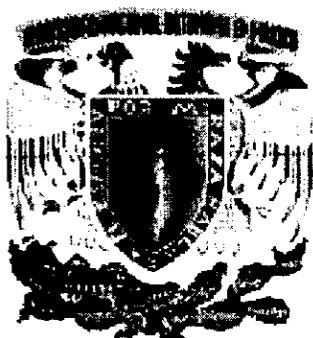


00364
2



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EVALUACIÓN Y MEDICIÓN DE FUERZAS ENTRE CONDUCTORES ELECTRIZADOS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA)

P R E S E N T A
ADRIÁN CORONA CRUZ



DIRECTOR DE TESIS:
DR. EUGENIO LEY KOO



posgrado en ciencias físicas
unam



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres:

Sr. Pedro y Sra. María

A mi esposa e hijos:

Alina, Xelhua, Quetzalma y Xiuhnel

A mis hermanos:

Carmen^t, Fidel, Jesús, José Luis, Teresa y Amanda

A todos ellos, por su apoyo, comprensión y amor.

A mis maestros quienes me transmitieron sus conocimientos.

A mi alma máter, que me instituyó y dio la oportunidad de concluir una etapa más de mi formación.

A la Universidad Autónoma de Puebla, que me apoyó para culminar éste estudio.

A mis compañeros, quienes me apoyaron y alentaron. En especial al profesor Martínez Peña, por sus comentarios y sugerencias.

Al Dr. Eugenio Ley Hoo, quien durante la elaboración de ésta tesis me guió y tuvo paciencia.

Índice

<i>Introducción.</i>	<i>Pág. 5</i>
Capítulo I	Pág.
<i>Introducción general a la evaluación y medición de propiedades eléctricas.</i>	
I.1 – Evaluación de propiedades electrostáticas.	9
I.2 – Medición de fuerzas entre cuerpos eléctricamente cargados.	11
Capítulo II	
<i>Evaluación de propiedades eléctricas y fuerza entre cilindros conductores.</i>	
II.1 – Introducción.	13
II.2 – Operador laplaciano en coordenadas bipolares cilíndricas.	13
II.3 – Potencial electrostático de un condensador bicilíndrico.	16
II.4 – Intensidad eléctrica, densidad de carga y carga total en cilindros conductores a diferencia de potencial fijo.	18
II.5 – Fuerza electrostática entre los electrodos de un condensador bicilíndrico calculada por medio del Tensor de esfuerzos de Maxwell.	20
II.6 – Fuerza electrostática entre los electrodos de un condensador bicilíndrico calculada por medio de la energía electrostática.	21
II.7 – Límite de radios pequeños o de distancias grandes.	22
Capítulo III	
<i>Medida de la fuerza electrostática entre cilindros conductores.</i>	
III.1 – Introducción.	23
III.2 – Descripción de aparatos.	23
III.3 – Procedimiento experimental.	24
III.4 – Mediciones y cálculos teóricos.	26
III 4.1 – Valores medidos de la fuerza entre dos cilindros.	26
III 4.2 – Fuerza vs distancia entre cilindros de diferente longitud.	33
III 5 – Análisis de los resultados.	34

Capítulo IV

Evaluación de propiedades eléctricas y fuerza entre esferas conductoras.

IV.1 – Introducción.	35
IV.2 – Operador laplaciano en coordenadas biesféricas.	35
IV.3 – Solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas biesféricas.	38
IV.4 - Potencial obtenido de la función de Green de Dirichlet en funciones armónicas biesféricas.	40
IV.5 – Intensidad eléctrica, densidad superficial de carga y cargas totales de dos esferas conductoras a diferencia de potencial fijo.	43
IV.6 – Cálculo de la fuerza entre esferas conductoras por medio del tensor de esfuerzos de Maxwell.	46
IV.7 – Análisis de la convergencia de las series para la fuerza.	48
IV.8 – Límite de radios pequeños o de distancias grandes.	51

Capítulo V

Medida de la fuerza electrostática entre dos esferas conductoras

V.1 – Introducción.	53
V.2 – Descripción de aparatos.	53
V.3 – Procedimiento experimental.	54
V.4 – Mediciones y cálculos teóricos.	54
V.5 – Análisis de resultados.	60
V.6 - Propuesta experimental para medir la fuerza en rango $0.01 < \Delta < 0.001$ cm de separación entre las superficies de las esferas.	62

Capítulo VI

Conclusiones

VI.1 – Evaluación de propiedades eléctricas de pares de cilindros y esferas conductoras.	66
VI.2 – Medición de fuerzas entre pares de cilindros y esferas conductoras.	67

Apéndices

Apéndice I	Construcción de la función de Green libre en términos de armónicos bipolares. Evaluación del potencial a partir de la densidad de carga de los electrodos.	68
Apéndice II	Desarrollo de la función libre de Green en coordenadas biesféricas, y construcción del potencial.	71
Apéndice III	Fuerza electrostática entre esferas conductoras, por el método de imágenes.	77
Referencias		84

Introducción

La presente tesis tiene como base las experiencias académicas de dos grupos de trabajo: una de ellas relacionada con la práctica docente en los laboratorios de Física de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), y la otra asociada a los artículos de enseñanza del Dr. Eugenio Ley Koo y colaboradores, investigadores del Instituto de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (IFUNAM), los cuales han sido escritos en respuesta a preguntas de interés académico^[1] y de investigación^[2].

La escritura del artículo “Forces between two uniformly charged cylinders versus forces between two conducting cylinders”^[1] estuvo motivada por la pregunta del profesor Josip Slisko* a Guillermo Monsiváis** “¿Bajo qué condiciones la fuerza entre dos esferas conductoras se puede aproximar mediante la ley de Coulomb?”. Desde luego, la respuesta a esta pregunta es bien conocida, pues la ley de Coulomb es válida para describir la fuerza entre dos distribuciones monopulares o esféricamente simétricas de carga; en la medida en que se dan los efectos de inducción electrostática, la fuerza muestra desviaciones respecto a la ley de Coulomb^[3]. Dado que un condensador bicilíndrico es un problema bidimensional separable, ha resultado ser un problema que ilustra en forma simple el efecto de inducción^[1]. En la Ref. [1] se señala que en el artículo, “On the evaluation of the capacitance of bispherical capacitors”^[2], se reportan las bases para evaluar la fuerza entre esferas conductoras, tratándose de un problema más complicado por ser tridimensional y restringidamente separable.

Durante la estancia sabática del Dr. Eugenio Ley Koo, en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Tonantzintla, Puebla, se discutió la posibilidad de analizar las mediciones de las fuerzas entre esferas conductoras mantenidas a una diferencia de potencial fijo. A partir de las discusiones correspondientes, se decidió llevar a cabo las mediciones de las fuerzas entre cilindros conductores pues ya se tenían los resultados de la Ref.[1]. En el XXXVIII Congreso Nacional de Física realizado en Zacatecas (1995)^[4] se presentaron resultados preliminares de tales mediciones y de su análisis respecto al cuadrado de la diferencia de potencial y de una función bien definida de la separación y los radios de los cilindros.

** Investigador de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP

* Investigador del Instituto de Física, UNAM

Posteriormente, al considerar la posibilidad de integrar el trabajo ya realizado en una tesis de maestría, se reconoció que sería posible si se evaluaba la fuerza electrostática entre las esferas conductoras con base a la Ref. [2] y se realizaban las mediciones correspondientes.

En conclusión, el propósito de ésta tesis es evaluar las propiedades eléctricas de arreglos de conductores cilíndricos y esféricos, medir las fuerzas entre pares de ellos, y analizar las mediciones comparando con los valores calculados. El contenido de la tesis se ha distribuido en los siguientes capítulos.

En el Capítulo I, se describen las leyes y ecuaciones de la electrostática, usadas para la evaluación de la fuerza. Se introducen los antecedentes experimentales sobre la medición de la fuerza entre esferas conductoras eléctricamente cargadas. Finalmente se argumenta el método experimental seguido para ésta investigación.

En el Capítulo II, haciendo uso de coordenadas bipolares cilíndricas, se evalúan las propiedades eléctricas de pares de cilindros paralelos mantenidos a una diferencia de potencial fijo. Se calcula el vector de desplazamiento en estas coordenadas, identificando los vectores unitarios, los factores de escala asociados, y el operador Laplaciano.

Se establece que la ecuación de Laplace es separable en estas coordenadas en la aproximación de cilindros infinitamente largos, convirtiéndose el problema correspondiente en bidimensional. Las funciones armónicas bipolares son senos o cosenos hiperbólicos y trigonométricos de múltiplos enteros de la coordenada η "radial" y ξ "angular" circular. Para el problema eléctrico de dos cilindros conductores mantenidos a potenciales fijos, las condiciones de frontera de Dirichlet se satisfacen con el armónico de orden más bajo. Resultado que implicó que la función de potencial resultara lineal en la coordenada circular radial η

Correspondientemente, las superficies equipotenciales son cilindros circulares ($\eta = \text{constante}$) anidados entre los electrodos que constituyen un condensador bicilíndrico. El campo eléctrico, calculado como el negativo del gradiente del potencial, tiene la dirección del vector unitario $\hat{\eta}$ perpendicular a la superficie de los cilindros equipotenciales.

En otras palabras, las coordenadas bipolares resultan ser las coordenadas naturales para describir el campo de fuerza y el campo de potencial del sistema eléctrico. La ley de Gauss aplicada como condición de frontera en los electrodos permite determinar la distribución de carga en cada uno de ellos y también, por integración, sus densidades lineales. La fuerza electrostática entre los electrodos se calcula usando tanto el tensor de Maxwell como a partir de la energía del condensador. También, se analiza la convergencia de la solución Ec. (II.25) en el

límite de radios pequeños o distancias grandes. En el Apéndice I se incluye la construcción, en coordenadas bipolares, de la función de Green libre, y su aplicación para calcular el potencial electrostático a partir de la distribución de carga conocida sobre los cilindros.

En el Capítulo III se describe el arreglo experimental para medir la fuerza entre cilindros conductores paralelos sujetos a diferencias de potencial fijo y en diferentes arreglos geométricos. Se reportan los valores de las mediciones realizadas y el análisis de las mismas usando las expresiones teóricas para la fuerza obtenidas en el Capítulo II. La comparación entre los valores medidos y calculados muestran un buen acuerdo cualitativo y cuantitativo en su dependencia transversal; asimismo se asientan las diferencias cuantitativas en el caso de cilindros con longitudes diferentes. También, se muestra el comportamiento de los valores medidos con el efecto de la redistribución de la carga, respecto a la ecuación obtenida en la Ref. [1] para cilindros uniformemente cargados E_c (II.31).

En el Capítulo IV se usan coordenadas biesféricas para evaluar las propiedades eléctricas de un par de esferas conductoras. En este caso la ecuación de Laplace no es separable sino en forma restringida, con la raíz cuadrada de un factor binomial que depende de las coordenadas biesféricas “radial η ” y “angular ξ ”, $(\cosh\eta - \cos\xi)^{1/2}$. Correspondientemente, las condiciones de frontera de Dirichlet de los electrodos que se encuentran a una diferencia de potencial, no se pueden satisfacer de manera simple a partir de la solución general de la ecuación de Laplace. La solución de este problema fue construida por Góngora y Ley Koo empezando con la función de Green de Dirichlet como una serie infinita de funciones armónicas biesféricas^[2]. El cálculo de la fuerza entre los electrodos esféricos se realiza integrando el tensor de Maxwell sobre la superficie de uno de ellos. Se muestra su rápida convergencia, comparándola con la lenta convergencia de la solución de Maxwell del Apéndice III. Además, se analiza la convergencia de la fuerza en el límite de radios pequeños o de distancias grandes. En el Apéndice II se presenta la construcción de la función de Green libre y su aplicación para calcular la función de potencial a partir de la distribución de carga conocida sobre las esferas. En el Apéndice III se presenta la versión de Maxwell para calcular la fuerza entre las esferas por el método de imágenes^[5]

En el Capítulo V se reportan las mediciones de fuerzas entre pares de esferas conductoras a diferencia de potencial fijo y a diversas distancias. El análisis de los valores medidos se realiza con base en la fuerza calculada como una serie de armónicos biesféricos, encontrándose un buen acuerdo cualitativo y cuantitativo.

Finalmente, en el Capítulo VI se hace un análisis general, identificando el comportamiento de las expresiones para el potencial, campo, densidad superficial de carga y fuerza, respectivamente, entre dos cilindros y dos esferas. En el caso del sistema formado por cilindros, sólo fue necesario un término para describir los resultados experimentales. Con relación, al efecto de longitud finita de los cilindros, se muestra gráficamente que el efecto de orilla, a medida que los cilindros son de la misma longitud, el efecto tiende a cero. En el caso de las esferas la solución converge rápidamente; en el rango de distancias entre $0.4 < d < 8$ cm, se requirieron dos términos de la solución, para describir los resultados experimentales y diez términos para la región cercana, $d = 3.57$ cm, distancia que corresponde a dos milímetros entre sus superficies.

Capítulo I

Introducción general a la evaluación y medición de propiedades eléctricas

I.1 - Evaluación de propiedades electrostáticas

En esta parte se hace una breve revisión de las leyes, ecuaciones y teoremas de electrostática que se utilizan en los capítulos II y IV para evaluar las propiedades eléctricas y las fuerzas entre pares de cilindros y esferas conductoras, respectivamente.

La ley de Gauss reconoce que las cargas eléctricas son fuentes de flujo eléctrico. Aquí nos interesa su forma diferencial,

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) \quad (\text{I.1})$$

en donde $E(\vec{r})$ es la intensidad de campo eléctrico y $\rho(\vec{r})$ es la densidad volumétrica de carga. En el caso de que el campo presente una discontinuidad debido a una distribución superficial de carga $\sigma(\vec{r})$, la ley de Gauss muestra que en la discontinuidad, el campo en cada lado de la superficie E_1 y E_2 cumplirá la condición

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma(\vec{r}) \quad (\text{I.2})$$

donde \hat{n} es el vector normal a la superficie

El campo electrostático es conservativo, por lo tanto es irrotacional,

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad (\text{I.3})$$

y derivable de un potencial electrostático

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}). \quad (\text{I.4})$$

La condición de frontera correspondiente implica que las componentes tangenciales del vector de intensidad de campo eléctrico a uno y otro lado de una superficie son continuas,

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n} = 0 \quad (\text{I.5})$$

El potencial electrostático satisface la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}), \quad (\text{I.6})$$

que resulta de la sustitución de la Ec. (I.4) en la Ec. (I.1). En aquellas regiones donde no hay cargas el potencial electrostático satisface la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 0. \quad (\text{I.7})$$

Las soluciones integrales de las Ecs. (I.1 y I.6) con la condición de frontera de anularse al infinito son:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad \phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (\text{I.8})$$

que se obtienen al combinar la ley de Coulomb y el principio de superposición. Las expresiones correspondientes cuando las cargas se encuentran distribuidas sobre superficies son

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\sigma(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} da' \quad \phi(\vec{r}) = \int \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} da' \quad (\text{I.9})$$

Éstas ecuaciones por lo general se usan para resolver problemas que implican distribuciones volumétricas Ec. (I.8) y superficiales de carga Ec. (I.9) sin superficies limitadoras.

Cuando se estudian sistemas formados por objetos cargados o no, inmersos en un campo electrostático, con condiciones de frontera en su superficie, la solución de la ecuación de Poisson o Laplace, se puede obtener por medio del teorema y funciones de Green.

La función de Green es el potencial electrostático debido a una carga puntual unitaria, que satisface la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{I.10})$$

Cuando existen condiciones de frontera, el uso de los teoremas de Green para las funciones $\phi(\vec{r})$ y $G(\vec{r}, \vec{r}')$ de las Ecs. (I.6) y (I.10) conduce a la expresión para el potencial electrostático.

$$\phi(\vec{r}) = \int G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dv' + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') da' - \frac{1}{4\pi} \int \phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} da' \quad (\text{I.11})$$

en donde $\frac{\partial}{\partial n'}$ es la derivada en la dirección de la normal a las superficies.

Las soluciones formales de problemas electrostáticos por sus condiciones de frontera, se identifican como:

- 1) De Dirichlet, cuando el valor del potencial se especifica sobre una superficie $\phi(\vec{r})$, para la cual la función de Green se anula sobre la superficie. $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0$
- 2) De Neumann, cuando el valor de la derivada normal del potencial se especifica sobre la superficie $\frac{\partial \phi}{\partial n'}$, y para la cual la función de Green es tal que la integral de área de su derivada normal en la superficie es por la ley de Gauss:

$$\int_S \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} da' = -4\pi,$$

- 3) De Cauchy en que se especifican ambas $\phi(\vec{r})$, y $\frac{\partial \phi}{\partial n'}$, pero esto no ocurre en problemas de electrostática, porque implica sobredefinición de la situación.

Un conductor inmerso en un campo eléctrico experimenta fuerzas electrostáticas. Estas fuerzas se pueden calcular integrando el tensor de esfuerzos de Maxwell^[6], sobre la superficie del conductor

$$\vec{T} = \frac{\vec{E}\vec{E}}{4\pi} - \frac{1}{2} \gamma \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}}{4\pi} \quad \vec{F} = \int \vec{T} \cdot d\vec{a} \quad (\text{I.12})$$

También, un condensador de capacidad C, cuando se encuentra a una diferencia de potencial V, posee una energía electrostática almacenada^[7]

$$W = \frac{1}{2} V^2 C \quad (\text{I.13})$$

Para calcular la fuerza electrostática a la que están sometidos los electrodos de un condensador, se considera una variación de la distancia entre los electrodos. De éste modo se da un cambio en la energía del condensador, obteniendo así, la fuerza electrostática entre los electrodos. Es decir, al derivar esta energía con respecto a la distancia entre los electrodos de la cuál depende la capacidad, se determina la fuerza electrostática entre los electrodos.

$$F = - \left(\frac{dW}{dd} \right)$$

I.2 - Medición de fuerzas entre cuerpos eléctricamente cargados

La fuerza entre objetos cargados se ha medido con un sistema basado en el principio fundamental de un electrómetro. Sir W. Snow^[8] suspendió un objeto en uno los brazos de una delicada balanza y en el otro brazo colocó pesas hasta que

el sistema se equilibró. Al acercar a cierta distancia del objeto colgado y previamente cargado, otro objeto también cargado en la dirección vertical, éste experimenta una atracción o una repulsión, haciendo que el aparente peso del objeto aumente o disminuya y la balanza se desequilibre. El peso de las pesas que se agregan o retiran del brazo, expresadas en medidas dinámicas, corresponde a la fuerza eléctrica entre los objetos.

Haciendo uso del mismo principio y de la disponibilidad de una balanza electrónica de alta sensibilidad y exactitud, de un catetómetro para medir las distancias entre los objetos en interacción y una fuente de alto voltaje para establecer la diferencia de potencial fija entre los objetos, se implementó el sistema experimental que se muestra en la Fig. (III.2) del capítulo III. Con este arreglo experimental, se midió, para diferentes arreglos geométricos la fuerza electrostática entre pares de cilindros y pares de esferas conductoras a diferentes diferencias de potencial.

Considerando los equipos y arreglos experimentales con los que se han medido las fuerzas de interacción electrostática entre objetos cargados^[8-15], cabe citar las dos principales ventajas del sistema experimental para la realización de las medidas de la fuerza, descrito en los capítulos III y V: (a) el rango y sensibilidad de la balanza empleada, permitió medir la fuerza electrostática entre los objetos en “todo” el rango de las distancias del sistema formado por pares de cilindros y pares de esferas; (b) el método a diferencia de potencial constante, aplicado por medio de una fuente de alto voltaje, permitió reproducir las mediciones y obtener los valores del sistema en condiciones estables y reproducibles.

Capítulo II

Evaluación de propiedades eléctricas y fuerzas entre cilindros conductores.

II.1 – Introducción.

La interacción electrostática entre dos cilindros conductores paralelos de longitud infinita, uno mantenido a un potencial V_1 y otro conectado a tierra $V_2 = 0$, se evalúa usando un sistema coordenado bipolar cilíndrico. De este modo, el potencial electrostático se determina analíticamente en dichas coordenadas, resolviendo la ecuación de Laplace, con las condiciones de frontera de cada uno de los cilindros. A partir del gradiente del potencial, se obtiene el campo eléctrico con el que se calcula la distribución de la carga sobre la superficie de cada cilindro. Consecuentemente, utilizando la ecuación obtenida para el campo y el tensor de esfuerzos de Maxwell^[6] se obtiene la fuerza mutua. También, como prueba de consistencia, con la carga total en los cilindros se obtiene la capacitancia del capacitor formado por los cilindros, con ella la energía del sistema y de su gradiente la fuerza. Además, se analiza el límite de densidad uniforme de carga, y se exhibe su consistencia con la solución del sistema formado por cilindros delgados uniformemente cargados. Finalmente, con la densidad de carga obtenida, y la función libre de Green construida en el apéndice I, se reporta la obtención del potencial electrostático.

II.2 – Operador laplaciano en coordenadas bipolares cilíndricas.

Las coordenadas bipolares cilíndricas (ξ, η, z) están definidas por las ecuaciones de transformación al sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) ^[16]

$$x = \frac{a \operatorname{senh} \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad y = \frac{a \operatorname{sen} \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad z = z, \quad (\text{II.1})$$

siendo ξ y η respectivamente la coordenada “angular” y “radial” circular.

De la eliminación de ξ entre las dos primeras ecuaciones se obtiene:

$$(x - a \operatorname{coth} \eta)^2 + y^2 = a^2 \operatorname{csch}^2 \eta \quad (\text{II.2})$$

Analizando las superficies que se obtienen para $\eta = \eta_0$ constante, en el intervalo $-\infty < \eta < \infty$, se identifican:

- 1.- Una familia de cilindros circulares de radios $a |\operatorname{csch} \eta_0|$ con sus ejes en las coordenadas $(x = a \operatorname{coth} \eta_0, y = 0, z)$, donde a es la distancia desde el origen del sistema cartesiano $(0, 0, 0)$ a cada uno de los polos $(\pm a, 0, 0)$
- 2.- Cuando $\eta_0 \rightarrow \pm \infty$, $\operatorname{coth} \eta_0 \rightarrow \pm 1$ y $\operatorname{csch} \eta_0 \rightarrow 0$, las superficies cilíndricas degeneran en líneas localizadas en $(x = \pm a, y = 0, z)$
- 3.- Para $\eta_0 = 0$, $\operatorname{coth} \eta_0 \rightarrow \pm \infty$ y $\operatorname{csch} \eta_0 \rightarrow \infty$ se obtiene el plano $[y z]$,
- 4.- En particular la superficie de un par de cilindros paralelos (externos) corresponde, como esta mostrado en la figura, a $\eta = \eta_1 > 0$ y $\eta = -\eta_2 < 0$. Los electrodos, son cilindros conductores de radios R_1 y R_2 .

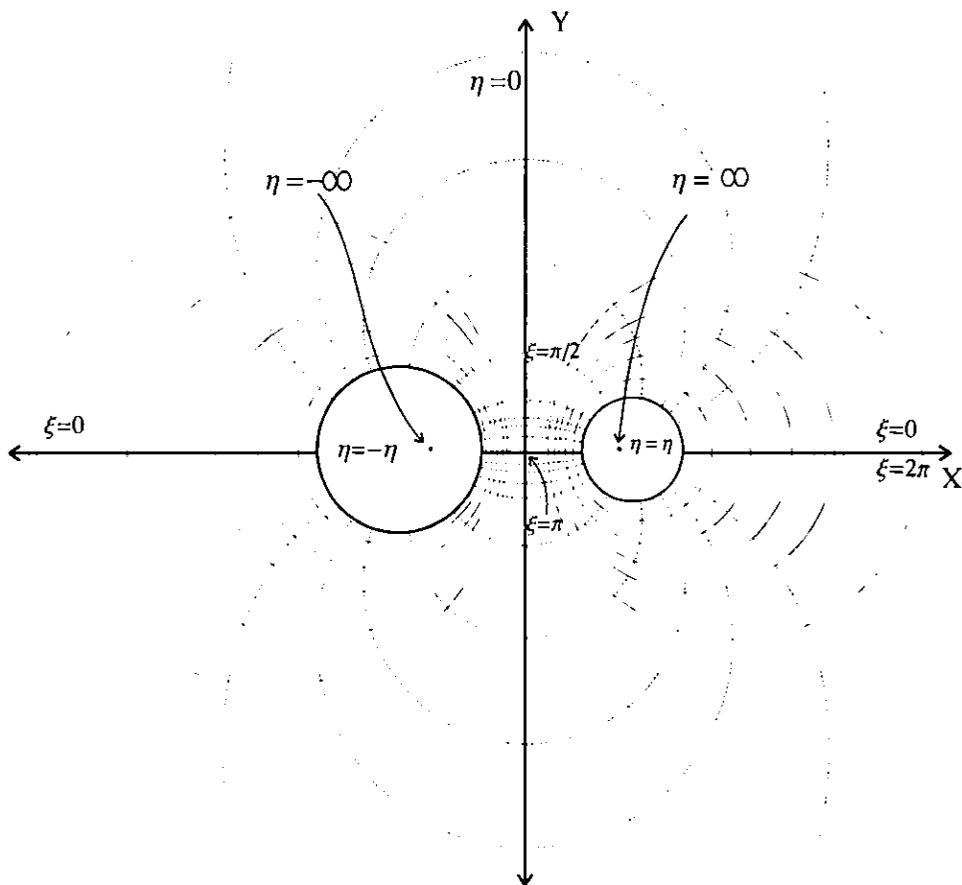


Fig. II.1 Sección transversal en un plano $z = \text{constante}$ de coordenadas bipolares (ξ, η, z) . La posición de los cilindros corresponde a las circunferencias marcadas con la línea negra ($\eta = \eta_1$ con su eje en el lado positivo del eje coordenado x , y $\eta = -\eta_2$ en el lado negativo).

