

101

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE

FACULTAD DE INGENIERÍA

“CARACTERIZACIÓN DEL CLIMA MARÍTIMO MEXICANO”

TESIS

Como requisito para obtener el título de

Ingeniero Civil

Presenta

ROBERTO URIBE ROMERO

DIRECTOR DE TESIS

Dr. RODOLFO SILVA CASARÍN



MÉXICO, D.F.

MAYO 2000

2000/9



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
FING/DCTG/SEAC/UTTT/222/99

Señor
ROBERTO URIBE ROMERO
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **DR. RODOLFO SILVA CASARIN**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

"CARACTERIZACION DEL CLIMA MARITIMO MEXICANO"

- I. MAREAS
 - II. EL OLEAJE. GENERALIDADES E HIPOTESIS BASICAS
 - III. ANALISIS ESTADISTICO DE UN ESTADO DE MAR
 - IV. ANALISIS ESTADISTICO DE DATOS EXTREMOS
 - V. EL VIENTO COMO GENERADOR DE OLEAJE
 - VI. FUENTES DE INFORMACION
 - VII. CASOS DE APLICACION
- CONCLUSIONES

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo les recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberán prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria a 27 de febrero de 2000.
EL DIRECTOR


M.C. GERARDO FERRANDO BRAVO
FOFB/GMP/masig

Agradecimientos

A mis padres; por darme toda su confianza y cariño, esto es el fruto de su esfuerzo.

A mis hermanos; por estar conmigo siempre.

A mis hermanas; por apoyarme.

A mi familia; por creer en mí.

A los amigos que me han acompañado durante mi vida.

Un especial agradecimiento, al Dr. Rodolfo Silva Casarín que me ha brindado su confianza y apoyo para dirigir esta tesis.

De manera muy especial al Ing. José Carlos Sánchez Linares, Jefe del Departamento de Oceanografía de la CFE, y al Ing. José Antonio Maza Alvarez, Gerente de Estudios de Ingeniería Civil de la CFE por haberme permitido utilizar la información necesaria para este trabajo.

A la M. I. Ma. Alejandra Lara Flores por sus consejos sobre estilo y redacción.

A todos mis compañeros de trabajo por su amistad y paciencia.

A Gabo, Adolfo, Juan Carlos, Berenice, Adrián, Martha, Mónica, George, Porfirio, Paco, Edgar amigos del Instituto de Ingeniería.

A la UNAM que me ha enseñado tanto.

A todos los profesores de la Facultad de Ingeniería que han contribuido a mi formación profesional.

Resumen	... VIII
Lista de Figuras	... IX
Lista de Tablas	... XIII
Lista de Símbolos	... XIV
I. Introducción 1
II. Importancia General de la tesis 2
III. Objetivos 3
IV. Metodología 3
V. Contenido de esta tesis 4
1. MAREAS 5
1.1. Introducción 5
1.2. Mareas astronómicas 5
1.2.1 Fuerza productora de mareas 6
1.2.2 Variaciones en la altura de mareas 14
1.2.2.1 Efecto de la fase lunar. Marea viva y marea muerta 14
1.2.2.2 Efectos del paralelismo 15
1.2.2.3 Efectos de la declinación lunar. La desigualdad diurna 16
1.2.3 Tipos de mareas astronómicas 17
1.2.3.1 Diurna 17
1.2.3.2 Semidiurna 17
1.2.3.3 Mixta 18
1.2.4 Tratamiento armónico de los datos de mareas 21
1.2.5 Datos observados 22
1.2.6 Constantes armónicas 23
1.2.7 Fase de retraso o época 27
1.3. Mareas de tormenta 31
1.3.1 Ecuación propuesta por Conner, Kraft y Harris (1957) 32
1.3.2 Ecuación propuesta por la Universidad de Cantabria (España) 32
1.3.3 Ecuación propuesta por Stanislaw R. Massel 33
2. EL OLEAJE. GENERALIDADES E HIPÓTESIS BÁSICAS 41
2.1. Introducción 41
2.2. Tipos de oleaje 42
2.2.1 Oleaje Sea 42
2.2.2 Oleaje Swell 42
2.3. Parámetros característicos del oleaje y clasificación según los mismos 43
2.4. El oleaje como proceso estocástico 45
2.4.1 El oleaje como un proceso estacionario 47
2.4.2 El oleaje como proceso ergódico 48
2.5. Modelo matemático – estadístico del oleaje 48

2.6.	Definición de un estado de mar	50
2.7.	Descripción estadística y espectral de un estado de mar	51
2.8.	Descripción estadística de un estado de mar	52
2.8.1	La muestra	52
2.8.2	Análisis temporal de la muestra	52
2.8.3	Método de pasos ascendentes por el nivel medio, máximos y mínimos	53
2.8.4	Parámetros estadísticos	54
2.9.	Análisis espectral	56
2.9.1	Parámetros espectrales	60
3.	ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE UN ESTADO DE MAR	63
3.1.	Distribución normal de la superficie libre	63
3.2.	Distribuciones de alturas de ola	63
3.2.1	Distribución de Rayleigh para alturas de ola	63
3.2.2	Distribución de Longuet – Higgins de altura de ola	64
3.2.3	Distribución de alturas de ola de Tayfun	64
3.2.4	Distribución de alturas de ola de Carter	66
3.3.	Distribuciones conjunta de período y altura de ola	66
3.3.1	Distribución de Longuet – Higgins (1975)	67
3.3.2	Distribución de Cavanié	68
3.3.3	Distribución de Longuet – Higgins (1983)	69
3.4.	Distribuciones de períodos de olas	70
3.4.1	Distribución de Bretschneider (1959)	70
3.4.2	Distribución de Longuet – Higgins (1975)	70
3.4.3	Distribución de Cavanié	70
3.4.4	Distribución de Longuet – Higgins (1983)	70
3.4.5	Factor de agrupamiento	71
3.5.	Análisis espectral de un estado de mar	74
3.5.1	Modelo de Phillips	74
3.5.2	Espectro de Neumann	75
3.5.3	Espectro de Pierson – Moskowitz	75
3.5.4	Espectro de Breschneider	76
3.5.5	Espectro ISSC	76
3.5.6	Espectro ITTC	76
3.5.7	Espectro de JONSWAP	77
3.5.8	Espectro TMA	80
3.5.9	Espectro de Ochi – Hubble	81
3.5.10	Relaciones entre la descripción estadística y espectral	82
4.	ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE DATOS EXTREMOS	84
4.1.	Excedencias	84
4.2.	Períodos de retorno	85

4.3.	Valores característicos 87
4.3.1	Estadísticos de orden 88
4.3.2	Casos particulares 89
4.3.2.1	Distribución de un estadístico de orden 89
4.3.2.2	Distribución del mínimo 89
4.3.2.3	Distribución del máximo 90
4.3.2.4	Distribución conjunta del máximo y el mínimo 90
4.3.2.5	Distribución conjunta de todos los estadísticos de orden 90
4.4.	Papeles probabilísticos 91
4.4.1	El problema del punteo 92
4.4.2	Fundamentos del papel probabilístico 92
4.4.3	Papel probabilístico normal 93
4.4.4	Papel log-normal 95
4.4.5	Papel probabilístico de distribución de Gumbel (máximos) 96
4.4.6	Papel probabilístico de Weibull 99
4.4.7	Papel probabilístico de extremos 99
4.4.8	Papel de Gumbel como referencia de extremos 100
4.4.9	Caso de Máximos 101
4.5.	Elección de la distribución de la altura de ola 102
4.5.1	La familia máxima de Gumbel 102
4.5.2	La familia máxima de Weibull 102
4.5.3	La familia máxima de Frechet 103
4.6.	Caso de aplicación 103
5.	EL VIENTO COMO GENERADOR DE OLEAJE 107
5.1.	Introducción 107
5.2.	La circulación general 107
5.2.1	La fuerza de Coriolis 108
5.2.2	Oscilación del sistema general 108
5.3.	Vientos constantes o regulares 109
5.4.	Vientos periódicos 109
5.5.	Vientos locales o descendentes 110
5.6.	Los vientos en México 110
5.7.	Relación entre la velocidad del viento y el fetch 111
5.7.1	Estimaciones y ajustes iniciales 113
5.7.2	Región de tensión constante 114
5.7.3	Modelo de capa límite planetaria 116
5.7.4	Ajustes finales 117
5.8.	Desarrollo del oleaje 118
5.8.1	Consideraciones sobre la longitud del fetch 119
5.8.2	Fetch en mar abierto 119
5.8.3	Fetch restringido 119

6.	FUENTES DE INFORMACIÓN 122
6.1.	World Wave Atlas 122
6.2.	Xtide 125
6.3.	Presentación de resultados 125
6.3.1	Mareas 125
6.3.2	Oleaje 129
6.3.3	Vientos 144
7.	CASOS DE APLICACIÓN 152
7.1.	Erosión en playas 152
7.1.1	Introducción 152
7.1.2	Objetivo 153
7.1.3	Metodología 153
7.1.4	Modelos de predicción del cambio de la línea de costa 154
7.1.5	Modelo de oleaje 155
7.1.5.1	Modelo de oleaje semiempírico para difracción – refracción debido a estructuras 156
7.1.6	Variación de la playa y su interacción con el oleaje 158
7.1.7	Ecuación de continuidad del sedimento 160
7.1.8	Formulaciones para el gasto del transporte longitudinal de sedimentos 161
7.1.8.1	Formulación para el transporte longitudinal de sedimentos en el caso de variaciones longitudinales de la altura de ola en rotura 161
7.1.8.2	 161
7.1.9	Modelo generalizado para simular el cambio en la línea de costa 162
7.1.10	Central Termoeléctrica Adolfo López Mateos 164
7.1.11	Conclusiones 168
7.2.	Modelo hidrodinámico de calidad de agua 169
7.2.1	Introducción 169
7.2.2	Conceptos básicos 169
7.2.3	Principios básicos del modelo hidrodinámico 170
7.2.4	Condiciones iniciales de frontera 172
7.2.5	Sistema lagunar Nichupté 174
7.2.6	Industriales 175
7.2.7	Ordenamiento ecológico 175
7.2.8	Establecimiento de criterios de calidad de las aguas litorales 177
7.2.9	Aplicación de los modelos hidrodinámicos y de calidad de agua 177
7.2.10	Datos específicos para el modelo de oxígeno disuelto 178
7.2.11	Calibración y validación para el modelo de oxígeno disuelto 178
7.2.12	Especificaciones del problema 178
7.2.13	Discretización espacial y temporal 181
7.2.14	Descripción y análisis de los resultados obtenidos 182
7.2.14.1	Resultados hidrodinámicos 182

7.2.14.2 Calidad de agua 187
7.2.15 Conclusiones 192
CONCLUSIONES 193
Conclusiones y recomendaciones 193
Futuras líneas de trabajo 194
BIBLIOGRAFÍA 195
GLOSARIO 197
ANEXO 1. PRINCIPIOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD 201
ANEXO 2. ANÁLISIS DE FOURIER 213

Resumen

En este trabajo se estudian tres de las variables más importantes dentro de la ingeniería marítima: las mareas, el viento y el oleaje. En cada caso se explica como se generan y evalúan. Una vez descrito el fenómeno, a partir de las fuentes de información citadas, se procesan los resultados obtenidos para presentarlos en forma gráfica.

En cuanto a las mareas, se presenta su clasificación, así como la importancia de conocer sus efectos sobre las costas de México. Se describen los tipos de fuerzas que las producen y se elabora una predicción para el año 2000.

Respecto al oleaje, se detallan los tipos en que se clasifican, se muestran los distintos modelos estadísticos para altura y período de ola y se presenta el análisis espectral de un estado de mar. Finalmente, se elaboraron gráficos de régimen medio y régimen máximo estacional, además de un análisis extremal de datos

A continuación se describen las generalidades del viento, así como sus principales características, se analiza la relación existente entre la velocidad del viento y el fetch, así como los modelos para evaluarlo. Se presentan gráficos de velocidad media y máxima del viento y rosas estacionales.

Se citan las fuentes de información empleadas y se da una breve explicación acerca de la obtención de los datos de mareas, oleaje y viento.

Finalmente se presentan dos casos prácticos donde intervienen los datos mencionados: el problema de erosión en la playa sur de la Central Termoeléctrica Adolfo López Mateos en Tuxpan, Veracruz y el otro se refiere a un estudio de calidad de agua en la Laguna de Nichupté, ubicada en las costas de Quintana Roo.

LISTA DE FIGURAS. (Capítulo 1).

Figura 1.1. Sistemas Tierra – Luna y Tierra – Sol 6
Figura 1.2. Representación esquemática de la fuerza centrífuga y la fuerza de atracción gravitacional 7
Figura 1.3. Representación esquemática de la fuerza productora de mareas en un Plano que une los centros de la Tierra y la Luna 9
Figura 1.4. Distribución de la fuerza horizontal productora de mareas sobre la Tierra (de acuerdo a G. H. Darwin). La luna esta sobre el zenit, en punto marcado Z. 9
Figura 1.5. Representación gráfica de M2 12
Figura 1.6. Representación gráfica de M2 + S2 12
Figura 1.7. Representación gráfica de M2+ N2 13
Figura 1.8. Representación gráfica de M2 + K2	— 14
Figura 1.9. Influencia de las fases lunares sobre las mareas de la Tierra 15
Figura 1.10. Proyección común del plano de la órbita terrestre alrededor del Sol y el plano de la órbita lunar alrededor de la Tierra. 16
Figura 1.11. Efecto de la declinación lunar sobre las mareas 17
Figura 1.12a. Marea semidiurna 19
Figura 1.12b. Marea mixta 20
Figura 1.12c. Marea Diurna 20
Figura 1.13. Representación gráfica de la función coseno 26
Figura 1.14. Representación esquemática de la fase k 28
Figura 1.15. Fase de un componente 30
Figura 1.16. Marea de tormenta en una cuenca cerrada 35
Figura 1.17. Sistema coordinado normal a la línea de costa 37
Figura 1.18. Influencia de la pendiente de fondo en la altura de las mareas de tormenta 39

LISTA DE FIGURAS. (Capítulo 2)

Figura 2.1. Descripción de los parámetros del oleaje bajo el criterio de pasos ascendentes 44
Figura 2.2. Ejemplo de un posible registro de oleaje 45
Figura 2.3. Representación espectral de un estado de mar 61

LISTA DE FIGURAS. (Capítulo 4)

Figura 4.1. Papel probabilístico normal con la muestra de la resistencia de los cubos en el representada 94
Figura 4.2. Papel probabilístico log-normal con muestra de las vidas de 30 aisladores eléctricos 96
Figura 4.3. Papel probabilístico de Gumbel para máximos y datos de máximas Velocidades 98
Figura 4.4. Dos distribuciones con la misma distribución límite para máximos 100
Figura 4.5. Distribución exponencial, uniforme, normal y de Cauchy en papel probabilístico de Gumbel para máximos 102
Figura 4.6a. Análisis extremal con la distribución de Gumbel, punto 1 104
Figura 4.6b. Análisis extremal con la distribución de Gumbel, punto 2 104
Figura 4.6c. Análisis extremal con la distribución de Gumbel, punto 3 105
Figura 4.6d. Análisis extremal con la distribución de Gumbel, punto 4 105
Figura 4.6e. Análisis extremal con la distribución de Gumbel, punto 5 106

LISTA DE FIGURAS. (Capítulo 5)

Figura 5.1. Capa límite atmosférica idealizada sobre el agua 108
Figura 5.2. Datos de la geometría para fetch restringido 117
Figura 5.3. Convención para fetch restringido 117

LISTA DE FIGURAS. (Capítulo 6)

Figura 6.1. Esquema, mostrando la órbita del satélite GEOSAT 123
Figura 6.2. Predicción de marea de 1999 para Cancún, Quintana Roo 128
Figura 6.3. Región considerada para la zona de Tuxpan Veracruz 129
Figura 6.4. Tabla del banco de datos del WWA 2, Hm0 vs #Obs 130
Figura 6.5. Altura de ola media 130
Figura 6.6. Altura de ola media anual 131
Figura 6.7. Altura de ola media estacional 131
Figura 6.8. Altura de ola media mensual 132
Figura 6.9. Punto de control utilizado para las rosas de oleaje incidente 132
Figura 6.10. Tabla del banco de datos del WWA 2, para el punto de control Seleccionado 133
Figura 6.11. Rosa de oleaje incidente y resumen de referencias cruzadas de	

altura y período de ola de primavera 134
Figura 6.12. Rosa de oleaje incidente y resumen de referencias cruzadas de altura y período de ola de verano 135
Figura 6.13. Rosa de oleaje incidente y resumen de referencias cruzadas de altura y período de ola de otoño 136
Figura 6.14. Rosa de oleaje incidente y resumen de referencias cruzadas de altura y período de ola de invierno 137
Figura 6.15. Mapa de regionalización de la República Mexicana 138
Figura 6.16. Mapa de isolíneas de altura de ola para todo el registro 139
Figura 6.17. Mapa de isolíneas de altura de ola para primavera 140
Figura 6.18. Mapa de isolíneas de altura de ola para verano 141
Figura 6.19. Mapa de isolíneas de altura de ola para otoño 142
Figura 6.20. Mapa de isolíneas de altura de ola para invierno 143
Figura 6.21. Región considerada para los histogramas de velocidad del viento 144
Figura 6.22. Punto de control considerado para las rosas de viento 144
Figura 6.23. Velocidad media del viento 145
Figura 6.24. Velocidad media del viento anual 145
Figura 6.25. Velocidad media del viento estacional 146
Figura 6.26. Velocidad media del viento mensual 146
Figura 6.27. Mapa de isolíneas de velocidad del viento para todo el registro 147
Figura 6.28. Mapa de isolíneas de velocidad del viento para primavera 148
Figura 6.29. Mapa de isolíneas de velocidad del viento para verano 149
Figura 6.30. Mapa de isolíneas de velocidad del viento para otoño 150
Figura 6.31. Mapa de isolíneas de velocidad del viento para invierno 151

LISTA DE FIGURAS. (Capítulo 7)

Figura 7.1. Esquema para calcular el oleaje 128
Figura 7.2. Esquema para el cálculo del oleaje utilizando un contorno modificado en su orientación 131
Figura 7.3. Esquema para la ecuación de continuidad del sedimento 132
Figura 7.4. Vista este – oeste del sitio de la C. T. ALM. Obsérvese que no se ha iniciado la construcción de las escolleras, por lo que la línea de costa se encuentra en equilibrio dinámico. Octubre, 1986 136
Figura 7.5. Vista sur – norte de la zona de escolleras de la Central Termoeléctrica Adolfo López Mateos (C. T. ALM). Marzo, 1988. 137

Figura 7.6. Panorámica de la Central Termoeléctrica Adolfo López Mateos, vista de Norte a sur. Nótese la erosión de la línea de costa en la playa sur, así como el Depósito en la playa norte, abril 1990 137
Figura 7.7. Croquis de la obra de toma de la Central Termoeléctrica Adolfo López Mateos 138
Figura 7.8. Resultado gráfico de la simulación para el período 1988 – 1989 139
Figura 7.9. Sistema Lagunar Nichupté. 146
Figura 7.10. Mapa del sistema Lagunar Nichupté 148
Figura 7.11. Ordenamiento ecológico Sistema Lagunar Nichupté 149
Figura 7.12. Condiciones de marea consideradas en el ejemplo 151
Figura 7.13. Batimetría del Sistema Lagunar Nichupté 152
Figura 7.14. Discretización de la malla utilizada del SLN; utilizando del ejemplo 153
Figura 7.15. Patrón hidrodinámico obtenido en condición de pleamar 154
Figura 7.16. Patrón hidrodinámico obtenido en condición de marea saliente 155
Figura 7.17. Patrón hidrodinámico obtenido en condición de bajamar 155
Figura 7.18. Patrón hidrodinámico obtenido en condición de marea entrante 156
Figura 7.19. Patrón hidrodinámico obtenido en condición de pleamar 157
Figura 7.20. Patrón hidrodinámico obtenido en condición de marea entrante, de la malla de aproximación 157
Figura 7.21. Patrón hidrodinámico obtenido en condición de marea entrante de la Malla de aproximación, con el canal adicional 158
Figura 7.22. Contornos de OD, situación actual para la condición de marea entrante 159
Figura 7.23. Contornos de OD, situación actual para la condición de pleamar 160
Figura 7.24. Contornos de OD, situación actual para la condición de marea saliente 160
Figura 7.25. Contornos de OD, situación actual para la condición de bajamar 161
Figura 7.26. Contornos de DBO con el canal de proyecto para la condición de marea entrante 161
Figura 7.27. Contornos de DBO con el canal de proyecto para la condición de pleamar 162
Figura 7.28. Contornos de DBO con el canal de proyecto para la condición de marea saliente 162
Figura 7.29. Contornos de DBO con el canal de proyecto para la condición de bajamar 163

LISTA DE TABLAS. (Capítulo 1).

Tabla 1.1. Principales Constantes armónicas 11
Tabla 1.2. Escala de Saffir - Simpson 40

LISTA DE TABLAS. (Capítulo 4).

Tabla 4.1 Alturas de ola máximas en una cierta localidad 85
Tabla 4.2 Resistencia de 20 tuberías de acero 94
Tabla 4.3 Vida de 30 aisladores eléctricos 95
Tabla 4.4 Máximas velocidades anuales en una sección de un río 98

LISTA DE TABLAS. (Capítulo 5).

Tabla 5.1. Característica y tipo de acción para vientos observados 109
---	-----------------

LISTA DE TABLAS. (Capítulo 6).

Tabla 6.1. Componentes armónicas utilizadas para la predicción de Cancún, Quintana Roo 126
Tabla 6.2. Resultados de la corrida de la predicción de mareas para Cancún, Quintana Roo 127

Lista de Símbolos

a	amplitud de onda
A	variable aleatoria compleja
A_k	coeficiente de Fourier
$b_1(t)$	ventana tipo trapezoide
$b_2(t)$	ventana tipo coseno
B_k	coeficiente de Fourier
C	celeridad
E	operador esperanza matemática
$Erfc$	función error complementaria
f	frecuencia
f	frecuencia media
f_c	frecuencia de Nyquist
f_p	frecuencia pico
g	aceleración de la gravedad
h	profundidad
H	altura de ola
\bar{H}	altura de ola media
$H_{m0} = H_{1/3}$	altura de ola significativa
H_{rms}	altura de ola cuadrática media
J_0	función de Bessel de orden cero
k	número de onda
L	longitud de onda
m_n	momento espectral de orden cero
N	número de elementos de una muestra
Q_p	agudeza del pico espectral
$P(H)$	función de distribución de alturas de ola
$P(T)$	función de distribución de periodos de ola
$P(H,T)$	función de distribución conjuntas de alturas y periodos de ola
$R(\tau)$	transformada de Fourier
$S(f)$	función de densidad espectral
Skw	falta de oblicuidad o simetría
t	tiempo
T	periodo
T	periodo medio
T_p	periodo pico
T_z	periodo medio obtenido mediante cruces por cero
$T_{m0} = T_{1/3}$	periodo de ola significativa
U_{10}	velocidad del viento a 10 msnm
x	coordenada en el eje de las abscisas
y	coordenada en el eje de las ordenadas
z	coordenada vertical
ϕ	potencial de velocidades
β	factor de corrección si se aplican ventanas como filtro
β_1	variable aleatoria
ϵ	ancho espectral dependiente de momentos: 0, 2 y 4
$\phi(\sigma)$	función de distribución espectral
η	nivel de la superficie libre del agua
$\bar{\eta}$	nivel medio de la superficie libre del agua

λ_i	parámetro de forma espectral
v	ancho espectral dependiente de momentos: 0, 1 y 2
π	constante 3.1416
θ	ángulo de incidencia
ρ	densidad del fluido
σ	frecuencia angular
$\tau_i(t)$	realización de una muestra
Δt	intervalo de tiempo
Δf	intervalo de frecuencia
∞	infinito
U_f	velocidad de fricción
V_g	viento geostrófico
P_c	presión central en el ciclón
V_v	velocidad de viento sostenido
V_D	velocidad de desplazamiento
α	pendiente de la batimetría en la zona de incidencia
m	masa de la Tierra
M_2	componente semidiurno lunar principal
S_2	componente semidiurno solar principal
N_2	componente semidiurno lunar elíptico
K_2	componente semidiurno luni - solar
K_1	componente diurno luni - solar
O_1	componente diurno lunar principal
P_1	componente diurno solar principal
M_f	componente de largo período lunar quincenal
M_m	componente de largo período lunar mensual
M_{as}	componente de largo período semi - anual - solar
S	sol
A_1, B_1, C_1	constantes armónicas
ξ	fase de un componente

Introducción.

La hidráulica es una de las ramas de la ingeniería que posee una historia muy rica. Por siempre el hombre ha dispuesto del agua para satisfacer necesidades básicas corporales y domésticas. Con el tiempo, para aprovecharla mejor, ha construido obras ya sea de riego, para navegar, abastecerse del vital líquido, producir energía eléctrica etc.

La construcción de estas obras representa una gran inversión de recursos físicos y económicos, así surge la necesidad de optimizarlos para obtener los mejores resultados. Mientras mayor sea el conocimiento del hombre acerca de los fenómenos relativos a las obras que necesita, podrá controlar éstos de una mejor manera para su beneficio.

La mayoría de los fenómenos naturales son sumamente complejos ya que en ellos intervienen una gran cantidad de variables que los modifican; el hombre utiliza su ingenio para crear modelos simplificados de los fenómenos y de esta forma poder acercarse a los resultados deseados.

Dentro de la ingeniería hidráulica, una de las áreas más importantes y de las más complicadas a estudiar resulta ser la ingeniería marítima, ya que en ella se ponen en práctica todos los conocimientos de la hidráulica apoyados en conceptos avanzados de matemáticas.

En México, actualmente, no se tiene una "cultura marítima", entendiendo este concepto como: el diseño y estudio de comportamiento de las obras de ingeniería de costas y puertos, apoyados en **análisis y estudios profundos** del comportamiento del clima marítimo.

Estos estudios no se realizan debido a varios factores, entre ellos el económico, muy a pesar de que en el país se cuenta con un extenso litoral de 11 592.77 km, distribuido de la siguiente manera: 72% corresponde al Océano Pacífico y el 28% restante lo ocupan el Golfo de México y Mar Caribe, ambos litorales poseen características distintas, que podrían ser ampliamente explotadas por los investigadores del mar (oceanógrafos, ingenieros marítimos, y/o biólogos) y con ello, llegar a tener una visión más amplia del significado del mar y del provecho que se puede obtener de él.

En este trabajo se presentan la descripción, análisis y predicción de las tres variables físicas más importantes dentro de la ingeniería marítima, que son: las mareas, el viento y el oleaje, se presentan en cada caso los elementos que caracterizan al fenómeno, la fuerza y mecánica de su generación, su clasificación, la forma estadística para su análisis y presentación.

Se presentan dos casos de ingeniería marítima donde intervienen éstos fenómenos, el primero acerca de la erosión provocada, principalmente por el oleaje y el segundo es, un análisis de la calidad de agua en una laguna, cuando intervienen la marea y el viento.

Importancia General de la Tesis.

México se encuentra situado en el norte del Continente Americano, en el hemisferio occidental, hacia el oeste del meridiano de Greenwich con coordenadas geográficas entre los meridianos 118° 27' 24" y 86° 42' 36" O y entre los paralelos 32° 43' 06" y 14° 31' 54" N. La extensión territorial del país es de 1 964 381.7 km², con una superficie continental de 1 959 248.3 km² y una insular de 5 133.4 km²; esta extensión lo ubica en el decimocuarto lugar entre los países del mundo con mayor territorio.

México colinda en su parte norte con los Estados Unidos de América, compartiendo una frontera de 3 152.2 km, y al sudeste con Guatemala y Belice con una frontera conjunta de 1 149.2 km de extensión, por otra parte la longitud de sus costas continentales es de 11 122.5 km. **Ref. 1**

Del total del litoral mexicano, el 28% pertenece al Golfo de México y al mar Caribe y el 72% al Pacífico. Las aguas territoriales suman casi tres millones de kilómetros cuadrados. Sobre la línea costera se encuentran alrededor de 130 lagunas costeras que cubren 15 000 km². **Ref. 1**

Las actividades marítimas del territorio mexicano se concentran en:

- a) 45 puertos de variadas dimensiones de los cuales solo 21 tienen capacidad para el tráfico de altura (al extranjero), por donde se realiza el 80% de las exportaciones de productos mexicanos. Este porcentaje debe incrementarse en el futuro con el fin de satisfacer las demandas y compromisos que se han establecido en el tratado de libre comercio con EU, Canadá y otros países de América Latina. **Ref. 2**
- b) La Secretaría del Medio Ambiente, Recursos Naturales y Pesca (SEMARNAP) está llevando a cabo un programa de mejoramiento de lagunas en todo el país.
- c) La industria petrolera es el principal elemento impulsor de la economía mexicana. En el año de 1995 se extrajeron diariamente 2 685 000 barriles, por lo que la exploración de los campos petrolíferos costa afuera van adquiriendo una importancia cada vez más creciente.
- d) La Comisión Federal de Electricidad (CFE) cuenta actualmente con más de 6 centrales termoeléctricas y una nucleoelectrica para la generación de energía en las costas de México. Esta demanda va en aumento.
- e) En las últimas décadas, el turismo se ha incrementado notablemente, el Fondo Nacional de Turismo (FONATUR) cuenta actualmente con cinco centros turísticos en las costas y ha promovido siete. También se han construido 44 marinas, las cuales están en operación.

Por lo anterior, y considerando que la información con la que se cuenta actualmente sobre oleaje y vientos es escasa y obsoleta, es necesario contar con una fuente de información de fácil acceso, la cual se presenta en este trabajo, y que constituye una herramienta útil en la elaboración de proyectos de obras marítimas.

Objetivos

- a) Predecir los niveles de marea en los principales puertos del Golfo de México, a partir del programa para predicción de mareas Xtide.
- b) Determinar el régimen medio de oleaje en los principales puertos del Golfo de México, a partir de los datos proporcionados por el World Wave Atlas (WWA 2.)
- c) Determinar el régimen medio de vientos en los principales puertos del Golfo de México, a partir de los datos proporcionados por el World Wave Atlas (WWA 2.)
- d) Presentar el uso y aplicación de lo anterior a diferentes actividades marítimas dentro del territorio mexicano.

Metodología

Está constituida por:

- ⇒ Recopilación bibliográfica de los principales trabajos sobre mareas, oleaje y vientos.
- ⇒ Análisis de la información de los programas Xtide y WWA 2.
- ⇒ Elaboración de gráficos y tablas correspondientes a cada fenómeno.
- ⇒ Conclusiones del estudio.

Contenido de esta tesis.

Capítulo 1.

Se describen las generalidades de las mareas astronómicas y las mareas de tormenta; se analizan los fenómenos que las producen, así como sus modelos para evaluarlas.

Capítulo 2.

Se describen las generalidades del oleaje; se detallan los tipos de oleaje que existen, sus parámetros característicos; se estudia y analiza el oleaje como un proceso estocástico, estacionario y ergódico; se plantea el modelo matemático - estadístico del oleaje; se analiza la descripción estadística de un estado de mar.

Capítulo 3.

Se muestran los distintos modelos estadísticos del oleaje para altura y período de ola; se presenta el análisis espectral de un estado de mar, mediante modelos, los cuales pueden definir las características de éste en función de su energía.

Capítulo 4.

Se estudia el análisis estadístico de datos extremos; se presentan los fundamentos del papel probabilístico así como sus respectivas distribuciones.

Capítulo 5.

Se describen las generalidades del viento, se analiza la relación existente entre la velocidad del viento y el fetch, así como los modelos para evaluarlo.

Capítulo 6.

Se refiere a las fuentes de información utilizadas en este trabajo y el procesamiento de los datos.

Capítulo 7.

Se presentan dos casos de aplicación del Atlas Oceanográfico del Golfo de México, el primero trata sobre erosión provocada principalmente por el oleaje, en la Central Termoeléctrica Adolfo López Mateos en Tuxpan, Veracruz y el segundo es, un análisis de la calidad de agua en la laguna de Nichupté en el estado de Cancún, Quintana Roo, cuando intervienen la marea y el viento.

1. MAREAS

1.1 Introducción

Las mareas son el resultado de la atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre la Tierra (Las variaciones más importantes son debidas a estos cuerpos). Éstas provocan un ascenso y descenso en el nivel del agua con respecto a un plano de referencia, así como un flujo horizontal llamado corrientes de mareas.

Aunque las fuerzas que actúan son conocidas, el movimiento de marea resultante es extremadamente complejo, esto es por la distribución irregular de los continentes y océanos en el planeta y a los efectos retardadores, provocados por la fricción e inercia.

Contrario a la idea popular de que la masa de agua sigue el movimiento de la luna alrededor del planeta, el movimiento básico de marea, como se evidencia por observaciones en numerosos puntos a lo largo de la costa de los océanos, consiste en un número de áreas oscilantes, siendo el movimiento algo similar al de una palangana de agua que ha sido perturbada. Tales oscilaciones son técnicamente conocidas como ondas estacionarias. La naturaleza compleja del movimiento puede ser apreciada, si se considera el hecho de que estas ondas estacionarias pueden traslaparse y superponerse unas con otras, además de estar acompañadas por un movimiento de onda progresivo.

Existen dos tipos de mareas, las Astronómicas y las Mareas de Tormenta o Meteorológicas, en este trabajo se explicará como se modelan y evalúan ambas.

Normalmente, uno se pregunta qué importancia puede tener el conocer el movimiento de mareas. Existen varias razones, las cuales son entre otras:

- Recuperación de áreas costeras
- Cierre o apertura de bocas de estuarios
- Problemas de seguridad de estructuras
- Problemas de intrusión salina
- Generación de energía
- Transporte de sedimentos
- Diseño de estructuras
- Estabilidad de playas

1.2 Mareas Astronómicas.

Las mareas astronómicas son el resultado de una combinación de las fuerzas gravitacionales y centrífugas de los sistemas Tierra-Luna y Tierra-Sol. (Figura 1.1).

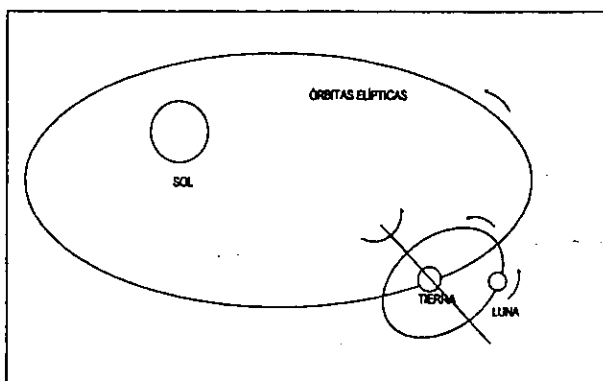


Figura 1.1 Sistemas Tierra-Luna y Tierra-Sol

En la superficie de la Tierra, la atracción gravitacional actúa en dirección hacia el centro de masa de la Tierra, de este modo los océanos están confinados a ésta. Sin embargo las fuerzas de gravitación de la Luna y el Sol actúan externamente sobre los océanos, de tal manera que sus efectos se superponen a la atracción gravitacional de la Tierra y actúan para atraer a las masas de agua a posiciones en la superficie terrestre, directamente por debajo de estos cuerpos celestes.

1.2.1 Fuerza Productora de Mareas.

Si se aplica la Ley de Gravitación Universal a una partícula de la Tierra, resulta que la intensidad con la que un cuerpo pesado atrae a una partícula de materia en la Tierra, varía directamente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia.

Debido a lo anterior las diferencias de atracción gravitacional entre la Luna y la Tierra, dan como resultado que las masas oceánicas tengan un movimiento relativo respecto a los continentes llamado *marea*.

Considerando sólo la Luna y la Tierra, si la masa de la Tierra es igual a la unidad y la masa de la Luna igual a m , la fuerza de atracción gravitacional de la Luna en el centro de la Tierra, es entonces proporcional a m/r^2 , donde r es la distancia desde el centro de la Luna al centro de la Tierra (Figura 1.2).

Si esta distancia permanece constante, entonces la fuerza de atracción de la Luna sobre la Tierra debiera de permanecer constante también, pero no es así (debido a que la órbita lunar es elíptica) por lo que la fuerza centrífuga equilibra este sistema de fuerzas. Esta

fuerza centrífuga tiene una dirección opuesta a la de la Luna como se muestra en la Figura 1.2, y es proporcional a m/r^2 .

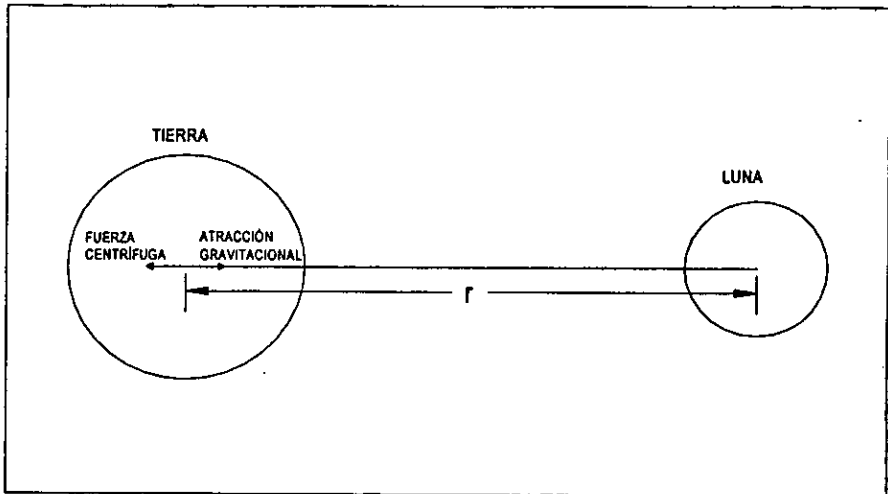


Figura 1.2 Representación esquemática de la fuerza centrífuga y la fuerza de atracción gravitacional.

La fuerza centrífuga actuando en alguna partícula de la Tierra prácticamente es la misma, pero la atracción de la Luna en esa misma partícula varía. Considerando un punto en la superficie de la Tierra, situado en la línea que une los centros de la Tierra y la Luna, en él punto la atracción de la Luna es proporcional a $m/(r-p)^2$, donde p es el radio de la Tierra. La diferencia entre la atracción de la Luna y la fuerza centrífuga a este punto es proporcional a:

$$\frac{m}{(r-p)^2} - \frac{m}{r^2} = \frac{2 m p}{r^3}$$

La simplificación anterior se da porque el término p/r es una cantidad pequeña y se puede despreciar.

Los valores numéricos de m y r son:

$$m = 1/81.45 \text{ y } r = 60.34p$$

La atracción de la Luna tiende a levantar el punto considerado de la superficie de la Tierra, pero en el mismo punto la atracción gravitacional de la Tierra actúa y es proporcional a $1/r^2$. La fuerza productora de mareas de la Luna sobre el punto de la Tierra es igual a:

$$\frac{2m\rho}{r^3} = 1.176 \times 10^{-7}$$

La atracción de la Tierra en el punto considerado, es igual a la aceleración de la gravedad. Si se tiene que la fuerza productora de mareas de la Luna es 1.176×10^{-7} veces la aceleración de la gravedad, entonces la aceleración del punto disminuye 0.0115 m/s^2 . Se considera ahora otro punto en la superficie de la Tierra, pero opuesto a la Luna, en este punto la atracción de la Luna es menor que la fuerza centrífuga y proporcional a:

$$\frac{m}{(r + \rho)^2}$$

La fuerza productora resulta, siguiendo un razonamiento similar, de la diferencia:

$$\frac{m}{(r + \rho)^2} - \frac{m}{r^2} = -2m \frac{\rho}{r^3}$$

Así la fuerza productora es de la misma magnitud que la que se obtuvo primero, pero de sentido contrario, está fuerza también se aleja del centro de la Tierra y además disminuye la aceleración de la gravedad terrestre en el punto en 0.0115 m/s^2 . Ahora si se tiene un punto en la superficie terrestre perpendicular a la línea que une los centros de la Tierra y la Luna, en este punto la atracción gravitacional de la Luna es de la misma magnitud, como si se tomara del centro de la Tierra, m/r^2 , pero tiene la dirección de la línea PM, (Figura 1.3).

La fuerza centrífuga es paralela a la línea EM y la resultante de estas dos fuerzas se dirige hacia el centro de la Tierra y es proporcional a m/r^3 . En este caso la fuerza productora lleva a un incremento en la aceleración de la gravedad de 0.058 m/s^2 . Si el punto fuese seleccionado al azar en la superficie de la Tierra, se encontraría que generalmente la fuerza productora forma un ángulo diferente de 90° , por eso se considera que tiene una componente horizontal y una componente vertical a lo largo de la superficie de la Tierra. La teoría completa lleva a las siguientes ecuaciones para las componentes vertical y horizontal.

$$F_v = 3m \frac{\rho}{r^3} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \quad 1.1.1.$$

$$F_h = 3m \frac{\rho}{r^3} \sin \theta \cos \theta \quad 1.1.2.$$

Aquí θ es el ángulo medido entre la línea que une el centro de la Tierra y de la Luna y la línea que va del centro de la Tierra al punto en la superficie de la Tierra que se considera.

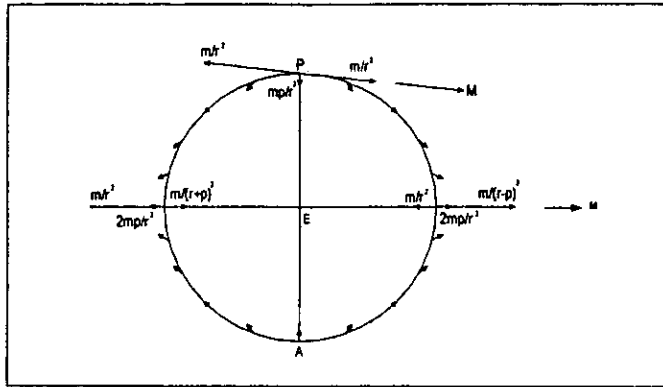


Figura 1.3 - Representación esquemática de la fuerza productora de mareas en un plano, que une los centros de la Tierra y la Luna.

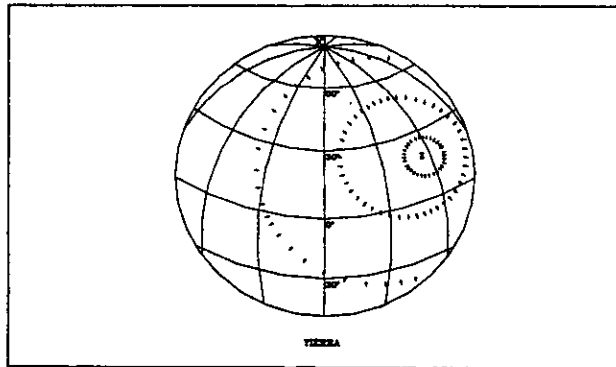


Figura 1.4 Distribución de la fuerza horizontal productora de mareas sobre la Tierra (De acuerdo a G.H. Darwin). La Luna esta sobre el Zenit, en el punto marcado Z.

Si siguiendo un razonamiento similar, la teoría puede ser aplicada al Sol y la Tierra, sustituyendo los valores de la masa del Sol y la distancia entre el Sol y la Tierra, y siendo congruente con las unidades, resulta que la masa del Sol es de 333,400 y la distancia es 23,484 veces la de la Tierra. Con estos valores se tiene que la máxima fuerza productora de mareas del Sol es 0.46 veces la de Luna, es decir menos de la mitad. Como se nota el efecto de la distancia entre el Sol y la Tierra, influye en la magnitud de la fuerza productora de mareas

Si se hacen consideraciones de esta naturaleza, se demuestra que las mareas son producidas principalmente por el Sol y la Luna. En algunas ocasiones para la predicción de mareas se toman en cuenta los planetas, sin embargo comparados con el Sol, son demasiado pequeños como para tener algún efecto, además de que están muy alejados.

El movimiento relativo del Sol y la Luna respecto a la Tierra genera que el sistema de fuerzas productoras de mareas varíe en el curso del tiempo, pero el comportamiento se repite con una frecuencia regular. Cuando la Tierra gira sobre su propio eje, las componentes de la fuerza productora de mareas tendrán en todas las latitudes, dos máximos y dos mínimos durante 24 horas lunares, este período corresponde a un giro completo de la Luna alrededor de la Tierra.

La declinación de la Luna varía durante un mes de 28° S a 28° N, en esta posición de la Luna el campo de fuerzas productoras de mareas no es simétrico con respecto a los polos de la Tierra. En el ecuador las dos componentes máximas diurnas permanecen iguales, pero en otras latitudes las componentes no, una es menor que la otra durante un giro completo de la Tierra.

Debido a la variación de las posiciones relativas del Sol, la Luna y la Tierra, se puede considerar una serie de cuerpos celestes ficticios, en el que cada uno traerá un equilibrio de las fuerzas productoras de mareas, convirtiéndose así en factores de latitud y oblicuidad.

Si se considera que hay una Luna ideal que siempre permanece en el plano del ecuador y que en alguna localidad ubicada en algún meridiano pasa en intervalos de 24.84 horas, esto implica que el campo de fuerzas productoras de mareas es simétrico con respecto a los polos de la Tierra, entonces la componente horizontal y vertical de la fuerza productora de mareas se pueden representar por ecuaciones del tipo:

$$H = H_0 \cos (at - k)$$

1.1.3.

Donde H_0 representa la amplitud del constituyente, a la velocidad angular del armónico de la marea y k la fase del constituyente. La velocidad angular está dada en grados/hora y el tiempo t en horas. Por ejemplo si una hora es usada como unidad de tiempo, y el período para este caso es 12.42, la velocidad angular es:

$$a = \frac{360^\circ}{12.42} = 28.984^\circ/\text{hora}$$

De manera similar se pueden introducir otros cuerpos ficticios, pero los resultados de las velocidades angulares, debidas a las principales componentes de las fuerzas productoras de mareas, serán las mismas, por lo que éstas son constantes. Algunas de ellas son:

- T: La rotación de la Tierra en su eje, con respecto al Sol, 15 grados/hora
- h: La rotación de la Tierra sobre el Sol, 0.04106864 grados/hora
- s: La rotación de la Luna sobre la Tierra, 0.54901653 grados/hora
- p: La velocidad angular del movimiento, a lo largo del eje de la órbita elíptica de la Luna la cual completa un giro en 8.85 años, $p = 0.00464183$

Así la rotación de la Tierra con respecto a los cuerpos fijos es $T+h = 15.04106864$ grados/hora, y el cambio en la longitud lunar por hora es $T+h-s = 14.49205211$ grados/hora. La amplitud H_0 y la fase k para cada constituyente se determinan a partir del Análisis de Fourier. El número de componentes necesarios para precisar una predicción de mareas varía de un sitio a otro. La **Tabla 1** muestra las componentes más importantes de las fuerzas productoras de mareas.

NOMBRE DE LA MAREA PARCIAL.	SÍMBOLO	PERÍODO EN HORAS	VELOCIDAD ANGULAR (GRADOS/HORA)
Semidiurna:			
Lunar principal	$M_2 = 2T-2s+2h$	12.42	28.984
Solar principal	$S_2 = 2T$	12.00	30.000
Lunar elíptica	$N_2 = 2T-3s+2h+p$	12.66	28.439
Luni-Solar	$K_2 = 2T+2h$	11.97	30.082
Diurna:			
Luni-Solar	$K_1 = T+h$	23.93	15.041
Lunar principal	$O_1 = 2T$	25.82	13.943
Solar principal	$P_1 = T-h$	24.07	14.958
Largo Período:			
Lunar quincenal	M_t	327.86	1.098
Lunar mensual	M_m	661.30	0.544
Semi-anual Solar	Mas	2191.43	0.082

Tabla 1. Principales constantes armónicas

Algunos de los términos armónicos de la tabla anterior, se explicarán a continuación.

El armónico M_2 tiene el mayor valor en cuanto a amplitud. Este término representa la marea si la órbita lunar siguiera una trayectoria circular, sobre el plano del ecuador de la órbita terrestre. En la **Figura 1.5** se muestra una predicción de marea si sólo se considerara esta componente, bajo las condiciones antes descritas.

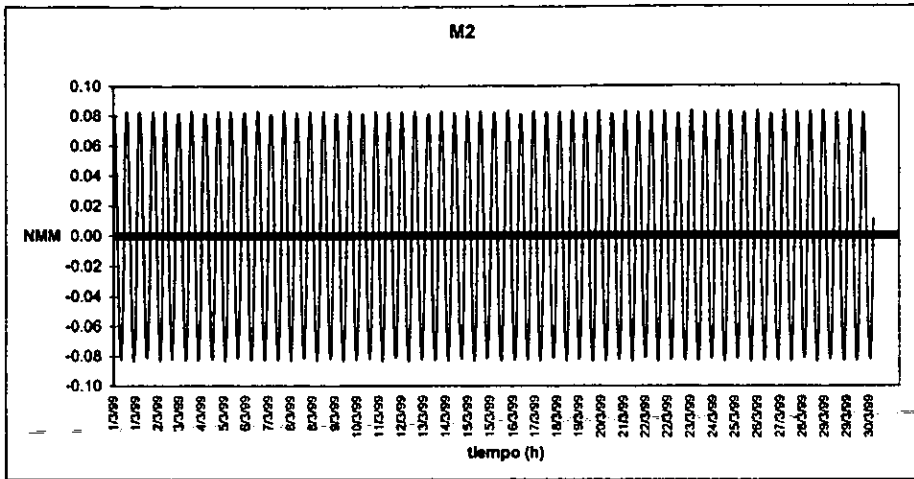


Figura 1.5. Representación gráfica de M2

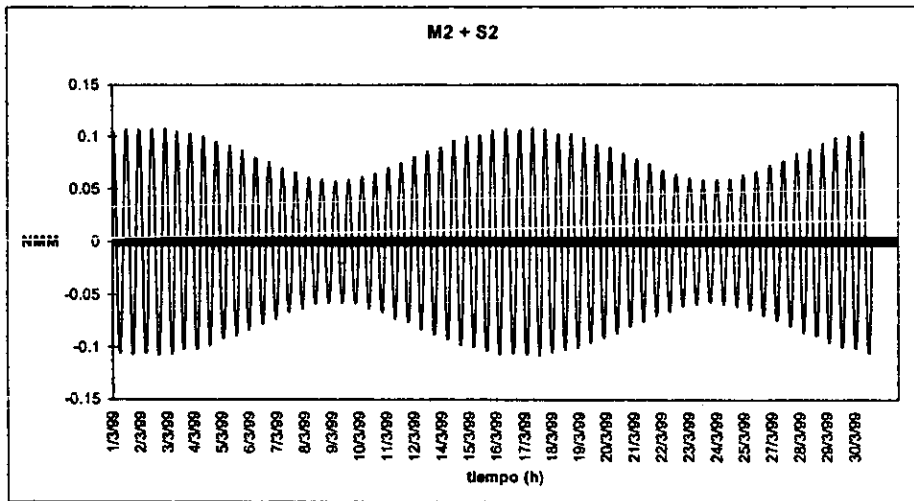


Figura 1.6. Representación gráfica de M2+S2

La componente S2 representa la marea, si el Sol estuviera siempre en el plano ecuatorial terrestre, y la órbita de la Tierra fuera un círculo. La Figura 1.6 muestra los efectos combinados de un Sol y de una Luna ideal, donde la Luna se encuentra en fase llena y nueva, y en el primer y tercer cuarto.

El constituyente N2 considera la órbita elíptica de la Luna. Durante un mes aproximadamente la Luna sigue una trayectoria elíptica, debido a esto se presentan las mareas más grandes del mes, cuando esta más cerca de la Tierra (Perigeo). De manera similar, las menores mareas del mes se tienen cuando la Luna esta más alejada de Tierra (apogeo). La Figura 1.7 muestra la suma de los componentes M2 y N2.

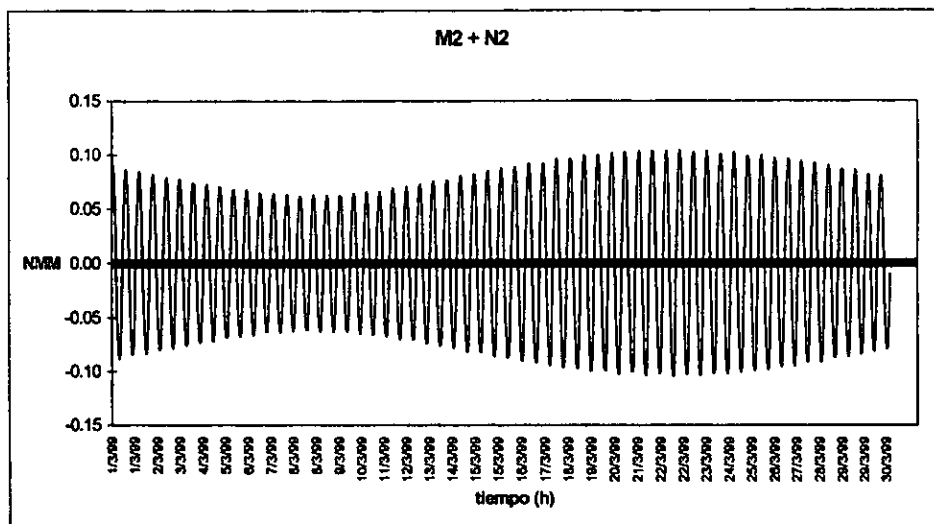


Figura 1.7. Representación gráfica de M2+N2

Los componentes diurnos K1, O1, P1 consideran la inclinación del plano ecuatorial terrestre con respecto del plano de la órbita lunar. Durante el mes, la Luna está dos semanas por arriba del ecuador y las otras dos por debajo.

Cuando se encuentra arriba, la pleamar en el hemisferio norte, será mayor que la del hemisferio sur, y viceversa cuando la Luna esta por debajo del ecuador. La Figura 1.8 muestra los efectos combinados de los componentes diurnos M2 y K1.

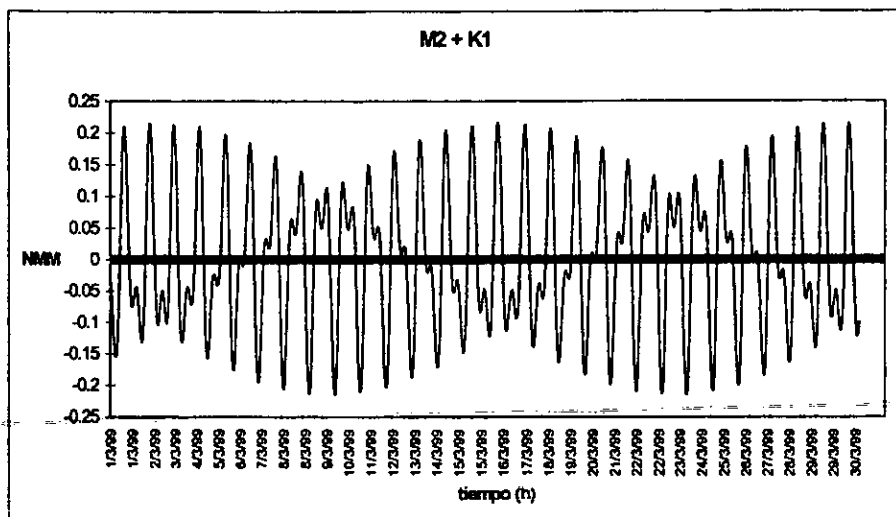


Figura 1.8. Representación gráfica de M2+K1

1.2.2 Variaciones en la altura de mareas.

Para la predicción de mareas en cualquier localidad se deben de contemplar los siguientes factores de origen astronómico que a continuación se describen.

1.2.2.1 Efecto de la fase lunar. Marea viva y marea muerta.

Como se ha mencionado, las fuerzas de gravedad de la Luna y el Sol actúan sobre los océanos de la Tierra. Es obvio que los cambios de posición de la Luna con respecto a la Tierra y el Sol, (Figura 1.9) durante un ciclo mensual (29.53 días), modificarán la atracción gravitacional de estos cuerpos sobre la Tierra.

Cuando la Luna está en fase nueva y fase llena, la atracción gravitacional de la Luna y el Sol provoca la marea viva. Este fenómeno se representa esquemáticamente en la Figura 1.9. La combinación de estas fuerzas provoca que se presenten las máximas pleamares en un ciclo mensual, así como que se tengan las mínimas bajamares en el mismo lapso.

En primera y tercera fase de la Luna (cuadratura), las fuerzas de atracción gravitacional de ambos cuerpos sobre las masas de agua de la Tierra son perpendiculares entre sí. Cada fuerza tiende a contrarrestar a la otra, por lo que ambas disminuyen. Se presentan entonces las pleamares y bajamares más bajas en el ciclo mensual.

* Ver glosario de términos

Las elipses con línea continua representan la fuerza productora de mareas, producidas por la Luna en la posición de syzygy* (Luna llena y nueva), y cuadratura (primer y cuarto menguante) la elipse con línea discontinua representa la fuerza productora de mareas desarrollada por el Sol.

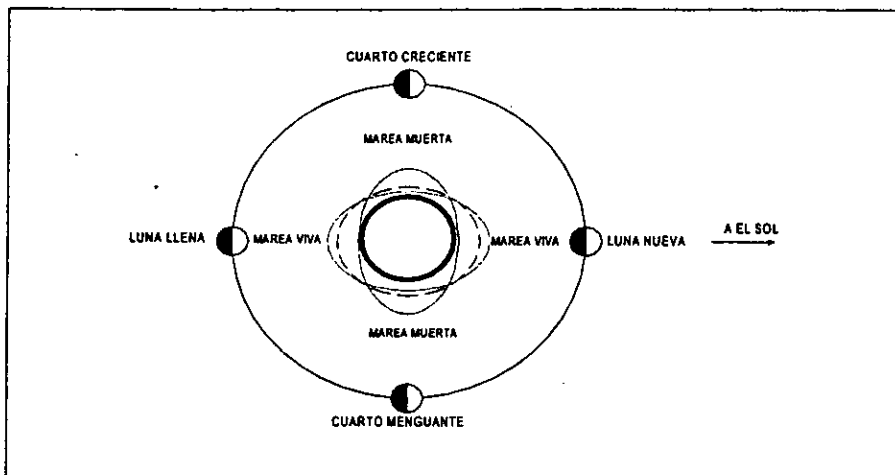


Figura 1.9 Influencia de las fases lunares sobre las mareas de la Tierra.

1.2.2.2 Efectos del paralelismo. (Luna y Sol).

Como se observa en la Figura 1.10, la Luna sigue una trayectoria elíptica, considerando esto, la distancia y la atracción gravitacional entre la Tierra y la Luna variará a lo largo de su recorrido, por lo que la fuerza productora de mareas no será la misma durante un mes.

Cuando la Luna está más cerca de la Tierra (Perigeo), la fuerza productora de mareas es mayor que lo normal. Dos semanas después, la Luna está más alejada de la Tierra (Apogeo), entonces la fuerza productora de mareas disminuye de tal manera que es la menor durante el mes.

De manera similar, cuando la Tierra está más cerca del Sol (Perihelio), alrededor del 2 de Enero de cada año, se presentan las máximas pleamares y cuando la Tierra está más alejada del Sol (Apehelio), cerca del 2 de Julio, se presentan las mínimas bajamares.

Cuando el Perigeo, Perihelio, y la Luna llena o Luna nueva ocurren al mismo tiempo, se tiene las máximas pleamares del año. De manera similar cuando el Apogeo, Apehelio, y el primer o tercer cuarto de la Luna coinciden al mismo tiempo, se presentan las mínimas bajamares del año.

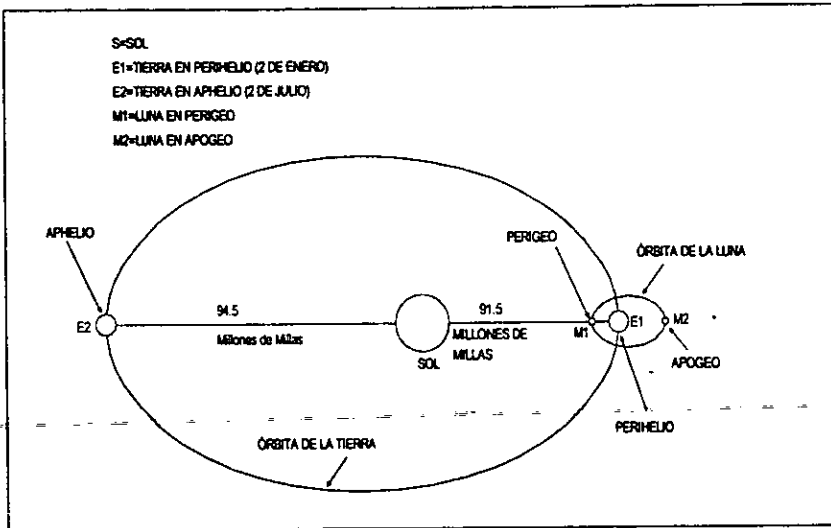


Figura 1.10 Proyección común del plano de la órbita terrestre alrededor del Sol y el plano de la órbita lunar alrededor de la Tierra.

