UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACION DEL VaR EN UN PORTAFOLIO COMPUESTO POR INSTRUMENTOS DEL MERCADO MEXICANO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

MARIBELL ROJAS GARDUÑO

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. SIOMI GOMEZ HERRERA

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

APLICACIÓN DEL VaR EN UN PORTAFOLIO COMPUESTO POR INSTRUMENTOS DEL MERCADO MEXICANO

realizado por MARIBELL ROJAS GARDUÑO

Con número de cuenta 9234434-7 , pasante de la carrera de ACTUARÍA.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de tesis Propietario	M. EN C. SIOMI GÓMEZ HERRERA	Siomi Gómez H.
Propietario	M. EN C. BEATRIZ EUGENIA RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ	Beatriz Rodríguez
Propietario	ACT. YAZMÍN ILIANA BÁRCENAS OROZCO	
Suplente	ACT. DAVID LÓPEZ SERVÍN	
Suplente	ACT. ADRIANA CRUZ MEJÍA	

Consejo Departamental de MATEMÁTICAS

M. EN A.P. MARÍA DEL PILAR ALONSO REYES

Agradezco a todas aquellas personas que de alguna forma contribuyeron al logro de esta meta. De manera muy especial:

A DIOS. Gracias por permanecer conmigo todo el tiempo, por mostrarme el camino y por regalarme unos padres maravillosos.

A mis padres. Gracias papá, gracias mamá, por darme la vida y enseñarme a amarla, por sus desvelos y sacrificios, por sus consejos, su compresión y sobretodo por su amor.

A Ricardo Hernández. Siempre recordaré tus palabras de aliento y la fuerza que me diste para seguir adelante. Gracias flaquito por enseñarme a disfrutar la vida, por tu infinito apoyo, por ser único y por permanecer a mi lado.

A toda mi familia, especialmente a mi abuelita Carmen y a la memoria de mi abuelito Pedro.

A Graciela, Brisa, Antonieta, Oswaldo y Jéssica M., por brindarme su amistad, por su gran cariño y por estar siempre conmigo en las buenas y en las malas.

A mis sinodales, por dedicarle tiempo a la lectura de este trabajo y por sus comentarios sobre éste.

Lamentablemente no se puede tener más de un director de tesis, pero reconociendo la capacidad de cada uno de ellos y su enorme apoyo, quisiera agradecer:

A Diana Díaz. Gracias Diana por tu paciencia, tu tiempo, tu confianza en mí y por todas tus enseñanzas.

A Rubén Haro. Gracias por tu dedicación, por tus consejos y por todo lo que aprendí de ti.

A Verónica Reyes. No olvidaré el cariño que siempre me has brindado desde que te conocí. Gracias por alentarme a seguir adelante y por ser mi amiga.

A Siomi Gómez. Gracias por tu entusiasmo, por todo lo que me enseñaste, por tus recomendaciones y por el tiempo brindado.

Gracias también a mis profesores y compañeros, a la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme permitido ser parte de ella y a la Facultad de Ciencias donde viví grandes momentos de mi vida.

ÍNDICE

Página

INTRODUCCIÓN

Al hablar de *riesgo*, pensamos en la posibilidad de ocurrencia de algún acontecimiento. En su acepción más general, por riesgo se entiende la posibilidad latente que enfrenta un individuo o grupo de individuos, de sufrir un perjuicio producto de un evento sobre el que no se tiene control. En buena medida, el comportamiento individual y colectivo de una sociedad está determinado por la actitud de sus miembros ante el riesgo. Por ejemplo, una persona que ha contraído una deuda con un banco a una tasa de interés flotante como la TIIE (Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio), sabe que corre el riesgo de un alza en la tasa de interés; en cambio, el banco con el que contrajo la deuda, corre el riesgo de que la tasa de interés disminuya.

El análisis del riesgo, cuya tarea es asignar una probabilidad a los acontecimientos que pueden alterar las utilidades de las empresas, es una de las funciones de la *administración de riesgos*.

En los últimos años, sobretodo después de la devaluación ocurrida en nuestro país en 1994, las instituciones financieras comenzaron a sentir la necesidad de contar con mayores herramientas que les permitieran administrar mejor sus riesgos. Adicionalmente, las medidas reguladoras a cargo del Banco de México (BANXICO) y de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), obliga a estas instituciones a crear una unidad de control de riesgos, que dependa directamente de la alta dirección de esa institución y que sea la responsable de estimar y controlar los riesgos a los que se exponen.

Tanto el Banco de México como la CNBV han tratado de crear una cultura de riesgo, de manera que se adopte la función de la administración de riesgos en todas las instituciones financieras y sus administradores la consideren útil.

La función de la administración de riesgos no se limita al desarrollo de modelos sofisticados y de estimaciones complejas del valor del riesgo; más bien, pretende lograr un cambio en la manera de pensar y de administrar el negocio bancario, en el cual, se debe incorporar explícitamente el elemento riesgo, aunado al de rendimiento, en la determinación de las decisiones de inversión.

Una parte importante dentro del proceso de administración de riesgos, es la valuación de los riesgos que la institución enfrenta. Entre estas medidas de riesgo destacan aquellas clasificadas bajo el nombre de *"Valor en Riesgo"* o *"Value at Risk (VaR)"*, que se puede interpretar como la pérdida máxima que enfrentará una empresa, en un horizonte de inversión y un nivel de confiabilidad determinados.

Debido al gran auge que ha tenido la necesidad de medir el riesgo, se ha elaborado la presente tesis, cuyo contenido se resume en cinco capítulos:

- En el capítulo 1 se introduce el concepto de riesgo, así como los diferentes tipos de riesgo a los que se enfrenta una empresa, como son: el riesgo empresa, el riesgo estratégico y el riesgo financiero. Este último se mide mediante el método conocido como valor en riesgo o *value at risk*, por lo que es importante mencionar también los tipos de riesgo financiero, así como explicar a grandes rasgos algunos de estos riesgos como es el de mercado.
- En la primera parte del capítulo 2 se describen conceptos básicos de la teoría de portafolios, así como dos de los métodos utilizados para la medición del riesgo de un portafolio de inversión: el método *CAPM* y el método *APT*. Posteriormente, se mencionan algunos de los métodos tradicionales para medir el riesgo de tasas de interés, el cual es uno de los riesgos más importantes que enfrenta un banco, como son: *duración, convexidad y análisis GAP*.
- El capítulo 3 introduce la definición de valor en riesgo, sus supuestos, los elementos principales para su cálculo y el modelo. También se mencionan en este capítulo sus beneficios y problemáticas, y sus alcances.
- El capítulo 4 da a conocer los tres métodos más comunes para medir el VaR: método de *Varianza-Covarianza*, método de *Simulación Histórica* y método de *Monte Carlo*, así como algunas de las ventajas y desventajas de cada uno de ellos.
- Por último, en el capítulo 5 se hace un análisis de un portafolio compuesto de acciones y bonos cupón cero, y se mide su riesgo de mercado utilizando el método de Monte Carlo explicado en el capítulo anterior.

Capítulo 1
RIESGO

Existe un sinnúmero de instituciones que operan una gran cantidad de activos o instrumentos financieros, que van desde las acciones o los bonos, hasta los productos derivados[1]. A pesar de que estos tipos de activos financieros tienen diferencias entre sí, poseen un rasgo en común, todos ellos representan riesgos.

A lo largo de este capítulo, se introduce la definición de riesgo y se explican a grandes rasgos los diferentes tipos de riesgo que enfrenta una empresa.

1.1 DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN

El **riesgo** es la exposición a la incertidumbre. Se puede definir como *una serie de eventualidades que influyen para que se dejen de ganar los rendimientos esperados*; es decir, la posibilidad de que el rendimiento esperado de una inversión no se materialice.

La parte del riesgo que depende únicamente de los factores internos de una empresa o industria, como la capacidad de dirección o nivel de endeudamiento, es el *riesgo no sistemático*, el cual, puede transformarse o eliminarse con la diversificación de la cartera de la empresa[2]. La otra parte del riesgo es el *riesgo sistemático*, el cual depende de los movimientos generales del mercado como la inflación, o de fenómenos que afectan a todas las empresas, tales como una guerra. De esta manera, el riesgo total de una empresa será igual a su riesgo sistemático, más su riesgo no sistemático.

---

[1] Un producto derivado es un instrumento financiero cuyo valor depende del precio de otros instrumentos, activos o variables llamados activos subyacentes. Ver Hull, John, *"Options, Futures and other Derivative Securities"*, Prentice Hall International, USA (1989), para una mejor referencia.

[2] Una cartera o portafolio diversificado es aquel construido de tal manera, que se reduce su riesgo sin sacrificar los rendimientos del mismo.

1.2 TIPOS DE RIESGO

No todos los individuos y/o instituciones están expuestos al mismo riesgo, por lo cual, se tienen diferentes tipos de riesgo[3]. Es importante resaltar que cada tipo de riesgo es sistemático o no sistemático, dependiendo de su naturaleza.

En el siguiente cuadro sinóptico se esquematizan los diferentes tipos de riesgo:

- ***RIESGO***
  - RIESGO EMPRESA
  - RIESGO FINANCIERO
    - RIESGO CREDITICIO
    - RIESGO DE LIQUIDEZ
    - RIESGO DE MERCADO
      - RIESGO DE TASA DE INTERES NOMINAL
      - RIESGO DE TASA DE INTERES REAL
      - RIESGO DE TASA DE INFLACION
      - RIESGO DE TIPO DE CAMBIO
    - RIESGO OPERACIONAL
    - RIESGO LEGAL
  - RIESGO ESTRATEGICO

Las empresas están expuestas principalmente a tres tipos de riesgo: el riesgo empresa (*business risk*), el riesgo estratégico (*strategic risk*) y el riesgo financiero (*financial risk*).

Riesgo empresa

El **riesgo empresa** es un riesgo no sistemático que la empresa asume al crear una ventaja competitiva frente a otras empresas o al incrementar su valor. En este riesgo, se incluyen las eventualidades provocadas por las innovaciones tecnológicas, los diseños de un producto, las técnicas de mercadeo, etc. Por ejemplo, Coca-Cola es una empresa que estuvo a punto de quebrar, debido a que sus ventas bajaron drásticamente al cambiar su fórmula secreta hace algunos años. Es decir, esta compañía asumió un riesgo empresa al cambiar su fórmula química.

Riesgo estratégico

El **riesgo estratégico** es aquel riesgo sistemático derivado de cambios fundamentales en el ambiente natural que rodea a una empresa, ya sea económico o político, y que puede tener un efecto significativo en sus ingresos o en la parte que tenga del mercado. Algunos ejemplos son la expropiación, la nacionalización o los cambios en la política fiscal (impuestos).

[3] Ver Jorion (1995) para una mejor referencia sobre tipos de riesgo.

Riesgo financiero

La razón principal para que se diera el crecimiento de la industria de la administración de riesgos fue la volatilidad que estaban presentando las variables económico-financieras (tipo de cambio, tasas reales, tasas nominales, etc.). Actualmente la administración de riesgos financieros es la actividad que consiste en identificar, medir y controlar la exposición a dichos riesgos; por lo que se ha convertido en una herramienta de administración de muchas empresas.

El **riesgo financiero** es el riesgo sistemático en el cual se enfocará el presente trabajo, y está relacionado con las posibles pérdidas en los mercados financieros provocadas por los movimientos en las variables financieras tales como las tasas de interés y el tipo de cambio, entre otras.

1.3 TIPOS DE RIESGO FINANCIERO

Generalmente el riesgo financiero es clasificado en riesgo crediticio, riesgo de liquidez, riesgo operacional, riesgo legal y riesgo de mercado.

Riesgo crediticio

Existe **riesgo crediticio** cuando se tiene la incertidumbre de que la contraparte no esté en la posibilidad de cumplir con su obligación contractual. Por ejemplo, este riesgo está asociado a pérdidas cuando los deudores no pagan sus pasivos.

Ej. Un banco hace un préstamo a un cliente corporativo. En este caso, el banco tiene o corre un riesgo crediticio porque su cliente puede no pagarle la deuda o los intereses correspondientes a la misma. También hay riesgo crediticio cuando el banco es emisor de un instrumento de deuda como un bono, ya que si el banco quebrara, sería incapaz de entregarle al tenedor del bono, el pago correspondiente.

Se considera que el riesgo de crédito de instrumentos emitidos por el gobierno federal es cero, ya que en teoría, nadie podría ser más solvente que él; aunque en la práctica, cuando dichos instrumentos se cotizan en el extranjero, está implícito el riesgo país[4].

Riesgo de liquidez

La liquidez es definida como la habilidad de convertir un activo en efectivo, igual a su precio actual de mercado. Una *institución* se dice que tiene liquidez si puede solventar fácilmente sus necesidades de efectivo, ya sea porque tiene el dinero a la mano o porque puede convertir activos en efectivo. Estos activos pueden convertirse en efectivo al venderlos de contado o usándolos para asegurar un préstamo. Un *mercado* es líquido si se encuentra una contraparte dispuesta a realizar una operación a niveles o precios de mercado.

[4] El riesgo país es el riesgo en el que influye la solvencia del país y su liquidez, así como los factores políticos y sociales del mismo.

De esta manera, el **riesgo de liquidez** de un activo es el riesgo de que no pueda comprarse o venderse cerca de su precio actual de mercado debido a la insuficiente actividad del mercado, y se mide a través del margen entre el precio de venta y el de compra. Así, entre mayor sea dicho margen menos líquido es el instrumento y de manera contraria, entre menor sea este margen más líquido es el instrumento. En general, el riesgo de liquidez es el riesgo financiero derivado de una posible pérdida de liquidez. Hay dos tipos de riesgo de liquidez: el riesgo específico y el sistemático.

El *riesgo específico de liquidez* es el riesgo de que una sola institución pierda su liquidez, mientras que el *riesgo sistemático de liquidez*, es el que afecta a todos los participantes del mercado, esto es, es el riesgo de que todo el mercado pierda liquidez. Es claro que los mercados financieros tienden a perder liquidez en periodos de crisis o alta volatilidad.

Riesgo operacional

Dentro de una empresa hay un área de operaciones que se encarga de procesar, confirmar y conciliar transacciones, así como de detectar transacciones no autorizadas. El **riesgo operacional** es el riesgo financiero referido a pérdidas potenciales resultado de sistemas no adecuados o alteración de los mismos, fallas en la dirección o administración de la empresa o negocio, fraudes o errores humanos. Ej. Si en una operación de compra de divisas, se captura en el sistema una tasa diferente a la que se pactó, se estarían basando decisiones en información incorrecta.

Riesgo legal

El **riesgo legal** se da cuando la contraparte no tiene la autoridad legal o reguladora para llevar a cabo una transacción. Este riesgo también incluye el quebranto o violación a las regulaciones gubernamentales, como la manipulación del mercado.

Riesgo de mercado

El **riesgo de mercado** es el riesgo financiero que se tiene a raíz de la existencia de incertidumbre de un individuo, empresa o institución financiera, sobre el valor de mercado futuro de un portafolio de activos y/o pasivos financieros que poseé, debida a fluctuaciones inesperadas de las variables económicas. Algunas de las influencias que pueden hacer variar el valor de mercado de estos elementos son externas a la empresa, de tal modo que no pueden ser controladas por ésta.

Un ejemplo es cuando se posee un CETE[5] y se desea venderlo antes del vencimiento, ya que se corre el riesgo de que la tasa de interés del mercado suba[6] y se reciba menos de lo que se pagó por el título.

[5] Los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES), son títulos de crédito al portador emitidos y liquidados por el Gobierno Federal a su vencimiento, cuyo objetivo es ser un mecanismo regulador del circulante y financiar el gasto corriente del país. Existen CETES con vencimiento a 28, 91, 182 y 364 días.

[6] Existe una relación inversa entre el precio de un CETE y la tasa de interés, es decir, si la tasa de interés sube el precio del CETE baja.

1.4 TIPOS DE RIESGO DE MERCADO

El riesgo de mercado puede tomar dos formas: *el riesgo absoluto*, medido por la pérdida potencial en términos de una moneda determinada como el peso o el dólar; y el *riesgo relativo*, el cual se refiere a la pérdida respecto a un punto de referencia (*benchmark*) como un índice, un ejemplo es el índice de precios y cotizaciones (IPC), el cual es el principal indicador del comportamiento del mercado accionario mexicano[7].

Dentro del riesgo de mercado se tiene el riesgo de tipo de cambio, el riesgo de tasa de interés nominal, de tasa de interés real y de tasa de inflación.

Riesgo de tipo de cambio

El tipo de cambio, es el precio de una moneda expresado en términos de la unidad de otra moneda. Cada banco, Casa de Bolsa o Casa de Cambio cotiza dos tipos de cambio: el de compra y el de venta. Por ejemplo, *el tipo de cambio de compra* peso/dólar, es el precio en pesos al que la institución financiera compra el dólar; y *el tipo de cambio de venta* peso/dólar, es el precio en pesos al cual la institución vende un dólar. Es obvio que los tipos de cambio de compra son más bajos que los tipos de cambio de venta, ya que la entidad que realiza la operación, obtiene sus ganancias del diferencial entre el precio de compra y el de venta.

En las operaciones de mercado, no hay un único tipo de cambio; cada entidad opera en el mismo día, con tipos de cambio de compra y de venta diferentes dependiendo de las fuerzas de la oferta y la demanda. Por ello, el Banco de México diariamente realiza un promedio de tipos de cambio tomados de cuatro instituciones de crédito escogidas de una forma aleatoria, y publica el tipo de cambio oficial (*tipo de cambio fix*), el cual debe usarse para las obligaciones a pagar el día hábil bancario siguiente de la publicación. De esta manera, BANXICO tiene un control sobre los tipos de cambio que ofrecen las entidades financieras y evita entre otras cosas, operaciones "engañosas".

Un banco o empresa tiene un **riesgo de tipo de cambio (o cambiario)** cuando hay incertidumbre sobre el precio de sus activos o pasivos, debida a fluctuaciones del tipo de cambio. Para ejemplificar lo anterior, se mencionan algunos casos en donde aparece el riesgo cambiario:

- Una compañía mexicana vende un producto mexicano a Japón y extiende una factura en yenes liquidable en 30 días. Si el tipo de cambio peso/yen bajara en esa fecha, la compañía recibiría menos pesos al cambiar los yenes recibidos en la venta, por lo que está expuesta a un riesgo cambiario.

- Si el tipo de cambio dólar/yen es de .007 dólares por yen y cambia a .008 dólares por yen, se dice entonces que el dólar se *depreció* frente al yen, o de manera equivalente, que el yen se *apreció* frente al dólar. Ahora para comprar un yen se necesitarían .001 dólares más. De esta manera, si se

[7] El valor del IPC es función de los precios de una muestra balanceada, ponderada y representativa del total de acciones cotizadas en la BMV y dicha muestra se integra de 35 emisoras de distintos sectores de la economía.

poseen dólares y se necesitan yenes para pagar alguna deuda, se está expuesto al riesgo cambiario de que el yen se aprecie frente al dólar, el día en que se compren los yenes.

- Una empresa estadounidense tiene una cuenta por pagar de 50,000 libras esterlinas a 90 días. Suponiendo que el tipo de cambio hoy es de 1.50 dólar/libra, la compañía esperaría pagar 75,000 dólares (50,000 × 1.50) por las 50,000 libras que adeuda a 90 días. Si el tipo de cambio a los 90 días cambiara a 1.51 dólar/libra, la cuenta por pagar de la compañía sería de 75,500 dólares, es decir, 500 dólares más de lo esperado; mientras que si fuera de 1.49 dólar/libra, se ahorraría 500 dólares ya que la deuda sería de 74,500 dólares. La empresa tiene un riesgo cambiario, al estar expuesta a una alza en el tipo de cambio dólar/libra, suponiendo que en el momento de pagar la deuda, la empresa no tuviera las libras o no estuviera cubierta contra el riesgo cambiario.

Riesgo de tasa de interés

La tasa de interés se define como el costo del dinero por unidad de tiempo. Los inversionistas escogerán un instrumento con una tasa elevada para obtener mayores rendimientos, pero es sumamente importante que se tome en cuenta el riesgo existente de que la tasa de interés baje o suba, ya que esto afectará el valor de dicho instrumento.

A continuación se mencionan algunos tipos de tasas de interés, y algunos ejemplos del riesgo que se deriva de dichas tasas:

❄ *Tasa de interés nominal*

El **riesgo de tasa de interés nominal** se enfocará a los bonos de referencia emitidos por el gobierno de un país (en el caso de México, se utilizan tasa nominales como la TIIE o la tasa de los CETES), por lo que se tomarán en cuenta dos casos. El primero, se refiere al riesgo de la tasa de rendimiento de un bono que paga cupones; y el segundo, al caso en que se tiene un bono cupón cero[8].

Caso uno: Bono que paga cupones

La tasa de rendimiento de un bono que paga cupones, r_T , es la tasa que iguala el valor presente de los flujos de efectivo esperados por el bono, a su valor de mercado. El valor de mercado, P, de un bono que paga cupones se define como:

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{\left(1+\left[r_T \times n/360\right]\right)^t} + \frac{M}{\left(1+\left[r_T \times n/360\right]\right)^T}, \qquad (1.1)$$

donde,

C = pago del cupón correspondiente,
T = número de periodos totales para el vencimiento (anuales, semianuales u otros),
r_T = rendimiento al vencimiento del bono,

[8] Para una mejor referencia sobre bonos ver Apéndice C.

n = periodo en que se paga cupón al año[9],
M = pago principal al vencimiento del bono, llamado valor nominal del bono.

El primer sumando de la ecuación *(1.1)* es una anualidad[10], por lo que el precio de mercado de un bono que paga cupones, también puede escribirse como:

$$P = C\left[\frac{1-\left(1+\left[r_T \times n/360\right]\right)^{-T}}{r_T \times n/360}\right] + M\left(1+\left[r_T \times n/360\right]\right)^{-T}. \qquad (1.2)$$

El tenedor de un bono cupón posee un riesgo de tasa de interés nominal, debido a que se expone a un aumento en la tasa, con lo cual el precio de mercado del bono disminuiría.

Ej. Se tiene un bono del Tesoro[11] a *10* años, con valor nominal de *100* dólares *(M=100)*, un pago cupón cada 6 meses durante los 10 años de *4* dólares *(C=4)* y una tasa de rendimiento semestral del *10%* (r_T=.10). El precio del bono en ese momento, con base en la ecuación anterior, es de 87.5378 dólares. El tenedor del bono tiene un riesgo de tasa de interés nominal, ya que si r_T aumentara de *10%* a *11%*, el precio del bono disminuirá a 86.8546 dólares.

Caso dos: Bono cupón cero

Ahora se verá el caso de un bono cupón cero. La tasa de rendimiento de un bono con un sólo flujo de efectivo a una fecha específica, determina el precio del bono en este momento. El precio del bono con un flujo de efectivo *M*, por recibir a *T* años se calcula como:

$$P = M\left(1+\left[r_T \times n\,/\,360\right]\right)^{-T}. \qquad (1.3)$$

Ej. Suponga que se tiene un bono cupón cero a 10 años, con un flujo a recibir de $100 y una tasa de rendimiento anual del 9%, entonces el precio del bono en este momento es de $42.2411. El tenedor del bono tiene un riesgo de tasa nominal (si decide vender el bono), debido a que una alza en dicha tasa, traería como consecuencia una baja en el precio del bono.

❄ *Tasa de interés real y de inflación*

La **tasa de interés real** (r_R), es la tasa que prevalece en la economía si los niveles en los precios permanecen constantes, es decir, en ausencia de inflación (*%ΔP*). Es un componente fundamental de todas las tasas de interés observadas en el mercado y se puede definir como la tasa real de crecimiento en servicios y bienes o como la tasa real de crecimiento de la economía.

---

[9] Por ejemplo: Si los pagos son anuales, *n=360* (cada 360 días); si son semestrales, *n=180* (cada 180 días), y así sucesivamente. La tasa r_T es la tasa de interés nominal y a la tasa $r_T \times n/360$ se le conoce como tasa de interés efectiva en un periodo.

[10] Ver De la Cueva, Benjamín, *"Matemáticas Financieras"*, México, Porrúa (1982), para una mejor referencia sobre anualidades.

[11] Un bono del tesoro (Treasury bond) es una obligación de deuda de los Estados Unidos con vencimiento de 10 años o más.

En términos económicos, se puede decir que la tasa real mide la cantidad de productos que pueden intercambiarse en el siguiente periodo, por una unidad del producto ahora. Difiere de la tasa nominal, en el sentido de que ésta mide la cantidad de dinero que debe ser pagado el siguiente periodo, por una unidad prestada hoy. Ambas tasas están conectadas por una relación llamada la Ley de Fisher[12], definida como:

Tasa nominal=tasa real+tasa de inflación,

es decir,

$$r_T = r_R + \%\Delta P,$$

finalmente al despejar la tasa real, se obtiene:

$$r_R = r_T - \%\Delta P. \qquad (1.4)$$

De esta forma, si la tasa de interés nominal es del 10% y la inflación es del 6%, entonces la tasa real es aproximadamente del 4%.

Esta fórmula se usa comúnmente para calcular la tasa real ex post (*ex post real rate of interest*). Si se sustituye a la inflación real por la inflación esperada, se obtiene la tasa real ex ante o anticipada; con lo cual, la tasa real ex post y la ex ante diferirán por el error de predicción sobre la tasa de inflación.

Con base a la ecuación (1.4), se establece que un aumento en la tasa de inflación trae como consecuencia una disminución en la tasa real, si se mantiene constante la tasa nominal; esto es, a más inflación, menor crecimiento real de la economía. Así, un prestador neto en tasa real (una persona que presta más de lo que pide prestado), tiene un riesgo de tasa de interés real, manteniendo r_T constante; ya que si se da un incremento en la inflación, entonces la tasa real a la cual está prestando disminuirá y tendrá menos ganancias. En cambio, la contraparte de esta persona, tendrá el riesgo de la tasa de interés real, cuando haya un decremento en la inflación, debido a que la tasa real a la cual le están prestando aumentará.

Ej. Supóngase que un inversionista posee un pagaré[13] con valor de $100 a un año y con una tasa anual de UDIS del 4%, entonces el valor del pagaré en este momento es de $96.1538. Si la tasa de UDIS aumenta mañana a 4.5%, el inversionista tiene riesgo de tasa real si deseara vender el pagaré mañana, ya que su precio disminuiría a $95.6938.

[12] En el Apéndice A del presente trabajo se explica dicha ley.

[13] Un pagaré es un documento que tiene un valor nominal determinado, el cual liquidará el emisor o suscriptor del pagaré con o sin intereses en el plazo estipulado en el documento al beneficiario o tenedor del pagaré.

Capítulo 2

MEDICIÓN DEL RIESGO

Desde el inicio de los años sesenta, la globalización de las economías y el acelerado desarrollo de los medios de información y comunicación han alterado la dinámica de los mercados financieros. Continuamente, los mercados son bombardeados por información sobre eventos que pueden alterar de un momento a otro las expectativas de los inversionistas, la competitividad de las empresas, el precio de los instrumentos financieros y el destino de los capitales internacionales; por ello, se ha hecho necesario medir el riesgo de las operaciones financieras con mayor detenimiento y eficiencia, lo que permite a la alta dirección de las instituciones financieras tener una idea del capital que pueden perder ante movimientos adversos a su posicionamiento en el mercado.

En este capítulo se presenta una introducción a la Teoría de Portafolios, así como a los métodos que comúnmente se usan para medir el riesgo financiero de un portafolio de inversión[1].

2.1 *TEORÍA DE PORTAFOLIOS*

La **Teoría de Portafolios,** se aplica para seleccionar, portafolios que maximicen los rendimientos esperados de los inversionistas con niveles aceptables de riesgo, o que minimicen el riesgo bajo un determinado nivel de rendimiento[2]. El objetivo principal de la Teoría de Portafolios, es ofrecer las herramientas necesarias para valuar el comportamiento de los inversionistas y así, determinar la composición óptima del portafolio de inversión.

[1] Un portafolio de inversión es un conjunto de activos y/o pasivos en los cuales una empresa o inversionista tiene o desea tener una inversión.
[2] Si se desea más información sobre la Teoría de Portafolios, se puede consultar el capítulo 4 de Fabozzi (1995) y Reilly (1997) de la bibliografía.

El modelo básico de la teoría de portafolios, conocido como *Mean-Variance Optimization (MVO)* y desarrollado por Harry Markowitz[3] a finales de los años cincuentas, es una herramienta cuantitativa que permite esta distribución óptima considerando la relación riesgo-rendimiento y la conducta o comportamiento de los inversionistas.

Los principios básicos de la Teoría de Portafolios, surgen cuando Markowitz lee *"The Theory of Investment Value"* de John Burr Williams[4]. En este trabajo, Williams proponía que debido a que los flujos de efectivo de una acción son desconocidos, el precio de dicha acción se debia valuar como el valor presente de los flujos de efectivo *esperados*, por lo que los inversionistas se interesarían ahora por el valor esperado del portafolio compuesto por dichas acciones. En base a esto, los inversionistas maximizarían el valor esperado del portafolio invirtiendo sólo en el instrumento con mayor rendimiento esperado; pero Markowitz se percató de que esto no era suficiente, pues también se debía tomar en cuenta el riesgo que corría el inversionista al invertir en dicho instrumento, por lo que consideró que la varianza podría ser una buena una medida del riesgo de un portafolio. Así, después de varios estudios dedujo la tasa de rendimiento esperada de un portafolio de instrumentos y mostró que bajo ciertos supuestos, la varianza de la tasa de rendimiento es una medida significativa del riesgo de un portafolio.

Supuestos del modelo Markowitz:

- *Los inversionistas consideran que cada alternativa de inversión, puede representarse por una distribución de probabilidad de los rendimientos esperados en cierto periodo de tiempo.* Markowitz se dió cuenta que bajo incertidumbre sobre los rendimientos futuros de los instrumentos en los que se desea invertir, los inversionistas actúan en base a sus "creencias probabilísticas" y asignan una función de distribución a los posibles rendimientos del portafolio.
- *Los inversionistas estiman el riesgo de un portafolio basándose en la variabilidad de los rendimientos esperados.*
- *Los inversionistas basan sus decisiones en el rendimiento esperado del portafolio, así como en el riesgo del mismo.* Esto es cierto siempre y cuando los rendimientos del portafolio sean independientes, idénticamente distribuídos y con varianza finita. Además, es importante mencionar que la teoría de Markowitz no obliga a que los rendimientos sigan una distribución normal.
- *Los inversionistas desean maximizar los rendimientos o beneficios derivados de sus inversiones.* Markowitz supone que la función de utilidad[5] que cada inversionista desea maximizar, es aproximadamente cuadrática en una vecindad alrededor de ella y que los rendimientos del portafolio en el cual se decide invertir, no exceden el punto en donde dicha función cuadrática alcanza su máximo. En la Figura 2.1, se presenta un conjunto de curvas de indiferencia que representa las preferencias de cierto inversionista, la utilidad que recibe el inversionista es mayor entre más lejos se encuentre la curva de indiferencia del eje horizontal, por ello, la curva u_4 representa una mayor utilidad para el inversionista que la curva u_1.

---

[3] Harry Markowitz fue ganador del Premio Nobel de Economía junto con Merton H. Miller y William Sharpe en 1990.

[4] Para una información más detallada sobre el desarrollo de MVO, ver Markowitz (1987) y (1991), así como la pág. de Internet: http://www.effisols.com/basics/MVO.htm.

[5] En la Teoría de Portafolios, la función de utilidad es una forma de medir las preferencias de una entidad económica con base al riesgo y al rendimiento esperado, y se representa gráficamente por un conjunto de curvas de indiferencia, donde cada curva de indiferencia representa el conjunto de portafolios con diferentes combinaciones de riesgo y rendimiento, que otorgan el mismo nivel de utilidad a un inversionista dado.

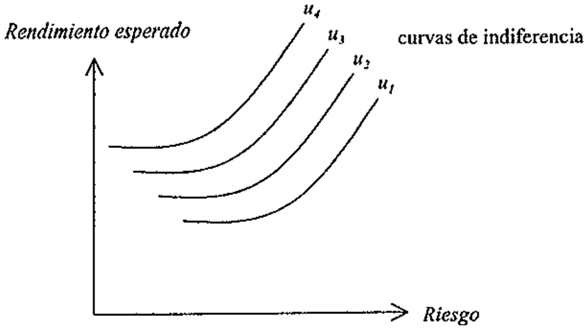


Figura 2.1. Representación de las preferencias de cierto inversionista.

- *Los inversionistas son aversos al riesgo*, es decir, si tienen que elegir entre dos activos con tasas de rendimiento iguales (r), seleccionan aquel activo con el menor nivel de riesgo (activo A). De manera similar, dado un nivel de riesgo (σ), los inversionistas prefieren altos rendimientos (r_A), a bajos rendimientos y sólo aceptan un nivel de riesgo mayor si se les otorga una mayor tasa de rendimiento (ver Figura 2.2).

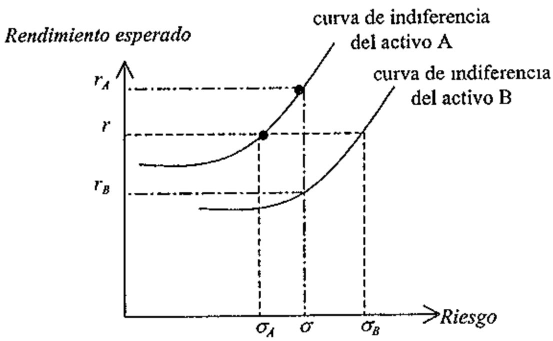


Figura 2.2. Elección entre dos activos, en base a su riesgo y rendimiento.

Bajo estos supuestos, se dice que un activo o portafolio de activos es *eficiente* (portafolio eficiente de Markowitz) si no hay otro activo o portafolio de activos, que ofrezca rendimientos esperados mayores con el mismo nivel de riesgo o con uno menor; o un menor riesgo con un rendimiento esperado igual o mayor.

2.1.1 RENDIMIENTOS ESPERADOS

Los inversionistas toman sus decisiones de inversión en base a los rendimientos futuros de un instrumento financiero, para algunos activos este rendimiento es determinista, es decir, los rendimientos del instrumento son conocidos en cierto periodo por lo que no existe incertidumbre sobre ellos en dicho periodo. En este sentido, en la teoría de portafolios a este tipo de activos se les conoce como **activos sin riesgo**, aunque es claro que pueden tener otro tipo de riesgo como por ejemplo, riesgo operacional.

Sin embargo, existen otros instrumentos llamados **activos riesgosos** ya que sus rendimientos futuros son inciertos, debido a esto, se necesita una forma de medirlos, es decir, estimar los rendimientos que no se conocen. Lo que hace el inversionista, es identificar cuántos y cuáles posibles rendimientos tendrá el activo en el siguiente periodo de inversión y con qué probabilidad de ocurrencia, en otras palabras, le asigna una función de probabilidad a los rendimientos futuros de acuerdo a su experiencia y a las condiciones que se esperan del mercado en el cual se encuentra el activo o instrumento[6], por último, calcula los rendimientos esperados de dicho instrumento.

Ej. Una empresa desea comprar acciones de CEMEX, pero no sabe con certidumbre cuáles serán sus rendimientos futuros, es decir, son activos riesgosos[7]. Supóngase que en base a las condiciones esperadas del mercado en el que se encuentra cotizando la acción y de la experiencia de la empresa, se cree que hay *cuatro* posibles rendimientos que CEMEX podría ganar al final del siguiente día, periodo en el cual la empresa desea invertir. La siguiente tabla muestra los posibles rendimientos de CEMEX, y su probabilidad de ocurrencia:

Número de rendimiento (m)	*Probabilidad (p_m)*	*Tasa de rendimiento (r_m)*	*$p_m r_m$*
1	.25	8%	2%
2	.25	10%	2.5%
3	.25	12%	3%
4	.25	14%	3.5%
		Total	*11%*

Tabla 2.1. Cálculo del rendimiento esperado al día siguiente de la acción CEMEX .

Al sumar los cuatro productos de la tasa de rendimiento posible y su correspondiente probabilidad de ocurrencia, se obtiene que el rendimiento esperado de la acción CEMEX es del 11%[8]:

$$\mu_{CEMEX}=E(R_{CEMEX})=\sum_{m=1}^{4} p_m r_m =11\%.$$

De manera general, el **rendimiento esperado de un activo *i*,** μ_i, se calcula como:

[6] A veces, se opta por tomar series históricas del comportamiento que ha seguido el activo en el cual se desea invertir, para el cálculo de los rendimientos esperados de dicho activo.

[7] Ver Apéndice C para mejor información sobre acciones.

[8] El hecho de que el rendimiento esperado de la acción sea del 11%, implica que al día siguiente el rendimiento de CEMEX fluctuará alrededor del 11% y puede darse el caso de que no tome el valor de 11, ya que sólo es un valor esperado. Ver Apéndice B.

$$\mu_i = E(R_i) = \sum_{m=1}^{M} p_m r_m , \qquad (2.1)$$

donde r_m denota la tasa de rendimiento m del activo i, p_m es la probabilidad de obtener r_m, y M es el número de rendimientos posibles del activo i.

Supóngase ahora que se desea saber los rendimientos que se esperan al final del siguiente día de un portafolio compuesto por acciones de TAMSA, CEMEX, ELEKTRA y CIFRA. A continuación se muestra qué porcentaje del portafolio está invertido en cada uno de los activos y su correspondiente rendimiento esperado:

Número de activo (i)	*Peso del activo i en el portafolio (w_i)*	*Rendimiento esperado (μ_i)*	*$w_i\mu_i$*
1=TAMSA	.20	10%	2%
2=CEMEX	.30	11%	3.3%
3=ELEKTRA	.30	12%	3.6%
4=CIFRA	.20	13%	2.6%
		Total	*11.5%*

Tabla 2.2. Cálculo del rendimiento esperado al día siguiente de un portafolio compuesto por acciones de TAMSA, CEMEX, ELEKTRA y CIFRA.

El rendimiento esperado del portafolio, es el promedio ponderado[9] de los rendimientos esperados de los cuatro activos que lo componen; de esta manera, se obtiene que el rendimiento esperado de este portafolio es de 11.5%.

Generalizando, el **rendimiento esperado de un portafolio** compuesto de n activos, μ_p, se define como:

$$\mu_p = E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i , \qquad (2.2)$$

donde,

w_i = peso del activo i en el portafolio[10], es decir, el porcentaje del portafolio invertido en el activo i;
μ_i = rendimiento esperado del activo i.

[9] Cada rendimiento esperado tiene cierto peso en el portafolio, es decir, los rendimientos esperados se ponderan según el porcentaje invertido en cada uno de ellos.

[10] Si se invirtiera un 20% del portafolio en un cierto activo i, entonces w_i=.20; además, se debe de cumplir que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ con $w_i \geq 0$.4

2.1.2 VARIANZA DE LOS RENDIMIENTOS DE UN ACTIVO

Como se mencionó con anterioridad, Markowitz utiliza la varianza de los rendimientos como medida del riesgo de un portafolio. Debido a que la varianza se mide en unidades cuadradas, se utiliza la *desviación estándar* definida como la raíz cuadrada de la varianza, como una mejor medición del riesgo; además, al ser la desviación estándar una medida estandarizada puede compararse con otras medidas importantes como la media. En la literatura económico-financiera, el término "desviación estándar" se conoce como *volatilidad* y constituye un factor clave para la medición del riesgo.

Supóngase que la siguiente figura muestra las distribuciones de los rendimientos de las acciones A y B, y que ambas tienen la misma media μ:

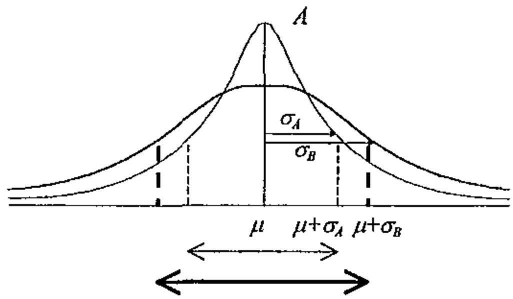


Figura 2.3. Distribuciones "imaginarias" de los rendimientos de las acciones A y B.

En ésta, se puede observar que la acción B tiene una desviación estándar (σ_B) mayor que la acción A *(σ_A)*, es decir, B es más volátil que A. Intuitivamente, esto quiere decir que los rendimientos de la acción B pueden fluctuar en un rango mayor que los rendimientos de la acción A, si se toma la distancia equivalente a una desviación estándar de la media.