De la eliminación de la coordenada η se obtiene la ecuación:

$$x^2 + (y - a \cot \xi)^2 = a^2 \csc^2 \xi \quad (\text{II.3})$$

Analizando las superficies para $\xi = \xi_0$ constante, en el intervalo $0 \leq \xi < 2\pi$, se identifica lo siguiente:

- 1.- Una familia de superficies cilíndricas circulares de radios $a |\csc \xi_0|$, con sus ejes en $(x = 0, y = a \cot \xi_0, z)$ que se interceptan en las rectas $(x = \pm a, y = 0, z)$.
- 2.- Para valores de $0 < \xi_0 < \pi$, se tienen segmentos cilíndricos circulares en el primero y segundo cuadrante, y con $\pi < \xi_0 < 2\pi$, segmentos de cilindros en los cuadrantes tres y cuatro.
- 3.- Para $\xi_0 = 0, 2\pi$ la $\cot \xi_0 = \pm \infty$ y $\csc \xi_0 = \pm \infty$, obteniendo la parte externa $(x > \pm a, 0, z)$ del plano $[x z]$, y la porción interior $(x < \pm a, 0, z)$ del plano $[x z]$ corresponde al valor de $\xi_0 = \pi$.
- 4.- Para los valores de $\xi = \pi/2$, y $-\pi/2$, se tienen medias secciones de cilindros circulares, de radio a con su eje en el origen $(0, 0, z)$.

Usando las ecuaciones de transformación (II.1), se evalúa el elemento de línea:

$$d\vec{r} = \hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz = \xi h_\xi d\xi + \eta h_\eta d\eta + \hat{k} dz \quad (\text{II.4})$$

en coordenadas bipolares cilíndricas, identificando los vectores unitarios ξ, η, \hat{k} y los factores de escala h_ξ, h_η .

$$\xi = \frac{-\hat{i} \sinh \eta \sin \xi + \hat{j} (\cosh \eta \cos \xi - 1)}{\cosh \eta - \cos \xi} \quad (\text{II.5})$$

$$\eta = \frac{-\hat{i} (\cosh \eta \cos \xi - 1) - \hat{j} \sinh \eta \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \quad (\text{II.6})$$

$$h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\cosh \eta - \cos \xi} \quad (\text{II.7})$$

Se puede observar la igualdad de los factores de escala y la ortogonalidad de los vectores unitarios.

El operador laplaciano en términos de las coordenadas bipolares cilíndricas, ξ , η y z , tiene la forma,

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

y con los factores de escala, h_ξ y h_η , Ec. (II 7), se expresa como:

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{(\cosh \eta - \cos \xi)^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{II.8})$$

II.3 – Potencial electrostático de un condensador bicilíndrico.

En ésta sección se obtiene la función de potencial electrostático de dos cilindros circulares paralelos de longitud infinita, uno de radio R_1 mantenido al potencial V_1 , y el otro de radio R_2 aterrizado, es decir, al potencial $V_2 = 0$, en coordenadas bipolares cilíndricas.

Considerando que el sistema se extiende uniformemente e infinitamente en la dirección z , la dependencia con respecto a esa coordenada desaparece, obteniéndose un problema bidimensional. Por lo que al aplicar el operador laplaciano, Ec.(II.8), a la función de potencial, obtenemos la ecuación de Laplace en coordenadas bipolares:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \phi(\xi, \eta) = 0 \quad (\text{II.9})$$

En este caso, la ecuación de Laplace es separable y admite soluciones factorizables, lo que permite que el potencial se exprese en términos del producto de dos funciones de una sola variable.

$$\phi(\xi, \eta) = \Xi(\xi)H(\eta) \quad (\text{II.10})$$

Sustituyendo la Ec. (II.10) en la ecuación de Laplace, Ec. (II.9) se reduce a

$$\frac{1}{\Xi(\xi)} \frac{d^2 \Xi(\xi)}{d^2 \xi} + \frac{1}{H(\eta)} \frac{d^2 H(\eta)}{d^2 \eta} = 0 \quad (\text{II.11})$$

en donde el primer término es sólo función de la coordenada angular ξ , y el segundo de la coordenada radial η .

Igualando cada término a una constante, la cual por conveniencia se toma como m^2 , tenemos un par de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Xi(\xi)}{d^2 \xi} &= -m^2 \Xi & \frac{d^2 H(\eta)}{d^2 \eta} &= m^2 H \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

La solución de éstas ecuaciones son los conjuntos de funciones armónicas, $\Xi(\xi) = A_m \text{sen } m\xi + B_m \text{cos } m\xi$ $H(\eta) = C_m \text{senh } m\eta + D_m \text{cosh } m\eta$ (II.13) donde, para asegurar que la función sea univaluada, la constante de separación queda restringida a los valores $m = 0, 1, 2, \dots$

De esta manera se obtiene el potencial general como la solución de la ecuación de Laplace en términos de funciones armónicas bipolares:

$$\phi(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \text{sen } m\xi + B_m \text{cos } m\xi)(C_m \text{senh } m\eta + D_m \text{cosh } m\eta) \quad (\text{II.14})$$

Los valores de los coeficientes A_m, B_m, C_m y D_m determinan las soluciones individuales, y son determinados con las condiciones de frontera.

Las condiciones de frontera sobre los cilindros se pueden establecer de la Ec (II.14), tomando $m = 0$. Desarrollando en series de potencias las Ecs. (II.13) se obtiene:

$$\phi(\xi, \eta) = (A_0 \xi + B_0)(C_0 + D_0 \eta) \quad (\text{II.15})$$

Si mantenemos $\eta = \text{constante}$, el potencial debe ser una función periódica en la coordenada ξ , es decir, para ξ y $\xi + 2\pi$, el potencial debe obtener un mismo valor, implicando que A_0 debe ser cero, de esta manera la Ec. (II.15) se reduce a:

$$\phi(\xi, \eta) = C' + D' \eta \quad (\text{II.16})$$

Para los cilindros conductores, las condiciones de contorno definidos al principio de esta sección, corresponden a:

$$\phi(\xi, \eta = \eta_1) = V, \quad \phi(\xi, \eta = \eta_2) = 0, \quad (\text{II.17})$$

Imponiendo éstas condiciones de frontera en la Ec.(II.16) se obtiene el potencial como una función lineal en la coordenada circular radial η

$$\phi(\xi, \eta) = \frac{V(\eta_2 - \eta)}{(\eta_2 - \eta_1)} \quad (\text{II.18})$$

La dependencia lineal en η es consecuencia de que las condiciones de frontera se satisfacen con el armónico más bajo o de orden cero ($m = 0$). Así, las superficies equipotenciales para $\eta = \text{cte.}$ corresponden a cilindros circulares anidados alrededor de los electrodos.

II.4 –Intensidad eléctrica, densidad de carga y carga total en cilindros conductores a diferencia de potencial fijo.

Una vez conocida la función potencial, el campo de intensidad eléctrica se obtiene de la aplicación del operador gradiente en coordenadas bipolares al potencial electrostático Ec. (II.18).

$$\vec{E}(\xi, \eta) = - \left(\hat{\eta} \frac{\partial}{h_{\eta} \partial \eta} + \hat{\xi} \frac{\partial}{h_{\xi} \partial \xi} \right) \phi(\xi, \eta) \quad (\text{II.19})$$

Efectuando la operación

$$\vec{E}(\xi, \eta) = \frac{\hat{\eta} V}{h_{\eta}(\eta_2 - \eta_1)} = \frac{\hat{\eta} V (\cosh \eta - \cos \xi)}{a(\eta_2 - \eta_1)}, \quad (\text{II.20})$$

se obtiene el campo electrostático en la dirección de la coordenada radial η , y normal en la superficie de los cilindros. Así, observamos que el sistema coordenado bipolar resulta ser el sistema coordenado natural del sistema formado por un par de cilindros, al poder describir el campo de fuerza y de potencial del sistema eléctrico por medio de relaciones funcionales simples.

La densidad superficial de carga se obtiene al aplicar la ley de Gauss Ec. (I.2), en la superficie de los cilindros. En éste caso el campo eléctrico en el interior de los electrodos es cero ($E_1 = 0$) y E_2 es evaluado de la Ec. (II.20) en la superficie de cada electrodo:

$$\sigma(\xi, \eta_1) = \frac{V(\cosh \eta_1 - \cos \xi)}{4\pi a(\eta_2 - \eta_1)} \quad \text{y} \quad \sigma(\xi, \eta_2) = - \frac{V(\cosh \eta_2 - \cos \xi)}{4\pi a(\eta_2 - \eta_1)} \quad (\text{II.21})$$

La integración de éstas ecuaciones Ec. (II.21), sobre la superficie de cada uno de los cilindros, dan las expresiones para las cargas totales por unidad de longitud en cada uno de los electrodos,

$$\lambda_1 = \int_0^{2\pi} \sigma(\xi, \eta_1) h_{\xi} d\xi = \frac{V}{2(\eta_2 - \eta_1)} = -\lambda_2, \quad (\text{II.22})$$

Cómo era de esperarse, las densidades lineales de carga son iguales en magnitud y de signo opuesto.

Distribución superficial de carga eléctrica en cilindros conductores.

Caso (1): Cilindro - cilindro

En la Fig. II 2 (A) se muestra en forma gráfica, Ec. (II.21), la distribución de carga inducida en la superficie de uno de los cilindros ($0 < \xi < 2\pi$) como función de la separación de dos cilindros iguales de radio $R = 0.795$ cm. En la dirección cercana ($\xi = \pi$), como es de esperarse, la densidad de carga es máxima, y se reduce simétricamente a cero para $\xi \rightarrow 2\pi$ y 0). En (B), se muestra la dependencia de la carga total de uno de los cilindros como función de la separación entre ellos.

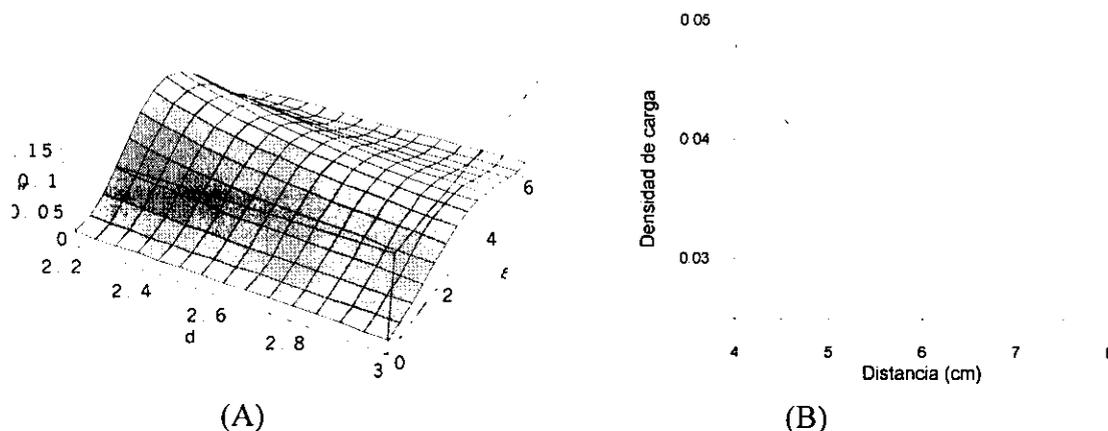


Fig. II. 2 Distribución de carga inducida sobre la superficie de un cilindro y carga total.

Caso (2) Cilindro mayor ($R_2 = 10$ cm) - cilindro delgado ($R_1 = 0.01$ cm).

En la Fig. (II 4) la gráfica de la Ec. (II 21), (α) muestra la variación de la densidad superficial carga ($0 < \xi < 2\pi$), en un cilindro, frente a un cilindro delgado con un radio mil veces menor (β), como función de su separación. Se observa que la densidad de carga sobre la superficial del cilindro delgado es prácticamente constante, y para distancias grandes la densidad de carga en ambos es constante.

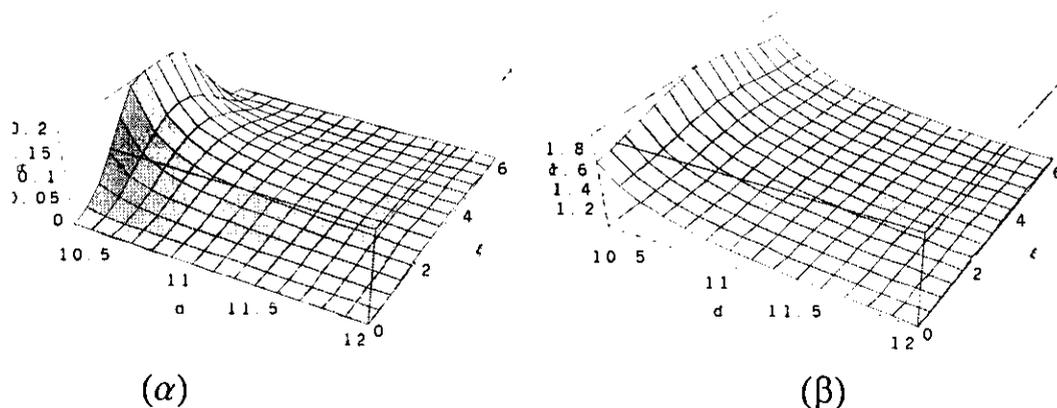


Fig. II 3 Distribución de carga inducida entre un alambre y un cilindro.

II.5 – Fuerza electrostática entre los electrodos de un condensador bicilíndrico calculada por medio del Tensor de esfuerzos de Maxwell.

La fuerza sobre uno de los electrodos de un condensador bicilíndrico debida al campo electrostático del otro electrodo se obtiene en esta sección integrando sobre su superficie, el tensor de esfuerzos de Maxwell^[6]:

$$\vec{F} = \int \vec{n} \cdot \vec{T} da \quad \vec{T} = \frac{1}{4\pi} [\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2}IE^2] \quad (II.23)$$

Considerando que el campo E sobre la superficie de los conductores van en la dirección de su normal Ec. (II.20), y la función para el vector radial unitario, Ec. (II.6), se obtiene la ecuación para la fuerza por unidad de longitud entre los cilindros:

$$\vec{F} = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} EE \hat{n} d\xi \quad (II.24)$$

La fuerza sobre el cilindro 2 se obtiene con el campo electrostático evaluado sobre su superficie

$$\vec{F}_2 = \frac{V^2}{8\pi a(\eta_2 - \eta_1)^2} \int_0^{2\pi} [-\hat{i}(\cosh \eta_2 \cos \xi - 1) - \hat{j} \sinh \eta_2 \sin \xi] d\xi$$

Observando que las integrales de los términos que dependen de la variable angular son cero, se obtiene

$$\vec{F}_2 = \frac{\hat{i}V^2}{4a(\eta_2 - \eta_1)^2} \cdot \quad (II.25)$$

En consecuencia, la fuerza solo apunta en la dirección del eje coordenado x , perpendicular a los ejes de los cilindros. También, es una expresión equivalente a la reportada en la Ref. [1].

Correspondientemente, la fuerza en términos de la densidad lineal de carga Ec (II.22)

$$\vec{F}_2 = -\frac{\hat{i}\lambda_1^2}{a} \cdot \quad (II.26)$$

Las relaciones entre las coordenadas que describen la superficie de cada uno de los cilindros η_1 y η_2 , sus radios R_1 y R_2 y la distancia entre los polos a son

$$\eta_1 = \operatorname{arc\,csch} \frac{R_1}{a} \quad \eta_2 = -\operatorname{arc\,csch} \frac{R_2}{a},$$

la distancia entre los ejes de los cilindros es

$$d = a \coth \eta_2 - a \coth \eta_1 \quad (\text{II.27})$$

De la eliminación de las coordenadas η_1 y η_2 entre estas ecuaciones se obtiene la distancia entre los polos

$$a = \frac{(d + R_1 + R_2)(d + R_1 - R_2)(d - R_1 - R_2)(d - R_1 + R_2)}{2d} \quad (\text{II.28})$$

II.6 – Fuerza electrostática entre los electrodos de un condensador bicilíndrico calculada por medio de la energía potencial electrostática.

Para el sistema formado por dos cilindros conductores mantenidos a una diferencia de potencial V , la energía potencial electrostática puede ser expresada en términos del potencial y su propiedad geométrica, nombrada capacitancia C .

$$W = \frac{1}{2} CV^2 \quad (\text{II.29})$$

Dividiendo por V la ecuación para la densidad lineal de carga en el cilindro 2, Ec. (II.22), se obtiene la capacitancia mutua:

$$C = \frac{\lambda_1}{V} = \frac{1}{2(\eta_2 - \eta_1)}. \quad (\text{II.30})$$

La fuerza electrostática entre los cilindros es evaluada tomando el gradiente negativo de la energía electrostática Ec. (II.29) respecto a la distancia entre los ejes de los cilindros.

$$F = -\left(\frac{dW}{dd}\right) = -\frac{V^2}{4} \left(\frac{d}{dd} \left(\frac{1}{\eta_2 - \eta_1}\right)\right)$$

De las Ecs. (II 26) conocemos la dependencia funcional de η_1 y η_2 con respecto a d , así que, derivando, se obtiene

$$F = \frac{V^2}{4(\eta_2 - \eta_1)^2} \left(\frac{(d^4 - R_1^4 + 2R_1^2 R_2^2 - R_2^4)(d^2 + R_1^2 - R_2^2) + (d^2 + R_1^2 - R_2^2)}{2ad^2(d^2 + R_1^2 - R_2^2)(d^2 - R_1^2 + R_2^2)} \right),$$

Al simplificar, se obtiene la expresión para la magnitud de la fuerza:

$$F = \frac{V^2}{4a(\eta_2 - \eta_1)^2}$$

que es funcionalmente igual a la Ec. (II.25).

II.7 – Límite de radios pequeños o de distancias grandes

Cuando dos cilindros conductores forman un sistema en el límite $R_1 \rightarrow 0$ y $R_2 \rightarrow 0$, o el límite $d \gg R$, la distancia a entre los polos Ec (II.22) se aproxima a $d/2$, y la fuerza electrostática, Ec (II.27), se aproxima a:

$$F_2 = -\hat{i} \frac{\lambda_1^2}{a} \approx -\hat{i} \frac{2\lambda_1^2}{d} \quad (\text{II.31})$$

La fuerza F_2 coincide con la expresión para la fuerza entre dos cilindros delgados paralelos uniformemente cargados^[1]. En la siguiente gráfica se muestra el comportamiento de la fuerza por unidad de longitud y el cuadrado de la diferencia de potencial, Ec. (II.25) contra el inverso de la distancia d , comparada con la fuerza entre cilindros iguales en el límite $d \gg R$, Ec (II.31), en términos de la diferencia de potencial.

$$\frac{F_2}{hV^2} \approx \hat{i} \frac{1}{8d \left(\csc^{-1} \left(\frac{2R}{d} \right) \right)^2}$$

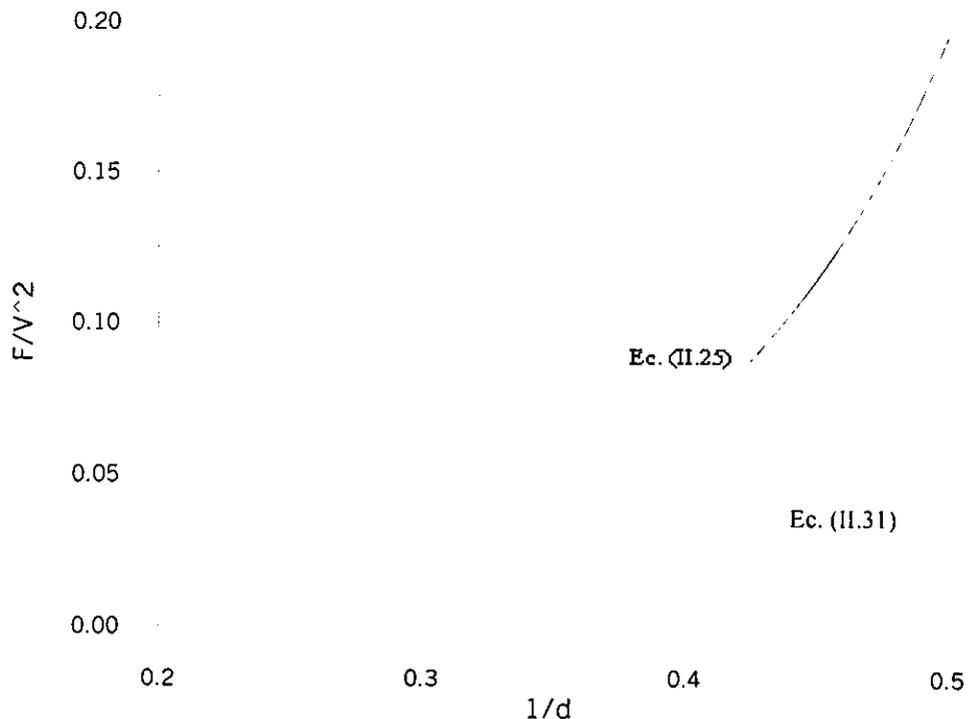


Fig. II 4 En la gráfica se muestra, el comportamiento de la ecuación obtenida para la fuerza electrostática (Ec II.25) entre dos cilindros conductores iguales ($R = 0.795$ cm), y la fuerza entre cilindros separados $d \gg R$, Ec (II.31)

Capítulo III

Medidas de la fuerza electrostática entre cilindros conductores

III.1 – Introducción.

En este capítulo, se describe el arreglo experimental usado para realizar mediciones de las fuerzas entre dos cilindros conductores paralelos mantenidos a una diferencia de potencial fijo. Se reportan los valores de la fuerza electrostática entre los dos cilindros, variando los parámetros de longitud, diámetro, distancia entre los centros de los cilindros y diferencia de potencial. El análisis de los resultados se hace comparando en tablas y gráficas los valores medidos y calculados con la función para la fuerza, Ec. (II.25), encontrando un buen acuerdo cualitativo y cuantitativo en su dependencia transversal y sus diámetros.

Las medidas de la fuerza se realizaron por medio de una balanza electrónica. Esta opción permite reproducir los valores y mejorar la precisión de las medidas. Considerando el método experimental seguido, en particular los problemas de alineación y paralaje de los cilindros y la medición de su separación, se apreció una precisión global experimental del 2%.

III.2 - Descripción de Aparatos

Un diagrama del arreglo mecánico, se muestra en la Fig. (III.1). El sistema consta de una fuente de poder (APASCO ES-9070 Kilovolt Power Supply) de salida variable de 0 a 20.5 statvolts, con la que se mantiene los cilindros a una diferencia de potencial fija. Un catetómetro de 50 cm de longitud y de ± 0.001 cm de precisión, con el que se determinan las dimensiones, horizontalidad, alineación de los cilindros y las distancias entre los mismos. Una balanza electrónica Ohaus 300D, de 30 g de capacidad, precisión de ± 0.001 g y reproducibilidad de ± 0.007 g, con la que se determina la fuerza electrostática entre los cilindros. Un pedestal dieléctrico de aproximadamente 20 cm de altura en el que se fija uno de los cilindros; este pedestal por la distancia a la que aleja el cilindro, minimiza su interacción eléctrica con la balanza.

El sistema electrostático consta de dos cilindros de diferentes radios y longitudes, uno suspendido por medio de un par de alambres delgados de cobre calibre #32 con los que se le aplica el voltaje desde la terminal positiva de la fuente (se usa una resistencia interna de 200 Megaohms, como protección de la fuente contra descargas por corto o salto de carga). El segundo cilindro es soportado por el pedestal colocado sobre la balanza. Este cilindro fue conectado a la terminal negativa de la fuente por medio de un alambre calibre #32.

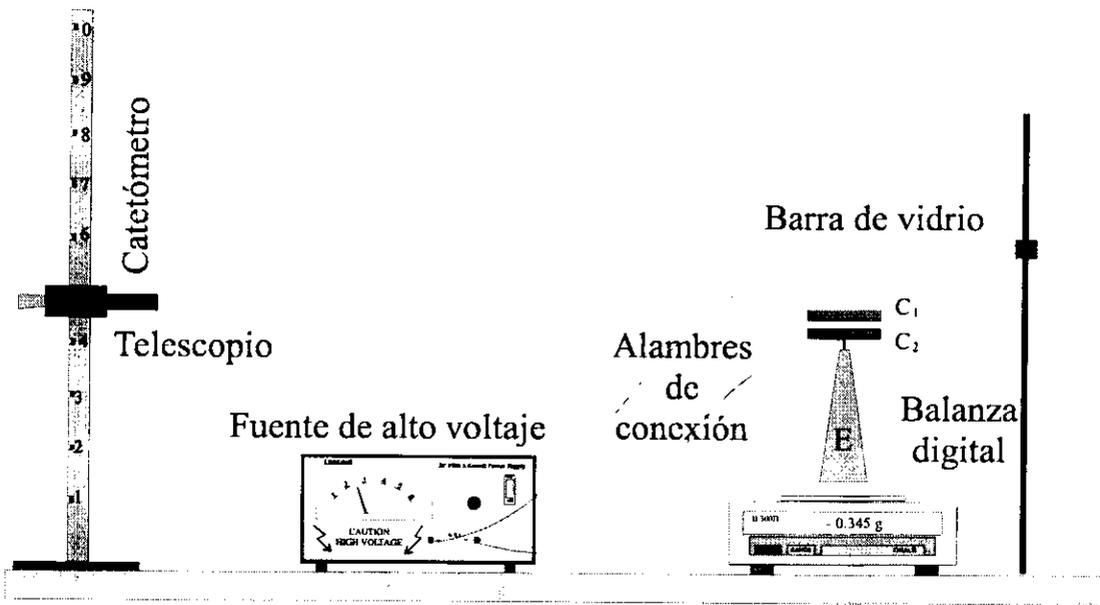


Fig. III.1 Sistema de Medición: C_1 y C_2 cilindros eléctricamente cargados de longitud h .

Con relación a los aspectos más importantes en el proceso de medición, se tiene:

- El voltaje aplicado a los cilindros fue medido usando una punta de alto voltaje, acoplada a un multímetro digital Fluke 79.
- Para mantener la precisión de la balanza, ésta se colocó sobre una base de concreto, evitando así vibraciones. Además, la balanza cuenta con un servo sistema que mantiene fijo su plato.