1.2.2.3 Efectos de la Declinación Lunar. La desigualdad diurna.

El plano de la órbita Lunar está inclinado aproximadamente 5° respecto del plano de la órbita terrestre (La eclíptica), por lo que la trayectoria de la Luna se acerca mucho a ésta. La eclíptica está inclinada 23.5° respecto del ecuador terrestre, al girar la Tierra alrededor del Sol esta inclinación es la que provoca que se presenten las estaciones en la Tierra, en diferentes hemisferios.

La Luna tarda aproximadamente un mes en girar alrededor de la Tierra, durante el recorrido toma una posición tal que es la máxima declinación que se puede presentar en el hemisferio norte, transcurridas dos semanas está en esa misma posición sólo que ahora en el hemisferio Sur. Durante un mes la Luna cruza el ecuador dos veces, esto se aprecia en la Figura 1.11, donde dicha condición se muestra por la posición de la Luna con línea discontinua. Así, la correspondiente fuerza de marea debida a la Luna se representa, por la elipse discontinua.

Si se consideran los puntos A y A' a lo largo del eje mayor de esta elipse, la altura de marea representada en A es la misma en el otro lado, punto A', siempre y cuando la posición de la Luna se encuentre en el otro extremo del eje con una diferencia en tiempo de 12 horas. Cuando la Luna está sobre el ecuador, las dos pleamares y las dos bajamares que se presentan en un día, son similares en su altura en alguna localidad, además de que están igualmente espaciadas en tiempo, esto se observa en la Figura 1.11. Este tipo de marea es conocida como semidiurna.

* Ver glosario de términos

Sin embargo, con el cambio de la distancia angular de la Luna por arriba o por debajo del ecuador, representado por la línea sólida de la **Figura 1.11**, la fuerza de marea producida por la luna esta inclinada, y se presenta una diferencia entre las alturas de las dos mareas diarias de la misma fase.

Las variaciones en la altura de la marea son el resultado de los cambios en el ángulo de declinación de la Luna, fenómeno que se conoce como desigualdad diurna.

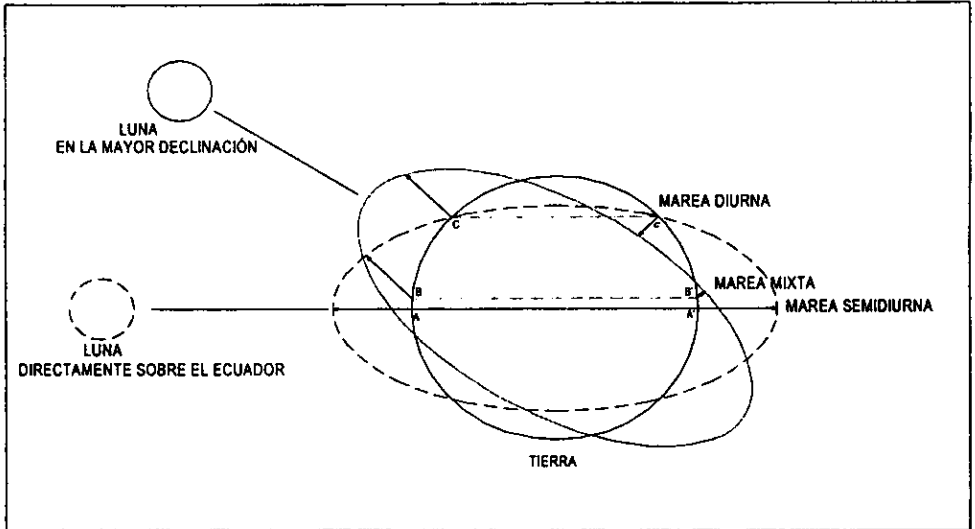


Figura 1.11 Efecto de la declinación lunar sobre las mareas

1.2.3 Tipos de mareas astronómicas.

Las mareas astronómicas pueden ser de los siguientes tipos:

- 1.2.3.1 **Diurna.** Una pleamar y una bajamar por ciclo, en un período de 24 h 50 min. (valor promedio)
- 1.2.3.2 **Semidiurna.** Dos pleamares y dos bajamares durante dos ciclos con período de 12 h 25 min cada uno (valor promedio), las amplitudes de ambas son sensiblemente semejantes

1.2.3.3 Mixta. Dos pleamares y dos bajamares durante dos ciclos sucesivos, con período de 12 h 25 min cada uno (valor promedio), las amplitudes de ambas presentan diferencias notorias (desigualdad horaria).

La desigualdad diaria, para mareas semidiurnas y mixtas, es la diferencia en altura entre los niveles de dos pleamares o bajamares sucesivas. Dependiendo del tipo de marea (diurna, semidiurna o mixta) los planos de marea que se generan son:

Altura máxima registrada.

Nivel más alto registrado en la estación debido al efecto de un tsunami o ciclón combinado, probablemente con el de la marea astronómica.

Pleamar máxima registrada (PMH).

Nivel más alto registrado debido a las fuerzas de marea periódica, o también a que tengan influencia sobre las mismas los factores meteorológicos.

Nivel de pleamar media superior (NPMS o NHHW).

Promedio de la más alta de las dos pleamares diarias, durante el período considerado en la estación (mareas semidiurna y mixta).

Nivel de pleamar media (NPM o MHW).

Promedio de todas las pleamares durante el período considerado en cada estación; cuando el tipo de marea es diurna, este plano se calcula haciendo el promedio de la pleamar más alta diaria, lo que equivale a que la pleamar media en este caso sea equivalente a la pleamar media superior.

Nivel medio del mar (NMM o MSL).

Promedio de las alturas horarias durante el periodo registrado en la estación.

Nivel de media marea (MM o MTL).

Plano equidistante entre la pleamar media y la bajamar; es decir se obtiene promediando estos dos valores.

Nivel de bajamar media (NBM o MLW).

Promedio de todas las bajamares durante el período considerando la estación; cuando el tipo de marea es diurna, este plano se calcula haciendo el promedio de la bajamar más baja diaria, lo que equivale a que la bajamar media en este caso sea lo mismo que la bajamar media inferior.

Nivel de bajamar media inferior (NBMI o MLLW).

Promedio de la más baja de las dos bajamares diarias, durante el período considerado en la estación (Marea semidiurna y mixta).

Bajamar mínima registrada (BMR o LLW).

Nivel más bajo registrado debido a las fuerzas de marea periódica, o también que tengan influencia sobre las mismas los factores meteorológicos.

Altura mínima registrada.

Nivel más bajo registrado en la estación debido al efecto de un tsunami o ciclón combinado, probablemente con el de la marea astronómica.

Las gráficas de los diferentes tipos de mareas se muestran a continuación.

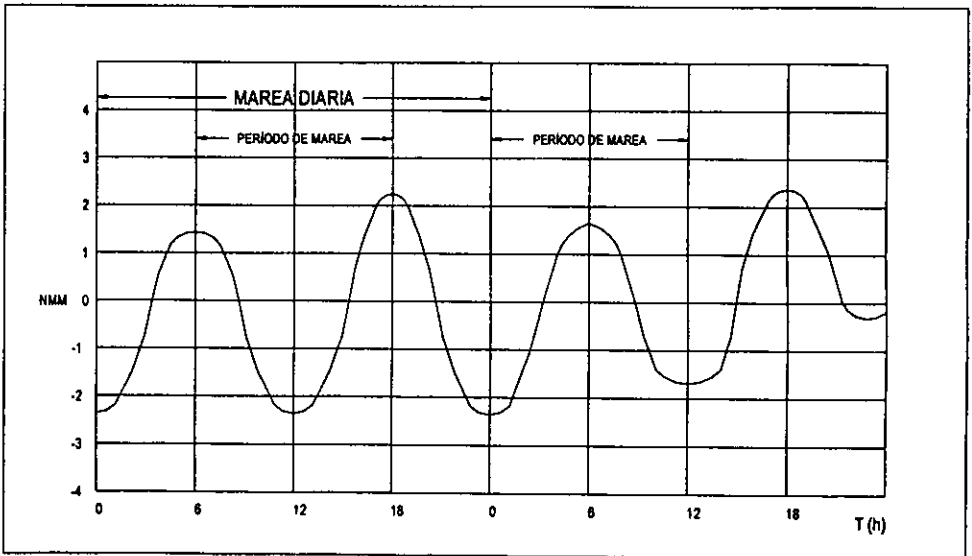


Figura 1.12a. Marea Semidiurna

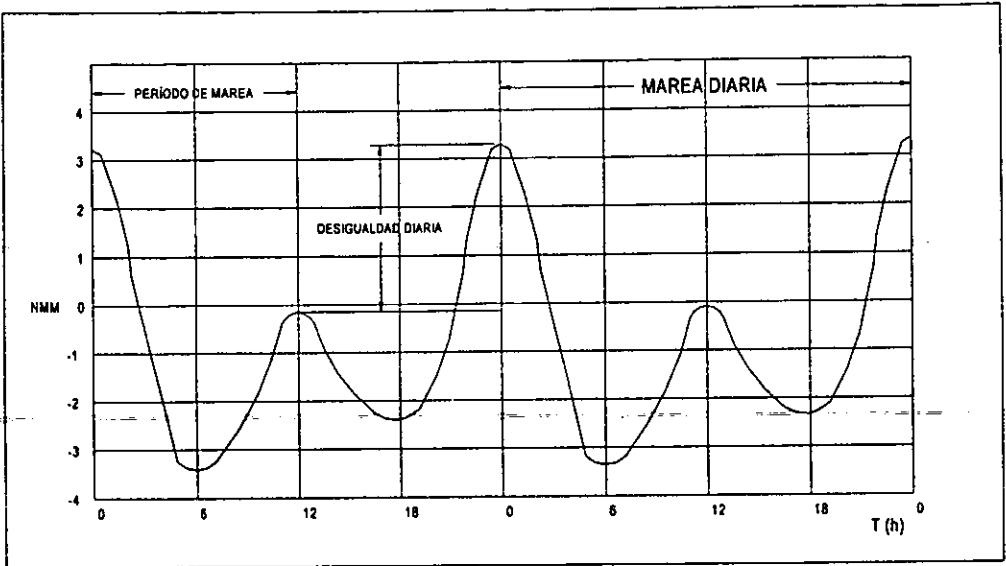


Figura 1.12b. Marea Mixta

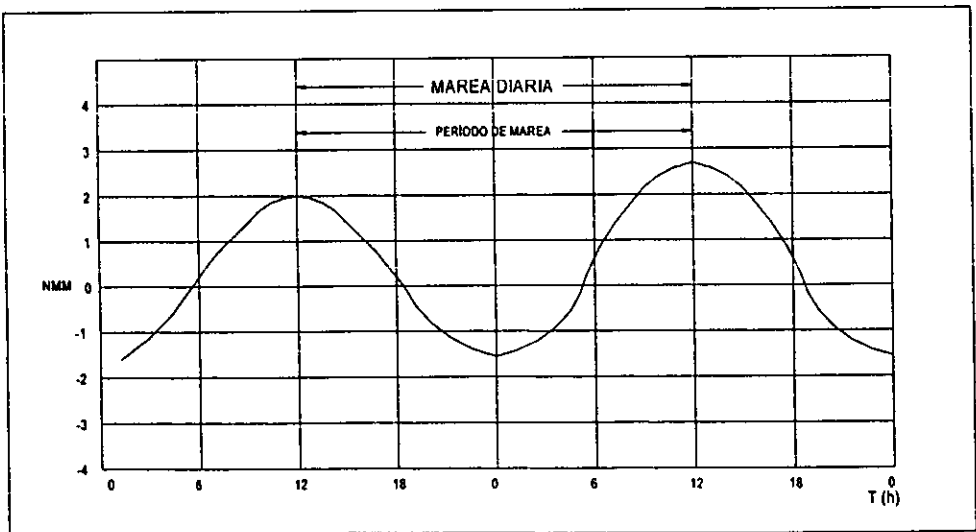


Figura 1.12c. Marea Diurna

1.2.4 Tratamiento Armónico de los Datos de Mareas.

El análisis armónico de mareas está basado en la suposición de que el ascenso y descenso de la marea en cualquier localidad, puede ser expresado matemáticamente por la suma de una serie de términos armónicos teniendo cierta relación con consideraciones astronómicas. Una función armónica simple es una cantidad que varía con el coseno de un ángulo que crece uniformemente con el tiempo.

En la ecuación $y = A \text{ Cos } at$, la variable dependiente y , es una función armónica del ángulo at , en donde a es una constante y t representa el tiempo medido a partir de un tiempo inicial. La ecuación general para la altura (h) de la marea en cualquier tiempo (t) puede ser escrita como una serie de la siguiente forma:

$$h = H_0 + H_1 \text{ Cos } (at + k_1) + H_2 \text{ Cos } (bt + k_2) + H_3 \text{ Cos } (ct + k_3) \quad 1.1.4.$$

donde H_0 es la altura del nivel medio del agua de datos utilizados. Los demás términos se explican a continuación:

Cada término de coseno en la ecuación (1.1.4) es conocido como *componente de marea*. Los coeficientes H_1 , H_2 , H_3 , etc. son las *amplitudes de los componentes* de mareas y se derivan de los datos de observación de marea de cada localidad. La expresión en paréntesis, es un ángulo que varía uniformemente y su valor en cualquier tiempo es llamado la *fase*.

Cualquier componente tiene su valor máximo positivo cuando la fase del ángulo es cero y su valor máximo negativo cuando la fase es 180° , y el término se vuelve cero cuando la fase es 90° o 270° . El coeficiente t representa la relación de cambio en la fase y es llamada la *velocidad* de la componente y es usualmente expresada en grados por hora. El tiempo requerido por una componente para pasar a través de un ciclo completo se conoce como período y se puede obtener dividiendo 360° entre su velocidad.

Los períodos y velocidades correspondientes de las componentes, son derivados de datos astronómicos y son independientes de la localidad de la estación de marea. Los símbolos k_1 , k_2 , k_3 , etc., se refieren a fases iniciales de los ángulos componentes en $t = 0$. La fase inicial depende de la localidad, al igual que del instante del cual el tiempo es calculado y sus valores son derivados de la observación mareográfica. El *análisis armónico* aplicado a mareas es el proceso por el cual los datos mareográficos observados en cualquier lugar son separados en un número de componentes armónicos. Las cantidades solicitadas son conocidas como constantes armónicas y constan de amplitudes y ciertas relaciones de fase que serán explicadas más adelante.

La *predicción armónica* es realizada reuniendo las componentes elementales de acuerdo con las relaciones astronómicas que prevalecen en el tiempo en el cual serán hechas las predicciones.

1.2.5 Datos Observados.

Los datos observados más recomendables para el análisis armónico, son los recabados por un dispositivo automático que traza curvas continuas, de las cuales la altura de la marea puede tener la escala según el intervalo de tiempo que se desee. Este registro es usualmente tabulado para dar la altura de marea en cada hora solar, de las series en el sistema de tiempo que normalmente se utilice en el lugar.

Es importante, sin embargo, que el tiempo sea preciso y que el mismo sistema se use para todas las series de observaciones. Cuando no se pueda disponer de un registro continuo por un dispositivo automático, pueden ser observadas alturas horarias por otros métodos. El registro debe tener completa toda la serie. Si una parte del registro se pierde, éste debe ser llenada por interpolación, ó si la pérdida es muy extensa, el registro se puede cortar en dos series pequeñas que no incluyen la porción faltante.

Si las alturas horarias, no han sido observadas pero se dispone de un registro de pleamares y bajamares, una evaluación aproximada de los componentes más importantes, puede ser obtenida por medio de un tratamiento espacial. Sin embargo, los resultados no son tan satisfactorios como los obtenidos de las alturas horarias.

Para seleccionar la longitud de las series de observaciones con el propósito del análisis, se considera el hecho de que el procedimiento es más efectivo al separar dos componentes, cuando la longitud de una serie es un múltiplo exacto del período sinódico de estos componentes. Se conoce por período sinódico al intervalo entre dos conjunciones consecutivas de fases iguales.

Así si las velocidades de dos componentes en grados por hora se representan por a y b , el período sinódico será igual $360^\circ/(a-b)$ horas. Si sólo fueran dos componentes en la marea, la mejor longitud de la serie podría arreglarse fácilmente, pero en la marea real hay muchos componentes por lo que su longitud más efectiva, puede no ser la más conveniente.

Afortunadamente, la longitud exacta de las series no es de esencial importancia y por conveniencia todas las series pueden ser incluidas en números enteros de días.

Teóricamente, diferentes longitudes deben ser usadas buscando diferentes componentes, pero prácticamente es conveniente usar la misma longitud para todos los componentes,

haciendo una excepción en caso de una serie muy corta. Mientras más larga sea la serie de observaciones, tendrá menor importancia su longitud exacta.

También mientras mayor sea el número de periodos sinódicos de cualesquiera dos componentes, será más completa la separación de uno con respecto de otro. Los componentes como la S2 y K2 tienen velocidades casi iguales y un período sinódico de cerca de seis meses, por lo tanto, se requerirá una serie de no menos de 6 meses para una separación correcta.

Por otro lado, los componentes que difieren apreciablemente en su velocidad, tales como los componentes diurnos y semidiurnos, pueden tener un período sinódico que no exceda el día, y una serie moderadamente corta de observaciones incluirá un número relativamente largo de periodos sinódicos.

1.2.6 Constantes Armónicas.

La marea real se puede concebir como la suma de un número de armónicos que tienen los mismos periodos encontrados en la fuerza productora de mareas. Aunque la complejidad del movimiento de mareas es muy grande para permitir una modelación teórica en computadora, basada sólo en condiciones astronómicas, es posible obtener ciertas constantes a través del análisis de datos observados en cualquier lugar, las cuales pueden ser introducidas en las fórmulas teóricas y así adaptar la marea a un programa de computadora para cualquier tiempo deseado.

En las fórmulas para la altura de la marea, cada término está formado por el producto de un coeficiente y el coseno de un argumento. Para las fórmulas correspondientes que expresan la altura real de la marea en cualquier lugar, el coeficiente teórico completo incluyendo el factor de latitud y el coeficiente común general, es reemplazado por un coeficiente determinado de un análisis de datos observacionales para la estación. Este coeficiente de mareas, que es conocido como la *amplitud* del constituyente, se supone que está sujeto a las mismas variaciones, debidas a cambios en la longitud del nodo lunar así como el coeficiente del término correspondiente a la marea de equilibrio.

Las amplitudes derivadas directamente del análisis de series limitadas de observaciones, deben ser multiplicadas por el factor de reducción F , para obtener las amplitudes medias de las constantes armónicas. Para la predicción de mareas, las amplitudes medias deben ser multiplicadas por el factor nodal f para obtener las amplitudes que pertenecen al año para el cual las predicciones son realizadas.

Para el cálculo de las constantes armónicas se emplea el análisis de Fourier (ver Anexo 5), donde la amplitud de cada constituyente se calcula con la siguiente ecuación:

$$H = \sqrt{A^2 + B^2} \quad 1.1.5.$$

donde:

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos vt \, dt \quad 1.1.6.$$

$$B = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \operatorname{sen} vt \, dt \quad 1.1.7.$$

$x(t)$ - Registro en función del tiempo de la medición de la marea del puerto en cuestión

v - Velocidad del constituyente

La fase del constituyente se calcula con:

$$\xi = -\operatorname{Tan}^{-1} \frac{B}{A} \quad 1.1.8.$$

Si se considerara un suficiente número de términos, se podría hacer que una serie de Fourier represente una curva la cual será exactamente satisfecha por las n ordenadas dadas. Esto es en general, innecesario y poco deseable en el trabajo de mareas, ya que es conocido que las ordenadas promedio obtenidas de las sumas de las alturas horarias de la marea incluyen muchas irregulares debido a la eliminación imperfecta de los efectos meteorológicos y también efectos residuales de componentes que tienen períodos que no pueden ser medidos respecto al constituyente solicitado o requerido.

Es deseable incluir sólo los términos de las series que representan los elementos periódicos verdaderos de los componentes con series de observaciones de suficiente longitud, por otro lado se encontrará que el coeficiente de otros términos, es aproximadamente cero.

Los componentes de corto período como se deriva de la teoría de equilibrio son en general, tanto diurnos o semidiurnos. Si el período es tomado de manera que corresponda al día constituyente, los componentes diurnos serán representados por los términos con coeficiente A_1 y B_1 y los componentes semidiurnos por los términos con coeficientes A_2 y B_2 . Para los componentes de largo período, éste será tomado de

manera que corresponda al mes constituyente o al año constituyente, en tal caso los coeficientes A_1 y B_1 se referirán a los componentes anual o mensual y los coeficientes A_2 y B_2 a los componentes semi-mensuales o semi-anales.

Para la mayoría de los componentes, los coeficientes A_1 , B_1 , A_2 y B_2 serán los únicos requeridos.

Como ejemplo consideremos que la curva de marea para un lugar ideal es:

$x(t) = \text{Cos } vt$, donde se conoce la velocidad v .

De acuerdo con 1.1.6. y 1.1.7.

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos vt \cdot \cos vt \, dt \quad 1.1.6. \text{ a.}$$

y

$$B = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos vt \cdot \text{sen } vt \, dt \quad 1.1.7. \text{ b.}$$

Usando las siguientes identidades trigonométricas para resolver las integrales

$$\cos vt \cdot \cos vt = \frac{1}{2} [1 + \cos(2vt)]$$

$$\cos vt \cdot \text{sen } vt = \frac{1}{2} \text{sen}(2vt)$$

Sustituyendo la primera identidad, en 1.1.6.a.

$$A = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} [1 + \cos(2vt)] \, dt$$

Resolviendo la integral se llega a:

$$A = \frac{1}{\pi} \left[t + \frac{1}{2v} \text{sen}(2vt) \right]_0^{\infty}$$

Dividiendo entre t y valuando los límites, además sí la velocidad, $v = 1$ entonces;

$$A = 1$$

De manera similar para el coeficiente B

$$B = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \sin(2vt) dt$$

$$B = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{4v} \cos(2vt) \right]_0^{\infty}$$

Multiplicando por t y valuando los límites y la velocidad $v = 1$.

$$B = 0$$

Sustituyendo los valores de A y B en las ecuaciones 1.1.5. y 1.1.8. se obtiene su amplitud y su fase, respectivamente.

$$H = 1; \alpha = 0$$

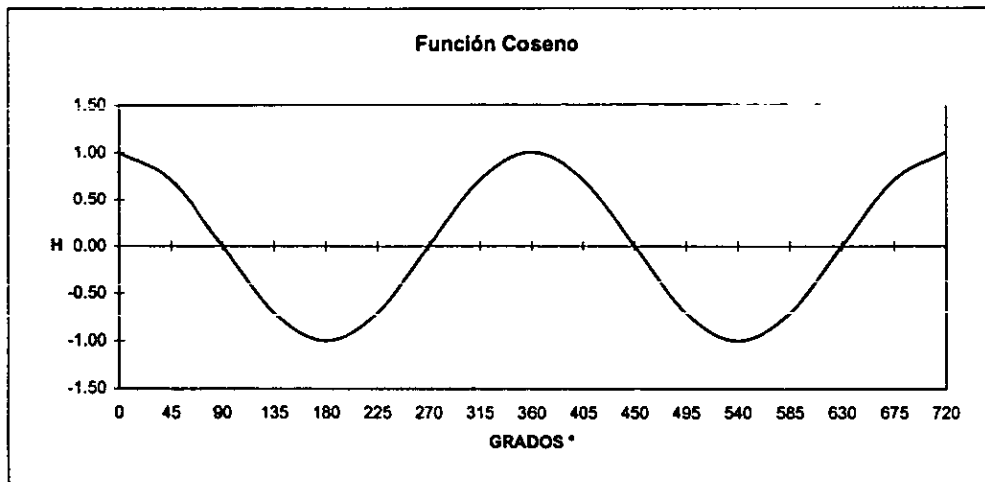


Figura 1.13. Representación gráfica de la función coseno, se puede observar que la amplitud es uno, y para un instante $t = 0$, la fase es cero.

1.2.7 Fase de retraso o época.

Las fases de los componentes de la marea real no coinciden en general con las fases de los componentes correspondientes a la marea de equilibrio, puede haber retrasos que varían de 0° a 360° .

El intervalo entre la fase de pleamar de un constituyente de equilibrio y la siguiente pleamar del correspondiente constituyente real es conocido como *fase de retraso o época* del constituyente y se representa por el símbolo k el cual se expresa en ángulos.

Las amplitudes y épocas, juntas son llamadas constantes armónicas y son las cantidades solicitadas en el análisis armónico de las mareas. Cada localidad tiene una serie única de constantes armónicas las cuales se derivan sólo de datos observacionales, los cuales permanecen iguales por un largo período, siempre y cuando no haya cambios físicos en la región, que puedan afectar las condiciones de mareas.

Si hacemos Y_1 igual a la altura de uno de los componentes de mareas referido al nivel medio del mar, se puede representar por la siguiente fórmula:

$$Y_1 = f H \cos (E - k) = f H \cos (V + u - k)$$

El símbolo combinado $V+u$ es el equivalente de E y representa el argumento o fase del constituyente de equilibrio.

La fórmula anterior se ilustra gráficamente en la **Figura 1.14** por una curva coseno con amplitud H . La línea horizontal representa el nivel medio del mar y la línea vertical a través de T puede ser tomada para indicar cualquier instante de tiempo en consideración.

Si el punto M representa el tiempo cuando el argumento del constituyente es cero, el intervalo de M a la siguiente pleamar será la fase k . El intervalo desde la pleamar precedente a M es medido con $-k$. La fase del argumento constituyente en un tiempo T es calculada por M y es expresada por el símbolo $(V + u)$. La fase del constituyente por sí sola en este tiempo es calculada de la pleamar precedente y así es igual a $(V + u - k)$.

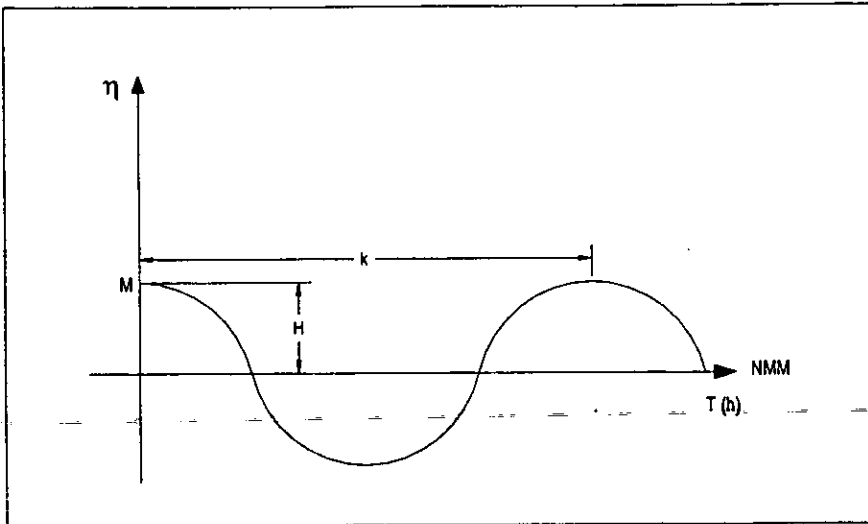


Figura 1.14 Representación esquemática de la fase k.

La fase de retraso o época de un constituyente de mareas, que se representa por (k), es la diferencia entre la fase del constituyente observado y la fase de su argumento al mismo tiempo. Esta diferencia permanece aproximadamente constante para cualquier constituyente en una localidad en particular. El argumento por sí solo es representado por el símbolo general $(V+u)$ ó E y su fase, el subíndice o es el valor al que pertenece en un instante inicial de tiempo, tal como el inicio de las series de observaciones, se expresa por (V_0+u) .

La fase de retraso puede ser expresada por la siguiente fórmula general:

$$k = V_0 + u - (-\epsilon) = V_0 + u + \epsilon$$

Debido a que las fórmulas para evaluar el argumento de todos los componentes de corto período, contienen algún múltiplo de la hora angular (T) del Sol medio, los argumentos por sí solos tendrán diferentes valores en diferentes longitudes, para un mismo instante de tiempo.

Si p es igual al coeficiente de T, y L es igual a la longitud del lugar en grados, calculados hacia el Oeste de Greenwich, y considerando que L negativa para la longitud Este, entonces la relación entre el argumento local y Greenwich para cualquier constituyente puede ser expresada como:

$$\text{Local } (V + u) = \text{Greenwich } (V + u) - pL$$

Por otra parte se debe considerar que el tiempo absoluto del principio de un día o del principio de un año dependen del tiempo meridiano usado en la localidad, entonces el instante que se toma para el principio de las series de observaciones, puede diferir en diferentes localidades aunque éstas estén expresadas en un mismo tiempo reloj del día calendario.

Si S es la longitud de tiempo meridiano en grados, positivo hacia el Oeste y negativo para el Este, el meridiano expresado en horas es $S/15$. Sea a igual a la velocidad, en el argumento del constituyente, entonces la diferencia en el argumento debida al valor absoluto de las series se vuelve $aS/15$, por tanto la relación entre el argumento local y de Greenwich, puede ser expresada como sigue:

$$\text{Local } (V_0 + u) = \text{Greenwich } (V_0 + u) - pL + aS/15$$

En la fórmula anterior los términos $(V_0 + u)$ Local y Greenwich pertenecen al mismo reloj, pero no al mismo tiempo absoluto, a menos que ambos relojes estén puestos para el meridiano de Greenwich. Las fases de los mismos componentes de mareas en diferentes partes del mundo no son directamente comparables a través de sus épocas locales ya que estas involucran la longitud de la localidad.

Para tal comparación es deseable tener una época Greenwich que sea independiente de los meridianos de longitud y tiempo. Tal época puede ser designada por la letra mayúscula G y su relación con la época local correspondiente se expresa como sigue:

$$\text{Epoca Greenwich } (G) = k + pL = \text{Greenwich } (V_0 + u) + aS/15$$

En la **Figura 1.15** se representa en forma más detallada la fase de un constituyente. En ésta, la línea horizontal representa cambios en el tiempo. Las distancias a lo largo de la línea serán proporcionales a los cambios en el ángulo de cualquier constituyente solo, pero desde que cada constituyente tiene diferente velocidad, las distancias iguales a lo largo de esta línea no representarán ángulos iguales para diferentes componentes. El tiempo entre eventos puede ser convertido en un ángulo constituyente equivalente multiplicándolo por la velocidad del constituyente.

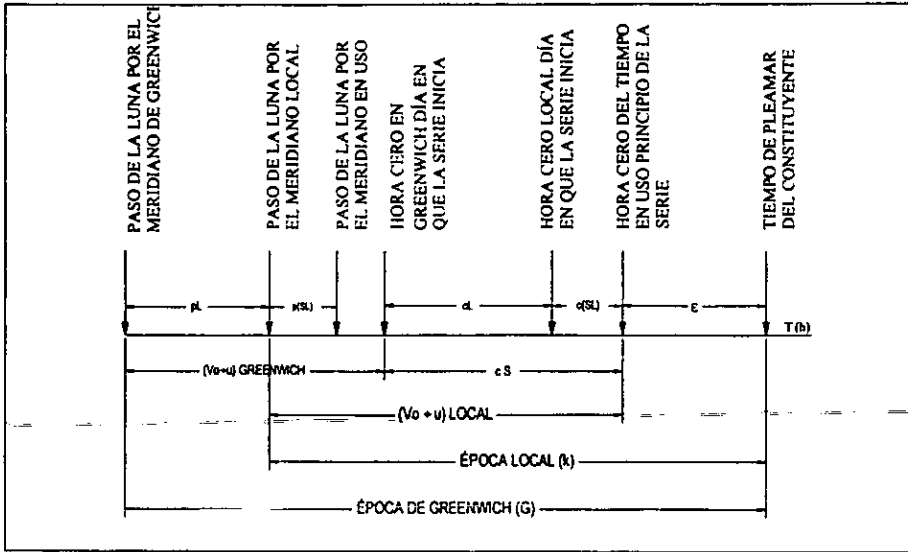


Figura 1.15 Fase de un componente

La palabra tránsito significa el paso de la Luna ficticia, representando cualquier constituyente y también el tiempo, cuando el argumento de equilibrio del constituyente es cero. Para todos los componentes de largo período, el tiempo cero dependerá de la longitud del lugar de observación al igual que del tiempo absoluto.

Para componentes de largo período los valores cero son independientes de la longitud del lugar de observación, y los tránsitos sobre varios meridianos pueden ser considerados como ocurridos simultáneamente, lo cual es equivalente a tomar el coeficiente p igual a cero. La figura mencionada ilustra la relación entre $(V_0 + u)$ Greenwich, calculada para el meridiano de Greenwich y referida al tiempo estándar Greenwich y el término $(V_0 + u)$ Local referido al meridiano de observación y el tiempo actual del principio de las observaciones.

1.3. Mareas de Tormenta

Una Marea de Tormenta se define como una sobrelevación en el nivel medio del mar debido a factores meteorológicos resultado de las fuerzas del viento, cambios de presión atmosférica, movimiento de sistemas de tormenta y configuración del fondo marino. En el área de influencia, la altura de la Marea de Tormenta es estimada por la substracción de la predicción de Marea Astronómica. Se debe tener en cuenta que las Mareas de Tormenta pueden provocar elevaciones positivas o negativas.

Durante la ocurrencia de los ciclones se presenta este fenómeno marítimo. Las Mareas de Tormenta igual que las Mareas Astronómicas como se mencionó, están asociadas a una sobrelevación o a un decremento del nivel medio del mar, pero a diferencia de las primeras su fuerza de generación no es la gravedad, sino la disminución de la presión atmosférica y el viento, entre otros.

Los principales factores que intervienen en la magnitud de la sobrelevación son:

- Presión central en el ciclón P_c
- Velocidad del viento sostenido V_v
- Velocidad de desplazamiento V_D
- Angulo de incidencia sobre la playa θ
- Pendiente de la batimetría en la zona de incidencia α

La pendiente del fondo (α), y su coeficiente de fricción (τ_f) influyen en el peralte de la onda, para el caso de pendientes suaves y material erosivo en playas como las del Golfo de México, la marea se ve incrementada, no así para playas con pendientes fuertes como las de la vertiente del Pacífico. Finalmente el factor con mayor peso es la velocidad del viento, pues este provoca un acarreo de masa hacia la playa, el cual en conjunto con los otros factores generan la sobrelevación.

En algunas áreas las Mareas de Tormenta tienen efectos desastrosos, en Norte América por ejemplo, ocurren frecuentemente debido a los huracanes que se presentan en el Golfo de México y en la costa este de los Estados Unidos. En Asia, la bahía de Bengala es seriamente afectada por las inundaciones que provocan este fenómeno. En el mar Báltico, las Mareas de Tormenta son generalmente causadas por la baja presión del área esto provoca fuertes vientos, por lo que en esta zona se generan grandes Mareas de Tormenta de corta duración.

La velocidad de desplazamiento de un huracán influye directamente en el desarrollo de una onda de largo periodo y consecuentemente en la sobrelevación del nivel del agua, por lo que a menor velocidad de desplazamiento mayor desarrollo de la onda y mayor sobrelevación. El ángulo de incidencia es también fundamental, pues si este es perpendicular a la playa se presenta el caso más desfavorable.

El NHC(National Hurricane Center) maneja que la reducción en la presión atmosférica en un milibar es equivalente a un incremento de 1 cm en el nivel del agua, esto para aguas profundas, sin embargo como se mencionó la sobrelevación depende de varios factores.

A continuación se presentan de forma más detallada diferentes criterios para valuar la magnitud de la sobrelevación de las Mareas de Tormenta.

1.3.1 Ecuación propuesta por Conner, Kraft y Harris (1957).

Esta ecuación semi empírica es función únicamente de la presión central.

$$M_T = 0.046939 (1019 - P_c) \quad 1.4.1$$

donde:

M_T : Marea de Tormenta (m)

P_c : presión central (mb)

1.3.2 Ecuación propuesta por la Universidad de Cantabria (España).

Se propone el siguiente modelo en el cual se considera la velocidad del viento, la presión atmosférica, la sobrelevación por ruptura y la sobrelevación por agrupación de ondas (surf-beat).

a) Sobrelevación debida a la presión.

$$S_{VP} = 1.026 (P_n - P_C) \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{r}} \right) \quad 1.4.2$$

donde:

S_{VP} : sobrelevación debida del viento (cm)

P_C : presión central (mb)

P_n : presión central (mb)

R : distancia a la última isobara cerrada en la periferia del ciclón (km)

r : distancia del centro del ciclón al punto donde se desea conocer la sobrelevación (km)

b) Sobrelevación debida a la acción del viento

La acción continua del viento sobre la lámina de agua del mar puede provocar el arrastre de la misma. Si este arrastre se produce en dirección de la playa, el agua se acumula en está, produciendo un ascenso del nivel medio del mar. Esta elevación depende de la intensidad del viento, trayectoria, duración, forma de la costa, configuración y rugosidad del fondo. Las ecuaciones que describen este proceso son las ecuaciones de cantidad de movimiento, que representan la segunda ley de Newton.

Una forma simplificada de estas expresiones se obtiene promediando verticalmente todas las ecuaciones que gobiernan el proceso, resultando:

$$\frac{\partial \eta_v}{\partial x} = \frac{(\tau_s + \tau_b)}{\rho g H} \quad 1.4.3$$

donde:

η_v : sobrelevación debida al viento
 τ_s : tensión tangencial debida al viento
 τ_b : tensión tangencial debida a fricción con el fondo
 g : gravedad
 H : profundidad

La integración de la ecuación anterior en el supuesto de profundidad variable linealmente y expresando las tensiones tangenciales en función de la velocidad del viento, resulta:

$$\eta_v = \frac{Kw^2x}{g(h_1 - h - \eta_v)} \text{Ln} \left(\frac{h_1}{h + \eta_v} \right) \quad 1.4.4$$

donde:

K : coeficiente = 3.310^{-6}
 w : velocidad del viento (m/s)
 h : profundidad del punto en que se desea conocer la sobrelevación (m)
 h_1 : profundidad en la que se inicia la sobrelevación debida al viento (m)
 x : distancia horizontal entre h y h_1 (m)

1.3.3 Ecuación propuesta por Stanislaw R. Massel

Tomando la consideración del NHC(National Hurricane Center), de que la reducción en la presión atmosférica en un milibar es equivalente a 1 cm de sobrelevación en el nivel del agua. Se tiene:

$$\Delta \psi = k(p_a - p_o) \quad 1.4.5$$

donde:

$\Delta \Psi$ Variación en el nivel del agua.
 p_o : Presión atmosférica bajo consideración.
 p_a : Principal presión atmosférica.
 $k = (\rho g)^{-1}$ este término es también llamado efecto del barómetro invertido.

Si la presión atmosférica p_o , se mueve con una velocidad U , la Marea de Tormenta se moverá con esta.

Dada la siguiente ecuación de momento deducida del capítulo 9 del Hydrodynamics of Coastal Zone (Stanislaw R. Massel 1989):

$$h \frac{\partial u}{\partial t} + gh \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad 1.4.6.$$

En la ecuación anterior, la presión moviéndose en la dirección x se considera como:

$$p_0 = f(Ut - x)$$

y

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad 1.4.7.$$

Bajo la consideración que la velocidad en una partícula de la onda, es proporcional al desplazamiento de la superficie del agua, se obtiene:

$$u = \frac{U\Psi}{h + \Psi} \approx U \frac{\Psi}{h} \quad 1.4.8.$$

Es conveniente considerar el desplazamiento de la superficie Ψ en la forma:

$$\Psi = \Psi(Ut - x) \quad 1.4.9.$$

así

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -U \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad 1.4.10.$$

Después de substituir las ecuaciones 1.4.7. y 1.4.10. en la ecuación 1.4.6, e integrando esta, se obtiene

$$\frac{\Psi}{h} = \frac{p_0 / \rho}{U^2 - gh} \quad 1.4.11.$$

Cuando la velocidad de la tormenta se aproxima a la velocidad de las ondas, el fenómeno de resonancia debe ser considerado. En general, la presión atmosférica tiene un pequeño efecto en el ascenso del nivel del mar, el esfuerzo del viento sobre la superficie, es denotado por $\tau^{(F)}$. En particular, el esfuerzo $\tau^{(F)}$ se considera que actúa usualmente en la dirección del viento y que su magnitud es proporcional al cuadrado de la velocidad del viento. Por lo tanto

$$\tau^{(F)} = C_D \rho_a |\nabla_w| \nabla_w \quad 1.4.12.$$

En donde \vec{V}_w es la velocidad del viento medida a una altura dada (Usualmente 10 metros sobre el nivel de la superficie del mar), ρ_a densidad del aire, C_D es un coeficiente de arrastre.

El valor de C_D depende de la altura en la cual la velocidad \vec{V}_w es medida, la estabilidad de la capa limite de la atmósfera y rugosidad de la superficie del océano. El análisis detallado del coeficiente C_D para varias situaciones meteorológicas puede verse en el capítulo 6 de Hydrodynamics of Coastal Zone (Stanislaw R. Massel 1989).

Ahora considérese la Marea de Tormenta en la cuenca cerrada de forma rectangular y de profundidad constante. Ver Figura 1.16, si la velocidad del viento es constante y sopla a lo largo del eje del canal, de la ecuación 8.74 del Hydrodynamics of Coastal Zone (Stanislaw R. Massel 1989):

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{\tau^{(F)} - \tau^{(B)}}{\rho g(h + \Psi)} \quad 1.4.13.$$

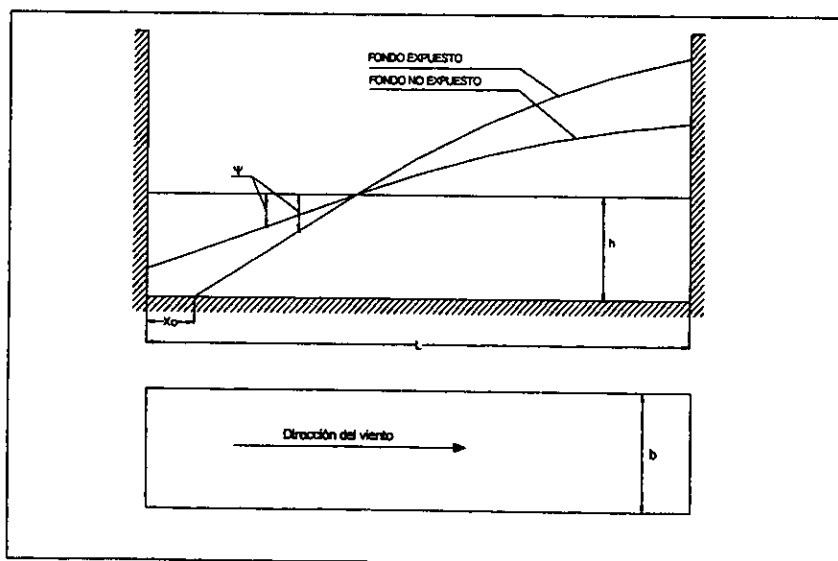


Figura 1.16 Marea de Tormenta en una cuenca cerrada.

Adicionalmente, las siguientes condiciones de conservación de masa deben ser adoptadas:

Fondo no expuesto

$$\int_0^l (h + \Psi) dx = lh \quad 1.4.14.$$

Fondo expuesto

$$\int_{x_0}^l (h + \Psi) dx = lh \quad 1.4.15.$$

Asumiendo que

$$\frac{\tau^{(F)}}{\rho g} = k_1 \quad \text{y} \quad \frac{\tau^{(B)}}{\tau^{(F)}} = k_2 \quad 1.4.16.$$

La ecuación 1.4.13. puede ser escrita de la forma:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{kV_w^2}{g(\Psi + h)} \quad 1.4.17.$$

En donde, $k = k_1(1 - k_2)$, $k_1 = 3 \times 10^{-6}$, $k_2 = 0.1$

El punto en el cual $\Psi=0$, esta situado a una distancia x_0 de la base del muro, por lo tanto.

$$\frac{x_0}{l} = 1 - \frac{\Psi_{\max}^2 + 2\Psi_{\max}h}{2kV_w^2l} \quad 1.4.18.$$

Las soluciones de las ecuaciones 1.4.17 y 1.4.18 son presentadas en tablas por Bretschneider (1967). A fin de incluir algunos cambios en la profundidad y ancho de base, se introduce el llamado factor N, así:

$$\frac{d\Psi}{dx} = N(x) \frac{kV_w^2}{g(\Psi + h)} \quad 1.4.19.$$

El factor $N(x)$ es una función de la distancia bajo el canal, que cambia la profundidad y espesor del canal. Aplicando esta idea a un canal de pendiente de fondo constante como:

$$h = h_0 - m x \quad 1.4.20.$$

y un espesor que varía linealmente

$$b = b_0 - sx \quad 1.4.21.$$

Donde m es la pendiente del fondo y s es la pendiente donde converge en uno de los lados. Bajo la consideración que $\Psi/h < 1.0$, el factor N es: (Bretschneider, 1967)

$$N = 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{7}{12}m + \frac{1}{8}m^2 - \frac{9}{320}m^3 + \frac{7}{160}m^4 - s \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{120}m^2 + \frac{1}{2120}m^4 \right) \right] \quad 1.4.22.$$

En un caso más general, cuando los efectos cuadráticos o no lineales son importantes, debe ser usado un método numérico. Estas soluciones analíticas pueden ser obtenidas para áreas con formas geométricas simples.

Adoptando un sistema coordenado normal a la línea de costa, como se muestra en la Figura 1.17, la profundidad del agua es linealmente variable, $h(x) = h_0 (1 - x / l)$.

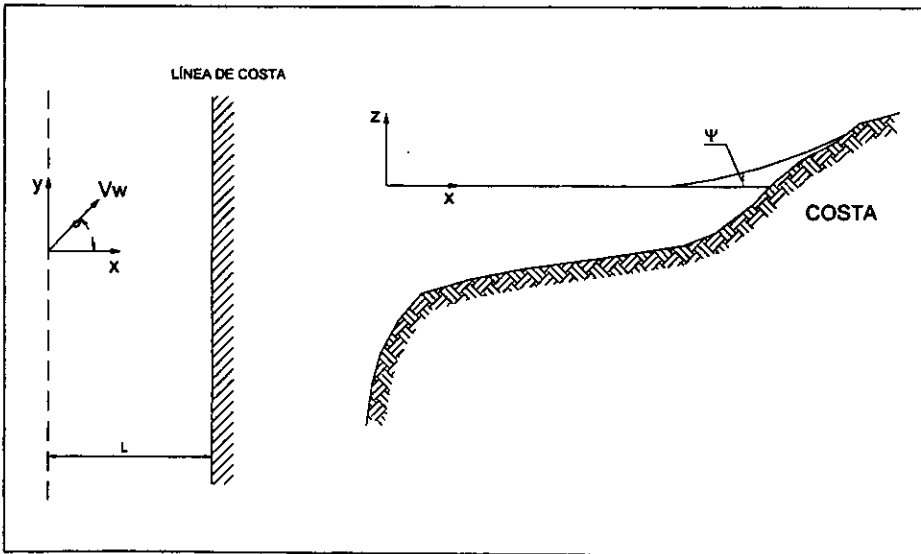


Figura 1.17 Sistema coordenado normal a la línea de costa.

Por lo tanto la ecuación 1.4.17. se puede escribir de la siguiente forma.

$$(h + \Psi) \frac{d(\Psi + h)}{dx} - (h - \Psi) \frac{dh}{dx} = \frac{kV_w^2}{g} \quad 1.4.23.$$

donde: $dh / dx = -h_0 / l$

Separando variables en la ecuación 1.4.23, se obtiene

$$-(h + \Psi) \left[\frac{h_0^2}{l} \left(\frac{h + \Psi}{h_0} - \frac{kV_w^2 l}{gh_0^2} \right) \right]^{-1} d(\Psi + h) = dx \quad 1.4.24.$$

resolviendo

$$l \cdot \left[\left(B - \frac{h + \Psi}{h_0} \right) - B \ln \left(\frac{h + \Psi}{h_0} - B \right) \right] = x + C \quad 1.4.25.$$

donde: $B = \frac{kV_w^2 l}{gh_0^2}$

La constante de integración C es evaluada para las condiciones en que $x=0$ y la sobre elevación Ψ es igual a cero.

Así la ecuación 1.4.25. resulta:

$$\frac{\Psi(x)}{l} = \left(1 - \frac{h + \Psi}{h_0} \right) - B \ln \left(\frac{h + \Psi}{h_0} - B \right) \quad 1.4.26.$$

Un análisis similar se realiza para la constante de profundidad h_0 donde se obtiene

$$\frac{\Psi}{h_0} = \sqrt{1 + 2B \frac{x}{l}} - 1 \quad 1.4.27.$$

La Figura 1.18 muestra el efecto de la pendiente de fondo en la Marea de Tormenta. Si se tiene una pendiente suave la Marea de Tormenta puede tener una gran altura. Este efecto es debido a la relación que existe entre la pendiente de fondo y la profundidad local. Ver ecuación 1.4.17.

Las soluciones de las ecuaciones 1.4.26. y 1.4.27. son apropiadas para zonas con áreas no muy grandes, donde la fuerza de Coriolis puede ser despreciada. Un caso más general en cuando el viento forma un ángulo θ con la costa entonces se requiere la fuerza de Coriolis para compensar el gradiente hidrostático. Para simplificar el problema se considera que el flujo en la costa y los flujos que llegan, están en equilibrio. El sistema del viento es uniforme en la dirección Y, bajo estas condiciones, la solución analítica, la cual también incluye el esfuerzo cortante en la pendiente del fondo, toma la forma (Dean and Darlymple, 1984).

$$\frac{x}{l'} = \left(1 - \frac{h + \Psi}{h_0}\right) - B' \ln \left(\frac{h + \Psi - B'}{h_0 - 1 - B'} \right) \quad 1.4.28.$$

en donde:

$$B' = \frac{kV_w^2 l'}{gh_0^2} \quad \text{y:} \quad l' = l * \left(1 - f \sqrt{\frac{8C_D \sin\theta}{f_c} \frac{V_w l}{gh_0}}\right)^{-1} \quad 1.4.29.$$

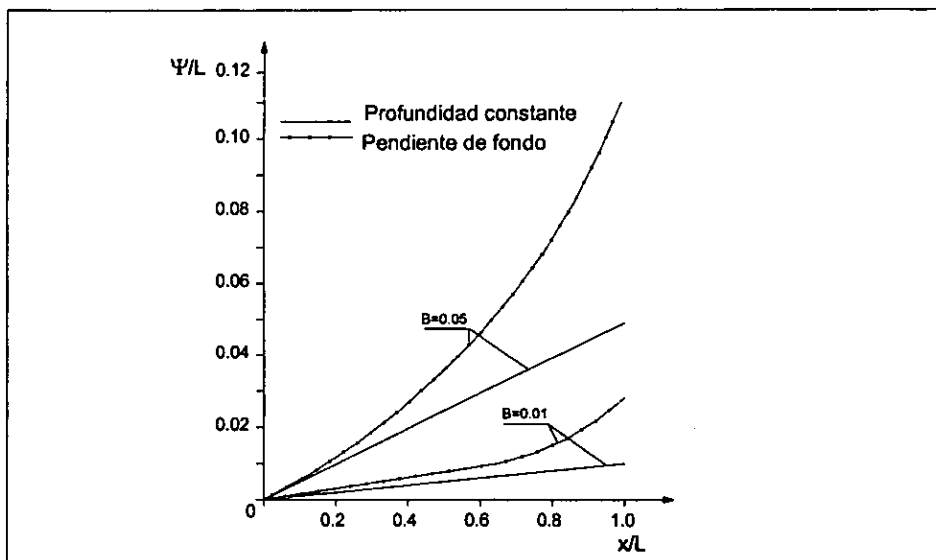


Figura 1.18 Influencia de la pendiente de fondo en la altura de las Mareas de Tormenta

Donde f - es el coeficiente de Coriolis, f_c - es el factor de fricción de Darcy-Weisbach el cual fue introducido del esfuerzo cortante del fondo en la dirección Y . La solución de la ecuación 1.4.28. es exactamente la misma a la solución para la Marea de Tormenta pero, sin la fuerza de Coriolis, excepto que l es remplazada por l' . Así, la fuerza de Coriolis modifica la pendiente de fondo.

El método de estudio para pronosticar Mareas de Tormenta para un estado de mar real se realiza a través de modelos numéricos. La región bajo consideración es representada por una red de áreas elementales las cuales se aproximan a la línea de costa actual y con la batimetría existente. Al final se debe notar que el nivel medio del mar por si mismo no es constante.

Ejemplo. Considérese el siguiente caso, donde la velocidad del viento es de 200 km/hr y las condiciones físicas son las siguientes:

Asumiendo que el área es pequeña, la fuerza de Coriolis se puede despreciar.

$$\begin{array}{ll} V_w = 200 \text{ km/h} & h = 1 \text{ m} \\ V_w = 55.56 \text{ m/s} & L = 1 \text{ m} \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2 & h_o = 2.5 \text{ m} \quad \Phi = 15 \quad \text{Seno } \Phi = 0.2588 \\ f_c = 0.0050 & C_d = 0.0047 \quad f = 1 \end{array}$$

Calculando los términos de la ecuación 1.4.28. y 1.4.29. resulta

$$V_w L / (g h_o) = 2.2652$$

$$b = 1.3883 \quad L' = -0.4662 \quad B' = -0.0289 \quad x = 0.5$$

Dando valores a Ψ hasta igualar el primer término con el segundo; $\Psi = 4.25 \text{ m}$

$$\text{segundo término de la ecuación. 1.4.24.} = -1.0789 \quad x/L' = -1.0725$$

Si se compara el resultado de la sobre marea de 4.25 m, con la escala de Saffir-Simpson mostrada en la **Tabla 2**, donde los vientos de 178-210 km/hr provocan una marea de tormenta de 2.5-4.0 m por lo que se puede concluir que las ecuaciones 1.4.24. y 1.4.25. dan una buena aproximación para evaluar este fenómeno.

Categoría	Presión central (mb)	Vientos (K/h)	Elevación de la marea de tormenta (m)	Características
Perturbación Tropical	1008.1 a 1010			Ligera circulación de los vientos
Depresión Tropical	1004.1 a 1008	<62		Localmente destructivo
Tormenta Tropical	985.1 a 1004	62.1 a 118	1.1	Presenta efectos destructivos
Huracán categoría 1	980.1 a 985	118.1 a 154	1.5	Altamente destructivo
Huracán categoría 2	965.1 a 985	154.1 a 178	2.0 a 2.5	Altamente destructivo
Huracán categoría 3	945.1 a 965	178.1 a 210	2.5 a 4.0	Extremadamente destructivo
Huracán categoría 4	920.1 a 945	210.1 a 250	4.0 a 5.5	Extremadamente destructivo
Huracán categoría 5	< 920	>250	> 5.5	El más destructivo

Tabla 2. Escala de Saffir-Simpson

2. EL OLAJE. GENERALIDADES E HIPÓTESIS BÁSICAS

2.1 Introducción.

Rara vez se puede encontrar un cuerpo de agua abierto a la atmósfera que no tenga oleaje sobre su superficie. Esas olas son una manifestación de las fuerzas que actúan en el fluido, tendiendo a deformarla contra la acción de la gravedad y la tensión superficial, las cuales actúan de forma conjunta para mantener un nivel de la superficie del fluido.

Por tanto el oleaje requiere una fuerza de algún tipo, tal como sería la causada por el viento o el impacto causado por la caída de una piedra sobre el agua, para crearlo. Una vez que éstas son generadas, las fuerzas gravitatorias y la tensión superficial permiten su propagación, de la misma manera que la tensión sobre una cuerda permite que ésta vibre.

La importancia del oleaje no debe ser subestimada. En la costa, este puede ser el origen del movimiento de arena a lo largo de la playa, causado por la erosión o daño a estructuras durante una tormenta. En el agua, las plataformas petroleras deben ser capaces de soportar severos huracanes sin ser destruidas, y además, todas las embarcaciones están sujetas a su acción.

El oleaje real que se produce en el área de generación es un fenómeno extraordinariamente complejo. Este tipo de oleaje no es repetitivo en el espacio ni en el tiempo. Dada la altura de una ola en un punto determinado no es posible predecir la altura de la ola en ese mismo punto. Por lo complejo del fenómeno, su irregularidad y variabilidad, no puede ser representado por el modelo sencillo de una onda y sólo es razonable abordarlo por métodos estadísticos, considerando el oleaje como un fenómeno aleatorio.

Se llama área de generación aquella región donde existe transferencia de energía del viento hacia la superficie del mar. Allí el fenómeno es completamente aleatorio. El oleaje se propaga en diferentes direcciones aunque la dirección dominante es la dirección del viento. Conforme se desarrolla el proceso y se propaga, las olas generadas se superponen a las olas locales y al acercarse a la plataforma costera las ondas sufren un proceso de refracción, soldado y filtrado, cuyo efecto combinado hace de la superficie caótica algo más simple, produciéndose fenómenos que presentan cierta periodicidad.

El primer intento contemporáneo de predicción de las características de las ondas aleatorias se debe a los trabajos realizados por Svedrup y Munk durante la Segunda Guerra Mundial, como parte de la preparación del desembarco aliado en las costas de Normandía, el día D. Parte de estos trabajos fueron puestos a disposición al público hasta 1947. Un notable adelanto respecto a ellos fue el trabajo de Bretschneider (1952-1957).

Los trabajos de Newman (1953) y Pierson (1954) introducen el concepto de presentación espectral de las ondas oceánicas en el dominio de la frecuencia. A estos siguieron estudios de análisis estocástico de las ondas oceánicas, Pierce(1957).

En los estudios de Rice (1944-1945) se desarrollaron las relaciones analíticas entre energía espectral y probabilidad de amplitud de onda en un proceso gaussiano aleatorio, aplicado al campo de las comunicaciones. Este trabajo pionero permitió a través del análisis espectral hacer una evaluación de los diferentes parámetros (promedio y altura característica de la onda) características de un estado de mar. En las últimas décadas el número de trabajos, sobre todo de aplicación ha aumentado enormemente, sin embargo, pocos son los que tratan modelos estadísticos y estocásticos, aparte de los de Pierson (1955), Borgman (1972) y Battjes (1977).

2.2 Tipos de oleaje

Las características de las olas dependen de factores muy variados, como el viento, que estén dentro del fetch o que no estén dentro del área de generación. Dentro de la enorme variabilidad de estados conviene caracterizar dos tipos extremos. Las palabras inglesas SEA y SWELL han sido aceptadas para su denominación.

2.2.1 Oleaje SEA

Este tipo de oleaje se produce en la zona de generación en altamar. Allí se aprecian muy pocas veces crestas de cierta longitud y no existen periodos definidos. Se caracteriza por la irregularidad, por la superficie líquida caótica, multitud de direcciones de avance que no producen crestas ni senos definidos, carentes de periodicidad.

En el estado SEA se presentan claramente dos características:

- Asimetría
- Apuntalamiento (gran peralte)

Con viento fuerte pueden formarse verdaderas montañas de agua en cualquier punto, las cuales a su vez soportan miles de protuberancias menores. En este tipo de oleaje no pueden medirse periodos ni longitudes de onda. Las alturas de las olas son impredecibles. Dada una ola de una altura determinada la siguiente puede ser mucho más pequeña o mucho mayor.

2.2.2 Oleaje SWELL

Cuando la ola avanza y abandona el área de generación se presentan tres fenómenos en ella:

- Pierde energía pues la onda viaja a expensas de su propia energía. (Decay).

- Sufre una doble dispersión:

Dispersión angular pues la ola se dispersa en todas direcciones.

Dispersión radial pues como la velocidad es función directa del período, en una dada dirección las ondas más largas viajan más rápido. Se produce pues un filtrado de olas.

- A estos fenómenos anteriores hay que adicionar el fenómeno de soldadura. Las ondas de períodos cercanos se sueldan en largas crestas de onda, lo que hace que la superficie caótica del SEA se vaya simplificando. Al envejecer la onda y sobre todo al abandonar el área de generación van tendiendo a un oleaje de tipo SWELL.

Esto se va acentuando sobre la plataforma costera, en profundidades reducidas donde a los fenómenos anteriormente citados, se agrega la refracción que hace que las ondas tiendan a progresar en forma paralela a las batimétricas.

El oleaje que se acerca a la costa es, pues, más regular, se forman frentes de cresta largas, hasta varios centenares de metros y el período y la longitud entre olas sucesivas difiere poco. Surge una periodicidad, las direcciones no son tan dispersas sino que existen direcciones predominantes, y se puede decir entonces que el fenómeno presenta cierto orden.

2.3 Parámetros característicos del oleaje y clasificación según los mismos.

Supóngase un punto en la superficie del mar en el que está registrando la variación del nivel a lo largo del tiempo. El registro obtenido tendrá un aspecto parecido al de la **Figura 2.1**, en el cual se han representado los términos más comunes usados para definir las oscilaciones de corto período (uno a treinta segundos) de la superficie del mar.

