unitarios son todos cero

Por otro lado, si la demanda total excede a la capacidad de producción, entonces se añade un centro de producción artificial $m+1$, cuyos costos unitarios son todos cero.

Cuando un problema real está desbalanceado, es decir,

$$\sum_{i=1}^{m} ai \neq \sum_{j=1}^{n} bj$$

añadiendo ya sea orígenes o destinos artificiales, se balancea y así se satisface la condición necesaria y suficiente para que el problema tenga solución.

Una vez que el problema está balanceado, se requiere una solución inicial que sea básica y factible. Existen varios mecanismos para lograr hallar esta solución por ejemplo El método de esquina noroeste, El método de Vogel.

MÉTODO DE ESQUINA NOROESTE, PARA HALLAR UNA SOLUCIÓN INICIAL BÁSICA FACTIBLE.

El punto de partida es una matriz de costos , destinos, ofertas y demandas de un problema balanceado, Para obtener una solución básica factible al problema se empieza a construir una matriz de flujos de la siguiente manera:

1) En la posición (1,1), que es el extremo noroeste de la matriz asígnese el mínimo (a1,b2) = X1,1. Réstese X1,1 de la oferta a1 y de la demanda b1. Obviamente, alguna de estas dos cantidades se convertirá en cero.

2) Si a1 se convierte en cero, pásese a la posición (2,1) y hágase X21 = Mín (b1-X11,a2). Si por el otro lado es b1 el que se convierte en cero en el paso anterior, se pasa a la posición (1,2) y X1,2 = Mín (a1-X1,1, b2).

3) Continúese con la misma lógica hasta llegar a la posición (m,n). La matriz de flujos que se obtenga será factible y básica para el problema.

MÉTODO DE VOGEL, PARA OBTENER UNA SOLUCIÓN INICIAL BÁSICA FACTIBLE.

1) Constrúyase una matriz de costos y de flujos asociados al problema balanceado e ir al paso 3.

2) Utilícese el remanente de la matriz de costos y de flujos una vez que estos últimos se hayan asignado.

3) Se entiende por diferencia de la fila (de columna) a la diferencia que hay entre los dos números más pequeños que existen en la fila (columna). Calcúlese todas las diferencias de fila y de columna de la matriz de costos.

4) Selecciónese aquella fila o columna con mayor diferencia; los empates se deciden arbitrariamente.
5) Localícese el costo más pequeño en la matriz de costos en la fila o columna seleccionada en el paso anterior. Sea esta la posición Cij.

6) En la matriz de flujo hágase Xij = Mín (ai,bj), donde la posición (i,j) se identificó en el paso anterior. Hágase la oferta ai igual a ai-Xij y la demanda bj igual a bj-Xij.

7) Si ai-Xij = 0, llénese la fila i de la matriz de flujos con ceros, a excepción de la posición (i,j) y elimínese esa fila de cualquier consideración futura. Por otra parte, si bj-Xij = 0, llénese la columna j de la matriz de flujos con ceros, a excepción de la posición (i,j) y *elimínese esa columna* de cualquier consideración futura. Regrésese al paso 2.

MÉTODO DE MÍNIMA MATRIZ.

En este método se debe acudir a la celda que tenga cuyo costo es el más bajo de todas las que integran la matriz. Si es que existen varias, se selecciona arbitrariamente alguna de ellas.

Sea la (i , j), la celda cuyo costo es el más bajo, entonces Xij = (ai , bj).

- Si ai > bj hágase bj = bj - ai y *elimínese el renglón i.*
- Si bj < ai hágase ai = ai -bj y elimínese la columna j.
- Si ai = bj elimínese o el renglón i ó la columna j pero no ambos.

Se continua repitiendo el proceso para la tabla resultante.

Podemos decir que en la practica, resulta ser este el mejor método.

ALGORITMO

1. Balancéese el problema original, a fin de que se consiga *la condición necesaria* y suficiente para obtener una solución óptima, es decir:

$$\sum_{i=1}^{m} ai = \sum_{j=1}^{n} bj$$

2. Genérese una solución inicial que sea básica y factible, ya sea utilizando el método de Vogel, esquina noroeste o el de mínima matriz.

3. Constrúyase una matriz de costos Cij, asociada a la solución básica factible que se tenga, donde:

Cij = cij,	si	*Xij*	esta en la base,
Cij = 0,	si	*Xij*	no esta en la base.

4. Con esta matriz de costos, calcúlese el valor de todas las variables duales Ui ,i = 1,...,m; Vj ,j = 1,...,n utilizando la fórmula:

$$Ui + Vj - Cij = 0, \qquad i = 1,...,m; \quad j = 1,...,n$$

Como hay m + n variables (m variables Ui y n variables Vj), y solamente m + n - 1 ecuaciones $Ui + Vj - Cij = 0$, existe un grado de libertad. Esto equivale a darle un valor arbitrario (se recomienda el valor cero) a cualquiera de las variables duales y así quedará por resolver, un sistema de m + n - 1 ecuaciones con m + n - 1 variables.