Continuando con el ejemplo de la acción CEMEX, suponga ahora que la empresa desea estimar la volatilidad de dicha acción ($DE(R_{CEMEX})$); para ello, se calcula primero el cuadrado de la diferencia entre la tasa de rendimiento probable de la acción y su rendimiento esperado; después, se multiplica por su probabilidad de ocurrencia y por último se suman los cuatro productos, obteniendo así una varianza del 5% y una desviación estándar o volatilidad de 2.236%:

(Siguiente página)

Tasa de rendimiento (r_m)	*Rendimiento esperado ($E(R_i)$)*	*$[r_m - E(R_i)]^2$*	*p_m*	*$p_m[r_m - E(R_i)]^2$*
8%	11%	9	.25	2.25%
10%	11%	1	.25	.25%
12%	11%	1	.25	.25%
14%	11%	9	.25	2.25%
			Total	*5%*

Tabla 2.3. Cálculo de la varianza diaria de la acción CEMEX.

$$DE(R_{CEMEX}) = \sigma_{CEMEX} = \sqrt{\sum_{m=1}^{4} p_m [r_m - E(R_i)]^2} = 2.236\%.$$

De manera formal, la **varianza de los rendimientos de un activo *i*, σ_i^2**, es una medida de la variación de las tasas de rendimiento del activo, r_m, con respecto a su tasa esperada de rendimiento, $E(R_i)$, y se calcula como:

$$\sigma_i^2 = V(R_i) = \sum_{m=1}^{M} p_m [r_m - E(R_i)]^2, \qquad (2.3)$$

si $\sigma_i^2 = 0$, se dice que el activo i es un activo libre de riesgo.

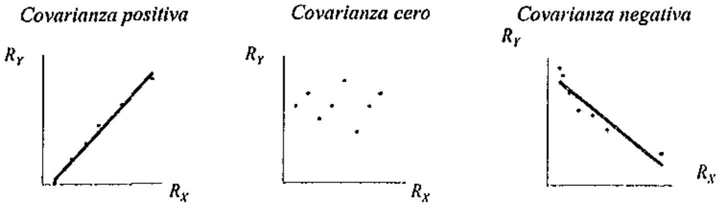
Antes de definir la fórmula para calcular la varianza de un portafolio, es indispensable mencionar el significado de los términos *covarianza y correlación* entre rendimientos.

2.1.3 COVARIANZA ENTRE RENDIMIENTOS

La **covarianza entre los rendimientos de dos activos**, se entiende como el grado en que estos rendimientos varían o cambian simultáneamente. Se dice que una *covarianza* es *positiva*, cuando los rendimientos de los activos tienden a moverse o a cambiar en la misma dirección relativa a sus medias individuales; es decir, cuando ambos están por encima o por debajo de sus medias respectivas, en un mismo periodo de tiempo. De manera análoga, una *covarianza negativa* indica que los rendimientos de los activos tienden a moverse o a cambiar en direcciones contrarias relativas a sus medias, durante un periodo específico de tiempo. Si los rendimientos de uno de los activos varían o cambian independientemente del comportamiento de los rendimientos del otro activo, entonces la covarianza entre ellos es cero.

Esto significa que si los rendimientos de un activo X (R_X) y los rendimientos de otro activo Y (R_Y) tienen por ejemplo covarianza negativa, un aumento en R_X trae como consecuencia una disminución en R_Y, por lo que las ganancias en X se compensan con Y; de manera contraria, si R_Y aumenta los rendimientos del activo X disminuyen, por lo que las pérdidas en X se compensan con las ganancias en Y. El conocer el signo de la covarianza es importante para la selección de portafolios, ya que si X y Y se movieran en la misma dirección (covarianza positiva) intuitivamente se tiene un mayor riesgo, debido a que ambos activos ganan o pierden al mismo tiempo.

Gráficamente:



Imagine ahora, que se desea invertir el día de mañana en acciones de GMODELOC y APASCO por lo que se necesita saber la covarianza entre ellas. En la siguiente tabla se muestran los precios de cierre diarios correspondientes a ambas acciones, así como sus tasas de rendimiento[11] porcentuales:

	GMODELOC		APASCO	
Fecha	*Precio al cierre*	*%Rendimiento (r_{im})*	*Precio al cierre*	*%Rendimiento (r_{jm})*
30 Jun. '98	19.880		47.100	
1 Jul. '98	19.750	-0.65607	50.100	6.17480
2 Jul. '98	19.375	-1.91699	50.600	0.99305
3 Jul. '98	18.425	-5.02751	51.500	1.76302
6 Jul. '98	17.975	-2.47265	50.500	-1.96084
7 Jul. '98	18.625	3.552286	52.200	3.31091
8 Jul. '98	18.975	1.861755	52.500	0.57306
9 Jul. '98	18.675	-1.59365	52.900	0.75901
10 Jul. '98	18.975	1.593659	52.800	-0.18921
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
23 Nov. '98	20.500	0.48899	39.300	6.30129
	Suma Total	*3.07107*	*Suma Total*	*-18.10485*

Tabla 2.4. Precios de cierre y rendimientos porcentuales de las acciones GMODELOC y APASCO, del 1 de Julio de 1998 al 23 de Noviembre del mismo año (100 datos).

En base a la ecuación *(2.1)*, se calcula el rendimiento esperado de ambas acciones:

$$E(R_{GMODELOC}) = 0.03071\% \text{ y } E(R_{APASCO}) = -0.18104\%,$$

y al calcular la covarianza de los rendimientos diarios entre GMODELOC y APASCO, se encuentra que es igual a 5.5548:

[11] Se utilizará la tasa de rendimiento geométrica para calcular el rendimiento de un activo: $\ln\left(\frac{Pt}{Pt-1}\right)$, donde P_t es el precio del activo en el periodo t y P_{t-1} es el precio del activo un periodo antes. Se utiliza esta medición por sus propiedades estadísticas, ya que definidos de esta manera, los rendimientos del activo siguen una distribución normal.

$$Cov_{GMODELOC,\,APASCO} = 1/100 \sum_{m=1}^{100} [r_{im}\text{-}E(R_{GMODELOC})][r_{jm}\text{-}E(R_{APASCO})] = 555.480/100 = 5.5548.$$

Formalmente, la **covarianza entre los rendimientos** de dos activos se define como:

$$Cov_{ij} = Cov(R_i,R_j) = \sum_{m=1}^{M} p_m[r_{im} - E(R_i)][r_{jm} - E(R_j)], \qquad (2.4)$$

donde,

r_{im} = m-ésima tasa de rendimiento posible del activo i (análogamente para j),
p_m = probabilidad de obtener la tasa de rendimiento m de los activos i y j .

El hecho de que la covarianza de los rendimientos diarios entre GMODELOC y APASCO sea de *5.5548*, señala que existe una relación lineal positiva entre los rendimientos de ambas acciones, pero lamentablemente no se sabe con exactitud el grado de linealidad entre ellas, es decir, qué tan lineal es dicha relación. Para salvar tal dificultad, se introduce un nuevo concepto: *el coeficiente de correlación entre rendimientos*.

2.1.4 CORRELACIÓN ENTRE RENDIMIENTOS

El **coeficiente de correlación** (ρ_{ij}) para los rendimientos de dos instrumentos i y j, es una forma de estandarizar la covarianza entre éstos. Esta otra medida considera su variabilidad y se calcula dividiendo la covarianza de los rendimientos, por el producto de sus respectivas desviaciones estándar; más formalmente:

$$\rho_{ij} = Corr(R_i,R_j) = Cov_{ij}/\sigma_i\sigma_j, \qquad (2.5)$$

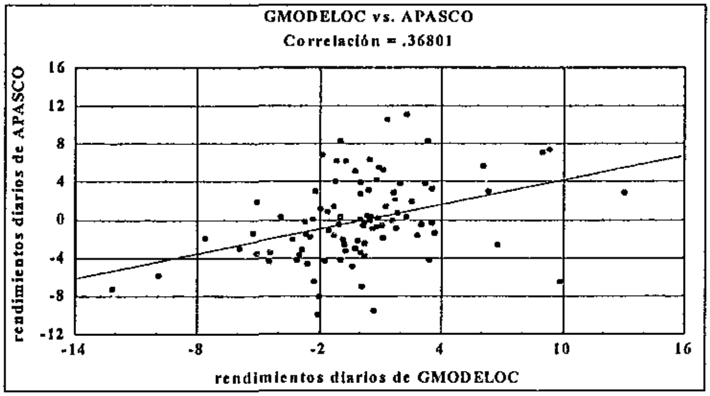
Regresando al ejemplo anterior, se estima la desviación estándar de ambas compañías en base a la raíz cuadrada de la ecuación *(2.3)*:

$$\sigma_{GMODELOC} = 3.5988\%, \qquad \sigma_{APASCO} = 4.1942\%;$$

y por la ecuación *(2.5)*, se obtiene que el coeficiente de correlación entre los rendimientos de GMODELOC y APASCO es de 0.36801:

$$\rho_{GMODELOC,\,APASCO} = Cov_{GMODELOC,\,APASCO}/\sigma_{GMODELOC}\,\sigma_{APASCO} = 0.36801.$$

Gráficamente:



GRÁFICA 2.1. Correlación entre los rendimientos de las acciones GMODELOC y APASCO.

El coeficiente de correlación varía sólo de -1 a 1, facilitando de esa manera su interpretación. Así, si $\rho_{ij}=1$, existe una relación lineal positiva perfecta entre el rendimiento R_i y R_j; es decir, ambos activos se mueven juntos de manera lineal. Por el contrario, el que $\rho_{ij}=-1$ indica una relación lineal negativa perfecta entre las dos series de rendimientos; finalmente, si $\rho_{ij}=0$, los rendimientos no se relacionan linealmente entre sí[12], pero la relación entre ellos puede ser de otro tipo (logarítmica, polinomial, exponencial, ...).

De acuerdo a los resultados obtenidos para las acciones GMODELOC y APASCO, se afirma que la relación lineal entre sus rendimientos es débil y que la acción APASCO es la más volátil de las dos, además de tener rendimiento esperado negativo, por lo que se preferirá invertir al día siguiente en acciones de GMODELOC.

2.1.5 VARIANZA DE UN PORTAFOLIO

Después de haber introducido los conceptos de covarianza y correlación, es posible definir la varianza de los rendimientos de un portafolio, y por consiguiente, su volatilidad. Para ejemplificar la varianza de los rendimientos de un portafolio de inversión, $V(R_p)$, supóngase uno compuesto en un 50% por acciones de GMODELOC y el otro 50% por acciones de APASCO. Así, utilizando la definición de varianza se obtiene que la varianza de los rendimientos del portafolio es de 10.4132% y su volatilidad o desviación estándar es de 3.2269%[13]:

[12] Debe aclararse, que el hecho de que el coeficiente de correlación sea cero, no significa que los rendimientos sean independientes (a menos que los rendimientos tuvieran una distribución normal).

[13] Es importante recalcar que la volatilidad del portafolio (3.2269%), es menor que suma ponderada de las volatilidades de GMODELOC y APASCO (3.8965%=[.5×3.5988]+[.5×4.1942]), debido a que estas acciones no están perfectamente correlacionadas, es decir, es el efecto de la diversificación del portafolio.

$$
\begin{aligned}
V(R_p) &= V(.50\ R_{GMODELOC} + .50\ R_{APASCO}),\\
&= (.50)^2\ V(R_{GMODELOC}) + (.50)^2\ V(R_{APASCO}) + 2(.50)(.50)\ COV(R_{GMODELOC}, R_{APASCO}),\\
&= (.50)^2\ (3.5988)^2 + (.50)^2\ (4.1942)^2 + 2(.50)(.50)\ (5.5548),\\
&= 10.4132,
\end{aligned}
$$

y por consiguiente:

$$DE(R_p) = \sqrt{V(R_p)} = 3.2269.$$

Formalizando, la **varianza de los rendimientos de un portafolio**, es la suma de las varianzas ponderadas de los rendimientos de cada activo que compone el portafolio, más la suma de las covarianzas ponderadas de los rendimientos entre cada par de activos que lo componen. Por otro lado, la **desviación estándar de los rendimientos de un portafolio** de activos, al igual que la varianza, considera no sólo las varianzas de los rendimientos de cada activo, sino también las covarianzas entre los rendimientos de cada par de activos en el portafolio. Para un portafolio compuesto de sólo dos activos, la desviación estándar de los rendimientos de dicho portafolio se calcula como:

$$DE(R_p) = \sigma_{port} = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2Cov_{12}}\ .$$

De manera general, la *volatilidad o desviación estándar de un portafolio* compuesto de *n* activos se define como la raíz cuadrada de su varianza, esto es:

$$DE(R_p) = \sigma_{port} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} w_iw_jCov_{ij}}\ , \qquad (2.6)$$

donde,

w_i = peso del activo i en el portafolio,
σ_i^2 = varianza de los rendimientos del activo i,

de forma matricial: $DE(R_p) = \sqrt{w \sum w'}$,

con $w=[w_1\ w_2\ \dots\ w_n]$ y $\sum = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots\sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots\sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\ \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots\sigma_n^2 \end{bmatrix}$ es la matriz de varianza-covarianza de los rendimientos de los activos que componen el portafolio[14].

[14] w' es la matriz transpuesta de w.

La volatilidad neta del valor de una cartera depende en buena medida de las correlaciones entre los rendimientos de los precios de los instrumentos que la constituyen. Correlaciones positivas tienden a hacer los riesgos aditivos, y las correlaciones negativas tienden a cancelar los riesgos entre sí.

2.2 MODELOS PARA LA VALUACIÓN DE INSTRUMENTOS QUE IMPLICAN RIESGO

A lo largo de los años se han desarrollado diversas formas para medir el riesgo de un portafolio de inversión, en esta sección se explican dos métodos o teorías que ayudan a medirlo, así como otros métodos para medir la sensibilidad de un activo o portafolio de activos a fluctuaciones de las tasas de interés.

La teoría del mercado de capitales junto con la teoría de portafolios, proveen un ámbito en el cual se puede especificar y medir el riesgo al invertir, así como entender la relación entre los rendimientos esperados de los instrumentos y el riesgo. A continuación, se hará un enfoque a los modelos *CAPM(Capital Asset Pricing Model)* y *APT(Arbitrage Pricing Theory)*[15].

2.2.1 MODELO DE VALUACIÓN DE ACTIVOS DE CAPITAL (CAPM)

El **Modelo de Valuación de Activos de Capital (CAPM)** es un modelo de equilibrio, esto es, dadas ciertas suposiciones (sobre el comportamiento de los inversionistas, sus expectativas y los mercados de capital), este modelo estima el precio de equilibrio de un activo y permite determinar la tasa de rendimiento de cualquier activo riesgoso.

El CAPM asume que los inversionistas:

- Basan sus decisiones en el rendimiento esperado y la varianza.
- Son racionales y aversos al riesgo. Además, los inversionistas tratan de diversificar su portafolio, es decir, construirlo en base a las covarianzas y a las correlaciones de los activos que lo componen, de tal manera que se reduzca el riesgo del portafolio sin sacrificar su rendimiento.
- Todos ellos invierten por el mismo periodo de tiempo (un mes, 6 meses, un año, etc.).
- Comparten sus expectativas acerca de los activos, dicho de otra manera, todos los inversionistas tienen las mismas expectativas sobre los rendimientos de los activos, sus varianzas y covarianzas.
- **Existe una inversión libre de riesgo**[16], y los inversionistas prestan y piden prestado a una *tasa libre de riesgo.*
- Los mercados de capital son completamente competitivos, es decir, todos los inversionistas son "pequeños" en relación al mercado, de manera que ninguno de ellos puede influir en el precio de

[15] Para una mayor referencia sobre estos modelos, consultar Copeland, Fabozzi (1995) o Reilly (1997).

[16] Teóricamente, cuando se habla de una inversión libre de riesgo se refiere al riesgo crediticio y al riesgo de mercado, pero en realidad, esta inversión es sólo libre de riesgo crediticio. Por ejemplo, en la práctica se utiliza la tasa de los CETES como una tasa libre de riesgo, ya que al ser el gobierno federal la contraparte no existe riesgo crediticio, pero sí existe riesgo de mercado, ya que si se posee un CETE a 28 días con una tasa del 19.7%, existe el riesgo de que el día 29 dicha tasa aumente o disminuya y por consiguiente, el inversionista que lo posee obtenga pérdidas o ganancias.

un activo. Además, no hay costos de transacción o impedimentos que interfieran con la oferta y demanda de un activo.

- Las inversiones son divisibles de manera infinita, lo que significa que es posible comprar o vender fracciones de un activo o portafolio.
- La distribución de los rendimientos de los instrumentos es normal, por lo cual, dicha distribución queda descrita con la especificación de la media y la varianza estimadas.

En ausencia de una tasa libre de riesgo, la teoría de portafolios indica que los *portafolios eficientes de Markowitz* (construidos en base a sus rendimientos esperados y a sus varianzas), son aquellos que tienen el mayor rendimiento esperado con un nivel de riesgo dado, por lo que para cada nivel de riesgo habrá un portafolio eficiente de Markowitz. A la colección de todos los portafolios eficientes de Markowitz se le conoce como *frontera eficiente de Markowitz.* En la Figura 2.4, para un portafolio situado a la derecha de la frontera eficiente de Markowitz, existe otro con mayor rendimiento o con menor riesgo[17]. Por ejemplo, el portafolio A no se encuentra en la frontera eficiente de Markowitz, debido a que el portafolio B ofrece el mismo rendimiento con menor riesgo y el portafolio C, tiene un rendimiento mayor con el mismo nivel de riesgo.

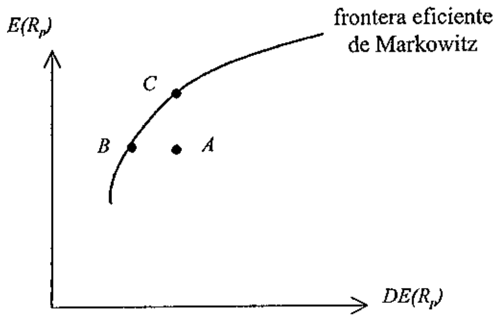


Figura 2.4. Frontera eficiente de Markowitz

El mejor portafolio a conservar de la frontera eficiente, llamado *portafolio óptimo*, es aquel que maximiza las preferencias de un inversionista en relación al rendimiento y al riesgo; en otras palabras, el punto tangente a la curva de indiferencia que representa la función de utilidad del inversionista y la frontera eficiente de Markowitz, indica el portafolio óptimo para el inversionista (ver Figura 2.5). De esta manera, si las preferencias del inversionista con respecto al riesgo y al rendimiento cambian, su portafolio óptimo será distinto.

[17] Los portafolios a la izquierda (hacia arriba) de la frontera eficiente de Markowitz ni siquiera son portafolios factibles, entendiéndose por portafolio factible aquel portafolio que un inversionista puede construir con los activos disponibles

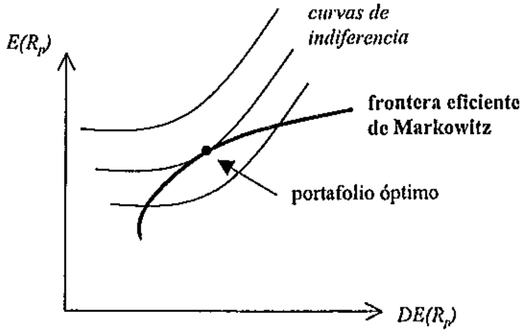


Figura 2.5. Portafolio óptimo de un inversionista

Al introducir activos libres de riesgo y suponiendo que los inversionistas prestan y piden prestado a una tasa libre de riesgo, cambia la frontera eficiente para el inversionista y por lo tanto, también su portafolio óptimo.

De esta manera, un inversionista podría invertir todo su portafolio en un activo libre de riesgo, es decir, podría prestar dinero a una tasa libre de riesgo; también podría invertir todo su capital en activos riesgosos solamente, en otras palabras, podría conformar un *portafolio de mercado*; pero también podría pedir prestado dinero a la tasa libre de riesgo e invertir en el portafolio de mercado. Sea R_f la tasa libre de riesgo a la cual los inversionistas prestan y piden prestado, y sea M el portafolio de mercado representado por el punto tangente a la frontera eficiente de Markowitz, por lo cual es un portafolio eficiente (ver Figura 2.6).

A la línea que va de R_f a M se le conoce como la *Línea del Mercado de Capitales (LMC)*[18], cada punto de la línea representa un portafolio compuesto de diferentes combinaciones del activo libre de riesgo y el portafolio de mercado. Los portafolios situados a la izquierda de M (por ejemplo P_B), representan portafolios en los cuales se invirtió una parte en activos riesgosos y la parte restante en un activo libre de riesgo, y los portafolios a la derecha de M, son portafolios que incluyen inversiones en el portafolio M, hechas con dinero que el inversionista pide prestado a la tasa libre de riesgo.

(Siguiente página)

[18] Sus siglas en inglés son CML: capital market line.

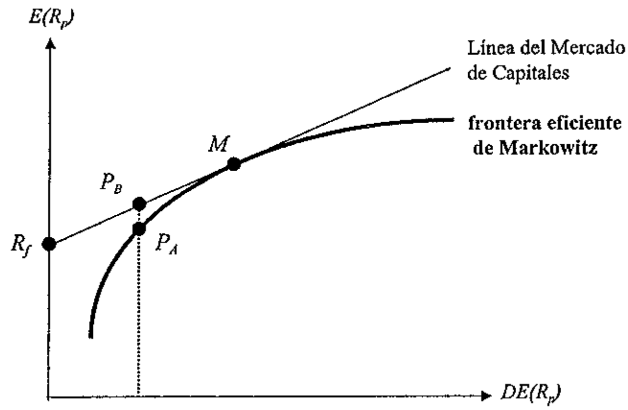


Figura 2.6. Línea del Mercado de Capitales (LMC)

Comparando al portafolio P_A situado en la frontera eficiente de Markowitz, con el portafolio P_B, sobre la LMC, se observa que aunque ambos portafolios tienen el mismo nivel de riesgo, el portafolio P_B tiene un mayor rendimiento. Esto es, P_B domina a P_A. De esta manera, el portafolio eficiente que el inversionista seleccionará en la LMC, dependerá de sus preferencias al riesgo, por lo que la nueva frontera eficiente es la línea del mercado de capitales y el portafolio óptimo para el inversionista, será aquel representado por el punto en el que la LMC sea tangente a la curva de indiferencia que represente la mayor utilidad del inversionista. En otras palabras, el portafolio óptimo para un inversionista será aquel que maximice su función de utilidad (Figura 2.7).

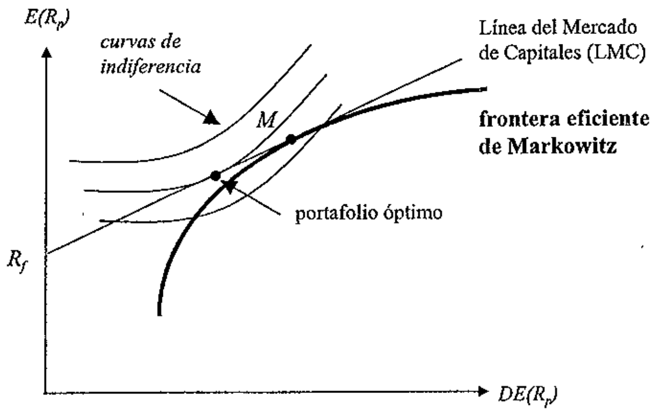


Figura 2.7. Portafolio óptimo de un inversionista incorporando una tasa libre de riesgo.

La ecuación de la línea del mercado de capitales, se puede obtener de manera algebraica: la recta intersecta el eje de los rendimientos del portafolio en R_f, con lo cual la pendiente de la recta puede determinarse tomando la distancia entre los puntos R_f y M, cuyas coordenadas son $(0,R_f)$ y $(DE(R_M),E(R_M))$[19] respectivamente. Así, la pendiente de la LMC es:

$$\frac{\left[E(R_M)-R_f\right]}{\left[DE(R_M)-0\right]}=\frac{\left[E(R_M)-R_f\right]}{DE(R_M)},$$

de esta manera, la ecuación de la línea del mercado de capitales es:

$$\mathrm{E(R_p)=R_f+\frac{\left[E(R_M)-R_f\right]}{DE(R_M)}DE(R_p)}. \qquad (2.7)$$

La LMC representa la condición de equilibrio en la que el rendimiento esperado de un portafolio eficiente, es una función lineal de la volatilidad del portafolio.

En el modelo CAPM, a los inversionistas les interesa la volatilidad del portafolio de mercado en el que van a invertir, así como la correlación entre cada uno de los instrumentos que componen el portafolio y el portafolio mismo. Esto debido a que los instrumentos más correlacionados positivamente con el portafolio de mercado, serán vistos por los inversionistas como los que más contribuyen al riesgo del portafolio.

A la relación de equilibrio riesgo-rendimiento del instrumento i-ésimo, se le conoce como la *Línea del Mercado de Valores (LMV)*, cuya ecuación es[20]:

$$\mathrm{E(R_i)=R_f+\frac{Cov(R_i,R_M)}{V(R_M)}\left[E(R_M)-R_f\right]}. \qquad (2.8)$$

Si se sustituye $\beta_i = Cov(R_i,R_M)/V(R_M)$, la ecuación (2.8) se escribe como:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i[E(R_M) - R_f]. \qquad (2.9)$$

La ecuación anterior representa al modelo CAPM. Esencialmente, este modelo indica que el riesgo sistemático[21] asumido por el inversionista debe "premiarse" mediante una cantidad llamada *prima por riesgo.* Así, el rendimiento esperado de un activo es igual a la suma de la tasa esperada de un activo libre de riesgo, R_f, más la prima por riesgo, $\beta_i[E(R_M)-R_f]$. A la diferencia entre el rendimiento esperado del mercado y la tasa libre de riesgo, $[E(R_M)-R_f]$, se le conoce como prima por riesgo del mercado.

[19] Como se trata del portafolio M, entonces su respectiva desviación estándar es $DE(R_M)$ y sus rendimientos esperados son $E(R_M)$.

[20] El procedimiento que se siguió para la obtención de esta ecuación, se encuentra explicado en el Apéndice D.

[21] Como se mencionó en el capítulo anterior, el riesgo sistemático es aquel riesgo que no es diversificable.

Con base en la ecuación (2.9), también se puede decir que el rendimiento esperado del activo i-ésimo es una función lineal de beta. *Beta (β)* es el índice de contribución de un instrumento, al riesgo sistemático de un portafolio diversificado de instrumentos o valores. Entre más grande sea beta, mayor será el rendimiento esperado del activo (a mayor riesgo, mayor rendimiento). Por supuesto la beta del portafolio de mercado es igual a uno, ya que $Cov(R_M,R_M)/V(R_M)=1$, de manera que si la beta de un activo está por arriba de uno, el activo tiene mayor riesgo sistemático que el mercado, es decir, es más volátil. Por ejemplo, si $\beta_i=2.5$, significa que en promedio, el activo i-ésimo tiene un rendimiento que es 2.5 veces mayor al rendimiento del portafolio de mercado.

Si se sustituye beta igual a uno en la ecuación del CAPM, se obtiene que el rendimiento esperado del activo *i* es el mismo que el del portafolio del mercado: $E(R_i)=E(R_M)$. La beta de un activo libre de riesgo es cero porque al conocerse sus rendimientos futuros, dichos rendimientos no varían. Entonces, al sustituir beta igual a cero en la ecuación (2.9), se obtiene que el rendimiento esperado de un activo libre de riesgo es igual a la tasa libre de riesgo: $E(R_i)=R_f$.

La beta utilizada en esta ecuación es una medida *ex ante*, es decir, que predice. Ahora se estimará una *beta histórica (o ex post) de activos*. Esta estimación se realiza utilizando series de los rendimientos de los activos y de los rendimientos de un portafolio de mercado. La técnica utilizada para dicha estimación es el análisis de regresión[22] , el cual estima la relación entre dos variables. El modelo es el siguiente:

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{Mt} + \varepsilon_{it,} \qquad (2.10)$$

donde,

r_{it} = rendimiento del activo *i* en el tiempo *t*,
r_{Mt} = rendimiento del portafolio de mercado en el tiempo *t*,
α_i = término que es igual al valor promedio de los rendimientos no sistemáticos del activo *i*,
β_i = término que relaciona el cambio en el rendimiento del activo *i* con el cambio del rendimiento del portafolio de mercado,
ε_{it} = error aleatorio con media igual a cero, que refleja el riesgo no sistemático asociado con la inversión en el activo *i*.

Suponga que se corre un análisis de regresión con los rendimientos del 1 de Julio de 1998 al 23 de Noviembre del mismo año de las acciones de GMODELOC y APASCO, y los rendimientos del IPC[23] y se obtiene que: $\beta_{GMODELOC}=0.719$ y $\beta_{APASCO}=0.954$, entonces, existe una relación histórica entre los rendimientos de GMODELOC y APASCO, y los rendimientos del IPC, ya que ambos índices son significativamente diferentes de cero[24].

La *beta histórica de un portafolio* con *n* activos *(β_p)* es simplemente el promedio de las betas históricas de los activos que componen al portafolio*(β_i)*, ponderado por el peso del activo *i* en el portafolio*(w_i)*:

[22] Existen varios paquetes estadísticos que realizan análisis de regresión, incluso Excel lo hace.
[23] El rendimiento del mercado se mide a través de los índices bursátiles como el índice de precios y cotizaciones (IPC), el cual es utilizado como portafolio de mercado cuando se trata de acciones del mercado mexicano.
[24] Los cálculos del coeficiente beta de ambas acciones se encuentran en el Apéndice E.

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i .$$

Como todos los métodos para medir el riesgo, el modelo CAPM tiene desventajas. Dos de las más importantes son las referentes a que es difícil identificar el portafolio de mercado, y por lo tanto, también sus rendimientos; y la segunda, se refiere a que los supuestos hechos por el modelo no son del todo reales, es decir, la práctica no sustenta la teoría. Es por ello, que se consideró un modelo más general al CAPM, pero que requiere de menos supuestos: el modelo de la Teoría de Arbitraje de Precios o APT.

2.2.2 TEORÍA DE ARBITRAJE DE PRECIOS (APT)

La **Teoría de Arbitraje de Precios (APT)** fue desarrollada por Stephen Ross en los años setentas y se basa en tres supuestos principales:

- Los mercados de capitales son perfectamente competitivos.
- Los inversionistas bajo escenarios de incertidumbre, siempre prefieren más riqueza a menos.
- La tasa de rendimiento de un activo riesgoso, puede representarse como función lineal de múltiples factores (en lugar de una sola variable, como lo indicaba el CAPM).

Con base en el tercer supuesto, el rendimiento de un activo riesgoso es función de k-factores:

$$R_i = E_i + b_{i1}\delta_1 + b_{i2}\delta_2 + \ldots + b_{ik}\delta_k + \varepsilon_i, \quad para\ i=1,\ldots,n \quad (2.11)$$

donde,

R_i = rendimiento del activo i en un periodo específico,
E_i = rendimiento esperado del activo i,
b_{ik} = efecto en el rendimiento del activo i a movimientos de un factor común k,
δ_k = factor común con media cero que influencia los rendimientos de todos los activos,
ε_i = efecto diversificable en el rendimiento del activo i, con media cero (se asumen independientes).

Los términos δ_k son los factores que tienen impacto en los rendimientos de todos los activos, como la inflación, cambios en las tasas de interés, trastornos políticos, el riesgo país, etc. Los términos b_{ik} determinan la sensibilidad del rendimiento del activo i al riesgo k. Un punto importante de mencionar, es que el número de activos que componen el portafolio debe ser mucho mayor al número de factores (n>k).

El rendimiento esperado de cualquier activo i, puede expresarse como:

$$E_i = E(R_i) = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} + \ldots + \lambda_k b_{ik}, \qquad (2.12)$$

donde,

λ_0 = tasa de rendimiento esperada de un activo libre de riesgo, denotada también como R_f,
λ_i = prima de riesgo relacionada con cada factor δ,

b_{ik} = indica qué tan receptivo es el activo i al factor común k,

sustituyendo la ecuación (*2.12*) en la ecuación (*2.11*) y factorizando, se obtiene la ecuación del modelo APT:

$$R_i = \lambda_0 + b_{i1}(\lambda_1+\delta_1) + b_{i2}(\lambda_2+\delta_2) + \ldots + b_{ik}(\lambda_k+\delta_k) + \varepsilon_i.$$

El modelo APT nos permite estimar la exposición de un portafolio a riesgos macroeconómicos que afectan a los activos que componen el portafolio. El gran problema con esta teoría, es identificar los factores que impactan los rendimientos de estos activos. Dado que no existe un método para identificar dichos factores, se usa la experiencia que se tenga o la intuición.

En resumen, las teorías del CAPM y del APT buscan estimar el rendimiento que pagará el mercado, por cada unidad adicional tomada de riesgo de un portafolio. Ambas teorías indican la relación entre riesgo y rendimiento. Adicionalmente, existen métodos para medir el riesgo financiero derivado de las fluctuaciones en las tasas de interés, a continuación se mencionan algunos de ellos.

2.2.3 DURACIÓN

El riesgo de tasa de interés es un riesgo sistemático, por lo que los inversionistas no pueden controlarlo; debido a esto, se hace necesario medir la sensibilidad de los precios a cambios en la tasa de interés. El concepto **duración (*duration*)**, permite medir el efecto de un cambio en la tasa de interés sobre el valor presente neto de los flujos a recibir de un instrumento[25].

Como se mencionó en el capítulo anterior, el precio de un bono se calcula como el valor presente de sus flujos futuros:

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+r_T)^t} + \frac{M}{(1+r_T)^T},$$

simplificando la ecuación anterior:

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_T)^t}, \qquad (2.13)$$

donde,

C_t = pago correspondiente al periodo t; $C_t=C$ para t=1,...,T-1 y $C_T=C+M$, donde M es el valor nominal del bono y C es el cupón del bono,

T = número de periodos totales para el vencimiento (anuales, semianuales u otros),

r_T = rendimiento al vencimiento del bono.[26]

La *duración*, **D**, se conceptualiza como el tiempo o plazo necesario en años, en que se recupera la inversión en un bono; como medida es de gran utilidad, debido a que toma en cuenta los factores que influyen en el precio del bono como lo son el cupón, el plazo y por supuesto la tasa de interés. Se

---

[25] Para mayor información sobre el método duración, ver Fabozzi (1996) y Kracaw (1993) de la bibliografía.

[26] Para simplificar la obtención de la ecuación (2.14), se tomará la tasa r_T como una tasa de rendimiento anual y se supondrán cupones anuales.

calcula como un promedio ponderado de las fechas de pago de cada flujo multiplicado por el valor presente de dichos flujos:

$$\mathbf{D = (1/P) \sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{(1+r_T)^t}}. \qquad \mathbf{(2.14)}$$

Para bonos que pagan cupones, la duración siempre es menor al plazo de vencimiento, mientras que para bonos cupón cero, la duración es siempre igual al plazo[27].

A la ecuación (2.14) también se le conoce como la *duración Macaulay* de un bono, en honor de Frederick Macaulay quien utilizó esta medida en un estudio publicado en 1938[28]. Una de las ventajas de la *duración Macaulay* es su simplicidad, además de que si se cumplen los supuestos para su medición (más adelante se verán), proporciona una muy buena aproximación de la sensibilidad del precio de un instrumento a cambios en la tasa de interés.

Ej. Supóngase un bono con un valor nominal de \$100 a 10 años con cupones anuales de \$4 y una tasa de interés anual del 8%. Primero se calcula el precio del bono, y después su duración:

$$P = \frac{4}{(1+0.08)^1} + \frac{4}{(1+0.08)^2} + ... + \frac{104}{(1+0.08)^{10}} = \$73.160,$$

$$\mathbf{D} = (1/73.160)\sum_{t=1}^{10} \frac{tC_t}{(1+0.08)^t} = (1/73.160)\left[\frac{1\times 4}{(1+0.08)^1} + \frac{2\times 4}{(1+0.08)^2} + ... + \frac{10\times 104}{(1+0.08)^{10}}\right] = 8.12\textit{años}.^{29}$$

lo cual indica que la inversión en el bono se recuperará aproximadamente en 8 años.

Otro concepto que nos permite medir la sensibilidad a la tasa de interés, es la *duración modificada* (D_{mod}) también llamada "elasticidad de la tasa de interés". Ésta mide el cambio porcentual en el precio del bono por una variación de *1%* en la tasa de interés, por lo que a mayor duración modificada, más sensible será el precio del bono a cambios en las tasas de interés.

La sensibilidad del precio de un bono a cambios en la tasa de rendimiento r_T, se obtiene diferenciando el precio del bono P, con respecto a la tasa de rendimiento[30]:

$$\frac{dP}{dr_T} = -\frac{1}{(1+r_T)}\sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{(1+r_T)^t},$$

---

[27] La duración Macaulay al no haber pagos cupón es $D=[T\times M/(1+r_T)^T]/P$. Al sustituir el precio de un bono cupón cero, $P=M/(1+r_T)^T$, se obtiene que $D=T$, es decir, la duración Macaulay de un bono cupón cero es igual al vencimiento del bono cupón cero.

[28] Frederick Macaulay, "*Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the U.S. Since 1856*", National Bureau or Economic Research, New York, (1938).

[29] Cuando la tasa de interés se compone *m* periodos al año, la duración medida se expresa en subperiodos, para convertirla a una medida anual, se divide por *m*. Ej. Una duración igual a 20 calculada con una tasa de interés semestral, indica el tiempo necesario en semestres. Para convertirla en años, se divide por dos.

[30] El desarrollo para llegar a esta fórmula se encuentra en el Apéndice F.

multiplicando por *-1* la ecuación anterior y sustituyendo la duración, se obtiene la duración modificada de un bono:

$$D_{mod} = -(1/\ P)\frac{dP}{dr_T} = \frac{D}{(1+r_T)}.$$

Si los rendimientos son muy pequeños, el denominador $(1+r_T)$ de la ecuación anterior puede ser aproximado por uno, y la duración sería aproximadamente igual a la duración modificada. Cuando esto ocurre, la duración no se expresa en años sino en porcentaje, es decir, si la duración de un bono es de 4.5 años, la tasa de interés r_T es significativamente pequeña y se quisiera obtener su duración modificada, entonces se esperaría que el precio del bono cambie un 4.5% por una variación de 1% en la tasa de interés.

En general, el cambio porcentual en el precio de un bono debido a un cambio infinitesimal en la tasa de interés δ_i, se calcula como[31]:

$$\frac{dP}{P} = -D_{mod} \times dr_T,$$

y en términos discretos:

$$\frac{\Delta P}{P} = -D_{mod} \times \Delta r_T.$$

Regresando al ejemplo del bono a 10 años con valor nominal de $100, cupones de $4 y tasa de interés anual de 8%, se calcula su duración modificada:

$$D_{mod} = \frac{8.12}{(1+0.08)} = 7.52.$$

Este resultado indica que el precio del bono aumentará un 7.52% por una disminución del 1% en la tasa de interés y disminuirá un 7.52%, si la tasa de interés aumenta en un punto porcentual. En tanto que si la tasa de interés disminuyera un 0.25%, el precio del bono aumentará 1.88%:

$$\frac{dP}{P} = -7.52 \times -0.25 = 1.88\%.$$

Dado que la duración es una medición lineal de la exposición a fluctuaciones en la tasa de interés, la *duración* para un portafolio de *n* instrumentos de renta fija como bonos, D_p, es un promedio ponderado de la *duración* de los componentes del portafolio:

[31] Esta fórmula se deriva del primer término de la aproximación del cambio en el precio de un bono, con una expansión de Taylor: $\frac{dP}{P} \approx (1/P)\frac{dP}{dr_T}dr_T + (1/2P)\frac{d^2P}{dr_T^2}(dr_T)^2 + (1/6P)\frac{d^3P}{dr_T^3}(dr_T)^3 + \quad = -D_{mod}dr_T + (1/2)C(dr_T)^2 + \xi$

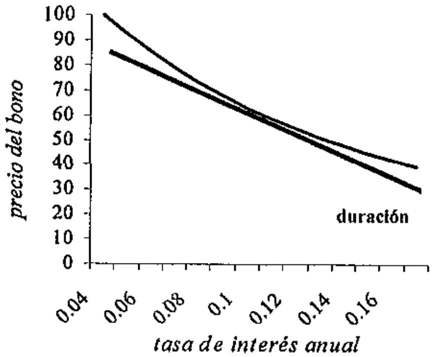
donde ξ representa los términos correspondientes del tercero, al último término de la expansión de Taylor y el segundo término de la expansión se explica más adelante pues tiene que ver con el método de convexidad.

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} w_i D_i$$

donde D_i es la duración del bono i, y w_i es la proporción invertida del portafolio en n bonos diferentes.

Matemáticamente, la *duración modificada* es la primera diferencial del precio de un instrumento de renta fija, con respecto a la tasa de interés y dividida por el precio. De esta manera, la duración representa la pendiente de la curva precio-rendimiento del instrumento y se considera una primera aproximación de la relación entre el precio de un instrumento y la tasa de interés.

En la Gráfica 2.2 se observa la aproximación lineal que equivale la duración en la curva precio-rendimiento de un bono. En ésta, se observa que el valor del bono disminuye conforme la tasa de interés aumenta y viceversa.



