17
2E

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ARAGON"

"LOS ATRACTORES"

TESIS

PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO EN COMPUTACION

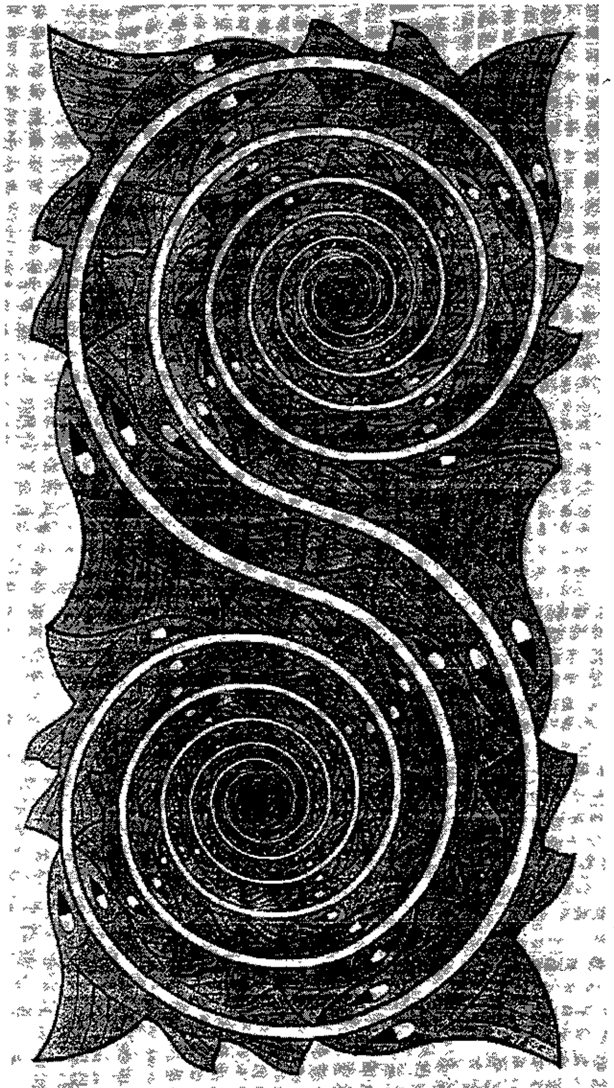
PRESENTA
Flor Mónica Gutiérrez Alcántara

DIRECTOR
M. en C. Luis Ramírez Flores

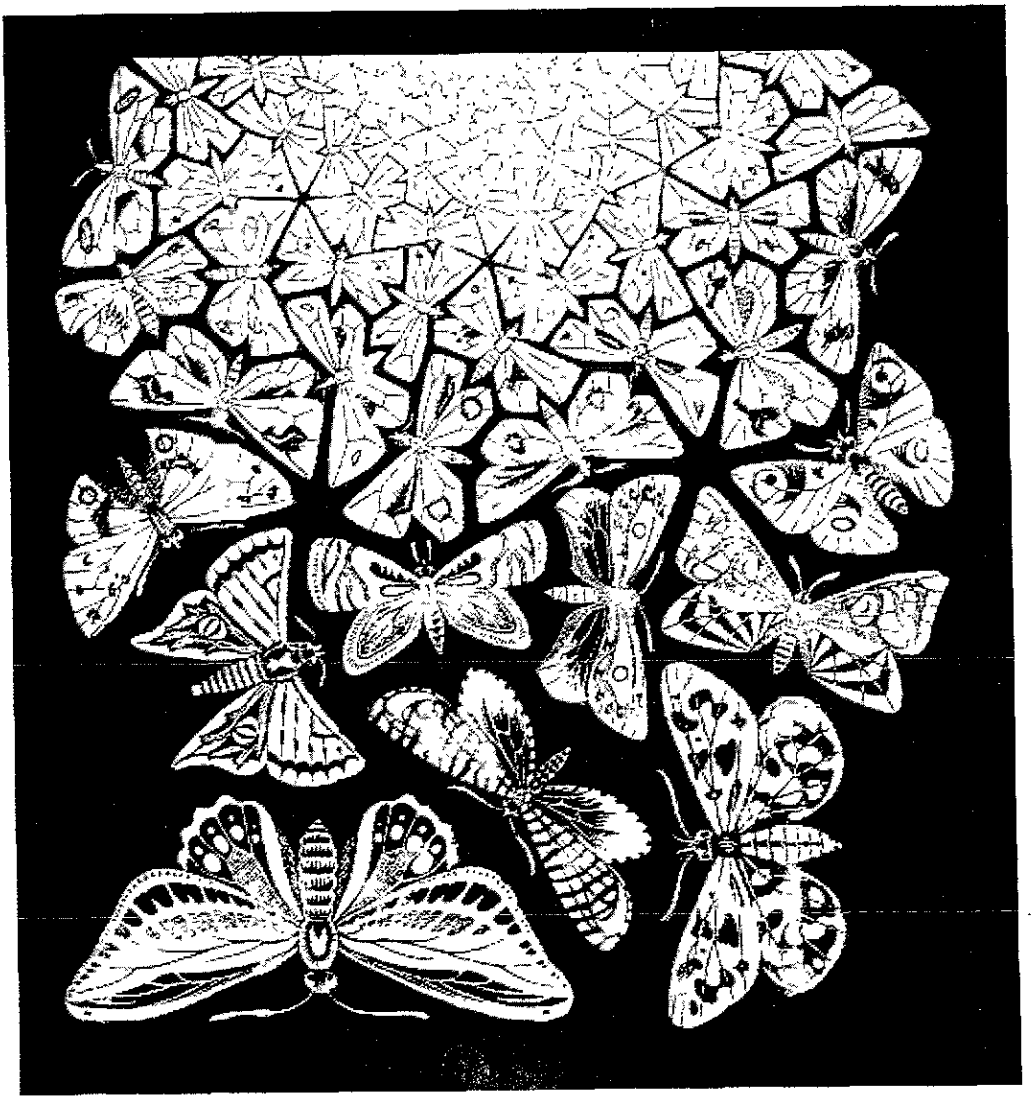
250142

México 1999

LOS ATRACTORES



AGRADECIMIENTOS



Dedicatoria

Esta tesis esta dedicada a la memoria de mi padre.
A mi madre y a Luis mi hermano.

Agradecimientos Especiales

A: Luis Ramírez F
Por dirigir este trabajo de tesis

A: Antonio Sarmiento H. y Ernesto Peñaloza R.
Por su sus críticas y comentarios.

Sin su ayuda, hubiese sido imposible escribir este trabajo.
Mi reconocimiento y admiración para Uds.
Gracias por permitirme ser su amiga.

Agradecimientos

A mi alma mater la UNAM *y a mi*
muy querido Campus Aragón.

Para mis amigos y compañeros: Carlos e Iris
Quienes tuvieron que soportar bastante Caos para que yo escribiera esta tesis.

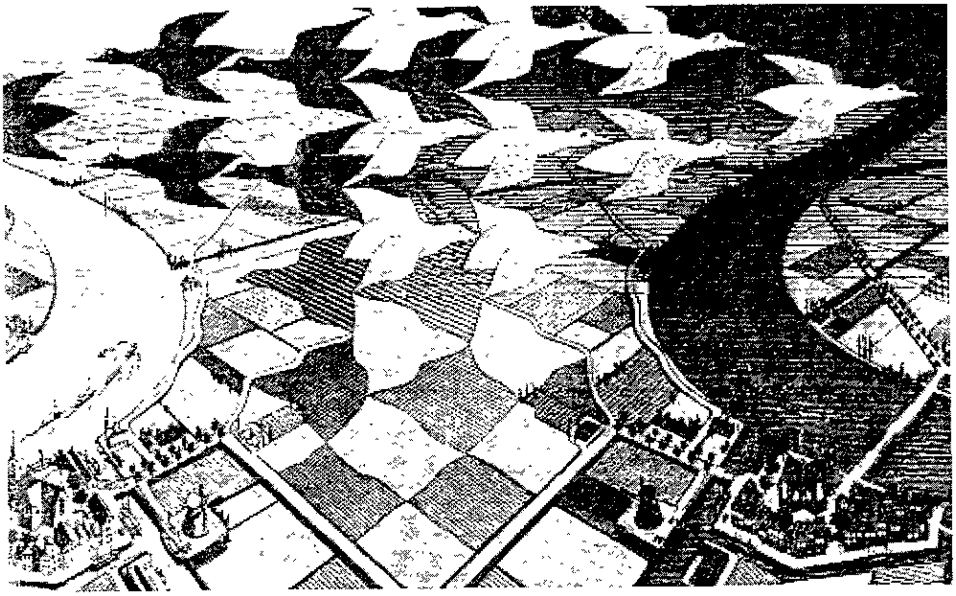
Lic. David Wilson O.
Quién revisó y corrigió esta tesis de forma.

Ing. Manuel Quintero
Por toda la ayuda técnica prestada para elaborar este trabajo

A mis amigos:
Judith Sanjuan, Tania Durán , Marce, Yalim Aguirre, Elizabeth Peréz, Pedro G. Ramírez, Alain Morones, Agustín, Javier García, Alejandro Espinoza, Rosario Marquez, Iván Muñoz, Gladis Fuentes, Ing. Juan Ortiz Muntuy, Angel, Alan, Juan Carlos, Alberto, Ricardo, Rosario, Fernando, Arcelia y a todos los que pudiera omitir en este momento a causa de mi memoria.

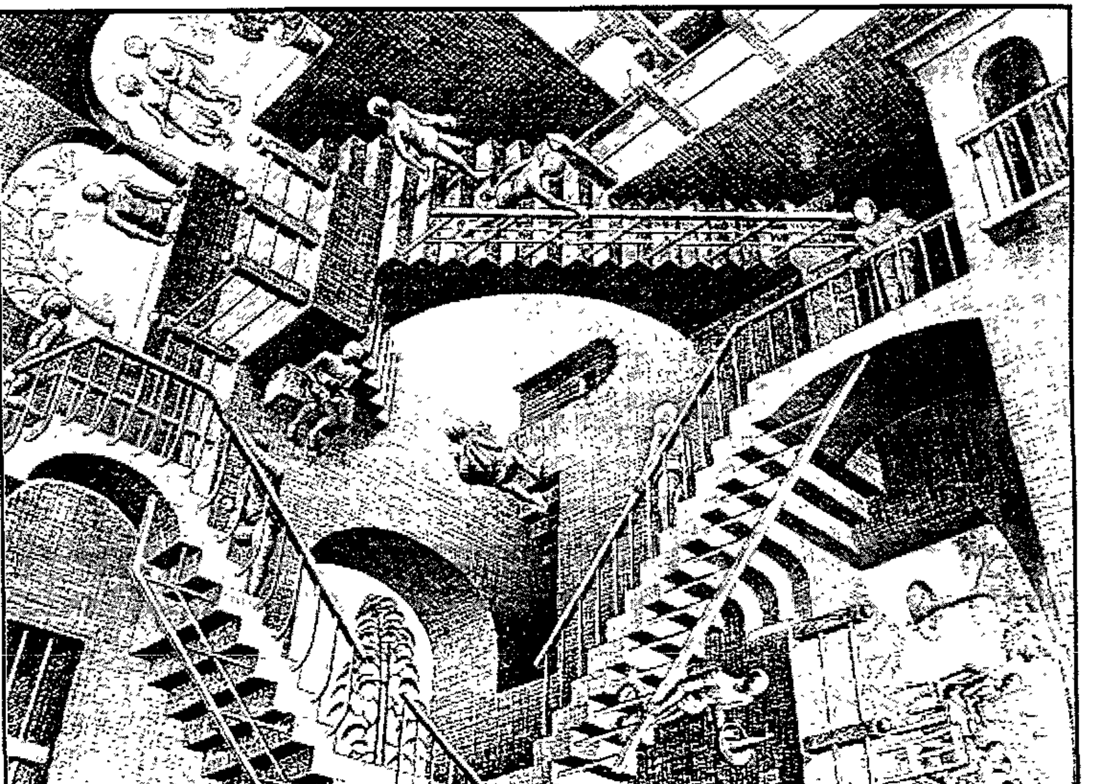
Mil Gracias a todos por las palabras de aliento y las porras.

ÍNDICE



ÍNDICE

INTRODUCCIÓN



INTRODUCCIÓN

Hace aproximadamente 3 años, se impartió en la ENEP Aragón un curso sobre "Introducción a la Teoría de Caos y Fractales", por el Mat. Luis Ramírez Flores profesor de tiempo completo de nuestra escuela, ese curso fue patrocinado por la Jefatura de Carrera de Ingeniería en Computación, y tenía como finalidad adentrar, de una forma practica y sin muchos formalismos a los estudiantes de Ingeniería en Computación o de cualquier otra Ingeniería, en la Teoría del Caos y sus aplicaciones.

Cuando uno revisa la bibliografía de tesis relacionadas con tópicos sobre "Caos" existente en la hemeroteca de la ENEP Aragón, uno se encuentra con varios trabajos, desde "percolación" hasta "compresión de imágenes fractales", el problema es que se requiere ser un lector especializado en el área para poder entender los trabajos realizados. La idea de realizar este trabajo de tesis surge de la necesidad de que hubiera un trabajo previo, que pudiera servir como introducción a otros trabajos de tesis realizados anteriormente.

Así pues, el objetivo principal de este trabajo, es el de elaborar un trabajo introductorio sobre la Teoría de Caos y algunas de sus vertientes, particularmente los "Atractores Extraños", de una forma amena y sin demasiados formalismos. Esto es, que cualquier lector, no importa su área de conocimiento. pueda entender con facilidad este trabajo, sin necesitar de conocimientos matemáticos o físicos complejos, simplemente con los conocimientos básicos adquiridos en el bachillerato.

Para poder cumplir con el objetivo de este trabajo de tesis, haré una revisión de muchos de los trabajos realizados anteriormente y muchos que apenas están investigándose. Pero no es objetivo particular de esta tesis abundar demasiado en la Teoría del Caos, tan solo penetraremos en ella para proveer de información suficiente al lector y, adentrarnos en una de las particularidades del Caos y objeto de esta tesis ***"Los Atractores Extraños"*** Los *Atractores Extraños* son los motores que mueven la naturaleza, su extraña belleza ha generado la construcción de un sinfín de ***"Fractales"*** que no son otra cosa que la representación gráfica de los *"Atractores Extraños"* y su dimensión irracional ha sido objeto de innumerables trabajos científicos.

El *Primer Capitulo* es una ***"Introducción Histórica"*** y parte de un análisis sobre el *"Caos Filosófico"* porque la palabra "Caos" tiene su origen en las tempranas filosofías y sus connotaciones van mas allá de la definición que podemos encontrar en cualquier diccionario o enciclopedia. haré un recuento breve de los mitos filosóficos mas importantes de las antiguas culturas, partiendo de la cultura griega. La segunda parte del capitulo *"Caos Matemático"* aborda la visión científica del Caos desde Tales de Mileto, pasando por la edad Media y el pensamiento de Cópernico. Kepler y Galileo Galilei fundamentalmente, hasta llegar a Newton, hablaremos de la importancia de las leyes de Newton en la ciencia y de las ideas reduccionistas que se implantaron en la mayor parte de los científicos de su época a partir de ellas. Finalmente hablaremos de algunos 'rebeldes' científicos que se atrevieron a dudar de Newton y el capitulo terminará cuando hablemos de un matemático que se adelanto a su tiempo Henry Poincaré, el padre de Caos.

En el segundo capitulo ***"Caos, Atractores y Atractores Extraños"*** el lector encontrará en primera instancia el fenómeno de las " Sensibilidad Condiciones Iniciales" para entender la importancia de las observaciones de Poincaré y la primer parte del capitulo terminará con el análisis de los "Espacios de Fases". La segunda parte del capitulo *"Atractores"* prosigue atacando el concepto de "Atractor" y los diferentes tipos de atractores: "Atractor de Punto Fijo", "Atractor de Ciclo Límite" y "Atractor de Tipo Toro", continuando de nuevo con Poincaré y su descubrimiento de los atractores, la Teoría de KAM y cerraremos el tema con una descripción del Caos en la Mecánica Celeste. La Tercera Parte de este capitulo *"Atractores Extraños"* inicia con una descripción de los diferentes comportamientos de los modelos matemáticos de las poblaciones hasta llegar a la "Bifurcación de Periodos" y continua analizando el fenómeno de la "Intermitencia" pasando por la "Iteración" y de ahí a Eduard Lorenz y su "Efecto Mariposa". Una vez aquí, nos internamos en el fascinante mundo de los "Atractores Extraños" concepto que surge de las investigaciones sobre la "Turbulencia", analizaremos a la turbulencia desde los primeros estudios de Leonardo Da Vinci hasta David Ruelle quién junto con Floris Takens dan el nombre de "Atractor Extraño al extraño comportamiento de la turbulencia.

El *Tercer Capitulo* de este trabajo ***"Algunos Atractores Extraños"*** es una descripción de algunos de los atractores extraños más famosos, para esto nos internaremos en los "Maravillosos Fractales", descubriremos si existe un mecanismo para medir el caos y pasaremos a la "Autosimilitud" , veremos como surge en terminó "Fractal" a través de la nueva geometría propuesta por el matemático francés Mandelbrot y haremos un recorrido por los fractales más comunes. El capitulo finaliza con algunas aplicaciones de los fractales, en la biología, la economía, el arte y la ingeniería

El lector encontrará las ***"Conclusiones"*** de este trabajo posteriormente, en la parte final de esta tesis.

También se incluyen dos Apéndices, el ***Apéndice Matemático*** que será de gran utilidad para aquellos lectores especializados que deseen profundizar en los desarrollos matemáticos y el apéndice del ***Azar*** que será de gran ayuda para entender el concepto de "probabilidad". Sin embargo, por razones de espacio estos apéndices sólo se encuentran disponibles por separado, de este trabajo.

Hesíodo dice en su Teogonía "Primero fue el Caos y luego la Tierra de ancho seno" En las cosmologías se imaginaba un estado inicial donde prevalecía el caos o la nada y de donde surgían los seres y las cosas.

En la temprana filosofía griega, Tales, Anaximandro y Anaxágoras entendían que una sustancia o energía específica —como el agua o el aire- habían estado en flujo caótico y que a partir de esa sustancia se habían plasmado las diferentes formas del universo. Eventualmente, el orden se disolvería y regresaría al flujo cósmico y luego aparecería un nuevo universo, es decir, interpretaban el caos a través del orden.

Aristóteles llevó el enfoque científico más allá y se distanció más aún del caos. Conjeturó que el orden lo impregna todo y existe en jerarquías cada vez más sutiles y complejas.

La Edad Media fue una época difícil en la que el pensamiento griego de Aristóteles, Tales, Euclides. Pitágoras y demás luchó con las viejas mitologías. Los alquimistas ejemplifican este conflicto. Mezclaron las antiguas filosofías griegas, el cristianismo y las teologías de Babilonia, Persia y Egipto. Creían en una creación a partir de un caos preexistente que incluía lo grotesco y lo irracional. Pensaban que la mutabilidad, la obscuridad y el cielo generaban la vida, que los descensos al caos y los encuentros con monstruos acarreaban vitalidad, que la creación era un proceso constante de renovación. Pero los alquimistas también eran científicos y trabajaban con instrumentos y métodos científicos que dieron lugar a importantes descubrimientos.

En los tiempos de Galileo, Kepler, Descartes y Newton, el espíritu científico era predominante. Las leyes newtonianas de mecánica celeste y las coordenadas cartesianas dieron la impresión de que todo se podía describir en términos matemáticos y mecánicos.

En la época de Napoleón, el físico francés Pierre Laplace pudo imaginar razonablemente que un día los científicos deducirían una ecuación matemática capaz de explicarlo todo.

El reduccionismo parte de la idea de que todo se puede descomponer y componer de la misma manera —armar y desarmar-. Los reduccionistas creen que los sistemas mas complejos están compuestos por los equivalentes atómicos y subatómicos a los cuales la naturaleza ha combinado de formas ingeniosas.

El reduccionismo implicaba la visión del caos manifiesta en el sueño de Laplace acerca de una fórmula universal. El caos era meramente una complejidad tan grande que en la práctica los científicos no podían desentrañarla, pero estaban seguros de que un día serían capaces de hacerlo. Cuando llegara ese día no habría caos, por así decirlo. sólo las leyes de Newton.

Pero ya en el siglo XVIII los científicos habían empezado a preguntarse por qué no podían inventar una máquina de movimiento perpetuo. Descubrieron que cada vez que ponían una máquina en movimiento, parte de la energía se había vuelto desorganizada, caótica. Esta progresiva desorganización de la energía útil condujo a la idea de la entropía y a la termodinámica.

En la década de 1870 el físico vienés Ludwig Boltzmann demostró que la mecánica newtoniana aún era universalmente verdadera en el nivel reduccionista de los átomos y las moléculas. El movimiento de estos siempre obedecía las leyes de Newton, pero en un sistema complejo donde hay billones de átomos y moléculas girando de un lado a otro y chocando entre sí, es difícil que se mantenga una relación ordenada. Blotzmann postulaba eventualmente que aún la estructura atómica del sistema solar se desintegraría en mero azar. Los reduccionistas imaginaban que el final del universo sería un estado de homogeneidad general, un cosmos tibio y molecular: sin sentido, ni forma.

Sin embargo, para el resto de los científicos las ideas de Boltzmann sobre el caos eran muy diferentes de las imaginadas en los mitos antiguos. En el caos mítico había sido lo primero de todo y de él habían surgido las formas y la vida. Los trabajos de Boltzmann sobre la mecánica estadística replantearon la física, como resultado fue altamente criticado por sus colegas. La vida de Boltzmann tiene algo de romántico. Se suicidó porque, en cierta forma, era un fracasado. Y sin embargo hoy le consideramos como uno de los mayores sabios de su época.

Al mismo tiempo que Boltzmann exponía la mecánica de la entropía, Charles Darwin y Alfred Russel Wallace anunciaban la teoría de la explicación de nuevas formas de vida. Como Boltzmann, Darwin y Wallance entendían que el azar era un factor clave en los modelos mecanicistas que gobernaban las formas complejas; pero aquí en vez de alterar el orden complejo y destruirlo, el azar causaba variaciones en los individuos de especies existentes. Algunas de estas variaciones sobrevivían y otras conducían a nuevas especies.

A finales del siglo XIX prevalecía la creencia en el reduccionismo y el mecanicismo. Se pensaba que conociendo las leyes naturales aprenderíamos con destreza a controlar los sistemas El caos se podría reducir o acabar mediante una compresión cada vez más precisa del orden mecanicista universal.

Los ingenieros del siglo XIX, al construir sus puentes, buques de vapor u otras maravillas tecnológicas, a menudo se topaban con el desorden de enfrentar cambios abruptos que no guardaban semejanza con el lento crecimiento de la entropía tal como los describían Boltzmann y la ciencia de la termodinámica. Las placas se curvaban, los materiales se fracturaban. Estos problemas constituían un desafío para las matemáticas que habían forjado la revolución newtoniana.

Para la ciencia, un fenómeno es ordenado si sus movimientos se pueden explicar en un esquema de causa efecto representado por una ecuación. Newton introdujo la idea de lo diferencial (fluxiones) en sus célebres leyes del movimiento que relacionaban las razones de los cambios con diversas fuerzas. Estas eran las ecuaciones diferenciales lineales. Tales ecuaciones permiten describir fenómenos tan diversos como el vuelo de una bala de cañón, el crecimiento de una planta, la combustión del carbón y el desempeño de una máquina, en los cuales los pequeños cambios producen pequeños efectos y los grandes efectos se obtienen mediante la suma de muchos cambios pequeños.

Pero también existe una clase de ecuaciones diferenciales muy diferentes, y los científicos del siglo XIX las conocían vagamente. Estas son las ecuaciones diferenciales no lineales y estas se aplican específicamente a cosas discontinuas tales como las explosiones, las fisuras repentinas en los materiales y los altos vientos. El problema es que las ecuaciones diferenciales no lineales exigen técnicas matemáticas y formas de intuición que nadie conocía entonces. Los científicos victorianos sólo podían resolver las ecuaciones no lineales mas simples en casos especiales y la conducta general de la no linealidad permaneció intacta, pero los científicos no necesitaban penetrar el mundo de la no linealidad ya que para los problemas que se les presentaban hacían uso de las aproximaciones lineales, que constituyen una parte de las ecuaciones diferenciales no lineales, pero detrás de ello se enmascaraba el caos.

Este idea permaneció hasta la década de 1970, cuando los avances matemáticos y la aparición de las computadoras de alta velocidad dieron pie para que los científicos pudieran explorar las ecuaciones diferenciales no lineales.

A fines del siglo XIX, un brillante matemático, físico y filósofo francés ya se había topado con el problema de la no linealidad. Henri Poincaré quién intuyó esto en el campo de la mecánica de los sistemas cerrados.

Un sistema cerrado está compuesto por unos pocos cuerpos interactuantes aislados. De acuerdo con la física clásica, tales sistemas son muy ordenados y previsibles. Un simple péndulo en el vacío, libre de fricción conserva su energía. El péndulo oscila por toda la eternidad.

Los científicos clásicos estaban convencidos de que el azar y el caos que perturban ciertos sistemas -tales como el péndulo en el vacío o los planetas que giran al rededor de nuestro sistema solar- sólo podían provenir de contingencias aleatorias exteriores. Al margen de éstas el péndulo y los planetas deben continuar para siempre su invariable trayectoria.

Poincaré destruyó esta cómoda imagen de la naturaleza cuando dudó de la estabilidad del sistema solar. A primera vista el problema que planteaba Poincaré parece absurdo.

En un sistema que sólo contenga dos cuerpos, tales como el Sol y la Tierra o la Tierra y la Luna, las ecuaciones de Newton se pueden resolver con exactitud: las órbitas son estables. Así, si olvidamos los efectos de arrastre de las mareas en el movimiento lunar, podemos dar por sentado que la Luna continuará girando alrededor de la Tierra hasta el fin de los tiempos. Pero también tenemos que olvidar el efecto del Sol y los demás planetas en este idealizado sistema de los dos cuerpos. El problema consiste en que al dar el simple paso de dos a tres cuerpos (por ejemplo, al tratar de incluir los efectos del Sol en el sistema Tierra-Luna) las ecuaciones de Newton se vuelven irresolubles. Por razones de matemáticas formales, la ecuación de tres cuerpos no se puede deducir con exactitud; requiere una serie de aproximaciones para cerrar el problema.

Por ejemplo, para calcular los efectos gravitatorios de Sol, más el planeta Júpiter en el movimiento de un asteroide del cinturón de asteroides (entre Marte y Júpiter), los físicos tuvieron que usar un método que llamaron "teoría de perturbación". El pequeño efecto adicional que el movimiento de Júpiter tendría sobre un asteroide se debe sumar a la solución idealizada de dos cuerpos en una serie de aproximaciones sucesivas. Cada aproximación es menor que la anterior y, al añadir un número potencialmente infinito de tales correcciones, los físicos teóricos esperaban hallar la respuesta correcta. En la práctica los cálculos se hacían a mano y llevaba mucho tiempo completarlos. Los teóricos esperaban poder mostrar que las aproximaciones llegan a la solución correcta tras el añadido de unos pocos términos correctivos.

Poincaré sabía que el método de las aproximaciones parecía funcionar bien con los primeros términos, ¿Pero, qué ocurría con el sinfín de términos cada vez más pequeños que venían a continuación? ¿Qué efectos tendrían? ¿Mostrarían que en decenas de millones de años las órbitas se modificarían y el sistema solar comenzaría a desintegrarse por obra de sus fuerzas internas?

Matemáticamente, el problema de los cuerpos múltiples enfocado por Poincaré es no lineal. Al sistema ideal de dos cuerpos, él añadió un término que incrementaba la complejidad no lineal de la ecuación y se correspondía con el efecto pequeño producido por el movimiento de un tercer cuerpo. Luego, trató de resolver la ecuación.

Descubrió que el tercer cuerpo altera solo ligeramente la mayoría de las órbitas posibles de dos cuerpos: una perturbación pequeña produce un efecto pequeño, pero las órbitas permanecen intactas. Pero mas adelante Poincaré descubrió también que, aún con una perturbación mínima, algunas órbitas se comportaban de manera errática, aún caótica. Sus cálculos demostraban que aún un mínimo tirón gravitatorio de un tercer cuerpo podía causar que el planeta se tambaleara ebriamente en la órbita e incluso fuera despedido del sistema solar. Poincaré había arrojado una bomba al modelo newtoniano del sistema solar. Si estas curiosas órbitas caóticas eran posibles, todo el sistema solar sería inestable. Los pequeños efectos de los planetas que giraban ejerciendo su mutua influencia gravitatoria podían, dado el tiempo suficiente, conspirar para producir las condiciones exactas para una de las excéntricas órbitas de Poincaré.

La consecuencia inmediata del descubrimiento de Poincaré fue el cuestionamiento del paradigma newtoniano, que había servido a la ciencia durante casi dos siglos. Pocos años después del trabajo de Poincaré, Max Plack descubrió que la energía no es una sustancia continua sino que viene en pequeños paquetes a los que él llamó "cuantos". Cinco años después Albert Einstein publicó su primer trabajo sobre la relatividad. Y el paradigma newtoniano era atacado por varios frentes.

La mecánica cuántica gozó de especial difusión en la física. Fue una de las mayores teorías en la historia de ciencia, y realizó predicciones atinadas acerca de una multitud de fenómenos atómicos, moleculares y de estado sólido. Los científicos se valieron de ella para desarrollar armas nucleares, los chips de computadora y el láser que han cambiado nuestro mundo. Pero también surgieron paradojas perturbadoras. Los físicos, por ejemplo, aprendieron que la unidad elemental de luz se puede comportar esquizofrenicamente como onda o como partícula, según lo que el experimentador escoja medir. La teoría también predice que dos "partículas" cuánticas separadas por varios metros de distancia y sin ningún mecanismo de comunicación intermedio, permanecerá no obstante misteriosamente correlacionadas. Como muestran experimentos recientes, una medición de esta partícula se correlaciona instantáneamente con el resultado de una medición de su compañero distante.

Estas y otras paradojas tuvieron el efecto de introducir a diversos científicos, como David Bohm a teorizar que el universo debía ser fundamentalmente indivisible, una totalidad fluida, como dice Bohm, en que el observador no se puede separar esencialmente de lo observado. En años recientes Bohm y un creciente número de científicos han usado los "koans" de la mecánica cuántica para desafiar la tradicional visión reduccionista. Bohm sostiene, por ejemplo, que las partes –tales como las partículas o las ondas- son formas de abstracción a partir de una totalidad fluida. Es decir, las partes parecen autónomas, pero son solo "relativamente autónomas". Son como el pasaje favorito de una sinfonía de Beethoven para el melómano. Si extraemos un pasaje de la pieza, es posible analizar las notas. Pero en ultima instancia el pasaje no tiene sentido sin la totalidad de la sinfonía. Las ideas de Bohm infunden forma científica a la antigua creencia de que "el universo es uno".

Nadie había imaginado que los resultados de Poincaré llevarían en la misma dirección. El tumulto causado por la teoría cuántica y de la relatividad relegó su descubrimiento. No es de extrañar que el mismo Poincaré abandonará sus ideas diciendo:

"Estas cosas son tan extravagantes que no soporto ni pensar en ellas"

Solo en la década de los 1960 sus investigaciones fueron exhumadas de viejos libros de texto y se fundieron con los nuevos trabajos sobre no linealidad, realimentación, entropía y el desequilibrio inherente de los sistemas ordenados. Estos se convirtieron en los volátiles elementos de la nueva ciencia del caos y el cambio, y han conducido a nuevas y asombrosas percepciones de la naturaleza.

CAPÍTULO PRIMERO

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Entonces el no ser no existía
ni tampoco existía el ser,
No existía el espacio etéreo
ni más allá, la bovéda celeste

¿Había algo que se agitase?
¿Dónde?
¿Bajo la protección de quién?
¿Existía el agua,
ese profundo, insolable abismo?

No existía la muerte,
ni existía lo inmortal
ni signo distintivo de la noche y el día.
Sólo el Uno respiraba,
sin aire, por su propia fuerza
Aparte de él
no existía cosa alguna

En el comienzo sólo existía
tiniebla envuelta en tiniebla
Principio del devenir
rodeado por el vacío,
el Uno surgió,
por el poder de su propio dios interno
En el comienzo
brotó el deseo
que fue el primer semen de la mente

Buscando en sus corazones,
gracias a su sabiduría,
los sabios encontraron
el vínculo del ser con el no ser.
Transversalmente extendieron su cordel
¿Existía un abajo?
¿Existía un arriba?
Existían fecundadores,
existían energías.
Debajo estaba la potencia,
arriba estaba el impulso

¿Quién sabe la verdad?
¿Quién puede decirnos
de dónde nació, de dónde está creación?
Los dioses nacieron después
y gracias a la creación del universo
¿Quién puede, pues, saber
de donde surgió?

Aquel que en el cielo supremo guardián,
sólo aquél sabe
de dónde surgió esta creación,
ya sea que él la hizo, ya sea que no
-o tal vez ni él lo sabe

"*Himno a la Creación*"
Rig Veda X, 129

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Definir el termino **Caos** resulta terriblemente complejo, debido al origen mismo de la palabra, Caos proviene del griego **Khaos** que significa "**abismo** " o bien, "**abismo abierto**", es necesario remitirnos a las enciclopedias temáticas y filosóficas para encontrar la definición concreta de Caos.

> ***CAOS**.- En la cosmogonía griega antigua cualquiera de los dos conceptos, el primigenio vacío del universo antes del comienzo de las cosas, o el abismo de Tártaro: el inframundo, ambos conceptos se encuentran el la Teogonía de Hesíodo. Primero fue Caos en el sistema de Hesíodo, después Gea y Eros (la Tierra y el Deseo). Sin embargo Gea no fue generada del Caos; los descendientes de Caos fueron Erebo (las Tinieblas) y Nyx (la Noche). Después, el aire superior brilló, el Día. Nyx engendró después a los aspectos Oscuros y Terribles del Universo. Este concepto ajusta con otra noción antigua que vió a Caos como la oscuridad del inframundo.*
>
> *En Cosmogonías posteriores se designó al Caos como el estado orginal de las cosas sin embargo concebidas El significado moderno del mundo se deriva de Ovidio, quien vió al Caos como la masa informe y desordenada, a partir de la cual el creador del Cosmos produjo el Universo ordenado. Este concepto de Caos también es aplicado a la interpretación del la Historía de la Creación en Génesis 1. Por la antigua Inglesia de los Padres.*[1]
>
> ***CAOS**.- En Mecánica y matemáticas el comportamiento aparentemente azaroso o impredecible de sistemas gobernados por leyes determinísticas. Un término más preciso "Caos Determinístico" sugiere una paradoja, debido a que conectada dos nociones que son familiares y que comúnmente se consideran incomplatibles. La primera es el azar, o impredecibilidad, como el caso de la trayectoría de una molécula en un gas o en la elección de un individuo de una polablación. En el análisis convencional el azar fue considerado mas aparente que real, surgiendo de la ignorancia de muchas causas del trabajo En otras palabras se creia que el mundo era impredecible porque a su vez es complicado la segunda noción es la de movimiento determinístico como el de un péndulo, o un planeta, que ha sido aceptada desde el tiempo de Issac Newton como ejemplo del exito de predictivo de la ciencia, sobre aquello que inicialmente es complejo.*

[1] "*Enciclopedia Británica*", Wescott & Thomson, 1987, Vol. IV, Pag. 3045

Sin embargo, en décadas recientes se ha estudiado una gran diversidad de sistemas que se comportan de manera impredecible a pesar de su aparente simplicidad y del hecho de que las fuerzas involucradas estan gobernadas por leyes físicas bien entendidas. El elemento común en estos sistemas es un muy alto grado de dependencia de las condiciones iniciales y de la forma en que ellos se pusieron en movimiento Por ejemplo el meteorólogo Eduard Lorentz descubrió un modelo simple para la convección del calor que posee una impredicibilidad intrínseca, circuntancia que llamó "efecto invernadero" sugiriendo que el solo aleteo de una mariposa puede cambiar el clima. Un ejemplo más casero es la máquina de pinball casera: los movimientos de la bola estan gobernados con precisión por la ley de la gravitación y de las colisiones elásticas -ambas completamente entendidas- aún así el resultado final es impredecible.

***En mecánica clásica**: el comportamiento de un sistema dinámico puede ser descrito geómetricamente como el movimiento sobre un 'atractor'. efectivamente las matématicas de la mecánica clásica reconocen tres tipos de atractores: atractor de punto fijo (que caracterizan estados estacionarios), ciclo límite (ciclos periódicos) y toros (combinaciones de varios ciclos). En la década de los 60's el matemático americano Stephen Smale descubrió una nueva clase de "atractores extraños". Dentro de los atractores extraños la dinámica es caótica. Más tarde reconoció que los atractores extraños han detallado la estructura a todas las escalas de magnificación (una clase de formas geométricas complejas que exhiben comúnmente la propiedad de auto similitud) que a su vez conducen a notables desarrollos en el área de gráficas computarizadas.*

Las aplicaciones de las matemáticas del caos son en extremo diversas, e incluyen el estudio del flujo turbulento de fluidos, irregularidades en el ritmo cardíaco, dinámica de poblaciones, reacciones químicas, física de plasmas y el movimiento de cúmulos de estrellas.[2]

***CAOS**: (del griego Khaos, abismo) Según muchas tradiciones poéticas y religiosas, indeterminada confusión y mezcolanza de los elementos eternos, antecedente de la configuración del mundo ordenado en un universo o cosmos Confusión o desorden. Sin alguien que mande , reina el Caos (Ortega y Grasset)*

En casi todas las cosmogonías, aparece con diversos nombres, esta objetivación o personificación del confuso y remoto origen de todos los seres de universo. En la Teogonía de Hesíodo, coexistían en seno del Caos la Noche (Nyx) y las Tinieblas (Erebo), quienes separándose del Caos hicieron surgir al Cielo

[2] Ibid

(Urano) y a la Tierra (Gea). Otras veces se habla indistintamente del Caos y del Erebo En la cosmogonía bíblica, aparece un equivalente del caos en el estado informe en que Dios creo la materia, antes de iniciarse la obra de los 6 días y lo designa con la expresión: "tohu wa-bohu" [3]

***CAOS**: La palabra significa abismo abierto El estado de completo desorden anterior a la formación del mundo a partir del cual según los mitólogos, se inicia la formación. Hesíodo dice: "Antes de todos los seres estaba el caos, luego la tierra de ancho seno" (Teogonía VII 6). Aristóteles combatió esta noción (fis., IV 208b 33ss) ya que admitía la eternidad del mundo. Kant se sirvió de ella para indicar el estado originario de la materia, del que más tarde se originaron los mundos.* [4]

De las definiciones anteriores, podemos distinguir dos tipos de "Caos", el caos filosófico y el caos matemático. Analicemos ambos a continuación.

1. El Caos Filosófico

El concepto de Caos filosófico está inmerso en el origen mismo de la civilización. Las tres definiciones anteriores nos remiten categóricamente a la Grecia antigua y mas concretamente a la Teogonía donde Hesíodo dice:

"Antes que todas las cosas fue el Caos; y después Gea de amplio seno, asiento siempre sólido de todos los inmortales que habitan en las cumbres del Nevado Olimpo y del tártaro sombrío enclavado en las profundidades de la tierra espaciosa; y después Eros, el mas hermoso entre los dioses inmortales, que rompe fuerzas, y que todos los Dioses y de todos los hombres domina la inteligencia y la sabiduría en sus pechos.

Y del caos nacieron Erebo y la negra Nyx. Y de Nix, Eter y Hémero nacieron, porque los concibió ella tras unirse de amor a Erebo" [5]

Teogonía

[3] *"Nueva Enciclopedia Larousse"*, Larousse, 1991, Vol I, Pag 203
[4] *"Diccionario Filosófico"*, Paxis, 1984, Vol I, Pag. 184.
[5] Hesíodo, *"Teogonía"*, Porrúa, México, 1978

Sin embargo, podemos encontrar referencias al Caos no solo en la Teogonía de Hesíodo sino también e los mitos griegos de la creación, se conocen cuatro mitos: **El Mito Pelasgo de la Creación, los Mitos Homérico y Órfico de la Creación y dos Mitos Filosóficos de la Creación** descritos a continuación:

1.1 Mito Pelasgo de la Creación.

a) *En un principio Eurime, diosa de todas las cosas, surgió desnuda del* ***caos*** *pero no encontró nada sólido en que apoyar los pies y, en consecuencia, separó el mar del firmamento y danzó solitaria sobre sus olas. Danzo hacía el sur y el viento puesto en movimiento tras ella pareció algo nuevo y aparte con que poder empezar una obra de creación. Se dio la vuelta y se apoderó de ese viento norte, lo frotó entre sus manos y he aquí que surgió la gran serpiente Ofión. Eurime bailó para calentarse, cada vez mas agitadamente, hasta que Ofión se sintió lujurioso, se enroscó alrededor de los miembros divinos y se ayuntó con la diosa Ahora bien el Viento Norte, llamado también Bóreas, fertiliza; por eso las yeguas vuelven con frecuencia sus cuartos traseros al viento y paren potros sin ayuda del semental*[6] *Así fue como Euríome quedo encinta.*
b) *Luego asumió la forma de una paloma aclocada en las olas, y a su debido tiempo puso el Huevo Universal. A petición suya Ofión se enroscó siete veces alrededor de ese huevo, hasta que se empolló y dividió en dos De él salieron todas las cosas que existen, sus hijos: el sol, la luna, los planetas, las estrellas, la tierra con sus montañas y ríos, sus árboles, hierbas y criaturas vivientes.*
c) *Euríome y Ofión establecieron su residencia en el Monte Olimpo, donde él irritó a la diosa pretendiendo ser el autor del Universo. Inmediatamente ella se golpeó la cabeza con el talón, le arrancó los dientes de un puntapié y lo desterró de las oscuras cavernas situadas bajo la tierra*[7].
d) *A continuación la diosa creó las siete potencias planetarias y puso una Titánide y un Titán en cada una: Thía e Hiperión para el Sol, Febe y Atlante para la Luna, Dione y Crío para el planeta Marte; Metis y Creo para el planeta Júpiter; Tetis y Océano para Venus; Rea y Crono para Saturno*[8]. *Pro el primer hombre fue Pelasgo, progenitor de los pelasgos; surgió del suelo de Arcadia, seguido de unos otros, a los que enseñó a costruir chozas, alimentarse y coser túnicas de*

[6] Plinio. *Historia Natural* IV. 35 y VIII 67. Homero. *Ilíada* XX. 223.

[7] Sólo unos fragmentos poco esclarecidos de este mito prehelénico sobreviven en la literatura griega, de los cuales los más extensos son los de Apolonio de Rodas, *Argonautica* i.496-505, y Tzetzes *Sobre Licrofrón* 1191; pero esta implícito en los Misterios Órficos y se puede restaurar, como se hace arriba, con el *Fragmento Berosiano* y las cosmogonías fenicias citadas por Philo Byblius y Damascio:con los elementos cananeos del relato de la creación hebrea, con Higinio (*Fábula* 197), con la leyenda boecia de los dientes de dragón; con el arte ritual primitivo. Que todos los pelasgos nacierón de Ofión lo indica su sacrificio común, el Peloria (Ateneo: xiv.45.63-40), pues Ofión era un *Pelor*, o 'serpiente prodigiosa'.

[8] Homero: *Ilíada* v.898; Apolonio de Rodas ii 1232; Apolodoro: i.1.3; Hesíodo: *Teogonía* 133, Estéfano de Bizancio *Sub Adana*; Aristófanes: *Las aves* 692 y ss.; Clemente de Roma: *Homilías* vi 4.72; Proclo sobre el *Timeo* de Platon, ii, p. 307

piel de cerdo como la que la gente pobre lleva todavía en Eubea y Fócida[9]

En el sistema religioso arcaico no había hasta entonces dioses ni sacerdotes, sino solamente una diosa universal y sus sacerdotisas, pues la mujer constituía el sexo dominante y el hombre era su víctima asustada. No se honraba la paternidad y se atribuía la concepción al viento, la ingestión de habichuelas o a la deglución occidental de un insecto; la herencia era matrilineal y a las culebras se les consideraba encarnaciones de los muertos. Eurínome ("Amplio Vagabundeo") era el titulo de la diosa como Luna Visible; su nombre en sumerio era Iahu ("Paloma Eminente") título que mas tarde pasó a Jehová como Creador. Fue en forma de Paloma como Marduk la dividió simbólicamente en dos en el festival de Primavera Babilónico, cuando inauguró el nuevo orden mundial.

Ofión o Bóreas, es la serpiente del mito hebreo y egipcio; en el arte del mediterráneo primitivo se muestra constantemente a la diosa en su compañía. Los pelasgos nacidos de la tierra, cuya pretensión parece haber sido que habían brotado de los dientes de Ofión, eran originariamente, quizás, el pueblo de los 'géneros pintados' neolítico; llegaron a la tierra firme de Grecia desde Palestina alrededor de 3500 a. de C., y los primeros helenos -inmigrantes de Asia Menor que habían pasado por las primeras Cícladas- los encontraron ocupando el Peloponeso setecientos años después. Pero el nombre de Pelasgos llego a aplicarse a todos los habitantes pre-helénicos de Grecia.Así Eurípides (citado por Estrabón v.2.4.) cuenta que los pelasgos adoptaron el nombre de "danaides" a la llegada de Argos de Dánao y sus cincuenta hijas. Las censuras de su conducta licenciosa (Herodoto. vi. 137) se refieren probablemente a la costubre pre-helénica de las orgías eróticas. Estrabón dice en el mismo pasaje que a los que vivían cerca de Atenas se los llamaba Pelargari ("cigueñas"); quizá ésa sea su ave totémica.

Los Titanes ("Señores") y las Titánides tenían su equivalente en la astrología babilonia y palestina primitiva, en la que eran deidades que regían los siete días de la semana planetaria sagrada; pueden haber sido introducidas por los cananeos o hititas, la colonia que se estableció en el Istmo de Corinto a comienzos del segundo milenio a. de C o también por las héladas primitivos. Pero cuando el culto de los Titanes fue abolido en Grecia y la semana de siete días dejo de figurar en el calendario oficial, su número fue citado como doce por algunos autores, probablemente para hacer que coincidiera con algunos signos del zodiaco. Hesíodo, Apolodoro, Estéfano de Bizancio, Pausanias y otros mas dan listas contradictorias de sus nombres. En el mito babilonio los gobernantes planetarios de la semana, a saber, Samas, Sin, Negal, Bel, Beltis y Ninib, eran todos varones, excepto Beltis, la diosa del amor; pero en la semana germana, que los celtas habían tomado del Mediterráneo oriental, el Domingo, el Martes y el Viernes eran gobernados por Titánides, en lugar de Titanes. A juzgar por el carácter divino de las parejas de hijos e hijas de Éolo, y el mito de Níobe, se decidió, cuando el sistema llegó por primera vez a la Grecia pre-helénica desde Palestina, emparejar a cada Titánide con un Titán, como medio de salvaguardar los intereses de la diosa. Pero antes de que pasara mucho tiempo los catorce quedaron reducidos a una compañía mixta de siete. Las potencias planetarias eran

[9] Pausanias: viii.1 2.

las siguientes: el Sol para la iluminación, la Luna para el encantamiento, Marte para el crecimiento, Mercurio para la sabiduría, Júpiter para la ley, Venus para el amor, Saturno para la paz. Los astrólogos griegos clásicos, de acuerdo con los babilonios, adjudican los planetas a Helio, Selene, Hares, Hermes (o Apolo), Zeus, Afrodita y Crono, cuyos equivalentes latinos citados anteriormente, todavía dan el nombre a las semanas francesam italiana y española.

Al final, míticamente hablando, Zeus devoró a los Titánes, incluyendo su propio ser anterior, puesto que los Judíos de Jerusalén adoraban a un Dios trascendente, compuesto por todas las potencias planetarias de la semana, teoría simbolizada en el candelabro de los siete brazos y en los siete pilares de la Sabiduría. Los siete pilares planetarios elevados cerca de la tumba del Caballo de Esparta estaban, según Pausianas, adornados a la manera antigua, y quizá tenían relación con los ritos egipcios introducidos por los pelasgos. Si los *judíos tomaron la teoría de los egipcios, o lo contrario, no se sabe con seguridad;* pero el llamado Zeus Heliopolitano, del que trata A. B. Cook en su *Zeus* , era de carácter egipcio y llevaba bustos de siete potencias planetariascomo ornamentos frontales en su cuerpo y, habitualmente, también bustos de los restantes olímpicos como ornamentos traseros. Una estatuilla en bronce de este dios se encontró en Tortosa, *España; otra en Biblios, Fenicia;* y una esquela de mármol en Marsella muestra seis bustos planetarios y una figura de cuerpo entero de Hermes –a quien se da tambiém mayor prominencia en estatuillas-, probablemente como el inventor de la astronomía. En Roma, Quinto Valerio Soriano pretendía igualmente que Júpiter era un dios trascendente, aunque allí no se observaba la semana como en Marsella, Biblios y (probablemente) Tortosa. Pero a las potencias planetarias nunca se les permitió influir en el culto olímpico oficial, pues se les consideraba no griegas (Herodoto), y por tanto antopatrióticas: Aristófanes (*La Paz*) hace decir a Trigeo que la Luna y "ese viejo bellaco, Sol" preparan una conspiración para entregar Grecia a los persas.

La afirmación de Pausioanas de que Pelasgo fue le primer hombre testimonia la continuación de la cultura neolítica *Arcadia hasta la época clásica*

1.2 Los mitos Homérico y Órfico de la Creación.

a) *Algunos dicen que los dioses y todas las criaturas vivientes surgieron del Océano que circunda al mundo y que Tetis fue la madre de todos sus hijos*[10].
b) *Pero los órficos dicen que la Noche de alas negras, diosa por la que incluso Zeus sentía un temor reverente*[11], *fue cortejada por el Viento y puso un huevo de plata en el seno de la Oscuridad; y que Eros, a quién algunos llaman Fanes, salió de ese huevo y puso el Universo en Movimiento. Eros tenía doble-sexo y alas doradas y como poseía cuatro cabezas, a veces mugía como un toro o rugía como un león, y otras veces silbaba como una serpiente o balaba como un*

[10] Homero *Iliada* xiv 201
[11] Ibíd. xiv 261

carnero La noche, que le dio el nombre de Ericepayo y Protógeno Faetonte[12] *vivía en una cueva con él y se manifestaba en forma de tríada· la Noche,* el ***Orden*** *y la Justicia. Delante de esa curva se sentaba la ineludible madre Rea, tocando un tambor de latón para captar la atención de los hombres sobre los oráculos de la diosa. Fanes creó la tierra, el cielo, el sol y la luna, pero la diosa triple gobernó el universo hasta que su cetro pasó a Urano*[13].

El Mito de Homero es una versión de la fábula de la Creación Pelasga puesto que Tetis reinaba en el mar como Eurínome y Océano circundaba el Universo como Ofión.

El Mito Órfico es otra versión, pero influida por una posterior doctrina mística del amor (Eros) y teorías acerca de la relación apropiada de los sexos. El huevo de plata de la noche significa la luna, pues la plata es el metal lunar. Como Ericepayo ("Comedor de brezo") el dios del amor Fanes ("revelador") es una baeja celestial que zumba fuertemente, hijo de la gran diosa. La colmena era estudiada como una república ideal y confirmaba el mito de la Edad de Oro, cuando la miel caía de los árboles. Rea tocaba el tambor de latón para impedir que las abejas enjambrasen en el lugar que no correspondía y para evitar las malas influencias, como las bramaderas utilizadas en los misterios. Como Protógeno Faetonte ("El brillador primigénito") Fanes es el Sol, que los órficos hacían un símbolo de la iluminación, y sus cuatro cabezas corresponden a los animales simbólicos de las cuatro estaciones. Según macrobio, el Oráculo de Colofón identificaba a este Fanes con el dios supremo Iao; Zeus (carnero) con la primavera: Helio (león) con el verano; hades (serpiente) con el invierno y Dionisio (toro) con el Año Nuevo.

El cetro de la noche pasó a Urano con el advenimiento del patriarcado.

1.3 Mito Olímpico de la Creación.

a) *En el principio de todas las cosas la Madre Tierra emergió del* ***Caos*** *y dio a luz a su hijo Urano mientras dormía Contemplándola tiernamente desde las montañas, él derramo una lluvia fértil sobre sus hendiduras secretas, ella produjo hierbas, flores y árboles, con los animales y las aves adecuados para cada planta. La misma lluvia hizo que corrieran los ríos y llenó de agua los lugares huecos, creando así los lagos y los mares*

b) *Sus primeros hijos de forma semihumana fueron los gigantes de cien manos llamados Briareo, Giges y Coto. Luego aparecieron los tres feroces Cíclopes de un solo ojo, constructores de murallas gigantescas y maestros herreros primeramente de Tracia y luego de Cretay Licia*[14], *a cuyos hijos encontró*

[12] Fragmentos órficos 60, 61 y 70
[13] Ibíd : 86.
[14] Apolodoro: i.1-2; Eurípides: *Crispo*, citado por Sexto Empírico, p 751; Lucrecio: i.250 y ii 991 y ss

Odiseo en Sicilia[15]. *Se llamaban Brontes, Estéropes y Arges, y sus espíritus han vivido en cavernas del volcán Etna desde que Apolo los mató en venganza de la muerte de Asclepio.*

c) *Los libios, sin embargo, pretenden que Garamante nació antes de los cíclopes de cien manos y que, cuando surgió de la llanura, ofreció a la Madre Tierra un sacrificio de bellotas dulces*[16]

Este mito patriarcal de Urano obtuvo la aceptación oficial bajo el sistema religioso olímpico. Urano cuyo nombre llegó a significar 'el firmamento', parece haber conquistado su posición como Primer Padre al ser identificado como el dios pastoral Varuna, uno de los que constituyen la trinidad masculina aria; pero su nombre del griego es una forma masculina de kur-ana *("reina de las montañas", "reina del verano", "reina de los vientos"o "reina de los bueyes salvajes")*: la diosa en su aspecto orgiástico del solsticio estival. El casamiento de Urano con la Madre Tierra explica una primera invasión helénica de la Grecia septentrional, que permitió a los adoradores de Varuna alegar que él prohijió a las tribus nativas que encontró allí, aunque reconocían que el era hijo de la madre tierra. Una enmienda del mito registrada por Apolodoro, es que la Tierra y el Cielo se dividieron en una lucha mortal y luego se volvieron a unir mediante el amor.Menciona esto Eurípides (*Melanipo el sabio*, fragmento 484, ed. Nauck) Y Apolonio de Rodas (*Argonática*, i.494). La lucha mortal tiene que referirse al choque entre estos dos principios patriarcales y los matriarcales causados por las invasiones helénicas. Giges ("nacido de la tierra") tiene otra forma, *gigas* ("gigante") y los gigantes se asocian en el mito conlas montañas de la Grecia septentrional. Briarero ("fuerte") era también llamado Egeón (*Ilíada* 1.407), y su pueblo puede ser, por lo tanto, el libro-tracio, cuya diosa cabra Egis dio nombre al mar Egeo. Coto era el antepasado epónimo de los cotianos, quienes adoraban a la orgiástica Cotito y difundieron su culto desde Tracia a toda Europa occidental. Estas tribus son descritas como "de cien manos", quizá porque sus sacerdotisas estaban organizadas en colegios de cincuenta, como las Danaides y las Nereidas; o tal vez porque los hombres estaban organizados en grupos guerreros de cien miembros, como los romanos primitivos.