III.3 - Procedimiento experimental

Para efectuar las mediciones, al inicio del experimento, con auxilio de un nivel de burbuja se niveló el cilindro colocado sobre el pedestal y se comprobó con los ejes del objetivo del catetómetro (el error por alineación fue estimado del orden de ± 0.05 cm). Para lograr que los cilindros quedaran paralelos, el cilindro suspendido se colocó a una distancia aproximada de 0.5 cm, observando su alineación por medio de los ejes en el ocular del catetómetro. La distancia Δ entre los cilindros se midió entre sus paredes próximas utilizando el catetómetro. Así, la distancia de separación de los ejes de los cilindros d se obtuvo de:

$$d = \Delta + R_1 + R_2$$

El experimento se desarrolló para diferentes combinaciones de cilindros cuyos radios fueron medidos con un calibrador de resolución de ± 0.001 mm.

Por medio del botón (Tara) de ajuste se colocó el indicador de la balanza en cero (0.000 gr). Al aplicar el voltaje a los cilindros, la balanza indica la variación debida a la “atracción” entre los cilindros; esta variación es registrada en la balanza como un decremento en la lectura, debido a que los cilindros fueron electrizados con cargas opuestas. Para obtener el valor de la fuerza en dinas, el valor indicado por la balanza debe ser multiplicado por el valor local de la gravedad (Méx. - Puebla) $g = 978 \text{ cm/s}^2$.

La manera de observación fue la siguiente: ya alineados los cilindros; se activa la fuente; Esto provoca que el cilindro suspendido, si no está correctamente alineado, se mueva, provocando que la lectura en la balanza oscile, sí esto no ocurre, significa que los cilindros fueron bien alineados.

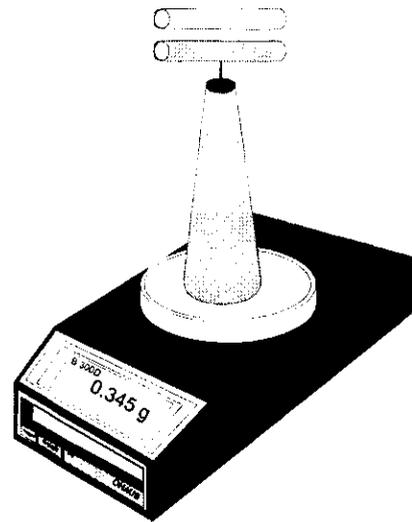


Fig. II.2 Arreglo de dos cilindros de igual longitud.

Así, se genera un criterio sobre la calidad de la alineación inicial. Para lograr mayor exactitud, cuando el movimiento no es apreciable, se toma nota de la lectura de la interacción en la balanza y la posición de los cilindros utilizando el vernier del catetómetro.

Para cada uno de estos voltajes, la toma del dato fue hecha después de conseguir estabilidad en la lectura de la balanza. La consistencia en las medidas, demuestra que corresponden a situaciones de equilibrio eléctrico - mecánico. El experimento fue reproducido cambiando por medio de los alambres que lo sostienen, la altura del cilindro suspendido.

Mediante el siguiente análisis se calculó el error total con el que se obtuvo la magnitud de la fuerza. Se consideraron los rangos y error total de cada una de las variables. El error por reproducibilidad y escala se estimó de ± 0.3 statvolt, y sé vario en el rango $7.5 < V < 20.5$ statvolt; el error por escala al medir con la balanza la “masa”, ± 0.001 g, y las lecturas cambiaron en el rango de $0.005 < M < 5$ g. El cálculo se realizó usando la expresión,

$$\frac{\delta(F/V^2)}{F/V^2} = \frac{\delta M}{M} + \frac{2\delta V}{V}$$

La línea sobre las variables significa que se están tomando los promedios.

III.4 – Mediciones y cálculos teóricos.

En esta sección se reportan en las Tablas (III.1–III.6), los resultados de las mediciones de la fuerza, la distancia entre los centros de los cilindros, los diámetros, la longitud de los cilindros y la diferencia de potencial a la que se mantuvo el capacitor. Se calcula la fuerza electrostática, aplicando la ecuación Ec. (II.25) para los mismos conjuntos de valores.

Las variables independientes del sistema, sistemáticamente se cambiaron en el conjunto de valores:

La diferencia de potencial aplicada (statvolt):				
7.5	10.9	14.2	17.5	20.5

longitudes (cm)	diámetros (cm)
6.8	0.025
9.9	1.55
13.6	3.50

III.4.1 – Valores medidos de la fuerza entre dos cilindros

En cada una de las siguientes Tablas (III.1 – III.6) se reportan los valores y resultados para los arreglos implementados, y en las gráficas, Figs. (III.4 – III.9), se muestra el comportamiento de los resultados experimentales y la curva que representa la función para la fuerza, Ec. (II.25).

En la primera columna se listan las distancias (**d**) medidas de eje a eje de los cilindros; en la segunda se escribe el valor promedio de la lectura de la balanza (**M**), en miligramos; en la tercera columna, la fuerza calculada con el valor de la gravedad en Puebla (**F**); en la cuarta columna, la fuerza promedio normalizada con el cuadrado de la diferencia de potencial (**F_{exp}/V²**); y, finalmente, en la última columna, la fuerza teórica (**F_{teo}/V²**), también normalizada, calculada de la Ec. (II.25) para las mismas distancias y dimensiones de los cilindros para los que se midió la fuerza.

En las primeras tres tablas, y gráficas asociadas, se muestran los valores medidos correspondientes a dos cilindros de igual radio, para diferentes longitudes y diferencias de potencial aplicado. En las tablas III.4 y III.5 y gráficas III.7 y III.8 se muestran los valores medidos del sistema formado por dos cilindros de diferente diámetro, para diferentes longitudes y diferencias de potencial. En la tabla III.6 y gráfica III.9 se muestran los valores medidos de la fuerza electrostática entre un cilindro y un cilindro delgado.

Tabla III.1 Valores medidos de la fuerza de interacción entre cilindros de longitud $h = 6.8$ cm. de radios $R_1 = R_2 = 0.795$ cm. a una diferencia de potencial de $V = 20.5$ statvolt				
$(d \pm 0.01)$ cm	$M(\pm 1\text{mg})$	$F = Mg (\pm 1)$ (dinas)	$F_{\text{exp}}/V^2 (\pm 0.03)$	F_{teo}/V^2
2.16	406	397	0.94	0.867
2.23	308	301	0.72	0.717
2.40	226	221	0.53	0.503
2.49	185	181	0.43	0.426
2.85	110	108	0.26	0.254
3.05	90	88	0.21	0.203

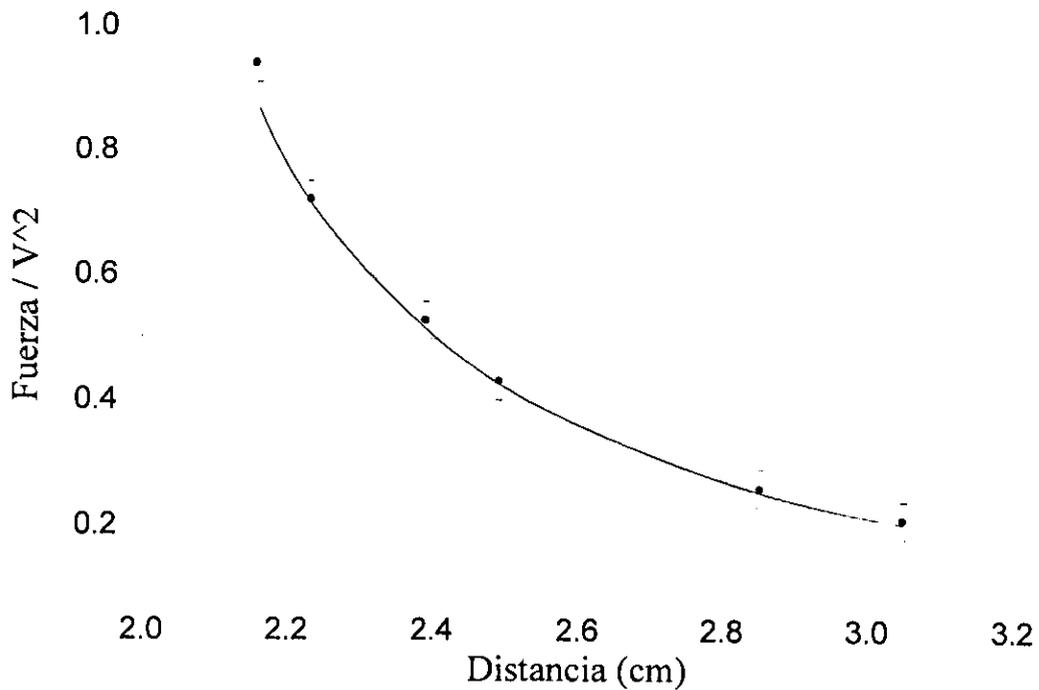


Fig. III.4 Comparación de valores medidos de fuerza electrostática entre un par de cilindros de longitud $h = 6.8$ cm y radios $R_1 = R_2 = 0.795$ cm, con la fuerza calculada F_c .(II.25) (curva).

Tabla III.2 Valores medidos de la fuerza de interacción entre cilindros de longitud $h = 9.9$ cm. de radios $R_1 = R_2 = 0.795$ cm. a una diferencia de potencial de $V = 17.5$ statvolt				
$(d \pm 0.01)$ cm	$M(\pm 1\text{mg})$	$F=Mg (\pm 1)$ (dinas)	$F_{\text{exp}}/V^2 (\pm 0.03)$	F_{teo}/V^2
1.79	1970	1927	6.29	6.016
1.93	849	830	2.71	2.713
2.10	453	443	1.45	1.466
2.38	230	225	0.73	0.756
2.64	153	150	0.48	0.494

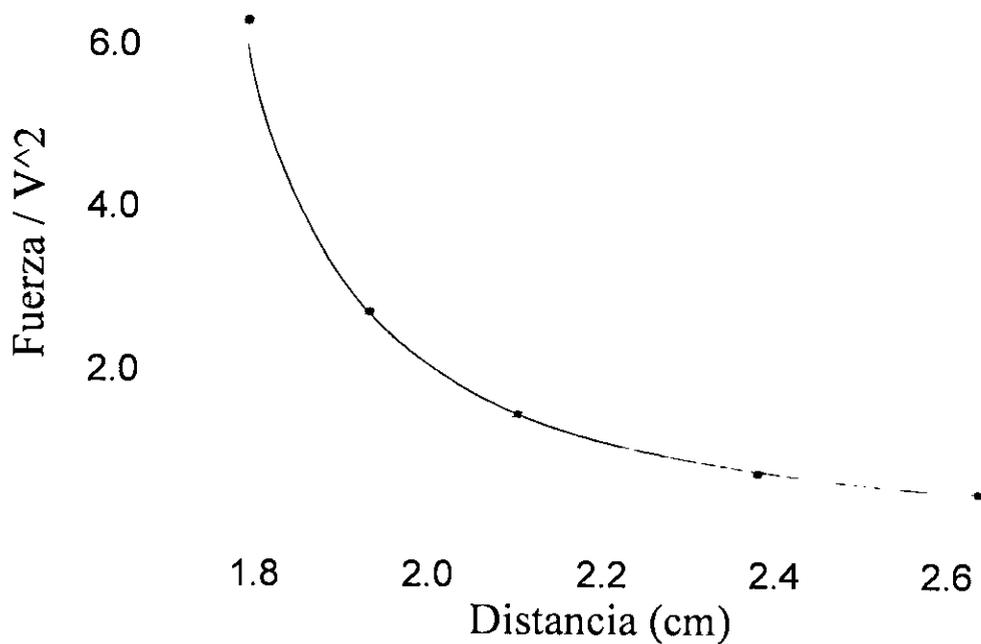


Fig. III.5 Comparación de valores medidos de fuerza electrostática entre un par de cilindros de longitud $h = 9.9$ cm y radios $R_1 = R_2 = 0.795$ cm, con la fuerza calculada E_c .(II.25) (curva).

Tabla III.3 Valores medidos de la fuerza de interacción entre dos cilindros de longitud, $h = 13.6$ cm. y radios $R_1 = R_2 = 0.795$ cm. a una diferencia de potencial de $V=14.2$ statvolt				
$(d \pm 0.01)$ cm	$M(\pm 1\text{mg})$	$F = Mg (\pm 1)$ (dinas)	$F_{\text{exp}}/V^2 (\pm 0.04)$	F_{teo}/V^2
2.08	466	456	2.26	2.159
2.26	278	272	1.35	1.329
2.29	262	256	1.27	1.262
2.57	156	153	0.76	0.747
2.86	105	103	0.51	0.505
3.28	67	65	0.32	0.324
3.83	43	42	0.21	0.209

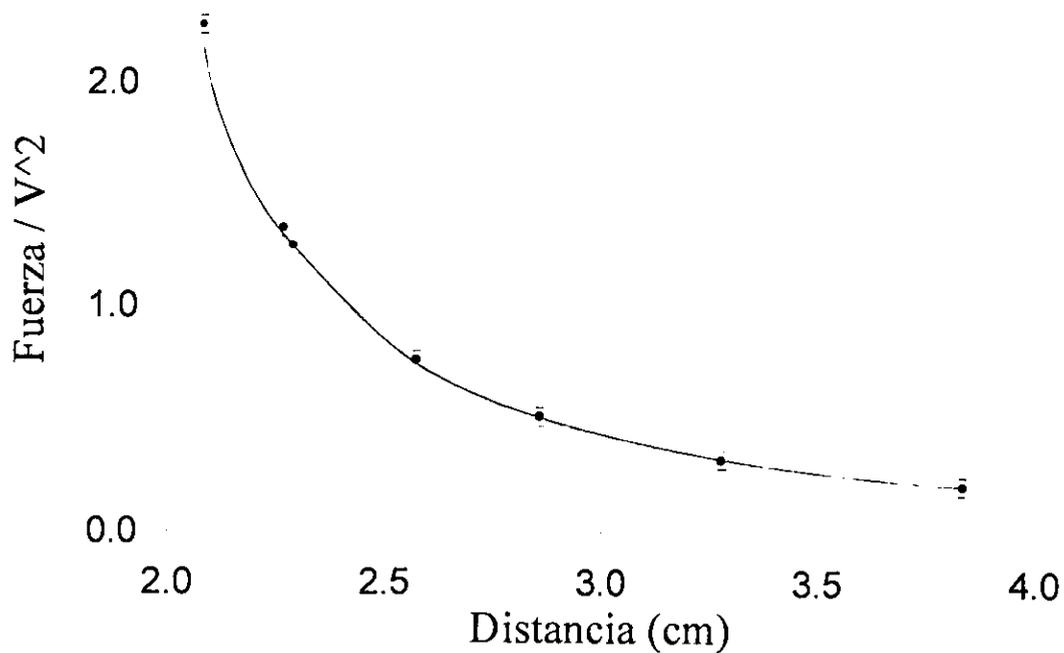


Fig. III.6 Comparación de valores medidos de fuerza electrostática entre un par de cilindros de longitud $h = 13.6$ cm y radios $R_1 = R_2 = 0.795$ cm, con la fuerza calculada Ec.(II.25) (curva).

Tabla III.4 Valores medidos de la fuerza de interacción entre cilindros de longitud $h = 6.8$ cm. de radios $R_1 = 1.75$ y $R_2 = 0.795$ cm. a una diferencia de potencial de $V=20.5$ statvolt				
$(d \pm 0.01)$ cm	$M(\pm 1\text{mg})$	$F = Mg (\pm 1)$ (dinas)	$F_{\text{exp}}/V^2 (\pm 0.03)$	F_{teo}/V^2
3.17	377	369	0.88	0.883
3.28	290	284	0.67	0.691
3.45	202	197	0.47	0.501
3.74	140	137	0.32	0.328
4.09	97	95	0.23	0.220
4.41	73	71	0.17	0.165

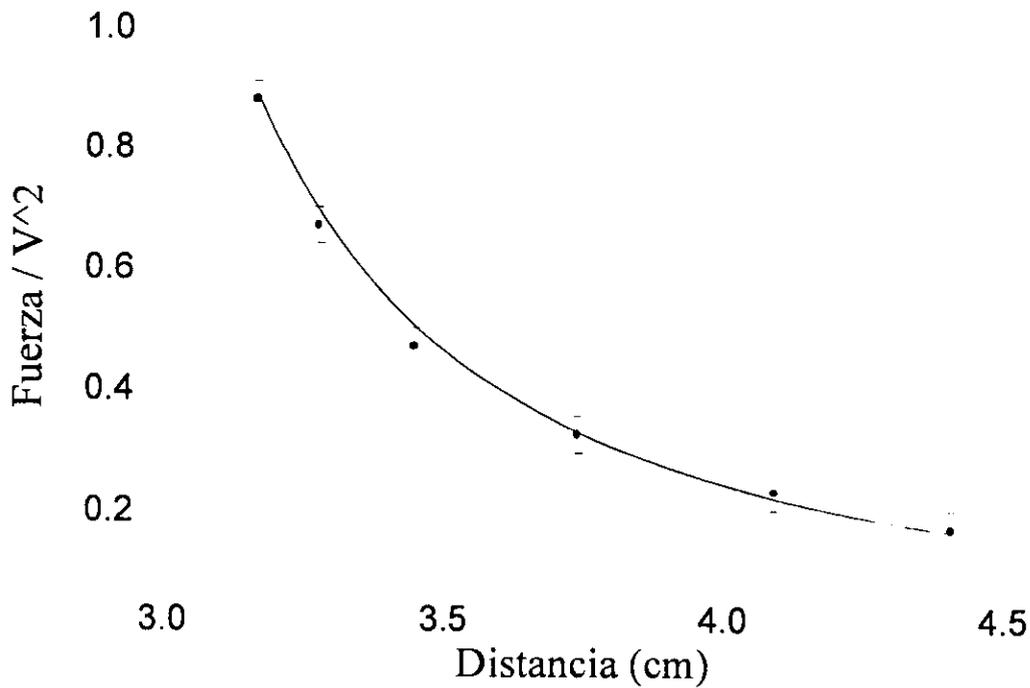


Fig. III.7 Comparación de valores medidos de fuerza entre un par de cilindros de longitud $h = 6.8$ cm y radios $R_1 = 1.75$ y $R_2 = 0.795$ cm, con la fuerza calculada Ec.(II.25) (curva).

Tabla III.5 Valores medidos de la fuerza de interacción entre cilindros de longitud $h = 9.9$ cm. de radios $R_1 = 1.75$ y $R_2 = 0.795$ cm. a una diferencia de potencial de $V=14.2$ statvolt				
$(d \pm 0.01)$ cm	$M(\pm 1\text{mg})$	$F=Mg(\pm 1)$ (dinas)	$F_{\text{exp}}/V^2(\pm 0.04)$	F_{teo}/V^2
2.91	612	598	2.96	2.861
3.17	249	243	1.20	1.264
3.38	149	146	0.72	0.814
3.68	96	94	0.47	0.513
3.98	67	65	0.32	0.359

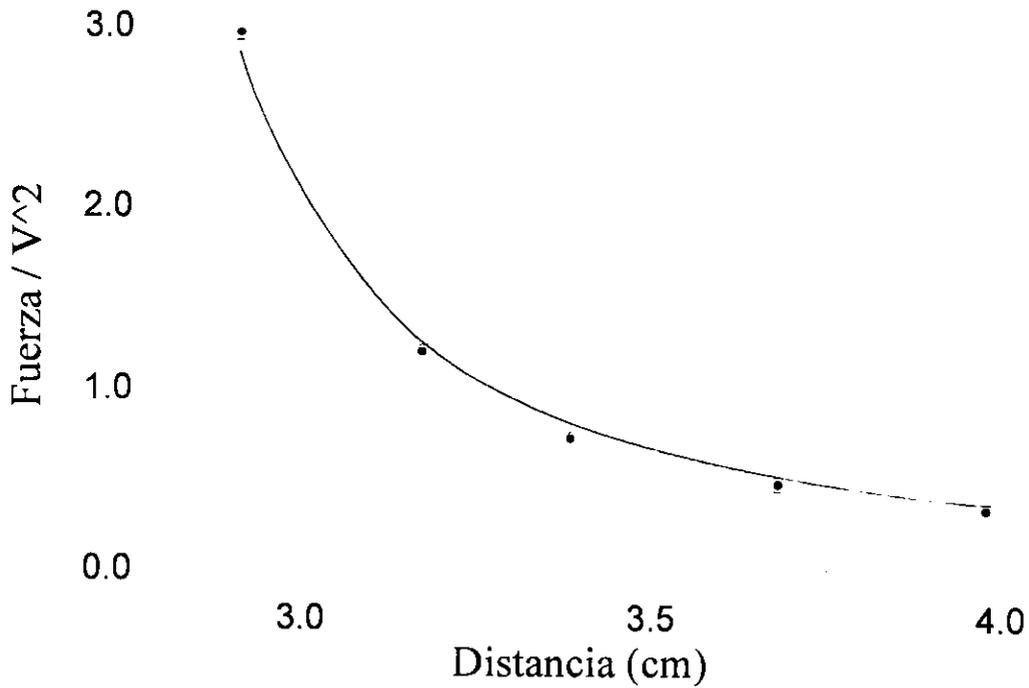


Fig. III.8 Comparación de valores medidos de fuerza electrostática entre cilindros de longitud $h = 13.6$ cm y radios $R_1 = 1.75$ y $R_2 = 0.795$ cm, con la fuerza calculada Ec.(II.25) (curva).

Tabla III.6 Valores medidos de la fuerza de interacción entre cilindros de longitud $h = 6.8$ cm. de radios $R_1 = 0.0125$ y $R_2 = 0.795$ cm. a una diferencia de potencial de $V=17.5$ statvolt

$(d \pm 0.01)$ cm	$M (\pm 1)$	$F=Mg (\pm 1)$ (dinas)	$F_{exp}/V^2 (\pm 0.03)$	F_{teo}/V^2
1.17	89	87	0.28	0.291
1.24	68	66	0.21	0.229
1.39	50	49	0.16	0.153
1.51	39	38	0.12	0.119
1.65	33	32	0.10	0.094
1.81	24	23	0.07	0.074

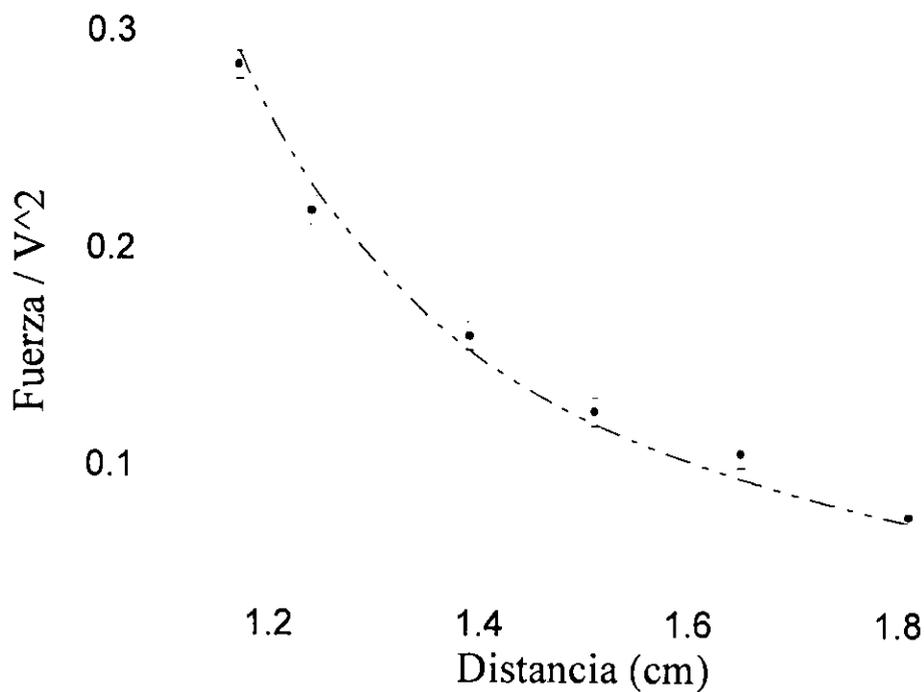
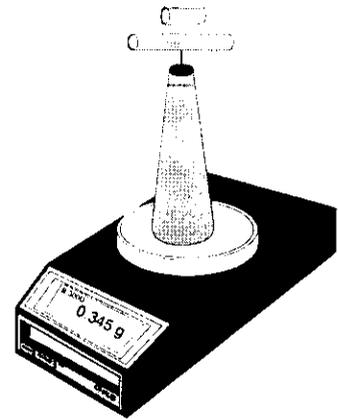


Fig. III.9 Comparación de valores medidos de fuerza, entre un alambre de radio $R_1 = 0.0125$ y un cilindro de radio $R_2 = 0.795$ cm, de longitud $h = 6.8$ cm, con la fuerza calculada Ec.(II.25).

III.4.2 - Fuerza electrostática entre cilindros de diferente longitud.

En gráfica siguiente, se puede descubrir la desviación a la fuerza entre dos cilindros de igual longitud, debida al efecto de orilla. Se advierte que el efecto es más significativo, a medida que la longitud de uno de los cilindros tiende a cero. La contribución a la fuerza debida a las orillas, para una longitud del 1%, (la longitud del cilindro corto es de 2 cm y la del cilindro largo de 20 cm) fue del 33% de la magnitud de la fuerza entre dos cilindros de la misma longitud (2 cm) y una separación igual a 2.35 cm. A medida que la separación es mayor el efecto se incrementa hasta el 40%, a una distancia igual a 2.8 cm.



También, se observa en forma consistente, la reducción del efecto de orilla a medida de que los cilindros son de la misma longitud. El dato para cilindros iguales a 20 cm, fue calculado.