Gráfica 2.2. La curva precio-rendimiento de un bono y su duración.

La manera en que la duración Macaulay se relaciona con el cupón, el plazo y el rendimiento de un bono al vencimiento es la siguiente:

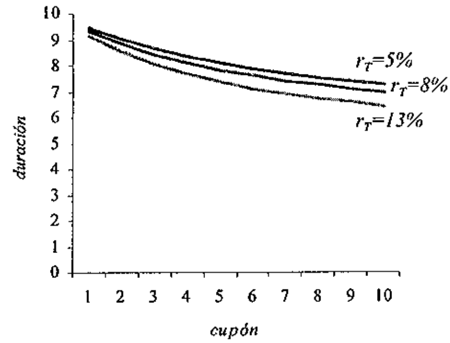
- *El cupón tiene una relación inversa con la duración*[32]. Esto es, entre mayores sean los cupones, más rápido se recupera el valor del bono, por lo que la duración es más pequeña. Ej. Suponga el mismo bono del ejemplo anterior con cupones anuales de \$4, valor nominal de \$100 a 10 años, una tasa de interés anual del 8% y duración igual a 8.12 años, pero ahora con cupones anuales de \$5.5. Al calcular el precio del bono con los nuevos cupones y su duración, se obtiene:

$$P = \frac{5.5}{(1+0.08)^1} + \frac{5.5}{(1+0.08)^2} + \ldots + \frac{105.5}{(1+0.08)^{10}} = \$83.225,$$

$$D = (1/\ 83.225)\sum_{t=1}^{10} \frac{tC_t}{(1+0.08)^t} = 642.971/\ 83.225 = 7.73\ \textit{años}.$$

[32] El desarrollo matemático de esta relación se explica con más detalle en el Apéndice F.

Es decir, la duración disminuyó de 8.12 años a 7.73 años al aumentar los cupones anuales de \$4 a \$5.5. Este comportamiento se describe en la siguiente gráfica:

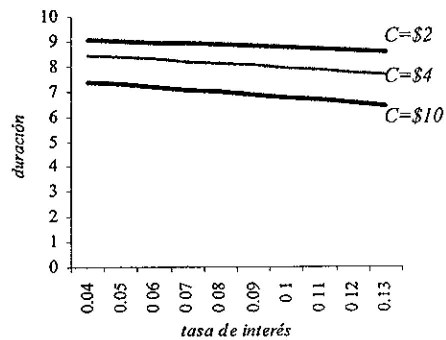


Gráfica 2.3. Relación duración-cupón de un bono a 10 años, fijando tasas de 5%, 8% y 13%.

Otro dato importante de mencionar es que, a medida de que la tasa de rendimiento del bono aumenta, la curva duración-cupón se hace más convexa, por lo que la pendiente de esta curva se hace más negativa.

- *El rendimiento al vencimiento y la duración tienen una relación inversa.* Así, a tasas más altas, el valor presente neto de los flujos de efectivo a recibirse en el futuro es menor, lo cual disminuye el valor del bono y disminuye la duración.

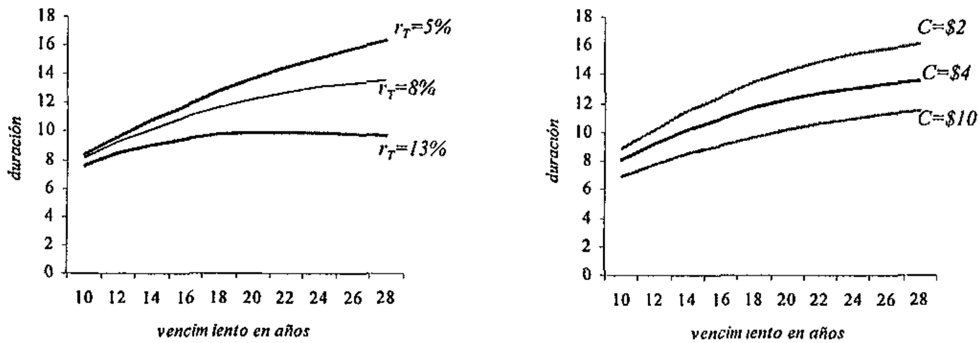
  Ej. Si la tasa de rendimiento del bono con cupones anuales de \$4 y valor nominal de \$100 a 10 años, aumentara de 8% a 8.2%, se obtiene que el precio del bono es ahora de \$72.070 y por consiguiente, su duración disminuye de 8.12 años a 8.10 años. La relación duración-tasa de rendimiento se observa en la siguiente gráfica:



Gráfica 2.4. Relación duración-tasa de interés de un bono a 10 años, fijando cupones de \$2, \$4 y \$10.

Si el cupón del bono aumenta, la curva duración-tasa de rendimiento se desplaza hacia el eje de la tasa de interés y la pendiente de la curva se hace más negativa (aunque es casi imperceptible), por lo que es una función decreciente.

- ❑ *La duración se incrementa al aumentar el vencimiento del bono.*
  Ej. Con los mismos datos, pero ahora con un vencimiento de 12 años en lugar de 10 años, se valúa el mismo bono obteniendo que su precio (al aumentar su vencimiento) es ahora igual a $69.856. Al calcular su duración se obtiene que es de 9.24 años en lugar de 8.12 años, es decir, su duración aumentó al aumentar su vencimiento, lo cual se puede corroborar en las siguientes gráficas:



Gráficas 2.5. y 2.6. La gráfica de la izquierda (2.5) es el comportamiento de la curva duración-vencimiento de un bono con cupones anuales de $4, fijando tasas de 5%, 8% y 13%. La gráfica de la derecha (2.6) es la relación duración-vencimiento de un bono con una tasa del 8%, fijando cupones de $2, $4 y $10.

Ambas curvas son cóncavas y su pendiente se vuelve más positiva al disminuir en la gráfica 2.5, la tasa de rendimiento del bono y en la gráfica 2.6, el cupón pagado por el bono. Lo cual quiere decir que el bono se vuelve más sensible al disminuir la tasa de interés y aumentar el vencimiento del bono, y al disminuir los cupones del bono y aumentar el vencimiento del mismo.

2. 2. 3. 1 Supuestos y Limitaciones del Método Duración

- ❑ Los flujos del instrumento deben ser *conocidos e independientes* entre sí, es decir el flujo a recibir mañana, no depende del flujo recibido hoy.
- ❑ Los movimientos en la tasa de rendimiento necesitan ser *pequeños*, para que la aproximación lineal sea válida, en otras palabras, la duración sólo es válida con cambios infinitesimales en las tasas de interés. Debido a esto, la duración no será una medida muy buena para curvas precio-rendimiento muy convexas.
- ❑ La duración Macaulay es exacta sólo bajo el supuesto de movimientos *paralelos* en las tasas de interés, es decir, las tasas en cualquier periodo de vencimiento cambian por el mismo monto en

forma absoluta. De esta manera, la curva de rendimiento[33] se asume *constante*, lo cual implica que la misma tasa de interés se aplica en todos los flujos independientemente de su vencimiento.

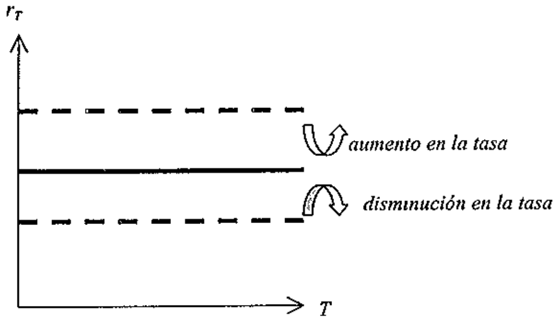


Figura 2.8. Curva de rendimiento

- Los movimientos en la tasa de interés deben ser *instantáneos*, debido a que la duración calculada al tiempo *t*, asume que el único factor que puede cambiar en el precio del bono es la tasa de interés.
- Su cálculo requiere de una gran inversión en tiempo y datos.

Se analiza ahora qué tan precisa es la duración, cuando los cambios en las tasas de interés son significativos. Regresando al ejemplo del bono, con valor nominal de \$100 a 10 años con cupones anuales de \$4 y una tasa de interés anual del 8%, se obtuvo que su precio era \$73.160 y su duración modificada 7.52. Si se calcula el cambio porcentual en el precio del bono a un aumento de 400 puntos base (4%) en la tasa de interés se obtiene que el precio del bono, en base a la duración, disminuiría un 30.08%:

$$\frac{dP}{P} = -7.52 \times 4 = -30.08\%$$

Supóngase que en realidad, la tasa de rendimiento anual aumentó los 400 puntos base, es decir, de 8% a 12%. Al calcular el precio del bono al 12% se obtiene que es igual a \$54.798, en otras palabras, el precio del bono disminuyó un 25.09% y no un 30.08%.

También se calculó anteriormente, que el precio de este bono aumentaría un 1.879% por una disminución de 0.25% en la tasa de interés. Suponiendo que en realidad la tasa de interés disminuyó de 8% a 7.75%, se calcula el precio del bono con la nueva tasa de interés y se obtiene que el precio del bono es de \$74.551, es decir, el precio disminuyó un 1.866%, por lo cual la duración fue una muy buena aproximación.

En base a este ejemplo y a la Figura 2.9, es claro que la duración no es muy adecuada cuando ocurren cambios grandes en la tasa de interés, pero sí es una muy buena aproximación de los cambios en el precio de un bono, cuando los cambios en la tasa de interés son pequeños. Esto implica que el

[33] La curva de rendimiento representa la relación entre el vencimiento (time to maturity) y la tasa de rendimiento de un instrumento de renta fija.

precio del bono sea más sensible a un cambio en la tasa de interés de r^* a la tasa r_3 o r_4, y menos sensible por un cambio de r^* a la tasa de interés r_1 o a la tasa r_2.

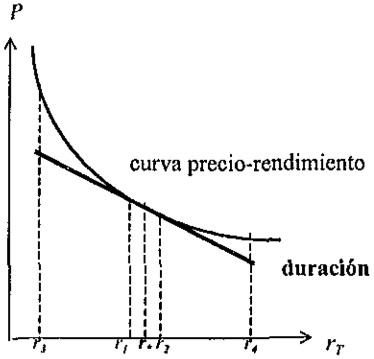


Figura 2.9. Sensibilidad del precio de un bono a cambios en la tasa de interés.

Debido a estas limitaciones, la duración no es considerada una herramienta suficiente para proveer una base para la valuación o construcción de una estrategia de administración de riesgos.

2.2.4 CONVEXIDAD

La **convexidad,** *C*, es una mejor aproximación asociada con valores de renta fija. Matemáticamente, es la segunda diferencial del precio del instrumento respecto a la tasa de interés, también dividida por el precio[34]:

$$C=(1/P)\frac{d^2P}{dr_T^{\,2}}=(1/P)\frac{1}{(1+r_T)^2}\sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)C_t}{(1+r_T)^t}.$$

La convexidad es una medida que nos da una aproximación de la curvatura de la función precio-rendimiento, en otras palabras, nos dice qué tanto la curva se desvía de la aproximación lineal hecha con la duración, por lo que la convexidad indica el cambio en la duración, al cambiar la tasa de interés[35].

Ej. Suponga un bono con valor nominal de \$100 a 3 años, con pagos anuales de \$12 y una tasa de interés anual del 9%. El precio del bono y su convexidad son:

---

[34] En el Apéndice F se encuentra desarrollada la segunda derivada del precio con respecto a la tasa de interés.

[35] Cuando los cambios en el rendimiento son pequeños, la convexidad puede ignorarse. Además, si la convexidad se obtiene con base en una tasa compuesta m periodos al año y dado que la convexidad se mide en periodos al cuadrado, el resultado se divide por m^2 para obtener una medida anual.

$$P=\frac{12}{(1+0.09)^{1}}+\frac{12}{(1+0.09)^{2}}+\frac{112}{(1+0.09)^{3}}=\$107.594\,;$$

$$\begin{aligned}C&=(1/\ 107.594)\frac{1}{(1+.09)^{2}}\sum_{t=1}^{3}\frac{t(t+1)C_{t}}{(1+.09)^{t}},\\&=(1/107.594)\ \frac{1}{(1+0.09)^{2}}\left[\frac{1\times 2\times 12}{(1+0.09)^{1}}+\frac{2\times 3\times 12}{(1+0.09)^{2}}+\frac{3\times 4\times 112}{(1+0.09)^{3}}\right],\\&=8.76\text{ años.}\end{aligned}$$

El cambio porcentual en el precio de un bono, debido a la convexidad, es[36]:

$$\frac{dP}{P}=(1/\ 2)C(dr_{T})^{2},$$

en términos discretos:

$$\frac{\Delta P}{P}=(1/\ 2)C(\Delta r_{T})^{2}.$$

Aplicando la fórmula anterior, se obtiene que el bono cambiaría un 0.0438%, por un aumento de 1% en la tasa de interés:

$$\frac{dP}{P}=(1/\ 2)8.76(0.01)^{2}=0.0438\%.$$

De manera análoga a la duración de un portafolio, la convexidad de un portafolio de instrumentos de renta fija, C_p, es simplemente un promedio ponderado de la convexidad de los componentes del portafolio:

$$C_p=\sum_{i=1}^{n}\ w_i\,C_i,$$

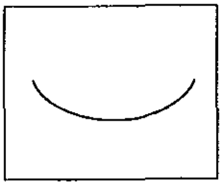
donde C_i es la convexidad del bono i.

Cabe resaltar que la convexidad siempre es positiva para bonos cuyo precio se obtiene en base a la ecuación (2.13), por ejemplo, bonos sin opciones[37]. Entonces, dado que la curvatura de la curva precio-rendimiento se define como la segunda diferencial del precio de un instrumento de renta fija con respecto a la tasa, se trata de una curva convexa. Además, la convexidad cuantifica la magnitud de la curvatura, es decir, entre mayor sea la convexidad, más convexa será la curva precio-rendimiento del bono.

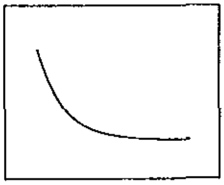
[36] Este cambio porcentual se deriva del segundo término de la expansión de Taylor mencionada con anterioridad.

[37] Existe otro tipo de bonos que tienen opciones implícitas, a estos bonos se les conoce como *embedded options*

Convexidad positiva



Convexidad positiva



La convexidad, al igual que la duración, asume que la curva de rendimiento es constante y que si hay cambios en la curva, se harán de forma paralela. Ambas medidas, la *duración* y la *convexidad* tomadas en forma conjunta como medidas del riesgo, constituyen una mejor aproximación[38].

Ej. Se calculó con anterioridad el cambio porcentual en el precio de un bono con valor nominal de $100 a 10 años con cupones anuales de $4 y una tasa de interés anual del 8%, a un aumento de 4% y se obtuvo, en base a la duración, que el precio del bono disminuiría un 30.08%. Si ahora se calculara el cambio porcentual en el precio del bono tomando en cuenta la convexidad del bono, se obtiene:

$$C = (1/\ 73.160)\frac{1}{(1+.08)^2}\sum_{t=1}^{10}\frac{t(t+1)C_t}{(1+.08)^t} = 5{,}210.692/\ 73.160 = 71.22\,,$$

$$\frac{dP}{P} = (1/\ 2)71.22(.04)^2 = 0.0569\,.$$

Lo cual indica que la duración del bono cambiará un 5.69%, por un aumento del 4% en la tasa de interés. Al sumar este cambio porcentual con el cambio derivado de la duración, se obtiene que el precio del bono disminuirá un 24.39%, por un aumento de 4% en la tasa de interés:

$$\begin{array}{rrl} & \text{Duración} = & -30.08\% \\ + & \text{Convexidad} = & \underline{\ \ 5.69\%} \\ & \text{Total} = & -24.39\% \end{array}$$

Con anterioridad se calculó que el verdadero cambio en el precio del bono suponiendo que la tasa aumentó de 8% a 12% era de 25.09%. Este es un claro ejemplo de que la duración y la convexidad como medidas complementarias, son una mejor aproximación del cambio en el precio de un bono por un cambio en la tasa de interés.

2. 2. 5 MODELO DE BRECHAS (GAP)

La manera en que se estructuran los activos y pasivos de una institución, es fundamental para determinar su grado de exposición al riesgo de tasa de interés a nivel de su balance general y el método utilizado comúnmente para ello, es el **modelo de brechas o GAP de tasas de interés**[39]. El modelo de

[38] Para mayor información sobre el método convexidad, ver Fabozzi (1996).

[39] Para una mayor referencia sobre este modelo, ver Bitner (1992) y CNBV (1996).

brechas cuantifica los efectos de cambios en las tasas de interés en un periodo de tiempo, sobre los ingresos de una institución, debidos a las diferencias o desfases en las fechas de repreciación[40] tanto de sus activos como de sus pasivos.

En el contexto de riesgo de tasas de interés, la brecha de tasas se define como la diferencia existente entre el saldo nominal de las operaciones activas sensibles a tasas de interés *(AST)*, y el saldo de las operaciones pasivas sensibles a tasas *(PST)*:

$$Brecha=AST-PST.$$

a) Brecha igual a cero

El hecho de que la brecha sea igual a cero indica que un cambio en la tasa de interés del mercado, no afecta el *margen financiero (MF)* de la institución, el cual se define como la diferencia entre el ingreso financiero y el costo financiero.

Ej. Suponga que un ahorrador deposita en un banco *$1 millón de pesos* con vencimiento a *90 días* que paga el *8%*. El banco invierte el millón, en un préstamo a tasa fija que gana el *10%* y que vence el mismo día del depósito. El banco tendrá entonces una posición *GAP cero*, si su tasa activa y pasiva crecen o decrecen en el mismo porcentaje, por lo que las ganancias en un lado del balance, se compensan con las pérdidas en el lado opuesto, lo cual quiere decir que el banco no tiene riesgo de tasa de interés. Por ejemplo, si ambas tasas crecen o decrecen un 1% a 90 días, el margen financiero de 2% que se tenía al principio, se preserva:

	Rendimiento a la fecha de renovación		
	Rendimiento inicial	*Rendimiento inicial + 1%*	*Rendimiento inicial - 1%*
Tasa fija del préstamo a 90 días	10%	11%	9%
Tasa del depósito a 90 días	8%	9%	7%
Interés marginal neto	2%	2%	2%

Tabla 2.4. Posición GAP cero de un banco, es decir, sus ingresos financieros igualan sus costos financieros.

b) Brecha positiva

Se dice que la brecha del balance es positiva (AST>PST), cuando los activos sensibles a las tasas de interés son mayores en saldo a los pasivos sensibles. De manera que si la tasa de mercado

[40] La fecha de repreciación de un activo o pasivo, es la fecha en la cual se hace una revisión de la tasa asociada a dicho activo o pasivo. Para un instrumento a tasa fija, la fecha de renovación es la misma que la fecha de repreciación, mientras que para un instrumento a tasa variable o flotante, la fecha de repreciación es anterior a la fecha de renovación.

aumenta, el ingreso financiero se incrementará más que el costo; pero, si disminuye, el descenso en el ingreso será mayor que la disminución en el costo financiero.

Ej. Continuando con el ejemplo anterior, si el préstamo del banco estuviera a una tasa flotante mensual con un valor inicial del *10%*, y la tasa del depósito continuara fija durante los 90 días, se dice que el banco es *sensible en sus activos* debido a que el activo (préstamo) se reprecia más rápido que el pasivo en ese periodo de 90 días. Nótese que un banco sensible en sus activos produce un margen de interés neto mayor si las tasas de los activos aumentan, debido a que la tasa de interés ganada del préstamo, inicialmente del 10%, se incrementa durante el periodo de 90 días, mientras que la tasa pagada sobre el depósito, permanece en 8%.

	Rendimiento inicial	*Tasa después de 30 días*	*Tasa después de 60 días*
Tasa flotante del préstamo a 90 días	10%	11%	12%
Tasa del depósito a 90 días	8%	8%	8%
Interés marginal neto	*2%*	*3%*	*4%*

Tabla 2.5. Posición activo-sensible del banco, con tasas a la alza.

De manera contraria, si la tasa flotante del préstamo disminuye, el banco gana menos dinero debido a que el costo del depósito se mantendrá en 8%:

	Rendimiento inicial	*Tasa después de 30 días*	*Tasa después de 60 días*
Tasa flotante del préstamo a 90 días	10%	9%	8%
Tasa del depósito a 90 días	8%	8%	8%
Interés marginal neto	*2%*	*1%*	*0%*

Tabla 2.6. Posición activo-sensible del banco, con tasas a la baja.

c) Brecha negativa

Se dice que el balance de la institución tiene una brecha negativa (AST<PST), si los pasivos sensibles exceden a los activos sensibles en saldo.

Ej. Supóngase ahora que el banco hace un préstamo hipotecario a 30 años, con una tasa hipotecaria fija a 30 años del 10% anual convertible trimestralmente y que la tasa del depósito a 90 días (ahora trimestral), sigue fija al 8%. El banco es ahora *sensible en sus pasivos*, porque la tasa pagada al depósito se reprecia más rápido que la tasa recibida por el préstamo. Si las tasas de interés disminuyen, la hipoteca continúa ganando un 10% durante los próximos 30 años, en cambio el depósito que se reprecia cada 90 días, lo hace a una tasa menor al 8% inicial:

	Rendimiento inicial	Tasa después de la primera fecha de repreciación	Tasa después de la segunda fecha de repreciación
Tasa fija hipotecaria a 30 años	10%	10%	10%
Tasa del depósito a 90 días	8%	7%	6%
Interés marginal neto	*2%*	*3%*	*4%*

Tabla 2.7. Posición pasivo-sensible del banco, con tasas a la baja.

El incremento en las tasas de interés causa una erosión en el margen financiero del banco sensible en sus pasivos: La hipoteca continua ganando un 10% los próximos 30 años, pero cada 90 días, fecha de vencimiento del depósito, éste es renovado a una tasa mayor que la inicial del 8%. Así, si la tasa del depósito se incrementa al punto de sobrepasar el 10% de la tasa hipotecaria, se obtiene un interés neto marginal negativo:

	Rendimiento Inicial	Tasa después de la primera fecha de renovación	Tasa después de la segunda fecha de renovación
Tasa fija hipotecaria a 30 años	10%	10%	10%
Tasa del depósito a 90 días	8%	9%	10%
Interés marginal neto	*2%*	*1%*	*0%*

Tabla 2.8. Posición pasivo-sensible del banco, con tasas a la alza.

Además de considerar el signo de la brecha, se debe tomar en cuenta la magnitud del saldo del desfase; es decir, qué tan grande es la diferencia entre los saldos de los activos y los pasivos sensibles. En la medida en que existan desfases entre las posiciones activas y pasivas sensibles, existirá una posición de riesgo de tasas de interés por parte de la institución; de hecho, entre mayor sea la brecha, mayor es el riesgo en el que incurre la empresa.

Los saldos de las operaciones activas y pasivas sensibles, se agrupan en bandas de tiempo[41] de acuerdo a su fecha de repreciación; dicho de otra manera, la inclusión de los instrumentos en cada banda corresponde a la fecha de repreciación de cada uno. Debido a esto, puede ser de interés medir la brecha en una banda determinada o conocer la brecha que se lleva hasta un determinado periodo de tiempo.

---

[41] Las bandas de tiempo son periodos definidos, en los cuales se colocan los instrumentos cuya fecha de repreciación corresponde al límite inferior de dichas bandas, esto debido a que el GAP supone que los instrumentos en cada banda, se reprecian el primer día y que sólo en ese mismo día cambia la tasa de interés. La amplitud de las bandas estará en función de las condiciones del mercado donde se determina la tasa de interés y de los objetivos fijados por la administración de riesgos de la institución.

El GAP PERIÓDICO, nos muestra la brecha existente entre los activos y pasivos sensibles a tasas, únicamente en lo referente a la banda de tiempo en que se analice. Es una medida que da a conocer la situación de la brecha, en un instante determinado de tiempo.

El GAP ACUMULADO, mide el nivel de riesgo asumido por la institución hasta el último día. En otras palabras, mide el riesgo agregado sobre todo el periodo, por lo que el Gap acumulado y el periódico coinciden en la primera banda de tiempo.

Es común comparar el GAP como medida de tiempo, en términos de algunos conceptos tales como el capital y/o los activos de la empresa. Existen algunos índices GAP que son de gran utilidad, entre ellos se encuentran:

- *Gap Ratio.* Para poder llevar a cabo comparaciones, se utiliza esta medida de riesgo relativa que mide la proporción existente de activos sensibles a tasas de interés con relación a los pasivos sensibles que posee la institución, por lo que dimensiona la magnitud de las brechas. En otras palabras, este índice cuantifica el número de veces que los activos sensibles son mayores a los pasivos sensibles. El Gap Ratio se calcula como:

  GAP RATIO = AST/PST.

  Ej. Si un banco tiene un Gap Ratio igual a 3.55, indica que tiene $3.55 activos sensibles por cada peso en pasivos sensibles.

- *Gap Capital.* Este índice muestra la proporción que guarda la brecha en relación con el capital al mes en cuestión, es decir, mide la exposición del capital al riesgo. De esta manera, entre más grande sea esta proporción, más riesgoso es el banco. El Gap Capital es calculado como:

  GAP CAPITAL = Brecha/Capital.

  Ej. Si el mismo banco tuviera una brecha de 120,666 y un Gap Capital de 7.20, se diría que la brecha representa un poco más de 7 veces el capital del banco.

- *Gap Activos* es una razón que indica la proporción de la brecha, en relación con los activos sensibles a tasas.

  GAP ACTIVOS= Brecha/Activos.

Ej. Supóngase que estos son los resultados del análisis GAP de una empresa (cantidades en pesos). Para fines de este ejemplo, se tomaron las siguientes bandas de tiempo: 1 a 7 días, 8 a 30 días, 31 a 90 días, 91 a 180 días, 181 a 270 días, 271 a 360 días y más de un año:

Bandas de tiempo:	1-7 días	8-30 días	31-90 días	91-180 días	181-270 días	271-360 días	más de un año	TOTAL
Total de activos sensibles	$307 mil	$361 mil	$389 mil	$179 mil	$36 mil	$35 mil	$75 mil	$1,382
Total de pasivos sensibles	$279 mil	$314 mil	$348 mil	$239 mil	$54 mil	$55 mil	$100 mil	$1,389
Gap periódico	$28 mil	$47 mil	$41 mil	-$60 mil	-$18 mil	-$20 mil	-$25 mil	
Gap acumulado	$28 mil	$75 mil	$116 mil	$56 mil	$38 mil	$18 mil	-$7 mil	
Gap ratio	1.10035	1.14968	1.11781	0.74895	0.66666	0.63636	0.75	**0.99496**
Gap/activos	0.09120	0.13019	0.10539	-0.33519	-0.5	-0.5714	-0.3333	
Gap capital*	0.56	0.94	0.82	-1.2	-0.36	-0.4	-0.5	

*Suponiendo que el capital contable es de $50 mil

Algunos resultados importantes de este ejemplo son:

1. El Gap ratio de la empresa es de 0.99496 (=1,382/1,389), es decir, la empresa tiene $0.99496 activos sensibles por cada peso en pasivos sensibles, lo cual es bueno para la empresa, ya que los activos sensibles casi igualan a los pasivos sensibles.
2. El Gap Capital en la banda de 8 a 30 días, es de 0.94 (=47,000/50,000) es decir, la brecha es aproximadamente un 94% del capital de la empresa, lo cual es demasiado.
3. El Gap/activos en la misma banda es 0.10539(=41,000/389,000), lo cual indica que la brecha en ese periodo representa el 10.539% de los activos sensibles de la empresa.

2. 2. 5. 1 Ventajas y Desventajas del Modelo de Brechas

A continuación se enlistan algunas ventajas y desventajas del modelo de brechas.

VENTAJAS:

- ✓ Permite una evaluación de la posición activa y pasiva de las instituciones, a un costo fácilmente asimilable.
- ✓ Adelanta los efectos derivados de alteraciones inesperadas en las tasas de interés, sobre el ingreso neto de la empresa.
- ✓ Facilita la evaluación del riesgo de tasas en moneda nacional y extranjera.
- ✓ Es útil en la supervisión bancaria, ya que ayuda a identificar el grupo de instrumentos que más impacta en el ingreso, rentabilidad y valor de los bancos, así como el periodo en el que ocurre dicho impacto.

DESVENTAJAS:

- Es una medida muy simple y burda de la exposición a tasas de interés.
- Considera las fechas de repreciación, pero algunos instrumentos no tienen por lo que el GAP no puede asegurar algo sobre estos instrumentos. Además, sólo toma en cuenta la fecha de vencimiento de un instrumento si su tasa respectiva es fija, en caso contrario, sólo considera la fecha de repreciación.
- Para calcular la brecha, es necesario tener la información correspondiente a los activos y pasivos sensibles a tasas que posee una institución. De esta manera, el GAP tiene una visión a corto plazo, pues no se pueden conocer todas las variables necesarias a largo plazo en forma precisa.
- Se concentra sólo en la variabilidad de ingresos y egresos, y no toma en cuenta el valor de mercado de los activos y pasivos, por lo que no mide el efecto que tiene la variación de las tasas sobre el valor de mercado de cada activo y pasivo de la institución a la cual se le mide el riesgo.
- Otra de sus desventajas es el supuesto de que las posiciones no cambian, ya que en la práctica, las posiciones de los portafolios cambian de manera continua.

En resumen, la tasa de interés GAP para una posición financiera dada, es la diferencia entre el monto de activos sensibles y el monto de obligaciones sensibles; la cual, busca encontrar el cambio en la utilidad del banco ante eventuales variaciones en la tasa de interés. Al igual que la duración y la convexidad, es una medida de riesgo que sensibiliza de los efectos en los cambios de la tasa de interés.

Después de conocer el riesgo al que se está expuesto, el siguiente paso es decidir una forma de protegerse contra este riesgo. Existen instrumentos tales como los futuros[42] o las opciones[43], que pueden ser usados como instrumentos de cobertura a cambios en las tasas de interés, pero este tipo de instrumentos no serán desarrollados en esta tesis.

---

[42] Un futuro es un contrato estipulado entre dos partes, las cuales adquieren la obligación de comprar y vender una cierta cantidad y calidad de un bien específico en una fecha, lugar y precio establecidos al momento de realizarse el contrato.

[43] Una opción es un contrato entre dos partes donde se adquiere el derecho más no la obligación de comprar o vender un bien subyacente a un cierto precio y en una fecha futura, mediante el pago de una prima.

Capítulo 3

VALOR EN RIESGO

El riesgo financiero de las empresas es de una naturaleza tan compleja e impredecible, que no se puede hacer una descripción determinista de los eventos que lo provocan; debido a esto, se sugiere que la medición del riesgo se fundamente en la Estadística. El estadístico más sencillo, utilizado a lo largo de los años para medir el movimiento de las variables financieras, es la desviación estándar o volatilidad.

Las pérdidas de una empresa pueden ocurrir por su exposición a la acción combinada de la volatilidad de las variables financieras; pero, aunque las empresas no tienen control sobre la volatilidad de estas variables, sí pueden ajustar su exposición al riesgo. Uno de los métodos que dan una mejor aproximación del riesgo de mercado de una empresa, es el método de **valor en riesgo o value at risk (VaR).**

3.1 DEFINICIÓN

Por años, los administradores de portafolios compuestos de instrumentos de renta fija, utilizaron métodos como la duración y la convexidad (analizados en el capítulo anterior), para medir su exposición al riesgo de tasas de interés. Sin embargo, estos métodos se vuelven inapropiados e insuficientes para portafolios que contienen instrumentos no lineales tales como las opciones, lo anterior, aunado a las desventajas de usar la duración como una medida de riesgo (tal como se explicó en la sección 2.2.3.1 del capítulo 2). Es así como el método VaR ha sido adoptado por los reguladores internacionales, y una nueva generación de software se ha construido a su alrededor, sobretodo a raíz de que el Grupo de los Treinta[1] en el reporte llamado "Derivatives: Practices and Principles" de Julio de 1993, lo recomendó como una medida consistente del riesgo de mercado.

[1] El Grupo de los Treinta es un grupo formado por los principales banqueros, financieros y académicos de las naciones industriales líderes, que se encarga de estudiar y dar soluciones óptimas a problemas financieros y económicos.

El VaR utiliza técnicas estadísticas básicas y acota las posibles pérdidas potenciales de un instrumento o de todo un portafolio, debidas a movimientos del mercado, en un sólo número fácil de interpretar y expresado en alguna moneda. Por ejemplo, si el portafolio de un banco tiene un *VaR diario de $28 millones con un nivel de confianza del 95%*, entonces sólo hay cinco posibilidades en 100, bajo ciertos supuestos, de que ocurra una pérdida mayor de $28 millones diarios en el valor del portafolio. Esta cifra resume la exposición del banco al riesgo de mercado, así como la probabilidad de un movimiento adverso en el valor de mercado del portafolio. De esta manera, los accionistas y administradores del banco pueden decidir si aceptan o no este nivel de riesgo.

De manera formal, **VaR es un número que estima la pérdida esperada máxima de un portafolio o instrumento, en condiciones normales del mercado, con un nivel de confianza dado[2] y en un horizonte fijo predeterminado. Su fórmula es:**

$$\mathbf{VaR = (W_0 \times q \times \sigma) - (W_0 \times \mu),} \qquad (3.1)$$

donde,

q = cuantil correspondiente al nivel de confianza seleccionado de una distribución normal estándar[3],
σ = desviación estándar de los rendimientos del instrumento o portafolio,
μ = media de los rendimientos del instrumento o portafolio.
W_0 = valor de mercado inicial de la posición en el instrumento o portafolio.

El VaR calculado de esta manera se le conoce como *VaR absoluto*. En el caso que se deseé calcular el VaR en un horizonte pequeño (por ejemplo, de un día) puede asumirse que la media de los rendimientos es igual a cero, siempre y cuando su valor sea significativamente pequeño. Si este es el caso, se calcula el *VaR relativo*[4]:

$$\mathbf{VaR = W_0 \times q \times \sigma.} \qquad (3.2)$$

En resumen, el propósito principal del VaR es proponer una estimación de las pérdidas de una institución a un cierto nivel de confianza y periodo, para crear un fondo de contingencia que cubra las posibles pérdidas de esta institución.

3.2 ALCANCES

El concepto y la utilización del VaR inició en la última parte de la década de los ochenta, para medir los riesgos de los portafolios de las instituciones financieras; pero en general, este método beneficia a cualquier institución o inversionista expuesto a riesgos financieros, ya sea una institución financiera (bancos), reguladora (CNVB), no financiera (multinacionales) o administradores de activos.

---

[2] El administrador de riesgos junto con el director del banco, deciden el nivel de confianza con el que se calculará dicha medida o estimación, por ejemplo 95%, 97.5%, 99%, etc. Un mayor nivel de confianza implica una decisión más conservadora.

[3] Los cuantiles más usados son: 1.645 para un nivel de confianza del 95%, 1.96 para un nivel de 97.5% y 2.326 para un nivel de 99% de confianza.

[4] Para una mayor referencia sobre el VaR relativo y el VaR absoluto, ver Down(1998) pág. 43.

Algunas de las entidades financieras más grandes como Barings y Orange County, perdieron billones de dólares en los mercados financieros por no haber puesto la atención necesaria en su administración de riesgos. Por ello, las instituciones en general tomaron más en cuenta el método de *value at risk*, el cual era fácil de entender y calcular, además de que estimaba los riesgos de mercado.

En el caso de las instituciones reguladoras, por ejemplo, los banqueros centrales del Grupo de los Diez (G-10)[5] llegaron a un acuerdo financiero: el Acuerdo de Basilea de 1988, el cual, establece los requerimientos mínimos de capital que deben cumplir los bancos comerciales para realizar coberturas de riesgo de crédito. Este acuerdo, condujo al Comité de Basilea a presentar en Abril de 1993, una serie de propuestas consultivas sobre riesgos de mercado y en Abril de 1995[6], un anexo a dichas propuestas que permitiría a los bancos utilizar sus propios modelos de medición de riesgo de mercado. Así, los bancos tienen la opción de utilizar su propio modelo VaR como base para determinar su requerimiento de capital.

Por otro lado, el desarrollo tecnológico en cuestiones de procesamiento de datos y el incremento en las herramientas de análisis, han propiciado el desarrollo de métodos y sistemas para evaluar el desempeño financiero de las instituciones.

En el sector privado, se han propuesto algunas iniciativas en torno a la administración de riesgos, tal es el caso de la firma J. P. Morgan. Esta firma contribuyó de manera muy importante al desarrollo y aceptación del VaR, con la implementación de la base de datos y metodología RiskMetrics en Octubre de 1994. RiskMetrics, provee un análisis para calcular el VaR, así como también volatilidades y correlaciones de instrumentos financieros internacionales. Esencialmente, este sistema es la combinación de un marco analítico para medir el riesgo de un portafolio y de una colección de datos estadísticos necesarios para hacer las operaciones de dicha medición. Este sistema está disponible gratuitamente en Internet[7].

Después de RiskMetrics se han elaborado otros sistemas para la medición del riesgo como el sistema "PrimeRisk", al que tienen acceso sólo los clientes de CS First Boston y que provee un modelo de predicción de herramientas y parámetros necesarios para medir el VaR (este sistema es parte de un paquete de administración de riesgos llamado "PrimeClear"); "Outlook", otro software que proporciona paso a paso una aproximación para calcular el VaR y que fue desarrollado por Financial Engineering Associates (FEA)[8]; "RAROC 2020", un sistema desarrollado por Bankers Trust basado en su experiencia interna en administración de riesgos, que sirve para comparar rendimientos de distintas transacciones ajustados por riesgo[9]; "CreditMetrics", un sistema elaborado por Chris Finger en 1997 para evaluar riesgo de crédito, entre otros.

---

[5] El G-10 son funcionarios ejecutivos miembros del Comité de Basilea, dicho grupo lo forman principalmente: Bélgica, Canadá, Francia, Alemania, Italia, Japón, Holanda, Suecia, Reino Unido y Estados Unidos.

[6] Consultar Basle Committee on Banking Supervision, *"An Internal Model-Based Approach to Market Risk Capital Requirements"*, Basle, Switzerland: Basle Committee on Banking Supervision (1995a) y Basle Committee on Banking Supervision, *"Planned Supplement to the Capital Accord to Incorporate Market Risks"*, Basle, Switzerland: Basle Committe on Banking Supervision, (1995b).

[7] Para mayor información acerca de la metodología RiskMetrics, se puede consultar J. P Morgan (1996) disponible en Internet en la dirección: http://www.jpmorgan.com.

[8] Ver News (1995) para mayor información sobre "Outlook".

[9] Ver Irving (1996) para mayor información sobre "PrimeRisk" y "RAROC 2020".

3.3 SUPUESTOS

Los supuestos para el cálculo del VaR de un instrumento o portafolio, varían de acuerdo al método de medición, pero en general los supuestos del valor en riesgo son:

- El instrumento o la composición del portafolio, no cambia en el horizonte de tiempo elegido.
- La distribución de los cambios en los precios futuros del instrumento o portafolio (rendimientos), será similar a la distribución de las variaciones pasadas, es decir, el futuro se comporta como el pasado en términos distribucionales. Este supuesto se debe a que se utilizan series históricas para estimar datos estadísticos como la media y la desviación estándar de los rendimientos del instrumento o portafolio.
- Normalidad en la distribución de los rendimientos del instrumento o portafolio (no siempre es necesario).
- Los rendimientos pueden suponerse con media constante (VaR relativo), pero la varianza no siempre se tendrá que suponer constante.

3.4 ELEMENTOS PRINCIPALES PARA EL CÁLCULO DEL VaR

Como se puede observar en la fórmula (3.1), se distinguen cuatro elementos para el cálculo del VaR:

- La *posición* (W_0). Se refiere al valor de mercado del instrumento o portafolio en el momento de la valuación, es decir, dadas las condiciones actuales del mercado (curva de tasas de interés, tipo de cambio, etc.), cuál es el valor del portafolio. En otras palabras, el valor de mercado es el precio al que se puede liquidar un activo o portafolio. Por ejemplo, si un inversionista es dueño de un portafolio que contiene 100 acciones de TELMEX y el precio de cada acción en este momento es de \$33.70, entonces el valor de mercado del portafolio en este momento es de \$3,370 (=33.70×100).
- El *horizonte de tiempo* sobre el cual se desea estimar las pérdidas potenciales. Este horizonte puede ser de un día, una semana, un mes, o cualquier otro periodo según lo determine el administrador de riesgo. También deberá estar relacionado con la liquidez del o de los instrumentos que componen el portafolio de inversión[10], ya que por ejemplo, tiene sentido calcular el VaR diario de un portafolio que está sujeto al "trading", es decir, a compras o ventas diarias; en tanto que para un portafolio con menor revolvencia, es decir, que permanece sin cambios durante un periodo más largo, se le puede calcular el VaR en un horizonte de tiempo mayor.
- La *media* y la *varianza*. Estos dos parámetros son importantes para la completa definición de una distribución normal y dado que el valor en riesgo se calcula asumiendo que los rendimientos del instrumento o portafolio provienen de una $N(\mu_t, \sigma_t^2)$, es necesario el cálculo de estos dos parámetros utilizando el estimador más conveniente. Una opción es asumir que son constantes en el tiempo.
- El *grado de certidumbre*, es decir, el nivel de confianza elegido para la estimación (los más usados son del 95%, 97.5% y 99%), dicha selección reflejará el grado de aversión al riesgo del inversionista según el VaR que arroje. Nótese que entre más grande sea el nivel de confianza, mayor es el valor en riesgo dado que el cuantil de la distribución normal aumenta.