Si se define como:

- $\eta(t)$ = al desplazamiento vertical de la superficie libre del agua con respecto al nivel medio del mar (N.M.M.)
- η_{\max} = a los desplazamientos verticales máximos o crestas, que pueden ser positivas (ξ_1) o negativas (ξ_2).
- η_{\min} = a los desplazamientos verticales mínimos o senos.
- T = período entre pasos ascendentes.
- T_c = período entre dos crestas sucesivas

- a = amplitud de onda
- H = altura de ola

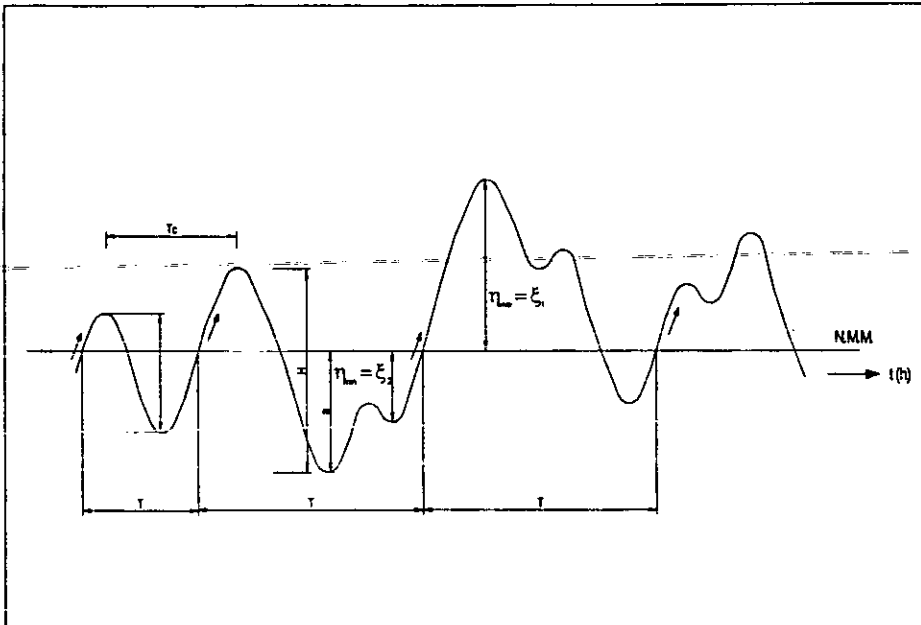


Figura 2.1 Descripción de los parámetros del oleaje bajo el criterio de pasos ascendentes.

Para especificar una ola, existen cuatro métodos ampliamente utilizados, "zero up-crossings" o de pasos ascendentes por el nivel medio, "zero downcrossings" o pasos descendentes por el nivel medio, pasos sucesivos por crestas y pasos sucesivos por valles. Sin embargo, y a fin de ser consistentes a lo largo de este trabajo, en adelante siempre se hará referencia al primero de ellos.

En la naturaleza, la forma del oleaje raramente es la misma de una ola a la otra, ni tampoco se propaga en la misma dirección. Si un instrumento de medición de la superficie libre del mar, fuese situado sobre una plataforma en el del océano, entonces se obtiene un registro como el que se muestra en la **Figura 2.2**.

Este estado de mar puede ser visto como una superposición de un gran número de ondas senoidales viajando en diferentes direcciones. Por ejemplo, si se consideran dos ondas senoidales y su suma. Este concepto de superposición de componentes, es el que permite el uso del análisis de Fourier y las técnicas espectrales para describir un estado

de mar. Desgraciadamente, dado el carácter aleatorio en los estados de mar, deben usarse técnicas estadísticas.

Afortunadamente, las olas de gran magnitud y aquellas que se propagan en aguas poco profundas, aparentan ser más regulares y menos aleatorias que las de pequeña magnitud y las que viajan en aguas en aguas muy profundas.

Es sorprendente la precisión de la teoría lineal o teoría de ondas de pequeña amplitud, manteniendo hasta hoy en día una gran popularidad. Las ventajas que esta teoría presenta por su facilidad en el uso, en contraposición de teorías no lineales, es que permite por sí misma su superposición y otros manejos más complejos, más aún, la teoría lineal es la piedra angular de otras teorías más complejas.

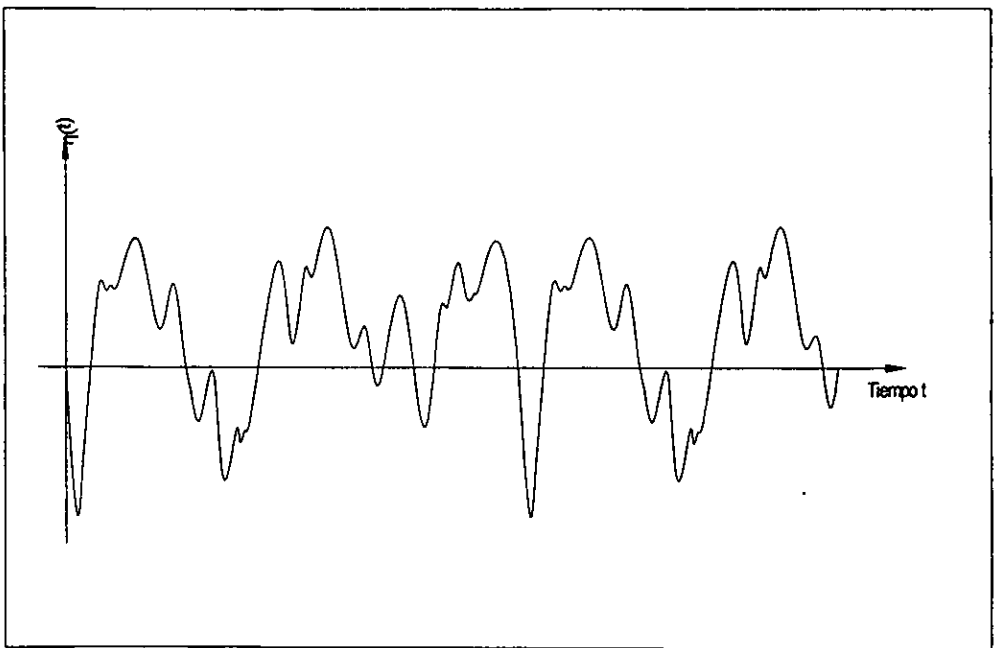


Figura 2.2 Ejemplo de un posible registro de oleaje

2.4 El oleaje como proceso estocástico.

Considérese el oleaje en un punto en la superficie del mar como un fenómeno aleatorio caracterizado por la función $\eta(t)$, desplazamiento de la superficie libre con respecto al N.M.M. Un resultado del experimento, es decir una realización, no es un número sino una función $\eta(t)$ como la de la Figura 2.1. se trata pues de un proceso estocástico.

Una realización (o función muestra) será una función determinada, resultado de una observación o medición y será denotada por $\eta_k(t)$.

Si se observa en un instante determinado, t_i , es claro que $\eta(t_i)$ es una variable aleatoria. Si se consideran n instantes, t_1, t_2, \dots, t_n , se puede hablar de una variable n -dimensional $\eta(t_1, t_2, \dots, t_n) = (\eta(t_1), \eta(t_2), \dots, \eta(t_n))$. Pues bien, el proceso $\eta(t)$ puede considerarse definido si para cualesquiera n instantes, t_1, t_2, \dots, t_n se conoce la función de distribución:

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{Prob} [\eta(t_1) \leq x_1, \eta(t_2) \leq x_2, \dots, \eta(t_n) \leq x_n] \quad 2.1$$

De la variable aleatoria n -dimensional $\eta(t_1, t_2, \dots, t_n)$.

Estas distribuciones deben satisfacer las siguientes condiciones:

1. Condición de simetría

$$F_{t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_n}}(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad 2.2$$

Donde j_1, j_2, \dots, j_n es cualquier permutación de los índices $1, 2, \dots, n$.

2. Condición de compatibilidad

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, x_m, \dots, \infty) = F_{t_1, t_2, \dots, t_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad 2.3$$

Para cualquier t_{m+1}, \dots, t_n ; si $n > m$.

Para tener definido el proceso $\eta(t)$, sería necesario conocer todas las posibles funciones de distribución (2.1) para cualquier η . Sin embargo, el estudio de estos procesos suele simplificarse, mediante la llamada teoría de la correlación, que tiene en cuenta exclusivamente los dos primeros momentos del proceso:

El valor medio

$$m(t) = E \eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_1(x) \quad 2.4$$

La función de correlación (o autocorrelación)

$$B(t,s) = E \eta(t) \eta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 dF_{t,s}(x_1, x_2) \quad 2.5$$

Donde E denota el operador "esperanza matemática".

El valor medio y la función de correlación no especifican el proceso $\eta(t)$. Sin embargo la teoría de correlación es, actualmente, la única teoría suficientemente desarrollada para permitir aplicaciones prácticas. Además, su valor crece si se tiene en cuenta el hecho de que los procesos que se encuentran en la práctica, son comúnmente normales (Gaussianos), es decir que todas las distribuciones (2.1) son normales. Para procesos $\eta(t)$ normales el valor medio y la función de correlación definen el proceso completamente.

No obstante haber restringido al uso de los dos primeros momentos, todavía resulta el problema prácticamente inabordable. Con el objeto de simplificar el proceso estocástico $\eta(t)$ que constituye el oleaje a un nivel de complejidad abordable técnicamente, es necesario admitir dos hipótesis estadísticas:

2.4.1. El oleaje como un proceso estacionario

Un proceso $\eta(t)$ es estacionario si todas las funciones de distribución (2.1) de dimensión finita, que definen el proceso, permanecen iguales al trasladar el grupo completo de puntos t_1, t_2, \dots, t_n a lo largo del eje de tiempos un intervalo cualquiera de tiempo τ .

Es decir, sí:

$$F_{t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_n+\tau}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad 2.6$$

Para cualquier n , τ , t_1, t_2, \dots, t_n .

Un fenómeno físico puede decirse estacionario, si las condiciones externas que influyen en él permanecen constantes durante un cierto período. En el caso del oleaje, a este período, durante el cual, y debido a la inercia del fenómeno, existe un cierto equilibrio entre las fuerzas que intervienen en el proceso, permaneciendo su manifestación aproximadamente estacionaria, se le llama **estado de mar**.

Admitido el carácter estacionario del proceso $\eta(t)$, se deduce que el valor medio es una constante:

$$m(t) = m \quad 2.7$$

y la función de correlación depende sólo de la diferencia $\tau = t - s$.

$$B(t,s) = R(\tau) \quad 2.8$$

2.4.2. El oleaje como proceso ergódico

En general para estimar la media μ y la función de correlación $R(\tau)$ de un proceso estocástico estacionario, se debería tomar un gran número de muestras, realizaciones, $\tau_1(t), \tau_2(t) \dots \tau_n(t)$ y a partir de ellas estimar m y $R(\tau)$.

La hipótesis de ergodicidad, aplicable a la mayor parte de los procesos estacionarios que se encuentran en la práctica, permiten calcular μ y $R(\tau)$ a partir de una sola realización. El teorema de ergodicidad puede enunciarse como sigue:

Si $\tau(t)$ es un proceso estocástico estacionario que satisface ciertas condiciones, entonces:

$$m = E \eta(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt \quad 2.9$$

$$R(\tau) = E \eta(t) \eta(t + \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) \eta(t + \tau) dt \quad 2.10$$

La hipótesis de ergodicidad permite pues, sustituir los promedios espaciales de realizaciones por promedios temporales sobre una sola realización.

La descripción de un estado de mar a partir de un único registro, (realización temporal, $\eta_1(t)$) se basa en admitir que se trata de un proceso estacionario y ergódico.

Puede demostrarse que todo proceso estocástico estacionario $\eta(t)$, puede ser aproximado de una forma arbitrariamente precisa por una combinación lineal de oscilaciones armónicas del tipo: $Ae^{i\sigma t}$, donde A es una variable aleatoria compleja y σ una constante real (frecuencia angular, $2\pi f$). Este hecho constituye la base de la llamada representación espectral de un proceso estacionario.

Kinchin (1934) demostró que la función de correlación de cualquier proceso estocástico estacionario puede representarse por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\Phi(\sigma) \quad 2.11$$

Donde $\Phi(\sigma)$ es llamada función de distribución espectral del proceso, es una función acotada, real y no decreciente.

2.5 Modelo Matemático – Estadístico del Oleaje

En 1952, Longuet – Higgins por un lado y Pierson y Marks por otro, propusieron que un registro de los desplazamientos de la superficie libre del mar $\eta(t)$, con respecto al nivel medio, puede representarse por la suma de un gran número de ondas senoidales de diferentes amplitudes y frecuencias y fases aleatorias.

Si no se tuviera en cuenta un parámetro aleatorio, aunque sumásemos infinitas olas de altura, frecuencia y fase diferente, el conjunto constituiría un fenómeno determinista. Es claro, que el oleaje se representa de una forma más aproximada a la realidad, salvo excepciones localizadas, introduciendo una componente aleatoria.

Como se ve se trata de un modelo lineal, como consecuencia no es aplicable en aquellos casos en que la teoría lineal no es válida, como ocurre por ejemplo, con el fenómeno de rotura.

Se define el modelo de fases aleatorias, debido a Rice (1944, 1945), que se aplicará al caso del oleaje a través de las siguientes hipótesis:

1. El desplazamiento de la superficie libre del agua viene dado como la suma de un gran número de ondas senoidales, de la forma:

$$\eta(t) = \sum_i \eta_i(t) = \sum_i a_i \cos(\sigma_i t - \beta_i) \quad 2.12$$

2. Las amplitudes de estas ondas se expresan por:

$$a_{2j+1}^2 = 2S(\sigma_{2j+1})[\sigma_{2j+1} - \sigma_{2j}] \quad 2.13$$

donde $S(\sigma)$ es una función definida en el intervalo $(0, \infty)$, tal que:

- a. $S(\sigma) \geq 0 \quad \forall \sigma$
- b. $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} S(\sigma) = 0$
- c. la integral: $\int_0^{\infty} S(\sigma) d\sigma$ está acotada.

3. La fase β_i es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0, 2\pi)$. Es decir,

$$\text{Prob}[\alpha \leq \beta_{2j+1} < \alpha + d\alpha] = \frac{d\alpha}{2\pi} \quad \text{para } 0 \leq \alpha \leq \alpha + d\alpha \leq 2\pi \quad \text{y cero para el resto.}$$

Puede demostrarse, Rice (1944), (1945) y Pierson (1952), que bajo estas hipótesis el modelo propuesto representa un proceso $\eta(t)$, estacionario gaussiano, es decir, que $\eta(t)$ está normalmente distribuida.

$$\eta(t) = \sum a_{2j+1} \cos(\sigma_{2j+1} t - \beta_{2j+1}) = \sum \sqrt{2S(\sigma_{2j+1})[\sigma_{2j+1} - \sigma_{2j}]} \cos(\sigma_{2j+1} t - \beta_{2j+1}) \quad 2.14$$

Este modelo puede representarse, en forma continua mediante la seudointegral:

$$\eta(t) = \int_0^{\infty} \cos(\sigma t - \beta) \sqrt{2S(\sigma)} d\sigma \quad 2.15$$

La función de correlación del proceso estocástico definido en la ecuación (2.12), admitiendo ergodicidad, resulta:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} \eta(t) \eta(t + \tau) dt \quad 2.16$$

Sustituyendo (2.12) en (2.16), se obtiene:

$$R(\tau) = \frac{1}{2} \sum_1 a_i^2 \cos \sigma_i \tau \quad 2.17$$

ó en forma continua, teniendo en cuenta (2.13),

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} S(\sigma) \cos \sigma \tau d\sigma \quad 2.18$$

Si se analiza la ecuación (2.18), se puede deducir que la función $S(\sigma)$, introducida en la segunda hipótesis del modelo matemático-estadístico del oleaje (2.13), es la función espectral del proceso.

El modelo introducido define a un proceso estocástico estacionario y gaussiano, de media cero, del cual también se admite que es ergódico. Puede demostrarse, Doob (1953) que un proceso estacionario gaussiano es ergódico si y solo si la función de densidad espectral, $S(\sigma)$, es finita para cualquier frecuencia.

2.6. Definición de un estado de mar

Se define como estado de mar aquella situación o período en el cual, y debido a la inercia del fenómeno, existe un cierto equilibrio entre las fuerzas generadoras y las fuerzas restauradoras que intervienen, permaneciendo su manifestación aproximadamente estacionaria.

Se puede definir también el estado de mar como cada una de las "posiciones" de la dinámica del oleaje, las cuales se admite que tienen una variación, o paso de una a otra, suficientemente lenta para poder admitir, durante cierto tiempo que el proceso es estacionario.

En consecuencia, el fenómeno oleaje puede considerarse formado por dos variaciones: una rápida de corto período (segundos), variaciones de fluctuación, durante la cual el proceso es estacionario, y otra variación lenta de largo período, (horas en general), y en la cual evoluciona el estado de mar: variación del estado.

La delimitación de estos períodos se fijará por una solución de compromiso, ya que un estado de mar, por un lado, debe ser suficientemente corto para poder admitir la hipótesis de estacionariedad, y por otro debe ser lo suficientemente largo como para que al tomar una muestra de él albergue el número necesario de olas que posibilite su tratamiento con cierto rigor.

Cuando se registran las variaciones de la superficie libre, con el objeto de obtener muestras estadísticas, lo que se suele hacer es medir durante un período de 10 a 20 minutos (estado de mar) cada hora (o más), y extender los parámetros estadísticos obtenidos de la muestra a la hora de intervalo, con lo cual se acepta tácticamente que la duración del estado de mar es de esa hora.

2.7 Descripción estadística y espectral de un estado de mar

Teniendo en cuenta lo que se ha visto en este capítulo, la línea a seguir en el tratamiento del oleaje puede contemplarse en una doble vertiente. Es decir, que un estado de mar puede estudiarse bajo dos puntos de vista:

Por un lado se pueden considerar las propiedades estadísticas, parámetros y distribuciones de $\eta(t)$ y el resto de los parámetros que definen al oleaje. Esto es, la descripción estadística del estado de mar.

Por otro lado, se puede considerar el estudio del espectro, y sus propiedades, constituyendo la descripción espectral del estado de mar. A partir del espectro, se puede deducir los parámetros del oleaje y se compararán éstos con los obtenidos a través de la descripción estadística.

2.8 Descripción estadística de un estado de mar

2.8.1 La muestra

Considérese como punto de partida que se tiene un registro temporal de la superficie del mar en un punto dado, en principio en profundidades indefinidas con el objeto de eliminar el efecto de contorno, mismo que se ha registrado durante un tiempo determinado de forma continua. Se tendrá, por tanto una del oleaje y se admitirá que este registro representa un estado de mar. Con carácter totalmente general se puede decir que el registro tomado tendrá un aspecto semejante al de la **Figura 2.1**, donde las variaciones en el tiempo con respecto a su nivel medio vienen dadas por $\eta(t)$.

Para definir la altura y el período de ola, se hará uso del criterio de pasos ascendentes por el nivel medio, "zero up-crossing". Este método consiste en identificar dos cortes sucesivos en forma ascendente de superficie libre con el nivel de referencia, con lo cual el máximo desplazamiento entre cresta y valle determinará la altura de ola H ; y el período de la ola T , quedará definido como el tiempo que transcurre entre corte y corte con dicho nivel.

2.8.2 Análisis temporal de la muestra

La duración estándar de un registro de oleaje es normalmente de alrededor de 20 minutos. Si el período medio es de 10 segundos, un registro de oleaje con dicha duración contendrá más o menos 120 olas. Este número de olas se considera suficiente para conocer las características de altura de ola y período a un nivel aceptable.

En un registro de oleaje, los cambios en el estado de mar pueden llegar a ser apreciables si la longitud temporal es mucho mayor. También, el tiempo de procesamiento de un registro aumenta a medida que su longitud es mayor.

La duración de 20 minutos es empleada como un compromiso entre los requisitos de tener un registro corto y a la vez de tener un estado de mar estacionario. Algunos aparatos de medición registran 17 minutos 04 segundos, con lo cual se tienen 2048 datos con una frecuencia de muestreo de 2 datos por segundo. La razón de esto es economizar el tiempo de cálculo para el análisis espectral usando la transformada rápida de Fourier. Sin embargo, en ensayos típicos de laboratorio, casi siempre, los registros de oleaje contienen al menos 200 olas o más, con el objeto de reducir las variaciones estadísticas.

Por otro lado, el intervalo de muestreo debe ser tan pequeño como sea posible. Comúnmente es menor a una décima parte del período de ola significativa, y preferiblemente una vigésima parte. Un intervalo de muestreo más fino no es benéfico, dado que el volumen de datos a procesar sería muy grande sin producir un correspondiente incremento en la información resultante. Un intervalo de muestreo más burdo introducirá problemas dado que se perderían las olas más pequeñas, subestimando los máximos y mínimos de los perfiles de oleaje, y por lo tanto se pueden introducir errores a la hora de evaluar su estadística.

- **Corrección del nivel medio**

Un procedimiento simple para determinar el nivel medio es usar la media aritmética de todos los puntos medios y restarla a todo el registro. Casi siempre, los registros de oleaje contienen la influencia de la variación de la marea, por tanto, es mejor incorporar una corrección lineal o parabólica en el análisis de los datos del oleaje. La ecuación para la corrección lineal del nivel medio es obtenida haciendo uso del método de mínimos cuadrados, tal que:

$$\bar{\eta} = A_0 + A_1 n \quad : n = 1, 2, \dots, N \quad 2.19$$

$$A_0 = \frac{N_2 Y_0 - N_1 Y_1}{N_0 N_2 - N_1^2}, \quad A_1 = \frac{N_0 Y_1 - N_1 Y_0}{N_0 N_2 - N_1^2} \quad 2.20$$

donde

$$Y_r = \sum_{n=1}^N n^r \eta_n, \quad N_r = \sum_{n=1}^N n^r \quad 2.21$$

N denota el número de puntos de la muestra.

La ecuación para la corrección del nivel medio del agua para un cambio parabólico se deduce también con el método de mínimos cuadrados, y se puede expresar como:

$$\bar{\eta} = B_0 + B_1 n + B_2 n^2 \quad : n = 1, 2, \dots, N \quad 2.22$$

donde

$$B_0 = \frac{1}{\Delta} [Y_0(N_2 N_4 - N_3^2) + Y_1(N_1^2 N_3 - N_1 N_4) + Y_2(N_1 N_3 - N_2^2)]$$

$$B_1 = \frac{1}{\Delta} [Y_0(N_2 N_3 - N_1 - N_4) + Y_1(N_0 N_4 - N_2^2) + Y_2(N_1 N_2 - N_0 N_3)] \quad 2.23$$

$$B_2 = \frac{1}{\Delta} [Y_0(N_1 N_3 - N_2^2) + Y_1(N_1 N_2 - N_0 N_3) + Y_2(N_0 N_2 - N_1^2)]$$

$$\Delta = N_0 N_2 N_4 + 2N_1 N_2 N_4 - N_2^3 - N_0 N_2^3 - N_1^2 N_4$$

Si un registro indica la presencia de variaciones de largo período, del orden de minutos, en el nivel medio, se deberá aplicar un filtro numérico, tal y como se verá más adelante.

2.8.3 Método de pasos ascendentes por el nivel medio, máximos y mínimos

El método de pasos ascendentes por cero, de un perfil de oleaje puede ser determinado a través del siguiente criterio:

$$\eta_i \cdot \eta_{i+1} < 0 \quad \text{y} \quad \eta_{i+1} > 0 \quad 2.24$$

donde η_i denota el i ésimo dato de la elevación de la superficie después de la corrección del nivel medio. El tiempo en el cual cruza el nivel medio se determinará por medio de una interpolación lineal entre el tiempo de muestreo de η_i y η_{i+1} . La diferencia temporal de este punto al siguiente paso ascendente define el período.

La condición para definir un máximo en el perfil es:

$$\eta_{i-1} < \eta_i \quad \text{y} \quad \eta_i > \eta_{i+1} \quad 2.25$$

Es conveniente considerar que el tiempo y la elevación máxima deben ser estimados después de ajustar una curva parabólica en función de los tres puntos η_{i-1} , η_i y η_{i+1} , para eliminar el problema de subestimación del máximo real entre dos puntos discretos. La ecuación para el ajuste parabólico se puede expresar como:

$$\eta_{\max} = C - \frac{B^2}{4A} \quad \text{y} \quad t_{\max} = t_i - \frac{\Delta t B}{2A} \quad 2.26$$

donde:

$$A = \frac{1}{2}(\eta_{i-1} - 2\eta_i + \eta_{i+1}) \quad B = \frac{1}{2}(\eta_{i+1} - \eta_{i-1}) \quad C = \eta_i \quad 2.27$$

Para determinar la altura de ola, el punto más alto sobre la elevación de la superficie debe ser encontrada dentro del intervalo entre dos pasos ascendentes. Una vez que este punto es encontrado a lo largo del registro es identificado como η_i , y entonces η_{\max} es estimada por medio de las ecuaciones (2.26) y (2.27), haciendo uso de los puntos adyacentes η_{i-1} y η_{i+1} .

El punto más bajo, o máximo negativo, de la elevación η_{\min} es calculado por medio de un proceso similar, y la altura de ola es calculada como la suma del valor absoluto de η_{\max} y η_{\min} . No obstante que la técnica de ajuste parabólico es empleada, el intervalo de muestreo de los datos debe ser lo suficientemente estrecho con el fin de no introducir errores en la evaluación de la altura de ola.

La correlación entre las alturas de ola y los períodos individuales, $r(H,T)$, puede que no tengan una aplicación inmediata, sin embargo es un parámetro estadístico muy útil.

2.8.4 Parámetros estadísticos

Los parámetros estadísticos más importantes para definir un estado de mar a partir de una serie de tiempo son los siguientes:

La variación del nivel medio de mar, conocido como set-up o set-down, el cual se calcula por medio de la siguiente fórmula:

$$\overline{\eta(t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i \quad 2.28$$

donde

η_i es la elevación de la superficie libre del agua en el tiempo t_i

N es el número de eventos o muestras.

La variación media cuadrática (la varianza) de la superficie del agua, η_{rms}^2 , se evalúa mediante la ecuación:

$$\eta_{rms}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i^2 \quad 2.29$$

La altura media de ola, \bar{H} , y el período medio \bar{T} , se calculan por medio de las siguientes expresiones:

$$\bar{H} = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} H_i \quad 2.30$$

$$\bar{T} = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} T_i \quad 2.31$$

donde

N_0 es el número de olas individuales de todo el registro.

H_i Altura de ola

T_i Período de ola

La altura cuadrática media, H_{rms} , está definida por:

$$H_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} H_i^2} \quad 2.32$$

La falta de oblicuidad o asimetría se encuentra por medio de la siguiente relación:

$$Skw = \frac{1}{N_0 \eta_{rms}^3} \sum_{i=1}^N \eta_i^3 \quad 2.33$$

La media de las alturas (o períodos) $1/n$ valores mayores del registro: $H_{1/n}$, de la cual la altura significativa, $H_s = H_{1/3}$, es un caso particular.

En ocasiones es de interés conocer los estadísticos de orden, es decir el valor del parámetro que es superado sólo en que qN (ó N/n con $q=1/n$) sucesos: X_q .

Y por supuesto, los valores máximos de la muestra, tal como la altura máxima, H_{max} .

2.9. Análisis espectral

La validez del estudio de registro de oleaje a través del análisis de la función de densidad espectral, depende de la precisión con la que haya sido calculada. Se han desarrollado diversas técnicas para mejorar la precisión con la que se estiman los valores espectrales. En muchos casos ésta mejora en el cálculo, significa una pérdida de resolución espectral. La elección del tratamiento al que va a ser sometida la serie es, por tanto, muy subjetiva y en cada caso debe estudiarse la resolución espectral y el nivel de confianza que se desea tener en la estimación de los parámetros.

El modo más común de obtener los valores del espectro es mediante el cálculo de los coeficientes de Fourier de la serie. El algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT), reduce considerablemente el número de operaciones que se requieren para obtenerlos. Se basa en la propiedad de la transformada discreta de Fourier (DFT) que permite calcular la FFT de una sucesión a partir de la DFT de subsucesiones más cortas.

• Intervalo de Muestreo y longitud del registro.

Dado que la resolución es gobernada por la longitud del registro, este debe ser tan largo como sea posible. El intervalo de muestreo recomendado para un análisis de oleaje es de una décima parte a una vigésima parte del período significativo. Una vez que el intervalo de tiempo, ΔT , haya sido seleccionado, la máxima frecuencia, para la cual el espectro puede ser estimado, es fácilmente determinado por:

$$f_c = \frac{1}{2 \Delta t} \quad 2.34$$

La cual es conocida como frecuencia de Nyquist

El intervalo de muestreo determina la máxima frecuencia para la que pueden calcularse los valores espectrales, esto es, la frecuencia de Nyquist. Para un ΔT fijo la duración del registro queda determinada por el número de puntos de la serie, N . El número de puntos deberá elegirse de forma que durante el registro la muestra sea representativa de un estado de mar y, por tanto, la hipótesis de estacionariedad sea aceptable. También deberá tenerse en cuenta que el tiempo de registro determina la resolución espectral. Es deseable que Δf sea suficientemente pequeño para poder distinguir los picos adyacentes del espectro.

- **Corrección del nivel medio**

Al igual que para el análisis temporal, para realizar correctamente un análisis armónico, se debe realizar la corrección del nivel medio. Si el valor medio de la elevación de la superficie libre no es adecuadamente ajustada, o una posible tendencia gradual en el cambio del nivel medio no es corregida, se introducirá en el espectro una distorsión que se denomina solapamiento o aliasing.

- **Corrección de discontinuidades**

Resulta difícil calcular de forma exacta la función de densidad espectral, si se dispone de muestras de duración finita. El efecto de esta limitación sobre el espectro, es la cesión de muestras de energía a las frecuencias próximas. Por esta razón es práctica común aplicar a la serie una ventana que elimine las discontinuidades al principio y al final del registro. Esta operación consiste en multiplicar la muestra por una profundidad de peso, $b(t)$, de forma que se atenúen las oscilaciones de los extremos de la serie.

Existen varios tipos de ventanas, de los cuales los más importantes son el trapezoidal y el cosenoidal, los cuales se pueden expresar de la siguiente forma:

a) Ventana tipo trapezoide.

$$b_1(t) = \begin{cases} t & : 0 \leq t. \leq l \\ 1 & : 1 \leq t. \leq N-l \\ N-t./l & : N-1 \leq t. \leq N \end{cases} \quad 2.35$$

b) Ventana tipo coseno

$$b_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\cos \pi t}{1} \right] & : 0 \leq t. \leq 1 \\ 1 & : 1 \leq t. \leq N-1 \\ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\cos \pi (N-t.)}{1} \right] & : N-1 \leq t. \leq N \end{cases} \quad 2.36$$

donde, normalmente, el valor $\epsilon = 0.1 N$

Al aplicar una ventana al registro, la energía total decrece y los valores espectrales estimados son menores que los reales, por lo que deben multiplicarse, cuando se evalúe la función de densidad espectral, por un factor de corrección β dado por:

$$\beta = \frac{N}{\sum_{n=1}^N [b(t_n)]^2} \quad 2.37$$

• Evaluación de los coeficientes de Fourier

Actualmente, la técnica de transformada de Fourier es ampliamente utilizada para este fin, sin embargo, los algoritmos convencionales presentan una limitación en cuanto a que la longitud del registro debe ser una potencia de 2, esto es $N=2^m$. No obstante lo anterior, se procura que la serie de datos de oleaje cumpla con dicha condición, o el número de datos es ajustado, después eliminando el exceso de datos de la parte inicial o final del registro o añadiendo un cierto número de ceros en los datos.

La adición de ceros es normalmente realizada en la parte final del registro, después de la aplicación de una ventana, en el caso que esta sea aplicada. El problema fundamental de la adición de ceros es que reduce el nivel de la energía total. La corrección a este problema se puede tratar de forma análoga al de la función ventana.

Recordando un poco, la transformada discreta de Fourier se puede expresar como:

$$S(f_n) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \eta(t_k) e^{-2\pi k n / N} \quad 2.38$$

mientras que la transformada inversa de Fourier:

$$\eta(t_k) = \frac{1}{\Delta f} \sum_{n=0}^{N-1} S(f_n) e^{-2\pi kn/N} \quad 2.39$$

Existen diversos algoritmos de la transformada rápida de Fourier, entre los cuales se puede consultar por ejemplo Newland (1975) o Bendat et al. (1986).

- **Suavizado espectral**

Los valores espectrales estimados fluctúan en torno a los valores del espectro real. Para atenuar estas oscilaciones es posible suavizar el espectro con una función de peso $W(f)$ de la siguiente forma:

$$\bar{S}(f) = \int_0^{\infty} S(f_1) W(f_1 - f) df_1 \quad 2.40$$

$W(f)$ debe estar normalizada, esto es:

$$\int_0^{\infty} W(f) df = 1 \quad 2.41$$

En la práctica, para cada frecuencia, el espectro alisado se calcula como un promedio ponderado de los valores espectrales de las frecuencias próximas a ella:

$$\hat{S}(f) = \sum_{j=k-m}^{j=k+m} W(f_k - f_j) S(f_j) \quad 2.42$$

Cuando el registro es suficientemente largo algunos tramos del mismo pueden considerarse representativos del estado de mar que se está estudiando. Es posible, entonces, elegir varios segmentos de la misma longitud y promediar las estimaciones obtenidas para cada uno de ellos:

$$\hat{S}(f_j) = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n_1} S_n(f_j) \quad 2.43$$

siendo n_1 el número de segmentos tomados.

- **Estimación de la precisión**

Los valores espectrales obtenidos sometiendo la muestra $\{\eta(t_i)\}_{i=1}^N$ al proceso descrito anteriormente, son variables aleatorias que siguen una distribución chi cuadrada con

$\nu = 2n_s \Delta t$ grados de libertad, χ_v^2 siendo $1 = [B_e N \Delta t]$ denota la parte entera de un número real y B_e es el ancho de banda efectiva del filtro $W(f)$:

$$B_e = \frac{1}{\int_0^\infty W(f)^2 df} \quad 2.44$$

Aún en el supuesto de que el proceso estocástico fuera ergódico, en cuyo caso cualquier muestra representaría perfectamente las infinitas funciones del conjunto, el cálculo de $S(f)$ se ha hecho a partir de una muestra finita, por tanto, los valores obtenidos sólo pueden considerarse como estimaciones de los valores reales.

El estudio de la estimación de la precisión de los valores obtenidos, se hace en términos de los intervalos de confianza de la variable aleatoria χ_v^2 . Esto es, se considera un intervalo $(m-\epsilon, m+\epsilon)$, siendo $m = \nu$ la media de la distribución χ_v^2 y ϵ una cantidad positiva. A partir de la función de densidad de probabilidad χ_v^2 es posible determinar el valor de ϵ para la cual puede afirmarse que el valor real del espectro, se encuentra entre esos límites con una probabilidad dada.

La relación existente entre la varianza, σ^2 y el valor medio, μ , de una variable aleatoria que sigue la distribución es χ_v^2 :

$$\frac{\sigma}{m} = \sqrt{\frac{2}{\nu}} \quad 2.45$$

Si el cociente σ/m es pequeño se puede confiar en que el cálculo realizado sea preciso, por tanto, cuanto mayor sea el número de grados de libertad, mayor será la confianza que se tenga en los valores espectrales estimados se aproximen al valor real.

Se ha visto que la precisión de los cálculos está dada por el número de grados de libertad y la resolución espectral. Estos aspectos dependen, aunque de diferente forma, de los siguientes parámetros:

- Longitud de la muestra, N
- Número de segmentos, n_s
- Número de puntos de cada segmento, n_p
- Anchura de la banda efectiva del filtro B_e
- Intervalo de muestreo Δt

Deberá, por tanto, elegirse el proceso de análisis óptimo para cada caso en particular.

2.9.1 Parámetros espectrales.

Los parámetros comúnmente utilizados para definir un espectro dado están representados en la Figura 2.3.

Todos los parámetros espectrales se calculan a partir de sus diferentes momentos. El momento de orden "n" se define mediante la siguiente expresión:

$$m_n = \int f^n S(f) df \quad 2.46$$

donde $S(f)$ es la función de densidad espectral.

Cartwright y Longuet-Higgins en 1956 proponen un parámetro para describir el ancho espectral.

$$\varepsilon = \left[1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4} \right]^{1/2} \quad 2.47$$

Si el espectro es de banda angosta ε tiende a 0; si por el contrario, el espectro es de banda ancha ε tiende a 1.

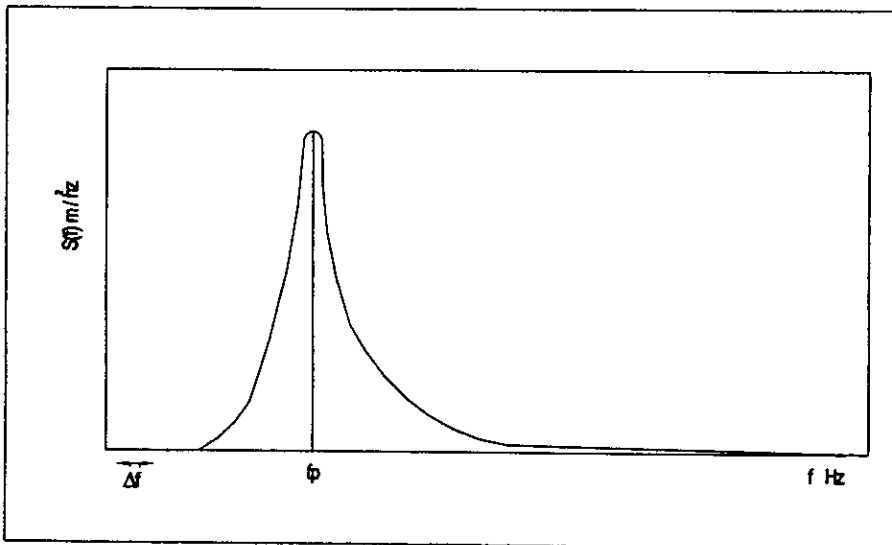


Figura 2.3 Representación espectral de un estado de mar

Este parámetro tiene el inconveniente de depender del momento de cuarto orden. La estimación del momento de cuarto orden es muy susceptible a los valores que se tienen en las altas frecuencias y se ha encontrado que para espectros que definen un estado de mar este parámetro no es representativo pudiendo inducir fuertes errores. Para obviar

este problema, Longuet-Higgins propuso otro parámetro de ancho espectral, el cual depende de momentos de orden inferior.

$$v = \left[\frac{m_0 m_2}{m_1^2} - 1 \right]^{1/2} \quad 2.48$$

Otro parámetro que define la forma del espectro en la agudeza de pico Q_p , propuesto por Goda en 1970.

$$Q_p = \frac{2}{m_0} \int_0^{\infty} f(S(f)^2) df \quad 2.49$$

Goda señala (1985) que Q_p es cercano a 2 para olas generadas por el viento.

Además, se puede también estimar el período medio de las olas desde el espectro. Existen dos fórmulas para estimar el período medio:

$$T_{01} = \frac{m_0}{m_1} \quad 2.50$$

$$T_{02} = \sqrt{\frac{m_0}{m_2}} \quad 2.51$$

3 ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE UN ESTADO DE MAR

3.1 Distribución normal de la superficie libre

Se acepta generalmente que la variación de la superficie del agua en el mar sigue una distribución de probabilidad gaussiana, esto bajo la suposición que las componentes de las fases son arbitrarias pero uniformemente distribuidas en el intervalo $(\pi, -\pi)$. El modelo gaussiano considera implícitamente que existe una simetría alrededor del nivel medio del agua, lo cual corresponde a asumir que la media es igual a cero y, por tanto, su función de densidad será:

$$p(\eta) = \frac{1}{\eta_{rms} \sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\eta_{rms}^2}\right)} \quad 3.1$$

donde $p(\eta)$ es la función de densidad

La función de densidad de probabilidad de la elevación de la superficie libre es simétrica alrededor de la elevación media, donde la función es máxima. Por tanto, la probabilidad de tener una elevación positiva en particular es la misma que para la elevación negativa.

3.2 Distribuciones de alturas de ola

El poder estimar la altura de ola es de gran trascendencia para todas las obras costeras y para la navegación marítima en general. La altura de las olas es uno de los parámetros de mayor importancia para el diseño de estructuras y para evaluar el grado de seguridad que presentan estructuras fijas y móviles.

Rice, (1944, 1945) encontró una función de distribución de la altura de crestas para señales aleatorias de origen electromagnético. Cartwright y Longuet-Higgins ampliaron los estudios de Rice y demostraron que la distribución de Rayleigh (desarrollada para fenómenos eléctricos) podía ser utilizada para describir la distribución de alturas de ola.

Si se tiene un estado de mar de SWELL puro, con un ancho de espectro $\varepsilon = 0$, la descripción de la altura de las olas dada por Rayleigh es exacta.

3.2.1 Distribución de Rayleigh para alturas de ola

Por lo anterior, la distribución de Rayleigh supone que hay una correlación perfecta entre una cresta y el siguiente valle. Es decir si se tiene una cresta grande, el siguiente valle también va a ser grande. La distribución adimensional de alturas de ola, $p(\xi)$, queda definido como:

$$p(\xi) = 2\xi e^{-\xi^2} \quad 3.2$$

donde

$$\xi = \frac{H}{H_{rms}} \quad 3.3$$

En forma adimensional se puede expresar como:

$$P(H) = \frac{2H}{H_{rms}} e^{-\frac{H^2}{H_{rms}^2}} = \frac{H}{4m_0} e^{-\frac{H^2}{8m_0}} \quad 3.4$$

3.2.2 Distribución de Loguet-Higgins (1983) de altura de ola

Loguet-Higgins propone en 1983 una distribución de crestas de ola que se puede aplicar cuando el ancho de banda espectral, v , es diferente de cero. En el caso $v = 0$ se tiene una distribución Rayleigh mientras que en el extremo opuesto con un espectro de banda ancha se tiene una distribución normal truncada en cero.

$$p(H) = \frac{L(v)H \operatorname{Erfc} \left[-\frac{H}{2\sqrt{2m_0v}} \right]}{8m_0v \cdot e^{\frac{H^2}{8m_0}}} \quad 3.5$$

donde

m_0 es el momento de orden cero.

Erfc la función de error complementaria, queda definida como:

$$\operatorname{Erfc} \left(-\frac{H}{2\sqrt{2m_0v}} \right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{H}{2\sqrt{2m_0v}}\right)^2} dH \quad 3.6$$

$$\frac{1}{L(v)} = \frac{1}{2} \left[1 + (1+v^2)^{-1/2} \right] \quad 3.7$$

3.2.3 Distribución de alturas de ola de Tayfun

En 1981 Tayfun propone una ecuación para alturas de olas que está limitada por la rotura de la misma y un parámetro N que combina el estado de mar con la profundidad. En realidad, esta distribución supone que existe una mediana correlación entre la cresta y el siguiente valle.

Es decir si se tiene una cresta grande, el próximo valle tiene alta probabilidad de ser grande, pero existe una pequeña probabilidad de que el valle pueda ser mediano o pequeño.

El parámetro N está relacionado, como se dijo anteriormente, con el estado de mar y es función del período de onda y de la profundidad. Si el parámetro N tiende a infinito, entonces se tiene un estado de mar SWELL y la distribución de Tayfun se iguala a la de Rayleigh.

La distribución propuesta por Tayfun es la siguiente:

$$p(\xi, N) = \xi \int_0^{\infty} \left[u J_0^N \left(\frac{u}{N^{1/2}} \right) J_0(\xi u) \right] du \quad 0 \leq \xi \leq N^{1/2} \quad 3.8$$

$$p(\xi, N) = \xi \left[1 - \frac{4}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{N^{1/2}}{\xi} \right) \right] \int_0^{\infty} \left[u J_0^N \left(\frac{u}{N^{1/2}} \right) J_0(\xi u) \right] du$$

$$N^{1/2} \leq \xi \leq (2N)^{1/2} \quad 3.9$$

donde N es el parámetro de Tayfun que se define como:

$$N = \left(\frac{\pi \tanh(k_0 h)}{7\sqrt{2} k_0 \sqrt{2m_0}} \right) \quad 3.10$$

donde

$$\xi = \frac{H}{H_{rms}} \quad 3.11$$

J_0 es la función de Bessel de orden cero

K_0 es el número de onda asociado a la frecuencia media, el cual se puede obtener de la siguiente ecuación:

$$\frac{\sigma^2 h}{g} = k_0 h \cdot \tanh(k_0 h) \quad 3.12$$

3.2.4 Distribución de alturas de ola de Carter

Carter, en 1981 propone una ecuación para la distribución de alturas de ola, en la cual se asume que no existe ninguna correlación entre crestas y valles consecutivos. Es decir, dada una cresta grande el siguiente valle tiene iguales probabilidades de ser grande, pequeño o mediano.

La probabilidad de excedencia propuesta por Carter es la siguiente:

$$P(H \geq H_0) = 1 - \left(e^{-8 \left(\frac{H_0}{H_s} \right)^2} + 2\sqrt{\pi} \frac{H_0}{H_s} e^{-4 \left(\frac{H_0}{H_s} \right)^2} \operatorname{Erfc} \left[\frac{2H_0}{H_s} \right] \right) \quad 3.13$$

donde la función error, Erfc, se expresa como:

$$\operatorname{Erfc}(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X e^{-u^2} du \quad 3.14$$

Finalmente la expresión (3.13) se puede expresar en forma adimensional como sigue:

$$P(H \geq H_0) = 1 - \left(e^{-8 \left(\frac{H_0}{H_s} \right)^2} + 2 \frac{H_0}{H_s} e^{-4 \left(\frac{H_0}{H_s} \right)^2} \int_0^{\frac{H_0}{H_s}} e^{-\frac{u^2}{4}} du \right) \quad 3.15$$

En un análisis realizado por Green (1994) se llega a la conclusión que en un estado de mar SEA (muy desordenado) la ecuación de Carter es la que representa mejor el fenómeno. En un estado de mar un poco más ordenado (al salir del área de generación y propagarse el oleaje) la distribución de Tayfun es la que mejor se ajusta. Por último en un estado de mar muy ordenado la distribución de Rayleigh puede utilizarse adecuadamente.

3.3 Distribuciones conjunta de período y altura de ola

Durante mucho tiempo no se tomó en cuenta el período de las olas para el diseño de estructuras marinas. En estudios recientes se ha demostrado la importancia del período de las olas en fenómenos tales como el *run-up* o la estabilidad de piezas en un rompeolas, lo que ha generado un interés muy grande sobre el conocimiento de las distribuciones de probabilidad conjuntas de período y de ola.

A continuación se presentan las distribuciones más utilizadas. Vale la pena considerarlas de forma adimensional y dimensional; la forma adimensional permite comparar las diferentes fórmulas y la forma adimensional es de mucho mayor utilidad para cálculos prácticos.

3.3.1 Distribución de Longuet-Higgins (1975)

Longuet-Higgins propuso en 1975 una función de densidad conjunta de alturas de ola y períodos. Esta fórmula se basa en un modelo del oleaje estacionario y gaussiano con espectro de banda estrecha.

Un inconveniente que presenta esta fórmula es precisamente que se basa en un espectro de banda estrecha (oleaje SWELL), y no toma en cuenta la asimetría en la distribución de los períodos de ola que se tiene cuando el espectro es de banda ancha.

La fórmula de Longuet-Higgins (1975) en forma adimensional

$$p(\theta, \eta) = \frac{\theta^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2 + \eta^2}{2}} \quad 3.16$$

donde

$$\theta = \frac{H}{2\sqrt{m_0}} \quad 3.17$$

$$\eta = \frac{T - T_{01}}{vT_{01}} \quad 3.18$$

donde T_{01} es el período medio.

En forma dimensional se tiene:

$$p(H, T) = \left(\frac{H^2}{8v\sqrt{2\pi} vT_{01} m_0^{3/2}} \right) e^{-\frac{H^2}{8m_0} \left(1 + \left(\frac{T - T_{01}}{vT_{01}} \right)^2 \right)} \quad 3.19$$

3.3.2 Distribución de Cavanié et al. (1976)

Cavanié, Arhan y Ezraty propusieron en 1976 otra distribución teórica, también basada en un modelo gaussiano de banda estrecha, pero que si toma en cuenta la asimetría en la distribución de los períodos.

Esta formula presenta una buena concordancia con los datos observados, pero tiene el defecto de utilizar el parámetro de anchura espectral ϵ el cual depende del cuarto momento de la función de densidad espectral. Este momento tiene el inconveniente de estar asociado a la cuarta potencia de la función de densidad espectral y cualquier pequeño error en la distribución resulta muy amplificado, sobre todo para las altas frecuencias.

Distribución Cavanié, Arhan y Ezraty (1976) adimensional

$$p(h, \tau) = \frac{\alpha^3 h^2}{4\sqrt{2\pi}\epsilon(1-\epsilon^2)\tau^{-4}\tau^5} e^{-\frac{h^2(\tau)^4}{8\epsilon^2((\tau^{-2}\tau^2-\alpha^2)^2+\beta^2\alpha^4)}} \quad 3.20$$

donde

$$h = \frac{H}{\sqrt{m_0}} \quad 3.21$$

$$\tau = \frac{T}{\tau T_c} \quad 3.22$$

$$T_c = \frac{2\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{m_2}{m_4}} \quad 3.23$$

$$\tau = \left(\frac{T}{T_c} \right) \quad \text{Si } \epsilon \leq 0.95 \rightarrow \tau = 1 \quad 3.24$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \epsilon^2} \right) \quad 3.25$$

$$\beta^2 = \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \quad 3.26$$

Esta ecuación fue obtenida midiendo el período de ola entre cresta y cresta, T_c , por lo que no sería correcto aplicarla a olas definidas por el método de pasos ascendentes por cero (Battjes 1977). Sin embargo Goda (1978) señala que aun en este caso la distribución da buenos resultados.

En forma dimensional al utilizar

$$T_c = T \quad , \quad \tau = \frac{T}{T} \quad \text{y} \quad h = \frac{H}{\sqrt{m_0}} \quad 3.27$$

se obtiene

$$p(H, T) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{\alpha^3 T^4}{m_0^{3/2} \varepsilon (1-\varepsilon^2) \tau^{-4}} \frac{H^2}{T_z^5} e^{-\frac{T_z^4}{8m_0\varepsilon^2\tau^{-4}} \frac{H^2}{T_z^4} \left[\left(\tau^{-2} \frac{T_z^2}{T_z^2} - \alpha^2 \right)^2 + \alpha^4 \beta^2 \right]} \quad 3.28$$

3.3.3 Distribución Longuet-Higgins (1983)

Longuet-Higgins en 1983 propone otra ecuación también basada en un espectro de banda estrecha la cual tiene los mismos méritos que la de Cavanié et al. al tomar en cuenta la asimetría de la distribución de períodos, sumado a que tiene la gran ventaja de utilizar un parámetro de ancho espectral de orden menor: v (el cual depende del segundo y no del cuarto momento).

Fórmula propuesta por Longuet-Higgins (1983) adimensional

$$p(R, \tau) = \left(\frac{2}{v\pi^{1/2}} \right) \left(\frac{R^2}{\tau^2} \right) e^{-R^2 \left[1 + \frac{1}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\tau} \right)^2 \right]} L(v) \quad 3.29$$

donde

$$\tau = \frac{T}{T} \quad 3.30$$

$$R = \frac{H/2}{\sqrt{2m_0}} \quad 3.31$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{2} \left[1 + (1 + v^2)^{1/2} \right] \quad 3.32$$

$$T = \frac{m_0}{m_1} = T_{01} \quad 3.33$$

Fórmula de Longuet-Higgins (1983) dimensional

$$p(H,T) = \left(\frac{H^2 T}{8v\sqrt{2\pi m_0^{2/3} T^2}} \right) e^{-\frac{H^2}{8m_0} \left[1 + \frac{1}{v} \left(1 - \frac{T}{T} \right)^2 \right]} L(v) \quad 3.34$$

3.4 Distribuciones de periodos de olas

Las otras distribuciones de periodos de olas que se tienen se derivan a partir de las distribuciones conjuntas de período y altura de ola, por lo que refiriéndose a las anteriores distribuciones y sus parámetros, estas son igualmente válidas en las siguientes fórmulas.

3.4.1 Distribución de Bretschneider (1959)

Bretschneider en 1959, encontró que la distribución de Rayleigh se puede aplicar al cuadrado de los periodos y propuso la siguiente ecuación:

$$p(T) = 2.7 \frac{T^3}{T^4} e^{-0.675 \left(\frac{T}{T} \right)^4} \quad 3.35$$

3.4.2 Distribución de Longuet-Higgins (1975)

Distribución de Longuet-Higgins (1975)

$$p(T) = \frac{v^2 T_{01}^2}{2 \left[v^2 T_{01}^2 + (T - T_{01})^2 \right]^{3/2}} \quad 3.36$$

3.4.3 Distribución de Cavanié et al. (1976)

Distribución de Cavanié, Arhan y Ezraty (1976)

$$p(T) = \frac{\alpha^3 \beta^2 \delta^2 T}{T^2 \left[\left(\frac{\delta^2 T^2}{T^2} - \alpha^2 \right)^2 + \alpha^4 \beta^2 \right]^{3/2}} \quad 3.37$$

3.4.4 Distribución de Longuet-Higgins (1983)

Distribución de Longuet-Higgins (1983)

$$p(T) = \frac{L(v)T}{2vT^2} \left[1 + \left(1 - \frac{T}{T} \right)^2 \frac{1}{v^2} \right]^{-3/2} \quad 3.38$$

3.4.5 Factor de agrupamiento

Se creía hasta hace poco tiempo que la mejor descripción de un estado de mar que podía darse, era a través del conocimiento de su espectro. Sin embargo se ha notado que para un mismo espectro, se pueden tener estados de mar bastantes diferentes: el oleaje puede ser bastante "uniforme" o existen grupos de olas grandes seguidos de varias olas pequeñas.

Para poder tener una mejor descripción del estado de mar, se debe utilizar un parámetro adicional, que tome en cuenta este agrupamiento de olas. Este parámetro es el conocido como factor de agrupamiento: GF (grouping factor).

Jhonson et al. en 1987 en un trabajo presentado en Hamburgo, hicieron referencia a la importancia de este fenómeno. Haciendo notar que ciertas ondas pueden causar mucho más daño en una estructura si se presentan agrupadas que si se presentan distribuidas a lo largo del registro.

Inicialmente, para poder determinar la presencia de grupos de olas en un registro, se rectificaba el registro (todos los puntos negativos se transforman en positivos) y se interconectan los picos de ondas adyacentes. Este procedimiento es bastante burdo, y no siempre permite identificar la presencia de un grupo de olas.

Funke y Mansard (1982) proponen un método que permite detectar la presencia de grupos de ondas, basándose en la historia de la energía del oleaje a lo largo de un registro.

Ellos proponen una función envolvente a la que llaman SIWEH (Smoothed Instantaneous Wave Energy History). El nombre de "Historia de energía de ondas instantánea suavizada" fue escogido para evitar confusión con otras energías del oleaje. El término "Historia" implica que se trata de una función del tiempo; la palabra "instantánea" describe que la energía está dada por un instante determinado y la palabra "suavizado" se incluye para describir una operación de suavizado, por medio de un filtro digital de paso estrecho.

El SIWEH fue definido inicialmente como:

$$E(t) = \frac{1}{T_p} \int_{t - \frac{T_p}{2}}^{t + \frac{T_p}{2}} \eta^2(t + \tau) \partial\tau \quad 3.39$$

donde η es el desplazamiento de la superficie del agua y T_p es el período pico obtenido del espectro. La ecuación anterior puede ser expresada como:

$$E(t) = \frac{1}{T_p} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(t + \tau) Q_k(\tau) \partial\tau \quad 3.40$$

donde $Q_k(\tau)$ es la función de suavizado general que para este caso es:

$$Q_0 = 1 \quad \text{para} \quad -\frac{T_p}{2} \leq \tau \leq \frac{T_p}{2} \quad 3.41$$

$$Q_0 = 0 \quad \text{para los demás valores} \quad 3.42$$

Una ecuación de suavizado superior es la ventana de Bartlett, la cual esta definida como:

$$Q_1(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T_p} \quad \text{para} \quad -T_p \leq \tau \leq T_p \quad 3.43$$

$$Q_1 = 0 \quad \text{para los demás valores} \quad 3.44$$

Cuando se procesan registros de oleaje de longitud finita hay que tomar consideraciones especiales al principio y al final del registro. El SIWEH queda definido ahora como:

$$E(t) = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p}^{T_p} \eta^2(t+\tau) Q_k(\tau) \partial\tau \quad \text{para} \quad T_p \leq t \leq T_n - T_p \quad 3.45$$

donde T_n es tiempo total del registro. Para el inicio y el final se tiene:

$$E(t) = \frac{2}{T_p + t} \int_{-t}^{T_p} \eta^2(t+\tau) Q_k(\tau) \partial\tau \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq T_p \quad 3.46$$

$$E(t) = \frac{2}{T_p + (T_n - t)} \int_{-T_p}^{T_n - t} \eta^2(t+\tau) Q_k(\tau) \partial\tau \quad \text{para} \quad T_n - T_p \leq t \leq T_n \quad 3.47$$

Utilizando para estos dos casos:

$$Q_1(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T_p} \quad \text{para} \quad -T_p \leq \tau \leq T_p \quad 3.48$$

$$Q_1 = 0 \quad \text{para los demás valores}$$

Esta ecuación puede describir con bastante detalle la actividad de grupos de onda, dando una indicación sobre que tan uniforme o que tan agrupada está la distribución de energía de las ondas a lo largo del eje temporal.

El factor de agrupamiento se obtiene a partir del SIWEH por medio de la siguiente ecuación:

$$GF = \frac{\sqrt{m_{e0}}}{m_0} \quad 3.49$$

$$GF = \frac{\sqrt{\frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} (E(t) - E)^2 dt}}{E} \quad 3.50$$

donde m_{e0} y m_0 son los momentos de orden cero de la función de densidad espectral del SIWEH y del registro del oleaje original, respectivamente.

Se puede decir que el factor de agrupamiento es la desviación estándar del SIWEH alrededor de su media y normalizada con respecto a su media.

3.5 ANÁLISIS ESPECTRAL DE UN ESTADO DE MAR

Al analizar una gran cantidad de espectros de oleaje, se ha podido encontrar que presentan características similares que pueden ser relacionadas con parámetros físicos tales como velocidad del viento y fetch. Gracias a estas relaciones se puede generar numéricamente el espectro de oleaje que se esperaría para algunas condiciones dadas.

Las formas de un espectro de un estado de mar varían considerablemente, dependiendo de muchos factores tales como intensidad y velocidad del viento, magnitud del fetch y otros. Sin embargo, la forma de un espectro no es arbitraria ya que existen muchas propiedades físicas del oleaje que están representadas en el espectro.

Los modelos espectrales están basados generalmente en uno o más parámetros. El modelo espectral más común de un solo parámetro es el de Pierson-Moskowitz (1964), que hace uso de la altura de ola significativa o de la velocidad del viento. Existen varios modelos espectrales basados en dos parámetros, entre los cuales destacan el de Bretschneider (1969), Scott (1965), ISSC (1964) y ITCC (1966). El espectro JONSWAP (Hasselmann, 1973) y el espectro TMA dependen de cinco parámetros, pero usualmente tres de ellos son considerados constantes. Un modelo espectral más complejo es el presentado por Ochi y Hubble (1976), el cual depende de seis parámetros, y es capaz de describir dos picos en el espectro de energía.

3.5.1 Modelo de Phillips

Un punto importante es que existe un límite superior para la densidad de energía espectral. Cuando el espectro alcanza esta condición de saturación, la energía adicional que es aportada por el viento en el oleaje se pierde por la rotura de las olas, la formación de olas capilares (de muy alta frecuencia) y la transferencia de energía a otras olas de diferentes frecuencia.

Para encontrar este estado de saturación, Phillips (1959) asumió que dependía de 2 parámetros: la velocidad al cortante del viento y el fetch.

Al estudiar la variación de la velocidad del viento según la altura sobre la superficie del mar, él determinó que el espectro se puede definir con los siguientes parámetros: la frecuencia, la gravedad, la velocidad del viento y el fetch.

Al hacer un análisis dimensional de varios espectros de oleaje y considerando un límite para la configuración de las olas, encontró que existe un rango en que se satura el espectro. Para frecuencias superiores a la frecuencia pico, la función de densidad espectral puede ser expresada por:

$$S(f) = \alpha g^2 f^{-5} (2\pi)^{-4} \quad 3.51$$

donde g es la aceleración de la gravedad y α depende del fetch y del viento.

3.5.2 Espectro de Neumann

El primer modelo espectral analítico que fue usado con fines de diseño ingenieril lo desarrolló Neumann (1953). Este modelo es función de la velocidad del viento medida a diez metros sobre el nivel medio del mar, U_{10} y queda expresado como:

$$S(f) = 1.466 H_{m0}^2 \frac{f_p^5}{f^6} \exp \left[-3 \left(\frac{f}{f_p} \right)^{-2} \right] \quad 3.52$$

donde H_{m0} es la altura de ola del momento de orden cero, la cual es aproximadamente igual a la altura de ola significativa, $H_s \approx H_{m0} = 4\sqrt{m_0}$. La frecuencia de pico, para este caso, puede ser obtenida mediante la siguiente expresión:

$$f_p = \sqrt{\frac{1}{6} \frac{g}{\pi U_{10}}} \quad 3.53$$

3.5.3 Espectro de Pierson-Moskowitz

Pierson y Moskowitz en 1964 estudiaron los espectros de oleaje del Atlántico Norte y desarrollaron una fórmula para representar estados de mar completamente desarrollados generados por el viento. Es decir el espectro no depende del fetch, sino solamente de la velocidad del viento.