Los cíclopes parecen haber sido un gremio de forjadores de bronce de la Hélade primitiva. Cíclope significa 'los de ojo anular', y es probable que se tatuaran con anillos concéntricos en la frente, en honor del sol, la fuente del fuego de sus hornos; los tracios siguieron tatuándose hasta la época clásica. Los círculos concentricos formaban parte del misterio de la herrería; para batir cuencos y elmos o máscaras rituales, el forgador se guiaba por esos círculos. trazados con compás alrededor del centro del disco plano en el que trabajaba. Los cíclopes tenían también un solo ojo en el sentido de que los herreros se cubren con frecuencia un ojo con un parche para evitar las chispas que vuelan. Mas tarde se volvió su identidad y los mitógrafos ubicaron caprichosamente sus espíritus en las cavernas del Etna, para explicar el fuego y el humo que sale de su cráter. Existía una estrecha vinculación cultural entre Tracia, Creta y Lucia; los cíclopes estaban en su elemento en todos esos países. La primitiva cultura heládica se extendió también a Sicilia; pero también

[15] Homero: *Odisea* ix.106-566; Apolodoro: ii 10.4.

[16] *Apolonio de Rodas: iv.1493 y ss ; Píndaro. Fragmento 84, ed. Bergk.*

es posible que (como Samuel de Butler fue le primero en sugerir) la composición siciliana de la *Odisea* explique la presencia de los Cíclopes allí. Los nombres de Brontes, Estéropes y Arges ("trueno", "rayo" y "resplandor") son invenciones posteriores.

Garamante es el antepasado epónimo de los garamantas libios que ocuparon el oasis de Djado, al sur del Fezán, y fueron conquistados por el generalromano Blabo en el año 19 a. De C. Se dice que eran de raza cusita-beréber y el siglo II d. De C. Fueron sometidos por los bereberes lemta, matrilineales. Posteriormente se mezclaron con los aborígenes negros de la margen meridional del Alto Níger y adoptaron su idioma. Hoy en día sobreviven en una sola aldea con el nombre de Koromantse. Garamante se deriva de las palabras *gara, man,* y *te*, que significan "pueblo del estado de Gara". Gara parece ser la diosa Ker, o Q're, o car y que dio nombre a los carios, entre otros pueblos, y estaba asociada con la apicultura. Las bellotas comestibles, alimento corrienteen el mundo antiguo antes de la introducción del cereal, se daban en Libia; y la colonia garamata de Ammon se unió con la de Dodona en la Grecia septentrional en una liga religiosa que, puede haber tenido origen en el tercer milenio a. de C. Ambos lugares tenían un antiguo oráculo-encina. Herodoto describe a los garamatas como un pueblo pacíficopero muy poderoso, que cultivaba la palmera, el cereal y el ganado vacuno.

1.4 Dos mitos filosóficos de la Creación.

a) *Algunos dicen que al principio reinaba la Obscuridad y de la Obscuridad nació el Caos. De la unión entre obscuridad y Caos nacieron la Noche, el Día el Erebo y el Aire.*
   De la unión de la Noche y el Erebo nacieron el Hado. La Vejez, la Muerte, el Asesinato, la Continencia, el Sueño. Los Desvaríos, la Discordia. La Miseria, la Vejación, Némesis, la Alegría, la Amistad, la Compasión, las tres Parcas y las tres Hespérides.
   De la unión del Aire y del Día nacieron la Madre Tierra, el Cielo y el Mar.
   De la unión del Aire y la Madre Tierra nacieron le Terror, la Astucia, la Ira, las Mentiras, los Juramentos, la Venganza, la Intemperancia, la Disputa, el Pacto, el Olvido, el Temor, el Orgullo, la Batalla y también el Océano, Metis y los otros Titanes, Tártaro y las tres Erinias o Furias.
b) *De la unión del Mar con sus Ríos nacieron las Neridas. Pero todavía no había hombres mortales, hasta que con el consentimiento de la diosa Atenea, Prometeo, hijo de Jápeto, los formo a semejanza de los dioses. Para ello utilizó arcilla ya agua de Panopeo en Fócide y Atenea les insufló vida*[17].
c) *Otros dicen que el Dios de Todas las Cosas -quién quiera que pudiera haber sido, pues algunos lo llaman Naturaleza- apareció de pronto en el* ***Caos*** *y separó la tierra del cielo, el agua de la tierra y el aire superior del inferior. Después de desenredar los elementos los puso en el* ***Orden*** *debido, tal como está*

[17] Hesíodo· *Teogonía* 211-32, Higinio *Fábulas, Poemio*; Apolodoro. i.7.1., Luciano: *Prometeo en el cáucaso* 13; Pausanias: x.4.3.

en la actualidad. Dividió la tierra en zonas, unas muy calurosas, otras muy frías y algunas templadas: la modelo en forma de llanuras y montañas, y la revistió con hierba y árboles. Sobre ella puso el firmamento rodante, al que tachonó con estrellas , y asigno posiciones a los cuatro vientos Pobló también las aguas con peces, la tierra con animales y el cielo con el sol, la luna y los cinco planetas Finalmente, hizo al hombre - quién único entre todos los animales, alza el rostro hacia el cielo y observa el sol, la luna y las estrellas -, a menos que sea cierto que Prometeo, hijo de Jápeto, hizo el cuerpo del hombre con agua y arcilla y que el alma le fue proporcionada por ciertos elementos divinos errantes que habían sobrevivido desde la Primera Creación[18].

El primer Mito Filosófico se basa en la Teogonía de Hesiodo, en este la lista de abstracciones queda confusa en las referencias a los Titanes, Gigantes y Nerídas, a los que Hesiodo se considera obligado a incluir. Tanto las Tres Parcas como las Tres Hespérides son la triple diosa de la luna en su aspecto mortífero.

El segundo Mito Filosófico se encuentra solo en Ovidio, fue tomado por los griegos posteriores del poema épico babilonio de Gilgamesh, la introducción de la cual relata la creación partícular de la diosa Aruru del primer hombre, Eabani, con un trozo de arcilla; pero, aunque Zeus había sido el Señor Universal durante muchos siglos, los mitógrafos se vieron obligados a admitir que el creador de todas las cosas podía haber sido Creadora. Los judíos, como herederos del mito de la creación "pelasgo" o cananeo, también se habían sentido incómodos: el relato del *Génesis* una hembra "Espiritú del Señor" empolla en la superficie de las aguas, aunque no pone el huevo del mundo; Eva, "la Madre de Todo lo Viviente", recibe la orden de machacar la cabeza de la serpiente, aunque ésta no está destinada a descender al Abismo hasta el final del mundo.

Igualmente, en la versión talmúdica de la creación, el arcángel Miguel –equivalente a Prometeo- forma a Adán con polvo por orden, no de la Madre del Todo Viviente, sino de Jehová. Jehová le da la vida y luego se la da también a Eva, que, como Pandora, lleva la desgracia a la humanidad.

Los filósofos griegos distinguían al hombre prometeico de la creación imperfecta nacida de la tierra, parte de la cual fue destruida por Zeus, y el resto arrastrada en el Diluvio Deucalioniano. Casi la misma distinción se encuentra en el *Génesis* que entre los "hijos de Dios" y las "hijas de los hombres", con las que se casaron.

Las lápidas referentes a Gilgamesh son posteriores y equívocas: en ellas se atribuye toda la creación a la "Brillante Madre del Vacío" –Aruru es sólo uno de los mucho títulos de la diosa- y el tema principal es una rebelión contra su orden matriarcal, descrita como de completa confusión, por los dioses del nuevo orden patriarcal. Marduck, el dios babilonio de ciudad, termina venciendo a la diosa en la persona de Taimat, la sierpe marina; y luego se anuncia con descaro que él, y nadie más, creó las hierbas, las tierras, los ríos, los

[18] Ovidio: *Metamorfosis* i-ii

animales, las aves y la humanidad. Este Manduck era un diosecillo advenedizo cuya pretensión de haber vencido a Tiamat y creado el mundo había sido alejada anteriormente por el dios Bel; Bel era una forma masculina de Belili. La diosa Madre sumeria. La transición del matriarcado al pariarcado parece haberse realizado como en otras partes, mediante la rebelión del consorte de la Reina, en quién había delegado el poder ejecutivo permitiéndole que adoptase su nombre, sus vestiduras y sus instrumentos sagrados.

Como hemos podído observar, la mitología griega esta íntimamente ligada a la mesopotámica y a la hebrea entre otras En estas dos últimas también encontramos en sus cosmogonías que el caos es el origen de la creación. En la cultura mesopotámica el Caos está presente no solo en el **'Gilgamesh'** sino también en **"El Poema de la Creación o *Enuma elish*"** que son las creaciones mas notables de esta cultura. El poema ha sido reconstruido a partir de fragmentos de tablillas, entre los siglos IX y VI a. C., encontradas en Nínive, en la biblioteca de Aurbanipal, y en Asur, Kish. Urk Y Sultantepe, copias de otras más antiguas.

En la reconstrucción realizada, el poema de la creación se contiene en siete tablillas. Su tema es la victoria del dios ordenador, Marduk, contra las fuerzas del **Caos**, encabezadas por Tiamat. De los restos de esta deidad, que representa el principio femenino y el mar, Marduk formó el universo, y de los del instigador Kingu formó la humanidad. El héroe deitificado Marduk, erigió además los santuarios y anunció la creación y la supremacía de Babilonia.

Marduk no tiene los rasgos humanos de Gilgamesh. Es sólo un guerrero que se opone a las armas y engendros terribles de sus enemigos, la fuerza de sus elementos, y tienen el poder de crear o desvanecer la realidad mediante su palabra. La formación y el ordenamiento del universo y de los astros, de los restos del Tiamat, es un personaje de barbara grandeza.

Los chinos también tienen que decir con respecto al Caos. Una antigua leyenda china habla sobre una metáfora de los enigmas del orden y del caos

> *Hubo una época en la que el mundo de los espejos y el mundo de los humanos no estaban separados como lo estarían después En esos tiempos los seres espectaculares y los seres humanos tenían grandes diferencias de color y de forma, pero convivían en armonía y además era posible ir y venir a través de los espejo. Sin embargo una noche, las gentes espectaculares invadieron la tierra sin advertencia y se produjo el Caos. Mejor dicho, los seres humanos pronto advirtieron que las gentes del espejo eran el caos Los invasores eran muy poderosos, y solo se les pudo derrotar y regresar al espejo gracias a las artes mágicas del emperador Amarillo· para mantenerlos ahí el emperador urdió un hechizó que obligó a esos seres caóticos a copiar mecánicamente los actos y la apariencia de los hombres.*

La leyenda aclara que el hechizo del emperador era fuerte pero no eterno, y predice que algún día el hechizo se debilitará y las formas turbulentas de los espejos empezarán a agitarse. Al principio la diferencia entre las formas espectaculares y las formas conocidas pasarán inadvertida, pero poco a poco se separarán pequeños gestos, se transfigurarán colores y formas y de pronto ese mundo encarcelado del caos se volcará violentamente contra el nuestro.

2. Caos Matemático

De la definición anterior de "Caos" extraída de la Enciclopedia Británica (*Veáse: Capitulo Primero, Sección 1*), podemos observar, que definir 'caos' al menos matemáticamente es más complejo de lo que parece. En 1986, en una reunión celebrada por la Real Sociedad de Londres se dio una definición más concreta del término:

> ***Caos:*** *Comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinista.*

"Estocástico" significa aleatorio y "determinista" es un término introducido por Pierre Laplace, en dinámica.

El término "caos" fue evolucionando paralelamente con la ciencia. A continuación haré un recuento de esa evolución.

2.1 Desde la mística Grecia Antigua

La metáfora de un mundo que funciona como un reloj se remonta a mucho tiempo atrás y es importante que apreciemos cuán profundamente arraigada se encuentra.

Un buen lugar para comenzar lo constituye de nuevo la Grecia Antigua, con Tales de Mileto. Él nació alrededor del 624 a.C., y murió sobre el 564 a.C. y es famoso por haber predicho el eclipse de Sol. Probablemente, adoptó el método de predecir eclipses empleado por los egipcios y los caldeos y su predicción sólo fue correcta con un margen de error de un año más o menos. Sea como fuere, el eclipse ocurrió en un momento propicio, interrumpiendo una batalla entre lidios y medas, y el Sol quedo casi completamente oscurecido. Estas circunstancias aumentaron sin duda, la reputación de Tales como astrónomo. Una de las frustraciones de ser historiador es la forma en que, casi por accidente, algunos sucesos pueden fecharse con exactitud mientras otros solo son conjeturas. Nuestro conocimiento de la fecha de nacimiento de Tales, se basa en los escritos de Apolodoro; la de su muerte, se debe a Diógenes Laercio: ambas fechas son poco fiable. Pero sin ninguna sombra de dudas, el eclipse ocurrió el 28 de mayo del año 585 a.C. Tan fiable resulta el tic, tac del reloj cósmico que, dos milenios y medio después, podemos calcular no sólo cuando ocurrieron los eclipses antiguos, sino también los lugares sobre la superficie de la Tierra donde se pudieron ver. Los eclipses solares son raros y el anterior, en particular, es el único del que razonablemente, pudo haber sido testigo Tales. Los acontecimientos astronómicos todavía proporcionan a los historiadores uno de los mejores métodos para datar sucesos.

Se dice que Tales iba caminando una noche y quedó tan absorto en su estudio del cielo nocturno que cayó en una zanja. Un acompañante le comentó: "*¿Como puedes decir qué va a suceder en los cielos cuando no puedes ver lo que se extiende bajo tus propios pies?*" En cualquier caso, esta historia resuma las actitudes que dieron lugar a la mecánica clásica. Los filósofos de la Grecia antigua podían calcular los movimientos de los planetas con una exactitud pasmosa, pero todavía creían que los objetos pesados caían más rápidamente que los ligeros.

La dinámica sólo comenzó a progresar cuando los matemáticos apartaron sus ojos del cosmos y miraron más atentamente - y más criticamente- lo que sucedía debajo de sus pies. Tolomeo imaginó que la tierra se encontraba estacionaria en el centro de todo porque tomó demasiado al pie de la letra la evidencia aportada por sus propios sentidos y no acertó la hora de cuestionar su significado. Pero la cosmología proporcionó el estímulo, y es dudoso.

La cosmología primitiva está bien surtida de imaginación mitológica, pero es deficiente en contenidos objetivos. Nos encontramos visiones de una Tierra plana sostenida por un elefante, del dios Sol guiando su carruaje a través del cielo, y de estrellas que cuelgan de cuerdas y se apagan durante el día. El punto de vista pitagórico no era menos místico, si bien concedía mayor importancia al significado mágico de los números y, sin darse cuenta introdujo la matemática en escena. Platón sugería que la Tierra se encontraba en el centro del universo, con todos los demás objetos girando a su alrededor en una serie de esferas huecas. También creía que la tierra era redonda, y en su creencia, de inspiración pitagórica, de que todo, incluso el movimiento de los cielos, era una manifestación de la regularidad matemática resultó enormemente influyente.

Eudoxio, un extraordinario matemático, que también inventó la teoría rigurosa de los números irracionales, se dio cuenta de que el movimiento observado de los planetas con respecto a las estrellas no se ajustaba al ideal platónico. Las trayectorias seguidas por los planetas estaban inclinadas, y, muy frecuentemente, parecía como si estos se movieran hacía atrás. Eudoxio concibió una descripción matemática en la cual se consideraba que los planetas estaban montados sobre una serie de veintisiete esferas concéntricas, cada una girando alrededor de un eje sostenido por la más próxima. Sus sucesores mejoraron el ajuste con las observaciones añadiendo esferas adicionales. Sobre el año 230 a.C. Apolonio suplantó este sistema con una teoría de los egipcios, en la que los planetas se movían en pequeños círculos cuyos centros, a su vez, giraban en círculos mayores. Claudio Tolomeo, que vivió en Alejandría entre los años 100-160 d.C., perfeccionó el sistema de los egipcios hasta que éstos se ajustaron tan bien a las observaciones que nada los suplantó durante 1500 años. Fue un triunfo de la ciencia antigua.

La metáfora de que los cielos se muevan análogamente a como funciona la maquinaria de un reloj puede tener una base más literal. Nuestras ideas sobre la cultura griega antigua provienen de una vertiente intelectual: filosofía, geometría, lógica. La tecnología ha recibido menos atención. Debido a esto, en parte a que han sobrevivido pocos ejemplos de la tecnología griega.

Se nos ha contado que los griegos valoraban la lógica, matemática intelectual, por encima de la logística, matemática práctica. Pero nuestras fuentes sobre esta visión del tema no son imparciales. La historia completa de la tecnología griega puede que no se conozca nunca, pero los indicios son fascinantes.

En 1900, unos pescadores estaban buscando esponjas alejados de la costa de la isla griega de Antikitera (enfrente de la isla griega de Kitera, entre Grecia y Creta). Hallaron los restos de un barco que se hundió durante una tormenta, en el año 70 a. C., mientras navegaba de Rodas a Roma. Su botín incluía estatuas, cerámica, ánforas y monedas, junto con conjuntos de dibujos y varias partes, que reveló trazas de engranages. En 1972, Dereck de Solla Price observó este material con rayos X y fue capaz de construir el complicado dispositivo de 32 cuerdas dentadas. Pero ¿para que servía? Analizando su estructura, decidió que debía de usarse para calcular las posiciones del Sol y de la luna con respecto al fondo de las estrellas.

El mecanismo de Antikitera tiene características muy interesantes, entre ellas el de ser el ejemplo más remoto que se conoce de un engranaje diferencial. Tales engranajes se emplean ahora en ejes traseros de automóviles para que las ruedas se muevan a diferentes velocidades, por ejemplo, al tomar una curva. En el mecanismo de Antikitera era necesario un engranaje diferencial para calcular las fases de la Luna sustrayendo el movimiento del Sol del de la Luna. El aparato es muy complejo y está fabricado con una precisión considerable. Lo que indica la existencia de una larga tradición en la Grecia antigua en el corte de engranajes y en máquinas engranadas. No han sobrevivido más ejemplo, tal vez porque las máquinas viejas y rotas fueron fundidas para aprovechar su metal.

2.2 De Copérnico a Newton.

En 1473 Nicolás Copérnico se dio cuenta de que la teoría tolemaica contenía un gran número de epiciclos idénticos y descubrió que podía eliminarlos si consideraba que la Tierra giraba alrededor del Sol. Los epiciclos idénticos eran trazas del movimiento de la Tierra, superpuesto sobre los movimientos de los restantes planetas. De golpe, esta teoría heliocéntrica redujo el número de epiciclos a treinta y uno.

Johannes Kepler quedó igualmente insatisfecho con la visión de Tolomeo que hizó Copérnico. Éste heredó una serie de observaciones astrónomicas nuevas y extremadamente precisas realizadas por Tycho Brahe y estaba buscando las estructuras matemáticas que había tras ellas. Tenía una mentalidad abierta, tan abierta que algunas de sus ideas, tal como la relación entre la separación de las órbitas planetarias y los poliedros regulares, parecen bastante ridículas hoy en día. Posteriormente Kepler abandonó esta teoría cuando se dio cuenta de que estaba en conflicto con sus observaciones; todavía no disponemos de ninguna teoría sobre la formación de los planetas que explique correctamente los tamaños y las distancias entre ellos.

Finalmente fue forzado, casi contra su voluntad, a formular su primera ley: los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol. Implícitas en este trabajo hay otras dos leyes que posteriormente adquirieron una enorme significación. La segunda ley establece que la órbita de un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales y la tercera ley sostiene que el cubo de la distancia entre el Sol y el planeta es proporcional al cuadrado del período de su órbita.

La teoría de Kepler es estéticamente mucho más atractiva que un revoltijo de epiciclos, pero, al igual que sus predecesoras, es puramente descriptiva Dice que hacen los planetas, pero no da un fundamento unificador. Antes de que la cosmología pudiese ir más allá de Kepler, hubo de resignarse a ser realista y poner los pies en la tierra.

En la Universidad de Pisa en la década de 1580, se dieron importantes avances en el conocimiento humano. Pero la excitación no podía continuar todo el tiempo. Durante un servicio religioso, un estudiante debió aburrirse, puesto que su atención se distrajo y comenzó a mirar una gran lámpara que se balanceaba con la brisa. Ésta oscilaba erráticamente, pero él notó que cuando la oscilación era más amplia, su velocidad aumentaba, de modo que tiempo empleado en una oscilación permanecía constante. Por aquel entonces aún no se habían inventado relojes precisos, de modo que midió el tiempo empleado por la lámpara usando su pulso.

El estudiante era Galileo Galilei, quién entró a la Universidad de Pisa a la edad de 17 años para estudiar medicina. Recibiendo clases particulares de matemáticas. Galileo nació en Florencia en 1564 y murió en 1642. Del mismo modo que fue un científico de primer orden, también fue una destacada figura literaria, un escritor elegante y hábil. Tenía un barco de herramientas con el que fabricó sus propios telescopios: descubrió que Júpiter tenía cuatro lunas, los primeros cuerpos celestes conocidos que no giraban alrededor de la Tierra. Tenía talento para el pensamiento claro, prefiriendo las explicaciones lógicas a los argumentos extensos, ideados para complicar y oscurecer. Vivió en una época en que aceptaba las explicaciones de los sucesos en función de sus propósitos religiosos. Por ejemplo, la lluvia caía porque su propósito era regar los cultivos; una piedra lanzada al aire caía al suelo porque ese era el lugar que le correspondía.

Galileo se dio cuenta de que las preguntas sobre el propósito de las cosas no proporcionaban a la humanidad control sobre fenómenos naturales. En lugar de preguntar por qué cae la piedra, él buscaba la descripción precisa de cómo cae. En lugar del movimiento de la Luna, en el que él no podía influir o regular, estudió bolas rodando sobre planos inclinados. Y, en un golpe genial, confinó su atención a unas pocas cantidades claves: tiempo, distancia, velocidad, aceleración, momento.

El tiempo, en particular, le creó a Galileo muchos dolores de cabeza. No se puede medir el tiempo de una piedra cayendo, mirando cuánto se acorta una vela ardiendo. El usó relojes de agua y el ritmo de su propio pulso, de acuerdo con el historiador Stillman Drake, canturreaba para sí mismo, marcando el ritmo del mismo modo en que lo haría un músico. Para entender mejor los fenómenos dinámicos y mejorar la precisión de sus medidas de tiempos, estudió el caso de una bola rodando sobre una pendiente suave, en lugar de una que cayera libremente. Y mediante una mezcla de experimentos ideales y reales llegó a una elegante descripción de cómo caen los cuerpos bajo la acción de la gravedad.

De acuerdo con el espíritu de la geometría griega –en la que todos los objetos estaban idealizados, de modo que una línea no tiene anchura y un plano no tiene espesor- Galileo idealizó su mecánica, eligió despreciar los efectos tales como la resistencia del aire, para poder buscar las simplicidades subyacentes. A fin de desenredar la maraña de influencia interrelacionada que controla el mundo natural, es mejor empezar estudiando cada hebra a la vez.

En los tiempos medievales se pensaba que el recorrido de un proyectil tenía lugar en tres partes: un movimiento inicial en línea recta, una porción de un círculo y una caída vertical final. Galileo descubrió que la velocidad de un cuerpo que cae aumenta a un ritmo constante. De esto dedujo el recorrido correcto, una parábola. También mostró que una bala de cañón alcanza una distancia máxima cuando se lanza con un ángulo de 45°. Encontró leyes para la composición de las fuerzas. Se dio cuenta que, en ausencia de la resistencia del aire, una masa pesada y una ligera deben caer con la misma velocidad. Galileo tenía un sentido del humor seco, como expuso en su *Diálogo sobre los principales sistemas del mundo.*

> *"Yo diría que cualquiera que se considere más razonable que todo el universo se mueve a fin de dejar que la tierra permanezca fija, sería más irracional que uno que escalara a la parte superior de una cúpula para tener una panorámica de la ciudad y sus alrededores y entonces pidiera que todo el campo gire alrededor suyo, de forma que él no se moleste en girar su cabeza."*

Un sistema para los objetos celestes; otros para los objetos mundanos. Kepler con su vista puesta en el cielo y Galileo con su oído en el suelo. Era casi impensable que hubiera una conexión entre los dos. El cielo era puro, inmaculado, la casa de Dios y sus ángeles; la Tierra era el lugar del hombre pecador.

Un sencillo golpe de intuición cambió para siempre esta percepción.

Algunos grandes científicos han sido niños prodigio, pero el joven Isaac Newton fue un niño relativamente ordinario, excepto por su destreza para construir cosas. El gato de la familia, del que se dice que desapareció en un globo de aire caliente, lo vivió en carne propia. Newton nació en 1642 en la aldea de Woolsthorpe, fue un bebé prematuro y enfermizo. No resaltó particularmente como estudiante en el Trinity College de Cambrige. Pero cuando se produjo la gran peste, regresó a su aldea natal, alejado de la vida académica, y casi sin ayuda de nadie creó la óptica, la mecánica y el cálculo. Al final de su vida fue director de la Real Casa de Moneda y presidente de la Real Sociedad Inglesa. Murió en 1727.

Galileo descubrió que un cuerpo que se mueve sometido a la gravedad terrestre adquiere una aceleración constante. Newton perseguía un objetivo mayor: un código de leyes[19] que gobernase el movimiento de un cuerpo bajo todas las combinaciones de fuerzas.

En cierto sentido, el problema era geométrico y no dinámico. Si un cuerpo se mueve con una velocidad uniforme, entonces la distancia que recorre es el producto de su velocidad por el tiempo transcurrido. Si se mueve con velocidad no uniforme no existe una fórmula tan simple. Los matemáticos anteriores a Newton hicieron importantes progresos, mostrando que varias cuestiones dinámicas básicas podían expresarse en forma geométrica. Sin embargo, rara vez era fácil resolver los problemas geométricos.

Una gráfica que muestre cómo varía la velocidad de un cuerpo con el tiempo tiene la forma de una curva. Por argumentos geométricos puede mostrarse que la distancia total recorrida es igual al área comprendida bajo la curva. Similarmente la velocidad es la pendiente de la tangente de otra gráfica, que representa la distancia frente al tiempo. Pero ¿cómo hallar estas áreas y tangentes? Newton, e independientemente Gottfried Leibniz, resolvieron estos problemas dividiendo el tiempo en intervalos cada vez más diminutos. El área comprendida bajo la curva resulta ser la suma de las áreas de un gran número de estrechas bandas verticales. Demostraron que el error cometido por tal aproximación resulta muy diminuto a medida que el intervalo temporal se hace cada vez menor, y argumentaron que "en el límite" el error puede llegar a anularse totalmente. Del mismo modo, la pendiente de una tangente puede calcularse considerando dos valores del tiempo muy próximos y permitiendo que la diferencia entre ambos sea arbitrariamente pequeña. Ningún matemático pudo proporcionar de forma lógica una justificación rigurosa para este método, pero ambos estaban convencidos de que era correcto. Leibniz hablaba de cambios "infinitesimales" en el tiempo; Newton tenía una imagen más física de las cantidades que influyen continuamente, y las llamó "fluentes y fluxiones".

3.2 De Newton a Poincaré

La revolución del pensamiento científico que culminó con Newton nos llevó a una visión del universo como un gigantesco engranage, que funcionaba como un mecanismo de extraordinaria precisión. De acuerdo con esta visión, una máquina es, por encima de todo

[19] En realidad Newton nunca formuló "*leyes*" el les llamó: *principios*", de ahí el nombre de su libro con el que dio a conocer sus ideas Sin embargo nosotros las conocemos como leyes y no como principios.

predecible. Bajo las mismas condiciones realizará las mismas cosas. Un ingeniero que sepa las especificaciones de la máquina y su estado en un momento dado puede, en principio, calcular exactamente lo que hará en cualquier instante posterior.

Newton formuló sus leyes en la forma matemática que no sólo relacionaban entre sí cantidades, sino también las velocidades de cambio de dichas cantidades. Cuanto más cae un cuerpo, mas rápido lo hace: por eso es más peligroso caerse desde un edifico alto que desde uno bajo. Es la aceleración *-el ritmo de cambio del ritmo de cambio de posición-* la que es constante. Quizá podamos comprender ahora porque se necesitaron tantos siglos para que se descubrieran estas regularidades dinámicas: la ley es simple sólo para aquellos que adquieren una nueva concepción de la simplicidad

Las ecuaciones que involucraron ritmos de cambio se denominaban ecuaciones diferenciales. El ritmo de cambio de una cantidad se determina mediante la diferencia de sus valores en dos instantes cercanos, la palabra "diferencial" impregna, recordándonos dicho concepto, las matemáticas: cálculo diferencial, coeficiente diferencial. La resolución de ecuaciones algebraicas, aquéllas que no involucran ritmos de cambio, no es siempre fácil; la resolución de ecuaciones diferenciales es un orden de magnitud más difícil. Mirando en retrospectiva desde finales del siglo XX, la sorpresa es que tantas ecuaciones diferenciales importantes puedan ser resueltas, al menos desde un punto de vista ingenuo. Ramas enteras de las matemáticas han brotado de la necesidad de entender una única, crucial, ecuación diferencial.

La palabra "análisis" adquirió una especial connotación durante el siglo XVIII, cuando el aspecto teórico del cálculo se fue extendiendo sustancialmente. El principal artífice de tal desarrollo fue Leohard Euler, el matemático más prolifero de todos los tiempos. Euler también fue responsable de grandes partes de la aplicación del cálculo a la física matemática. Nacido en Suiza en 1707, fue educado en primer lugar para la vida religiosa, pero pronto se decidió por las matemáticas y comenzó a publicar a la edad de 18 años. A los 19, ganó un importante premio matemático concedido por la Academia Francesa de Ciencias, sobre un problema relacionado con los mástiles de los buques. En 1733, fue nominado por la Academia de San Petersburgo en Rusia. En 1741 se mudó a Berlin, pero regresó a Rusia en 1766 a requerimiento de catalina la Grande En consecuencia, Suiza le recuerda como un gran matemático suizo, Rusia como un gran matemático ruso, y Alemania como un gran matemático alemán. Su vista comenzó a fallar y en 1766 estaba totalmente ciego Esto no tuvo efectos notables en su prodigiosa y original producción matemática.

El campo de la mecánica analítica contribuyó con las primeras pinceladas newtonianas: la mecánica se basaba total y explícitamente en el cálculo, para el que el objetivo era, primero, hallar ecuaciones diferenciales que gobernaban el movimiento del sistema de interés, y, luego, resolverlas. Pero pronto comenzaron a abrirse áreas completamente nuevas. Los antiguos pitagóricos buscaban la armonía en los números, o, más exactamente, números en armonía, pues la numerología de la música fue su mayor descubrimiento. Muchos habían querido detectar una afinidad entre la matemática y la música. Sea como fuere, se obtuvo una cantidad asombrosa de importantes resultados matemáticos a partir del problema de las vibraciones de una cuerda de violín. Puede argumentarse, por ejemplo, que sin él no dispondríamos ni de la radio, ni de la televisión.

Resolviendo una ecuación diferencial apropiada, Book Taylor descubrió en 1713 que la forma fundamental de una cuerda de vibrante es una gráfica sinusoidal. En 1746, Jean Le Rond D'Alembert se percató de que también eran posibles otras formas. D'Alembert era hijo ilegítimo de madame de Tencin, un famoso personaje y de su amante, el caballero Destouches. El fruto de esta relación fue abandonado en las escaleras de la iglesia de Saint Jean- le-Rond de Paris, de ahí su inusual nombre de pila.

D'Alembert llevó a cabo un análisis general de la cuerda vibrante. Suponiendo que la amplitud de la vibración es pequeña (para eliminar términos indeseables de las ecuaciones), escribió una ecuación diferencial que debía ser satisfecha por la cuerda. Pero ésta era un tipo nuevo de ecuación, *una ecuación de derivadas parciales*. En tales ecuaciones aparecen los ritmos de cambio de algunas cantidades con respecto a diversas variables. Para la cuerda de violín, estas variables son de posición de un punto sobre la cuerda y el tiempo. D'Alembert consiguió mostrar que la ecuación es satisfecha por la superposición de dos ondas de forma arbitraria, una viajando hacía la izquierda y otra hacía la derecha.

Euler se apresuró a completar este descubrimiento. Se le ocurrió que la forma ondulada sinusoidal única puede acoplarse con sus armónicos superiores: ondas con la misma forma pero vibrando al doble, triple, cuádruple,... de la frecuencia fundamental. Analizó las vibraciones de campanas y tambores en una "nueva teoría de la música". Daniel Bernoulli extendió los resultados a los tubos de los órganos.

Después de la música vino la física. Joseph Louis Lagrange, un joven que comenzaba a hacerse de un nombre, aplicó en 1759 estas ideas a las ondas del sonido y al cabo de diez años estaba lista una teoría de la acústica comprensible y lograda.

El siglo XVIII fue una época de poderío marítimo, que exigía conocimientos sobre el modo en que fluyen el agua y otros fluidos. En 1752, Euler enfocó su atención a la dinámica de fluidos y en 1755 estableció un sistema de ecuaciones en derivadas parciales para describir el movimiento de un fluido sin viscosidad. Consideró fluidos incomprensibles (agua) y comprensibles (aire). Modeló el fluido como un medio continuo, infinitamente divisible, y describió su movimiento en términos de variables continuas que dependen de la posición de las partículas del fluido: velocidad, densidad, presión.

Una a una fueron cayendo, bajo el dominio matemática, las diversas ramas de la física. Josep Fourier desarrolló una ecuación para describir el flujo de calor y obtuvo un método nuevo y potente para resolverla, ahora conocido como *análisis de Fourier* La idea principal consiste en representar cualquier forma de onda como una superposición de curvas sinusoidales.

La deformación de materiales sometidos a tensión, fundamental para la ingeniería, condujo a las ecuaciones de la elasticidad. Análisis más profundos de la gravitación condujeron a ecuaciones que ahora denominamos en honor de Pierre Simon Laplace y de Simon Denis Poisson. Las mismas ecuaciones aparecían de nuevo en hidrodinámica y electrostática, y se desarrolló una generalización común, conocida como "teoría del potencial". La teoría del potencial permitió a los matemáticos abordar problemas tales como la atracción gravitatoria debida a una masa elipsoidal. Ésto es importante en astronomía. puesto que la mayoría de los planetas no son esferas, sino que están achatados en sus polos. En el siglo XVIII (y principios del XIX) fue un período en el que se forjaron la mayoría de las grandes teorías de la física matemática clásica, siendo las principales excepciones las ecuaciones de Navier-Stokes del flujo de un fluido viscoso y las ecuaciones del electromagnetismo, debidas a James Clerk Maxwell, que aparecieron un poco después. El descubrimiento de las ondas de radio vino a través de las ecuaciones de Maxwell.

Surgió un paradigma contundente. La forma de modelar la naturaleza es mediante ecuaciones diferenciales.

Pero hubo un precio que pagar. Los matemáticos del siglo XVIII se dieron de topes en la pared. en un problema que ha plagado la mecánica teórica hasta nuestros días: obtener las ecuaciones es una cosa. resolverlas es otra muy diferente. El mismo Euler dijo:

> *'Si no nos está permitido penetrar en un conocimiento completo concerniente a los movimientos de los fluidos, no es debido a la mecánica, o a la insuficiencia de los principios conocidos del movimiento a los que hemos de atribuir la causa. Es el mismo análisis el que aquí nos abandona"*

Los principales logros del siglo XVIII consistieron en obtener ecuaciones para modelar los fenómenos físicos. Pero hubo mucha menos suerte al resolver las ecuaciones.

A pesar de eso habia un ilimitado optimismo y un sentimiento general de que los problemas de la naturaleza habian quedado ampliamente resueltos. El éxito del paradigma de la ecuación diferencial fue impresionante y vasto. Muchos problemas. incluyendo los básicos y los importantes, condujeron a ecuaciones que podían ser resueltas. Comenzó un proceso de autoselección, por el que las ecuaciones que no podían ser resueltas eran, automáticamente, de menos interés que aquellas que sí podían serlo. Por supuesto. los libros de texto a partir de los cuales las nuevas generaciones aprendian las técnicas, sólo contenían problemas resolubles. La premisa era que el universo sigue un camino dinámico único y predeterminado. Sólo puede hacer una cosa. Pierre Simón Laplace. en sus *Ensayos Filosófico sobre las probabilidades*, lo expresa de la manera siguiente:

> *'Un ser inteligente que en un instante dado conociera todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la forman. y que fuera lo suficientemente inmenso como para poder analizar dichos datos. podría condensar en una única fórmula el movimiento de los objetos mas grandes del*

universo y el de los átomos más ligeros· nada sería incierto para dicho ser, tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos "

De las afirmaciones de Laplace, podemos comprender el clima de entusiasmo que prevalecía en la ciencia de aquella época cuando un fenómeno tras otro –mecánica, calor, ondas, sonido, luz, magnetismo, electricidad- eran dominados por la misma técnica. El paradigma del determinismo clásico había nacido: si las ecuaciones describen la evolución del sistema unívocamente, en ausencia de perturbaciones externas aleatorias, su comportamiento está entonces unívocamente especificado en todo instante.

Sin embargo, aún había cuestiones no respondidas, tales como el movimiento de tres cuerpos bajo la gravedad. Pero de un modo u otro, tales ecuaciones eran vistas como excepciones.

Y, de hecho, incluso el determinismo matemático de las ecuaciones del movimiento tenían huecos. Una de las idealizaciones comunes de la mecánica newtoniana es considerar partículas elásticas duras. Si colisionan dos de tales partículas, salen rebotadas con ángulos y velocidades bien determinados. Pero las leyes de Newton no son suficientes para determinar el resultado de la colisión simultánea de tres de esas partículas. Las pretensiones eran demasiado, y los resultados eran defectuosos

En 1750, Lagrange recogió las ideas de Euler y, a partir de ellas, elaboró una reformulación sobre la dinámica. Como resultado de este trabajo se produjeron dos ideas importantes. Ambas habían estado presentes durante décadas, pero Lagrange pudo formularlas de manera concreta.

La primera fue el principio de conservación de la energía. La mecánica clásica reconocía dos formas de energía. La energía potencial es la energía que un cuerpo tiene en virtud de su posición. Por ejemplo, en un cuerpo gravitatorio, la energía potencial es proporcional a la altura. Un cuerpo en la cima de una colina posee más energía potencial que uno en un valle, por ello la escalada a una colina es más fatigosa que un paseo a lo largo de la playa. La energía cinética es la energía que tiene un cuerpo en virtud de su velocidad: se ha de trabajar mucho más duramente para frenar un caballo desbocado que cuando se trota sobre él.

Durante el movimiento, y en ausencia de fricción, estas dos formas de energía pueden convertirse una a la otra. Cuando galileo dejó caer su célebre bala de cañón desde la torre inclinada de Pisa, ésta comenzó con mucha energía potencial pero no cinética, e intercambiaba energía potencial por cinética conforme caía. Es decir, descendió y aceleró, a final de cuentas: la energía total, es decir, la energía cinética más la potencial, no cambian. Cuando una bala de cañón cae de un parapeto pierde energía potencial y, por tanto, ha de ganar energía cinética. Es decir, se acelera. La segunda ley de Newton del movimiento expresa efectivamente este argumento cualitativo en una forma cuantitativa.[20]

[20] $F= ma$

La segunda idea de Lagrange fue introducir coordenadas generalizadas. Las coordenadas son un truco para convertir la geometría en álgebra, asociando un conjunto de números con cada punto. Los matemáticos encontraban conveniente trabajar con varios sistemas de coordenadas, dependiendo del problema que estaban abordando. Lagrange vió que era inconveniente acarrear este tipo de cálculos en una teoría matemática. Comenzó suponiendo un sistema de coordenadas cualesquiera. Luego, con una simplicidad pasmosa, obtuvo las ecuaciones del movimiento en una forma que no dependía del sistema de coordenadas elegido. La formulación de Lagrange posee numerosas ventajas sobre la de Newton. Muchas de ellas son técnicas: son más fáciles de aplicar cuando existen ligaduras en el movimiento y evita las transformaciones de coordenadas engorrosas. Pero sobre todo es más general, más simple y más abstracta.

Estas ideas fueron proseguidas por Rowan Hamilton (1805-1865), el gran matemático irlandés. Reformuló la dinámica de nuevo, con mayores generalidades aún. En la versión de Hamilton de la teoría, el estado de un sistema dinámico viene especificado por un conjunto general de coordenadas de posición (similares a las de Lagrange) junto con un conjunto relacionado de coordenadas de momento (las velocidades correspondientes multiplicadas por la masa). Una cantidad única, ahora conocido como hamiltoniano del sistema, define la energía total en términos de las posiciones y momentos El ritmo de cambio con el tiempo de las coordenadas de posición y de momento se expresa en función del hamiltoniano mediante un sistema de ecuaciones unificado y simple.

A pesar de todos los importantes logros alcanzados en la física matemática clásica, permanecieron sin tocar algunas áreas de la naturaleza. Los matemáticos podían calcular el movimiento de un satélite de Júpiter, pero no el de un copo de nieve en una ventisca. Podían describir el crecimiento de una burbuja de jabón, pero no el de un árbol. Los matemáticos habían podido concretar, algo del orden del universo, y las razones de ese orden, pero todavía vivían en un mundo desordenado. Creían, que gran parte del desorden (o caos) obedecía a las mismas leyes fundamentales; su incapacidad para aplicar aquellas leyes a cualquier efecto eran simplemente una cuestión de complejidad. El movimiento de dos masas puntuales podía calcularse de forma precisa. El caso de tres partículas era ya demasiado difícil para una solución completa, aunque podía resolverse de forma aproximada. El movimiento a largo plazo de los aproximadamente cincuenta cuerpos mayores en el sistema solar era imposible de controlar en su totalidad.

La Matemática Faltante: "Probabilidad"

La teoría de la probabilidad se originó con un tema bastante práctico, el juego. El jugador tiene un sentido instintivo de las probabilidades[21] en una apuesta Girolamo Cardano, el erudito del juego, un genio intelectual y pícaro incorregible fue le primero en escribir sobre la probabilidad. En 1654, el caballero de Mére le preguntó a Blais Pascal cómo repartir mejor las apuestas en un juego de azar cuando se interrumpe. Pascal escribió

[21] Vease el apéndice "Azar" donde se da un tratamiento formal de la teoría de las probabilidades

a Fermat y entre los dos encontraron una respuesta. Ésta se imprimió en 1657 en el primer libro que se dedicó igualmente a la teoría de la probabilidad *De ratiocinis in ludo aleae* de Christian Huygens.

La probabilidad, proviene de la publicación de la obra "*Teoría analítica de las probabilidades*" de Laplace, en 1812. De acuerdo con Laplace, la probabilidad de un suceso es el número de maneras en que puede ocurrir, dividido por el número total de cosas que pueden suceder, sobre el supuesto de que estas últimas son igualmente probables.

Una de las partes más importantes de la teoría de las probabilidades es la estadística y está a su vez centra muchos de sus estudios en la famosa *distribución normal*. Esta es una curva en forma de campana que modela fielmente las proporciones de una población que tiene alguna característica particular.

La distribución normal fue denominada originalmente *ley del error*, debido al trabajo de los astrónomos y matemáticos del siglo XVIII, quienes cuando trataron de calcular las órbitas de los cuerpos celestes se vieron forzados a tomar en cuenta el error observacional. La ley del error describe cómo se aglomeran los valores observados alrededor de un valor promedio, y proporciona estimaciones de las posibilidades de que ocurra un error de un valor determinado. Adolphe Quetelet la importó a las ciencias sociales, y aplicó el método a todo lo que se le ocurrió: medidas del cuerpo humano, delitos, matrimonios, suicidios. Su "*Mecánica Social*"se tituló así deliberadamente en comparación con la *Mécanica Celeste* de Laplace. Quetelet fue lo suficientemente hábil para extraer conclusiones generales de la supuesta constancia de los valores sociales, y sugirió la idea de un "hombre promedio". No sólo pensaba en la condición humana como una especie de dinámica social: quería ocuparse de ella como si fuese un ingeniero. Ajustando, estabilizando, amortiguando las oscilaciones. Para él el "hombre promedio" no era una abstracción matemática, sino un ideal moral.

Las ciencias sociales difieren de las ciencias físicas en muchos aspectos, uno de los cuales es que los experimentos controlados son raramente realizables en las ciencias sociales. Si un físico desea examinar el efecto el calor en una barra de metal, puede calentarla a varias temperaturas y comparar los resultados. Si un economista desea examinar el efecto de una política fiscal en la economía de un país, puede aplicarla o no; pero no puede permitirse el lujo de aplicar diferentes regímenes fiscales a la misma economía bajo las mismas condiciones. Alrededor de 1880, las ciencias sociales comenzaron a desarrollar un sustituto del experimento controlado, derivado de los primeros trabajos de Quetelet sobre la distribución normal. El trabajo más importante fue realizado por tres hombres: Francis Galton, Ysidro Edgeworth y Karl Pearson. Cada uno de ellos destacaba en su propio campo de conocimientos: Galton, en antropología, Edgeworth, en economía, y Pearson, en filosofía. Entre ellos convirtieron la estadística en una ciencia más o menos exacta.

Francis Galton (1822-1911) estudió medicina, pero abandonó cuando heredó una fortuna. En 1860 dedicó su atención a la metrología y, por medio de métodos gráficos, dedujo la existencia de anticiclones a partir de un montón de datos irregulares. Tocó temas como la educación, la psicología, la sociología y el estudio de las huellas digitales, pero en 1865 apareció su principal interés: la herencia genética. Galton deseaba entender como pasaban a las generaciones sucesivas las características heredadas. En 1863 se encontró con los escritos de Quetelet y quedó maravillado con la distribución normal. Sin embargo, el *modo en el que la empleó era bastante diferente de como sugería Quetelet. Galton consideró* la distribución normal como un método para clasificar datos en grupos de origen diferente, Galton razonó que la distribución normal se aplica únicamente a poblaciones puras, que fallaría en mezclas de poblaciones.

Pero esta imagen no satisfizo a Galton cuando pensaba en la herencia genética. Supongamos que la primera generación de una población pura tiene alturas distribuidas normalmente. Cada individuo tiene descendientes, cuyas alturas, presumiblemente, también están distribuidas normalmente. Sin embargo, el pico de altura de los descendientes depende de cuál fue el pico de altura de los progenitores; de lo contrario, ¿cómo podría heredarse la altura característica?. De esta forma, las alturas de las sucesivas generaciones se describen por superposición de muchas distribuciones normales diferentes, pero esto no necesariamente conduce a una distribución normal. Conclusión: *cuando una población pura produce la siguiente generación, la población resultante deja de ser pura.* Pero esto es absurdo: la generación pura original, es a la vez, una generación resultante de la generación previa.

En 1877, *Galton consiguió resolver esta paradoja. Para entonces tenía numerosas* generaciones de guisantes dulces que se ajustaban a la distribución normal; también tenía un curioso instrumento experimental llamado trestobillo, que simulaba la matemática dejando caer perdigones de plomo a través de una disposición ordenada de alfileres metálicos, rebotando al azar a la izquierda o a la derecha. Su resolución fue la siguiente. Pueso que los padres proceden de una población pura, las distribuciones normales por separado correspondientes a sus descendientes no son independientes. Su comportamiento superpuesto es. especial. De hecho, tiene lugar un pequeño milagro matemático: las distribuciones están relacionadas justo de tal manera que al superponerlas todas, resulta de nuevo una distribución normal.

Galton quedo impresionado con el resultado y ello le condujo a la idea de regresión. Los niños de padres altos son, en promedio, más bajos que éstos; los niños de padres más bajos son, en promedio, más altos. Esto no impide que los niños de padres altos sean más altos que los de padres bajos, pero la altura de los descendientes está así, desplazada ligeramente hacia el promedio.

En 1873, *el físico James Clerk Maxwell propuso el empleo de los métodos* estadísticos en una reunión de la Sociedad Británica para el Avance de la Ciencia:

> *"La mas ínfima porción de materia que podemos someter al experimento está constituida por millones de moléculas, ninguna de las cuales se nos muestra jamás en su identidad individual. No podemos, por tanto, determinar el*

movimiento real de ninguna de dichas moléculas; por ello, estamos obligados a abandonar el método histórico estricto y adoptar del método estadístico para tratar con grandes grupos de moléculas Los datos de método estadístico, tal como se aplican a la ciencia de las moléculas, son las sumas de grandes cantidades moleculares. Al estudiar relaciones entre cantidades de este tipo, nos encontramos con una nueva clase de regularidad, la regularidad de los promedios, de la que podemos fiarnos suficientemente para todos los propósitos prácticos, pero de la que no podemos pretender ese carácter de precisión absoluta que poseen las leyes de la dinámica abstracta".

Maxwell abordó una cuestión básica: ¿Cuál es la distribución estadística de la velocidad, aleatoriamente variable, de una molécula? Comenzó con dos suposiciones físicas plausibles:

- La componente de la velocidad en cualquier dirección dada es independiente de la componente en cualquier dirección perpendicular.
- La distribución es esféricamente simétrica, es decir, trata todas las distribuciones por igual.

A partir de estos principios básicos sin recurrir a las leyes de la dinámica, Maxwell presentó un argumento matemático único para demostrar que la distribución ha de ser el análogo tridimensional de la ley de error de Quetelet.

Al final del siglo XIX la ciencia había adquirido dos paradigmas muy diferentes para los modelos matemáticos. El primero y más antiguo, era el análisis de gran precisión por medio de las ecuaciones diferenciales; en principio, era capaz de determinar la evolución completa del universo, pero en la práctica, sólo era aplicable a problemas simples y bien estructurados. El segundo el análisis estadístico de cantidades promediadas, que trabajaban con cantidades globales del movimiento de sistemas altamente complejos.

No había prácticamente contacto alguno, a nivel matemático, entre ambos métodos. Las leyes estadísticas no se calculaban como consecuencia matemática de las leyes de la dinámica, eran algo extra y se basaban en la intuición física.

A medida que fue transcurriendo el siglo XX, la metodología estadística fue ocupando su lugar al lado del modelo determinista. Apareció una palabra nueva para reflejar que incluso el azar tenía sus propias leyes: *estocástico* (La palabra griega *stochastikos* significa *de buena puntería* y de este modo expresa la idea de usar las leyes del azar para el beneficio personal.)La matemática de procesos estocásticos –secuencia de sucesos determinados por el azar- creció junto con los procesos deterministas.

El orden ya no fue nunca más sinónimo de ley y el desorden de fuera de ley. Ambos, el orden y el desorden, tenían leyes. Pero estas leyes de diferentes comportamientos. Una ley para lo ordenado, otra para lo desordenado. Dos paradigmas, dos teorías. Dos formas de ver el mundo. *El determinismo para los sistemas simples con pocos* *grados de libertad, la estadística para los sistemas complicados con muchos grados de libertad* Cualquier sistema. era aleatorio o no lo era. Si lo era los científicos usaban algún método estocástico; si no, preparaban sus ecuaciones deterministas.

Los dos paradigmas, eran igualmente aceptados por los científicos, igualmente útiles, igualmente importantes, igualmente matemáticos. Iguales, pero diferentes. Muy diferentes. Los científicos sabían que eran diferentes, y sabían por qué; los sistemas simples se comportan de forma simple, los sistemas complicados, se comportan de forma complicada. Entre la simplicidad y la complejidad no puede haber un terreno común.

Pero los científicos en su afán por entender cada vez mejor las cosas se cuestionan y peor aún, cuando se sabe algo con firmeza, los cuestionamientos son mas profundos. Si no se cuestiona, se vive a base de fe y no de ciencia.

¿Puede un sistema determinista simple comportarse como uno aleatorio? El progreso completo de la ciencia estaba basado en la creencia de que la forma de buscar la simplicidad en la naturaleza es hallando ecuaciones diferenciales para describirla. ¡Que pregunta tan tonta!

En el momento de la historia al que acabamos de llegar sólo se podía distinguir una voz disidente, y de forma débil e incierta; era simplemente una indicación temblorosa de problemas futuros; dicha voz se elevó una sola vez, después calló: una voz que –si se escuchó- fue ignorada. Era la voz de un hombre que presumiblemente fue, el matemático más grande de su época, otro revolucionario de la turbulenta ciencia de la dinámica La voz de *un hombre que toco el caos...*

Y se horrorizó por ello

Henri Poincaré. Y de él hablaremos más ampliamente en el siguiente capítulo de este trabajo.