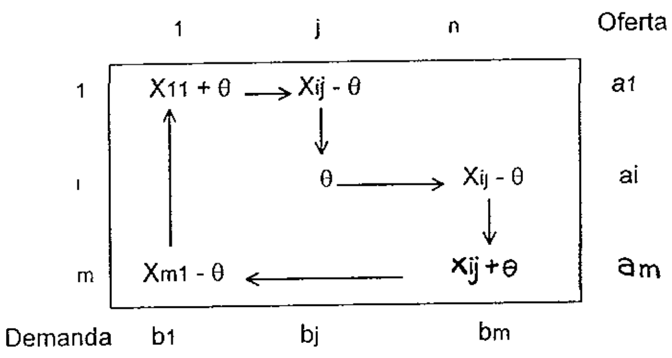
$\geq Vj - Cij$. Como se están usando reglas de minimización, si $Zij - Cij \leq 0$ para toda i y j, la solución actual es óptima. En caso contrario, la Xij correspondiente a la $Zij - Cij$ más positiva entra a la base. Para guardar consistencia con la programación lineal se utilizan las reglas de maximización. En este caso:

$$Zij - Cij = Cij - (Ui + Vj)$$

Si todas las $Zij - Cij \geq 0$, la solución actual es óptima, en caso contrario, se introduce, a la base la Xij correspondiente a la $Zij - Cij$ más negativa.

6. SI la variable Xij entra a la base con un cierto valor positivo, θ, la oferta Ai y la demanda Bj se desequilibran en un valor $\pm \theta$, a menos que exista, un mecanismo de compensación.

Existe un desequilibrio que únicamente puede desaparecer si se resta y se suma *teta* unidades en ciertas partes de la matriz de flujos. Un pequeño análisis permite construir un circuito tal como se muestra:



Flujos

En donde en ciertas partes se ha sumado el valor de θ y en otras se ha restado.

Este circuito es único. Por lo tanto, el paso 6 se puede resumir como sigue:

6-a. Constrúyase el circuito único que contiene a la variable X_{ij} que entra en la base.

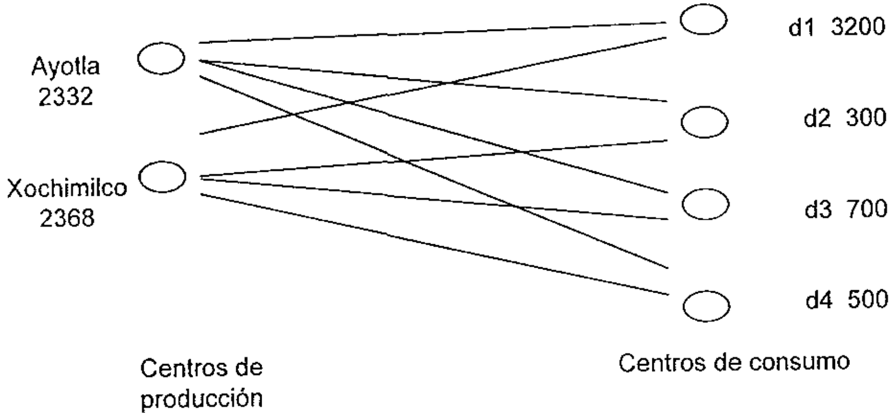
6-b $X_{ij} = \theta$, donde θ es el mínimo de todos los vectores básicos en el circuito que disminuyen su valor a medida que θ aumenta.

Regrese al paso 3 con esta mueva solución.

IDEA GRÁFICA.

La idea gráfica del modelo de inventario de producción (transporte) es que se tienen centros de producción normales y de tiempo extra (centros de oferta) y centros de consumo (destinos). El flujo va de los primeros a los segundos únicamente como se indica en la siguiente figura:

Idea gráfica del problema



Sea X_{ij} la producción correspondiente por unidad más los costos de mantener inventarios.

Se tienen:

m centros de producción
n periodos de demanda (centros de consumo)

Sean.

Ai la capacidad de producción en dicho centro.

Bj la demanda de dicho periodo.

Cij el costo de producción más el costo de almacenamiento en el centro de producción i *para el centro de consumo j.*

Como ya habíamos dicho , sea Xij la producción correspondiente más los costos de mantener inventarios de i a j. Entonces la función objetivo a minimizar será:

$$Mín\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Cij \quad Xij$$

sujeto a.

$$\sum_{j=1}^{n} Xij \leq Ai \qquad i = 1, \ldots, m \quad *$$

$$\sum_{i=1}^{m} Xij \geq Bj \qquad j = 1, \ldots, n \quad **$$

$$Xij \geq 0.$$

* Restricciones de oferta,

** Restricciones de demanda.

Es decir, no pueden ser negativas, no se admite que exista $Xij < 0$ para alguna i,j ya que esto indicaría que tendríamos centros de consumo negativos.