Propusieron la siguiente expresión para generar el espectro:

$$S(f) = 8.1 \times 10^{-3} (2\pi)^{-4} g^2 f^{-5} e^{-0.24(2\pi U_{19.5} / f)^4} \quad 3.54$$

donde $U_{19.5}$ es la velocidad del viento a 19.5 metros sobre la superficie del mar, o representado de otra manera, utilizando la frecuencia pico

$$S(f) = 8.1 \times 10^{-3} (2\pi)^{-4} g^2 f^{-5} e^{-\frac{5}{4} \left(\frac{f_p}{f} \right)^4} \quad 3.55$$

donde, se reconoce en la parte fuera del exponente la fórmula desarrollada por Phillips y el exponente se conoce como la "función de forma de Pierson-Moskowitz".

3.5.4 Espectro Breschneider

Bajo la suposición que el espectro es de banda ancha estrecha y que las alturas de ola individuales y períodos siguen una distribución tipo Rayleigh, Bretschneider (1959, 1969) derivó la siguiente forma para su modelo espectral:

$$S(f) = 0.128 H_s^2 \frac{f_s^4}{f^3} \exp[-0.675 (f_s / f)^4] \quad 3.56$$

donde $f_s = 1/T_s$, del modelo de Breschneider puede deducirse que:

$$T_s = 0.946 T_p \quad 3.57$$

$$f_p = 0.00408 g / H_s \quad 3.58$$

donde T_p es el período de pico espectral. Esta relación hace que el modelo sea igual al presentado por Pierson y Moskowitz

3.5.5 Espectro ISSC

En el Congreso del ISSC de 1964 (International Ship Structures Congress) se sugirió una ligera modificación a la forma del espectro propuesto por Bretschneider:

$$S(f) = 0.1107 H_s^2 \frac{f_s^4}{f^5} \exp[-0.4427 (f_s / f)^4] \quad 3.59$$

La relación entre la frecuencia de pico, f_p , y la frecuencia media f para el espectro ISSC es:

$$\bar{f} = 1.296 f_p \quad 3.60$$

3.5.6 Espectro ITTC

En el congreso ITTC (International Towing Tank Conference, 1966, 1969 y 1972) propusieron modificaciones al espectro sugerido por Pierson Y Moskowitz en términos de la altura de ola significativa y la frecuencia media, $f_z = 1 / T_{02}$

$$S(f) = 1.272m_0 f_z^4 f^{-5} \exp\left[-0.138(f_z/f)^4\right] \quad 3.61$$

3.5.7 Espectro de JONSWAP

Hasselmann y otros proponen, en 1973 el conocido espectro JONSWAP. Este espectro fue generado con datos tomados a finales de la década de los sesenta. Se realizó un amplio proyecto de medición de oleaje sobre una línea de 160 Km. en el Mar del Norte, a partir de la Isla Sylt. Este proyecto se conoce como JONSWAP por sus siglas en inglés (Joint North Sea Wave Project).

Este espectro está formulado para estados de mar generados por el viento, con fetch limitado y para profundidad de agua indefinida.

El espectro JONSWAP está expresado por la siguiente fórmula:

$$S_J(f) = S_p(f) \phi_{PM}(f/f_p) \phi_J(f, f_p, \gamma, \sigma) \quad 3.62$$

donde

$S_p(f)$ es la fórmula de Phillips

$$S_p(f) = \alpha g^2 (2\pi)^{-4} f^5 \quad 3.63$$

$\phi_{PM}(f/f_p)$ es la función de forma de Pierson-Moskowitz

$$\phi_{PM}(f/f_p) = e^{-\frac{5}{4} \left(\frac{f}{f_p}\right)^{-4}} \quad 3.64$$

ϕ_J es el factor de forma del espectro JONSWAP

$$\phi_J = \gamma e^{\left(\frac{-(f-f_p)^2}{2\sigma^2 f_p^2}\right)} \quad 3.65$$

donde

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_A & f_p \leq f \\ \sigma_B & f_p \leq f \end{pmatrix} \quad 3.66$$

Los valores medios de los parámetros que se utilizan para generar el espectro JONSWAP son los siguientes:

γ es conocido como el factor de forma de pico del espectro

$$\gamma = 3.30 \quad 3.67$$

σ representa el ancho de la base del espectro antes (σ_a) y después (σ_b) de la frecuencia pico.

$$\sigma_a = 0.07 \quad 3.68$$

$$\sigma_b = 0.09$$

α se conoce como el factor de escala y está asociado con la energía total del espectro. Como puede verse en las siguientes expresiones es función directa del fetch y de la velocidad del viento.

$$\alpha = 0.0076 (x)^{-0.22} \quad 3.69$$

se ha observado que la frecuencia pico f_p del espectro está relacionada también con el fetch y la velocidad del viento

$$f_p = 3.5 \left(\frac{g}{U_{10}} \right) (x)^{-0.33} \quad 3.70$$

donde

$$x = \frac{gx}{U_{10}^2} \text{ Fetch adimensional} \quad 3.71$$

x = Fetch

U_{10} = Velocidad del viento a 10 metros sobre la superficie.

Como se puede observar de estas fórmulas, este espectro tiene un fetch limitado, por lo que el estado de mar no se encuentra todavía completamente desarrollado.

Utilizando la información recopilada en las dos décadas siguientes, Mitsuyasu propone, en 1980, las siguientes relaciones para mejorar la estimación de los parámetros α , γ y f_p del factor de forma de JONSWAP.

$$\alpha = \frac{3.26}{10^2} f_p^{0.857} \quad 3.72$$

$$\gamma = 4.42 f_p^{0.429} \quad 3.73$$

donde

$$f_p = U \frac{f_p}{g} \quad 3.74$$

Utilizando la relación

$$f_p = 2.92 X^{-1/3} \quad 3.75$$

Se obtiene

$$\alpha = \frac{8.17}{10^2} X^{-2/7} \quad 3.76$$

$$\gamma = 7.0 X^{-1/7} \quad 3.77$$

Ochi, 1982 señala a partir de las ecuaciones anteriores, que si el fetch adimensional es superior a 1×10^6 , el factor de forma de pico se aproxima a 1 y se tiene un estado de mar completamente desarrollado.

Ross en 1979 después de estudiar los espectros del oleaje producido por huracanes, propone los siguientes parámetros para calcular los espectros en estas condiciones:

$$\gamma = 4.7 X_r^{-0.13} \quad 3.78$$

ESTA TESIS
NO DEBE
SALIR DE LA
BIBLIOTECA

$$\alpha = 0.035 \bar{r}_p^{0.82} \quad 3.79$$

$$\bar{r}_p = 0.97 x_r^{-0.21} \quad 3.80$$

$$m_b = \frac{2.25}{10^5} x_r^{0.45} \quad 3.81$$

$$\bar{x}_r = x_r g / U^2 \quad 3.82$$

donde \bar{x}_r es el fetch radial adimensional y x_r es la distancia radial al ojo del huracán. (en unidades congruentes), m_b se conoce como el parámetro espectral de escala.

Aunque γ tiene un valor promedio de 3.3, su valor puede variar desde 1 hasta 7, siguiendo una distribución gaussiana normal con una desviación estándar de 0.79

Ochi (1979) propone un método para generar una familia de espectros para diferentes velocidades de viento, para un fetch y H_s determinados.

$$U_{10} = k x^{-0.615} H_s^{1.06} \quad 3.83$$

De esta ecuación, para un x y H_s determinados y para varios valores de U se despeja k y se encuentra y de la siguiente tabla

γ	k	
	x en NM U en nudos	x en km. U en m/s
1.75	128.1	96.2
2.64	117.6	88.3
3.30	111.4	83.7
3.96	106.6	80.1
4.85	101.7	76.4

3.5.8 Espectro TMA

En 1985, Bows Gunther, Rosenthal y Vicent presentaron el espectro TMA, el cual está relacionado directamente con la profundidad del agua. El espectro TMA puede ser utilizado para determinar los cambios que sufre un espectro al propagarse en aguas someras.

El estudio se realizó analizando cerca de 2800 espectros de oleaje producidos en aguas de poca profundidad. Se tuvieron tres fuentes de información: TEXEL, MARSEN y ARSLOE. De sus iniciales se eligió el nombre de TMA.

Los datos de TEXEL fueron obtenidos cerca de Holanda por el barco-faro Texel (30 m de profundidad) y la estación Euro-5 (20 m de profundidad). Los datos de MARSEN fueron obtenidos de dos estaciones entre los 10 y 50 metros de profundidad, sobre la costa norte de Alemania. Estas estaciones estaban directamente expuestas al oleaje del Mar del Norte. Los datos ARSLOE provienen de las costas de Carolina del Norte, con profundidades variables con un máximo de 40 metros.

El espectro TMA se define a partir del espectro JONSWAP como se muestra en la siguiente ecuación.

$$S_{TMA} = S_J(f) \phi_k(\omega_H) \quad 3.84$$

$$\phi_k(\omega_H) = \tanh^2(kh) \left[1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right] \quad 3.85$$

k se evalúa a partir de la ecuación de dispersión.

$$(2\pi f) = gk \tanh(kh) \quad 3.86$$

Se supone que dentro de ϕ_k se encuentran implícitos varios efectos de aguas someras tales como la fricción con el fondo, rompiente y refracción.

Goda advierte que el espectro TMA debe utilizarse con reservas, ya que está formulado para oleaje en crecimiento en el área de generación.

Goda, 1983, propone que un oleaje SWELL que haya viajado cientos o miles de kilómetros en aguas profundas se pueden representar por medio de un espectro JONSWAP con un factor de forma de pico y que varíe de 7 a 10.

3.5.9 Espectro de Ochi-Hubble

Ochi y Hubble (1976) desarrollaron un modelo espectral de seis parámetros que consiste esencialmente en dos partes: una para componentes de energía de baja frecuencia y la otra que cubra los componentes de alta frecuencia. Cada componente es expresada en términos de tres parámetros y el espectro total es expresado como una combinación lineal de las dos componentes. Por tanto, un doble pico espectral puede ser modelado con esta formulación, por ejemplo (baja frecuencia) oleaje distante, Swell, y (alta

frecuencia) oleaje local, Sea. Con lo cual es posible, aparentemente, representar casi todos los estados de mar desarrollados en un estado de mar de una tormenta.

$$S(f) = \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^2 \frac{\left(\frac{4\lambda_j + 1}{4} (2\pi f_{0j})^4 \right)^{\lambda_j}}{\Gamma(\lambda_j)} \frac{H_{sj}^2}{(2\pi f)^{4\lambda_j + 1}} \exp \left[- \left(\frac{4\lambda_j + 1}{4} \right) \left(\frac{f_{0j}}{f} \right)^4 \right] \quad 3.87$$

donde H_{s1} , f_{01} y λ_1 son la altura de ola significativa, la frecuencia modal y el factor de forma para las componentes de baja frecuencia, mientras que H_{s2} , f_{02} y λ_2 corresponden a las componentes de alta frecuencia. En la ecuación (3.87) si cualquiera de los valores de las componentes de los parámetros H_{sj} , f_{0j} son tomados como constantes, el parámetro λ_j controla la forma, o en particular, la agudeza del pico espectral.

Por tanto, λ_1 es llamado parámetro de forma espectral. Si $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$, se obtiene un espectro tipo Pierson-Moskowitz. En la ecuación (3.87), la altura de ola significativa equivalente H_s se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$H_s = \sqrt{H_{s1}^2 + H_{s2}^2} \quad 3.88$$

Bajo la suposición de espectro de banda estrecha, generalmente, el valor de λ_1 es mucho mayor que el valor de λ_2 . El valor más común de λ_1 es

$$\lambda_1 = 2.72$$

mientras que el valor para λ_2 es función de la altura de ola significativa

$$\lambda_2 = 1.82 e^{-H_s / 121.5}$$

donde H_s está dada en metros.

3.5.10 Relaciones entre la descripción estadística y espectral

Existen varias relaciones que permiten relacionar los parámetros obtenidos mediante el espectro con los obtenidos con las series de tiempo.

El parámetro de la anchura espectral de Cartwright y Longuest-Higgins 1956, ε puede estimarse directamente desde un registro de oleaje mediante la siguiente relación:

$$\varepsilon^2 = 4r(1-r) \quad 3.89$$

donde,

$$r = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{N_0^+}{N_c} \right) \quad 3.90$$

N_0^+ = Número de cruces de la superficie del agua con el NMM con pendiente positiva.

N_c = Número total de cruces del registro.

El parámetro v se puede aproximar a $\varepsilon/2$ para espectros de banda estrecha.

Asumiendo que la distribución de las olas se aproxima a la de Rayleigh, se puede estimar el H_{rms} y H_s directamente a partir del espectro (al H_s se le denomina H_{m0} cuando éste es estimado a partir del espectro).

$$H_{m0} = 4.004 \sqrt{m_0} = \sqrt{2} H_{rms} \quad 3.91$$

$$H_{rms} = \sqrt{8m_0} \quad 3.92$$

Se pueden estimar otras alturas características del oleaje a partir del H_{rms} , manteniendo la suposición de tener una distribución de Rayleigh.

$$H_{1/10} = 1.8 H_{rms} \quad 3.93$$

$$H_{1/100} = 2.359 H_{rms} \quad 3.94$$

4 ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE DATOS EXTREMOS

4.1 Excedencias

En muchas situaciones, el ingeniero está interesado en valores altos de la variable aleatoria que estudia. En otras palabras, le preocupan sólo los valores que exceden un cierto valor del umbral. Un problema práctico importante es el siguiente:

Si se supone que se ha realizado en el pasado n observaciones independientes y que estamos interesados en determinar la probabilidad de que, en las próximas N observaciones, se produzcan r excedencias de la observación que ocupa el lugar m -ésimo más grande de las n observaciones pasadas. Se puede demostrar que el número de estas excedencias, r , es una variable aleatoria con media:

$$r(n, m, N) = \int_0^1 N p_m f(p_m) dp_m = N \mu_m = \frac{Nm}{n+1} \tag{4.1}$$

y varianza

$$\sigma^2(n, m, N) = \frac{Nm(n-m+1)(N+n+1)}{(n+1)^2(n+2)} \tag{4.2}$$

La varianza toma el valor mínimo cuando $m = (n+1)/2$. Sin embargo, el coeficiente de variación decrece con m , tal como cabe de esperar.

Las expresiones (4.1) y (4.2) permiten elegir el valor de diseño cuando hay suficientes años de observación, pero es inútil cuando la información es escasa.



Ejemplo 1 (Precipitación). - La precipitación máxima durante los últimos 40 años ha sido 42 mm. Determinar el valor medio y la varianza del número de excedencias de 42 mm del máximo anual durante los próximos 30 años.

Solución : De (4.1) y (4.2) se obtiene

$$r(40,1,30) = \frac{30}{41} = 0.732$$

$$\sigma^2(40,1,3) = \frac{30 \times 40 \times 71}{41^2 \times 42} = 1.207$$

Ejemplo 2 (Alturas de ola). - Las alturas de ola máximas registradas en una cierta localidad en los últimos 50 años han sido las dadas en la **Tabla 4.1**. Elegir la altura de diseño para que se tenga una media de 4 excedencias en los próximos 20 años.

Altura de ola en metros

2.91	3.74	4.09	5.88	6.42
6.93	7.21	7.92	8.26	8.79
9.17	9.50	9.62	10.00	10.14
10.28	10.45	10.77	11.65	11.65
11.82	12.27	12.68	13.28	13.46
13.88	13.98	14.32	14.38	14.46
14.86	15.03	15.30	16.07	16.23
17.36	18.68	18.72	19.44	20.09
21.06	21.13	21.53	21.80	23.15
24.75	25.45	28.13	29.95	37.19

Tabla 4.1 Alturas de ola máximas anuales en una cierta localidad

Solución : Según (4.1), se tiene

$$r(50, m, 20) = \frac{20m}{51} \approx 4 \Rightarrow m = 10$$

lo que muestra que debe elegirse el valor que ocupa el décimo lugar, empezando por la cola de la derecha, en la serie pasada, es decir, 21.06 metros.

4.2 Períodos de Retorno

Supóngase ahora que un determinado suceso (avenida, falla de una presa, excedencia de una altura de ola dada, etc.) es tal que su probabilidad de ocurrencia en un período de tiempo unitario (normalmente un año) es p . Supóngase también que las ocurrencias de

dicho suceso en períodos diferentes no solapados, son independientes. Entonces, al paso del tiempo, se tiene una sucesión de experimentos de Bernoulli idénticos (ocurrencia o no ocurrencia del proceso). Por ello, el tiempo que transcurre hasta la primera ocurrencia es una variable geométrica $Ge(p)$, con media $1/p$. Esto motiva la siguiente definición.

Período de retorno.- Sea A un suceso, y T el tiempo aleatorio que transcurre entre ocurrencias sucesivas de ese suceso. Al valor medio, τ de la variable T se le llama período de retorno A (nótese que es el tiempo medio que tarda en retornar el suceso).

Si $F(x)$ es una función de distribución del máximo anual de una variable aleatoria X, el período de retorno del suceso $\{X > x\}$ es $1/[1-F(x)]$ años. Similarmente, si $F(x)$ es la función de distribución del mínimo anual de una variable aleatoria, X, el período de retorno del suceso $\{X < x\}$ es $1/F(x)$ años.

Nótese también que una obra de ingeniería falla si y sólo si sucede el suceso A, entonces su vida media coincide con el período de retorno de A.

La importancia del período de retorno en Ingeniería está en que muchos criterios de diseño están basados en períodos de retorno, es decir, se debe diseñar una obra para resistir una media de N años (normalmente 50, 100 ó 500 años).

Además la probabilidad de ocurrencia del suceso A antes del período de retorno es

$$F(\tau) = 1 - (1-p)^{\tau} = 1 - (1-p)^{1/p} \quad 4.3$$

que para $\tau \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow 0$) tiende al valor 0.63212

Ejemplo 3. (Período de retorno de una avenida). - La función de distribución del máximo caudal (en m^3/seg) en una sección de un río está dada por:

$$F(x) = \exp \left[- \exp \left(- \frac{x - 38.5}{7.8} \right) \right]$$

Estimar el período de retorno para un caudal de 60 y 70 m^3/seg

Solución

Los períodos de retorno de caudales máximos anuales de valores 60 y 70 m^3/seg son en años.

$$\tau_{60} = \frac{1}{1-F(60)} = 16.25 \quad \text{y} \quad \tau_{70} = \frac{1}{1-F(70)} = 57.24$$

Esto significa que los caudales máximos anuales de 60 y 70 m³/seg ocurren cada 16.25 y 57.24 años, respectivamente.

Ejemplo 4. (Altura de ola de diseño de un dique). - Si un dique se diseña para resistir una media de 50 años, y la altura de ola máxima anual (en metros), se sabe de la experiencia pasada que, que sigue una distribución

$$F(x) = \exp \left[-\exp \left(-\frac{x-15}{4} \right) \right]$$

Estimar la altura de ola de diseño

Solución:

La altura de diseño H debe satisfacer la ecuación

$$\frac{1}{1-F(H)} = 50$$

de donde resulta H = 31.61 metros

4.3 Valores Característicos

Si el suceso A consiste en las excedencias del nivel x de la variable X, podemos escribir A(x) en vez de A, y entonces p se transforma en $p(x) = 1 - F(x)$ y

$$\tau(x) = \frac{1}{1-F(x)}$$

En este caso, el valor esperado del número de sucesos A(x) en n períodos es (media de la variable bimodal)

$$n[1-F(x)]$$

4.4

Un interés especial tiene el nivel x que conduce a una media de valor unitario. Este valor es el llamado valor característico de ese período, que se define a continuación.

Se dice que un valor u_n es el valor característico para máximos de un período de duración n si el valor medio del número de excedencias de ese valor en dicho período es unitario.

Nótese que este valor verifica la ecuación

$$n[1-F(u_n)] = 1 \Rightarrow F(u_n) = 1 - \frac{1}{n} \quad 4.5$$

De forma similar se define el valor característico para mínimos, v_n

$$n[1-F(v_n)] = 1 \Rightarrow F(v_n) = \frac{1}{n} \quad 4.6$$

La probabilidad de que sea excedido el valor característico en su período asociado es

$$1 - F^n(u_n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad 4.7$$

que para valores grandes de n converge a $1 - \exp(-1) = 0.6321$

Ejemplo 5. Valor característico de una avenida en un lustro. La función de distribución del caudal máximo anual (en m^3/seg) es:

$$F(x) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-38.5}{7.8}\right)\right] \quad 4.8$$

Solución.

Por lo tanto, según (4.5), el valor característico para máximos del caudal máximo anual en un lustro es la solución de la ecuación:

$$F(u_5) = 1 - \frac{1}{5} = 0.8 \quad 4.9$$

de la que se obtiene $u_5 = 50.2 \text{ m}^3/\text{seg}$.

4.3.1 Estadísticos de orden

Sea (X_1, X_2, \dots, X_n) una muestra procedente de una población. Si los valores de la secuencia (X_1, X_2, \dots, X_n) se ordenan en forma creciente, $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$, de magnitud, entonces el miembro r -ésimo de esta nueva secuencia se denomina estadístico de orden r de la muestra dada.

Entre éstos destacan el mínimo

$$X_{1:n} = \text{Min} (X_1, X_2, \dots, X_n),$$

Y el máximo

$$X_{n:n} = \text{Max} (X_1, X_2, \dots, X_n),$$

de la muestra respectivamente, que juegan un papel preponderante en las aplicaciones. En esta sección se supone que X_1, X_2, \dots, X_n son independientes e idénticamente distribuidas con una función de distribución $F(x)$.

4.3.2 Casos particulares

4.3.2.1 Distribución de un estadístico de orden

La función de distribución, $F_{X_{r:n}}(x)$, del estadístico de orden k es:

$$F_{X_{r:n}}(x) = \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} F^k(x) [1-F(x)]^{n-k} \quad 4.10$$

$$r \binom{n}{r} \int_0^{F(x)} u^{r-1} (1-u)^{n-r} du = I_{F(x)}(r, n-r+1)$$

donde $F_{X_{r:n}}(x)$ es la función de distribución de $X_{r:n}$ e $I_p(a, b)$ es la función beta incompleta (cuya definición es precisamente la expresión a su izquierda en (4.10)).

Si la población es continua, la función de densidad de $X_{r:n}$ es:

$$f_{X_{r:n}}(x) = r \binom{n}{r} F^{r-1}(x) [1-F(x)]^{n-r} f(x) = \frac{F^{r-1}(x) [1-F(x)]^{n-r} f(x)}{B(r, n-r+1)} \quad 4.11$$

donde $B(a, b)$ es la función beta.

4.3.3.2 Distribución del mínimo

Sustituyendo $r=1$ en (4.10) y (4.11) se obtienen las funciones de distribución del mínimo que son:

$$F_{x_{kn}}(x) = \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} F^k(x) [1-F(x)]^{n-k} = 1 - [1-F(x)]^{n-1} \quad 4.12$$

$$f_{x_{kn}}(x) = n [1-F^{n-1}(x)]^{n-1} f(x) \quad 4.13$$

4.3.3.3 Distribución del máximo

Sustituyendo $r = n$ en (4.10) y (4.11) se obtienen las funciones de distribución y de densidad del máximo, que son:

$$F_{x_{nn}}(x) = F(x)^n \quad 4.14$$

$$f_{x_{nn}}(x) = nF^{n-1}(x)f(x) \quad 4.15$$

4.3.3.4 Distribución conjunta del máximo y el mínimo

Haciendo $k = 2$, $r_1 = 1$ y $r_2 = n$, se obtiene que la función de densidad conjunta del máximo y mínimo de una muestra de tamaño n es:

$$f_{1,nn}(x_1, x_2) = n(n-1)f(x_1)f(x_2)[F(x_2) - F(x_1)]^{n-2}; \quad x_1 \leq x_2 \quad 4.16$$

4.3.3.5 Distribución conjunta de todos los estadísticos de orden

La función de densidad conjunta de todos los estadísticos de orden, resulta haciendo $k = n$, con lo que se obtiene:

$$f_{1,2,\dots,nn}(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! \prod_{i=1}^n f(x_i); \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \quad 4.17$$

Ejemplo 12. Se sabe que la altura, X , de las olas que ocurren en un determinado lugar es una variable aleatoria de Rayleigh (Longuet – Higgins), es decir, que su función de densidad es:

$$f(x) = \delta \cdot e^{-\frac{\delta^2}{2}} \quad \delta > 0$$

donde

$$\delta = \frac{x}{m_0^{1/2}}$$

y m_0 es el momento de orden cero de su espectro de energía.

Las funciones de densidad y de distribución de los estadísticos de orden de una muestra de 1000 olas son:

$$f_{x_r,1000}(x) = r \binom{1000}{r} \left[1 - e^{-\delta^2/2}\right]^{-1} e^{-\delta^2(1000-r)/2} \delta \cdot e^{-\delta^2/2}$$

$$F_{x_r,1000}(x) = \sum_{k=r}^{1000} \binom{1000}{k} \left[1 - e^{-\delta^2/2}\right]^k e^{-\frac{\delta^2(1000-k)}{2}}$$

Si se sabe que una escollera de tipo rígido se rompe cuando $\delta = 4.8$, la probabilidad de que sobreviva una serie de 1000 olas es:

$$p = F_{x_{1000},1000}(4.8) = 0.99$$

Del mismo modo, si una escollera flexible resiste sólo 5 olas de altura mayor que $\delta = 3.5$, su probabilidad de supervivencia a las 1000 olas es:

$$p = F_{x_{500},1000}(4.8) = 0.99$$

4.4 Papeles probabilísticos

La idea básica del papel probabilístico asociada a una familia biparamétrica de funciones de distribución, es modificar las escalas del dibujo de tal forma que dicha familia se transforme en una familia de rectas. Así, cuando se representa la función de distribución en dicho papel, el aspecto de la gráfica (rectilínea o no) sirve para decidir si esa distribución procede de esa familia y estimar sus parámetros. En la práctica no se dispone de la función de distribución empírica, como una aproximación de ella. Ahora bien, debido al carácter aleatorio de las muestras, incluso en el caso de que la muestra proceda de una distribución de la familia asociada al papel probabilístico, su gráfica no será una línea recta perfecta sino sólo una aproximación.

4.4.1 El problema del punteo

Por tanto, en el papel probabilístico se representa la función de distribución empírica, que es una función escalera que toma valores $0, 1/n, \dots, 1$. Los dos extremos 0 y 1 , cuando se les aplica la transformación de escala se convierten en $-\infty$ e ∞ respectivamente, en el caso de muchas familias. Por ellos, es imposible dibujarlos.

Debido a que el estadístico de orden $x_{(i)}$ la probabilidad salta desde $(i-1)/n$ a i/n . Una solución de compromiso a este problema, propuesta por Hazen, consiste en usar el valor $(i-1/2)/n$, con lo que se dibujan en el papel probabilístico los puntos.

$$\left(x_{(i)}, \frac{i - \frac{3}{8}}{n + \frac{1}{4}} \right); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad 4.18$$

4.4.2 Fundamentos del papel probabilístico

El papel probabilístico es simplemente un papel en el que se han cambiado las escalas de tal manera que las funciones de distribución de una cierta familia, cuando se dibujan en él, se convierten en una familia de líneas rectas.

Sea $F(x; a, b)$ una familia biparamétrica de funciones de distribución, donde a y b son los parámetros. Se busca una transformación

$$\xi = g(x) \quad ; \quad \eta = h(y) \quad 4.19$$

tal que la familia de curvas

$$y = F(x; a, b) \quad 4.20$$

cuando se transforma por (4.19) se convierte en una familia de líneas rectas.

Nótese que esto implica

$$h(y) = h[F(x; a, b)] = a g(x) + b \quad \Leftrightarrow \quad \eta = a \xi + b \quad 4.21$$

donde la variable η se llama variable reducida.

Por tanto, para que exista un papel probabilístico asociado a una cierta familia de funciones de distribución $F(x; a, b)$ se necesita que

$$F(x; a, b) = h^{-1}[a g(x) + b] \quad 4.22$$

En la ecuación (4.22) todas las funciones, F , h y g , pueden ser consideradas como incógnitas. En este caso, en la ecuación funcional (4.22), las funciones $h(x)$ y $g(x)$ son estrictamente monótonas, éstas caracterizan a todas las familias de funciones de distribución que pueden representarse mediante papeles probabilísticos.

Sin embargo, también puede considerarse a F como una función conocida y entonces nos interesamos por la forma de las transformaciones h y g que hacen posible el papel probabilístico. En los siguientes ejemplos se resolverá el segundo problema para el caso de familias bien conocidas.

4.4.3 Papel probabilístico normal.

Si $F(x; \mu, \sigma)$ es la función de distribución de una variable normal (**Anexo 1**), se sabe que puede ser expresada como:

$$F(x; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad 4.23$$

donde μ y σ son la media y desviación típica, respectivamente, y $\Phi(x)$ es la función de distribución de la variable normal estándar $N(0,1)$.

Entonces, según (4.19) y (4.20), la expresión (4.22) da

$$\xi = g(x) = x \quad ; \quad \eta = h(y) = \Phi^{-1}(y) \quad ; \quad a = \frac{1}{\sigma} \quad ; \quad b = \frac{-\mu}{\sigma} \quad 4.24$$

y la familia de líneas rectas es

$$\eta = a\xi + b = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \quad 4.25$$

Una vez que la hipótesis de normalidad es aceptada la estimación de los parámetros μ y σ puede hacerse tras ajustar una recta a los mismos, notando que haciendo $\eta = 0$ y $\eta = 1$ en (4.25) se obtiene (ver **Figura 4.1**).

$$\eta = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \Rightarrow \xi = \mu \quad 4.26$$

$$\eta = 1 \Rightarrow 1 = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \Rightarrow \xi = \mu + \sigma$$

La **Figura 4.1** muestra un papel probabilístico normal, donde el eje de las ordenadas ha sido transformado por $\eta = \Phi^{-1}(y)$ y el eje de las abscisas no ha sufrido transformación alguna. Nótese que se muestra tanto la escala de probabilidad, como la escala de la

variable reducida, η . Dibujando la función de distribución empírica en papel normal, se puede decidir si la hipótesis de normalidad es o no aceptable, donde μ y σ son los valores obtenidos según (4.26)

Ejemplo. Papel probabilístico Normal. En la Figura 4.1 se han dibujado los datos de la resistencia de 20 tuberías de acero de una red de agua potable, dados en la Tabla 4.2 Debido a la tendencia lineal de los datos no puede rechazarse la hipótesis de normalidad. En este caso, de la Figura 4.1, se obtiene $\mu=85$ y $\sigma =17.5$ kg

RESISTENCIAS (en kg)				
51.5	57.1	65.1	69.2	71.2
73.1	76.1	81.9	84.1	86.6
88.1	92.8	94.9	96.6	97
101.4	103.4	103.8	105.2	119.1

Tabla 4.2 Resistencia de 20 tuberías de acero

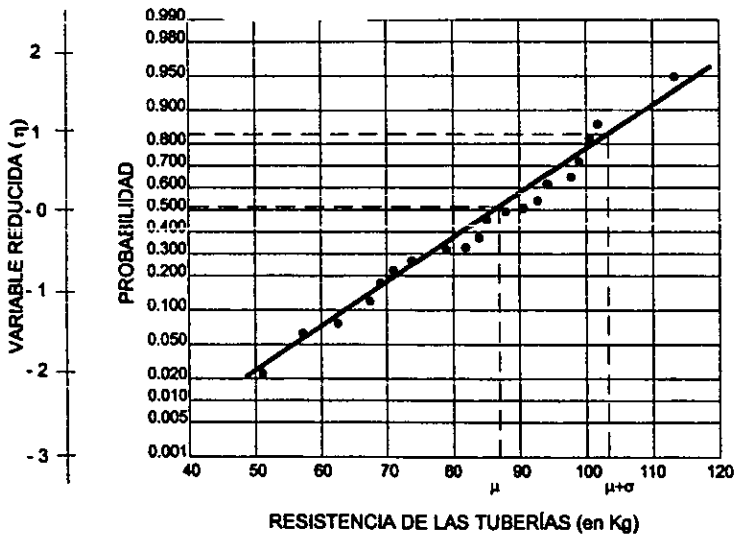


Figura 4.1 Papel probabilístico normal con la muestra de la resistencia de los cubos en él representada.

4.4.4 Papel probabilístico log-normal

La función de distribución log-normal (**Anexo 1**) puede representarse también como un papel probabilístico, se considera que puede ser reducido al caso del papel normal si se tiene en cuenta que X es log-normal si $Y = \log(X)$ es normal. En consecuencia, si se transforma X en $\log(X)$ se tiene papel normal. Por tanto, el único cambio consiste en transformar la escala de las X en una escala logarítmica (ver figura 5.3). Si se necesita la media μ' y la desviación típica σ'^2 de la distribución log-normal, basta tener en cuenta que se verifica:

$$\mu' = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad ; \quad \sigma'^2 = \exp(2\mu) \left[\exp(2\sigma^2) - \exp(\sigma^2) \right] \quad 4.27$$

La estimación para el papel normal resulta

$$\eta = 0 \rightarrow \xi = \exp(\mu) = 1075$$

$$\eta = 1 \rightarrow \xi = \exp(\mu + \sigma) = 1265$$

por tanto, los valores de μ y σ resultan ser 6.98 y 0.163, respectivamente. En consecuencia, según (4.27), la media y la desviación típica de la distribución log-normal resultan ser:

$$\eta' = \exp\left(6.98 + \frac{0.163^2}{2}\right) = 1089.33 \text{ horas}$$

$$\sigma'^2 = e^{13.96} \left[e^{(2 \times 0.163^2 - 0.163)} \right] = 311852 \text{ horas}$$

Ejemplo 17. Los datos de la vida (medida en días) de 30 aisladores eléctricos se muestran en la **Tabla 4.3** y se representan, en papel probabilístico log-normal, en la **Figura 4.2**

VIDA DE AISLADORES (en días)				
744	822	847	885	920
948	968	985	1010	1018
1019	1028	1029	1031	1040
1047	1071	1074	1097	1134
1147	1170	1174	1209	1251
1273	1320	1383	1388	1462

Tabla 4.3 Vida de 30 aisladores eléctricos

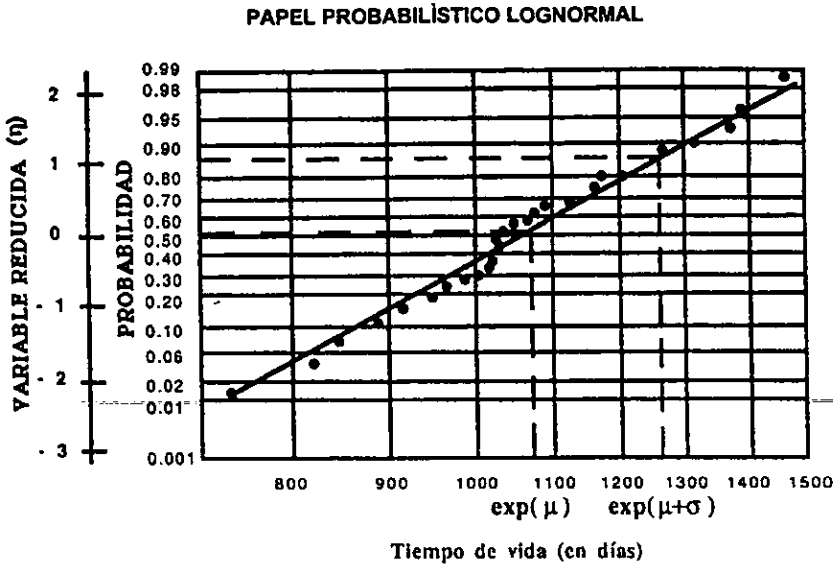


Figura 4.2 Papel probabilístico log-normal con muestra de las vidas de 30 aisladores eléctricos.

4.4.5 Papel probabilístico de distribución de Gumbel (máximos)

La función de distribución de Gumbel para máximos es:

$$y = F(x; \lambda, \delta) = \exp \left[- \exp \left(- \frac{x - \lambda}{\delta} \right) \right]; \quad -\infty < x < \infty \tag{4.28}$$

Tomando como logaritmos de 1/y dos veces se obtiene:

$$- \log \left[\log \left(\frac{1}{y} \right) \right] = \frac{x - \lambda}{\delta} \tag{4.29}$$

y comparando con (4.28) y (4.29) se llega a:

$$\xi = g(x) = x$$

$$\eta = h(y) = - \log \left[\log \left(\frac{1}{y} \right) \right] = - \log [- \log (y)] \quad a = \frac{1}{\delta} \quad b = - \frac{\lambda}{\delta} \tag{4.30}$$

donde

$$\lambda = \mu - \gamma\delta \quad \delta = \frac{\sqrt{6} \sigma}{\pi}$$

y γ es el número de Euler, aproximadamente igual a 0.577

La ecuación muestra que la transformación (4.30) convierte (4.28) en la familia de rectas es:

$$\eta = a\xi + b = \frac{\xi - \lambda}{\delta} \quad 4.31$$

la estimación de los dos parámetros λ y δ puede hacerse notando que para $\eta = 0$ y $\eta = 1$ se obtiene:

$$\eta = 0 = \frac{\xi - \lambda}{\delta} \Rightarrow \xi = \lambda \quad 4.32$$

$$\eta = 1 = \frac{\xi - \lambda}{\delta} \Rightarrow \xi = \lambda + \delta$$

Por tanto, una vez que se ha ajustado una línea a los datos, las abscisas asociadas con valores de la variable reducida η , 0 y 1 son los valores λ y $\lambda + \delta$, respectivamente. La figura 4.3 muestra un papel probabilístico de Gumbel para máximos en el que los ejes ordenados han sido transformados según (4.30) y el eje de las abscisas permanece inalterado.

Ejemplo. (Máximas velocidades anuales). - La muestra de las máximas velocidades anuales, medidas en una cierta sección de un río en metros/segundo (ver **Tabla 4.4**), también ha sido dibujada en la **Figura 4.3** puesto que la tendencia esta cercana a una línea recta se puede aceptar la hipótesis de Gumbel. Basándose en la línea recta ajustada a la figura, se han obtenido los valores de los parámetros resultando las estimaciones siguientes: $\lambda = 38.5 \text{ m}^3/\text{seg}$ y $\delta = 7.8 \text{ m}^3/\text{seg}$

VELOCIDADES (en m/s)				
24.21	26.46	29.48	30.32	31.60
32.88	33.03	33.63	35.14	35.23
35.59	35.89	35.95	36.07	36.49
36.5	37.13	37.48	38.01	38.21
38.53	38.91	39.26	39.45	40.32
40.36	40.49	40.69	41.03	41.05
41.54	42.62	42.82	42.91	43.05
43.31	43.34	43.42	43.65	43.87
44.71	45.04	45.58	46.00	48.29
48.76	49.28	49.43	50.17	50.45
50.73	51.90	52.54	52.94	54.01
57.84	60.10	60.95	67.76	75.70

Tabla 4.4. Máximas velocidades anuales en una sección de un río.

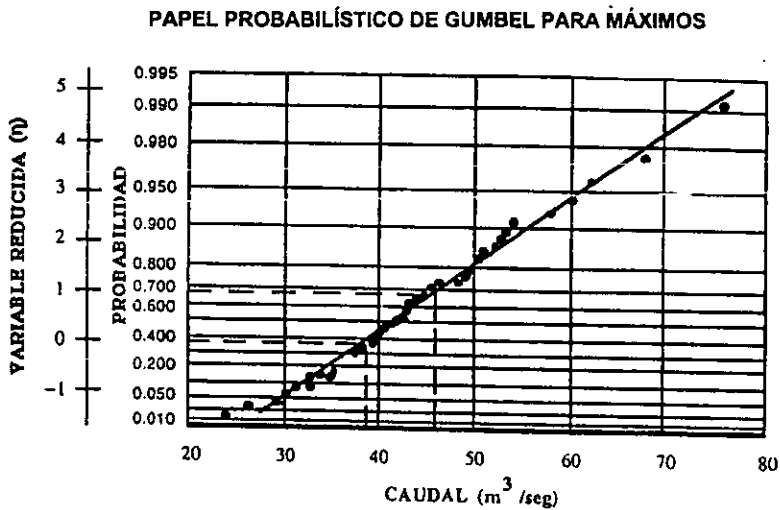


Figura 4.3 Papel probabilístico de Gumbel para máximos y datos de máximas velocidades.

4.4.6 Papel Probabilístico de Weibull

La función de distribución de Weibull para máximos es

$$y = F(x; \lambda, \beta, \delta) = \exp \left[- \left(\frac{\lambda - x}{\delta} \right)^\beta \right] ; \quad -\infty < x \leq \lambda \quad 4.33$$

Tomando logaritmos dos veces se obtiene

$$-\log[-\log(y)] = -\beta \log \left(\frac{\lambda - x}{\delta} \right) = -\beta \log(\lambda - x) + \beta \log \delta \quad 4.34$$

y comparando con (6.18) y (6.19) se llega a

$$\xi = g(x) = -\log(\lambda - x) \quad 4.35$$

$$\eta = h(y) = -\log[-\log(y)]$$

y

$$a = \beta ; \quad b = \beta \log \delta \quad 4.36$$

que muestra que la transformación (4.35) convierte (4.33) en la familia de rectas

$$\eta = a\xi + b = \beta(\xi + \log \delta) \quad 4.37$$

Nótese que la escala η coincide con la del papel de Gumbel pero ahora la escala ξ es logarítmica.

Como el parámetro λ es desconocido se debe proceder por aproximaciones sucesivas hasta obtener una línea recta y luego estimar los restantes parámetros β y δ notando que para $\eta = 0$ y $\eta = 1$ se obtiene:

$$\eta = 0 = \beta(\xi + \log \delta) \Rightarrow \xi = -\log \delta \quad 4.38$$

$$\eta = 1 = \beta(\xi + \log \delta) \Rightarrow \xi = \frac{1}{\beta} - \log \delta$$

4.4.7 Papel Probabilístico de extremos

En las secciones anteriores se ha tratado el tema de los papeles probabilísticos en general. En esta sección se abordará el tema del uso de los papeles probabilísticos para el caso de los extremos. Si la muestra procede de una población con una distribución asociada a un papel probabilístico y ésta es asintótica, entonces se condiciona la forma

de utilizar el papel probabilístico. Esto último sucede mucho en el caso de distribuciones de extremos. Por tanto, no es correcto rechazar la hipótesis de que la muestra procede de una familia de distribuciones perteneciente al dominio de atracción asociado a un papel probabilístico, sólo por no mostrar una gráfica no lineal.

Debido a que la única parte de la función de distribución que gobierna el comportamiento de los extremos (máximo o mínimo), o los estadísticos de orden alto o bajo, son las colas de distribución (derecha o izquierda, respectivamente), el resto de la información no es necesaria. Esto debe ser entendido correctamente si quieren evitarse serios errores. A este respecto debe indicarse que dos distribuciones con la misma cola por ejemplo; los mismos valores en el intervalo (0,9,1) de la probabilidad (ver Figura 4.4) tienen exactamente la misma distribución extrema (máxima) y la utilización de los datos en la cola izquierda no hace más que distorsionar el proceso de estimación. En consecuencia cuando los datos no siguen exactamente la distribución asociada al papel probabilístico, deben utilizarse los pesos adecuados en la estimación, pudiendo ser éstos incluso nulos.

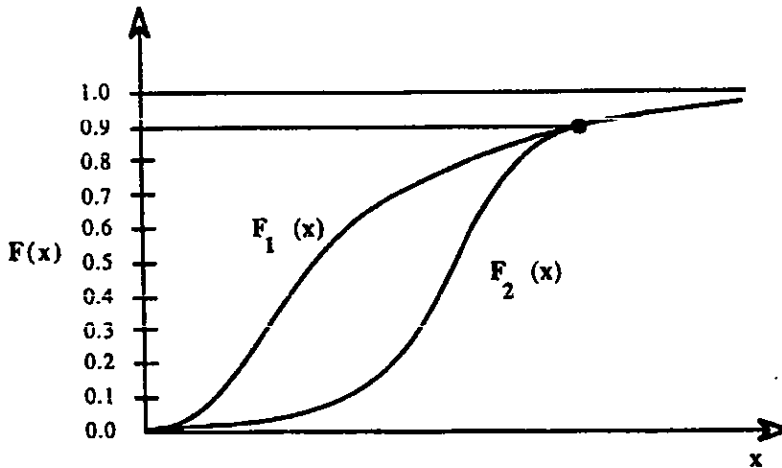


Figura 6.4 Dos distribuciones con la misma distribución límite para máximos.

4.4.8 Papel de Gumbel como referencia de extremos

Si se representa en papel de Gumbel para máximos la familia de Von-Mises, se obtiene

$$\eta = -\log \left\{ -\log \left[\exp \left[-\left(1 + \frac{c(\xi - \lambda)}{\delta} \right)^{-1/c} \right] \right] \right\} = \frac{\log \left(1 + \frac{c(\xi - \lambda)}{\delta} \right)}{c} ; \quad \left(1 + \frac{c(\xi - \lambda)}{\delta} \right) \geq 0$$

donde η y ξ son la ordenada y la abscisa.

Derivando con respecto a ξ dos veces se obtiene

$$\eta' = \frac{1}{\delta \left(1 + \frac{c(\xi - \lambda)}{\delta} \right)} ; \quad \eta'' = \frac{-c}{\delta^2 \left(1 + \frac{c(\xi - \lambda)}{\delta} \right)^2}$$

Nótese que cuando se aproxima al extremo superior de la distribución η' tiende a infinito si $c < 0$ y también a 0, si $c > 0$. Este hecho es muy útil en la identificación de los dominios de atracción de Weibull y Fréchet, pues muestran pendientes verticales y horizontales en la cola de interés, respectivamente. Nótese, también, que h' puede tender a cero o infinito para distribuciones tipo Gumbel si $\delta \rightarrow 0$ ó $\delta \rightarrow \infty$, respectivamente.

También se tiene

$$\eta''' > 0 \text{ si y sólo si } c < 0$$

$$\eta''' = 0 \text{ si y sólo si } c = 0$$

$$\eta''' < 0 \text{ si y sólo si } c > 0$$

Si se tratara de la cola izquierda, los símbolos ">" y "<" deben ser intercambiados.

En consecuencia, el papel de Gumbel para máximos (mínimos) y en la cola de interés, las distribuciones de tipo Weibull aparecen como cóncavas (convexas), las de tipo Fréchet como convexas (cóncavas) y las de tipo Gumbel como restas.

4.4.9 Caso de Máximos

Con objeto de ilustrar gráficamente el papel de las colas en el comportamiento de los extremos, se han dibujado en la figura 4.5 las funciones de distribución más conocidas en papel probabilístico de Gumbel máxima. Nótese que por no ser ninguna de ellas una distribución de Gumbel de máximos, todas exhiben no linealidad. La figura 4.5 muestra la linealidad de la cola de la derecha de la distribución exponencial. Esto confirma que ésta distribución pertenece al dominio de atracción de Gumbel para máximos. Nótese también las curvaturas de las distribuciones uniforme y de Cauchy y las pendientes vertical y horizontal de éstas, respectivamente, cuando se aproximan a sus límites superiores. Esto sugiere dominios de atracción de Weibull y de Fréchet, respectivamente.

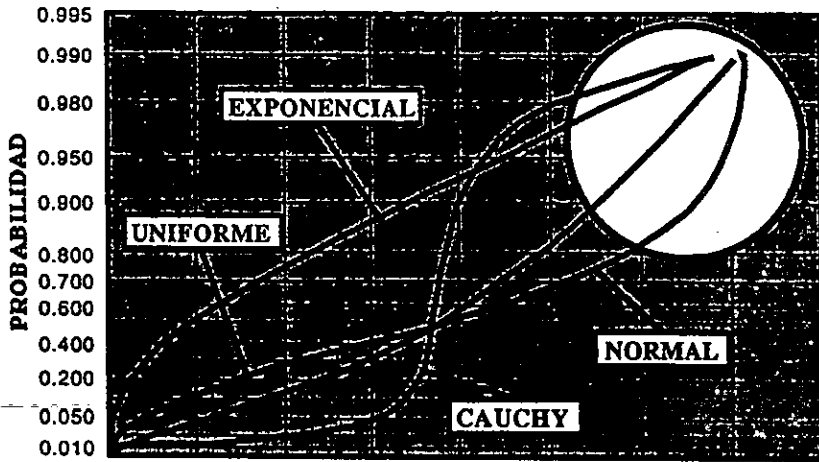


Figura 4.5 Distribución exponencial, uniforme, normal y Cauchy en papel probabilístico de Gumbel para máximos.

4.5 Elección de la distribución de la altura de ola

4.5.1 La familia máxima de Gumbel

$$F(x; \lambda, \delta) = \exp\left[-\exp\left(\frac{\lambda - x}{\delta}\right)\right] \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

Esta familia ha sido utilizada por muchos autores (ver ejemplo Goda, 1988) y su fundamento teórico se basa en el hecho de que es una de las tres distribuciones asintóticas para máximos. La familia normal tiene como distribución asintótica la de Gumbel. Por ello, los datos que deben utilizarse para ajustar esta distribución deberán ser alturas de ola máximas. Alternativamente, podrían utilizarse datos de la cola derecha (excesos sobre un umbral).

4.5.2 La familia máxima de Weibull

$$F(x; \lambda, \delta, \beta) = \exp\left[-\left(\frac{\lambda - x}{\delta}\right)^\beta\right] \quad ; \quad \delta, \beta > 0 \quad ; \quad x \leq \lambda$$

Esta familia ha sido recomendada por Castillo y Sarabia (1992) y su fundamento teórico se basa en el hecho de que es una de las tres distribuciones asintóticas para máximos. Además, cualquier distribución de Gumbel puede ser aproximada tanto como se desee

por una distribución de Weibull. Por ello, los datos que deben utilizarse para ajustar esta distribución deberán ser alturas de ola máximas. Alternativamente, podrían utilizarse datos de la cola derecha (excesos sobre un umbral).

4.5.3 La familia máxima de Frechet

$$F(x; \lambda, \delta, \beta) = \exp \left[- \left(\frac{x - \lambda}{\delta} \right)^\beta \right] \quad ; \quad \delta, \beta > 0 \quad ; \quad x > \lambda$$

La familia máxima de Frechet ha sido propuesta por Goda (1988). Sin embargo, esta distribución no puede surgir como una distribución asintótica para variables acotadas. Debido a razones físicas, la altura no puede exceder un determinado valor, la distribución de Frechet no está justificada por la teoría de los extremos. De hecho, Goda (1988) muestra que no es adecuada por sobre estimar alturas de ola para periodos de retorno altos.

4.6 Caso de aplicación

En este apartado se presenta el análisis extremal a través de la distribución de Gumbel, para valores máximos de altura de ola en puntos de control del World Wave Atlas ubicados en el océano Pacífico y en el Golfo de México. Dicho trabajo se realizó con el objeto de determinar si se pueden recomendar esta distribución para su empleo en posteriores análisis de valores extremos del litoral mexicano.

Los puntos de control están distribuidos como se muestra en el mapa de la **Figura 6.15** del capítulo 6. En estos puntos es posible obtener los registros de altura de ola máxima por año, los datos son extraídos como se explica más adelante en los siguientes apartados, el tratamiento que se les aplica es el mismo que se describe en los ejemplos de este capítulo.

Debido a que solo se cuentan con 11 de registro, parece que la distribución no se ajusta de manera adecuada, sin embargo los resultados pueden utilizarse para realizar estimaciones iniciales de la altura de ola máxima.

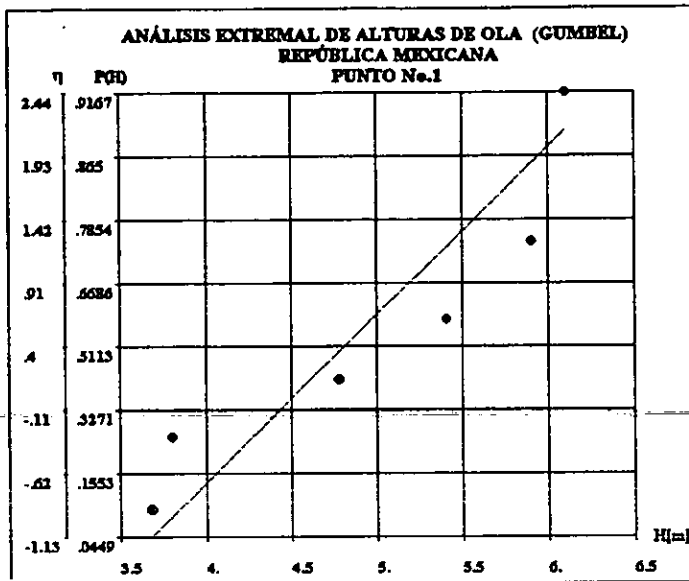


Figura 4.6a. Análisis extremal con la distribución de Gumbel, punto 1.

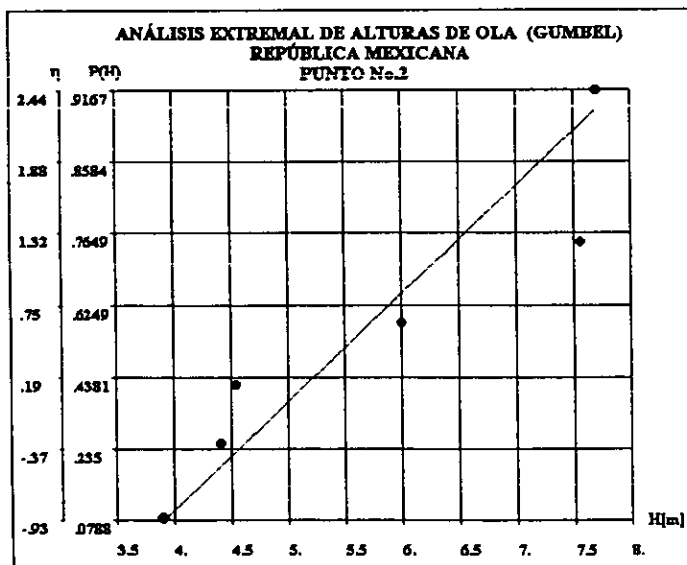


Figura 4.6b. Análisis extremal con la distribución de Gumbel, punto 2.

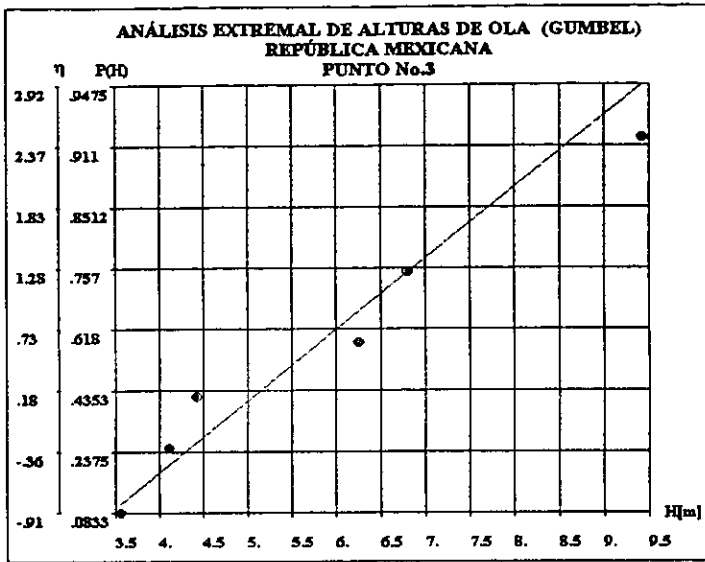


Figura 4.6c. Análisis extremal con la distribución de Gumbel, punto 3

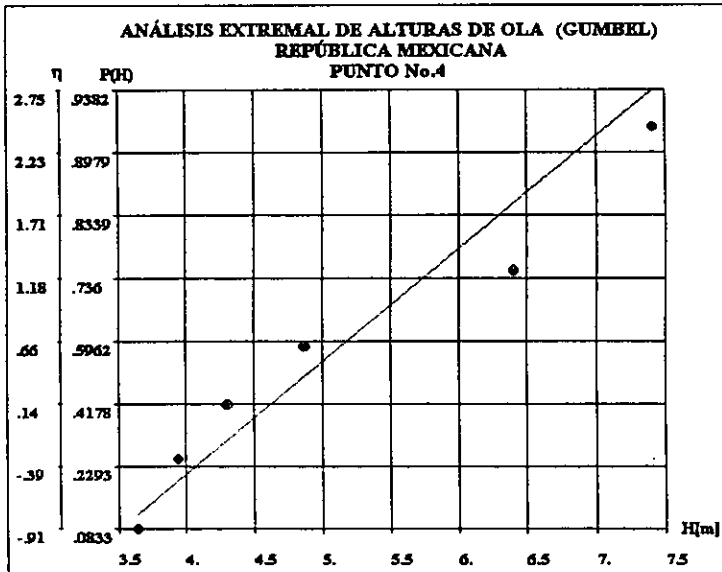


Figura 4.6d. Análisis extremal con la distribución de Gumbel, punto 4

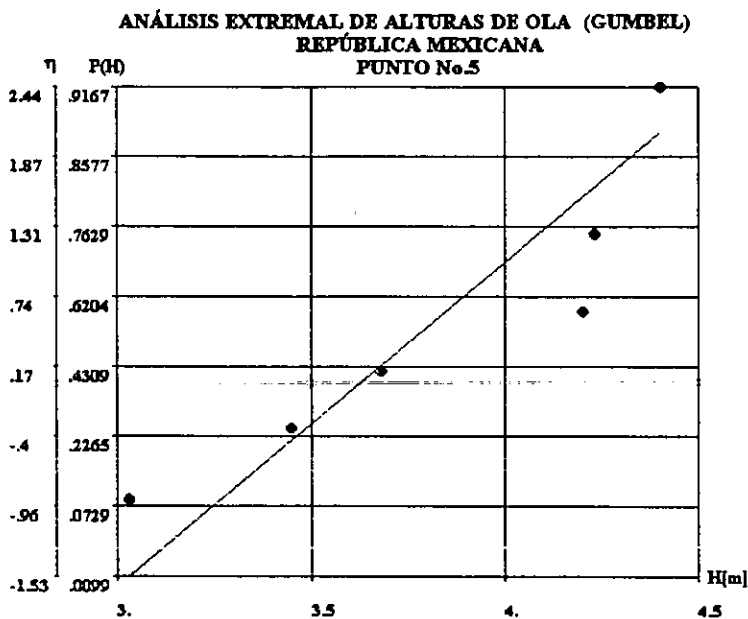


Figura 4.6e. Análisis extremal con la distribución de Gumbel, punto 5

Como se muestra en las figuras 4.5 (a) – (e) la distribución de gumbel se ajusta bastante bien los valores máximos de altura de ola. Sin embargo de los casos presentados, el mejor ajuste se obtienen en las figuras 4.5 (c).

5. EL VIENTO COMO GENERADOR DE OLEAJE

5.1 Introducción

Como la Tierra no está fija ni tiene una superficie uniforme y regular, cada una de sus partes o regiones recibe distinta cantidad de calor solar, principalmente a causa de la distribución de los continentes y de los mares, aunado al hecho que las corrientes verticales por convección, producen movimientos horizontales de aire hacia la superficie terrestre o paralela a ella. Estos flujos horizontales de aire, debidos a las desigualdades de temperatura, se denominan vientos. Ocasionalmente, cuando el desplazamiento horizontal apenas es perceptible, hasta el punto de que los instrumentos convencionales no registran movimientos de aire, se dice que éste está en calma.

El movimiento del aire es el resultado de la acción de varias fuerzas, en especial las fuerzas de presión y fricción. El movimiento de rotación de la Tierra y la configuración orográfica de la misma determinan vientos generales, periódicos y locales. El aire circula siempre empujando de un centro o zona de alta presión a un centro o zona de más baja presión, a fin de anular la diferencia existente entre ambas.

El impulso del viento depende de las variaciones de presión, pues cuanto más pronunciadas son éstas mayor es el impulso y fuerza del viento. Una vez que el viento empieza a soplar, entran en juego varios factores, entre ellos la fuerza producida por la rotación del planeta, llamada fuerza de Coriolis, y la fricción de la corriente con los accidentes orográficos. El viento no sopla con regularidad, sino a ráfagas y pulsaciones. También varía constantemente de dirección. Sólo para corrientes muy débiles del orden de los cuatro metros por segundo, fluye el aire con estructura laminar. En cuanto rebasa ese límite, variable con la geometría del terreno, ya aparece el fenómeno de turbulencia, muy predominante a poca altura sobre el suelo.