---

[10] Ver Lawrence (1995).

3.5 MODELO PARA LOS RENDIMIENTOS DE UN INSTRUMENTO

Como se mencionó en el segundo capítulo, es muy importante calcular la volatilidad de los rendimientos de un instrumento o portafolio para medir su riesgo. Para ello, es necesario conocer la manera en que se miden dichos rendimientos. En la siguiente tabla se muestran las tres formas para medir los rendimientos de un instrumento, en el horizonte de un día y en el horizonte de k días:

	Horizonte de un día	*Horizonte de k días*
Rendimiento absoluto	$D_t=P_t-P_{t-1}$	$D_t=P_t-P_{t-k}$
Rendimiento relativo	$R_t=\frac{P_t-P_{t-1}}{P_{t-1}}$	$R_t(k)=\frac{P_t-P_{t-k}}{P_{t-k}}$
Rendimiento compuesto continuamente o logarítmico	$r_t=\ln(P_t/P_{t-1})$	$r_t(k)=\ln(P_t/P_{t-k})$

donde,

P_t = precio del instrumento al tiempo t,
P_{t-1} = precio del instrumento al tiempo t-1 (un día antes),
P_{t-k} = precio del instrumento al tiempo t-k (k días antes).

En la práctica, se utilizan con más frecuencia los rendimientos compuestos continuamente debido a sus propiedades estadísticas, como se mencionó en el segundo capítulo.

Una forma de describir el comportamiento en el tiempo del precio de un instrumento financiero en el horizonte de un día, garantizando que dicho precio no sea negativo, es modelando el logaritmo del precio como una caminata aleatoria[11]:

$$\ln(P_t)=\mu+\ln(P_{t-1})+\sigma\varepsilon_t, \qquad (3.3)$$

donde,

μ = media de los rendimientos logarítmicos o log-rendimientos del instrumento,
σ = desviación estándar diaria de los rendimientos del instrumento,
ε_t = variable aleatoria al tiempo *t* independiente e idénticamente distribuida (i.i.d), tal que $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Tomando la diferencia entre $\ln(P_t)$ y $\ln(P_{t-1})$, se obtienen los log-rendimientos del instrumento:

$$\ln(P_t)-\ln(P_{t-1})=\ln(P_t/P_{t-1})=r_t,$$

por lo tanto,

$$r_t=\mu+\sigma\varepsilon_t. \qquad \mathbf{(3.4)}$$

De esta manera, el precio del instrumento al tiempo *t* se puede escribir como:

[11] El que el logaritmo del precio se modele como una caminata aleatoria, quiere decir que el logaritmo del precio al tiempo t ($\ln(P_t)$), depende de la observación anterior ($\ln(P_{t-1})$) y de un error no correlacionado con media cero y varianza σ^2.

$$P_t = P_{t-1}\exp(r_t),$$

y dado que el precio del instrumento un periodo antes (P_{t-1}) y la exponencial son positivos, se garantiza que los precios del instrumento modelados de esta manera, sean siempre positivos.

Para modelar el logaritmo de los precios como una caminata aleatoria (ecuación 3.3), se supone que los cambios en el logaritmo de los precios (r_t) son independientes e idénticamente distribuidos. El supuesto de que los rendimientos sean *idénticamente distribuidos* indica que para cada punto *t*, los rendimientos se distribuyen con media μ y varianza σ^2, lo cual implica que la media y la varianza son **constantes**. El otro supuesto de que los rendimientos son *independientes entre sí*, significa que los rendimientos en diferentes puntos *t* no están relacionados de alguna manera. Sin embargo, estos supuestos de varianza constante e independencia casi nunca se cumplen en la práctica.

Si se observan los supuestos de independencia y varianza constante para un horizonte de k días, el logaritmo de los precios se modela como:

$$\ln(P_t) = \mu + \ln(P_{t-k}) + \sigma\varepsilon_t .$$

Los log-rendimientos del instrumento son entonces:

$$\begin{aligned} r_t(k) &= \ln(P_t) - \ln(P_{t-k}), \\ &= [\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})] + \ldots + [\ln(P_{t-(k-1)}) - \ln(P_{t-k})], \\ &= r_t + \ldots + r_{t-(k-1)}, \\ &= (\mu + \sigma\varepsilon_t) + \ldots + (\mu + \sigma\varepsilon_{t-(k-1)}), \\ &= k\mu + \sigma(\varepsilon_t + \ldots + \varepsilon_{t-(k-1)}), \end{aligned}$$

y su varianza será:

$$\begin{aligned} V(r_t(k)) &= V(k\mu) + V(\sigma(\varepsilon_t + \ldots + \varepsilon_{t-(k-1)})), \\ &= \sigma^2[V(\varepsilon_t) + \ldots + V(\varepsilon_{t-(k-1)})], \\ &= k\sigma^2, \end{aligned}$$

dado que ε_t son i.i.d~N(0,1).

Es decir, si la serie de rendimientos es independiente y tiene varianza constante, la volatilidad de estos rendimientos con un horizonte de k-días es simplemente $\sqrt{k}\,\sigma$.

Y de esta manera, el precio del instrumento al tiempo *t* en el horizonte de k días, es:

$$P_t = P_{t-k}\exp(r_t(k)).$$

Es importante recalcar que si no se da la independencia y la varianza de los rendimientos no es constante, su varianza a k días no se puede calcular como $k\sigma^2$.

En este trabajo se tomará el horizonte de un día para calcular el VaR, por lo que no se tratará este problema de extrapolación de la varianza en caso de presencia de correlación entre los rendimientos.

3.5.1 INDEPENDENCIA DE LOS RENDIMIENTOS EN EL TIEMPO

Un método para determinar si los rendimientos son estadísticamente independientes (en caso de normalidad) es probando si no están autocorrelacionados, es decir, si no hay correlación entre ellos.

a) Autocorrelación entre Log-rendimientos

El coeficiente de autocorrelación de una serie de rendimientos dados, mide la correlación de los rendimientos en el tiempo. Sea r_t una serie de observaciones de los rendimientos de un instrumento con $t=1, \ldots, T$. Los coeficientes de autocorrelación de orden k se definen como:

$$\rho(k) = \frac{COV(r_{t-k}, r_t)}{V(r_t)},$$

el cual puede estimarse a partir de una muestra como[12]:

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{T-k}(r_t - \bar{r})(r_{t+k} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^{T}(r_t - \bar{r})^2}, \quad 0 \leq k < T$$

donde,

k = diferencia en tiempo entre r_t y r_{t-k} (se conoce como rezago),
$\bar{r}$ = media de la serie r_t, calculada como: $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$.

De esta manera, si todos los coeficientes de autocorrelación estimados de la serie de los rendimientos de interés no son significativamente distintos de cero, se puede inferir que la serie es no autocorrelacionada. Para ello, se verifica que los $\hat{\rho}(k)$ se encuentren dentro del intervalo de confianza $\left(\frac{-1.96}{\sqrt{T}}, \frac{1.96}{\sqrt{T}}\right)$ construido al 95%.

b) Autocorrelación entre las Varianzas de los Log-rendimientos

Cuando los rendimientos a los cuales se les está probando autocorrelación son diarios, se asume que su media es cero debido a que es significativamente pequeña. En base a esto, el cuadrado del rendimiento será igual a su varianza en ese día:

[12] El cálculo de este coeficiente se hace suponiendo que la serie es estacionaria en su media y su varianza.

$$\sigma_t^2 = E(r_t^2) - [E(r_t)]^2,$$

por lo tanto,

$$\sigma_t^2 = E(r_t^2).$$

De igual manera, si todos los coeficientes de autocorrelación estimados de la serie de varianzas de los rendimientos de interés se encuentra dentro del intervalo $\left(\frac{-1.96}{\sqrt{T}}, \frac{1.96}{\sqrt{T}}\right)$ al 95% de confianza, se puede concluir que la serie de las varianzas no está autocorrelacionada.

Si no se cuestiona el valor de la media de los rendimientos y además los rendimientos se encuentran autocorrelacionados y sus varianzas también, entonces el logaritmo de los precios no se debe modelar como en la ecuación (3.3), sino como:

$$\ln(P_t) = \ln(P_{t-t}) + \sigma_t \varepsilon_t.$$

3.5.2 ESTIMACIÓN DE LA VARIANZA DE UN INSTRUMENTO POR PROMEDIOS MÓVILES EXPONENCIALES

Cuando se cuenta con una serie histórica de los rendimientos de un instrumento con varianza homoscedástica y media constante, lo más común es estimar la varianza de dichos rendimientos con el modelo de Promedios Móviles a T días:

$$\sigma^2 = \sum_{t=1}^{T} (1/T)(r_t - \bar{r})^2, \qquad (3.5)$$

donde,

T = número de rendimientos del instrumento a partir de los cuales se estima la varianza,
r_t = rendimiento del instrumento al tiempo t,
$\bar{r}$ = media o promedio de los rendimientos del instrumento.

Pero, desafortunadamente esta estimación de la varianza no es muy recomendada para calcular el valor en riesgo de un activo, ya que le otorga el mismo peso a cada una de las observaciones (1/T), es decir, supone que la serie de rendimientos es estacionaria en su media y varianza, y en la práctica no lo es. Por ello, se recurre a la estimación de la varianza por medio de la metodología de **Promedios Móviles Exponenciales**[13] de las observaciones históricas de los rendimientos de un instrumento, la cual otorga mayor peso a los rendimientos recientes. Esta metodología se basa en la suposición de que periodos de alta volatilidad siguen a periodos de alta volatilidad y análogamente, periodos de baja volatilidad siguen a periodos de baja volatilidad. Lo cual ha sido verificado en la práctica.

El método de Promedios Móviles Exponenciales estima la varianza de un instrumento como:

[13] EWMA por sus siglas en inglés.

$$\sigma^2 = (1-\lambda)\sum_{t=1}^{T}\lambda^{t-1}(r_t - \bar{r})^2 . \qquad (3.6)$$

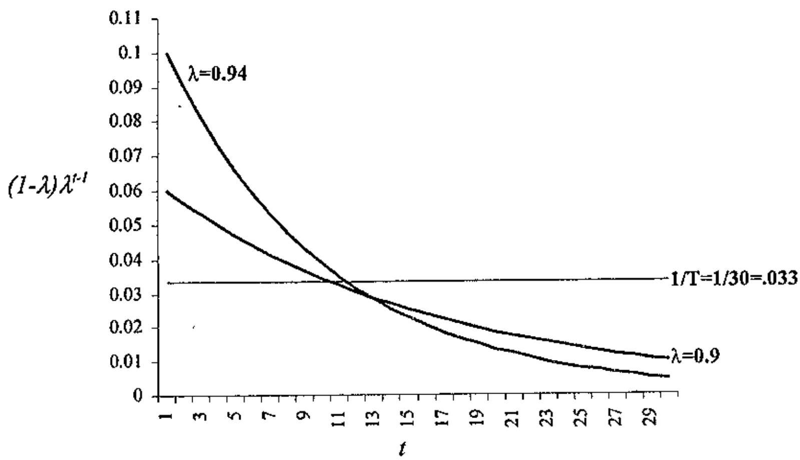
Al parámetro λ se le conoce como **factor de decaimiento** y cumple con la restricción de no ser mayor a uno y menor a cero ($0<\lambda<1$).

Otra forma de expresar la ecuación (3.6) es:

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^{T}\lambda^{i-1}}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{t-1}(r_t - \bar{r})^2 .$$

En esta expresión es claro que cuando $\lambda=1$, se obtiene la ecuación (3.5), pero dado que $\lim_{T\to\infty}\sum_{i=1}^{T}\lambda^{i-1} = \frac{1}{(1-\lambda)}$, se prefiere utilizar la ecuación (3.6).

La diferencia entre los estimadores dados por las ecuaciones (3.5) y (3.6), se observa más claramente en la siguiente gráfica:



Gráfica 3.1. Diferencia entre el estimador de la varianza por Promedios Móviles con T=30 y por Promedios Móviles Exponenciales para $\lambda=0.9$ y $\lambda=0.94$.

Para notar gráficamente la diferencia entre ambos estimadores, se graficó el número de observaciones t, contra el ponderador por Promedios Móviles Exponenciales $(1-\lambda)\lambda^{t-1}$. En esta gráfica es claro que la estimación de la varianza por Promedios Móviles Exponenciales es mejor a la estimación por Promedios Móviles, ya que por ejemplo, le otorga un mayor peso $(1-\lambda)$ a la observación más reciente ($t=1$) y un peso menor $[(1-\lambda)\lambda^{29}]$ a la observación menos reciente ($t=30$). En cambio, el método "común" para estimar la varianza le da la misma ponderación ($1/T=0.033$) a todas las observaciones, independientemente de su distancia en el tiempo. Otro dato importante de mencionar es que entre más grande sea lambda, mayor peso se le da a las observaciones recientes y menor a las observaciones distantes. Es claro que la varianza estimada por EWMA, se supone no constante[14].

No siempre la media es significativamente diferente de cero. Si este caso, en base a la definición de esperanza se calcula la media de los rendimientos de un instrumento al tiempo t, dados los datos hasta el tiempo t-1 como:

$$\bar{r}_{t|t-1} = E(r_t|t-1) = \sum_{i=1}^{T} r_{t-i}(1-\lambda)\lambda^{i-1},$$

entonces:

$$\bar{r}_{t|t-1} = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{T} \lambda^{i-1} r_{t-i}, \qquad (3.7)$$

donde r_{t-i} es el rendimiento del instrumento *i* días hábiles de operación atrás.

Es decir, la media de los rendimientos al tiempo *t* dados los rendimientos conocidos hasta el tiempo *t-1*, es la suma ponderada de los datos conocidos. Nótese que el rendimiento inmediato anterior (r_{t-1}) tiene mayor peso (1-λ), que el rendimiento de hace T días (r_{t-T}) cuyo peso es $(1-\lambda)\lambda^{T-1}$.

De igual manera, la varianza de los rendimientos de un instrumento al tiempo *t* dados los rendimientos hasta el tiempo *t-1*, se calcula como una esperanza condicional:

$$\sigma^2_{t|t-1} = E\left[\left(r_t - \bar{r}_{t|t-1}\right)^2 | t-1\right] = \sum_{i=1}^{T}(r_{t-i} - \bar{r}_{t|t-1})^2 k_i,$$

donde $k_i = (1-\lambda)\lambda^{i-1}$, entonces:

$$\sigma^2_{t|t-1} = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{T}\lambda^{i-1}(r_{t-i} - \bar{r}_{t|t-1})^2. \qquad (3.8)$$

Así, la volatilidad del rendimiento del instrumento al tiempo *t* se puede estimar por:

$$\sigma_{t|t-1} = \sqrt{(1-\lambda)\sum_{i=1}^{T}\lambda^{i-1}(r_{t-i} - \bar{r}_{t|t-1})^2}. \qquad (3.9)$$

3.5.3 ESTIMACIÓN DE LA COVARIANZA Y LA CORRELACIÓN DE UN INSTRUMENTO POR PROMEDIOS MÓVILES EXPONENCIALES

Análogo a la varianza, se utiliza el modelo de Promedios Móviles Exponenciales de datos históricos para estimar la covarianza y la correlación de los cambios logarítmicos en el precio de instrumentos.

[14] Para una mejor referencia consultar J. P. Morgan (1996).

La estimación de la covarianza entre los rendimientos del instrumento 1 y los rendimientos del instrumento 2 al tiempo *t*, dados los rendimientos al tiempo *t-1* es:

$$\sigma_{12,t|t-1} = (1\text{-}\lambda)\sum_{i=1}^{T}\lambda^{i-1}(r_{1,t-i} - \bar{r}_{1,t|t-1})(r_{2,t-i} - \bar{r}_{2,t|t-1}). \qquad (3.10)$$

Por definición, el coeficiente de correlación entre los rendimientos de dos instrumentos diferentes, se calcula como el cociente de la covarianza de estos rendimientos y el producto de sus respectivas desviaciones estándar. Así, el coeficiente de correlación entre los rendimientos del instrumento 1 y del instrumento 2 al tiempo *t*, dados los datos disponibles al tiempo t-1 se calcula como:

$$\rho_{t|t-1} = \frac{\sigma_{12,t|t-t}}{\sigma_{1,t|t-1}\sigma_{2,t|t-1}},$$

entonces:

$$\rho_{12,t|t-1} = \frac{(1-\lambda)\sum_{i=1}^{T}\lambda^{i-1}(r_{1,t-i} - \bar{r}_{1,t|t-1})(r_{2,t-i} - \bar{r}_{2,t|t-1})}{\sqrt{(1-\lambda)\sum_{i=1}^{T}\lambda^{i-1}(r_{1,t-i} - \bar{r}_{1,t|t-1})^2}\sqrt{(1-\lambda)\sum_{i=1}^{T}\lambda^{i-1}(r_{2,t-i} - \bar{r}_{2,t|t-1})^2}}. \qquad (3.11)$$

Nótese que λ es desconocido y se tiene que estimar. A continuación se muestra uno de los métodos para obtener el factor de decaimiento λ.

3.5.4 FACTOR DE DECAIMIENTO λ

Dado que el rendimiento de un instrumento es una v.a. discreta, la varianza de estos rendimientos es por definición:

$$V(r_t)=E[(r_t\text{-}E(r_t))^2]=E\left[(r_t - \bar{r})^2\right]=\sum_{t=1}^{\infty}(r_t - \bar{r})^2 f(r_t),$$

donde $\sum_{t=1}^{\infty} f(r_t) = 1$.

En el caso de Promedios Móviles Exponenciales, $f(r_t)=(1\text{-}\lambda)\lambda^{t-1}$, ya que se utilizan datos anteriores con una ponderación que va perdiendo importancia en el tiempo. Entonces se debe cumplir que:

$$\sum_{t=1}^{\infty}(1-\lambda)\lambda^{t-1} = 1, \qquad 0<\lambda<1 \qquad (3.12)$$

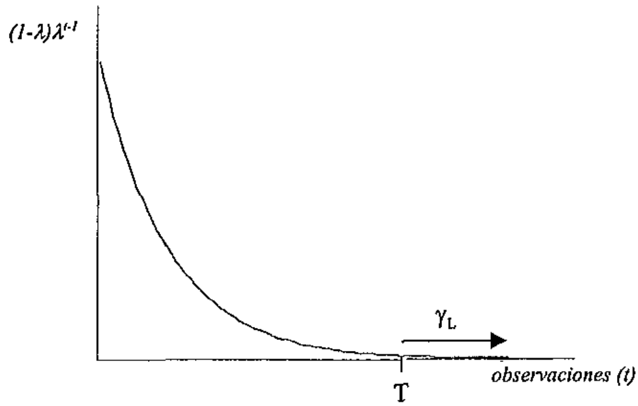
Pero esto implica que se cuente con datos infinitos, lo cual en la práctica no sucede. En la realidad se cuenta sólo con T datos de los rendimientos, debido a esto, se debe tener un **nivel de tolerancia (Υ_L)**. El nivel de tolerancia es el grado de error que se asume al estimar los momentos de los rendimientos, por ello debe tomarse muy pequeño (1%, .1%, etc.). En otras palabras, Υ_L es un error en el sentido de que se ignoran los datos a partir del T+1 en adelante para hacer las estimaciones de los parámetros de interés:

$$\begin{aligned}\gamma_L &= \sum_{t=T+1}^{\infty}(1-\lambda)\lambda^{t-1}, \\ &= (1\text{-}\lambda)\left(\lambda^T + \lambda^{T+1} + \lambda^{T+2} + \ldots\right), \\ &= (1\text{-}\lambda)\left[\lambda^T\left(1+\lambda+\lambda^2+\ldots\right)\right], \\ &= (1\text{-}\lambda)\,\lambda^T \sum_{t=1}^{\infty}\lambda^{t-1}.\end{aligned}$$

Así, por la ecuación (3.12) se obtiene que $\gamma_L = \lambda^T$ y resolviendo para λ:

$$\lambda = \exp\left(\frac{\ln(\gamma_L)}{T}\right) \quad 0<\lambda<1, \quad 0<\gamma_L<1. \qquad (3.13)$$

Esto quiere decir que el factor de decaimiento, el número de datos a analizar y el nivel de tolerancia se encuentran relacionados, por lo que si se fija un nivel de tolerancia y un cierto número de datos (ej. datos disponibles), se puede obtener el factor de decaimiento (ver gráfica 3.2).



Gráfica 3.2. Relación entre el factor de decaimiento (λ), el nivel de tolerancia (Υ_L) y el número de datos (T).

Al tomar en cuenta el factor de decaimiento, la suma de los ponderadores cuando se tienen T datos se convierte entonces en:

$$\sum_{t=1}^{T}(1-\lambda)\lambda^{t-1} = 1-\gamma_L .$$

3.6 MODELO PARA LOS RENDIMIENTOS DE UN PORTAFOLIO

Considere un portafolio compuesto de *n* instrumentos. Sea $r_{i,t}$ el log-rendimiento del activo *i* al tiempo *t*, w_i la fracción del portafolio invertida en el activo *i* y P_{t-1} el valor del portafolio un periodo antes. El valor del portafolio un periodo después, es decir, al tiempo *t* (P_t) es:

$$P_t = w_1 P_{t-1}\exp(r_{1,t}) + w_2 P_{t-1}\exp(r_{2,t}) + \ldots + w_n P_{t-1}\exp(r_{n,t}), \qquad (3.14)$$

donde $w_i P_{t-1}$ es la posición del portafolio invertida en el instrumento *i*.

El log-rendimiento del portafolio al tiempo *t*, dependerá de los log-rendimientos de los *n* instrumentos que contiene al tiempo *t*, los cuales se encuentran correlacionados. Tomando en cuenta esto se tiene que:

$$\begin{aligned} r_{1,t} &= \sigma_{1,t}\varepsilon_{1,t}, \\ r_{2,t} &= \sigma_{2,t}\varepsilon_{2,t}, \\ &\vdots \\ r_{n,t} &= \sigma_{n,t}\varepsilon_{n,t}, \end{aligned}$$

$$\text{con} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{n,t} \end{bmatrix} \sim N_n\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12,t} & \cdots & \rho_{1n,t} \\ \rho_{21,t} & 1 & \cdots & \rho_{2n,t} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{n1,t} & \rho_{n2,t} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right), \text{ es decir, } \varepsilon \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{C}_t);$$

donde $\mathbf{C}_t$ es la matriz de correlación del vector ε, cuya distribución se supone normal n-variada (N_n).

Así, dado que el log-rendimiento del portafolio al tiempo *t* con horizonte de un día se define como: $r_{port,t} = \ln(P_t / P_{t-1})$, éste se sustituye la ecuación (3.14) y al simplificar se obtiene el rendimiento compuesto continuamente del portafolio al tiempo *t*:

$$r_{port,t} = \ln(w_1\exp(r_{1,t}) + w_2\exp(r_{2,t}) + \ldots + w_n\exp(r_{n,t})) = \ln(\sum_{i=1}^{n} w_i \exp(r_{i,t})).$$

3.7 BENEFICIOS Y PROBLEMÁTICAS DEL VaR

Por último, se mencionan los principales beneficios y problemáticas del VaR en la administración de riesgos.

Los principales beneficios son:

- ✓ *Crea* un denominador común con el cual se pueden comparar actividades riesgosas en diversos mercados.

- ✓ *Cuantifica* el riesgo de manera global en el ámbito de toda la empresa, percibiendo a toda la firma como un gran portafolio de activos y pasivos con valores fluctuantes del mercado.
- ✓ *Beneficia* a cualquier institución expuesta al riesgo de mercado aunque no sea una institución financiera, ya que ayuda a controlar mejor estos riesgos al cuantificarlos. Además también ha sido usado para medir el riesgo crediticio; y hasta hace un par de años, se veía la posibilidad de medir también el riesgo operacional[15].
- ✓ *Informa* a los administradores o dueños de una empresa en una forma fácil de entender, la exposición total de la institución al riesgo de mercado.
- ✓ Al incorporar datos estadísticos, en específico intervalos de confianza, *permite* hacer aseveraciones acerca de la probabilidad de que ocurran ciertas pérdidas o ganancias potenciales.
- ✓ *Reconoce* efectos de diversificación del portafolio. Al tomar en cuenta la correlación entre los diferentes instrumentos que componen un portafolio, toma en cuenta esta diversificación, ya que se puede notar el efecto de cada interacción en el portafolio.
- ✓ *Ayuda* a llevar a cabo análisis continuos de las ganancias y pérdidas de las instituciones y por lo tanto, establecer límites a las exposiciones de los operadores[16] de una empresa en el mercado, decidiendo así, la mejor colocación de los recursos de capital de la institución. Esto es de suma importancia, porque ayuda a frenar a los operadores que de manera natural asumen riesgos "extra".
- ✓ *Permite* construir fondos de contingencia óptimos que permiten que la institución tenga liquidez.

Y las principales problemáticas del VaR son:

- ⌧ En la práctica, las distribuciones de los rendimientos poseen "colas" más pesadas que las de una normal, es decir, son leptocúrticas.
- ⌧ Una posible problemática para la empresa en el uso del VaR, es que los instrumentos que componen el portafolio de la empresa deben ser líquidos.
- ⌧ No es muy conveniente tomar sólo series históricas para estimar los parámetros del VaR, ya que es muy difícil prevenir así, posibles desplomes del mercado.

3.8 EQUIVALENCIA DEL TIEMPO (TIME AGGREGATION)

Para comparar los riesgos en diferentes horizontes, deben ponerse en periodos equivalentes, es decir, todos en términos de días, meses o el periodo que más conviene. Al método que permite hacer esta equivalencia se le conoce como **equivalencia del tiempo** (*time aggregation).*

Ej. Si se tuvieran datos diarios sobre los cuales se midió el VaR de un portafolio o instrumento y ahora se quisiera un horizonte de inversión de tres meses, se tendría que transformar la distribución diaria de los datos, a una distribución cuatrimestral (a menos que se contara con datos cuatrimestrales).

En general, para convertir horizontes diarios, mensuales, o cualquier otro horizonte a horizontes anuales (y viceversa), puede hacerse mediante las siguientes conversiones:

---

[15] Ver Wilson (1995) para mejor información.

[16] Los operadores son individuos autorizados por la BMV y por la CNBV, para realizar operaciones de compraventa en la BMV o a través de sistemas electrónicos.

$$\mu = \mu_{anual} \times T,$$
$$\sigma = \sigma_{anual} \times \sqrt{T}\,.$$

donde T es la equivalencia en años. Para datos mensuales se utiliza T=1/12 (12 meses tiene un año), para datos diarios T=1/252, suponiendo que los días de operación en un año fueran 252. En nuestro ejemplo T=1/63 (conversión de datos diarios a cuatrimestrales), suponiendo que en tres meses se tienen 63 días de operación.

Esta conversión o ajuste de tiempo es válida sólo si la cantidad de instrumentos no lineales en el portafolio es insignificante y si los rendimientos no están correlacionados en intervalos sucesivos de tiempo. Teóricamente, este supuesto es consistente en un mercado eficiente, donde el precio actual de un activo incluye toda la información relevante acerca de ese instrumento en particular; de esta manera, todos los cambios en los precios se deben a eventos que no pueden predecirse, es decir, los precios siguen una caminata aleatoria. En la realidad no sucede, pero se puede aproximar así.

Ej. Se obtuvo en el capítulo anterior que los rendimientos de la acción GMODELOC, tienen una media igual a *0.03071%* y una desviación estándar o volatilidad diaria de *3.59882%*. Si un inversionista quisiera saber ahora el rendimiento anual y no el diario de dicha acción, debido a que desea hacer una inversión en esta acción a un año, utilizaría las conversiones anteriores (suponiendo que los supuestos de la conversión se cumplen), obteniendo que los rendimientos de GMODELOC tienen una media anual de *7.73907%* y una volatilidad anual igual a *57.12950%*:

$$\mu_{anual} = 0.03071\% \times 252 = 7.73907\%$$
$$\sigma_{anual} = 3.59882\% \times \sqrt{252} = 57.12950\%$$

Capítulo 4

MÉTODOS PARA MEDIR EL VaR

Después de haber introducido el concepto de valor en riesgo, a continuación se mencionan brevemente los tres métodos más comunes para calcularlo: el método Varianza-Covarianza, el método de Simulación Histórica y el método de Monte Carlo[1].

4.1 MÉTODO VARIANZA-COVARIANZA

El **método Varianza-Covarianza**, también conocido como método de Correlación, es un método paramétrico que provee una aproximación local de los movimientos del precio de los activos que forman el portafolio. En este método, las desviaciones estándar y las correlaciones se obtienen de datos históricos de los componentes del portafolio (se pueden utilizar las estimaciones sugeridas por RiskMetrics). Así, el VaR se calcula con estas estimaciones de los parámetros de la distribución de los cambios en el precio del portafolio.

Los principales supuestos de este método son:

- El rendimiento de todos los instrumentos que componen el portafolio, se distribuye normal. Esto resulta conveniente dado que si el rendimiento de un portafolio es una combinación lineal de estas variables aleatorias normales, también se distribuye normal.
- Independencia en los rendimientos, es decir, la volatilidad para un horizonte k se estima como $\sqrt{k}\sigma$.
- Los instrumentos que compongan el portafolio deben ser lineales[2].

---

[1] Para una mayor referencia sobre estos métodos, ver Jorion (1995), J.P.Morgan (1996) , Down (1998) o Reed (1996) de la bibliografía.

[2] Un instrumento es lineal en el sentido de que existe linealidad entre el precio del instrumento y los factores de riesgo del mismo, entendiéndose como factores de riesgo a las variables fluctuantes que implican un riesgo en el precio del instrumento. Ej. Una acción es un instrumento lineal, ya que el factor de riesgo es su precio. En un bono con cupones, los factores de riesgo son los flujos de efectivo y la tasa de rendimiento del bono, por lo que se trata de un instrumento no lineal.

4.1.1 VaR DE UN ACTIVO

Ej. Considere un inversionista que tiene una acción de GMODELOC con valor de \$24.2 y desea acotar las posibles pérdidas que tendría al siguiente día (con un nivel de confianza del 95%), por una fluctuación en los rendimientos de dicha acción, bajo el supuesto de que estos rendimientos se distribuyen normal con media y varianza constantes. Para calcular las posibles pérdidas, se considera la serie histórica de los rendimientos diarios de la acción GMODELOC en el periodo del 1 Julio de 1998 al 23 de Noviembre del mismo año[3] (100 datos) y se determina su distribución de probabilidad[4]:

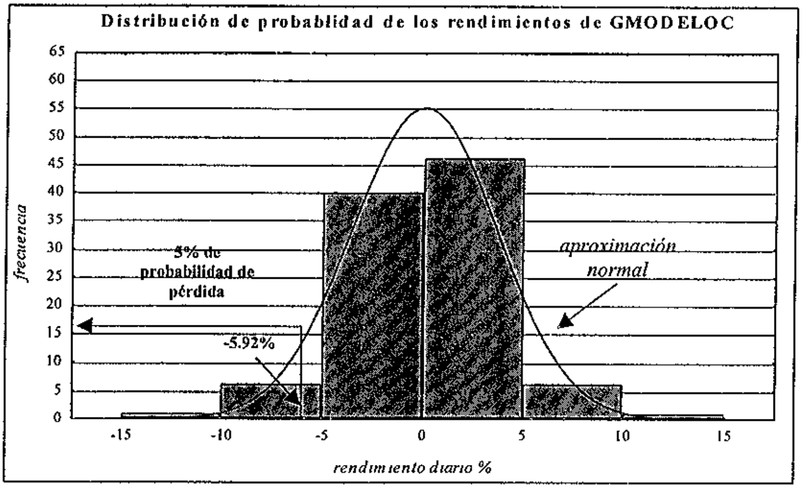
	GMODELOC
Fecha	*%Rendimiento (r_t)*
30 Jun '98	
1 Jul. '98	-0.65607
2 Jul. '98	-1.91699
3 Jul. '98	-5.02751
6 Jul. '98	2.47265
7 Jul. '98	3.552286
8 Jul. '98	1.861755
9 Jul. '98	-1,593659
10 Jul. '98	1.693659
⋮	⋮
23 Nov. '98	0.48899

Tabla 4.1. Rendimientos porcentuales compuestos continuamente de la acción GMODELOC.

(Siguiente página)

[3] Nota: Por cuestiones ejemplificativas, se considera este periodo y el método de promedios móviles para el cálculo de los estimadores, pero debe hacerse un análisis más exhaustivo para determinar el periodo de tiempo adecuado y necesario, así como buscar el mejor método de estimación de los parámetros involucrados.

[4] De aquí en adelante, para calcular la distribución de probabilidad de los rendimientos de cualquier instrumento (en este caso de GMODELOC), se hará un histograma en Excel o Statistica de los rendimientos porcentuales compuestos continuamente del instrumento (también llamados rendimientos logarítmicos).



GRÁFICA 4.1. Distribución de probabilidad de los rendimientos porcentuales diarios diarios de la acción GMODELOC del 1 de Julio al 23 de Nov. De 1998.

Con base en la distribución de probabilidad de los rendimientos de la acción, se puede determinar para un rendimiento dado, la probabilidad de observar un rendimiento más bajo. Dado que el inversionista elige un nivel de confianza del 95%, se busca el rendimiento tal que a su izquierda se encuentre el 5% de las observaciones, dicho de otra manera, se busca el cuantil del 5% en la distribución de los rendimientos de la acción.

Si $r_t \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $\gamma_t = \frac{r_t - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$. De esta manera, se puede obtener el percentil de la distribución de r_t, equivalente al 95% de confianza:

$$P(\gamma_t < -1.645) = .05,$$

sustituyendo γ_t :

$$P(\frac{r_t - \mu}{\sigma} < -1.645) = .05,$$

despejando r_t:

$$P(r_t < -1.645\sigma + \mu) = .05,$$

sustituyendo la media (.03071%) y la desviación estándar (3.59882%) diarias de los rendimientos de los precios de GMODELOC, calculadas en el capítulo dos se tiene que:

$$P(r_t < -5.88935) = .05.$$

Debido a que los datos son diarios, la media es muy pequeña por lo que podría ignorarse[5]. Al suponer que $\mu=0$, se obtiene:

$$P(r_t < -5.92006) = .05,$$

es decir, la probabilidad de que los rendimientos de GMODELOC disminuyan más de 5.92% es de .05 (ver gráfica 4.1)[6]. Si el precio de dicha acción el día de la valuación es de \$24.2, este resultado indica que el "peor" precio de la acción al tiempo t con un nivel de confianza del 95%, será de:

$$P_t^{95\%}=P_{t-1}(1\text{-}1.645\sigma)=24.2(1\text{-}.0592006)=\$22.76735,$$

en general [7],

$$P_t^{(1-\alpha)\%} = P_{t-1}\,[1\text{-}(q\times\sigma)], \qquad (4.1)$$

donde,

$P_t^{(1-\alpha)\%}$ = peor precio del instrumento al $(1\text{-}\alpha)\%$ de confianza,

P_{t-1} = precio del instrumento el día de la valuación,

q = cuantil correspondiente al nivel de confianza seleccionado de una distribución normal estándar[8],

σ = desviación estándar de los rendimientos del instrumento.

El valor en riesgo diario en pesos de la acción al 95% es la diferencia entre el precio el día de la valuación y el peor precio estimado para el día siguiente:

$$P_{t-1}\text{-}P_t^{95\%}=24.2\text{-}22.76735=1.43265.$$

Una forma equivalente de calcular el VaR (la más usada), es multiplicando directamente el precio de la acción (posición en la acción) por la desviación estándar de sus rendimientos y por el cuantil que represente el 95% de confianza:

$$VaR_{GMODELOC}=24.2\times1.645\times.035988=\$1.43265.$$

Si se tomara en cuenta la media de los rendimientos, el valor en riesgo de la acción sería de \$1.42522. Nótese que el resultado es muy parecido, por ello es que cuando los rendimientos son diarios, se estila no considerar su media en el cálculo del VaR:

$$VaR_{GMODELOC}=(24.2\times1.645\times.035988)\text{-}(24.2\times.000307)=\$1.42522.$$

---

[5] Dado que para el cálculo del VaR se asume que la media de los rendimientos es cero, su varianza se puede calcular también bajo este supuesto, pero en este trabajo se calculará tomando en cuenta la media para tener un mejor estimador de la varianza.

[6] El propósito de este trabajo no es demostrar la validez de los supuestos de cada uno de los métodos para medir el VaR, por lo que se asumirá que dichos supuestos se cumplen.

[7] Nótese que en la manera de calcular el peor precio del instrumento, está implícito el supuesto de que los instrumentos deben ser lineales. Si este no fuera el caso, no se puede obtener este precio simplemente multiplicando el precio el día de la valuación por $1\text{-}(q\times\sigma)$.

[8] El VaR siempre es positivo, por lo que el cuantil correspondiente al nivel de confianza elegido se usa positivo.

Formalizando, el valor en riesgo de un activo con un nivel de (1-α)% de confianza y en un horizonte determinado, suponiendo normalidad en los rendimientos del activo, es:

$$\mathbf{VaR = W_0 \times q \times \sigma,} \qquad \mathbf{(4.2)}$$

donde W_0 = valor de mercado inicial de la posición en el activo.

De forma equivalente, el VaR también puede calcularse como la diferencia entre el valor de mercado de la posición en el instrumento el día de la valuación, W_{t-1}, y su peor valor de mercado al tiempo *t* dado un nivel de confianza de (1-α)%, $W_t^{(1-\alpha)\%}$:

$$\text{VaR} = W_{t-1} - W_t^{(1-\alpha)\%},$$

donde $W_t^{(1-\alpha)\%} = W_{t-1}\exp(-q\times\sigma)$ y se puede aproximar[9] por $W_{t-1}(1-[q\times\sigma])$ como se hizo en la ecuación (4.1).

Es decir, si W_0 es el valor de mercado de un instrumento el día de la valuación, entonces el VaR de ese instrumento es:

$$\mathbf{VaR = W_0(1-\exp[-q\times\sigma]).} \qquad \mathbf{(4.3)}$$

En la práctica, se utiliza más la ecuación (4.2) para calcular el VaR por el método analítico.

4.1.2 VaR DE UN PORTAFOLIO

Ej. Considere ahora que un inversionista posee una acción de GMODELOC con valor de \$24.2 y otra acción de APASCO con valor de \$50.8 el día de la valuación. Este inversionista desea conocer las posibles pérdidas que tendría al siguiente día con un nivel de confianza del 95%, por una fluctuación en los rendimientos de ambas acciones, bajo el supuesto de que estos rendimientos se distribuyen normal con media y varianza constantes.

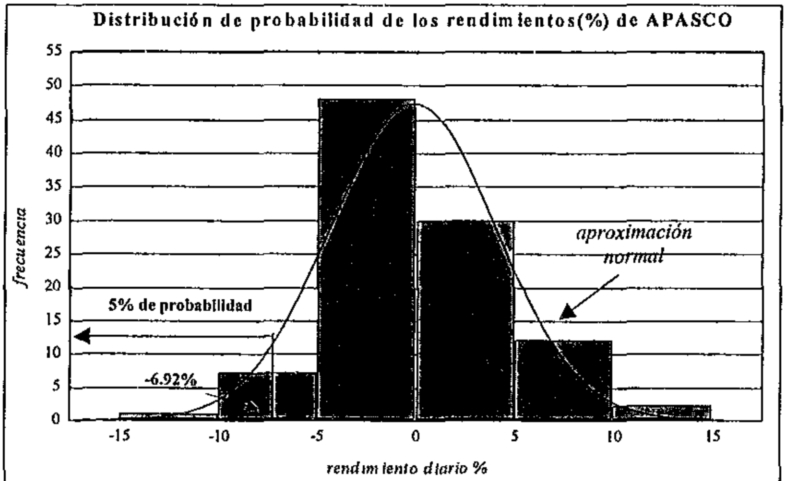
La serie histórica de los rendimientos diarios de la acción APASCO en el periodo del 1 Julio de 1998 al 23 de Noviembre del mismo año y su distribución de probabilidad, son las siguientes:

(Siguiente página)

[9] La expansión de Taylor de primer orden de f(X) alrededor de X_0 es: $f(X)\approx f(X_0)+f'(X_0)(X-X_0)$. Sea $X=q\times\sigma$ y $f(X)=\exp(-X)$, la expansión de Taylor de primer orden de f(X) alrededor de X_0 es entonces: $\exp(-X)\approx\exp(-X_0)-\exp(-X_0)(X-X_0)$. De este modo, si $X=q\times\sigma$ es cercano a $X_0=0$, el VaR de un instrumento puede calcularse como: VaR= $W_{t-1}\times q\times\sigma$.