CAPÍTULO SEGUNDO

CAOS, ATRACTORES Y ATRACTORES EXTRAÑOS

CAOS, ATRACTORES Y ATRACTORES EXTRAÑOS

1. CAOS

1.1 La sensibilidad a las condiciones iniciales.

Recordemos la historia del inventor del ajedrez. Este sabio pidió al rey como recompensa que se pusiera un grano de arroz por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, y así sucesivamente doblando el número de granos de arroz por cada nueva casilla. Al principio el rey pensó que ésa era una recompensa muy modesta, pero después tuvo que admitir que la cantidad de arroz necesaria era tan enorme que ni él ni ningún rey en el mundo podían suministrarla. Doblar 10 veces una cantidad equivale a multiplicarla por 1024; doblarla veinte veces, equivale a multiplicarla más de un millón, etcétera...

Cuando una cantidad crece de modo que se dobla al cabo de cierto tiempo, luego vuelve a doblarse tras el mismo intervalo de tiempo, y así sucesivamente, se dice que esta cantidad crece *exponencialmente o que tiene un crecimiento a tasa constante*.

Utilicemos la idea del crecimiento exponencial y supongamos que tratamos de poner un clavo en equilibrio sobre su punta. Obviamente a menos que utilicemos un imán o algún otro objeto, y hagamos trampa, esto no será posible El clavo nunca queda exactamente en equilibrio y cualquier desviación le hará caer de un lado a otro Si se estudia la caída del clavo mediante las leyes de la mecánica clásica, se encuentra que cae con velocidad exponencial (de forma aproximada, y al menos al comienzo de la caída). De este modo, la desviación del clavo respecto al equilibrio se multiplicará por 2 en un cierto intervalo de tiempo, de nuevo por 2 en el intervalo siguiente, y así sucesivamente. hasta que pronto el clavo se encontrará tendido a lo largo de la mesa.

El ejemplo del clavo, es un ejemplo típico de **"sensibilidad a las condiciones iniciales"**. Esto quiere decir que un pequeño cambio en el estado del sistema en el instante cero –un pequeño cambio en la posición y velocidad iniciales del clavo- produce un cambio posterior que crece exponencialmente con el tiempo Así pues, una causa pequeña –empujar ligeramente el clavo hacia la izquierda o la derecha- tiene un efecto grande. Uno puede pensar que para que una causa pequeña tenga un efecto grande es necesario que el estado en el instante cero sea excepcional, como es el estado de equilibrio inestable de un clavo sobre su punta. Pero lo cierto es lo contrario: *muchos sistemas físicos dependen de forma* *sensible de las condiciones iniciales.* Dicho de otra forma, cualquiera que sea el estado del sistema en el instante cero, si se le "empuja" ligeramente hacia la derecha o izquierda, de ello resultarán efectos importantes a largo plazo.

Veamos ahora otro ejemplo: el del juego de billar con obstáculos redondos. Idealicemos un poco el sistema: despreciaremos el rozamiento, los efectos debidos a la rotación de la bola, y supongamos que las colisiones son elásticas. Lo que nos interesa es el movimiento del centro de la bola de billar. Mientras no haya ninguna colisión, este movimiento es rectilíneo y uniforme. Cuando hay una colisión con un obstáculo todo sucede como si el centro de la bola fuera reflejado por un obstáculo mayor –mayor precisamente en el radio de la bola *(figura 1)* -. La trayectoria del centro de la bola es reflejada exactamente de la misma forma que un rayo de luz es reflejado por un espejo –así se expresa geométricamente el hecho de que la colisión sea elástica-.

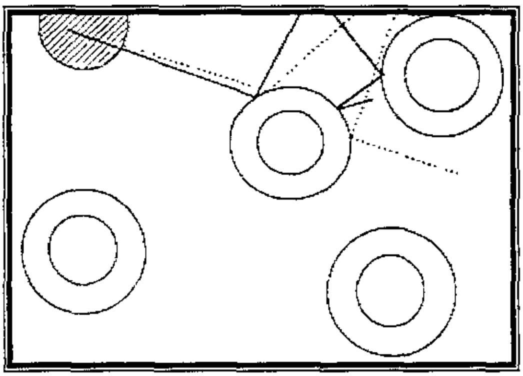


Figura 1 Una mesa de billar con obstaculos convexos La bola parte de la esquina superior izquierda y su centro sigue una línea continua Una bola imaginaria parte en una dirección ligeramente diferente (linea discontinua) Después de algunas colisiones, las dos trayectoriasno tienen nada que ver una con la otra

Supongamos que tenemos sobre la misma mesa de billar una bola real y otra bola imaginaria, inicialmente en el mismo lugar. Impulsemos simultáneamente las dos bolas *con la misma velocidad pero en direcciones ligeramente diferentes. La trayectoria de la* bola real y la bola imaginaria forman así cierto ángulo "α". Ahora bien, observemos también que la distancia entre las dos bolas será proporcional con el tiempo. Hay que señalar que este crecimiento proporcional al tiempo no es el crecimiento exponencial explosivo anterior. Si la distancia entre el centro de la bola imaginaria es, al cabo de un segundo, de una micra, la distancia al cabo de 20 segundos sólo será de 20 micras (aún muy pequeña).

Pero, ¿qué pasaría si hubiese una arruga o alguna reflexión en la mesa de billar? Una reflexión sobre el borde recto de la mesa de billar no aportaría nada nuevo: las trayectorias reflejadas mostrarían el mismo ángulo α antes y la distancia entre la bola real y la imaginaria seguiría siendo proporcional al tiempo. Recordemos que la reflexión de la bola sobre un borde de la mesa de billar obedece a las mismas reglas que la reflexión de la luz sobre un espejo: mientras el espejo sea plano no ocurre nada extraordinario.

Recordemos que había obstáculos redondos en la mesa de billar, y estos obstáculos corresponden a espejos convexos. Como es sabido, las imágenes reflejadas en un espejo convexo son bastante diferentes a las que se observan en un espejo plano. Podemos analizar lo que ocurre de la siguiente forma: si enviamos un rayo luminosos de ángulo α sobre un espejo convexo, el pincel reflejado tiene un ángulo diferente –llamémosle α '- mayor que α. Supongamos que el ángulo α ' es el doble del ángulo α -esta es una simplificación excesiva-.

Volvamos a la mesa de billar con obstáculos redondos, y a nuestras dos bolas, una real y la otra imaginaria. Inicialmente, las trayectorias de las dos bolas forman un ángulo α, y este ángulo no cambia por una reflexión sobre un borde recto de la mesa de billar. Pero tras un choque con un obstáculo redondo, las trayectorias divergirán con un ángulo 4α. Después de 10 choques el ángulo se habrá multiplicado por 1024, y así sucesivamente. Si tenemos un choque por segundo, el ángulo entre las trayectorias de la bola real y la bola imaginaria crecerá exponencialmente con el tiempo. De hecho de la demostración matemática[1] se puede comprobar que la distancia entre las dos bolas también crecerá exponencialmente con el tiempo (mientras no se haga demasiado grande): ***tenemos sensibilidad a las condiciones iniciales.***

La distancia entre el centro de la bola real y el centro de la bola imaginaria se duplica cada segundo. Por lo tanto al cabo de 10 segundos una distancia inicial de 1 micra se ha convertido en una distancia de 1024 micras, es decir, alrededor de un milímetro. Y al cabo de 20 (o 30) segundos, ¡la distancia sería de más de un metro (o más de un kilometro)!. Esto es absurdo dadas las dimensiones de la mesa de billar ¿Dónde estuvo el error? El error estuvo en haber simplificado tanto el análisis: hemos supuesto que tras una reflexión por un obstáculo redondo, el ángulo entre las trayectorias de dos bolas de billar se había multiplicado por 2 (mas o menos) pero seguía siendo pequeño. En realidad, al cabo de cierto tiempo el ángulo se hace grande, las trayectorias se separan y mientras una de las bolas tropieza de lleno con un obstáculo, la otra pasa rozándolo.

Resumiendo, si observamos simultáneamente el movimiento de una bola de billar real y otra imaginaria con condiciones iniciales ligeramente diferentes, vemos que normalmente la trayectoria se separa exponencialmente con el tiempo hasta que una de las bolas tropieza con un obstáculo mientras la otra pasa de largo A partir de este momento los dos movimientos ya no tienen que ver uno con otro. Existen condiciones iniciales

[1] La velocidad de crecimiento (igual a la derivada temporal) de la distancia entre la bola real y la bola imaginaria es proporcional (en una primera aproximación) al angulo entre las trayectorias Por consiguiente, una estimación de la distancia entre las dos bolas viene dada por la integral de una exponencial que es asimismo (salvo una constante aditiva) una exponencial $\int_0 Ae^{as}\,ds = \frac{A}{a}(e^{at}-1)$ Evidentemente, la hipótesis de colisión por segundo sólo es aproximada e, incluso si se acepta, el crecimiento del ángulo no es exactamente exponencial Pero la limitación esencial del argumento es que solo se aplica para pequeñas distancias entre bolas.

excepcionales para la bola imaginaria tales que ésta no se aparta de la bola real, por ejemplo, la bola imaginaria podría seguir a la bola real aunque a un milímetro detrás de ella. En general. Las dos trayectorias divergen.

El ejemplo del billar y la anterior discusión de éste, es una discusión en la que se presentaron hechos plausibles sin llegar a una demostración. Se puede hacer un análisis matemático rigurosos del billar con obstáculos convexos, dicho análisis fue realizado por el ruso Yakov G. Sanai[2] seguido por otros matemáticos. Este tipo de sistemas con sensibilidad a las condiciones iniciales tiene análisis matemáticos muy complejos.

1.2 La pequeñisíma causa de Poincaré

Como hemos visto, el recorrido de una bola sobre una mesa de billar con obstáculos convexos da lugar a un fenómeno un poco extraño. Supongamos que modificamos la condición inicial, reemplazando la posición y la velocidad reales de la bola por una posición y una velocidad imaginarias ligeramente diferentes. Entonces la trayectoria real y la trayectoria imaginaria, que al comienzo estaban muy próximas, empezarán a divergir cada vez *más rápidamente* hasta que de pronto no tengan nada que ver una con la otra Esto es a lo que los científicos han llamado "*sensibilidad a las condiciones iniciales*". Conceptualmente éste es un descubrimiento muy importante. El movimiento de la bola de billar esta determinado sín ambigüedad por la condición inicial, y aun así estamos esencialmente limitados en la predicción de su trayectoria. Tenemos a la vez determinismo e impredecibilidad a largo plazo. Nuestro conocimiento de la condición inicial está siempre empañado por una cierta imprecisión: no somos capaces de distinguir la condición inicial real de las numerosas condiciones iniciales imaginarias que están próximas a ella. Y por consiguiente, no sabemos cuál de las predicciones posibles es la correcta. Pero si no podemos predecir el comportamiento de una bola de billar. ¿Qué sucede con el movimiento de los planetas? ¿Y con la evolución de los fenómenos meteorológicos?. El movimiento de los planetas es predecible con siglos de antelación, pero las previsiones meteorológicas fiables están limitadas a una o dos semanas.

Sin embargo debemos hacer algunas aclaraciones sobre la bola de billar antes de avanzar en nuestra discusión sobre la predecibilidad.

Al estudiar el movimiento de la bola de billar hemos despreciado el rozamiento. ¿Teníamos derecho a hacer está aproximación?. Este tipo de problemas se plantean constantemente en física. ¿Son admisibles las idealizaciones que se utilizan?. En el caso de la bola de billar, la presencia del rozamiento implica que la bola acabará por detenerse. Pero si se detiene mucho tiempo después de que el movimiento se haya hecho impredecible, resultaba práctico suponer que no había rozamiento (La teoría de la bola de billar con obstáculos convexos tiene la ventaja de ser bastante fácil de analizar, pero su aplicación a un billar real daría lugar a serías dificultades.)

---

[2] Ya. G. Sinai, "*Systémes dynamiques avec réflexions élastiques*", Uspekhii Mat Nauk, n.°2, 137-191 (1970).

Pero ahora surge un problema mas serio· ¿Hasta qué punto es general el fenómeno de la sensibilidad a las condiciones iniciales? Al analizar el sistema de la bola de billar con obstáculos convexos hemos llegado a la conclusión de que una pequeña incertidumbre inicial conducía a la impredecibilidad futura a largo plazo. Lo que llamamos *sistema* puede tratarse de un sistema mecánico sin rozamiento, o de un sistema con una fuente de energía que reemplaza a la que se disipa por rozamiento, o incluso a un sistema más general con componentes eléctricos, químicos, etc. Lo que cuenta es que exista una evolución temporal *determinista* bien definida. En tal caso, los matemáticos dicen que se tiene un *sistema dinámico*. Los planetas que giran en torno a una estrella constituyen un sistema dinámico (idealizado con un sistema mecánico sin rozamiento). Un fluido viscoso en cuyo interior rota una hélice es también un sistema dinámico (disipativo en este caso pues existe un rozamiento interno, llamado disipación. en el fluido viscoso). Y si encontramos una evolución temporal determinista que idealice de forma apropiada la historia de la humanidad será también un sistema dinámico

Pero volvamos a la pregunta anterior: la sensibilidad a las condiciones iniciales ¿Es la excepción a la regla para los sistemas dinámicos? La evolución temporal ¿Es o no es, en general, predecible a largo plazo? De hecho, hay varias posibilidades. En algunos casos, por ejemplo, para un péndulo con rozamiento (que analizaremos más delante), no hay sensibilidad a las condiciones iniciales ya que se puede predecir el comportamiento del péndulo y como evolucionará hacía un estado de reposo. En otros casos, se tiene sensibilidad a las condiciones iniciales cualquiera que éstas sean como es el caso, de la bola de billar con obstáculos convexos. Finalmente, muchos sistemas dinámicos tienen un comportamiento mixto, para el que la predicción a largo plazo es posible para ciertas condiciones iniciales pero no para otras.

Sin embargo, el problema de las condiciones iniciales no es nuevo. Ya nuestros antepasados habían descubierto que el futuro era difícil de predecir y que pequeñas causas podían tener grandes efectos Lo relativamente nuevo es la demostración de que, para ciertos sistemas, un pequeño cambio en la condición inicial produce habitualmente un cambio en la evolución posterior del sistema de modo que las predicciones a largo plazo resultan completamente vanas. Esta demostración fue llevada a cabo a finales del siglo XIX por el matemático francés Jacques Hadamard.[3]

El sistema considerado por Hadamard era una especie de billar alabeado en el que la superficie plana de la mesa estaba reemplazada por una superficie con *curvatura negativa*[4].

[3] J Hadamard, "*Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*", J Math Pures et appl 4, 27-73 (1898). Este artículo esta reproducido en las *Oeuvres de Jacques Hadmard*, CNRS. Paris, 1968 (vol 2, pp 729-775)

[4] Lo más fácil de estudiar en el caso de las superficies compactas con curvatura constante negativa (la desventaja de este tipo de superficies es que no pueden realizarse en el espacio euclideo de 3 dimensiones) Recordemos el postulado de Euclides que dice que, por un punto exterior de una recta, pasa una y sólo una paralela a dicha recta Y también recordemos que se pueden construir geometrías no euclideas para las que el postulado anterior es falso. En particular, en el plano de Lobatchevski existen muchas paralelas a una recta dada que pasan por un punto situado fuera de dicha recta Así pues, en el plano de Lobatchevski, dos puntos que se mueven sobre rectas paralelas se alejan, en general uno de otro. El billar con curvatura constante negativa se obtiene cerrando el plano de Lobatchevski y volviendo a pegar los bordes de manera que se

Lo interesante del problema era el movimiento de un punto que permanece ligado a la superficie sobre la que se desplaza sin rozamiento. De este modo el billar de Hadamard es lo que en términos técnicos se denomina el *flujo geodésico* sobre una superficie de curvatura negativa. Dicho flujo permitió a Hadmard demostrar el teorema de sensibilidad a las condiciones iniciales. (El correspondiente teorema de billar con obstáculos convexo es mucho más difícil y sólo fue demostrado por Sinai mucho más tarde, en los años setenta.)

Uno de los que en aquella época comprendieron la importancia filosófica del resultado de Hadamard fue el físico Pierre Duhem. –Duhem tenía ideas muy avanzadas para su tiempo, pero sus convicciones políticas eran netamente reaccionarias- En un libro dirigido al gran público y publicado en 1906, Duhem tituló un apartado "*Ejemplo de deducción matemática que nunca debe utilizarse*". [5] Como él explica esta deducción matemática es el cálculo de una trayectoria sobre el billar de Hadamard. Esta "nunca debe utilizarse" pues una pequeña incertidumbre que necesariamente esté presente en la condición inicial, da lugar a una gran incertidumbre en la trayectoria calculada si se espera el tiempo suficiente, y esto convierte la predicción en algo sin valor.

Otro francés escribía libros de filosofía de la ciencia en esa misma época: el famoso matemático Henry Poincaré. En su libro "*Ciencia y Método*" publicado en 1908[6], discute el problema de la impredecibilidad aunque no de una manera técnica. No cita a Hadamard ni los detalles matemáticos de la teoría de los sistemas dinámicos –teoría que él había creado y conocía mejor que nadie-. Una observación esencial de Poincaré es que el azar y el determinismo se han hecho compatibles por la impredecibilidad a largo plazo. Poincaré lo explica de la siguiente manera:

> "*Una pequeñísima causa, que escapa a nuestra percepción, determina un efecto considerable, que hemos de ver forzosamente, y entonces decimos que el efecto se debe al azar. Si conociésemos bien las leyes de la naturaleza, y la situación del universo en el momento inicial, conseguiríamos predecir exactamente la situación del mismo universo en el momento siguiente. Más incluso en el caso de que las leyes naturales no nos ocultasen sus secretos, continuaríamos sabiendo la situación sólo de manera aproximada. Si esto nos facultase a pronosticar la situación sucesiva con la misma aproximación, no necesitaríamos más, y afirmaríamos que el fenómeno se vaticinó y que las leyes lo gobiernan todo. Sin embargo no ocurre así, acaso suceda que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan unas muy grandes en el fenómeno definitivo. Un leve error en las primeras se convertirá en uno colosal en un segundo. Se hace imposible predecir ..*"

Poincaré sabía lo útiles que son las probabilidades del mundo físico. Sabía que el azar forma parte de la vida de todos los días. Y como también creía en el determinismo

obtenga una superficie cerrada lisa (obviamente hay que demostrar que esto es posible). Sobre el billar así obtenido es posible imaginar el fenomeno de la sensibilidad a las condiciones iniciales

[5] P. Duhem. "*Example de déduction mathématique à tout jamais inutilisabl*"e en "*La Théorie physique, Son objet et sa structure*", Chevalier et Riviére, Paris, 1906.

[6] H. Poincaré, "*Ciencia y Método*", Espasa Calpe, Madrid, 1944

clásico (la incertidumbre cuántica todavía no existía en su época), quería encontrar donde estaba la fuente del azar. Sus reflexiones sobre el problema le proporcionaron varias respuestas. Él vio varios mecanismos mediante los cuales la descripción determinista del mundo podía dar lugar de manera natural a la idealización probabilista. Uno de estos mecanismos es el de la sensibilidad a las condiciones iniciales[7].

Poincaré discute dos ejemplos de sensibilidad a las condiciones iniciales. El primero es el de un gas compuesto por numerosas moléculas que se mueven a gran velocidad en todas direcciones y sufren numerosos choques entre sí. Estos choques, dice Poincaré, dan lugar a sensibilidad en las condiciones iniciales. (La situación es análoga al ejemplo de la bola de billar chocando con un obstáculo convexo.) La impredecibilidad del movimiento de las partículas en el gas justifica una descripción probabilista.

El segundo ejemplo de Poincaré concierne a la meteorología. También aquí, dice existe sensibilidad a las condiciones iniciales. Por otra parte, nuestro conocimiento de las condiciones iniciales es siempre algo impreciso, y ello explica la poca fiabilidad de las previsiones del tiempo que va ha hacer. Así, como no podemos prever cuando se suceden los fenómenos meteorológicos, pensamos que su sucesión tiene lugar al azar.

Para un especialista contemporáneo, lo más sorprendente de las ideas de Poincaré es su carácter completamente moderno. La dinámica de un gas de esferas elásticas por una parte, la circulación general de la atmósfera por otra, han sido objeto de estudios fundamentales durante los últimos años, y el punto de vista que se adoptó es el de Poincaré. David Ruelle matemático francés y precursor de las teorías del caos habla en su libro *"Azar y Caos" (ver referencia [9] de la bibliografía)* acerca del olvido por parte de los científicos de las teorías de Poincaré sobre las condiciones iniciales y también encuentra las posibles razones de dicho olvido, David Ruelle dice.

> *"Lo que es muy sorprendente es el largo intervalo que ha transcurrido entre las ideas de Poincaré y el moderno estudio por parte de los físicos del fenómeno de la sensibilidad a las condiciones iniciales. El estudio reciente de lo que ahora llamamos "caos" no se ha beneficiado de los estudios de Hadamard, Duhem y Poincaré. Las matemáticas de Poincaré han tenido su papel, pero sus ideas sobre predicciones meteorológicas tuvieron que ser descubiertas de forma independiente.*

7 Incluso en ausencia de sensibilidad a las condiciones iniciales, pequeñas causas pueden tener grandes efectos. Basta como observa Poincaré, esperar mucho tiempo. Otro caso interesante, es el del sistema con varios estados de equilibrio. Puede resultar muy difícil de prever, para una condición inicial dada, hacia que estado de equilibrio-evolucionará el sistema Esta es la situación que se presenta cuando los dominios de atracción de diversos estados de equilibrio tienen fronteras comunes que forman muchos pliegues complejos. Esto se presenta por ejemplo, en el caso del péndulo magnético. Se trata de un pequeño imán suspendido de un hilo rígido por encima de otros varios imanes. Si se da un impulso a este péndulo, se pone a oscilar de manera complicada y resulta difícil averiguar en que posición de equilibrio acabará por detenerse (existen en general varias posiciones de equilibrio) Para figuras que representan dominios de atracción con fronteras complicadas. Entonces, lo que llamamos "azar" puede ser también el resultado, como observa Poincaré, de nuestra falta de control muscular. Y da el ejemplo del juego de la ruleta. Los volados es un juego análogo, y algunas personas bien adiestradas son capaces de obtener regularmente un resultado favorable en este juego

Yo veo dos razones para el sorprendente intervalo que separa a Poincaré de los estudios modernos sobre el caos. La primera es el descubrimiento de la mecánica cuántica, que conmocionó el mundo de la física y ocupó todas las energías de varias generaciones de físicos. La mecánica cuántica hace intervenir al azar de una forma nueva e intrínseca. Entonces ¿Por qué pretender ahora introducir al azar mediante la sensibilidad a las condiciones iniciales en mecánica clásica?

Veo otra razón para el olvido de las ideas de Hadamard, Duhem y Poincaré: estas ideas llegaron demasiado pronto, cuando no existían medios para explotarlas. Poincaré no tenía a su disposición esas útiles herramientas matemáticas que son la teoría de la medida o el teorema ergódico, y por lo tanto no podía expresar sus brillantes intuiciones en un lenguaje preciso. Hay que señalar también que cuando no alcanzamos a tratar un problema matemático, siempre podemos estudiarlo numéricamente con la computadora. Pero evidentemente este método, que ha jugado un papel tan esencial en el estudio del caos, no existía a comienzos del siglo XX."

1.3 Espacio Fase

Para definir el concepto de "Espacio fase" utilizaremos primero el de "mapas". Utilizamos mapas para orientarnos en una nueva ciudad, usamos un mapa de calles; para conducir por una región desconocida. Pero también hay otras clases de mapas: los mapas topográficos, mapas meteorológicos etc. Los mapas son imágenes que nos permiten concentrarnos en aspectos de la realidad que de lo contrario se perderían entre los detalles. Un buen mapa nos permite apreciar algunos rasgos de una realidad que de otro modo pasaríamos por alto y explorar dicha realidad de un modo que sin el mapa resultaría imposible.

Por ejemplo, los excursionistas y escaladores que desean explorar su realidad y saber dónde están usan un mapa que muestra la latitud, longitud y altitud. Análogamente, los científicos que desean explorar la realidad de un sistema físico cambiante –un sistema dinámico- usan un "mapa" destinado a enfocar la dinámica, es decir, los modos en que se mueve y transforma un sistema.

Supongamos que un científico está interesado en el movimiento cambiante (detenciones, desaceleraciones y aceleraciones) de un automóvil que viaja de Nueva York a Washington. Obviamente no basta con especificar dónde se encuentra el automóvil en cada momento; se necesita la velocidad. Un científico podría hacer una gráfica mostrando estos dos aspectos cambiantes del automóvil. Los científicos llaman "espacio fase" del sistema al espacio del "mapa" imaginario donde acontece el movimiento del automóvil.

El espacio de fases esta compuesto por tantas dimensiones (o variables) como el científico necesite para describir el movimiento de un sistema. Con un sistema mecánico, los científicos pueden registrar el espacio de fases en términos de posición y velocidad. En un sistema ecológico, el espacio de fases podría ser la cantidad de miembros de diversas espacies. Al diagramar el movimiento de varias variables de un sistema en un espacio fase advertimos los curiosos caminos laterales de una realidad hasta ahora oculta.

Lancemos ahora un cohete y veamos como hace un 'mapa' de espacios de fase *(figura 2)* Cada punto del mapa es una instantánea de altura y velocidad del cohete (más precisamente de su impulso, que es la masa multiplicada por la velocidad) en determinado instante de tiempo.

Entre A y B el cohete despega de la plataforma de lanzamiento, y su velocidad aumenta deprisa (en la vida real tal vez la aceleración no es tan uniforme como la presenta el "mapa"), En B se consume la primera etapa y la aceleración del cohete se reduce un poco por efectos de la gravedad. Pero en C interviene la segunda etapa y se dispara hasta D, cuando el cohete se libera del tirón de la Tierra y cobra una velocidad constante.

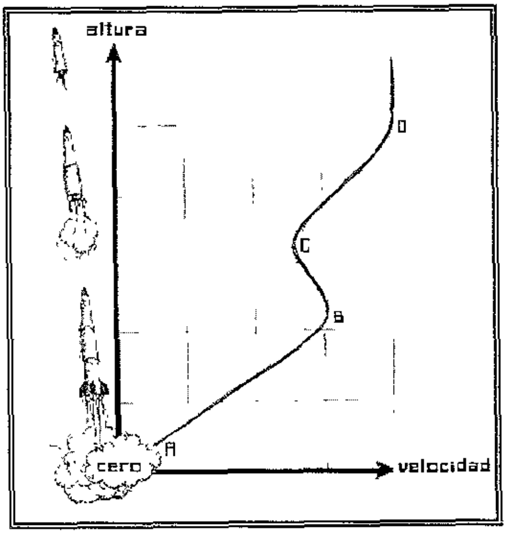


Figura 2. Mapa del Espacio Fase de un Cohete

Como muestra la ilustración, un viaje por el espacio de fases luce diferente de un viaje por el espacio real, tal como un mapa del metro de Londres luce diferente del movimiento real del metro por los túneles. Los mapas simplifican la realidad para enfatizar ciertos aspectos. El mapa del cohete está muy simplificado.

Para ver cuán simplificado está, tengamos en cuenta que nuestro cohete es un objeto que se desplaza en el espacio tridimencional. Para mayor precisión un científico podría tratar de capturar ese aspecto del movimiento del cohete en un diagrama de espacio de fases más complejo. Como un cohete se puede mover en una de tres dimensiones y puede alcanzar –sobre todo cuando se maniobra en el espacio exterior- una velocidad diferente en cada una de ellas, la imagen del espacio de fases de un cohete podría estar diseñada para tener tres dimensiones espaciales correspondientes a cada dirección de velocidad, con lo cual tenemos un espacio de fases hexadimensional (3−3) El estado del cohete (es decir, su velocidad y posición) en cada momento esta dado por un punto de este espacio de fases hexadimensional. La historia del cohete (cómo se ha movido) está dada por una línea del espacio de fases llamada trayectoria. Desde luego es imposible dibujar tales espacios multidimensionales en nuestro espacio común. Pero los científicos pueden dibujar un corte trasversal de dos o tres dimensiones de un espacio multidimensional: los matemáticos son muy felices pensando en tales espacios mas elevados y determinando sus propiedades de modos abstractos que recurren a un álgebra compleja.

En muchos casos, los físicos investigan sistemas que contienen varios componentes, cada cual libre de moverse en cualquiera de las tres direcciones con diferente velocidad en cada una de ellas. Como una sola partícula requiere un espacio de fases hexadimensional (tres dimensiones parciales y tres dimensiones de velocidad), un sistemas de *n* partículas requiere de un espacio fase *n-dimensional* . Por el momento no es preciso pensar en lo exótico del concepto de un espacio *6n-dimensional* Ello es porque aunque un cohete pueda requerir teóricamente un espacio dimensional muy elevado para describirlo, el la práctica todos los pernos, tuercas y demas componentes se mueven a a la misma velocidad y mantienen la misma distancia relativa entre sí. Para describir el movimiento relativo del cohete solo es preciso tener en cuenta las tres direcciones del espacio y las tres del impulso

Esto es lo habitual en los sistemas estables y ordenados. Aunque idealmente puedan tener un espacio fase que contiene un vasto número de dimensiones para desplazarse en un diminuto subespacio de este espacio mas grande. El estudio del desplazamiento de un sistema desde el orden hacia el caos es, en cierto sentido, el estudio de cómo esta simple y limitada noción se descompone de tal modo que la naturaleza comienza a explorar todas las implicaciones del espacio fase que tiene a su disposicion. Los sistemas de la naturaleza son como los animales que han vivido siempre enjaulados: si abrimos la jaula, al principio tienden a moverse de manera restringida, sin aventurarse demasiado lejos, merodeando, *realizando movimientos repetitivos. Sólo cuando un animal un poco mas audaz rompe este* patrón y se aleja de la jaula, descubre el universo entero para explorar y huye de modo totalmente imprevisible. Los sistemas naturales a menudo realizan movimientos rígidos y repetitivos y luego, en un punto crítico, exhiben una conducta radicalmente nueva. Los mapas del espacio de fases ayudan a clarificar estos cambios de conducta.

2. ATRACTORES

Uno de los sistemas más simples y regulares es el que actúa periódicamente, es decir, regresa una y otra vez a su condición inicial. Un resorte, la cuerda de un violín, el péndulo, el día y la noche, los pistones del motor de un automóvil, el voltaje de un suministro eléctrico de corriente alterna, todos oscilan, todos son periódicos.

Estos sistemas se mueven de adelante para atrás, de arriba abajo, de un costado a otro, de tal modo que con cada oscilación completa regresan a su posición inicial. la conclusión lógica es que el camino de un sistema periódico regresa siempre al mismo punto del espacio de fases, por compleja que sea la senda del retorno.

Un ejemplo familiar ilustrará estos sistemas periódicos: un péndulo que cuenta los segundos (*figura 3*). El péndulo se mece hacia arriba y hacia la izquierda, perdiendo velocidad al moverse, hasta que por un segundo infinitesimal se detiene en el punto más alto de su movimiento; luego regresa, yendo cada vez mas deprisa. Alcanza su velocidad máxima en la parte inferior de su oscilación y, al trepar a la derecha, de nuevo pierde velocidad. El péndulo es uno de los sistemas más simples entre los que exhiben esta conducta periódica y repetitiva. En ausencia de fricción y resistencia del aire, el péndulo seguirá oscilando para siempre.

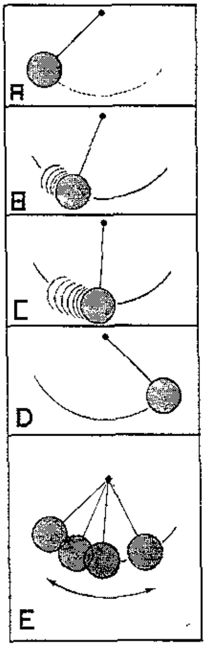


Figura 3. Las diferentes trayectorias del movimiento de un péndulo

Como el péndulo está limitado a oscilar de un lado a otro en una sola dirección, los científicos dicen, filosóficamente, que tiene **"un grado de libertad"**. El cohete, que puede desplazarse en todas las direcciones del espacio, tiene tres grados de libertad.

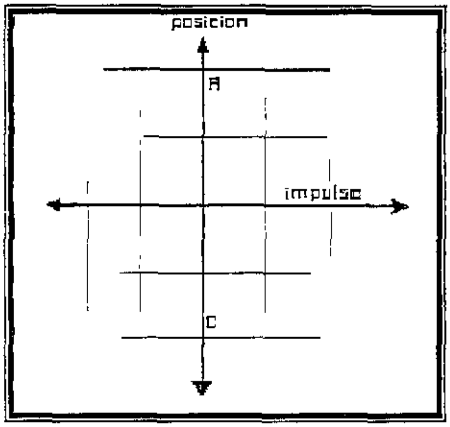


Figura 4. *Mapa del espacio fase del péndulo*

Tracemos la trayectoria del péndulo en un mapa de espacio de fases. Primero, identifiquemos el punto alto de la oscilación hacia la izquierda como A. Aquí el impulso (masa por velocidad) es cero y el péndulo está en el extremo de su oscilación (desplazamiento máximo). Hay otro punto, D a la derecha, donde el péndulo también tiene un impulso cero (*figura 4*).

Ahora marquemos el lugar donde el péndulo está en su punto mas bajo Aquí su desplazamiento es cero pero su impulso (velocidad) está al máximo. Este punto del espacio de fases es C y C'. En el punto C el péndulo se mueve hacia la derecha con impulso máximo. En el punto C', se está desplazando con impulso máximo hacia la izquierda. (*figura 5*).

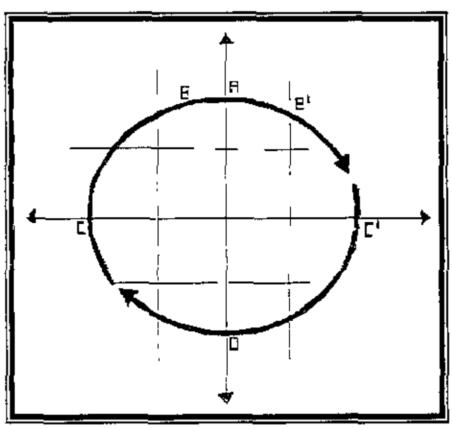


Figura 5.

Por último, tracemos la trayectoria en el espacio fase representando el movimiento total de péndulo en un ciclo.

Como este esquema se repite ciclo tras ciclo, el mapa de espacio de fases de un péndulo es una órbita cerrada.

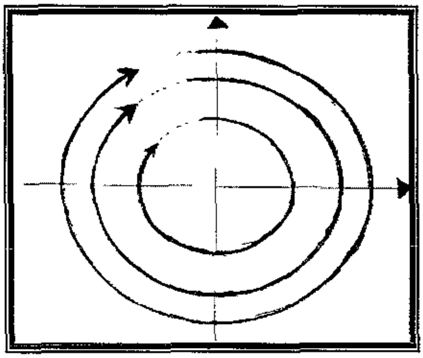


Figura 6.

Si damos al péndulo un empujón más fuerte desde el principio, su desplazamiento será mayor. De hecho, en el mismo mapa de espacio fase podemos dibujar el mismo péndulo recibiendo empujones iniciales de diversa potencia (*figura 5*).

Cada uno de los círculos representa un péndulo en un vacío. Pero en circunstancias comunes los péndulos sufren la fricción y la resistencia al aire; eventualmente pierden velocidad y se detienen a menos que un motor los mantenga en movimiento. Este proceso de deterioro de una órbita periódica también se puede representar con un mapa de espacio fase. El punto central (origen de las coordenadas) representa un péndulo con impulso cero y desplazamiento cero: un péndulo en reposo (*figura 7*).

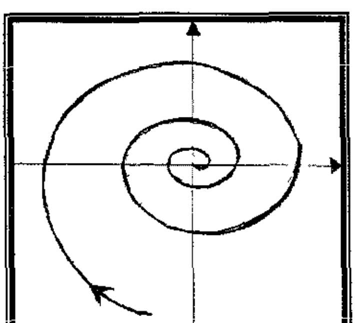


Figura 7.

De hecho, cada péndulo terrestre, por grande que sea su desplazamiento inicial, eventualmente estará en reposo en su punto final fijado.

Como este punto parece atraer trayectorias hacia sí los matemáticos lo llaman **"punto atractor" o "atractor de punto fijo"** (*figura 8*).

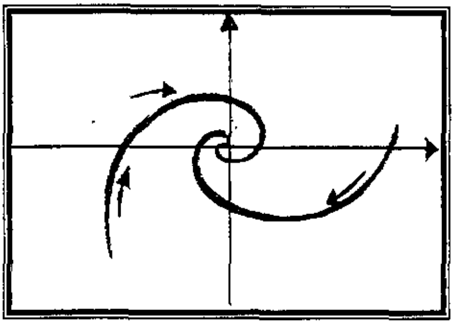


Figura 8. Atractor de Punto Fijo

Un atractor es una región del espacio de fases que ejerce una atracción "magnética" sobre un sistema, y parece arrastrar el sistema hacia sí.

Otro modo de enfocar a un atractor, imaginemos un paisaje ondulante alrededor de *un valle. Rocas redondas y lisas ruedan colina abajo hacia el fondo del valle.* No importa dónde empiecen a rodar las rocas ni con qué velocidad. Eventualmente todas terminarán en el fondo del valle. En vez de las colinas y los valles de un paisaje real, pensemos en colinas y valles de energía. Los sistemas naturales son atraídos por los valles de energía y se alejan de las colinas de energía.

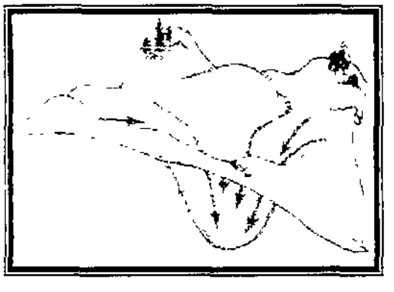


Figura 9. Valle atractor

Es posible tener un paisaje con dos atractores, y un puente entre ambos. Incluso es posible tener una montaña alta que actúe como **"repulsor"** del punto. En dicho paisaje, las trayectorias del espacio de fases eluden a los repulsores y se mueven hacia los atractores

Volvamos, al ejemplo del péndulo. En algunos relojes modernos el péndulo es puramente estético porque el reloj está impulsado por un más preciso cristal de cuarzo. Los componentes eléctricos del mecanismo de relojería dan al péndulo un puntapié periódico. Las fuerzas de fricción y la resistencia del aire van frenando el péndulo, pero el puntapié periódico lo acelera. El resultado es que el péndulo oscila regularmente a pesar de los efectos de fricción y la resistencia del aire. Aunque el péndulo recibiera un empujón adicional, o aunque alguien lo frenara un instante, eventualmente recobraría el ritmo adicional. Se trata obviamente de un nuevo tipo de atractor. El péndulo no esta atraído hacia un punto fijo sino que es impulsado hacia una senda cíclica en el espacio de fases. Esta senda se llama **ciclo límite, o "atractor de ciclo límite"** *(figura 10).*

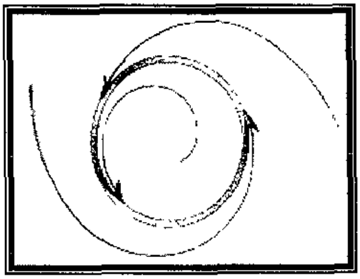


Figura 10. Atractor de Ciclo Límite

Aunque un péndulo en el vacío realiza su ciclo sin cambios, el movimiento del péndulo no implica un ciclo límite, porque la menor perturbación altera la órbita del péndulo, expandiéndola o contrayéndola un poco. En cambio, un péndulo de ciclo límite impulsado mecánicamente resiste pequeñas perturbaciones. Los científicos descubren cada vez más que la naturaleza tiene un modo de cambiar continuamente las cosas para dar con sistemas que *resistan* el cambio.

Un importante ejemplo del ciclo límite es el sistema depredador - presa. Para entenderlo, sigamos el sistema de un lago que contiene muchas truchas y algunos lucios.

El primer año los lucios se enteran con alegría de que tienen un suministro casi ilimitado de truchas. Los glotones lucios prosperan y se reproducen de tal modo que con los años la cantidad de lucios del lago crece sin cesar, a expensas de las truchas.

En este punto, con la reducción del principal recurso alimentario de lucios, el lago se llena de lucios y muchos de ellos mueren.

Años después con el descenso de la población de lucios, las truchas se multiplican y de nuevo se llena el lago. En consecuencia, los pocos lucios ahora tienen comida abundante y se multiplican nuevamente. Así una oscilación entre la cantidad de lucios y la cantidad de truchas, entre depredadores y presas, establece un ciclo, de modo que cada tantos años la cantidad de lucios decae y la población de truchas alcanza su pico (*figura 11*).

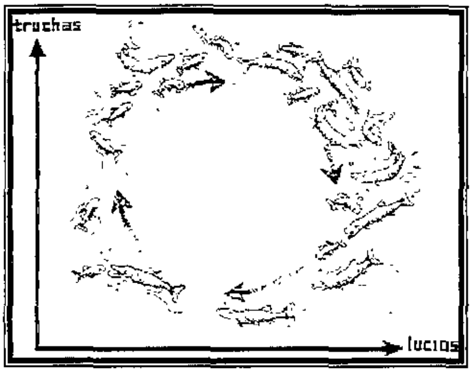


Figura 11. Ciclo del sistema Truchas- Lucios

Los científicos han estudiado atentamente el sistema depredador - presa y han demostrado que, si arrojamos una cantidad de truchas en el lago en cualquier momento del ciclo, los números eventualmente se acomodan para seguir el ciclo original. Si una *enfermedad liquida a las truchas, la población regresa nuevamente a los límites del ciclo.* Un sistema combinado depredador – presa de lucios y truchas tiene una dinámica notablemente estable *(figura 12)*

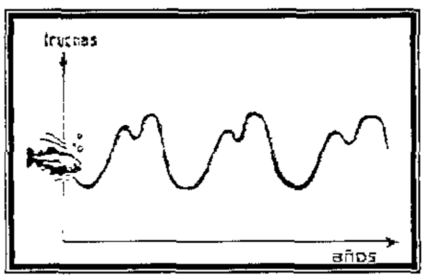


Figura 12.

El péndulo era un sistema, pero la situación depredador – presa es mucho más compleja. Aquí tenemos una gran cantidad de individuos, y cada cual se comporta aleatoriamente, pero de algún modo todos crean un sistema muy estable y organizado

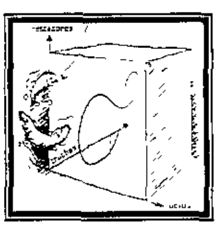


Figura 13.

Un ciclo límite no siempre se reduce a una periodicidad simple. También podemos tener ciclos límite que describan el movimiento del sistema con tres variables, tales como la trucha, el lucio y los pescadores (*figura 13*). Este ciclo límite está en un espacio de fases de más dimensiones.

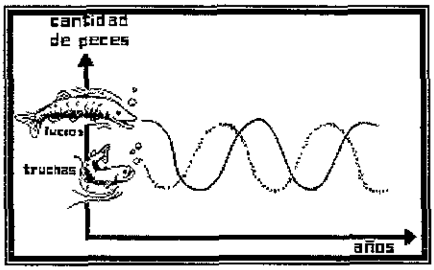


Figura 14. *Con un espacio de fases compuesto por tres variables (truchas, lucios y pescadores) el ciclo límite es más complejo La cantidad de truchas no es afectada solo por los lucios sino también por los* pescadores Y la cantidad de truchas puede variar de dos formas como se muestra en esta figura

También podemos tener dos ciclos límite separados que interactúan entre sí. Esto a menudo ocurre en circuitos eléctricos y poblaciones rivales depredador – presa. Para visualizar los sistemas de ciclo límite acoplados, imaginemos el movimiento de dos péndulos, A y B, cada cual con un motor. Si ignoramos el péndulo A, el movimiento del péndulo B tendrá un atractor de ciclo límite simple.

Asimismo, si ignoramos el péndulo B, el movimiento de A tendrá un atractor de ciclo límite simple.

Pero si los dos péndulos interactúan, el tamaño del espacio de fases aumenta y los ciclos limite, antes independientes, se entrelazan. Es como si el ciclo A fuera impulsado en un círculo por el ciclo B. El resultado de que un círculo impulse a otro círculo es la generación de una figura en forma de rosquilla, a la que los matemáticos llaman **"toro"** *(figura 15, Dibujo 8).* En vez de dos péndulos interactuantes, también podemos imaginar dos sistemas interactuantes depredador – presa. Por ejemplo, el ciclo trucha – lucio podría interactuar con el ciclo insecto – rana en el lago. Al trazar la dinámica de este más amplio sistema de dos ciclos creamos un atractor toro.

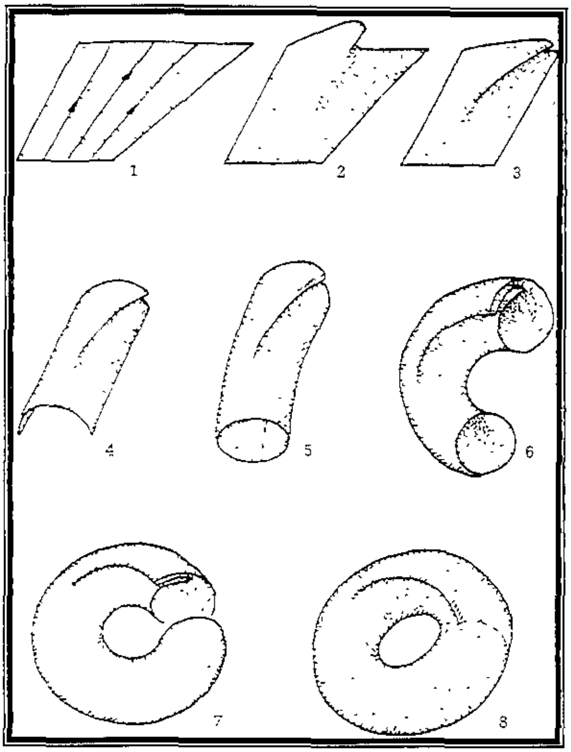


Figura 15. Forma topológica de un atractor de tipo "Toro"

El atractor toro es una criatura más compleja y evolucionada que los atractores de ciclo límite y de punto fijo. El estado de un péndulo se describe mediante un punto unidimensional que forma un atractor girando en un espacio de fases bidimensional. El estado combinado de dos péndulos se describe mediante un punto móvil que forma la superficie bidimensional de un atractor toro. El espacio de fases habitado por esta criatura bidimensional tiene tres dimensiones, pero los matemáticos pueden trabajar con toros en cualquier número de dimensiones. Es decir, es posible acoplar todos los osciladores de una juguetería entera o todas las relaciones depredador – presa de un ecosistema entero y representar su movimiento combinado en la superficie en un toro multidimensional.

El toro también es útil para imaginar un sistema con muchos grados de libertad. Eso significa que un péndulo u oscilador simple es libre de moverse de atrás para adelante en una sola dimensión. Pero, al aflojar el sistema de suspension del péndulo, puede oscilar también de lado a lado, y moverse en dos direcciones. Para los físicos, dicho sistema oscilatorio, con dos grados de libertad es el mellizo de dos osciladores unidimensionales acoplados. La oscilación de un sistema con dos grados de libertad también se puede describir como un péndulo desplazándose en la superficie de un toro. Un toro en un espacio de fases multidimensional es lo más apto para describir ese cambio ordenado y aparentemente mecánico que acontece en los sistemas planetarios.

El movimiento combinado de un par de osciladores –sean planetas, péndulos o ciclos depredador–presa- se pueden retratar como una línea que gira alrededor del toro, demostrando que la superficie del toro es el atractor. Ahora t tomaremos un primer plano del toro para examinar este detalle.

Si los períodos o frecuencias de dos sistemas se encuentran en una proporción simple –uno tiene el doble de tamaño que el otro, por ejemplo- las curvas que rodean al toro se unen con precisión, demostrando que el sistema combinado tiene una periodicidad exacta.

También hay otra forma de conducta oscilatoria acoplada. Aquí las frecuencias individuales no forman parte de una proporción, así que son lo que los matemáticos llaman "*irracionales*". Los números racionales como: ½, ¼, ¾, y demás siempre se pueden expresar con un número finito de decimales (0.5, 0.25, 0.75) o como un decimal simple recurrente: 1/3 = 0.33333333... En contraste un número irracional no se puede expresar como una razón o proporción y su expresión decimal contiene un número infinito de términos sin patrón recurrente. Los dígitos de un número irracional tienen un orden aleatorio. En caso en de que el sistema combinado forme una frecuencia irracional, el sistema combinado gira alrededor del toro sin unirse nunca consigo mismo. Un sistema que luce casi periódico pero nunca se repite con exactitud es denominado, lógicamente, *cuasiperiódico*. Los matemáticos han demostrado que hay una cantidad infinitamente mayor de números irracionales, así que aparentemente los sistemas cuasiperiódicos dominan el universo.

Los científicos del siglo XIX como Lord Raleigh y los ingenieros del siglo XX como Duffing y Van der Pol estudiaron una gran variedad de sistemas cuasiperiódicos que exhiben ciclos limitados alrededor de toros de diversos tamaños. Tales ciclos se encontraron acoplados en resortes y péndulos, estudiando instrumentos musicales y calibrando la oscilación de circuitos eléctricos.

Podemos advertir que la naturaleza descrita hasta ahora por los atractores es muy regular. Los sistemas decaen suavemente ante los atractores de punto fijo u oscilan en dóciles atractores de ciclo límite alrededor de una forma toroidal. Es un mundo clásico donde los científicos pueden predecir con mucha antelación aun la conducta de sistemas muy complejos. Los científicos también han desarrollado la noción de "previsibilidad asintótica": es decir, aunque ignoren la posición exacta de un sistema en el momento, confían en que, por muy lejos que indaguen en el futuro, el sistema estará moviéndose en la superficie toroidal y no vagando al azar en el espacio fase.

2.1 Las observaciones de Poincaré y de como sin saberlo descubrió los atractores

Henri Poincaré aparece hoy como el genial iniciador de los actuales trabajos sobre las relaciones entre el determinismo y predecibilidad. unos trabajos suscitados por la famosa sensibilidad a las condiciones iniciales. Pero el redescubrimiento de estos trabajos de Poincaré es bastante reciente.

Poincaré resumio sus sensaciones en un soberbio aforismo:

"El pensamiento no es sino una chispa entre dos largas noches pero esta chispa lo es todo"

Henri Poincaré estudió los sistemas que evolucionan con el tiempo y que matemáticamente se describen mediante ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones diferenciales expresan el caracter determinista de esta evolución. de la cual la teoría del caos intenta estudiar los comportamientos asintóticos.

Una de las genialidades de Poincaré fue su manera de estudiar los grandes problemas clásicos mediante enfoques absolutamente originales. Logro desentrañar cuestiones hasta entonces inexplicables mediante un enfoque nuevo basado en la intuición geométrica de la situacion. Así. desarrollo la Topología o "Analysis situs" que se interesa por las propiedades de forma. de contiguidad, de conexión, etc.

Poincaré tomó sus temas de estudio como dice Haramard:

"No de los recursos de su espíritu. sino de las necesidades de la ciencia

Los matemáticos del siglo XIX. de Cauchy a Weierstrass. no sabian resolver en general ecuaciones diferenciales Por ello habían creado un cálculo local: se situaban en un *entorno de un punto determinado. demostraban la existencia de soluciones y daban* expresiones aproximadas de dichas soluciones en las proximidades del punto en cuestión. Se plañteaba entonces la delicada cuestión de unir estos fragmentos de solución para obtener soluciones complejas para enunciar resultados globales y averiguar el aspecto general de las curvas solución y su disposición relativa. Poincaré propuso adoptar. para empezar, un punto de vista cualitativo; el estudio cuantitativo vendría después.

Consideremos para ello la ecuación diferencial de primer orden

$$dx/X(x,y)=dy/Y(x,y)$$

donde X e Y son polinomios en x e y. Las curvas solución o curvas integrales de esta ecuación diferencial, son las curvas del plano tales que en cada uno de sus puntos (x_0, y_0), la tangente tenga por pendiente $Y(x_0, y_0)/ X(x_0, y_0)$.

Lo que sabemos de las curvas integrales es que por un punto cualquiera del plano pasa una curva integral y una sola, salvo en determinados puntos singulares situados en la intersección de las curvas de ecuación $X(x.y)= 0$ e $Y(x,y)=0$. Poincaré empezó con un estudio sistemático de estos puntos singulares. Según la configuración de las curvas integrales en sus proximidades, distinguió cuatro tipos de puntos: los nodos, las ensilladuras o puertos, los fotos y los centros *(figura 16)*. Por los nodos pasan infinitas curvas integrales; por las ensilladuras pasan dos; los centros están rodeados por curvas integrales encajadas unas en otras a modos de círculos concéntricos; en torno a los focos, por último, las curvas integrales giran y se acercan incesantemente a modo de espirales.