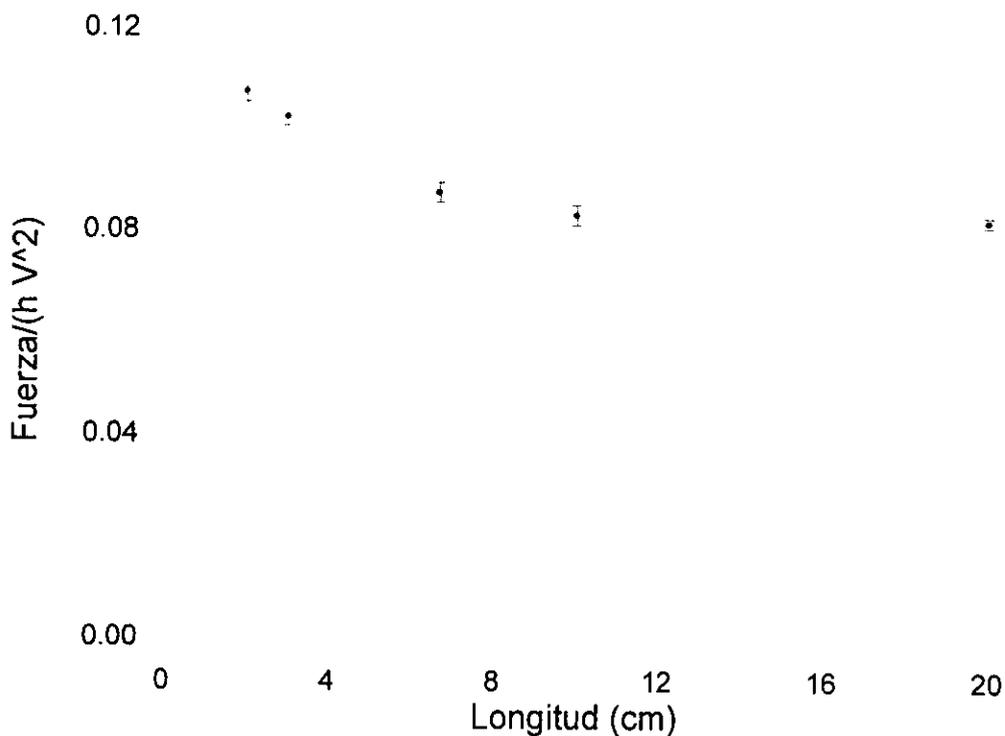


Fig. III.10 Gráfica de la fuerza electrostática (normalizada con el cuadrado de la diferencia de potencial y la longitud), entre un cilindro de 20 cm longitud y cilindros de igual diámetro (1.59 cm) pero de diferentes longitudes L (abscisa) colocado a una distancia $d = 2.35$ cm. La línea corresponde a los valores medidos para cilindros de igual longitud.

III.5 - Análisis de resultados

El comportamiento de la fuerza entre cilindros iguales, uniformemente cargados, Ec (II.31), y la fuerza entre dos cilindros conductores Ec (II.25) se muestra en la siguiente gráfica, como función del inverso de la distancia entre los centros de cilindros; los valores medidos de la fuerza electrostática entre dos cilindros, normalizada con el cuadrado de la diferencia de potencial y la longitud de los cilindros de radios $R_1 = R_2 = 0.795$ cm y longitudes $h = 6.8, 9.9$ y 13.6 cm, se muestran en la gráfica por medio de puntos.

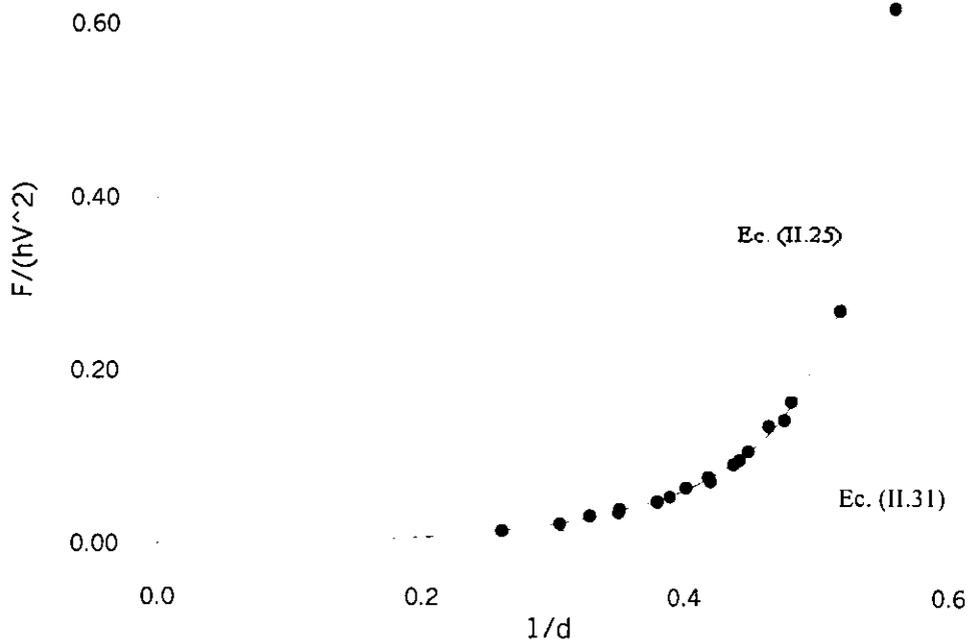


Fig. III.11 Gráfica de los valores de la fuerza entre cilindros iguales ($R_1 = R_2 = 0.795$ cm) normalizados con el cuadrado de la diferencia de potencial y longitud de los cilindros contra el inverso de la distancia. La curva superior representa la solución teórica Ec. (II.25) y la curva inferior el comportamiento de la fuerza entre dos cilindros con densidad uniforme de carga de radio $R = 0.5$ Ec (II.31), calculada de la ecuación II.25 con la consideración ($a \approx d/2$)

El efecto de la redistribución de la carga en los cilindros, se observa del comportamiento de la curva teórica y la correspondencia de los valores, con respecto a la desviación de la fuerza entre dos cilindros con carga uniformemente distribuida. Otro resultado que se puede advertir es la buena correlación entre los valores medidos obtenidos de pares de cilindros de diferentes longitudes, implicando que el efecto de orilla no es mayor al error experimental con el que se midieron las fuerzas.

Capítulo IV

Evaluación de propiedades eléctricas y fuerzas entre esferas conductoras.

IV.1 – Introducción.

Usando coordenadas biesféricas, se evalúa, la fuerza de interacción electrostática entre dos esferas conductoras separadas por una distancia d , mantenidas a una diferencia de potencial constante. En este sistema coordenado la ecuación de Laplace resulta ser separable en forma restringida (R separable). En éste capítulo, se sigue la técnica de la función de Green de Dirichlet^[2] para obtener el potencial electrostático. A partir del potencial se determina la intensidad de campo eléctrico. Consecuentemente, se calcula la densidad de carga superficial y la carga total en cada esfera. Se integra el tensor electrostático de Maxwell^[6] sobre la superficie de una de las esferas para obtener la fuerza entre los electrodos. Se hace un análisis de la convergencia de la expresión obtenida para la fuerza, observando su rápida convergencia, y la lenta convergencia de la expresión obtenida por Maxwell. Finalmente se reporta el análisis del comportamiento de la fuerza, en el límite de distancias grandes o radios pequeños.

En el apéndice II, se ha construido la función de Green libre, con la que se calcula el potencial a partir de la densidad de carga de los electrodos. En el apéndice III se detalla la obtención de la expresión de la fuerza entre dos esferas mediante el método de imágenes de Maxwell.

IV.2 – Operador laplaciano en coordenadas biesféricas

Las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas (x, y, z) a biesféricas (ξ, η, φ) ^[16] son:

$$x = \frac{a \operatorname{sen} \xi \cos \varphi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad y = \frac{a \operatorname{sen} \xi \operatorname{sen} \varphi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad z = \frac{a \operatorname{senh} \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad (\text{IV.1})$$

De la eliminación de ξ se obtiene la ecuación para la coordenada radial η ,

$$x^2 + y^2 + (z - a \operatorname{coth} \eta)^2 = a^2 \operatorname{csch}^2 \eta. \quad (\text{IV.2})$$

Del análisis de la coordenada radial η , Ec. (IV.2), en el rango, $-\infty < \eta < \infty$: se identifica:

- 1.- Una familia de superficies esféricas centradas en $(0, 0, a \coth \eta)$, y radio $a |\operatorname{csch} \eta|$,
- 2.- Dos puntos llamados polos con coordenadas $(x=0, y=0, z = \pm a)$, cuando $\eta = \pm \infty$, debido a que la función $\coth \eta$ es igual respectivamente a ± 1 , y $\operatorname{csch} \eta$ es igual a 0,
- 3.- El plano $[x y]$, o una esfera de radio infinito con centros sobre el eje z en las posiciones $(0, 0, z = \infty)$ y $(0, 0, z = -\infty)$, cuando $\eta = 0$, debido a que la función $\coth \eta$ es igual a $\pm \infty$ y la $\operatorname{csch} \eta$ es igual a $\pm \infty$,
- 4.- La superficie de un par de esferas paralelas conductoras de radios R_1 y R_2 (externas) corresponden, como esta mostrado en la figura, a η_1 y η_2 .

Resolviendo para la coordenada angular ξ , se obtiene la ecuación:

$$(\rho - a \cot \xi)^2 + z^2 = a^2 \csc^2 \xi \quad (\text{IV.3})$$

donde $\rho^2 = x^2 + y^2$

Del análisis de la coordenada angular ξ , Ec. (IV.3) en el rango, $0 < \xi < \pi$ se identifica:

- 1.- Superficies de revolución alrededor del eje z cuyas secciones meridianas son arcos de círculo de radio $a \csc \xi$ y centro en el plano $[xy]$ a una distancia, $a \cot \xi$ del eje z . Todas estas superficies pasan por los puntos $(0, 0, \pm a)$,
- 2.- En particular, para $\xi = \pi/2$, se obtiene una esfera de radio a centrada en el origen $(0, 0, 0)$, $\rho = a$,
- 3.- Para $\xi = 0$, se tiene la parte exterior del eje z $(0, 0, |z| > a)$, y con $\xi = \pi$, la parte central del eje z $(0, 0, |z| < a)$,

Para valores de la coordenada azimutal φ , en el rango $0 < \varphi < 2\pi$, se obtienen semiplanos que pasan por el eje z .

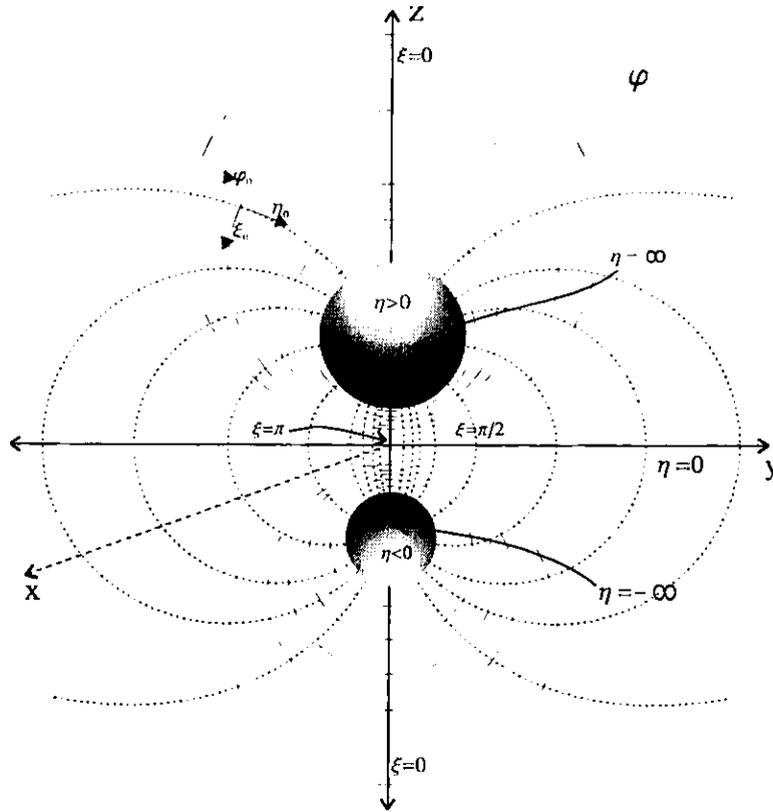


Fig. IV 1. Sección transversal en un plano meridiano de coordenadas biesféricas (ξ, η, φ), los círculos (esferas) corresponden a $\eta = \text{cte}$.

El vector de desplazamiento diferencial en estas coordenadas tiene la forma:

$$d\vec{r} = \hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz = \xi h_\xi d\xi + \eta h_\eta d\eta + \varphi h_\varphi d\varphi. \quad (\text{IV.4})$$

identificándose los vectores unitarios,

$$\xi = \frac{(\cosh \eta \cos \xi - 1)(\hat{i} \cos \varphi + \hat{j} \sin \varphi) - \hat{k} \sinh \eta \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad (\text{IV.5})$$

$$\eta = -\frac{\sinh \eta \sin \xi (\hat{i} \cos \varphi + \hat{j} \sin \varphi) + \hat{k} (\cosh \eta \cos \xi - 1)}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad (\text{IV.6})$$

$$\varphi = -\hat{i} \sin \varphi + \hat{j} \cos \varphi, \quad (\text{IV.7})$$

y los factores de escala:

$$h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad h_\varphi = \frac{a \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad (\text{IV.8})$$

Se puede ver la ortogonalidad de los vectores unitarios y la igualdad de los factores de escala h_ξ , y h_η .

Conocidos los factores de escala, es inmediato construir el operador laplaciano en coordenadas biesféricas. Sustituyendo las expresiones anteriores en la relación en coordenadas ortogonales del operador laplaciano^[16]:

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta h_\varphi}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi h_\varphi}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{h_\eta h_\xi}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right), \quad (\text{IV.9})$$

Con los factores de escala para el sistema biesférico Ec. (IV.8), el operador toma la forma específica:

$$\nabla^2 = \left\{ \frac{(\cosh \eta - \cos \xi)^3}{a^2 \sin \xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] + \frac{(\cosh \eta - \cos \xi)^2}{a^2 \sin^2 \xi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}. \quad (\text{IV.10})$$

IV.3 – Solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas biesféricas.

En ésta sección se obtiene la función de potencial electrostático de dos esferas conductoras, una de radio R_1 , mantenida al potencial V_1 , y la otra de radio R_2 , aterrizada, es decir, al potencial $V_2 = 0$, en coordenadas biesféricas.

Al aplicar el operador laplaciano Ec. (IV.10) a la función de potencial, e igualando a cero, se obtiene la ecuación de Laplace en coordenadas biesféricas,

$$\left\{ \frac{(\cosh \eta - \cos \xi)^3}{a^2 \sin \xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] + \frac{(\cosh \eta - \cos \xi)^2}{a^2 (\sin \xi)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \phi(\xi, \eta, \varphi) = 0 \quad (\text{IV.11})$$

Un método para resolver esta ecuación diferencial parcial, es proponer una solución compuesta por el producto de la raíz cuadrada del factor binomial y las funciones de cada una de las variables^[16],

$$\phi(\xi, \eta, \varphi) = (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \Xi(\xi) H(\eta) \Phi(\varphi) \quad (\text{IV.12})$$

Sustituyendo el potencial Ec. (IV.12) en la Ec. (IV.11), se obtienen tres ecuaciones diferenciales ordinarias.

La primera se obtiene al despejar la función de la variable azimutal φ , e igualándolas las partes a una constante.

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -\frac{\text{sen}^2 \xi}{H} \frac{d^2 H}{d\eta^2} - \frac{\text{sen} \xi}{\Xi} \left[\frac{d}{d\xi} \text{sen} \xi \frac{d}{d\xi} \Xi - \frac{1}{4} \text{sen} \xi \Xi \right]. \quad (\text{IV.13})$$

La función de la coordenada azimutal, sugiere una solución periódica o univaluada; con esta consideración, se propone como constante de separación igual a $-m^2$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi, \quad (\text{IV.14})$$

donde m , se restringe a los valores enteros $m = 0, 1, 2, \dots$

La parte de la coordenada angular ξ se identifica como la ecuación diferencial asociada de Legendre

$$-\left[\frac{1}{\text{sen} \xi} \frac{d}{d\xi} \text{sen} \xi \frac{d}{d\xi} \Xi - \frac{m^2}{\text{sen}^2 \xi} \right] \Xi = l(l+1)\Xi \quad (\text{IV.15})$$

donde, la constante de separación tiene la forma indicada con la restricción sobre los valores $l = 0, 1, 2, 3, \dots$, para asegurar buen comportamiento en $\xi = 0$ y $\xi = \pi$. Correspondientemente la ecuación en la coordenada radial η se reduce a

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 H, \quad (\text{IV.16})$$

Las soluciones de este conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias son bien conocidas, lo que permite escribir la solución armónica general como:

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta, \varphi) = & (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [E_m \text{sen} m\varphi + F_m \cos m\varphi] \times \\ & [A_{lm} P_l^m(\cos \xi) + B_{lm} Q_l^m(\cos \xi)] [A_l \text{senh}(l + \frac{1}{2})\eta + B_l \cosh(l + \frac{1}{2})\eta] \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

e involucra funciones circulares en la coordenada azimutal φ , funciones asociadas de Legendre en la coordenada angular ξ , y funciones hiperbólicas en la coordenada radial η .

La presencia de la raíz cuadrada del factor binomial, función de la coordenada radial y angular, hace que el potencial en este sistema coordenado, sea sólo R separable. Correspondientemente, no permite que se satisfagan de manera simple y directa las condiciones de frontera impuestas al sistema, definido al principio de la sección IV.2:

$$\phi(\xi, \eta = \eta_1, \varphi) = V_1, \quad \phi(\xi, \eta = \eta_2, \varphi) = 0, \quad (\text{IV.18})$$

IV.4 - Potencial obtenido de la función de Green de Dirichlet en funciones armónicas biesféricas.

La raíz cuadrada del factor binomial en la Ec. (IV.17), hace que las condiciones de frontera del potencial no puedan ser satisfechas en forma directa o trivial. De manera que, para obtener la solución de nuestro problema se requiere conocer la función de Green que satisfaga las condiciones de frontera de Dirichlet.

Debido a que las condiciones de contorno están dadas sobre la superficie de las esferas, resulta conveniente expresar la función de Green como una serie de productos de funciones armónicas en coordenadas biesféricas.

La función de Green para un problema de potencial satisface la ecuación

$$\nabla^2 G(r, r') = -4\pi\delta(r - r') = -\frac{4\pi}{h_\xi, h_\eta, h_\varphi} \delta(\xi - \xi')\delta(\eta - \eta')\delta(\varphi - \varphi'), \quad (\text{IV.19})$$

la que deberá cumplir las condiciones de frontera de Dirichlet:

$$G_D(\xi, \eta = \eta_1, \varphi; \xi', \eta', \varphi') = 0, \quad G_D(\xi, \eta = \eta_2, \varphi; \xi', \eta', \varphi') = 0. \quad (\text{IV.20})$$

La función de Green se escribe en términos de funciones armónicas biesféricas,

$$G_D(\xi, \eta, \varphi, \xi', \eta', \varphi') = (\cosh \eta' - \cos \xi')^{\frac{1}{2}} (\cosh \eta - \cos \xi)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\xi', \varphi') Y_{l,m}(\xi, \varphi) g_l(\eta, \eta'), \quad (\text{IV.21})$$

y las funciones, delta, en las coordenadas angulares con la condición de completitud de las funciones armónicas esféricas^[6] como:

$$\delta(\xi - \xi')\delta(\varphi - \varphi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\xi', \varphi') Y_{l,m}(\xi, \varphi). \quad (\text{IV.22})$$

Sustituyendo las Ecs. (IV 21 y 22) en la Ec. (IV.19), obtenemos la ecuación:

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} - (l + \frac{1}{2})^2 \right] g_l(\eta, \eta') = -\frac{4\pi}{a} \delta(\eta - \eta'), \quad (\text{IV.23})$$

La función radial, g_l , debe satisfacer la ecuación homogénea para $\eta \neq \eta'$ e involucrar las funciones hiperbólicas de la coordenada radial η :

$$g_l(\eta, \eta') = A_l \sinh\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)(\eta_1 - \eta_s)\right] \sinh\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)(\eta_s - \eta_2)\right] \quad (\text{IV.24})$$

donde se han incorporado las condiciones de simetría bajo el intercambio de punto - campo y punto - fuente y las condiciones de frontera de las Ecs. (IV.18).

Para determinar los coeficientes A_l se integra la Ec. (IV.23) y se aplica la condición de discontinuidad en las derivadas con respecto a η ,

$$\frac{dg_l}{d\eta_{\eta=\eta_1^+}} - \frac{dg_l}{d\eta_{\eta=\eta_1^-}} = -\frac{4\pi}{a} \rightarrow A_l = \frac{4\pi}{a(l+\frac{1}{2})\sinh[(l+\frac{1}{2})(\eta_1-\eta_2)]}. \quad (IV.25)$$

La forma explícita de la función de Green queda:

$$G_D(\xi, \eta, \varphi, \xi', \eta', \varphi') = \frac{4\pi}{a} (\cosh \eta' - \cos \xi')^{\frac{1}{2}} (\cosh \eta - \cos \xi)^{\frac{1}{2}} \times \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\xi', \varphi') Y_{l,m}(\xi, \varphi) \frac{\sinh[(l+\frac{1}{2})(\eta_1-\eta_2)] \sinh[(l+\frac{1}{2})(\eta_2-\eta)]}{(l+\frac{1}{2})\sinh[(l+\frac{1}{2})(\eta_1-\eta_2)]}. \quad (IV.26)$$

La solución de la ecuación de Poisson con valores de potencial dado en la superficie de los electrodos, Ec (19) está dada por

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int da' \phi(\vec{r}') \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}. \quad (IV.27)$$

donde, n' es el desplazamiento normal a la superficie de la frontera, que en éste caso esta asociado a la coordenada radial η .

La construcción del potencial electrostático requiere de la derivada normal de la función de Green Ec. (IV.26), calculada en la superficie de uno de los electrodos;

$$\frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = \frac{1}{h_{\eta'}} \frac{\partial G_D}{\partial \eta'}_{\eta'=\eta_1} = -\frac{4\pi}{h_{\eta'} a} (\cosh \eta - \cos \xi)^{\frac{1}{2}} \times \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\xi', \varphi') Y_{l,m}(\xi, \varphi) \frac{\sinh[(l+\frac{1}{2})(\eta-\eta_2)]}{\sinh[(l+\frac{1}{2})(\eta_1-\eta_2)]} \left\{ -(\cosh \eta' - \cos \xi')^{\frac{1}{2}} \cosh[(l+\frac{1}{2})(\eta_1-\eta')] + \frac{1}{2(l+\frac{1}{2})} (\cosh \eta' - \cos \xi')^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \eta' \sinh[(l+\frac{1}{2})(\eta_1-\eta')] \right\}_{\eta'=\eta_1},$$

La derivada normal sobre la superficie $\eta' = \eta_1$ se reduce a

$$\frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{h_{\eta'} a} (\cosh \eta - \cos \xi)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\xi', \varphi') Y_{l,m}(\xi, \varphi) \frac{\sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta - \eta_2)]}{\sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]} (\cosh \eta_1 - \cos \xi')^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{IV.28})$$

La función potencial, se obtiene sustituyendo la Ec. (IV.28) en la Ec. (IV.27), con las condiciones de frontera de las Ecs (IV.18), y la expresión para el área,

$$da = h_{\xi} h_{\varphi} d\xi d\varphi \text{ en } 1 \quad da_{\eta_1 \eta_2} = \frac{a^2 \sin \xi}{(\cosh \eta_1 - \cos \xi)^2} d\xi d\varphi.$$

Entonces la Ec. (IV.27) se reduce a:

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta, \varphi) = V(\cosh \eta - \cos \xi)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}(\xi, \varphi) \frac{\sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta - \eta_2)]}{\sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]} \times \\ \int_0^{\pi} h_{\xi'} d\xi' \int_0^{2\pi} h_{\varphi'} d\varphi \frac{Y_{l,m}^*(\xi' \varphi')}{h_{\eta'}} (\cosh \eta_1 - \cos \xi')^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

Considerando la simetría del sistema respecto a la rotación alrededor del eje z, sólo contribuye el término con $m = 0$, simplificando la expresión de el potencial a:

$$\phi(\xi, \eta, \varphi) = V(\cosh \eta - \cos \xi)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l(\cosh \eta_1) N_l P_l(\cos \xi)}{\sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]} \sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta - \eta_2)], \quad (\text{IV.29})$$

$$\text{donde: } C_l(\cosh \eta_1) = \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi' N_l P_l(\cos \xi') d\xi'}{(\cosh \eta_1 - \cos \xi')^{\frac{1}{2}}},$$

y N_l es el factor de normalización de los polinomios de Legendre $P_l(\cos \xi)$.

La integral puede ser expresada en términos de la función hipergeométrica ${}_2F_1$ da:

$$C_l(\cosh \eta_1) = \frac{(\sec h \eta_1)^{\frac{1}{2}+l}}{2^l N_l} {}_2F_1\left(\frac{l}{2} + \frac{1}{4}, \frac{l}{2} + \frac{3}{4}, l + \frac{3}{2}, \sec h^2 \eta_1\right). \quad (\text{IV.30})$$

Dado que el potencial sobre la esfera uno es V, la Ec. (IV.29) se puede expresar como:

$$\frac{1}{(\cosh \eta_1 - \cos \xi)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l(\cosh \eta_1) N_l P_l(\cos \xi), \quad (\text{IV.31})$$

por lo tanto, las C_l se pueden interpretar como los coeficientes de la expansión en polinomios de Legendre del inverso de la raíz cuadrada del factor binomial.

IV.5 – Intensidad eléctrica, densidad superficial de carga y cargas totales de dos esferas conductoras a diferencia de potencial fijo.