	APASCO
Fecha	*%Rendimiento (r_t)*
30 Jun. '98	
1 Jul. '98	6.17480
2 Jul. '98	-0.99805
3 Jul. '98	1.76302
6 Jul. '98	-1.96084
7 Jul. '98	3.31091
8 Jul. '98	0.57306
9 Jul. '98	0.75901
10 Jul. '98	-0.18921
⋮	⋮
23 Nov. '98	6.30129

Tabla 4.2. Rendimientos porcentuales compuestos continuamente de la acción APASCO.



GRAFICA 4.2. Distribución de probabilidad de los rendimientos porcentuales diarios de la acción APASCO del 1 de Julio al 23 de Noviembre de 1998.

La desviación estándar de los rendimientos de APASCO (en base a la teoría de portafolios) es 4.1942%, por lo tanto su valor en riesgo no diversificado es:

$$VaR_{APASCO} = [1.645 \times .041942 \times 50.8] = \$3.50496,$$

y con anterioridad se calculó el valor en riesgo de GMODELOC:

$$VaR_{GMODELOC} = \$1.43265,$$

Para calcular el valor en riesgo del portafolio compuesto por una acción de GMODELOC y otra acción de APASCO, se necesita el coeficiente de correlación entre los rendimientos de ambas acciones, dicho coeficiente es 0.36801 (calculado en el capítulo anterior). Así, el valor en riesgo del portafolio es:

$$
\begin{aligned}
VaR_{port} &= \sqrt{VaR^2_{GMODELOC} + VaR^2_{APASCO} + 2\rho_{GMODELOC,APASCO} VaR_{GMODELOC} VaR_{APASCO}}\,, \\
&= \sqrt{(1.43265)^2 + (3.50496)^2 + 2(.36801)(1.43265)(3.50496)}\,, \\
&= \$4.24653.
\end{aligned}
$$

Esto indica que el portafolio no tendrá pérdidas potenciales mayores a \$4.24653, con un 95% de confianza y en un horizonte de un día. Nótese que la suma de las pérdidas potenciales de ambas acciones (\$4.93761=3.50496+1.43265), es mayor a la pérdida del portafolio que las contiene, esto debido al efecto de la diversificación, es decir, depende del coeficiente de correlación entre los rendimientos de las acciones.

De manera formal, el valor en riesgo de un portafolio compuesto de dos instrumentos es igual a:

$$VaR_{port} = \sqrt{VaR_i^2 + VaR_j^2 + 2\rho_{ij} VaR_i VaR_j}\,, \qquad (4.4)$$

donde,

VaR_i = valor en riesgo del instrumento i,
VaR_j = valor en riesgo del instrumento j,
ρ_{ij} = coeficiente de correlación entre los rendimientos de los instrumentos i y j.

Otra manera de calcular el VaR del portafolio es la ecuación (4.2), donde la desviación estándar del portafolio es igual a:

$$\sigma_{port} = (w_i^2\, \sigma_i^2 + w_j^2\, \sigma_j^2 + 2 w_i\, w_j\, \sigma_{ij})^{1/2},$$

con w_i = peso del instrumento i en el portafolio, w_j = peso del instrumento j en el portafolio.

Ambas formas de calcular el valor en riesgo del portafolio son equivalentes, dado que:

$$
\begin{aligned}
VaR_{port} &= W_0 \times q \times \sigma_{port}, \\
&= W_0 \times q \times \sqrt{w_i^2\sigma_i^2 + w_j^2\sigma_j^2 + 2 w_i w_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j}\ ^{10}, \\
&= \sqrt{(W_0^2 \times q^2 \times w_i^2\sigma_i^2) + (W_0^2 \times q^2 \times w_j^2\sigma_j^2) + 2\rho_{ij}(W_0^2 \times q^2 \times w_i w_j \sigma_i\sigma_j)}\,, \\
&= \sqrt{VaR_i^2 + VaR_j^2 + 2\rho_{ij} VaR_i VaR_j}\,.
\end{aligned}
$$

Es decir, el riesgo del portafolio es una combinación lineal de los riesgos de los instrumentos que lo componen. Esto es sumamente útil, ya que el VaR del portafolio es un múltiplo de su desviación estándar, y la desviación estándar del portafolio es a su vez una combinación lineal de los rendimientos

[10] Recuerde que $\sigma_{12} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$

de los instrumentos que lo conforman. Así, dado que dichos rendimientos siguen una distribución normal, entonces también el rendimiento del portafolio será normal.

Se mencionó que el efecto de diversificación depende del coeficiente de correlación entre los instrumentos del portafolio, esto es:

$$\begin{array}{lcll} VaR_{port} & \leq & VaR_i + VaR_j & \Leftrightarrow \\ \sqrt{VaR_i^2 + VaR_j^2 + 2\rho_{ij} VaR_i VaR_j} & \leq & VaR_i + VaR_j & \Leftrightarrow \\ VaR_i^2 + VaR_j^2 + 2\rho_{ij} VaR_i VaR_j & \leq & (VaR_i + VaR_j)^2 & , \end{array}$$

donde la igualdad sólo se da cuando $\rho=1$.

Nótese que entre más cercano se encuentre ρ_{ij} de menos uno, es decir, entre más correlacionados inversamente se encuentren los rendimientos del instrumento i y el j, más pequeño será el VaR del portafolio comparado con la suma de VaR_i con VaR_j. Además, es claro que el VaR del portafolio será igual a la suma de los valores en riesgo de los instrumentos i y j, cuando el coeficiente de correlación entre los rendimientos de dichos instrumentos sea igual a uno, esto es, cuando estén perfectamente correlacionados.

Cabe destacar que cuando el coeficiente de correlación tome su mínimo valor, es decir, cuando sea –1, el valor en riesgo del portafolio será el valor absoluto de la diferencia del VaR de ambos instrumentos: $\left|VaR_i - VaR_j\right|$, es decir, hay una total cobertura. Y cuando dicho coeficiente de correlación sea igual a cero, el VaR del portafolio será simplemente $\sqrt{VaR_i^2 + VaR_j^2}$.

En forma general, el valor en riesgo de un portafolio de n activos se calcula como:

$$\mathbf{VaR_{port}} = \sqrt{\mathbf{VCV'}}, \qquad (4.5)$$

donde $\mathbf{V}=[VaR_1 \;\; VaR_2 \;\; \ldots \;\; VaR_n]$ es el vector de los valores en riesgo de los instrumentos del portafolio y

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

es la matriz de correlación de los rendimientos de los instrumentos del portafolio.

También puede expresarse como:

$$\mathbf{VaR_{port}} = \mathbf{W_0} \times \mathbf{q} \times \sigma_{port},$$

donde,

$$\sigma_{\text{port}} = \left(\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 & \sigma_{12,t} & \cdots & \sigma_{n,t} \\ \sigma_{21,t} & \sigma_{2,t}^2 & \cdots & \sigma_{2n,t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1,t} & \sigma_{n2,t} & \cdots & \sigma_{n,t}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \right)^{1/2} = \left(\mathbf{w} \sum \mathbf{w}' \right)^{1/2}$$

4.1.3 VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL MÉTODO ANALÍTICO

Pero como cualquier método, el método Varianza-Covarianza tiene sus pros y sus contras. A continuación se mencionan sus principales ventajas:

- ✓ Para portafolios grandes sin opciones como un factor dominante, este método provee mediciones adecuadas, rápidas y eficientes del riesgo de mercado y en consecuencia, del VaR.
- ✓ Computacionalmente es fácil de implementar y no es demasiado costoso para portafolios no muy grandes. Debido a esto, algunas veces para instrumentos no lineales se utiliza este método con una aproximación conocida como aproximación Delta-Normal y si además de la no linealidad, se cree que la suposición de normalidad es inapropiada, se puede utilizar una aproximación conocida como aproximación Delta-Gamma[11].

Las desventajas de este método son las siguientes:

- ⌧ Como todos los métodos que utilizan series históricas, este método cuantifica pobremente la posibilidad de que se presenten circunstancias inusuales o extremas, como desplomes de los mercados, crisis accionarias, fuertes devaluaciones del tipo de cambio, etc. Aunque esta deficiencia puede mejorarse si se utiliza un buen estimador de la volatilidad.
- ⌧ El segundo problema de este método es la existencia de "colas" más pesadas en la distribución de los rendimientos de la mayoría de los instrumentos financieros, que las de una distribución normal. Con la presencia de estas colas, el modelo subestima la presencia de datos aberrantes o "outliers" y por lo tanto del VaR.
- ⌧ Dado que los portafolios son combinaciones lineales de activos, el método varianza-covarianza es fundamentalmente lineal, por lo que no mide de manera adecuada el riesgo de instrumentos no lineales como las opciones.

4.2 MÉTODO DE SIMULACIÓN HISTÓRICA

Los métodos de simulación se basan en la revaluación de un portafolio de instrumentos bajo diferentes escenarios. La forma en que se generan dichos escenarios, varía de acuerdo a los modelos que se utilizan en los diferentes métodos de simulación. En este caso se verán el método de Simulación Histórica y el método de Monte Carlo, como alternativas para calcular el valor en riesgo de un portafolio.

---

[11] La aproximación Delta-Normal trabaja con una aproximación lineal para calcular el VaR, es decir, es de primer orden. Esto suponiendo que la no linealidad de la posición es lo suficientemente limitada como para ignorarse y obtener una buena estimación del VaR. En el caso de la aproximación Delta-Gamma, se obtiene una aproximación de segundo orden y junto con la aproximación Delta-Normal, se obtiene el VaR. Para una mayor referencia sobre la aplicación de estas aproximaciones, ver Jorion (1995) o Dowd (1998).

En el **método de Simulación Histórica** se calculan las pérdidas potenciales de un portafolio, utilizando la experiencia de los rendimientos observados en cierto periodo de tiempo de los instrumentos que lo componen y revaluando para cada punto de la trayectoria histórica, el valor del portafolio[12].

El único supuesto del método de Simulación Histórica se refiere a que el pasado describe adecuadamente los escenarios futuros de los activos simulados.

4.2.1 CÁLCULO DEL VALOR EN RIESGO

Ej. Un inversionista cuenta con dos series históricas compuestas de 101 datos cada una, de los precios de la acción GMODELOC y APASCO del 30 de Junio de 1998 al 23 de Noviembre del mismo año. Al precio de la acción GMODELOC y de la acción APASCO correspondiente a la observación histórica κ de la serie, se le denotará como $P_{GMODELOC,-\kappa}$ y $P_{APASCO,-\kappa}$, respectivamente[13]. Por ejemplo $P_{APASCO,-1}$ es el precio histórico más reciente de la serie con la que se cuenta de la acción APASCO.

		APASCO	GMODELOC
$-\kappa$	*Fecha*	$P_{APASCO,-\kappa}$	$P_{GMODELOC,-\kappa}$
-101	30 Jun. '98	47.100	19.880
-100	1 Jul. '98	50.100	19.750
-99	2 Jul. '98	50.600	19.375
-98	3 Jul. '98	51.500	18.425
-97	6 Jul. '98	50.500	17.975
⋮	⋮	⋮	⋮
-5	16 Nov. '98	35.700	19.900
-4	17 Nov. '98	34.200	19.300
-3	18 Nov. '98	36.800	21.200
-2	19 Nov. '98	36.900	20.400
-1	23 Nov. '98	39.300	20.500

Tabla 4.3. Precios históricos de las acciones GMODELOC y APASCO del 30 de Junio de 1998 al 23 de noviembre del mismo año.

De esta manera, $P_{GMODELOC,0}$ y $P_{APASCO,0}$ son respectivamente, los precios de la acción GMODELOC y APASCO en el momento de la valuación.

Suponga que un inversionista desea conocer el valor en riesgo de un portafolio que contiene una acción de GMODELOC con valor de \$24.2 y una acción de APASCO con valor de \$50.8 el día de la valuación, con un horizonte de un día y un nivel de confianza del 95%. Para ello decide aplicar el método de Simulación Histórica, por lo que utilizará las series con las que cuenta en ese momento.

Lo primero que debe hacer es obtener los cambios observados en los precios de las acciones, es decir, sus rendimientos. En la siguiente tabla se muestran los rendimientos absolutos de ambas

[12] Para una mejor referencia sobre este método, ver Leong (1996) o Smithson (1996) de la bibliografía.

[13] Se le pone signo negativo a κ para diferenciar al dato histórico ($-\kappa$) del dato simulado (κ).

acciones, los cuales se denotarán como $\Delta P_{i,-\kappa}$ con i=GMODELOC, APASCO. Estos rendimientos se calculan como:

$$\Delta P_{APASCO,-\kappa} = \mathrm{P}_{\mathrm{APASCO},-\kappa} - \mathrm{P}_{\mathrm{APASCO},-\kappa-1} \;\; \text{y} \;\; \Delta P_{GMODELOC,-\kappa} = \mathrm{P}_{\mathrm{GMODELOC},-\kappa} - \mathrm{P}_{\mathrm{GMODELOC},-\kappa-1}.$$

Nótese que ahora las series históricas de los rendimientos de las acciones cuentan sólo con 100 datos.

		CAMBIOS EN LOS PRECIOS	
-κ	Fecha	$\Delta P_{APASCO,-\kappa}$	$\Delta P_{GMODELOC,-\kappa}$
-100	1 Jul. '98	-3	0.13
-99	2 Jul. '98	0.5	-0.375
-98	3 Jul. '98	0.9	-0.95
-97	6 Jul. '98	-1	-0.45
:	:	:	:
-5	16 Nov. '98	0	0
-4	17 Nov. '98	-1.5	0.6
-3	18 Nov. '98	2.6	1.9
-2	19 Nov. '98	0.1	0.8
-1	23 Nov. '98	2.4	0.1

Tabla 4.4. Cambios absolutos en los precios históricos de las acciones GMODELOC y APASCO.

Después de haber obtenido los rendimientos de las acciones, el siguiente paso es calcular sus precios hipotéticos futuros, es decir, simular las trayectorias que seguirán los precios. Debido a que se tienen series de rendimientos compuestas de 100 datos cada una, se simulan 100 trayectorias de los precios de cada una de las acciones.

Los precios hipotéticos de la acción *i* para cada escenario futuro κ, con $\kappa = 1,...,100$; se calculan como:

$$\mathrm{P}^{*}_{i,\kappa} = \mathrm{P}_{i,0} + \Delta P_{i,-\kappa} \qquad \text{con i=GMODELOC, APASCO;}$$

donde,

$\mathrm{P}_{i,0}$ = precio actual de la acción *i*,

$\Delta P_{i,-\kappa}$ = cambio en el precio histórico κ de la acción *i*.

En la Tabla 4.5 se muestran los 100 precios posibles de ambas acciones, para el día siguiente de la valuación:

	APASCO	GMODELOC
κ	$P^*_{APASCO,\kappa}$	$P^*_{GMODELOC,\kappa}$
1	50.8+2.4=*53.2*	24.2+0.1=*24.3*
2	50.8+0.1=*50.9*	24.2-0.8=*23.4*
3	50.8+2.6=*53.4*	24.2+1.9=*26.1*
4	50.8-1.5=*49.3*	24.2-0.6=*23.6*
5	50.8+0=*50.8*	24.2-0=*24.2*
⋮	⋮	⋮
97	50.8-1=*49.8*	24.2-0.45=*23.75*
98	50.8+0.9=*51.7*	24.2-0.95=*23.25*
99	50.8+0.5=*51.3*	24.2-0.375=*23.825*
100	50.8+3=*53.8*	24.2-0.13=*24.07*

Tabla 4.5. Precios simulados de las acciones GMODELOC y APASCO para el día siguiente de la valuación.

Con base a estos precios, se calcula el valor hipotético del portafolio compuesto por una acción de GMODELOC y una acción de APASCO (composición del portafolio el día de la valuación), como:

$$P^*_{port,\kappa} = (1 \times P^*_{GMODELOC,\kappa}) + (1 \times P^*_{APASCO,\kappa}),$$

donde el valor inicial del portafolio se calcula como:

$$P_{port,0} = (1 \times P_{GMODELOC,0}) + (1 \times P_{APASCO,0}),$$

y dado que los precios de GMODELOC y APASCO el día de la valuación son \$50.8 y \$24.2, el precio actual del portafolio es:

$$P_{port,0} = 24.2 + 50.8 = \$75.$$

Después de calcular el valor del portafolio para cada uno de los precios simulados, el siguiente paso es calcular los cambios en el valor del portafolio hipotético, en base a la siguiente fórmula:

$$R_{port,\kappa} = \frac{\left(P^*_{port,\kappa} - P_{port,0}\right)}{P_{port,0}}.$$

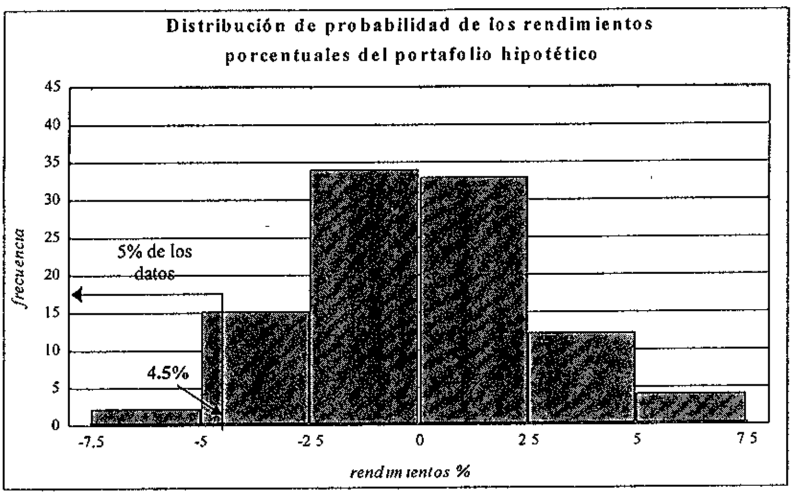
Ahora, se ordenan los rendimientos del portafolio hipotético ($R_{port,\kappa}$) de menor a mayor para obtener su distribución de probabilidad y se busca el dato que represente el 95% de confianza.

El valor del portafolio para cada escenario κ, así como el cambio en dicho valor se muestran en la siguiente tabla:

κ	$P^*_{port,\kappa}$	$R_{port,\kappa}$ (sin ordenar)	$R_{port,\kappa}$ (ordenados)
0	75		
1	77.5	0.0333	-0.0587
2	74.3	-0.0093	-0.0510
3	79.5	0.0600	-0.0477
4	72.9	-0.0280	-0.0457
5	75	0.0000	-0.0450
⋮	⋮	⋮	⋮
96	77.35	0.0313	0.0430
97	73.55	-0.0193	0.0503
98	74.95	-0.0007	0.0547
99	75.125	0.0017	0.0590
100	77.87	0.0383	0.0600

Tabla 4.6. Valores hipotéticos del portafolio y sus respectivos cambios para cada escenario κ.

Como se cuenta con 100 datos, el cuantil buscado es -.0450, es decir, el quinto dato. Esto quiere decir que el valor de mercado del portafolio no disminuirá más de 4.5% con un 95% de confianza con horizonte de un día.



GRÁFICA 4.3. Distribución de probabilidad de los rendimientos diarios porcentuales del portafolio hipotético compuesto por una acción de APASCO y una acción de GMODELOC.

Dado que el valor de mercado del portafolio el día de la valuación es de \$75, el resultado anterior indica que el VaR al 95% al día siguiente es de \$3.375:

$$VaR_{port}=.0450\times 75=\$3.375.$$

Es decir, se espera que a lo más, el valor del portafolio actual compuesto por una acción de GMODELOC y una acción de APASCO, disminuya $3.375. Anteriormente se había obtenido por el método de Varianza-Covarianza, que el VaR de este mismo portafolio era de $4.2465, es decir, si se toma en cuenta la verdadera distribución histórica de los rendimientos en lugar de suponer normalidad, el valor en riesgo calculado por el método de Simulación Histórica, da una mejor estimación de las posibles pérdidas potenciales del portafolio.

De manera formal, los pasos a seguir para calcular el valor en riesgo de un portafolio compuesto de n instrumentos, con un nivel de confianza y un horizonte de un día[14] mediante el método de Simulación Histórica son:

a) Obtener los cambios observados en los precios de las acciones que compongan el portafolio, en base a N observaciones históricas como:

$$\Delta P_{i,-\kappa} = P_{i,-\kappa} - P_{i,-\kappa-1} \quad \text{con } i=1, \ldots, n \text{ y } \kappa=1,\ldots,N;$$

donde $P_{i,-\kappa}$ es el precio histórico κ de la acción i.

b) Calcular los precios futuros hipotéticos de los activos que componen el portafolio. Los precios futuros hipotéticos del activo i, en el escenario κ se obtienen aplicando cambios históricos en los precios, al nivel actual de precios:

$$P^*_{i,\kappa} = P_{i,0} + \Delta P_{i,-\kappa} \quad \text{con } i=1,\ldots,n \text{ y } \kappa=1,\ldots,N;$$

donde,

$P_{i,0}$ = precio actual de la acción i,
$\Delta P_{i,-\kappa}$ = cambio en el precio histórico κ de la acción i.

c) En base a los precios simulados se obtiene el valor hipotético del portafolio compuesto de n instrumentos para cada escenario futuro κ, $P^*_{port,\kappa}$, aplicando las ponderaciones actuales que se tienen en cada uno de los activos del portafolio:

$$P^*_{port,\kappa} = \sum_{i=1}^{n} x_i P^*_{i,\kappa} \qquad \text{con } \kappa=1,\ldots,N;$$

donde,

x_i = factor de ponderación actual del activo i,
$P^*_{i,\kappa}$ = precio hipotético del instrumento i en el escenario κ,

[14] Si se desea cualquier otro horizonte se sigue el mismo procedimiento, pero los datos históricos deben corresponder al horizonte en el que se desea calcular el VaR. Por ejemplo, si el horizonte es de una semana, entonces los datos deben ser semanales.

$$R_{port,\kappa} = \frac{\left(P^*_{port,\kappa} - P_{port,0}\right)}{P_{port,0}} \qquad \text{con } \kappa=1,\ldots,N;$$

donde $P_{port,0}$ es el valor actual del portafolio.

d) Finalmente, se ordenan los rendimientos anteriores de menor a mayor y se identifica el cuantil correspondiente al (1-α)%. Si dicho cuantil es $R^{(1-\alpha)\%}_{port,\kappa}$, el valor en riesgo al (1-α)% se calcula como:

$$VaR_{port} = R^{(1-\alpha)\%}_{port,\kappa} \times W_0,$$

donde W_0 es el valor inicial del portafolio, denotado anteriormente como $P_{port,0}$.

En resumen, el inversionista estima la distribución de los cambios en el valor actual del portafolio en el horizonte deseado y posteriormente determina cuál sería el valor del portafolio en ese periodo de tiempo.

4.2.2 VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL MÉTODO DE SIMULACIÓN HISTÓRICA

Esta medición esta sujeta a errores de estimación, ya que el VaR es una estimación estadística y puede haber un tamaño de muestra muy pequeño, por ello, se necesita tener la posibilidad de adquirir con facilidad más datos observados (al menos 100), del comportamiento de los precios.

Algunas de las ventajas más importantes del método de Simulación Histórica son:

- ✓ Permite no linealidades en el portafolio, es decir, el portafolio puede contener instrumentos no lineales y/o lineales.
- ✓ Este método captura la distribución no-normal de los rendimientos de los instrumentos del portafolio de inversión observada en el pasado y por lo tanto, cuantifica las colas pesadas de esta distribución.
- ✓ Debido a que en los rendimientos simulados está implícita la volatilidad y correlación entre los rendimientos, no es necesario estimar parámetro alguno que los cuantifique.

Pero también cuenta con algunas desventajas:

- ⌧ Utiliza series de rendimientos históricos de los instrumentos, para generar las posibles trayectorias que seguirán éstos, por lo que confía en su comportamiento pasado para predecir de alguna manera, su comportamiento futuro.
- ⌧ Al igual que los otros métodos, con portafolios grandes su valuación diaria resulta lenta, costosa e inconveniente, debido a que el portafolio de inversión debe ser revaluado.
- ⌧ En su desarrollo, este método supone que los días históricos a partir de los cuales se generan las trayectorias, contienen todos los posibles rendimientos, por lo que si el periodo muestreado ignora características de la distribución, el método estará sesgado. Más aún, no identifica con claridad en qué periodo de volatilidad se encuentra el portafolio, ya que incorpora tanto periodos de volatilidad alta como de volatilidad baja, con la misma probabilidad si la muestra está bien balanceada.

4.3 MÉTODO DE SIMULACIÓN DE MONTE CARLO

Mientras que el método de Simulación Histórica se basa en datos históricos para simular diferentes escenarios de rendimientos de un instrumento o portafolio, la Simulación de Monte Carlo también conocida como Monte Carlo estructurado o Simulación Estocástica, genera diferentes escenarios de rendimientos de un instrumento o portafolio con base a un proceso estocástico, por lo que cubre un mayor rango de valores posibles de la variable o variables financieras estudiadas[15].

Este método consta principalmente de dos pasos:

1. Se especifica un proceso estocástico para las variables financieras involucradas, así como los parámetros de dicho proceso, por ejemplo, las varianzas y las correlaciones de los rendimientos de los instrumentos estudiados, las cuales pueden obtenerse mediante datos históricos.
2. Se simulan senderos o trayectorias de precios "ficticios" para todas las variables de interés en un horizonte determinado, y con el horizonte considerado se valúa el valor de mercado del portafolio para cada escenario o trayectoria. Por medio de estas simulaciones se obtiene la distribución de los rendimientos o de los precios del portafolio y se calcula su VaR. La calidad de su estimación, dependerá de qué tan cerca el modelo estocástico elegido se acerque a la realidad del mercado.

4.3.1 SIMULACIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Cuando sólo hay una variable de interés, es decir, se tiene un instrumento y su precio depende solamente de un factor de riesgo, interesa predecir el comportamiento de dicho factor en cierto horizonte de tiempo.

Considerando un horizonte de t días, supóngase que el precio de un instrumento dentro de t días se modela mediante el siguiente modelo estocástico:

$$P_t=P_0 \exp(\sigma \sqrt{t}\ y), \qquad (4.6)$$

donde,

P_0 = precio actual del instrumento,
σ = volatilidad diaria estimada de los rendimientos del factor de riesgo del instrumento,
y = variable aleatoria normal estándar, es decir, $y \sim N(0,1)$.

Es decir, el precio del instrumento en el horizonte predeterminado será igual al precio inicial multiplicado por una tasa instantánea que depende de la variable aleatoria y normal estándar y de la volatilidad de los rendimientos del instrumento. De esta manera, aplicando logaritmo natural a la ecuación (4.6) y generando una v.a y, se obtiene el primer rendimiento simulado para el horizonte de t días:

$$\ln(P_t) = \ln(P_0) + \sigma \sqrt{t}\ y,$$
$$\Rightarrow \ln(P_t) - \ln(P_0) = \sigma \sqrt{t}\ y,$$

[15] La diferencia concreta entre ambos métodos radica en que el de Simulación Histórica es totalmente no paramétrico, es decir, no hace supuestos acerca de la distribución de los rendimientos. En cambio, el método de Monte Carlo descansa en supuestos distribucionales como se verá más adelante.

por lo tanto,

$$r_t = \sigma\ \sqrt{t}\ y = z, \qquad z \sim N(0, \sigma^2 t)^{16}. \qquad (4.6)$$

Finalmente, se dice entonces que el precio del instrumento a t días (P_t) sigue una distribución lognormal con media cero y varianza $\sigma^2 t$.

Por ejemplo: Suponga un inversionista que posee una acción de GMODELOC con valor de \$24.2 y desea estimar el VaR de la acción con un 95% de confianza y horizonte de un día por el método de Monte Carlo. En el caso de una acción, el factor de riesgo es el precio de la acción, por lo que es de interés para el inversionista simular los rendimientos de la acción para el día siguiente y con base en los cuantiles de los datos simulados para estos rendimientos, se calcula el valor en riesgo de la acción. Como el horizonte es de un día, el precio de la acción se modela como:

$$P_t = P_{t-1}\exp(\sigma y),$$

donde,

P_{t-1} = precio de la acción en el día t-1,
σ = volatilidad diaria estimada de los rendimientos en el precio de la acción[17],
y = variable aleatoria normal estándar, es decir, $y \sim N(0,1)$.

De esta manera, los rendimientos logarítmicos de la acción se simularán como:

$$r_t = \sigma\ y = z, \qquad z \sim N(0, \sigma^2).$$

4.3.1.1 GENERACIÓN DE POSIBLES ESCENARIOS

Para simular una trayectoria de rendimientos para *T* días de un instrumento *i* en un horizonte determinado, se requiere generar una cadena de v.a normales estándar $(y_{i\kappa 1}\ \ y_{i\kappa 2}\ \ldots\ y_{i\kappa T})$, con κ=1,...,N. Así, se generarán tantas cadenas de variables aleatorias para el instrumento *i*, como escenarios se deseen; para que con ello, se obtengan los *N* escenarios deseados a T días del instrumento al cual se le medirá el VaR.

Para construir varias trayectorias con horizonte de un día, la idea general de la simulación se concreta a generar U_κ números aleatorios uniformes entre cero y uno (la cantidad de números aleatorios a generar dependerá del número de escenarios (κ=1,...,N) que se deseen simular para los rendimientos de los precios del instrumento en un día), y a partir de éstos, obtener las variables aleatorias normales estándar (y_κ) que son la pieza clave de la simulación de los rendimientos. Después de haber obtenido las *N* variables aleatorias normales, se calculan entonces los *N* escenarios para los rendimientos del instrumento como:

$$z_\kappa = \sigma\ y_\kappa, \qquad \kappa = 1,\ldots,N;$$

---

[16] $E(z) = E(\sigma\sqrt{t}\ y) = \sigma\sqrt{t}\ E(y) = 0$, debido a que $E(y)=0$ y $V(z) = V(\sigma\sqrt{t}\ y) = \sigma^2 t V(y) = \sigma^2 t$, debido a que $V(y)=1$, de esta manera, $z \sim N(0,\sigma^2 t)$. La estimación de σ^2 dependerá del análisis de los datos.

[17] Para fines de este ejercicio al igual que en los anteriores ejercicios, se utiliza el estimador de la varianza por Promedios Móviles.

donde σ es la volatilidad estimada de los rendimientos para el día siguiente.

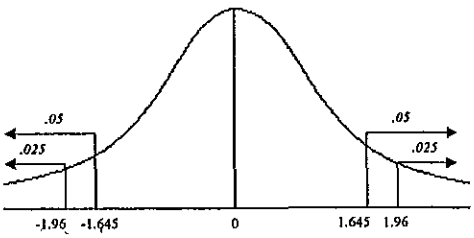
Si se desea conocer el VaR en términos de precios y no de rendimientos, entonces se calculan los precios simulados de instrumentos lineales como las acciones de la siguiente manera:

$$P_\kappa = P_{t-1}\exp(z_\kappa), \qquad \kappa=1,\ldots,N;$$

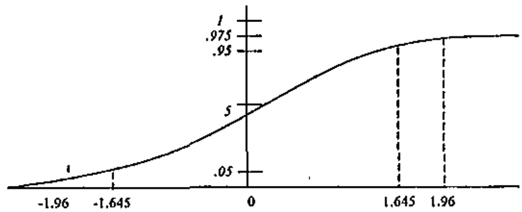
donde,

P_κ = escenario κ para el precio del instrumento al día siguiente,
P_{t-1} = precio del instrumento el día de la valuación,
z_κ = escenario κ para el rendimiento del instrumento al día siguiente.

Para transformar v.a uniformes a v.a normales, se utiliza el método de inversión que usa la función de distribución acumulada (f.d.a) de la normal estándar, la cual tiene imagen entre 0 y 1, y es monótona creciente (ver gráficas).



Función de densidad de probabilidad de una variable Y distribuida normal estándar $f_Y(Y)$.



Función de distribución acumulada de una variable Y distribuida normal estándar $F_Y(Y)=\Phi(Y)$.

De esta manera, como el número uniforme está definido entre 0 y 1, la función de distribución puede ser invertida para generar el número aleatorio deseado[18]:

$$U=\Phi(Y), \quad \text{lo que implica que,} \quad Y=\Phi^{-1}(U).$$

Siguiendo con el ejemplo, se estimó con anterioridad la volatilidad de los rendimientos de la acción GMODELOC obteniendo que es igual a 0.035988. Así, utilizando la metodología anterior de simulación, en la siguiente tabla se muestran los números aleatorios normales estándar (y_κ) generados a partir de 1,000 números aleatorios[19] uniformes (U_κ) y los 1,000 escenarios generados para los rendimientos y para los precios de la acción al día siguiente de la valuación, a partir de estos números aleatorios:

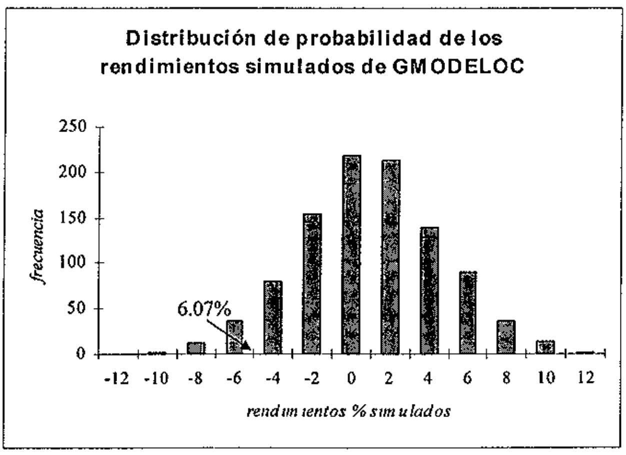
[18] Se dice que un generador de números pseudoaleatorios uniformes es de buena calidad, si genera series no autocorrelacionadas. En este trabajo no se discutirá la bondad de este generador, pero es un asunto que se debe tomar en cuenta.

[19] Los números aleatorios se generaron en Excel con el comando ALEATORIO() y las variables aleatorias Y, se obtuvieron con la función DIST.NORM.ESTAND.INV(probabilidad), en donde probabilidad=ALEATORIO().

Escenario k	U_k	y_k	Rendimientos simulados z_k=0.035988 y_k	Precios simulados P_k=24.2 exp(z_k)
1	0.14293	-1.06725	-0.03841	23.28814
2	0.35956	-0.35963	-0.01294	23.88881
3	0.47485	-0.06307	-0.00227	24.14513
:	:	:	:	:
50	0.27299	-0.60379	-0.02173	23.67982
51	0.25629	-0.65482	-0.02357	23.63638
52	0.25609	-0.65545	-0.02359	23.63584
:	:	:	:	:
998	0.60358	0.26264	0.00945	24.42982
999	0.01923	-2.06991	-0.07449	22.46279
1,000	0.07310	-1.45307	-0.05229	22.96702

Tabla 4.7. Generación de 1,000 escenarios para los rendimientos y los precios de la acción GMODELOC para el día siguiente.

Para calcular el VaR en pesos de esta acción, se ordenan los rendimientos simulados de menor a mayor y de ahí, se escoge el escenario que represente el cuantil al 95% de confianza. Este cuantil será el dato número 50, ya que se generaron 1,000 trayectorias y dado que los rendimientos simulados por Monte Carlo se calcularon tomando en cuenta la volatilidad histórica de los rendimientos de la acción, el dato 50 representará la peor disminución que tendrá el precio de la acción con un 95% de confianza. Dicho cuantil es el "peor" rendimiento que puede llegar a tener esta acción con una confianza del 95% y su valor es de -.0607428%.



GRÁFICA 4.4. Distribución de probabilidad de los rendimientos porcentuales simulados de la acción GMODELOC.

El "peor" precio o el precio más bajo que tendrá la acción el día de mañana con un 95% de confianza será entonces:

$$P^{95\%}_{GMODELOC} = 24.2\exp(-.0607428) = \$22.77378.$$

Es decir, el VaR diario de la acción en pesos es $1.42622, lo cual indica que con un nivel de confianza del 95%, el valor de la acción GMODELOC no disminuirá más allá de $1.42622 al día siguiente:

$$P_{t-1} - P^{95\%}_{GMODELOC} = 24.2 - 22.77378 = 1.42622.$$

Con anterioridad se había calculado el valor en riesgo de esta acción mediante el método de Varianza-Covarianza y se obtuvo que $VaR_{GMODELOC}$=.0592006×24.2=$1.43265. Nótese que no existe una gran diferencia en los resultados. Esto se debe a que el método de Varianza-Covarianza supone normalidad en la distribución de los rendimientos y el método de Monte Carlo también lo supone al generar variables aleatorias normales estándar. Sólo se verán grandes diferencias entre estos dos métodos, cuando se estime el VaR de instrumentos no lineales, es decir, entre menos lineales sean los instrumentos, el valor en riesgo obtenido con el método de Monte Carlo diferirá más del análisis hecho con el método Varianza-Covarianza.

4.3.2 SIMULACIÓN DE VARIAS VARIABLES ALEATORIAS RELACIONADAS

Se necesita la simulación de varias variables aleatorias relacionadas, cuando existe más de una variable de interés, es decir, cuando se tienen *n* instrumentos correlacionados cuyo precio depende de uno o varios factores de riesgo[20].

En este caso, sea **Y** una variable aleatoria normal estándar n-variada y **Z** una variable aleatoria normal n-variada con media $\underline{0}$ y matriz de varianza-covarianza Σ. Así, **Y** y **Z** se denotan como:

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_n \end{bmatrix} \sim \mathbf{N}_n(\underline{\mathbf{0}}, \mathbf{I}), \text{ donde } \mathbf{I} \text{ es la matriz identidad;}$$

$$\mathbf{Z}=\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_n \end{bmatrix} \sim \mathbf{N}_n(\underline{\mathbf{0}}, \Sigma), \text{ donde } \Sigma \text{ es la matriz de varianza-covarianza de } \mathbf{Z}.$$

Para generar un vector aleatorio normal **Z** a partir de un vector normal estándar **Y**, se pondera **Y** de manera de este vector ponderado posea las varianzas y covarianzas de **Z**. Para ello, la matriz de varianza-covarianza de **Z** debe descomponerse o factorizarse en dos matrices de tal manera que al multiplicarlas se obtenga la varianza del vector **Z**. Dado que la matriz Σ es simétrica real, se puede descomponer en sus factores Cholesky[21] como: Σ=**AA'**, donde **A** es una matriz triangular inferior, es

[20] Esto debido a que a parte de la correlación existente entre instrumentos, el instrumento por si solo puede tener varias fuentes de riesgo. Por ejemplo, los factores de riesgo de un bono son tanto los flujos de efectivo como la tasa de interés, por lo que en este caso se simularían dos variables aleatorias, una para los flujos y otra para la tasa de interés.

[21] Para una mayor referencia sobre esta factorización ver Jorion (1195) o J.P.Morgan (1996).

decir, sólo tiene ceros arriba de su diagonal[22]. Después se construye el vector Z como **Z=AY**, de tal manera que:

$$V(Z)=E(ZZ')=E(AY[AY]'),$$

ya que Z=AY, entonces por las propiedades de las matrices:

$$V(Z)=E(AYY'A')=AE(YY')A'=AV(Y)A'=AIA'=\Sigma.$$

De esta manera, las variables simuladas Z a partir de Y tienen las covarianzas deseadas, las cuales se pueden calcular históricamente con el estimador de la matriz de varianza-covarianza que más convenga.

Ej. Considérese ahora que el inversionista posee además de la acción de GMODELOC (activo 1), una acción de APASCO (activo 2) con valor de \$50.8, por lo que desea acotar las posibles pérdidas de su portafolio al día siguiente con un nivel de confianza del 95%, utilizando el método de Monte Carlo. Debido a que su portafolio cuenta con dos factores de riesgo (rendimientos de GMODELOC y rendimientos de APASCO), se generan dos variables aleatorias con la siguiente matriz de varianza-covarianza:

$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_2^2\end{bmatrix}$ pero dado que $\sigma_{12}=\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$ y $\sigma_{21}=\rho_{21}\sigma_1\sigma_2$, entonces:

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2\\ \rho_{21}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}.001295 & .055492\\ .055492 & .001759\end{bmatrix}$$

Esta matriz se descompondrá en sus factores Cholesky: $\Sigma=\mathbf{AA'}$:

$$\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2\\ \rho_{21}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & 0\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21}\\ 0 & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}^2 & a_{11}a_{21}\\ a_{11}a_{21} & a_{21}^2+a_{22}^2\end{bmatrix},$$

resolviendo se obtiene:

$$a_{11}=\sigma_1,$$

$$a_{21}=\frac{\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1}=\sigma_2\rho_{12},$$

$$a_{22}^2=\sigma_2^2-a_{21}^2=\sigma_2^2(1-\rho_{12}^2)\Rightarrow a_{22}=\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2},$$

entonces:

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ \sigma_2\rho_{12} & \sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1 & \sigma_2\rho_{12}\\ 0 & \sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}\end{bmatrix}=AA'.$$

[22] No es necesario utilizar la descomposición Cholesky, puede utilizarse cualquier otro método para descomponer la matriz de varianza-covarianza de Z como Z=AA'. La ventaja de la descomposición Cholesky es que la matriz A es triangular inferior.