Si observamos la matriz de restricciones, nos podemos dar cuenta que en cada columna se tiene un uno arriba y un uno abajo, si esto pasa, por teoría del álgebra lineal se tienen soluciones exactas, o cuando la suma de la capacidad de producción es igual a la suma de los centros de consumo, es decir, el problema esta balanceado.

Los dos tipos de restricciones son:

a) Qué la cantidad de unidades producidas que sale de un centro de producción a los centros de consumo y que no pueden exceder a la producción, y

b) Qué la cantidad de unidades producidas que llegan de todos los centros de producción a un centro consumidor, no debe ser menor que la demanda del centro consumidor.

RESPALDO O JUSTIFICACIÓN.

La estructura del problema supone que *m* centros de producción tienen que abastecer a *n* centros de consumo de cierto producto.
Se supone que *Cij* es costo de producción en el periodo *i* más el costo de almacenamiento de *i* a *j* , *(i = 1, ... ,m ; j = 1, ... ,n).*

El problema se reduce a determinar cuántas unidades del producto deben de producirse en el centro *i destinados para* los centros de consumo *j*, tal que minimicen los costos totales de producción y administración de inventarios, de tal forma que se satisfaga la demanda del centro de consumo *j* y no se exceda la capacidad de producción del centro de producción *i*.

Bi es la demanda del periodo *i, y* todos los *j* deben ser menores o iguales a la capacidad de producción. Pues deberán tener por lo menos lo que demandan en tal periodo.

No se usan variables de holgura, ya que se tiene que *la suma de las Ai = la suma de las Bj (Balanceo del problema).* Esto implica que, podemos decir que se cumplen las *ecuaciones,* es decir, <u>no son desigualdades sino igualdades.</u> Así, la formulación del problema puede escribirse como sigue:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Cij \quad Xijj$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} Xij = Ai \qquad i = 1, \ldots ,m^{*}$$

$$\sum_{i=1}^{m} Xij = Bj \qquad j = 1, \ldots ,n \quad {**}$$

$$Xij \geq 0. \qquad {***}$$

Gráficamente se tiene un árbol, es decir, una gráfica conexa, (sin ciclos).

La restricción (*) indica que toda la producción que se emana del centro de producción *i* a todos los posibles *m* centros de consumo *j*, no puede exceder a la capacidad de producción del centro *i* que es *Ai*, existe una restricción de este tipo para cada centro de producción.

Por otro lado la restricción (**) indica que toda la producción de todos los posibles n centros debe satisfacer la demanda del centro de consumo Bj. Existe una restricción de este tipo por cada centro de consumo.

Por último la restricción de no-negatividad (***) indica que el sentido del (flujo) producto se da de los centros de producción a los centros de demanda únicamente.

Pero como se puede observar en la estructura del problema, existen *<u>igualdades</u>* en las restricciones, por tal motivo se utiliza el siguiente teorema:

TEOREMA DE TRANSPORTE.

Una condición necesaria y suficiente para que la estructura del problema tenga solución es que la capacidad de producción total, sea igual al consumo total, es decir:

$$\sum_{i=1}^{m} Ai = \sum_{j=1}^{n} Bj$$

Prueba:

De la fomulación lineal se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{n} Xij = ai \qquad i = 1,\dots, m$$

Si se suma sobre todos los orígenes, no se afecta la igualdad ,es decir:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Xij = \sum_{i=1}^{m} ai \qquad *$$

Por otro lado, de la formulación lineal se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{m} Xij = bj \qquad j = 1,\dots,n$$

Y si se suma sobre todos los centros de consumo se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} Xij = \sum_{j=1}^{n} bj \qquad **$$

*Las igualdades ** y * establecen la prueba del problema.*

Capitulo IV

UNA APLICACIÓN.

APLICACIÓN

En esta parte del presente trabajo se dedica a dar muestra de la teoría estudiada en el capitulo anterior, es importante decir que los datos que se utilizan aquí son reales y actuales, se omiten los nombres respectivos de dichas empresas por política de las mismas.

La aplicación se da estudiando la producción de sólo un producto, esta producción la realiza la empresa H que así la denotamos, esta empresa se dedica a embotellar agua purificada, elabora su producto con su propia marca, y además maquila el producto a otra empresa que denotamos R.

La empresa H cuenta con dos plantas una ubicada en Ayotla y la otra en Xochimilco, las producciones correspondientes de dichas plantas son 2332 y 2368 unidades por semana (por unidades entendemos cajas listas para salir al mercado), además se cuenta con cuatro centros de consumo o demanda, de los cuales el consumo correspondiente es el siguiente d1 con 3200, d2 con 300, d3 con 700 y d4 con 500 cajas respectivamente, en periodos de tiempo semanal.