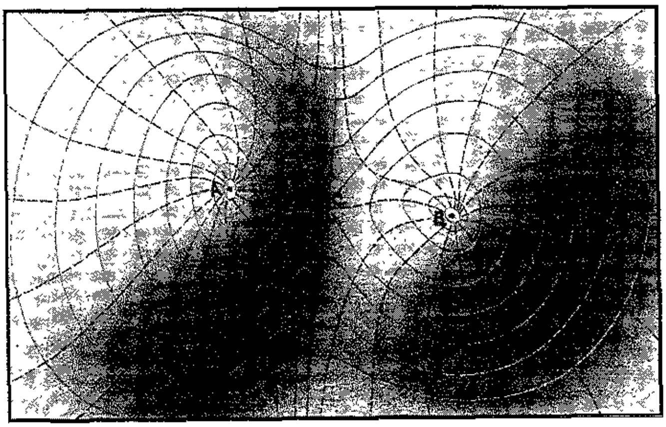


Figura 16. Una analogía topográfica, sugerida por Poincaré, permite hacerse una idea de ciertos puntos singulares de una ecuación diferencial Imaginemos dibujados sobre un mapa las curvas de nivel (en trazos completos), unas líneas que unen puntos de igual altitud Las cimas o los fondos (puntos A y B) corresponden a centros, las curvas solución de la ecuación diferencial rodean estos centros a modo de círculos concéntricos Los puertos (punto C) no son ni máximos ni mínimos de la altitud; corresponden a los puntos singulares en cuyas proximidades las curvas solución tienen una disposición análoga a hipérbolas Cambiando de punto de vista, y considerando que ahora en vez de las curvas de nivel las líneas de pendientes (líneas punteadas), las cimas y los fondos corresponden a nodos, puntos singulares en los que se cruzan infinitas curvas solución Los puntos singulares del cuarto tipo, o focos, alrededor de los cuales las curvas solución giran no aparecen en este modelo

Una vez precisados estos tipos de puntos singulares. Poincaré trató de determinar las posiciones relativas de las curvas solución. Introdujo para ello la noción de arco transverso, o arco de curva que no es una tangente en ningún punto a una curva integral *(figura 17(A))*. Considerando la sucesión de las intersecciones de una curva integral con un arco transverso, redujo el estudio de la curva en el plano al de una sucesión de puntos en una línea Poincaré demostró entonces que toda curva integral que no tiende hacía un número singular, es un ciclo, una espiral que se arrolla asintóticamente alrededor de un ciclo, llamado entonces **ciclo límite** *(figura 17(B))*. Este teorema fundamental, válido para el plano y para la esfera, se conoce con el nombre de *Teorema de Poincaré-Bendixson*, y el ciclo límite es la primera ocurrencia (dista de un punto) de lo que denominamos **"atractor"**. Los ciclo límite y los arcos transversos dividen al plano o la esfera en regiones y *conducen partiendo del comportamiento cerca de los puntos singulares*, a un retrato cualitativo global bastante preciso de las curvas integrales *(figura 17(C))*.

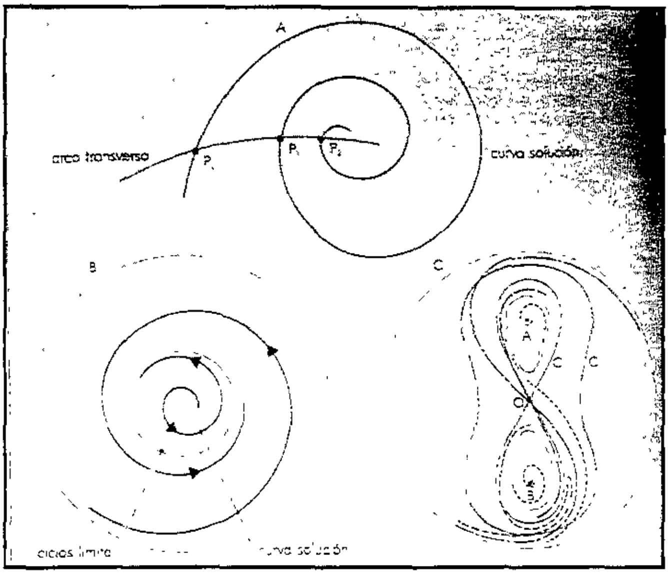


Figura 17 Considerando la sucesion de las intersecciones P_0, P_1, P_2, de una curva solución de una ecuacion diferencial con un arco transverso, Poincare redujo el estudio de la forma de una curva plana al de la sucesion de puntos de una línea (A) Toda curva solucion que no va parar en un punto singular, es bien un ciclo o bien una espiral que se arrolla en torno al ciclo, que se llama entonces "ciclo límite" (B) Los ciclos límite y los arcos transversos subdividen el plano y la esfera en regiones y, a partir del comportamiento en las proximidades de los puntos singulares, conducen a un retrato cualitativo global bastante preciso de las curvas solución de una ecuacion diferencial dada (C) Los puntos A y B son focos y el punto O es un puerto los dos óvalos y el círculo exterior son ciclos límite y las curvas C y C' son arcos transversos cerrados que las curvas solución (líneas de puntos) no pueden cortar mas de una vez

De cómo se equivocó Newton sin que nadie lo notará

Pero como hemos visto anteriormente. Poincaré arrojó una bomba de tiempo a la física newtoniana al predecir y al descubrir una especie de agujero negro en ella. Newton había demostrado que el movimiento de un planeta alrededor del Sol, o de la luna alrededor de la Tierra, es un problema de dos cuerpos, con forma de toro, que se puede resolver con exactitud. ¿Pero, qué ocurre, se preguntaba Poincaré si añadimos a esta descripción el efecto de un planeta adicional? Al extender la mecánica de Newton a tres o más cuerpos, Poincaré encontró el potencial de la no linealidad, para la inestabilidad, para el caos incipiente.

Desde el comienzo de sus trabajos Poincaré había concebido el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales en relación con la cuestión del sistema solar. Esta estabilidad es una propiedad cualitativa global de la trayectoria de los planetas que no podía ser establecida con los métodos analíticos utilizados hasta entonces por los astrónomos. Poincaré atacó el problema en su célebre memoria "*Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica*", galardonado por el Gran Premio Internacional concedido en 1889 por el rey de Suecia y en los "*Métodos de la Mecánica Celeste*".

El problema de los N cuerpos es el estudio de N masas puntuales que se atraen de acuerdo con la ley de la gravitación universal. Despreciando los pequeños planetas y los asteroides, el caso del sistema solar, con sus nueve planetas corresponde a N=10 y resulta ser un problema muy difícil. Se sabe desde Newton que el caso de los dos cuerpos se resuelve explícitamente y conduce al movimiento kepleriano: la trayectoria en torno al sol es elíptica. Pero hay que tener en cuenta las influencias mutuas de los planetas. El caso siguiente, el de los tres cuerpos, había resistido los esfuerzos de los matemáticos, que no conseguían descubrir un número suficiente de "integrales primeras" o funciones que conservan su valor a lo largo de las trayectorias, a fin de reducir el problema a integraciones ordinarias. Poincaré empezó estableciendo que las únicas integrales primeras son ya conocidas, que corresponden a la conservación de la energía, de la cantidad de movimiento y del movimiento cinético; el problema, por lo tanto, no es integrable.

Dado que el estudio de los puntos singulares no bastaba aquí para desembrollar la situación, a Poincaré se le ocurrió partir de las soluciones periódicas (en las que distintos puntos móviles describen curvas cerradas, al menos desde un sistema de ejes convenientemente elegido) y utilizarlas para estudiar las demás soluciones. Se trata, dijo, de la única brecha por la cual podemos intentar penetrar en una plaza hasta ahora considerada como inexpugnable. Poincaré estudió lo que ocurría en las proximidades de una trayectoria periódica C, como había estudiado que sucedía en las proximidades de los puntos singulares. Su punto de vista era a la vez local, ya que se mantenía en las cercanías de C, y global, ya que se desplazaba a lo largo de C. Combinaba pues las ventajas de ambos métodos.

Situándose en un punto M_0 de la trayectoria periódica C, Poincaré puso en práctica el método ya utilizado con éxito en el caso del arco transverso: cortó las trayectorias por el plano normal (perpendicular) a la curva C en el punto M_0 (*figura 18*). Si P_0 es un punto del plano normal muy próximo a M_0, la trayectoria que pasa por P_0, tras de dar una vuelta por las proximidades de M_0 vuelve a cortar el plano normal en un punto P_1, en principio distinto de P_0 pero próximo a él, el de la vuelta siguiente vuelve a cortar el plano en P_2, etc. El estudio de esta sucesión de puntos permite prever el futuro de la trayectoria procedente de P_0. Esta sección de la trayectoria por un plano normal se denomina *Sección de Poincaré* y a la aplicación del plano en sí mismo que, al punto P_0, le asocia su sucesor P_1, *aplicación de primer retorno o aplicación de Poincaré* Esta última sigue siendo un instrumento fundamental para el estudio de los sistemas dinámicos.

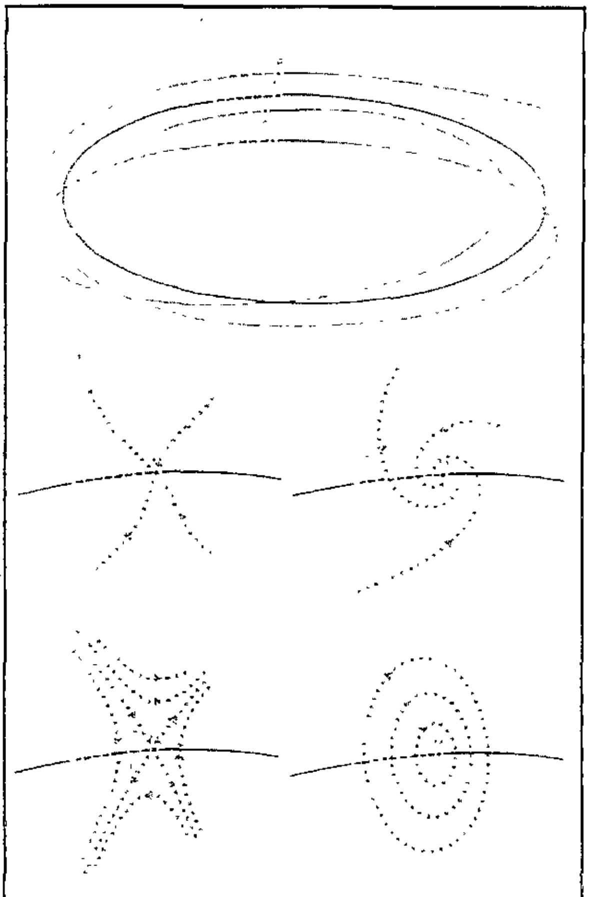


Figura 18. A fin de estudiar las soluciones en las proximidades de la solución periódica, Poincaré cortó las trayectorias mediante el plano normal a la trayectoria periódica C en el punto M_0, la trayectoria que pasa por el punto proximo P_0 da una vuelta en las proximidades de C vuelve a cortar el plano normal en el punto P_1, luego, en la vuelta siguiente, lo hace en P_2 etc. (A) El estudio de esta serie de puntos permite prever el futuro de la trayectoria que parte de P_0 La aplicación que a cada P_0 le asocia su sucesor P_1 se llama aplicación de primer retorno' y constituye un instrumento muy importante para el estudio de los sistemas dinamicos En (B) (análogo de un nodo), todas las trayectorias se aproximan a la trayectoria periodica (lo mismo que podrian alejarse de ella) El caso (C) (análogo de un foco) es similar, la aproximación asintotica se efectúa en "tirabuzón' En (D) (analogo de un puerto), la línea L' esta formada por impactos de las trayectorias que se alejan de C, la línea L'' esta formada por los impactos de las que se acercan a C Las trayectorias que no cortan ni a L' ni a L'' se mantienen a distancia finita Por último en (E) (analogo de los centros), las trayectorias parecen situadas en toros, especie de cámaras de aire contenidas unas en otras y que rodean C.

El estudio de los puntos de impacto en el plano de sección (*figura 18*) hace aparecer algunas analogías con los distintos tipos de puntos singulares mencionados antes. El caso en que las trayectorias están situadas en **toros concéntricos** (*figura 18(E)*) explica Poincaré es a priori muy excepcional pero puede darse y esta posibilidad deriva en un concepto importante introducido por Poincaré, el de la *invariante integral*. Se puede representar esta noción partiendo del modelo ideado por Poincaré: Consideremos un fluido incomprensible contenido en un recipiente y una porción de este fluido que en un instante dado ocupa un volumen V. Si se siguen las trayectorias de las moléculas que componen esta porción de fluido, entonces en cualquier otro instante las moléculas en cuestión ocuparán un volumen igual a V. En el caso que nos concierne, consideramos un conjunto de trayectorias, el volumen ocupado por los puntos en estas trayectorias en un instante dado será siempre el mismo independientemente del instante considerado (y hace aquí un papel de invariante integral). Las invariantes integrales permitirían a Poincaré atacar el problema de la estabilidad de las trayectorias.

Pero al enfoque cualitativo hay que añadirle métodos cuantitativos, ya que no es posible resolver las ecuaciones explícitamente, los especialistas en mecánica celeste procedían por aproximaciones sucesivas en las proximidades de las soluciones periódicas. Para ello efectuaban desarrollos de potencias de un pequeño parámetro ε del orden de la magnitud de las masas planetarias (pequeñas en comparación con el Sol). Pero en estos desarrollos aparecían términos, llamados *seculares*, en los que la variable de tiempo no está contenida en una función sinosoidal y no queda garantizada la convergencia al cabo de un tiempo muy largo. Dado que la aparición de estos términos seculares no necesariamente está ligada a la naturaleza del problema, sino que puede ser debida al método utilizado, los astrónomos recurrieron a varios métodos para hacerla desaparecer. Poincaré era también un maestro en métodos analíticos, demostró que se podía pasar de una técnica a otra reagrupando de uno u otro modo los términos, pero que las series consideradas eran generalmente divergentes (la suma de una infinidad de términos no conducía a una cantidad finita). Peor todavía: Poincaré explicó que aún probando la convergencia de la serie, la estabilidad de la solución no quedaba garantizada. Pero demostró que también en la práctica, estas series convenían porque al ser pequeño el parámetro α tiempo finito determinado daban las posiciones con una precisión suficiente para las necesidades de la astronomía de aquel tiempo.

Poincaré distinguió varios tipos de estabilidad: el sentido primitivo de Lagrange corresponde a la estricta periodicidad de la trayectoria; para una estabilidad en el sentido de Poisson es preciso que un punto, al cabo de cierto tiempo vuelva si no a su posición inicial sí al menos a una posición tan próxima como se quiera de esta posición inicial. La presencia de soluciones asintóticas (*figura 17(B) y 6*) demuestra la existencia de soluciones inestables en el sentido de Poisson. Pero Poincaré demostró, además, que si bien hay una infinidad de soluciones no estables en el sentido de Poisson, estás son "excepcionales" en el sentido del cálculo de probabilidades. Es el Teorema de Recurrencia de Poincaré.

Poincaré consideró también otra noción de estabilidad que precisaría algo más tarde el matemático ruso Lyapunov, y tiene que ver con la distancia entre una trayectoria periódica y las trayectorias vecinas; si esta distancia disminuye, la trayectoria es estable. Las soluciones son estables o inestables en función de ciertos coeficientes que las caracterizan: los "exponentes característicos". En particular, Poincaré demostró que en el caso de dos grados de libertad:

> *"Si para ciertos valores de los parámetros una solución periódica pierde su estabilidad o la adquiere, entonces queda confundida con otra solución periódica, con la que habrá intercambiado su estabilidad."*

En el caso de una solución periódica inestable C (*figura 17(D)*), Poincaré trató de establecer la existencia de soluciones doblemente asintóticas, es decir, de soluciones que se acercan indefinidamente a esta trayectoria inestable en épocas lejanas pasadas y futuras. Ello equivale a demostrar que la superficie S' formada por las soluciones asintoticas en el pasado (y que por lo tanto contienen a la línea L' formada por los impactos de soluciones en el plano de sección) y la superficie S'' formada por las soluciones asintóicas en el futuro (que contiene la línea L'') se cortan en otros puntos además de C. Fue una de las cuestiones más difíciles que abordó Poincaré: Demostró que las superficies S' y S'' se cortan en una infinidad de veces y ello de un modo horriblemente complicado:

> *"Intentemos hacernos una idea de la figura formada por estas dos curvas y su infinidad de intersecciones, cada una de las cuales corresponde a una solución doblemente asintótica. Dichas intersecciones forman una especie de entramado, de tejido, de red de mallas infinitamente finas. Ninguna de estas curvas se ha de cortar a sí misma; además se ha de plegar sobre sí misma de un modo muy complejo para cortar todas las mallas de la red.*
>
> *Sorprende la complejidad de esta figura, que ni siquiera intento dibujar. Nada más indicado para hacernos una idea de la complejidad del problema de los tres cuerpos y en general de todos los problemas de Dinámica en los que no hay integral uniforme."*

Esta complejidad es a la que se enfrentan los actuales teóricos de los sistemas dinámicos.

2.2. Los tres científicos soviéticos: Kolmogorov, Arnold y Moser o la Teoría de KAM

El descubrimiento de Poincare sólo se comprendió del todo en 1954, como resultado del trabajo académico de A. N. Kolmogorov, con posteriores adiciones de otros dos sovieticos, Vladimir Arnoid y J. Moser (a los tres se les conoce colectivamente como KAM).

Antes de examinar lo que descubrió KAM digamos que aún se enseña la física que Poincare cuestionó. A los científicos todavía les resulta útil descomponer un sistema complejo de manera abstracta y matemática. Así que reensamblan matemáticamente la órbita de los planetas, o de un puente en medio de varios vientos, o un motor en marcha en un conjunto de oscilaciones simples, acopladas como una serie de péndulos, o dibujada sobre un toro de cierta dimensión.

Al principio los científicos creían que teóricamente podían aplicar este análisis reduccionista a todos los sistemas complejos. Estaban convencidos de que las correcciones requeridas para explicar oscilaciones adicionales serían pequeñas y no afectarían significativamente la figura del toro. Los "extraños" efectos de Poincaré eran excepciones donde aún el término adicional más pequeño, el tirón gravitatorio mínimo de un tercer cuerpo, podía significar la enorme diferencia entre un sistema que exhibe un movimiento ordenado –limitado a un toro- y un sistema violentamente caótico.

¿El descubrimiento de Poincaré implicaba que el universo entero es potencialmente caótico y se encuentra a una fracción de punto decimal de la aniquilación? La respuesta de KAM fue sí y no.

A partir de sus cálculos, estos tres científicos llegaron a la conclusión de que el sistema solar no se descompondrá por obra de su propio movimiento siempre que se aplique una de dos condiciones:

Primero, que la perturbación o influencia del tercer planeta no sea mayor al tamaño de atracción gravitatoria de una mosca que esté tan lejos como Australia. Los físicos esperan poder refinar el teorema de KAM para demostrar que las perturbaciones de mayor tamaño que la mosca tampoco afectarán la órbita (pero aún están trabajando en ello).

La segunda condición para impedir la desintegración del sistema solar es el requerimiento de que los "años" de los planetas en cuestión no se hallen en una proporción simple como 1:2, 1:3 ó 2:3, y así sucesivamente. En otras palabras, para permanecer estables los planetas deben ser cuasiperiódicos, el movimiento de sus órbitas combinadas debe girar una y otra vez alrededor de un toro sin unirse jamás. En tal caso las órbitas permanecen estables aún ante las perturbaciones de un tercer planeta mucho más grande que una mosca.

¿Pero qué ocurre cuando los años planetarios coinciden para formar una proporción simple? Aquí el sendero alrededor del toro se une, lo cual significa que con cada órbita se amplifica el defecto de la perturbación. El resultado es una resonancia, análoga a la realimentación positiva de un amplificador, donde los efectos pequeños crecen en el tiempo para producir un resultado muy grande, un caos rechinante. Matemáticamente esta amplificación hace que la superficie del toro estalle en un espacio fase. El planeta aún es atraído hacia la superficie e intenta alcanzarla, en el esfuerzo se tambalea caóticamente hasta que al fin la órbita se quiebra y el planeta vuela al espacio.

Esto es lo que dice la teoría matemática de Poincaré - KAM, ¿Hay alguna prueba de semejante conclusión en mecánica celeste de nuestro sistema solar?

Perturbadoramente, cuando los científicos miraron, hallaron lagunas en el cinturón de asteroides precisamente en los sitios donde los "años" de Júpiter y un asteroide formarían una proporción simple. La laguna indica que cualquier planeta que habitara esa órbita sería lanzado al espacio.

2.3 El caos en la mecánica celeste

Jack Winsdom, del Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT), estudió los resultados del vuelo de la sonda espacial 'Voyager 2' en 1981 y descubrió que muchas de las lunas del sistema solar deben haber sufrido en un período u otro una fase de movimiento caótico, pero luego se estabilizaron al hallar una órbita cuasiperiódica. Hiperión una luna de Saturno con forma de gota, parece atravesar una de esas fases caóticas según explica Wisdom.

Figura 19. Saturno y sus lunas' Tomada por la sonda espacial Voyager 2

Jacques Laskar Y Claude Froeschlé del Bureau des Longitudes ... Paris y del Observatorio de Niza respectivamente han estudiado a Hiperión y dan su opinión sobre el comportamiento de la luna de Saturno. Ellos dicen que las fotografías tomadas por el Voyager (*figura 20*) muestra claramente una forma no esférica, dos veces mas largo que ancho, cuyo diámetro más pequeño es de unos doscientos kilómetros La historia caótica de Hiperión es doble: de una parte su forma se explica gracias a la existencia de una zona *caótica para los movimientos orbitales del sistema Hiperión – Titán – Saturno (Titán es* otros satélite de Saturno): por otra parte el movimiento de rotación de Hiperión sobre sí mismo es caótico.

La sección de Poincaré de la trayectoria de Hiperión, calculada en computadora, muestra un movimiento regular (curva invariante) característico de las resonancias entre los movimientos de Hiperión y de Titán. Sin embargo, con unas condiciones iniciales relativamente cercanas a la curva invariante, se observa una zona caótica no confinada. Un cuerpo situado en una órbita inestable de este tipo será antes o después, lanzado del sistema Hiperión – Titán – Saturno tras un encuentro próximo con Titán. Se sabe que Hiperión ha estado sometido a colisiones catastróficas repetidas con guijarros demasiado pequeños para destruirla, pero suficientemente grandes para arrancar fragmentos. Este fenómeno en los asteroides hace que muchos de ellos estén compuestos por fragmentos que se han reaglomerado luego por efecto de gravitación en una gigantesca morrena esférica ¿Pero, entonces, por qué Hiperión no ha reacumulado sus fragmentos? Científicos de la Universidad de Pisa[8] demostraron en 1980, que la presencia de una zona caótica cercana a la órbita de Hiperión impide la reacumulación de los fragmentos: los fragmentos al caer en la zona caótica son expulsados.

Figura 20 Hiperión

Estamos lejos de haber terminado con el caos de Hiperión. La mayoría de los satélites, e incluso Mercurio, están aprisionados en una resonancia (o proporción simple) orbital-rotacional: durante una órbita entera giran sobre sí mismos un número entero de veces. Ésta es la razón por la cual la Luna nos presenta siempre la misma cara. Gira sobre sí misma con el mismo periodo orbital de su movimiento alrededor de la Tierra. Esta rotación sincrónica (resonancia 1/1) se alcanza debido a las fuerzas de fricción desarrollada por las mareas, tras un tiempo característico que, en el caso de Hiperión, es del orden del sistema solar De hecho, Hiperión no esta lejos de este estado sincrónico. Pero como demostraron en 1984 J. Wisdsom, S. Peale Y F. Mignard[9] también esta cerca de una resonancia orbital – rotacional: la resonancia de 3/2. Un criterio sobre el soplamiento de resonancia, debido al físico soviético B.V. Chiricov, responde a este tipo de situación: "*si un sistema dinámico intenta llegar a un compromiso entre diferentes resonancias, se encuentra caos*"

Esto es exactamente lo que predicen Wisdom y sus colegas: "*tanto la dirección del eje de rotación como la velocidad angular de Hiperión fluctuarían de forma aleatoria en una escala de tiempo de solamente algunos periodos orbitales (21 días)*" Observaciones recientes parecen confirmar este resultado.[10] La forma particular de Hiperión, su órbita excéntrica y la escala de tiempo muy grande para la acción de las fuerzas de las mareas, hacen que Hiperón sea único en su género Es el único ejemplo de comportamiento caótico permanente y rápido que se conoce en el sistema solar De hecho, como lo ha demostrado Wisdom[11] todos los satélites de forma irregular han tenido en el curso de la evolución un

[8] R. Bevilacqua et al., *The moon and the planets*, 22,141,1980
[9] J. Wisdom, S Peale y Mi Mignard, Iracus, 58, 137,1984
[10] J.J Klevetter, Astron. J , 97(2) 570, 1989
[11] J Wisdom, Astron J 94 (5), 1350, 1987

comportamiento caótico cuando estaban a punto de ser capturados por una resonancia orbital – rotacional.

Este ejemplo espectacular de los efectos del caos no es el único que se ha revelado en el sistema solar. También se ha hecho cada vez más evidente que la dinámica caótica desempeña un papel importante en la distribución y la evolución de otros cuerpos pequeños, los asteroides, los cometas y los meteoritos. Después de haber sido despreciados durante muchos años por los astrónomos, estos cuerpos pequeños han sido muy estudiados estos últimos decenios, con objeto de comprender los procesos de formación de los planetas. El caso de los asteroides es particularmente revelador. Según las teorías actuales sobre la información de los planetas, la coagulación del gas y de los polvos interestelares de la nube primordial formó en primer lugar unos objetos muy pequeños llamados planetesimales, de tamaños próximos a cien kilómetros, que se desplazaban en órbitas casi circulares con velocidades muy parecidas. Se reunían entonces todas las condiciones para la construcción, por la acreción de estos planetesimales, de un planeta entre Marte y Júpiter habrían ido a cruzar la zona del (futuro) cinturón de asteroides y, como una bola en un juego de bolos habrían tenido un efecto devastador. Algunos de estos planetesimales de esta zona habrían sido expulsados, mientras que otros sufrirían un proceso, mientras que otros sufrían un proceso de fragmentación de colisiones. En vez de aglomerarse para formar un planeta. Los fragmentos resultantes de estas colisiones habrían formado entonces, en el modelo de V. F. Safronov,[12] un disco: el cinturón de asteroides, situados a una distancia del Sol entre dos y cinco unidades astronómicas (1 UA $\approx$ 150 000 000 km) Como el proceso de colisión de los planetesimales es, en este modelo, fundamentalmente aleatorio, sería de esperar una distribución uniforme de las órbitas de los asteroides en el cinturón: pero el análisis de las órbitas conocidas demuestra que no es así. En el cinturón principal (entre 2 UA y 3 UA), que está muy poblado, existen zonas estrechas en las que prácticamente no se encuentra ningún asteroide, "las lagunas de Kirkwood". Estas lagunas están cerca de los picos en los que se encuentran las familias de asteroides, las familias de Hirayama. A la inversa, la zona externa del cinturón (desde 3.3 UA hasta la órbita de Júpiter 5.2 UA) está prácticamente despoblada , con la excepción de algunas concentraciones de asteroides muy localizadas. Si ahora se asocia a cada órbita su periodo orbital, aparece un hecho notable: todas las anomalías en la distribución de las órbitas corresponden a unos periodos, llamados periodos de resonancia, que se expresan por una relación sencilla con el periodo de Júpiter 1/1, 2/2, 2/3, etc. Para intentar explicar las lagunas de Kirkwood, que constituyen la estructura más problemática de la parte principal del cinturón, se han propuesto diversas hipótesis. Dado que las ecuaciones del movimiento de asteroides sometido a la atracción gravitatoria del Sol y de Júpiter son no lineales, y a priori no integrables, casi siempre presente en las proximidades de una resonancia, como agente de limpieza. Pero la realidad no es tan sencilla: las acumulaciones del cinturón de asteroides se puede mantener en algunas resonancias: las primeras simulaciones numéricas en la computadora fueron efectuadas por Claude Froeschlé y Hans Scholl[13] en Niza en los años setenta para duraciones del orden del centenar de millones de años no muestra ninguna tendencia a la evasión. Sólo algunas órbitas presentan un crecimiento sensible de su excentricidad. Para

[12] V.S. Safranov, "In Asteroids", Publicación de la Universidad de Arizona, 1979

[13] H. Scholl, Cl. Froeschlé, Astronomy and Astrophysic., 42,457,1975; Cl. Froeschlé, H Scholl, Astronomy and Astrophysic., 57, 33, 1977

obtener estos resultados, habían tenido que simplificar el problema, no teniendo en cuenta las pequeñas variaciones periódicas de las órbitas, lo que permite ganar un factor de diez en el tiempo de cálculo.

A continuación, Wisdom efectuó un paso decisivo en 1983.[14] Gracias a un ardid descubierto por Chirikov en el estudio de la dinámica de los aceleradores de partículas, pudo modelizar la acción de Júpiter por medio de impulsos ("papirotazos") aplicados a intervalos regulares cuyo efecto se puede calcular analíticamente. De este modo se puede calcular rápidamente una órbita iterando la aplicación del tipo a la aplicación estándar. Con este modelo Wisdom demostró que las órbitas próximas a la resonancia 3/1 son caóticas y evolucionan de una forma muy especial. Durante decenas, si no centenares de millones de años, la órbita crece repentinamente de menos de 0.1 a 0.4. Luego la excentricidad cae rápidamente unos miles de años. Estas oleadas de excentricidad se repiten de forma aleatoria La sección de Poincaré de una órbita de este tipo explica a la vez las oleadas de excentricidad y el mismo valor máximo de estos saltos. Hay que señalar que las órbitas no se desestabilizan: siguen confinadas en las lagunas, pero ahora cortan intermitentemente la órbita de Marte cuando la excentricidad es superior a 0.33. Entonces un encuentro próximo con Marte puede eyectar al asteroide fuera del cinturón trasformándolo en un asteroide vagabundo, y de este modo crear progresivamente las lagunas observadas. Existe también otro tipo de resonancia también generadora de caos, pero a escalas de tiempo mucho más largas, del orden del millón de años: las resonancias seculares. Están relacionadas no con los períodos orbitales de Júpiter o de un asteroide, sino con los períodos de precesión de sus órbitas. La precesión del perihelio es el lento movimiento de rotación de este plano en el espacio. Estos dos movimientos, que no existen en el caso degenerado del problema de Kepler, se deben a la perturbación gravitatoria de los planetas y sus periodos son del orden de cincuenta mil años a varios millones de años. Los trabajos del norteamericano J. G. Williams[15] y las simulaciones numéricas efectuadas hacia 1985, en la supercomputadora Cray de Palaiseau por Ch. Froeschlé y H. Scholl[16] han demostrado que las órbitas de los asteroides en resonancias seculares pueden ser fuertemente perturbadas de un modo caótico.

Las perturbaciones ejercidas por los planetas también influyen fuertemente en el movimiento de los cometas, y la última aparición del cometa Halley fue, en particular, la ocasión de numerosos trabajos sobre la dinámica de los cometas periódicos de gran excentricidad. Las predicciones de las aproximaciones del cometa Halley han sido siempre un desafío para los astrónomos desde la primera aparición calculada en 1705 por Edmund Halley sobre el regreso del cometa en 1759. La aparición del cometa tiene lugar regularmente cada setenta y cinco a ochenta años, y la duración precisa entre dos apariciones depende de las perturbaciones ejecutadas sobre el cometa por los diferentes planetas. La búsqueda de noticias de pasos anteriores interesa vivamente a los historiadores y, con motivo del último paso del cometa, se efectuaron diversos cálculos numéricos de su movimiento hasta el año 1403 a.C. Estas integraciones numéricas coinciden con las observaciones hasta la aparición en el año 86 a.C. pero, más allá presenta notables

[14] J. Wisdom, " Chaotic dynamics in the solar sistem", Iracus, 56, 51, 1983.
[15] J. G. Williams, Tesis de Doctorado, Universidad de California, Los Angeles, 1969
[16] Ch. Froeschlé y H Scholl, Celeste Mechanic, 46, 231,1989.

diferencias. El historiador de astronomía F. R. Stephenson[17] *y sus colaboradores han* podido datar con suficiente precisión la aparición en el año 163 a.C., que se encuentra en el límite de la zona inestable en lo que concierne a las predicciones sobre el cometa. Luego las divergencias entre las órbitas crecen tan rápidamente, que en el año 615 a.C las diferencias son de doscientos días, en el año 1043 a.C. alcanzan cinco años. Estas divergencias fueron explicadas por los análisis de T. Y. Petrosky, L. B. Chirikov y V.V. Vecheslavov.[18] Por *medio de un modelo sencillo, constituido únicamente por Júpiter en una órbita circular y el* cometa, han podido demostrar que el movimiento del cometa Halley es caótico. La acción de Júpiter también se modeliza aquí por medio de un "papirotazo" en el momento del paso del cometa. En el problema de los dos cuerpos (cometa - Sol), los movimientos parabólicos desempeñan el papel de separatriz ; cuando el sistema es perturbado por la acción de Júpiter, esta separatriz da paso a la zona caótica en la que los movimientos son muy *inestables. Estos resultados han sido verificados numéricamente por Cl. Froesclé y R.* Gonczi.

Resumiendo, Jack Wisdom también ha aplicado la teoría de KAM para explicar los meteoritos que chocan contra la tierra. Los científicos convienen en que estos fragmentos de materia se deben e originar en el cinturón de asteroides. ¿Pero, cómo llegan a la tierra? *Tomando en cuenta la influencia gravitatoria combinada de Júpiter y Saturno, Wisdom ha* demostrado que los asteroides que entran en condición de resonancia quedan sujetos a conductas excéntricas que finalmente los disparan hacia nosotros. También ha notado lagunas orbitales en los anillos de Saturno. Aquí la interacción no lineal es causada por los satélites interiores de Saturno. Las lagunas del sistema de anillos se corresponden con proporciones simples entre el período de rotación de los anillos y las lunas perturbadoras. *Ello demuestra tanto la sensibilidad relativamente prolongada de los anillos como la* inestabilidad de algunas de sus órbitas. –Todo ello constituye una prueba de la teoría de KAM, pero la cuestión de los anillos de Saturno es muy compleja y actualmente se investigan varias teorías mediante modelos informáticos-.

Y dentro de la inestabilidad nos esperan más sorpresas. Cuando las lagunas de *órbitas planetarias como el cinturón de asteroides o los anillos de Saturno se examinan en* detalle, la matemática detecta que hay lagunas dentro de lagunas.

En los anillos de Saturno, por ejemplo, las lagunas de gran escala que hay entre las lunas y los anillos se reflejan en menor escala en las lagunas que hay entre fragmentos del material de los anillos.

Matemáticamente esto significa que el toro se descompone en toros cada vez más pequeños. Algunos de estos toros se vuelven estables, otros no. En la región que hay entre cada toro hay órbitas inestables de menor escala. En regiones donde las órbitas forman proporciones de frecuencia simple, el sistema revela una complejidad gótica.

[17] F R. Stephenson, KK.C. Yau y H. Hunger, Nature, 314, 587,1984

[18] T.Y. Petrosky, Physic, 117,328 1986; B.V Chirikov, V.V. Vecheslavov, Astronomy and Astrophysic, 221,146,1989

La situación orbital que acabamos de describir nos brinda nuestro primer atisbo de una nueva comprensión que se está difundiendo en las ciencias: *"el azar esta entrelazado con el orden, la simplicidad oculta complejidad, y el orden y el caos se pueden repetir en escalas cada vez más pequeñas"*, un fenómeno que los científicos del caos han denominado ***"fractal"***.

Los físicos empiezan a ver que el sistemas solar no es el relativamente simple mecanismo de relojería de los tiempos de Newton, sino un sistema que cambia constantemente, infinitamente complejo y capaz de conductas inesperadas. Así que regresemos a la pregunta de Poincaré. ¿Esto significa que aún el sistema solar puede sufrir estertores y morir?

A decir verdad, una pequeña fricción bastaría para que fuese así.

Resulta extraño pensar en los planetas en términos de fricción, pero las mareas de la Tierra disipan energía del sistema Tierra- Luna y un efecto similar resulta de la fricción entre la densa y gaseosa atmósfera de Júpiter y sus lunas. La fuerza de fricción de los planetas modifican así muy despacio la órbita de los planetas y las lunas, de modo que gradualmente se alteran a través de millones de años. Tal vez dicho movimiento los esté acercando a regiones de caos potencial. Poincaré se preguntaba si el sistema solar era estable. Dados los descubrimientos de los científicos del caos, la pregunta debe permanecer abierta aún.

Sin embargo, si alguna vez el sistema se desintegra y se precipita en el caos, esperemos que haya matemáticos presentes para que al menos alcancen a conocer la causa. De hecho según las ultimas investigaciones es imposible predecir el futuro del sistema solar más allá de unos cien millones de años.

3. Atractores Extraños

Al estudiar lo que ocurre cuando una simple ecuación es realimentada consigo misma, los científicos han encontrado interesantes comportamientos y bastantes propiedades matemáticas que reflejan cambios que se presentan en nuestro mundo.

Uno de estos temas de estudio se enfoca al crecimiento demográfico que es un tema que interesa a biólogos, ecologistas y epidemiólogos, pero también a matemáticos, pues detrás de las fórmulas engañosamente simples de crecimiento demográfico se oculta una conducta que va del orden al caos.

En la historia podemos encontrar ejemplos de poblaciones fuera de control: la liberación de una pequeña población de conejos en Australia cuyos descendientes se expandieron por todo el continente; los efectos de la oruga lagarta en el nordeste de los Estados Unidos cuando se escapó de un laboratorio en Boston; la marea migratoria de abejas asesinas; las epidemias de gripe que parecen ir y venir con intervalos de tiempo muy aleatorios. etc.

Algunas poblaciones se multiplican deprisa, otras se extinguen prontamente, algunas crecen, otras decrecen con periodicidad regular, y otras más obedecen a las leyes de los atractores extraños y el caos.

3.1 La duplicación de períodos

El crecimiento de algunas poblaciones es difícil de estudiar *(ya habíamos hablado de esto, anteriormente en este mismo capitulo sección 2)*, las poblaciones de conejos son de este tipo. La razón es que algunos ejemplares dan a luz mientras otros todavía están alcanzando la madurez o están preñados. Una ecuación que describiera el tamaño de la población de conejos debería tener en cuenta todos estos factores.

Es igual para poblaciones donde los individuos viven una temporada y mueren otra. Este es el ejemplo de la mariposa lagarta que vive en verano y muere con el frío después de poner los huevos. Analicemos este sistema demográfico empezando con una colonia pequeña.

Asumamos que un porcentaje similar de huevos de mariposa lagarta se empollan y sobreviven cada año, el tamaño de una colonia de larvas este año está relacionado con la cantidad de larvas que se metamorfosearon en mariposas y desovaron el año anterior. Supongamos que el tamaño de una colonia es de 100 mariposas lagartas y la colonia se duplica cada año. Si el tamaño de la colonia es de 200 para el segundo año, será de 400 para el siguiente.

$X_2 = 2X_1$, donde: X = tamaño de la muestra y el subíndice nos indica el año

En el tercer año la colonia se duplicará de nuevo.

$$X_3 = 2X_2$$

Sería muy fácil dar una ecuación general que permita calcular la población de un año a partir del anterior:

$$X_{n-1} = 2X_n$$

Obviamente no todas las poblaciones se duplican. Algunas pueden crecer con mayor o menor velocidad. Si denotamos como N a la tasa de natalidad, cada colonia es N veces mayor este año que el año anterior. En el ejemplo de la mariposa lagarta, tomamos N = 2, lo cual indicaba la duplicación de la población. Pero cuando N tiene un valor distinto, es posible una variedad de crecimientos.

$$X_{n+1} = NX_n$$

Esta ecuación de crecimiento exponencial funciona bien cuando la población es pequeña o cuando hay alimentos y espacio libre para reproducirse. Pero esta ecuación es muy limitada. Por ejemplo, si la aplicaremos a conejos duplicándose en cada generación, el resultado indicaría que la pareja australiana original se habría propagado hasta cubrir el universo entere en solo 120 generaciones. En el mundo real, el crecimiento exponencial o geométrico no continúa regularmente porque todo sistema demográfico depende de otros sistemas de la cadena alimenticia. Todos los sistemas están relacionados, así que el tamaño de la población final depende de todo el ambiente que le rodee.

El término de Verhulst

En 1845 P.F. Verhulst, un científico interesado en las matemáticas del crecimiento demográfico, introdujo un nuevo término para describir el modo en el que una población se desarrolla en una zona cerrada. Este término que vuelve no lineal a la ecuación de crecimiento, era un modo simple y eficiente de calcular la intervención de los demás factores del ambiente en la expansión demográfica.

Para entender como funciona este término, hay que aclarar que aún no se ha precisado un limite máximo al tamaño de la población (X). Para comparar diversas poblaciones y hacer más regulares los cálculos se emplea la normalización. Es un modo útil de comparar poblaciones de diversos tamaños. En esencia, la población está representada por un número que puede variar entre 0 y 1. $X_n = 1$representa la máxima población posible, 100%. $X_n = 0.5$ representa la mitad, el 50%. No importa si son centenares de mariposas lagartas o decenas de miles de bacteria. Sólo interesa comparar la población del año anterior con la de este año; es decir, interesa analizar la tasa demográfica.

La normalización permite simplificar los cálculos matemáticos.

Verhults añadió el término $(1-X_n)$ a la ecuación demográfica. Así que la ecuación quedó de la siguiente forma:

$$X_{n+1}=NX_n(1-X_n)$$

El término del lado derecho de la ecuación tiene dos factores rivales, X_n y $(1- X_n)$. Al crecer X_n el factor $(1- X_n)$ disminuye. Para un X_n muy pequeño, $(1- X_n)$ esta muy cerca de 1, de modo que la ecuación de Verhulst luce muy similar a la ecuación original. ¿Pero que ocurre cuando X_n crece, cuando se acerca a 1? El término $(1- X_n)$ se aproxima a 0 y hace que el lado derecho de la ecuación disminuya. la natalidad cae. Estos dos términos funcionan en oposición, uno disminuye la población y el otro la aumenta.

Dicho de otra forma. Sin el término de Verhulst, la ecuación describe un proceso en el cual la población de cualquier año es proporcional a la del año anterior: la relación es estrictamente lineal. La multiplicación de X_n por el nuevo factor o término (1-xn) se puede escribir como:

$$X_n (X_n - X_n)$$

Multiplicamos X_n por sí mismo. Al multiplicar un término por sí mismo producimos una realimentación o *"iteración"* y no linealidad. El crecimiento de año en año depende ahora no linealmente de lo que sucedió antes.

La ecuación modificada de Verhulst tiene muchas aplicaciones. Los entomólogos han recurrido a ella para computar el efecto de las plagas en los huertos y los genetistas la usan para calibrar el cambio de frecuencia de ciertos ganes en una población. Se ha aplicado al modo en el que se difunde un rumor: al principio el rumor se expande exponencialmente hasta que casi todos lo han oído. Luego la tasa cae velozmente, a medida que más personas dicen: "Ya lo sabía". La ecuación de Verhulst también se aplica a las teorías de aprendizaje. Lo que se aprende ahora esta relacionado con la cantidad de información incorporada anteriormente. El aprendizaje primero aumenta, pero al cabo de un tiempo el estudiante se satura, de modo que los nuevos esfuerzos sólo producen resultados mínimos.

La versión no lineal de la ecuación demográfica tiene una implicación sorprendente: en todas las situaciones en las cuales se aplica la ecuación, acecha el potencial para el caos.

La bifurcación de períodos

Para demostrar la conducta caótica de la ecuación iterada, comencemos con una población de larvas de mariposa de lagarta a la cual se ha impuesto una forma de control de la natalidad, rociándola con insecticida. Dando por hecho que las larvas no sufren mutaciones, la población de cada año disminuirá un poco con respecto a la del año anterior. Si la tasa de natalidad N es 0 99, aun una población muy numerosa llegará eventualmente a 0. La colonia perecerá.

¿Pero que ocurre cuando la tasa de natalidad es superior a 1, por ejemplo 1.5? Dado el factor no lineal de Verhulst, una población grande al principio declinara pero luego se acomodará en un valor constante de 2/3 o 0.66% de su tamaño original. Así también una población lineal muy pequeña crecerá hasta el mismo límite de 2/3.

Cuando la tasa de natalidad (N) es igual a 2.5, la ecuación muestra una ligera oscilación cuando los dos términos o factores demográficos rivales entran en oposición, pero, después de eso, regresa a la misma cifra constante de población. Parece que la cifra 0.66% se ha convertido en un atractor (*figura 21*)

Subamos a 2.98 ¿Qué ocurre ahora? La oscilación continúa por más tiempo pero eventualmente la población se acomoda en 0.66% de su tamaño original. De nuevo regresa al atractor.

Elevemos aún más el valor de la tasa de natalidad, N. Las oscilaciones duran cada vez más, pero eventualmente la población llega un estable de 0.66%. Sin embargo, cuando la tasa de natalidad alcanza el valor critico de 3.0, algo nuevo ocurre. En 0.66 el atractor se vuelve inestable y se divide en dos. Ahora la población comienza a oscilar alrededor de dos valores estables en vez de uno.

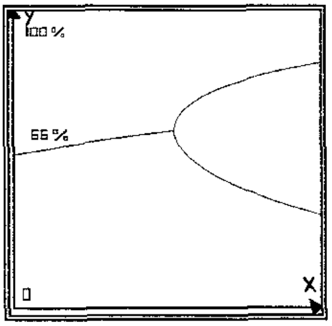


Figura 21. La gráfica inicia con el valor 2.3 en el eje horizontal (X) que representa la tasa de natalidad de la población, la bifurcación ocurre en el valor 3 0 para la tasa de natalidad (eje X)

Esto significa, que la pequeña población de mariposa lagarta se reproduce fanáticamente dejando una gran provisión de huevos para la próxima temporada. Pero en la temporada siguiente la región está excesivamente poblada, lo cual crea un efecto de reducción, de modo que los escasos insectos que sobreviven dejan pocos huevos para el próximo año. La población sube y baja entre valores altos y bajos. La conducta del sistema se ha vuelto más compleja (*figura 22*).

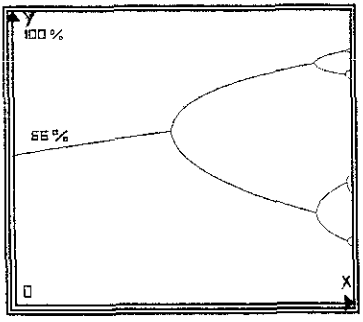


Figura 22. Un mapa de los primeros atractores bifurcados de la ecuación con crecimiento no lineal (la tercera bifurcación ocurre cuando la tasa de natalidad toma el valor de 3 56999 (eje X))

Cuando elevamos la tasa de natalidad por encima de 3.4495, los dos puntos fijos se vuelven inestables y se bifurcan para producir una población que oscila alrededor de cuatro valores. Ahora la poblacion de larvas es radicalmente diferente en cada uno de los cuatro años.

Cuando la tasa de natalidad llega a 3.56 las oscilaciones se vuelven de nuevo inestables. En 3.596 tenemos otra bifurcación, esta vez con 16 atractores. La gráfica se vuelve un laberinto. En este punto es casi imposible ver un orden en el ascenso y descenso de la población de larvas. Cada año el número brinca de modo casi aleatorio y no podemos encontrar un patrón. Finalmente, cuando la tasa de natalidad llega a 3 5699, el número de atractores ha aumentado hasta el infinito.

Robert May, físico de la Universidad de Princeton que se ha dedicado a la biología, es una figura clave en la historia de cómo los científicos aprendieron de lo que hoy se denomina "ruta hacia la bifurcación de períodos". Un período es el tiempo que un sistema tarda en regresar a su estado original. A principios de 1970 May usó un modelo basado en la ecuación de Verhulst que le permitía aumentar o reducir la tasa de natalidad alterando el *suministro de alimentos. May descubrió que el tiempo que tardaba el sistema en volver a su* punto de partida se duplicaba en ciertos valores críticos de la ecuación. Al cabo de varios ciclos de período duplicado, la población de insectos de su modelo variaba al azar, al igual que las poblaciones de insectos reales, y no revelaban ningún período previsible para regresar a su estado original

Pero, al menos matemáticamente, la historia no terminaba ahí. Los científicos han aprendido que esta extraña ruta hacia el caos contiene todo un circo de órdenes antes inimaginables. En la figura (*figura 22*) una gráfica generada en computadora, puede apreciarse la ecuación demográfica de Verhulst.

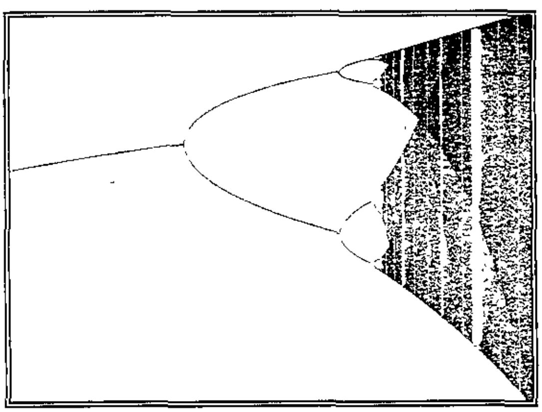


Figura 22. Gráfica generada por computadora de le ecuación De Verhults

En la gráfica se revela caos, otra imagen del atractor extraño.

Pero, reparemos en las regiones obscuras llenas de puntos que representan la virtual infinidad de lugares donde se puede encontrar el sistema. En la gama de la tasa de natalidad que va de 3 59999 a 3.7 el sistema -la cantidad de anual de larvas- fluctúa imprevisiblemente dentro de cuatro amplias regiones de atracción y luego de dos. Estas regiones se aproximan hasta encontrarse. Aquí, en el orden de 3.7, la población (la cantidad de larvas) podría tener cualquier valor, desde muy cerca de 0 hasta una cifra muy alta y cada año la población brinca de manera loca e imprevisible. Sin embargo, sólo se llena la totalidad del espacio fase cuando la tasa de natalidad llega a 4.0. El modo en que la gráfica se despliega sugiere que el caótico proceso por el cual se llena el espacio fase es en realidad extrañamente ordenado.

También separemos en que las líneas oscuras forman una especie de parábolas dentro de un abanico de caos. Estas líneas representan valores donde hay una probabilidad más alta de encontrar el sistema. Otra forma de orden dentro del caos

Y, por último, reparemos en las bandas verticales blancas esparcidas a través de la sombra del caos. Se trata de regiones llamadas *"ventanas"*, donde el sistema se vuelve estable. Alrededor de 3.8, por ejemplo, justo en medio de este caos, la población se vuelve estable, nuevamente previsible y aumenta en dos años sucesivos y decrece en el tercero. Pero si la tasa de natalidad se eleva un poco, la ventana se abre y vuelve el caos. Estos periodos de estabilidad y previsibilidad en medio de fluctuaciones aleatorias se llaman *"intermitencias"*.

Intermitencia

¿Pero qué es exactamente la itermitencia? Estamos descansando, escuchando la radio, cuando de pronto una salva de estática interrumpe la música. No es inusitado que una breve pulsación de ruido interfiera con la recepción de la radio o del televisor. Esta interferencia intermitente a menudo es causada por una fuente externa, un taladro eléctrico o una tormenta que se aproxima Pero también es posible que el ruido intermitente se genere dentro de los circuitos del amplificador. Científicos japoneses han descubierto que en los interruptores de superconducción la intermitencia aumenta. Si se aumenta la corriente de conexión, el promedio entre los estallidos del ruido se acorta. Conclusión: el interruptor adopta la ruta del caos sin interferencia externa. Aparentemente este mismo fenómeno afectó a una red de computadoras de un contratista de defensa, la empresa TRW, habia instalado en Europa. Un artículo del New York Times señalaba que la red empezó a exhibir una conducta extraña e imprevisible. Esto también ocurrió con una red de procesadores paralelos instalados en Xerox, quienes hallaron que sus computadoras producían resultados diferentes y aleatorios a partir del mismo cálculo. Los ingenieros llegaron a la conclusión de que el problema de estos sistemas no residía en el diseño, sino en algo inherente a la complejidad de las redes que contienen rizos de alimentación no lineal. Algunos científicos creen que estos estallidos de intermitencia revelan que las redes de computadora como las del sistema de defensa estratégica (conocido como Star Wars o Guerra de las galaxias) o la monitorización de alta tecnología de los negocios de Wall Street siempre están sujetos a espasmos de caos El caos es como un monstruo dormido en un sistema ordenado. Cuando el sistema alcanza un valor crítico, el monstruo se despierta a la más pura mitología griega y demanda sacrificios.

La itermitencia funciona en ambos sentidos. J. Briggs y F.D.Peat el primero de la Western Coenctitut State University y el segundo miembro del consejo nacional de Investigación de Canadá hablan sobre la intermitencia en su libro *"Espejo y Reflejo" (ver referencia [2] de la bibliografía)*:

> *"Pensemos en la itermitencia como en islas de orden en un mar de azar o como el azar interrumpiendo la tersa emisión del orden. Casi podríamos pensar en la itermitencia como en una "memoria" que opera en los sistemas no lineales: la memoria tiene el sistema de su ciclo límite o sus atractores periódicos originales. Una iteración sucede a otra a medida que el caos (o el orden) se desplazan en el espacio de fases. Pero en las regiones de intermitencia, el viejo orden (caos) resurge momentáneamente y las iteraciones que generaban caos (orden) producen momentáneamente regularidad (caos)."*

La itermitencia muestra que todo el orden desde las oscilaciones simples hasta la complejidad de todo el caos, pueden estar presentes en un sistema, alternativamente. El fenómeno plantea profundas interrogantes. ¿En qué medida muchas formas diferentes del orden se entrelazan en los sistemas reales? ¿Los órdenes simples y el caos de un sistema son rasgos de un proceso indivisible? La intermitencia parece sugerir que sí.

Una forma importante de la intermitencia es el ruido de baja frecuencia Este tipo de intermitencia, que no es sólo un desagradable defecto de los amplificadores electrónicos, se ha observado que le flujo de la corriente a través de películas de metal y carbono, de semiconductores, de tubos de vacío, de diodos y de ciertos transistores. El voltaje de las células eléctricas y las corrientes de convección del líquido están sometidos a pequeños brotes de ruidos en las frecuencias bajas, y se cree que la intermitencia de frecuencia baja es la causa del desquiciamiento de las membranas nerviosas. La duración del día terrestre es también intermitente. Nuestro día es resultado de la rotación del planeta sobre su eje, con lo cual el sol debería estar sobre nuestras cabezas cada 24 horas Sin embargo, hay un ligero tambaleo en esta regularidad que se produce en un ciclo de 5 días. ¿Es éste otro ejemplo del ruido caótico interfiriendo con las oscilaciones regulares de los sistemas no lineales del universo?