Por lo tanto, la factorización Cholesky de la matriz varianza-covarianza de los rendimientos de GMODELOC (acción 1) y APASCO (acción 2) está dada por la matriz:

$$A=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ \sigma_2\rho_{12} & \sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}.035988 & 0\\ (.041942\times.36801) & .041942\sqrt{1-(.36801)^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}.035988 & 0\\ .015435 & .038998\end{bmatrix}.$$

Sea $Y_\kappa=\begin{bmatrix}y_{1,\kappa}\\ y_{2,\kappa}\end{bmatrix}$, el vector de variables aleatorias normales estándar correspondientes a la κ-ésima trayectoria simulada para las acciones 1 y 2, y sea $Z_\kappa=\begin{bmatrix}z_{1,\kappa}\\ z_{2,\kappa}\end{bmatrix}$, el vector que contiene la κ-ésima trayectoria simulada para el día siguiente de los rendimientos de las acciones. Se tiene entonces que:

$$\begin{bmatrix}z_{1,\kappa}\\ z_{2,\kappa}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ \sigma_2\rho_{12} & \sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{1,\kappa}\\ y_{2,\kappa}\end{bmatrix},$$

y al resolver este sistema se obtiene:

$$z_{1,\kappa}=\sigma_1 y_{1,\kappa},\quad z_{2,\kappa}=\sigma_2(\rho_{12}y_{1,\kappa}+\sqrt{1-\rho_{12}^2}\,y_{2,\kappa}).$$

Dado que $y_{1,\kappa}$ y $y_{2,\kappa}$ son variables aleatorias independientes distribuidas normal con varianza unitaria, es claro que $V(z_{1,\kappa})=\sigma_1^2$ y la $V(z_{2,\kappa})=\sigma_2^2[\rho_{12}^2V(y_{1,\kappa})+(1-\rho_{12}^2)V(y_{2,\kappa})]=\sigma_2^2$, como se deseaba.

Con base a los escenarios simulados para los rendimientos, se pueden calcular los precios simulados para un portafolio compuesto de 2 instrumentos como:

$$P_{port,\kappa}=w_1\,P_{t-1}\exp(z_{1,\kappa})+w_2\,P_{t-1}\exp(z_{2,\kappa})=P_{1,\kappa}+P_{2,\kappa}$$

donde $w_i\,P_{t-1}$ es la posición del portafolio invertida en el instrumento *i*, con *i*=1,2.

En este ejemplo, los rendimientos simulados para cada escenario futuro κ y para cada activo al día siguiente son:

$$z_{1,\kappa}=.035988\,y_{1,\kappa},\quad z_{2,\kappa}=.015435\,y_{1,\kappa}+.038998\,y_{2,\kappa}\qquad(4.7)$$

Como se desean generar 1,000 escenarios para cada acción, entonces se generan 1,000 variables aleatorias normales estándar para calcular los rendimientos (ecuación 4.7) y los precios de GMODELOC y 1,000 variables aleatorias normales estándar para calcular los rendimientos (ecuación 4.7) y los precios simulados de APASCO para el día siguiente:

	GMODELOC				APASCO			
κ	$U_{1,\kappa}$	$y_{1,\kappa}$	$z_{1,\kappa}$	$P_{1,\kappa}$	$U_{2,\kappa}$	$y_{2,\kappa}$	$z_{2,\kappa}$	$P_{2,\kappa}$
1	0.14293	-1.06725	-0.03841	23.28814	0.39964	-0.25428	-0.02639	49.47694
2	0.35956	-0.35963	-0.01294	23.88881	0.52064	0.05175	-0.00353	50.62087
3	0.47485	-0.06307	-0.00227	24.14513	0.31599	-0.47895	-0.01965	49.81142
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50	0.27299	-0.60379	-0.02173	23.67982	0.07127	-1.46639	-0.06651	47.53133
51	0.25629	-0.65482	-0.02357	23.63638	0.21453	-0.79081	-0.04095	48.76185
52	0.25609	-0.65545	-0.02359	23.63584	0.79900	0.83806	0.02257	51.95942
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
998	0.60358	0.26264	0.00945	24.42982	0.31666	-0.47706	-0.01455	50.06616
999	0.01923	-2.06991	-0.07449	22.46279	0.13652	-1.09608	-0.07470	47.14374
1,000	0.07310	-1.45307	-0.05229	22.96702	0.00199	-2.87968	-0.13473	44.39663

Tabla 4.8. Generación de 1,000 escenarios para los rendimientos y los precios de las acciones GMODELOC y APASCO para el día siguiente de la valuación.

El portafolio está compuesto el día de la valuación por una acción de GMODELOC con valor de \$24.2 y una acción de APASCO con valor de \$50.8. Así, el portafolio está compuesto el 32.3% (w_1=.323) por GMODELOC, el 67.7% (w_2=.677) por APASCO y su valor actual de mercado es de \$75. Entonces, los precios simulados del portafolio para el día siguiente están dados por:

$$P_{port,\kappa}=(.323\times 75)\exp(z_{1,\kappa})+(.677\times 75)\exp(z_{2,\kappa}),$$

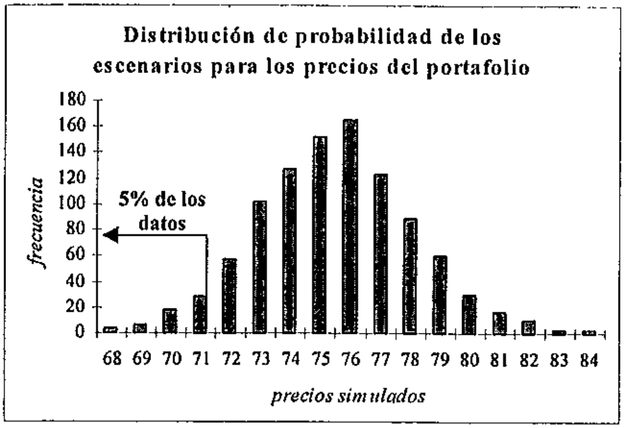
así,

$$P_{port,\kappa}=24.2\exp(z_{1,\kappa})+50.8\exp(z_{2,\kappa})=P_{1,\kappa}+P_{2,\kappa} \quad \text{con } \kappa=1,\ldots,1000.$$

Escenario κ	$P_{1,\kappa}$	$P_{2,\kappa}$	$P_{port,\kappa}=P_{1,\kappa}+P_{2,\kappa}$
1	23.28814	49.47694	72.76507
2	23.88881	50.62087	74.50968
3	24.14513	49.81142	73.95655
⋮	⋮	⋮	⋮
50	23.67982	47.53133	71.21115
51	23.63638	48.76185	72.39823
52	23.63584	51.95942	75.59526
⋮	⋮	⋮	⋮
998	24.42982	50.06616	74.49598
999	22.46279	47.14374	69.60654
1,000	22.96702	44.39663	67.36365

Tabla 4.9. Generación de 1,000 escenarios para los precios del portafolio compuesto el 32.3% por una acción de GMODELOC y el 67.7% por una acción de APASCO, para el día siguiente de la valuación.

Para obtener el VaR del portafolio, primero se ordenan los escenarios de sus precios de menor a mayor y en seguida se busca el dato 50, el cual representará el cuantil equivalente al 95% de confianza de estos precios. Dicho precio ($P_{port}^{95\%}$) es 70.77164, es decir, el "peor" precio que se espera con un 95% de confianza para el día siguiente es \$70.77164.



GRÁFICA 4.5. Distribución de probabilidad de los precios simulados del portafolio, para el día siguiente a la valuación.

De esta manera, el valor en riesgo del portafolio al 95% de confianza con un horizonte de un día, por medio de este método es:

$$VaR_{port} = P_{t-1} - P^{95\%}_{port} = 75 - 70.77164 = 4.66754.$$

Lo cual indica que por medio del método de Monte Carlo, la pérdida en el valor de mercado del portafolio con valor de \$75 el día de la valuación, será a lo más de \$4.66754 al día siguiente con un nivel de confianza del 95%. Nótese que este resultado es muy parecido al obtenido con el método Varianza-Covarianza (\$4.24653), otra vez, debido a que los datos simulados se obtienen a partir de v.a normales y porque el portafolio contiene instrumentos totalmente lineales. No obstante, con el método de Simulación Histórica se obtuvo un VaR igual a \$3.375, que no es muy parecido a los resultados antes mencionados, debido a que este método no supone normalidad en la distribución de los rendimientos.

4.3.3 VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL MÉTODO DE MONTE CARLO

A continuación se mencionan las principales ventajas y desventajas del método de Monte Carlo:

Principales ventajas:

- ✓ Es muy adecuado, ya que al igual que el método de Simulación Histórica, crea posibles escenarios de los rendimientos; pero es más detallado que el de Simulación Histórica, debido a que explora un rango mayor de posibilidades en diferentes escenarios, al generar más trayectorias para los factores de riesgo.
- ✓ Es el método más preciso de los tres, ya que si la distribución de los rendimientos y el modelo estocástico de los precios son correctos, se asemeja más a la realidad por lo que se considera el método más poderoso para medir el VaR. La simulación estocástica es la mejor forma de cuantificar el efecto de instrumentos no lineales en el portafolio.

Principales desventajas:

- ⌧ No hay un límite teórico en la dificultad del modelo, pero su buena implementación necesita sofisticados conocimientos en matemáticas y procesos estocásticos.
- ⌧ Si el portafolio contiene demasiados instrumentos, se tendría que hacer la simulación de un gran número de trayectorias. Esto hace que en la práctica, este método resulte lento, desalentador y costoso. Por ejemplo: Si se generaran mil trayectorias para un portafolio de mil activos, el número total de valuaciones será de un millón (mil×mil).

Para elegir el método que se debe utilizar para calcular el VaR de un portafolio, cada institución necesita asesorarse con un administrador de riesgo para entender las fortalezas y debilidades de cada alternativa y decidir el método que mejor se ajuste a sus objetivos, sus negocios, su forma de ver el mundo y su bolsillo, basándose en la situación particular de la organización; así como en la composición del portafolio, el tipo de hardware, software y los datos disponibles. Por ejemplo: Para portafolios sin opciones, el método Varianza-Covarianza es el más conveniente, pero si las hay, el método de Simulación Histórica o el de Monte Carlo son los más apropiados; por otro lado, si se tienen posiciones simples y rendimientos normales, el análisis con el método Monte Carlo debe generar el mismo resultado (o muy parecido), que el obtenido con el método Varianza-Covarianza. En general, se puede elegir uno o una combinación (híbrido) de ellos siempre y cuando se ajuste a las necesidades de la institución.

Capítulo 5

VALUACIÓN DEL PORTAFOLIO

Después de haber introducido los métodos más comunes para medir el valor en riesgo de un portafolio (Varianza-Covarianza, Simulación Histórica y Monte Carlo), en este capítulo se estimará el VaR de un portafolio compuesto por CETES y acciones altamente bursátiles, a través del método de Monte Carlo y se compararán los resultados con el VaR analítico.

En la práctica, los inversionistas optimizan el portafolio de inversión que poseen utilizando las covarianzas existentes entre instrumentos y estiman el riesgo de mercado de dicho portafolio. Así, la composición del portafolio no debe de ser arbitraria. En base a la experiencia, cuando un portafolio contiene instrumentos á tasa flotante e instrumentos a tasa fija como los CETES, los inversionistas conservadores optan por tener aproximadamente un 40% en tasa flotante y un 60% en tasa fija. Esto debido a que los instrumentos en tasa flotante implican un mayor riesgo en el portafolio, ya que existe la posibilidad de perder no sólo intereses, sino capital también. Tomando en cuenta esta posición conservadora, el portafolio al cual se le medirá el valor en riesgo en este capítulo, estará formado por acciones de TELMEXAA (3 acciones) y acciones de CEMEXB (3 acciones) en un 44%, y el 56% restante en un CETE a 28 días con valor nominal de \$100 y un CETE a 91 días con valor nominal también de \$100.[1]

Un CETE es un bono cupón cero, por lo que la tasa de rendimiento del CETE a *n* días, determina el precio del bono en este momento. Así, el precio del CETE a *n* días con valor nominal de \$100, se calcula como:

$$P_{CETE} = \frac{100}{\left[1+\left(i \times n / 360\right)\right]},$$

donde *i* es la tasa de rendimiento nominal de los CETES a *n* días[2].

[1] Además, el riesgo en este portafolio se diversifica ya que existen correlaciones negativas para el periodo de estudio, entre los rendimientos de los CETES y los rendimientos de las acciones.

[2] Se cambió la notación usada en el capítulo 1 de la tasa nominal de un bono cupón cero (r_T), para evitar que se confunda con los cambios en la tasa.

Es claro que la relación entre el precio de un CETE y su factor de riesgo (tasa de rendimiento) no es lineal, por lo que se utilizará el método de Monte Carlo para estimar el valor en riesgo **diario** del portafolio con varios niveles de confianza para 16 días. Es decir, se estimará el VaR desde el 26 de Agosto de 1999 hasta el 20 de Septiembre del mismo año, con horizonte de un día. Para calcular el VaR de la fecha *t*, se supondrá que su valuación se hará con los datos hasta el día *t-1*.

El valor de la acción TELMEXAA el 25 de Agosto fue de \$36.2 y el de CEMEXB \$14.617, por lo que se tienen invertidos \$152.451 del portafolio en acciones.

La tasa de los CETES a 28 días fue de 19.5% y la de 91 días de 21%, por lo que los precios de los CETES a 28 y 91 días el 25 de Agosto fueron de \$98.506 y \$94.959 respectivamente; así, se tienen invertidos \$193.465 en bonos cupón cero. De esta manera, el valor de mercado del portafolio al 25 de Agosto (primer día de valuación) fue de \$345.916. Es decir, se tiene aproximadamente un 44% en acciones: 152.451/345.916=0.44 y un 56% aproximado en CETES: 193.465/345.916=0.56, como se mencionó.

5.1 ANÁLISIS DE LOS DATOS

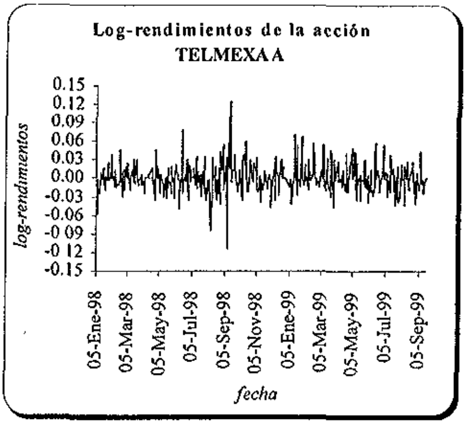
El primer paso es analizar las series de los rendimientos de los instrumentos que componen el portafolio, para buscar el mejor estimador de la varianza. Como se mencionó, el factor de riesgo de una acción es su precio, por lo que la varianza se calcula sobre los cambios logarítmicos en el precio de la acción. En el caso de un bono cupón cero (CETE), el factor en riesgo es la tasa de interés, por lo cual, se calcula la varianza de los cambios logarítmicos en la tasa de interés.

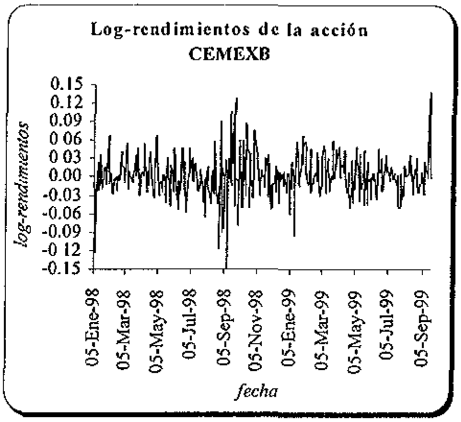
5.1.1 VARIANZA CONSTANTE DE LOS LOG-RENDIMIENTOS

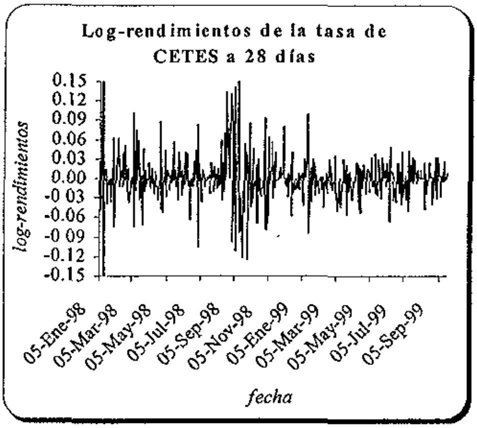
Al analizar las series de tiempo[3] de los instrumentos que componen nuestro portafolio, se encuentra que sus log-rendimientos no poseen varianza constante[4]. A continuación se muestra la gráfica de los cambios logarítmicos diarios en los precios de TELMEXAA y CEMEXB, así como los cambios logarítmicos diarios en las tasas de CETES a 28 y 91 días, del 5 de Enero de 1998 al 20 de Septiembre de 1999 (429 datos):

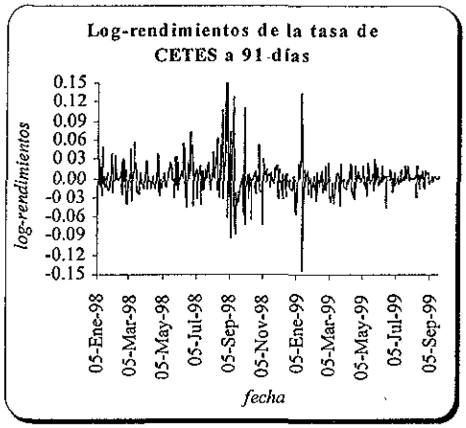
(Siguiente página)

[3] Una serie de tiempo es una colección de variables aleatorias (v.a.) $\{X_t\}$, donde X_t es la observación al tiempo t. En este caso, X_t es el rendimiento logarítmico al tiempo t.
[4] En este trabajo no se discutirá si los rendimientos de los factores de riesgo de los instrumentos tienen una distribución normal, pero es un asunto que debe tomarse en cuenta.









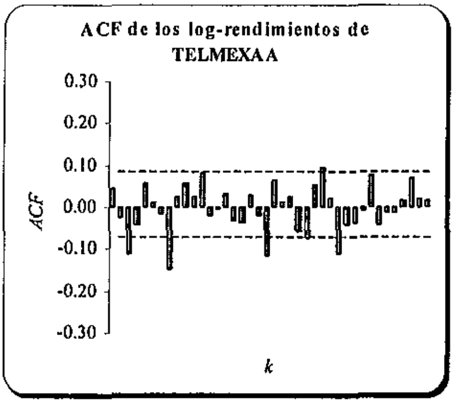
Al observar las anteriores gráficas se puede concluir que la varianza no es constante, por lo que debe utilizarse el método de Promedios Móviles Exponenciales (PME) y no el de Promedios Móviles, para estimar la varianza de estas series de rendimientos, ya que el método de PME supone que la volatilidad varía en el tiempo, es decir, que periodos de volatilidad alta siguen a periodos de volatilidad alta, así como periodos de baja volatilidad siguen a periodos de baja volatilidad como se observa en estas gráficas.

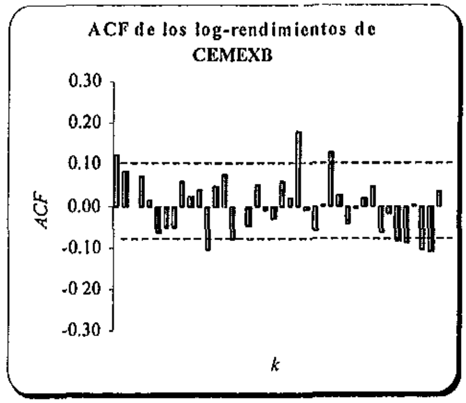
5.1.2 AUTOCORRELACIÓN DE LOS RENDIMIENTOS Y DE SUS VARIANZAS EN EL TIEMPO

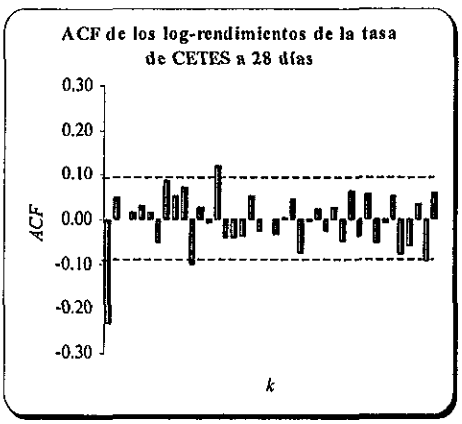
En base a estas gráficas podría esperarse que los rendimientos se encuentren autocorrelacionados, debido a que sus varianzas si lo están. Por ello, se calculan sus coeficientes de autocorrelación[5] de orden k y dado que se cuenta con 429 datos, se verifica si dichos coeficientes se

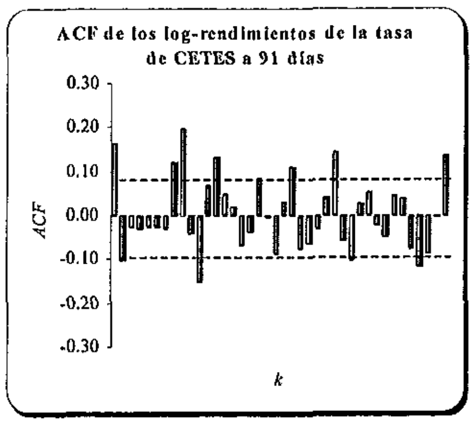
[5] Se recuerda que k=1 es equivalente a tomar la distancia entre r_t y r_{t-1}. Se utilizó k=1,..., 40 sólo por convención.

encuentran en el intervalo (-0.095, 0.095) al 95% de confianza. A continuación se grafican las estimaciones de los coeficientes de autocorrelación de orden k. Las líneas punteadas describen el intervalo de confianza, del cual se espera que los coeficientes estimados no lo rebasen:





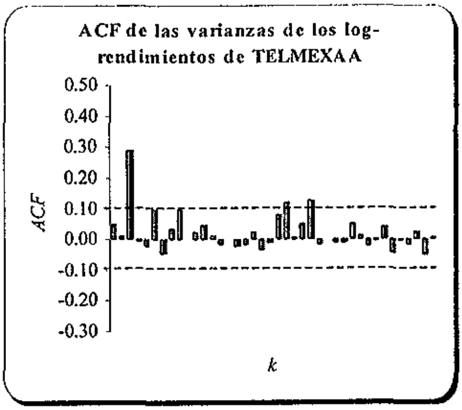


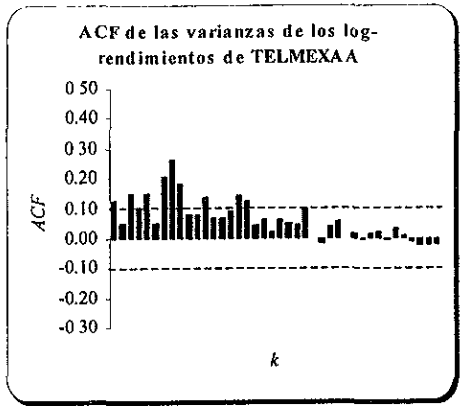


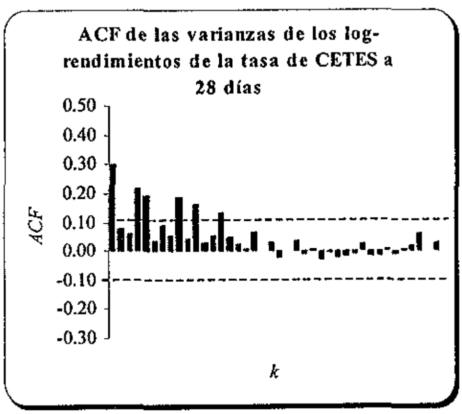
En estas gráficas se observa que algunas de las autocorrelaciones sobrepasan el intervalo de confianza (-0.095, 0.095), por ello, se dice que los datos de cada una de las series de tiempo se encuentran autocorrelacionados.

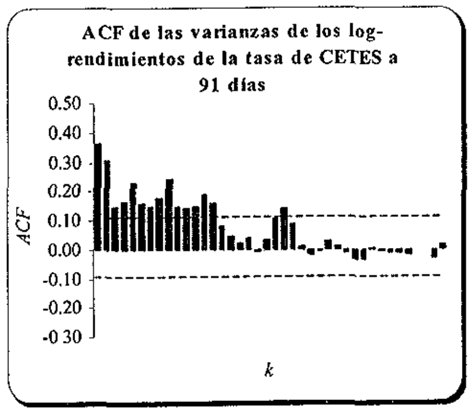
Las gráficas de los coeficientes de autocorrelación de orden (k) de la serie de log-rendimientos al cuadrado de un instrumento, permite encontrar si la varianza está autocorrelacionada[6]. A continuación se presentan los autocorrelogramas de las varianzas de los rendimientos:

[6] Recuérdese que el autocorrelograma(ACF) sólo es válido para series estacionarias, es decir, series que no poseen tendencia o periodicidad y que tengan varianza constante. Para nuestro caso sólo se cumple el primer supuesto, por lo que se deben tomar con reserva sus resultados.









Como se había supuesto, existe autocorrelación tanto en los log-rendimientos de los precios de las acciones y de las tasas de los CETES, como entre sus varianzas. Por ello, sus respectivas medias, varianzas y covarianzas se estimarán por medio del método de Promedios Móviles Exponenciales.

5.2 CÁLCULO DEL VaR DEL PORTAFOLIO

El horizonte de tiempo utilizado para el portafolio es de un día, por lo que el precio de cada acción al tiempo *t*, se modelará mediante la siguiente ecuación estocástica:

$$P_t = P_{t-1} \exp(\sigma_{t|t-1}\, y),$$

donde,

P_t = precio de la acción el día *t*,

$\sigma_{t|t-1}$ = volatilidad diaria estimada de los rendimientos de la acción al tiempo *t*, dados los datos hasta el tiempo *t-1*,

y = variable aleatoria normal estándar, es decir, $y \sim N(0,1)$.

En el caso de los CETES, los escenarios no se generan para los precios de los CETES, sino para las tasas de los CETES. De esta manera, la tasa de interés nominal de cada CETE al tiempo t, se puede modelar como:

$$i_t = i_{t-1} \exp(\sigma_{t/t-1}\, y),$$

donde,

i_t = tasa de rendimiento del CETE el día t,

$\sigma_{t|t-1}$ = volatilidad diaria estimada de los rendimientos en la tasa del CETE al tiempo t, dados los datos hasta el tiempo t-1.

El portafolio contiene *cuatro instrumentos* y cada instrumento tiene sólo un factor de riesgo para nuestros efectos, por lo que sólo existirá una fuente de variación aleatoria en el precio de nuestro portafolio. Esta fuente aleatoria se construirá a partir del vector de variables aleatorias normales estándar $Y_i=\begin{pmatrix} y_{ik1} & y_{ik2} & \cdots & y_{ikT}\end{pmatrix}$ con i=1,...,4 y T=16 (16 días de valuación); así, se generarán 1,000 escenarios (N=1,000) para los rendimientos de los cuatro instrumentos $Z_i=\begin{pmatrix} z_{ik1} & z_{ik2} & \cdots & z_{ikT}\end{pmatrix}$ y en base a estas simulaciones, se obtendrán los escenarios para el valor de mercado del portafolio de inversión. Primero se calculará el VaR del portafolio para el 26 de Agosto (T=1).

Las variables aleatorias n-variadas Y y Z con n=4 para este Monte Carlo, se denotan como:

$$Y=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} \sim N_4(\underline{0}, I), \text{ donde I es la matriz identidad;}$$

$$Z=\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} \sim N_4(\underline{0}, \Sigma), \text{ donde } \Sigma \text{ es la matriz de varianza-covarianza de Z.}$$

Primero se estiman las varianzas y covarianzas de los rendimientos de TELMEXAA (instrumento 1), CEMEXB (instrumento 2), CETES a 28 días (instrumento 3) y CETES a 91 días (instrumento 4) para encontrar la matriz de varianza-covarianza Σ, ya que el vector Z es aquel que modelará los rendimientos para estos cuatro instrumentos.

5.2.1 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Dado que la varianza de los rendimientos no es constante y se encuentra autocorrelacionada, se estimará como ya se mencionó, por medio del método de Promedios Móviles Exponenciales tomando en cuenta que la media de los rendimientos no es cero, esto para tener una mejor estimación. Aunque se observa que es muy cercana a cero.

Para fines del análisis de este portafolio, se tomarán los rendimientos de los cuatro instrumentos anteriores, comprendidos 66 días atrás de la respectiva fecha de valuación. Así, asumiendo un grado de error de .01, es decir, ignorando 1% de la importancia que tienen los rendimientos históricos anteriores a los 66 días de estimación (nivel de tolerancia), el factor de decaimiento que se utilizará para estimar los parámetros de interés (ecuación 3.13) será de .9326:

$$\lambda = \exp\left(\frac{\ln(\gamma_L)}{T}\right) = \exp\left(\frac{\ln(.01)}{66}\right) = .9326\,.$$

De este modo, la suma de los ponderadores en los 66 días será de .99 y no de 1,

$$\sum_{t=1}^{66}(1-\lambda)\lambda^{t-1} = .99\,,$$

de ahí el error de 1% asignado.

Para el cálculo de los estimadores se tomará el día de la valuación como el día t-1. Es decir, interesa estimar los parámetros para el 26 de Agosto, tomando en cuenta los 66 datos anteriores al 25 de Agosto, incluyendo el día de la valuación[7].

Para calcular la varianza, primero se estima la **media de los rendimientos** para el 26 de Agosto dados los datos hasta el 25 de Agosto, en base a la ecuación (3.7) como:

$$\begin{aligned}\bar{r}_{26Ag|25Ag} &= (1-.9326)\sum_{t=1}^{66}(.9326)^{t-1}\,r_{26Ag-t}\,,\\ &= \left(.0674r_{25Ag} + .0629r_{24Ag} + .0586r_{23Ag} + \ldots + .0007r_{26May}\right),\end{aligned}$$

así:

$$\begin{aligned}\bar{r}_{TELMEXAA,26Ag|25Ag} &= .000303,\\ \bar{r}_{CEMEXB,26Ag|25Ag} &= .001035,\\ \bar{r}_{CETES28,26Ag|25Ag} &= -.001772,\\ \bar{r}_{CETES91,26Ag|25Ag} &= -.000314.\end{aligned}$$

De esta manera, la **varianza de los rendimientos** para cada uno de los instrumentos con base en la ecuación (3.8), es igual a:

$$\sigma^2_{26Ag|25Ag} = (1-.9326)\sum_{t=1}^{66}(.9326)^{t-1}\left(r_{26Ag-t} - \bar{r}_{26Ag|25Ag}\right)^2,$$

entonces:

$$\begin{aligned}\sigma^2_{TELMEXAA,26Ag|25Ag} &= .000364,\\ \sigma^2_{CEMEXB,26Ag|25Ag} &= .000431,\\ \sigma^2_{CETES28,26Ag|25Ag} &= .000399,\\ \sigma^2_{CETES91,26Ag|25Ag} &= .000114.\end{aligned}$$

[7] Los precios y rendimientos de los instrumentos analizados en este capítulo, se encuentran en el Apéndice G.

De igual manera, la **covarianza entre cada dos series de rendimientos** para el 26 de Agosto dados los datos hasta la fecha de valuación, se calcula por la ecuación (3.10) como:

$$\sigma_{12,26Ag|25Ag} = (1-.9326)\sum_{i=1}^{66}(.9326)^{i-1}(r_{1,26Ag-i} - \bar{r}_{1,26Ag|25Ag})(r_{2,26Ag-i} - \bar{r}_{2,26Ag|25Ag}),$$

es decir,

$$\sigma_{TELMEXAA\ CEMEXB,26Ag|25Ag} = .000164,$$
$$\sigma_{TELMEXAA\ CETES28,26Ag|25Ag} = -.000151,$$
$$\sigma_{TELMEXAA\ CETES91,26Ag|25Ag} = -.000079,$$
$$\sigma_{CEMEXB\ CETES28,26Ag|25Ag} = -.000159,$$
$$\sigma_{CEMEXB\ CETES91,26Ag|25Ag} = -.000085,$$
$$\sigma_{CETES28\ CETES91,26Ag|25Ag} = .000164.$$

Por lo tanto, la **matriz de varianza-covarianza** de Z para el día 26 de Agosto es:

$$\Sigma=\begin{bmatrix} .000364 & .000164 & -.000151 & -.000079 \\ .000164 & .000431 & -.000159 & -.000085 \\ -.000151 & -.000159 & .000399 & .000164 \\ -.000079 & -.000085 & .000164 & .000114 \end{bmatrix}.$$

Una vez obtenida esta matriz, el siguiente paso es descomponerla en sus factores de Cholesky, es decir:

$$\begin{bmatrix} \sigma^2_{1,t/t-1} & \sigma_{12,t/t-1} & \sigma_{13,t/t-1} & \sigma_{14,t/t-1} \\ \sigma_{21,t/t-1} & \sigma^2_{2,t/t-1} & \sigma_{23,t/t-1} & \sigma_{24,t/t-1} \\ \sigma_{31,t/t-1} & \sigma_{32,t/t-1} & \sigma^2_{3,t/t-1} & \sigma_{34,t/t-1} \\ \sigma_{41,t/t-1} & \sigma_{42,t/t-1} & \sigma_{43,t/t-1} & \sigma^2_{4,t/t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ 0 & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{43} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Así, la matriz A de la descomposición Cholesky[8], se obtiene resolviendo recursivamente, en este caso resultó ser igual a:

$$A=\begin{bmatrix} .0191 & 0 & 0 & 0 \\ .0086 & .0189 & 0 & 0 \\ -.0079 & -.0048 & .0177 & 0 \\ -.0041 & -.0026 & .0067 & .0067 \end{bmatrix}.$$

---

[8] Se utilizó el programa MATLAB versión 3.1 para obtener la matriz A de la factorización de Cholesky mediante el comando r=chol(x), donde x es la matriz de varianza-covarianza de Z y r es la matriz A'.

5.2.2 SIMULACIÓN DEL VaR DEL PORTAFOLIO

Una vez estimados los parámetros de varianza y covarianza de los instrumentos del portafolio, se construye entonces el vector Z (simulación del rendimiento de los instrumentos del portafolio) como **Z=AY**, de tal manera que:

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .0191 & 0 & 0 & 0 \\ .0086 & .0189 & 0 & 0 \\ -.0079 & -.0048 & .0177 & 0 \\ -.0041 & -.0026 & .0067 & .0067 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix}.$$

Al resolver este sistema, se obtiene el κ-ésimo escenario para los rendimientos en el precio de las acciones y en las tasas de los CETES:

$$z_{TELMEXAA,\kappa} = .0191\, y_{TELMEXAA,\kappa},$$
$$z_{CEMEXB,\kappa} = .0086\, y_{TELMEXAA,\kappa} + .0189\, y_{CEMEXB,\kappa},$$
$$z_{CETES28,\kappa} = -.0079\, y_{TELMEXAA,\kappa} - .0048\, y_{CEMEXB,\kappa} + .0177\, y_{CETES28,\kappa},$$
$$z_{CETES91,\kappa} = -.0041\, y_{TELMEXAA,\kappa} - .0026\, y_{CEMEXB,\kappa} + .0067\, y_{CETES28,\kappa} + .0067\, y_{CETES91,\kappa}.$$

Dado que se desea generar mil escenarios, se generan mil variables aleatorias normales estándar para cada instrumento.

κ	$y_{TELMEXAA,\kappa}$	$y_{CEMEXB,\kappa}$	$y_{CETES28,\kappa}$	$y_{CETES91,\kappa}$
1	1.30518	0.83168	0.88596	-0.90390
2	-0.41888	0.19887	0.31360	1.17784
3	-0.66915	0.78537	1.14344	-0.54697
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50	1.15646	-0.14853	0.42427	0.66787
51	1.21893	1.35699	-0.10267	-0.61162
52	0.85765	1.54527	-0.99590	0.68766
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
501	1.14729	-0.25603	-0.42966	0.01400
502	-0.27742	-0.16969	0.46517	0.15072
503	0.10676	-1.65702	0.28536	-2.44647
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
998	-1.20225	-0.11088	-1.22765	0.05438
999	1.94237	-0.90341	-0.12183	0.46225
1,000	-2.43715	1.71565	0.14551	-0.44271

Tabla 5.1. Generación de 1,000 vectores aleatorios normales (0,1) para construir los rendimientos de los precios de TELMEXAA y CEMEXB, y para las tasas de CETES a 28 y 91 días.

Así, los 1,000 escenarios para los rendimientos de estos cuatro instrumentos, para el 26 de Agosto son:

κ	$z_{TELMEXAA,\kappa}$	$z_{CEMEXB,\kappa}$	$z_{CETES28,\kappa}$	$z_{CETES91,\kappa}$
1	0.02493	0.02694	0.00138	-0.00763
2	-0.00791	0.00020	0.00324	0.00697
3	-0.01278	0.00909	0.02176	0.00470
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50	0.02209	0.00714	-0.00091	0.00296
51	0.02328	0.03613	0.01796	0.01331
52	0.01638	0.03658	-0.03182	-0.00960
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
501	0.02191	0.00503	-0.01544	-0.00682
502	-0.00580	-0.00559	0.01124	0.00571
503	0.00204	-0.03040	0.01216	-0.01061
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
998	-0.02296	-0.01243	-0.01170	-0.00264
999	-0.03710	-0.03378	0.01752	0.01259
1,000	-0.04655	0.01147	0.01359	0.00354

Tabla 5.2. Generación de los 1,000 escenarios para los rendimientos de TELMEXAA, CEMEXB, CETES a 28 días y CETES a 91días para el 26 de Agosto.

A partir de estos rendimientos, se pueden calcular los precios simulados de las acciones TELMEXAA, CEMEXB, del CETE a 28 días y del CETE a 91 días.

Por ejemplo, el precio de TELMEXAA el 25 de Agosto fue de \$36.2. En la tabla 5.2, se puede observar que el primer escenario (κ=1) del cambio en el precio de esta acción para el día 26 de Agosto es $z_{TELMEXAA,1}$=0.02493. Esto quiere decir, que el primer precio simulado para una acción de TELMEXAA al día 26 de Agosto es de:

$$P_{TELMEXAA,1} = 36.2\exp(.02493) = \$37.114,$$

pero dado que se tiene una posición de 3 acciones de TELMEXAA, el valor de ésta es de \$111.341 (37.114×3). Es decir, existió un incremento en el valor de la posición (\$108.6=36.2×3) para este escenario. De igual manera, se calcula que el valor de la posición del primer escenario para CEMEXB es de \$45.049 (43.851exp(.02694)), que puede compararse con el valor de la posición al día anterior (\$43.851=14.617×3).

En el caso de los CETES, el escenario es para la tasa y no para el precio. Por ejemplo, la tasa de los CETES a 28 días el día de la valuación fue de 19.5%. De esta manera, el precio del CETE el 25 de Agosto fue de:

$$P_{CETE28} = \frac{100}{\left[1+\left(.195\times 28/\ 360\right)\right]} = \$98.506,$$

pero en base a la tabla 5.2, se puede calcular el primer escenario para la tasa, y con ésta, el primer precio simulado para el CETE a 28 días, donde $z_{CETES28,1}$=0.00138. Entonces la tasa simulada para el 26 de Agosto es:

$$i_{CETES28,1} = 19.5\exp(.00138) = 19.527\%,$$

y el precio simulado:

$$P_{CETES28,1} = = \frac{100}{\left[1+\left(.19527\times 28/360\right)\right]} = \$98.504.$$

Nótese que el resultado es congruente, es decir, dado que el escenario para la tasa es a la alza, el escenario para el precio del CETE es a la baja. De igual manera, se calcula que el valor del CETE a 91 días del primer escenario es de \$94.996, lo cual implica una tasa de 20.840% (=21exp(-.00763)). Ambos resultados, el precio y la tasa bajo el primer escenario, pueden compararse con el valor de \$94.959 del CETE al día anterior que implicó una tasa de 21%.

Una vez obtenidos los mil escenarios para los precios de los cuatro instrumentos, se calculan los mil escenarios para el precio del portafolio.

El precio de un portafolio compuesto por *n* instrumentos se calcula como:

$$P_{port} = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i \, ,$$

donde,

x_i = número de títulos del instrumento *i* en los cuales se invierte,
P_i = valor de mercado del instrumento i.