Dado que la empresa H le maquila producto a la empresa R, lógicamente R pasa a ser otro centro de consumo, a lo cual damos la siguiente explicación, la empresa H con la capacidad de producción que tiene, sus ganancias son mayores que si se dedicara solamente a maquilar el producto para la empresa R y dado que la empresa R como almacena el producto recibe la cantidad que le sea posible elaborar a la empresa H, esto es bien aprovechado para nuestra aplicación y para la empresa productora pues cuando existe una baja de demanda en cualquiera de los cuatro centros de consumo se maquila el producto para la empresa R aprovechando así la capacidad de producción al máximo, en otras palabras, satisface la demanda de su producto primero y el resto de producción la realiza para la empresa R.

A continuación damos la solución óptima del problema de producción, como ya se mencionó se toma la producción por semana y los costos se dan de la siguiente manera:

Si tomamos el siguiente modelo:

$$\text{Origen } i \ldots \text{ al destino } j = (x * y) + (z) = \text{costo.}$$

de dónde:

- w = costo de una pieza.
- x = número de personas que se requiere para dicha producción.
- y = sueldo que percibe cada persona por semana (constante).
- z = costo de envio.

Costos del centro de producción Ayotla a los cuatro centros de consumo.

Ayotla ... d1 = (6*310) + (21.5*3200) + (0) = $0660.00
Ayotla ... d2 = (2*310) + (21.5*300) + (90) = $7160.00
Ayotla ... d3 = (3*310) + (21.5*700) + (800) = $16780.00
Ayotla ... d4 = (2*310) + (21.5*500) + (120) = $ 11490.00

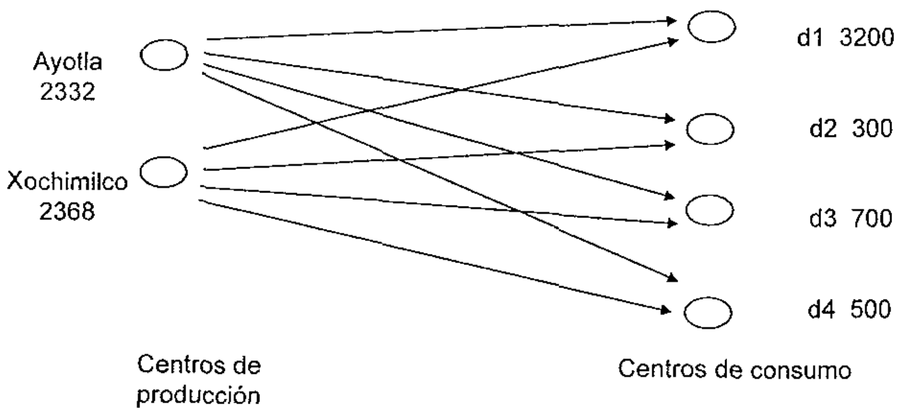
Costos del centro de producción Xochimilco a los cuatro centros de consumo.

Xochimilco ... d1 = (6*310) + (21.5*3200) + (0) = $ 70660.00
Xochimilco ... d2 = (2*310) + (21.5*300) + (150) = $ 7150.00
*Xochimilco ... d3 = (3*310) + (21.5*700) + (700) = $ 16680.00*
Xochimilco ... d4 = (2*310) + (21.5*500) +(180) = $ 11620.00

Nótese que el costo de envío de cualquier centro de producción al primer centro de consumo tiene un valor igual a cero, esto ocurre ya que el consumidor va hasta la planta por el producto.

Ahora nuestro objetivo es determinar las rutas de los centros de producción a los centros de consumo que minimicen los costos de producción en nuestro problema, es decir, que cantidad y para que centro de consumo se deberá producir del centro de producción *i* destinadas para el centro de consumo *j*.

Gráficamente el problema a resolver se muestra en la siguiente figura:



El problema como modelo de programación lineal se da de la siguiente manera:

$$\text{Mín } Z = 2332X_{1,1} + 868X_{2,1} + 300X_{2,2} + 700X_{2,3} + 500X_{2,4}$$

sujeto a:

$$\begin{array}{lllllr}
2332X_{1,1} & & & & & \leq 2332 \\
 & 868X_{2,1} + & 300X_{2,2} + & 700X_{2,3} + & 500X_{2,4} & \leq 2368 \\
2332X_{1,1} + 868X_{2,2} & & & & & \geq 3200 \\
 & & 300X_{2,2} & & & \geq 300 \\
 & & & 700X_{2,3} & & \geq 700 \\
 & & & & 500X_{2,4} & \geq 500
\end{array}$$

$$X_{ij} \geq 0$$

Como se puede ver el rango de la matriz es igual a m+n-1 = 4+2-1 = 5, es decir, se tienen cinco variables básicas y tres variables no básicas.