5.2 La circulación general

Como las regiones ecuatoriales reciben más calor solar que las polares, eso determina, en general, el desplazamiento de aire entre las latitudes altas y bajas. En el ecuador, el aire caliente asciende y disminuye la presión cerca del suelo, al tiempo que aumenta por encima de éste. El resultado pues, es que cerca de la superficie terrestre la presión atmosférica o barométrica es mayor en los polos que en el ecuador, mientras que en las capas de aire más elevada la situación es inversa. Con el fin de equilibrar esas diferentes presiones, el aire ecuatorial pasa hacia los polos en las regiones altas (vientos contralisios), mientras que el polar se desplaza hacia el ecuador cerca de la superficie terrestre (vientos alisios).

Esta descripción general también tiene complicaciones y particularidades, pues el aire ecuatorial calentado que asciende y se desvía hacia los polos, se enfría gradualmente a medida que avanza y desciende a tierra a una latitud aproximada de 30° Norte y Sur. Parte de esa corriente retorna hacia la región de baja presión constante en el ecuador, mientras que el resto sigue su camino hacia el polo, pero a nivel del suelo. Finalmente,

ese aire enfriado, que llega hasta los límites del polo, se encuentra con otro más denso, que se separa del polo hasta una latitud de 60° , y se eleva sobre el mismo. Este proceso nos indica que, además de la región de baja presión existente en el ecuador y las de elevada presión de los polos, hay círculos de presión intermedia: uno, de alta presión, alrededor de la latitud 30° , determinado por el aire descendente; y otro, de baja presión alrededor de la latitud de 60° .

5.2.1 La fuerza de Coriolis

Si no fuese por el movimiento de rotación de la Tierra, los vientos superficiales producidos por la circulación general, soplarían hacia el Norte o hacia el Sur. Pero no ocurre así debido a que las distintas partes del globo giran a diferentes velocidades. Como la circunferencia ecuatorial es de 40 076 km, un punto situado sobre la misma recorrerá esa distancia en 24 horas, o sea, que completará una revolución, lo que da una velocidad de más de 1 600 km/h. Pero como el diámetro se va reduciendo con la latitud, hasta no existir en los polos, la distancia que debe de recorrer un punto para completar una revolución en 24 horas disminuye hacia los polos, por lo que la superficie terrestre se desplaza más lentamente.

El efecto de rotación de nuestro planeta, que gira sobre su eje de Oeste a Este, se llama fuerza de Coriolis, y hace que los vientos se desvíen o despiacen hacia su derecha en el hemisferio Norte, y hacia su izquierda en el hemisferio Sur. La fuerza de Coriolis desempeña un papel primordial en la determinación de la dirección del movimiento del aire en las grandes masas en rotación de la atmósfera, por lo que rige la circulación de los ciclones, anticiclones y huracanes tropicales. La magnitud de esta fuerza es cero en el ecuador y alcanza su máximo valor en los polos, donde su magnitud es igual al doble producto de la velocidad del viento por la velocidad angular de la Tierra.

5.2.2 Oscilación del sistema general

Otro factor que complica el sistema general de vientos está ligado con la sucesión de las estaciones. Al hablar de la inclinación del eje de la Tierra y del movimiento de traslación en torno al astro rey, la perpendicularidad de los rayos solares varía constantemente de latitud; a veces están al Norte del ecuador, y otras al Sur, esto hace que el centro del sistema general de vientos cambie de acuerdo con la perpendicularidad de los rayos solares.

Cuando la luz baña verticalmente al ecuador, el sistema general se halla en el centro del globo terráqueo, pero cuando lo hace al Sur del ecuador, cosa que ocurre en enero, está es la zona que recibe más luz y calor por unidad de superficie. Este cambio da lugar a que el aire caliente ascendente que se encuentra en el centro del sistema de vientos también esté allí, por lo que todo el sistema gira hacia el Sur. Por el contrario, cuando los rayos solares caen perpendiculares al Norte del ecuador, lo que sucede en julio, el centro del sistema se desplaza hacia el Norte.

Esta oscilación del centro del sistema hace que determinadas partes de la Tierra no tengan las mismas tendencias generales de vientos durante todo el año. Los vientos que

obedecen a las reglas de este sistema general o planetario se denominan constantes o regulares.

5.3 Vientos constantes o regulares

Entre estos vientos, los más importantes, por su influencia en la navegación a vela, son los alisios, que soplan de Noreste a Suroeste en el hemisferio boreal, y de Sureste a Noroeste en el austral, llevando a las regiones ecuatoriales grandes masas de aire frío, en sustitución de la que se llevan los contralisios, que ya se ha indicado que viajan a gran altura, en sentido contrario, en dirección a los polos.

Los alisios boreales y australes se hallan separados por una faja de baja presión conocida como zona de calmas ecuatoriales o calmas chichas de los marinos, y fue donde las carabelas de Cristóbal Colón permanecieron tantas semanas antes de llegar a América. Esta zona en donde convergen los alisios, produciendo brisas y calmas, y que eran evitadas por los barcos de vela en todo lo posible, pues se exponían a pasar muchos días sin avanzar por falta de viento, no se encuentra exactamente en el ecuador, sino algo al norte del mismo.

A diferencia de los alisios, que son vientos constantes, regulares y suaves, hay otros que se producen y cambian periódicamente de sentido, manifestándose, con motivo de cada inversión, en forma más violenta y tormentosa. Se les considera como factores perturbadores del sistema general o planetario. Son las brisas y los monzones, que se conocen como vientos periódicos.

5.4 Vientos Periódicos

Por efecto de la variación diaria semidiurna de la diferencia de temperatura entre las masas de tierra y mar contiguas, se originan las brisas. El mar se calienta más lentamente que la tierra, pero, en cambio, retiene el calor durante más tiempo. Esto origina que durante el día el aire que está encima del suelo se caliente más rápidamente que el que se halla sobre el mar, elevándose, por lo que una masa de aire frío avanza desde la zona líquida para ocupar el sitio dejado por la masa ascendente. Esta corriente diurna de aire fresco se denomina brisa marina o virazón.

Durante la noche, la corriente de aire se invierte, ya que la tierra se enfría más rápidamente que el agua. Entonces se llama brisa de tierra o terral al aire frío que se dirige hacia el mar. Estas dos formas de brisa están particularmente marcadas en zonas tropicales.

A escala continental, el proceso que da lugar a las brisas produce los monzones, en los que la dirección del viento varía de una estación a otra, en vez del día a la noche, pues su origen obedece a la desigual temperatura del suelo y el mar en las dos estaciones extremas del año. Durante el verano la tierra está más caliente que el mar, y sobre ella se forman las grandes corrientes ascendentes de aire, mientras que en invierno la temperatura de la masa líquida es más elevada. Así, en el verano el viento se dirige del mar al continente, y en la época invernal lo hace de tierra al mar. Los monzones, que

también están influenciados por la fuerza de Coriolis, soplan seis meses en una dirección y otros seis meses en la opuesta.

Casi todos los grandes continentes tienen tendencias monzónicas, pero éstas revisten primordial importancia en las zonas subtropicales, desde el Océano Índico septentrional hasta el mar de China, aunque, por ejemplo, las Islas Canarias y el Océano Pacífico tienen sus monzones particulares.

5.5 Vientos locales o descendentes

Se llaman descendentes a los vientos secos y ardientes que se producen cuando una corriente de aire remonta una cordillera, en cuya falda, al enfriarse, la humedad se condensa y produce nubosidad y precipitaciones. Estos vientos descienden por la vertiente opuesta con poca humedad, siendo recalentados por la compresión que experimentan en su bajada.

Estos vientos también se conocen como locales, pues obedecen y están afectados por la topografía del lugar, la cual, para efectos meteorológicos, es casi siempre la misma. Cada región pues, da un nombre para distinguir a sus vientos locales que, como es de suponer, se presentan muy a menudo y casi periódicamente.

La intensidad del viento es máxima a mediodía y mínima durante la noche, pero desde los 300 metros sobre el nivel del mar el fenómeno es inverso. En días en que otras causas no intervienen o influyen decisivamente, el viento suele soplar en dirección hacia el Sol. El viento es generalmente más fuerte en verano que en invierno. Sin embargo en países continentales aparece ordinariamente el máximo de marzo a julio, y el mínimo en agosto.

5.6 Los vientos en México

Los vientos ejercen también gran influencia en el clima de México. Durante la estación húmeda de mayo a octubre, los vientos soplan de ESE a ENE en el Golfo de México, interrumpidos a veces en junio, julio y agosto por vientos del N. En la estación seca a mediados de septiembre a mediados de marzo, reinan los nortes, flojos en septiembre y octubre, fuertes y continuos en diciembre, enero y febrero.

En el Golfo de México se sabe que se van a experimentar los vientos del NO y del NNO, frecuentes de noviembre a febrero, generados por un gran aumento de la humedad.

Elementos que caracterizan al viento

Son tres:

- Dirección en la que sopla
- Intensidad o velocidad con que sopla
- Frecuencia o número de veces que se presenta con determinadas características durante un lapso cualquiera, utilizándose normalmente la hora, el día, mes, estación o año.

5.7 Relación entre la velocidad del viento y el Fetch

La metodología para adecuar las observaciones de velocidad de viento está basado en la suposición de un modelo idealizado de capa límite planetaria, como la descrita en la **Figura 5.1**. Para condiciones típicas de latitud media, dicha capa existe solamente en los kilómetros más bajos de la atmósfera y contiene alrededor del diez por ciento de la masa atmosférica (Holton, 1979).

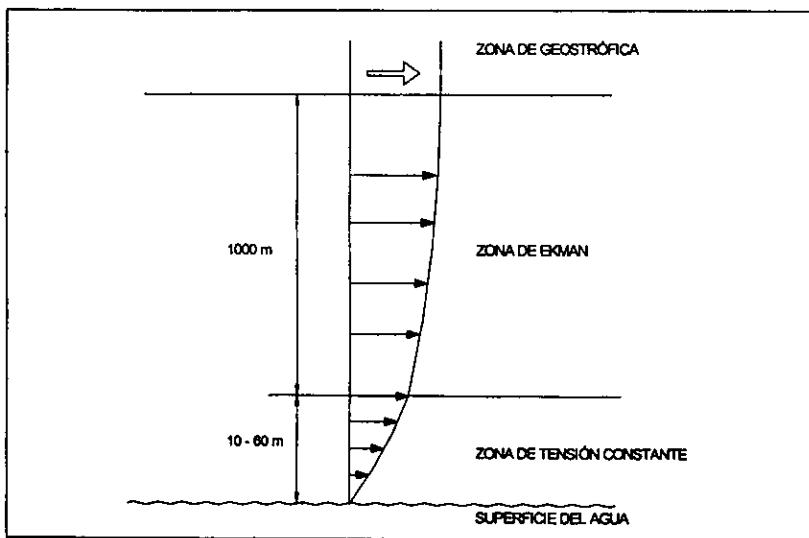


Figura 5.1 Capa límite atmosférica idealizada sobre el agua

En los niveles más bajos el viento actúa directamente sobre la superficie del agua, en la cual existe una región caracterizada por una zona de tensión relativamente constante entre la interfase aire-agua. Esta capa de la superficie será designada como región de tensión constante, de aquí en adelante.

En la parte superior de la zona de tensión constante se localiza la región de Ekman, donde actúan fuerzas adicionales como la de Coriolis, gradiente de presiones, tensión viscosa, etcétera.

Finalmente, sobre la región de Ekman, los vientos geostróficos son considerados. Ellos son el resultado del balance entre las fuerzas ejercidas por el gradiente de presiones y las fuerzas de Coriolis, para un sistema de escala sinóptico.

Para hacer uso de las ecuaciones que describen el desarrollo del oleaje, los vientos observados son caracterizados en seis categorías, tal y como lo muestra la **Tabla 5.1**.

Tipo de Observación	Acción Inicial	Domínio de solución
Sobre el agua (no procedente de barcos)		Capa de tensión constante
Sobre el agua (reporte de barcos)	Ajustar	Capa de tensión constante
En la costa (vientos procedentes de tierra)		Capa de tensión constante
En la costa (vientos procedentes del mar)	Vientos geostróficos estimados	Modelo de capa límite planetaria
Sobre tierra	Vientos geostróficos estimados	Modelo de capa límite planetaria
Vientos geostróficos		Modelo de capa límite planetaria

Tabla 5.1. Característica y tipo de Acción para Vientos, observados

No obstante que han sido señaladas seis categorías para los diferentes tipos de observaciones de la velocidad del viento, por conveniencia solamente dos casos serán considerados en la metodología que se desarrollara en lo subsecuente: Observaciones en la capa de tensión constante y observaciones en la región geostrófica. Los ajustes necesarios a la velocidad del viento, reportados por observaciones de barcos son realizados antes de proceder a cualquier tipo de cálculo. Cuando se presente el caso de que el viento sople desde tierra y sea medido en la línea costera en dirección hacia el mar, este se considera equivalente a los vientos observados en tierra adentro. Características complejas del viento causadas por fricción local o topografía obviamente no son considerados

5.7.1 Estimaciones y Ajustes Iniciales.

Comúnmente, las observaciones de la velocidad del viento sobre el mar son la selección más deseable de todas las fuentes para la predicción del oleaje. Frecuentemente, marinos en sus rutas de navegación registran una serie de datos de forma muy cualitativa, Cardone (1969) reviso los registros basados en observaciones en barcos y sugirió el siguiente ajuste:

$$U = 1.86 U^{7/9} \quad (\text{mps}) \quad 5.1$$

donde:

U = Velocidad ajustada de la velocidad del viento basada en registros de barcos

U_{obs} = Observaciones de la velocidad del viento basada en registros de barcos.

Para los casos, cuando las observaciones de velocidad del viento sean predominantes sobre la superficie terrestre, se puede emplear modelos similares al de capa límite para otros propósitos de predicción. Casi siempre, en esta aplicación, las siguientes estimaciones simples para vientos geostroficados son realizadas desde un nivel bajo de observaciones de viento (unidades en cgs):

$$Vg = \frac{U.}{\sqrt{C_{D_tierra}}} \quad 5.2$$

donde,

U. = Velocidad de fricción

$$U. = \frac{\kappa \cdot U_{obs}}{\ln\left(\frac{z_{obs}}{z_0}\right)} \quad 5.3$$

κ = Constante de von Karman ($K \sim 0.4$)

z_{obs} = Elevación de la observación del viento

z_0 = Longitud de superficie rugosa (asumida = 30 cm)

C_{D_tierra} = Coeficiente de arrastre sobre tierra

$$C_{D_tierra} \cong 0.00255(Z_0) \quad 5.4$$

5.7.2 Región de Tensión Constante

Las características de la región de tensión constante se pueden resumir como sigue:

- La región de tensión constante esta confinada en los últimos metros de la capa limite
- El flujo del viento es supuesto a ser paralelo a la superficie del agua
- La velocidad del viento es ajustada tal, que la tensión de fricción horizontal es casi independiente de la altura
- La tensión permanece constante en la capa y esta caracterizada por la velocidad de fricción U .

La estabilidad (gradiente aire - agua) tiene un efecto importante sobre el desarrollo del oleaje. El perfil de velocidades del viento en la región, esta descrito por la siguiente relación logarítmica modificada:

$$U_z = \frac{U}{\kappa} \left[\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) - \Psi\left(\frac{z}{L'}\right) \right] \tag{5.5}$$

donde

U_z = Velocidad del viento a la elevación z

z_0 = Longitud de rugosidad superficial

$$= \frac{C_1}{U} + C_2 U^2 + C_3 \tag{5.0}$$

$$= \left(C_1 = 0.1525, C_2 = \frac{0.019}{980}, C_3 = -0.00371 \right) \tag{5.7}$$

Ψ = Función universal de similitud
Fórmula de KEYPS (Lumley y Panofsky, 1964)

L' = Longitud de estabilidad de Obukov

$$= 1.79 \frac{U^2}{\Delta T} \left[\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) - \Psi\left(\frac{z}{L'}\right) \right]$$

ΔT = Gradiente de temperatura aire - agua 5.8

$$\Psi = 0 \qquad \Delta T = 0 \qquad 5.9$$

$$\Psi = C \frac{z}{L'} \qquad \frac{z}{L'} > 0$$

$$\Psi = 1 - \phi_u - 3 \ln \phi_u + 2 \ln \left(\frac{1 + \phi_u}{2} \right) + 2 \tan^{-1} \phi_u - \frac{\pi}{2} + \ln \left(\frac{1 + \phi_u^2}{2} \right) \qquad \frac{z}{L'} \leq 0$$

$$\phi_u = \frac{1}{1 - 18 R_i^{1/4}} \qquad 5.10$$

$$R_i = \frac{z}{L'} (1 - 18 R_i)^{1/4} \qquad 5.11$$

La solución de las ecuaciones anteriores es un proceso iterativo que converge muy rápidamente. El criterio de convergencia (ϵ) para U . y L' son dados por:

$$\epsilon_u \rightarrow 0.1 \text{ (cm/s)} \qquad \text{y} \qquad \epsilon_{L'} \rightarrow 1 \text{ (cm)} \qquad 5.12$$

Las ecuaciones que describen la evolución del oleaje, requieren la velocidad del viento equivalente a una elevación de diez metros sobre condiciones de estabilidad neutra ($\Delta T = 0$). Habiendo resuelto las ecuaciones en la región de tensión constante para U ., la velocidad del viento equivalente U_e puede ser fácilmente calculada por medio de la ecuación (5.5), usando (U ., $z = 10 \text{ m}$, $\Delta T = 0$):

$$U_{e_{1000}} = \frac{U}{\kappa} \left[\ln \left(\frac{1000}{z_0} \right) - 0 \right] \qquad 5.13$$

5.7.3 Modelo de Capa Limite Planetaria

Para los casos donde los vientos geostróficos son conocidos o han sido estimados, las ecuaciones de similitud que describen la capa limite planetaria deben de ser resueltas. En adición a las relaciones descritas anteriormente para la región de tensión constante, las siguientes ecuaciones describen el modelo de nivel superficial de agua al nivel geostrófico considerado:

$$\ln \frac{|\bar{V}_g|}{fz_0} = A - \ln \frac{U}{|\bar{V}_g|} + \sqrt{\frac{(\kappa^2)|\bar{V}_g|^2}{U^2} - B^2} \tag{5.14}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{BU}{\kappa|\bar{V}_g|} \tag{5.15}$$

donde

- $|\bar{V}_g|$ = Viento geostrófico
- f = Aceleración de Coriolis
- A, B = Funciones adimensionales de estabilidad

$$A = A_0 [1 - e^{(0.015\mu)}] \tag{5.16}$$

$\mu \leq 0$

$$B = B_0 - B_1 [1 - e^{(0.03\mu)}]$$

$$A = A_0 - 0.96\sqrt{\mu} + \ln(\mu + 1) \tag{5.17}$$

$\mu > 0$

$$B = B_0 + 0.7\sqrt{\mu}$$

μ = Parámetro adimensional de estabilidad

$$= \frac{\kappa U}{fL'} \tag{5.18}$$

A_0, B_0, B_1 = Constantes

θ = Angulo entre y la tensión superficial

Las ecuaciones 5.14 a 5.18 son resueltas simultáneamente con las ecuaciones 5.5 a 5.11 hasta que sea obtenida una convergencia adecuada para U , L' , y A . Un valor ligeramente para ($C_2 = 0.0144/980$) es usado en la ecuación 5.7. El criterio de convergencia usado para el sistema iterativo en las ecuaciones antes mencionadas es como sigue:

$$\varepsilon_U \rightarrow 0.1 \text{ (cm/s)} \quad \text{y} \quad \varepsilon_L \rightarrow 1 \text{ (cm)} \quad \text{y} \quad \varepsilon_A \rightarrow 0.1 \quad 5.19$$

El procedimiento de solución converge muy rápido. Como se menciona anteriormente, la ecuación 5.13 es usada para determinar la velocidad de viento neutral a una elevación de diez metros, usando (U , $z = 10 \text{ m}$, $\Delta T = 0$).

5.7.4 Ajustes Finales

Un ajuste adicional es realizado para las situaciones en las cuales la longitud del fetch sea relativamente corto antes de la aplicación de las ecuaciones que evalúan el desarrollo del oleaje. Para longitudes de fetch inferiores a 16 km, la siguiente reducción debe ser aplicada:

$$U_s = 0.9 U_o \quad 5.20$$

Finalmente, es necesario evaluar los efectos del viento de duración variable, t_i , sobre el crecimiento del oleaje. Las siguientes expresiones son usadas para ajustar la velocidad del viento a una duración de interés:

$$\frac{U_i}{U_{3600}} = 1.277 + 0.296 \tanh \left(0.91 \ln \left(\frac{45}{t_i} \right) \right) \quad 1 < t_i < 3600 \text{ s} \quad 5.21$$

$$\frac{U_i}{U_{3600}} = -0.15 \ln t_i + 1.5334 \quad 1 < t_i < 3600 \text{ s} \quad 5.22$$

La velocidad de viento en una hora, U_{3600} es primero determinada (usando $t_i = t_{obs}$). La velocidad del viento U_i en la duración deseada es entonces evaluada seleccionando la duración deseada t_i y usando la ecuación apropiada.

5.8 Desarrollo del Oleaje

Habiendo estimado la velocidad del viento sobre la superficie de agua para la duración de interés, el objetivo se centra en proveer una estimación del desarrollo del oleaje causado por la acción del viento. Las ecuaciones que describen el crecimiento del oleaje que se presentan a continuación dan una rápida y eficiente estimación para la evaluación del oleaje tanto en aguas profundas como en aguas someras. Las expresiones para mar abierto corresponden a las presentadas en el Shore Protection Manual (1984) y Vincent (1984). Las expresiones para longitudes de fetch restringido en aguas profundas pueden ser encontradas en Smith (1991). Se debe de hacer notar que la ley de arrastre (Garratt, 1977) empleada difiere de la presentada en el Shore Protection Manual. Las suposiciones más importantes, las cuales han de tomarse en cuenta al realizarse cualquier evaluación para el cálculo de las características del oleaje, contemplan lo siguiente:

- Se desprecia la energía debida a la presencia de otros trenes de oleaje existentes
- Son validas para geometrías con un fetch no muy grande ($F \leq 120$ km)
- Las velocidades del viento son relativamente constantes ($\Delta U < 5$ Kts) y dirección ($\Delta \alpha < 15^\circ$)
- La velocidad del viento está dada a diez metros sobre el nivel del mar ($z = 10$ m).
- Condiciones de estabilidad neutra.
- Valores del coeficiente de arrastre fijo ($C_D = 0.001$)

La metodología para ajustar la velocidad del viento ha sido descrita en el apartado anterior, U_{obs} , a diez metros de elevación sobre una condición neutra estable U_* . Vincent, (1984) sugirió que la velocidad del viento debe ser ajustada de tal forma que se consideren los efectos no lineales sobre la tensión que ejerce el viento que generan el oleaje. La ley de arrastre presentada por Garratt (1977) es usada:

$$\tau = \rho_a C_D U^2 \tag{5.23}$$

donde

ρ = densidad del aire

$$C_D = 0.001(0.75 + 0.067U) \tag{5.24}$$

La velocidad del viento neutra equivalente, entonces, es ajustada para un coeficiente de arrastre ($C_D = 0.001$) antes de la aplicación de la ecuación para el cálculo del crecimiento del oleaje:

$$U_a = U_o \sqrt{\frac{C_D}{0.001}} \quad 5.25$$

5.8.1 Consideraciones Sobre la Longitud del Fetch

Las expresiones que describen el crecimiento del oleaje, que a continuación se presentan, están divididas en cuatro categorías: aguas profundas y aguas someras, para ambas formas con longitud de fetch en mar abierto o para longitudes de fetch limitados por una geometría en particular (designado también como fetch restringido). En lo siguiente se presenta una breve explicación al respecto.

5.8.2 Fetch en Mar Abierto

En mar abierto, la generación del oleaje es limitada por las dimensiones de evento meteorológico, y las anchuras del fetch son del mismo orden de magnitud que las longitudes. Las estimaciones simplificadas para el crecimiento del oleaje en mar abierto tienen una relación significativa a la longitud del fetch (pero no a la anchura o forma). El crecimiento del oleaje se asume que ocurre a lo largo del fetch en la misma dirección en la que sopla el viento.

5.8.3 Fetch Restringido

En este caso se considera esencialmente el impacto que tiene la generación del oleaje debida al viento en geometrías complejas, tales como bahías, lagos, ríos, etcétera. Esta metodología, para fetch restringidos, hace uso del concepto de desarrollo del oleaje en dirección del viento que sopla desde tierra hacia los cuerpos de agua, considerando la geometría particular de cada caso. Los detalles de esta metodología pueden consultarse en Smith (1991), el cual está basado en los conceptos desarrollados por Donelan, (1980) en donde el periodo del oleaje (como una función de la longitud del fetch en la misma dirección del viento) es maximizado.

Para esta aproximación, las longitudes radiales del fetch (como medida de varias localizaciones a lo largo de la línea de costa del cuerpo de agua para cada punto de interés) son usadas para describir la forma del cuerpo de agua. Aunado a esto, la dirección del viento debe ser especificada. La Figura 5.2 ilustra los datos más relevantes de la geometría para la aproximación de fetch limitado

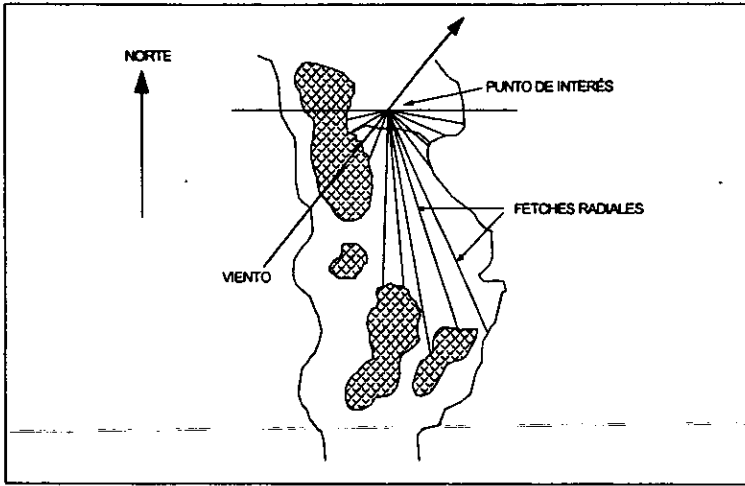


Figura 5.2 Datos de la Geometría para Fetch Restringido

La convención usada para especificar la dirección del viento y la geometría del fetch quedan representados en la Figura 5.3. La dirección del viento α es el ángulo radial del fetch, además β , y $\Delta\beta$ deben ser especificados en el sentido de las manecillas del reloj, desde el Norte del punto de interés donde la predicción del oleaje es requerida.

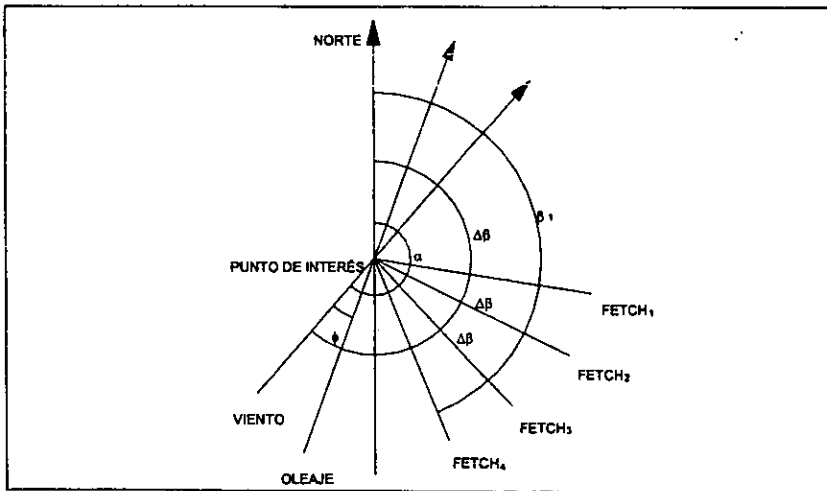


Figura 5.3 Convención para Fetch Restringido

De los datos especificados de las distancias radiales del fetch, los valores intermedios son interpolados en incrementos de un grado alrededor de todo el compás de 360°. Estos fetchs interpolados, son subsecuentemente promediados en el centro de la celda sobre arcos de 15 grados para todos los valores de un grado.

La dirección de desarrollo del oleaje (θ) es resuelta por medio de la maximización de la siguiente expresión:

$$F_{\phi}^{0.28} \cdot (\cos \phi)^{0.44} \quad 5.26$$

Este procedimiento maximiza los términos más relevantes en la expresión para el período de pico del oleaje, T_p . El ángulo ϕ es definido como la asociación entre la dirección del viento con el valor de interpolación de la longitud del fetch promediado. Los resultados de la ecuación 5.26 son evaluados desde ($\phi = 0 \pm 90^\circ$) para cada grado de incremento. Los productos de la ecuación 5.26 han sido maximizados, ϕ representa el ángulo entre las direcciones de propagación del oleaje y del viento, y θ representa la dirección del compás desde la cual el desarrollo del oleaje ocurre a lo largo de F_{ϕ} . Para una dirección determinada del viento habrá una dirección de desarrollo del oleaje correspondiente donde T_p sea un máximo, ecuación 5.26.

6. FUENTES DE INFORMACIÓN

6.1. World Wave Atlas (WWA 2)

Es una aplicación gráfica para PC con Windows, que presenta estadísticas de oleaje y vientos.

La primera versión del WWA 2 se basó en la cobertura global de todo el clima registrado por el satélite GEOSAT durante su misión de 1986 a 1989. La segunda versión del WWA 2 se complementó con datos de los 5 primeros años de la misión del satélite Topex/Poseidon, la cual continúa a la fecha para tener una mejor calidad en las mediciones. Las mediciones de altura de ola significativa y velocidad del viento las hacen ambos satélites cada segundo en siete kilómetros sobre su trayectoria.

A fin de contar con la mayor cantidad de datos disponibles del GEOSAT y Topex/Poseidon, la secuencia original de datos se reordenó para cuadrados de 10 grados latitud longitud.

GEOSAT

La puesta en órbita del satélite GEOSAT por parte de la US Navy en marzo de 1985 marcó una nueva era en el monitoreo del clima para el mundo. En los siguientes 4 cuatro y medio años GEOSAT midió la velocidad del viento y la altura de ola significativa. El objetivo primordial de la misión del GEOSAT además de medir, era obtener una descripción precisa de la geología marina. Durante los primeros 19 meses el satélite completó 72 órbitas a la Tierra (Ver figura 1).

La desviación promedio para la repetición de las trayectorias, está generalmente dentro de un rango de 1 kilómetro. Se tiene entonces que un área en la superficie del océano, se cubre generalmente con cuatro trayectorias del satélite formando una malla en el océano.

TOPEX/POSEIDON

La misión Topex/Poseidon fue esfuerzo conjunto de los gobiernos de USA y Francia. El satélite tenía dos altímetros a bordo, el Topex de la NASA, que opera simultáneamente en la C-band (5,3 GHz) y en Ku-band (13,5 GHz) dando dos estimaciones de altura de ola significativa y velocidad del viento, el Poseidon que utiliza la misma antena que el Topex pero que opera sólo un 10%. La inclinación de este es menor que la del GEOSAT y alcanza sólo los 66 grados de latitud en ambos hemisferios. La dirección de vuelo del Topex/Poseidon es opuesta a la del GEOSAT, viajando hacia el Este.

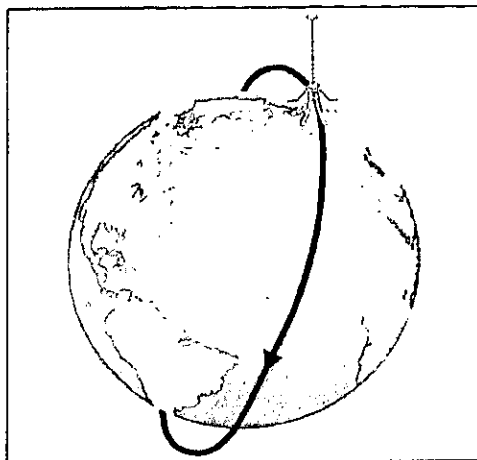


Figura 6.1. Esquema, mostrando la órbita del satélite GEOSAT

Parámetros

Los parámetros proporcionados por los satélites para el WWA 2 son los siguientes:

Altura de ola Significante, H_{m0} :

Se define tradicionalmente como el promedio del tercio de los valores más altos de un tren de olas en un período de tiempo.

La definición que maneja el WWA 2 es:

$$H_{m0} = 4 \int S(f) df \quad 6.1$$

donde $S(f)$ es el espectro de ola

Velocidad del viento, $WSpd$:

La velocidad del viento (en m/s) representa su velocidad a 10 m sobre el nivel medio del mar en un tiempo promedio de 10 minutos.

Puntos de control

Son datos de la UK Met Office Wave Model Archive del período 1986-1996, estos registros están instalados en el WWA. 2 y constituyen un acceso seguro a datos de dirección de oleaje, de altura de ola y velocidad de viento, recabados por los satélites anteriores.

Dichos puntos se basan en el hecho de que el módulo global de oleaje opera a una profundidad fija de 200 m sobre una malla de latitud/longitud. El análisis de los campos de vientos y parámetros derivados de los espectros unidimensionales (esto es, la energía dentro de cada banda espectral, más la dirección media para dicha banda), constituye los archivos, que inicialmente contenían información cada 12 horas, para posteriormente archivarlos cada 6 horas (desde junio de 1988).

La resolución espacial fue inicialmente de 150 km² o 1,5° de latitud por 1,835° de longitud (13 800 puntos de la malla). Esto se mejoró en junio de 1991, y actualmente maneja áreas de 85 km² o 0,833° de latitud por 1,25° de longitud (37 300 puntos de la malla).

con ellos se tiene acceso a los siguientes parámetros:

Hm0: Altura de ola significativa (m)
Tm02: Período medio de ola (s)
Tp: Período pico de ola (s) – Período de ola en el pico del espectro de ola.
ThTp: Dirección de ola en el pico del espectro (grados) (dirección desde la cual la ola viene)
Hm0s: Altura de ola para el Swell (m)
Hm0w: Altura de ola para el Sea (m)
Tpswell: Período de ola para el Swell (s)
Tpwea: Período de ola para el Sea (s)
Mdirs: Dirección de ola para el Swell (grados)
Mdirw: Dirección de ola para el Sea (grados)
WindSp: Velocidad del viento (m/s)
WindDir: Dirección del viento (grados) (dirección desde la cual sopla el viento).

Es importante notar que en una serie de tiempo de 10 años, para un cierto punto de la malla, no se puede considerar una calidad homogénea en los datos, debido a los cambios hechos a los modelos físico y atmosférico, en los cuales se mejoró el cálculo de la velocidad del viento. Ha sido una práctica usual en años recientes usar datos de satélite y si se dispone de datos de boyas de mediciones, para validar y calibrar un modelo confiable.

Datos de boyas de medición

Mediciones de boyas in-situ y de otros instrumentos se integran también al WWA 2. Desafortunadamente este tipo de datos sólo están disponibles en una cuantas áreas alrededor del mundo, algunas de ellas en aguas de USA y Noruega. Debido a problemas de operación las mediciones a menudo se ven interrumpidas, por lo que los datos de boyas que contiene el WWA 2 son de la red de la NOAA en el Golfo de México, los parámetros son:

Hm0: Altura de ola significativa (m)
Tz: Período medio de ola (s)

- Mdir:** Dirección media de ola (grados) promedio pesado de todo el espectro de ola (dirección de la cual viene la ola).
- Tp:** Período pico de ola (s) – período de ola en el pico del espectro de ola
- WindSp:** Velocidad del viento
- WindDir:** Dirección del viento (grados) (dirección de la cual sopla el viento)
- AirTemp:** Temperatura del aire (grados centígrados)
- AirPres:** Presión del aire (hPa)

6.2. XTIDE

XtIde es un programa para Windows desarrollado por el Gobierno de los Estados Unidos, con el cual se pueden hacer predicciones de marea en una amplia variedad de formatos. En principio es un simple reloj de mareas, pero puede programarse para generar gráficas, listados, calendarios, etc.

El programa contiene archivos de constantes armónicas para varios sitios de la República Mexicana, que fueron proporcionados por la NOAA, los cuales son indispensables para la ejecución del programa. Para mayor información se recomienda consultar las siguientes publicaciones:

Manual of Harmonic Analysis and Prediction of Tides. Special Publication No. 98, Revised (1940)

Edition. United States Government Printing Office, 1941.

Computer Applications to Tides in the National Ocean Survey.

Supplement to Manual of Harmonic Analysis and Prediction of Tides

(Special Publication No. 98). National Ocean Service, National Oceanic and Atmospheric Administration, U.S. Department of Commerce, January 1982.

6.3. Presentación de resultados

Este apartado contiene el procesamiento de los datos de las fuentes antes mencionadas y los procedimientos utilizados para elaborar las gráficas de mareas, oleaje y vientos.

6.3.1 Mareas

Las gráficas de mareas son construidas a partir del programa para predicción de mareas XtIde, los datos de entrada que requiere son; el sitio, la fecha de inicio y de terminación de la predicción, así como el paso de tiempo.

Como ejemplo se hará la predicción de mareas de 1999, para la Isla de Cozumel, Quinatana Roo, en la **Tabla 6.1** se tienen las componentes armónicas utilizadas para la predicción con sus respectivas amplitudes, velocidades y fases. El paso de tiempo que se utilizará es de 60 minutos.

Isla de Cozumel, Quintana Roo

Latitud 20.5° Longitud -87.0°

Huso horario - 06:00

 $H_0 = 0.20$ m

Componente armónica	Amplitud (m)	Fase (°)	Velocidad (°/hr)
J (1)	0.020	191.70	15.59
K (1)	0.020	222.00	15.04
K (2)	0.008	213.30	30.08
L (2)	0.002	238.30	29.53
M (1)	0.002	252.50	14.50
M (2)	0.070	263.00	28.98
M (3)	0.000	0.00	43.48
M (4)	0.000	0.00	57.97
M (6)	0.000	0.00	86.95
M (8)	0.000	0.00	115.94
N (2)	0.014	287.70	28.44
2N (2)	0.002	312.30	27.90
O (1)	0.030	283.00	13.94
OO (1)	0.001	161.00	16.14
P (1)	0.007	226.60	14.96
Q (1)	0.006	313.30	13.40
2Q (1)	0.001	343.50	12.85
R (2)	0.000	0.00	30.04
S (1)	0.000	0.00	15.00
S (2)	0.030	217.00	30.00
S (4)	0.000	0.00	60.00
S (6)	0.000	0.00	90.00
T (2)	0.002	218.80	29.96
LAMBDA (2)	0.000	0.00	29.46
MU (2)	0.002	309.00	27.97
NU (2)	0.003	284.30	28.51
RHO (1)	0.001	309.20	13.47
MK (3)	0.000	0.00	44.03
2MK (3)	0.000	0.00	42.93
MN (4)	0.000	0.00	57.42
MS (4)	0.000	0.00	58.98
2SM (2)	0.000	0.00	31.02
MF	0.000	0.00	1.10
MSF	0.000	0.00	1.02
MM	0.000	0.00	0.54
SA	0.072	173.10	0.04
SSA	0.045	64.10	0.08

Tabla 6.1. Componentes armónicas utilizadas para la predicción de Cancún, Quintana Roo.

El resultado de la corrida arroja en principio dos columnas, la primera contiene las fechas de cada elevación de la superficie del agua y la segunda las elevaciones del agua calculadas, sin embargo aquí se muestra el formato que se le ha dado en Excell. En la **Tabla 6.2** se muestra solo una parte de predicción. Otros resultados importantes que se

obtienen son la pleamar máxima calculada, bajamar mínima calculada y el nivel medio del mar.

Isla de Cozumel, Quintana Roo,
México
Unidades en metros

Día	Hora		h (m)
1/12/99			
	4:43	AM	0,3
	10:36	AM	0,18
	4:33	PM	0,3
2/12/99	11:02	PM	0,13
	5:25	AM	0,3
	11:11	AM	0,17
3/12/99	5:05	PM	0,31
	11:38	PM	0,11
	6:02	AM	0,3
4/12/99	11:42	AM	0,17
	5:35	PM	0,32
	12:11	AM	0,1
5/12/99	6:35	AM	0,3
	12:11	PM	0,17
	6:05	PM	0,32
6/12/99	12:44	AM	0,09
	7:08	AM	0,29
	12:40	PM	0,17
	6:35	PM	0,32
6/12/99			
	1:16	AM	0,09
	7:40	AM	0,29
	1:09	PM	0,16

Tabla 6.2. Resultados de la corrida de la predicción de marea para Cancún

Finalmente estos datos se llevan a Grapher y se obtiene lo siguiente:

Isia de Cozumel, Quintana Roo

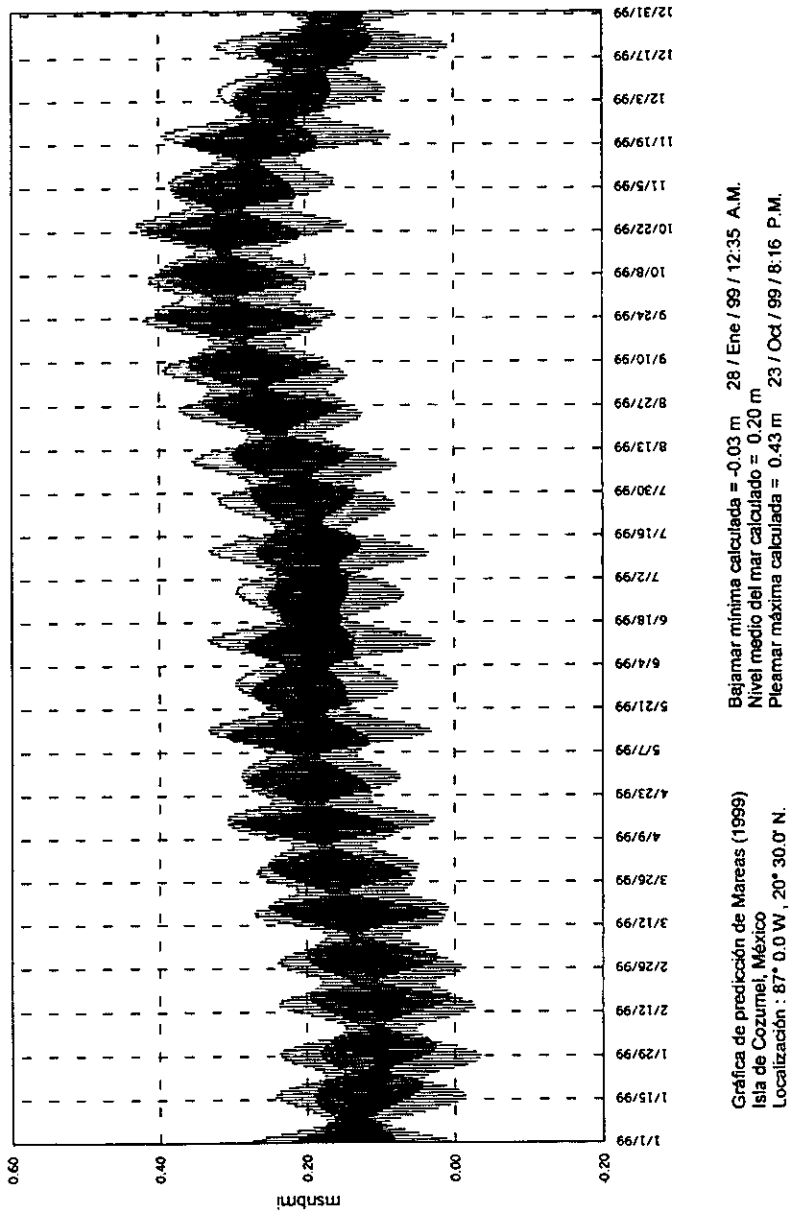


Figura 6.2. Predicción de marea de 1999 para Cancún Quintana Roo

6.3.2 Oleaje

En el WWA 2, se tiene acceso a parámetros oceanográficos importantes, tales como altura de ola significativa, velocidad y dirección del viento etc., los cuales son el resultado de mediciones de los satélites GEOSAT, TOPEX y ERS1. El período en el cual estos satélites registran datos para el WWA 2, va del 09/11/96 al 10/09/87, es decir casi 11 años.

Para la elaboración de las gráficas de altura de ola media, altura de ola media anual, estacional y mensual los datos se obtienen de la siguiente manera:

Se selecciona una región, ésta puede ser de un tamaño predeterminado, pero para este caso será de $2^\circ \times 2^\circ$ latitud - longitud, está se considera representativa para Tuxpan Veracruz. Ver Figura 6.3.

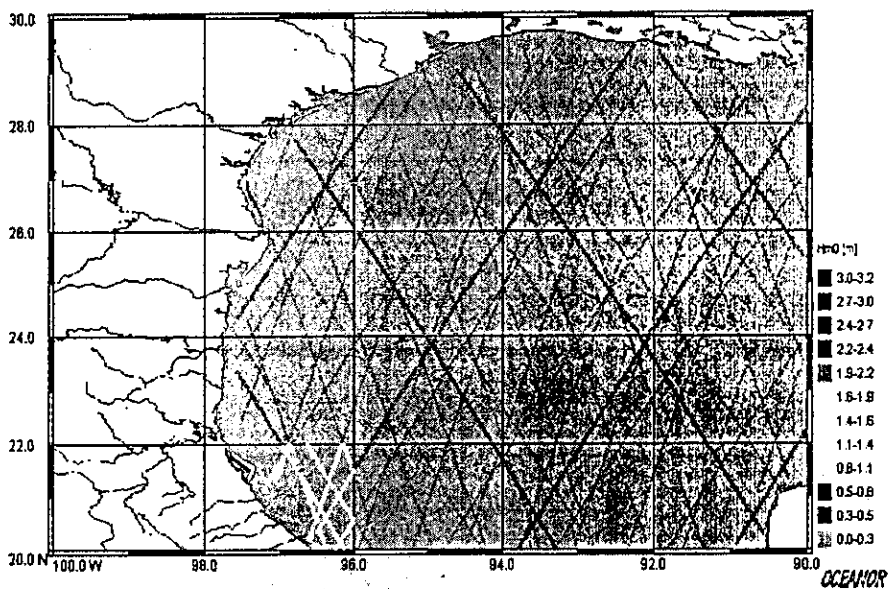


Figura 6.3 Región considerada para la zona de Tuxpan, Veracruz

Una vez seleccionada la región se tiene acceso al banco de datos, en este caso se tiene una tabla como la que se muestra en la Figura 6.4. A partir de esta tabla se genera la gráfica de frecuencias vs altura de ola significativa media. (Figura 6.5).

Hm0 [m]	#Obs.
0.0-0.5	538
0.5-1.0	4029
1.0-1.5	3734
1.5-2.0	1892
2.0-2.5	818
2.5-3.0	393
3.0-3.5	230
3.5-4.0	111
4.0-4.5	131
4.5-5.0	52
5.0-5.5	58
5.5-6.0	20
6.0-6.5	27
6.5-7.0	16
7.0-7.5	1
> 7.5	0

Figura 6.4. Tabla del banco de datos del WWA 2, Hm0 vs #Obs

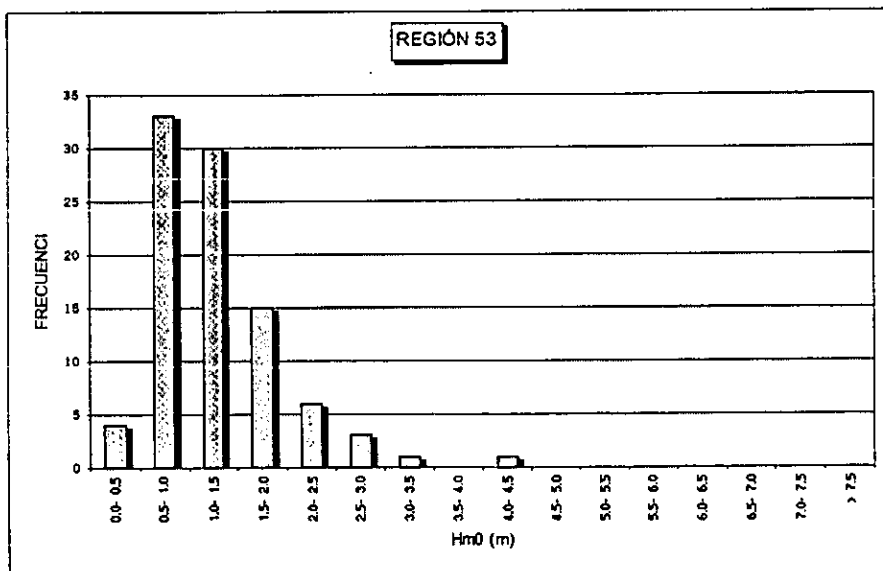


Figura 6.5 Altura de ola media

De manera similar se obtienen las gráficas de altura de ola media anual, estacional y mensual, las cuales se presentan a continuación.

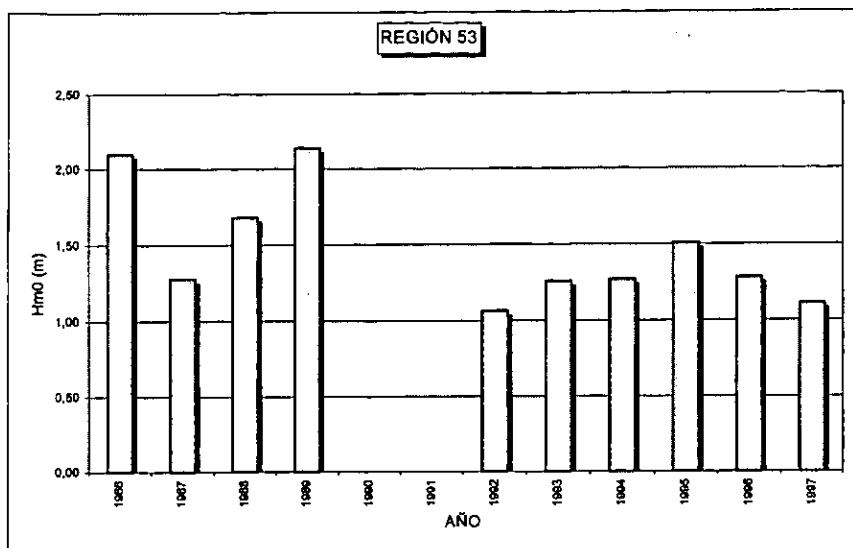


Figura 6.6. Altura de ola media anual

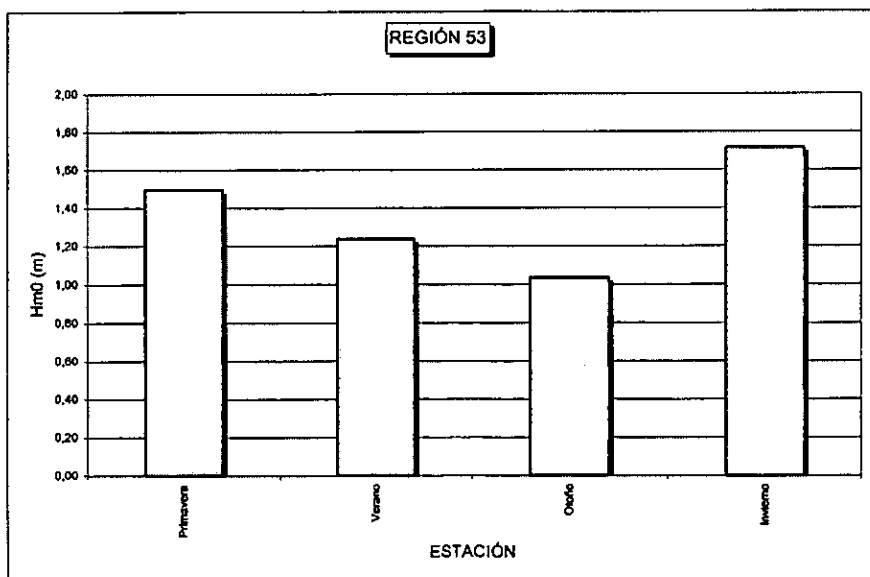


Figura 6.7. Altura de ola media estacional

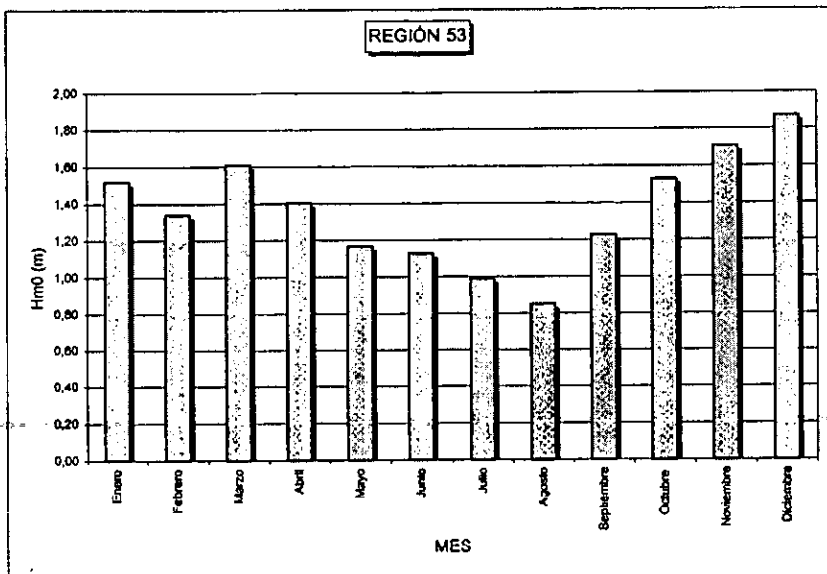


Figura 6.8. Altura de ola media mensual

Para elaborar las rosas de oleaje incidente y tablas de resúmenes de referencias cruzadas de altura y período de ola, se tomó el punto mostrado en la Figura 6.9.

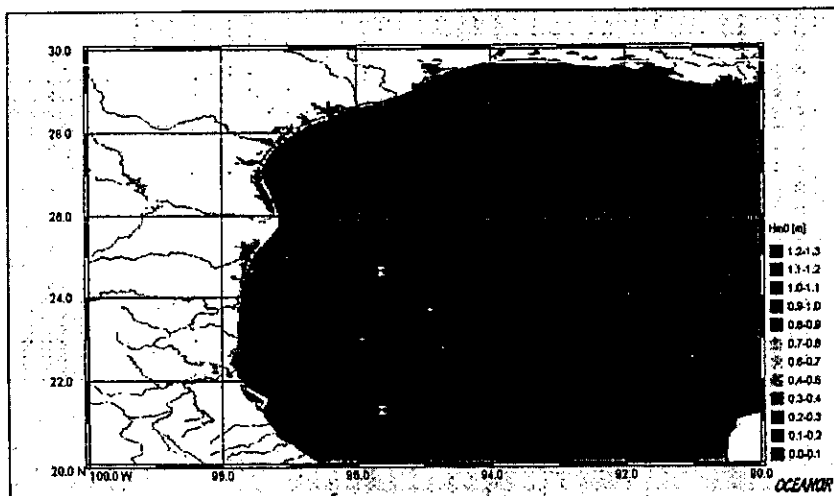


Figura 6.9. Punto de control utilizado para obtener rosas de oleaje incidente

Una vez seleccionado el punto de control se tiene acceso a la información mencionada en los apartados anteriores. Los datos obtenidos son los siguientes:

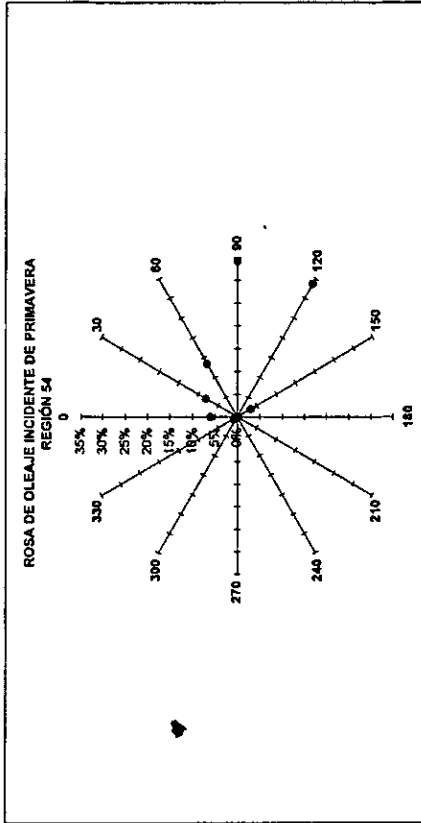
HmO-> TmO2	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
0.0-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.5-1.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.0-1.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.5-2.0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.0-2.5	19	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.5-3.0	19	141	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.0-3.5	26	266	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.5-4.0	49	621	116	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.0-4.5	16	662	518	21	1	0	0	0	0	0	0	0
4.5-5.0	6	451	630	76	2	0	0	0	0	0	0	0
5.0-5.5	1	209	519	342	23	0	1	0	0	0	0	0
5.5-6.0	1	102	343	236	103	2	0	0	0	0	0	0
6.0-6.5	1	48	142	196	133	23	6	1	0	0	0	0
6.5-7.0	1	32	40	152	64	69	17	1	0	0	0	0

Figura 6.10. Tabla del banco de datos del WWA 2, del punto de control seleccionado.

La tabla de la figura anterior corresponde a todo el periodo de registro, para las estaciones se tienen datos de las Figuras 6.11, 6.12, 6.13, 6.14.

Con el fin de tener una idea general del oleaje en las costas de la República Mexicana se elaboraron mapas de isolíneas de altura de ola, tanto para todo el periodo de registro, como de manera estacional.

Las consideraciones que se asumieron son las siguientes; se dividieron las costas de la República Mexicana, como se muestra en la Figura 6.15, para cada región se obtiene un punto que representa la altura de ola media, con estos puntos y con ayuda del programa para interpolación Surfer se trazaron las curvas de isolíneas de los mapas de las Figuras 6.16, 6.17, 6.18, 6.19 y 6.20.



Dirección	%
0	0.0%
30	5.1%
60	13.5%
90	34.7%
120	33.7%
150	3.5%
180	0.1%
210	0.0%
240	0.0%
270	0.1%
300	0.1%
330	0.8%
TOTAL	100.0%

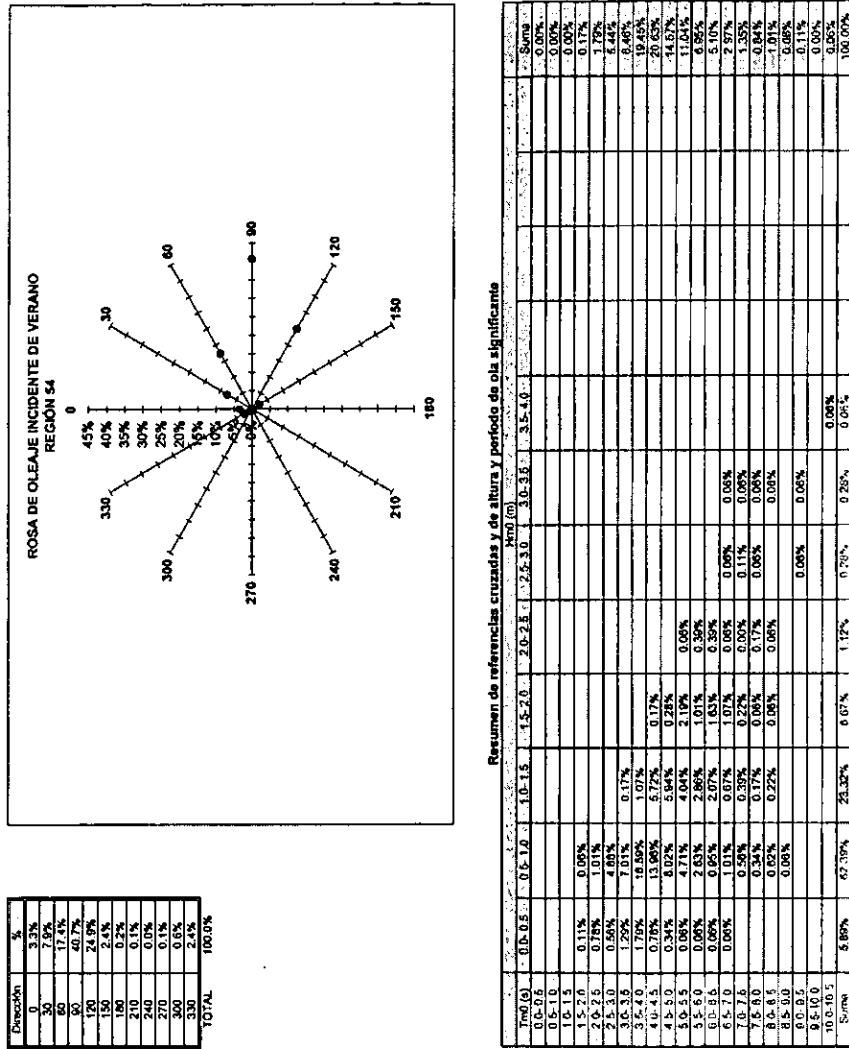
Resumen de referencias cruzadas de altura y periodo de ola significante

Hmd (m)	0.0-0.5	0.5-1.0	1.0-1.5	1.5-2.0	2.0-2.5	2.5-3.0	3.0-3.5	3.5-4.0	4.0-4.5	4.5-5.0	5.0-5.5	5.5-6.0	Suma
0.0-0.5													0.00%
0.5-1.0													0.00%
1.0-1.5													0.00%
1.5-2.0													0.00%
2.0-2.5													0.17%
2.5-3.0													1.68%
3.0-3.5													1.71%
3.5-4.0													1.60%
4.0-4.5													20.36%
4.5-5.0													19.04%
5.0-5.5													18.02%
5.5-6.0													10.21%
6.0-6.5													5.92%
6.5-7.0													3.78%
7.0-7.5													1.77%
7.5-8.0													1.31%
8.0-8.5													0.87%
8.5-9.0													0.51%
9.0-9.5													0.11%
9.5-10.0													0.06%
10.0-10.5													0.03%
10.5-11.0													0.03%
11.0-11.5													0.03%
11.5-12.0													0.00%
Suma	0.01%	37.24%	38.31%	16.31%	5.42%	0.91%	0.06%	0.06%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%

Primavera

Hmd: Altura de ola significante
 Tmd: Periodo de ola significante

Figura 6.11. Rosa de oleaje incidente y resumen de referencias cruzadas de altura y periodo de ola de primavera.