De forma análoga, el κ-ésimo precio simulado de un portafolio compuesto por *n* instrumentos se calcula como:

$$P_{port,\kappa} = \sum_{i=1}^{n} x_i P_{i,\kappa} \qquad \text{con } \kappa=1,\ldots,N$$

donde $P_{i,\kappa}$ es el escenario κ para el valor de mercado del instrumento i.

Así, el valor de mercado del portafolio el día de la valuación, dado que el precio de TELMEXAA fue de \$36.2, el de CEMEXB de \$14.617, el del CETE a 28 días de \$98.506 y el del CETE a 91 días de \$94.959, fue de:

$$P_{port} = (3\times P_{TELMEXAA}) + (3\times P_{CEMEXB}) + P_{CETES28} + P_{CETES91} = \$345.916.$$

De igual manera, se calcula el κ-ésimo escenario del precio del portafolio como:

$$P_{port,\kappa} = (3\times P_{TELMEXAA,\kappa}) + (3\times P_{CEMEXB,\kappa}) + P_{CETES28,\kappa} + P_{CETES91,\kappa} .$$

Siguiendo con el ejemplo, dado que $P_{TELMEXAA,1}$=\$37.114, $P_{CEMEXB,1}$=\$15.016, $P_{CETES28,1}$=\$98.504 y $P_{CETES91,1}$=\$94.996, el primer escenario simulado para el valor de mercado del portafolio es:

$$P_{port,1} = (3\times P_{TELMEXAA,1}) + (3\times P_{CEMEXB,1}) + P_{CETES28,1} + P_{CETES91,1} = \$349.889.$$

A continuación se muestran los escenarios para el 26 de Agosto de los precios de los cuatro instrumentos que forman el portafolio, así como los escenarios del valor de mercado del portafolio:

κ	$P_{FEUMEXAA,\kappa}$	$P_{GFMEXB,\kappa}$	$P_{CETES28,\kappa}$	$P_{CETES91,\kappa}$	$P_{port,\kappa}$
1	37.114	15.016	98.504	94.996	349.889
2	35.915	14.620	98.511	94.926	345.041
3	35.740	14.750	98.474	94.937	344.883
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50	37.008	14.722	98.507	94.945	348.643
51	37.053	15.155	98.532	95.023	350.177
52	36.798	15.162	98.552	95.005	349.436
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
501	37.002	14.691	98.529	94.992	348.598
502	36.009	14.535	98.489	94.932	345.054
503	36.274	14.179	98.488	95.010	344.857
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
998	35.378	14.436	98.523	94.972	342.939
999	34.882	14.131	98.480	94.899	340.418
1,000	34.554	14.786	98.486	94.942	341.445

Tabla 5.3. Escenarios para los precios de los instrumentos que componen el portafolio y para el valor de mercado del portafolio.

Como ya se tienen los escenarios para el precio del portafolio, se pueden calcular las ganancias que podrían tenerse al día siguiente en su valor de mercado, esto se hace simplemente tomando la diferencia entre el precio del escenario κ y el valor actual de mercado (\$345.916), es decir, su precio[9]. Una vez obtenidas las posibles ganancias en el portafolio, se ordenan de menor a mayor y se localiza el valor que represente el cuantil al 95%, el cual será el dato 50 para nuestro caso, ya que se tienen 1,000 escenarios. El cuantil seleccionado será el VaR del portafolio para el día siguiente. Los escenarios para las ganancias en el portafolio son:

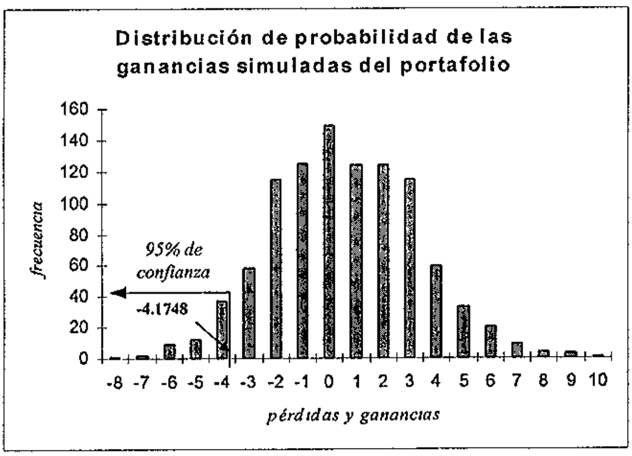
(Siguiente página)

[9] Se entiende una pérdida como una ganancia negativa.

		Sin ordenar	Ordenados			Sin ordenar	Ordenados
κ	$P_{port,\kappa}$	$R_{port,\kappa}=P_{port,\kappa}-P_{port}$	$R_{port,\kappa}$	κ	$P_{port,\kappa}$	$R_{port,\kappa}=P_{port,\kappa}-P_{port}$	$R_{port,\kappa}$
1	349.889	3.9732	-8.0898	28	345.072	-0.8445	-4.9120
2	345.041	-0.8751	-7.4050	29	351.103	5.1864	-4.9108
3	344.883	-1.0337	-7.2535	30	348.162	2.2460	-4.8898
4	343.766	-2.1503	-6.5231	31	345.942	0.0256	-4.8898
5	342.699	-3.2172	-6.4557	32	350.202	4.2860	-4.7707
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
8	340.168	-5.7487	-6.2536	50	348.643	2.7268	-4.1748
9	347.458	1.5420	-6.2406	51	350.177	4.2609	-4.1557
10	348.457	2.5407	-6.1293	52	349.436	3.5193	-4.1299
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
23	346.960	1.0440	-5.1067	996	341.870	-4.0458	7.8187
24	347.449	1.5325	-5.1041	997	341.146	-4.7707	8.1550
25	348.127	2.2107	-4.9913	998	342.939	-2.9775	8.2087
26	341.805	-4.1114	-4.9856	999	340.418	-5.4983	8.4038
27	348.358	2.4415	-4.9591	1000	341.445	-4.4708	9.5752

Tabla 5.4. Escenarios de los rendimientos del valor de mercado del portafolio de manera ordenada y sin ordenar para el 26 de Agosto.

Con base en los datos anteriores se obtiene que dicho cuantil es -4.1748, es decir, el VaR del portafolio es de $4.1748. En otras palabras, se espera que el valor de mercado del portafolio compuesto por un 44% en acciones y un 56% en CETES no disminuirá más allá de $341.742 (=345.916-4.1748) al día siguiente con un 95% de confianza.



GRÁFICA 5.1. Distribución de probabilidad de las ganancias del portafolio, para el día siguiente a la valuación.

Para otros niveles de confianza como el 97.5% (dato 25) y 99% (dato 10), se tienen valores de VaR iguales a 4.9913 y 6.1293 respectivamente.

Suponga ahora que estamos en el día 26 de Agosto, por lo que ya se conoce el verdadero valor de mercado del portafolio en este momento. Dado que el precio de TELMEXAA es hoy \$37.2, el de CEMEXB \$14.467, la tasa de CETES a 28 días es de 19.1% y la de 91 días 21.25%, el valor actual de mercado del portafolio es:

$$P_{port}=(3\times 37.2)+(3\times 14.467)+98.536+94.902=\$348.439.$$

El precio del portafolio un día antes era de \$345.916, esto quiere decir que no hubo pérdidas sino al contrario, existió una ganancia de \$2.5232. El VaR indicaba que la máxima pérdida en el valor del portafolio sería de \$4.1748 al 95% de confianza, por lo tanto, el VaR cubrió las posibles pérdidas en el portafolio para el 26 de Agosto.

Con el anterior procedimiento, se estimó el VaR para los 15 días siguientes, hasta llegar al 20 de Septiembre.

Los valores en riesgo al 95% con el horizonte de un día, del 26 de Agosto de 1999 al 20 de Septiembre, se encuentran en la siguiente tabla:

Día	Fecha	Valor de mercado del portafolio	Ganancias reales	VaR
1	26-Ago	348.4395	2.5232	\$4.1748
2	27-Ago	344.6553	-3.7841	\$4.6396
3	30-Ago	344.2098	-0.4455	\$4.7204
4	31-Ago	339.4608	-4.7490	\$3.9988
5	2-Sep	338.4033	-1.0575	\$4.4446
6	3-Sep	339.8046	1.4012	\$4.0745
7	6-Sep	338.1622	-1.6424	\$4.1216
8	7-Sep	334.9879	-3.1743	\$3.9198
9	8-Sep	333.3262	-1.6618	\$3.8262
10	9-Sep	332.7528	-0.5734	\$3.6820
11	10-Sep	338.2737	5.5209	\$3.7457
12	13-Sep	337.7632	-0.5105	\$4.5528
13	14-Sep	337.8697	0.1065	\$4.1576
14	15-Sep	335.3387	-2.5310	\$4.4715
15	17-Sep	340.7387	5.4000	\$4.0931
16	20-Sep	340.8546	0.1159	\$5.0143

Tabla 5.5. Verdaderas ganancias en el valor de mercado del portafolio y sus valores en riesgo estimados desde el 26 de Agosto hasta el 20 de Septiembre de este año con un nivel de 95% de confianza.

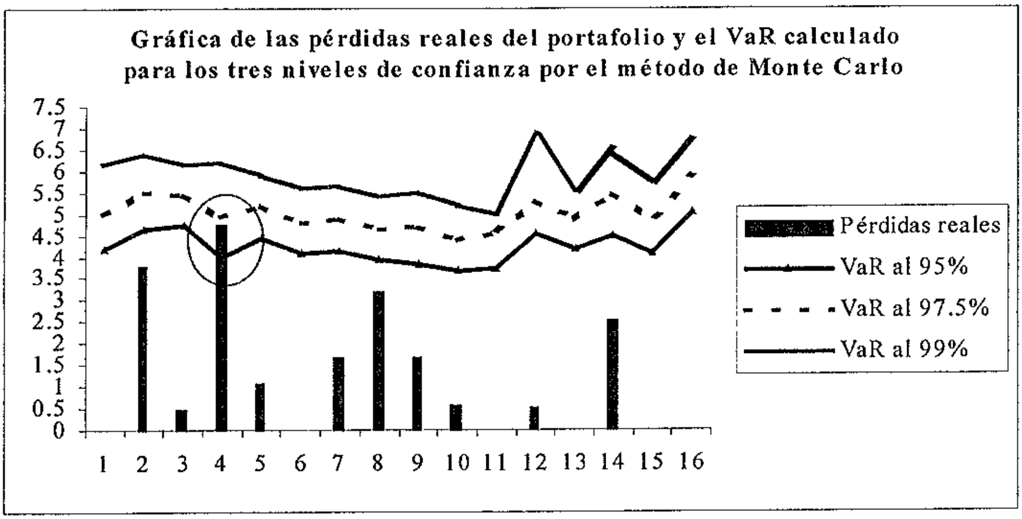
En esta tabla se puede observar la eficiencia del VaR por el método de Monte Carlo, ya que el único día en que las pérdidas excedieron su estimación fue el 31 de Agosto. El monto no cubierto por el VaR fue de: 4.7490-3.9988=\$0.7502.

Como se mencionó, la confianza del VaR puede incrementarse. Así, en la siguiente tabla se muestran las diferentes estimaciones del VaR con diferentes niveles de confianza (95%, 97.5% y 99%).

Día	*Fecha*	*Ganancias reales*	*VaR al 95%*	*VaR al 97.5%*	*VaR al 99%*
1	26-Ago	2.5232	$4.1748	$4.9913	$6.1293
2	27-Ago	-3.7841	$4.6396	$5.4961	$6.4018
3	30-Ago	-0.4455	$4.7204	$5.4356	$6.1252
4	31-Ago	-4.7490	$3.9988	$4.9384	$6.1745
5	2-Sep	-1.0575	$4.4446	$5.1666	$5.9115
6	3-Sep	1.4012	$4.0745	$4.7787	$5.5782
7	6-Sep	-1.6424	$4.1216	$4.8676	$5.6351
8	7-Sep	-3.1743	$3.9198	$4.6339	$5.3620
9	8-Sep	-1.6618	$3.8262	$4.6985	$5.5083
10	9-Sep	-0.5734	$3.6820	$4.3843	$5.1774
11	10-Sep	5.5209	$3.7457	$4.5212	$4.9708
12	13-Sep	-0.5105	$4.5528	$5.2871	$6.9833
13	14-Sep	0.1065	$4.1576	$4.8783	$5.5297
14	15-Sep	-2.5311	$4.4715	$5.4264	$6.4208
15	17-Sep	5.4000	$4.0931	$4.9224	$5.7424
16	20-Sep	0.1159	$5.0143	$5.7983	$6.6630

Tabla 5.6 Verdaderas ganancias en el valor de mercado del portafolio y sus valores en riesgo desde el 26 de Agosto hasta el 20 de Septiembre de este año al 95%, 97.5% y 99% de confianza por el método de Monte Carlo.

En la siguiente gráfica se tomaron en cuenta sólo los días en que se tuvieron pérdidas en el valor de mercado del portafolio:



GRÁFICA 5.2. Pérdidas reales del portafolio y su VaR por el método de Monte Carlo para el 95%, 97.5% y 99% de confianza.

Nótese que el VaR del portafolio aumenta conforme el nivel de confianza es más grande (ver gráfica 5.2). Esto debido a que al tomar un nivel de confianza mayor, se es más estricto y por lo tanto, las estimaciones de las máximas pérdidas tienen que ser mayores. Esto se observa con más claridad el 31 de Agosto (día 4), donde el VaR al 95% no cubrió la pérdida potencial en el valor de mercado del portafolio y en cambio, el VaR al 97.5% y al 99% sí cubrieron esta pérdida.

Enfocándonos al 31 de Agosto y con objeto de ver para qué nivel de confianza el VaR cubre las pérdidas registradas en ese día, se simularon los escenarios para las ganancias del portafolio siguiendo el mismo procedimiento explicado con anterioridad.

		Sin ordenar	Ordenados			Sin ordenar	Ordenados
K	$P_{port,K}$	$R_{port,K}=P_{port,K}-P_{port}$	$R_{port,K}$	K	$P_{port,K}$	$R_{port,K}=P_{port,K}-P_{port}$	$R_{port,K}$
1	343.563	-0.6468	-8.4944	28	344.180	-0.0298	-4.8200
2	344.590	0.3806	-7.5681	29	344.572	0.3623	-4.7989
3	348.410	4.2003	-7.2195	30	346.590	2.3805	-4.7622
4	343.997	-0.2130	-6.8805	31	341.745	-2.4646	-4.7135
5	344.641	0.4314	-6.5576	32	342.191	-2.0193	-4.6822
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
8	341.549	-2.6605	-6.3293	50	345.896	1.6866	-3.9988
9	343.617	-0.59[illegible]	-6.1927	51	346.541	2.3316	-3.9893
10	345.182	0.9722	-6.1745	52	346.424	2.2139	-3.9690
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
23	342.791	-1.4185	-5.1002	996	345.921	1.7112	7.2736
24	343.298	-0.9116	-4.9529	997	345.176	0.9652	7.6870
25	342.114	-2.0956	-4.9384	998	340.791	-3.4192	7.9212
26	346.624	2.4140	-4.8627	999	341.618	-2.5916	7.9321
27	342.724	-1.4862	-4.8239	1,000	344.559	0.3495	8.4259

Tabla 5.7. Escenarios de los rendimientos del valor de mercado del portafolio de manera ordenada y sin ordenar para el 31 de Agosto.

La verdadera pérdida el 31 de Agosto fue de \$4.7490 (ver tabla 5.6), por lo que en base a la Tabla 5.7 se puede decir que el VaR que cubre dicha pérdida es aquel estimado al 97% de confianza (dato 30).

5.3 COMPARACIÓN ENTRE EL MÉTODO DE MONTE CARLO Y EL MÉTODO ANALÍTICO

A continuación se medirá el valor en riesgo diario del mismo portafolio para los mismos niveles de confianza: 95%, 97%, 97.5% y 99%, a través del método de Varianza-Covarianza y se compararán los resultados con los obtenidos por el método de Monte Carlo.

Para fines de comparación, el VaR por el método analítico para un nivel de confianza de (1-α)% y para un instrumento se calcula como:

$$\text{VaR}= W_{t-1} - W_t^{(1-\alpha)\%} , \qquad (5.1)$$

donde,

$W_t^{(1-\alpha)\%}$= peor posición en el instrumento al (1-α)% ,
W_{t-1} = posición en el instrumento el día de la valuación.

Recuérdese que la posición del instrumento se obtiene multiplicando el número de títulos que se tengan de éste, por su precio.

En el caso de las acciones, el precio estimado de cada acción al (1-α)% de confianza puede calcularse como:

$$W_t^{(1-\alpha)\%} = x\,P_{t-1}\exp(-q\times\sigma), \qquad (5.2)$$

donde,

q = cuantil equivalente al nivel de confianza (1-α),
σ = volatilidad de los rendimientos del precio de la acción.

Pero en el caso de los bonos a *n* días dado que son instrumentos no lineales, su peor precio o posición estimado al (1-α)% de confianza se calcula como:

$$W_t^{(1-\alpha)\%} = \frac{100}{(1 + i_{t-1}\exp(q\times\sigma)\times\frac{n}{360})}, \qquad (5.3)$$

donde,

i_{t-1} = tasa de interés nominal de los CETES a *n* días el día de la valuación,
σ = volatilidad de los rendimientos de la tasa de los CETES a *n* días.

Nótese que en el caso de las acciones, para obtener los peores rendimientos de sus precios, el cuantil *q* tiene signo negativo ya que nos interesa la disminución en la cotización de las acciones, es decir, nos fijamos en la cola izquierda de su distribución. En cambio, para los CETES las pérdidas se generan a partir de los incrementos en la tasa de interés, es decir, nos fijamos en la cola derecha de la distribución de los rendimientos de la tasa de interés; por ello, el cuantil *q* lleva signo positivo.

En primer lugar, se calculará el VaR para el 26 de Agosto. Es claro que para estimar las máximas pérdidas en el valor del portafolio para ese día, dado un cierto nivel de confianza, se utilizan las volatilidades y covarianzas de los rendimientos de las acciones y de los bonos, estimadas para calcular los escenarios de Monte Carlo. Así, la matriz de varianza-covarianza estimada para el 26 de Agosto fue de:

$$\Sigma=\begin{bmatrix} .000364 & .000164 & -.000151 & -.000079 \\ .000164 & .000431 & -.000159 & -.000085 \\ -.000151 & -.000159 & .000399 & .000164 \\ -.000079 & -.000085 & .000164 & .000114 \end{bmatrix}.$$

Tomando un **nivel de confianza**[10] **del 95%**, el VaR no diversificado de TELMEXAA y de CEMEXB para el día siguiente de la valuación en base a las ecuaciones (5.1) y (5.2) son:

$$\mathrm{VaR}_{\mathrm{TELMEXAA}} = (3\times 36.2)-(3\times 36.2\exp[-1.645\times .019086]) = 108.6\text{-}105.24336 = \$3.35664,$$

$$\mathrm{VaR}_{\mathrm{CEMEXB}} = (3\times 14.617)-(3\times 14.617\exp[-1.645\times .020750]) = 43.851\text{-}42.37943 = \$1.47157,$$

para obtener el VaR de los CETES a 28 días y 91 días, se utiliza la ecuación (5.3):

$$\mathrm{VaR}_{\mathrm{CETES28}} = 98.50599 - \frac{100}{(1+.195\exp(1.645\times .019986)\times \frac{28}{360})} = 98.50599\text{-}98.45683 = \$0.04917,$$

$$\mathrm{VaR}_{\mathrm{CETES91}} = 94.87433 - \frac{100}{(1+.21\exp(1.645\times .0107)\times \frac{91}{360})} = 94.87433\text{-}94.95925 = \$0.08492.$$

El VaR del portafolio al 95% se calcula como:

$$\mathbf{VaR}_{\mathrm{port}} = \sqrt{\mathbf{VCV}'}, \qquad \textbf{(5.4)}$$

donde $\mathbf{V}=[\mathrm{VaR}_1 \ \ \mathrm{VaR}_2 \ \ \mathrm{VaR}_3 \ \ \mathrm{VaR}_4]$ es el vector de los valores en riesgo no diversificados de los instrumentos del portafolio y $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 \end{bmatrix}$,
es la matriz de correlación de los rendimientos de los factores de riesgo de los instrumentos que componen el portafolio.

El coeficiente de correlación al 26 de Agosto dados los datos hasta el 25 de Agosto, entre los instrumentos 1 y 2 se calcula como:

$$\rho_{12,26Ag|25Ag} = \frac{\sigma_{12,26Ag|25Ag}}{\sigma_{1,26Ag|25Ag}\,\sigma_{2,26Ag|25Ag}}.$$

Por lo que la matriz de correlación **C** de los rendimientos de los factores de riesgo de TELMEXAA, CEMEXB, CETES a 28 días y CETES a 91 días, con base en la ecuación anterior es:

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & .41384 & -.39611 & -.38665 \\ .41384 & 1 & -.38220 & -.38115 \\ -.39611 & -.38220 & 1 & .76769 \\ -.38665 & -.38115 & .76769 & 1 \end{bmatrix}.$$

[10] Recordar que para un nivel de 95% de confianza se utiliza el cuantil 1.645, para un nivel de 97% el cuantil es igual a 1.881, si es de 97.5% se utiliza un cuantil de 1.96 y para un nivel de confianza de 99%, el cuantil es 2.236.

Sustituyendo los valores en riesgo de los cuatro instrumentos, el vector V es:

$$V=[3.35664 \;\; 1.47157 \;\; 0.04917 \;\; 0.08492].$$

Así, sustituyendo la matriz de correlación y los valores en riesgo de los instrumentos en la ecuación (5.4), se obtiene el VaR del portafolio al 26 de Agosto:

$$\mathbf{VaR_{port}=\sqrt{VCV'}=4.12737.}$$

En otras palabras, se espera que al día siguiente las pérdidas máximas potenciales en el valor de mercado del portafolio compuesto por 3 acciones de TELMEXAA, 3 acciones de CEMEXB, un CETE a 28 días y un CETE a 91 días, no sean mayores a $4.12737 con un nivel de confianza del 95%.

Se vio con anterioridad que el 26 de Agosto el portafolio no tuvo una pérdida sino una ganancia (ver tabla 5.5), por lo que el VaR obtenido con el método de Varianza-Covarianza al 95%, si cubrió las posibles pérdidas potenciales en el valor del portafolio.

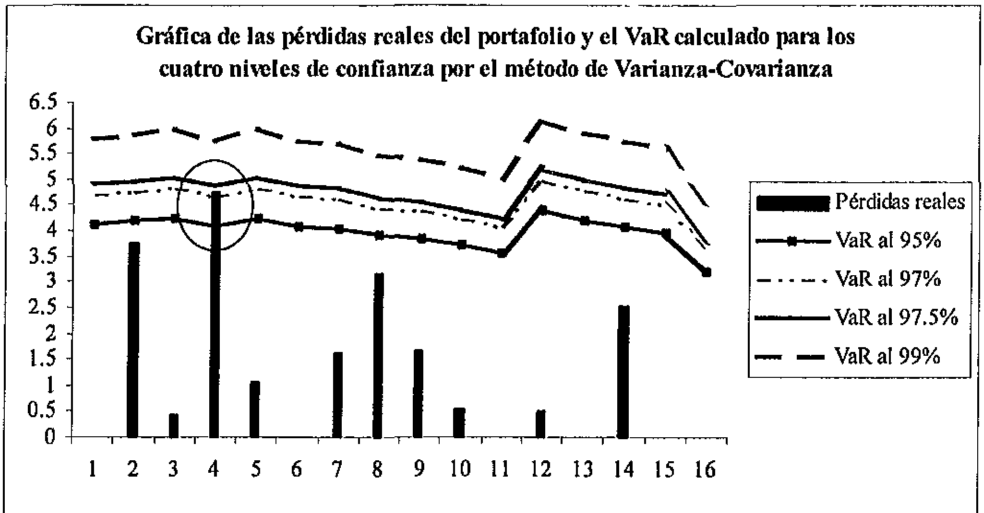
Calculando de forma similar el VaR del portafolio para los 15 días siguientes y para los cuatro niveles de confianza antes mencionados[11], se obtiene que:

Día	*Fecha*	*Ganancias reales*	*VaR al 95%*	*VaR al 97%*	*VaR al 97.5%*	*VaR al 99%*
1	26-Ago	2.5232	$4.1274	$4.7085	$4.9024	$5.7968
2	27-Ago	*-3.7841*	*$4.1861*	$4.7753	*$4.9720*	*$5.8788*
3	30-Ago	*-0.4455*	*$4.2483*	$4.8461	*$5.0456*	*$5.9654*
4	31-Ago	*-4.7490*	*$4.0969*	*$4.6738*	$4.8662	*$5.7541*
5	2-Sep	*-1.0575*	*$4.2517*	$4.8495	*$5.0490*	*$5.9687*
6	3-Sep	1.4012	$4.0925	$4.6683	$4.8605	$5.7465
7	6-Sep	*-1.6424*	*$4.0603*	$4.6319	*$4.8226*	*$5.7023*
8	7-Sep	*-3.1743*	*$3.9047*	$4.4546	*$4.6381*	*$5.4846*
9	8-Sep	*-1.6618*	*$3.8514*	$4.3938	*$4.5748*	*$5.4098*
10	9-Sep	*-0.5734*	*$3.7124*	$4.2355	*$4.4101*	*$5.2155*
11	10-Sep	5.5209	$3.5741	$4.0780	$4.2462	$5.0222
12	13-Sep	*-0.5105*	*$4.3885*	$5.0057	*$5.2116*	*$6.1611*
13	14-Sep	0.1065	$4.2189	$4.8126	$5.0106	$5.9242
14	15-Sep	*-2.5311*	*$4.0779*	$4.6521	*$4.8437*	*$5.7276*
15	17-Sep	5.4000	$3.9724	$4.5317	$4.7183	$5.5793
16	20-Sep	0.1159	$3.2003	$3.6512	$3.8016	$4.4957

Tabla 5.8. Verdaderas ganancias en el valor de mercado del portafolio y sus valores en riesgo estimados desde el 26 de Agosto hasta el 20 de Septiembre de este año al 95%, 97%, 97.5% y 99% de confianza por el método de Varianza-Covarianza.

Gráficamente:

[11] Para cada día se debe calcular la matriz de correlación por el método EWMA.



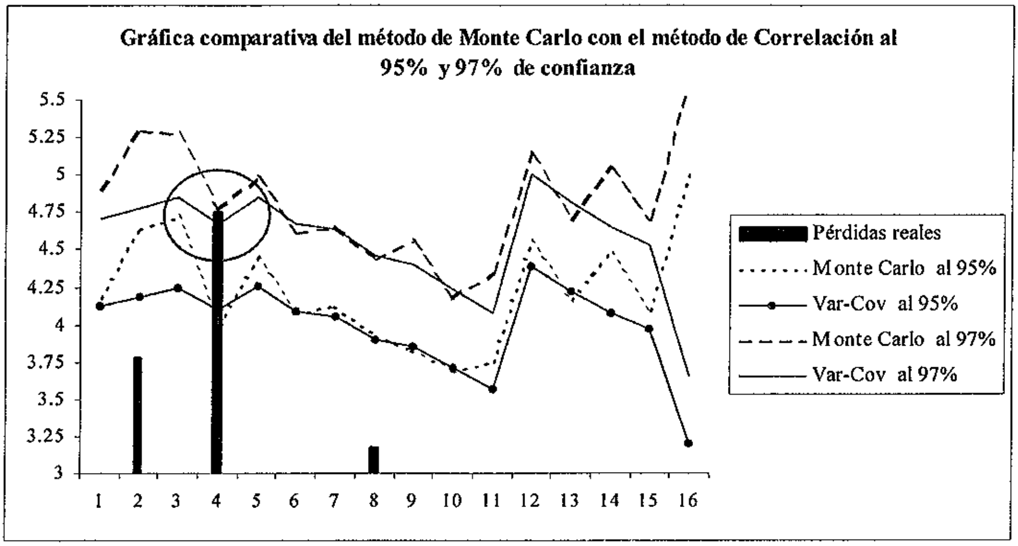
GRÁFICA 5.3. Pérdidas reales del portafolio y su VaR por el método de Varianza-Covarianza al 95%, 97%, 97.5% y 99% de confianza.

Nótese que al igual que el método de Monte Carlo, el de Varianza-Covarianza subestimó las pérdidas posibles en el portafolio para el 31 de Agosto (día 4) al 95% de confianza (ver gráfica 5.3). Para hacer la comparación de ambos métodos, se tomaron en cuenta sólo los días en los que se tuvieron pérdidas en el portafolio.

		VaR al 95%		VaR al 97%		VaR al 97.5%		VaR al 99%	
Fecha	Pérdidas reales	Monte Carlo	Varianza-Covarianza	Monte Carlo	Varianza-Covarianza	Monte Carlo	Varianza-Covarianza	Monte Carlo	Varianza-Covarianza
27-Ago	$3.7844	$4.6896	$4.1861	$5.2938	$4.7753	$5.4961	$4.9720	$6.4018	$5.8788
30-Ago	$0.4455	$4.7204	$4.2483	$5.2705	$4.8461	$5.4356	$5.0456	$6.1252	$5.9654
31-Ago	$4.7490	$3.9988	$4.0969	$4.7622	$4.6738	$4.9384	$4.8662	$6.1745	$5.7541
2-Sep	$1.0575	$4.4446	$4.2517	$4.9736	$4.8495	$5.1666	$5.0490	$5.9115	$5.9687
6-Sep	$1.6424	$4.1216	$4.0603	$4.6486	$4.6319	$4.8676	$4.8226	$5.6351	$5.7023
7-Sep	$3.1743	$3.9198	$3.9047	$4.4311	$4.4546	$4.6339	$4.6381	$5.3620	$5.4846
8-Sep	$1.6618	$3.8262	$3.8514	$4.5472	$4.3938	$4.6985	$4.5748	$5.5089	$5.4098
9-Sep	$0.5734	$3.6820	$3.7124	$4.1722	$4.2355	$4.3843	$4.4101	$5.1774	$5.2155
13-Sep	$0.5105	$4.5528	$4.4883	$5.0306	$5.0057	$5.2874	$5.2016	$6.7834	$6.1611
15-Sep	$2.5311	$4.4715	$4.0779	$5.0363	$4.6521	$5.4264	$4.8437	$6.4208	$5.7276
SUMA=	$20.1295	$42.3772	$40.7781	$48.2660	$46.5183	$50.8345	$48.6437	$59.4999	$57.2679

Tabla 5.9. Verdaderas pérdidas en el valor de mercado del portafolio y sus valores en riesgo estimados desde el 26 de Agosto hasta el 20 de Septiembre de 1999 al 95%, 97%, 97.5% y 99% de confianza por el método de Varianza-Covarianza y de Monte Carlo.

A continuación se presenta el VaR calculado con ambos métodos al 95% y 97%, tomando en cuenta sólo las pérdidas reales mayores a $3, para enfatizar los resultados obtenidos para el 31 de Agosto (día 4):



GRÁFICA 5.4. Pérdidas reales del portafolio mayores a $3 y su VaR calculado por el método de Varianza-Covarianza y por el método de Monte Carlo al 95% y 97% de confianza.

Como se mencionó, el propósito principal del VaR es estimar las máximas pérdidas posibles con un nivel de confianza y horizonte predeterminados, para que con base en esa estimación, se cree un fondo de contingencia que pretende cubrir dichas pérdidas.

Si nos basáramos en los resultados anteriores, se observa en la Tabla 5.9 que las pérdidas reales del portafolio registradas del 26 de Agosto al 20 de Septiembre, suman $20.125. Si nos hubiéramos basado sólo en las estimaciones hechas con el método de Monte Carlo, por ejemplo al 97% de confianza, se hubiera creado un fondo de $48.266, mientras que con el de Varianza-Covarianza el fondo hubiera sido de $46.518. En este caso, se puede observar que el método de Monte Carlo estimula a crear mayores fondos de contingencia.

Prestando más atención a los resultados obtenidos el 31 de Agosto con el nivel de 97% de confianza (ver gráfica 5.4), se observa que la estimación del VaR con el método de Monte Carlo sí cubrió la pérdida registrada en ese día, mientras que la estimación hecha por el método de Correlación todavía no alcanzó a cubrirla.

CONCLUSIONES

Como se ha visto a lo largo de este trabajo, es de suma importancia que cualquier institución expuesta al riesgo de mercado, considere al método de *value at risk* como un método complementario de los tradicionales que miden el riesgo de tasa de interés como duración, convexidad y análisis GAP, entre otros. Lo anterior, debido a que se piensa que el VaR puede señalar de alguna manera a la empresa de un probable desastre financiero como los ocurridos hace años en empresas como Orange County, Barings, Metallgesellschaft y Daiwa, entre otras de las entidades financieras del mundo, que perdieron millones de dólares en los mercados financieros. Estas pérdidas en la mayoría de los casos, se debieron a una deficiente atención en la exposición a los riesgos de mercado. Muchas de estas y otras empresas, se preguntaron si el VaR hubiera evitado estos desastres financieros. Lo que sí es un hecho es que hubiera servido como una buena medida de la administración del riesgo, para darle una mayor importancia y atención a su exposición al riesgo y no las hubieran llevado a una posible quiebra por falta de liquidez.

En los últimos años, la administración de riesgos financieros se ha convertido ya en una herramienta no sólo necesaria, sino esencial para la sobrevivencia de cualquier actividad empresarial y el VaR es sólo una herramienta en ésta administración, ya que de ninguna manera sustituye el buen juicio y la experiencia de los administradores de riesgo. Una vez que el riesgo al que se está expuesto es identificado, el siguiente paso es asesorarse sobre la forma óptima de protegerse contra ese riesgo. En este sentido, el VaR puede servir como un "colchón" para la empresa, de manera que le ayude a cubrirse contra las pérdidas potenciales que pudiera generar en el horizonte en el que se estimaron dichas pérdidas.

Aún así, el VaR no es una panacea; al igual que cualquier estimación estadística, debe tomarse con precaución, ya que su cálculo se basa en supuestos que en la vida real no siempre se cumplen, además de que no prevendrá de una fatal pérdida que pueda llegar a ocurrir. Más aún, no hay una forma aceptada globalmente para calcularlo y los diferentes métodos utilizados en la actualidad, dan resultados distintos. Los métodos de Varianza-Covarianza, Simulación Histórica y Monte Carlo, no son los únicos que se utilizan en el cálculo del VaR, existen otros más complicados pero menos usados en la práctica.

El administrador de riesgo en cada empresa, decidirá cuál método es el que mejor se ajusta a las necesidades y objetivos de su institución. Se sugiere el método de Varianza-Covarianza si el portafolio de interés no contiene un número significativo de instrumentos no lineales, pero si este es el caso, el método de Monte Carlo es el más apropiado, aunque también es el más costoso, por lo que podría utilizarse el de Simulación Histórica. Es importante mencionar que tanto el método analítico como el método de Monte Carlo, dependen en gran parte de la calidad con la que se estime a σ. Esto es, si la volatilidad de los rendimientos es alta o baja en el periodo en que se calcula el VaR, la estimación de la volatilidad debe reflejarlo. Este es un problema que tiene el método de Simulación Histórica, ya que aunque en la estimación del VaR está implícita la volatilidad de los rendimientos, no se pueden identificar los periodos de volatilidad alta y los de volatilidad baja. Si se pasa por alto esta dificultad y no se desea hacer supuestos distribucionales sobre los rendimientos, se podría utilizar el método de Simulación Histórica para calcular el VaR. Aunque si la empresa cuenta con un área eficiente de administración de riesgos, se puede elegir una combinación de estos tres métodos, siempre y cuando, se ajuste a los perfiles de la institución.

En el portafolio analizado en el quinto capítulo, se pudo ver que el método de Monte Carlo estimula a crear fondos más grandes, de manera que si llega a haber una pérdida muy grande en el valor de mercado del portafolio, el método de Monte Carlo la cubrirá con mayor precisión.

En el método de Monte Carlo, se simularon los rendimientos de los instrumentos que componen el portafolio generando variables aleatorias normales estándar, pero si se tienen dudas sobre la distribución normal de los rendimientos, se puede cambiar la distribución del simulador, por ejemplo, se pueden generar variables aleatorias t-student.

También nos dimos cuenta de que si se desea cambiar el nivel de confianza, en el caso del método de Monte Carlo es más fácil estimar el VaR que con el método analítico. Por ejemplo, para calcular el VaR al 97% por Monte Carlo, sólo nos fijamos en el dato 30 para 1,000 escenarios simulados de las pérdidas en el valor del portafolio, en cambio, en el caso del método de Varianza-Covarianza se tuvo que volver a calcular todo de nuevo, pero ahora utilizando el cuantil 1.881, el cual representaba el 97% deseado.

Es importante no ver el valor en riesgo como un límite superior estricto de las pérdidas en las que puede incurrir un portafolio de inversión, pero si como una buena estimación de dichas pérdidas, ya que sólo es una forma de "encapsular" los riesgos de mercado de una empresa y hay que considerar que es un número que puede tener errores. El VaR no es perfecto al ser sólo una aproximación local de la exposición al riesgo, es sólo un número que aunque muy útil, debe respaldarse con información adicional. En otras palabras, es una medida necesaria pero no suficiente.

Finalmente, es indispensable mencionar el campo de estudio y el análisis abierto existente en materia de administración de riesgos, así como en sus herramientas entre éstas el VaR. Es importante que nosotros los actuarios nos adentremos en estos temas, ya que nos ayudarán a tener una mejor visión de cómo administrar de forma eficiente los riesgos de una empresa.

Apéndice A

LEY DE FISHER

Como se mencionó en la sección 1.4 del capítulo 1, la tasa nominal y la tasa real están relacionadas mediante la Ley de Fisher.

Si se llama Q_1 a la cantidad de bienes y servicios disponibles para consumirse en el periodo uno, y Q_2 a la cantidad de bienes y servicios disponibles para ser consumidos en el periodo dos, entonces la tasa real se definiría como:

$$\textit{tasa de interés real} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}.$$

La *tasa de interés nominal* toma en cuenta el cambio en el precio de los bienes y servicios, es decir, evalúa la cantidad de bienes y servicios en cada periodo de tiempo y su precio vigente. Si el nivel de precios en conjunto de todos los bienes y servicios, en los periodos uno y dos son P_1 y P_2 respectivamente, la tasa de interés nominal puede expresarse como:

$$\textit{tasa de interés nominal} = \frac{P_2 Q_2 - P_1 Q_1}{P_1 Q_1}.$$

Se puede decir que la tasa nominal es la tasa que incluye a la tasa esperada de inflación del mercado, y la tasa real, a la inflación neta. Dicha *tasa de inflación* entre los periodos uno y dos, se define como:

$$\textit{tasa de inflación} = \frac{P_2 - P_1}{P_1}.$$

La tasa nominal es expresada como la suma de la tasa de interés real, la tasa de inflación y el producto de la tasa de interés real y la tasa de inflación:

$$\frac{P_2Q_2 - P_1Q_1}{P_1Q_1} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} + \frac{P_2 - P_1}{P_1} + \frac{(Q_2 - Q_1)(P_2 - P_1)}{Q_1P_1},$$

Tasa nominal = tasa real + tasa de inflación + (tasa real × tasa de inflación).

Pero, dado que el producto de la tasa real y la tasa de inflación es muy pequeño para ser significativo se elimina, y la ecuación anterior se reduce a:

Tasa nominal = tasa real + tasa de inflación,

es decir,

$$r_T = r_R + \%\Delta P.$$

A la relación anterior se le conoce como la Ley de Fisher.

Apéndice B

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

- **Definición.** Sea Ω un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Una **variable aleatoria (v.a.)**, X, es una función que asigna a cada uno de los elementos de Ω, un número real:

$$X: \Omega \longrightarrow R$$

- **Definición.** Sea X una variable aleatoria. Si el número de valores posibles, x, de X es finito o infinito numerable, se llama a X **variable aleatoria discreta**; por el contrario, si dichos valores son infinitos no numerables, la **variable aleatoria** es **continua.**

- **Definición.** Sea X una v.a. discreta. La función $f_X(x)=P(X=x)$, es la **función de probabilidad** de la v.a. X, si satisface:

  a) $f_X(x) \geq 0 \qquad \forall x.$
  b) $\sum_{x} f_X(x) = 1.$

  Observación: En general, a una gráfica, tabla o función matemática que establezca los posibles valores de una v.a. discreta, así como su probabilidad de ocurrencia, se le llamará función de probabilidad.

  Análogamente para una v.a. continua X, la función $f_X(x)$ es la **función de densidad de probabilidad (f.d.p.)** de X, si satisface:

  a) $f_X(x) \geq 0 \qquad \forall x.$
  b) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1.$

- **Definición.** Sea X una v.a. y f(x) la función de probabilidad (o densidad) asociada a X. La **función de distribución acumulada (f.d.a.)** de X, $F_X(x)=P(X\leq x)$, se define como:

$$F_X(x) = \begin{cases} \sum_{X \leq x} f(x) & \text{si x es una v.a discreta} \\ \int_{-\infty}^{x} f(s)ds & \text{si x es una v.a continua} \end{cases}$$

Resultados:

a) La función F es no decreciente.

b) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0.$

c) $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1.$

d) Si $\exists$ una sucesión x_n decreciente con $n \geq 1$ que converge a x, $\forall x \Rightarrow \lim_{n \to \infty} F_{X_n}(x_n) = F_X(x)$.