Ahora se muestra el problema en la siguiente tabla, y se le da solución inicial básica factible haciendo uso del método de esquina noroeste.

	d1	d2	d3	d4	
O1	70660 $X_{1,1}$	7160 $X_{1,2}$	16780 $X_{1,3}$	11490 $X_{1,4}$	2332
O2	70660 $X_{2,1}$	7150 $X_{2,2}$	16680 $X_{2,3}$	11620 $X_{2,4}$	2368
	3200	300	700	500	

Donde:

Las cantidades en la esquina superior derecha representan los costos de usar esa ruta.

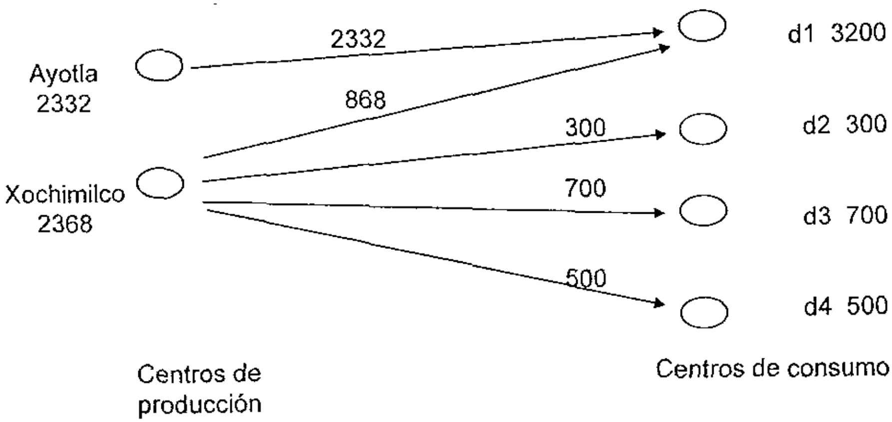
Como se puede observar el problema esta balanceado, es decir, la suma de la producción de las dos plantas es igual a la suma de la demanda de los cuatro centros de consumo, por lo tanto podemos aplicar el teorema de transporte, pues se cumple la condición de dicho teorema.

Por lo tanto el problema planteado tiene solución.

La siguiente es una solución inicial factible, utilizando el método de esquina noroeste, tenemos la siguiente tabla.

	d1	d2	d3	d4	
O1	70660 2332	7160	16780	11490	2332
O2	70660 868	7150 300	16680 700	11620 500	2368
	3200	300	700	500	

La tabla anterior es una solución inicial básica factible, con un costo de $245 743 000 . 00 Y gráficamente se representa con la siguiente red:



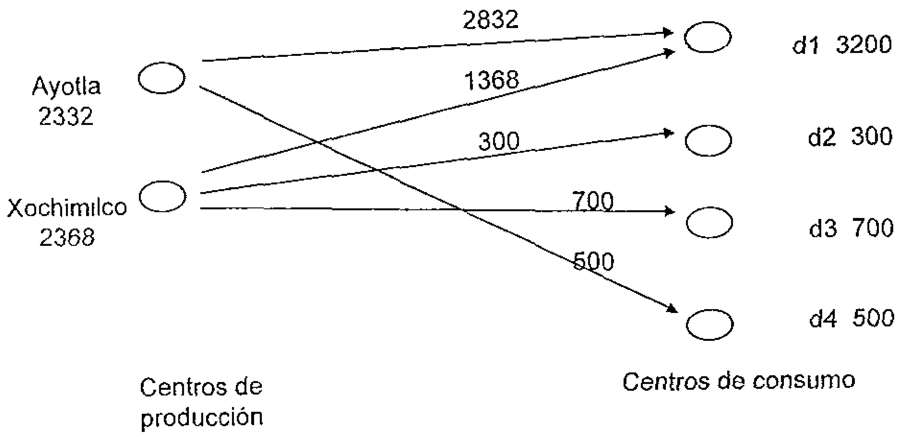
Es decir, en el centro de producción 1 se producen 2332 piezas para el centro de consumo 1, y en el centro de producción 2 se producen 2368 piezas, 868 para el centro de consumo 1, también 300 para el centro de consumo 2, además 700 para el centro de consumo 3 y 500 para el centro de consumo 4.

Repitiendo el algoritmo, llegamos a que la solución óptima es la siguiente:

	d1	d2	d3	d4	
O1	70660 2332	7160	16780	11490 500	2332
O2	70660 868	7150 300	16680 700	11620	2368
	3200	300	700	500	

Esta es la solución óptima con (5) n+m-1 variables básicas. Que tiene un costo de \$245 678 000 . 00

Y su gráfica correspondiente es:



Es decir, en el centro de producción 1 se producen 1832 piezas para el centro de *consumo* 1, y también 500 para el centro de consumo 4, y en el centro de producción 2 se producen 2368 piezas, 1368 para el centro de consumo 1, también 300 para el centro de consumo 2, además 700 para el centro de consumo 3

CONCLUSIONES

A lo largo del presente trabajo, se puede notar como es que el actuario resulta ser una pieza muy importante dentro del ámbito de la administración, tan es así que se hace ver la relación que existe entre las matemáticas, la producción y la administración (de inventarios), los métodos y las opciones que se dan para minimizar sus costos generales.