Verano

Hmd: Altura de ola significativa
Tmd: Periodo de ola significativa

Figura 6.12. Rosa de oleaje incidente y resumen de referencias cruzadas de altura y periodo de ola de verano.

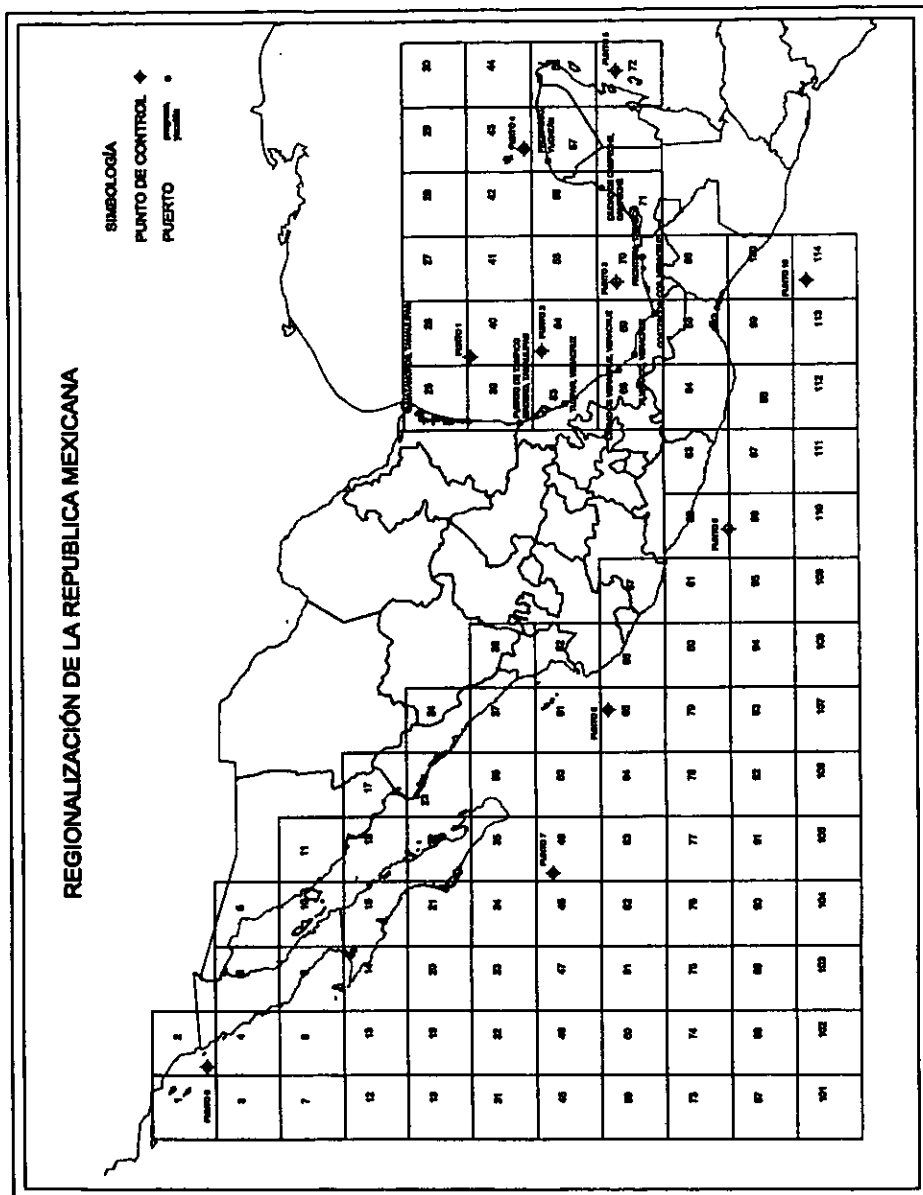
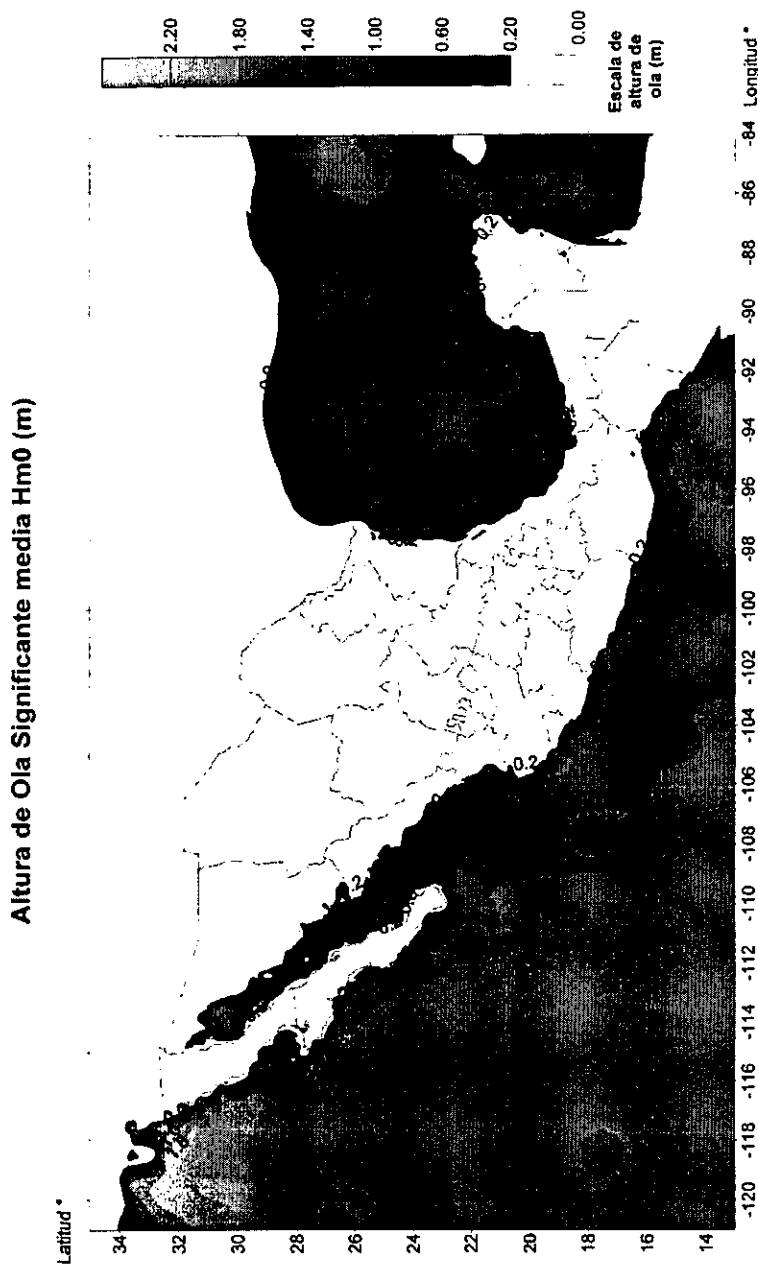


Figura 6.15. Mapa de Regionalización de la República Mexicana



Correspondiente al registro de 1986 a 1997

Figura 6.16. Mapa de isólinas de altura de ola para todo el registro

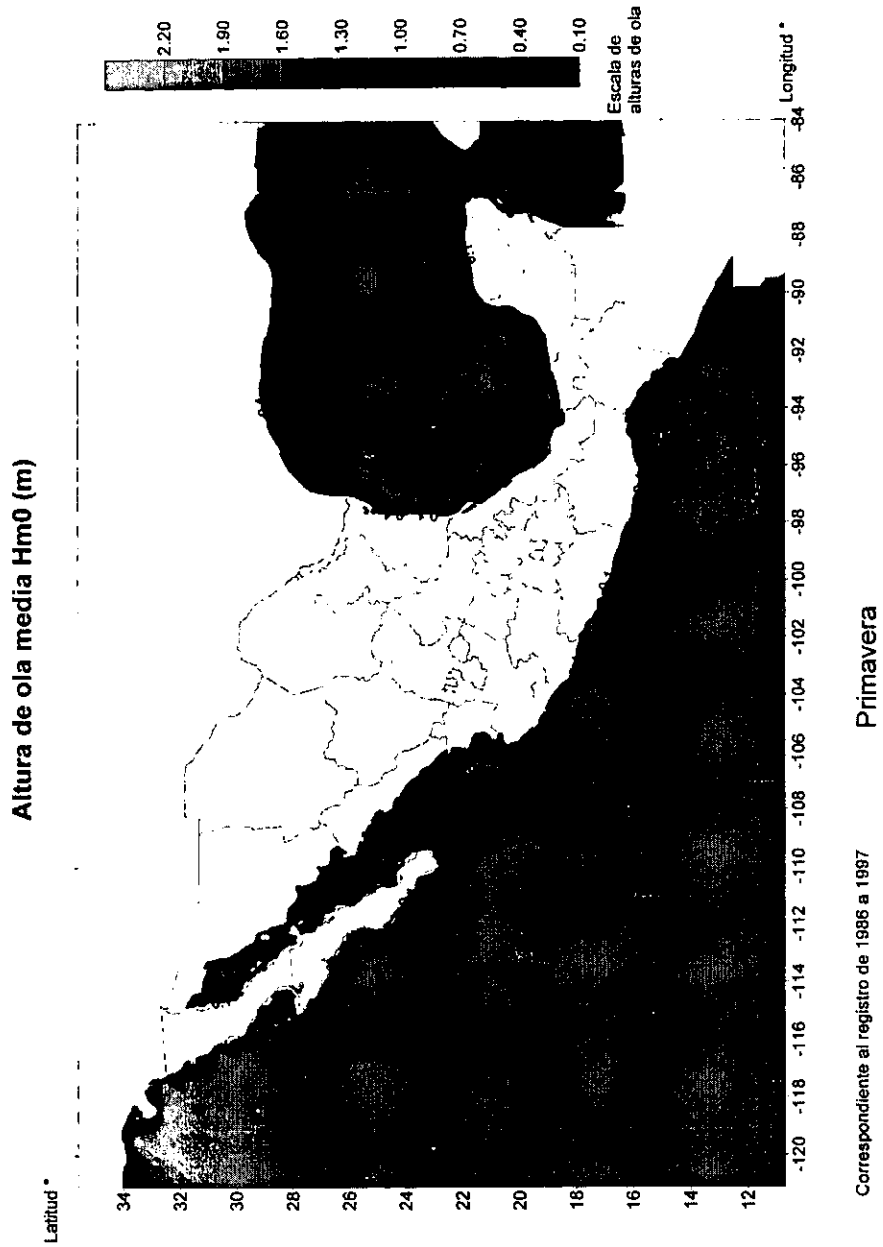


Figura 6.17. Mapa de isolíneas de altura de ola para primavera

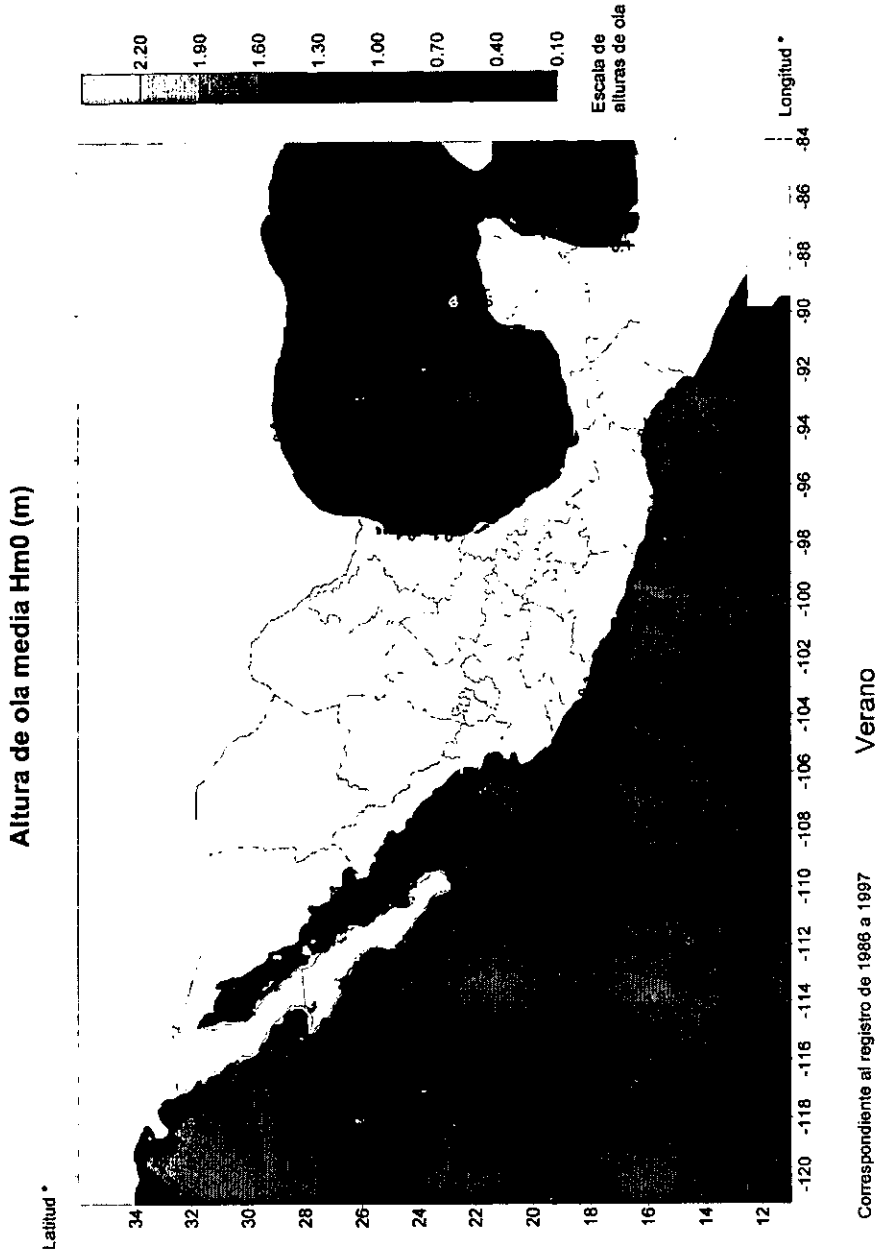


Figura 6.18. Mapa de isolíneas de altura de ola para verano

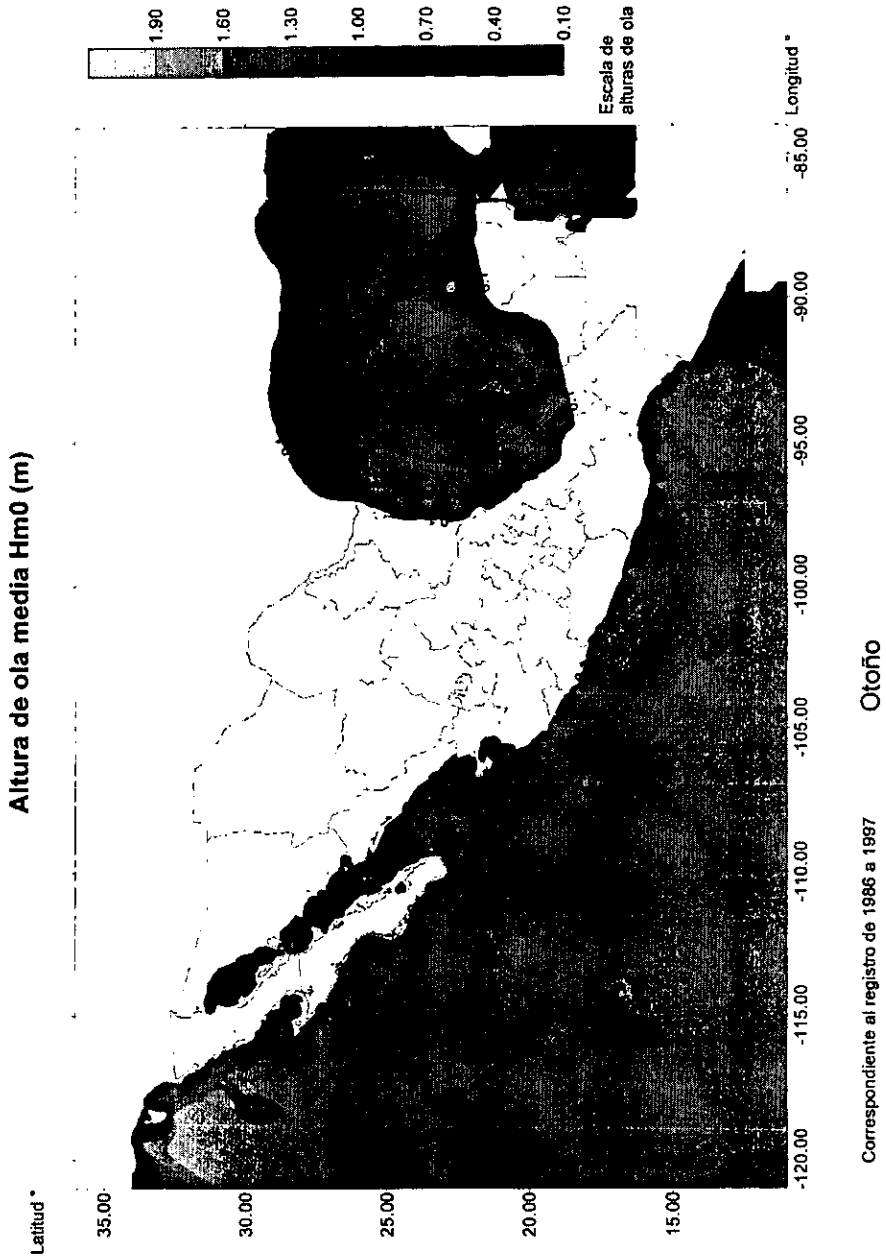


Figura 6.19. Mapa de isolíneas de altura de ola para otoño

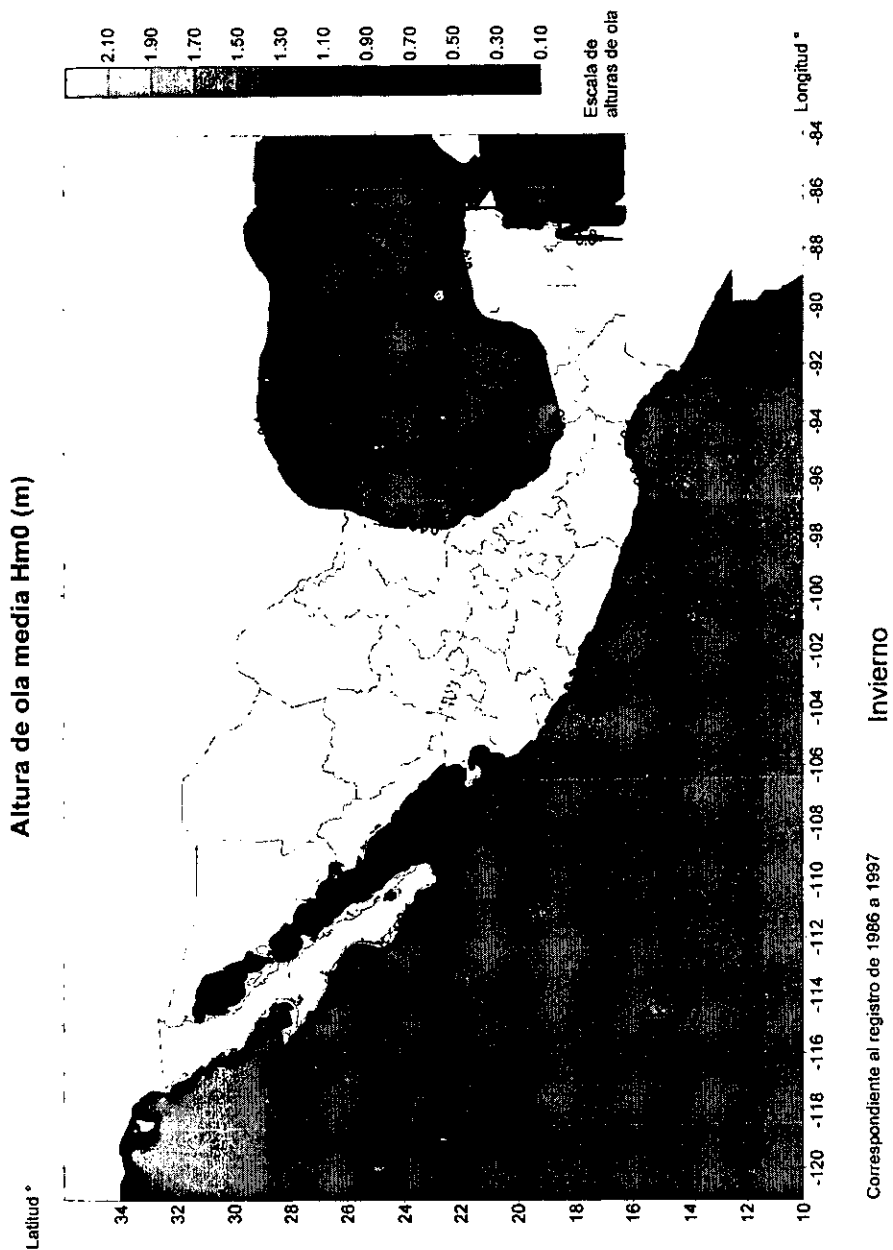


Figura 6.20. Mapa de isolíneas de altura de ola para invierno

6.3.3 Vientos

Las estadísticas que proporciona el WWA 2 para los vientos son la velocidad vs frecuencia y dirección del viento vs frecuencia, para la ingresar al banco de datos de la intensidad del viento se selecciona la región mostrada en la **Figura 6.21.**, está vez se encuentra ubicada cerca de las costas de Cancún, Quintana Roo.

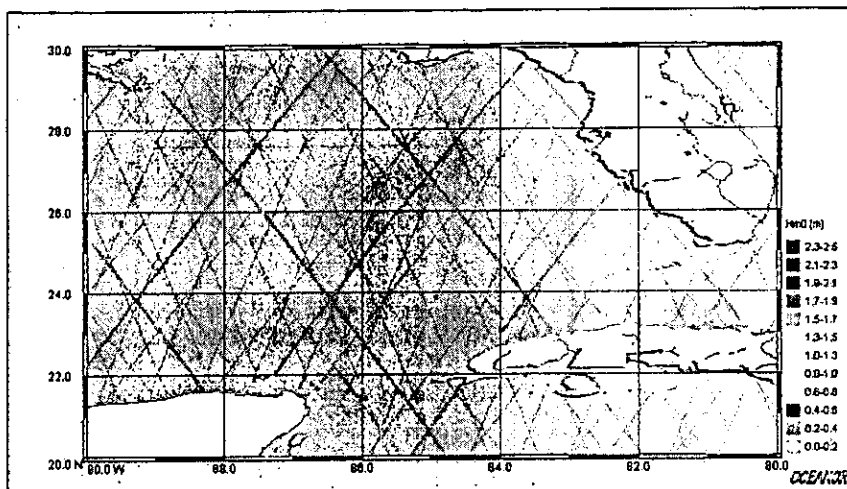


Figura 6.21. Región considerada para los histogramas de velocidad del viento.

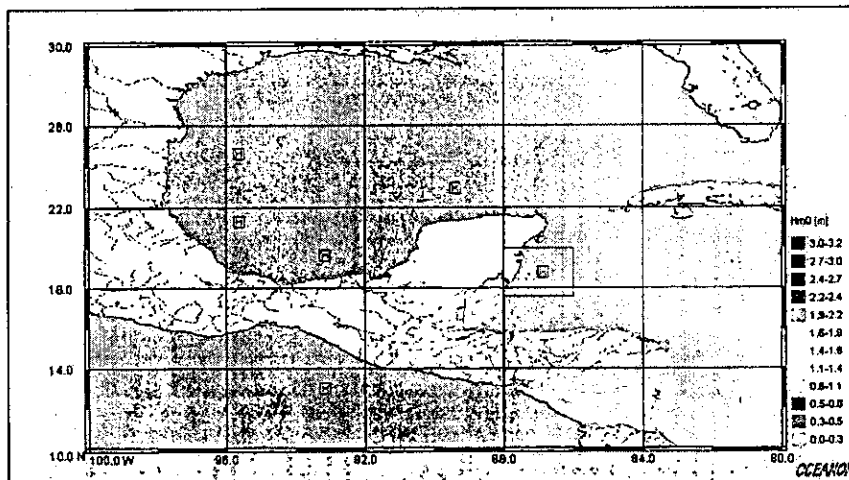


Figura 6.22. Punto de control considerado para las rosas de viento.

Para obtener los datos de la dirección del viento, el punto de control considerado es el que se muestra en la Figura 6.22.

Las gráficas de intensidad media del viento, intensidad media anual, mensual y estacional se presentan a continuación.

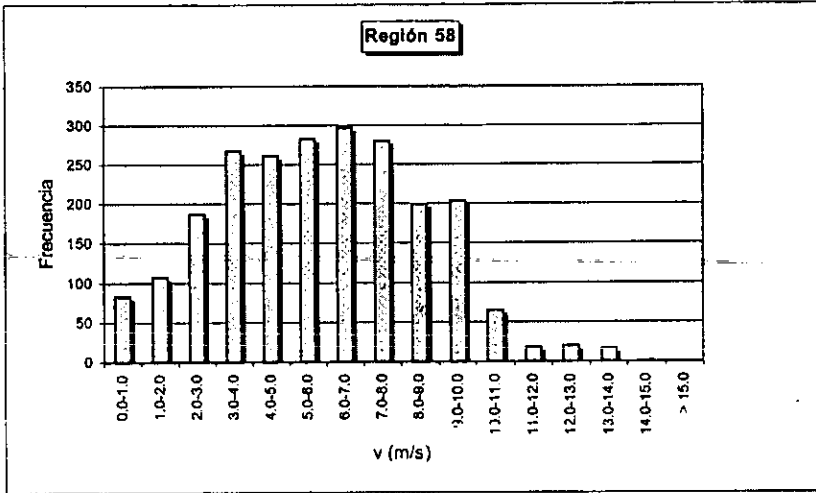


Figura 6.23. Velocidad media del viento

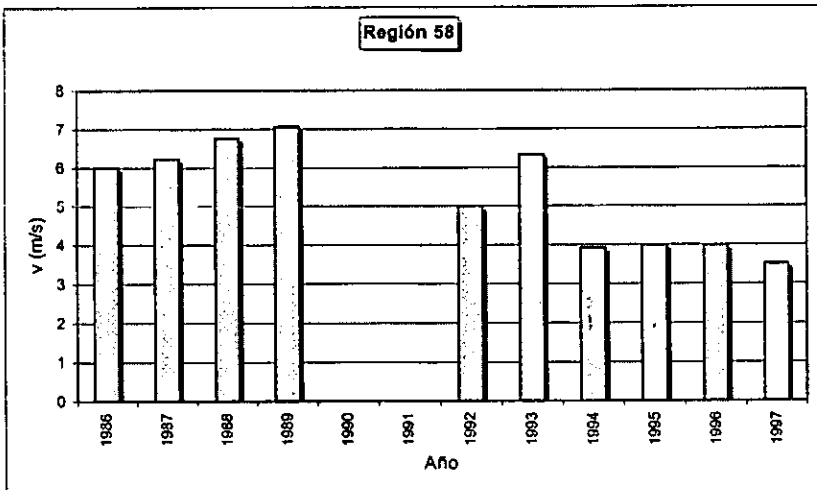


Figura 6.24. Velocidad media del viento anual

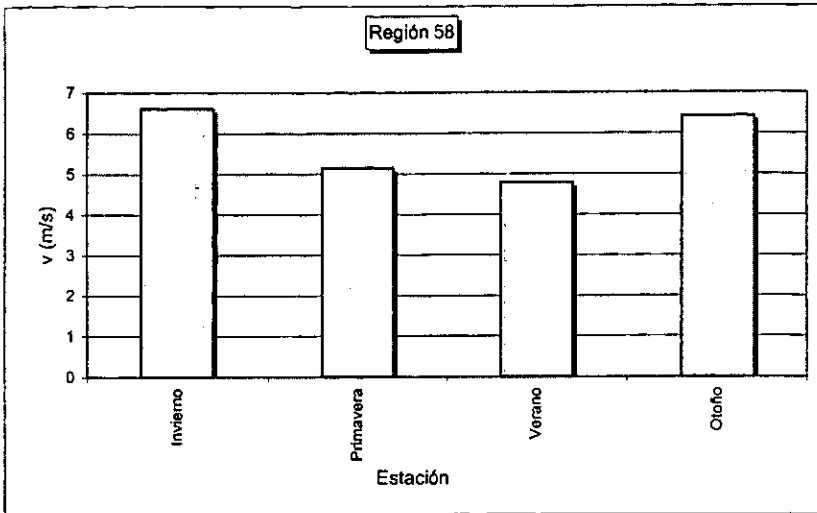


Figura 6.25. Velocidad media del viento estacional

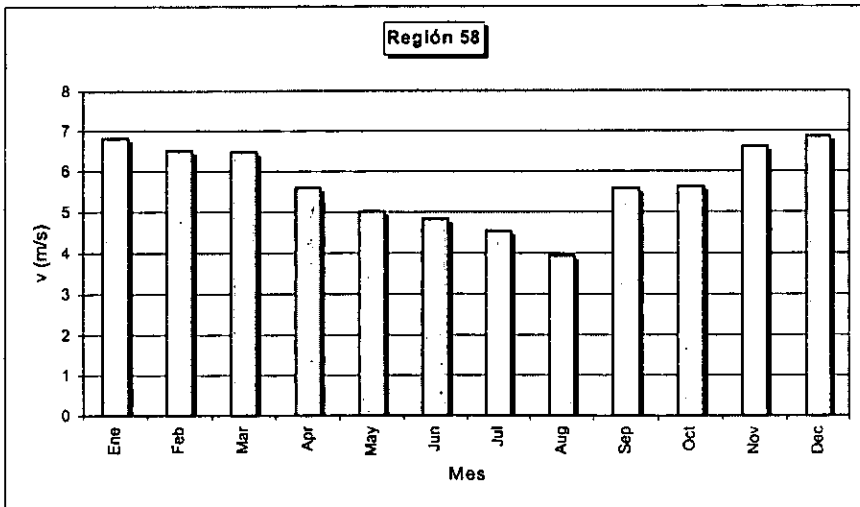


Figura 6.26. Velocidad media del viento mensual

Los mapas de isólinas para el viento siguen un proceso similar a los de oleaje, por lo que no se explicará su elaboración, estos mapas se presentan a continuación.

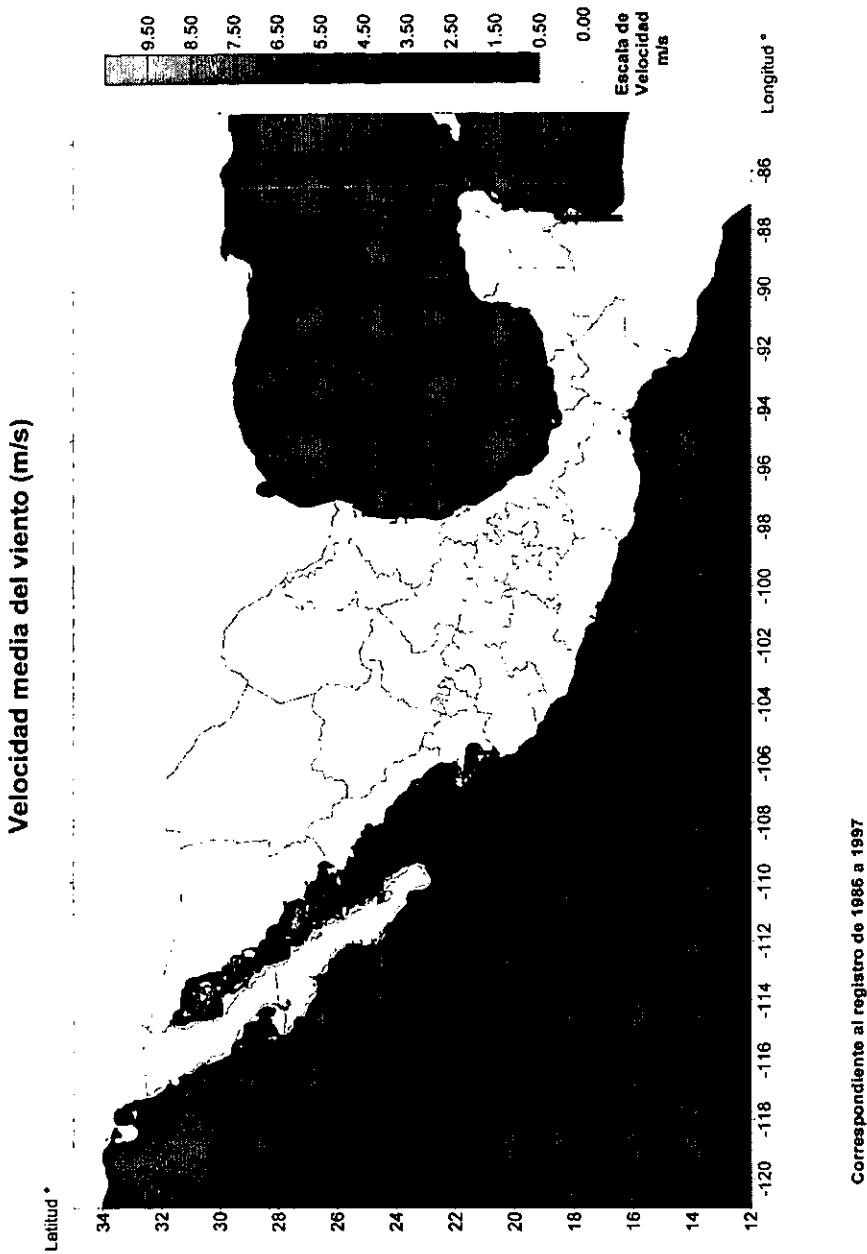


Figura 6.27. Mapa de isolíneas de velocidad del viento para todo el registro

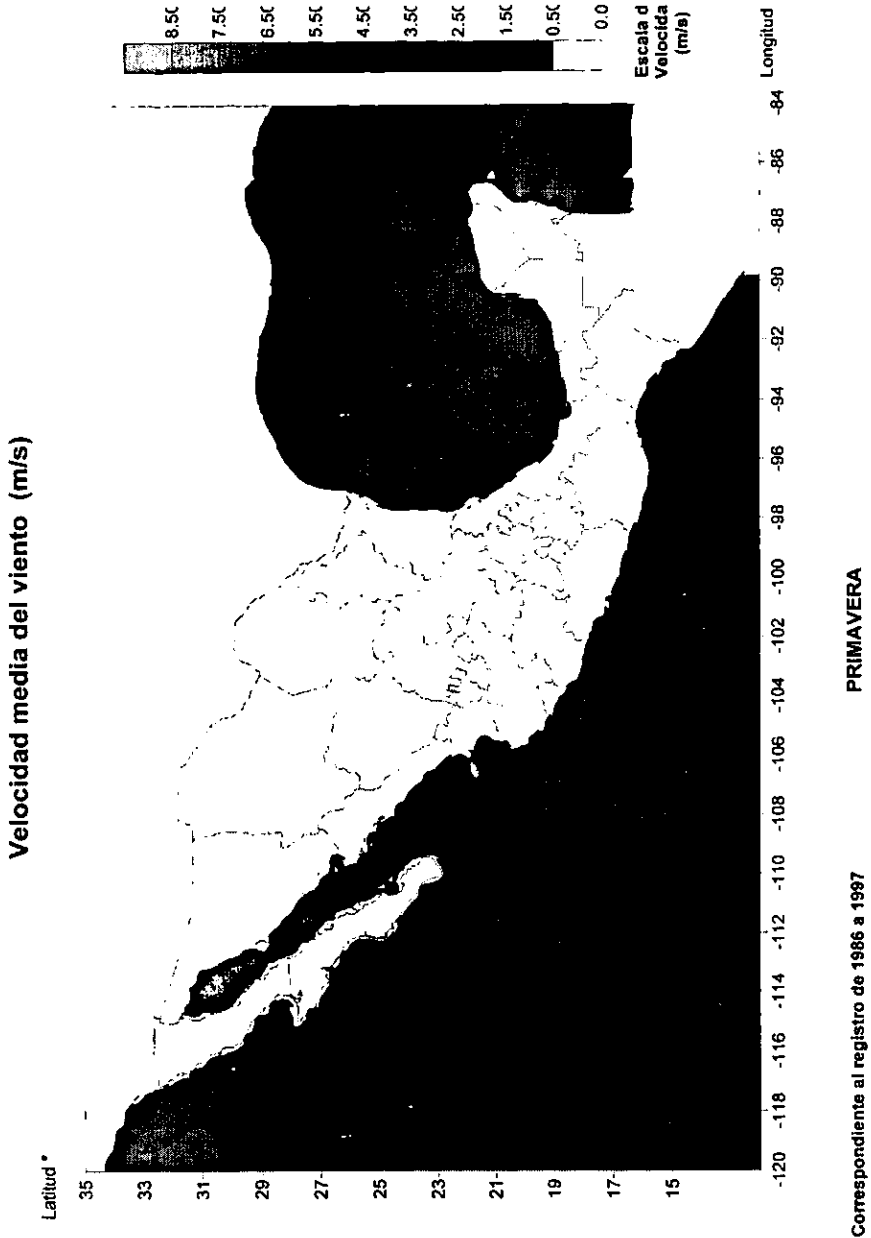


Figura 6.28. Mapa de isolíneas de velocidad del viento para primavera

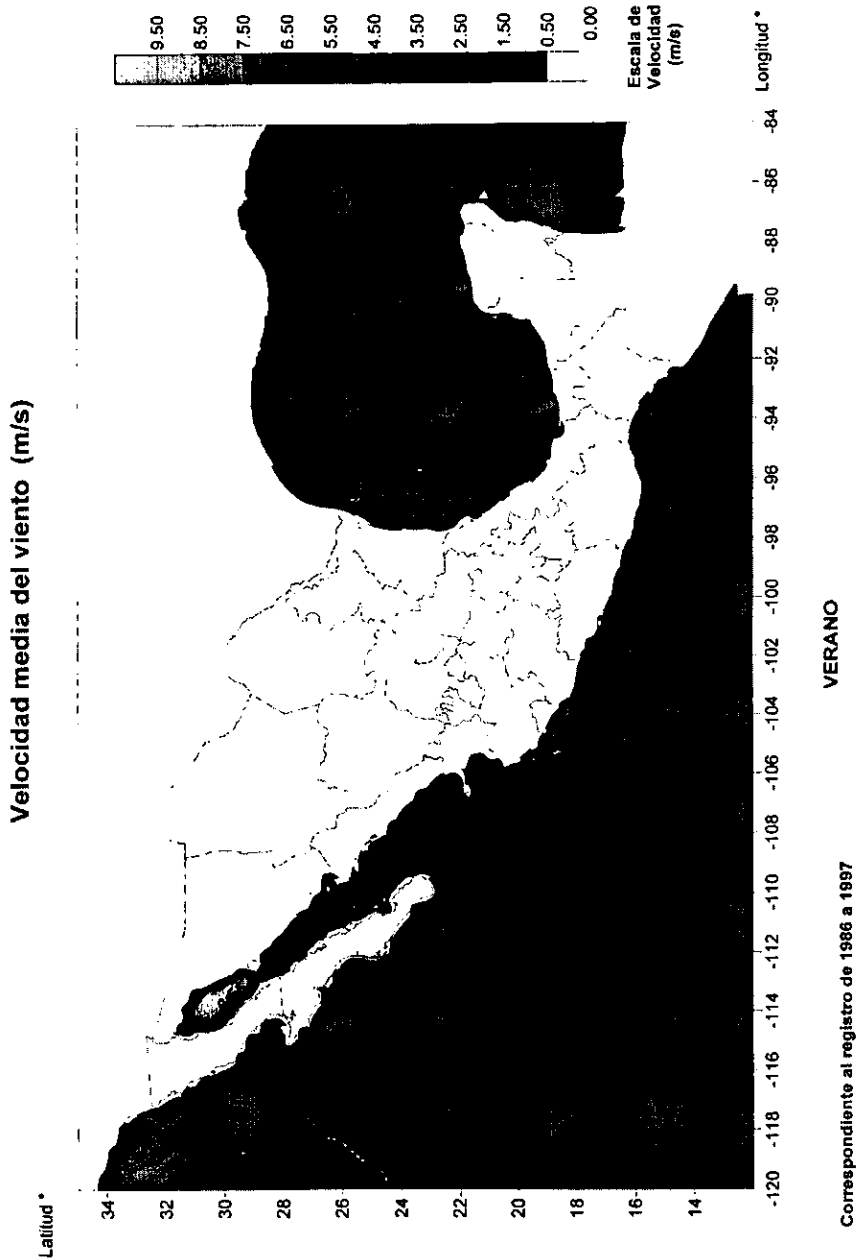


Figura 6.29. Mapa de isolíneas de velocidad del viento para verano

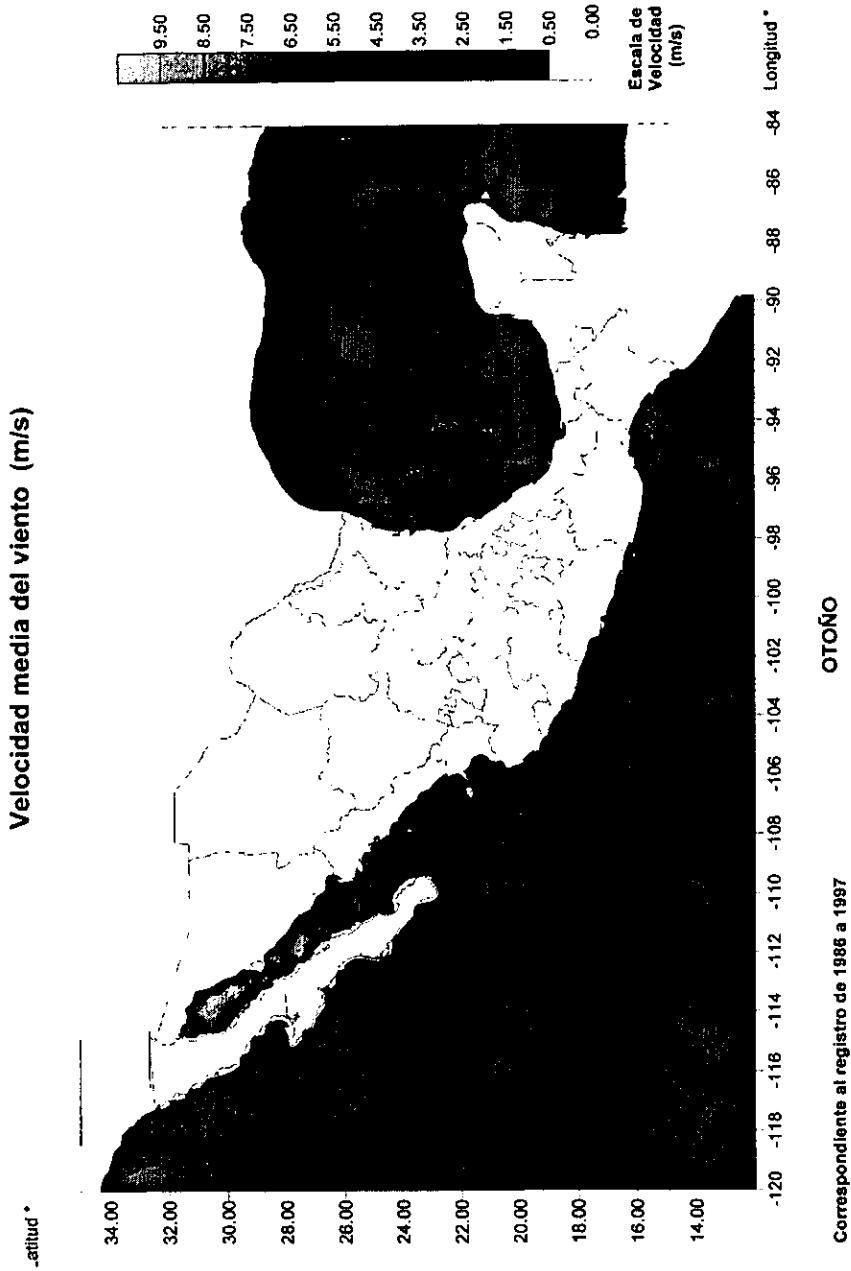


Figura 6.30. Mapa de isolíneas de velocidad del viento para otoño

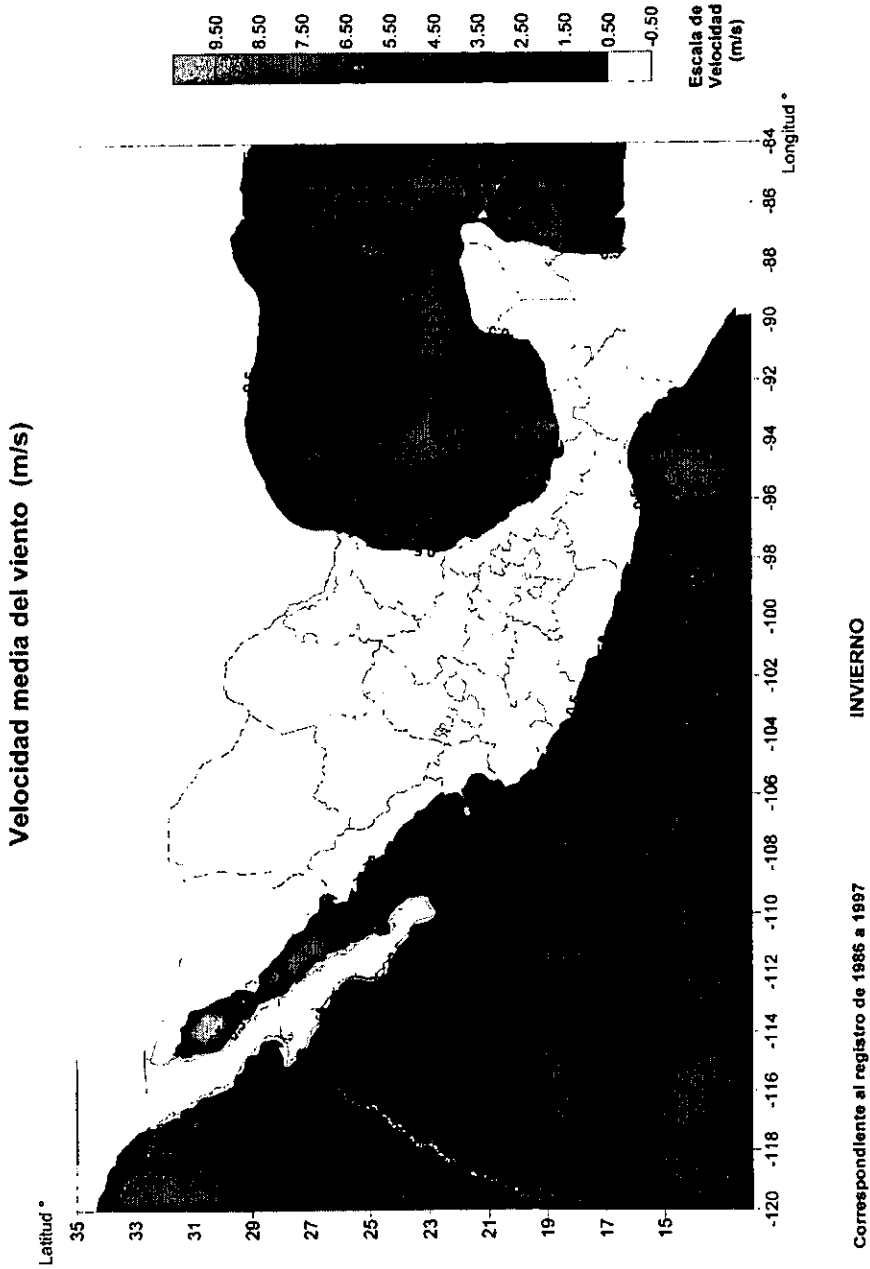


Figura 6.31. Mapa de isolíneas de velocidad del viento para invierno

7. CASOS DE APLICACIÓN

En este trabajo se consideran dos casos de aplicación para el Atlas Oceanográfico del Golfo de México, el primero trata el Transporte de Sedimentos, en la Central Termoeléctrica Adolfo López Mateos en Tuxpan Veracruz, y el segundo un estudio de Calidad de Agua en la Laguna de Nichupté, en el estado de Quintana Roo.

7.1 Erosión en playas

7.1.1 Introducción

En México la generación de energía eléctrica se efectúa principalmente mediante plantas hidroeléctricas y termoeléctricas. De estas, las centrales termoeléctricas, debido a sus principios y funcionamiento, requieren de grandes volúmenes de agua para el enfriamiento de los condensadores de la central. Por esta razón el lugar más adecuado para ubicar una planta termoeléctrica es la zona costera.

Para que el agua pueda ser utilizada en una central termoeléctrica es necesario que ésta contenga la menor cantidad de sedimentos, por lo que se construye una obra de toma, que consiste en estructuras llamadas escolleras y rompeolas, que permiten que exista una zona donde los efectos del oleaje disminuyen y así la velocidad del agua permite la decantación del sedimento en el canal de llamada.

Sin embargo, dichas obras, alteran significativamente el equilibrio dinámico de la playa, lo que trae como consecuencia que la línea de costa situada inmediatamente antes y después de la obra sufra, por un lado la acumulación de material y por el otro un proceso erosivo.

La importancia de estudiar las zonas litorales en el país radica en cuatro aspectos:

- ⇒ Por un lado, la mayor parte de las reservas probadas de hidrocarburos se localizan en las zonas litorales del Golfo de México, de ahí la necesidad de diseñar plataformas, puertos petroleros y tuberías para la conducción del crudo que van desde dichas plataformas hasta la costa, por lo que es indispensable conocer las características de la zona litoral incluyendo las del oleaje.
- ⇒ En un alto porcentaje la generación eléctrica de México se produce en plantas termoeléctricas ubicadas en las márgenes del litoral. En este tipo de plantas se requieren grandes volúmenes de agua libres de sedimento para sus sistemas de enfriamiento. Normalmente, para poder proporcionar el agua tanto en calidad como en cantidad, es necesario construir una serie de obras que alteran la morfodinámica de la zona.

- Otro aspecto importante es el relacionado al comercio, ya que el mayor volumen de mercancía que se importa y exporta en el país sale o entra por los puertos nacionales; cabe mencionar que los principales puertos del país son viejos y, por tanto, es indispensable dar mantenimiento y en algunos casos construir estructuras de protección.
- Por último, la industria del turismo, que económicamente representa la tercera en importancia en el país, tiene sus principales desarrollos localizados en el litoral mexicano.

7.1.2 Objetivo

Uno de los principales problemas en las zonas de litoral, es el cambio en la línea de costa causado por la presencia de estructuras o por la incidencia del oleaje, cuyos parámetros son: altura de ola, dirección de incidencia y período.

El objetivo primordial en este caso de ejemplo, es proporcionar las bases necesarias para modelar una zona costera con estructuras con los datos de oleaje del Anexo 2 de la Región 54 y predecir el comportamiento en un determinado período, utilizando el modelo numérico GENESIS.

7.1.3 Metodología

A continuación se describe una metodología para el cálculo del cambio de la línea de costa denominada "Teoría de una línea" (One Line Theory, OLT), con la cual es posible:

- Calcular las condiciones de oleaje en rompiente.
- Calcular la variación del oleaje debido a la presencia de estructuras costeras.
- Calcular el gasto del transporte longitudinal de sedimentos, basándose las condiciones de oleaje y en la expresión de continuidad del sedimento.
- Predecir la línea de costa posterior a un tiempo t , y
- Finalmente, analizar y diseñar las estructuras necesarias para proteger una playa contra la erosión bajo diversas condiciones.

En primer lugar es necesario recopilar y analizar los datos disponibles del oleaje y del perfil de la playa y con ello determinar la altura de la ola y la dirección en el punto de rotura a lo largo de la línea de costa. Se calcula el gasto en el transporte de sedimentos a lo largo de la línea de costa y finalmente se calcula el cambio en la línea de costa en función del gasto en el transporte de sedimentos y de las estructuras que existan.

7.1.4 Modelos de predicción del cambio de la línea de costa

Un modelo de línea de costa es una herramienta de predicción numérica basada en la ecuación de continuidad del sedimento y en una ecuación para el transporte longitudinal de sedimentos. Se denomina también Teoría de Una Línea (One Line Theory, OLT) para la predicción del movimiento de costa, donde "Una Línea" se refiere a la línea de costa.

El movimiento de sedimentos causado por el oleaje puede ser clasificado en dos tipos, según su dirección: transporte longitudinal, a lo largo de la línea de costa, y transporte transversal, perpendicular a ella. Salvo en determinados casos como puede ser la caída del sedimento en cañones submarinos, o el transporte de sedimento hacia tierra por el viento, a largo plazo, el transporte transversal de sedimentos está confinado en una franja de costa.

Esta franja está limitada por la línea de máximo ascenso en el período invernal (cuando la playa se encuentra en estado disipativo) y la zona donde el oleaje ya no es capaz de poner en movimiento el sedimento. Para predicciones a largo plazo, la mayor parte de la información del cambio de la línea de costa viene dada por el transporte longitudinal de sedimento.

Las ecuaciones del transporte longitudinal de sedimentos dependen de las características del oleaje, así en el modelo de línea de costa será necesario determinar las variaciones longitudinales de éste mediante modelos de refracción-difracción. El cambio de línea de costa que se produce en un intervalo de tiempo, podrá ser calculado a partir de las diferencias en el gasto de transporte longitudinal, suponiendo que el que perfil de la playa se mueve paralelamente a sí mismo. En el caso que se produzcan pérdidas o aportaciones puntuales de sedimento, podrán ser tomadas en cuenta en el modelo.

El modelo OLT sólo debe ser utilizado para la predicción a largo plazo y a gran escala. Es especialmente adecuado para determinar el efecto de espigones, diques no rebasables, aportaciones puntuales de sedimento, etc. Este modelo no puede describir la formación del perfil de playa ni determinar, por tanto, los cambios estaciones del perfil, así como erosiones por muros de protección y otros cambios que involucren transporte transversal de sedimentos.

El procedimiento para la aplicación del modelo de cambio de línea de costa se puede resumir de la manera siguiente:

1. Recopilación y análisis de la información de los datos disponibles de oleaje y perfil de playa
2. Cálculo de las condiciones iniciales de contorno: altura de la ola y dirección en el punto de rotura a lo largo de la línea de costa utilizando un modelo de difracción-refracción
3. Cálculo del gasto del transporte de sedimentos a lo largo de la línea de costa, utilizando alguna de las formulaciones existentes.
4. Cálculo del cambio de la línea de costa mediante la ecuación de la conservación del sedimento.

Una vez calculada la nueva línea de costa, se vuelve a empezar en el punto 2, dándose por terminada la iteración cuando se alcanza el equilibrio o una determinada posición de la línea de costa.

7.1.5 Modelo de oleaje

El modelo de línea de costa calcula el gasto del transporte longitudinal de sedimentos mediante el conocimiento de las características del oleaje en rotura. Se requiere, por tanto, disponer de un modelo de oleaje que permita determinar la distribución longitudinal de la altura y el ángulo de la ola en rotura, partiendo de la información de altura de ola, período y ángulo del oleaje incidente en una determinada profundidad de referencia fuera del área de rompientes.

En general, se puede hablar de dos tipos de situaciones que requieren dos condiciones diferentes de modelo de oleaje:

- a) Secciones largas de playa sin estructuras significantes.
- b) Secciones relativamente cortas de playa en la vecindad de estructuras

En el caso a), la refracción sobre el fondo irregular (incluyendo asomeramiento) es predominante. En este caso es necesario refractar el oleaje sobre una malla bidimensional que describa la batimetría. El cálculo se puede realizar por el método clásico de los rayos o resolviendo las ecuaciones de gobierno directamente sobre la malla.

En el caso b), la difracción es dominante, mientras que la refracción queda en un segundo, plano, sin embargo, ésta no es despreciable.

Las hipótesis que se consideran, para evaluar el oleaje en rotura mediante un modelo de oleaje semiempírico son las siguientes:

1. Fondo de pendiente constante con batimétricas paralelas localmente.
2. Oleaje regular, definido por la teoría lineal.
3. Interacciones oleaje - corrientes despreciables.
4. Estructuras con condiciones de difracción y reflexión simples.

7.1.5.1 Modelo de oleaje semiempírico para difracción – refracción debido a estructuras

La Figura 7.1 presenta un esquema para el procedimiento de cálculo del oleaje detrás de estructuras. Como es habitual, se divide el área de interés en una zona iluminada, donde la dirección de los rayos no cambia por difracción, pero sí la altura de ola y en un área de sombra, donde la difracción cambia tanto en la dirección como en la altura del oleaje.

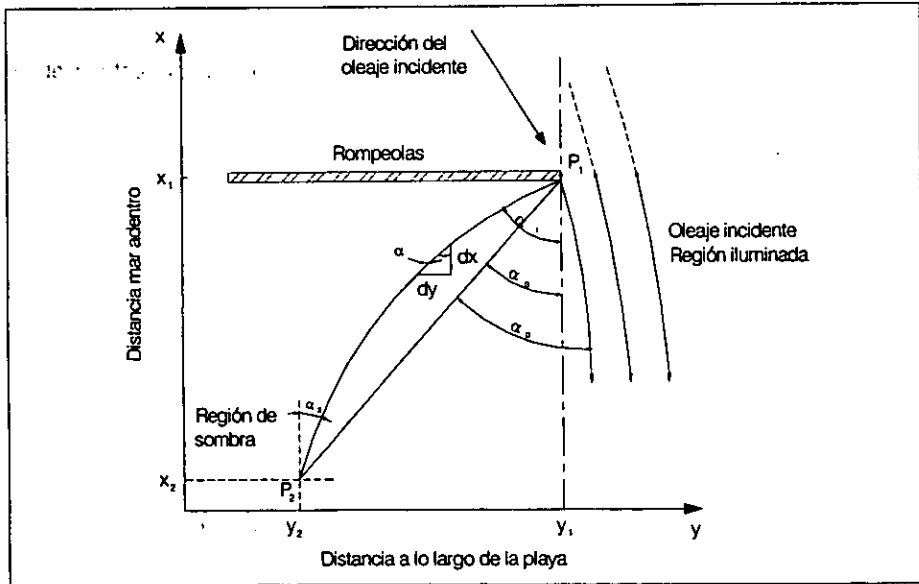


Figura 7.1. Esquema para calcular el oleaje

En lo que se refiere al ángulo del oleaje dentro del área de sombra, se supone que los rayos parten radialmente desde el extremo de la estructura, con un ángulo α_1 para alcanzar el punto de rotura P_2 con un ángulo α_2 .

La altura de ola en rotura, en el punto P_2 se determina por la solución simultánea de la ecuación que da la altura de ola en el punto, teniendo en cuenta la refracción, difracción, someramiento y un criterio de rotura:

$$H_B = K_D(\alpha_0, \alpha_2, h_B) K_r(\alpha_1, h_B) K_S(h_B) H_{\text{moro}} \quad 7.1.1$$

$$H_B = \gamma h_B \quad 7.1.2$$

donde,

- H_{moro} : Altura de ola en el extremo de la estructura.
- K_D : Coeficiente de difracción en el punto P_2 , calculado una vez conocidos, α_B , ángulo de rotura y h_B profundidad en rotura.
- K_r : Coeficiente de refracción en el rayo que, desde el extremo de la estructura, pasa por P_2 .
- K_S : Coeficiente de asomeramiento en el punto P_2 , relativo a la profundidad en el extremo de la estructura.

El coeficiente de difracción K_D , se puede calcular por el método clásico de Penney & Price (1952), Silva (1995), o por otros métodos aproximados, Goda (1985). El efecto de la dispersión direccional en la refracción es pequeño y puede ser ignorado por este nivel de modelo.