Hagamos la pregunta a la inversa. ¿Podría esta intermitencia ser una imagen invertida de nuestro lugar en el universo? Habitualmente vemos el cosmos desde el punto de vista del orden, es decir, en términos simples. Cuando nuestro día tambalea o cuando la radio muestra estática, imaginamos estos fenómenos como alteraciones de la estructura que rige al universo que habitamos. Pero la teoría de caos sugiere que también es viable ver las cosas desde el otro lado. Podemos imaginar el orden como una mera isla de intermitencia en medio de un atractor extraño, o caótico del tamaño del universo. En el primer capítulo de esta tesis pudimos analizar las diversas formas en que las antiguas cosmogonías representaban el origen del Universo y vimos como esté surgía del caos en muchas de ellas.

Mitchell Feigenbaum hizo un descubrimiento importante para la teoría del caos. Usando su calculadora de bolsillo, puso a prueba una clase entera de ecuaciones y encontró una escala universal en sus transformaciones de duplicación de períodos. Las ecuaciones que exploraba Feigenbaum se aplican a fenómenos diversos como los circuitos eléctricos, los sistemas ópticos, los aparatos de estado sólido, los ciclos de negocios, el aprendizaje y las poblaciones.

Sin entrar en detalles técnicos analicemos el descubrimiento de Mitchell Feigenbaum. Cuando cambian las fuerzas que actúan sobre un sistema dinámico físico, se ve en muchos casos como se produce el fenómeno de la duplicación de periodo (Como ya vimos e ilustramos anteriormente en esta misma sección). Una órbita periódica es reemplazada por otra, próxima a la primera, pero con la diferencia de que en la nueva órbita hay que dar dos vueltas antes de volver exactamente al punto de partida. Así, el tiempo necesario para volver al punto de partida, es decir, al período, se ha duplicado aproximadamente. La duplicación del periodo se observa en algunos experimentos de convección: las oscilaciones periódicas de un fluido calentado por abajo pueden quedar reemplazadas, cuando se cambia el calentamiento, por oscilaciones de periodo dos veces más largo. Asimismo, pueden producirse duplicaciones de periodo en un grifo que gotea cuando se aumenta el caudal.

Lo más interesante es que la duplicación de periodo puede volver a producirse, dando un periodo 4 veces más largo, luego 8, 16, 32, 64... veces más largo. Esta cascada de duplicaciones de duplicaciones de periodos esta ilustrada en la figura (*figura24*). El eje horizontal mide las fuerzas aplicadas al sistema físico considerado, y los valores para los que se observan duplicaciones de periodo corresponden a los puntos A_1, A_2, A_3, ... , que se acumulan en el punto marcado como A_∞.

Si se examinan ahora los intervalos sucesivos A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, ..., se encuentra que mantienen una relación constante:

$$A_1A_2 / A_2A_3 \approx A_3A_4 / A_4A_5 \approx A_4A_5 / A_5A_6$$

Más exactamente se tiene la siguiente ecuación:

$$\lim_{n \to \infty} A_nA_{n+1} / A_{n-1}A_{n-2} = 4.66920\ldots$$

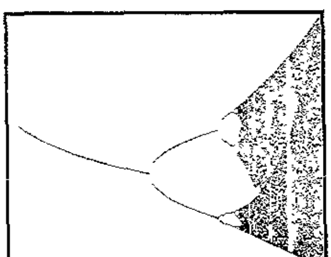


Figura 24 Atractor de Feigenbaum

Cuando Mitchell Feigenbaum descubre numéricamente esta ecuación es un físico joven con un puesto temporal en el laboratorio de los Alamos. Trabaja día y noche en la computadora, fumando sin cesar y bebiendo café cargado. Y se impone la tarea de demostrar la ecuación, utilizando las ideas del físico Kenneth Wilson de Cornell sobre el grupo de normalización. Advierte que las sucesivas duplicaciones de período siempre son esencialmente el mismo fenómeno. salvo cambios de escala apropiados no fáciles de establecer. y en realidad Feigenbaum no hace un trabajo matemático completo del problema. Este será dado más tarde por Oscar Lanford de Berkeley siguiendo estas ideas de Feigenbaum, Lanford realiza la demostración con ayuda de una computadora. los cálculos numéricos son terriblemente largos. así que sería imposible realizarlos sin ayuda de la computadora.

La cascada de duplicaciones de período. cuando se observa en un experimento de física, es difícilmente confundible con cualquier otra cosa. Además. se puede demostrar que. más allá de la cascada existe caos. Por lo tanto. siempre que se llegue a observar la cascada de Feigenbaum en hidrodinámica será una demostración especialmente convincente de que el paradigma de los modos no es válido y debe ser reemplazado por el paradigma del caos.

Feigenbaum demostró que los detalles finos de estos sistemas no importan. que la duplicación de períodos es un factor común en el modo en que el orden se desintegra con en caos. Ya vimos cómo calculó unos números universales que representaban proporciones de escalas de puntos de transición durante el proceso de duplicación de períodos. Descubrió que cuando un sistema funciona sobre sí mismo una y otra vez presenta cambios exactamente en estos puntos universales a lo largo de la escala.

En el MIT. el físico Richard J. Cohen y sus colegas diseñaron una simulación por computadora de los ritmos cardíacos y descubrieron que la duplicación de períodos es un indicio de la proximidad de un ataque cardíaco. En un corazón normal. las pulsaciones eléctricas se difunden regularmente a través de fibras musculares que obligan al ventrículo a contraerse y bombear sangre. Cuando las fibras musculares están contraídas. son impermeables a señales eléctricas. Los físicos denominan tiempo refractario a este período. Según la teoría, las variaciones en tiempo refractario entre una zona del ventrículo del corazón y otra son la causa de la fibrilación, la esporádica vibración de un ataque cardíaco.

Para verificar esta teoría, Cohen y su equipo variaron los tiempos refractarios de su modelo del corazón y descubrieron que los problemas empezaban cuando un grupo de fibras musculares cardíacas tenían un tiempo refractario más largo que el intervalo entre las palpitaciones cardíacas. A causa de su tiempo refractario, estas fibras cardíacas no sincronizadas se podían estimular para contraerse sólo cada tantas palpitaciones. En consecuencia, los impulsos eléctricos del corazón en contracción se desplazaban alrededor de estas fibras demoradas como el agua que rodea a una roca y causa turbulencia. Al incrementarse los tiempos refractarios de unas pocas fibras, el corazón entero duplicaba sus períodos hasta que, más allá de un valor crítico del tiempo refractario. surgía un caos muscular en todo el corazón.

En la Universidad McGill de Montreal, el fisiólogo Leon Glass usó un grupo de células cultivadas de pollo que palpitaban espontáneamente y las estimuló periódicamente El resultado fue que el tiempo entre las palpitaciones regulares se duplicó una y otra vez hasta alcanzar el caos.

Alvin Saperstein, un físico del Centro para la Paz y Estudios de Conflicto de la Universidad Estatal de Wayne en Detroit, ha realizado un estudio preliminar sobre la carrera armamentista que desembocó en la Segunda Guerra Mundial. Él piensa que las cifras sugieren que la proporción de armamentos entre la Alemania Nazi y la Unión Soviética sufrió una duplicación de periodos que llegaba a la región caótica cuando estalló la guerra. Él aún asegura que su modelo es tosco.

Está demostrado que el crecimiento de la turbulencia (como veremos más adelante) también puede acontecer por duplicación de períodos. El científico italiano Valter Franceschini confirmó los números de Feigenbaum cuando utilizó su computadora para analizar cinco ecuaciones en un modelo de turbulencia de fluidos. Tras descubrir la duplicación de periodos en 1976, Feigenbaum no había podido publicar sus artículos sobre este fenómeno, los editores pensaban que el concepto era muy extravagante. En 1979 un colega de Franceschini que conocía la teoría de Feigenbaum sugirió al científico italiano que buscara los números de Feigenbaum en las ecuaciones que estaba estudiando. Cuando Franceschini revisó los cálculos, halló la universalidad de Feigenbaum.

Poco después dos científicos franceses, Alfred Libchaber y Jean Maurer, confirmaron experimentalmente la intuición de Feigenbaum, aunque ellos entonces no conocían el trabajo de éste. En el laboratorio descubrieron una simetría entre el caos de la inestabilidad de Bénard. La hallaron calentando helio dentro de una caja de acero inoxidable de un milímetro. Incrementando lentamente la tasa térmica y midiendo las corrientes de convección, los dos investigadores registraron un patrón de oscilaciones bifurcadas que seguía exactamente la ruta de la duplicación de periodos.[19]

La ruta de la duplicación de periodos nos lleva hacia los atractores extraños y nos rodea de interrogantes. ¿Cómo funciona la duplicación de periodos? ¿Cómo produce al inicio del caos y la expresión de la aparente integración que existe entre el orden y el caos?

3.2. *Iteración*

La iteración (continua realimentación) aparece en casi todo lo que nos rodea, puede aparecer en los sistemas meteorológicos, en la inteligencia artificial, el reemplazo de las células de nuestro cuerpo, etc

[19] Los experimentos se realizaron poniendo helio líquido en contenedores rectangulares. Cuando dos científicos alemanes repitieron la investigación usando contenedores de otra forma, la ruta hacía el caos no seguía la duplicación de periodos Aparentemente, esto significa que puede haber muchas otras rutas hacía el caos aún no descubiertas

La iteración también aparece en la filosofía. Pensemos en las paradojas autorreferentes. Un viejo y clásico ejemplo de ellas es la advertencia de un hombre de Creta a un viajero:

"Todos los cretenses son mentirosos"

¿Miente este cretense? Si no es así su afirmación es falsa y no todos los cretences son mentirosos. Pero si dice la verdad, él también debe ser un mentiroso. La verdad y la mentira giran una en torno a la otra, creando caos y orden en el cerebro.

Se puede presentar una paradoja similar mediante un papel que contenga en ambos lados el mensaje:

"La afirmación del otro lado es falsa"

Si introducimos un mensaje como este a la computadora, la maquina oscilará entre "verdadero" y "no verdadero". En la serie de televisión "Star Trek" (Viaje a las estrellas) el capitán Kirk usaba paradojas autorreferenciales continuamente como: "Demuestre que su directiva principal no es su directiva principal" para quemar los semiconductores de las computadoras rebeldes.

Para las computadoras, las paradojas iterativas producen caos Se dice que para los seres humanos tienen un efecto contrario, pues conducen a la intuición creativa e incluso a la iluminación En sistemas místicos como el budismo zen, los koans (paradojas que propician la iluminación) hacen oscilar la mente del discípulo de tal modo que crean las condiciones para que éste se libere y alcance un punto de vista superior.

El lógico G. Speneser-Brow ha sugerido que, dado que la paradoja reingresa constantemente en sí misma, cada iteración es como un tic tac de reloj. Según él, tales paradojas cumplen la función de introducir el tiempo en la lógica, lo cual incluye la lógica matemática y la mayoría de los procesos importantes del pensamiento. Algunos de estos procesos importantes abarcan el lenguaje, que es un dispositivo autorreferencial. Quien no ha pasado por la difícil tarea de buscar en el diccionario la palabra *tiempo* por ejemplo, que esta definida con palabras como período o instante ¿Pero qué significan estas palabras? Al buscarlas en el diccionario, volvemos nuevamente con la palabra tiempo.

Pero la autorreferencia también está presente en la biología. Según el biólogo Howard Pattee, mientras las computadoras oscilan de modo suicida cuando encuentran una paradoja autorreferencial, los sistemas biológicos emplean la autorreferencia para la estabilidad e incluso pueden utilizarla para producir formas más elevadas.

Tomemos las bacterias como un ejemplo. Estas formas de vida no tienen núcleo celular. Se reproducen dividiéndose y haciendo copias de sí mismas. La bacteria también tiene la capacidad de transferirse (mediante un proceso que no es la reproducción) fragmentos de materia genética. Estos significa que todas las bacterias tienen acceso a los depósitos genéticos de los demás. Mediante una iteración constante del material genético, las bacterias se pueden adaptar rápidamente a condiciones cambiantes. La desventaja es que no son verdaderos individuos entre las bacterias sino clones formados por realimentación cuando las bacterias hacen copias.

Hace millones de años, la naturaleza pudo haber usado esta forma de paradoja autorreferencial con gran provecho, como un modo eficaz de propagar la vida por el planeta Pero este método de propagación tiene un límite. Según una teoría que analizaremos más adelante, la iteración de bacterias se diseminó por la tierra y creó condiciones caóticas a partir de las cuales surgió un nuevo camino autorreferencial relacionado con la reproducción sexual. Esto introdujo un nuevo y dinámico desarrollo evolutivo.

Eduard Lorenz y el efecto mariposa.

En 1960, Eduard Lorenz hizo un importante descubrimiento para la teoría del caos. estaba usando su computadora para resolver varias ecuaciones no lineales que constituían su modelo de la atmósfera terrestre. Al revisar un pronóstico para corroborar algunos detalles, se concentró en los datos de presión del aire, temperatura y dirección de los vientos, redondeando las cifras de las ecuaciones hasta tres decimales en vez de los seis que había utilizado anteriormente. Introdujo la operación al programa de la computadora y fue por una taza de café. Cuando regresó sufrió una conmoción. El nuevo resultado que veía en la pantalla no era una aproximación al pronóstico que había realizado anteriormente. sino un pronóstico totalmente diferente. La pequeña diferencia de tres decimales entre las soluciones habían sido magnificadas por el proceso de iteración de la solución de las ecuaciones Esto le dio resultados meteorológicos totalmente diferentes.

Tiempo después Lorenz declaró en la revista Discover:

"Entonces supe que si la atmósfera se comportaba así. los pronósticos meteorológicos a largo plazo eran imposibles"

Lorenz había advertido de inmediato que la microscópica diferencia de tres decimales en las operaciones se había magnificado mediante la combinación de la no linealidad con la iteración Estos resultados tan distintos evidenciaban que los sistemas dinámicos no lineales tales como el tiempo climático son tan increíblemente sensibles que el menor detalle puede afectarlos. De ahí surgió el nuevo aforismo que dice:

"El aleteo de las alas de una mariposa en Hong Kong puede crear un huracán en Nueva York"

Al principio puede parecer injusto, o exagerado, decir que un sistema meteorológico es caótico sólo porque no podemos predecirlo Si nuestra aptitud es defectuosa, ¿No es porque no tenemos todos los detalles necesarios o no tenemos la ecuación apropiada? La respuesta es no. Lorenz había visto que la causa de la naturaleza iterada de las ecuaciones no lineales (aunque representan la naturaleza de los sistemas dinámicos), ninguna cantidad de detalles adicionales contribuirán a perfeccionar la predicción.

Para comprender por qué, hagamos una pequeña demostración de lo que ocurre en las iteraciones. La demostración implica la manipulación de algunos números.

Duplicar un número es muy simple. Recordemos la primera ecuación de crecimiento exponencial en los problemas demográficos.

$$X_{n-1} = 2X_n$$

La ecuación dice que la cosecha de este año duplica a la del año anterior. Si X, la cosecha del primer año, es 1, la cosecha del año siguiente X_{n-1} será 2. La ecuación genera la secuencia para los siguientes años. 2, 4, 8, 16, 32, 64 ..

O al empezar con X=1.5 tenemos la secuencia 3, 6, 12, 24, 48...

Pero recurramos a uno de esos trucos matemáticos para generar una serie numérica larga. Dupliquemos el número pero eliminemos el entero y conservemos los decimales. Por ejemplo sí $X_1 = 0.9567$, entonces $2X_n$=1.9134. Eliminando el entero X_2=0.9134.

Veamos que serie obtenemos empezando con X_1= 0.5986... La serie es: 0 1972..., 0.3944..., 0.7888.. , 0.5776 ..., 0.1552..., 0.3104..., 0.6208..., 0.2416..., 0.4832..., 0.9664..., 0.9328..., 0.8656..., 0.7312. .. 0.4624..., 0.9248..., 0.8496...

Parece ser una secuencia aleatoria, como si la iteración condujera al caos. Pero examinemos el fenómeno mejor

Si ocurre que X_1 contiene un orden inicialmente simple en el modo en que se repiten sus dígitos decimales, entonces se hallará un patrón igualmente simple durante la iteración. Por ejemplo, si X_1= 0.707070, la iteración genera el patrón 0.414141, 0 828282, 0.656565, 0.313131, 0.626262, 0.252525, 0.505050, 0.010101, 0.020202, 0.040404, 0.080808, 0.161616, 0.323232, 0.646464, 0.292929, 0.585858, 0.707070,

Al cabo de 16 iteraciones regresamos al número original: el ciclo se repite una y otra vez.

Si recogemos un número con un patrón más complejo, creamos un ciclo más largo antes que la serie se empiece a repetir. Pero si los números iniciales son racionales, el patrón eventualmente se repetirá. Cuando se introducen números racionales en esta simple iteración de duplicación numérica siempre se generan patrones ordenados.

¿Pero qué ocurre con los números irracionales? Su expresión decimal no contiene ningún orden, su patrón se repite al azar. Los matemáticos han verificado que un número irracional como π se puede calcular hasta muchos millones de decimales sin que se manifieste ninguna repetición. Parece irónico que, el número usado para calcular la circunferencia de lo que muchos consideran el objeto más perfecto y ordenado de nuestra imaginación, el círculo, no se pueda calcular con exactitud.

¿Qué sucede cuando un número irracional se utiliza como cifra inicial de la secuencia? El resultado es una serie infinita que no contiene ningún orden visible. Cada número aparece al azar. El caos parece florecer desde la irracionalidad implícita en el número original. De hecho, esta simple ecuación de crecimiento exponencial, o ecuación de duplicación numérica, es un modo de producir series numéricas aleatorias en la computadora. Se podría pensar que el caos y el azar se despliegan a partir de la complejidad del número irracional original.

Una propiedad de las ecuaciones iterativas es su extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. Si X, en la ecuación de duplicación numérica, sufre una leve alteración, la secuencia pronto difiere de la original. Esta propiedad fue la que Lorenz descubrió en sus cálculos meteorológicos En el siglo XIX, los científicos entendían que un pequeño error en los datos iniciales se podía compensar, o que a lo sumo produciría un efecto pequeño Pero cuando tenemos iteración, los errores pequeños se amplifican rápidamente.

Pensemos en el número racional 0.707070 ¿Qué ocurre si cometemos un error en el 4° decimal, un error de 1/10 y escribimos 0.707170?

En la primera iteración el error es ínfimo. En vez de 0 414141 que obtuvimos en la secuencia original, la nueva comienza con 0 414341. La segunda iteración agranda el error. En vez de 0.828282. Para el resto de la secuencia en vez de los números originales (0.656565, 0.313131, 0 626262, 0.252525, 0 505050, 0.010101, 0.020202, 0.040404, 0.080808) tenemos 0.657365, 0 314631, 0.629462, 0.258924, 0.517849, 0.035698, 0.071396, 0 142792, 0.285584. En la undécima iteración el leve error a cobrado tales proporciones que la nueva serie difiere totalmente de la original. La serie original se repetía a sí misma después de 17 números La nueva no sigue ningún patrón

La iteración revela la extrema sensibilidad de la ecuación a las condiciones iniciales. Esta sensibilidad se aplica por igual a los números racionales e irracionales cuando se les itera con ecuaciones no lineales.

Pero no sólo los números se comportan así. Los científicos observan la misma dinámica en los fluidos como lo observó David Ruelle paralelamente a Lorenz El destino final de un pequeño remolino de sangre en la corriente sanguínea es excepcionalmente sensible a las condiciones iniciales. Los puntos vecinos de la sangre pueden continuar fluyendo lado a lado, pueden oscilar unos alrededor de otros o terminar en partes muy diferentes del fluido. Aún el envejecimiento se puede interpretar como un proceso donde la iteración constante de las células al fin introduce un plegamiento y una divergencia que altera las condiciones iniciales y lentamente nos desintegra: somos atraídos hacía la muerte que podríamos considerar como el máximo atractor extraño.

En el mundo físico, los diversos sistemas exhiben diversos grados de sensibilidad a las iteraciones que sufren. Cierto diseño de ala de avión produce una rápida magnificación de la fluctuación que crece alrededor de los cristales de helio de la superficie de el ala, una magnificación tan veloz que puede crear una turbulencia que causará un accidente. Otros diseños, sin embargo, son inmunes a esas condiciones. Como vimos en la duplicación de períodos, la iteración produce estabilidad a determinada razón, pero cúando la razón supera ciertos valores el sistema se derrumba en el caos. Aunque, como descubrió Feigenbaum, la escala de valores críticos es la misma para muchos sistemas, cada sistema sufre sus propias condiciones no lineales donde las iteraciones empiezan a desbordarse.

El movimiento de tipo de iteración no lineal que hallamos en tantos sistemas se puede visualizar como un panadero que amasa la masa para preparar pan. Con los puños el *panadero estira la masa y la pliega sobre sí misma, repitiendo esta actividad una y otra vez.* De hecho muchos matemáticos dicen que la iteración de una ecuación no lineal produce una "transformación de panadero". Esta transformación desplaza puntos contiguos de la masa, alejándolos unos de otros. Una serie de hilos elásticos situados en la masa eventualmente se estirarán y plegarán formando un patrón complejo e imprevisible (y por tanto caótico). Matemáticamente, este proceso de estiramiento y plegamiento cobra la forma de un atractor extraño.

La ecuación del panadero rige la ecuación del crecimiento. La fórmula de Verhulst se guía por el dinamismo de dos efectos opuestos, el factor de estiramiento (X_n) y el de plegamiento ($1-X_n$). De este modo el resultado de la iteración previa se convierte en punto de partida de la siguiente.

Ciertas ecuaciones (como la del crecimiento con el término no lineal de Verhults), generan una secuencia totalmente caótica con un determinismo total, es decir, que podemos determinar todos los términos que entrarán en la ecuación. No obstante, los cálculos que resultan de esta iteración son una especie de estafa, pues se pueden realizar en la computadora o peor aún, en una calculadora de bolsillo. Este dato nos dice algo muy significativo del caos.

Las computadoras suelen llevar los calculos hasta 16 decimales. De este modo, con cada operación simple siempre hay un redondeo. Por ejemplo, si el número 5 aparece en el lugar decimosexto, puede ser porque los lugares decimosexto y decimoséptimo eran ...49 ó . .51. La incertidumbre acerca del valor real del dígito del lugar decimosexto es tan pequeña que no suele preocupar a nadie. La mayoría de las calculadoras de bolsillo llegan hasta ocho lugares y el último rara vez es necesario.

Pero en las ecuaciones iterativas, donde los resultados en cada etapa del cálculo introducen en el siguiente (representando la realimentación que existe en los sistemas reales tales como el flujo de fluidos), la incertidumbre inicial acerca del lugar decimal decimosexto comienza a acumularse y distorsiona los resultados de cada iteración. Al cabo de cincuenta rondas de estiramiento y plegamiento de las iteraciones, la incertidumbre es tan seria que frustra el cálculo. Aunque las iteraciones son deterministas, el error de redondeo explota las limitaciones de la computadora y quita sentido a cualquier predicción.

Pero supongamos que usamos la computadora más grande para ocupar más decimales. Supongamos que construimos una inmensa, capaz de realizar cálculos que incluyan hasta treinta y un decimales.

Aún con un error de redondeo reducido al orden de una parte en 10^{31}, el determinismo y la previsibilidad resbalan, pues al cabo de sólo 100 iteraciones de esta enorme computadora nuestro error habrá desbaratado todo el cálculo. Dada la velocidad de las computadoras actuales, la previsibilidad se esfumará en una fracción de segundo

El físico del caos Crutchfield dice:

"La consecuencia de medir con una precisión que es sólo finita consiste en que las mediciones no son suficientemente buenas. el caos se adueña de ellas y las hace estallar en nuestra cara"

Este es "el efecto mariposa".

En un artículo científico, Crutchfield, Doyne Farmer, Normon H. Packard Y Robert Shaw, cuatro pioneros del caos, explican que la sensibilidad de los sistemas físicos dinámicos es tan grande que la predicción perfecta del efecto de una bola de billar golpeando a las demás bolas es imposible:

"¿Por cuánto tiempo podría un jugador con perfecto control de su golpe predecir la trayectoria de la bola? Si el jugador ignora un efecto tan minúsculo como la atracción gravitatoria de un electrón desde el linde de la galaxia, la predicción resultaría errónea al cabo de un minuto"

¿Por qué? Porque las ecuaciones que rigen las duras bolas de billar tienen una no linealidad iterativa, de modo que el movimiento del sistema definido por la ecuación es infinitamente sensible al movimiento cambiante de todo lo demás: la presión del aire, la temperatura, la superficie de la mesa, el tono muscular del jugador de billar, la psicología del jugador, la gravedad de un electrón. La iteración de ecuaciones no lineales revela una vasta sensibilidad a la interconexión que se manifiesta en las computadoras de los científicos como imprevisibilidad, caos, atractor extraño.

Esta vasta sensibilidad sugiere otro enfoque de la totalidad. En vez de pensar en el todo como la suma de las partes, pensémoslo como aquéllo que aflora bajo el disfraz del caos cada vez que los científicos intentan separar y medir sistemas dinámicos como si estuvieran compuestos por partes. Es el error del redondeo, lo que el físico Joseph Ford denomina "información faltante" que surge al cabo de 17, 31 ó 5 millones de iteraciones y termina con las predicciones. La información faltante (el todo) está implícita en los sistemas dinámicos mediante un delgado e infinito hilo de puntos decimales decrecientes en las ecuaciones que presentan procesos dinámicos. A través de este hilo, como a través del cuello de un globo, el todo es bombardeado por la iteración hasta que hace estallar la ecuación.

El físico teórico Frank Harlow de Los Alamos dice que la incertidumbre o errores (la información faltante) acerca de las condiciones iniciales de los sistemas dinámicos son similares a las "semillas" que producen turbulencia y caos: las alas de la mariposa, una tosca aglomeración de cristales de helio en el ala de un avión, un electrón en el linde de la galaxia. Cualquier cosa puede ser una semilla si esta en el sitio adecuado y en la dinámica adecuada. La iteración infla las fluctuaciones microscópicas hasta llevarlas a una escala macroscópica.

Algunos cosmólogos opinan que si las condiciones iniciales durante el *big bang* hubieran variado tan sólo en un "cuanto" de energía (la cosa conocida más pequeña que podemos mesurar), el universo sería un lugar muy diferente. La forma de las cosas depende de lo más diminuto. En este sentido, la parte del todo se puede manifestar como caos o como un cambio transformador. Esta "parte transformadora", el todo incipiente, es la "información faltante" que delinea la imprevisibilidad del sistema a través de la iteración. La forma que delinea es la del atractor extraño

Varios físicos creen que hay una conexión entre el principio de la "información faltante" en los sistemas caóticos y el famoso teorema de la incompletitud de Gödel. En la década del 30's Kurt Gödel asombró a los matemáticos demostrando que importantes sistemas lógicos como la aritmética y el álgebra siempre contienen enunciados que son verdaderos pero que no pueden derivar de un conjunto de axiomas. Gödel descubrió que siempre habrá información faltante, un agujero en el centro de esta lógica. Podemos decir que ese agujero es el todo.

La prueba del teorema de la incompletitud se basaba en la paradoja del mentiroso. En vez de tomar al cretense que decía '*Todos los cretenses son mentirosos*', Gödel demostró un enunciado matemático que decía: "*Este enunciado es indemostrable*"

3.3 Atractor extraño

Turbulencia

En el siglo XIX se pensaba que el caos y el orden tenían poco que ver entre sí. Pero la teoría de KAM y algunos otros descubrimientos han ampliado la perspectiva de Poincaré. Los científicos están viendo que el caos no es solo una oscilación sin rumbo, sino que constituye una forma sutil del orden. Anteriormente analizamos el asteroide caótico que busca eternamente su hogar en la estructura de un atractor que ha sido fragmentado en el espacio fase. Dicho atractor se denomina ***"atractor extraño"*** y es un nuevo y sorprendente objeto de análisis matemático. Pero este atractor extraño no tiene nada de nuevo. Su presencia estaba oculta bajo otro nombre ***"turbulencia".***

La turbulencia está presente en la naturaleza: en las corrientes de aire, en ríos veloces que lamen las rocas y columnas de los puentes, en la lava caliente que fluye de un volcán, en desastres meteorológicos tales como tifones y olas gigantes.

A menudo la turbulencia causa problemas a los humanos, interfiere en nuestra tecnología al alterar el movimiento del petróleo en los oleoductos; modifica la conducta de las bombas y turbinas, de los camiones en las autopistas, de los cascos de las naves en el agua y del café en la taza de un pasajero de avión. Los efectos en la turbulencia de la sangre pueden dañar y producir la acumulación de ácidos grasoso en las paredes de los vasos; en los primeros corazones artificiales, la turbulencia parece haber sido la causante de los coágulos que afectaron a los primeros pacientes que los recibieron.

Leo P. Kadanoff y Albert Libchaber de la Universidad de Chicago definen el fenómeno de la turbulencia de la siguiente forma:

> "*Está Ud. leyendo estas notas. En la habitación en la que se encuentra, todo parece tranquilo No obstante alrededor de Ud. el aire está animado de unos movimientos en todas direcciones que los físicos llaman "turbulentos" Si midiera su velocidad en un punto, a intervalos de tiempo regulares, encontraría valores aleatorios, como si se hubieran echado a la suerte. También podría comparar la velocidad del aire en distintos lugares de la habitación. La sorpresa sería la misma: el aire se mueve de modo distinto en todas partes, según parece al azar Así es como en física se define la turbulencia:* ***un flujo se llama turbulento si la velocidad del fluido parece variar aleatoriamente tanto en el tiempo como en el espacio*** "

La turbulencia que destruye sistemas ordenados y llena nuestros paisajes de desorden –lava, viento, agua- ha sido objeto de fascinación para las grandes mentes. Una de las primeras fue la de Leonardo da Vinci, quien realizó atentos estudios del movimiento turbulento y se obsesionó con la gran idea de que un gran diluvio inundaría la tierra. Leonardo escribió sobre la turbulencia:

> "*El movimiento de la superficie del agua se asemeja al del cabello, que consta de tres movimientos, uno a consecuencia del peso del cabello y el otro de sus ondas y rizos. Del mismo modo el agua, posee encrespamientos turbulentos unos siguen al movimiento de la corriente, los otros obedecen al movimiento de incidencia y reflejo*"

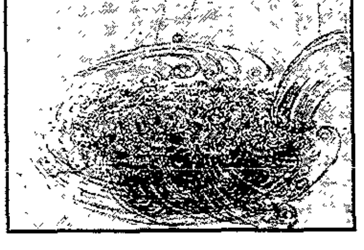


Figura 25. Dibujo realizado por Leonardo Da Vinci, donde describe gráficamente el comportamiento de la turbulencia

Leonardo da Vinci estudió ávidamente el flujo del agua en las cañerías y la fuerza erosionante del flujo rápido. En el siglo XIX la turbulencia llamó la atención de Von Helmholtz, Lord Kelvin, Lord Raleigh y una multitud de científicos menos conocidos que realizaron importantes aportes experimentales. Pero, a pesar de estos esfuerzos, la turbulencia continuó siendo un campo de estudios de escasa relevancia. Era difícil obtener resultados decisivos y el tema resultaba complejo hasta hace algunos años, cuando se reconoció como un importante campo de investigación. El estudio de la turbulencia, un subconjunto del caos, se concentra en las leyes del caos atractivo en líquidos y gases. Ahora algunos científicos piensan que la turbulencia (y el caos) pronto resultará tan importante como la relatividad y la mecánica cuántica.

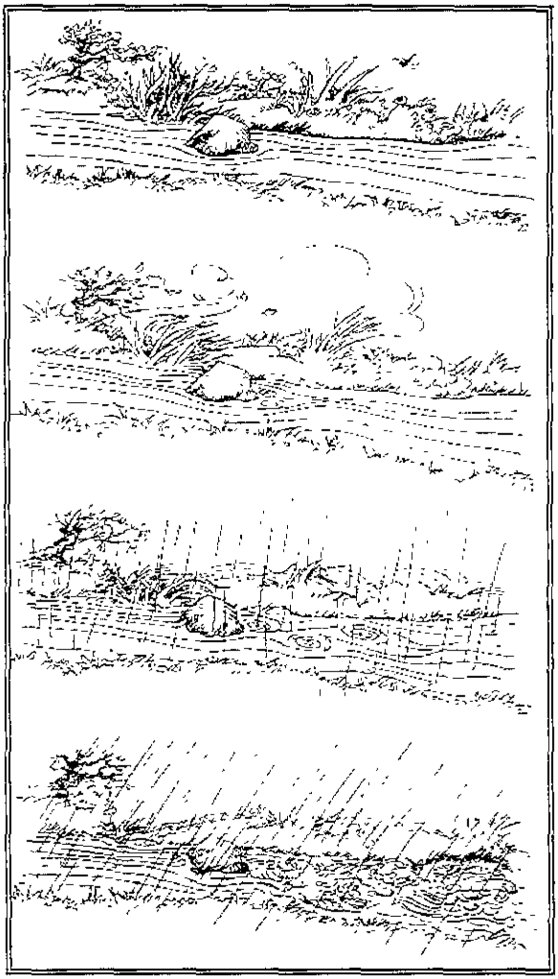


Figura 26.

Un buen sitio para comenzar a meditar sobre el surgimiento de la turbulencia es un río que fluye lentamente (*figura 26*).

El río se topa con una gran roca pero se divide fácilmente y deja atrás el obstáculo. Si vaciamos gotas de pintura en el agua, producen líneas que dejan la roca atrás, sin separarse ni mezclarse.

Al llegar el otoño, comienzan las lluvias y el río circula con mayor velocidad. Ahora se forman vórtices (ciclos límite) detrás de la roca. Son bastante estables y tienden a permanecer en el mismo sitio durante períodos prolongados.

Al aumentar la velocidad del agua, los vórtices se separan y se desplazan por el río, difundiendo corriente abajo la influencia perturbadora de la roca. Anteriormente, una medición de la razón de flujo a partir de la roca habría dado un resultado constante. Pero ahora la razón de flujo oscila periódicamente como consecuencia de los vórtices.

Cuando la velocidad del río aumenta aun más, un observador ve que los vórtices se descomponen en regiones locales de agua arremolinada y agitada. Además de las oscilaciones periódicas del flujo del agua, ahora hay cambios irregulares más rápidos: las primeras etapas de la turbulencia.

Por último, el rápido flujo del agua, la región que hay detrás de la roca parece haber perdido todo orden, y la medición de las razones de flujo en la región arroja resultados caóticos Predomina una verdadera turbulencia, y el movimiento de cada diminuto elemento del agua parece ser aleatorio. La región tiene tantos grados de libertad que es casi imposible describirla.

En sus observaciones y dibujos sobre el agua en flujo rápido. Leonardo señala que los vórtices tienden a fragmentarse en vórtices cada vez más pequeños, que luego se fragmentan de nuevo. El proceso que lleva a la turbulencia parece involucrar incesantes divisiones y subdivisiones o bifurcaciones en escalas cada vez más pequeñas. ¿Dónde terminan estas bifurcaciones? ¿Su número tiene un limite? Un fluido está compuesto, en última instancia de moléculas ¿Es posible que la verdadera turbulencia persista aun hasta el nivel molecular o más allá de él?

La noción de vórtices dentro de vórtices sugiere que los sistemas cercanos a la turbulencia lucen similares a sí mismos en escalas cada vez más pequeñas. lo cual vuelve a insinuar que es un atractor extraño.

La observación de la turbulencia es fácil, pero su comprensión es bastante difícil. Henri Poincaré –una vez más él- se interesó en la hidrodinámica y dicto un curso sobre torbellinos[20] pero no se atrevió a proponer una teoría sobre la turbulencia. El físico alemán Werner Heisenberg, padre de la mecánica cuántica, propuso una teoría de la turbulencia que no ha tenido impacto. Se ha dicho que la turbulencia era "un cementerio de teorías". Por supuesto que la teoría física y matemática del flujo de fluidos se ha beneficiado de notables contribuciones debidas a Osborne Reynolds, Geoffrey I. Taylor, Theodore von Kármán. Jean Leray, Andrei N. Kolmogorov, Robert Kraichnan y otros. Pero el tema parece no habernos develado sus últimos secretos.

[20] H. Poincaré, *Théorie des tourbillons*, Carré et naud, Paris, 1982.

En el siglo XIX, el físico británico Osborne Reynolds, experimentando con caños de diversos tamaños encontró un número –hoy llamado número de Reynolds- que indica a un ingeniero en qué momento el sistema llegará a la turbulencia.

El número de Reynolds se calcula multiplicando diversas variables que incluyen el tamaño del caño, la viscosidad del fluido y la razón de flujo. Reynolds demostró que la turbulencia aparece en cuanto se llega a ese número mágico. El número crítico es un extremo de un espectro que abarca desde el flujo regular hasta los vórtices, la fluctuación periódica y el caos. Un curioso rasgo de este espectro es el que sostiene diferentes escalas. Usando el número de Reynolds los científicos pueden simular el complejo movimiento del agua en el río Missisippi en la computadora. El flujo de aire alrededor de un prototipo sujeto a una corriente de aire relativamente lenta en un túnel de viento puede imitar precisamente los efectos de un coche verdadero desplazándose a alta velocidad en una autopista. Asombrosamente, la llegada de la turbulencia en pequeña escala refleja el advenimiento de la turbulencia a escala grande. Inadvertidamente, Reynolds había dado con la curiosa autosimilitud del atractor extraño.

La teoría de Landau o los "Modos" en la turbulencia

Uno de los primeros científicos que intentó seguir los pasos del desarrollo de la turbulencia fue un físico soviético.

Lev D. Landau, quien en 1952 recibió el premio Nobel por su teoría del helio superfluido, advirtió que la turbulencia comienza progresivamente a medida que los movimientos dentro de un fluido se vuelven cada vez más complejos. A la manera de Leonardo, pensaba que la turbulencia total aparecía después de un gran número de bifurcaciones.

Para entender la teoría de Landau sobre la parición de la turbulencia es preciso recordar que el movimiento de un fluido viscoso, tal como el agua, se frena por rozamiento y tiende hacia un estado de reposo a menos que se le aporte energía continuamente. Según sea la potencia suministrada para mantener el fluido en movimiento, se pueden observar cosas diferentes. Para tomar un ejemplo concreto pensemos en un grifo abierto La potencia aplicada al fluido (y que en último término se debe a la gravedad) está controlada por la mayor o menor abertura del grifo. Si se abre un poco el grifo, se podrá sin duda arreglárselas para que el flujo entre en el grifo y la pila sea estacionario: la columna de agua parece inmóvil (aunque, el agua fluye por el grifo). Abriendo cuidadosamente el grifo se podrá ver (a veces) las pulsaciones regulares de la columna fluida: en este caso el movimiento se llama periódico en lugar de estacionario. Si se abre el grifo aún más, las pulsaciones se hacen irregulares. Finalmente, si se abre el grifo al máximo se verá un flujo muy irregular: turbulento La sucesión de situaciones que se acaban de describir son típicas para un fluido al que una fuente de energía suministra una potencia cada vez elevada. Landau afirma que, cuando se aumenta la potencia aplicada, se excita a un número cada vez mayor de modos del fluido.

Pero aquí, necesitamos comprender el concepto de "modos". Muchos objetos de nuestro entorno se ponen a oscilar o vibrar cuando los tocamos: un péndulo, una barra de metal, una cuerda de un instrumento musical, todos se animan fácilmente de un movimiento periódico. Un movimiento periódico de este tipo es un modo. También se puede hablar de los modos de vibración de la columna de aire en un tubo de órgano, de los modos de oscilación de un puente colgante, y así sucesivamente. Un objeto físico dado tiene a menudo muchos modos diferentes, que nos gustaría determinar y controlar. Pensemos por ejemplo, en una campana de iglesia: si su forma esta mal escogida, los diversos modos de vibración de la campana corresponderán a frecuencias discordantes y el sonido no será armonioso. Un ejemplo importante de oscilación es el de los átomos de un sólido en torno a sus posiciones de equilibrio: los modos correspondientes reciben el nombre de "fotones". Pero regresemos a la teoría de Landau sobre la aparición de la turbulencia. Según esta teoría cuando un fluido es puesto en movimiento por una acción exterior, un cierto número de modos del fluido son excitados. Si no está excitado ningún modo, tenemos un estado estacionario del fluido. Si solo un modo está excitado, observamos oscilaciones periódicas. Si están excitados varios modos, el movimiento del fluido se hace irregular, y cuando están excitados muchos modos, el movimiento es turbulento. Los argumentos matemáticos de Landau que dan apoyo a sus ideas son bastante complicados como para reproducirlos. Independientemente de Landau, el matemático alemán Eberhard Hopf propuso, con una aparato matemático más refinado, una teoría muy parecida.[21]

La teoría de Landau cobró nuevo impulso en 1948 cuando el científico alemán Eberhanrd Hopf inventó un modelo matemático para describir las bifurcaciones que conducían a la turbulencia.

Como ya analizamos anteriormente, en un arroyo que circula fluidamente, los diversos parámetros que describen el flujo son constantes e inmutables. Aún cuando se perturbe el arroyo arrojando una piedra, pronto regresa a su flujo normal Como las variables que definen el flujo del arroyo no cambian, el agua que fluye sin estorbos se puede representar mediante un solo punto en el espacio de fases, un punto atractor. El punto en este caso, representa la velocidad constante del agua.

En un arroyo que circule a mayor velocidad, el flujo está distorsionado por oscilaciones donde se forman vórtices estables. No obstante, este flujo es muy irregular y se puede caracterizar como un ciclo límite. El arroyo perturbado siempre regresa a la misma oscilación básica, el mismo vórtice estable, aunque se le arroje una piedra para perturbarlo.

Pero dichas descripción es casi paradójica: cuando la velocidad del arroyo es lenta, un punto atractor sirve para describir el movimiento, pero al aumentar la velocidad aplicamos un atractor de ciclo límite. Obviamente que tiene que haber un punto crítico en el cual la descripción de la conducta del arroyo salta de un atractor a otro. Este punto crítico de inestabilidad se llama inestabilidad de Hopf.

[21] L.D. Landau, *mecánica de Fluidos*, Reverté . Barcelona, 1986

Hopf propuso luego toda una gama de nuevas inestabilidades. La primera inestabilidad involucra un salto del punto atractor al ciclo límite. Le sigue un brusco tránsito a un atractor toro, luego a un toro de cuatro, cinco, seis y un creciente número de dimensiones.

La imagen de Hopf y Landau es intuitiva y evoca los dibujos de Leonardo, vórtices dentro de vórtices y el estudio cualitativo de Henry Poincaré sobre el problema de los tres cuerpos *(vea en este mismo capitulo la sección 2)* Sin embargo, los experimentos no han confirmado los toros de más dimensiones predichos por este modelo. En cambio, las observaciones de algunos sistemas indican que, aunque en los comienzos de la transición del flujo ordenado al desordenado son descritos por Landau y Hopf, el sistema sigue luego un rumbo hacia el caos que tiene implicaciones aun más asombrosas.

En 1982 se realizó un cuidadoso experimento sobre la inestabilidad que aparece en algunas corrientes de convección cuando el aire caliente se eleva de los desiertos o cuando el agua caliente sube arremolinándose desde el fondo de una olla. Los investigadores que examinaban la inestabilidad de Bénard, descubrieron que la turbulencia se producía con mucha mayor rapidez de lo que sugería la hipótesis de Hopf.

David Ruelle y el surgimiento del concepto "Atractor Extraño"

Retomemos de nuevo los "modos". En muchos casos es posible hacer que un sistema físico oscile simultáneamente en diferentes modos sin que estas diferentes oscilaciones tengan ninguna influencia sobre otra. Para entender esta idea, que no es muy precisa, imaginemos los modos como osciladores que estuvieran contenidos de alguna manera en un sistema físico, y que oscilaran independientemente.

Siguiendo la terminología de Thomas Kuhn, se puede decir que la interpretación de extensos dominios de la física en términos de modos, concebidos como osciladores independientes, es un paradigma. El paradigma de los modos se aplica cada vez que se pueden definir modos que sean independientes. Por ejemplo, los modos de oscilación de los átomos en un sólido, los fotones, no son completamente independientes: existen interacciones fotón-fonón, aunque son relativamente débiles y los físicos no encuentran la forma de tratarlas.

David Ruelle, un matemático belga que trabajaba en el Instituto de Altos Estudios Científicos de Paris, y un visitante holandés llamado Floris Takens, empezaron a estudiar la turbulencia desde otros punto de vista y se preguntarón: ¿Hay un modelo típico, un proceso genérico, para el comienzo de la turbulencia?

Eso no está tan claro. Pero lo que esta claro, cuando uno empieza pensando de esta manera, es que la teoría de Hopf-Landau no puede ser correcta de ninguna manera. Ya que aunque cada uno de las vibraciones acumuladas parece matemática y físicamente plausibles, no lo son. Sólo la primera lo es.

La intuición de Hopf y Landau se derivaba hasta cierto punto de la dinámica hamiltoniana. En ella, la conservación de la energía impone una restricción que hace triviales los movimientos cuasiperiódicos de frecuencias múltiples. Pero esta restricción no se aplica a los sistemas disipativos, sistemas con rozamiento. Y en el flujo del fluido viscoso hay rozamiento en abundancia.

El mismo David Ruelle, explica porque dudó de la teoría de la turbulencia de Hopf-Landau en su libro *"Azar y Caos" (ver referencia* ***[9]*** *en la bibliografía)*:

> *"La descripción en términos de modos que hacía Landau me decepcionó profundamente, porque ello estaba en desacuerdo con ideas matemáticas que había oído exponer a René Thom y que yo había estudiado en un artículo fundamental de Steve Smale sobre los sistemas dinámicos diferenciables. De ellos aprendí los modernos desarrollos de las ideas de Poincaré sobre los sistemas dinámicos, y a partir de ello estaba claro que el paradigma de los modos esta lejos de tener una aplicación universal. Por ejemplo, una evolución temporal descrita mediante modos no puede tener sensibilidad a las condiciones iniciales, los modos sólo dan lugar a evoluciones temporales bastante poco interesantes comparadas con las analizadas por Smale Cuanto más pensaba en el problema, menos creía en la teoría de Landau. si hubiera modos en un fluido viscoso, deberían interaccionar fuertemente más que débilmente, y la descripción en términos de modos dejaría de ser válida Será reemplazada por algo diferente, más rico y mucho más interesante "*

Ruelle y Takens llegarn a la siguiente idea.

La primera transición, de un estado estacionario a una vibración simple, es típica incluso en sistemas disipativos. ello conduce a un movimiento periódico. En esto no hay problema.

La segunda transición. que añade frecuencia extra. puede suceder. desde luego. Ello conduce inicialmente a un movimiento que, desde el punto de vista topológico, es un toro de dos dimensiones; y este movimiento empieza esparciéndose a una superposición cuasiperiódica de dos movimientos periódicos independientes Pero no se puede permanecer de esta manera. porque el movimiento no es típico, no es genérico. En la práctica pequeñas perturbaciones lo romperían.

Dio la casualidad de que los flujos estructuralmente estables, típicos y genéricos en un toro eran conocidos; ellos predicen algo, bien conocido por los ingenieros eléctricos. llamado *acoplamiento de frecuencias* Los dos movimientos periódicos independientes originales interactúan y se acompasan, produciendo un movimiento combinado que es periódico, con un período combinado único.

Con tres frecuencias superpuestas, incluso sucede algo más dramático. Típicamente, las tres frecuencias no necesitan ni siquiera acoplarse: en cambio, pueden combinarse para crear un objeto nuevo. que Ruelle y Takens llamaron ***"Atractor Extraño"***.

La extraña gráfica que encontró Eduard Lorenz al hacer sus investigaciones sobre el clima es un "atractor extraño" Los atractores extraños tienen extrañas geometrías (*figura 27*).

Para apoyar su idea David Ruelle y Floris Takens escribieron un artículo: "*On the nature of Turbulence" (Sobre la naturaleza de la turbulencia)* El artículo explicaba por qué pensaban que las ideas de Landau eran erróneas y proponían algo distinto, haciendo intervenir a los ***"atractores extraños"***.

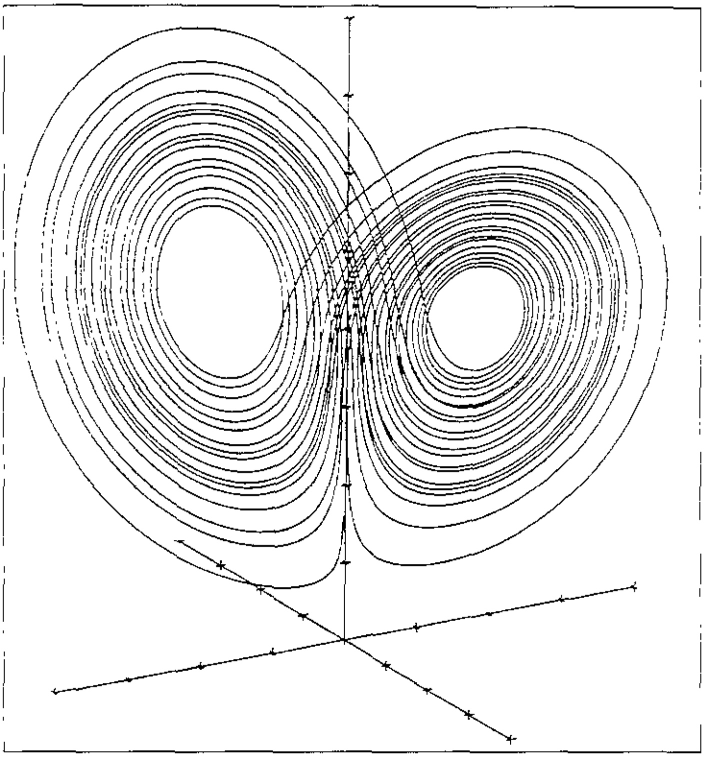


Figura 27. Atractor de Lorenz

Pero antes de las primeras glorias, el artículo fue enviado a una revista científica y rechazado poco después, al editor no le gustó y también envió algunos de sus artículos para que Ruelle y Takens aprendieran lo que realmente era la turbulencia.

David Ruelle explica en su libro "*Azar y Caos*" la razón del nombre:

"Estos "atractores extraños" procedían de un artículo de Smale, aunque el nombre era nuevo y nadie recuerda ahora si fue Floris Takens quién lo inventó o fui yo, o cualquier otro."

James Gleick en su libro "*Caos- La creación de una Nueva Ciencia*" *(ver referencia [4] en la bibliografía)* comenta sobre el termino "*atractor extraño*" utilizado en el artículo de Ruelle y Takens:

"Lo más seductor fue lo que los autores denominaron ***atractor extraño*** *Ruelle meditó después que tal denominación era psicoanalíticamente "sugestiva" Su importancia en el estudio del caos fue tal, que él y Takens se disputaron, con apariencia cortés, el honor de haber inventado el nombre. Era la verdad que ninguno de los dos lo recordaba bien*

Takens, alto, rubicundo y fieramente nórdico decía:,

-¿Acaso se pregunta a Dios si ha creado este maldito universo? .. No recuerdo nada... Pienso a menudo sin acordarme de ello.

Ruelle, el autor más calificado del artículo, comentaba sin alterarse.

-Takens visitaba el Institut des Hautes Études Scientifiques Cada persona trabaja a su modo. Algunas personas prefieren escribir los artículos sin colaboradores, para que el mérito sea sólo de ellas."

Sin embargo, y pese a todos los contratiempos es a David Ruelle a quién se le da el crédito como el primero en bautizar al ***atractor*** de la turbulencia como ***extraño***. Él está de acuerdo con Landau y Hopf en que la corriente de convección de un fluido regular cede ante una primera oscilación en que un punto atractor salta a un ciclo límite. Luego el ciclo límite se transforma en la superficie de un toro. Pero Ruelle argumenta que en la tercera bifurcación ocurre algo que es casi de ciencia ficción. El sistema no salta de una superficie toroide bidimensional a una superficie toroide tridimensional en el espacio tetradimensional, sino que el toro mismo comienza a descomponerse. Su superficie ingresa a un espacio de dimensión fraccional. Dicho de otro modo, la superficie del toro queda atrapada entre las dimensiones de un plano (bidimensional) y de un sólido (tridimensional).

Harry Swinney, de Haverford College, y Jerry Gollub de la Universidad de Austin Texas, diseñaron un experimento que respalda a Ruelle. Se trataba de estudiar el movimiento de un líquido entre dos cilindros El cilindro exterior permanece estacionario mientras que el interior rota Esto establece un flujo en el cual las diferentes partes del líquido viajan a diferentes velocidades. Con velocidades de rotación bajas, el fluido fluye uniformemente. Pero al aumentar la velocidad de rotación, se produce la primera inestabilidad De Hopf. Ahora el fluido viaja por medio de una serie de rotaciones internas semejantes a las retorcidas hilachas de una soga.

Con la segunda bifurcación de Hopf, aparece un nuevo conjunto de rotaciones internas y el fluido se retuerce con creciente complejidad, oscilando en dos frecuencias diferentes. Cuando se aumenta más la velocidad de rotación, el movimiento regular se desintegra en fluctuaciones aleatorias cuando se les representa se anudan en la forma de un atractor extraño con dimensión fraccional

La turbulencia surge porque todos los componentes de un movimiento están conectados entre sí, y cada uno de ellos depende de todos los demás

"On the nature of turbulence" aquel artículo escrito por David Ruelle y Floris Takens fue finalmente publicado en 1971 por una revista científica cuando Ruelle era uno de los editores .[22] Contiene algunas ideas previamente desarrolladas por Poincaré y Lorenz (aunque no lo sabían ni Ruelle ni Takens sabían en lo que este último estaba trabajando). Pero ellos no se interesaban en los movimientos de la atmósfera ni en las predicciones meteorológicas. Su interés radicaba en la turbulencia hidrodinámica. Afirmaban que los flujos turbulentos no se describen mediante la superposición de numerosos modos (como lo proponían Landau y Hopf) sino mediante atractores extraños.