La intensidad del campo eléctrico es obtenida aplicando el operador gradiente a la Ec. (IV.29):

$$\begin{aligned} \vec{E}(\xi, \eta, \varphi) &= - \left(\hat{\xi} \frac{\partial}{h_{\xi} \partial \xi} + \hat{\eta} \frac{\partial}{h_{\eta} \partial \eta} + \hat{\varphi} \frac{\partial}{h_{\varphi} \partial \varphi} \right) \phi(\xi, \eta, \varphi) \\ &= - \frac{V_1}{a} (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l (\cosh \eta_1) N_l P_l (\cos \xi)}{\sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]} \times \\ &\quad \left\{ \left(N_l \frac{dP_l(\cos \xi)}{d\xi} + \frac{\sin \xi}{2(\cosh \eta - \cos \xi)} N_l P_l(\cos \xi) \right) \frac{\sin[(l + \frac{1}{2})(\eta - \eta_2)]}{N_l P_l(\cos \xi)} \hat{\xi} \right. \\ &\quad \left. + \left[(l + \frac{1}{2}) \cosh[(l + \frac{1}{2})(\eta - \eta_2)] + \frac{\sinh \eta \sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta - \eta_2)]}{2(\cosh \eta - \cos \xi)} \right] \hat{\eta} \right\}. \quad (\text{IV.32}) \end{aligned}$$

El campo eléctrico en la superficie de la esfera 1:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\xi, \eta = \eta_1, \varphi) &= - \frac{V_1}{a} (\cosh \eta_1 - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l (\cosh \eta_1) N_l P_l (\cos \xi)}{\sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]} \times \\ &\quad \left\{ (l + \frac{1}{2}) \cosh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)] + \frac{\sinh \eta_1 \sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]}{2(\cosh \eta_1 - \cos \xi)} \right\} \hat{\eta}_1, \quad (\text{IV.33}) \end{aligned}$$

Debido a que la suma de los términos de la componente angular del campo, $\hat{\xi}$, en la superficie de la esfera se anulan,

$$\sum_0^{\infty} C_l (\cosh \eta_1) N_l \frac{dP_l(\cos \xi)}{d\xi} = - \sin \xi \sum_0^{\infty} \frac{C_l (\cosh \eta_1) N_l P_l(\cos \xi)}{2(\cosh \eta - \cos \xi)},$$

sólo se tiene componente en la dirección normal a la superficie $\hat{\eta}$.

El campo eléctrico en la superficie de la esfera 2:

$$\vec{E}(\xi, \eta = \eta_2, \varphi) = \frac{V_1}{a} (\cosh \eta_2 - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l + \frac{1}{2}) C_l (\cosh \eta_1) N_l P_l (\cos \xi)}{\sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]} \hat{\eta}_2, \quad (\text{IV.34})$$

La distribución de la carga en cada uno de los electrodos se puede obtener usando la condición de frontera Ec. (I.2):

$$\begin{aligned} \sigma(\xi, \eta = \eta_1, \varphi) &= -\frac{\hat{n} \cdot \vec{E}(\xi, \eta = \eta_1, \varphi)}{4\pi} \\ &= \frac{V_1}{4\pi a} (\cosh \eta_1 - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l + \frac{1}{2}) C_l(\cosh \eta_1) N_l P_l(\cos \xi)}{\sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]} \times \\ &\left\{ (l + \frac{1}{2}) \cosh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)] + \frac{\sinh \eta_1 \sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]}{2(\cosh \eta_1 - \cos \xi)} \right\}, \end{aligned} \quad (IV.35)$$

$$\begin{aligned} \sigma(\xi, \eta = \eta_2, \varphi) &= -\frac{\hat{n} \cdot \vec{E}(\xi, \eta = \eta_2, \varphi)}{4\pi} \\ &= -\frac{V_1}{4\pi a} (\cosh \eta_2 - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l + \frac{1}{2}) C_l(\cosh \eta_1) N_l P_l(\cos \xi)}{\sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]}. \end{aligned} \quad (IV.36)$$

En las siguientes figuras se muestra la distribución de la carga sobre la superficie de las esferas, para diferentes configuraciones.

Caso 1: Esferas iguales ($R_1 = R_2 = 1.775 \text{ cm}$)

Comportamiento de la densidad superficial de carga sobre una de dos esferas iguales, en el hemisferio frontal ($0 < \xi < 2\pi$), separadas en el rango $4 < d < 8 \text{ cm}$. Se puede observar que el efecto de redistribución de la carga se da a toda distancia, siendo más significativo a distancias cercanas.

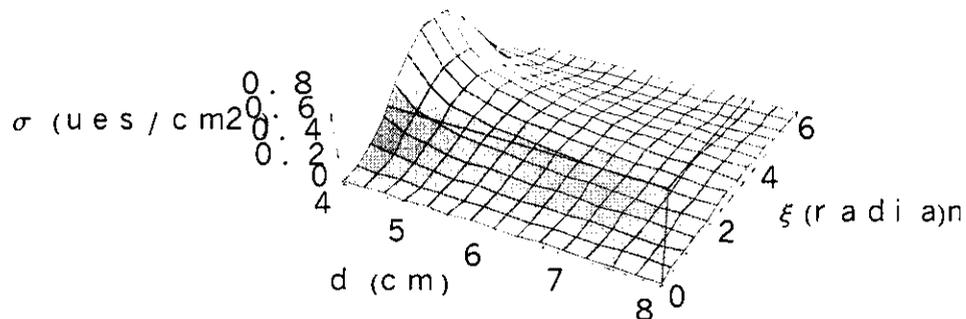


Fig. IV.2 Densidad de carga Ec. (IV.35) sobre la superficie de una esfera de radio $R_1 = 1,755 \text{ cm}$ ($0 < \xi < 2\pi$), debida a la acción inductiva de otra esfera colocada a diferentes distancias.

Caso 2. Una esfera de mayor tamaño a otra ($R_1 \gg R_2$)

Comportamiento de la distribución de la carga en la superficie de las esferas de radio $R_1 = 1.775$ y $R_2 = 0.01$ cm. La figura (i) muestra el comportamiento de la densidad de carga en el rango de $4 < d < 5$ cm de separación, sobre la esfera de radio R_1 ; se observa que el efecto de la redistribución se mantiene aproximadamente constante. En la figura (ii) en la esfera pequeña R_2 , la densidad de carga también, se mantiene aproximadamente constante, pero uniformemente distribuida en su superficie.

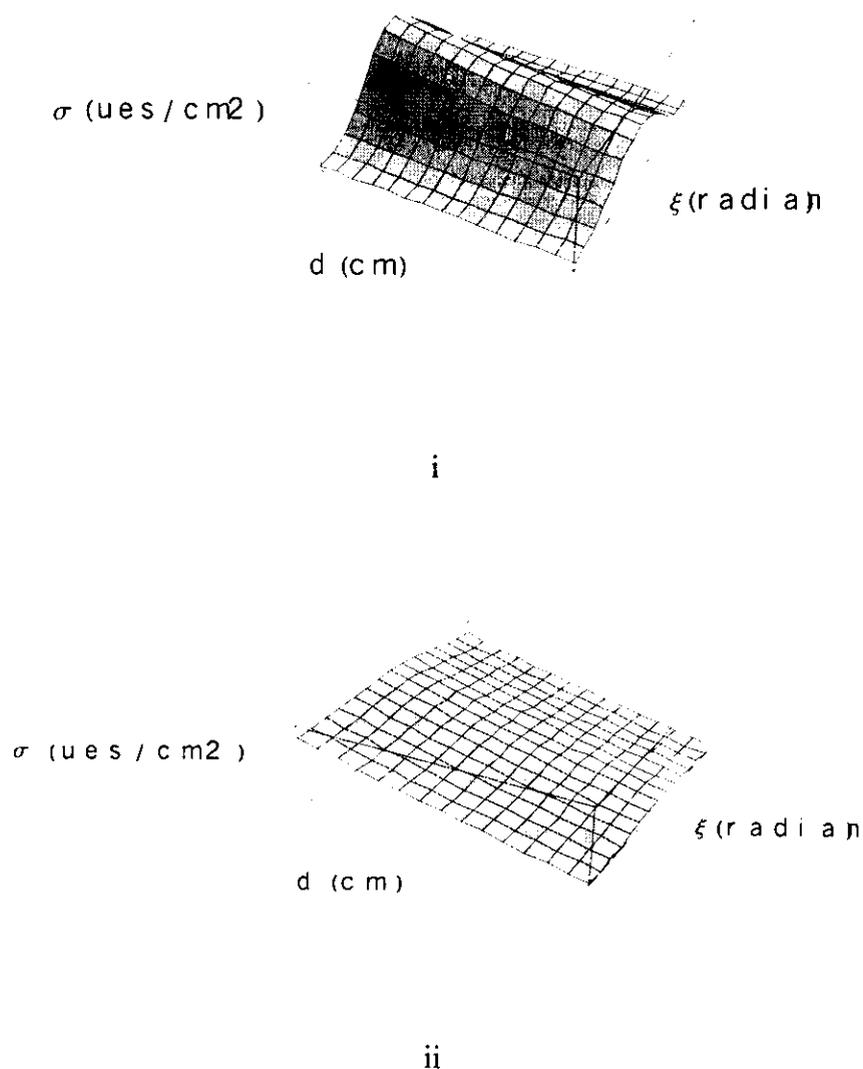


Fig. IV.3 Densidad de carga Ec. (IV.34) y Ec. (IV.35) sobre la superficie ($0 < \xi < 2\pi$) de una esfera de radio R , en presencia de otra de menor tamaño.

Integrando las Ecs. (IV.34 y IV.35), sobre la superficie de cada esfera, se obtiene la carga total en cada una de las esferas.

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma(\xi, \eta = \eta_1, \varphi) h_\xi d\xi h_\varphi d\varphi = \frac{V_1 a}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l(\cosh \eta_1)}{\sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]} \\
 &\quad \left\{ (l + \frac{1}{2}) \cosh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)] \int_0^\pi d\xi \frac{\sin \xi \sinh \eta_1 N_l P(\cos \xi)}{(\cosh \eta_1 - \cos \xi)^{l+1}} \right. \\
 &\quad \left. + \sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)] \int_0^\pi d\xi \frac{\sin \xi \sinh \eta_1 N_l P(\cos \xi)}{2(\cosh \eta_1 - \cos \xi)^{l+1}} \right\} \\
 &= \frac{V_1 a}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l(\cosh \eta_1)}{\sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]} \left\{ (l + \frac{1}{2}) \cosh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)] C_l(\cosh \eta_1) \right. \\
 &\quad \left. - \sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)] \frac{dC_l(\cosh \eta_1)}{d\eta_1} \right\} \quad (IV.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma(\xi, \eta = \eta_2, \varphi) h_\xi d\xi h_\varphi d\varphi \\
 &= - \frac{V_1 a}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l + \frac{1}{2}) C_l(\cosh \eta_1)}{\sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]} \int_0^\pi d\xi \frac{\sin \xi N_l P(\cos \xi)}{(\cosh \eta_2 - \cos \xi)^{l+1}} \\
 &= - \frac{V_1 a}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l + \frac{1}{2}) C_l(\cosh \eta_1) C_l(\cosh \eta_2)}{\sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]} \quad (IV.38)
 \end{aligned}$$

IV.6 – Cálculo de la fuerza entre esferas conductoras por medio del tensor de esfuerzos de Maxwell.

La fuerza que experimenta un objeto en un campo electrostático, se obtiene integrando el tensor de esfuerzos de Maxwell^[6] sobre la superficie

$$\vec{F} = \int_s \vec{n} \cdot \vec{T} da. \quad (IV.39)$$

$$\vec{T} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2} \nabla E^2). \quad (IV.40)$$

Así, la fuerza que experimenta la esfera 2 se obtiene al efectuar la integración del tensor con el campo electrostático Ec. (IV.33)

$$\vec{E}(\xi, \eta = \eta_2, \varphi) = -\frac{V_1}{a} (\cosh \eta_2 - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l + 1/2) C_l(\cosh \eta_1) N_l P_l(\cos \xi)}{\sinh[(l + 1/2)(\eta_1 - \eta_2)]} \hat{\eta}_2,$$

sobre su superficie,

$$\vec{F} = \int_s \left(\frac{\vec{E}\vec{E}}{4\pi} - \gamma \frac{\vec{E}\vec{E}}{8\pi} \right) da = \frac{1}{8\pi} \int_s \vec{E}\vec{E} da. \quad (\text{IV.41})$$

El diferencial de área de la esfera 2 en coordenadas biesféricas es:

$$da = h_\xi h_\varphi d\xi d\varphi \text{ en } 2 \quad da_{\eta=\eta_2} = \frac{a^2 \sin \xi}{(\cosh \eta_2 - \cos \xi)^2} d\xi d\varphi, \quad (\text{IV.42})$$

y el vector unitario en la misma superficie Ec. (IV.6),

$$\hat{\eta}_2 = \frac{-\sinh \eta_2 \sin \xi (\hat{i} \cos \varphi + \hat{j} \sin \varphi) - \hat{k} (\cosh \eta_2 \cos \xi - 1)}{\cosh \eta_2 - \cos \xi}.$$

Sustituyendo en la Ec. (IV.41) para la fuerza en la esfera 2, las Ecs. (IV.34), (IV.6) y (IV.42), se obtiene una ecuación que al integrar los factores con dependencia funcional azimutal por ser periódicas, son cero. Queda sólo una componente en la dirección k :

$$\vec{F}_2 = -\hat{k} \frac{V_1^2}{4} \sum_{l,l'=0}^{\infty} B_l B_{l'} \int_0^\pi [P_l(\cos \xi) P_{l'}(\cos \xi) (\cosh \eta_2 \cos \xi - 1) \sin \xi] d\xi, \quad (\text{IV.43})$$

donde, para simplificar notación, se ha usado la definición,

$$B_l = \frac{(l + 1/2) C_l(\cosh \eta_1) N_l}{\sinh((l + 1/2)(\eta_1 - \eta_2))}, \quad (\text{IV.44})$$

Cambiando la variable de integración mediante $\alpha = \cos \xi$, se obtiene

$$\vec{F}_2 = -\hat{k} \frac{V_1^2}{4} \sum_{l,l'=0}^{\infty} B_l B_{l'} \int_0^\pi P_l(\alpha) P_{l'}(\alpha) (\alpha \cosh \eta_2 - 1) d\alpha. \quad (\text{IV.45})$$

Las integrales se reducen a los casos:

$$\int_{-1}^1 P_l(\alpha) P_{l'}(\alpha) d\alpha = \frac{2}{2l+1} \quad \text{cuando } l = l',$$

$$\int_1^1 \alpha P_l(\alpha) P_{l'}(\alpha) d\alpha = \begin{cases} \frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)} & \text{cuando } \rightarrow l' = l+1 \\ \frac{2l}{(2l-1)(2l+1)} & \text{cuando } \rightarrow l' = l-1 \end{cases}$$

Correspondientemente se necesitan los coeficientes

$$B_l = \frac{(l + \frac{1}{2})(\operatorname{sech} \eta_1)^{l+\frac{1}{2}}}{2^l \sinh((l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2))} {}_2F_1\left(\frac{l}{2} + \frac{1}{4}, \frac{l}{2} + \frac{3}{4}, l + \frac{3}{2}, \operatorname{sech}^2 \eta_1\right),$$

$$B_{l+1} = \frac{(l + \frac{3}{2})(\operatorname{sech} \eta_1)^{l+\frac{3}{2}}}{2^{l+1} \sinh((l + \frac{3}{2})(\eta_1 - \eta_2))} {}_2F_1\left(\frac{l}{2} + \frac{3}{4}, \frac{l}{2} + \frac{5}{4}, l + \frac{5}{2}, \operatorname{sech}^2 \eta_1\right),$$

$$B_{l-1} = \frac{(l - \frac{1}{2})(\operatorname{sech} \eta_1)^{l-\frac{1}{2}}}{2^{l-1} \sinh((l - \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2))} {}_2F_1\left(\frac{l}{2} - \frac{1}{4}, \frac{l}{2} + \frac{1}{4}, l + \frac{1}{2}, \operatorname{sech}^2 \eta_1\right),$$

La expresión final para la fuerza es:

$$\hat{F}_2 = -\hat{k} \frac{V_1^2}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \cosh \eta_2 \left[\frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)} B_l B_{l+1} + \frac{2l}{4l^2 - 1} B_l B_{l-1} \right] - \frac{2}{2l+1} B_l^2 \right\} \quad (\text{IV.46})$$

Hay que notar que la fuerza es atractiva, y solo tiene componente en la dirección Z, eje coordenado en el que se encuentran alineadas las esferas.

La dependencia entre los parámetros de distancia entre los centros de las esferas y sus radios se obtiene de la Ec. (IV.1):

$$R_1 = a \operatorname{csch} \eta_1, \quad R_2 = -a \operatorname{csch} \eta_2, \quad d = a \coth \eta_1 - a \coth \eta_2. \quad (\text{IV.47})$$

La distancia a es la mitad de la distancia entre los polos del sistema coordenado biesférico; está expresada en términos del radio de las esferas y la separación d de los centros de las esferas. De las Ec. (IV.47) obtiene:

$$a = \frac{(d + R_1 + R_2)(d + R_1 - R_2)(d - R_1 - R_2)(d - R_1 + R_2)}{2d}. \quad (\text{IV.48})$$

IV 7 – Análisis de la convergencia de las expresiones para la fuerza.

La convergencia de la ecuación para la fuerza, Ec. (IV.46), para el caso de dos esferas iguales ($R = 1.775$ cm), se muestra con los valores listados en las columnas de la Tabla IV.1. En ésta se representan respectivamente; en la segunda columna, la fuerza calculada con únicamente un término de la serie, la suma de dos términos en la tercera, en la cuarta columna la suma de tres términos, etc. Se ve que solo se requiere de dos términos de la serie, para tener

una buena concordancia con los valores experimentales a distancias $4 < d < 8$ cm, región sombreada de la Tabla IV.1. El comportamiento gráfico se muestra en la figura IV 4

Tabla IV.1 En esta tabla, se muestra la convergencia de la Ec. (IV.46), para el caso de dos esferas iguales ($R = 1.775$ cm).

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3.57	13.988	11.457	11.126	11.025	10.982	10.962	10.950	10.944	10.941	10.938	10.93
3.6	5.400	4.470	4.354	4.320	4.308	4.303	4.301	4.300	4.299	4.299	
3.65	2.585	2.162	2.112	2.100	2.096	2.095	2.095				
3.8	0.938	0.798	0.785	0.784	0.783	0.783					
4.0	0.469	0.406	0.402	0.402							
4.5	0.178	0.160	0.159	0.159							
5.0	0.097	0.089	0.089								
5.5	0.061	0.057	0.057								
6.0	0.042	0.039	0.039								
6.5	0.030	0.029	0.029								
7.0	0.023	0.022	0.022								
7.5	0.017	0.017									
8.0	0.014	0.014									

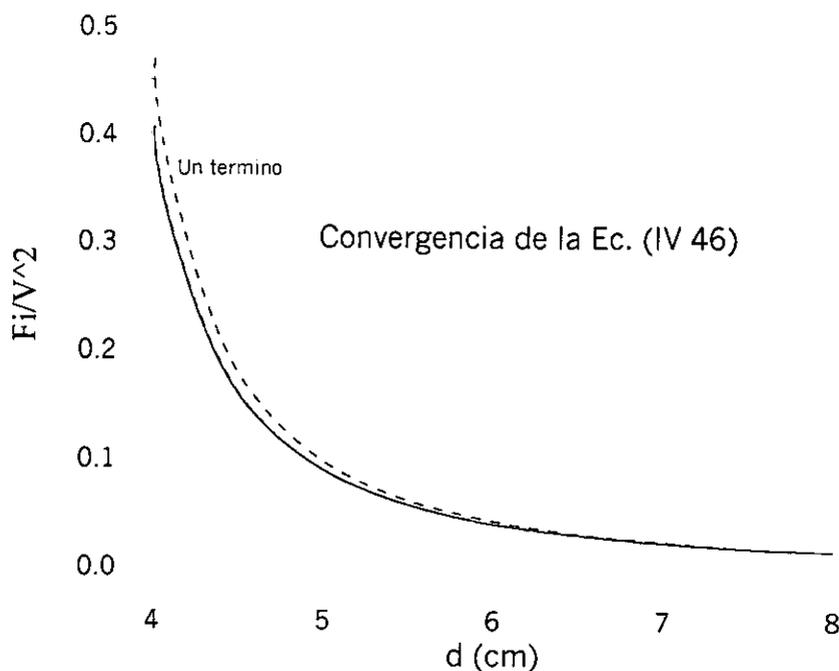


Fig. IV.4 Convergencia de la fuerza calculada de la Ec. (IV.46) con un número diferente de términos de la serie. Las curvas solo muestran el comportamiento de los valores medidos.

La rapidez de la convergencia de la Ec. (D6) obtenida por el método de imágenes, desarrollada por Maxwell, se muestra en la Tabla IV.2. Se consigue observar que se requieren mínimamente cinco a diez términos de la serie, para describir la misma región $4 < d < 8$ cm. Esto se ve mejor en la representación gráfica, figura IV.5.

Tabla IV.2 Convergencia la Ec D(6) (Maxwell). Se requieren hasta diez términos para obtener un buen acuerdo con los valores.

Dist.	1	2	3	4	5	8	10	Fteo/V2(cuatro)
4.0	0.135	0.256	0.330	0.369	0.387	0.400	0.401	0.402
4.5	0.086	0.133	0.151	0.157	0.159	0.159	0.159	0.159
5.0	0.058	0.081	0.087	0.088	0.089	0.089		0.089
5.5	0.042	0.054	0.056	0.057	0.057			0.057
6.0	0.031	0.038	0.039	0.039	0.039			0.039
6.5	0.024	0.028	0.028	0.029	0.029			0.029
7.0	0.018	0.021	0.021	0.022	0.022			0.022
7.5	0.015	0.017	0.017					0.017
8.0	0.012	0.013	0.013					0.013

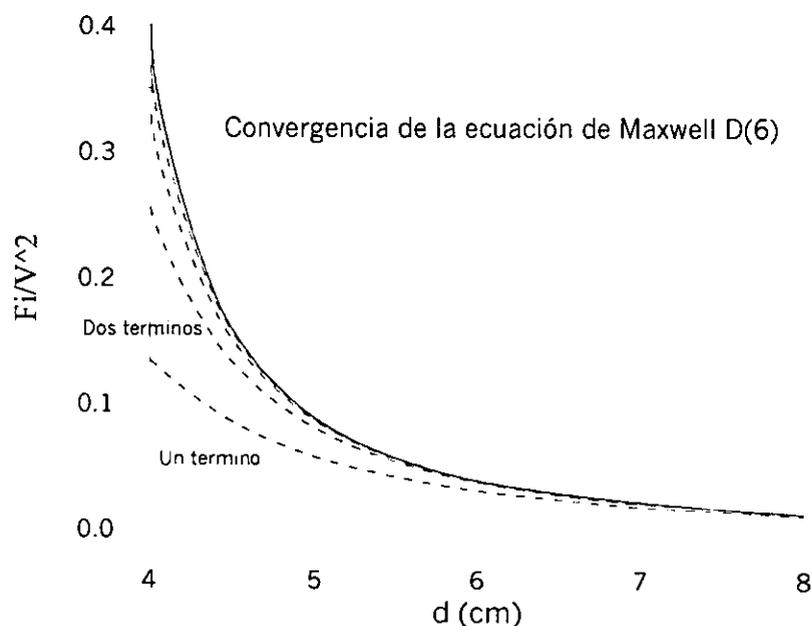


Fig. IV.5 En la gráfica se muestra la comparación entre la fuerza de dos esferas iguales ($R=1.775$ cm) calculada de la Ec. (IV.46), con los valores calculados de ecuación de imágenes de Maxwell D(6), las curvas, desde la más baja, corresponden a uno, dos, tres y cuatro términos de la suma.

Para la región cercana, la diferencia en la convergencia entre las Ecs (IV.46) y (D6) y se hace más evidente, por ejemplo, para distancias de décimas de milímetro, se requiere más de cuarenta términos con la Ec (D6) y diez con la Ec (IV.46). Así, se muestra la ventaja que se obtiene al resolver el problema usando un sistema de coordenadas, asociado a la geometría del sistema. En la gráfica siguiente, se muestra las convergencias de la ecuación de Maxwell, y la obtenida en ésta tesis.

Tabla IV.3 Valores de la fuerza de interacción entre esferas de radios $R_1 = R_2 = 1.775$ cm.		
d (± 0.01 cm)	(40 términos) F_{Maxwell}/V^2	(10 términos) F_{teo}/V^2
3.57	10.76	10.9
3.58	7.21	7.25
3.67	1.73	1.73
3.77	0.90	0.90
4.26	0.23	0.23

IV 8 – Límite de radios pequeños o de distancias grandes.

Desarrollando en series de potencias (R/d), la ecuación para la fuerza, Ec. (IV.46), para el caso de esferas iguales, $R_1 = R_2 = R$, se reduce en sus primeras potencias a:

$$\bar{F}_2 = -\hat{k} \frac{V_1^2}{2} \left\{ \frac{1}{3} B_0 B_1 \cosh \eta_2 - B_0^2 \right\} \approx \hat{k} V_1^2 \left[\left(\frac{R}{d} \right)^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{d} \right)^5 + \frac{11}{4} \left(\frac{R}{d} \right)^7 \right] \quad (\text{IV.49})$$

Para el caso de distancias grandes o esferas pequeñas ($d \gg R$), ésta ecuación se reduce aproximadamente a:

$$\bar{F}_2 \approx \hat{k} V_1^2 \left(\frac{R}{d} \right)^3 \quad (\text{IV.50})$$

Así, considerando un sistema formado por esferas puntuales, $R \rightarrow 0$, se hace en la siguiente grafica, la comparación del comportamiento de la fuerza, en todo el rango de distancias en el que se midió la fuerza.