El coeficiente de refracción K_r , es función del ángulo de partida del rayo y la profundidad de rotura h_B , a través de la ley de Snell:

$$K_r = \left(\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \right)^{1/2} \quad \text{para la región de sombra.} \quad 7.1.3$$

$$K_r = \left(\frac{\cos \alpha_{\text{moro}}}{\cos \alpha_2} \right)^{1/2} \quad \text{para la región iluminada.} \quad 7.1.4$$

donde:

- α_1 : Ángulo de salida del rayo desde el extremo de la estructura.
- α_{moro} : Ángulo de llegada de las olas al extremo de la estructura.
- α_2 : Ángulo de llegada de las olas al punto P_2 .

El coeficiente de asomeramiento K_S , es una función de las profundidades en el extremo de la estructura y en el punto P_2 , y viene dado por la siguiente relación entre celeridades de grupo en P_1 y P_2 .

$$K_s = \left(\frac{C_{g1}}{C_{g2}} \right)^{1/2} \quad 7.1.5$$

El coeficiente de índice de rotura γ depende del peralte del oleaje en profundidades indefinidas H_0/L_0 y la pendiente de la playa $\tan \beta$. Se presenta aquí una expresión simple propuesta por Singamsetti & Wind (1980):

$$\gamma = 1.16 \left[\frac{\tan \beta}{(H_0/L_0)^{1/2}} \right]^{0.22} \quad 7.1.6$$

Un rayo que saliendo de P_1 llega a P_2 no sigue la línea recta que señala el ángulo α_0 , (figura 1), sino que sale de P_1 con un ángulo mayor α_1 , debido a la refracción. El ángulo α_1 no es conocido y se determina por la ecuación del rayo:

$$y_1 - y_2 = \int_{x_2}^{x_1} \tan \alpha \, dx \quad 7.1.7$$

La ecuación 7.7 simplemente integra ($dy/dx = \tan \alpha$) entre P_1 y P_2 . El valor de $\tan \alpha$ se obtiene a partir de la ley de Snell:

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2} \quad 7.1.8$$

donde α y c son el ángulo de la tangente al rayo con el eje x y la celeridad de la onda en cada punto, respectivamente.

En la práctica, se tantea con diferentes ángulos de salida α_1 hasta que se cumpla la ecuación 7.1.7, para lo que basta el método de Gauss. La búsqueda del ángulo de salida α_1 , consume mucho tiempo en comparación con los otros procesos de oleaje.

7.1.6 Variación de la playa y su interacción con el oleaje

La forma en planta y las batimétricas cambian como resultado de la acción del oleaje. El cambio de la playa modifica a su vez el progreso del oleaje. La interrelación de la playa y el oleaje se puede representar en el cálculo de dos maneras. Primero, con el cambio de posición en la línea de costa, la distancia fuente de los rayos P_1 (Figura 7.2), cambiará y, por tanto, el ángulo de salida α_1 .

En segundo lugar y más importante, la forma en planta cambiará significativamente en las proximidades de la estructura y la orientación de las batimétricas tenderá a alinearse con la forma en planta.

Para tener en cuenta esta variación del fondo en los cálculos de refracción, se supone que la orientación de la línea de costa en cada punto se extiende hasta el punto fuente de difracción.

Por lo tanto, aunque entre las hipótesis iniciales del modelo se encontraba la de fondo de pendiente constante, su orientación permite que cambie en función de la posición a lo largo de la línea de costa para adaptarse localmente a la forma en planta.

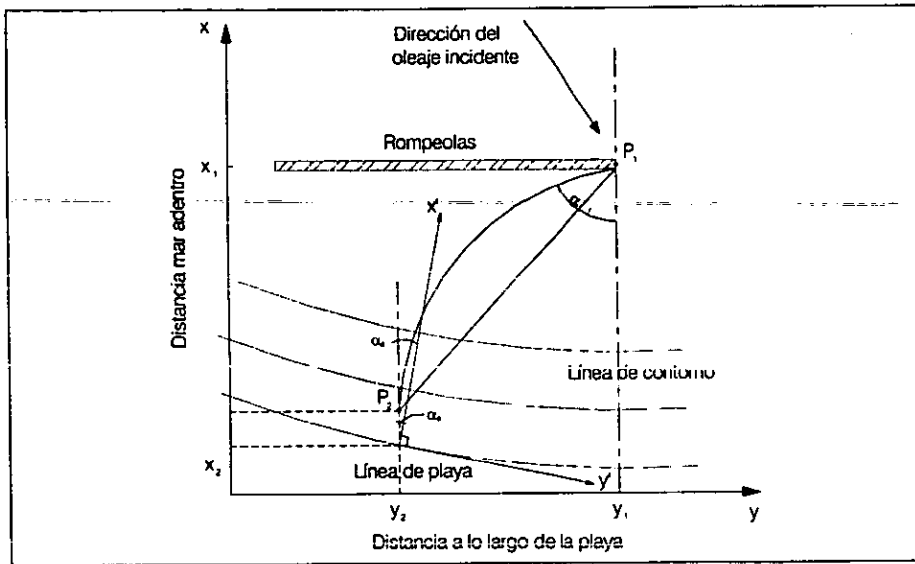


Figura 7.2. Esquema para el cálculo del oleaje utilizando un contorno modificado en su orientación

Este sistema local de coordenadas, alineado con las batimétricas locales, es denominado (x', y') en la Figura 7.2. Este sistema de coordenadas forma un ángulo con el sistema general (x, y) igual al de orientación local de la línea de costa α_s , evaluado en el punto P_3 :

$$\alpha_s = \tan^{-1} \left(\frac{\partial x_s}{\partial y} \right) \quad 7.1.9$$

En el sistema de coordenadas local, el ángulo de salida se denomina α_1' y esta relacionado con el α_1 por:

$$\alpha_1' = \alpha_1 + \alpha_s = \alpha_1 + \tan^{-1} \left(\frac{\partial x_s}{\partial y} \right) \quad 7.1.10$$

Los puntos P_1 y P_2 se encuentran de nuevo unidos por un rayo mediante la ecuación (7.1.7), pero utilizando la ley de Snell en el sistema local de coordenadas:

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{c_1} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{c_2} \quad 7.1.11$$

De la misma manera, el coeficiente de refracción, ecuación (7.1.3), se modifica, resultando:

$$K_r = \left(\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \right) \quad 7.1.12$$

El ángulo α_2' está relacionado con el α_2 mediante una transformación similar a la (7.1.10). Con el avance o retroceso de la línea de costa, las batimétricas cambian, de manera que la profundidad en un punto sólo es función de la distancia a la línea de costa y de la pendiente media de la playa.

7.1.7 Ecuación de continuidad del sedimento

El modelo OLT es un método para resolver el cálculo del balance de sedimentos. En lo sucesivo, se representará al eje X perpendicular a la línea de costa, con el sentido positivo hacia el mar y al eje Y paralelo a la línea de costa, **Figura 6.3**. Como resultado del balance de sedimentos entre las secciones separadas un ancho Δy , la línea de costa cambia su posición una distancia Δx_s , durante un tiempo Δt .

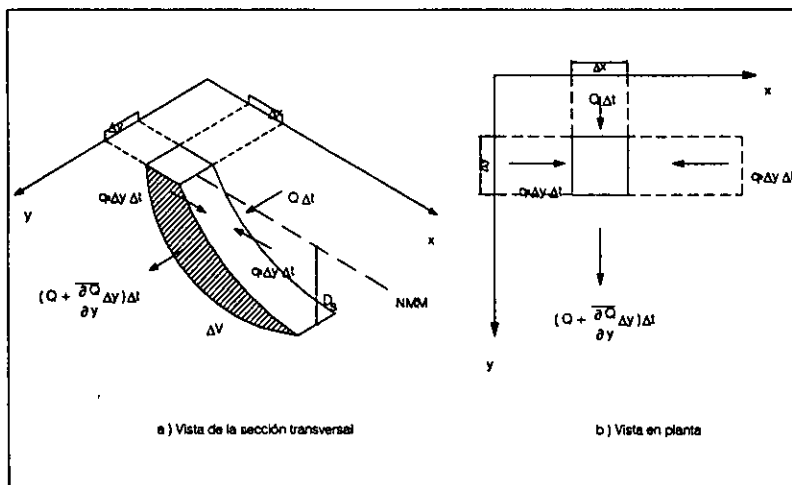


Figura 7.3. Esquema para la ecuación de continuidad del sedimento

Una hipótesis básica del modelo es que el perfil se traslada en la dirección x paralelamente a él mismo hasta una profundidad determinada, D_s (profundidad de cierre) por debajo de la cual el perfil ya no cambia, **Figura 7.3.a**. El volumen de sedimento que entra por los contornos del volumen de control en el mismo incremento de tiempo, se observa en la **Figura 7.3.b**. La ecuación de continuidad que gobierna la posición de la línea de costa es:

$$\frac{\partial x_s}{\partial t} + \frac{1}{D_s} \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - q \right) = 0 \quad 7.1.13$$

Q : Gasto del transporte longitudinal de sedimentos [L^3/T].

q : Gasto de sedimentos, por unidad de longitud de playa, [L^3/T] que entran (+) y salen (-) por los contornos de los lados del mar y tierra, es decir:

$$q = q_s + q_o$$

q_s : Gasto de sedimentos, por unidad de longitud y que entran en el área de control por el lado de tierra.

q_o : Gasto de sedimentos, por unidad de longitud y que entran en el área de control por el lado del mar.

7.1.8 Formulaciones para el gasto del transporte longitudinal de sedimentos

El gasto del transporte longitudinal de sedimentos Q , generado por las corrientes longitudinales de la zona de rompientes, es el principal factor que controla la evolución a largo plazo de una línea de costa. Las expresiones predictivas para Q vienen formuladas habitualmente en función de las condiciones del oleaje en la línea de rotura.

7.1.8.1 Formulación para el transporte longitudinal de sedimentos en el caso de variaciones longitudinales de la altura de ola en rotura.

Ozasa y Brampton (1980) combinaron la siguiente ecuación:

$$\alpha_{Bs} = \alpha_B - \alpha_s = \alpha_B - \arctan \left(\frac{\partial x_s}{\partial y} \right) \quad 7.1.14$$

con el modelo de corriente longitudinal de Bakker (1971) para obtener una expresión predictiva para el transporte longitudinal de sedimentos, que incluía tanto la incidencia oblicua, como la variación longitudinal de la altura de ola. Kraus y Harikai (1983) parametrizaron la fórmula de Ozasa y Brampton (1980) y la aplicaron con éxito para modelar el cambio de la línea de costa detrás del rompeolas de la playa de Orai (Japón). Trabajos posteriores avalan la aplicabilidad de esta fórmula:

$$Q = (H^2 C_s)_B \left(K_1 \sin 2\alpha_{Bs} - K_2 \cos \alpha_{Bs} \frac{\partial H_B}{\partial y} \right) \quad 7.1.15$$

$$K_1 = \frac{0.0262 K_1}{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) (1 - \lambda_v)} \quad 7.1.16$$

$$K_2 = \frac{0.0524 K_2}{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) (1 - \lambda_v) \tan \beta} \quad 7.1.17$$

K_1 y K_2 son coeficientes empíricos (parámetros de transporte) y $\tan \beta$ es la pendiente del fondo. Como valor de K_1 puede tomarse el valor propuesto por Komar e Inman (1970) de $K = 0.77$ ó el de 0.58 de la experimentación del NERC. Para K_2 Kraus y Harikai (1983), proponen la siguiente relación de $0.5 < K_1 / K_2 < 1.5$. El primer término de la expresión 7.1.15 corresponde a la llamada fórmula del CERC, y describe el transporte longitudinal de sedimentos en la zona de rompientes debido a la acción del oleaje incidendo oblicuamente a la costa. El segundo término tiene en cuenta la influencia de las variaciones longitudinales de la altura de ola en rotura.

En principio, debería aparecer un tercer término, debido a la influencia que la corriente longitudinal pueda tener en cuanto a modificaciones del ángulo de incidencia o de la altura en rotura. Sin embargo, se ha demostrado que este tercer término es despreciable en comparación con los otros dos. El término que contiene $\partial H_B / \partial y$ se ha introducido para tener en cuenta variaciones longitudinales permanentes de la altura de ola en rotura, debida a la refracción y difracción por islas o estructuras. Esta variación está siempre presente debido a la naturaleza variable del oleaje, pero en los casos que no intervienen fenómenos de refracción-difracción, los gradientes longitudinales de altura de ola son pequeños y aleatorios, así el segundo término de la ecuación 7.1.15 puede ser despreciado.

Debido a la magnitud de las suposiciones que se utilizan en los modelos de oleaje y de línea de costa y a la poca exactitud de las actuales formulaciones predictivas del transporte longitudinal de sedimentos ($\pm 50\%$ de error), es aconsejable tratar a K_1 y K_2 como parámetros específicos de cada prototipo, que deben ser determinados para la calibración del modelo de línea de costa. El parámetro de transporte K_1 se ajusta primero normalmente, para obtener la escala apropiada de tiempos, posteriormente el parámetro K_2 de manera que se ajusten las líneas de costa calculadas con las observadas en las áreas de difracción predominante.

7.1.9 Modelo Generalizado para Simular el Cambio en la Línea de Costa

GENESIS (GENERALIZED MODEL FOR SIMULATING SHORELINE CHANGE) fue desarrollado para simular el cambio de la línea de costa producido por diferencias espaciales y temporales en el transporte de sedimentos.

La acción del oleaje es el mecanismo que produce el transporte de sedimentos a lo largo de la línea de costa, sin embargo, las diferencias en el transporte de sedimentos tanto espacial como temporal pueden ser causados por diferentes factores, tales como: la irregularidad de la batimetría, la difracción del oleaje, los límites físicos, la aportación o extracción de arena y restricciones en el transporte de sedimentos (muros o espigones), estos factores están relacionados entre sí y pueden actuar en combinación y a diferentes tiempos.

La principal utilidad de GENESIS está en simular la respuesta de una playa debido a la presencia de estructuras y contribuciones a ella. Esencialmente, pueden representarse en un tramo de costa combinaciones y configuraciones arbitrarias de estructuras (espigones, rompeolas y muros), aportaciones y extracciones de arena. La corrida del modelo es rápida y ha servido como la principal tecnología de predicción en numerosas valoraciones cuantitativas en protección de costas. En aplicaciones ingenieriles y pruebas del GENESIS, los tramos de playa modelada han variado entre una y 20 millas, con una resolución de malla de 15 a 100 m, y los períodos de simulación han variado de aproximadamente 6 meses a 20 años, con información o datos de oleaje introducidos a intervalos de tiempo simulado en el rango de 30 minutos a 3 meses.

Las principales capacidades y limitaciones de GENESIS, son que ha sido diseñado para describir tendencias a largo plazo la forma en planta de la playa en un tramo, hasta llegar a un equilibrio bajo las condiciones de oleaje imperantes, configuración de estructuras costeras y otros parámetros de entrada. En la mayoría de las aplicaciones de GENESIS lo que calcula es la respuesta de la costa a una perturbación natural o ingenieril, como la construcción de un rompeolas, la colocación de rellenos a lo largo de cierta porción de la costa o descarga de arena de un río.

GENESIS trabaja mejor al calcular la respuesta de costa, dado que la perturbación producirá una tendencia a largo plazo distinta a la que normalmente ocurrirá debida al movimiento aleatorio de la arena en la playa, en otras palabras, este modelo de cambio de línea de costa puede evaluar la transición de una playa de un estado de equilibrio a otro. El modelo numérico no es aplicable en la simulación de un sistema de playa con fluctuación aleatoria en las cuales ninguna tendencia en la posición de la línea de costa es evidente.

En particular, GENESIS no es aplicable para calcular el cambio de la línea de costa en las siguientes situaciones, las que involucran un cambio no relacionado a estructuras costeras, condiciones de frontera o diferencias espaciales en el transporte de sedimentos inducidas por el oleaje:

- a) Cambio en la playa dentro de un estuario o en áreas dominadas por el flujo de marea.
- b) Cambios en la playa inducidos por corrientes producidos por el viento.
- c) Erosión en la playa inducida por tormentas en la cual los procesos de transporte cruzado de sedimentos son dominantes.
- d) Socavación en estructuras.

Para mayor información acerca de GENESIS ver la Referencia 14

7.1.10 Central Termoeléctrica Adolfo López Mateos

Puesta en operación en 1989, se localiza en el litoral del estado de Veracruz a 5 Km al norte de la desembocadura del río Tuxpan y del puerto del mismo nombre, la playa esta orientada de norte a sur; se localiza en los $21^{\circ} 03'$ de latitud norte y en los $97^{\circ} 24'$ de longitud oeste. (ver Figura 7.6)

En un inicio, la capacidad instalada fue de 1400 Mw y se requería un gasto de $60 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua para el sistema de enfriamiento de los condensadores, éste se proporciona del Golfo de México mediante una obra de toma superficial constituida en su primera etapa, por dos escolleras perpendiculares a la costa; la norte, con 615 m de longitud, con el cuerpo de oeste a este y el bastón orientado hacia el SSE; y la sur, paralela a la norte con 440 m de longitud, el ancho del canal de llamada mide aproximadamente 120 m y tiene una cota de desplante de 4.5 m. (ver Figura 7.5)

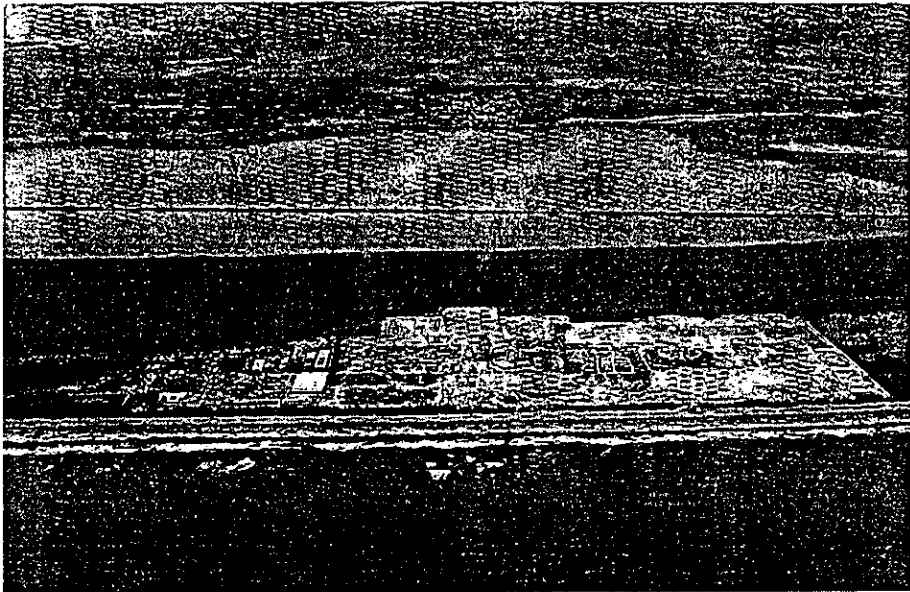


Figura 7.4 Vista Este – Oeste del sitio de la C. T. ALM. Obsérvese que no se ha iniciado la construcción de las escolleras, por lo que la línea de costa se encuentra en equilibrio dinámico. Octubre, 1986.

La presencia de estas escolleras ha alterado sensiblemente el equilibrio dinámico en que se encontraba la playa antes de 1989, ver Figura 7.4 y Figura 7.6 de tal manera que al norte de la obra de toma se presenta un azolvamiento progresivo, en tanto que la playa ubicada al sur ha sufrido un proceso erosivo desde diciembre de 1989.

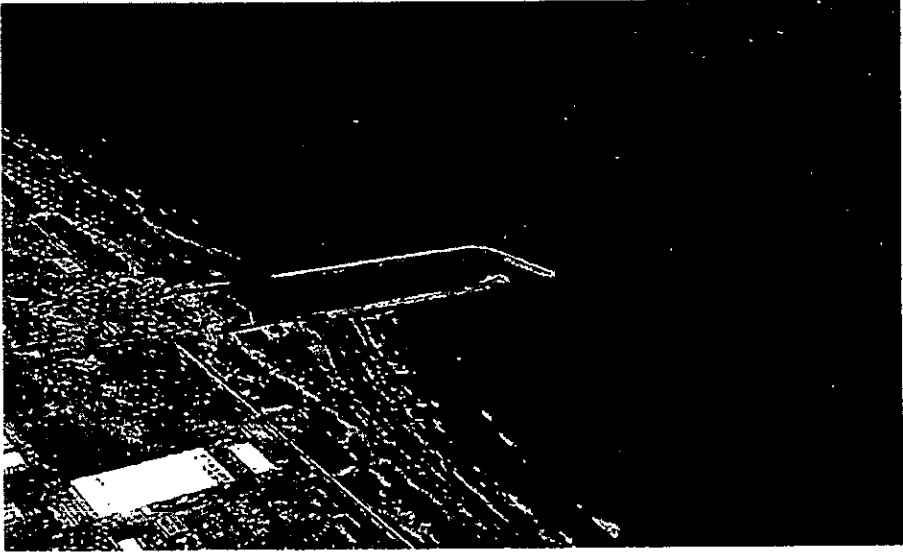


Figura 7.5 Vista Sur - Norte de la zona de escolleras de la Central Termoeléctrica Adolfo López Mateos (C.T. ALM). Marzo, 1988.

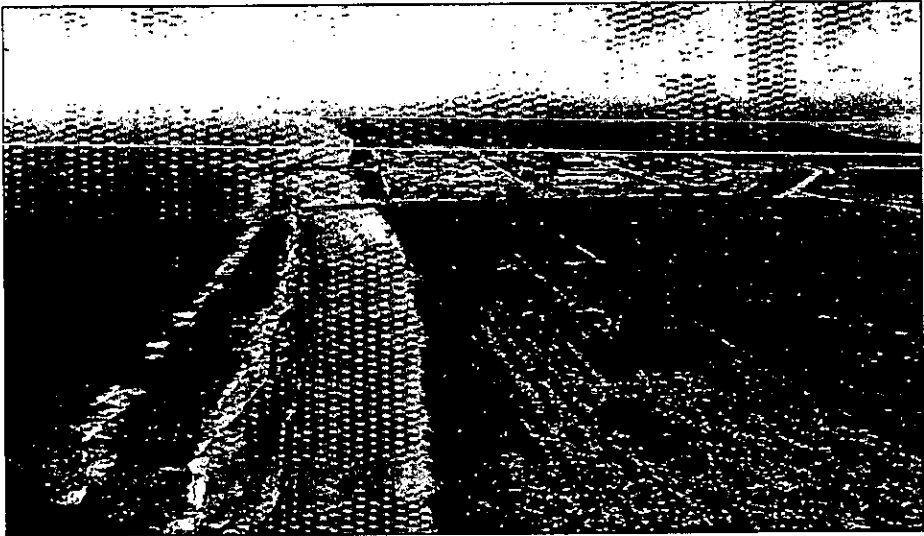


Figura 7.6 Panorámica de la Central Termoeléctrica Presidente Adolfo López Mateos (C.T. PALM), vista de Norte a Sur. Nótese la erosión de la línea de costa en la playa sur, así como el depósito en la playa norte, abril, 1990.

Para garantizar el correcto funcionamiento de la obra de toma, es necesario dragar aproximadamente 40 000 m³ de arena anuales, teniendo como consecuencia incrementos en los costos por mantenimiento.

Para calibrar el modelo se emplearon las líneas de costa medidas por el Departamento de Oceanografía de la CFE de 1988 y 1989, el arreglo de las estructuras se muestra en la Figura 7.7

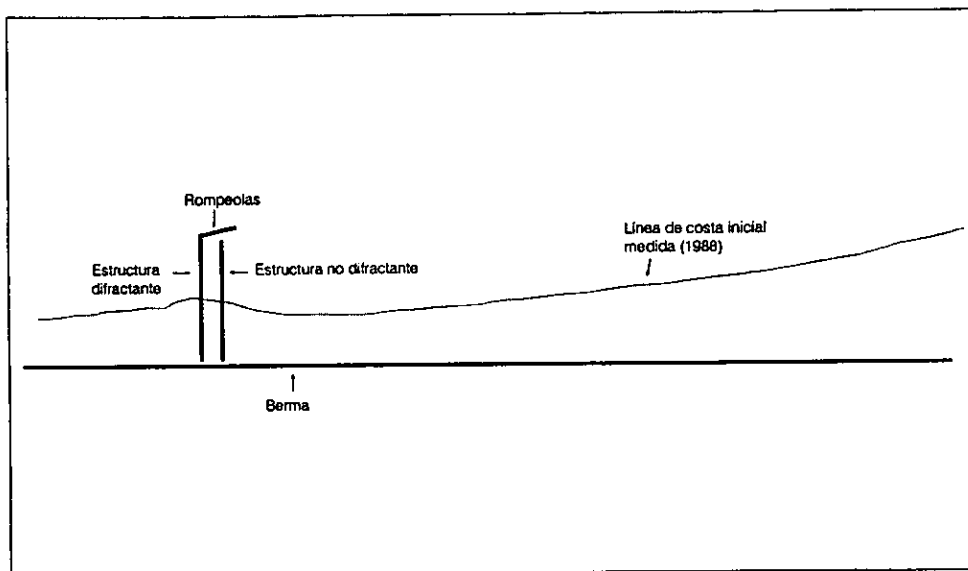


Figura 7.7 Croquis de la obra de toma de la Central Termoeléctrica Adolfo López Mateos

Los datos considerados para la corrida de GENESIS son los siguientes:

- La simulación comienza el 1/08/1988 y termina el 01/03/1989.
- Los valores de los coeficientes de calibración K_1 y K_2 son 0.15 y 0.20 respectivamente.
- El diámetro medio de la partícula de arena $D_{50} = 0.2$ mm y una berna de 1 msnm
- Se tiene una estructura difractante y una no difractante, las cuales tienen una longitud de 660 y 690 m respectivamente.
- La permeabilidad en todas las estructuras es de 0.15.
- Se considera un rompeolas, el cual se puede observar en la Figura 7.7, la profundidad en el morro del rompeolas es de 4.5 m.

- No se tienen aportes o rellenos
- Durante el período de simulación se consideran 3 trasvases en las siguientes fechas

Inicio	01/11/88	01/11/88	01/11/88
Fin	01/02/89	01/02/89	01/02/89
Gasto m ³ /s	80	150	100

Los gastos corresponden a dragado dentro de la zona de estudio

- Los datos de oleaje considerados son los siguientes:

Estación	Período T (s)	Altura de ola Hm0 (m)	Dirección α (°)
Primavera	5.0	1.5	90
Verano	4.0	1.0	90
Otoño	4.5	1.0	60
Invierno	5.0	1.5	120

La dirección del oleaje está referida al norte.

El resultado de la simulación se puede apreciar en la Figura 7.8, donde se presentan en modo gráfico las líneas de costa medida inicial y final y la calculada por GENESIS. El error de calibración resultó de 8.21 % por lo que se considera aceptable (Referencia 14)

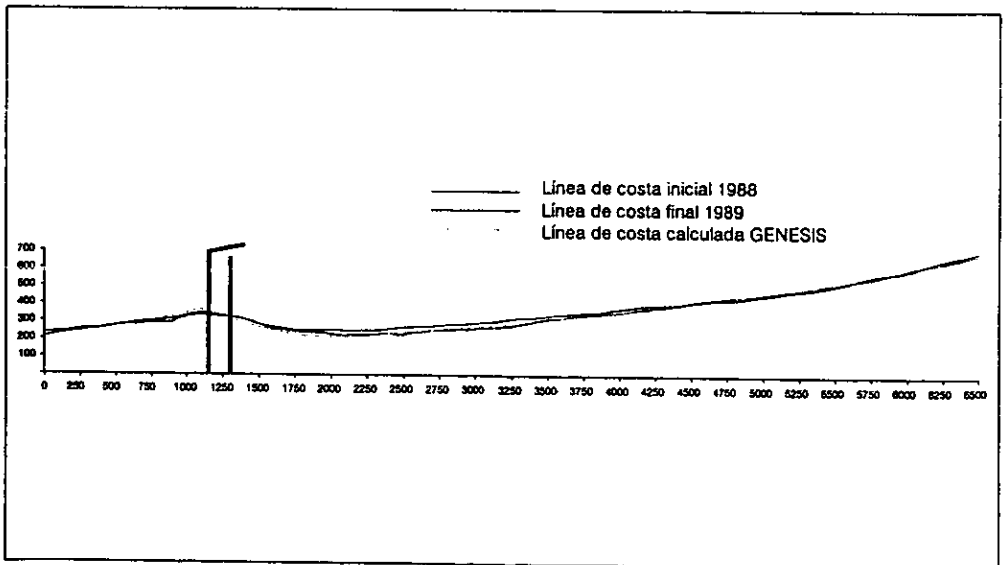


Figura 7.8 Resultado gráfico de la simulación para el período 1988 - 1989

7.1.11 Conclusiones

- Durante el período de simulación se observó que la playa se está erosionando al sur y sedimentando al norte, sin embargo el proceso de erosión en esta zona es más fuerte, siendo el volumen neto de 7 140 000 m³.
- Los datos de oleaje del Atlas Oceanográfico del Golfo de México, resultan una buena fuente de información para realizar **estudios preliminares**, relacionados con la ingeniería marítima.
- Para validar los resultados se recomienda que los datos de oleaje se comparen con datos de mediciones de oleaje hechos en campo.

7.2 Modelo hidrodinámico de Calidad de agua

7.2.1 Introducción

Es importante plantear desde un principio que los modelos matemáticos no son la panacea en la solución a problemas que deben enfrentar los ingenieros y demás profesionales, al hacer la evaluación del impacto ambiental de los diferentes agentes que pueden provocar contaminación a un cuerpo de agua. Por ello es importante conocer las hipótesis con las que fue formulado el modelo, con el objeto de establecer sus alcances y limitaciones dentro del diseño, así como para poder elegir aquel que se apegue mejor a las condiciones del escenario real que se está estudiando. El diseñador ha encontrado en los modelos matemáticos, una herramienta muy importante, pues tiene la oportunidad de generar escenarios, con las condiciones de diseño que pudieran presentarse en la realidad.

7.2.2 Conceptos básicos

Definición de un fluido.

Un fluido es una sustancia que se deforma continuamente cuando se lo sujeta a un esfuerzo cortante, sin importar la magnitud de éste. Una fuerza cortante actúa tangencialmente a una superficie y al dividirse entre el área de la superficie, da como resultado el esfuerzo cortante medio sobre dicha área. El esfuerzo cortante en un punto es el límite de la fuerza cortante dividida entre el área, conforme esta última tiende a un punto. Streeter et al. (1996).

Medio continuo.

Para poder estudiar matemáticamente el movimiento de cualquier fluido, es conveniente considerar su estructura molecular real, es decir, que se tiene un medio continuo ideal. Dentro de esta hipótesis se supone que propiedades tales como su densidad, volumen específico, presión velocidad y aceleración, varían continuamente a través de todo el fluido. La densidad ρ de un fluido es su masa por unidad de volumen. Para definir la densidad en cualquier punto, la masa Δm de un fluido contenida en un volumen infinitesimal Δv , es dividida por su volumen.

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow \xi^3} \frac{\Delta m}{\Delta v} \quad 7.2.1$$

La gravedad específica S de una sustancia es la relación entre el peso de la sustancia y el peso de un volumen igual de agua en condiciones estándar. También se puede expresar como la relación de la densidad o del peso específico de la sustancia a la correspondiente densidad o peso específico del agua. Streeter et al. (1996)

La presión media en el seno de un fluido es la fuerza normal que actúa sobre una superficie plana, dividida entre el área de la superficie. La presión en un punto se define

como el cociente de la fuerza perpendicular entre el área, conforme esta última se aproxima a un área pequeña que circunscriba al punto. Si un fluido ejerce una presión contra las paredes de un recipiente, éste a su vez ejercerá una reacción de compresión sobre el fluido. A continuación se establecen los conceptos de esfuerzo y rapidez de deformación, se estudian las relaciones entre ellos y se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes. Éstas se utilizan para establecer las leyes de similitud y las de los flujos turbulentos.

El desarrollo de las ecuaciones de movimiento en un medio continuo puede consultarse en la Referencia 13

7.2.3 Principios básicos del modelo hidrodinámico

Su objetivo es el cálculo de velocidades promediadas en la vertical inducidas principalmente por la acción del viento y la marea. En las siguientes líneas se presenta el fundamento teórico de los modelos hidrodinámicos:

De la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_e \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \quad 7.2.2$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_e \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \quad 7.2.3$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g \frac{\rho}{\rho_0} + \nu_e \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \quad 7.2.4$$

y de la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad 7.2.5$$

Donde p es la tensión normal; g la aceleración de la gravedad, ρ la densidad del agua; ν_e la viscosidad turbulenta; t el tiempo U , V y W las componentes de la velocidad en las direcciones x , y , z del plano cartesiano, promediadas para un intervalo de tiempo dado.

Para las condiciones que vamos a observar durante las descargas de aguas residuales en el litoral, se puede tomar como hipótesis que habitualmente las velocidades W son muy pequeñas. Esto se debe a que generalmente en estas zonas el flujo se genera normalmente por ondas cuya longitud (L) es mucho mayor que su magnitud; (L) es mucho mayor que la profundidad del agua (H) como es el caso, por ejemplo, de la marea. La condición de onda larga ($W \approx 0$) se puede considerar aplicable a partir de $L > 20H$. En las condiciones mencionadas las ecuaciones (7.2.1) y (7.2.2) se transforman en:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + v_* \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad 7.2.6$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + v_* \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad 7.2.7$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \quad 7.2.8$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad 7.2.9$$

En esta última ecuación del sistema describe una distribución lineal de la presión en la vertical, equivalente al caso de presión hidrostática.

Nótese también que en la ecuación no es posible despreciar el término que contiene W , ya que los tres sumandos del primer miembro de la misma son de igual orden de magnitud. En algunas situaciones se considera directamente $W=0$ y entonces, en la ecuación, el término que contiene W se hace nulo.

Cuando el movimiento que se estudia presenta una distribución de las velocidades prácticamente uniforme, se puede establecer la siguiente hipótesis:

$$U(z) = \text{constante}$$

$$V(z) = \text{constante}$$

Si ahora se promedian en la vertical los distintos términos de las ecuaciones, operando se obtiene:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -g \frac{\partial Z}{\partial x} + fV + v_* \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad 7.2.10$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \frac{\partial Z}{\partial y} + fU + v_* \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad 7.2.11$$

Para la ecuación de continuidad, sin necesidad de hacer la misma hipótesis se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^z U(z) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^z V(z) dz + W_{z=z} - W_{z=-h} = 0 \quad 7.2.12$$

y teniendo en cuenta que $W_{(z=-h)} = 0$ y $W_{(z=z)} = \frac{\partial Z}{\partial t}$ se tiene:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial UH}{\partial x} + \frac{\partial VH}{\partial y} = 0 \quad 7.2.13$$

H= Z+h

7.2.14

En las ecuaciones anteriores H es la profundidad total; h la profundidad por debajo del nivel medio; Z la sobrelevación en el nivel medio; t el tiempo; x e y las coordenadas cartesianas; U y V las velocidades promediadas en la vertical.

Las ecuaciones 7.2.6 y 7.2.8 forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (U(x, y, t); V(x, y, t); y Z(x, y, t)).

En la ecuación 7.2.6 ha sido introducido en un nuevo término fV . Este término tiene en cuenta en cuenta las fuerzas de Coriolis, donde $f = 2\Omega \sin l = 0.73 \cdot 10^{-4}$ rad/día, es la velocidad angular de la rotación de la tierra y l es la latitud del dominio del modelo.

En las ecuaciones 7.2.6 y 7.2.8 se ha introducido una nueva hipótesis, la de perfil uniforme en la vertical para las velocidades U(z) y V(z). Esta hipótesis es admisible en los casos en las que las corrientes marinas son debidas a marea, ya que el perfil es prácticamente uniforme. Dicha hipótesis podría aplicarse al estudio de corrientes generadas por el viento en aguas poco profundas.

7.2.4 Condiciones iniciales de frontera

Las condiciones iniciales son la sobrelevación del agua y las velocidades en las direcciones x e y en el dominio del modelo para el instante $t = 0$.

$$Z_{t=0} = Z_0(x,y) \quad 7.2.15$$

$$U_{t=0} = U_0(x,y) \quad 7.2.16$$

$$V_{t=0} = V_0(x,y) \quad 7.2.17$$

Sin embargo las funciones Z_0 , U_0 , y V_0 normalmente no son conocidas, por esto habitualmente se asumen iguales a cero. Cuando el movimiento modelo es periódico, como en el caso de la marea, la solución se estabiliza después de varios ciclos.

Las ecuaciones 7.2.6 y 7.2.8 tienen que ser completadas con condiciones de frontera apropiadas. Desde un punto de vista físico se hace necesario definir las siguientes condiciones de frontera: en la línea de costa, en la superficie libre, en el fondo en mar abierto. En la línea de costa se asume que la componente de la velocidad normal a la línea de costa es nula, mientras que en las componentes tangenciales no se impone ninguna condición.

Sobre la superficie libre pueden actuar tensiones tanto normales como tangenciales:

- Condiciones de frontera de tensión normal a la superficie libre: En la ecuación 7.2.6 se supone una presión atmosférica constante sobre todo el dominio del modelo, sin embargo la presión en estas ecuaciones que puede ser función del tiempo y del espacio $P = (x, y, t)$ (ya sea empírica o analítica), tiene que ser conocida.

- Condición de frontera de tensión tangencial a la superficie libre: Las tensiones tangenciales en la superficie libre, normalmente son generadas por el viento, y se pueden expresar de la siguiente forma en las direcciones x e y.

$$\frac{\tau_{bx}}{\rho_0} = v_e \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=-h} = \frac{gU\sqrt{U^2 + V^2}}{C^2} \quad 7.2.18$$

$$\frac{\tau_{by}}{\rho_0} = v_e \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=-h} = \frac{gV\sqrt{U^2 + V^2}}{C^2} \quad 7.2.19$$

Donde τ_{bx} y τ_{by} son las tensiones en el fondo generadas por fricción y C es el coeficiente de Chezy.

Por último, la frontera hacia mar abierto es una línea ficticia que separa el dominio del modelo del resto del mar. Es evidente que para una correcta simulación es necesario conocer las características hidrodinámicas de esta frontera, ya sea en términos de velocidades o de frontera en mar abierto, como la de radiación libre de Somerfield. La manera más confiable para obtener resultados correctos es disponer de datos reales.

Teniendo en cuenta las ecuaciones 7.2.6 y 7.2.8 y las condiciones de frontera de superficie libre 7.2.10 y del fondo 7.2.11, las ecuaciones de onda larga en dos dimensiones se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -g \frac{\partial Z}{\partial x} + fU - \frac{K_v W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2}}{H} - \frac{gU\sqrt{U^2 + V^2}}{HC^2} + v_e \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad 7.2.20$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + U \frac{\partial V}{\partial y} = -g \frac{\partial Z}{\partial x} + fV - \frac{K_v W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2}}{H} - \frac{gU\sqrt{U^2 + V^2}}{HC^2} + v_e \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad 7.2.21$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial VH}{\partial y} = 0 \quad 7.2.22$$

Las ecuaciones anteriores se conocen como ecuaciones de onda larga, su integración normalmente se lleva a cabo empleando el método implícito de dirección alternante (ADI). La integración de las ecuaciones de onda larga puede consultarse en la Referencia 13.

7.2.5 Sistema Lagunar Nichupté

La zonificación de usos del Sistema Lagunar Nichupté (SLN), tiene como objetivo la protección, conservación y restauración del medio ambiente de la zona, mediante el establecimiento de un marco legal que involucra al gobierno municipal y federal además de los habitantes de la zona, ya que es importante que por medio su colaboración conciliar las actividades realizadas con el desarrollo económico y social de la zona, sin dejar a un lado las cuestiones ecológicas.

En el caso de Cancún, la conservación del medio ambiente es muy importante dado que el turismo es fundamental para su economía y desarrollo.

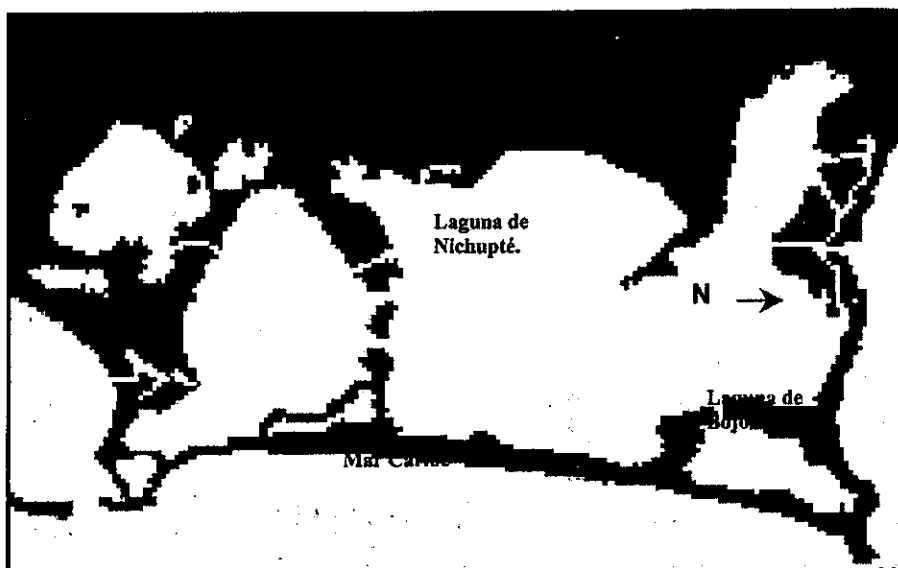


Figura 7.9 Sistema Lagunar Nichupté. "SEMARNAP 99".

Se busca entonces establecer la definición de usos de las diferentes zonas en las que se tiene interés ya sea por su importancia turística o por su importancia dentro del entorno ecológico, tomando en cuenta la fragilidad y susceptibilidad de algunas zonas a ser alteradas por contaminantes, deforestación o asentamientos humanos.

Por ello se fijarán las actividades bien definidas que cumplan con los criterios de calidad buscados y permitan controlar el deterioro que pueda presentarse. A continuación se presentan las definiciones de usos que se aplicaron a la zona del SLN.

De forma general podemos identificar los siguientes tipos de uso de espacios litorales, estos son:

1. Recreativos

Se incluyen todas las actividades en el entorno litoral que impliquen la utilización directa o indirecta de las aguas del litoral.

2. Pesca y cultivos marinos

Comprenden todas las actividades que se relacionen con la extracción comercial de recursos pelágicos y bentónicos renovables (pesca comercial y de mariscos).

3. Conservación de espacios litorales

Aquí se hace referencia a los valores estéticos (transparencia, color, riqueza florística, etc.), ecológicos, culturales, educativos, o científicos propios de los espacios litorales.

7.2.6 Industriales

Abarcan las actividades en el litoral, que tengan que ver con el tráfico portuario, definido como actividades de entrada, salida, atraque, desatraque, estancia y reparación de buques en puertos y la transferencia entre éstos y tierra u otros medios de transporte, de mercancías de cualquier tipo, de pesca, almacenamiento temporal de dichas mercancías en el espacio portuario, siempre que se realice dentro de espacios acuáticos que estén dotados en el medio terrestre con las instalaciones necesarias para su desarrollo.

En el caso del SLN se tiene que hacer extensiva, la definición de usos de los espacios litorales a zonas tierra adentro, ya que son parte importante en el entorno ecológico de la región. La zonificación del SLN busca la protección y conservación ecológica de la zona. A continuación se enlista la zonificación usada en el SLN.

Conservación: Zona apta para el desarrollo y conservación de vida silvestre, actividades turísticas y ecológicas.

Aprovechamiento: Apta para el turismo y desarrollo urbano.

Restauración: Zona apta para actividades de recuperación ecológica.

Se puede observar la tendencia a conservar la ecología de la región. La **Figura 7.11** muestra la zonificación del SLN.

7.2.7 Ordenamiento ecológico

Se presentan aquí las características del ordenamiento ecológico de Sistema Lagunar Nichupté.

Estados involucrados: Quintana Roo.

Municipios involucrados: Benito Juárez.

Superficie involucrada: aproximadamente 211 km².

Importancia de la zona: Centro turístico de primer orden a escala nacional.

Ecosistemas relevantes: Sistema Lagunar, Manglares, Popales, Tulares, Selva Baja Subcaducifolia, Playas Arenosas.

Área Nacional Protegida de la región: Parque marino Arrecifes de Punta Cancún y Punta Nizuc.

Poblaciones Importantes: Cancún, Alfredo V. Bonfil.

Problemática: Eutroficación y contaminación del agua del Sistema Lagunar Nichupté por descargas de aguas servidas. Incidencia negativa en fauna y flora bentónicas por el tránsito de vehículos acuáticos automotores. Tala de mangle. Violación a los reglamentos de zonificación y densidades de construcción. Asentamientos humanos irregulares. Déficit de la red de drenaje y alcantarillado. Ubicación y uso inadecuados de rellenos sanitarios. Deterioro de los arrecifes coralinos. Extracción excesiva de bancos de préstamo de materiales

Potencial de desarrollo: Ecoturismo, Conservación y comercialización de flora y fauna silvestres.

Sectores involucrados: Turístico. Comunicaciones y Transportes.

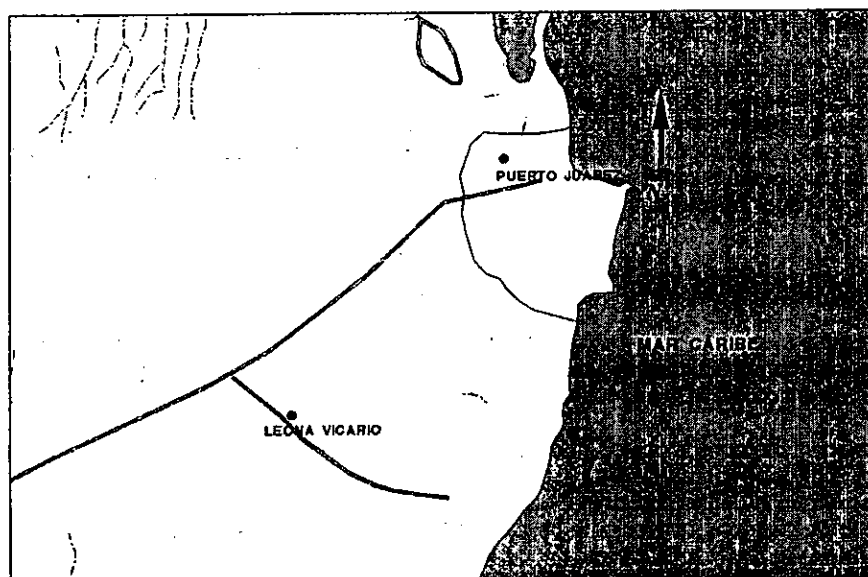


Figura 7.10. Mapa del Sistema Lagunar Nichupté.

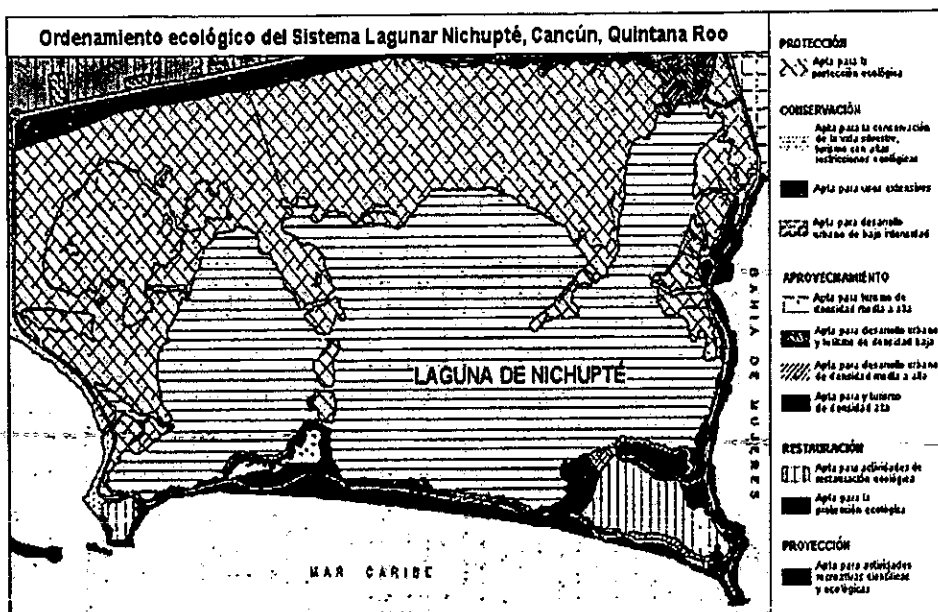


Figura 7.11. Ordenamiento ecológico Sistema Lagunar Nichupté. " SEMARNAP 99".

7.2.8 Establecimiento de criterios de calidad de las aguas litorales.

Una vez establecidos los usos se fijan los objetivos de calidad asociados a cada una de las zonas, o subzonas. En este caso se realizó un estudio hidrodinámico y de calidad de agua con modelos matemáticos que permitan determinar el impacto que se produciría al abrir un canal artificial que conectara la laguna de Nichupté con la laguna de Bojórquez.

7.2.9 Aplicación de los modelos hidrodinámicos y de calidad de agua

Se utiliza el modelo matemático H2D dado que las velocidades verticales del flujo en las zonas cercanas al Litoral son muy pequeñas, por lo que es apropiado aplicar en el estudio hidrodinámico del SLN un modelo de este tipo.

Existen numerosos modelos matemáticos para simular la dispersión de contaminantes, pero no debe perderse de vista el hecho de que en general, la variación de la concentración de los contaminantes, depende más de la advección que de la dispersión, por lo que es más conveniente utilizar modelos hidrodinámicos adecuados que modelos de dispersión muy sofisticados.

7.2.10 Datos específicos para el modelo de oxígeno disuelto

El modelo utilizado se conoce como MODIS, el cual requiere de información de concentraciones de DBOC Y OD al inicio de la simulación, además de los siguientes datos:

- Salinidad (%)
- Temperatura(°C)
- Máxima producción de oxígeno disuelto a mediodía por fotosíntesis(gO_2/m^2)
- Respiración (gO_2/m^2)
- DOS(gO_2/m^3)
- Velocidad del viento (m/s)
- Tasa de oxidación de DBOC
- Fecha y hora del inicio de la simulación

Es necesario aclarar, que el número y precisión de cada dato está en función de las condiciones particulares de cada caso y del modelo utilizado.

7.2.11 Calibración y validación para el modelo de oxígeno disuelto

Para calibrar los modelos a las condiciones locales de la zona en estudio, se efectúan una serie de corridas del modelo con diferentes parámetros y se comparan los resultados con los datos medidos en campo, con esto es posible ajustar las variables del modelo, hasta alcanzar un error aceptable en la simulación. En este tipo de modelos un error entre 10% y 20% es aceptable.

La validación del modelo es muy importante, puesto que con ella se demuestra que las hipótesis de partida del modelo son aplicables a las condiciones del problema analizado.

Los parámetros objeto de calibración en el modelo de oxígeno disuelto son:

- La producción de OD por fotosíntesis
- La tasa de respiración
- La demanda de oxígeno por sedimento
- La tasa de oxidación por DBOC

Debe mencionarse, que el modelo de calidad de agua ha sido calibrado con varios casos que se presentan en la "Metodología de Estudio de los Sistemas de Saneamiento Litoral", Oviedo, 1995.

7.2.12 Especificaciones del problema

El propósito del ejemplo, es analizar desde el punto de vista hidrodinámico y de calidad de agua, las posibles consecuencias de la apertura de un canal interior en el SLN. Dicho canal de 10 m de ancho y 2 m de profundidad, se localiza en el costado oriente de

Nichupté, al sur de Bojórquez, en la proximidad de uno de los canales que interconecta a ambas lagunas.

Descripción de escenarios y condiciones de frontera.

Se simularon dos escenarios diferentes, el primero correspondiente a la situación actual, en el cual el SLN no está influenciado por el canal artificial, y el escenario futuro del proyecto, en el que se interconecta dicho canal y se permite su interacción con el SLN. El propósito principal es establecer una comparación de calidad de agua confiable. Para ambos casos se emplearon exactamente los mismos parámetros de simulación, tanto en lo que concierne a las condiciones hidrodinámicas como en los parámetros fisicoquímicos necesarios para ejecutar el modelo de calidad de agua, siendo, la única diferencia entre ambos casos la presencia del canal del ejemplo en cuestión.

Condiciones de frontera hidrodinámicas.

Con respecto a la parte hidrodinámica, la condición de viento utilizada en el ejemplo fue una velocidad promedio anual de 40 km/h con una dirección de 108° respecto al norte geográfico estos datos corresponden a la **Figura 6.24**.

Las condiciones de marea están basadas en la predicción para 1999 para la isla de Cozumel, se consideraron estos datos de la **Figura 6.2** por ser la zona más cercana al sitio.

- Onda reflejante
- Amplitud promedio de onda 0.15 m
- Período de 12 h
- Desfase de 270°

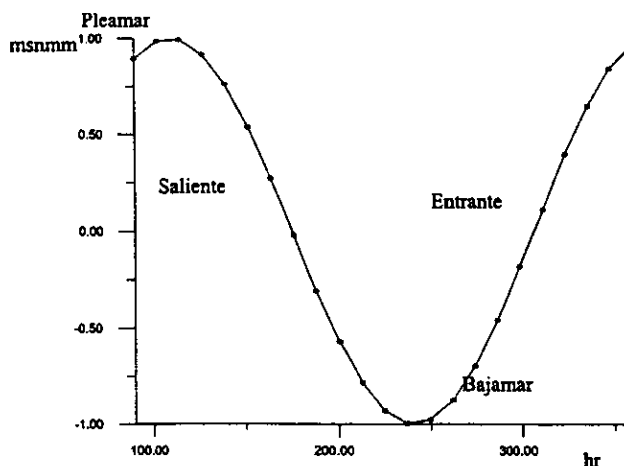


Figura 7.12 Condiciones de marea consideradas en el ejemplo.

La batimetría del SLN, fue proporcionada por el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA) y se muestra en la Figura 7.13.

Condiciones de frontera para el modelo de calidad de agua.

Para la evaluación de los contornos de oxígeno disuelto, se utilizó el modelo MODIS. Los parámetros iniciales para el modelo de calidad de agua fueron tomados del informe "Hidrodinámica de la Laguna de Nichupté, Cancún, Q. Roo, México", elaborado por el IMTA en 1993 y son los siguientes:

Para oxígeno disuelto (OD) y Demanda de Oxígeno (DBO), se adoptaron los valores de 3.4 mg/l y 14.2 mg/l respectivamente para la Laguna de Bojórquez y de 4.7 mg/l y 2.44 mg/l para la Laguna de Nichupté. El valor promedio de salinidad es de 23.8 ppm y el de temperatura ambiente promedio 28°C.

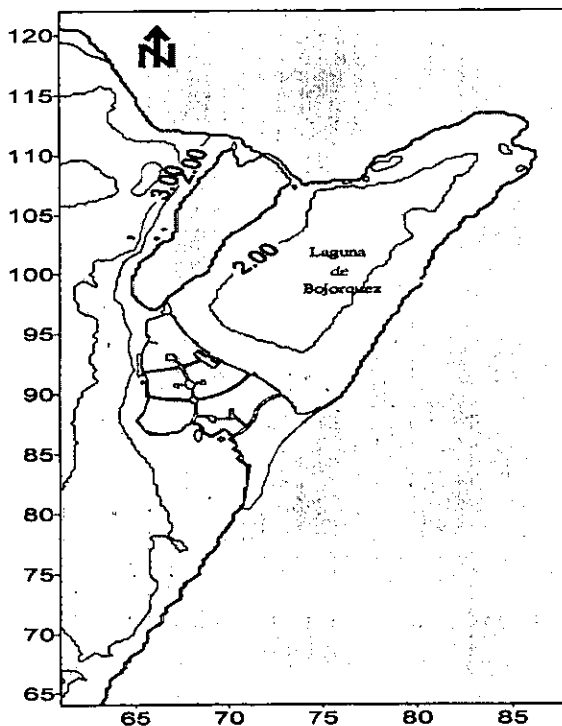


Figura 7.13 Batimetría del Sistema Lagunar Nichupté. Ref. 17.

7.2.13 Discretización espacial y temporal

Debido a que la zona de estudio del ejemplo representa solo una pequeña parte del SLN, se realizó en dos etapas. En la primera se simuló de manera global todo SLN y en la segunda sólo considera la zona tomada para el ejemplo. Para esta última se emplearon como condiciones hidrodinámicas de frontera, las generadas durante la simulación de todo el sistema. El dominio de cálculo del SLN completo se representó con un total de 11704 nodos, con 133 nodos en la dirección norte-sur y de 88 nodos en la dirección este-oeste y un espaciamiento de 100 metros en ambas direcciones, tal como se muestra en la Figura 7.14.

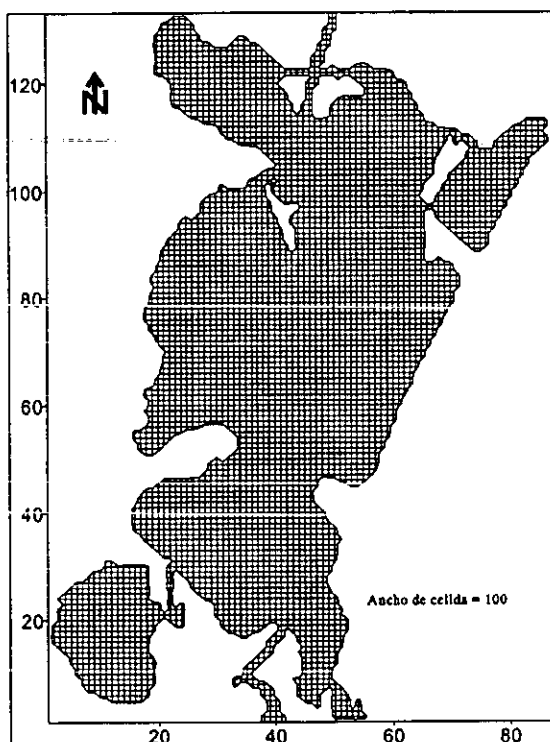


Figura 7.14 Discretización de la malla utilizada del SLN, utilizado el ejemplo. Ref. 17

El paso de tiempo empleado fue de 10 segundos, requiriéndose aproximadamente 132 horas de simulación para lograr condiciones estables de flujo.

Para la zona de estudio en detalle se emplearon un total de 25970 nodos, con 191 nodos en dirección norte - sur y 136 nodos dirección este - oeste, y un espaciamiento regular promedio de 20m. Es importante destacar que las proporciones del canal respecto al SLN, y su localización difícilmente logra modificar las condiciones del SLN.

7.2.14 Descripción y análisis de los resultados obtenidos

Una vez realizadas las simulaciones con los diferentes parámetros, se hace un análisis para obtener las condiciones prevalecientes en la zona de estudio, además de evaluar si los resultados obtenidos son congruentes con el sistema real, ya que puede darse el caso que para algunas condiciones las limitaciones del modelo puedan producir resultados con errores numéricos que conduzcan a conclusiones falsas.

7.2.14.1 Resultados hidrodinámicos

A continuación se describen los resultados obtenidos después del tiempo de estabilización de flujo (132 horas), las Figuras (7.15), (7.16), (7.17) y (7.18) muestran los patrones de flujo característicos dentro del SLN, teniendo como fondo la batimetría del sitio para facilitar la referencia de aquellas zonas que sufren cambios de velocidad evidentes por la morfología del sistema.