¿Qué es un atractor extraño? David Ruelle lo explica de la siguiente manera:

"Es el conjunto sobre el que se mueve el punto P (figvra 28) representativo del estado de un sistema dinámico determinista cuando se espera el tiempo suficiente (el atractor describe la situación de régimen estacionario, una vez que han desaparecido los fenómenos transitorios). Para que esta definición tenga sentido es importante que las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema sean independientes del tiempo (si no lo fueran podríamos hacer que el punto P se moviera de manera completamente arbitraria). También es importante que nos interesemos en los sistemas físicos disipativos (es decir, sistemas que disipan energía en forma de calor, los fluidos viscosos, por ejemplo, disipan energía mecánica por rozamiento interno) La disipación es lo que hace que aparezcan los fenómenos transitorios Precisamente esta disipación se debe a que, de todo el espacio de dimensión infinita que representa el sistema, solamente un pequeño conjunto (el atractor) resulta interesante.

El punto fijo y el ciclo límite (o lazo periódico) (Figura 28) son atractores que, por otra parte no tienen nada de extraño La situación de régimen estacionario correspondiente a un número finito de modos se describe mediante un atractor cuasiperiódico (o tipo toro) que tampoco es extraño. Pero el atractor de Lorenz es extraño, como lo son muchos atractores introducidos por Smale (estos últimos son más difíciles de representar gráficamente) La extrañeza de un atractor resulta de las características siguientes que no son matemáticamente equivalentes, aunque a menudo se presentan en la práctica

*Ante todo, los atractores extraños tienen un aspecto extraño: no son curvas o superficies lisas sino objetos de dimensión no entera o, como los llama Benoît Mandelbrot, son **fractales** A continuación y, lo que es más importante, el movimiento sobre un atractor extraño presenta el fenómeno de sensibilidad a las condiciones iniciales Finalmente, aunque los atractores extraños sean de*

[22] D. Ruelle y F. Takens, *On the nature of turbulence*, Communications. Mathematics and Physic 20, 167-192 (1971); 23 (343-344 (1971).

dimensión finita, el análisis de frecuencias temporales muestra un continuo de frecuencias.

Este último punto merece una explicación. El atractor que representa el flujo de un fluido viscoso es un conjunto de dimensión finita en el espacio de dimensión infinita de los estados del fluido. Dicho atractor queda, por consiguiente, bien representado por su proyección en un espacio de dimensión finita. Según el paradigma de los modos, un espacio de dimensión finita sólo puede describir un número finito de modos.(Matemáticamente esto se debe a que un espacio de dimensión finita sólo puede contener a un toro de dimensión finita). Sin embargo, al hacer el análisis de frecuencias surge un espectro continuo de frecuencias que debería corresponder a una infinidad de modos "

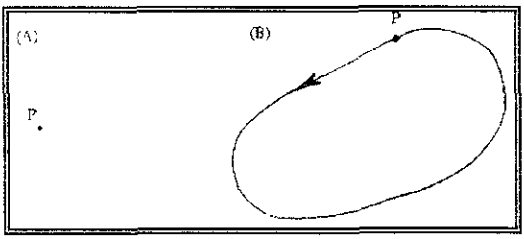
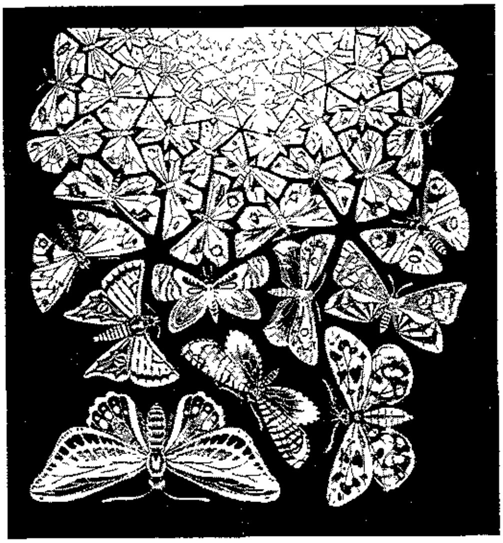


Figura 28. (A) Punto fijo P que representa un estado estacionario (B) Ciclo periódico que representa oscilaciones periódicas del fluido. Las figuras son proyecciones en dos dimensiones de trayectorias en un espacio de dimensión finita

CAPÍTULO TERCERO

ALGUNOS ATRACTORES EXTRAÑOS



Por mi se llega a la ciudad del llanto,
por mi a los reinos de la eterna pena,
y a los que sufren inmortal quebranto
Dictó mi Autor su fallo justiciero,
Y me creó con su poder divino,
su supremo saber y amor primero
Y como no hay en mi fin ni mudanza,
nada fue antes que yo, sino lo eterno
Los que entrais aquí, renunciad para siempre a la esperanza

"El Infierno"
Canto Tercero
Dante Alighieri

ALGUNOS ATRACTORES EXTRAÑOS

Bien, como hemos analizado, cuando se excita un fluido mediante la acción de fuerzas externas cada vez mayores, cabría esperar, según la teoría aceptada, la aparición gradual de un número cada vez mas elevado de frecuencias independientes en el fluido. Por lo contrario, la teoría de los atractores extraños de Ruelle y Takens predice un comportamiento muy diferente. la aparición repentina de un espectro continuo de frecuencias.

James Glieck en su libro *"Caos – La Creación de una Nueva Ciencia"* habla de la importancia del artículo de Ruelle y Takens:

> *"La clara finalidad de la argumentación de Ruelle y Takens iba más allá de las matemáticas, se proponía ofrecer un sustituto del criterio tradicional sobre el arranque de la turbulencia En lugar de amontonar frecuencias, lo que llevaba a infinidad de movimientos traslapados independientes, declararon que tres movimientos independientes bastaban para generar una complejidad total de la turbulencia Desde el punto de vista de las ciencias exactas, parte de su lógica resultó ser oscura, equivocada o tomada en préstamo, o todo al mismo tiempo"*

Como dijimos anteriormente, un estudio experimental con un fluido real en el laboratorio de Jerry Golub y Harry Swinney en el City College de Nueva York y de la Universidad de Austin demostraron que los resultados estaban a favor de las teorías de Ruelle-Takens y no de las de Landau- Hopf sobre la aparición de la turbulencia. Hubo otro estudio, esta vez era una simulación en computadora realizado por Paul Martin en Harvard donde también se demostró que Ruelle y Takens estaban en lo correcto.

Es entonces cuando se produce un vuelco en la balanza. Poco a poco. las ideas controvertidas se hacen interesantes primero y después muy conocidas. Muchos científicos empiezan a trabajar en los atractores extraños y la sensibilidad a las condiciones iniciales. Se reconoce la importancia de las ideas de Edward Lorenz. Aparece un nuevo paradigma que es bautizado con el nombre de ***"caos"*** por Jim Yorke, un matemático de la Universidad de Maryland. Lo que ahora se denomina caos es una evolución temporal con sensibilidad a las condiciones iniciales. El movimiento sobre un atractor extraño es, por consiguiente caótico. Se habla también de ruido determinista cuando se observan oscilaciones irregulares con apariencia aleatoria pero que están producidas por un mecanismo determinista. De este modo. en los fenómenos caóticos el orden determinista crea desorden o al azar.

Anteriormente analizamos que un fluido viscoso es un sistema disipativo. Por lo tanto se espera ver atractores extraños y caos (o ruido determinista) en todo tipo de sistemas dinámicos disipativos. Y esto es lo que se muestra ahora en muchos experimentos.

Pero en la década de los 70's la situación era bastante diferente. David Ruelle cuenta una anécdota propia:

> *"Yo sabía que ciertas reacciones químicas tienen un comportamiento temporal oscilatorio, y que un artículo de Kendall Pye y Britton Chance describía tales oscilaciones en sistemas químicos de origen biológico Por ello, a comienzos de 1971 fui a Filadelfia a ver al profesor Chance y un grupo de sus colaboradores, y les expliqué que quizá pudiera ver oscilaciones químicas no periódicas, o "turbulentas", tanto como oscilaciones periódicas. Por desgracia, el experto matemático del grupo dio una opinión negativa y Chance se desinteresó por mi idea. Un poco más tarde, tuve la ocasión de explicar mis puntos de vista a Pye, quien dio muestras de más comprensión. Pero me explicó que si él estudiase una reacción química y obtuviese un registro "turbulento", en lugar de periódico, pensaría que el experimento había fallado y arrojaría el registro a la papelera. Visto en perspectiva, esta historia ilustra perfectamente lo que fue el impacto científico del caos. Actualmente, cuando se obtiene un registro turbulento o caótico se le reconoce como lo que es y se analiza cuidadosamente."*

Años más tarde las cosas ha cambiado y el caos ha sido tema de conferencias internacionales. Ha sido promovido a la dignidad de "ciencia no lineal" y se han creado institutos para estudiarlo. las revistas científicas le dedican importantes espacios. El éxito que ha alcanzado el caos ha sido provechoso para las matemáticas. donde la teoría de los sistemas dinámicos se ha beneficiado de las ideas nuevas sin degradación de la investigación.

1. LOS MARAVILLOSOS FRACTALES

Los gráficos de duplicación de períodos, sinuosidades en el espacio fase, los atractores extraños de Lorenz. Rössel y otros. han contribuido a quebrar la idea reduccionista, ante todo porque han brindado un nuevo modo de medir las cosas. Constituyen ejemplos de una revolución que esta afectando a la medición científica. Durante cientos de años de reduccionismo (la idea de que el mundo es un embalaje de partes) se ha apoyado en numerosas técnicas matemáticas que cuantifican la realidad. Al cuantificar la realidad. se pueden sumar y restar partes. Como los científicos que recurren a la matemática de la cuantificación han realizado importantes descubrimientos y predicciones. la fe de los científicos en el reduccionismo ha crecido

Pero, cuando los científicos estudian sistemas complejos, la noción de las partes se tambalea de tal modo que la cuantificación de dichos sistemas se vuelve imposible. Los científicos que desean estudiar los sistemas dinámicos han recurrido a otro enfoque de la medición la matemática cualitativa. En la vieja matemática cuantitativa la medición de un sistema se concentra en indagar cómo la forma del movimiento del sistema afecta la cantidad de otras partes. En cambio, en la medición cualitativa se trata de mostrar la forma del movimiento del sistema como la totalidad. En la modalidad cualitativa, los científicos no preguntan cuánto de esta parte afecta aquella parte, sino cómo luce el todo a medida de que se mueve y cambia, cómo se compara un sistema integral con otro.

A continuación veremos algunas clases de medición cualitativa además de las que ya hemos visto, y veremos cómo la medición cualitativa ha contribuido a catapultar a los científicos hacia una nueva perspectiva de la realidad desde la cual han obtenido sorprendentes visiones de cómo se entrelazan el caos. el orden, el cambio y la totalidad.

1.1 ¿Es posible medir el caos?

En la década de 1960, en los comienzos de la teoría de caos, el matemático Stephen Smale comprendió que la topología se podía usar para visualizar sistemas dinámicos. Mediante curvaturas, torceduras y plegamientos, se puede lograr que una forma topológica represente el movimiento de un sistema. Transformado topológicamente una forma en otra, es posible comparar sistemas dinámicos muy diferentes.

Smale decidió investigar topológicamente un sistema de duplicación de peróodos descubierto en 1927 por un ingeniero danés, Balthasar Van der Pol quién había utilizado un rizo de realimentación eléctrica para traducir una corriente eléctrica oscilante en tonos de una misma frecuencia en un teléfono. Van der Pol descubrió que cuando incrementaba la corriente del rizo eléctrico los tonos saltaban inexplicablemente a múltiplos cada vez más pequeños de esa frecuencia Entre cada salto había borbones de ruido. caos. Van der Pol encontraba intermitencia entre las iteraciones de realimentación. Lamentablemente no comprendió las implicaciones de lo que había odio y desechó el ruido (creado por la atracción conflictiva entre la frecuencia más alta y la más baja) como un fenómeno secundario.

Smale decidió hacer un modelo topológico del oscilador de Van der Pol. En vez de tratar de seguir una trayectoria de este complejo sistema dinámico en el espacio fase. Smale imaginó un espacio fase que se estiraba y se plegaba a medida que el sistema se desplazaba en la zona fronteriza entre los atractores de alta frecuencia y baja frecuencia. El resultado se denomina herradura de Smale

Imaginemos un rectángulo amasado y estirado hasta formar una barra. Curvemos la barra en forma de herradura y coloquémosla en el rectángulo. Luego amasemos estiremos y curvemos este rectángulo hasta formar una herradura y repitamos el proceso una y otra vez.

Smale comprendió que esto es lo que ocurre con un sistema que se dirige al caos por el camino de la duplicación de periodos.

El matemático francés René Thom utilizó otra clase de pliegue topológico para describir el cambio no lineal donde los sistemas sufren transiciones abruptas y discontinuas de un estado a otro.

Thom estudió sistemas arrastrados hacia cambios repentinos y radicales no tanto por las oscilaciones internas sino por fuerzas externas. La repentina transformación de un grano de maíz en maíz tostado, el colapso de una viga de puente cuando debe soportar un kilogramo de más, la drástica conversión del agua en hielo a los 0° C o en vapor a los 100°C, el encendido o apagado de un interruptor de luz, todos ellos constituyen ejemplos de lo que Thom llama "catástrofes".

Thom sugirió que estos cambios abruptos se pueden clasificar topológicamente en siete "catástrofes elementales". Cada catástrofe implica un plegamiento en el espacio fase por el que se desplaza un sistema. Los pliegues son creados por las "variables de control" del sistema, es decir, por los elementos externos que impulsan la conducta del sistema.

La primera catástrofe de Thom se llama simplemente "pliegue" o "plegamiento". Pensemos en un globo que se infla en una fiesta. En este cambio el control variable es la presión del aire, porque la dinámica del globo varía el aumento o reducción de la presión del aire.

A medida que aumenta la presión del aire dentro del globo, el sistema se aproxima al borde del pliegue catástrofe. Si se le empuja demasiado, cae por encima del pliegue... y desaparece. Al atravesar el pliegue catástrofe, el globo estalla y el sistema deja de existir

Aunque el pliegue catástrofe es sin duda la más simple de las catástrofes universales del catálogo de Thom, es una descripción de lo que puede aplicar a fenómenos tan complejos como el arco iris, una onda de choque y un avión supersónico. Cualquier sistema dominado por un solo factor o variable de control se puede describir con este mapa topológico.

Cuando el número de controles asciende de uno a dos, tenemos un segundo mapa de catástrofes. Ahora tenemos un sistema que se puede impulsar en dos direcciones En consecuencia, el mapa topológico de lo que Thom llama la "catástrofe cúspide" tiene dos dimensiones, las cuales se pueden representar mediante un papel deformado de tal modo que aparece un pliegue. Podemos imaginar que las variables de control (Las influencias importantes que afectan el sistema) impulsan el sistema sobre una superficie plegada del papel.

Tomemos como ejemplo, la conducta de un perro. El biólogo Konrad Lorenz argumentaba que los factores dominantes de la conducta canina, o sea las variables de control, son la furia y el miedo. Podemos usar la catástrofe cúspide de Thom para ver cómo la furia y el miedo transforman repentinamente la conducta de un perro.

Supongamos que otro perro se acerca a nuestro perro. Al principio el animalito se enfurece ante la presencia del intruso y empieza a rugir, a ladrar y gruñir amenazadoramente. ¿Pero qué ocurre si el otro perro es mucho más grande que el nuestro? Nuestro perro empieza a experimentar miedo, y este "punto de conducta" se desplaza hacia la izquierda. No obstante el perrito está todavía en la región superior del pliegue de la catástrofe, la región que significa conducta agresiva. Aparentemente nada a cambiado.

A medida que aumenta el miedo del perrito, el punto de conducta se acerca cada vez más al pliegue de la catástrofe, aunque el perro no cesa de ladrar.

Sin embargo, al fin llega al borde del mismo pliegue:. aquí el mínimo cambio en una de las variables de control (la furia y el miedo) puede mandarlo más allá del borde. Si el robusto intruso avanza un paso más, nuestro perrito cae en una zona mental fronteriza donde abandona la superficie superior del espacio de conducta y reaparece en el fondo del pliegue con una conducta totalmente nueva: la fuga.

El estudio topológico de Thom ilustra claramente cómo un pequeño cambio de furia o de miedo dentro de la mente del perro tiende producir una diferencia de conducta apenas perceptible, lo que en un punto crítico puede producir una diferencia de conducta apenas perceptible, pero en un punto crítico puede producir un cambio de conducta muy abrupto

En vez del perro que echa a correr podemos hablar del derrumbe del mercado bursátil o de la respuesta de una sobrecargada viga de puente. El teorema de las catástrofes de Thom muestra que cuando un sistema se puede describir usando una sola variable de conducta influida por dos variables de control, es decir, dos influencias decisivas, se puede representar mediante la catástrofe cúspide. Este pliegue catástrofe actúa como una descripción de los estado maníaco-depresivos, la ruptura de las olas del mar. los tumultos carcelarios. el láser, el flujo de los polímeros, la simetría de los cristales o los procesos de decisión. Los sistemas no lineales descritos por la teoría de la catástrofe de Thom son casi siempre estables. Sólo cuando se aventuran al borde de uno de estos pliegues de catástrofes sufren un cambio abrupto. Los puntos atractores y los ciclos límite se pueden incluir en la catástrofe de Thom, pero esta vez extendidos en un espacio fase que se pueden deformar topológicamente. Las catástrofes de Thom describen transformaciones súbitas en sistemas aparentemente estables. El tratamiento que dio Thom a la no linealidad introdujo un ingrediente a la ciencia de la turbulencia. Los sistemas dinámicos no lineales. sean caóticos o estables son tan complejos que resultan imprevisibles en los detalles, e indivisibles en partes: la mínima influencia puede causar cambios explosivos (por ejemplo. un matiz mínimo puede arrastrar al perro de la agresión a la fuga o de la fuga al ataque) No obstante, Thom halló un modo para representar tales sistemas como una totalidad. usando medición cualitativa de los pliegues topológicos.

El gran atractivo de la teoría de Thom reside en la capacidad para-comparar los cambios no lineales que acontecen en sistemas muy diferentes. Este es también el atractivo de la medición cualitativa denominada número de Lyapunov, inventada por el científico soviético de ese nombre. La medición de Lyapunov permite comparar las nubes, la actividad eléctrica del cerebro y la turbulencia de los ríos a partir de sus "*grados*" de orden y desorden.

Imaginemos una súper carretera con varios carriles. En medio del día, los coches circulan en una corriente constante, sin amontonamientos ni lagunas. En los carriles adyacentes circulan a diversas velocidades, pero la diferencia no es muy grande. Un camión que viaja a 80 km/h es alcanzado paulatinamente por un coche que viaja a 90 Como el flujo regular de un río, una característica de este movimiento es que los elementos vecinos (en este caso automotores) permanecen juntos o se separan sólo de forma gradual.

Ahora imaginemos la hora pico. El creciente flujo de automóviles crea condiciones caóticas semejantes a la turbulencia. Los coches aceleran y cambian de carril. Algunos se aglomeran, otros se internan en tramos desiertos de la carretera. Los coches vecinos se *pueden separar rápidamente cuando uno se interna en el carril libre y otro queda atrapado* en una larga fila.

El *número de Lyapunov mide cómo los puntos vecinos de un río*, una carretera o cualquier otro sistema dinámico se separan unos de otros. En consecuencia mide cómo se descomponen las correlaciones del sistema y cuán rápidamente se difunden los efectos de una pequeña perturbación.

Una medida similar describe los cambios en la información del sistema Por ejemplo, las posiciones relativas de todos los coches de la carretera se pueden monitoriar a través de una computadora minuto a minuto. Esta información define el flujo general del tráfico. Si el flujo es regular, los coches de cada carril mantienen casi la misma distancia relativa unos con respecto a los otros y la información cambia poco a poco o cambia de manera simple y regular. Pero durante la hora pico la información cambia desbocadamente. Los científicos dicen que la información original se "pierde", aunque sería más preciso pensar que se transforma.

Una analogía de esta pérdida o transformación es pasar un mensaje en inglés por una máquina de códigos que la convierte en letras o dígitos que aparentemente no significan nada. En un sentido, el significado del mensaje se pierde; en otro, simplemente se ha transformado, porque una transformación a la inversa podría decifrarla, restaurarla por completo. Sin embargo, las transformaciones de la información pueden volverse tan sutiles y complejas que revertir el proceso resulta imposible.

1.2 La autosimilitud

Cuatro científicos de la Universidad de California en Santa Cruz crearon un ingenioso método para calibrar el grado de orden de un sistema caótico que muchos tenemos en casa: un grifo que gotea.

¿Por qué este sistema es caótico? En un río turbulento cada elemento del flujo, cada pequeña parte, actúa como una contingencia para todas las demás partes. El rió genera sus contingencias a partir de su totalidad. Bajo ciertas presiones el agua que gotea de un grifo también genera contingencias. Así los cuatro científicos razonaron que al medir una parte o aspecto del agua que goteaba podrían obtener una instantánea del sistema entero. Y, al construir el espacio fase a partir de sus mediciones, podrían tratar de ver si el sistema sufría la influencia de un atractor extraño, e incluso obtener una imagen del atractor.

Para llevar a cabo este experimento, los investigadores pusieron un micrófono debajo del grifo, que goteaba, y registraron los intervalos temporales entre las sucesivas gotas, una medición del grado del caos. Escogieron medir este aspecto del sistema, aunque pudieron haber medido cuánto tardaban las gotas en formarse en el grifo o el peso relativo de las gotas.

Los investigadores colocaron los datos en una gráfica en intervalos de más de 4,000 gotas. El resultado fue sorprendente. Sería lógico pensar que algo puramente aleatorio produjera una forma caótica e imprecisa. Pero no fue así. Momento tras momento; mientras los científicos registraban el intervalo temporal entre las gotas, los puntos del grifo saltaban caóticamente. No obstante, a medida que aparecían más puntos en la gráfica, surgía una forma que se parecía al corte transversal de un atractor extraño conocido como el atractor de Hénon, es decir, un atractor generado mediante la iteración de una ecuación según reglas establecidas por Michel Hénon del Observatorio de Niza en Francia. Más tarde, cuando los científicos aumentaron levemente la presión del agua, hallaron formas, que parecían ser cortes transversales de otros atractores caóticos no vistos hasta el momento.

El atractor de Hénon *(figura 1)* invita a hacer comparaciones con los sistemas de anillos de un planeta de ciencia ficción. Pero sus fantásticos rasgos se revelan cuando nos aproximamos (por computadora) a examinar estos anillos. Como en la estructura de brechas y escombros de los muy reales anillos de Saturno, dentro de anillos atractor de Hénon aparece otra estructura anular, similar a la más grande. A la vez, si exploramos uno de los anillos menores más de cerca, se desplegarán más anillos.

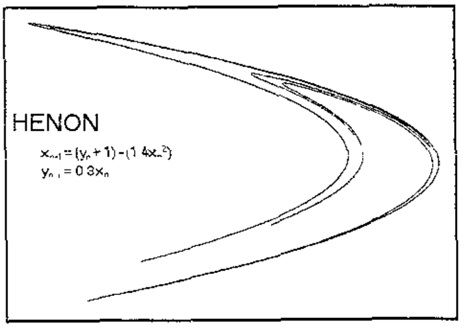


Figura 1. Atractor de Hénon para: $X_{n+1} = (Y_n + 1) - (1\ 4Xn^2)$, $Y_{n+1} = 0\ 3Y_n$ y para un valor inicial (1,1)

David Ruelle sugiere que:

"El atractor de Hénon (figura 1), el atractor de Rossler y el atractor de Lorenz (figura 2), atractores extraños de toda clase, son como cajas chinas de un orden sutil. Este extravagante orden de atracción existe en la fisura de las

cosas, inhibe un reino fraccional que existe entre la primera, segunda y tercera dimensiones del mundo familiar con sus puntos atractores, ciclos limitados y sus bien administrados toros"

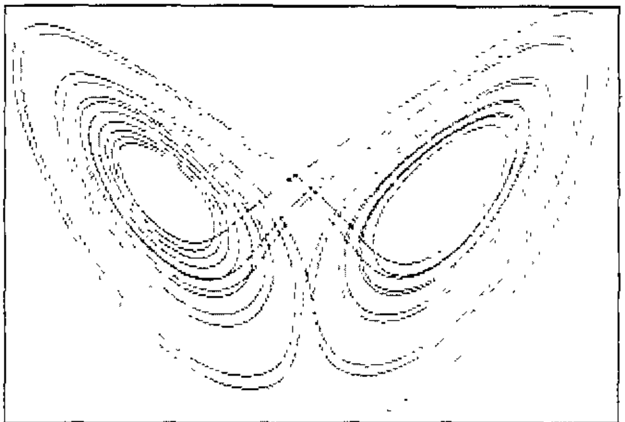


Figura 2 Atractor de Lorenz

1.3 El término "Fractal" o la nueva geometría de Mandelbrot.

Smale, Thom, Lyapunov, Ruelle y otros han creado importantes instrumentos cualitativos para ver el movimiento del orden, el caos y el cambio en el mundo no lineal. Pero más que ningún otro, un matemático ha revolucionado la ciencia de lo turbulento con su descubrimiento de la medición cualitativa.

La educación de Benoît Mandelbrot fue irregular y su mente tercamente visual. Mandelbrot declara que cuando se presentó para los cruciales exámenes de ingreso en la prestigiosa Escuela Politécnica de Francia tenía problemas con el algebra pero logró obtener excelentes notas traduciendo mentalmente las preguntas a imágenes.

Mandelbrot afirma que aún hoy ignora el alfabeto, de tal modo que usar el directorio telefónico es todo un problema para él, pero puede ver cosas que otra gente no ve. Dice por ejemplo:

> *"Yo no programo en las computadoras, pero encontré el modo de trabajar en forma muy interactiva con varias personas sobresalientes, estudiantes y asistentes, pero también colegas como Richard F Voss. En realidad he desarrollado capacidad para contribuir a eliminar los errores en los programas que no sé leer, analizando las imágenes erróneas que producen estos programas"*

Frustrado por la abstracta matemática que enseñaban en la escuela, el joven Mandelbrot cultivó la fascinación por la irregularidad geométrica, (o, mejor dicho, no geométrica) del mundo que le rodeaba. Lo impulsaba una intuición que luego plasmó en una frase:

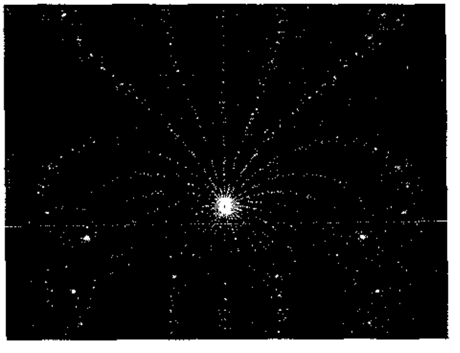
"Las nubes no son esferas, las montañas no son conos y la corteza no es lisa, así como los rayos no viajan en línea recta"

Durante sus años de estudio, Mandelbrot siguió una carrera tan irregular como las formas que lo apasionaban. Estudió aeronáutica en el Instituto de Tecnología de California, en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton recibió el patrocinio del brillante matemático John Von Newman, e investigó en diversos campos. Mandelbrot dice al respecto:

"De cuando, en cuando sentía el repentino impulso de abandonar un campo justo cuando estaba escribiendo un artículo, y me interesaba en investigar un campo acerca del cual no sabía nada. Seguía mi instinto, pero no pude explicarme por qué sino mucho más tarde"

En 1958 Mandelbrot llegó a ser miembro del personal de investigación del MIT y en 1974 se integró al prestigioso centro de investigación Thomas J. Watson de IBM, en Yorktown Heights. Allí, sus intuiciones empezaron a cobrar forma. Una geometría totalmente nueva surgió en su mente. Mandelbrot concibió el ***"fractal"***.

El nombre viene del latín ***fractua***, que significa ***irregular***, pero a Mandelbrot también le gustaban las connotaciones de fraccional y fragmentario que hallaba en la palabra.



En su entusiasmo inicial, usó fractales para seguir las oscilaciones bursátiles y elaboró falsificaciones que eran tan buenas como para engañar a expertos. Sus fractales demostraban que grandes recesiones imitaban las fluctuaciones mensuales y diarias de los precios, de modo que el mercado es autosimilar desde su escala mayor hasta la menor.

Volviendo al problema de los ruidos de transmisión de datos, Mandelbrot creó un modelo útil a partir de su nueva geometría; sin usar datos astronómicos, visualizó matemáticamente una distribución de las galaxias en el universo que los astrofísicos luego confirmaron.

"Llegué a comprender que la autosimilitud, lejos de ser una propiedad tibia y poco interesante, era un poderoso medio para generar formas"

La autosimilitud de Mandelbrot alude a una repetición se detalles en escalas descendentes.

Aunque Mandelbrot es un incansable misionero de los fractales, en la actualidad no son sólo necesarios. El físico teórico John Wheeler dice:

> "*En el pasado la gente no se podía considerar científicamente educada a menos que comprendiera la entropía. En el futuro uno será científicamente analfabeto si no está familiarizado con los fractales*".

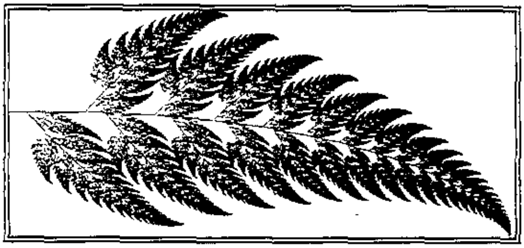


Figura 3. Fractal realizado en computadora
"Hoja de helecho"

La afirmación de Wheeler es un claro ejemplo de que Mandelbrot ha logrado comunicar su visión en los últimos años. Ahora no sólo esta claro que los fractales contienen las formas del caos y el ruido sino una amplia variedad de formas naturales que resultaban imposibles de describir mediante la geometría que se ha estudiado en los últimos 2.500 años: formas tales como líneas costeras, árboles, las montañas, las galaxias, las nubes, los polímeros, los ríos, los patrones meteorológicos, los cerebros, los pulmones y los suministros para alimentarlos. Mandelbrot aduce que la geometría euclidiana es tediosa. Para vengarse ha demostrado que la irregularidad es excitante y que no es sólo ruido distorsionado de formas euclidianas. Este ruido es en realidad la energía de las fuerzas creativas de la naturaleza

Tomemos, por ejemplo, nuestro sistema circulatorio. En un texto de anatomía, la repetida ramificación de las venas y arterias puede parecer caótica pero, si se le mira con mayor detalle, notamos que la misma y compleja ramificación se repite en vasos sanguíneos cada vez más pequeños, hasta llegar a los capilares. Lo mismo ocurre con la montaña. Visto desde kilómetros de distancia, el contorno de la montaña es muy reconocible, pero también es irregular. Cuanto más nos acercamos más detalles apreciamos, y cuando empezamos a escalar la montaña reparamos en el mismo patrón de irregularidad y detalles en cada roca individual. Los sistemas complejos de la naturaleza parecen preservar el aspecto de los detalles en escalas cada vez más finas. La cuestión de la escala surge nuevamente cuando observamos las maravillosas formas y estructuras de la naturaleza en un libro de fotografías tomadas a través de microscopios y telescopios. Las imágenes de escalas muy diferentes suscitan una sensación de similitud y reconocimiento.

¿Pero cómo puede algo que mide miles de años luz tener algo en común con objetos que caben en la mano o en la cabeza de un alfiler? ¿Es posible que leyes matemáticas similares, o principios de crecimiento y formas similares, estén operando en escalas tan distintas? Mandelbrot advirtió que, si en efecto era así, esas leyes debían de guardar poca relación con la geometría clásica, donde la escala es un concepto tan obvio que tiene poca o ninguna importancia. ¿Se podía crear una medida de la regularidad basadas en escalas?

El primer paso de Mandelbrot para examinar la cuestión de escalas y concretar su visión de un mundo irregular pero ordenado consistió en abordar ciertas curiosidades y anomalías de la matemática que habían aflorado a fines del siglo XIX y que los matemáticos habían desechado. ¿Era posible que rarezas matemáticas contuvieran importantes claves de la complejidad de la naturaleza?

En 1892 un matemático llamado Karl Weierstrass precipitó una crisis menor en la matemática cuando describió una curva que no se podía diferenciar matemáticamente. La aptitud para diferenciar (es decir, para calcular la inclinación de una curva de un punto a otro) es un rasgo central del cálculo. El cálculo fue inventado independientemente por Newton y Leibniz 200 años antes Weierstrass. Las nuevas leyes de la mecánica de Newton trataban sobre el cambio regular y las razones del cambio, y Newton necesitaba una matemática para describir diversas formas de cambio gradual; la halló en el cálculo.

La idea de inclinación es bastante intuitiva. Se experimenta cada vez que se escala una colina. La inclinación es lo mismo que un gradiente. En el caso de una vía ferroviaria, el valor del gradiente está a veces escrito en un letrero indicador, por ejemplo, 1:200. Esto significa que por cada 200 metros del riel la altitud aumenta en 1 metro. La inclinación o gradiente de una carretera puede ser aun más alta; en zonas montañosas, una carretera lateral puede tener un gradiente hasta de 1·6 o'1.5.

Desde luego, las carreteras no son perfectamente regulares y tienden a bajar y elevarse, así que el gradiente impreso en el nuevo mapa o indicado en la señal caminera es un valor promedio. Con exámenes topográficos más precisos, se puede determinar el gradiente en intervalos cada vez más pequeños y tener en cuenta las variaciones individuales de la carretera. El cálculo de Newton iba un paso mas allá. La ecuación matemática de la carretera ascendente determina la inclinación o gradiente de cada punto. Esta determinación es matemáticamente equivalente a diferenciar la ecuación de una curva.

Desde Newton, los matemáticos se han dedicado con toda satisfacción a diferenciar curvas y funciones y sus inclinaciones. Sin embargo, siempre había problemas cuando la curva era discontinua, es decir, cuando la carretera desaparecía de golpe y reaparecía más adelante. ¿Cómo podía tener una inclinación correcta en el borde donde terminaba la carretera? Al margen de esos casos especiales, todas las curvas se creía debían tener inclinación. En un lenguaje más formal, creían que una curva continua siempre se podía diferenciar.

El cálculo newtoniano pareció seguro hasta que a fines del siglo XIX el matemático Debois Reymond presentó la ecuación de Weierstrass para una curva que era continua, pero tan compleja que no podía tener una diferencial.

El resultado fue un pánico que los matemáticos tardaron cincuenta años en superar. Al final tuvieron que conceder que estas curvas anómalas podían existir, pero se consolaron pensando que una curva tan compleja y absurda no tenía nada que ver con el mundo real.

Otra bomba estalló alrededor de 1890 cuando Giuseppe Peano descubrió lo que llamó "curva que llena el espacio". Una curva es sólo una línea que se arquea y deforma, es unidimensional. Los matemáticos daban por hecho que toda curva, por mucho que se arqueara, tenía que ser unidimensional. Un plano es bidimensional. El plano y la curva tienen dimensiones muy claras.

No obstante, Peano había elaborado una curva que se torcía de un modo tan complejo que llenaba el plano. Esto creó una situación ingrata para los matemáticos. La *bidimensionalidad del plano residía en su conjunto de puntos. ¿Qué ocurría si todos esos puntos también estaban en una línea unidimensional?* ¿Cómo podía un objeto ser unidimensional y también bidimensional?

Nicolai Yakovvlevich, en su libro Cuentos de Conjuntos, evoca la reacción de los matemáticos.

"¡Todo se había desquiciado!"

Es difícil expresar el efecto que el resultado de Peano tuvo en el mundo de la matemática. Parecía que todo estaba en ruinas, algunos conceptos básicos de la matemática habían perdido su significado.

Estas ultrajantes curvas sin inclinación y con dimensiones ambiguas eran perturbadoras. La única esperanza de los matemáticos consistía en desechar tales cosas, una broma matemática que no planteaba ninguna amenaza al modo ordenado en que la matemática y la geometría describían la naturaleza. *Aún el gran Poincaré adoptó esa actitud* defensiva. Dijo que esas extrañas curvas eran:

"Una galería de monstruos"

No obstante, setenta años despues de Peano, Mandelbrot tomó esas curvas en serio y siguiendo las implicaciones pudo trastocar la situación. Demostró convincentemente que las curvas monstruosas no eran ajenas a la geometría del mundo, sino todo lo contrario. En ellas residía el secreto del modo de medir la irregularidad del mundo real. El secreto de los fractales.

¿Qué es una figura fractal y cómo está hecha? *El cuadro (figura 4)* muestra la generación de un fractal originado en la curva *"copo de nieve"*, elaborada por la matemática sueca Helge Von Koch en 1904. Para dibujarla basta tomar un triángulo equilátero como en la figura inicial y añadir en el centro de cada uno de sus lados un nuevo triángulo equilátero tres veces más pequeño que el original. Repitiendo indefinidamente este proceso se obtiene el fractal *(que puede observarse en la parte de debajo de la figura 5)*. Esencialmente, la *"isla de Koch"* o *"copo de nieve"* se crea mediante un proceso de iteración en el cual cada paso se sigue a una escala más pequeña. De este modo se produce una curva considerablemente compleja, la cual tiene mucho grado de detalle.

Con sus muchas bahías y caletas, las islas de Koch nos recuerdan las islas reales, excepto que son demasiado regulares. Para describir islas verdaderas se requieren fractales más complejos. Pero, al menos la isla de Koch muestra un grado de complejidad totalmente ajeno a la geometría convencional.

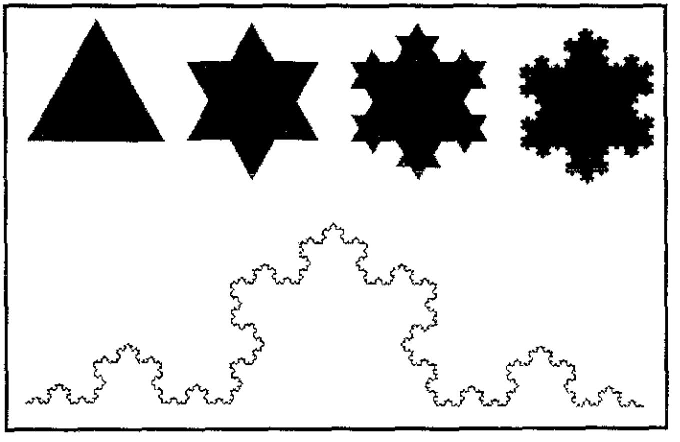


Figura 4. Fractal "Copo de Nieve o Curva de Koch"

1.4 ¿Cuál es la Longitud de la línea costera de la Gran Bretaña?

Para un matemático esta figura también reserva sorpresas menos obvias. La primera se produce cuando se realiza un intento de medir el perímetro de la isla, es decir, descubrir la longitud de la línea costera.

Esto se puede plantear como una pregunta que alude al mundo real: ¿Qué longitud tienen la línea costera de Gran Bretaña? Esta fue la pregunta que Mandelbrot formuló en su clásico libro. Esta pregunta le dio renombre.

Desde luego, los países desean saber la longitud de sus líneas costeras y límites. Cuando se traza un límite entre dos países digamos entre México y Estados Unidos o entre Francia y España, es conveniente que ambas partes estén de acuerdo acerca de la longitud. A primera vista puede parecer un problema sencillo con una solución sencilla: basta con medir. Pero las publicaciones y textos de geografía dan un kilometraje diferente para misma línea costera o límite ¿cómo es posible? ¿Es un problema de negligencia en la medición? ¿Un mal cálculo?.

Cabe pensar que la cuestión de la longitud de la línea costera británica se puede solucionar tomando un buen mapa y llevando un hilo a lo largo de la costa, y deduciendo luego el resultado a partir de la escala impresa en el mapa: pero si tomamos un instante de reflexión observaremos que el mapa tiende a simplificar u omitir detalles. Sólo nos da las curvas amplias de la costa y excluye las muchas bahías y caletas.

La respuesta debe estar en obtener un mapa más detallado. En ese caso, el hilo se curvará y torcerá alrededor de más detalles. Pero esto significa que la longitud de la línea costera será mayor. ¿Se puede mejorar este resultado? Si un topógrafo hace una medición precisa en, digamos, intervalos de 100 metros a lo largo de la costa, el detalle será aún más fino. A la vez la línea costera tendrá mayor longitud.

¿Pero por qué detenerse hasta aquí? ¿Por qué no medir en intervalos de 50 metros, y aun de 10? En cada etapa incluiremos más y más detalles, cada vez más finos y el hilo se curvará de modos cada vez más complejos. Cuantos más detalles incluimos más larga se vuelve la línea costera. ¿Y si incluimos todos los detalles, rocas, polvo, aun moléculas? La verdadera línea costera debe ser infinita. En realidad la línea costera de la Gran Bretaña tiene la misma longitud que la de Manhattan o la de Baja California o la de todo el continente americano. Todas son infinitas.

Tal era la desconcertante conclusión a la que llegó Mandelbrot. ¿Pero cómo puede ser esto cierto? Si pensamos en que cualquier figura que tenga detalles en escalas cada vez más pequeñas debe tener una longitud infinita (*figura 5*). Por tanto, lo que se aplica a la línea costera de la Gran Bretaña también se aplica a la longitud de la curva de Koch, y a todas las curvas fractales.

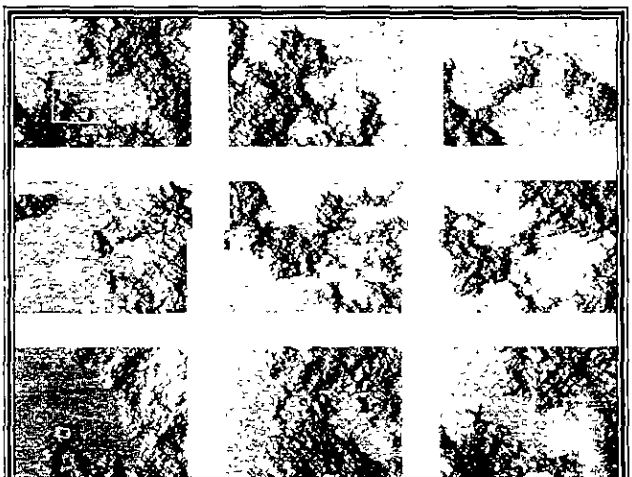


Figura 5. Imagen de una Costa Fractal, realizada mediante computadora, donde la dimensión fractal resulta constante. En el recuadro superior de la izquierda podemos hacer un acercamiento (recuadro en blanco), este acercamiento aparece en el siguiente recuadro (a la derecha) se hacen acercamientos de izquierda a derecha, de arriba a bajo. Aquí pueden apreciarse con mayor exactitud los relieves.

En la práctica podemos convenir en una escala convencional e ignorar todos los detalles por debajo de 100 metros o cualquier otra cifra. Ello equivale a tener una línea costera borrosa. Si los cartógrafos adoptan una escala común, pueden medir y comparar líneas costeras. Aunque esto deja mucho que desear desde el punto de vista matemático.

Como matemáticamente todas las líneas costeras con sus detalles reales deben tener una longitud infinita. ¿Se pueden comparar dichas cifras? Más sorpresas, pues Mandelbrot descubrió que la respuesta era sí. Sin embargo, la respuesta modifica la pregunta pues ya no se trata de medir la longitud cuantitativamente sino de una nueva clase de medida cualitativa basada en escalas: la dimensión fractal.

Para entender las dimensiones fractales tenemos que olvidar nuestras ideas convencionales de las dimensiones. La mayoría de las personas creen tener una idea bastante clara del concepto. El espacio tiene tres dimensiones, es tridimensional. Una pared, mesa o papel son bidimensionales. Una línea, curva o borde son unidimensionales. Y por último, un punto e incluso un conjunto de puntos tienen una dimensión cero.

Las dimensiones que encontramos en la vida cotidiana no tienen vueltas: 0, 1, 2 ó 3. ¿Pero las cosas son de verdad tan simples? ¿Cuál es, por ejemplo, la dimensión de un ovillo de hilo?

Desde lejos el ovillo luce como un punto y por tanto tiene una dimensión cero. Pero a pocos metros de distancia todo vuelve a la normalidad y el ovillo es tridimensional. ¿Pero que ocurre si nos acercamos mucho? Vemos el hilo curvado sobre sí mismo. El ovillo está compuesto por una línea curva, y por tanto, es unidimensional. Desde más cerca, esta línea se convierte en una columna de grosor infinito, y el hilo se vuelve tridimensional. Desde más cerca vemos las hilachas finas que se tuercen unas alrededor de otras para formar el hilo: el ovillo ha vuelto a ser unidimensional.

En otras palabras, la dimensión efectiva del ovillo sigue cambiando de tres a uno, una y otra vez. Su dimensión aparente depende de nuestra cercanía. La dimensión no es tan simple como parece a primera vista. Tal vez todas las dimensiones de la naturaleza sean tan engorrosas como está; depende de cómo las miremos.

Mandelbrot ha llegado al extremo de afirmar:

> " *La geometría fractal, cuando ilumina la inextricable relación entre el objeto y el observador, se corresponde con los otros grandes descubrimientos científicos de este siglo, la relatividad y la teoría cuántica que también descubrieron una interdependencia entre el observador y lo observado* "

La medida cuantitativa (en la que se basaba la ciencia) también queda en entredicho. La longitud de una línea costera depende de la cantidad que escojamos para medir. Si al final la cantidad es un concepto relativo (siempre implica perder de vista algunos detalles) entonces es mucho menos precisa de lo que creíamos. En lugar de una cantidad tal como la longitud, Mandelbrot propone una medición cualitativa de dimensiones fractales efectivas, una medida del grado relativo de complejidad de un objeto.

Aunque al principio resulte desconcertante admitir que los objetos naturales tienen *dimensiones efectivas, el concepto permite elaborar una dimensión fractal para una línea* costera y descubrir que éste es un número fraccional mayor que uno. Si una curva o una dimensión fractal de la línea costera está cerca de uno, la costa es poco accidentada y no tiene detalles finos. Cuanto más se aleje este número de uno. más irregular o caótica será la línea costera y esta regularidad persistirá en escalas cada vez más pequeñas.

¿Cómo se conectan la irregularidad y el detalle con la dimensión fractal? *Imaginemos que esparcimos granos de arroz en forma uniforme sobre un mapa.* Digamos que hay 10.000 granos y que esta cantidad caracteriza la bidimensionalidad del mapa. Una línea recta trazada a través de la página atraviesa sólo 200 granos, así que solo el 2% de los granos está sobre la línea. La gran mayoría se encuentra en otras regiones del plano. Pero ahora supongamos que la línea serpentea de tal modo que atraviesa cada vez más granos de arroz, llegando no sólo a los granos de arroz sino incluso a los puntos individuales del plano A medida que se cruzan más y más granos, es evidente que la dimensión de la línea *se acerca más a la de un plano que a la de una línea.* De hecho, *las líneas fractales curvas* tienen dimensiones fraccionales, tales como 1.2618, 1 1291, 1.3652 y demás. La línea costera de Gran Bretaña tiene una dimensión fractal de 1 26.

Ahora podemos comprender mejor la curva fractal creada por Peano. Esta curva se ha vuelto tan irregular a escalas infinitamente decrecientes que su dimensión fractal es 2. ¿Por qué 2? Porque la línea de Peano tiene tantas sinuosidades que alcanza todos los puntos *del plano. Sin embargo, a pesar de su extrema complejidad, de su autocontacto, nunca se* cruza consigo misma.

Los fractales se suelen caracterizar por los infinitos detalles, la infinita longitud, la carencia de inclinación (dimensión derivativa, fraccional) y la autosimilitud, y se pueden generar por iteración (como se hizo para producir la curva de Koch).

Esta es la razón del por qué los fractales y los atractores extraños están tan íntimamente relacionados. Recordemos que en un espacio de fases un atractor extraño está representado por el punto que representa el sistema. En su movimiento, el punto del sistema se pliega y repliega en el espacio fase con infinita complejidad. Así, un **atractor extraño es una curva fractal**. Las formas fractales tienen autosimilitud en escalas descendientes. En los sistemas que se pliegan y estiran bajo la influencia de un atractor extraño todo movimiento simple de plegamiento del sistema representa un espejo de toda la operación *del plegamiento.*

Dondequiera que hallemos caos, turbulencia y desorden, la geometría fractal esta en juego.

Pero esto sugiere la asombrosa conclusión de que el caos y la turbulencia tienen que nacer de los mismos procesos subyacentes que generan montañas, nubes y líneas costeras, o *formas orgánicas naturales tales como pulmones, sistemas nerviosos y sistemas* circulatorios. Ahora podemos entender las complejas ramificaciones de un pulmón humano como un reflejo del movimiento caótico de un río en rápido flujo. Ambos emergen de un orden fractal.

En general se ha creído que las formas complejas eran generadas por un proceso complejo. Por ejemplo, se entiende que la complejidad del cuerpo humano es una manifestación de muy sofisticadas instrucciones para el crecimiento y el desarrollo. Pero los fractales son muy complejos y muy simples al mismo tiempo. Son complejos en virtud de sus infinitos detalles y sus singulares propiedades matemáticas (no hay dos fractales iguales), pero son simples porque se pueden generar mediante sucesivas aplicaciones de iteración simple.

1.5 La dimensión fractal

Establecer la dimensión de un objeto a "simple vista" como hemos visto en un ovillo de hilo, las cosas son mucho más complejas de lo que parecen, un trozo del mismo hilo sería un buen ejemplo de unidimensionalidad y una hoja de papel de una forma de dos dimensiones. Sin embargo, si se nos pide definir un mecanismo práctico para verificarlo nos encontramos en aprietos. Además ¿Es lo mismo una hoja de papel lisa que una arrugada?. Si el hilo es de longitud infinita ¿No podríamos cubrir todo el plano?. En fin, es mejor tratar de definir un método para obtener respuestas sin dejar lugar a dudas.

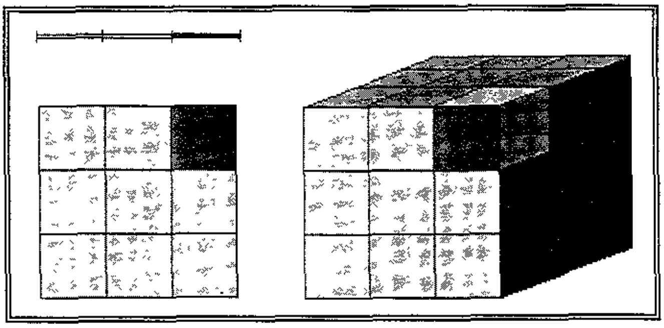


Figura 6 *Tapete de Siepinsky, primero iniciamos con una recta que dividimos en tres partes iguales, proceso análogo seguimos para un cuadrado y finalmente para un cubo*

Tomemos primero el hilo, el cual representaremos una recta de longitud L = 1m, por ejemplo, y dividámoslo en tres pedazos iguales de l = 1/3m de extensión *(figura 6, parte superior)* En este caso, el número de particiones que se generan (N) se obtiene de determinar cuántas veces cabe una parte l en el total L

$$N = L / l = (L / l)^1 = 3$$

Si repetimos este proceso sobre la hoja de papel a la que consideraremos como un cuadrado de lado L = 1m, al que seccionaremos en nueve cuadrados más pequeños de lado l = 1/3m y área l^2= 1/9m^2 *(figura 6)*, el número de particiones será $N = L^2 / l^2 = (L / l)^2 = 9$.

La extensión directa de los resultados anteriores al caso tridimensional nos llevará a suponer *que aquí debe cumplirse que* $N = (L / l)^3$ (parece que basta elevar L / l a una potencia igual a la dimensión de la figura), lo que se verifica en la figura *(figura 6)*.

Al dividir cada lado del cubo entre tres $l = L/3$, se generan $N = L^3 / l^3 = 27$, pequeños cubos de volumen l^3.

Si generalizamos las dimensiones obtenidas podemos decir que en un proceso de división como el descrito, el número de secciones generada está dado por $N=(L / l)^{d_f}$, donde d_f es lo que denominaremos la dimensión de Hausdorff del objeto; hay que notar que la misma relación debe cumplirse tanto si decidimos seccionar el objeto total como cualquiera de sus partes

Encontramos así una estrategia para cuantificar la dimensión de cualquier forma geométrica, pues si $N= (L / l)^{d_f}$, despejando d_f:

$$d_f = \log(N) / \log(L / l)$$

Por ejemplo, al tomar el triángulo equilátero de lado $L= 1$ *y dividirlo en secciones* de la mitad de extensión ($l = ½$; $N = 2$), como se muestra en la figura *(figura7)*.

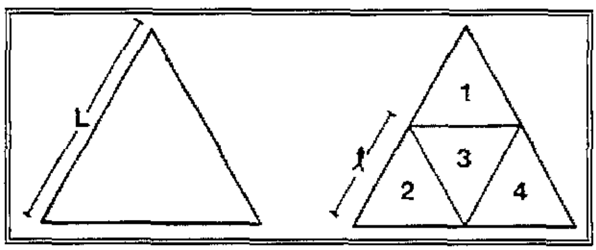


Figura 7.

Se obtienen cuatro particiones idénticas (N=4); de donde de deduce que como $d_f = \log(4)/ \log(2) = 2$, tratamos con un objeto bidimensional.

Apliquemos entonces nuestro resultado a la curva de Koch. En este caso, y a toda escala sobre la figura, una recta de longitud L es dividida en secciones de un tercio de extensión, $l = L/3$ y en este proceso se generan cuatro particiones de tamaño similar (N= 4 pues generamos un pico, como se muestra en la figura *(figura 8)*

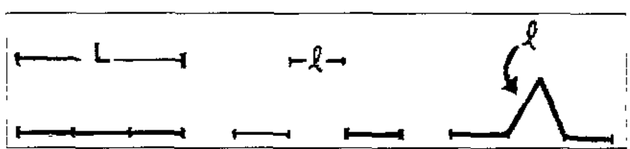


Figura 8.