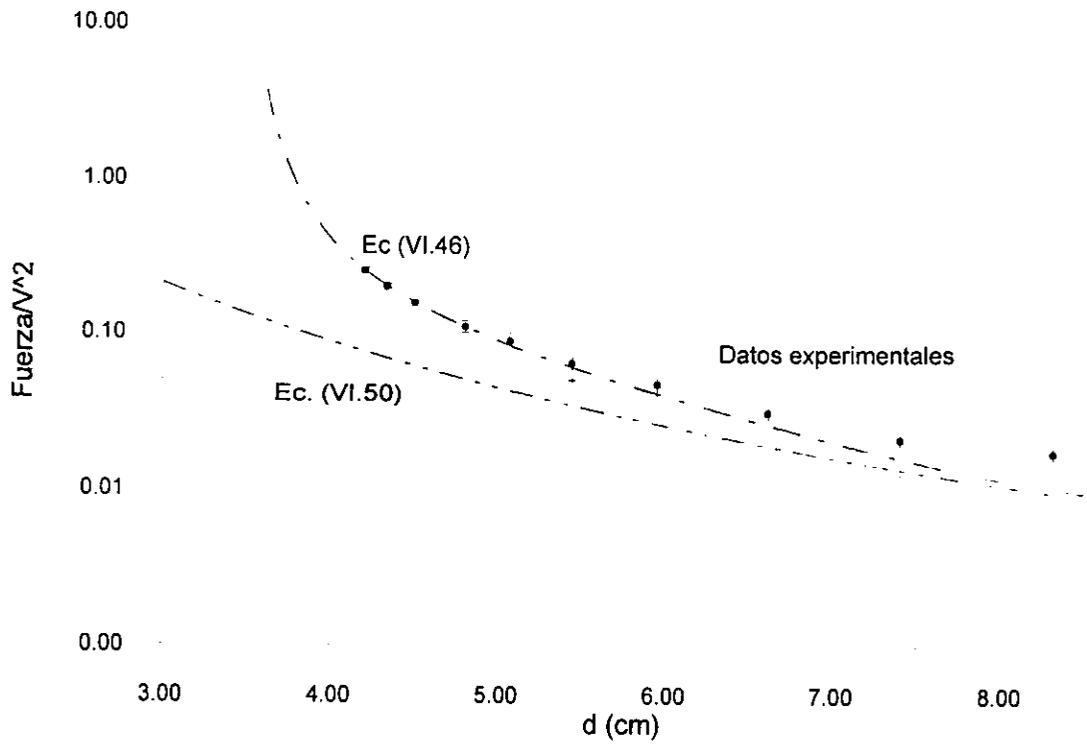


Fig. IV.6 En la gráfica se muestra el comportamiento de la fuerza entre dos esferas pequeñas calculada de la Ec. (IV.50), con los valores evaluados de Ec. (IV.46) y los datos experimentales, la separación de las curvas se interpreta como el debido al efecto inductivo.

Capítulo V

Medición de la fuerza electrostática entre dos esferas conductoras

V.1 – Introducción.

Aquí se describe el arreglo experimental que fundamentalmente fue igual al usado para el caso de cilindros Cap. (III). Se reportan los valores medidos de la fuerza electrostática entre un par de esferas conductoras, variando el tamaño relativo de las esferas, su separación, y la diferencia de potencial aplicado. Los valores medidos se reportan en tablas y gráficas. En las gráficas se representa por medio de una curva los valores calculados E_c (IV.46) y por medio de puntos los valores medidos, con líneas horizontales los errores experimentales. En cada caso se observa la concordancia cuantitativa y cualitativa con los valores medidos.

V.2 - Descripción de aparatos.

El equipo y arreglo experimental es básicamente igual al arreglo descrito y usado para los cilindros. Un diagrama del arreglo se muestra en la Fig. (V.1).

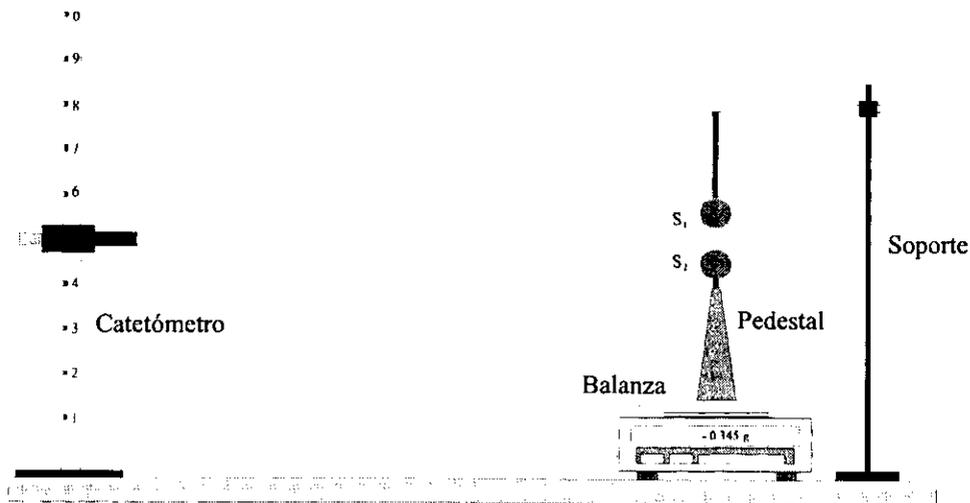


Fig. V.1 Sistema experimental para medir la fuerza electrostática entre dos esferas (S_1 y S_2) a diferentes separaciones, diferencia de potencial y tamaños.

El sistema consta de una fuente de poder (APASCO ES-9070 Kilovolt Power Supply), un catetómetro de 50 cm de longitud y de precisión de ± 0.001 cm, una balanza electrónica Ohaus 300D, con capacidad de 30 g y precisión de ± 0.001 g, y un soporte dieléctrico de aproximadamente 20 cm de longitud colocado sobre la balanza.

V.3 - Procedimiento Experimental

El sistema electrostático se forma con dos esferas conductoras, una suspendida por medio de un alambre de cobre calibre #32, con el que se aplica el potencial positivo (se usa un cable de resistencia interna de 200 Megaohms, como protección de la fuente), y una segunda esfera, conectada a la terminal negativa, colocada en el soporte apoyado sobre la balanza.

Las esferas se alinean colocándolas verticalmente a una distancia aproximada de 3 cm y comprobando por medio del ocular del catetómetro, la posición de sus centros. La distancia Δ entre las esferas se midió entre sus paredes próximas utilizando el catetómetro. Por lo tanto, la distancia de separación entre los centros de las esferas d se calculó de: $d = \Delta + R_1 + R_2$

El experimento se desarrolló para diferentes combinaciones de esferas (balines de diferentes diámetros) cuyos radios fueron medidos con un calibrador de resolución de ± 0.001 mm.

Después de colocar la esfera sobre la balanza, por medio del botón (Tara) de ajuste, se colocó el indicador de la balanza en cero (0.000 gr). Al aplicar el voltaje la balanza indicó la atracción entre las esferas; esta atracción es registrada en la balanza como una disminución en la lectura, debido a que las esferas fueron electrizadas con cargas opuestas. Para obtener el valor de la fuerza en dinas, el valor indicado por la balanza debe ser multiplicado por el valor local de la gravedad (Puebla - Mex.) $g = 978 \text{ cm/s}^2$

Para lograr mayor exactitud, se toma nota de la lectura de la interacción en la balanza cuando ésta es estable. La posición de las esferas se lee utilizando el vernier del catetómetro.

El análisis del error total, se calculó considerando el voltaje aplicado, el error por reproducibilidad y escala igual a ± 0.3 statvolt y el error de escala de la balanza igual a, ± 1 mg.

El cálculo se realizó usando la expresión.

$$\frac{\delta F}{F} / V^2 = \frac{\delta M}{M} + \frac{2\delta V}{V}$$

la línea sobre las variables significa que se están tomando los promedios.

V.4 – Mediciones y cálculos teóricos.

En esta sección en las Tablas (V.1–V.5), se reportan los valores medidos de la fuerza, distancia entre los centros de las esferas, diferencia de potencial a la que se mantuvo el capacitor y los valores medidos de la fuerza calculados para las mismas configuraciones geométricas. En las gráficas, Figs. (V.2 – V.5), se

muestra el comportamiento de los resultados con la función para la fuerza Ec. (IV.46) La diferencia de potencial aplicada se cambió en las magnitudes: $V = 7.5, 10.9, 14.2, 17.5, 20.5$ statvolt.

En las tablas se lista en la primera columna las distancias (d) entre los centros de las esferas; en la segunda se escribe el valor promedio de la "fuerza" (M), en miligramos, entre las esferas; en la tercera columna, la fuerza calculada con el valor de la gravedad en Puebla (F); en la cuarta, la fuerza promedio normalizada con el cuadrado de la diferencia de potencial (F_{exp}/V^2); y, finalmente, en la última columna, la fuerza teórica (F_{teo}/V^2), también normalizada, calculada con dos términos de la Ec. (IV. 46) usando las dimensiones de las esferas para las que se midió la fuerza.

Tabla V.1 Valores medidos de la fuerza de interacción entre esferas de radios $R_1=1.775$ y $R_2=0.873$ cm. con diferencia de potencial de 20.5 statvolts				
$d(\pm 0.01\text{cm})$	$M(\pm 1\text{mg})$	$F=Mg(\pm 1 \text{ dinas})$	$F_{exp}/V^2(\pm 0.003)$	F_{teo}/V^2
4.72	13	13	0.031	0.021
4.23	19	19	0.045	0.033
3.87	26	25	0.059	0.051
3.50	43	42	0.100	0.091
3.19	82	80	0.190	0.170

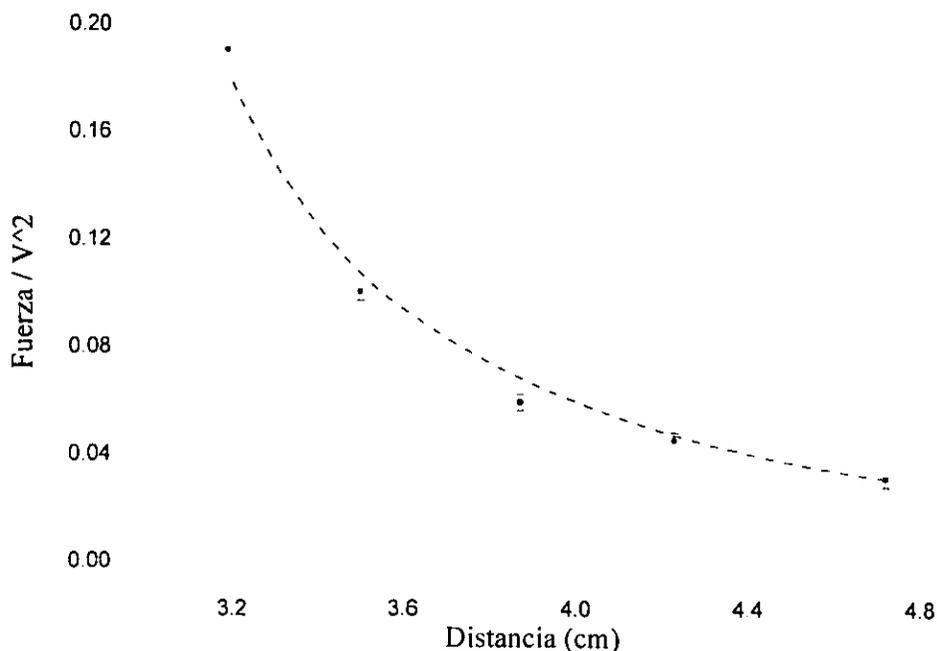


Fig. V.2 Fuerza electrostática medida y normalizada con el cuadrado de la diferencia de potencial contra la distancia entre dos esferas, comparada con la solución analítica (curva).

Tabla V.2 Valores medidos de la fuerza de interacción entre esferas de radios $R_1=1.775$ y $R_2=0.952$ cm. con diferencia de potencial de 20.5 statvolts				
$d(\pm 0.01\text{cm})$	$M(\pm 1\text{mg})$	$F=Mg(\pm 1 \text{ dinas})$	$F_{\text{exp}}/V^2(\pm 0.003)$	F_{teo}/V^2
4.95	13	13	0.031	0.032
4.52	19	18	0.043	0.045
4.16	26	25	0.059	0.063
3.86	36	35	0.083	0.088
3.65	46	45	0.107	0.115
3.46	64	63	0.150	0.156

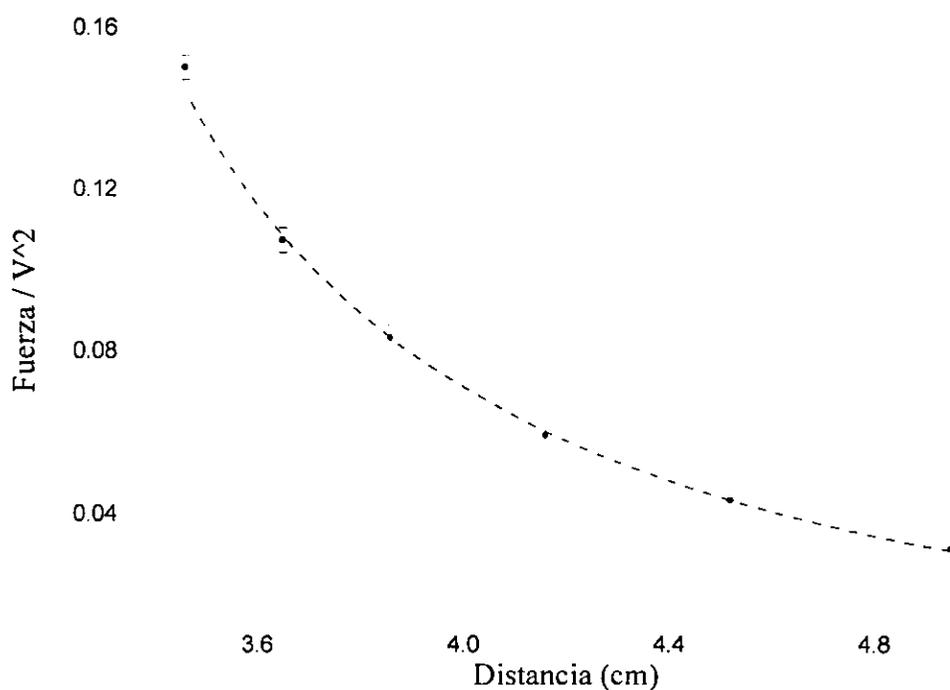


Fig. V.3 Fuerza electrostática medida y normalizada con el cuadrado de la diferencia de potencial contra la distancia entre dos esferas, comparada con la solución analítica (cavea).

Tabla V.3 Valores medidos de la fuerza de interacción entre esferas de radios $R_1=1.775$ y $R_2=1.111$ cm. con diferencia de potencial de 20.5 statvolts				
$d(\pm 0.01\text{cm})$	$M(\pm 1\text{mg})$	$F=Mg(\pm 1\text{ dinas})$	$F_{\text{exp}}/V^2(\pm 0.003)$	F_{teo}/V^2
4.99	18	18	0.043	0.039
4.65	22	21	0.050	0.051
4.38	26	25	0.059	0.065
4.17	32	31	0.074	0.081
3.86	47	46	0.109	0.119
3.64	67	65	0.155	0.165

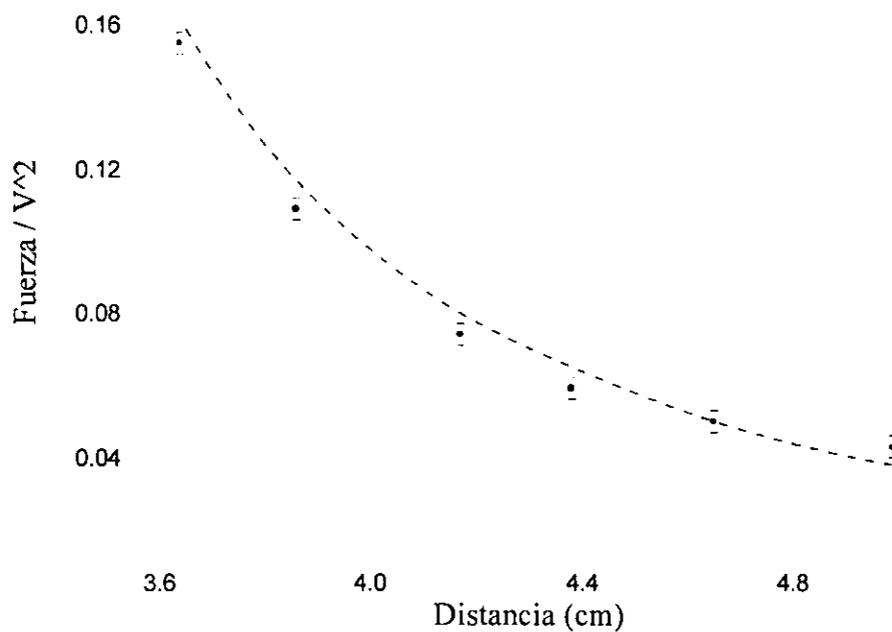


Fig. V.4 Fuerza electrostática medida y normalizada con el cuadrado de la diferencia de potencial contra la distancia entre dos esferas, comparada con la solución analítica (curva).

Tabla V.4 Valores medidos de la fuerza de interacción entre esferas de radios $R_1 = R_2 = 1.775$ cm. con diferencia de potencial de 20.5 statvolts					
$d(\pm 0.01\text{cm})$	$M(\pm 1\text{mg})$	$F=Mg(\pm 1\text{ dinas})$	$F_{\text{exp}}/V^2(\pm 0.003)$	F_{teo}/V^2	
8.30	7	7	0.017	0.012	
7.40	9	9	0.021	0.018	
6.61	13	13	0.031	0.027	
5.95	20	20	0.047	0.041	
5.44	28	27	0.064	0.060	
5.07	38	37	0.088	0.083	
4.80	47	46	0.109	0.110	
4.50	67	65	0.155	0.159	
4.33	86	84	0.200	0.206	
4.20	108	106	0.252	0.259	

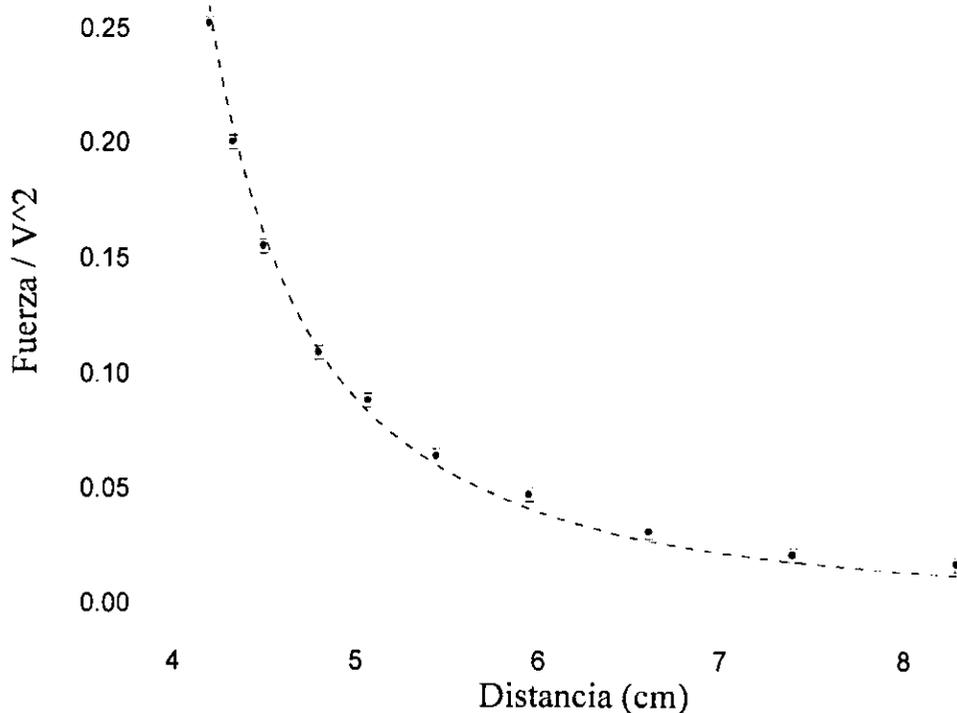


Fig. V.5 Fuerza electrostática entre dos esferas conductoras, a diferencia de potencial constante colocadas a diferentes distancias. La curva presenta el comportamiento de la solución analítica Ec. (IV.46).

Tabla V.5 Valores medidos de la fuerza de interacción entre esferas de radios $R_1 = R_2 = 1.775$ cm. con diferencia de potencial de 3.75 statvolts				
$d(\pm 0.01\text{cm})$	$M(\pm 1\text{mg})$	$F=Mg(\pm 1 \text{ dinas})$	$F/V^2(\pm 0.07)$	F_{teo}/V^2
3.57	241	236	16.76	10.9
3.58	190	186	13.21	7.25
3.59	87	85	6.05	5.4
3.62	56	55	3.89	3.0
3.63	46	45	3.20	2.64
3.67	30	29	2.08	1.73
3.67	24	23	1.67	1.73
3.77	12	12	0.83	0.90
4.26	3	3	0.21	0.23

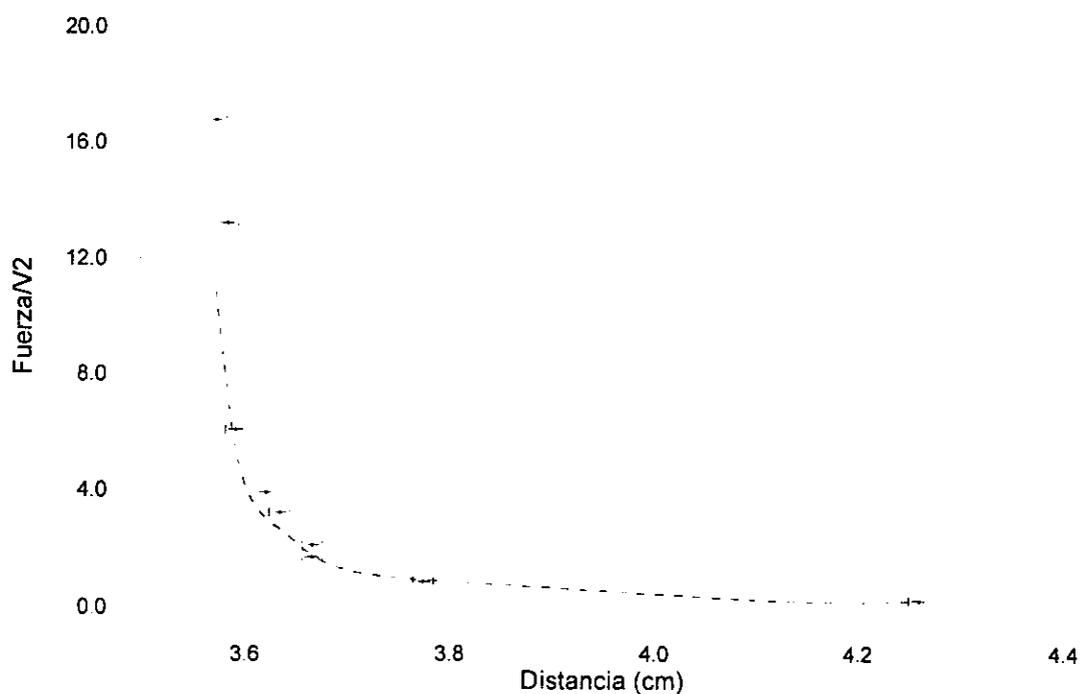


Fig. V.6 Fuerza electrostática entre dos esferas conductoras, a diferencia de potencial constante colocadas a distancias cercanas ($0.01 < \Delta < 4$ milímetros). La curva presenta el comportamiento de la solución analítica Ec. (IV.46).

Comportamiento de la fuerza con la diferencia de potencial.

En la Figura V.6, se grafican los valores medidos de la fuerza electrostática, como función del cuadrado de la diferencia de potencial correspondiente al trabajo que se ha realizado para “almacenar” la energía en el condensador, variada en el rango $7.5 < V < 20.5$ statvolt, entre dos esferas iguales, colocadas a una distancia constante.

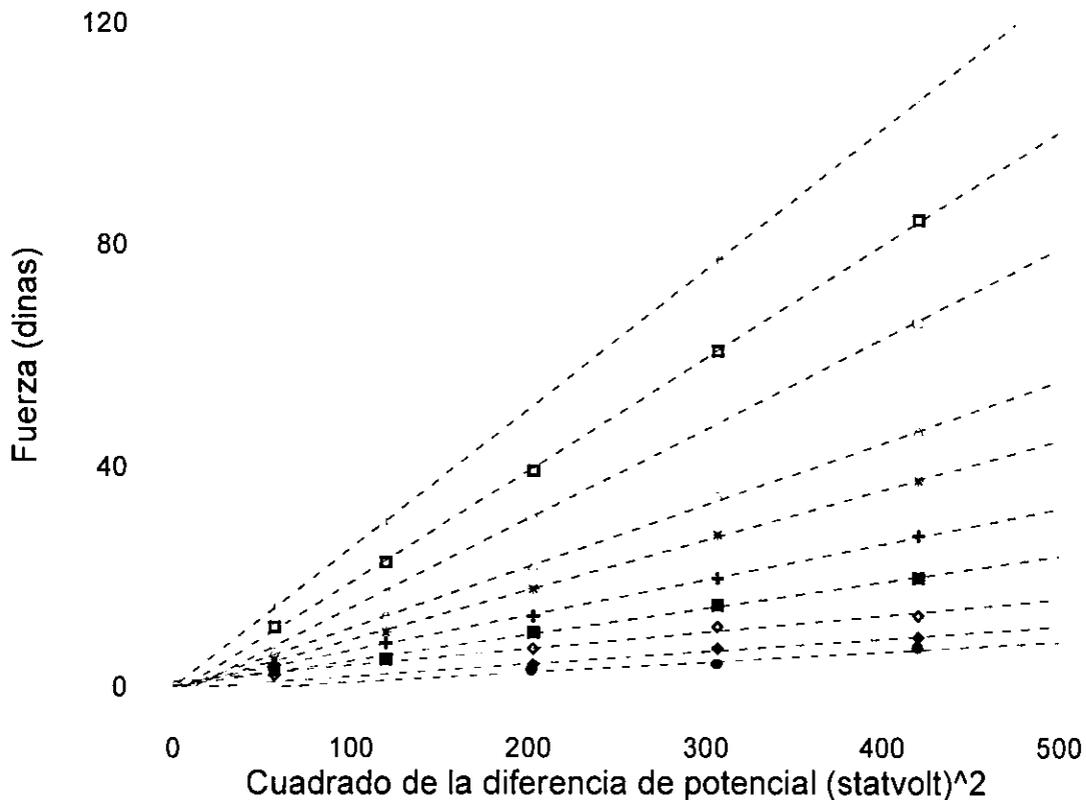


Fig. V.6 Comportamiento de la fuerza entre dos esferas iguales ($R=1.775\text{cm}$) mantenidas a una distancia constante, como función del cuadrado de la diferencia de potencial. Los voltajes fueron variados en el rango de 7.5 a 20.5 statvolt. La correlación con respecto al cuadrado de la diferencia de potencial ($F \propto V^2$), implica la validez de proporcionalidad con la carga en la ley de Coulomb.