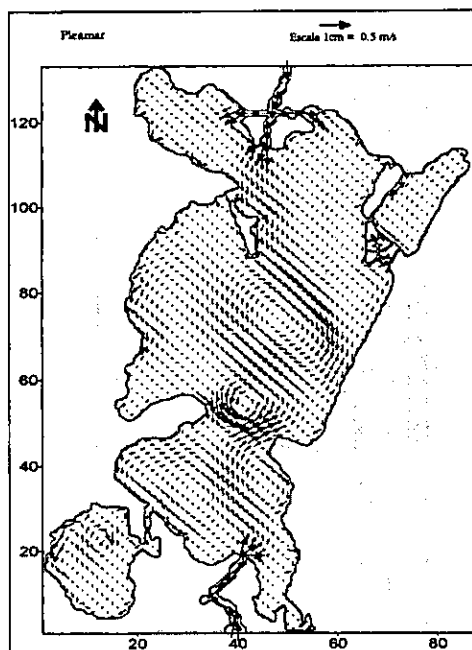


Figura 7.15. Patrón hidrodinámico obtenido en condición de Pleamar. Ref. 17

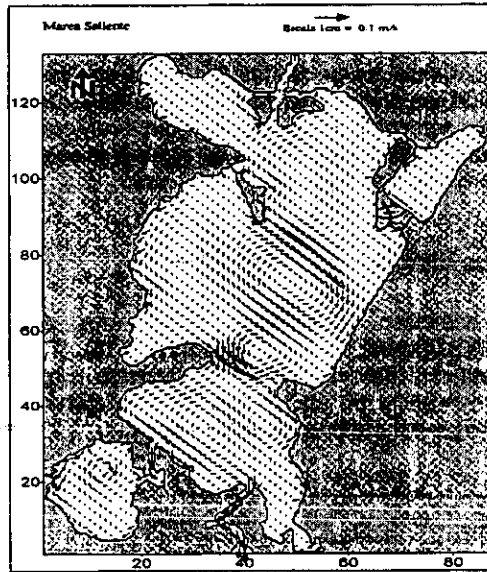


Figura 7.16. Patrón hidrodinámico obtenido en condición de marea saliente.
Ref. 17

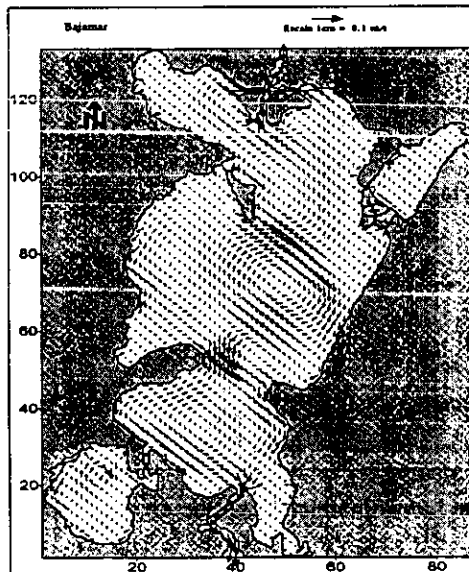


Figura 7.17. Patrón hidrodinámico obtenido en condición de Bajamar. Ref. 17

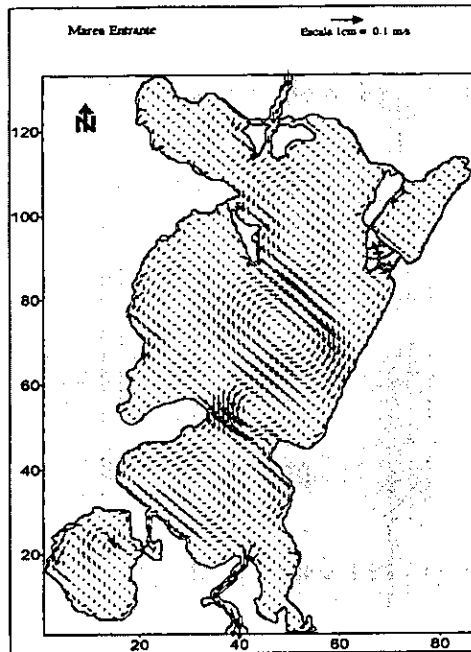


Figura 7.18. Patrón hidrodinámico obtenido en condición de marea entrante.
Ref. 17.

En la **Figura 7.15** se muestra claramente que para las condiciones de pleamar existe un claro aporte de agua al sistema por ambas bocas e igualmente se aprecia que también existe aporte de agua hacia la Laguna de Bojórquez por ambos lados. La distribución de velocidad en la parte central del SLN es muy similar a lo largo de todo el ciclo de marea, con velocidades típicas de 5 cm/s.

En condiciones de marea saliente, **Figura 7.16** se aprecia que a pesar del vaciado del SLN por ambos canales (Cancún y Nizuc), la Laguna de Bojórquez sigue teniendo un aporte por la parte norte y un vaciado por la parte sur, estas condiciones son muy similares en condiciones de bajamar (**Figura 7.17**) con la excepción de que la zona norte de Bojórquez ya experimenta el refluo de salida.

Por último en la **Figura 7.18** el periodo de marea entrante y refleja el desfase de la marea, existiendo entrada de agua hacia la laguna de Bojórquez a través del Canal Cancún y aún por el canal Nizuc.

Las figuras anteriores tipifican el comportamiento hidrodinámico del SLN, para las condiciones más críticas de simulación.

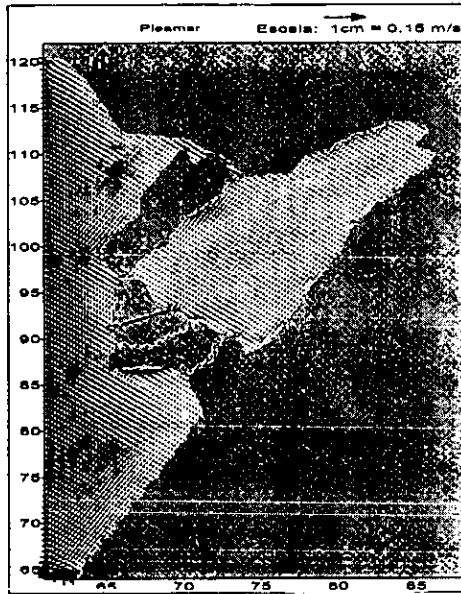


Figura 7.19 Patrón hidrodinámico obtenido en condición de pleamar. Ref. 17.

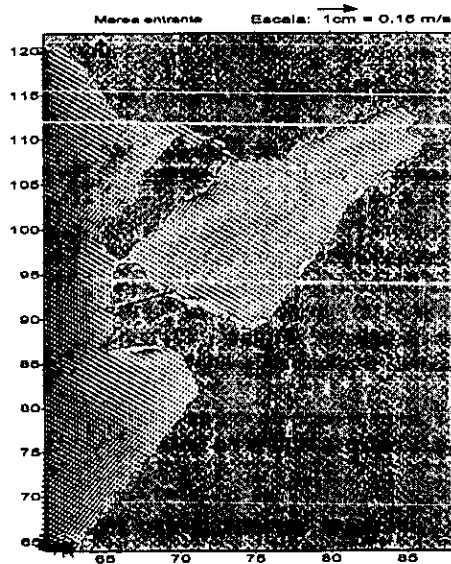


Figura 7.20. Patrón hidrodinámico obtenido en condición de entrante, de la malla de aproximación. Ref. 17

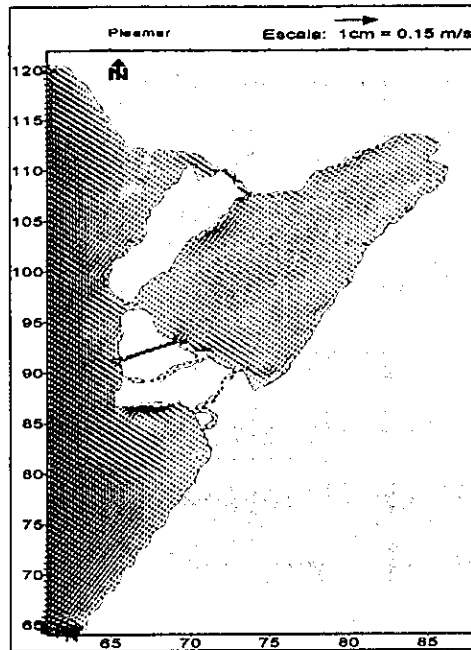


Figura 7.21. Patrón hidrodinámico obtenido en condición de entrante de la malla de aproximación, con el canal adicional. Ref. 17.

Del análisis de las condiciones hidrodinámicas arriba discutidas, se pueden inferir tres conclusiones importantes:

- Las condiciones globales del flujo tanto en Nichupté como en la Laguna de Bojórquez, presentan direcciones predominantes de flujo norte - sur. La magnitud de las velocidades en el Sistema Lagunar Nichupté son mayores que las encontradas en la Laguna de Bojórquez, donde los valores fluctúan alrededor de 3cm/s.
- La dirección de flujo en los canales de interconexión, entre Bojórquez y Nichupté se invierte dependiendo del estado de marea, trayendo consigo también una inversión de flujo en el canal artificial, en donde las velocidades promedio son muy bajas y del orden de 1 a 2 cm/s.
- Se puede observar que desde el punto de vista hidrodinámico, la presencia del nuevo canal artificial no induce variaciones apreciables, aun en la proximidad del canal.

7.2.14.2 Calidad del agua.

A continuación se presenta la evolución de los contornos de OD para los estados de marea más importantes, así como los de DBO. Cada una de las figuras indica en el extremo derecho una escala de colores no uniforme que representa los valores de OD Y DBO en mg/l.

Las condiciones iniciales se tomaron en bajamar, de esta manera el tiempo de simulación que aparece en la esquina superior izquierda de cada una de las figuras, se debe interpretar como sigue: 6 horas marea entrante; 12 horas pleamar; 18 horas marea saliente; 24 horas bajamar.

En todos los casos, las figuras muestran los contornos que cubren la zona a partir de la región sur de Bojórquez, incluyendo en su caso, el canal futuro.

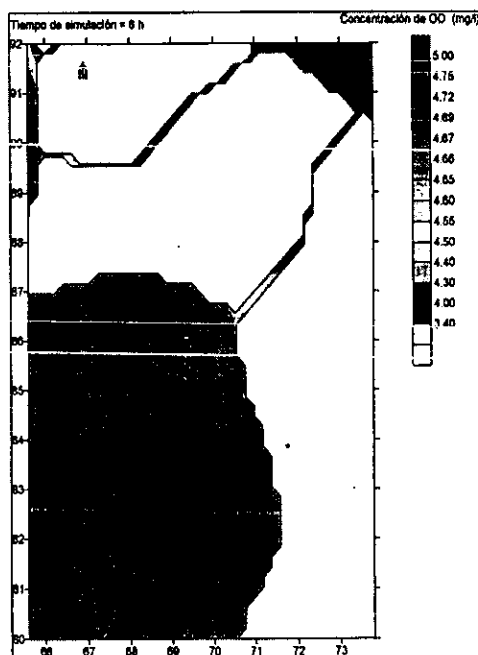


Figura 7.22. Contornos de OD situación actual para condición de entrante.
Ref. 17

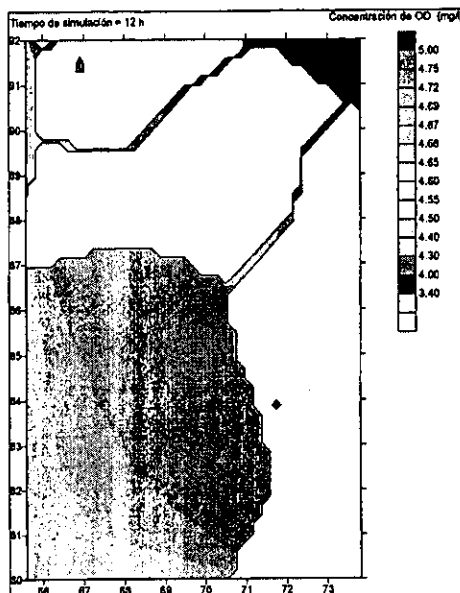


Figura 7.23. Contornos de OD situación actual para condición de pleamar.
Ref. 17

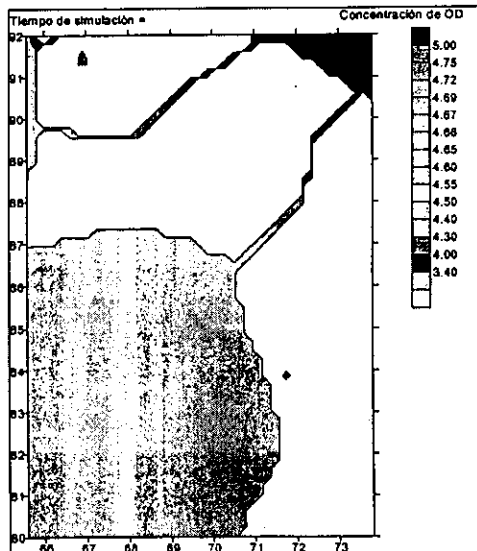


Figura 7.24. Contornos de OD situación actual para condición de marea saliente.
Ref. 17

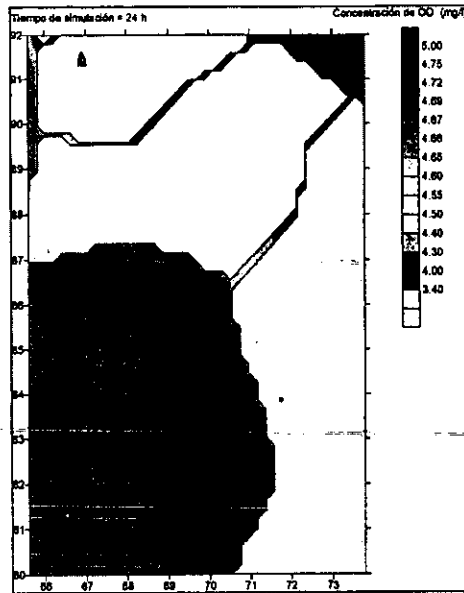


Figura 7.25. Contornos de OD situación actual para condición de Bajamar.
Ref. 17

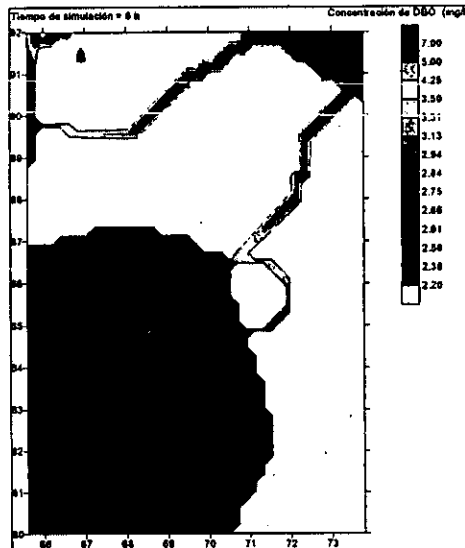


Figura 7.26. Contornos de DBO con el canal de proyecto para condición de marea entrante Ref. 17.

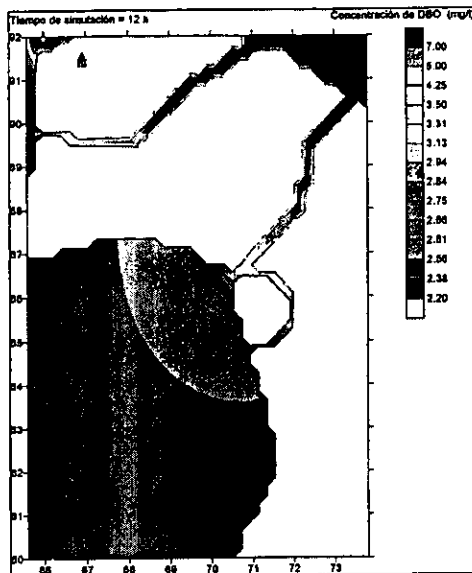


Figura 7.27. Contornos de DBO con el canal de proyecto para condición de pleamar. Ref. 17

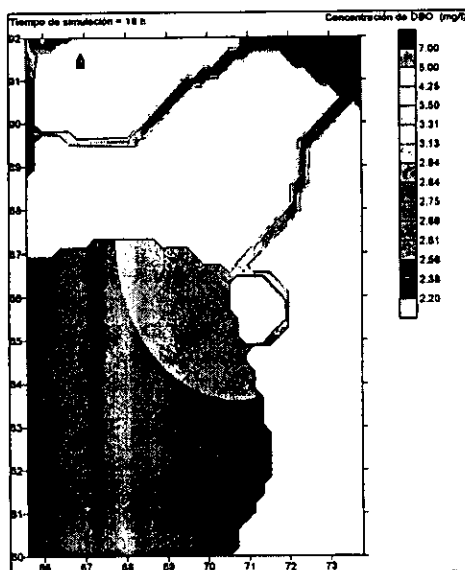


Figura 7.28. Contornos de DBO con el canal de proyecto para condición de marea saliente. Ref. 17

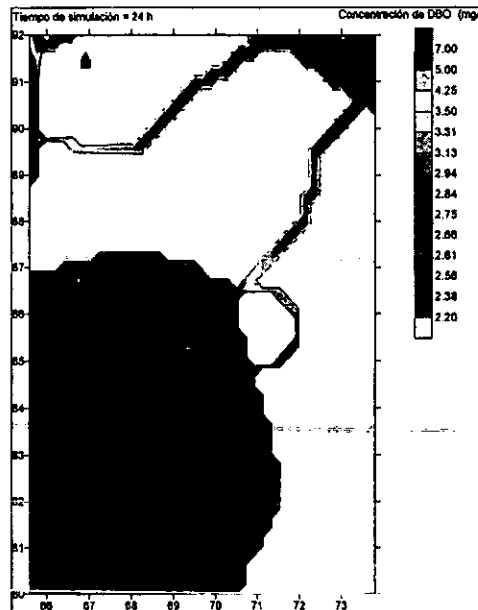


Figura 7.29. Contornos de DBO con el canal de proyecto para condición de Bajamar. Ref. 17.

La Figura 7.22, corresponde a condiciones de marea entrante, se nota de manera muy importante el gradiente descendiente de OD que se establece de norte a sur, alcanzándose valores cercanos a los 3.8 mg/l en la parte superior del canal que ingresa a Bojórquez debido, esencialmente al aporte de agua de Nichupté que posee una mayor concentración de oxígeno disuelto. El efecto que esto tiene sobre el canal artificial se aprecia en la Figura 7.22, ya que el agua que ingresa a este canal proviene básicamente de Nichupté, lo cual da lugar a concentraciones superiores a 4.5 mg/l en todo el canal.

Para condiciones de marea saliente las tendencias vuelven a invertirse, es decir el aporte de agua de Bojórquez a Nichupté provoca que la concentración de OD empiece a disminuir tanto en la zona de Nichupté aledaña a los canales de conexión, como en el canal artificial, tal como se ve en las Figuras 7.26 y 7.27. Por último, al llegar a las condiciones de bajamar, el mayor aporte de concentración Bojórquez a Nichupté, como se ilustra en las Figuras 7.28 y 7.29.

Esta serie de figuras muestra claramente que las variaciones locales de concentraciones de oxígeno disuelto son mínimas y que aun cuando están gobernadas por el efecto global de todos los fenómenos involucrados que fueron descritos en el modelo matemático, para este ejemplo predominan los efectos advectivos, notándose a lo largo del estudio, que la presencia del canal no afecta la calidad del agua del SLN.

7.2.15 Conclusiones .

- Dadas las características de flujo que se presenta en zonas poco profundas, es apropiado utilizar modelos matemáticos bidimensionales en el estudio de la hidrodinámica.
- Es necesario conocer las características e hipótesis de los modelos, para poder realizar una interpretación correcta de los resultados que arroje el modelo.
- El esquema numérico de los modelos matemáticos, debe ser en términos medios, fácil de programar y con un margen de error en sus resultados de entre 10% y 20%.
- Para este ejemplo, como se mencionó, fue necesario crear dos escenarios, uno con la situación actual del SLN y otro que contemplaba el canal artificial, con el fin de evaluar los efectos de la presencia de este nuevo elemento en el sistema. A la luz de los resultados al modelar los dos escenarios descritos, se concluye de manera clara que la presencia del canal artificial que se pretende conectar al SLN, no afecta al mismo ni desde el punto de vista hidrodinámico ni desde el punto de vista de calidad de agua.
- Dado que uno de los principales problemas que se presenta son las bajas velocidades en el canal artificial, se podría pensar en un sistema de bombeo en las zonas con menores concentraciones de OD.

Conclusiones Generales

Conclusiones y Recomendaciones

- ⇒ Las predicciones de marea resultan una útil herramienta al ingeniero proyectista para el diseño de diversas obras marítimas, sin embargo, debido a que son predicciones astronómicas, se deben considerar los efectos de la marea de tormenta en el alza y baja del nivel de marea, además del constante cambio de la morfología del sitio.
- ⇒ Los datos de oleaje y viento presentados corresponden a mediciones de satélite, por lo que representan una fuente confiable para el diseño de estructuras marítimas, sin embargo se debe tener en cuenta que la mejor manera que existe para conocer las características del oleaje, viento y mareas para un sitio específico, es realizar mediciones directas en un periodo determinado, lo cual desafortunadamente no siempre es posible, además de que estos datos en la mayoría de los casos no están disponibles al público
- ⇒ Con respecto al caso de erosión en la Central Termoeléctrica Adolfo López Mateos, durante el periodo de simulación se observó que la playa se está erosionando al sur y sedimentando al norte, sin embargo el proceso de erosión en esta zona es más fuerte, siendo el volumen neto de 7 140 000 m³.
- ⇒ Dadas las características de flujo, que se presentan en zonas poco profundas, utilizar modelos matemáticos bidimensionales en el estudio de la hidrodinámica es apropiado, además de que es necesario conocer las características e hipótesis de los modelos, para poder realizar una interpretación correcta de los resultados.
- ⇒ En el Sistema Lagunar Nichupté, fue necesario crear dos escenarios, uno con la situación actual del SLN y otro que contemplaba el canal artificial, con el fin de poder evaluar los efectos de la presencia de este nuevo elemento en el sistema. A la luz de los resultados al modelar los dos escenarios descritos, se concluye de manera clara que la presencia del canal artificial, no afecta al mismo ni desde el punto de vista hidrodinámico ni desde el punto de vista de calidad de agua.
- ⇒ Finalmente dado que uno de los principales problemas que se presenta son las bajas velocidades en el canal artificial, se podría pensar en un sistema de bombeo en las zonas con menores concentraciones de OD.

Futuras líneas de trabajo

- ☞ Para mejorar las predicciones de marea se recomienda que se realicen mediciones en sitio, esto con la finalidad de comparar y después calibrar las componentes armónicas.

- ☞ En cuanto al oleaje y viento se debe de continuar con el trabajo aquí presentado, ahora para toda la República Mexicana, en el mapa de regionalización se indican todas las posibles regiones a cubrir.

Bibliografía

1. INEGI (1998), **Información geográfica de México**, www.inegi.gob.mx
2. MAZA et al. (1996), **History of Coastal Engineering in México**, Coastal Engineering, Orlando, USA.
3. Marcambo, S.A. de Boixareu, **La meteorología**.
4. J. J. Dronkers, **Tidal Computation**, North - Holland Publishing company, Amsterdam, 1964.
5. NOAA, National Ocean Service, **A brief explanation of the basic astronomical factors which produce tides and tidal currents**, www.opsd.nos.noaa.gov
6. Frías V. Armando **Ingeniería de Costas**, Instituto Politécnico Nacional.
7. J. Th. Thijssse, **International Course in Hydraulic Engineering, Theory of tides**, Delft, Netherlands.
8. George L. Mellor, (1996) **Introduction to physical oceanography**, Princeton University, New Jersey.
9. Stanislaw R. Massel (1989) **Hydrodynamics of coastal zones**, Institute of Hydroengineering, Gdansk, Poland.
10. R. Silva, G. Govaere (1996) **Estudio de la evolución de la playa e hidrodinámica del transporte de sedimentos en las cercanías de la obra de toma de la Central Termoeléctrica de Tuxpan, Veracruz**, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
11. Ian R. Young, Greg J. Holland (1996) **Atlas of the oceans: wind and wave climate**, School of Civil Engineering Australian Defense Force Academy Canberra, Australia.
12. R. Silva (1998) **Apuntes del curso: Análisis y predicción de oleaje**, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
13. J. Carlos Espinal (1999) **Metodología para el diseño integral de sistemas de saneamiento litoral**, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
14. J. Manuel Mora (1999) **Evolución espacial y temporal de la línea de playa**, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
15. R. Silva, G. Govaere (1996) **Desarrollo de un modelo de cálculo de los parámetros del oleaje en función de datos de viento**. Instituto de Ingeniería, UNAM, México.

16. A. Pedrozo (1999) **Análisis frecuencial y temporal del oleaje**. Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
17. **Estudio hidrodinámico de calidad del agua de Nichupté. Influencia de un canal artificial (1998)**. Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
18. A. Contreras (1999) **Pronóstico de trayectoria de ciclones utilizando datos estadísticos y sistemas de percepción remota en tiempo real**, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
19. V. Rosales (1999) **Caracterización del oleaje aplicada a Tuxpan, Veracruz**, Instituto Politécnico Nacional, México.
20. R. Silva, G. Govaere, J. Manuel Mora (1992) **Desarrollo de un sistema para el análisis y diseño de playas**, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.

Glosario

Calendario Juliano. Calendario introducido por Julio Cesar en el año 45 D.C., y que modificado por Augusto años más tarde. Este calendario estipula que el año común debe de consistir de 365 días y que cada cuatro años (conocidos ahora como bisiestos) se adiciona un día.

Corrientes de marea ecuatoriales. Son corrientes de marea que se presentan en el ecuador cada quince días, este fenómeno se produce cuando la Luna pasa sobre el ecuador.

Teoría del equilibrio. Modelo bajo el cual, se asume que el agua que cubre la superficie de la Tierra responde instantáneamente a las fuerzas productoras de mareas del Sol y la Luna para formar una superficie de equilibrio bajo la acción de éstas. El modelo no toma en cuenta la fricción, inercia, y la distribución de las masas terrestres. La marea teórica formada bajo éstas condiciones es conocida como marea de equilibrio.

Equinoccios. Son los dos puntos en la esfera celestial, donde el ecuador intersecta la eclíptica. El equinoccio de primavera es el punto donde el Sol cruza el ecuador de sur a norte y este ocurre aproximadamente el 21 de marzo. El equinoccio de otoño es el punto donde el Sol cruza el ecuador de norte a sur y se presenta alrededor del 23 de septiembre.

Aphelio. Es el punto en el cual la Tierra (u otro planeta), se encuentra más alejada del sol.

Apogeo. Es el punto en el cual la Luna se encuentra más alejada de la Tierra.

Perihelio. Es el punto en el cual la Tierra (u otro planeta), se encuentra más cerca del sol.

Perigeo. Es el punto en el cual la Luna se encuentra más cerca de la Tierra.

Día sideral. Es el tiempo de rotación de la Tierra con respecto al equinoccio de primavera. Es aproximadamente 0.997 veces del día solar.

Mes sideral. Es el tiempo promedio de un giro de la Luna alrededor de la Tierra con respecto a una estrella fija. Es igual a 27.321 veces del día solar.

Día solar. Es el tiempo de rotación de la Tierra con respecto del Sol. El día solar comienza a la media noche y es llamado día civil, pero si el día es contado a partir del medio día éste es conocido como un día astronómico

Syzygy. Posición de la Luna cuando está en fase llena o nueva.

Esfera celestial. Una esfera imaginaria de radio infinito concéntrica con la Tierra, en la cual todos los cuerpos celestiales excepto la Tierra, son imaginados para ser proyectados.

Eclíptica. La intersección del plano de la órbita terrestre con la esfera celestial.

Fase. En movimiento de ondas de superficie, es un punto en el período, al cual el movimiento de la onda ha avanzado con respecto a un punto de referencia dado inicialmente.

Prisma de marea. Cantidad total de agua que fluye dentro de un puerto o estuario y que sale nuevamente con el movimiento de la marea, excluyendo cualquier flujo de agua dulce

Altura de ola. Distancia entre un valle y una cresta de una ola

Amplitud de onda. Distancia vertical entre un valle o una cresta de la onda y el nivel medio de la superficie del agua

Celeridad. Velocidad de desplazamiento de la onda sobre la superficie de agua

Condición de asimetría. Situación en la que independientemente de la irregularidad de los factores, sus características de probabilidad son las mismas.

Condición de compatibilidad. Situación en la que una muestra representa las características de todo el universo o conjunto al que pertenece.

Evento aleatorio. Suceso o acontecimiento casual, impredecible.

Fuerza generadora. Fuerza por cuya causa se generan olas.

Fuerza restauradora. Fuerza que contrarresta los efectos causados por las fuerzas generadoras del oleaje.

Oleaje aleatorio o Irregular. Oleaje compuesto por varias olas con características diferentes.

Onda. Elevación que se produce en un medio líquido, sin que en dicho medio, como conjunto, se produzca ningún desplazamiento permanente

Órbita del oleaje. Perfil resultante de dibujar el recorrido de una partícula de agua que se mueve por efecto del oleaje que pasa sobre ella.

Período de ola. Tiempo medido entre dos valles o dos crestas de una ola

Soldadura del oleaje. Fenómeno mediante el cual las olas con períodos semejantes que se agrupan para formar una sola con un solo período común.

ANEXOS

Principios Básicos de Probabilidad.

Las leyes de las Ciencias Naturales establecen las condiciones para que un evento ocurra con certeza. Esta idea puede expresarse de la siguiente forma. Si el conjunto de condiciones S se realiza, entonces el evento A ocurrirá con certeza.

Hay otro tipo de eventos que, definidas algunas condiciones S , en ocasiones ocurre y en otras no. El ejemplo clásico es cuando se tira un dado, la cara superior puede presentar el número 1, o puede no presentarlo. A este tipo de eventos se les llama evento aleatorios bajo las condiciones dadas.

A las leyes que asocian la realización de un evento aleatorio A , con una serie de condiciones S , se les denomina leyes probabilísticas y se expresan en forma general como:

$$P\left(\frac{A}{S}\right) = P \quad \text{A.1.1}$$

lo cual significa que, dadas las condiciones S , el evento A ocurrirá, a la larga, en una proporción p de veces tal que

$$p = \frac{\mu_r}{n_r} \quad \text{A.1.2}$$

donde n_r es el número total de observaciones y μ_r el número de observaciones en las que se realiza el evento A .

En la práctica las leyes del tipo dado por la ecuación A.1.1 no pueden obtenerse directamente y es necesario realizar una serie de experimentos que permitan estimarla. La teoría de las probabilidades proporciona una herramienta tanto para establecer leyes del tipo dado por A.1.1 como para estimar el grado de precisión de las mismas.

Axiomas

1. De la ecuación A.1.2 se deduce que la probabilidad* asociada al evento A está comprendida entre 0 y 1, es decir

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{A.1.3}$$

2. Si dos eventos A_1 y A_2 no pueden ocurrir simultáneamente se llaman mutuamente exclusivos y el evento "unión" ($A_1 \cup A_2$) representa la ocurrencia de al menos uno de ellos, lo cual permite escribir:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \quad \text{A.1.4}$$

3. Si un evento A_3 ocurre necesariamente, entonces, el axioma establece que:

$$P(A_3) = 1 \quad \text{A.1.5}$$

La teoría elemental de las probabilidades se construye utilizando únicamente los tres axiomas anteriores.

A partir de estos axiomas se desarrollan las siguientes fórmulas.

Si $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ son eventos mutuamente exclusivos, entonces por extensión del segundo axioma

$$P(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad \text{A.1.6}$$

La intersección entre dos eventos A y B se define como el evento que consiste en que ocurran tanto A como B. Para escribir la intersección entre A y B, se utiliza la notación AB.

Como ejemplo, cuando se tira un dado pueden definirse los eventos

A: el resultado es par B: el resultado es mayor que 3

El evento intersección AB contiene los resultados 4 y 6

Ahora bien, si dos eventos A y B no son mutuamente exclusivos (por lo tanto existe el evento intersección), resulta que:

$$P(AB) = P(B/A)P(A) \quad \text{y} \quad P(AB) = P(A/B)P(B)$$

En donde la notación $P(B/A)$ significa la probabilidad de que ocurra B dado que ocurrió A.

La relación anterior se expresa también como

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad \text{A.1.7}$$

Para el ejemplo anterior

$$P(A) = 3/6 = 1/2 \text{ (el resultado es par)}$$

$$P(B) = 3/6 = 1/2 \text{ (el resultado es mayor que 3)}$$

$$P(AB) = 2/6 = 1/3 \text{ (el resultado es 4 o 6)}$$

Por lo que

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/3}{1/2} = 2/3$$

es decir, que la probabilidad de que el resultado sea mayor que 3, dado que fue par, es igual a $2/3$ (hay dos pares mayores que 3 de un total de 3 pares).

Eventos Independientes

Si la ocurrencia de alguno de los eventos A ó B no influye en la ocurrencia de otro, se dice que A y B son independientes en cuyo caso, la probabilidad de que ocurran ambos es igual al producto de las probabilidades respectivas, esto es

$$P(AB) = P(A) P(B) \quad \text{A.1.8}$$

Así por ejemplo, si se tiran dos dados y se pide que el primero resulte par (evento A) y el segundo sea mayor que 3 (evento B) la probabilidad de que esto ocurra será

$$P(AB) = P(A) P(B) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Por otra parte sea \bar{A} el complemento de A, que significa que el evento de que A no ocurra, de modo que

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \text{A.1.9}$$

Función Binomial

De acuerdo con los resultados anteriores, si el evento A tiene una probabilidad p de ocurrir, una secuencia cualquiera de k ocurrencias de A y N-k ocurrencias de \bar{A} tendrá una probabilidad

$$p^k (1 - P)^{N-k} \quad \text{A.1.10}$$

por ejemplo, la secuencia $\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}$ ocurre con una probabilidad

$$P^2 (1-P)^3$$

La función que determina la probabilidad de obtener cualquier secuencia con exactamente k ocurrencias de A en N realizaciones del experimento, conocida la probabilidad p de ocurrencia en una realización, se llama función binomial, se denota por

$B(k, n, p)$ y de acuerdo con la ecuación A.1.6 se obtiene mediante la expresión

$$b(k, N, p) = C_N^k p^k (1 - P)^{N-k}$$

donde C_N^k representa al número de combinaciones de grupos de k elementos tomados de un total de N.

y se define como:

$$C_N^k = \frac{N!}{k! (N - k)!}$$

Antecedentes de estadística

Organización de los datos de una muestra.

Por facilidad en el desarrollo se utilizarán las siguientes definiciones

- Resultado es un valor aislado, obtenido mediante la observación de una variable cualquiera X en estudio
- Muestra es un conjunto de resultados obtenidos para la variable X en cuestión
- Población es el conjunto de todos los posibles valores que podría obtener la variable X

Así por ejemplo, si la variable X representa la altura de ola en un cierto punto, y de esta altura se tiene un registro con 10 valores de ella, entonces un resultado sería por ejemplo el octavo valor; la muestra sería el conjunto de los 10 valores medidos y la población el conjunto de todas las alturas de ola que podrían presentarse en el punto en cuestión, esto es, todos los números reales comprendidos entre cero y la altura máxima que puede ocurrir.

Partiendo de la misma idea puede definirse una muestra insesgada o aleatoria como aquella que se obtiene completamente al azar, sin dar preferencia a algún tipo de valores. En contraste, se dice que una muestra es sesgada cuando fue obtenida con cierta predisposición hacia algún tipo de resultados.

Para ejemplificar esta idea, supóngase que los valores de la altura de ola fueron obtenidos con un limnómetro que deja de funcionar cuando la ola sobrepasa los 3 m. En estas condiciones, la muestra obtenida será sesgada ya que en ella no se incluirían las olas mayores a esta longitud.

Para facilitar el análisis del conjunto de datos de una muestra se acostumbra organizarlos con ayuda de técnicas específicas mediante las cuales se destacan sus principales características.

Curvas de frecuencia relativa

Una forma útil de presentar los datos de una muestra es organizarlos en una secuencia de grupos o clases y asignar a cada una de ellas el número de valores de la muestra que le corresponden. El procedimiento es el siguiente:

1. Se determinan los valores máximo X_M y mínimo X_m de la muestra, así como el tamaño del intervalo ΔX_T comprendido entre ellos.
2. Se determina un tamaño de intervalo ΔX , tal que

$$\frac{\Delta X_T}{\Delta X} = 1$$

donde l se selecciona como un valor entre 5 y 20 según el número de valores que tenga la muestra original y la precisión que se desee en los resultados.

3. Se definen l clases o intervalos en los que se agruparán los datos, de acuerdo con la siguiente secuencia:

1er intervalo; $X_m \leq X \leq X_m + \Delta X$

2do intervalo; $X_m + \Delta X \leq X \leq X_m + 2\Delta X$

...

i -ésimo intervalo; $X_m + (i - 1)\Delta X \leq X \leq X_m + i\Delta X$

último intervalo; $X_m + (l - 1)\Delta X \leq X < X_M$

4. Se determina la frecuencia absoluta ó número de valores de la muestra comprendidos en cada intervalo i , y se denomina f_i .
5. Se determina la frecuencia relativa fr_i , asociada a cada intervalo i , dividiendo la frecuencia absoluta correspondiente entre el número total de valores que contiene la muestra.
6. Siguiendo una secuencia del primero al último, se calculan las frecuencias relativas acumuladas hasta cada intervalo

La gráfica que relaciona los valores de x_i , agrupados en cada intervalo, con los valores de las frecuencias relativas se conoce como histograma de frecuencias. Si en lugar de las frecuencias relativas que corresponden a cada intervalo se utilizan las frecuencias relativas acumuladas, a la gráfica que resulta se le denomina curva de frecuencias acumuladas.

Parámetros estadísticos

Los datos de una muestra pueden caracterizarse numéricamente mediante los siguientes grupos de parámetros estadísticos.

a) Medidas de tendencia central

Media

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

A.1.11

Raíz cuadrática media

$$x_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} \quad \text{A.1.12}$$

de las ecuaciones anteriores, x_i son los valores de la muestra y n es el número total de valores.

b) Medidas de dispersión*Variancia*

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad \text{A.1.13}$$

donde S^2 es la variancia de la muestra

Desviación estándar

$$S = \sqrt{S^2} \quad \text{A.1.14}$$

donde S es la desviación estándar de la muestra

Coefficiente de variación

$$Cv = \frac{S}{\bar{x}} \quad \text{A.1.15}$$

donde Cv es el coeficiente de Variación

c) De asimetría*Coefficiente de asimetría*

$$g = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{n-1}{n} S^2\right)^{1.5}} \quad \text{A.1.16}$$

donde g es el coeficiente de asimetría.

Puede haber casos donde los datos tengan la misma media y desviación estándar, pero coeficiente de asimetría diferente.

Características estadísticas de una población

Las posibilidades asociadas a eventos aleatorios simples pueden ser estimados en forma empírica utilizando relaciones de frecuencias como las descritas en la ecuación A.4.2, de esa forma pueden obtenerse resultados como los que se muestran en la **Figura A.1.1** sin embargo, dado que los resultados obtenidos de una muestra, no contienen en general todos los posibles valores de la variable aleatoria, es necesario desarrollar modelos que se suponen representativos de toda la población.

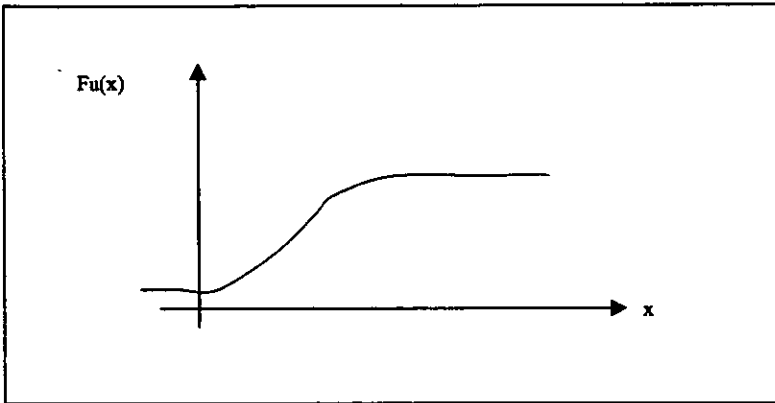


Fig. A.1.1 Función de distribución.

Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad

Una **variable aleatoria** es una función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral.

Se utilizará una letra mayúscula, por ejemplo una X , para designar una variable aleatoria y su correspondiente letra minúscula, x en este caso para uno de sus valores.

Si un espacio muestral contiene un número finito de posibilidades o una secuencia interminable con tantos elementos como números naturales existen, se le llama espacio muestral discreto.

Los resultados de algunos experimentos estadísticos no pueden ser ni finitos ni contables. Tal es el caso, por ejemplo, de cuando se lleva a cabo una investigación para medir las

distancias que un cierto automóvil puede recorrer con 5 litros de gasolina a lo largo de una trayectoria de prueba predeterminada. Suponiendo que la distancia se mide con cierto grado de exactitud, claramente se tiene un número infinito de posibles distancias en el espacio muestral que no puede igualarse con los números naturales. Asimismo, si se registra el tiempo que pasa para que una reacción química se lleve a cabo, nuevamente los intervalos de tiempo posibles que conforman el espacio muestral son infinitos en número y no contables. Ahora puede observarse que no todos los espacios muestrales deben ser discretos.

Si un espacio muestral contiene un número infinito de posibilidades igual al número de puntos en un segmento de línea, se le llama **espacio muestral continuo**. Cuando una variable aleatoria puede tomar valores a una escala continua, se le llama **variable aleatoria continua**. Con frecuencia los valores de una variable aleatoria continua son precisamente los valores que están dentro del espacio muestral continuo.

En la mayoría de los problemas prácticos, las variables aleatorias continuas representan datos medidos, tales como las alturas, pesos, temperaturas, distancias o períodos de vida, mientras que las variables aleatorias discretas representan datos que se cuentan, tales como el número de artículos defectuosos de una muestra de k artículos o el número de accidentes por año en una vía muy rápida.

Distribuciones discretas de probabilidad.

Una variable aleatoria discreta asume cada uno de los valores con una cierta probabilidad. Con mucha frecuencia es **conveniente** representar con una fórmula todas las probabilidades de una variable aleatoria X . Dicha fórmula, necesariamente, debe ser una función de los valores numéricos x , y que se expresa por $f(x)$, $g(x)$, etc. Por lo tanto, se escribe $f(x) = P(X = x)$, esto es, $f(3) = P(X = 3)$. Al conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ se le llama la **función de probabilidad** o **distribución de probabilidad** de la variable aleatoria discreta X .

El conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ es una **función de probabilidad**, **función masa de probabilidad** o **distribución de probabilidad** de la variable aleatoria discreta X si, para cada resultado posible x ,

$$1. f(x) \geq 0 \quad \text{A.1.17}$$

$$2. \sum_x f(x) = 1 \quad \text{A.1.18}$$

$$3. P(X = x) = f(x) \quad \text{A.1.19}$$

Hay muchos problemas en los cuales se desea calcular la probabilidad de que el valor observado de una variable aleatoria X sea menor que o igual a algún número real x . Si se escribe $F(x) = P(X \leq x)$ para cada número real x , se define que $F(x)$ es la **distribución acumulada** de la variable aleatoria X .

La **distribución acumulada** $F(x)$ de una variable aleatoria discreta X , cuya distribución de probabilidad es $f(x)$, es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \quad \text{para } -\infty < x < \infty \quad \text{A.1.20}$$

Distribuciones continuas de probabilidad

Una variable aleatoria continua tiene una probabilidad cero de asumir cualquiera de sus valores exactamente. Consecuentemente, su distribución de probabilidad no puede darse de forma tabular. En principio esto puede parecer alarmante, pero se vuelve más razonable cuando se considera un ejemplo particular. Considérese una variable aleatoria cuyos valores son las alturas de todas las personas mayores de 21 años de edad. Entre cualquiera de dos valores, sean 163.5 y 164.5 centímetros, o incluso 166.99 y 164.01 centímetros hay un número infinito de alturas, una de las cuales es 164 centímetros.

Es remota la probabilidad de seleccionar una persona al azar que tenga un altura exactamente de 164 centímetros y no alguna otra del infinitamente grande conjunto de alturas tan cercana tan cercanas a ese valor que humanamente no se pudiera medir la diferencia, y entonces se asigna una probabilidad de cero al evento.

No obstante, éste no es el caso si se habla acerca de la probabilidad de seleccionar una persona que al menos mida 163 centímetros pero no más de 165. Ahora se está tratando de un intervalo más que de un valor puntual de la variable aleatoria.

Se tendrá que utilizar el cálculo de probabilidades para varios intervalos de variables aleatorias continuas, tales como $P(a < X < b)$, $P(W > c)$, etc.

Nótese que cuando X es continua,

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(a < X < b) + P(X = b) \\ &= P(a < X < b) \end{aligned}$$

Esto es, no importa que se incluya o no un punto final del intervalo o no. Sin embargo, esto no es verdad cuando X es discreta.

A pesar de que la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua no puede presentarse en forma tabular, sí puede tener una fórmula. Dicha fórmula, necesariamente, debe ser una función de los valores numéricos de la variable continua X y como tal, será expresada por la notación funcional $f(x)$.

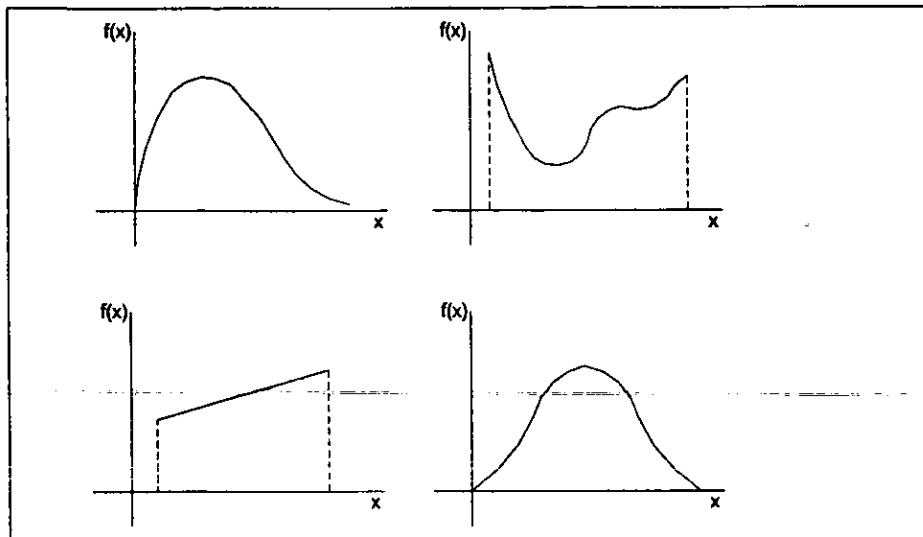


Fig. A.1.2 Funciones de densidad de probabilidad más comunes

Al tratar con variables continuas, $f(x)$ por lo general se llama **función de densidad de probabilidad**, o simplemente **función de densidad de X**. Dado que X se define en un espacio muestral continuo, es posible que tenga un número finito de discontinuidades. Sin embargo, la mayoría de las funciones de densidad que tienen aplicaciones prácticas en el análisis de datos estadísticos. Son continuas y sus gráficas pueden tener diversas formas, algunas de las cuales se muestran en la **Figura A.1.2**.

Dentro de las funciones de distribución de probabilidad más comunes se encuentran:

- Función de distribución normal

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2}$$

- Función de distribución log-normal

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} x^{-1} e^{-\ln x - a)^2 / 2\beta^2} & \text{para } x > 0, \beta > 0 \\ 0 & \text{para los demás puntos} \end{array} \right\}$$

Debido a que las áreas se utilizarán para representar las probabilidades y éstas tienen valores numéricos positivos, la función de densidad debe caer totalmente arriba del eje x .

Una función de densidad se construye de tal manera que el área comprendida bajo la curva es igual a 1, cuando se calcula para el rango de X para el cual se define $f(x)$. Si este rango de X fuera un intervalo finito, siempre sería posible extenderlo para incluir a todo el conjunto de los números reales definiendo $f(x)$ como cero en todos los puntos de las porciones extendidas del intervalo.

En la **Figura A.1.3**, la probabilidad de que X asuma un valor entre a y b es igual al área sombreada bajo la función de densidad entre ordenadas $x = a$ y $x = b$, utilizando el cálculo integral, esa área está dada por:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{A.1.21}$$

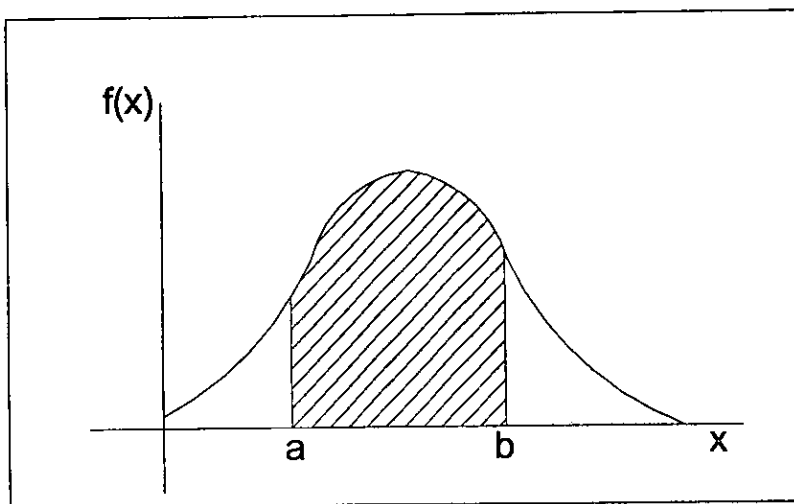


Figura A.1.3 $P(a < X < b)$

La función $f(x)$ es una **función de densidad de probabilidad** para la variable aleatoria continua X , definida en el conjunto de los números reales si se cumple:

1. $f(x) \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. A.1.22

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ A.1.23

3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$ A.1.24

Análisis de Fourier.

Cuando se registra el cambio en el tiempo de la elevación de la superficie libre del mar encima de un punto generalmente se aprecian variaciones irregulares que hacen difícil a simple vista estimar la altura y el período del oleaje. Ello a conducido a considerar el registro de elevaciones de la superficie libre del mar como el resultado de sumar varias ondas senoidales con amplitudes, períodos y ángulos de fase distintos. Esta clase de planteamiento se fundamenta en el análisis de Fourier.

Transformada de Fourier.

Considere que se tiene el conjunto A dado como:

$$A = \{ 7845, 42412, 586, 3549 \}$$

Y que interesa obtener el producto de todos los elementos del conjunto elevado a la quinta potencia, es decir se quiere encontrar

$$Z = ((7845)(4212)(586)(3549))^5$$

Una forma de calcular lo anterior es mediante

$$Z = \text{antilog } 5(\log 7845 + \log 4212 + \log 586 + \log 3549)$$

La última ecuación permite decir que al operar con una transformada de cada número, en este caso el logaritmo, la dificultad de cálculo de las operaciones aritméticas disminuye, ya que es más sencillo sumar que multiplicar y obtener el producto por 5 que elevar a la quinta potencia una cantidad.

El planteamiento anterior muestra que, en ocasiones, el uso de una transformación hacen posible manejar los valores transformados de una forma más simple pese a que se requiere volver a la versión original mediante una transformación inversa. Adicionalmente, en los valores transformados se pueden observar algunas características que en los valores originales no se aprecian.

Se llama transformación, aplicación o mapeo del conjunto A en el conjunto B a la colección T de las asignaciones de cada elemento de A con un único elemento de B. Se escribe

$$T: A \rightarrow B$$

Al conjunto A se llama el dominio de la aplicación $T: A \rightarrow B$ y B se llama el codominio.

El concepto de análisis en el dominio de la frecuencia, es mediante el cual una función periódica puede ser descompuesta en sus componentes armónicas, y se acepta sin reserva que toda función periódica puede sintetizarse sumando sus componentes armónicas.

Sea $x(t)$ una función periódica del tiempo t , con periodo T , tal como se muestra en la **Figura A.2.1**, siempre es posible expresar $x(t)$ como serie infinita de términos trigonométricos de la forma:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + a_2 \cos \frac{4\pi t}{T} + \dots + b_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + b_2 \sin \frac{4\pi t}{T} + \dots + \quad \text{A.2.1}$$

en notación más compacta,

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \quad \text{A.2.2}$$

donde a_0 y las a_k y b_k son los coeficientes de Fourier expresados de la siguiente manera

$a_0 \rightarrow$ representa el nivel medio del mar.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt \quad \text{A.2.3}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt$$

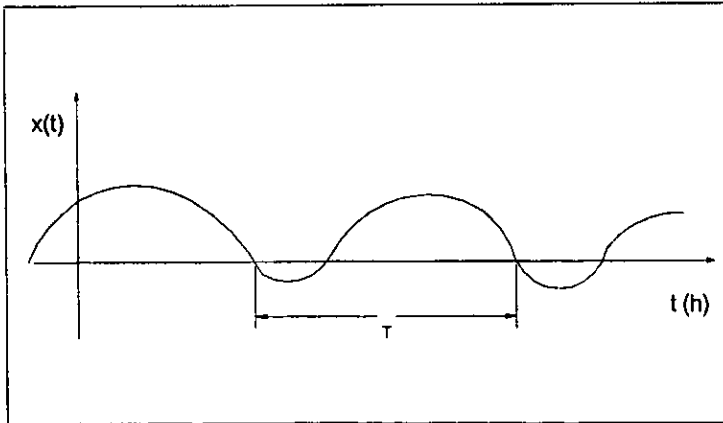


Figura A.2.1

Las condiciones matemáticas para la convergencia de A.2.1 son extremadamente generales y cubren prácticamente toda situación concebible de interés en ingeniería. La única restricción importante consiste en que, si $x(t)$ es discontinua, la serie da el valor medio de $x(t)$ en el punto de discontinuidad.

Supóngase que se ajusta la altura del eje t en la Figura A.2.1 de forma que el valor medio de $x(t)$ sea cero. Entonces de acuerdo con la primera ecuación de A.2.1, el coeficiente a_0 será nulo. Los coeficientes restantes, a_k y b_k serán en general diferentes entre sí; sus valores se ilustran gráficamente en la Figura A.2.2

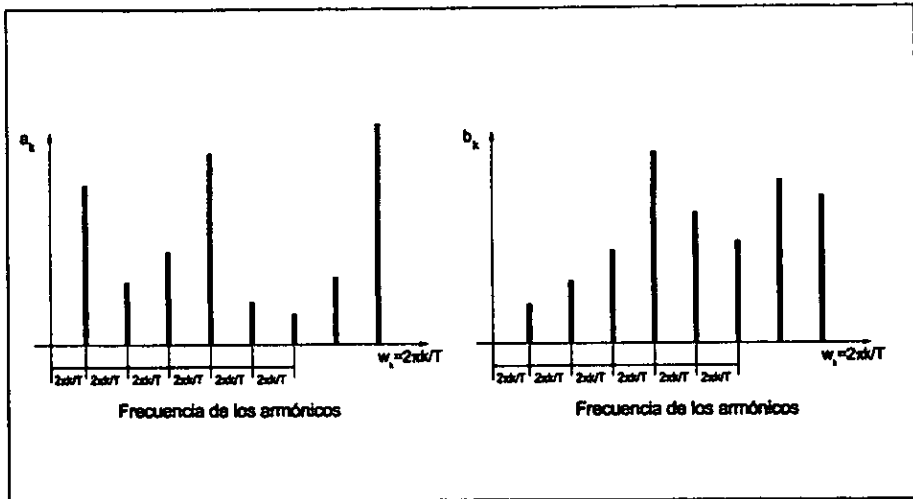


Figura A.2.2. Frecuencia de los armónicos

El eje horizontal de la Figura A.2.2 se ha elegido para representar la frecuencia, y la situación de k -ésimo coeficiente es:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} \quad \text{A.2.4}$$

que es la frecuencia del k -ésimo término armónico. El espacio entre armónicos adyacentes es:

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{A.2.5}$$

y veremos que cuanto mayor es el período T , menor es el espacio $\Delta\omega$ y los coeficientes de Fourier están más estrechamente espaciados en la **Figura A.2.2** en el límite de $T \rightarrow \infty$, llegarán a fundirse. Como en este caso $x(t)$ ya no representa un fenómeno periódico, no nos será posible descomponerlas en componentes de frecuencia discreta.

No obstante, ateniéndonos a ciertas condiciones, todavía podremos servirnos de la misma idea, si bien la serie de Fourier A.2.1 se convertirá en una integral de Fourier y los coeficientes de Fourier A.2.3 se convertirán en funciones continuas de la frecuencia, denominadas transformadas de Fourier. Ahora veremos con detalle la extensión del concepto de serie de Fourier.

Integral de Fourier.

Sustituyendo A.2.3 en A.2.1 se obtiene, para $a_0 = 0$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2\pi k t}{T} dt \right\} \cos \frac{2\pi k t}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \frac{2\pi k t}{T} dt \right\} \sin \frac{2\pi k t}{T}$$

A.2.6

A continuación, sustituyendo el valor de $2\pi k/T$ obtenido en A.2.4 y el de $1/T$ obtenido de A.2.5, se tiene

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \omega_k t dt \right\} \cos \omega_k t + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \omega_k t dt \right\} \sin \omega_k t \quad A.2.7$$

si el período $T \rightarrow \infty$ entonces $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ y la suma se convierte en una integral con límites: $\omega = 0$ y $\omega = \infty$. En tal caso

$$x(t) = \int_{\omega=0}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t \right\} \cos \omega t + \int_{\omega=0}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t \right\} \sin \omega t \quad A.2.8$$

o, poniendo

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt$$

A.2.9

$$B(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt$$

resulta:

$$x(t) = 2 \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega + 2 \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t \, d\omega \quad \text{A.2.10}$$

Los términos $A(\omega)$ y $B(\omega)$ definidos por A.2.5 son las componentes de la transformada de Fourier de $x(t)$, y la ecuación A.2.6 es una representación de $x(t)$ mediante una integral de Fourier o una transformada inversa de Fourier.

Este desarrollo no es en modo alguno riguroso, pero sirve para ilustrar el proceso lógico que lleva de una representación en serie de Fourier a una integral de Fourier. La teoría clásica del análisis de Fourier introduce la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, dt < \infty \quad \text{A.2.11}$$

que debe cumplirse para que A.2.9 y A.2.10 sean ciertas. Veremos más adelante que, en ciertas circunstancias, no es necesario tomar al pie de la letra esta condición; lo importante es tener en cuenta que la teoría clásica es válida solamente para funciones que tienden a cero cuando $|t| \rightarrow \infty$ de forma que se satisfaga A.2.11.

En un punto de discontinuidad de $x(t)$, la ecuación A.2.10 nuevamente da el valor medio de $x(t)$ en ese punto.

Una integral de Fourier puede ser considerada como límite formal de una serie de Fourier cuando el período tiende a infinito. La razón por la que introducimos este concepto es que las integrales de Fourier la composición en el dominio de la frecuencia de las funciones aperiódicas.

Es útil comparar las ecuaciones de la transformada de Fourier con la segunda y tercera ecuaciones, y la integral de Fourier A.2.10 con la serie infinita de Fourier A.2.1. Nótese que las dimensiones físicas de las componentes $A(\omega)$ y $B(\omega)$ de la transformada de Fourier (que son las de x / ω) son diferentes de las de los coeficientes a_n y b_n de la serie de Fourier (que son las de x).

Forma compleja de la transformada de Fourier.

Se ha hecho habitual en la teoría de vibraciones aleatorias escribir ecuaciones A.5.5 y A.5.6 en forma compleja, para lo cual se utiliza el hecho de que

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad \text{A.2.12}$$

Definiendo $X(\omega)$ como

$$X(\omega) = A(\omega) - i B(\omega) \quad \text{A.2.13}$$

se pueden combinar las ecuaciones A.2.9, resultando

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) dt$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad \text{A.2.14}$$

Esta última ecuación es la definición formal de $X(\omega)$, que recibe el nombre de transformada de Fourier de $x(t)$.

Para llevar A.2.14 a una forma más compacta y análoga a A.2.10 hemos de observar primero en A.2.9 que $A(\omega)$ es una función par de ω y que $B(\omega)$ es una función impar de ω . En efecto si se cambia el signo de ω en ambas ecuaciones de A.2.9, $+\infty$ permanece inalterada y $B(\omega)$ cambia de signo.

Consecuentemente $A(\omega) \cos \omega t$ y $B(\omega) \operatorname{sen} \omega t$ son ambas funciones pares de ω , por lo que su signo no se altera cuando se cambie por el ω . La ecuación de A.2.10 de la integral de Fourier puede tomar, pues, la siguiente forma equivalente:

$$x(t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \operatorname{sen} \omega t d\omega \quad \text{A.2.15}$$

donde, las integrales se extienden ahora de $-\infty$ a $+\infty$, en lugar de 0 a $+\infty$, y el factor 2 desaparece. Se ha introducido la idea de frecuencia negativa, pero esto no es más que un artificio matemático mediante el cual se simplifica la ecuación. Ahora puesto que $A(\omega)$ es una función par y $\operatorname{sen} \omega t$ es una función impar de ω , $A(\omega) \operatorname{sen} \omega t$ es una función impar y

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \operatorname{sen} \omega t d\omega = 0 \quad \text{A.2.16}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega = 0$$

Por lo tanto, podemos sumar las dos integrales de A.5.16 al segundo miembro de la expresión A.2.15 sin que por ello se altere el valor de $x(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \sin \omega t \, d\omega + i \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin \omega t \, d\omega - i \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t \, d\omega$$

A.2.17

ya que las dos últimas integrales son nulas. Reagrupando términos,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{A(\omega) - iB(\omega)\} \{\cos \omega t + i \sin \omega t\} \, d\omega \quad \text{A.2.18}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega \quad \text{A.2.19}$$

Las ecuaciones A.2.14 y A.2.19, que repetimos a continuación, reciben el nombre de par transformado de Fourier. $X(\omega)$ es la transformada (compleja) de Fourier de $x(t)$:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

que puede recuperarse, a partir de $X(\omega)$, mediante la integral o transformada inversa de Fourier. No hay acuerdo entre los diferentes autores sobre la correcta posición del factor $1/2\pi$ que aparece en estas ecuaciones, algunos incluyen $1/2\pi$ en la ecuación de la transformada inversa, mientras que otros ponen un factor:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ en ambas ecuaciones A.2.14 y A.2.19}$$