Así tenemos $d_f = \log(4)/\log(3) = 1.2619$, ¡un objeto de dimensión fraccional! El resultado es desconcertante pero indiscutible, y es una evidencia más de la singularidad de la forma geométrica que estudiamos. La dimensión de Hausdorff definida de esta manera es una medida de la complejidad y rugosidad del cuerpo, y nos da una idea de su extensión real en el espacio. El copo de nieve de Koch cubre más espacio que una recta. pero mucho menos que un plano.

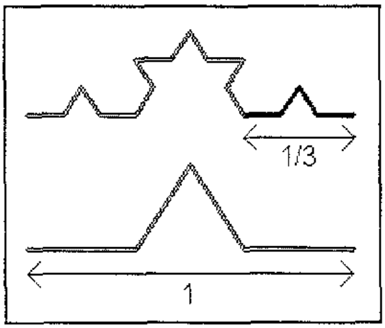


Figura 10. Primeros pasos para la curva de Koch, con cada uno de los lados de la figura de abajo, repetimos el mismo proceso de la figura 8, dividimos cada segmento en tres segmentos iguales, extraemos el de en medio y ahí dibujamos un triángulo equilatero in base, el proceso es análogo para cada uno de los lados

2. DIFERENTES CLASES DE FRACTALES

2.1 Un fractal muy sencillo, el tapete de Sierpinski

Otros "montruos" como la curva de Koch exhiben dimensiones fraccionales distintas y cada uno de ellos tiene una dimensión de Hausdorff que lo caracteriza. Tal es el caso de las figuras de Sierpinski *(figura 11)*.

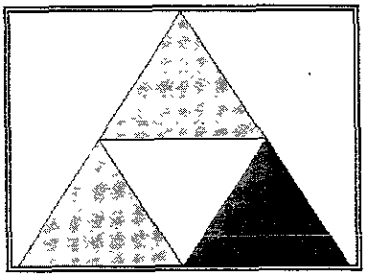


Figura 10. Iniciador del triángulo de Sierpinsky

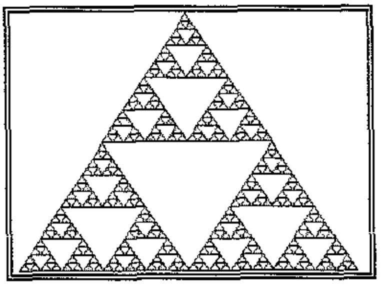


Figura 11 Triángulo de Sierpinsky

El triángulo de Sierpinski es el resultado de seccionar a toda escala un triángulo equilátero en cuatro porciones similares cuyos lados son tan sólo la mitad de la figura original ($L / l = 2$). Una vez hecho esto, se extrae la sección central, de forma que queden las tres partes de los vértices (N=3), y sobre estas se actúa de la misma manera (*figura 10*).

Este proceso se repite en cada una de las partes restantes y así se procese hasta el infinito; el resultado es similar al que aparece en la figura (*figura 12*), aunque no hay pluma que permita dibujar la estructura con todo detalle. La dimensión de Hausdorff de la figura se obtiene considerando que cada vez la longitud del triángulo se reduce a la mitad, aparecen tres triángulos más, por tanto, $d_f = \log(3)/ \log(2) = 1.584$.

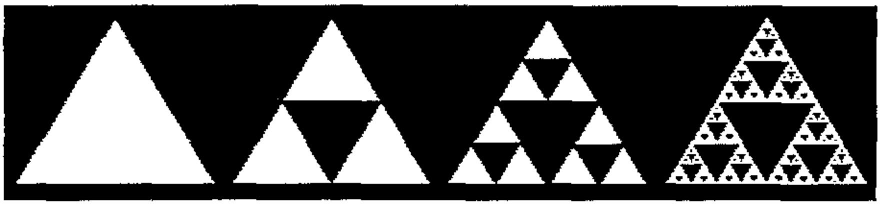


Figura 12 Triángulo de Sierpinsky

De forma análoga puede construirse la *carpeta o tapete* de la *figura 13*, si la iteración consiste en dividir a todos los niveles un cuadrado en secciones de un noveno de área ($L / l = 3$), eliminamos la partición de centro, como se muestra en la *figura 13*.

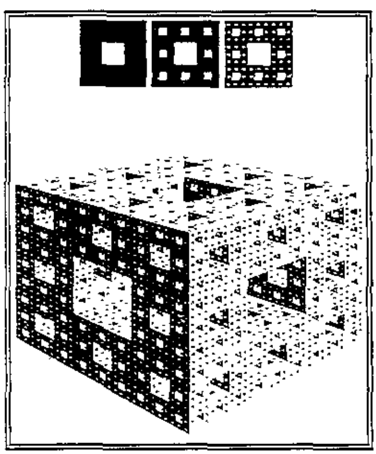


Figura 13. Carpeta de Sierpinsky

Finalmente se obtiene una forma geométrica cuya dimensión también es fraccional: $d_f = \log(8) / \log(3) = 1.893$.

Comparando los resultados obtenidos para las tres figuras estudiadas podemos observar que la dimensión de Hausdorff cuantifica hasta que punto el objeto cubre el espacio en el que se encuentra inscrito: mientras la curva de Koch mal- cubre el plano $d_f = 1.263$, el tapete de Sierpinski, $d_f = 1.893$, lo logra completamente. También hay formas de quedarse a la mitad del camino. ¿Podríamos imaginar la estructura final que se obtendría de seguir reproduciendo a toda escala la greca siguiente? ¿Cuál sería la dimensión del objeto generado?

Si este esquema, de repetir el mismo patrón en todas partes dentro de una figura se extiende a objetos definidos en el espacio de tres dimensiones, es claro que el número de monstruos que se pueden construir resulta ilimitado.

2.2 El polvo de Cantor

Hoy en día se han identificado innumerables manifestaciones naturales de estructuras fractales. Se sabe que su geometría está presente en depósitos y agregados coloidales (como los generados por polvo y smog), poliméricos y electroquímicos; en aparatos y sistemas de los seres vivos, como los vasos capilares, tubos intestinales, biliares y bronquiales, y en redes neuronales. De manera similar, hay evidencia de que la localización geográfica de epicentros en temblores exhibe un patrón fractal y en la actualidad la dimensión fraccional (dimensión fractal) de la superficie irregular de una falla en un material ya se utiliza como medida indirecta de su resistencia y dureza.

Los fractales mostraron su utilidad por primera vez cuando se generó con ellos un modelo simple para la aparición de *ruido* en ciertas líneas de transmisión en sistemas de comunicación digital; esto es, la presencia de breves interrupciones eléctricas que confunden y dificultan la comunicación. El análisis de señales demostró que las interrupciones aparecían por paquetes, pero dentro de estos paquetes se distinguía una estructura intermitente, y dentro de ésta otra… ya podemos imaginar la historia. Un registro gráfico de las interrupciones dio lugar a un patrón fractal similar al que se obtiene a través del siguiente procedimiento. Tomamos una recta de longitud L y la seccionamos en tres partes idénticas ($l = L/3$), extrayendo después la sección central (N=2), como se muestra en la *figura 14*.

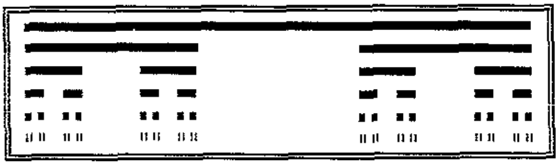


Figura 14 Polvo de Cantor

Cuando el procedimiento se repite a toda escala, como en la *figura 14*, se obtiene el fractal conocido como *"Conjunto o Polvo de Cantor"* en honor a su creador, el matemático alemán Gerog Cantor famoso por su desarrollo de la teoría de conjuntos. Este "monstruo" fue dado a conocer por primera vez en 1883 y cien años después se ha decidido a aparecer por todas partes.

El conjunto de Cantor tiene una dimensión de Hausdorff menor que la unidad, pues cada vez que la longitud de un segmento se reduce a su tercera parte, sólo aparecen dos trozos más, $d_f = \log(N) / \log(L / l) = \log(2) / \log(3) = 0.6309$. En otras palabras, es una colección de puntos, pero es menos que una línea. Es uno de los fractales más famosos a pesar de no ser muy atractivo visualmente. Su estructura esta detrás de varias cosas en el mundo real y así se ha utilizado como modelo para representar desde la distribución de los anillos de Saturno y las fluctuaciones en el precio del algodón a partir del siglo pasado, hasta las variaciones en el nivel de las aguas que el río Nilo ha experimentado desde hace 2000 años. Más aún, cuando la idea que subyace en la construcción de este conjunto se extiende a tres dimensiones, el patrón que se genera coincide sorprendentemente con la distribución de las estrellas y de las galaxias en el universo.

Es importante señalar que los fractales que existen en la naturaleza tienden a ser irregulares y son autosimilares sólo en sentido estadístico; esto es, si tomamos un número suficientemente grande de objetos de la misma clase y amplificamos una porción de alguno de ellos, es posible que no sea idéntico al original, pero seguramente si será similar a algún otro miembro de la colección. Su dimensión es fraccional pero se obtiene realizando procedimientos sobre sus valores en muchas regiones y para muchos cuerpos del mismo tipo. Cuando se amplifica una de las partes de un fractal natural, la propiedad de generar la misma figura, o alguna similar, tiene límites inferiores y superiores. Por ejemplo, al observar el perfil de una montaña, el tamaño de los objetos más grandes está determinado por la fuerza de gravedad, mientras que la menor escala de observación a la cual todavía se detectan los detalles depende de la acción de la erosión y, por supuesto, del tamaño de los atomos. Los fractales son, en ese sentido, sólo una buena aproximación de la estructura de las formas naturales.

El mundo de los fractales está en pleno desarrollo en la actualidad. Así como la naturaleza parece haberlos elegido para generar formas complejas y únicas a través de mecanismos de repetición muy simples, los seres humanos se sirven de ellos para almacenar y reproducir imágenes, hacer modelos teóricos y experimentales de cuerpos irregulares, analizar las características de pulsos cardiacos y nerviosos, desenmarañar la estructura de procesos dinámicos caóticos.

2.3 Definiendo... "fractal"

Cuando Benoît Mandelbrot publicó en 1975 su primer ensayo sobre fractales no se atrevió realmente a dar una definición matemática formal que caracterizara a estos objetos; decidió simplemente utilizar el término para denominar a las formas que compartían la característica común de ser a la vez *rugosas y autosimilares*. Mandelbrot buscaba otorgarles una categoría intermedia entre los cuerpos euclidianos regulares y lisos que no son comunes (círculo, triángulo, esfera, etc.), y las figuras que hoy en día se denominan *geométricamente caóticas* y cuya apariencia es rugosa, pero sin exhibir ningún patrón geométrico regular.

Hacía 1977; el matemático se vio forzado a dar una definición formal que permitiera distinguir con más claridad una entidad fractal. Para hacerlo recurrió al antiguo concepto de dimensión de Hausdorff y en respuesta al pragmatismo definió, en general a los fractales como:

"El conjunto de formas que tienen dimensión fraccional"

Mandelbrot era perfectamente consciente de que esta definición, si bien establecía una frontera bien delineada entre la geometría euclidiana de los conos y las esferas (en la que los cuerpos tienen una dimensión de Hausdorff entera), dejaba una puerta abierta hacia la región del caos geométrico. Sin embargo, a la espera de mejores definiciones, inició el trabajo que con hechos y con el lenguaje de las imágenes le mostraría al mundo el verdadero significado del termino *"fractal"* . Sus resultados abrieron la puerta de un mundo impresionante donde habita el verdadero sentido de la palabra obsesión y donde la matemática se confunde con el arte.

2.4 Los conjuntos de Julia

El trabajo pionero en el juego de hacer iteraciones con números complejos fue desarrollado por dos matemáticos franceses, Gaston Julia Y Pierre Fatou, a principios de nuestro siglo. Sus resultados fueron la base sobre la que se construyó la revolución fractal de los ochenta. En particular, Benoît Mandelbrot recuperó su análisis sobre el comportamiento de los números complejos cuando la iteración consiste en elevarlos al cuadrado y sumar una constante al resultado. Simbólicamente diríamos:

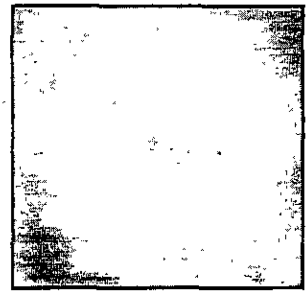
$$Z_{n+1} = Z^2_n + C$$

Donde C es la constante y también es un número complejo. Las órbitas que se generan son secuencias de números complejos y sus características dependen fundamentalmente de los valores del punto inicial z_0 del que se parte y la constante C seleccionada.

Por ejemplo, si el punto inicial es $z_0 = (1 + 0i)$ y la constante $C= 1i$, al hacer la iteración tenemos:

$z_1 = z_0 + C = (1 + 0i)(1 + 0i) + i = (1 + i)$
$z_2 = z_1 + C = (1 + i)(1 + i) + i = 3i$
$z_3 = z_2 + C = (3i)(3i) + i = (-9 + i)$
$z_4 = z_3 + C = (-9 + i)(-9 + i) + i = (80 - 17i)$

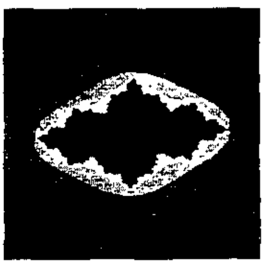
Y así sucesivamente hasta detectar la naturaleza del atractor.



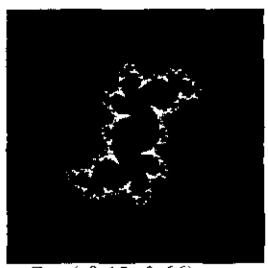
En este caso, cuando se representa la órbita sobre el *plano complejo se ve que la iteración nos aleja cada vez más* del origen (0,0) sin acercarse a ningún número complejo determinado. Decimos entonces que el atractor es infinito $z \to \infty$

Desde 1906, Fatou había demostrado que para cada valor de C, la aplicación de esta iteración sobre los puntos en el plano complejo genera órbitas que en su mayoría terminan en $z \to \infty$, salvo para un conjunto bien definido de puntos, en estos casos, la iteración detecta puntos fijos, órbitas periódicas donde se repite la misma secuencia de números después de cierta cantidad de iteraciones, o puntos que escapan hacia atractores finitos. A este tipo de puntos se les llama *"prisioneros"* mientras que los otros son *'escapistas"*

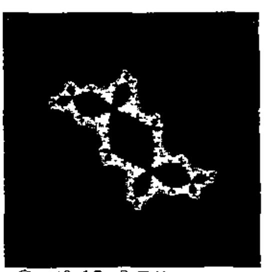
Todos los puntos prisioneros pertenecen al conjunto de Julia. El conjunto, en sí sólo está constituido por la curva que separa a los prisioneros de los escapistas; los puntos del conjunto de Julia también son prisioneros.



C = (0.12, 0.57)

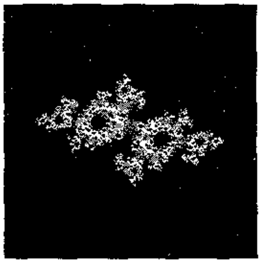


C = (-0.12, 0.66)



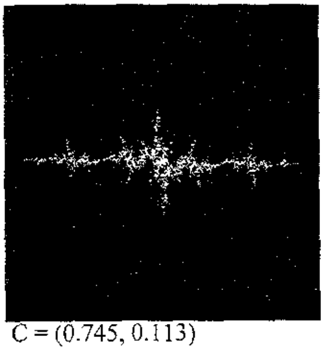
C= (0.12, 0.74)

C = (-.25, 0.74)

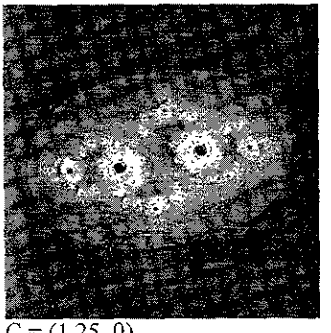


C = (-0.194, 0.6557)

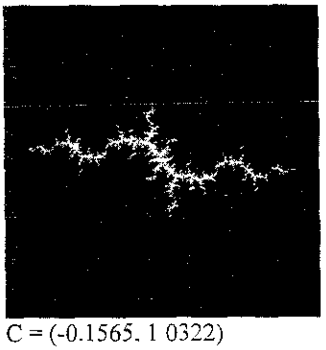
Figura 17. *Conjuntos de Julia asociados con la iteración* $Z_{n+1} = Z^2 + C$



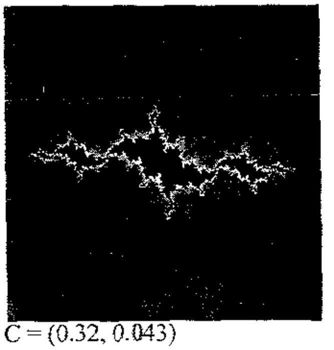
C = (0.745, 0.113)



C = (1.25, 0)



C = (-0.1565, 1 0322)



C = (0.32, 0.043)

Figura 16 Conjuntos de Julia asociados con la iteración $Z_{n+1} = Z^2_n + C$

Para localizar los puntos que conforman el conjunto de Julia para una C dada, hay que recorrer el plano complejo buscando la frontera donde se pasa de tener órbitas que se disparan al infinito, a la región donde esto ya no sucede. En la figuras (*figuras 15 y 16*) se ilustra el tipo de resultados que se generan.

Una observación cuidadosa del borde de estas figuras, revela un hecho fundamental: la frontera o conjunto de Julia es un fractal y la curva total puede ser generada por cualquier trozo que de ella se elija. Esto es, el detalle del contorno se conserva a escala y de nuevo nos encontramos con una estructura autosimilar. Muestra de ellos son las ampliaciones de los detalles arbitrariamente seleccionados de las figuras (*Figura 17*) que se presentan las figuras (*figura 17 (C1 y C2)*), respectivamente. Como puede verse la estructura de la frontera se repite a cualquier nivel de ampliación, y toda la información sobre geometría del conjunto está codificada en el trazo de un solo punto sobre el papel.

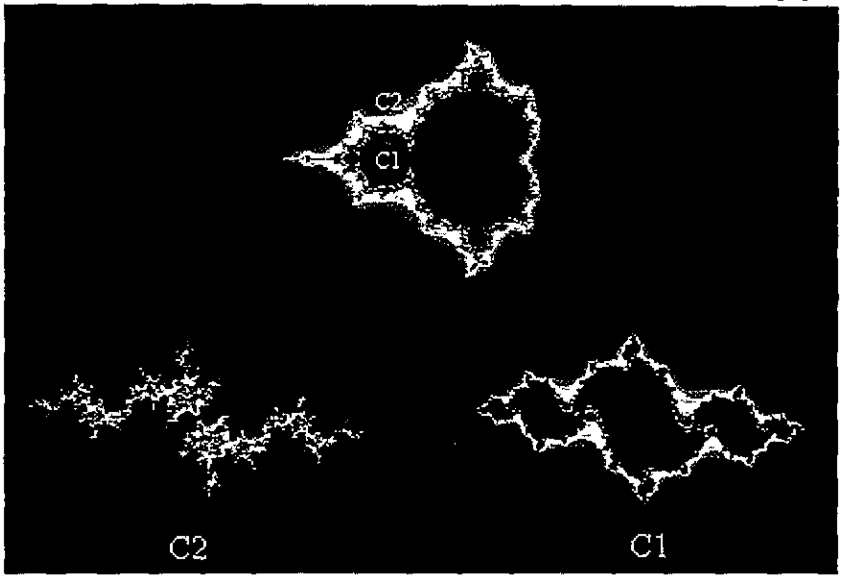


Figura 17. Conjunto de Julia con sus respectivas aproximaciones

La belleza de la representación gráfica de los conjuntos de Julia fue puesta en evidencia hace no más de 17 años por J.H. Hubbard matemático de Corenell, quién para hacerlo se sirvió de los grandes adelantos computacionales de la época. El trabajo de Hubbard y Mandelbrot mostró la enorme riqueza de comportamientos que se pueden generar, y la marcada susceptibilidad de la estructura del conjunto ante ligeras variaciones del parámetro complejo C

Ante un mundo de posibilidades como esté lo primero que se nos puede ocurrir es intentar hacer una clasificación. Pero, ¿cómo organizar formas que contienen tanto detalle?. ¿en que propiedad común podemos basarnos? Además hay que considerar que cada valor C da lugar a un conjunto de Julia distinto. ¿cómo clasificar entonces un número infinito de formas? La respuesta a estas preguntas fue dada en 1980 por Benoît Mandelbrot y las conclusiones que obtuvo son muestra clara de su intuición visual.

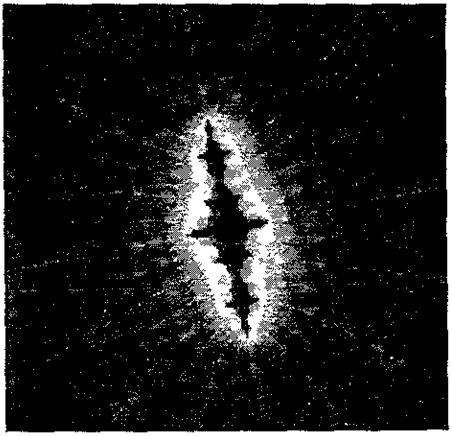
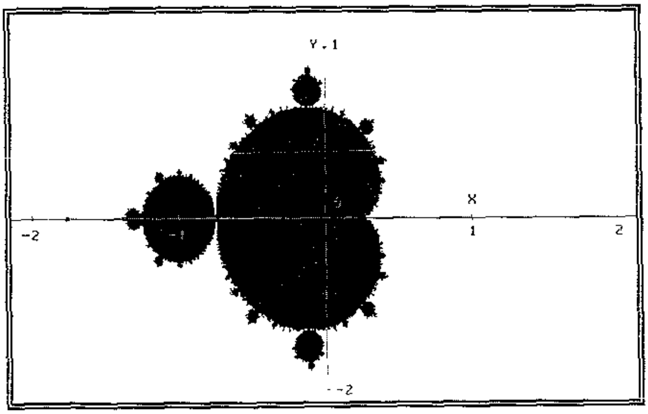


Figura 18. Conjunto de Julia, vista completa

2.5 El fractal de Mandelbrot $Z^2 + C$



Al comprender que los fractales se generan mediante iteraciones simples, Mandelbrot sintió el inevitable deseo de practicar la geometría iterativa en el universo de la matemática pura. Mandelbrot dice que en 1980 recibió la inspiración para ello al leer algunas referencias, en una vieja biografía de Poincaré, acerca de un problema que una vez había enfrentado. Mandelbrot abordó el mismo problema usando su nueva geometría. El resultado fue como desenterrar un diamante, aunque en este caso el diamante fue un asombroso atractor extraño matematico.

Del análisis de las *figuras 15 y 16* se hace evidente que existen dos clases principales de conjuntos de Julia: aquellos para los cuales el cuerpo está formado por una sola pieza (el área del cuerpo se dice *conexa*, y otros en los que el cuerpo está desmembranado en infinitas colecciones de puntos más o menos aisladas (el área del cuerpo es *disconexa*, A estos últimos también se les llama conjuntos de Cantor o polvos de Fatau.

Esta distinción geométrica da pie a la posibilidad de separar los valores del parámetro complejo C en dos conjuntos bien diferenciados· Los que en la iteración $z_{n+1} = z^2_n + C$ dan lugar a figuras conexas, y aquellos que en el proceso generan formas disconexas.

En principio, el trabajo de construirlos puede parecer una locura, pues se necesitaría analizar las posibilidades de un número infinito de sistemas. Sin embargo, para hacerlo, Mandelbrot aprovechó un teorema probado de manera independiente por Julia y Fatau alrededor de 1919.

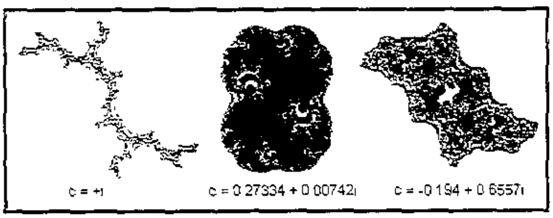
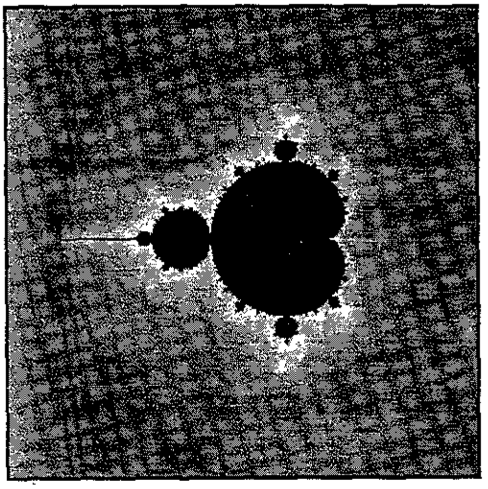


Figura 19. Deferentes gráficas del fractal de Mandelbrot

ATENCIÓN: Es posible demostrar que todos los valores de C que dan lugar a conjuntos de Julia conexos (áreas de una sola pieza) comparten la propiedad común de producir órbitas que se disparan a infinito cuando se aplica la iteración sobre el punto z_0 = (0,0); esto es, el punto z_0 = (0,0) es prisionero. Si z_0 = (0,0) se comporta como escapista, la *forma producida es necesariamente disconexa.*

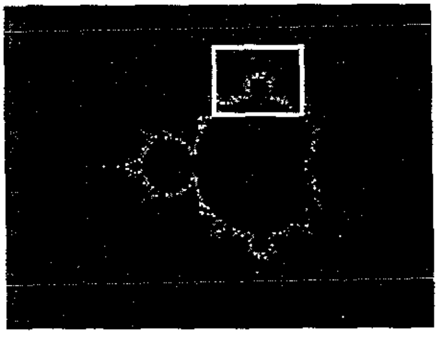
Las implicaciones de este teorema son sorprendentes: basta aplicar la iteración en un solo punto, el z_0 = (0,0), para determinar la naturaleza del conjunto de Julia que se obtendrá cuando la iteración se aplique al plano complejo.

Mandelbrot empezó iterando una expresión matemática simple en una computadora. Esto lo lanzó a una lista de números en el plano complejo. El conjunto de números que Mandelbrot exploró en este plano se llama desde entonces "conjunto de Mandelbrot" y se le ha bautizado como "el más complejo objeto de la matemática". Mandelbrot sigue entusiasmado con su hallazgo:

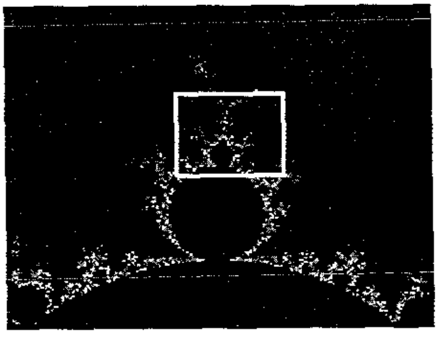


"Este conjunto es una asombrosa combinación de absoluta simplicidad y vertiginosa· complicación. A primera vista es una 'molécula' constituida por 'átomos' entrelazados, uno en forma de corazón y otro casi circular Pero una mirada más atenta revela la infinidad de moléculas más pequeñas con la forma de la grande, y entrelazadas por lo que yo propongo llamar 'polímero del diablo' No me cansaría de devanear sobre la belleza de este conjunto."

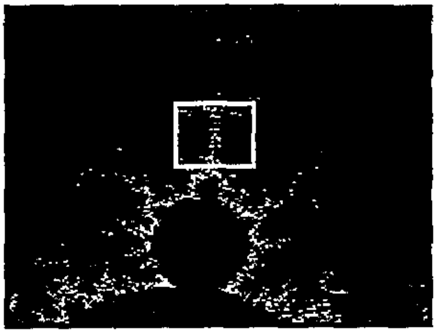
Hay dos formas de comenzar a describir la estructura geométrica del conjunto de Mandelbrot (*figura anterior*); una informal, que se refiere a él como la representación de un muñeco de nieve recostado y completamente lleno de granos; la otra más purista, que considera que el cuerpo principal puede pensarse como una forma cardoide (de corazón) tangente a un disco circular de menor extensión, de los detalles brotan una infinidad de estructuras que se ajustan a la misma descripción. Es difícil decir que se trata de una figura cuya frontera es extremadamente complicada, pues a toda escala aparecen formas geométricas semejantes al original, conectadas a través de filamentos que siguen patrones muy poco regulares. Y así, aunque a simple vista el borde parezca estar salpicado de puntos aislados, pude demostrarse que el conjunto total es conexo, ya que siempre puede hallarse a cierta escala, un filamento que cubra la ruta entre dos puntos aparentemente separados.



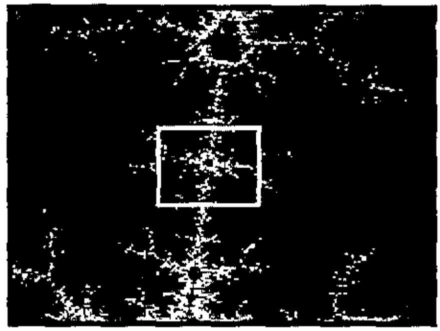
Primera aproximación



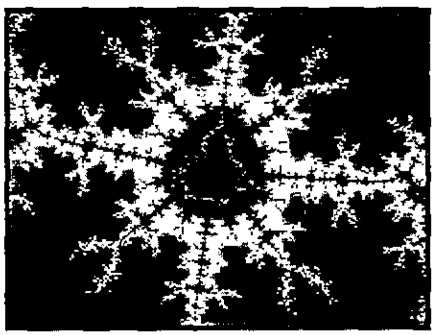
Segunda aproximación



Tercera aproximación



Cuarta aproximación

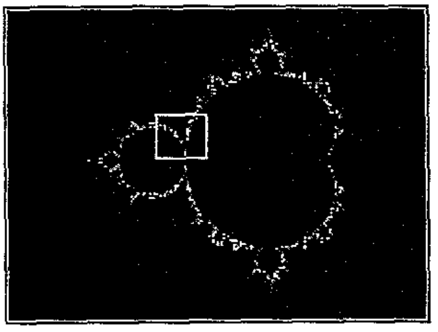


Quinta Aproximación

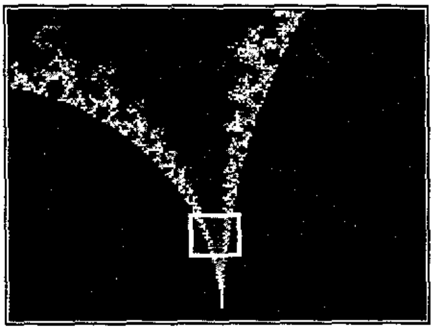
Figura 20. Aproximaciones al conjunto de Mandelbrot

Cientos y miles de aventureros de la computación han explorado este conjunto usando computadoras en casa, variaciones de un programa iterativo que A.K. Dewdney explicó en las paginas de la revista "Scientific American". Pero los exploradores del conjunto de Mandelbrot no tienen que temer a las multitudes. *"El atractor extraño de Mandelbrot es vasto e infinito, y hay un sinfín de lugares bellos para visitar"* según dice John H. Hubbard, matemático de Cornell, quién recomienda *'Visiten la zona con la parte real entre 0 26 y 0 27 y la parte imaginaria entre 0 y 0.1"*.

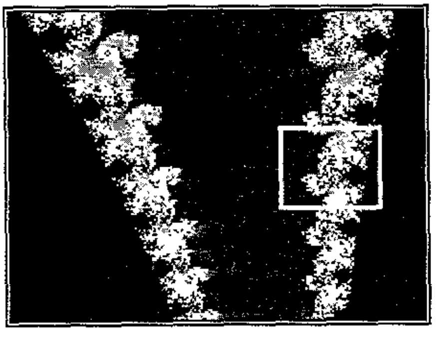
La invitación de Hubbard alude a las coordenadas en el plano de los números complejos.



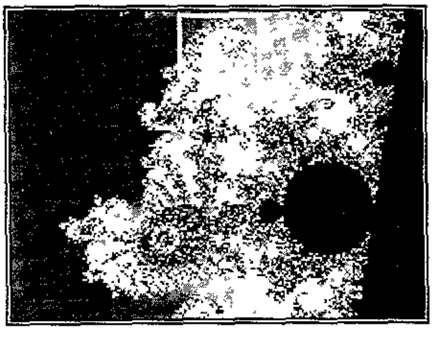
Primera Aproximación



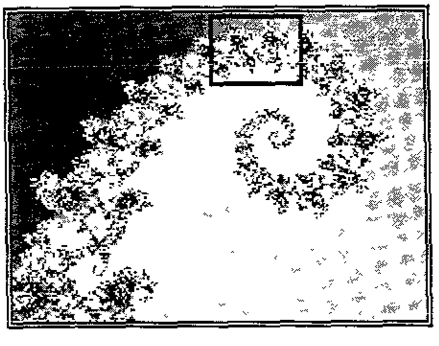
Segunda Aproximación



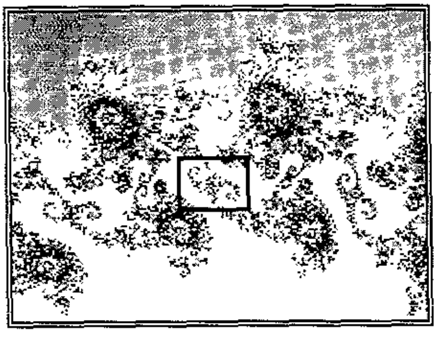
Tercera Aproximación



Cuarta aproximación



Quinta aproximacion



Sexta aproximación

Séptima aproximacion Octava aproximación

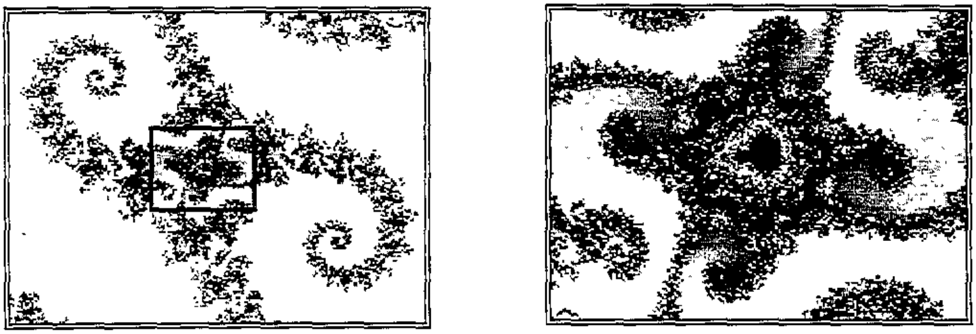


Figura 21. Aproximaciones al fractal de Mandelbrot

La ecuación del conjunto de Mandelbrot es $Z^2 + C$. Donde Z es un número complejo que puede variar y C es un número complejo fijo. El aventurero introduce sus dos números complejos en la ecuación e indica a la computadora que tome el resultado de la suma de $Z^2 + C$ y la próxima vez (y la próxima vez después de ésa..) lo ponga en vez de Z.

La *computadora busca todos los números complejos que no sean tan grandes como* para su capacidad de cálculo El conjunto consiste en los números complejos C para los cuales el tamaño de $Z^2 + C$ permanece infinito, no importa a cuantas iteraciones se someta la ecuación.

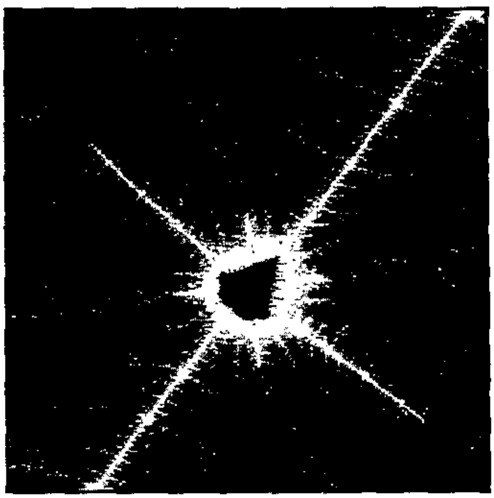


Figura 22. Fractal de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot no es la única forma fractal que se puede generar mediante la iteración de ciertas ecuaciones de lo que se denomina matemática "abstracta y eterna". Se han descubierto que muchas otras ecuaciones poseen una naturaleza fractal. El método de Newton, que tiene siglos de existencia, también es fractal. El método de Newton nos permite hallar las raíces de la ecuación algebraica conjeturando primero cuál es la raíz y después aplicando el método a la conjetura. El resultado es un número que se acerca más a la raíz. Luego el método se aplica a este número, y la iteración continua de este modo hasta que uno considera que se ha aproximado a la raíz todo lo necesario.

La aplicación de esta técnica en la computadora produce un fractal matemático cuando la conjetura inicial está cerca del límite entre dos o más de las raíces de la ecuación. La computadora queda atrapada en la iteración y trata de llegar a todas las raíces al mismo tiempo revelando los lugares en donde el método de Newton se ha precipitado al azar. El patrón creado por está oscilación caótica es un enjambre de formas espirales, que en diversas escalas son reflejos mutuos, revelando que en el espacio que hay entre las raíces acecha un fractal, un atractor extraño matemático.

3. ALGUNAS APLICACIONES DE LOS FRACTALES

2.1 Acerca de los ciclos biológicos.

El caos saludable del corazón.

En los sistemas biológicos existe un variado número de ritmos. Uno de los mas conocidos es el latido del corazón: otro es el ritmo del sueño, que se presenta en animales y en le hombre. Ambos, en general, están asociados a los llamados relojes biológicos.

La forma acostumbrada de estudiar este tipo de fenómenos ha sido investigar el órgano biológico que lo produce y estudiar con todo detalle su comportamiento biológico, químico y físico. Así se han obtenido los conocimientos que han permitido el gran avance de la medicina. Sin embargo esta forma de proceder no ha sido suficiente. A partir de los años ochenta se ha dado un nuevo enfoque en el investigación de los fenómenos biológicos, a saber, dirigir el estudio de propiedades globales en los sistemas considerándolos no lineales.

Entre lo primero que se investigó fue el movimiento de los ojos de las personas afectadas por la esquizofrenia. Si una persona normal observa la oscilación del péndulo de un reloj de pared, por ejemplo, sus ojos siguen el péndulo continuamente, como si estuvieran ligados al movimiento. En contraste, cuando un esquizofrénico ve la oscilación del péndulo, sus ojos realizan una serie de movimientos erráticos cuyo origen es desconocido.

Se ha creído que la causa de estas fluctuaciones se debe a variaciones en las señales que provienen del sistema nervioso central, que es el que controla los músculos de los ojos. Se ha supuesto que estas fluctuaciones se deben a perturbaciones al azar que afligen el cerebro de los esquizofrénicos. Si las señales de entrada tienen "ruido" se esperaría que los resultados también mostraran "ruido".

Al estudiar este fenómeno usando novedosas ideas de caos, se encontró que este tipo de comportamiento se podría entender de otra forma.

Resulta que el movimiento del ojo puede considerarse un fenómeno no lineal. En el sistema del ojo hay varios parámetros a considerar como son: la masa del ojo. la viscosidad de los líquidos dentro del ojo, etc.

Se ha descubierto que en el movimiento hay varios regímenes. tanto de orden como de caos, dependiendo de los valores de los parámetros Para algunos valores de los parámetros el movimiento del ojo es regular. Al aumentar estos valores, o sea el grado de no linealidad. empieza una secuencia de doblamiento de periodo y bifurcaciones, que finalmente lleva a un régimen caótico, en el que el ojo se mueve tal como se informa que ocurre en los esquizofrénicos.

En consecuencia, el movimiento regular de los ojos de los esquizofrénicos parece que no se debe a señales enviadas al azar por el cerebro, sino que es consecuencia inevitable de excesiva no linealidad en su sistema ocular; por supuesto que entonces la forma de evitarlo sería disminuirla. Sin embargo, todavía no se ha podido hacerlo en la práctica. y por tanto, la cuestión sigue abierta. La irregularidad en el movimiento de los ojos se presenta no sólo en los esquizofrénicos sino también en otros pacientes con enfermedades neurológicas.

Esta forma de proceder. en la que los detalles particulares no desempeñan el papel principal en el comportamiento del sistema. sino en la que el punto crucial es reconocer que el fenómeno está regido por el comportamiento global, ha empezado a dar frutos

El caso del corazón merece atención especial, pues en el se dan varios tipos de ritmos. que se han investigado en forma aislada y han sido categorizados. Es posible distinguirlos en los electrocardiogramas. Sus irregularidades han sido reconocidas como signos de alguna enfermedad. Sin embargo, sólo recientemente se ha empezado ha analizar su dinámica.

Muy importante es la fibrilación que causa miles de muertes súbitas al año. En muchos casos, estas se deben al bloqueo de las arterias, que a su vez causan la muerte del músculo que bombea la sangre. Sin embargo, no se sabe a qué se debe.

En un corazón normal los músculos se contraen y relajan de manera periódica, mientras que cuando ocurre la fibrilación los músculos del corazón se contorsionan sin coordinación alguna y no pueden bombear sangre. En un corazón normal las señales eléctricas viajan de manera coordinada a la largo del órgano. Cuando la señal llega, cada célula se contrae; enseguida la célula se relaja durante un intervalo determinado, dentro del cual no puede volver a contraerse. En cambio, cuando hay una fibrilación la onda se esparce sin coordinación con el resultado de que le corazón nunca está del todo contraído ni del todo relajado.

Una forma de ayudar al paciente que ha sufrido un ataque de fibrilación es aplicarle una corriente eléctrica –un shock eléctrico-, con lo que a menudo su corazón vuelve a trabajan normalmente.

En un corazón afectado de fibrilación cada una de sus partes puede estar funcionando normalmente. Las autopsias de las personas que murieron por esta causa muestran que los músculos no están dañados y que, sin embargo, el conjunto del corazón no funcionó

El corazón es un sistema complejo, que ha empezado a ser estudiado desde un ángulo distinto; el del caos. Se ha encontrado que su actividad eléctrica presenta secuencias de bifurcación de periodos hasta llegar a un régimen caótico, comportamiento similar al de otros sistemas que desarrollan caos. Resulta que cuando se presenta la fibrilación se está en un régimen caótico, y al dar un shock eléctrico los parámetros del corazón se modifican y éste regresa a un régimen que ya no es caótico, por lo que su comportamiento vuelve ha ser regular.

Por lo tanto, se ve que la modificación de algún parámetro relacionado con el funcionamiento del corazón, como por ejemplo, un cambio en la conductividad de los músculos o en el tiempo de llegada de alguna señal, puede alterar el régimen en que se encuentra el órgano. La consecuencia es que este cambio puede hacer que el órgano sano pase por una bifurcación y tenga un nuevo comportamiento cualitativo. Como sabemos, al pasar una bifurcación aparecen nuevos periodos de oscilación que no siempre pueden ser sanos, pues dan otros dos ritmos al corazón.

El comportamiento caótico de algún sistema biológico no siempre está relacionado con alguna enfermedad. Aunque pueda ser increíble, se ha empezado a considerar al caos como fuente de salud. Los sistemas no lineales tiene la capacidad de regulación y control. Si a un sistema que se comporta linealmente se le produce una pequeña perturbación, entonces se comportará de manera cercana a como lo haría si no se le hubiera perturbado. Sin embargo, si se da la misma perturbación a un sistema no lineal, éste tiende a volver a su condición inicial.

Ahora bien, si un sistema llegará siempre a un valor final de sus variables, sin importar el valor de sus parámetros, entonces este sistema no podría ajustarse a los cambios. Sin embargo, los seres vivientes deben poder adaptarse a los cambios. Por lo tanto, en un sistema como el tratado, si las circunstancias externas hacen que le valor del parámetro se altere, entonces los valores finales serán distintos de los que tenía antes del cambio. Si el sistema biológico es capaz de vivir con los nuevos valores finales significa que se ha podido adaptar a las nuevas circunstancias. Si no desaparecerá.

El hecho de que muchos sistemas biológicos sean no lineales y se comportan caóticamente ha permitido la posibilidad de adaptación. Algunos investigadores han sugerido que para que estos sistemas sobrevivan bajo nuevas circunstancias tendrán que desarrollar estructuras fractales. Por ejemplo, las fibras conductoras del corazón o las redes que forman los bronquios tiene una estructura fractal que permite gran variedad de ritmos.

Por lo tanto, se puede llegar a la sorprendente conclusión de que el caos permite salud, mientras que si un sistema fuese totalmente pronosticable, al ocurrir cualquier cambio se enfermaría y poco después moriría.

De estas consideraciones se obtiene una sugerencia muy interesante: cuando una enfermedad se debe a la inadaptabilidad del organismo a los posibles nuevos ritmos debidos al cambio de circunstancias, el tratamiento debería de consistir en ampliar sus capacidades para que estos nuevos ritmos fueran capaces de darse. Esta idea esta abriendo una nueva forma de tratar a las enfermedades

La evolución hacia los fractales

En el bachillerato estudiamos el cerebro humano, y una característica que de *inmediato se percibe es que su forma no es lisa sino extremadamente convolucionada, con* muchos pliegues y arrugas. ¿Por qué tiene el cerebro esta forma tan rara?

El volumen cerebral de los mamíferos presenta gran variación, entre 0.3 ml y 3000 ml. La corteza cerebral de los animales grandes está muy convolucionada, sin importar su posición en la escala de la evolución. Resulta que la proporción de materia blanca respecto a la materia gris es casi la misma en todos los mamíferos. A fin de mantener esta proporción, el material de un cerebro grande necesariamente tiene que estar acomodado en pliegues, de otra manera no cabría en el cráneo.

Del examen microscópico del cerebro se observa que, a medida que aumenta la amplificación, se va encontrando más y más detalle, y las estructuras más chicas se parecen más a las grandes. O en otras palabras, se produce la similitud al cambiar de escala. El cerebro tiene estructura fractal. La dimensión fractal de la superficie del cerebro es mayor que 2, lo que implica que esta superficie necesita más espacio para llenarse; no es suficiente con la dimensión igual a 2.

La característica de los fractales, de la similitud, se encuentra en distintos sistemas y órganos anatómicos, por ejemplo en la red vascular, las arterias, las redes neuronales, los ductos pancreáticos, la placenta, los bronquios, etc. Como ejemplo, las arterias humanas tienen una dimensión fractal de 2.7 y en el sistema digestivo el tejido presenta ondulaciones dentro de ondulaciones a lo largo de muchas escalas.

Los vasos sanguíneos que van desde la aorta hasta los capilares se ramifican y dividen. Cada división se vuelve a ramificar y dividir. Esto continúa hasta que los *conductos se vuelven tan angostos que las células de la sangre sólo pueden circular, en fila,* una después de otra. La estructura de este sistema tiene carácter fractal. Por necesidades fisiológicas, los vasos sanguíneos tienen que apretar y comprimir una línea extremadamente larga y hacerla caber en un área muy pequeña, a su vez el sistema circulatorio debe comprimir una superficie de área en un volumen limitado. La sangre es un bien precioso para el cuerpo y el cuerpo no puede gastàr mucho espacio La única forma en que la sangre puede circular de tal forma que ninguna célula este separada de un vaso sanguineo más allá de tres o cuatro células, es que el sistema tenga estructura fractal. Esto significa que el cuerpo tuvo que desarrollarse de tal forma que una línea, una vena por ejemplo, pueda cubrir casi completamente una superficie. La única forma en que esto pueda ocurrir es mediante una estructura fractal Habrá que mencionar que, aunque los vasos sanguíneas barren y casi cubren una superficie relativamente grande no ocupan, con todo y la sangre, más de 5% del cuerpo. Esta forma eficiente de estructurarse se debe a la evolución biológica.

La estructura fractal que se forma en el cuerpo de las venas y de las arterias no es la única. El cuerpo tiene muchos otros sistemas así de eficientes, que se deben a la evolución. Los pulmones deben empacar la máxima área posible dentro del mínimo volumen . Hay que mencionar que la capacidad de cualquier ser vivo de absorber oxígeno depende del área de la superficie de sus pulmones; mientras mayor sea esta área, mayor será la capacidad de absorción. En el ser humano los pulmones ocupan un área de alrededor de $100m^2$ y éstos ocupan un volumen corporal relativamente pequeño

La idea de los fractales ha empezado a tener una incidencia muy importante en el estudio de la anatomía. De hecho, la forma en que tradicionalmente se clasificaban diferentes partes del cuerpo, a pesar de su mucha utilidad, no explica completamente lo que ocurría. Fue hasta que se empezó a usar la idea de los fractales, o sea de las estructuras que representa similitud a muchas escalas, que se pudo entender mejor cómo están diseñadas. La descripción fractal pudo explicar las observaciones experimentales. De esta manera se descubrió que el sistema urinario es fractal, el ducto biliar en el hígado es fractal y la red de fibras del corazón que conduce los impulsos eléctricos a los músculos que se contraen es fractal. Con esta red, que los cardiólogos denominan red de His-Purkinje, se desarrolló una importante línea de investigación. El espectro de frecuencias del corazón presenta, en ciertas condiciones, un comportamiento caótico, que sigue leyes fractales. La única forma de explicar este comportamiento fue suponer que la red de His-Purkinje tiene una estructura fractal: un laberinto que se ramifica de tal forma que es autosimilar a escalas cada vez más y más pequeñas.

¿Cómo pudo la naturaleza desarrollar una estructura tan complicada? Mandelbrot ha mencionado que si sólo pensamos dentro del contexto de la geometría de Euclides que nos enseñan en la escuela, entonces efectivamente las estructuras anatómicas son complicadas. Pero como fractales es posible describirlas de manera extremadamente sencilla, con muy poca información. Recordemos por ejemplo, que las instrucciones para construir la curva de Koch, que es un fractal, son unas cuantas y además sencillas. Se ha descubierto que las instrucciones para la formación de cada uno de los órganos y de los sistemas de nuestro cuerpo están codificadas en la molécula del ácido desoxirribonucleico (ADN), donde se encuentra toda la información genética de los seres vivos. Si en está molécula se encontrara la información específica de cada una de las ramificaciones, entonces, además de ser una forma muy poco eficiente, la información de todas las estructuras no cabría en la molécula como la conocemos. Una forma más eficiente sería tener codificada sólo la instrucción que se debe iterar para formar un órgano como el pulmón, por ejemplo. Recuérdese que una manera de producir un fractal es dando una instrucción que se debe iterar o repetir un número muy grande de veces. De esta forma sencilla se puede entender cómo el ADN contiene la información que produce sistemas y órganos fractales. Esta forma eficiente de guardar información se ha obtenido a través del proceso de evolución.

En la actualidad, el estudio de la forma en que se encuentran codificadas las *instrucciones iterativas para producir las diversas partes del cuerpo* es un tema de investigación en biología.

3.2 ¿Es posible ganar en la bolsa de valores?

Todos los días se ven en le sección financiera del periódico gráficas *(figura 23)* que muestran el comportamiento del índice de precios y cotizaciones de la bolsa de valores –en el caso de nuestro país se le conoce como IPC (Indice de Precios y Cotizaciones), en el caso de los EU hay dos índices, pero el más importante es el de Wall Street el Daw Jones, el otro es el Nafda-, que muestran alzas y bajas aparentemente sin regularidad, al azar.

Para mucha gente, en particular las que invierten dinero en la bolsa de valores, es de interés poder predecir la tendencia y, si fuera posible, el precio de las acciones, ya que si tuvieran esta información podrían comprar y vender con ventaja y así ganar mucho dinero.

Desde hace mucho tiempo los economistas han intentado estudiar y comprender los movimientos de precios en la bolsa de valores. ¿De que depende que una cotización suba o baje?

Los economistas han supuesto, en general, que la variación de los precios de algún producto, por ejemplo el algodón, tiene dos componentes: una de largo alcance, en el que los precios se regirían por fueras económicas profundas como la apertura de rutas comerciales, inventos que utilizaran el producto, una guerra, alguna innovación tecnológica que modificara el uso del producto, una revolución, etc. Esta tendencia a largo alcance, mese, años, décadas, quedaría determinada de manera muy clara.

La componente del precios sería de corto alcance: los precios variarían al azar, debido a un número muy grande de causas, muchas de las cuales no se podrían determinar con precisión. Estos vaivenes, llamados fluctuaciones, son transitorios. Se ha pensado que casi no hay relación entre los dos ritmos de largo y corto alcance.

Se ha *considerado que las variaciones de los precios, a largo alcance, siguen una ley* determinada, esta ley esta dada por una gráfica que tiene forma de campana, conocida como curva gaussiana, y nos dice que la mayoría de los cambios ocurrirán cuando el precio esté dentro de los límites marcados entre dos valores, alrededor de un valor promedio.. La distribución gaussiana se utiliza se utiliza en muchos campos en los que hay variables al azar. Por ejemplo, si se miden las longitudes de los clavos de un paquete que nominalmente debería tener una longitud de 20 cm, se encontraría que no todos tienen efectivamente esa longitud. Resulta que, si el paquete es grande, la distribución de longitudes toma una forma gaussiana, centrada alrededor de 20 cm. Es decir, la mayoría de los clavos tiene una longitud, sino de 20 cm, si muy cercana a 20 cm.

Sin embargo, en el intento de sobreponer los precios que el algodón adquirió de 1880 a 1958 se encontró que no ajustaban a una curva gaussiana. Se hicieron muchos intentos de hacer este ajuste, todos ellos sin éxito.