V.5 – Análisis de resultados

Con la curva en la Fig. V.10 se gráfica el comportamiento de la fuerza con la distancia. Para su cálculo se consideró idealmente, cinco cifras significativas como el número máximo de dígitos que experimentalmente se miden cada una de las variables. La parte de la curva que corresponde a la región cercana (un micrón entre las paredes cercanas de las esferas) se determinó con 46 términos

de la serie de la Ec (IV.46), para determinar la fuerza en la región lejana (siete diámetros de las esferas, $d = 25$ cm) se requirió sólo de un término de la serie. La curva inferior, muestra la tendencia hacia el comportamiento monopolar o Coulombiano (Ec IV.54) derivada de la Ec. (IV.46) al considerar que $d \gg R$, y con puntos con su barra de error, los valores medidos (Tabla V.5 y V.6), a una diferencia de potencial de 20.5 statvolts en la región lejana y 3.75 statvolts en la cercana. Por ser efectuado el experimento en condiciones ambientales, la distancia mínima (región cercana) a la que se medio sin que se produjera salto de carga, fue de 0.1 milímetro.

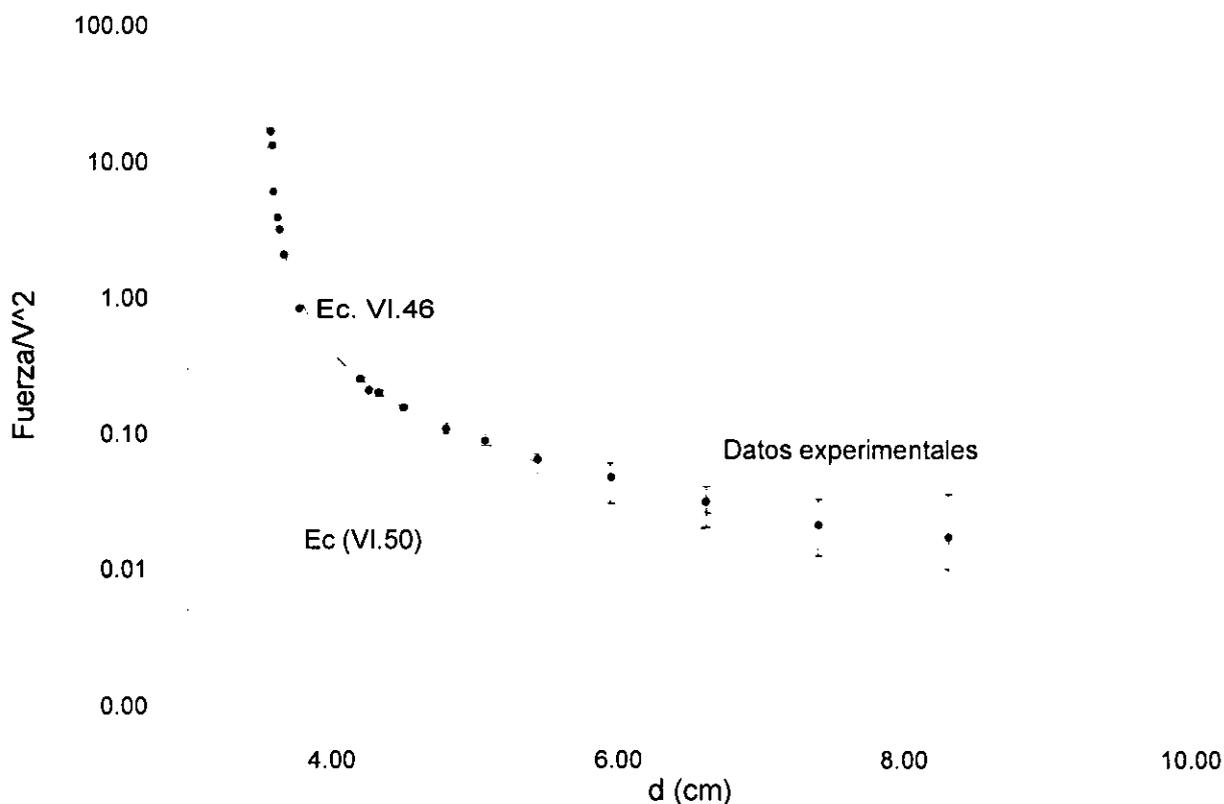


Fig. V.10 En la gráfica siguiente se muestra, por medio de la curva (en forma de S), el comportamiento de la ecuación obtenida para la fuerza electrostática (Ec IV.46) entre dos esferas conductor as iguales ($R = 1.775$ cm)

En la gráfica se observa que la aproximación a distribución uniforme de carga, realmente sólo se puede considerar descrita cuando la resolución gráfica, ya no se puede identificar la diferencia. Sin embargo, el comportamiento funcional es claro. La buena correlación entre la Ec (IV.46) y los valores, también muestra que para la región lejana, siempre se miden fuerzas que muestran los efectos de la redistribución superficial de la carga.

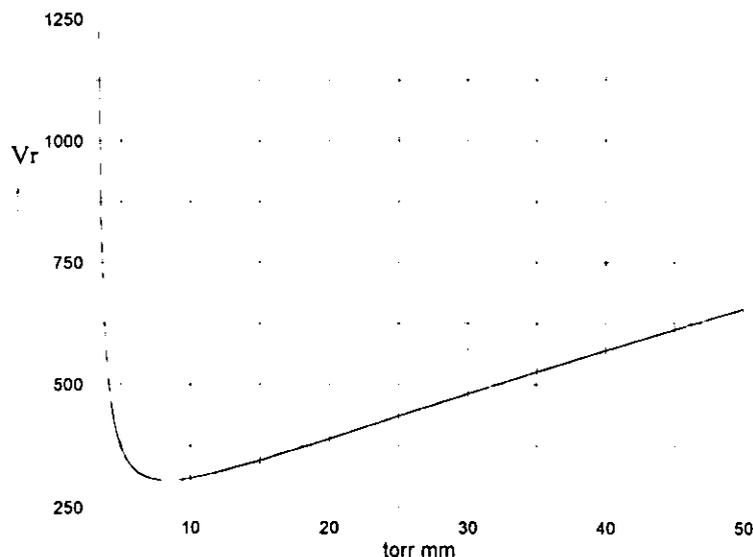
V.6 - Propuesta experimental para medir la fuerza en rango $0.01 < \Delta < 0.001$ cm de separación entre las superficies de las esferas.

Por ser efectuado el experimento en condiciones ambientales, la distancia mínima (región cercana) a la que se medio sin que se produjera salto de carga, fue de $\Delta \approx 0.2$ milímetro, con una diferencia de potencial de 3.75 stantvolt. Para medir la fuerza a menores distancias, se analizó la función de Paschen^[17] determinando las condiciones atmosféricas para medir la fuerza sin que se producirá salto de carga. De éste análisis se propone colocar el equipo en el interior de un sistema a baja presión.

La dependencia del voltaje de ruptura V_r , o producción de chispas (cascada de electrones secundarios emitidos por colisiones entre los electrones) entre dos electrodos con un campo eléctrico homogéneo, con la presión del aire p entre los electrodos, y la distancia d entre ellas, es determinada por la ley de Paschen. Su fórmula empírica para el voltaje de chispa en el aire es:

$$V_r = \frac{Bpd}{(C + \ln(pd))}, \quad \text{con} \quad C = \ln \left(\frac{A}{\ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)} \right)$$

donde $A = 1.5 \text{ mm}^{-1} \text{ Torr}^{-1}$, $B = 36.5 \text{ Vmm}^{-1} \text{ Torr}^{-1}$ y $\gamma = 10^{-2}$ (coeficiente de



ionización secundario), obteniendo $C = -1.124$ y su gráfico:

En la tabla siguiente se muestra las magnitudes de las fuerzas a medir, si la diferencia de potencial entre las esferas es de 3.75 stantvolt (1 Kv), cuando las esferas se acerquen a distancias de 0.1 a 0.01 mm. Con ésta información se cálculo la presión necesaria para evitar el salto de carga.

d (cm)	Δ	F (dinas)	F(3.75stv)	M (mg)	P (torr)
3.551	0.001	43.32	609.1	622.8	10 ⁻³
3.56	0.01	22.01	309.6	316.5	

A distancias de micróns entre conductores, se observan efectos cuánticos. La fuerza de Casimir^[18], el cual tiene que ver con la polarización del vacío que hay entre dos conductores, y se debe a la aparición espontánea de pares partícula antipartícula según la interpretación de la mecánica cuántica y la relatividad especial. En estas condiciones dos placas metálicas se atraen con una fuerza inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia entre los electrodos, resultando una fuerza de muy corto alcance.

$$F = \frac{A\pi^2hc}{240a^4}$$

donde h es la constante de *Planck* sobre dos π y c la velocidad de la luz. Sin embargo, considero que ésta fuerza seguramente se dejará de contemplar, en el momento que en las placas exista una carga neta.

Por lo anterior, se propone el sistema mostrado en la Fig. 1, el cual se vacía por medio de una bomba de vacío mecánica, logrando un vacío del orden de 10⁻⁴ mHg. Las dimensiones de la celda, se puede construir con un tubo de diámetro de 20 centímetros, longitud de 25 centímetros y 4 mm de espesor. Las tapas pueden ser de acero de un centímetro de espesor.

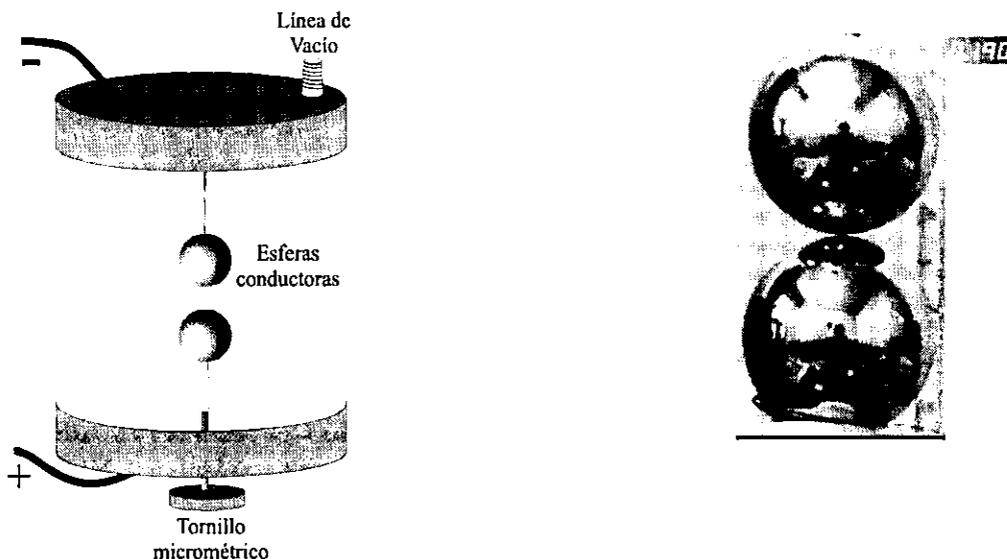


Fig. V 11 Sistema de vacío para la medición de la fuerza electrostática

Dado que la balanza digital no podría colocarse en vacío, se requiere usar un sistema para medir la fuerza, diseñado para trabajar en vacío. Una posibilidad para medir la fuerza, es usar un sistema formado por un puente de Wheatstone construido con galgas, montadas en una placa flexible de manera que la salida sea proporcional al esfuerzo aplicado.

Debido al rápido incremento de la fuerza con la distancia y las variaciones por vibración, el sistema requiere de una estabilidad que solo se puede obtener en una mesa holográfica.

Respecto al montaje para medir la interacción; en la Fig. 3 se muestra la tapa y sus partes principales, una viga de acero templado de $10 \times 2 \times 0.01$ cm, a ésta se pueden adherir con pegamento epoxico KL-320K^[19], dos galgas de 100 ohms, tipo Advance (Vernier), una a cada lado. El pegamento es de baja presión de vapor y autodegasado, recomendado para ser usado en sistemas de vacío donde la presión esta en el rango de 10^{-5} a 10^{-7} torr. Se cura a temperatura normal ($25\text{ }^{\circ}\text{C}$) en 18 horas, adquiriendo una adhesividad de 7g y una viscosidad mayor a 100,000 cps.

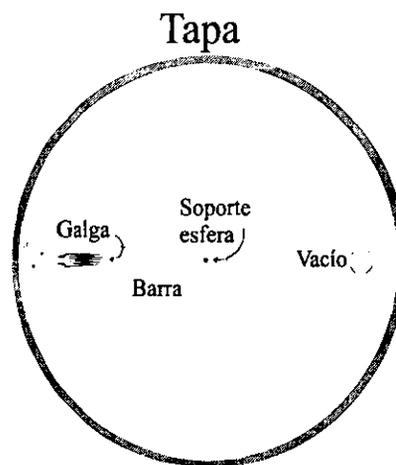


Fig. V.12 Esquema de la tapa del sistema de vacío, se muestra el deformómetro para medir la fuerza.

Ya pegadas las galgas a la viga, se determina el coeficiente de deformación, el cual por linealidad, deberá ser menor al 0.1%. El deformómetro se alinea a lo largo de la barra, para que la deformación sea uniaxial, y asegurar que el gradiente de deformación sea constante.

La calibración se hace aplicando fuerzas conocidas en el punto donde será pendida la esfera y midiendo el voltaje resultante a la salida del puente. Este arreglo tendrá una precisión de hasta el 0.1% de toda la escala. El límite de éste transductor sólo depende del ruido térmico de los electrones (Johnson) en las resistencias del puente.

Capítulo VI

Conclusiones

VI.1 – Evaluación de propiedades eléctricas de pares de cilindros y esferas conductoras.

En el Capítulo II se llevó a cabo la construcción del potencial electrostático en coordenadas bipolares, y se aplicó al sistema formado por cilindros de longitud infinita. El potencial resultó ser sólo función lineal de la variable radial, consecuentemente la intensidad de campo eléctrico, reveló que en la superficie de los electrodos, sigue la dirección normal. Las ecuaciones para las densidades de carga, debido a la inducción, manifiestan las variaciones de su distribución como función de la separación entre los electrodos. La fuerza electrostática es atractiva e igual para cada cilindro.

En el Capítulo IV se presentó la construcción del potencial electrostático en coordenadas biesféricas y la aplicación al sistema formado por un par de esferas conductoras. Las expresiones para las densidades de carga, mostraron la variación de la distribución debido a la inducción, con la separación entre los electrodos. La fuerza electrostática mostró una rápida convergencia comparada con la fuerza calculada de la expresión obtenida por el método de imágenes de Maxwell. También, se muestra el comportamiento de la ecuación para la fuerza en su límite de distancias grandes.

Para cilindros conductores se encontró que las superficies equipotenciales sólo son función de la coordenada circular radial η . Resultado consecuente con la separabilidad de la Ecuación de Laplace en coordenadas bipolares. Sin embargo, para obtener las superficies potenciales del sistema formado por un par de esferas conductoras, se requirió de una serie de armónicos biesféricos, consecuencia de la R-separabilidad de la ecuación de Laplace en coordenadas biesféricas. Esto se traduce en que el campo de intensidad eléctrica sigue la dirección de $\hat{\eta}$ en todo el espacio entre los cilindros, pero en el caso de las esferas mientras sobre la superficie de las mismas solo tienen la componente en la dirección de $\hat{\eta}$ en otros puntos entre las esferas también tienen componentes en la dirección $\hat{\xi}$.

En términos generales, las evaluaciones de las propiedades eléctricas de los sistemas estudiados en ésta tesis ilustran las ventajas de describirlos usando coordenadas que incorporen sus propiedades geométricas. En el caso de los cilindros la ventaja se aprecia en las formas analíticas simples para las diversas

Apéndice I

Construcción de la función de Green libre en términos de armónicos bipolares. Evaluación del potencial a partir de la densidad de carga de los electrodos.

El problema de determinar el potencial creado por una distribución de carga conocida $\sigma(\vec{r}')$ lo podemos resolver a partir de la Ec. (I.11), donde se requiere del conocimiento de la función libre de Green $G(\vec{r}, \vec{r}')$.

En nuestro caso, sabemos que al usar coordenadas bipolares y hacer la consideración de cilindros de longitud infinita, se puede expresar la función libre de Green como una serie de funciones armónicas.

La ecuación de Poisson con una fuente en el punto \vec{r}' , en coordenadas bipolares,

$$\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) G(\vec{r}, \vec{r}') = - \frac{4\pi}{h_\xi h_\eta} \delta(\xi - \xi') \delta(\eta - \eta') \quad (\text{A1})$$

tiene como solución la superposición de las funciones armónicas que son solución de la ecuación de Laplace. Esto se justifica por el hecho de que en cualquier punto diferente de \vec{r}' , la Ec. (A1) se reduce a la ecuación de Laplace, Ec. (I.7).

En este caso por ser las superficies cilíndricas, considerando las condiciones de frontera a cumplir y la condición de completitud^[6], se escribe la función delta de Dirac como:

$$\delta(\xi - \xi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} e^{im(\xi - \xi')} \quad (\text{A2})$$

Correspondientemente la función de Green como:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} e^{im(\xi - \xi')} g_m(\eta, \eta') \quad (\text{A3})$$

Esta función deberá cumplir las condiciones de simetría bajo cambios de punto - campo y punto - fuente, y $G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$, cuándo \vec{r} o \vec{r}' tienden a infinito. Sustituyendo las Ecs. (A.2) y (A.3) en Ec. (A1) e igualando coeficientes se obtiene:

$$\frac{d^2 g_m}{d\eta^2} - m^2 g_m = -4\pi\delta(\eta - \eta') \quad (\text{A4})$$

Como la función radial g_m , debe satisfacer para todos puntos fuera del punto fuente, la Ec. (A4), se reduce a la Ec. (I.7), y en consecuencia la función g_m la podemos escribir:

$$g_m(\eta, \eta') = A_m e^{m(\eta - \eta')} \quad (\text{A5})$$

Para $m \rightarrow 0$ este resultado es indeterminado. Sólo para este caso se aplica la regla de l'Hospital y nos da:

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dm} (A_m e^{m(\eta - \eta')})}{\frac{d}{dm} (m)} = A_0 (\eta - \eta')$$

por lo tanto, con las condiciones de frontera, y $m \rightarrow 0$,

$$g_m(\eta > \eta', \eta') = A_m e^{m(\eta - \eta')} \rightarrow A_0 (\eta - \eta')$$

$$g_m(\eta < \eta', \eta') = A_m e^{m(\eta' - \eta)} \rightarrow A_0 (\eta' - \eta) \quad (\text{A6})$$

Los coeficientes A_m deben ser calculados teniendo en cuenta las condiciones de contorno, y la simetría de la función g , así, sustituyendo en Ec.(A4), e integrando:

$$\frac{dg_m(\eta > \eta', \eta')}{d\eta} - \frac{dg_m(\eta < \eta', \eta')}{d\eta} = 2A_0 = -4\pi \quad (\text{A7})$$

La función general de Green en coordenadas bipolares, explícitamente queda como:

$$G(\xi, \eta, \xi', \eta') = (\eta - \eta') + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{im(\xi - \xi')} e^{m(\eta - \eta')}, \quad \text{o su simétrica}$$

$$G(\xi, \eta, \xi', \eta') = (\eta' - \eta) + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{im(\xi - \xi')} e^{m(\eta' - \eta)} \quad (\text{A8})$$

siendo funciones formadas de una serie armónica en coordenadas bipolares.

Potencial entre conductores con una distribución de carga determinada.

Considerando la ecuación de Laplace Ec. (I.7), sujeta a las condiciones de contorno descritas en las Ecs.(II.21) y la función de Green Ec. (A8), el potencial se obtiene de la expresión:

$$\phi(\vec{r}) = \int da' \sigma(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') \quad (\text{A9})$$

para cada uno de los cilindros se tiene:

En el cilindro 1, con la densidad superficial de carga, Ec (II.21)

$$\sigma(\xi, \eta = \eta_1) = - \frac{V(\cosh \eta_1 - \cos \xi)}{4\pi a(\eta_2 - \eta_1)}$$

Al sustituir en la Ec A(9), el potencial producido es:

$$\phi_1(\xi, \eta) = - \frac{V}{4\pi(\eta_2 - \eta_1)} \int_2 (\eta - \eta_1 + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{im(\xi - \xi')} e^{m(\eta - \eta_1)}) d\xi,$$

dado que las integrales de las exponenciales imaginarias en la variable angular son nulas el resultado es

$$\phi_1(\xi, \eta) = - \frac{V(\eta - \eta_1)}{2(\eta_2 - \eta_1)} \quad (\text{A10})$$

En el cilindro 2, la densidad superficial de carga es

$$\sigma(\xi, \eta = \eta_2) = \frac{V(\cosh \eta_2 - \cos \xi)}{4\pi a(\eta_2 - \eta_1)}$$

sustituyendo en A(9)

$$\phi_2(\xi, \eta) = \frac{V}{4\pi(\eta_2 - \eta_1)} \int_2 (\eta_2 - \eta + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{im(\xi - \xi')} e^{m(\eta_2 - \eta)}) d\xi = \frac{V(\eta_2 - \eta)}{2(\eta_2 - \eta_1)} \quad (\text{A11})$$

sumando las Ecs. (A10 y A11) se obtiene.

$$\phi(\xi, \eta) = \frac{V(\eta_2 - \eta)}{(\eta_2 - \eta_1)} - \frac{V}{2}$$

Este resultado es equivalente a la Ec (II.18) excepto por el cero de referencia del potencial, asociado a la constante de integración $-V/2$.

En resumen este ejercicio muestra la consistencia de los problemas y sus soluciones.

Apéndice II

Desarrollo de la función libre de Green en coordenadas bie esféricas, y construcción del potencial.

Como una ilustración de la solución formal de problemas electrostáticos, por medio de la función de Green, se deriva la función de Green libre en coordenadas bie esféricas, y se utiliza para obtener el potencial electrostático a partir de la densidad de carga superficial Ec. (IV 35) y (IV.36).

La ecuación de Poisson para una carga unitaria colocada en r' en coordenadas bie esféricas se expresa como:

$$\nabla^2 G(r, r') = -4\pi\delta(r - r') = -\frac{4\pi}{h_\xi h_\eta h_\varphi} \delta(\xi' - \xi)\delta(\eta' - \eta)\delta(\varphi' - \varphi) \quad (B1)$$

Para construir la función de Green en términos de funciones armónicas bie esféricas, se usa la condición de completez^[6].

$$\delta(\xi - \xi')\delta(\varphi - \varphi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\xi', \varphi') Y_{l,m}(\xi, \varphi)$$

También, se escribe la función de Green como una doble serie de armónicos bie esféricos en las coordenadas de los puntos fuente y campo

$$G(\xi, \eta, \varphi, \xi', \eta', \varphi') = (\cosh \eta' - \cos \xi')^{1/2} (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\xi', \varphi') Y_{l,m}(\xi, \varphi) g_l(\eta, \eta') \quad (B2)$$

Sustituyendo las ecuaciones correspondientes en Ec. (B1) y haciendo uso de la normalidad de los armónicos bie esféricos, obtenemos la ecuación:

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} - (l + \frac{1}{2})^2 \right] g_l(\eta, \eta') = -\frac{4\pi}{a} \delta(\eta - \eta') \quad (B3)$$

La función de Green, radial $g(\eta, \eta')$, debe satisfacer la ecuación homogénea, que se genera para $\eta \neq \eta'$. Así, se puede proponer la solución:

$$g_l(\eta, \eta') = A_l e^{(l+\frac{1}{2})\lambda(\eta-\eta')} \quad \text{para } \eta < \eta' \quad (B5)$$

$$g_l(\eta, \eta') = A_l e^{(l+\frac{1}{2})\lambda(\eta'-\eta)} \quad \text{para } \eta > \eta' \quad (B6)$$

Los coeficientes A_l se calculan integrando la Ec. (B3) en la vecindad $\eta' + \epsilon = \eta' + \epsilon$ a $\eta' - \epsilon = \eta' - \epsilon$,

$$\frac{dg_l}{d\eta_{\eta\eta'+}} - \frac{dg_l}{d\eta_{\eta\eta'-}} = -\frac{4\pi}{a}$$

obteniendo:

$$A_l = \frac{2\pi}{a(l + \frac{1}{2})} \quad (\text{B7})$$

Así, la función de Green libre en coordenadas biesféricas queda

$$G(\xi, \eta, \varphi, \xi', \eta', \varphi') = \frac{2\pi}{a} (\cosh \eta' - \cos \xi')^{1/2} (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\xi', \varphi') Y_{l,m}(\xi, \varphi) e^{(l+\frac{1}{2})(\eta' - \eta)} \quad (\text{B8})$$

Potencial de dos esferas conductoras con una distribución de carga $\sigma(\xi, \eta, \phi)$.