De la aplicación del modelo a la empresa de estudio podemos decir.

Cómo ya se mencionó que la empresa H maquila producto a la empresa R, y sabiendo además que la empresa R, tiene demanda infinita, entonces la empresa H le maquila la máxima cantidad posible, claro dentro de su política de producción y conveniencia, el lector se puede preguntar ¿Por qué la empresa H no se dedica a producir, es decir, a maquilar para la empresa R si es que tiene una demanda infinita?

La respuesta es clara, pues dada la producción propia, es decir, la demanda del producto de H, le conviene a la empresa H elaborar su propio producto que maquilarle producto a la empresa R, ya que los ingresos de maquilarle a R su producto son más bajos en comparación con los ingresos que genera la producción de su propio producto.

Podemos decir que en el caso que nos ocupa, nos acercamos a JIT, ya que la producción que se realiza para la empresa R, se aprovecha para ocupar la mano de obra, es decir, no existe la mano de obra ociosa en los casos en los que la demanda del producto de H disminuye o baja, además como la producción maquilada es bien recibida en cualquier momento por la empresa R, se eliminan los costos de manejo de inventarios así como los costos de despido y contratación de mano de obra.

Lo dicho en el párrafo anterior se afirma, ya que cuando la demanda del producto de la empresa H baja o disminuye, se aprovecha la mano de obra etc. Para maquilarle la producción a la empresa R, en otras palabras, la mano de obra siempre esta activa produciendo ya sea para la propia empresa o para la empresa R, con la diferencia de que los ingresos varían de acuerdo al producto que se elabore, cuando la demanda del producto de la empresa H baja, automáticamente la demanda del producto de la empresa R aumenta y a la empresa H no le queda otra opción que maquilarle el producto a la empresa R, pues es mejor aprovechar la mano de obra y obtener ingresos aunque sean más bajos a tener la mano de obra ociosa y todavía sin obtener ingresos.

Las causas que motivaron para utilizar la teoría expuesta en los capítulos anteriores y en general el método, es que la teoría de transporte da las bases para aplicarla en diversos campos de la industria, es decir, la producción de tal forma que se den soluciones favorables y sobre todo de manera óptima, además de ser una teoría muy bonita y práctica para su entendimiento y aplicación

De los problemas que se presentaron en la aplicación mostrada en el capitulo IV, principalmente fueron la colecta de los datos por una parte, ya que dichas empresas no quisieron dar nombres ni domicilio de las mismas, otras situaciones de conflicto que se presentaron en la aplicación del modelo fueron, principalmente el ajuste de la teoría y la equivalencia real entre los sistemas de transporte y de producción, para así definir claramente el objetivo que se había planteado, es decir, producir de manera óptima aprovechando los recursos con que cuentan dichas empresas.

ANEXO

PROBLEMA DEL TRANSPORTE.

Como el problema a resolver es el siguiente:

$$Mín\ Z = \sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\ X_{ij}$$

sujeto a:

$$X_{1j} + X_{2j} + \ldots + X_{ij} = A_i \qquad i = 1, \ldots, n \quad *$$

$$X_{i1} + X_{i2} + \ldots + X_{ij} = B_j \qquad j = 1, \ldots, m \quad **$$

$$X_{ij} > 0.$$

Donde *Ai* y *Bj* son números enteros positivos.

El problema de transporte puede escribirse en forma condensada o compacta de la manera siguiente:

$$\text{Mín } Z = CX$$

Sujeto a:

$$Ax = d$$
$$X \geq 0$$

Donde la estructura de las componentes es la siguiente:

$$X^T = (X_{11}, X_{12}, X_{12}, X_{13}, \ldots X_{1n}, X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n}, X_{m1}, X_{m2}, \ldots, X_{mn})$$

$$C = (C_{11}, C_{12}, C_{12}, C_{13}, \ldots C_{1n}, C_{21}, C_{22}, \ldots, C_{2n}, C_{m1}, C_{m2}, \ldots, C_{mn})$$

$$d^T = (a_1, a_2, a_3, \ldots a_m, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$$

$$\begin{array}{|cccccc|l}
\hline
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & & & & & & \text{m renglones} \\
\cdot & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \\
 & & & & & & \\
I_n & I_n & I_n & \ldots & I_n & I_n & \text{n renglones} \\
\hline
\end{array}$$

m*n renglones

El vector 1 y el vector 0, son vectores fila que contienen n unos y n ceros respectivamente, tal como se muestra a continuación.

vector 1: $\quad 1 = (1, 1, 1, \ldots, 1)$

vector 0: $\quad 0 = (0, 0, 0, \ldots, 0)$ y tienen n componentes

Además

$$In = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ . & & 0 \\ . & & 0 \\ . & & 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 & 1 \end{bmatrix}}_{n\text{ - componentes}} n\text{ - componentes}$$

La matriz de coeficientes tecnológicos A de m+n renglones y m*n columnas tiene las siguientes propiedades:

a) El rango de A es m + n - 1.