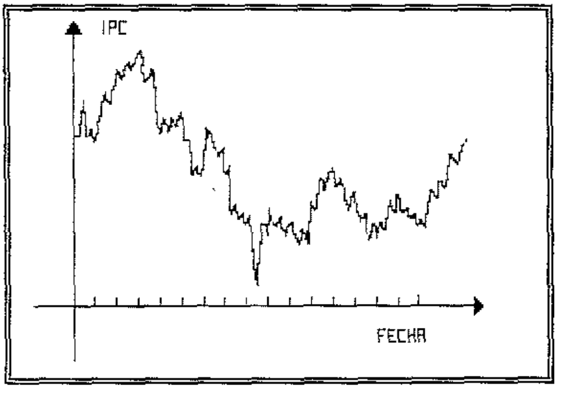


Figura 23. Gráfica del IPC de México de un período determinado
Parece que las alzas y las bajas no tienen regularidad alguna

El mismo fracaso se alcanza al analizar los precios de diferentes acciones en la bolsa de valores, en la que también se ha pensado que existen dos tipos de ritmos casi independientes entre sí· largo y corto alcance.

Fue Mandelbrot el primero que vio los valores de los precios de algodón desde otra perspectiva. y se preguntó ¿por qué deberían los precios del algodón, o para el caso de cualquier otra entidad económica, tener una distribución gaussiana? Es más, ¿por qué debería de haber una separación tan cortante, como la que se suponía entre largo y corto alcance?

Una de las suposiciones implícitas que los economistas hicieron al trabajar con la distribución gaussiana es que los precios cambian continuamente. Esto significa que si hay una variación en el precio de una acción de $100 a $40, entonces el precio debe pasar por los valores intermedios, o sea, la acción debe adquirir los valores de $87.5, $55, $49.75, etc. Esto desde luego no es cierto. Maldelbrot hizo la suposición de cambios discontinuos en precios y llegó así a la predicción de la distribución de precios que se muestra en la *figura 24*, en la cual se dibuja una gráfica, en el eje vertical, de una cantidad relacionada con la variación de precios, y en el eje horizontal, de los precios. La predicción hecha es la curva continua y los valores de los datos que tenían de las variaciones de los precios del algodón se muestran por medio de puntos. El conjunto de los puntos marcados con 1 corresponde a cambios positivos de los precios diarios del algodón. El conjunto de puntos marcados con 2 corresponde a cambios positivos de los precios mensuales; el conjunto marcado con el número 3 corresponde a cambios de los precios anuales. Los conjuntos 4,5 y 6 corresponden a cambios negativos en los precios diarios, mensuales y anuales respectivamente.

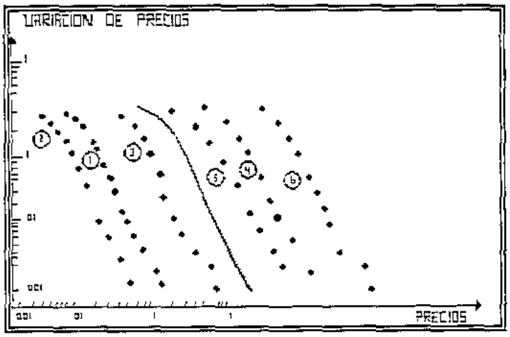


Figura 24. Comparación entre la variación de precios en distintas circunstancias (conjuntos de puntos) con las predicciones (líneas continuas) *Cada línea corresponde a una escala distinta.*

Nótese que los diferentes conjuntos de puntos corresponden a escalas de tiempo muy diferentes. Si se copiara esta gráfica a un acetato transparente y se trasladara a la curva predicha (línea continua), se superpondría en cada uno de los conjuntos empíricos formados por los puntos. Es decir, la misma predicción resulta ser válida a lo largo de diferentes escalas: diaria, mensual y anual. No hay diferencias entre las escalas temporales como se ha pensado. Esto significa que hay similitud y que la estructura de los precios es fractal. Si en lugar de hacer una gráfica como la de la *figura 23*, en que se muestran las fluctuaciones de los precios de las acciones en la bolsa de valores a lo largo de un día, se hiciera la gráfica a lo largo de un mes, o de un año, se encontrarían gráficas que tienen la misma forma, o sea, son similares.

Doyne farmer, Norman Packard y James McGill en Nuevo México, EUA, han llevado esta análisis de la economía mucho más adelante, considerando la dinámica que rige los fenómenos económicos es no lineal. Un ejemplo de ésta, es que una causa pequeña puede producir efectos muy grandes.

Debido a que la dinámica de los precios es no lineal, como ya sabemos, en estos casos existe un régimen caótico. Entender este hecho ha permitido a algunas personas hacer predicciones a coro alcance, de unos cuantos días, sobre el comportamiento de los precios. Es más en 1991, Framer, Packard y McGill fundaron una compañía, The Prediction Company (Compañía de Predicciones) que se dedica a analizar la evolución del tiempo de los precios en diferentes acciones de la bolsa de valores. Se basan en le teoría del caos y son capaces de hacer predicciones qué abarquen unos cuantos días sobre el comportamiento de los precios, y los resultados se proporcionan a sus clientes.

La manera en que trabajan es muy simple, solo varían las condicione iniciales, tal como lo hizo Eduard Lorenz, empiezan con un valor inicial y lo iteran, de forma que predicen los siguientes valores Si por algún motivo, como ocurre en la economía, no se conoce la función matemática que lleve a estos valores, entonces se usan procedimientos matemáticos más complicados para encontrar la iteraciones, no de todas, pero si de las más inmediatas.

La forma matemática completa como se han podido hacer predicciones no esta aún suficientemente desarrollada. Sin embargo, lleva una gran delantera sobre quienes analizan la evolución de precios de forma tradicional.

The Prediction Company mantiene en secreto los procedimientos que utiliza en sus predicciones. Lo que se puede decir es que han ganado mucho dinero –ellos y sus clientes- en le bolsa de valores

Se podría pensar que si toda la gente que participa en la bolsa de valores supiera que, por ejemplo, el jueves el precio de una acción va subir, entonces el miércoles antes del cierre todos comprarían, y por tanto, la predicción no serviría. Es decir, el comportamiento en la bolsa de valores es tal, que si uno encuentra un patrón, al actuar lo elimina. Esto ocurre en un fenómeno físico.

Sin embargo, la filosofía de los miembros de la compañía de la que estamos hablando es otra. Lo que pasa es que si se dice que se tiene una nueva idea, lo prudente sería esperar a ver si efectivamente ocurre. Dejar pasar cierto tiempo y no actuar. Si todo funciona bien, quien la emplee tendrá buenas ganancias y, en el momento en que los demás quieran aprovechar esta idea, deja d funcionar. El resultado neto es que el primero en idear y usar tal sistema sí ganó dinero.

3.3 Fractales aún en el arte.

Bach y la similitud en la música

El análisis de la estructura de diferentes obras musicales ha demostrado que la selección de las notas que ha hecho diferentes a los compositores, en distintas épocas, tiene algunos elementos comunes. Trátese de uno de los Conciertos de Brandemburgo de Bach, del Cuarteto de Cuerdas #3 de Babbit, de obras de piano de Scott Joplin, todas estas obras tienen la misma forma si se considera la estructura en términos de frecuencias.

En el análisis auditivo de diversas obras musicales una cantidad que se ha estudiado es la potencia de audio de la música Esta cantidad es, en esencia, la energía que emite en forma de ondas sonoras cada segundo, cuando se ejecuta la obra musical. Al analizar cómo está estructurada esta cantidad, en términos de frecuencia, se obtiene lo que se llama su espectro.

¿Cómo dependen de la frecuencia los espectros de las diferentes obras musicales?

Los análisis hechos de diferentes obras musicales han demostrado que sus espectros dependen de la frecuencia, que denotaremos con la letra *f*, como (*1/f*). Este espectro es una ley de potencia que, en lenguaje matemático, depende de la frecuencia en forma inversa a la primera potencia de *f* (ya que el exponente de la *f* en (*1/f*) es 1). Por lo tanto, este espectro es autosimilar y en consecuencia, contiene una estructura fractal.

Un espectro del tipo mencionado en el párrafo anterior recibe el nombre de *espectro rosa*.

¿Por qué Bach y otros muchos compositores escogieron el espectro rosa? La realidad es que ningún músico oyó hablar jamás de estas ideas, ni mucho menos las escogió de manera deliberada. Para entender lo que sucede veamos cómo se haría música con otro tipo de espectro.

Una forma sería esta: cada nota que se escribe es tal que su posición y duración no dependen para nada de las notas anteriores ni de su duración. En este caso se dice que la composición es completamente al azar. Es espectro de audio de este tipo de música es el mismo para cualquier valor de frecuencia, lo que significa que le valor de la potencia es el mismo para cualesquiera valores de la frecuencia, o sea, que se trata de una cantidad constante. Matemáticamente, el espectro depende de la frecuencia ($1/f^0$), ya que $f^0 = 1$. A un espectro de este tipo se le llama *blanco*. Si se tocará este tipo de música en un instrumento la oiríamos sin estructura; además daría la impresión de que de una nota a otra siempre habría una sorpresa

Otro tipo de espectro, yéndose al otro extremo, es el que depende de la frecuencia ($1/f^2$), espectro llamado *brow* o *café*, cuyo nombre se le dio porque está asociado al *movimiento browniano*. En la música cada nota y su duración depende en grado considerable de las notas anteriores Por lo tanto, la sensacion que se tiene al escucharla es que despues de haber tocado unas notas las que siguen son previsibles.

La música que tiene espectro rosa, o sea (1/f), se encuentra , por así decirlo, entre los casos de música al azar (espectro blanco) y música determinista (espectro café). En este caso las notas y su duración no son ni muy previsibles ni muy sorprendentes

Regresando a la pregunta : ¿por qué los compositores usaron efectivamente espectros rosas, o sea una ley de potencias (1/f) para componer música?, se puede afirmar que los compositores han intentado, y por cierto muchos de ellos lo han logrado, componer música interesante. La cuestion se debería plantear como sigue: ¿por qué la música interesante tiene un espectro sosa? La respuesta podría que ser que la música de este tipo de espectro resulta ser ni muy previsible (espectro café) ni muy sorprendente (espectro blanco) El científico holandes Balthazaar van del Pol afirmó en una ocasión que la música de Bach es grandiosa porque es inevitable y al mismo tiempo sorprendente, lo que significa que su espectro es rosa.

Debido a que la música que tiene espectro rosa es autosimiliar, tiene una estructura similar en diferentes escalas de frecuencias. Lo que ocurre en una escala de frecuencias debe ocurrir en cualquier otra escala de frecuencias. Si se grabara una composición de este tipo en cinta magnética a cierta velocidad y tocara a distintas velocidades, lo que oiría sería similar a lo grabado. Esto contrasta con lo que ocurre con la voz humana, pues cuando se toca una grabación a una velocidad, por ejemplo al doble de lo que debiera hacerse, se oye muy chillona.

Una forma de exhibir la autosimilitud es con ayuda de un aparato electrónico que genere sonidos de frecuencias que uno desea. Si se produce un sonido que sea la superposición de 12 notas, siendo cada nota una octava (de frecuencia doble) de la anterior y se empieza con una nota de 10 Hz, (1 Hz= 1/seg), las siguientes 11 notas serían de frecuencias:

20=2X10, 40= 4X10, 80=8X10, 160=16X10, 320=32x10, 640=64X10, 1280=128X10, 2560=256X10, 5120=512X10, 10240=1024X10 y 20480=2048X10, todas en Hz.

Ahora bien, cambiemos cada una de estas notas por otras que sean de frecuencias mayores por un semitono (que corresponde a la diferencia entre notas sucesivas de un piano); la frecuencia del semitono se obtiene de la nota anterior multiplicando por 1.05946. Ahora se tocará el sonido de esta superposición de las frecuencias como sigue:

10 X 1.05946 = 10.6
20 X 1.05946 = 21.2
40 X 1.05946 = 42.38
80 X 1.05946 = 84.76
160 X 1.05946 = 169.51
320 X 1.05946 = 339 03
640 X 1.05946 = 678.06
1280 X 1.05946 = 1356.11
2560 X 1.05946 = 2712.22
5120 X 1.05946 = 5424.44
10240 X 1.05946 = 10848.88
20480 X 1.05946 = 21697.74, todas en Hz.

Este sonido se oirá con un tono más alto que el anterior.

Si se aumenta otra vez la frecuencia de cada una de las notas en un semitono aún más alto. Si se repite 12 veces el proceso de aumentar en un semitono cada uno de los componentes del sonido, resulta que el sonido que se produce es indistinguible al original. Esta es una demostración de autosimilitud.

¿Fractales en la poesía?

En el *Mono Gramático* Octavio Paz, Premio Novel de Literatura dice que la visión de la poesía es la convergencia de todos los puntos, el final del camino· una visión oblicua y vertiginosa revela el universo no como una sucesión sino como un "embalaje de mundos en rotación".

Un poeta que explica matices es como una ecuación iterativa en el límite entre el finito orden y el infinito caos. El creador descubre la autosimilitud. Tomemos como ejemplo de esa similitud el poema "The writer", del premio Pulitzaer Richard Wilbur.

La escritora

En su cuarto del piso de arriba
donde irrumpe la luz, y los hilos se mecen en las ventanas
Mi hija descubre un cuento

Me paro en la escalera al oír
el martilleo de las teclas en su cuarto cerrado,
como una cadena trepando por la borda.

Aunque ella es joven, el material
de su vida es un pesado cargamento.
Le deseo buen viaje.

Pero de pronto se interrumpe
como rechazando mi cómoda reflexión
Crece una inquietud jadeante,

como si la casa entera pensara,
y de pronto ella vuelve a martillar
las teclas, y de nuevo calla.

Recuerdo al estornino aturdido
que hace dos años quedó atrapado ene se cuarto.
entramos con sigilo, abrimos la ventana

y nos alejamos para no asustarlo,
durante una hora impotente, por la rendija,
observamos cómo esa criatura

lustrosa, salvaje, oscura, indiscente
aleteaba contra el fulgor, caía como un guante
al duro piso del escritorio,

y luego, encorvada y ensangrentada, recobraba
el brío para comenzar e nuevo; y cómo el ánimo

se nos levantó cuando, con repentina certeza,

se elevó desde un respaldo.
Enfilando rectamente hacia la ventana correcta
y cruzando el antepecho del mundo

Siempre, querida,
Es cuestión de vida o muerte. Lo había olvidado
Te deseo lo mismo antes, pero con más fuerza.

El poema está construido como una serie entrelazada de metáforas o, mejor dicho, "reflectáforas". Una reflectáfora es cualquier recurso creativo (incluyendo en literatura, recursos tales como la ironía, la metáfora, el símil, el retruécano, la paradoja) que surte su efecto creando en la mente del lector una tensión insoluble entre las similitudes y diferencias de sus términos. En otras palabras, una reflectáfora provoca un estado de inmenso asombro, duda e incertidumbre, una percepción de matices. Una reflectáfora importante en el poema de Richard Wilbur es la comparación entre dos términos: el esfuerzo de la hija para escribir un cuento y el esfuerzo del estornino para enfilar "rectamente hacia la ventana correcta". Estos dos términos son obviamente muy diferentes, y vienen de muy diferentes lugares de la mente. Pero Wilbur los ha yuxtapuesto de una manera que sugiera similitudes. La tensión entre las obvias diferencias y las similitudes descubiertas obliga a la mente del lector a abandonar su sistema de categorías habituales para hallar sutilezas y matices.

La segunda reflectáfora importante del poema sugiera las similitudes (y también las diferencias) entre el esfuerzo de la hija para escribir y el esfuerzo del padre para comprender lo que ocurre a ella mientras intenta escribir Una tercera asimila a la hija con la casa (por ejemplo, al asociar la mente de la muchacha que lucha en el cuento con la ventana del piso superior de la casa donde se mecen los tilos". Aquí podemos observar cómo aunque son diferentes, los términos de una reflectáfora se reflejan entre sí, de allí el nombre.

La cuarta reflectáfora importante es bastante interesante porque implica una metáfora (recordemos que la metáfora es una variedad de le reflectáfora) que el padre rechaza en la cuarta estrofa. Allí, en el intento de comprender las experiencias de su hija, el narrador deliberadamente compara los esfuerzos de ella con un viaje marítimo. Cuando él dice esto, sin embargo, la muchacha "se interrumpe / como rechazando mi cómoda reflexión. Con estas palabras el narrador comprende que la metáfora del viaje marítimo es un cliché. Es una metáfora muerta, una metáfora que ha perdido la tensión entre sus términos. En vez de evocar la profundidad de los sentimientos del padre acerca de la lucha de la hija, la comparación metafórica de la vida de la hija en el viaje marítimo le niega matices, le encierra en categorías que simplifican la experiencia. Wilbur, un poeta, un escritor, tiene una aguda conciencia de que la metáfora, para evocar matices, tiene que ser lozana, no muerta; debe sacudir la mente provocando asombro. Compara la vida con un viaje marítimo parece trillado porque todos sabemos acerca de la difícil travesía y de el pesado cargamento de la vida.

Irónicamente, sin embargo, al reconocer que la metáfora del viaje marítimo, el escritor que narra el poema se obliga a sí mismo –y obliga al lector- a comprender que en *realidad no sabemos qué significa decir que la vida es como un viaje marítimo.* Como resultado del cuestionamiento, la metáfora del viaje marítimo regresa implícito en la última estrofa del poema, pero ahora rebosado de matices.

Una reflectáfora, donde los matices surgen de una tensión insoluble entre sus términos, es como un fractal. Recordemos que en los fractales hay orden y caos. Tienen autosimilitud en varias escalas, pero esta autosimilitud no implica autoidentidad, y es imprevisible y aleatoria. La tensión entre similitudes y diferencias y diferencias en las reflectáforas también crea una sensación de imprevisibilidad y azar en el trabajo creativo, una sensación de que aquello que experimentamos es orgánico, familiar y desconocido al mismo tiempo.

Una vez que Benoît Mandelbrot descubrió una geometría fractal, los artistas comenzaron a reconocerlas consistentemente como rasgo del arte. El pintor inglés David Honckey dice:

> *"Uno mira cada vez más adentro de un fractal, y siempre sigue siendo un fractal. Es un camino hacia una mayor percepción de la unidad"*

Los músicos también han reparado en esta conexión (como vimos anteriormente, en la sección *"Bach y la autosimilitud en la música"*). El compositor Charles Dodge, director del Centro de Música por Computación en Brooklin College, enlaza los fractales con una autosimilitud basica que siempre ha existido en la música clásica. Dodge dice:

> *"En los estudios de la estructura musical abunda la conciencia de la autosimilitud"*

Por ejemplo, Leonard Bernstein, en sus conferencias en Harvard, señalaba la autosimilitud que había en la estructura musical, desde las escalas más grandes hasta las más pequeñas llamando "metáfora musical" a esas variaciones recurrentes Y el compositor Arnold Schönberg insistía en que en una gran pieza musical "las disonancias son solo las consonancias remotas". La afirmación de Schönberg lleva implícitos a la autosimilitud y a la totalidad.

Pero los compositores contemporáneos no sólo han observado las similitudes entre la geometría fractal y la tradicional estructura estética de su arte, sino que han empleado la tecnología de los fractales en algunas composiciones.

El compositor Chales Wuorinen, ganador del premio Pulitzer, señala que en 1977 se inspiró èn la lectura del libro de Mandelbrot sobre la *Geometría Fractal (Ver refrerencia [7] en la bibliografía).* Fascinado por la idea de la *"conducta de partes naturales"*, insinuada en el libro, escribió varias piezas usando algoritmos fractales. Una, titulada *Bamboula Squared*, fue compuesta para cinta cuadrofónica y orquesta y ejecutada por la New York Philharmonic en 1984. Según Wuorinen, las piezas se generaron mediante el hallazgo del algoritmo correcto y mediante la iteración de ese algoritmo como un fractal aleatorio. El algoritmo correcto es el que crea matices equilibrando el azar con rasgos autosimilares. La pieza resultante obliga a la audiencia a interactuar constantemente con la música y a reconocerla como una nube de sonidos que están obviamente ordenados y son similares entre si, pero también constantemente imprevistos y diferentes. Esta percepción de lo esperado como inesperado es una faceta vital de la expresión creativa. Renueva constantemente la tensión entre el orden y el caos, como una visión oblicua y vertiginosa, como quería Paz, que revela el universo no como sucesión sino como un ensamblaje de *"mundos en rotación"*

3.4 Autómatas celulares

Los autómatas celulares fueron utilizados por primera vez por los matemáticos Jhon Von Neumann y Stanislaw Ulam en 1948 para representar la producción en algunos sistemas biológicos. Posteriormente, su uso se extendió a diversos campos y hoy en día sus aplicaciones son muy variadas.

Para construirlos basta tomar un arreglo de sitios o celdas, cada una de las cuales se encuentran en un estado que se caracteriza por la asignación de un valor numérico. Por ejemplo, si sólo hay dos estados posibles; vivo - muerto, vacío – lleno, etc., pueden elegirse los números 0 y 1 para distinguirlos.

Una vez elegido un estado inicial para todo el sistema se procede a estudiar cómo evoluciona el tiempo. Para ello se definen las reglas que establecen como cambia el estado de cada celda, considerando su situación y la de sus vecinos más cercanos en la etapa anterior.

Un caso sencillo se presenta cuando consideramos un autómata celular unidimensional en el que cada celda puede estar ocupada por un organismo vivo (1) o estar vacía (0). Si la distribución inicial es el azar; una representación esquemática del sistema se vería de la siguiente manera.

0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1

Las reglas de la evolución temporal que podemos proponer son múltiples. Por ejemplo:

"Cada organismo vivo sobrevivirá para la siguiente etapa si y sólo si no lo rodean por ambos lados otros organismos vivos (esto podría representar la competencia). En un sitio vacío aparece un organismo vivo (nacimiento) si al menos un vecino es un organismo vivo."

En términos numericos esta regla de evolución podría esquematizarse considerando que la suma de los números asignados a cada celda y sus dos vecinos más cercano. La suma tomaría valores entre 0 (todos vacíos) y 3 (todos llenos), y el estado para la siguiente etapa se obtendría consultando una tabla como la siguiente:

Si la suma da		**Nuevo estado**
0	→	0
1	→	1
2	→	1
3	→	0

Cuando la regla se aplica a cada celda del sistema inicial se genera la población de la siguiente etapa. Después el procedimiento se repite una y otra vez, y para fines de análisis resulta conveniente dibujar uno tras otro los resultados que se obtienen:

0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0

En la práctica este trabajo puede hacerlo sistemáticamente una computadora y el esquema de evolución después de 100 etapas, por ejemplo, es como el de la figura (FIGURA). En esta figura se distinguen los sitios llenos de los vacíos por la asignación de color blanco y negro.

De nuevo, el resultado es fascinante. A partir de haber partido de una situación azarosa y de que la regla de evolución actúa muy localizadamente (sobre una celda y sus dos primeros vecinos), el autómata celular es capaz de generar espontáneamente un patrón complejo que presenta organización y estructura a toda escala. Esto es, el sistema se autorganiza.

Las características del patrón que se forma se distinguen más claramente cuando se repite en cálculo suponiendo que inicialmente sólo había un organismo vivo situado en una celda central El resultado de la evolución del autómata *(figura 25)* es nada más y nada menos que una estructura muy similar la "triángulo de Sierpinski" la autorganización del sistema conduce a la formación de una estructura similar compleja, autosimilar y con dimensión fraccional. Fractales, fractales y más fractales.

Si la regla de evolución se modifica, la estructura del patrón puede cambiar *drásticamente (Figura 25) pero en general solo se identifican unos cuantos tipos* generales. Hay reglas que conducen a patrones fractales o estructuras periódicas; otras no llevan a nada o generan estructuras de tamaño finito Las condiciones iniciales pueden modificar ciertos detalles pero no la esencia del resultado.

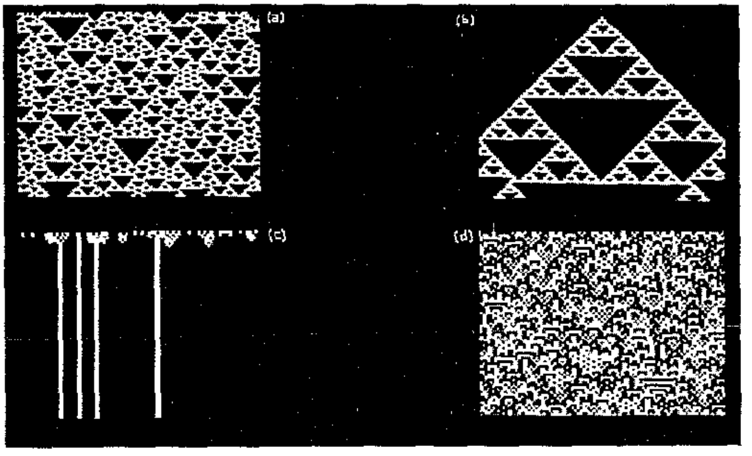


Figura 25. Evolución de un autómata celular. (a)y (b) corresponden a la regla de crecimiento descrita en el texto, (c) y (d) muestran el resultado de distintas reglas

Este ejemplo es un caso sencillo y quizá poco realista si se pretende representar el comportamiento de un sistema físico. Sin embargo, las ideas generales pueden extenderse para generar autómatas en dos o tres dimensiones que producen notablemente bien las propiedades de muchos sistemas complejos. El reto al utilizarlos consiste en capturar la esencia del fenómeno y traducirla al lenguaje del autómata. Considerando un mayor número de estados para cada celda y diferentes reglas de evolución, los autómatas celulares efectúan la mimesis de la formación de ondas químicas, el flujo de fluidos a través de obstáculos, o el crecimiento de los copos de nieve. Cuando se introducen ciertos elementos aleatorios en las reglas que rigen su comportamiento, son modelos adecuados para fenómenos tales como la propagación de enfermedades infecciosas o de incendios en un bosque, la difusión de líquidos a través de medios porosos o la distribución de cierta especie de plantas en una selva.

Detrás de muchos de los resultados obtenidos siguen apareciendo los fractales como la elección más eficiente para generar estructuras complejas, como la alternativa más creativa.

3.5 Comprensión fractal de imágenes

De la misma manera en que los fractales abstractos son generados en las computadoras, las imágenes del mundo real (imágenes que capturan los sentimientos intuitivos que posee cualquier persona sobre el mundo visual) también pueden ser ampliables. Por ejemplos, cuando la tierra es observada desde el espacio, se pueden observar ciertas características de sus riberas (líneas costeras), tales como las bahías y penínsulas, principalmente. Estas características componen un patrón reconocible que repite algo aleatoriamente. Desde un aeroplano, se pueden observar más detalles y características más pequeñas de la línea costera, sin embargo, los mismos patrones generales de la línea costera son reconocibles. Desde un mirador de la bahía no se puede observar la bahía completa, pero si se pueden ver los accesos y los muelles más pequeños de dicha bahía. Emergen nuevos patrones relacionados desde puntos de vista progresivamente más cercanos: el estar sobre la playa, al examinar un puñado de arena húmeda, al observar un grano de arena bajo el microscopio.

Patrones fractales como los anteriores pueden ser manipulados para generar paisajes imaginarios para simuladores de vuelo, películas y otras aplicaciones. Michael Barnsley descubrió que era posible controlar con precisión el contenido de una representación fractal, y hacerla parecer increíblemente similar a una imagen del mundo real. Un ejemplo inicial de una imagen fractal generada de esta forma es el helecho de le *figura 4* similar a uno de los utilizados por Iterated Systems como su logo. Iterated Systems es una empresa creada por Michael Barnsley que se dedica a generar imágenes del mundo real a través de fractales.

Debido a que los objetos del mundo real, tales como el helecho, tiene propiedades fractales que pueden ser representadas matemáticamente. Este proceso se lleva a cabo mediante la transformada fractal.

La invención de la transformada fractal ha provocado un cambio de paradigma en las formas en que las imágenes pueden ser expresadas en la computadora. Hasta 1988 cuando la trasformada fractal fue desarrollada, las imágenes por las computadora eran expresadas normalmente en términos de pixeles sobre un entramado en la pantalla. La mayoría de los formatos de archivos, hasta la fecha, emulan la rejilla de pixeles que sea necesaria para mostrar una imagen en un monitor o impresora

Las principales desventajas del modelo basado en pixeles son causadas por las limitaciones de la resolución de la imagen. Cada pixel es un valor promedio, que representa la intensidad o color de una subárea de una imagen del mundo real. La resolución de un archivo, es el número de pixeles utilizados para representar un área dada.

- Un archivo de pixeles de baja resolución utiliza poca cantidad de pixeles para almacenar, que resulta en archivos muy pequeños que contienen pocos datos. Por tanto, se sacrifica detalle en la imagen.
- Un archivo de pixeles de alta resolución puede almacenar un nivel considerable de detalle, pero debido a que gran cantidad de pixeles deben ser almacenados, estos archivos serán enormes, no manipulables y aumentarán lógicamente los costos para su almacenamiento y transferencia.

El modelos fractal de imágenes representa una imagen, enteramente en términos de sus propiedades fractales. Mejor que un conjunto de valores para cada pixel, un archivo FIF

(Formato de Imagen Fractal) contiene un registro de patrones repetidos que existen en una imagen.

- Estos patrones pueden ser expresados substancialmente con pocos números, para generar archivos de imagen fractal mucho mas pequeños.
- No hay nada en el proceso de almacenamiento de estos patrones que asuma la utilización de una rejilla de pixeles en particular.

Actualmente las imágenes pueden ser observadas en un monitor con una resolución dada, impresas con otra, y utilizadas en una aplicación simplemente con otra resolución. Dado que los formatos de imagen basados en pixeles son digitales, dichas imágenes necesariamente son digitalizadas a una resolución especifica, estas imágenes no tienen propiedades de escala nativas que les permita flexibilidad Métodos tales como escalamiento lineal o interpolación cúbica pueden ser utilizados para convertir imágenes basadas en pixeles a otra resolución, sin embargo las imágenes convertidas frecuentemente muestran un suavizado o aspecto borroso artificial, lo que resulta en una pérdida significativa de la calidad de la imagen.

Dado que los archivos FIF no almacenan información referente a una resolución o entramado de pixeles, las imágenes fractales son de ***resolución independiente***. Los archivos de imágenes pueden ser mostrados o impresos en la mayoría de las resoluciones. La misma imagen puede ser observada como una imagen pequeña, o una de un tamaño más grande que su contraparte basada en pixeles.

Así como la tecnología en pantallas de monitor e impresoras desarrolla y posibilitan el incremento en resolución, las imágenes fractales creadas hoy en día, serán capaces de tomar ventajas de las nuevas características del nuevo hardware. Sólo hace pocos años atrás, las imágenes cotidianas mostradas en una computadora tenían una resolución de 320 X 200 pixeles. Hoy las mas comunes son, las resoluciones de 800 X 600 y mayores. Las resoluciones de impresión han incrementado de 150 puntos por pulgada (*dots per ich, dpi*) a 600, 1200 y hasta 1800 dpi. Esta tendencia se espera continúe.

Sólo las imágenes que son expresadas en un formato de resolución independiente serán escalables y lograrán satisfacer expectativas del usuario al incrementar la calidad de estas altas resoluciones. Las imágenes fractales creadas hoy en día, tendrán una apariencia mejor en el futuro, en monitores e impresoras de alta resolución.

Los archivos de formato de imagen fractal (FIF) son creados utilizando el proceso de la transformada fractal, en el cual la imagen de entrada es sistemáticamente examinada en busca de patrones iguales. Primero, la imagen entera es dividida en regiones llamadas ***bloques de dominio***. Por cada bloque de dominio, se selecciona otra región en la imagen que se aproxime al dominio, denominada ***bloque de rango.*** Los bloques de rango son frecuentemente más grandes que los bloques de dominio y pueden ser rotados o reflejados para buscar una aproximación mayor al dominio.

La ubicación del bloque de rango y los datos necesarios para transformarlo en el bloque de dominio son la única información almacenada en el archivo FIF. Por lo tanto, la imagen es almacenada en términos de sí misma y de sus propiedades fractales en lugar de almacenar la información de cada pixel. Debido a esto, se requiere de menor cantidad de bytes y las imágenes expresadas como archivos FIF siempre conducirán a una compresión.

Cuando una imagen fractal es codificada hacia un archivo basado en pixeles, hacia la pantalla de un monitor o hacia una impresora, su independencia de resolución le permite poder ser mostrada en un amplio rango de resoluciones, tanto más pequeña como más grande respecto a la imagen original basada en pixeles.

Una vez mostrada la imagen, pueden hacérsele acercamientos y entonces se crearan nuevos detalles a partir de propiedades fractales de dicha imagen. Al hacer un acercamiento fractal, este permite ver ampliaciones de alta calidad en la imagen, que no tiene apariencia escalonada (pixelización) la cual se asocia con técnicas de duplicado e interpolación de pixeles, utilizadas en otros tipos de formatos de imagen, al aplicarles una ampliación.

Transformada fractal

Las imágenes del mundo real contienen información redundante. Por ejemplo, la textura de la corteza de un tronco de un árbol está compuesta de patrones que se repiten. Por supuesto, que la corteza en alguna parte del árbol no es exactamente igual a la corteza en otras partes del árbol De cualquier forma, si se copia una sección pequeña de una imagen de la corteza del árbol, y ésta es rotada, alargada, y reposicionada, ésta sección puede parecerse a otras secciones de la corteza.

Al proceso de rotar, alargar y mover se le llama transformación afín. Cualquier transformación afín puede expresarse en términos matemáticos con poca cantidad de números, a esta expresión matemática se le denomina transformada afín. Estos números son coeficientes que están incorporados en una ecuación dada estandarizada.

Por ejemplo, regresando al ejemplo de la corteza del árbol· todo lo que se requiere para generar la textura de dicha corteza es un modelo matemático de dicha textura, que consiste en un conjunto de transformaciones afines que puedan recrear la imagen del mundo real de la corteza del árbol.

Durante un proceso de codificación, la imagen de entrada es dividida en áreas denominadas **dominios**.

Los dominios son las unidades de la imagen que están representadas en un archivo FIF. Dichos dominios deben cubrir completamente la imagen. Si no es posible almacenar un bloque de dominio con la cantidad deseada de precisión y detalle, se procede a dividir el bloque en dominios mas pequeños

Por cada dominio, se busca otra área de la imagen, llamada **rango**. Un rango es una parte de la imagen a la cual se le aplica una transformada afín para aproximarla al dominio

Se comparan los pixeles del rango recosntruido y el dominio, y se comprueba la correlación entre los valores de intensidad de los pixeles de estos dos bloques. Se repite la prueba para muchos de los rangos probables hasta encontrar un mejor rango. Entonces se calcula la transformada afín que realice la transformación desde el bloque de rango hasta el bloque de dominio.

En el archivo FIF, por cada dominio de la imagen de entrada, se almacena una transformación que se caracteriza por contener una ubicación, tamaño, orientación del bloque de rango, además de los datos necesarios para transformar el rango a la imagen del dominio. Es importante notar que no existe referencia sobre algún entramado de pixeles de la imagen de entrada, en dichos datos Es por ello que se establece que el archivo FIF es de *resolución independiente*.

Utilización de fractales para la compresión

Compresión es el proceso de reducir el tamaño de la información, con mínima o sin pérdida de esta misma información. La compresión ahorra tiempo de transmisión y espacio de almacenamiento A la conversión de información de imágenes de mapas de bits hacia el formato FIF, se le puede llamar compresión, ya que la codificación fractal, de hecho, reduce el tamaño del archivo.

Los archivos de imágenes a color pueden ser muy grandes en tamaño. Para muchas aplicaciones, es fácil generar una imagen que también sea grande y que quepa completamente en disco flexible de alta densidad. Aunque el espacio de almacenamiento paulatinamente va siendo cada vez mas barato, y los discos duros de capacidad cada vez mayor, el tratar de conservar espacio se convierte en una tarea diaria.

Actualmente, la popularidad de los CD-ROM no ha eliminado la necesidad de la compresión de archivos. De hecho, probablemente esto hace que la compresión sea más importante. El enorme crecimiento de la multimedia es un factor importante del crecimiento de la información.

Los desarrolladores de estos productos quieren ser capaces de almacenar cientos de bytes de sonido, imágenes fijas, secuencias de vídeo, etc., en un simple CD-ROM. La única forma en que puede realizarse esto, es a través de la compresión fractal.

Todas las técnicas de compresión se agrupan en dos categorías básicas: *lossy y lossless* La compresión *Lossless* es aquella donde no existe pérdida de información durante el proceso de compresión y por tanto, la información original puede ser exactamente recuperada, bajo el proceso de descompresión Este tipo de compresión se utiliza para archivos en los cuales cualquier pedida de información podría provocar que esta no pueda ser útil, por ejemplo los archivos de texto, hojas de cálculo y tratamiento de imágenes en medicina. Las técnicas de compresión de datos de tipo lossless genera una razón de compresión promedio de 3:1

La compresión *Lossy*, es aquella en donde existe pérdida de datos en el proceso de compresión y estos no pueden recuperarse bajo el proceso de descompresión. Las técnicas Lossy se aplican principalmente para imágenes. Los archivos de imágenes contienen datos redundantes que pueden ser eliminados sin afectar la integridad visual de la imagen. En muchos casos, la información de la imagen descompactada puede dar la apariencia de que ha sido compactada mediante alguna técnica de compresión de tipo Lossless, y a esto se le puede referir como compresión de apariencia Lossless. Las razones o proporciones de compresión de tipo Lossy varían enormemente y son un factor para la calidad de imagen, velocidad de compresión y tamaño del archivo.

La compresión fractal es del tipo Lossy, sin embargo a menudo este método (de apariciencia Lossless) puede producir proporciones de compresión de hasta 100:1, dependiendo de la imagen.

Compresión estándar vs Compresión fractal

Uno de los métodos de compresión tipo lossy más generalizado, utilizado hoy en día es el JPEG (Joint Photographic Experts Group), Grupo de Expertos de la Unión Fotográfica. El JPEG describe las formas de almacenar imágenes de un mapa de bits de color o escala de grises, en base a un número pequeño de bytes de información.

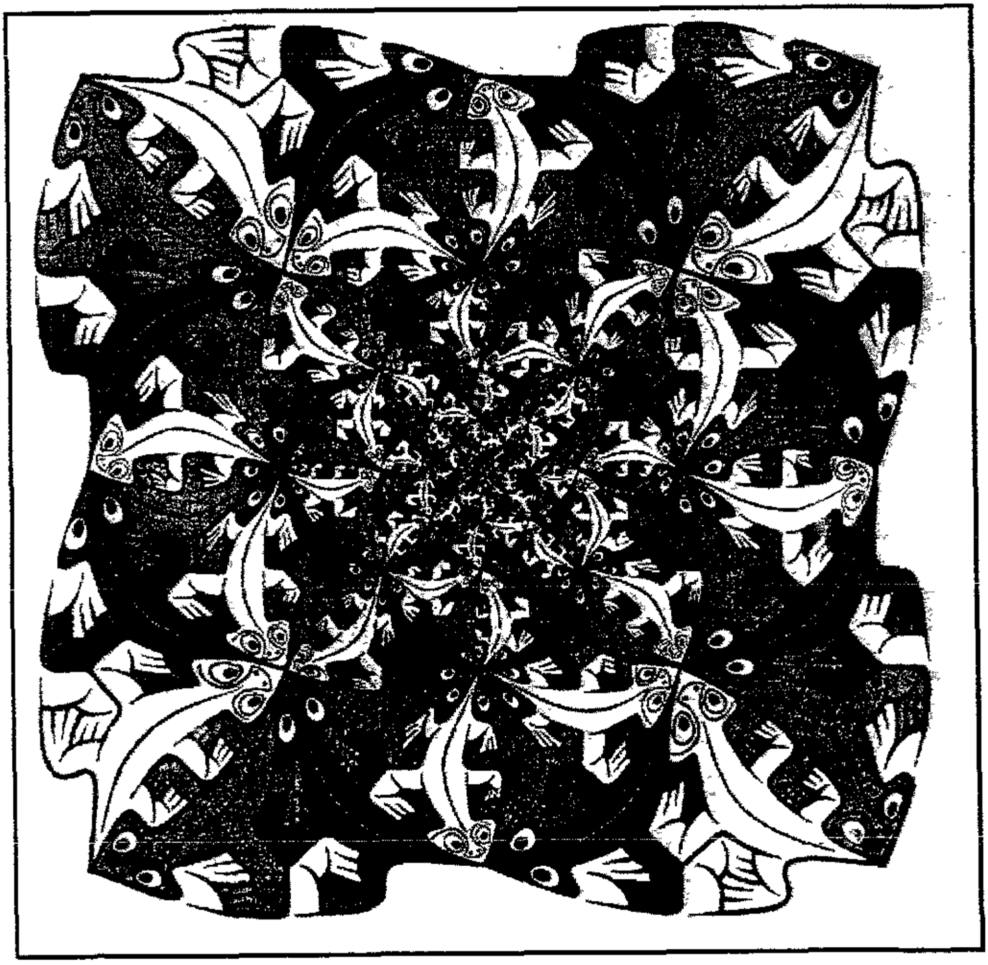
Para lograr altas proporciones de compresión con JPEG, la calidad de la imagen de los archivos descompactados se reduce de forma significativa, con respecto a la imagen original. JPEG trabaja al descartar la información que visualmente es irrelevante en una imagen , o al almacenar sólo una fracción de la información total en cualquier sección dada. En archivos más pequeños, la información se pierde y permanece un menor detalle de la imagen. Por razones de compresión todavía mayores, esto conduce a un cuadriculado o pixeleado de la imagen.

Dado que las imágenes fractales no están basadas en pixeles, estas ofrecen una mayor reproducción de la imagen original a cualquier resolución, asegurando la mayor calidad de la imagen en cualqüier aplicación, desde una base de datos hasta una enciclopedia en multimedia Dada la naturaleza de la transformada fractal, la información que se pierde como resultado de la codificación fractal es la informacion que es visualmente menos importante, tal como detalles en finas texturas. La extensión de los datos perdidos puede ser controlado en el proceso de la transformada fractal. No como en otros formatos que compactan la información de la imagen, la codificacion fractal permite un mínimo de artificios sobre la imagen.

Una imagen fractal es una fracción del tamaño de su contraparte basada en pixeles (aproximadamente una centésima parte), sin embargo contiene una gran calidad de la imagen. Por ejemplo, un archivo de mapa de bits o tipo TARGA de 921 KB de tamaño puede ser convertida a una imagen de tipo FIF que requiera de solo 10 Kb para su almacenamiento. De esta manera un número aproximado de 100 imágenes de alta calidad puede guardarse en un solo disco flexible En tanto que con las tecnologías más competitivas, solo se podrían almacenar alrededor de 25 imágenes de la misma calidad en un mismo disco flexible

Las imagenes fractales son de resolucion independiente, esto significa que estas pueden ser visualizadas a resoluciones tanto mayores como menores, que la imagen original. Las imagenes basadas en pixeles no son de resolución independiente. Cualquier intento de visualizar estas imagenes basadas en pixeles, a latas resoluciones podría resultar en una apariencia cuadriculada o de bloques, asociada con una duplicación de pixeles a la apariencia suavizada debida a la interpolacion realizada sobre la imagen.

CONCLUSIONES



CONCLUSIONES

"Tú crees en un Dios que juega a los dados, y yo en las leyes y el orden absolutos en un mundo que objetivamente existe y al que, de manera alocadamente especulativa, estoy tratando de capturar. Lo creo firmemente, pero espero que alguien descubra un modo más realista o, más bien, una base más tangible de la que me a tocado en suerte realizar. Ni siquiera el gran éxito inicial de la teoría cuántica me hace creer en el juego fundamental de los dados, aunque soy consciente de que tus colegas más jóvenes interpretan esto como un signo de senilidad."

Carta de A. Einstein a Max Born.

El caos tiene muchas lecciones que enseñarnos. Su principal mensaje es uno de carácter general "No te precipites en tus conclusiones" Los fenómenos irregulares no requieren de ecuaciones complicadas o ecuaciones en términos aleatorios explícitos

Este mensaje funciona en ambas direcciones

Primero, incluso si eres lo bastante afortunado e inteligente como para inventar buenas ecuaciones, puedes encontrar problemas a la hora de entender el sistema que ellas simulan Aunque las ecuaciones sean muy simples, el comportamiento del sistema no tiene porque serlo El que algo sea complejo depende de las preguntas que hagas y del punto de vista que adoptes

Y segundo, un fenómeno que parezca complicado puede no serlo en realidad. Puede estar gobernado por un modelo simple, pero caótico Ahora nos estamos adentrando en el caos del diseño: el uso de la experiencia con los casos típicos de la dinámica para construir modelos admisibles

A veces funciona. Los latidos del corazón y quizás los giros de Hiperión son ejemplos, en los cuales lo hace Tras un contacto con el caos, entendemos mejor el problema físico.

Pero, a veces no funciona No se han dado muestras de que exista ninguna evidencia de que la dinámica caótica pueda mejorar la calidad de las predicciones meteorológicas Su principal contribución hasta la fecha es el sugerirnos que estamos haciendo una pregunta sin sentido. Predicciones con unos cuantos días de adelanto, quizás una semana, eso es posible. ¿Un mes? No hay ninguna esperanza.

En el análisis numérico surge un problema con el caos el modo de calcular de las computadoras. Pensemos en el problema de cómo dibujar el atractor de Lorenz La forma normal de hacerlo, es resolviendo las ecuaciones de Lorenz numéricamente y dibujando los resultados en la pantalla. ¿Qué puede haber más fácil que eso? Pero se trata de un atractor caótico, por ello estamos tratando de dibujarlo. En un atractor caótico, se tiene una dependencia muy sensible a las condiciones iniciales Los pequeños errores se magnifican rápidamente. Lo que sabemos acerca del atractor de Lorenz es que nuestra solución aproximada de la ecuación diferencial no es tal

En varias ocasiones nos hemos encontrado con una curiosa característica de la *dinámica caótica: el mismo problema ejecutado en computadoras de diferentes marcas* conduce a resultados diferentes. Existe un artículo científico que resuelve numéricamente un sistema caótico en dos supercomputadoras de marcas diferentes con una precisión de unas cincuenta cifras decimales. Debido a que las computadoras poseen diferentes sistemas operativos. Los cálculos numéricos son realizados de forma diferente, y enseguida comienzan a producir resultados totalmente diferentes. Si estuvieran calculando el tiempo, entonces uno predeciría una ola de calor y el otro una ventisca. Si creíamos que las computadoras eran infalibles, hay que pensarlo de nuevo.

A pesar de esto, si cien personas dibujaran el atractor de Lorenz con cien computadoras de marcas diferentes, todos veríamos básicamente la misma forma.

En cierto sentido se trata de la misma cuestión anterior Si creemos que estamos resolviendo el problema de los valores iniciales de la ecuación de Lorenz, con las *condiciones numéricas exactas* que le damos a la computadora, entonces nos estamos engañando Pero si creemos que estamos dibujando una trayectoria sobre él, entonces estamos en el camino adecuado. Los errores pequeños que separan a nuestro punto del atractor decrecen rápidamente *Tal como lo indica la palabra 'atractor'. Sólo los errores en* el atractor son los que divergen

Se trata de una teoría que parece que funciona Pero no es, en modo alguno, un razonamiento cerrado Existen algunos teoremas que parecen justificarla matemáticamente. Uno de ellos nos dice, en líneas generales, que lo que uno dibuja es una trayectoria de una ecuación diferencial, o algo muy próximo a una; simplemente ocurre que no es la trayectoria que tú crees que estas dibujando. Pero existen dificultades de interpretación que arrojan dudas sobre si dichos teoremas dicen lo que la gente normalmente cree que dicen

Las dificultades anteriores también han forzado a revisar la idea convencional de los *test experimentales*. Convencionalmente se empieza con la teoría, se realiza ciertas predicciones y se lleva a cabo un experimento para comprobarlas Si éste no las contradice, se dice que se han verificado las predicciones y se supone que la teoría es correcta.

Para infundir convicción un experimento debe ser repetible Si dos científicos realizan un experimento en dos laboratorios diferentes, deberían de obtener los mismos resultados. Evidentemente, cualquier efecto que pudiera variar los resultados ha de tenerse en cuenta y paulatinamente ser eliminado Hace más calor en Bombay que en Moscú; si la temperatura influye, el científico hindú debería hacer su experimento en un frigorífico y el ruso debería encender la calefacción

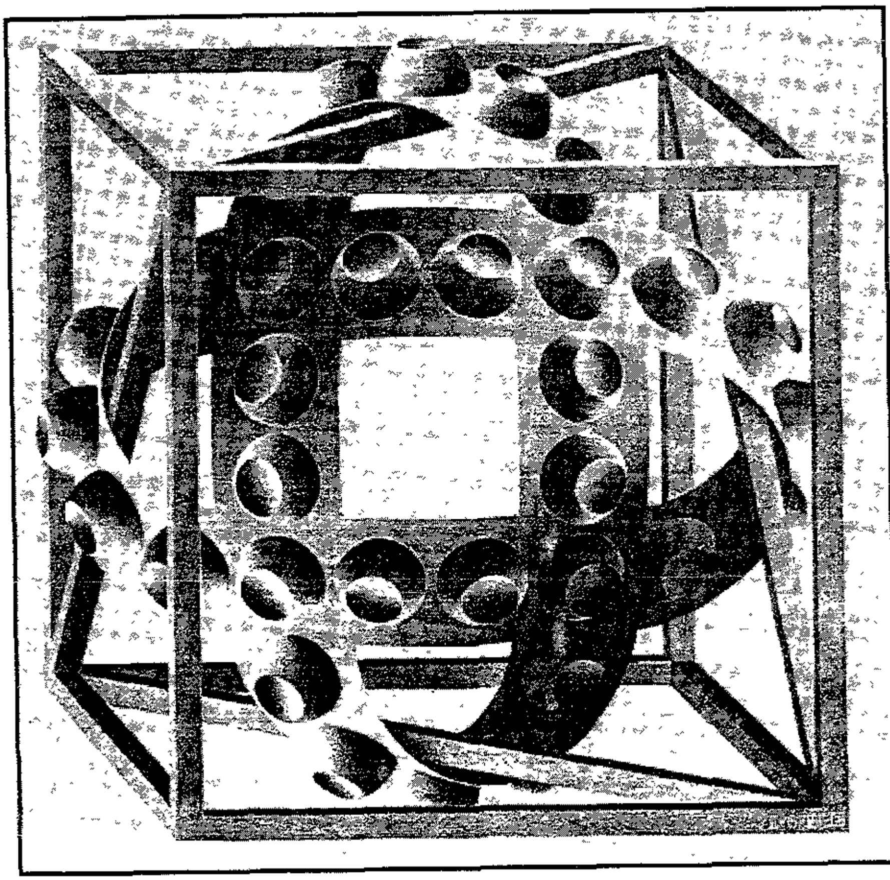
Pero una trayectoria caotica, a partir de una condición inicial dada, es un experimento irrepetible Es en verdad una prediccion no repetible, como el ejemplo de las dos supercomputadoras dejo claro Uno podría argumentar que en una marca de computadoras el experimento es repetible Pero laboratorios diferentes deberían de poder usar, desde luego, equipos diferentes

Así, el caos nos dice incluso que si nuestra teoría es determinista no todas sus predicciones conducen a experimentos repetibles Solo aquellas que son estables, bajo cambios pequeños de las condiciones iniciales, son buenas candidatas para un test Por ejemplo, la topologia del atractor o su dimensión fractal

Ello significa que podemos comprobar si, por ejemplo, un modelo caótico de la turbulencia describe exactamente la forma de comportarse de un fluido, considerado como un todo, pero no podemos comprobar si una particula dada esta obedeciendo realmente a las ecuaciones dinamicas de Navier y Stokes No directamente, algunos detalles de esta teoría están mas allá de posibles test practicos

La teoria del caos es un buen acercamiento para entender muchos fenómenos, que parecian no tener explicacion, pero para muchos otros parece no funcionar No podemos predecir hacia donde va la ciencia, tal vez existan fenómenos que nunca podamos comprobar Lo unico que podemos decir con certeza es que en la ciencia "nada esta dicho aún"

BIBLIOGRAFIA



BIBLIOGRAFÍA

BRAUN, Elizer [1]
"Caos, Fractales y Cosas Raras"
Primera Edición
FCE, México, 1996 154 pp

BRIGGS, John y PEAT, F. David [2]
"Espejo y Reflejo: Del Caos al Orden"
PrimerA Edición
Gedisa-Conacyt, México, 1991, 222 pp

CESARMAN, Eduardo [3]
"Orden y Caos- El complejo Orden de la Naturaleza"
Segunda Edición
Ediciones Gernika, México, 1982, 512 pp.

GLIECK, James [4]
"Caos- La Creación de Una Ciencia"
Segunda Edición
Six Barrral, España, 1994, 358 pp

GRAVES, Robert [5]
"Los Mitos Griegos"
Quinta Edición
Alianza Editorial, México. 1992, 465 pp

GULICK, Denny [6]
"Encounters with Chaos"
Primera Edición
McGraw-Hill, Singapure, 1992, 305pp.

MANDELBROT, Benoît [7]
"Los Objetos Fractales- Forma, Azar y Dimensión"
Primera Edición
Tusquets, España, 1997, 213 pp

PERALTA-FABI, Ramón [8]
"Fluidos: Apellido de Líquidos y Gases"
Primera Edición
FCE, México, 1993, 150 pp

RUELLE, David [9]
"Azar y Caos"
Primera Edición
Alianza Editorial, España, 1993, 202 pp

STEWART, Ian [10]
"¿Juega Dios a los Dados? - La Nueva Matemática del Caos"
Segunda Edición
RBA Editores, España, 1994, 281 pp

TALANQUER, Vicente [11]
"Fractus, Fracta, Fractal – Fractales, De Laberintos y Espejos"
Primera Edición
FCE, México, 1996, 109 pp.

Todas las ilustraciones en las Portadas de cada capitulo de **M.C. Escher**

"Draaikolken" ***(Remolinos)***
"Vilders" ***(Mariposas)***
"Dag en nacht" ***(Día y Noche)***
"Relativiteit " ***(Relatividad)***
"Tegenstelling" ***(Orden y Caos)***
"Kleiner en kleiner" ***(Cada vez Más pequeño)***
"Kubus met baden" ***(Dado de cintas mágicas)***