La evaluación de la función de potencial electrostático de un par de esferas a partir su distribución de su carga, la obtenemos sustituyendo en la Ec. (I.11) reducida, la función libre de Green Ec. (B8) y la Ec. (IV.35) y Ec. (IV.36), para cada una de las esferas.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_s \sigma(\vec{r}, \vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') da' \quad (\text{B9})$$

El potencial está formado por la suma de los potenciales de las dos esferas:

$$\phi(\vec{r}) = \phi_1 + \phi_2$$

donde ϕ_1 es el potencial debido a la carga sobre la esfera 1, e ϕ_2 , el debido a la carga sobre la esfera 2

Con la densidad de carga sobre la esfera 1:

$$\sigma(\xi, \eta = \eta_1, \varphi) = \frac{V}{4\pi a} (\cosh \eta_1 - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l + \frac{1}{2}) C_l(\cosh \eta_1) N_l P_l(\cos \xi)}{\sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]} \times \left\{ (l + \frac{1}{2}) \cosh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)] + \frac{\sinh \eta_1 \sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]}{2(\cosh \eta_1 - \cos \xi)} \right\},$$

el potencial es:

$$\begin{aligned}
\phi_l &= \frac{1}{4\pi} \int_{\xi} \int_{\varphi} h_{\xi} h_{\varphi} d\xi' d\varphi' \sigma(\xi', \eta' = \eta_1, \varphi') G(\xi, \eta, \varphi, \xi', \eta' = \eta_1, \varphi') \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\xi} \int_{\varphi} \frac{a^2 \operatorname{sen} \xi'}{(\cosh \eta_1 - \cos \xi')^2} d\xi' d\varphi' \frac{V}{4\pi a} (\cosh \eta_1 - \cos \xi')^{3/2} \times \\
&\quad \sum_{l'=0}^{\infty} \left[(l' + \frac{1}{2}) \cosh[(l' + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)] + \frac{\operatorname{senh} \eta_1 \operatorname{senh}[(l' + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]}{2(\cosh \eta_1 - \cos \xi')} \right] \times \\
&\quad \frac{C_{l'}(\cosh \eta_1) N_{l'}}{\operatorname{senh}((l' + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2))} P_{l'}(\cos \xi') \times \\
&\quad \frac{2\pi}{a} (\cosh \eta' - \cos \xi')^{1/2} (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\xi', \varphi') Y_{l,m}(\xi, \varphi) e^{(l+\frac{1}{2})\lambda(\eta_1 - \eta)} \left(l + \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

Por comodidad el potencial ϕ_l se separa en la suma de dos integrales,

Sea $\phi_l = \phi_{l1} + \phi_{l2}$, separando la suma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\phi_{l1} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\xi} \int_{\varphi} \frac{a^2 \operatorname{sen} \xi'}{(\cosh \eta_1 - \cos \xi')^2} d\xi' d\varphi' \frac{V}{4\pi a} (\cosh \eta_1 - \cos \xi')^{3/2} \\
&\quad \sum_{l'=0}^{\infty} \left[(l' + \frac{1}{2}) \cosh[(l' + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)] \right] \frac{C_{l'}(\cosh \eta_1) N_{l'}}{\operatorname{senh}((l' + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2))} P_{l'}(\cos \xi') \\
&\quad \frac{2\pi}{a} (\cosh \eta_1 - \cos \xi')^{1/2} (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\xi', \varphi') Y_{l,m}(\xi, \varphi) e^{(l+\frac{1}{2})\lambda(\eta_1 - \eta)} \left(l + \frac{1}{2} \right)
\end{aligned}$$

considerando las condiciones de ortogonalidad y normalización de las funciones armónicas esféricas y la simetría azimutal:

$$\int_{\varphi} d\varphi' \int_{\xi} \operatorname{sen} \xi' d\xi' Y_{lm}^*(\xi', \varphi') P_{l'}(\cos \xi') = \int_{\varphi} d\varphi' \int_{\xi} \operatorname{sen} \xi' d\xi' Y_{lm}^*(\xi', \varphi') Y_{l'0}(\xi', \varphi') = \delta_{m0} \delta_{l'l}$$

la cual hace que la función ϕ_{l1} se reduzca a

$$\phi_{l1} = \frac{V}{4} (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l'=0}^{\infty} \cosh[(l' + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)] \frac{C_{l'}(\cosh \eta_1) N_{l'} P_{l'}(\cosh \xi)}{\operatorname{senh}((l' + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2))} e^{(l+\frac{1}{2})\lambda(\eta_1 - \eta)} \quad (\text{B10})$$

y la función ϕ_{l2} :

$$\phi_{12} = \frac{V}{8\pi} \int_{\varphi} \int_{\xi} d\xi' d\varphi' \sinh \eta_1 \sum_{l'=0}^{\infty} \left[\frac{\sin \xi' C_{l'}(\cosh \eta_1) N_{l'} P_{l'}(\cos \xi')}{2(\cosh \eta_1 - \cos \xi')} \right] (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\xi', \varphi') Y_{l,m}(\xi, \varphi) e^{(l+1/2)(\eta_1 - \eta)}$$

con la identidad

$$\sum_{l'=0}^{\infty} \left[\frac{\sin \xi' C_{l'}(\cosh \eta_1) N_{l'} P_{l'}(\cos \xi')}{2(\cosh \eta_1 - \cos \xi')} \right] = \sum_{l'=0}^{\infty} \left[C_{l'}(\cosh \eta_1) N_{l'} \frac{dP_{l'}(\cos \xi')}{d\xi'} \right]$$

la ecuación se reduce a:

$$\phi_{12} = -\frac{V}{8\pi} \int_{\varphi} \int_{\xi} dP_{l'}(\cos \xi') d\varphi' \sinh \eta_1 \sum_{l'=0}^{\infty} [C_{l'}(\cosh \eta_1) N_{l'}] (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\xi', \varphi') Y_{l,m}(\xi, \varphi) e^{(l+1/2)(\eta_1 - \eta)}$$

sustituyendo la función armónica esférica, por su equivalente función asociada de Legendre, e integrando sobre el ángulo azimutal. La función asociada se convierte en el polinomio normal.

$$\phi_{12} = -\frac{V}{8\pi} \int_{\varphi} \int_{\xi} \sinh \eta_1 \sum_{l'=0}^{\infty} [C_{l'}(\cosh \eta_1) N_{l'}] (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l P_l^m(\cos \xi') Y_{l,m}(\xi, \varphi) dP_{l'}(\cos \xi') d\varphi' e^{-im\varphi} e^{(l+1/2)(\eta_1 - \eta)}$$

pero por la simetría azimutal, se integra sobre ξ'

$$\int_{\varphi} e^{-im\varphi} d\varphi' \int_{\xi} P_l^m(\cos \xi') dP_{l'}(\cos \xi') = 2\pi \int_{-1}^1 P_l(\cos \xi') dP_{l'}(\cos \xi') = \frac{2\pi}{2} [1 - (-1)^{l+l'}]$$

sumando se obtiene

$$\frac{2\pi}{2} \sum_{l'} \sum_l [1 - (-1)^{l+l'}] = 2\pi \sum_s 1^s$$

$$\phi_{12} = -\frac{V}{4} (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{\sinh((l+1/2)(\eta_1 - \eta_2))}{\sinh((l+1/2)(\eta_1 - \eta_2))} C_{l'}(\cosh \eta_1) N_{l'} P_{l'}(\cosh \xi) e^{(l+1/2)(\eta_1 - \eta)}$$

(B11)

Con la densidad de carga sobre la esfera 2:

$$\sigma(\xi, \eta = \eta_2, \varphi) = -\frac{V}{4\pi a} (\cosh \eta_2 - \cos \xi)^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l + \frac{1}{2}) C_l(\cosh \eta_1) N_l P_l(\cos \xi)}{\sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)]} \quad (7)$$

el potencial debido a la carga sobre la esfera 2:

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi} \int_{\xi} h_{\xi'} h_{\varphi'} d\xi' d\varphi' \sigma(\xi', \eta' = \eta_2, \varphi') G(\xi, \eta, \varphi, \xi', \eta' = \eta_2, \varphi')$$

sustituyendo la densidad de carga la función de Green y los factores de normalización:

$$\begin{aligned} \phi_2 = & -\frac{1}{4\pi} \int_{\varphi} \int_{\xi} \frac{a^2 \operatorname{sen} \xi'}{(\cosh \eta_2 - \cos \xi')^2} d\xi' d\varphi' \frac{V}{4\pi a} (\cosh \eta_2 - \cos \xi')^{3/2} \\ & \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l' + \frac{1}{2}) C_{l'}(\cosh \eta_1) N_{l'} P_{l'}(\cos \xi')}{\sinh((l' + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2))} \frac{2\pi}{a(l + \frac{1}{2})} (\cosh \eta_2 - \cos \xi')^{1/2} \\ & (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\xi', \varphi') Y_{l,m}(\xi, \varphi) e^{(l + \frac{1}{2})\lambda(\eta - \eta_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 = & -\frac{V}{8\pi} \int_{\varphi} \int_{\xi} \operatorname{sen} \xi' d\xi' d\varphi' \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l(\cosh \eta_1) N_l P_l(\cos \xi')}{\sinh((l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2))} (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \\ & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\xi', \varphi') Y_{l,m}(\xi, \varphi) e^{(l + \frac{1}{2})\lambda(\eta - \eta_2)} \end{aligned}$$

pero la ortogonalidad de los armónicos esféricos,

$$\int_{\varphi} d\varphi' \int_{\xi} \operatorname{sen} \xi' d\xi' Y_{l,m}^*(\xi', \varphi') Y_{l',0}(\xi', \varphi') = 2\pi \delta_{m,0} \delta_{l,l'}$$

consecuencia de la simetría azimutal,

$$\phi_2 = -\frac{V}{4} (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l(\cosh \eta_1) N_l P_l(\cosh \xi)}{\sinh((l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2))} e^{(l + \frac{1}{2})\lambda(\eta - \eta_2)} \quad (B12)$$

Finalmente, sumando (B10) (B11) y (B12), se obtiene el potencial total

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta, \varphi) = & \frac{V}{2} (\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l(\cosh \eta_1) N_l P_l(\cosh \xi)}{\sinh((l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2))} \\ & (e^{(l + \frac{1}{2})\lambda(\eta_1 - \eta)} \cosh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)] - e^{(l + \frac{1}{2})\lambda(\eta - \eta_2)} \sinh[(l + \frac{1}{2})(\eta_1 - \eta_2)] - e^{(l + \frac{1}{2})\lambda(\eta - \eta_2)}) \end{aligned}$$

$$\phi(\xi, \eta, \varphi) = V(\cosh \eta - \cos \xi)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l(\cosh \eta_1) N_l P_l(\cosh \xi)}{\sinh((l + 1/2)(\eta_1 - \eta_2))} \sinh((l + 1/2)(\eta - \eta_2))$$

Ecuación para el potencial, igual a la obtenida bajo las condiciones de frontera de Dirichlet Ec.(IV.29). En resumen este ejercicio muestra la consistencia de los problemas y sus soluciones.

Apéndice III

Fuerza electrostática entre dos esferas conductoras, por el método de imágenes.

Una de las aplicaciones del teorema de unicidad^[6] es la aplicación del llamado método de imágenes en la solución de problemas con superficies conductoras, bajo condiciones de frontera y simetría convenientes. El método está basado en el hecho de que la función de Green es solución de las correspondientes ecuaciones homogéneas, válidas en todo el espacio, excepto en las singularidades creadas por las cargas.

El “Método de Imágenes”: se apoya en que es posible colocar un conjunto de cargas imagen en un lado de una superficie conductora, para producir el mismo efecto que la carga real inducida sobre la superficie por un conjunto de cargas colocadas frente a ella^[6].

En el caso de una carga P , a una distancia d del centro de una esfera de radio r , conductora conectada a tierra, hay una carga imagen Q_0 , de magnitud $-Pr/d$, colocada a una distancia r^2/d del centro de la esfera, que produce, en la superficie de la esfera, el mismo efecto que la carga inducida por P .

En términos geométricos; la imagen de un punto a una distancia d del centro de una esfera de radio r , esta en el mismo radio a una distancia d' tal que $dd' = r^2$. Así, por ejemplo, la imagen de una superficie se puede obtener de la superficie original, encontrando un centro de inversión y el radio de una esfera de inversión.

Evaluación de la capacitancia de dos esferas conductoras, por el método de imágenes.

Se determinan los coeficientes de capacitancia e inducción, por el método de imágenes, haciendo uso de su equivalencia con el método de inversión, de dos esferas A y B , cuyos radios respectivamente son R_1 y R_2 , y cuyos centros están a una separación d . La esfera B está a un potencial unitario, y la esfera A estará conectada a tierra, lo que implica potencial cero.

El problema se invierte localizando dos esferas de inversión, centradas en un punto común, y determinando la posición y magnitud de las cargas imagen de la carga de la esfera A , suponiendo ésta inicialmente colocada en su centro.

Definiciones: l , radio de la esfera interior (distancia de O a A); le^w , radio de la esfera exterior (distancia de O a B) y; le^u , distancia del punto O donde se encuentra la carga P .

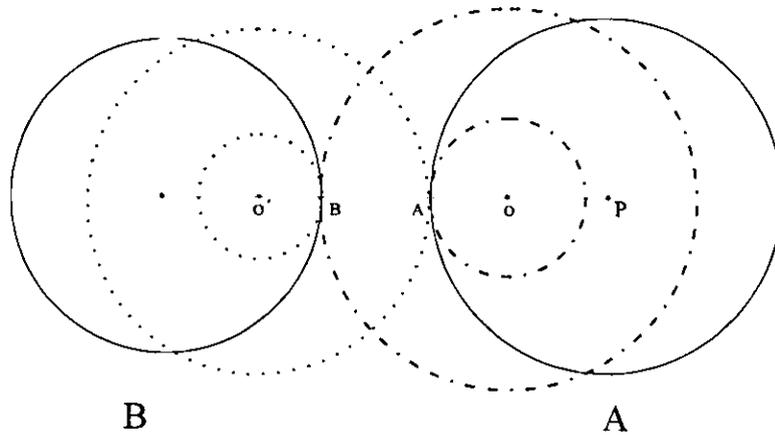


Figura que muestra con líneas punteadas, las esferas de inversión. El punto P, representa la posición inicial de la carga en la esfera A.

Sea Q_0 , (localizada a una distancia x_0 del centro) la carga imagen de la carga P en la esfera interior, P_1 (localizada a una distancia X_1 del centro) la imagen de Q_0 en la esfera exterior, Q_1 (localizada a una distancia x_1 del centro) la de P_1 en la primera esfera, y así sucesivamente, éstas se localizarán siempre cumpliendo que las distancias de las imágenes respecto al punto de inversión en:

esfera interior

$$X_s x_s = l^2$$

esfera exterior

$$X_s x_{s-1} = l^2 e^{2w},$$

por lo tanto:

$$x_0 = le^{-u}$$

$$X_1 = le^{u+2w}$$

$$x_1 = le^{-(u+2)w}$$

$$X_2 = le^{u+4w}$$

“

“

“

“

$$x_s = le^{-(u+2sw)}$$

$$X_s = le^{(u+2sw)}$$

Se puede observar que las posiciones de la imágenes Q_s tienden a estar en el centro de las esferas, y que las imágenes P_s se encuentran fuera de las esferas y se alejan del centro rápidamente.

La magnitud de las cargas imagen se obtiene de la razón de la magnitud del radio de la esfera a la distancia a la que se encuentra la carga, multiplicada por la magnitud de la carga: ($q = -R/x p$).

Esfera interior
 $Q_0 = -P/e^u \quad P = -Pe^{-u}$

Esfera exterior
 $P_1 = -P_1/e^w \quad Q_0 = Pe^w$

así

$$Q_1 = -Pe^{-(u+w)}$$

$$P_1 = Pe^w$$

$$Q_2 = -Pe^{-(u+2w)}$$

$$P_2 = Pe^{2w}$$

“

“

“

“

$$Q_s = -Pe^{-(u+sw)}$$

$$P_s = Pe^{sw}$$

Donde podemos observar que la carga imagen P_s además de encontrarse fuera de las esferas, diverge, mientras que las cargas imagen Q_s tienden a estar en el centro de las esferas, y convergen.

Ahora, se debe determinar la magnitud y posición de las imágenes de la carga P , en la esfera exterior.

Nombrando a Q'_1 la carga imagen de la carga P en la esfera exterior, a P'_1 la de Q'_1 en la esfera interior, al igual que en el caso anterior se obtiene

$$x'_1 = le^{2w-u}$$

$$X'_1 = le^{u-2w}$$

$$x'_2 = le^{4w-u}$$

$$X'_2 = le^{u-4w}$$

“

“

“

“

$$x'_s = le^{2sw-u}$$

$$X'_s = le^{u-2sw}$$

esfera interior

la exterior

$$Q'_s = -Pe^{sw-u}$$

$$P'_s = Pe^{-sw}$$

Aquí, las cargas imagen Q'_s además de encontrarse en exterior, divergen, y las cargas imagen, P'_s convergen, y se acercan al centro de las esferas.

De las imágenes, todas las P_s son positivas, y todas las Q_s negativas, todas las P'_s y Q_s convergen y se encuentran contenidas en la esfera interior, y todas las P_s y Q'_s divergen y están en el exterior de las esferas.

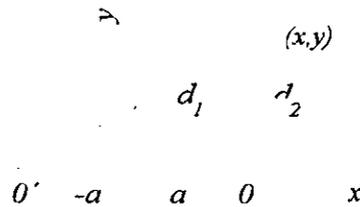
ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Se puede ver que la distancia a la que se encuentra la carga imagen Q_s del punto o , entre la distancia a la que se encuentra la carga P da:

$$x_s / le^u = le^{-(u+2sw)} / le^u = e^{-2(u+sw)} \quad Q_s = -P \cdot \frac{OQ_s}{OP} \quad (D1)$$

$$X'_s / le^u = le^{u-2sw} / le^u = e^{-2sw} \quad P'_s = P \cdot \frac{OP'_s}{OP} \quad (D2)$$

Las distancias entre un punto (x, y) y los puntos O y O' a una distancia $x = \pm a$ del origen es:



$$d_1^2 = (x - a)^2 + y^2 \quad d_2^2 = (x + a)^2 + y^2$$

y tomando su razón y a ésta su logaritmo natural se tiene

$$\ln \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 = \ln \frac{(x + a)^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2} \quad D(3)$$

y definiendo, $\eta = \ln(d_2/d_1)$ se pueden expresar las coordenadas del centro de las esferas, sus radios, y la posición de los puntos de inversión, en función de las coordenadas bipolares.

Considerando los dos puntos de inversión O y O' , se definen las razones:

$$\theta = \ln \frac{k'}{k}, \quad \alpha = \ln \frac{l'}{l}, \quad \beta = \ln \frac{j'}{j},$$

- k y k' respectivamente las distancias de la carga colocada en el centro de la esfera A , a los puntos O y O' ,
- i el radio de la esfera interior (distancia de O a A), i' el radio de la esfera exterior (distancia de O' a A),
- j el radio de la esfera exterior (distancia de O a B), j' el radio de la esfera interior (distancia de O' a B)

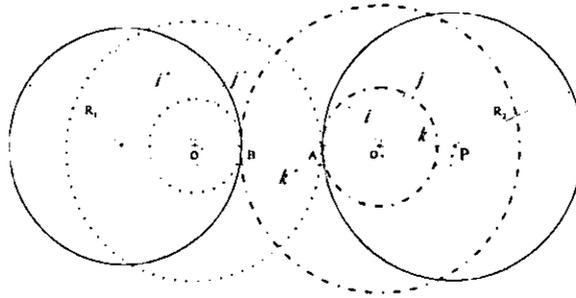


Figura que muestra con líneas punteadas, las esferas de inversión, asociadas a cada una de las esferas, las flechas identifican los radios de las mismas y las distancias entre la carga inicial P , y los puntos de inversión.

Inicialmente suponemos que la carga de la esfera A , está colocada en su centro, así, que su imagen Q_0 , estará a una distancia q_0 , de O , y q_0' de O' , cumpliendo respecto a los puntos de inversión:

$$j^2 = p \cdot q_0 \qquad j'^2 = p' \cdot q_0'$$

tomando su razón, a ésta su logaritmo natural, con las definiciones anteriores, y estando la carga colocada sobre la línea que une los centros de las esferas se tiene: $\theta = 2\alpha$, y $\beta - \alpha = \varpi$

$$\left(\frac{j'}{j} \right)^2 = \frac{p' \cdot q_0'}{p \cdot q_0} \qquad \rightarrow \qquad \ln \frac{q_0'}{q_0} = 2\beta - \theta = 2\varpi$$

La carga Q_0 tendrá como imagen p_1 en la esfera A , colocada en:

$$i^2 = q_0 \cdot p_1 \qquad i'^2 = q_0' \cdot p_1'$$

$$\left(\frac{i'}{i} \right)^2 = \frac{q_0' \cdot p_1'}{q_0 \cdot p_1} \qquad \rightarrow \qquad \ln \frac{p_1'}{p_1} = 2\alpha - 2\varpi$$

La carga P_1 tendrá como imagen Q_1 en la esfera B , colocada en:

$$j^2 = p_1 \cdot q_1 \qquad j^{2'} = p_1' \cdot q_1'$$

$$\ln \frac{q_1'}{q_1} = 4\varpi$$

La carga Q_1 tendrá como imagen P_2 en la esfera A , colocada en:

$$i^2 = q_1 \cdot p_2 \qquad i^{2'} = q_1' \cdot p_2'$$

$$\ln \frac{p_2'}{p_2} = 2\alpha - 4\varpi$$

Así, para la posición de la imagen s , se tiene

$$\ln \frac{p_s'}{p_s} = 2\alpha - 2s\varpi \qquad \ln \frac{q_s'}{q_s} = 2(s+1)\varpi$$

Para encontrar la magnitud de la carga imagen P_s en la esfera A , según la relación determinada en el primer caso, tenemos que multiplicar por la razón respecto al punto O' .

$$P_s = P \frac{p_s}{p_s'} \frac{p_s'}{p_s} \qquad D(4)$$

La localización de las distancias entre los centros de inversión y la posición de las imágenes, en el sistema coordenado bipolar.

$$p = a - a \coth\alpha \qquad p' = a \coth\alpha + a$$

$$p_s = a - a \coth(\alpha - s\varpi) \qquad p_s' = a \coth(\alpha - s\varpi) + a$$

$$P_s = P \frac{(1 - \coth(\alpha - s\varpi))(1 + \coth(\alpha - s\varpi))}{(1 - \coth(\alpha))(1 + \coth(\alpha))} = P \frac{\sinh \alpha}{\sinh(\alpha - s\varpi)} \qquad D(5)$$

la carga total en la esfera A es igual a la suma de todas las cargas imagen,

$$P_s = P \sinh \alpha \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh(\alpha - s\varpi)}$$

tomando en cuenta que P forma parte de la carga total, que el potencial es unitario, lo que implica que $P = R_1$ y que

$$\operatorname{senh} \alpha = -\frac{a}{R_1} \qquad \operatorname{senh} \beta = \frac{a}{R_2}$$

el coeficiente de capacitancia de queda

$$q_{aa} = a \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{senh}(s\varpi - \alpha)}$$

La fuerza de atracción entre las esferas es por lo tanto:

$$F = \frac{1}{2} V_a^2 \frac{dq_{aa}}{dd} = \frac{V_a^2}{2} \frac{d}{dd} \left(a \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{senh}(s\varpi - \alpha)} \right) \qquad \text{D(6)}$$

donde

$$a = \frac{(d + R_1 + R_2)(d + R_1 - R_2)(d - R_1 - R_2)(d - R_1 + R_2)}{2d}$$

El comportamiento de la ecuación para la fuerza, es comparada y discutida en el capítulo V.

Referencias

- 1.- G. Monsivais y E. Ley-Koo, "Forces between two uniformly charged cylinders versus forces between two conducting cylinders", *Rev. Mex. Fís.* **41**, N° 4 (1995) 610 – 617.
- 2.- Góngora y E. Ley-Koo, "On the evaluation of the capacitance of biespherical capacitors", *Rev. Mex. Fís.* **42**, N° 4 (1996) 663 – 674.
- 3.- J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Vol. 1 (Dover, New York, 1954), pp. 46 – 47.
- 4.- A. Corona y E. Ley-Koo, "Mediciones de la fuerza entre cilindros equipotenciales", *XXXVIII Congreso Nacional de Física, Zacatecas, México (1995)* 24.
- 5.- J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Vol. 1 (Dover, New York, 1954), pp.. 266 – 273.
- 6.- J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3nd Edition, John Wiley & Sons, Inc, New York, (1998), Chap. 1. pp 5 9.
- 7.- J. R. Reitz and F. J. Milford, *Foundations of Electromagnetic Theory* (Addison – Wesley Reading, Mass, 1960), pp. 56 –63.
- 8.- Peter Heering, "On Coulomb's inverse square law", *Am. J. Phys.* **60** (11) 988 (1992).
- 9.- J. A. Soules, "Precise calculation of the electrostatic force between charged spheres including induction effects", *Am. J. Phys.* **58** (12), 1195 (1990).
- 10.- E. R. Williams, J. E. Faller, and A. Hill, *Phys Rev. Lett.* **26**, 721 (1971).
- 11.- C.O. Larson and E. W. Goss, "A Coulomb's Law Balance Suitable for Physics Majors and Nonscience Students", *Am. J. Phys.* **38**, 1349 (1970).

- 12.- J. Slisko, and R. A. Brito-Orta, "On approximate formulas for the electrostatic force between two conducting spheres", *Am. J. Phys.* **66**, 352 (1998).
- 13.- P.H. Wiley and W.L. Stutzman, "Simple experiment to demonstrate Coulomb law", *Am. J. Phys.* **46** (11), 1978, 1131-1133.
- 14.- Lee, "Instruction Manual and Experiment Guide for the PASCO scientific Model ES - 9070: Coulomb Balance (PASCO Scientific, Roseville, CA, 1994).
- 15.- J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Vol. 1 (Dover, New York, 1954), p. 43.
- 16.- G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, (2^a, Academic Press, New York (1970), Cap. 2.
- 17.- J.J. Thomson & G.P. Thomson, "Conduction of Electricity through Gases", Vol 2, p.506
- 18.- S. Lamoreaux, "Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μm Range" *Phys Rev Lett*, 78, p5 (1996)
- 19.- Kurt J. Leker Company, "Linear Positioners" VZLDS925, "Thixotropic" KL-320K.