Esto se puede probar fácil mostrando que la suma de los primeros m renglones es igual a la suma de los últimos n renglones, y que cualquier submatriz cuadrada de A de orden m + n - 1 es no singular.

Por ejemplo:

Sea A una matriz que confirma la estructura de un problema como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \ldots 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si sumamos los tres últimos renglones menos el segundo, generarán el primer renglón. Por lo tanto, cada renglón es dependiente de los m + n - 1 renglones restantes.

b) La matriz A es unimodular, es decir, que cualquier submatriz cuadrada de A de orden m + n -1 tiene un determinante que es igual a 0 ó ± 1.

Estas propiedades permiten el desarrollo de un nuevo algoritmo llamado de transporte, que resuelve este tipo de problemas de una manera más eficiente (menos iteraciones y menos tiempo) que el método simplex.

Se ve como el método simplex resolvería el problema de transporte. Se designa a las columnas de A por aij, es decir:

$$a_{ij} = e_i + e_{mj} = \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{matrix}} \begin{matrix} \\ \\ \text{posición } i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} + \boxed{\begin{matrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{matrix}} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \text{posición } m + j \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \boxed{\begin{matrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{matrix}} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \text{posición } i \\ \\ \\ \\ \\ \text{posición } m + j \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Como la matriz A de m + n renglones y m*n columnas tiene rango m + n - 1, cualquier base B *del problema de transporte* será de orden m + n -1.

Sea ésta base la siguiente.

$$B = (\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \ldots, \alpha m{+}n{-}1).$$

Donde αk, con $k = 1, 2, \ldots, m + n - 1$, son $m + n - 1$ columnas de aij de A linealmente independientes

Cualquier vector âij que no esté en la base B puede escribirse como una combinación lineal de las αk, $k = 1, \ldots, m + n - 1$, es decir:

$$\hat{a}ij = \sum_{k=1}^{m+n-1} Y_{ij}^{k} \alpha k \qquad {***}$$

donde los elementos Yij son cero ó 1 ó -1, en forma matricial se tiene:

$$\hat{a}ij = BYij$$

$$\text{donde } yij = \boxed{\begin{matrix} Y_{ij}^{1} \\ Y_{ij}^{2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{ij}^{m+n-1} \end{matrix}}$$

Sea $X\beta$ una solución básica del problema ; *donde*

$$X\beta = \boxed{\begin{matrix} X\beta 1 \\ X\beta 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X\beta m{+}n{-}1 \end{matrix}}$$

Sea âpq el vector que va a entrar en la base , y αr el que va a salir de B la nueva solución básica $X\beta$ es:

$$X\beta = \begin{bmatrix} X\beta 1 \\ X\beta 2 \\ . \\ . \\ . \\ X\beta m+n-1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$X\beta k = X\beta k - \frac{Y^{k}_{pq}\, X\beta r}{Y^{r}_{pq}} \quad k = r, \quad Y^{r}_{pq} \neq 0$$

$$X\beta r = \frac{X\beta r}{Y^{r}_{pq}} \quad , \quad Y^{r}_{pq} \neq 0$$

Como $X\beta$ es factible y todas las Y^{k}_{ij} son ó 0 ó 1 ó -1, se concluye que Y^{r}_{pq} es igual a 1, y por lo tanto,

$$X\beta k = X\beta k \pm X\beta r \qquad k \neq r, \quad *$$

$$X\beta = X\beta r \qquad **$$

En la regla que se utiliza para determinar el vector de salida, el pivote siempre debe de ser positivo.
De (*) y (**)se puede concluir que sí todas las ofertas ai (i = 1,. . . ,m) y todas las demandas bj (j = 1, . . ,n) son números enteros, entonces $X\beta$ es entero.