Observación: A veces a la f.d.a de una v.a. discreta se le llama función de probabilidad acumulada, y a la de una v.a. continua, función de distribución.

- **Definición.** Las variables aleatorias X, Y se dicen **independientes (v.a.i.)** si y sólo si:

  - $P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$, si X y Y son v.a. discretas.
  - $f(x,y) = g(x)h(y)$, si X y Y son v.a. continuas.

Observación: La función f es la f.d.p. conjunta, y las funciones g y h son las f.d.p. marginales.

- **Definición.** Sea X una v.a y f(x) la función de probabilidad (o densidad) asociada a X, el **valor esperado** de X, denotado por E(X), es definido como:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{x} x f(x) & \text{en el caso discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx & \text{en el caso continuo} \end{cases}$$

Observaciones:

i) Al valor esperado también se le conoce como esperanza matemática o primer momento y se denota muchas veces como μ.

ii) Asumiendo que las observaciones de la v.a. son i.i.d, la E(X) se estima sobre cierto periodo de tiempo como la suma ponderada de todos los valores posibles de $X=[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ cada uno ponderado por su probabilidad de ocurrencia (1/n), a esta estimación se le conoce también como la media muestral: $\hat{\mu} = \bar{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$.

❑ **Definición.** Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad (o densidad) $f_X(x)$, y sea Y=H(X). La **esperanza matemática** o valor esperado de Y es:

$$E(Y) = E[H(X)] = \begin{cases} \sum_x H(x) f_X(x) & \text{si X es una v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} H(x) f_X(x) dx & \text{si X es una v.a. continua} \end{cases}$$

Observaciones:

i) A la definición anterior se le conoce como Ley del Estadístico Inconsciente.

ii) La esperanza matemática es sólo un valor esperado de la variable aleatoria, no necesariamente la variable tomará ese valor de manera exacta.

Propiedades de la esperanza

Sean X, Y variables aleatorias y a, b constantes reales y fijas, las propiedades de la esperanza son:

a) E(aX) = a E(X).
b) E(aX ± bY) = a E(X) ± b E(Y).
c) E(a) = a.
d) E(XY) = E(X) E(Y), si X y Y son v.a.i.

❑ **Definición.** Sea X una variable aleatoria. Se define la **varianza** de X, denotada por V(X), como: $V(X)=E[\{X-E(X)\}^2]$.

Observaciones:

i) La varianza puede estimarse como la suma ponderada de las desviaciones de los valores que toma la v.a. X respecto a su media, al cuadrado: $\hat{\sigma}^2 = s^2 = \sum_{i=1}^{n} 1/n[x_i - E(X)]^2$, a esta estimación se le conoce como varianza muestral.

ii) Algunas veces se pondera la estimación anterior con 1/(n-1), debido a sus propiedades estadísticas.

iii) A la varianza se le conoce también como segundo momento.

Propiedades de la varianza

Sean X, Y variables aleatorias y a, b constantes reales y fijas, las propiedades de la varianza son:

a) $V(aX) = a^2 V(X)$.
b) V(a) = 0.
c) $V(aX \pm bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) \pm 2ab\, COV(X,Y)$.
d) $V(aX \pm bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$, si X y Y son v.a.i.

- **Definición.** A la raíz cuadrada positiva de la varianza de X, se le llama **desviación estándar** de X y se denota por DE(X).

- **Teorema.** $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

  Observaciones:
  i) La V(X) está expresada en unidades cuadradas de X, por lo que no se puede comparar de manera directa con la media. Por ello, se utiliza la desviación estándar o volatilidad de X.
  ii) A la varianza de X comúnmente se le denota como σ_X^2, y a la desviación estándar de X como σ_X.

- **Definición.** Sean X, Y variables aleatorias. La **covarianza** de X y Y se define como:

$$COV(X, Y) = E[\{X-E(X)\}\{Y-E(Y)\}].$$

Propiedades de la covarianza

Sean X, Y variables aleatorias y a_j, b_i constantes reales y fijas, las propiedades de la covarianza son:

a) $COV(X,Y) = COV(Y,X)$.
b) $COV(X,Y) = 0$, si X,Y son v.a.i.
c) $COV(\sum_{j=1}^{m} a_jX_j, \sum_{i=1}^{m} b_iY_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_jb_iCOV(X_j,Y_i)$.
d) $COV(X,X) = V(X)$.

- **Teorema.** $COV(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

  Notación: La covarianza de X y Y suele denotarse como σ_{XY}.

- **Definición.** La matriz de **varianza-covarianza** es una matriz simétrica cuyas entradas se definen como:

$$\sum_{ij} = \begin{cases} \sigma_i^2 & \text{con } i = j \\ \sigma_{ij} & \text{con } i \neq j \end{cases}$$

- **Definición.** Sean X, Y variables aleatorias. El **coeficiente de correlación** de X y Y se define como:

$$\rho(X,Y) = COV(X,Y)/[DE(X)\ DE(Y)].$$

  Observación: $-1 \leq \rho \leq 1$.

- **Definición.** Una v.a. X tiene una **distribución normal** (o Gaussiana), si su f.d.p. es de la forma:

$$f(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \qquad -\infty < x < \infty$$

Notación: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ denota que la v.a. X se distribuye normal con parámetros μ, σ^2.

Resultado: Si la desviación estándar de X es relativamente grande, la gráfica de $f_X(x)$ tiende a ser plana y "pesada"; mientras que, si es relativamente pequeño, dicha gráfica tiende a ser "aguzada" y estrecha.

Propiedades de la Distribución normal

a) La distribución normal se caracteriza por su media, la cual indica la localización de la distribución, y su varianza, la cual señala su dispersión.
b) La distribución normal es simétrica con respecto a su media.
c) La suma y diferencia de v.a normales se distribuye también de manera normal.

❑ **Teorema.** Sean X, Y variables aleatorias. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ y si $Y = aX+b$, entonces $Y \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$.

❑ **Corolario.** Si $a=1/\sigma$ y $b=-\mu/\sigma$, entonces se obtiene que la v.a Y se distribuye normal con media cero y varianza uno: $Y \sim N(0,1)$. Su función de densidad de probabilidad es de la forma:

$$f(y) = \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right]$$

Observaciones:
i) A la distribución N(0, 1), se le conoce como distribución normal estándar.
ii) Una distribución es normal estándar, si el 68% de los datos se encuentra a una desviación estándar de la media; el 95% a dos desviaciones estándar de la media; y el 99%, a tres desviaciones estándar de la media.

❑ **Definición.** Una variable aleatoria X tiene una **distribución log-normal**, si log(X) se distribuye de manera normal.

❑ **Definición.** El **sesgo** es una medida de la simetría de una distribución. Si la distribución tiene una tendencia positiva, se dice que esta sesgada a la derecha; si la tendencia es negativa, se dice que está sesgada a la izquierda; y si la distribución es simétrica, se dice que no tiene sesgo.

Observaciones:
i) El sesgo de una distribución normal es cero.
ii) El sesgo muestral se mide como:

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{(xx_i - \hat{\mu})^3}{\hat{\sigma}^{3/2}}.$$

❑ **Definición.** La **curtosis** es una medida del grado de "aplanamiento" de una distribución.

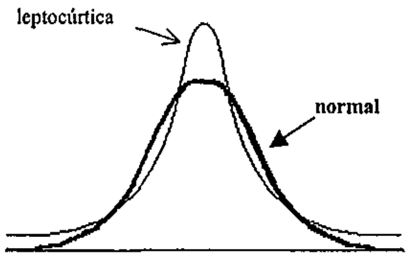
Observaciones:

i) La curtosis de una distribución Normal es 3.

ii) La curtosis muestral se calcula como:

$$\hat{k} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\hat{\mu})^4}{\hat{\sigma}^4}.$$

iii) Las distribuciones con leptocurtosis son distribuciones con "colas pesadas".



- **Definición.** Sea X una v.a. y f(x) la función de densidad asociada a X. Los **cuantiles** de una distribución son los puntos q tales que el área a su derecha (o izquierda) representa una probabilidad α.

$$\alpha = P(X \geq q) = \int_q^{+\infty} f(x)dx$$

- **Definición.** Un intervalo aleatorio (a, b) $\subset$ R se dice un **intervalo de confianza** para un parámetro θ, si:

$$P(a< \theta <b) = 1-\alpha \text{ , con } 0<\alpha<1.$$

Observaciones:

i) A los extremos del intervalo se les conoce como límite inferior de confianza y límite superior de confianza.

ii) Lo que se quisiera es que dichos intervalos fueran lo más estrechos posibles y que contuvieran al parámetro con una alta probabilidad.

iii) A la probabilidad de que un intervalo de confianza contenga al parámetro de interés, se le conoce como *coeficiente de confianza* y se denota como 1-α.

- **Definición.** El **análisis de regresión** es una técnica estadística usada para estimar la relación lineal entre variables.

- **Definición.** La **regresión lineal simple** se utiliza para estimar la relación lineal entre una variable aleatoria independiente X y una variable aleatoria dependiente Y. El modelo de regresión lineal simple es:

$$Y = \alpha+\beta X+e$$

donde,

α = translación de la recta de regresión, si es cero, pasa por el origen,
β = inclinación de la recta de regresión (pendiente),
e = error de predicción.

Supuestos para los errores de predicción:

- son variables aleatorias independientes.
- $e_i \sim N(0, \sigma^2)$ con σ^2 constante y desconocida.
- $\text{cov}(e_i, e_j) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Observaciones:
i) El estimador por máxima verosimilitud de la varianza de los errores es:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n},$$

donde $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i$, son las predicciones o estimaciones de la variable dependiente Y, hechas con la línea de predicción.
ii) A la diferencia entre las observaciones verdaderas y_i y las predicciones $\hat{y}_i$, se le conoce como *residuo.*
iii) Los parámetros α y β se estiman por el método de mínimos cuadrados. Los estimadores obtenidos son los que minimizan el error e:

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x},$$

$$\hat{\beta} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)} = \frac{COV(x,y)}{V(X)}.$$

- **Definición.** La **regresión lineal múltiple,** se utiliza cuando se desea conocer la relación lineal entre k variables independientes y una dependiente. El modelo de regresión lineal múltiple, teniendo n observaciones de cada variable, es:

$$\underline{Y} = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{e}$$

donde,

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \underline{X} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \qquad \underline{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \qquad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

Observaciones:

i) $x_i' = [1 \quad x_{1i} \quad x_{2i} \quad \dots \quad x_{ki}]$, con x_{ji} = i-ésima observación de la j-ésima v.a

ii) Los estimadores correspondientes de este modelo son:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \underline{x'_i}\underline{\hat{\beta}})^2}{n},$$

$$\underline{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1} (X'\underline{Y}).$$

Apéndice C

MERCADO DE VALORES

$$\text{Mercado de Valores}\begin{cases}\text{Mercado de Dinero}\\ \text{Mercado de Metales amonedados}\\ \text{Mercado de Capitales}\begin{cases}\text{Instrumentos de renta } \textit{variable (acciones)}\\ \text{Instrumentos de deuda (bonos)}\end{cases}\end{cases}$$

- ❑ **Definición.** El **Mercado de Valores** es un conjunto de leyes, reglamentos e instituciones tendientes a poner en contacto la oferta y la demanda de títulos de crédito. Se divide en *Mercado de Dinero, Mercado de Metales amonedados* y *Mercado de Capitales.*

- ❑ **Definición.** El objetivo del **Mercado de Dinero** es financiar capital de trabajo (para emisores privados) y el gasto corriente. Además, regula el circulante monetario para el gobierno.

- ❑ **Definición.** La inversión en los **metales amonedados** tiene como objetivo la utilización posterior del metal para algún fin industrial o como cobertura, ya que los precios de estos activos se encuentran indexados a cotizaciones internacionales.

- ❑ **Definición.** El objetivo del **Mercado de Capitales** es financiar la formación de activos fijos y se divide en instrumentos de renta variable, como las acciones, e instrumentos de deuda, como los bonos.

- ❑ **Definición.** Una **acción** es un título que representa los derechos de un socio sobre una parte del capital social de una empresa organizada en forma de sociedad y además, estima el valor de la empresa que emite la acción. Existen diferentes **tipos de acción**: al portador, nominativa (expedida a nombre de la persona que aporta el capital), preferente (le confiere derechos especiales de tipo patrimonial, pero con limitaciones en el voto) y la acción ordinaria (le otorga derechos iguales a todos sus poseedores).

Observación: Las acciones confieren derechos *corporativos* (propiedad de la empresa) y derechos *patrimoniales* (participación en el capital de la empresa). El ejercicio de los derechos patrimoniales, así como algunas disposiciones administrativas, originan cambios en las cuentas de capital de las empresas y ajustes en el precio de mercado de las acciones (precio ajustado técnico).

❑ **Definición.** La **bursatilidad** de una acción es la facilidad con que se puede comprar o vender la acción en el mercado de valores, es otras palabras, es el grado de negociabilidad de un valor cotizado a través de la Bolsa y tiene cuatro categorías: alta, media, baja y nula o no bursátil.

❑ **Definición.** Los **bonos** son contratos de deuda a largo plazo, emitidos por bancos, corporaciones, gobiernos, empresas privadas y públicas, agencias, etc. Al momento de emitir un bono, se establece un contrato en el que el emisor se compromete a pagar al tenedor del bono, la cantidad que le fue prestada más un interés, en un periodo de tiempo determinado. Así, a partir de la fecha de emisión, todos los flujos de efectivo (excepto las ganancias por reinversión) son conocidos.

Observación: La emisión (colocación) de bonos puede ser de manera privada o pública. Las emisiones privadas se colocan entre un número determinado de instituciones y son adquiridas por un número reducido de inversionistas; en cambio, las emisiones públicas son ofrecidas por bancos e instituciones financieras a un mayor número de inversionistas

Características de los bonos

❑ **Definición.** El **cupón** de un bono, es el pago periódico del interés que el tenedor del contrato recibe, durante la vida del mismo; generalmente es pagado en montos iguales semianuales.

❑ **Definición.** La **fecha de vencimiento** de un bono, es aquella en la que el emisor del bono efectúa el último pago al tenedor. Normalmente, los bonos tienen un vencimiento mayor o igual a 10 años.

❑ **Definición.** El **principal** o valor nominal de un bono, es la cantidad que pagará el deudor a la persona o institución que le hizo el préstamo, al vencimiento del bono. Generalmente se establece un valor nominal de $100 o múltiplos.

❑ **Definición.** La **tasa cupón** de un bono, es la tasa que determina el cupón que se le entregará al tenedor del bono y se expresa como un porcentaje del valor nominal del bono.

❑ **Definición.** El **rendimiento al vencimiento** de un bono, r_T, se define como la tasa de interés que iguala el valor presente de los flujos de efectivo al valor de mercado del bono.

Observación: Cuando el bono se vende a descuento, el rendimiento al vencimiento siempre es mayor a la tasa cupón; si se vende arriba de la par, el rendimiento al vencimiento es menor a la tasa cupón; finalmente el rendimiento al vencimiento y la tasa cupón son iguales, si el bono se vende a la par.

- **Definición.** El **valor de mercado de un bono** P (el cual depende de su vencimiento, cupones y tasa de interés), se define como el valor presente de los futuros flujos de efectivo esperados de ese bono:

$$P=\sum_{t=1}^{T}\frac{C}{\left(1+\left[r_T\times n/360\right]\right)^t}+\frac{M}{\left(1+\left[r_T\times n/360\right]\right)^T}$$

donde,

C = pago del cupón correspondiente,
T = número de periodos totales para el vencimiento (anuales, semianuales u otros),
r_T = rendimiento al vencimiento del bono,
n = periodo en que se paga cupón al año,
M = pago principal al vencimiento del bono, llamado valor nominal del bono.

- **Definición.** Los **bonos cupón cero,** son bonos cotizados a descuento que no incluyen pagos de cupones, sólo se acuerda un pago al vencimiento: el valor nominal del bono. La ganancia para los inversionistas resulta de la diferencia entre el precio de compra y el de venta. Su valor de mercado se calcula como:

$$P=M\left(1+\left[r_T\times n/360\right]\right)^{-T}$$

- **Definición.** Un **bono a tasa fija** es aquel cuya tasa de cupón no varía.

- **Definición.** Un **bono a tasa flotante** es aquel bono cuya tasa cupón es variable.

Algunos resultados relacionados con el precio de un bono son:

- El precio del bono está inversamente relacionado con su rendimiento; de manera que, si las tasas de interés de la economía se incrementan, el precio del bono disminuye y viceversa.
- Para una fecha de vencimiento dada, las ganancias del capital resultantes de un decremento en las tasas, son siempre mayores que las pérdidas del capital resultantes de un incremento en las tasas.
- Entre mayor sea la tasa cupón, menor es el cambio porcentual en el precio de un bono, resultado de un cambio en tasas.

Apéndice D

LÍNEA DEL MERCADO DE VALORES

Uno de los supuestos del modelo CAPM (mencionado en la sección 2.2.1 del capítulo 2), se refiere a que el único factor que afecta el rendimiento de un instrumento es el mercado. Esta relación entre el rendimiento de un instrumento y el mercado, a veces llamada modelo de mercado, se expresa como:

$$R_{it}=\alpha_i+\beta_i R_{Mt}+\varepsilon_{it},$$

donde,

R_{it} = rendimiento del activo i en el periodo t,
R_{Mt} = rendimiento del portafolio de mercado en el periodo t,
α_i = término igual al valor promedio de los rendimientos no sistemáticos del activo i,
β_i = término que relaciona el cambio en el rendimiento del activo i con el cambio del rendimiento del portafolio de mercado,
ε_{it} = error aleatorio con media igual a cero, que refleja el riesgo no sistemático asociado con la inversión en un activo.

Para conocer el riesgo del rendimiento del activo i, se obtiene la varianza de la ecuación anterior:

$$V(R_{it})=V(\alpha_i)+V(\beta_i R_{Mt})+V(\varepsilon_{it}),$$

como α_i y β_i son constantes:

$$V(R_{it})=\beta_i^2 V(R_{Mt})+V(\varepsilon_{it}),$$

pero en un portafolio bien diversificado (suposición del CAPM), el riesgo no sistemático es eliminado, por lo que la ecuación anterior se reduce a:

$$V(R_{it}) = \beta_i^2\ V(R_{Mt}),$$

despejando a β_i^2 y sacando raíz cuadrada, se obtiene:

$$\beta_i = \frac{\mathrm{DE}(\mathrm{R}_{it})}{\mathrm{DE}(\mathrm{R}_{Mt})}.$$

Análoga a la ecuación de la línea de mercado de capitales (ecuación 2.7 del segundo capítulo), la relación entre los rendimientos esperados de un instrumento *i* y su desviación estándar es:

$$E(R_i) = R_f + \frac{\left[E(R_M) - R_f\right]}{DE(R_M)} DE(R_i),$$

sustituyendo $\beta_i = \frac{\mathrm{DE}(\mathrm{R}_i)}{\mathrm{DE}(\mathrm{R}_M)}$ en la ecuación anterior, se obtiene la línea del mercado de valores:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i\left[E(R_M) - R_f\right].$$

La estimación estadística de β_i, en base al análisis de regresión, es:

$$\beta_i = \frac{COV(R_i, R_M)}{V(R_M)},$$

de esta manera, la ecuación de la línea de mercado de valores se puede escribir como:

$$E(R_i) = R_f + \frac{COV(R_i, R_M)}{V(R_M)}\left[E(R_M) - R_f\right].$$

Apéndice E

COEFICIENTE BETA

En la siguiente tabla se encuentran las tasas de rendimiento porcentuales diarias correspondientes a las acciones GMODELOC y APASCO, así como los rendimientos porcentuales del IPC:

	APASCO	GMODELOC	IPC
Fecha	%Rendimiento	%Rendimiento	%Rendimiento
30 Jun. '98			
1 Jul. '98	6.17480	-0.65607	3.20474632
2 Jul. '98	0.99305	-1.91699	[illegible]
3 Jul. '98	1.76302	-5.02751	1.16539278
6 Jul. '98	-1.96084	2.47265	[illegible]
7 Jul. '98	3.31091	3.552286	2.21314969
8 Jul. '98	0.57306	1.861755	[illegible]
9 Jul. '98	0.75901	-1.59365	-0.89371517
10 Jul. '98	0.18921	1.593659	[illegible]
⋮	⋮	⋮	⋮
23 Nov. '98	6.30129	0.48899	[illegible]

A continuación se muestra el cálculo de $\beta_{GMODELOC}$ y β_{APASCO}, mencionadas en la sección 2.2.1 del capítulo 2. Este cálculo se hizo utilizando la herramienta de análisis de regresión que provee Excel. El modelo de análisis de regresión tomando *i=GMODELOC, APASCO* es el siguiente:

$$r_i=\alpha_i+\beta_i\, r_{IPC}+\varepsilon_i,$$

donde,

r_t = rendimiento de la acción *i* del 1 de Julio de 1998 al 23 de Noviembre del mismo año,
r_{IPC} = rendimiento del IPC en el periodo antes mencionado,

α_i = término igual al valor promedio de los rendimientos no sistemáticos de la acción i,

β_i = término que relaciona el cambio en la acción i con el cambio del rendimiento del IPC,

ε_{it} = error aleatorio con media igual a cero, que refleja el riesgo no sistemático asociado con la inversión en una acción.

Los resultados correspondientes a la acción GMODELO C son:

Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0.603355812
Coeficiente de determinación R^2	0.364038236
R^2 ajustado	0.357548831
Error típico	2.899096413
Observaciones	100

ANÁLISIS DE VARIANZA

	Grados de libertad	*Suma de cuadrados*	*Promedio de los cuadrados*	*F*
Regresión	1	471.4844669	471.4844669	56.09731466
Residuos	98	823.6664809	8.404760009	
Total	99	1295.150948		

	Coeficientes	*Error típico*	*Estadístico t*	*Probabilidad*
Intersección	0.056551014	0.289930169	0.195050463	0.845757254
BETA(GMODELOC)	***0.719054507***	0.09600432	7.489814061	3.05828E-11

La estimación estadística de $\beta_{GMODELOC}$, en base al análisis de regresión, es:

$$\beta_{GMODELOC} = \frac{Cov(r_{GMODELOC}, r_{IPC})}{V(r_{IPC})} = \frac{6.5570059}{9.1189274} = 0.7190545\,.$$

Finalmente, los resultados correspondientes a la acción APASCO son:

Estadísticas de la regresión	
Coeficiente de correlación múltiple	0.68699396
Coeficiente de determinación R^2	0.4719607
R^2 ajustado	0.466572544
Error típico	3.078740881
Observaciones	100

ANÁLISIS DE VARIANZA

	Grados de libertad	*Suma de cuadrados*	*Promedio de los cuadrados*	*F*
Regresión	1	830.2558483	830.2558483	87.5922468
Residuos	98	928.9072505	9.478645413	
Total	99	1759.163099		

	Coeficientes	*Error típico*	*Estadístico t*	*Probabilidad*
Intercepción	-0 146758259	0.307895888	-0.476648973	0 6346732
BETA(APASCO)	***0.954188306***	0.101953293	9.359072966	2 9797E-15

Con base al análisis de regresión, β_{APASCO} es igual a:

$$\beta_{APASCO} = \frac{Cov(r_{APASCO}, r_{IPC})}{V(r_{IPC})} = \frac{8.701174}{9.1189274} = 0.9541883.$$

Apéndice F

DURACIÓN

A continuación se muestra el desarrollo para obtener la ecuación de sensibilidad del precio de un bono a cambios en la tasa de rendimiento, mencionada en la sección 2.2.3 del capítulo 2.

El precio de un bono que paga cupones se calcula como:

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1 + r_T)^t},$$

donde,

C_t = pago correspondiente al periodo t. $C_t = C$ para t=1,...,T-1 y $C_T = C + M$, donde M es el valor nominal del bono y C es el cupón del bono.
T = número de periodos totales para el vencimiento (anuales, semianuales u otros),
r_T = rendimiento al vencimiento del bono.

Se diferencia el precio del bono, con respecto a la tasa de interés r_T:

$$\frac{dP}{dr_T} = -t \sum_{t=1}^{T} C_t (1 + r_T)^{-(t+1)},$$

$$= - \sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{(1 + r_T)^{t+1}},$$

otra manera de escribirla es:

$$\frac{dP}{dr_T} = - \frac{1}{(1 + r_T)} \sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{(1 + r_T)^t}.$$

Al diferenciar de nuevo con respecto a la tasa de interés, se obtiene la segunda diferencial del precio del bono, mencionada en la sección 2.2.4:

$$\frac{d^2P}{dr_T^2}=\sum_{t=1}^{T}\frac{(t+1)tC_t}{(1+r_T)^{t+2}},$$

$$\frac{d^2P}{dr_T^2}=\frac{1}{(1+r_T)^2}\sum_{t=1}^{T}\frac{(t+1)tC_t}{(1+r_T)^t}.$$

A continuación se hará el análisis matemático de la relación duración-cupón, tomando en cuenta que t, C_t, r_T y P son positivos, y que además C_t y t son mayores a uno.

Para conocer la dirección de la curva duración-cupón, se diferencia la fórmula de la duración Macaulay con respecto al cupón C.

$$\text{Duración}=(1/P)\sum_{t=1}^{T}\frac{tC_t}{(1+r_T)^t}=(1/P)\left(C\sum_{t=1}^{T}\frac{t}{(1+r_T)^t}+\frac{T\times M}{(1+r_T)^t}\right),$$

$$\frac{dD}{dC}=\frac{P\dfrac{d\left(C\sum_{t=1}^{T}\frac{t}{(1+r_T)^t}+\frac{T\times M}{(1+r_T)^t}\right)}{dC}-\left(C\sum_{t=1}^{T}\frac{t}{(1+r_T)^t}+\frac{T\times M}{(1+r_T)^t}\right)\dfrac{dP}{dC}}{P^2},$$

dado que $\dfrac{d\left(C\sum_{t=1}^{T}\frac{t}{(1+r_T)^t}+\frac{T\times M}{(1+r_T)^t}\right)}{dC}=\sum_{t=1}^{T}\frac{t}{(1+r_T)^t}$,

$$\Rightarrow\frac{dD}{dC}=\frac{P\sum_{t=1}^{T}\frac{t}{(1+r_T)^t}}{P^2}-\frac{\left(C\sum_{t=1}^{T}\frac{t}{(1+r_T)^t}+\frac{T\times M}{(1+r_T)^t}\right)\frac{dP}{dC}}{P^2},$$

como $\dfrac{dP}{dC}=\sum_{t=1}^{T}\dfrac{1}{(1+r_T)^t}$ y es una progresión geométrica de razón $\dfrac{1}{1+r_T}$, se escribe como:

$\dfrac{dP}{dC}=\dfrac{\frac{1}{1+r_T}\left[\left(\frac{1}{1+r_T}\right)^T-1\right]}{\left(\frac{1}{1+r_T}\right)-1}$ multiplicando por $\dfrac{-(1+r_T)}{-(1+r_T)}$ y simplificando, se obtiene que:

$$\frac{dP}{dC}=\frac{1-(1+r_T)^{-T}}{r_T}\Rightarrow\frac{dD}{dC}=\frac{P\sum_{t=1}^{T}\frac{t}{(1+r_T)^t}}{P^2}-\frac{\left(C\sum_{t=1}^{T}\frac{t}{(1+r_T)^t}+\frac{T\times M}{(1+r_T)^t}\right)\left(\frac{1-(1+r_T)^{-T}}{r_T}\right)}{P^2}.$$

Ahora, $\dfrac{dD}{dC}<0\Leftrightarrow P\sum_{t=1}^{T}\dfrac{t}{(1+r_T)^t}<\left(C\sum_{t=1}^{T}\dfrac{t}{(1+r_T)^t}+\dfrac{T\times M}{(1+r_T)^t}\right)\left(\dfrac{1-(1+r_T)^{-T}}{r_T}\right)$, pero $P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_T)^t} = C\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+r_T)^t} + \frac{M}{(1+r_T)^T}$, entonces

$$\frac{dD}{dC} < 0 \Leftrightarrow \left[C\left(\frac{1-(1+r_T)^{-T}}{r_T}\right) + \frac{M}{(1+r_T)^t}\right]\sum_{t=1}^{T} \frac{t}{(1+r_T)^t} < \left(C\sum_{t=1}^{T} \frac{t}{(1+r_T)^t} + \frac{T \times M}{(1+r_T)^t}\right)\left(\frac{1-(1+r_T)^{-T}}{r_T}\right) \Leftrightarrow$$

$$C\left(\frac{1-(1+r_T)^{-T}}{r_T}\right)\sum_{t=1}^{T} \frac{t}{(1+r_T)^t} + \frac{M}{(1+r_T)^t}\sum_{t=1}^{T} \frac{t}{(1+r_T)^t} < C\left(\frac{1-(1+r_T)^{-T}}{r_T}\right)\sum_{t=1}^{T} \frac{t}{(1+r_T)^t} + \frac{T \times M}{(1+r_T)^t}\left(\frac{1-(1+r_T)^{-T}}{r_T}\right)$$

$\Leftrightarrow \frac{M}{(1+r_T)^t}\sum_{t=1}^{T} \frac{t}{(1+r_T)^t} < \frac{T \times M}{(1+r_T)^t}\left(\frac{1-(1+r_T)^{-T}}{r_T}\right) \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T} \frac{t}{(1+r_T)^t} < T\left(\frac{1-(1+r_T)^{-T}}{r_T}\right)$, pero es claro que $\sum_{t=1}^{T} \frac{t}{(1+r_T)^t} < \sum_{t=1}^{T} \frac{T}{(1+r_T)^t} = T\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+r_T)} = T\left(\frac{1-(1+r_T)^{-T}}{r_T}\right) \therefore \frac{dD}{dC} < 0.$

☺

Es decir, al aumentar el cupón de un bono la duración disminuye y al disminuir el cupón, la duración es más grande.

Apéndice G

DATOS DE LOS INSTRUMENTOS

En el capítulo 5 se estimó el valor en riesgo de un portafolio compuesto en un 44% por acciones (TELMEXAA, CEMEXB) y el 56% restante en bonos cupón cero (CETES a 28 y a 91 días) para 16 días comprendidos entre el 26 de Agosto de 1999 y el 20 de Septiembre del mismo año. A continuación se muestran los precios de TELMEXAA y CEMEXB, las tasas de CETES a 28 y 91 días, así como sus rendimientos logarítmicos:

	TELMEXAA		CEMEXB		CETES a 28 días		CETES a 91 días	
Fecha	Precio	Rendimiento	Precio	Rendimiento	Precio	Rendimiento	Precio	Rendimiento
24-Ago	36	0.01822	14.167	0.00354	20.3	0.00000	21.35	0.00000
25-Ago	36.2	0.00554	14.617	0.03127	19.5	-0.04021	21	-0.01653
26-Ago	37.2	0.02725	14.467	-0.01032	19.1	-0.02073	21.25	0.011834
27-Ago	36.3	-0.02449	14.117	-0.02449	19.1	0	21.4	0.007034
30-Ago	36.3	0.00000	14	-0.00832	19.75	0.033465	21.6	0.009302
31-Ago	34.85	-0.04076	13.867	-0.00955	19.75	0	21.6	0
2-Sep	34.6	-0.00720	13.733	-0.00971	19.1	-0.03347	21.4	-0.0093
3-Sep	34.95	0.01006	13.85	0.00848	19.7	0.03093	21.2	-0.00939
6-Sep	34.4	-0.01586	13.85	0.00000	19.75	0.002535	21.15	-0.00236
7-Sep	33.7	-0.02056	13.5	-0.02560	19.8	0.002528	21.24	0.004246
8-Sep	33.5	-0.00595	13.133	-0.02756	19.25	-0.02817	21.25	0.000471
9-Sep	33.5	0.00000	12.933	-0.01535	19.35	0.005181	21.1	-0.00708
10-Sep	35	0.04380	13.267	0.02550	19.25	-0.00518	21.05	-0.00237
13-Sep	34.7	-0.00861	13.417	0.01124	19.75	0.025642	21.15	0.004739
14-Sep	34.65	-0.00144	13.5	0.00617	19.65	-0.00508	21.15	0
15-Sep	33.8	-0.02484	13.5	0.00000	19.55	-0.0051	21.1	-0.00237
17-Sep	33.6	-0.00593	15.5	0.13815	19.55	0	21.1	0
20-Sep	33.65	0.00149	15.5	0.00000	19.7	0.0076433	21.2	0.0047281

Si la fecha de valuación es el 25 de Agosto, se ponderan los rendimientos de los 66 días anteriores para calcular los parámetros del portafolio al 26 de Agosto. Cuando la fecha de valuación sea el 26 de Agosto, se ponderan entonces los 66 rendimientos anteriores para estimar la media, la varianza y la covarianza del 27 de Agosto, dados los datos hasta el 26, y así sucesivamente hasta que la fecha de valuación sea el 17 de Septiembre:

Fecha	i	(1-λ) λ^(i-1)	i	(1-λ) λ^(i-1)	...	i	(1-λ) λ^(i-1)
26-May	*66*	*0.0007*					
27-May	65	0.0008	66	0.0007			
28-May	64	0.0008	65	0.0008			
31-May	63	0.0009	64	0.0008			
01-Jun	62	0.0010	63	0.0009			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
16-Jun	51	0.0021	52	0.0019	...	66	0.0007
17-Jun	50	0.0022	51	0.0021		65	0.0008
18-Jun	49	0.0024	50	0.0022	...	64	0.0008
21-Jun	48	0.0025	49	0.0024		63	0.0009
22-Jun	47	0.0027	48	0.0025	...	62	0.0010
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
12-Ago	10	0.0360	11	0.0335	...	25	0.0126
13-Ago	9	0.0386	10	0.0360		24	0.0135
16-Ago	8	0.0414	9	0.0386	...	23	0.0145
17-Ago	7	0.0443	8	0.0414		22	0.0156
18-Ago	6	0.0475	7	0.0443	...	21	0.0167
19-Ago	5	0.0510	6	0.0475		20	0.0179
20-Ago	4	0.0547	5	0.0510	...	19	0.0192
23-Ago	3	0.0586	4	0.0547		18	0.0206
24-Ago	2	0.0629	3	0.0586	...	17	0.0221
25-Ago	1	0.0674	2	0.0629		16	0.0237
26-Ago			1	0.0674	...	15	0.0254
27-Ago						14	0.0272
30-Ago					...	13	0.0292
31-Ago						12	0.0313
2-Sep					...	11	0.0335
3-Sep						10	0.0360
6-Sep					...	*9*	*0.0386*
7-Sep						8	0.0414
8-Sep					...	*7*	0.0443
9-Sep						6	0.0475
10-Sep					...	*5*	*0.0510*
13-Sep						4	0.0547
14-Sep					...	3	*0.0586*
15-Sep						2	0.0629
17-Sep					...	1	*0.0674*
20-Sep							

BIBLIOGRAFÍA

BITNER, W. John & Goddard, A. Robert, *"SUCCESFUL BANK ASSET/LIABILITY MANAGEMENT (A guide to the future beyond gap)"*, John Wiley & Sons, Inc. (1992).

COMISIÓN NACIONAL BANCARIA Y DE VALORES, *"SISTEMA DE ANÁLISIS DE RIESGO DE TASAS DE INTERÉS. MODELO BRECHA"*, Manual de Usuario, Dirección General de Desarrollo y Estudios Económicos & Dirección General de Organización y Capacitación, Marzo 1996.

COPELAND, Thomas E. & Weston, Fred J, *"FINANCIAL THEORY AND CORPORATE POLICY"*, Addison-Wesley Publishing Company, Third Edition.

C. O., Alexander & C.T., Leigh, *"ON THE COVARIANCE MATRICES USED IN VALUE AT RISK MODELS"*, The Journal of Derivatives, Vol. 4, No. 3, Spring 1997.

CRUCES, Juan José, *"¿PUEDE LA MACROECONOMÍA RECONCILIARSE CON LA BOLSA?"*, Usos del " Arbitrage Pricing Theory" para controlar los riesgos de un Portafolio de Acciones, Departamento de Investigaciones del I.A.E.F. Boletín de Intermediación Financiera y Bursátil, Diciembre 1998.

DÍAZ, Jaime T., *"RIESGO DE MERCADO EN INSTRUMENTOS DE DEUDA"*, Soluciones Avanzadas, Tecnologías de información y estrategias de negocios, Xview SA de CV, Año 5, No. 41, 15 de Enero de 1997.

"DICCIONARIO ILUSTRADO DE CULTURA ESENCIAL", División de Libros en Lengua Castellana, Reader's Digest México, S.A. de C.V., Primera Edición (1999).

DOWN, Kevin, *"BEYOND VALUE AT RISK. The New Science of Risk Mangement"*, Wiley Frontiers in Finance, John Wiley & Sons, Inc. (1998).

ESCARELA, Gabriel P., *"RIESGOS DE LAS AGRUPACIONES FINANCIERAS: CASAS DE BOLSA E INSTITUCIONES DE ARRENDAMIENTO"*, Serie: Notas de clase, Vínculos matemáticos No. 207, Publicación del Departamento de matemáticas de la Facultad de Ciencias, UNAM 1994.

FABOZZI, J. Frank, *"INVESTMENT MANAGEMENT"*, Prentice Hall, 1995.

FABOZZI, J. Frank & Modigliani, Franco, *"CAPITAL MARKETS (Institutions and Instruments)"*, Second Edition, Prentice Hall, Inc. (1996).

IRVING, Richard, *"BANKS GRASP VaR NETTLE"*, Value at risk supplement, June 1996.

J. P. Morgan, *"RISKMETRICS-Technical Document"*, Fourth edition, New York, December (1996).

JORION, Phillipe, *"VALUE AT RISK: The New Benchmark for Controlling Market Risk"*, McGraw-Hill (1995).

JORION, Phillipe & Joseph, K. Sarkis, *"FINANCIAL RISK MANAGEMENT (Domestic and International Dimensions)"*, Blackwell Publishers Inc. Cambridge, Massachusetts (1996).

KRACAW, A. William & Campbell, Tims, *"FINANCIAL RISK MANAGEMENT (Fixed Income and Foreign Exchange)"*, Harper Collins College Publishers (1993).

LAWRECE, Colin & Robinson Gary, *"LIQUID MEASURES"*, Risk,Vol.8, No. 7, July 1995.

LEONG, Kenneth, *"THE RIGHT APROACH"*, Value at risk supplement, pág. 9-14, June 1996.

MARKOWITZ. Harry M., *"MEAN-VARIANCE ANALYSIS IN PORTAFOLIO CHOICE AND CAPITAL MARKETS"*, Basil Blackwell (1987).

MARKOWITZ, Harry M., *"FOUNDATIONS OF PORTAFOLIO THEORY"*, Journal of Finance, Nobel Lectures, Vol. 46, No. 2, June 1991.

MEYER, Paul L., *"PROBABILIDAD Y APLICACIONES ESTADÍSTICAS"*, Fondo Educativo Interamericano, S. A. (1973).

MONTGOMERY y Peck, *"INTRODUCTION TO THE THEORY OF STATISTICS"*, Third edition, Wiley, (1992).

NEWS, *"OUTLOOK ON VaR"*, Risk Technology supplement, Vol. 8, No. 8, pág. 25, August 1995.

REED, Nick, *"VARIATIONS ON A THEME"*, Value at risk supplement, Introduction, June 1996.

REILLY, K. Frank & Brown, C. Keith, *"INVESTMENT ANALYSIS AND PORTAFOLIO MANAGEMENT"*, Fifth Edition. Fort Worth: The Dryden Press (1997).

ROSS, A. Stephen, Westerfield, W. Randolph y Jaffe, F. Jeffrey, *"FINANZAS CORPORATIVAS"*, Tercera edición, McGraw-Hill 1997.

SMITHSON, Charles, *"VALUE-AT-RISK"*, Risk, Vol. 9, No. 1, January (1996).

WILSON, Duncan, *"VaR IN OPERATION"*, Risk, Vol. 8, No. 12, pág 24, December 1995.

Información sobre VaR. Página de Contingency Analysis:
http://www.contingencyanalysis.com.

Publicaciones sobre VaR. Página de Gloria Mundi
http://www.gloriamundi.org/var/wps.htm.

Página de RiskMetrics
http://www.jpmorgan.com.

Información acerca del modelo M.V.O. de Markowitz. Página de Efficient Solutions
http://www.effisols.com/basics/MVO.htm.

Software:

Microsoft Excel 97 homologado por Windows,

Statistica Versión 4.2 homologado por Windows,

MATLAB Versión 3.1 homologado por Windows.