De (***) se observa que si se emiten todas las Y^{k}_{ij}; k = 1, . . ,1, 2, . . ,m+n-1 que son cero, cualquier vector âij que no esta en la base puede escribirse como:

$$\hat{a}ij = \sum_{k \in L} \pm \alpha k$$

donde:

$$L = \{ k \mid Y^{k}_{ij} = 0 \}$$

pero

$$\alpha k = ek + em+k \qquad k \in L,$$

Por lo que:

$$\hat{a}ij = ei + em+j = \sum \pm (ek + em+k)$$

Esta última expresión implica que debe existir una αk, $K \in L$ con un +1 en la posición i . Sea el vector el $\alpha\beta$, $\beta \in L$. Pero esto a su vez, implica que $\alpha\beta$ tiene un +1 *en la posición* $m + \beta$. Por lo tanto, se necesita otro vector $\alpha\beta$. Pero el vector $\alpha\gamma$ tiene un +1 en la posición $m + \gamma$.

Se debe por lo tanto, encontrar otro vector, digamos el $\alpha\delta$, $\delta \in L$ que contenga un --1 en la posición *$m + \gamma$ para cancelar* el +1 anterior. Así se encontrarán una serie de m+n-1 vectores que sumados o restados dejarán un +1 en la posición i, y un +1 en la posición i+m. Esta *serie de* vectores es única para el vector αij. Sea esta serie de m+n-1 vectores los siguientes:

$$\hat{a}ij = \alpha\beta - \alpha\gamma + \alpha\delta - \alpha\in + , \ldots , - \alpha V + \alpha\varphi$$

O sea

$$\hat{a}ij = \hat{a}i\beta - \hat{a}m+\beta,\gamma + \hat{a}m+\gamma,\delta - \hat{a}m+\delta,\in + , \ldots , -\hat{a}m+ v,\varphi + \hat{a}m+\varphi,j \quad *$$

Que en forma esquemática, se tiene:

$$\begin{array}{c} i \rightarrow \\ \\ j \rightarrow \end{array}\begin{bmatrix}1\\ \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ \\ 1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\leftarrow i\\ \\ \leftarrow m+\beta\end{array} - \begin{bmatrix}1\\ \\ 1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\leftarrow m+\beta\\ \\ \leftarrow m+\gamma\end{array} + \begin{bmatrix}1\\ \\ 1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\leftarrow m+\delta\\ \\ \leftarrow m+\gamma\end{array} - \begin{bmatrix}1\\ \\ 1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\leftarrow m+\delta\\ \\ \leftarrow m+\in\end{array} +$$

$$- \begin{bmatrix}1\\ \\ 1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\leftarrow m+v\\ \\ \leftarrow m+\varphi\end{array} + \begin{bmatrix}1\\ \\ 1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\leftarrow j\\ \\ \leftarrow m+\varphi\end{array}$$

Por otro lado, los elementos de Zij - Cij que dan el criterio de optimalidad se representan por:

$$Zij - Cij = C\beta\ Yij - cij$$

Pero Yij es un vector de ceros ó 1 ó -1, la expresión anterior se convierte en:

$$Zij - Cij = \sum \pm\ c\beta k\ - Cij$$

$k \in L$

La expresión (*) indica que no es necesario tratar con una base de (m+n-1), por (m+n-1),sino solamente con m+n-1 elementos la vez.

Esto representa un ahorro considerable de tiempo y de espacio en la memoria de una computadora.

Bibliografía.

Administración de la producción y de las operaciones;
Elwood S. Buffa;
Rakesh K. Sarin.
Editorial Limusa, 1997; Tercera reimpresión.

Administración de la producción y las operaciones, conceptos, modelos y comportamiento humano;
Everett E. Adam, Jr;
Ronald J. Ebert.
Editorial Prentice / Hall internacional 1981; Editorial Dossat S.A.

Contabilidad intermedia;
James Don Edwards;
Johnny R. Johnson;
Roger A. Roemmich.
Cía. Editorial continental S.A. de CV. México.

Introducción a la investigación de operaciones;
Frederick S. Hillier;
Gerald J. Liberman.
Editorial; McGrawHill; sexta edición; México; 1996.

Introducción a las técnicas de investigación de operaciones;
Hans G. Daellenbach;
John A. George;
Donald C. Mcnickle.
Editorial continental; México; 1990.

Investigación de operaciones
Segunda edición;
Hadmy A. Taha.
Editorial; Alfaomega; 1991.

MÉtodos de optimización, programación lineal-gráfica.
Jaufett M. Francisco J.

Moreno Bodett Alberto;
Acosta F. J. Jesús.
Representaciones y servicios de ingenieria, S.A. México.

Principios de contabilidad;
Andrew D. Braden;
Robert G. Allyn;
Cía. Editorial Continental S.A. de CV. México.

Sistemas de producción e inventario, planeación y control;
Buffa y Taubert.
Editorial Limusa, Noriega Editores; S.A. de CV; 1996;
Octava reimpresión.

Fe de erratas.

En la página 48, última tabla en la columna d1 debe quedar así:

	d1	d2	d3	d4	
O1	70660 1832	7160	16780	11490 500	2332
O2	70660 1368	7150 300	16680 700	11620	2368

En la *página 49* la *grafica* debe quedar así: