00384

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

LOS ESPACIOS $C_p(X)$: PROPIEDADES ADITIVAS Y CONDENSACIONES SOBRE ESPACIOS COMPACTOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A :

FIDEL CASARRUBIAS SEGURA

DIRECTOR DE TESIS: DR. VLADIMIR VLADIMIROVICH TKACHUK

MEXICO, D. F. 2000

Los espacios $C_p(X)$: propiedades aditivas y condensaciones sobre espacios compactos

Fidel Casarrubias Segura

LOS ESPACIOS $C_p(X)$: PROPIEDADES ADITIVAS Y CONDENSACIONES SOBRE ESPACIOS COMPACTOS

FIDEL CASARRUBIAS SEGURA

En esta obra se presentan los resultados obtenidos por el autor, dentro del marco de dos importantes líneas de investigación en C_p-teoría. Estos resultados solucionan problemas planteados por especialistas en Topología de Conjuntos, en revistas internacionales con arbitraje.

La obra consta de tres capítulos, de los cuales, el segundo ellos está dedicado enteramente a la exposición y desarrollo del artículo de investigación titulado *Realcompactness and monolithity are finitely additive in* $C_p(X)$. Este articulo de investigación contiene los resultados que dan respuesta a varios problemas abiertos planteados por Vladimir Tkachuk, especialista de la C_p-teoría. En particular, en este capítulo se demuestran los siguientes teoremas.

(1) La paracompacidad es una propiedad topológica finitamente aditiva en los espacios $C_p(X)$.
(2) La realcompacidad es una propiedad finitamente aditiva en los espacios de tipo $C_p(X)$.
(3) La monoliticidad es una propiedad finitamente aditiva en $C_p(X)$.
(4) La propiedad de Eberlein-Grothendieck es numerablemente aditiva en los espacios $C_p(X)$.

En el Capítulo 3 de la obra se exponen los métodos creaodos para la solución de varios problemas abiertos planteados por A. V. Arhangel'skii en el artículo de investigación; C_p*-theory* (Recent Progress in General Topology, Elsevier S. P., 1989, 1–56.). Las soluciones de estos problemas forman parte del artículo de investigación: *On compact weaker topologies in function spaces.* De manera particular, en este capítulo se demuestran los siguientes resultados.

(1) Si C es un cubo de Cantor generalizado, entonces el espacio $C_p(C)$ admite una condensación sobre un espacio de Tychonoff cuyas potencias finitas son de Lindelöf.
(2) La segunda iteración $C_p(C_p(C))$ y el espacio $L_p(C)$ tienen subespacios densos de estrechez numerable.
(3) Si X es un espacio infinito compacto metrizable, entonces $C_p(X)$ puede ser condensado sobre el cubo de Hilbert.
(4) Si C denota al cubo de Cantor entonces el espacio $C_p(C)$ admite una condensación sobre el cubo de Hilbert.
(5) Para todo espacio metrizable numerable X, el espacio topológico $C_p(X)$ puede ser condensado sobre un espacio compacto.

TH SPACES $C_p(X)$: ADDITIVE PROPERTIES AND CONDENSATIONS ONTO COMPACT SPACES

FIDEL CASARRUBIAS SEGURA

In this paper I present the results obtained within the scheme of two important research lines on C_p-theory. These outcomes solve problems previously set up by Set Topology specialists in different international mathematical reviews.

This paper comprises three chapters, the second of them, is totally devoted to the presentation and development of the research paper *Realcompactness and monolithity are finitely additive in $C_p(X)$*. This research article comprises results that offer a solution to several open problems set up by V. V. Tkachuk. In the above mencioned chapter the following theorems are shown.

(1) Paracompactness is a finitely additive property in the class of spaces $C_p(X)$.
(2) Realcompactness is a finitely additive property in the class of spaces $C_p(X)$.
(3) Monolithicity is a finitely additive property in in the class of spaces $C_p(X)$.
(4) Eberlein-Grothendieck property is countably additive in $C_p(X)$.

In chapter 3 the made up methods for the solution of different open problems set up by A. V. Arhangle'skii in his research paper *C_p-theory C_p-theory* (Recent Progress in General Topology, Elsevier S. P., 1989, 1–56.) are shown. Solutions to these problems are part of the research paper *On compact weaker topologies in function spaces*. In a special way, the following results are shown in chapter3.

(1) If C is a generalized Cantor's cube, then $C_p(C)$ admits a condensation onto a Tychonoff space whose all finite powers are Lindelöf.
(2) For every cardinal κ, the spaces $C_p(C_p(\mathbb{D}^\kappa))$ and $L_p(\mathbb{D}^\kappa)$ have dense subsets of countable tightness.
(3) Let X be an infinite compact space. If $w(X) \leq \omega$ then $C_p(X)$ admits a condensation onto the Hilbert cube $\mathbb{I}^\omega$.
(4) The space $C_p(\mathbb{D}^\omega)$ can be condensed onto the Hilbert cube $\mathbb{I}^\omega$.
(5) If X is a countable metrizable space then the space $C_p(X)$ admits a condensation onto a compact space.

A Berenice

Si pudiese describir la belleza de tus ojos y
numerar con números nuevos todas tus gracias,
El futuro diría:—Este poeta miente; tales rasgos
celestiales nunca fueron de rostros terrenales.
SHAKESPEARE

Gratitudes

Esta obra fue escrita en un período de pocos meses, pero su concepción fue hecha a lo largo de un período de un poco más de tres años. Como es de suponerse, en el transcurso de un proyecto de esta duración he contraído más deudas de gratitud de las que puedo saldar apropiadamente. Muchas personas han contribuido en gran medida a la concretación de esta obra y es muy posible que obtenga más deudas, alentadas por mis pecados de omisión. Quisiera, sin embargo, expresar mi profunda gratitud a mi mentor, el Profesor Vladimir Tkachuk Vladimirovich, reconocido especialista a nivel mundial de la C_p-teoría, quien con paciencia infinita dirigió estos primeros pasos de mi actividad investigadora en C_p-teoría.

Aún hoy día recuerdo muy bien mi primera entrevista con el Profesor Tkachuk, en la que se suponía que trataríamos (o al menos, así lo creía yo) temas relacionados con los esquemas y métodos de trabajo para desarrollar mi investigación doctoral. Ciertamente, en aquella ocasión, entendí muy claramente cuál sería el método de trabajo que utilizaría en mi investigación (después de las presentaciones de rigor, el Profesor Tkachuk me interrogó acerca de mis conocimientos sobre la C_p-teoría y me pidió demostrar el célebre teorema de Ju Nagata. Sobra decir que lo único que atine ha hacer en aquel momento fue despedirme cordialmente del Profesor Tkachuk e irme a casa a buscar, en el índice de conceptos de mi libro de C_p-teoría, la frase "teorema de Ju Nagata").

Esta primera entrevista con el Profesor Tkachuk, y en consecuencia el desarrollo de mi investigación doctoral, no hubieran podido suceder sin la recomendación y el apoyo incondicional de uno de mis más grandes amigos, el Profesor Angel Tamariz Mascarúa.

Sinceramente creo que sin la recomendación de un topológo con el prestigio de Angel Tamariz Mascarúa, Vladimir Tkachuk jamás hubiera aceptado dirigir mi tesis doctoral. Me complace reconocer ahora mi deuda para con Angel Tamariz, por su constante estímulo y por su excelsa calidad humana.

Vaya también mi agradecimiento a mi madre, mi eterna mecenas, por su invaluable apoyo, por su incansable cariño y por haberme enseñado desde muy niño a amar los libros y a vivir con ellos.

Tengo también especial satisfacción en expresar mi gratitud a Berenice, la mujer que me acompaña en esta vida, por haber contribuido en diversas formas a la concretación de esta obra, por el gran amor con el que me honra y por su inquebrantable fe en mí. En testimonio de mi agradecimiento le dedico esta obra a ella.

Finalmente, deseo expresar mi más sincero agradecimiento a los doctores Adalberto García-Maynez Cervantes, Angel Tamariz Mascarúa, Oleg Gennadievich Okunev, Richard Wilson Roberts, Vladimir Tkachuk Vladimirovich, Sergey Antonyan Apetnakovitch y Constancio Hernández García, por haber leído con toda paciencia y dedicación la versión preliminar de esta tesis doctoral y porque debido a sus muy valiosas y acertadas críticas se logró mejorar de manera sustancial la presente obra.

Fidel Casarrubias Segura
México, D.F.
Junio del 2000

Índice

Introducción

El papel protagónico que ha alcanzado en la actualidad la C_p-teoría como parte fundamental de la topología general, puede ser percibido en las numerosas y exhaustivas investigaciones de la que es objeto la misma. Su relevancia inicial se atribuye, en parte, a que fuera reconocida como una importante aplicación de la topología general al análisis funcional. Bien puede decirse que la C_p-teoría surgió como lo hacen los grandes desarrollos matemáticos: con un entrelazamiento de diferentes áreas y de diferentes ideas de notables matemáticos.

La C_p-teoría de hoy en día, constituye una rama fundamental de la topología general y gran parte de su gran auge se debe a la escuela de topología de Moscú. Muchos de los integrantes de esta escuela, como A. V. Arhangel'skii, M. O. Asanov, D. Baturov, O. G. Okunev, E. G. Pytkeev, E. Reznichenko, O. V. Sipacheva, D. B. Shakhmatov, V. V. Tkachuk, I. V. Yaschenko, V. V. Uspenskii y N. V. Velichko, entre otros, han aportado importantes resultados que han impulsado, como consecuencia, un fuerte desarrollo de la C_p-teoría, logrando con ello moldear la forma actual que posee esta teoría: la de una hermosa teoría bien delineada, menos inclinada a presentar fenómenos patológicos, y por tanto más asequible a nuestra intuición.

En esta tesis se presentan los resultados obtenidos dentro del marco de dos importantes líneas de investigación en C_p-teoría.

La primera de estas líneas de estudio tiene su origen en los trabajos realizados por V. V. Tkachuk sobre la aditividad numerable en la clase de los espacios $C_p(X)$, de propiedades topológicas no aditivas en la clase más general de los espacios de Tychonoff (cabe señalar que Tkachuk llama *propiedad numerablemente aditiva* a aquellas propiedades que se preservan bajo la formación de uniones numerables).

Muy probablemente fueron dos los hechos que motivaron en Tkachuk la idea de analizar el comportamiento de este tipo de propiedades topológicas en la clase de los espacios $C_p(X)$. El primero de ellos estriba en una idea frecuentemente utilizada en matemáticas: la reducción de la investigación de las propiedades de un objeto, a la clasificación de objetos más simples que de alguna forma representen al objeto estudiado. Una de las distintas maneras en que esta reducción se da en la topología, es descomponer a un espacio topológico en una unión de sus subespacios con la idea de obtener información útil acerca de las propiedades del mismo, a partir del conocimiento de las propiedades de los subespacios que forman la descomposición. Por ejemplo, es bien sabido que uno puede garantizar que un espacio tiene la propiedad de Lindelöf, si uno logra descomponer a este espacio en una unión numerable de subespacios de Lindelöf.

De modo que, cuando se trabaja con uniones de espacios topológicos, siempre surge el deseo de garantizar la aditividad de las propiedades consideradas. Desafortunadamente no siempre es posible hacer esto. Recordemos, por ejemplo, que un espacio puede ser la unión de dos subespacios metrizables sin ser él un espacio metrizable (la compactación de Alexandroff de un espacio discreto de cardinalidad no numerable es un buen ejemplo de esto último).

Esa falta de aditividad en varias propiedades topológicas importantes, motivó a Tkachuk a buscar clases de espacios topológicos en las cuales dichas propiedades mejoraran su comportamiento. Una hipótesis muy natural es que un tal mejoramiento puede darse en los espacios de tipo $C_p(X)$, ya que este tipo de espacios topológicos han mostrado (a través de las distintas investigaciones de las que han sido objeto) poseer excelentes propiedades. Con la finalidad de ilustrar con un ejemplo las buenas propiedades que poseen los espacios de tipo $C_p(X)$, recordemos simplemente que en cualquier espacio de funciones $C_p(X)$ es suficiente conocer la existencia de un elemento que posea una base de vecindades numerable, para poder garantizar la existencia de una base numerable para la topología de un tal espacio (lo cual no es necesariamente cierto en un espacio topológico arbitrario). El lector podrá encontrar, en la literatura especializada en C_p-teoría, diversas situaciones que ejemplifican la fuerza de la estructura topológica de los espacios $C_p(X)$.

De esta forma, al tener constituida en los espacios de tipo $C_p(X)$ una buena estructura topológica, de manera muy natural nace la pregunta de si esta estructura topológica es lo suficientemente fuerte como para lograr modificar el comportamiento de las propiedades no aditivas.

En uno de sus artículos del año 1994, V. V. Tkachuk realizó un análisis sistemático en la línea marcada por el anterior planteamiento y logró demostrar la aditividad numerable en la clase de los espacios $C_p(X)$ de un gran número de propiedades topológicas no aditivas (por ejemplo, Tkachuk demostró la aditividad numerable, en los espacios $C_p(X)$, de la completitud en el sentido de Čech, de la propiedad de Fréchet-Urysohn y de la metrizabilidad, entre otras más). En este mismo artículo, V. V. Tkachuk estableció que varias de las propiedades no aditivas conocidas cumplen en los espacios $C_p(X)$ lo que bien podría llamarse "aditividad numerable débil". Por ejemplo, él demostró que si un espacio de funciones $C_p(X)$ es la unión numerable de subespacios cerrados realcompactos entonces el espacio $C_p(X)$ es también un espacio realcompacto. Fue el mismo Tkachuk quien, en el año 1997, planteó al autor de la presente obra la pregunta de si es posible omitir el adjetivo "cerrado" en este resultado sobre la realcompacidad de $C_p(X)$, y fue precisamente esta pregunta la que motivó las investigaciones que el autor realizó sobre el tema, y sobre cuyas conclusiones trata el segundo capítulo de esta obra.

De esta forma, el Capítulo 2 de esta tesis contiene los resultados que fueron obtenidos a raíz de la investigación realizada con la idea de responder la citada pregunta de Tkachuk. A continuación enunciamos los principales resultados del Capítulo 2.

- La paracompacidad es finitamente aditiva en los espacios $C_p(X)$ (cf. Teorema 2.2.2).

- La propiedad de tener grado de realcompacidad $\leqslant \tau$ (para cualquier cardinal $\tau \geqslant \omega$) es finitamente aditiva en $C_p(X)$ (cf. Teorema 2.2.11). En particular, la realcompacidad es finitamente aditiva en $C_p(X)$ (Corolario 2.2.12).
- Para cualquier cardinal $\tau \geqslant \omega$, la τ-monoliticidad es una propiedad finitamente aditiva en $C_p(X)$ (véase el Corolario 2.2.17).
- La propiedad de Eberlein-Grothendieck es numerablemente aditiva en los espacios $C_p(X)$ (cf. Teorema 2.3.7).

Hemos dicho que en esta obra se presentan resultados obtenidos dentro de dos líneas de investigación en la C_p-teoría. Por lo que toca a la segunda de ellas, recordemos que uno de los métodos de trabajo más frecuentemente utilizados por los topológos en la tarea de clasificar a los espacios topológicos, es la búsqueda de topologías con buenas propiedades más débiles que una topología dada.

La razón principal para llevar a cabo el estudio de este tipo de topologías reside principalmente en el hecho de que cuando uno debilita a la topología de un espacio topológico, las propiedades del espacio, que se está considerando, son mejoradas. Recordemos, por ejemplo, que cada topología de Tychonoff es el supremo de topologías segundo numerables. De esta forma, una topología de Tychonoff más débil constituye una aproximación a la topología original de un espacio topológico, y cuando esta aproximación tiene además buenas propiedades, entonces es posible obtener información relevante acerca de la topología del espacio topológico en consideración. Cabe señalar que la búsqueda de topologías más débiles para los espacios topológicos $C_p(X)$ que posean propiedades similares a la compacidad, es un hecho meritorio puesto que este tipo de espacios nunca son espacios compactos. Analizar cuándo existen topologías más débiles en $C_p(X)$ que tengan propiedades similares a la compacidad es parte del objetivo principal del tercer capítulo de esta obra.

Antes de enunciar formalmente los principales resultados del Capítulo 3 de esta tesis, es importante hacer una breve reflexión acerca de la idea de debilitar topologías.

Notemos que cuando uno tiene una topología τ más débil que la topología de un espacio topológico X, entonces uno tiene un "nuevo" espacio topológico, sobre el cual el espacio X puede ser mapeado continua e inyectivamente, a saber, el espacio (X, τ). Asimismo, si uno mapea en forma continua e inyectiva, utilizando un mapeo f, a un espacio topológico X sobre otro espacio Y, uno está "detectando" de esta forma una topología más débil que la topología original del espacio X, a saber, la topología $\tau = \{f^{-1}(U) : U \text{ es abierto en } Y\}$. De esta manera, preguntarnos si la topología de un espacio topológico puede ser debilitada a una topología con propiedades específicas es equivalente a preguntarnos si tal espacio puede ser mapeado continua e inyectivamente sobre algún espacio con las propiedades especificadas. Esto último es la naturaleza del problema de condensación.

Condensar, dice el diccionario, es el acto de reducir una cosa a menor volumen y darle, además, consistencia. Esto es en esencia lo que hacemos al considerar una topología más débil que otra: "reducimos el volumen" de la topología para la cual estamos buscando una topología más débil. Así, si nuestro deseo es encontrar una topología más débil que otra, que además sea compacta, entonces debemos "buscar" de entre los elementos de la topología que deseamos debilitar, a aquellos abiertos que posiblemente nos puedan "proporcionar" la propiedad de compacidad. Cabe mencionar que fue la escuela de topología de Moscú la que utilizó por vez primera el muy adecuado término de condensación para nombrar a los mapeos continuos biyectivos.

El problema de condensación establece entonces la tarea de describir a aquellos espacios topológicos cuyas propiedades pueden ser mejoradas por medio de condensaciones, y cabe apuntar que aún antes del planteamiento formal de este problema (lo cual fue realizado por P. Alexandroff), ya se tenían un sinnúmero de resultados que contribuían a la solución del mismo.

Una vez que se tuvo bien fundamentada a la C_p-teoría, de forma muy natural surgió la idea de trasladar el problema de condensación al ámbito de esta teoría. Y fue debido a la profusa investigación de los especialistas de esta área de estudios, que han podido generarse excelentes contribuciones a la solución del problema de condensación. Como un ejemplo de ello, podemos recordar el clásico resultado de Arhangel'skii que establece que un espacio $C_p(X)$ puede ser condensado sobre un espacio metrizable si y sólo si X es un espacio separable

Formalmente, la intención del Capítulo 3 de esta obra es exponer los métodos utilizados por el autor para dar solución a algunos problemas relacionados con el problema de condensación, en el contexto de la C_p-teoría. A continuación exponemos una breve historia de estos problemas y de sus soluciones.

A. V. Arhangel'skii preguntó en [9] si era posible que cualquier espacio de Tychonoff pudiera ser condensado sobre algún espacio de Lindelöf. En [38], V. V. Tkachuk contestó esta pregunta en forma negativa, construyendo un espacio de Tychonoff que no admite condensaciones sobre espacios de Lindelöf, ni sobre espacios pseudocompactos. Este suceso motivó a I. V. Yaschenko a modificar la anterior pregunta de Arhangel'skii, y a generar de esta manera la pregunta de si una tal condensación es posible en el caso cuando el espacio de Tychonoff se supone además realcompacto. Al trasladar esta pregunta de Yaschenko al ámbito de la C_p-teoría, Arhangel'skii planteó el Problema 37 de [**10**], y habiendo notado que es consistente con **ZFC** que cualquier espacio de tipo $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ es realcompacto ($\mathbb{D}$ denota al espacio discreto de dos puntos), Arhangel'skii llega a plantear la siguiente pregunta, la cual forma parte del Problema 38 de [**10**]: *¿Es cierto que $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ admite una condensación sobre un espacio de Lindelöf para cualquier cardinal $\tau \geqslant \omega$?* En la primera proposición del tercer capítulo damos respuesta positiva a esta pregunta estableciendo el siguiente resultado.

- Para todo cardinal $\tau \geqslant \omega$, el espacio $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ admite una condensación sobre un espacio de Tychonoff cuyas potencias finitas son de Lindelöf (cf. Proposición 3.2.2).

La posibilidad de poder condensar a cualquier espacio de tipo $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ sobre un espacio cuyas potencias finitas son de Lindelöf, nos permitió establecer el siguiente resultado que da solución plena al Problema 40 de [**10**].

- Para todo cardinal $\tau \geqslant \omega$, los espacios $C_p(C_p(\mathbb{D}^\tau))$ y $L_p(\mathbb{D}^\tau)$ tienen subespacios densos de estrechez numerable (cf. Teorema 3.2.3 y Teorema 3.2.5).

Claro está que la posibilidad de poder condensar a los espacios $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ sobre espacios cuyas potencias finitas tienen la propiedad de Lindelöf, genera de manera muy natural la pregunta de si es posible condensarlos sobre espacios compactos (de hecho esta pregunta forma parte del Problema 38 de [**10**]). En relación a este último planteamiento logramos establecer una respuesta positiva para el caso cuando $\tau = \omega$ (cf. Corolario 3.2.10), así como el siguiente resultado parcial para el caso cuando $\tau > \omega$.

- Existen modelos de **ZFC** en los cuales la proposición "el espacio $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ puede ser condensado sobre un espacio compacto, para cada cardinal $\tau > \omega$" no es verdadera (cf. Corolario 3.2.7).

El siguiente resultado, plasmado en el Teorema 3.2.9, es considerado uno de los principales resultados de esta tesis.

- Si X es un espacio infinito compacto metrizable, entonces $C_p(X)$ puede ser condensado sobre el cubo de Hilbert $\mathbb{I}^\omega$.

Como un corolario a este último resultado, logramos dar una respuesta positiva al Problema 39 de [**10**] (cf. Corolario 3.2.10), el cual plantea la tarea de conocer si el espacio $C_p(\mathbb{D}^\omega)$ admite, o no, una condensación sobre algún espacio compacto o sobre algún espacio σ-compacto. Aunado a lo anterior, el resultado antes mencionado (Teorema 3.2.9) nos permitió establecer el siguiente teorema que es en sí mismo un resultado muy interesante.

- Para todo espacio metrizable numerable X, el espacio topológico $C_p(X)$ puede ser condensado sobre un espacio compacto (cf. Teorema 3.2.11).

Sobre los requisitos para lectura de esta obra y sobre las notaciones y la terminología utilizadas en ella. Desde un punto de vista formal, los únicos conocimientos previos, requeridos para asimilar el contenido de este trabajo, son algunos hechos básicos de topología general y de C_p-teoría. Es siempre el deseo de todo autor de una obra matemática, que sus lectores posean ciertos conocimientos básicos para el buen desarrollo de la lectura de su obra. Sin embargo, en el caso de este trabajo, se creyó conveniente tener algunas consideraciones con aquellos lectores que inician su actividad en topología general, y muy particularmente, con aquellos lectores que inician su actividad en la C_p-teoría.

Por esta razón, en el primer capítulo de esta tesis se exponen lo más detalladamente posible todos los hechos básicos de C_p-teoría que son necesarios para la buena lectura de los restantes capítulos.

En un principio, la idea primaria para la redacción del primer apartado de esta tesis, fue la de exponer en él, de manera profunda y detallada, todos esos hechos básicos de C_p-teoría, pero siendo honestos, la redacción final de este apartado se asemeja más a una recopilación de hechos, que a una exposición profunda y detallada de resultados. De cualquier forma, es una creencia del autor que el primer capítulo de esta obra cumple, al menos, con la función de ser un lugar en donde el lector pueda hallar todos los resultados básicos de C_p-teoría que son utilizados a través de esta tesis. Aunado a esto, en este mismo apartado el lector puede también encontrar referencias a los trabajos originales de aquellos resultados de topología general, que son más frecuentemente utilizados a través de los restantes capítulos de esta tesis.

Por lo que toca a las notaciones y terminología utilizadas en esta obra, debemos señalar que aún cuando seguimos las líneas marcadas por los libros [11] y [18], en algunas ocasiones hacemos uso de la siguiente terminología: cada vez que X es un espacio topológico, los símbolos $\tau(X)$ denotan a la topología del espacio

X y $\tau^*(X) = \tau(X) \setminus \{\emptyset\}$. Asimismo, hacemos uso de la notación $U \in \tau(x, X)$ para abreviar la frase "U es un subconjunto abierto del espacio X que contiene al punto x". Cabe mencionar también que todos los espacios topológicos considerados en esta tesis se suponen siempre no vacíos y con la propiedad de Tychonoff (esto es, espacios de Hausdorff completamente regulares).

1

Preliminares de C_p-teoría

1.1. Introducción

El único requisito para la lectura de esta obra es el conocimiento de algunos hechos básicos de topología general y algunos otros acerca de C_p-teoría. Este capítulo está diseñado con la idea de que el lector pueda revisar en él, todos esos resultados básicos. Sin embargo, debemos señalar que en este apartado no se hallará un desarrollo detallado de los distintos temas que se tocan en el mismo. La existencia de excelentes obras en las que se exponen de manera profunda y detallada todos estos temas, nos permiten presentar el material de este capítulo de forma superficial. Remitimos al lector interesado en profundizar en todos los temas presentados en este apartado, a la clásica obra de R. Engelking **[18]** sobre topología general y a la de A. V. Arhangel'skii **[11]** sobre C_p-teoría. En la última sección de este capítulo introducimos a los espacios pseudocompletos y demostramos algunas de sus propiedades más elementales. Las referencias básicas para esta sección son los artículos [1] y **[29]**.

1.2. Descripción de la topología de los espacios de funciones $C_p(X,Y)$

Dados dos espacios topológicos de Tychonoff X y Y, los símbolos $C(X,Y)$ denotan al conjunto de todas las funciones continuas definidas en el espacio X y con valores en el espacio Y (en el caso cuando el espacio Y es igual al espacio usual de los números reales, es costumbre escribir simplemente $C(X)$). Debido a que este conjunto es un subconjunto del producto topológico Y^X, podemos introducir en él la topología de subespacio respecto a Y^X. De esta manera generamos al espacio de Tychonoff $C_p(X,Y)$.

Es conveniente señalar que en el caso cuando el espacio Y es igual al espacio de los números reales $\mathbb{R}$, es una práctica común denotar al espacio $C_p(X,\mathbb{R})$ utilizando los símbolos $C_p(X)$.

Si uno tiene presente el hecho de que el espacio $C_p(X,Y)$ es un subespacio del producto topológico Y^X, es fácil describir una base para la topología de este espacio topológico. Observemos simplemente que de la propia definición de la topología del producto Y^X se desprende que todos los conjuntos de la forma

$$[x_1,\dots,x_n;U_1,\dots,U_n] = \{f \in C(X,Y) : f(x_i) \in U_i \text{ para cada } i=1,\dots,n\},$$

donde $n \in \omega \setminus \{0\}$, $\{x_1,\dots,x_n\} \subset X$ y $U_1,\dots,U_n \in \tau(Y)$, constituyen una base para la topología de $C_p(X,Y)$. Esta base es comúnmente conocida con el nombre de *base canónica.*

Consideremos un elemento arbitrario $f \in C_p(X,Y)$ y sistemas de vecindades $\mathcal{N}(f(x))$ para cada uno de los puntos $f(x)$ del espacio Y ($x \in X$). No es difícil verificar que la familia formada por todos los conjuntos

$$[f;x_1,\dots,x_n;V_1,\dots,V_n] = \{g \in C(X,Y) : g(x_i) \in V_i \text{ para cada } i=1,\dots,n\},$$

donde $V_i \in \mathcal{N}(f(x_i))$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, es una base local de vecindades para el elemento f en el espacio topológico $C_p(X,Y)$. En consecuencia, cuando consideramos como Y al espacio de los números reales, la familia de todos los conjuntos de tipo

$$[f;x_1,\dots,x_n;\epsilon] = \{g \in C(X) : |f(x_i)-g(x_i)| < \epsilon \text{ para cada } i=1,\dots,n\},$$

donde $f \in C_p(X)$, $x_1,\dots,x_n \in X$ y $\epsilon > 0$ son elegidos en forma arbitraria, es un sistema de vecindades del punto f en el espacio topológico $C_p(X)$. Con gran frecuencia las vecindades de tipo $[f; x_1, \ldots, x_n; \epsilon]$ son llamadas *vecindades canónicas* de f.

Un gran número de propiedades de los espacios $C_p(X)$ pueden ser obtenidas de manera inmediata a partir de la propia definición de estos espacios topológicos. Por ejemplo, la propiedad de Tychonoff del espacio X implica que $C_p(X)$ es un subespacio denso del producto $\mathbb{R}^X$. En efecto, supongamos que $h \in \mathbb{R}^X$ y que $\bigcap_{i=1}^n \pi_{x_i}^{-1}\big((h(x_i) - \epsilon, h(x_i) + \epsilon)\big)$ es una vecindad del punto h en el espacio $\mathbb{R}^X$ (donde $\pi_{x_i} : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}$ es la x_i-ésima función proyección asociada al producto topológico $\mathbb{R}^X$). Debido a que X es un espacio de Tychonoff, es posible elegir una función continua $f \in C_p(X)$ para la cual $f(x_i) = h(x_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Es claro que, por la elección de esta función, se tiene que $f \in \bigcap_{i=1}^n \pi_{x_i}^{-1}\big((h(x_i) - \epsilon, h(x_i) + \epsilon)\big)$, lo que establece la densidad de $C_p(X)$ en $\mathbb{R}^X$.

El hecho de que el espacio $C_p(X)$ sea un subespacio denso del producto topológico $\mathbb{R}^X$, trae como consecuencia el que este espacio herede del producto $\mathbb{R}^X$ la llamada propiedad de Souslin. Recuerde que un espacio topológico Z posee la *propiedad de Souslin* (o tiene *número de Souslin numerable*) si la cardinalidad de cualquier familia $\gamma \subset \tau^*(Z)$, cuyos elementos son ajenos dos a dos, no excede al cardinal ω. Para poder verificar que cualquier espacio de tipo $C_p(X)$ tiene tal propiedad, notemos primero que es una consecuencia del clásico teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery [18, 2.3.15, 2.3.17] que el espacio $\mathbb{R}^X$ tenga la propiedad de Souslin (siendo este espacio un producto de espacios separables). Ahora bien, como un espacio topológico posee la propiedad de Souslin si y sólo si todos sus subespacios densos poseen dicha propiedad, el espacio $C_p(X)$ hereda de esta manera la propiedad de Souslin de $\mathbb{R}^X$.

Ciertamente, la sola presencia de la propiedad de Souslin en los espacios de funciones $C_p(X)$ es en sí misma una característica importante de este tipo de espacios. Como se podrá apreciar a continuación, las propiedades implicadas por ella son también muy relevantes.

Es bien conocido [18] que todo espacio paracompacto con número de Souslin numerable es un espacio de Lindelöf y que cualquier espacio completo en el sentido de Dieudonné es un espacio realcompacto cuando este espacio posee la propiedad de Souslin (recuérdese que un espacio topológico es *completo en el sentido de Dieudonné* si éste es homeomorfo a un subespacio cerrado de algún producto de espacios metrizables. Recuerde también que los espacios *realcompactos* son aquellos espacios topológicos que son homeomorfos a subespacios cerrados de productos de rectas reales). De esta forma, en la clase de espacios $C_p(X)$ no es posible encontrar espacios paracompactos que no tengan la propiedad de Lindelöf y tampoco es posible hallar ejemplos de espacios completos en el sentido de Dieudonné que no sean realcompactos.

La siguiente proposición es un resumen de todo expuesto hasta este momento.

1.2.1. PROPOSICIÓN. *Sea X un espacio de Tychonoff.*

(1) *El espacio $C_p(X)$ es un subespacio denso de $\mathbb{R}^X$.*
(2) *El número de Souslin de $C_p(X)$ es numerable.*
(3) *El espacio $C_p(X)$ es un espacio paracompacto si y sólo si es un espacio de Lindelöf.*
(4) *$C_p(X)$ es un espacio completo en el sentido de Dieudonné si y sólo si $C_p(X)$ es un espacio realcompacto.*

Como bien se sabe, uno de los conceptos más fundamentales de la topología es el de compacidad. Una vez que tenemos definidos a los espacios $C_p(X)$, de forma muy natural surge la pregunta de si espacios topológicos de este tipo pueden ser espacios compactos. La siguiente proposición da respuesta a este planteamiento.

1.2.2. PROPOSICIÓN. *Para cada espacio de Tychonoff X, el espacio de los números reales $\mathbb{R}$ es homeomorfo a un subespacio cerrado del espacio $C_p(X)$. En particular, los espacios $C_p(X)$ nunca son espacios numerablemente compactos.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos a la función $\varphi : \mathbb{R} \to C_p(X)$ dada por lo siguiente: dado $r \in \mathbb{R}$, la función $\varphi(r) : X \to \mathbb{R}$ es la función constante de valor r. Afirmamos que la función φ de esta forma definida es una inmersión cerrada.

Efectivamente, demostremos primeramente que φ es inyectiva. Sean $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $\varphi(r) = \varphi(s)$. Elijamos en forma arbitraria un elemento $x \in X$. Observe ahora que de la propia definición de las funciones $\varphi(r)$ y $\varphi(s)$ obtenemos fácilmente que $r = \varphi(r)(x) = \varphi(s)(x) = s$.

Obérvese que como $\pi_x \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ para cada $x \in X$, la función φ es una función continua (recuerde que π_x denota a la x-ésima función proyección asociada al producto topológico $\mathbb{R}^X$).

Para verificar que φ es una función abierta sobre su imagen, simplemente observemos que si U es un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}$ y $x \in X$ es un elemento arbitrario, entonces $\varphi(U) = [x; U] \cap \varphi(\mathbb{R})$. Esto permite demostrar muy fácilmente que φ es una función abierta sobre su imagen. Con todos los hechos anteriores tenemos demostrado que esta función es una inmersión.

Probaremos ahora que el espacio $\varphi(\mathbb{R})$ es un subespacio cerrado del espacio topológico $C_p(X)$. Con este objetivo en mente, elijamos en forma arbitraria un elemento $f \in C_p(X) \setminus \varphi(\mathbb{R})$. Entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$ (observe que de otra forma la función f sería una función constante). Hagamos $\epsilon = \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{2}$. No es difícil verificar que $[f; x_1, x_2; \epsilon] \subset C_p(X) \setminus \varphi(\mathbb{R})$. En consecuencia, el espacio $\varphi(\mathbb{R})$ es un subespacio cerrado de $C_p(X)$. □

Por la Proposición 1.2.2 sabemos ya que ningún espacio de tipo $C_p(X)$ puede ser un espacio numerablemente compacto. Debido a que la clase de los espacios numerablemente compactos es una subclase de la clase de espacios pseudocompactos, es muy natural que uno se pregunte por la existencia de espacios de Tychonoff X para los cuales el espacio $C_p(X)$ sea pseudocompacto. Como veremos enseguida, tales espacios no existen. Para convencernos de ello, supongamos que X es un espacio de Tychonoff y que x_0 es un elemento cualquiera de X, observemos ahora que la función $\pi_{x_0} \restriction C_p(X) : C_p(X) \to \mathbb{R}$ es una función continua y no acotada (para demostrar que la función $\pi_{x_0} \restriction C_p(X)$ es no acotada, recuerde que si $r \in \mathbb{R}$ entonces $\varphi(r) \in C_p(X)$ es la función constante de valor r. De este modo, se tiene que $(\pi_{x_0} \restriction C_p(X))(\varphi(r)) = \varphi(r)(x_0) = r$ para cada $r \in \mathbb{R}$).

Sin mayor preámbulo enunciamos la siguiente proposición.

1.2.3. PROPOSICIÓN. *Sea $\{Y_\alpha, \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos. Entonces para cada espacio topológico X, el espacio de funciones $C_p(X, \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha)$ es homeomorfo al espacio topológico $\prod_{\alpha\in A} C_p(X, Y_\alpha)$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $\alpha \in A$, denotemos con π_α a la α-ésima función proyección asociada al producto topológico $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ y con p_α a la α-ésima función proyección asociada al producto topológico $\prod_{\alpha\in A} C_p(X, Y_\alpha)$.

Sea

$$H : C_p(X, \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha) \to \prod_{\alpha\in A} C_p(X, Y_\alpha)$$

la función cuya regla de asociación está dada por lo siguiente: si $f \in C_p(X, \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha)$ entonces $H(f) = \{f_\alpha\} \in \prod_{\alpha\in A} C_p(X, Y_\alpha)$, donde $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ para cada $\alpha \in A$. Comprobaremos que la función H es un homeomorfismo.

Probemos primeramente que H es biyectiva. Sea $f = \{f_\alpha\} \in \prod_{\alpha\in A} C_p(X, Y_\alpha)$. Consideremos al producto diagonal $g = \Delta_{\alpha\in A} f_\alpha$ de las funciones f_α. Entonces $g \in C_p(X, \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha)$ y $H(g) = f$. Esto demuestra que H es sobreyectiva. Por otra parte, supongamos que $H(g) = H(f)$ para algunas funciones f y g en $C_p(X)$. Por la definición de H, tenemos que $\pi_\beta \circ g = \pi_\beta \circ f$ para cada $\beta \in A$. Como $f, g : X \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$, lo anterior implica que $f = g$. Por lo tanto, H es inyectiva.

Para probar la continuidad de la función H, bastará verificar que la composición $p_\beta \circ H : C_p(X, \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha) \to C_p(X, Y_\beta)$ es continua para cada $\beta \in A$.

Fijemos un índice $\beta \in A$. Consideremos un elemento cualquiera $g \in C_p(X, \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha)$ y un abierto canónico

$$W = [x_1, \ldots, x_n; V_{\beta,1}, \ldots, V_{\beta,n}]$$

de $C_p(X, Y_\beta)$ que contenga a $\big(p_\beta \circ H\big)(g)$. Entonces el conjunto

$$V = [x_1, \dots , x_n; \pi_\beta^{-1}\big(V_{\beta,1}\big), \dots , \pi_\beta^{-1}\big(V_{\beta,n}\big)]$$

es un abierto canónico de $C_p(X, \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha)$ que contiene a g y para cual sucede que $\big(p_\beta \circ H\big)(V) \subset W$. Por lo tanto, la composición $p_\beta \circ H$ es continua en g.

Ahora verificaremos que H es una función abierta. Para este propósito, consideremos un abierto canónico no vacío

$$V = [x_1, \dots , x_n; V_1, \dots , V_n]$$

del espacio $C_p(X, \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha)$. Es claro que podemos suponer que $V_i = \bigcap_{\alpha\in F_i} \pi_\alpha^{-1}\big(V_{\alpha,i}\big)$, donde $F_i \subset A$ es un subconjunto finito no vacío y $V_{\alpha,i} \in \tau(Y_\alpha)$ para cada $i = 1, \dots , n$. Afirmamos que

$$H(V) = \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{\alpha\in F_i} p_\alpha^{-1}\big([x_i; V_{\alpha,i}]\big).$$

En efecto, sea $g \in H(V)$ arbitrario. Entonces existe $f \in V$ tal que $H(f) = g$. Fijemos $j \in \{1, \dots , n\}$ y $\beta \in F_j$. Como $f \in V$, tenemos que $f(x_j) \in V_j$. Aplicando la definición del conjunto V_j, tenemos que $f(x_j) \in \pi_\beta^{-1}(V_{\beta,j})$. Entonces $\pi_\beta\big(f(x_j)\big) \in V_{\beta,j}$. Observe ahora que $\big(p_\beta(g)\big)(x_j) = p_\beta\big(H(f)\big)(x_j) = \big(\pi_\beta \circ f\big)(x_j)$. Entonces $g \in p_\beta^{-1}\big([x_j; V_{\beta,j}]\big)$. Por lo tanto, $H(V) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{\alpha\in F_i} p_\alpha^{-1}\big([x_i; V_{\alpha,i}]\big)$. Para establecer la contención contraria simplemente observe que si $g = \{g_\alpha\}$ es un elemento cualquiera del conjunto $\bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{\alpha\in F_i} p_\alpha^{-1}\big([x_i; V_{\alpha,i}]\big)$, entonces el producto diagonal $f = \Delta_{\alpha\in A} g_\alpha$ es un elemento de V para el cual sucede que $H(f) = g$. Todo lo anterior permite concluir que los conjuntos $H(V)$ y $\bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{\alpha\in F_i} p_\alpha^{-1}\big([x_i; V_{\alpha,i}]\big)$ coinciden. Por lo tanto H es una función abierta. □

Si miramos detenidamente la forma en que hemos introducido a la topología de los espacios $C_p(X, Y)$, podemos darnos cuenta que el paso clave de este proceso es la consideración de la topología del espacio Y. De esta simple observación surge la idea de utilizar, para el caso particular de los espacios $C_p(X)$, a la estructura algebraica del campo de los números reales para poder dotar a los espacios de tipo $C_p(X)$ de una estructura algebraica propia. Para lograr esto, definamos para cada par de funciones f y g en $C(X)$ a las funciones $f+g$, $f\cdot g$ y rf (para $r\in\mathbb{R}$) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x),\\ (f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x),\\ (r\,f)(x) &= r\cdot f(x),\end{aligned}$$

donde $x\in X$. Es rutinario verificar que para cualquier elección de las funciones continuas $f,g\in C(X)$ y del número real r, las funciones $f+g$, $f\cdot g$ y rf son continuas. Como una consecuencia de ello, obtenemos una buena definición para las siguientes funciones.

(1) La función *adición* $\phi_+ : C(X)\times C(X)\to C(X)$ cuya regla de asociación está dada por $\phi_+\big((f,g)\big) = f+g$, donde $(f,g)\in C(X)\times C(X)$.
(2) La función *multiplicación* $\phi_\times : C(X)\times C(X)\to C(X)$ dada por $\phi_\times\big((f,g)\big) = f\cdot g$, para cada $(f,g)\in C(X)\times C(X)$.
(3) La función *multiplicación por escalares*

$$\phi : \mathbb{R}\times C(X)\to C(X),$$

donde $\phi\big((r,f)\big) = rf$ para cada $r\in\mathbb{R}$ y cada $f\in C(X)$.

El siguiente teorema concreta nuestra idea de dotar a los espacios de tipo $C_p(X)$ de una estructura algebraica. Lo notable de las operaciones algebraicas que han sido definidas es que estas operaciones son "consistentes" con la topología de los espacios $C_p(X)$.

1.2.4. Teorema. *Con las operaciones ϕ_+, $\phi_\times$ y ϕ, el espacio $C_p(X)$ es un anillo topológico y un espacio vectorial topológico sobre el campo de los números reales.*

Demostración. Dejaremos al cuidado del lector la comprobación del hecho de que las operaciones algebraicas definidas en $C(X)$ satisfacen todas las reglas para que este conjunto sea un anillo algebraico y un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$. De este modo, nos dedicaremos únicamente a comprobar que las funciones ϕ_+, $\phi_\times$ y ϕ son funciones continuas (al considerar en el conjunto $C(X)$ a la topología de convergencia puntual). Antes de iniciar la demostración de esta afirmación, debemos hacer notar que al ser el espacio de los números reales $\mathbb{R}$ homeomorfo al subespacio $\varphi(\mathbb{R})$ de $C_p(X)$ (el cual está formado por todas las funciones constantes definidas sobre el espacio X), se tiene que $\phi = \big(\phi_\times \restriction (\varphi(\mathbb{R}) \times C_p(X))\big) \circ \big(\varphi \times \mathrm{id}_{C_p(X)}\big)$, por lo cual, para demostrar la continuidad de las tres funciones antes mencionadas será suficiente verificar la continuidad de las funciones ϕ_+ y $\phi_\times$ (véase la demostración de la Proposición 1.2.2 para la definición precisa de la función φ).

Con el propósito de demostrar la continuidad de la función ϕ_+, consideremos a un elemento arbitrario (f,g) de $C_p(X) \times C_p(X)$ y a una vecindad $A = [\phi_+(f,g); x_1, \ldots, x_n; \epsilon]$ de $\phi_+(f,g)$ en $C_p(X)$. El lector no tendrá ninguna dificultad en comprobar que para las vecindades

$$[f; x_1, \ldots, x_n; \tfrac{\epsilon}{2}] \quad \text{y} \quad [g; x_1, \ldots, x_n; \tfrac{\epsilon}{2}],$$

de los puntos f y g de $C_p(X)$ respectivamente, se tiene que

$$\phi_+\big([f; x_1, \ldots, x_n; \tfrac{\epsilon}{2}] \times [g; x_1, \ldots, x_n; \tfrac{\epsilon}{2}]\big) \subset A.$$

Todo lo antes expuesto argumenta la continuidad de la función adición en el punto (f,g).

Por otro lado, consideremos un punto arbitrario $(f,g) \in C_p(X) \times C_p(X)$ y una vecindad $C = [\phi_\times(f,g); x_1, \ldots, x_n; \epsilon]$ de $\phi_\times(f,g)$ en $C_p(X)$. Consideremos ahora a los números reales

$$M = \max\{|f(x_i)| : i = 1, \ldots, n\}$$

y

$$m = \max\{|g(x_i)| : i = 1, \ldots, n\}.$$

Definamos a $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{2M+1}, 1\}$. Entonces

$$A = [f; x_1, \ldots, x_n; \tfrac{\epsilon}{2m+1}] \quad \text{y} \quad B = [g; x_1, \ldots, x_n; \delta]$$

son vecindades de f y g en $C_p(X)$, para las cuales se satisface la siguiente condición: si $h \in A$ y $k \in B$ entonces $h \cdot k \in C$. En efecto, si $i \in \{1, \dots, n\}$ entonces

$$\begin{aligned}|(h \cdot k)(x_i) - f \cdot g(x_i)| &\leqslant |k(x_i)||f(x_i) - h(x_i)| + |f(x_i)||g(x_i) - k(x_i)| \\ &< (m+1)\tfrac{\epsilon}{2(m+1)} + (M+1)\tfrac{\epsilon}{2(M+1)} = \epsilon.\end{aligned}$$

Todo lo anterior demuestra que la función multiplicación es continua en (f, g). □

1.3. Funciones duales y funciones restricción

Siempre que se define un método para construir un espacio topológico a partir de un espacio dado, surge la necesidad de conocer cual es la relación existente entre aquellos espacios que se construyen aplicando este método a dos espacios que se suponen relacionados por medio de una función continua. En nuestro caso particular, una vez que tenemos establecido a los espacios de tipo $C_p(X)$, el siguiente paso es aclarar cuál es la relación que existe entre los espacios $C_p(X)$ y $C_p(Y)$, en el supuesto de que haya una función continua entre X y Y. En los párrafos subsecuentes intentaremos aclarar cuál es esta relación.

Fijemos un espacio de Tychonoff X. Si $f : Y \to Z$ es continua, entonces esta función determina un mapeo

$$f_* : C_p(X, Y) \to C_p(X, Z)$$

que tiene por regla de asociación a la fórmula $f_*(h) = f \circ h$, para cualquier $h \in C_p(X, Y)$.

Un buen número de propiedades elementales de las funciones de tipo f_* pueden ser establecidas de manera sencilla. En particular, en la siguiente proposición demostraremos que las funciones de este tipo son siempre continuas. Antes de enunciar formalmente este resultado, observemos que de la propia definición de las funciones f_* se puede comprobar fácilmente que la transición de f a f_* tiene el siguiente comportamiento:

(1) Si $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$ es la función identidad definida sobre el espacio Y, entonces $(\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{C_p(X,Y)}$.
(2) Si $f : Y \to Z$ y $g : Z \to W$ son funciones continuas, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

1.3.1. PROPOSICIÓN. *Sean X un espacio topológico y $f : Y \to Z$ una función continua. Entonces*
(1) *la función inducida $f_* : C_p(X,Y) \to C_p(X,Z)$ es una función continua; además,*
(2) *si $f : Y \to Z$ es una inmersión (respectivamente, una inmersión cerrada) entonces la función inducida por f*

$$f_* : C_p(X,Y) \to C_p(X,Z)$$

es también una inmersión (respectivamente, una inmersión cerrada).

DEMOSTRACIÓN. (1) Sean $t \in C_p(X,Y)$ un elemento arbitrario y $B = [x_1, \dots, x_n; W_1, \dots, W_n]$ una vecindad de $f_*(t)$ en $C_p(X,Z)$. Note que la continuidad de la función f implica que

$$A = [x_1, \dots, x_n; f^{-1}(W_1), \dots, f^{-1}(W_n)]$$

es una vecindad de t en el espacio $C_p(X,Y)$. Además, para tal vecindad se tienen las siguientes dos propiedades: $t \in A$ y $f_*(A) \subset B$. De este modo, la función f_* es continua en el punto t.

(2) A raíz del resultado del inciso anterior, es suficiente probar que la función f_* es una función inyectiva y una función abierta sobre su imagen.

Para probar la inyectividad de f_*, supongamos que $f_*(t) = f_*(h)$ para t y h en $C_p(X,Y)$. Elijamos un elemento $x \in X$. Entonces $f(t(x)) = (f_*(t))(x) = (f_*(h))(x) = f(h(x))$. Como f es inyectiva, tenemos que $t(x) = h(x)$. Dado que x fue elegido en forma arbitraria, podemos concluir que $t = h$.

Por otro lado, consideremos un abierto canónico no vacío $A = [x_1, \dots, x_n; V_1, \dots, V_n]$ del espacio $C_p(X,Y)$. Como f es una inmersión, cada uno de los conjuntos $f(V_1), \dots, f(V_n)$ es un subconjunto abierto del subespacio $f(Y)$ de Z. Por tal razón, podemos seleccionar abiertos $W_1, \dots, W_n$ de Z tales que $V_i = W_i \cap$

$f(Y)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Note ahora que el conjunto $B = [x_1, \ldots, x_n; W_1, \ldots, W_n]$ es un abierto canónico del espacio $C_p(X, Z)$. Además, para este abierto canónico se tiene que $f_*(A) = B \cap f_*(C_p(X, Y))$. Todo lo antes expuesto permite demostrar muy fácilmente que la función f_* es abierta sobre su imagen.

Supongamos ahora que f es una inmersión cerrada y consideremos un elemento arbitrario $h \in C_p(X, Z) \setminus f_*(C_p(X, Y))$. Obsérvese que debido a que $h \notin f_*(C_p(X, Y))$, no puede suceder que $h(X) \subset f(Y)$, de donde existe un elemento $x_0 \in X$ para el cual $h(x_0) \in Z \setminus f(Y)$. Consideremos ahora un abierto W del espacio Z tal que $h(x_0) \in W \subset Z \setminus f(Y)$. Entonces $h \in [x_0; W] \subset C_p(X, Z) \setminus f_*(C_p(X, Y))$. Por lo tanto, el conjunto $f_*(C_p(X, Y))$ es un subespacio cerrado de $C_p(X, Z)$. □

Con la experiencia obtenida al conocer la forma en que son generadas las funciones de tipo f_*, es fácil intuir que en la situación de tener un espacio fijo Z, la existencia de una función continua entre dos espacios topológicos X y Y, determina la existencia de una función continua entre los espacios $C_p(X, Z)$ y $C_p(Y, Z)$.

Si X, Y y Z son espacios topológicos y $g : X \to Y$ es una función continua, definimos a la función $g^* : C_p(Y, Z) \to C_p(X, Z)$ por medio de la relación $g^*(h) = h \circ g$ (donde $h \in C_p(Y, Z)$).

Para los fines de esta obra, son de particular importancia las propiedades de las funciones de tipo g^* en el caso particular cuando el espacio Z es el espacio usual de los números reales. En las siguientes proposiciones exponemos algunas de estas propiedades.

1.3.2. PROPOSICIÓN. *Sea $g : X \to Y$ una función continua. Entonces*

(1) *la función inducida $g^* : C_p(Y) \to C_p(X)$ es una función continua;*
(2) *si g es una función sobreyectiva entonces la función*

$$g^* : C_p(Y) \to C_p(X)$$

es una inmersión; además,

(3) *la función g es una función inyectiva si y sólo si el subespacio $g^*(C_p(Y))$ es un subespacio denso del espacio $C_p(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Sean $t \in C_p(Y)$ un punto arbitrario y $B = [x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n]$ un abierto canónico de $C_p(X)$ que contiene a $g^*(t)$. El lector no tendrá dificultad alguna para comprobar que el abierto canónico $A = [g(x_1), \ldots, g(x_n); U_1, \ldots, U_n]$ contiene a la función t y además $g^*(A) \subset B$. Todos estos hechos demuestran la continuidad de la función g^* en el punto t.

(2) Verificaremos que g^* es inyectiva y que también es una función abierta sobre su imagen.

Probemos primeramente que g^* es inyectiva. Supóngase que $g^*(t) = g^*(h)$ para $t, h \in C_p(Y)$. Sea $y \in Y$ arbitrario. Como g es sobreyectiva, existe un elemento $x \in X$ tal que $g(x) = y$. Entonces $t(y) = t(g(x)) = (g^*(t))(x) = (g^*(h))(x) = h(g(x)) = h(y)$. Por lo tanto, $t = h$.

Con el propósito de probar que g^* es abierta sobre su imagen, consideremos un abierto canónico no vacío

$$A = [y_1, \ldots, y_n; U_1, \ldots, U_n]$$

del espacio topológico $C_p(Y)$. Elijamos una función $t \in g^*(A)$. Ahora bien, como g es una función sobreyectiva, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ podemos elegir un elemento x_i en la fibra $g^{-1}(\{y_i\})$. Afirmamos que $t \in [x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n] \cap g^*(C_p(Y)) \subset g^*(A)$ (observe que esto demostraría que $g^*(A)$ es un subespacio abierto de $g^*(C_p(Y))$). En efecto, como $t \in g^*(A)$, existe $s \in A$ tal que $t = s \circ g$. Note ahora que debido a que $s \in A$ y $x_i \in g^{-1}(\{y_i\})$ para cada índice $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $t(x_i) = s(g(x_i)) = s(y_i) \in U_i$ para toda i. Consecuentemente se tiene que $t \in [x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n]$. Elijamos ahora un elemento $h \in [x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n] \cap g^*(C_p(Y))$. Entonces existe $k \in C_p(Y)$ tal que $h = g^*(k) = k \circ g$. Como $h \in [x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n]$, tenemos que $k(y_i) = k(g(x_i)) = h(x_i) \in U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, de donde la función k pertenece a A. Por lo tanto, se tiene que $h \in g^*(A)$.

(3) Supongamos que g es inyectiva. Sea $A \in \tau^*(C_p(X))$. Elijamos $f \in A$ y una vecindad canónica $[f; x_1, \dots, x_n; \epsilon]$ de f en $C_p(X)$ tal que $[f; x_1, \dots, x_n; \epsilon] \subset A$. Podemos suponer sin perder generalidad que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Entonces todos los puntos $g(x_1)$, $\dots, g(x_n)$ son distintos entre sí (recuerde que estamos suponiendo que g es una inyección). Como Y es un espacio de Tychonoff, existe una función continua $t \in C_p(Y)$ tal que $t(g(x_i)) = f(x_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces $g^*(t) \in [f; x_1, \dots, x_n; \epsilon]$. Por lo tanto, $g^*(C_p(Y)) \cap A \neq \emptyset$, lo que establece la densidad de $g^*(C_p(Y))$ en $C_p(X)$.

Por otro lado, supongamos que $g^*(C_p(Y))$ es un subespacio denso de $C_p(X)$. Observe que si g no fuese una función inyectiva, entonces existirían elementos distintos x_1 y x_2 en X para los cuales $g(x_1) = g(x_2)$. Pero entonces para toda función $k \in g^*(C_p(Y))$ tendríamos necesariamente que $k(x_1) = k(x_2)$. Tomemos ahora una función continua $f \in C_p(X)$ tal que $f(x_1) = 1$ y $f(x_2) = 2$ (recuerde que X es de Tychonoff). Entonces tenemos que

$$[f; x_1, x_2; \tfrac{1}{2}] \cap g^*(C_p(Y)) = \emptyset,$$

lo cual no puede ser cierto puesto que estamos suponiendo que $g^*(C_p(Y))$ es denso en $C_p(X)$. Por lo tanto, la función g debe ser inyectiva. $\square$

La propiedad plasmada en el inciso (2) de la Proposicion 1.3.1 sugiere investigar el comportamiento de las funciones de tipo i^* inducidas por inmersiones i.

Con el propósito de realizar un primer análisis de este comportamiento, notemos en primer término que si Z es un espacio de Tychonoff e $i : Y \to X$ es una inmersión, entonces la correspondiente función inducida $i^* : C_p(X, Z) \to C_p(Y, Z)$ asocia a cada función $h \in C_p(X, Z)$, la restricción $h \restriction i(Y)$ de h al subespacio $i(Y)$ de X. Como consecuencia de ello, la situación de investigar el comportamiento de las funciones inducidas por inmersiones se reduce a la investigación de las propiedades de aquellas funciones de tipo i^* inducidas por funciones inclusión i. De particular interés para nosotros es el caso cuando el espacio Z es el espacio de los números reales $\mathbb{R}$.

La proposición que a continuación se enuncia, establece algunas propiedades de las llamadas *funciones restricción*. Cabe señalar que cuando se tiene un subespacio Y de un espacio topológico X, la función i^* inducida por la correspondiente función inclusión $i : Y \to X$ recibe el nombre de *función restricción* (al subespacio Y) y es habitual denotarla utilizando los símbolos π_Y. Asimismo, es común hacer uso de los símbolos $C_p(Y|X)$ para denotar al subespacio $\pi_Y(C_p(X))$ del espacio $C_p(Y)$.

1.3.3. PROPOSICIÓN. *Sea Y un subespacio de un espacio topológico X.*

(1) *El espacio $C_p(Y|X)$ es un subespacio denso del espacio $C_p(Y)$.*
(2) *Si Y es un subespacio cerrado en X entonces la función restricción $\pi_Y : C_p(X) \to C_p(Y|X)$ es una función abierta.*
(3) *Si Y es un subespacio C-encajado entonces el mapeo*

$$\pi_Y : C_p(X) \to C_p(Y)$$

es sobreyectivo.
(4) *Si Y es un subespacio denso de X, entonces*

$$\pi_Y : C_p(X) \to C_p(Y)$$

es una función inyectiva. De manera particular, la función $\pi_Y : C_p(X) \to C_p(Y|X)$ es una condensación, esto es, una mapeo biyectivo continuo.

DEMOSTRACIÓN. (1) Sean $h \in C_p(Y)$ y $A = [h; y_1, \dots, y_n; \epsilon]$ una vecindad canónica de h en $C_p(Y)$. Como X es un espacio Tychonoff, existe una función continua $f \in C_p(X)$ tal que $f(y_i) = h(y_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$. Por la forma de haber seleccionado a la función f, obtenemos fácilmente que $\pi_Y(f) \in A$.

(2) Sea $U \subset C_p(X)$ un abierto no vacío. Para verificar que $\pi_Y(U)$ es un subconjunto abierto de $C_p(Y|X)$, elijamos un elemento cualquiera $g \in \pi_Y(U)$. Entonces existe $f \in U$ tal que $\pi_Y(f) = g$. Como U es abierto en $C_p(X)$, existe una vecindad

canónica $A = [f; x_1, \ldots, x_n; \epsilon]$ de f en $C_p(X)$ tal que $f \in A \subset U$. Observe ahora que en el caso cuando $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset Y$, se tiene que el conjunto

$$\pi_Y(A) = [\pi_Y(f); x_1, \ldots, x_n; \epsilon] \cap C_p(Y|X).$$

Por otro lado, notemos que si $\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus Y \neq \emptyset$ entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe un índice $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $\{x_1, \ldots, x_l\} \subset Y$ y $\{x_{l+1}, \ldots, x_n\} \subset (X \setminus Y)$. Comprobaremos ahora que el conjunto

$$\pi_Y(A) = [\pi_Y(f); x_1, \ldots, x_l; \epsilon] \cap C_p(Y|X).$$

Para este fin, observemos primero que de la propia definición del abierto A se sigue que $\pi_Y(A) \subset [\pi_Y(f); x_1, \ldots, x_l; \epsilon] \cap C_p(Y|X)$. De este modo, será suficiente verificar que $[\pi_Y(f); x_1, \ldots, x_l; \epsilon] \cap C_p(Y|X) \subset \pi_Y(A)$. Para probar esto último, elijamos un elemento arbitrario h en el conjunto $[\pi_Y(f); x_1, \ldots, x_l; \epsilon] \cap C_p(Y|X)$. Como $h \in C_p(Y|X)$, existe una función $k \in C_p(X)$ tal que $\pi_Y(k) = h$. Ahora bien, debido a que X es de Tychonoff, $Y \subset X$ es cerrado y $\{x_1, \ldots, x_l\} \subset Y$, podemos elegir una función $t \in C_p(X)$ con la propiedad de que $t(Y) \subset \{0\}$ y $t(x_j) = f(x_j) - k(x_j)$ para cada $j = l+1, \ldots, n$. Entonces $t + k \in A$ y $\pi_Y(t+k) = h$. Por lo tanto, tenemos que $h \in \pi_Y(A)$.

Para finalizar la demostración, notemos que con todo lo antes expuesto hemos probado que el conjunto $\pi_Y(A)$ es un subconjunto abierto del espacio $C_p(Y|X)$. Como $g \in \pi_Y(A) \subset \pi_Y(U)$, podemos ahora concluir que $\pi_Y(U)$ es un subconjunto abierto de $C_p(Y|X)$.

(3) La demostración es una consecuencia inmediata de la definición de subespacio C-encajado.

(4) Sean f_1 y f_2 en $C_p(X)$ tales que $f_1 \neq f_2$. Elijamos $x_0 \in X$ de tal manera que $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$. Entonces el conjunto

$$U = f_1^{-1}\big((f_1(x_0) - r, f_1(x_0) + r)\big) \cap f_2^{-1}\big((f_2(x_0) - r, f_2(x_0) + r)\big),$$

donde $r = \frac{|f_1(x_0) - f_2(x_0)|}{2}$, es un subconjunto abierto no vacío del espacio topológico X. Como Y es un subespacio denso de X, podemos elegir $y_0 \in Y \cap U$. Note ahora que por la forma de haber definido al conjunto U, necesariamente $f_1(y_0) \neq f_2(y_0)$, de donde

$\pi_Y(f_1) \neq \pi_Y(f_2)$ (puesto que $y_0 \in Y$). En consecuencia, la función π_Y es inyectiva. □

1.4. La inmersión de X en $C_p(C_p(X))$ y los espacios $L_p(X)$

Sea X un espacio de Tychonoff. Para cada $x \in X$, consideremos a la función $e_x : C_p(X) \to \mathbb{R}$ dada por $e_x = \pi_x \restriction C_p(X)$ (recuerde que $\pi_x : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}$ es la x-ésima proyección asociada al producto topológico $\mathbb{R}^X$). Debido a que cada función e_x es la restricción de una función continua, todas las funciones de tipo e_x son funciones continuas, y por tal razón, son elementos del espacio $C_p(C_p(X))$. Esta simple observación nos permite considerar a la función

$$i_X : X \to C_p(C_p(X))$$

cuya regla de asociación es $i_X(x) = e_x$ (para cada $x \in X$). La proposición que enseguida enunciamos establece que la función i_X es una inmersión (de hecho, la función i_X es una inmersión cerrada. El lector puede consultar la obra de A. V. Arhangel'skii [**11**] para hallar una demostración de esta última afirmación).

1.4.1. PROPOSICIÓN. *Para cada espacio de Tychonoff X, la función*

$$i_X : X \to C_p(C_p(X))$$

es una inmersión.

DEMOSTRACIÓN. Demostremos primeramente que i_X es una función inyectiva. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Dado que X es un espacio de Tychonoff, existe $f \in C_p(X)$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Entonces $e_x(f) = f(x) \neq f(y) = e_y(f)$, de donde $i_X(x) \neq i_X(y)$.

Consideremos ahora a un elemento arbitrario x del espacio X y a una vecindad arbitraria $A = [e_x; g_1, \ldots, g_n; \epsilon]$ de e_x en $C_p(C_p(X))$. Dado que cada función g_i es una función continua, tenemos que

$$g_i^{-1}\big((g_i(x) - \epsilon, g_i(x) + \epsilon)\big)$$

es un abierto de X que contiene a x, para toda $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}\big((g_i(x) - \epsilon, g_i(x) + \epsilon)\big)$$

es una vecindad de x en X para la cual sucede que $i_X(V) \subset A$. Por lo tanto, i_X es continua en el punto x.

Demostremos ahora que la función $i_X^{-1} : i_X(X) \to X$ es continua. Sean $x \in X$ y $V \in \tau(x, X)$ arbitrarios. Dado que X es un espacio de Tychonoff, podemos elegir una función $f \in C_p(X)$ de tal manera que $f(x) = 0$ y $f(X \setminus V) \subset \{1\}$. Consideremos a la vecindad $A = [e_x; f; \frac{1}{2}] \cap i_X(X)$ de e_x en $C_p(C_p(X))$. Afirmamos que $i_X^{-1}(A) \subset V$. Efectivamente, si existíera un elemento $z \in i_X^{-1}(A) \setminus V$ entonces para tal elemento ocurriría que $f(z) = 1$ (puesto que $z \in X \setminus V$). Como $z \in i_X^{-1}(A)$, tenemos que $i_X(z) \in A$. Se sigue entonces que $|f(z)| = |i_X(z)(f)| = |e_z(f)| < \frac{1}{2}$, pero esto contradice el hecho de que $f(z) = 1$. Por lo tanto, $i_X^{-1}(A) \subset V$. Con todo lo anterior podemos establecer formalmente la continuidad de la función i_X^{-1} en el punto e_x. Consecuentemente, la función i_X es una inmersión. $\square$

Hemos ya demostrado, en el Teorema 1.2.4, que los espacios de tipo $C_p(X)$ pueden ser visualizados como espacios vectoriales topológicos (sobre el campo de los números reales). Por la Proposición 1.4.1 sabemos también que si X es un espacio de Tychonoff entonces X es homeomorfo a un subespacio del espacio $C_p(C_p(X))$, así que cabe preguntarnos cuál es el mínimo subespacio vectorial del espacio $C_p(C_p(X))$ que contiene a X (propiamente a $i_X(X)$). La respuesta a esta pregunta no es difícil de obtener. De ahora en adelante, identificaremos a cada elemento x del espacio X con la correspondiente función e_x (véase el primer párrafo al inicio de esta sección para la definición formal de las funciones e_x).

1.4.2. Definición. Dado un espacio de Tyhonoff X, el conjunto

$$L(X) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}; x_1, \ldots, x_n \in X; n \in \omega \setminus \{0\}\}$$

es el subespacio vectorial de $C_p(C_p(X))$ generado por X. El espacio $L_p(X)$ es el conjunto $L(X)$ equipado con la topología de subespacio respecto de $C_p(C_p(X))$.

Notemos que toda combinación lineal de tipo $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ (es decir, cualquier elemento del espacio $L_p(X)$) es una funcional lineal continua definida sobre el espacio vectorial topológico $C_p(X)$ (para convencerse de ello, simplemente recuerde que estamos identicando a cada elemento $x \in X$ con la correspondiente función e_x. Recuerde ahora que $e_x = \pi_x \restriction C_p(X)$). La proposición que a continuación establecemos expresa que el espacio $L_p(X)$ es precisamente el conjunto de todas las funcionales lineales continuas definidas sobre el espacio vectorial topológico $C_p(X)$.

1.4.3. PROPOSICIÓN. *Sea $\theta : C_p(X) \to \mathbb{R}$ una funcional lineal continua no trivial. Entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$ (para algún $n \in \omega \setminus \{0\}$) tales que*

$$\theta = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que θ es continua en la función constante $\varphi(0)$ definida sobre el espacio X, existe $A = [\varphi(0); x_1, \ldots, x_n; \epsilon]$ vecindad canónica de $\varphi(0)$ en $C_p(X)$ tal que $\theta(A) \subset (-1, 1)$. Ahora bien, como X es un espacio de Tychonoff, existe $f_i \in C_p(X)$ tal que

$$f_i(x_i) = 1 \quad \text{y} \quad f_i(\{x_j : j \neq i\}) = 0,$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. Hagamos $\lambda_i = \theta(f_i)$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

AFIRMACIÓN. Si $g \in C_p(X)$ es tal que $g(x_i) = 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\theta(g) = 0$.

Es claro que si $k \in \omega \setminus \{0\}$ entonces $(k \cdot g)(x_i) = 0$ para cualquier $i = 1, \ldots, n$. Entonces $k \cdot g \in A$ para toda $k \in \omega \setminus \{0\}$. Por la forma en que elegimos a la vecindad A, tenemos que $\theta(k \cdot g) \subset (-1, 1)$ para cualquier $k \in \omega \setminus \{0\}$. Aplicando ahora el hecho de que θ es lineal, podemos concluir que $|k\theta(g)| < 1$ para todo elemento $k \in \omega \setminus \{0\}$. Entonces $|\theta(g)| < \frac{1}{k}$ para cualquier $k \in \omega \setminus \{0\}$. Esto último nos permite concluir que $\theta(g) = 0$. ⊠

Para finalizar la demostración de la proposición utilizaremos la anterior afirmación para probar que $\theta = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.

Sea $g \in C_p(X)$ arbitraria. Definamos $h = g - \big(g(x_1)\cdot f_1 + \cdots + g(x_n)\cdot f_n\big)$. Claramente, $h \in C_p(X)$. Probemos que $h(x_i) = 0$ para cada i. En efecto, $h(x_i) = \big(g(x_i) - (g(x_1)\cdot f_1 + \cdots + g(x_n)\cdot f_n)\big)(x_i) = g(x_i) - \big(g(x_1)\cdot f_1(x_i) + \cdots + g(x_n)\cdot f_n(x_i)\big) = g(x_i) - g(x_i) = 0$ (recuerde que $f_i(x_i) = 1$ y $f_i(x_j) = 0$ para cada $j \neq i$). Aplicando la anterior afirmación, tenemos que $\theta(h) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
0 = \theta(h) &= \theta\big(g - (g(x_1)\cdot f_1 + \cdots + g(x_n)\cdot f_n)\big)\\
&= \theta(g) - \theta\big((g(x_1)\cdot f_1 + \cdots + g(x_n)\cdot f_n)\big)\\
&= \theta(g) - \big(g(x_1)\cdot \theta(f_1) + \cdots + g(x_n)\cdot \theta(f_n)\big)\\
&= \theta(g) - \big(\lambda_1\cdot x_1(g) + \cdots + \lambda_n \cdot x_n(g)\big)\\
&= \theta(g) - \big((\lambda_1\cdot x_1 + \cdots + \lambda_n\cdot x_n)(g)\big)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que $\theta(g) = (\lambda_1\cdot x_1 + \cdots + \lambda_n\cdot x_n)(g)$. Esto prueba la igualdad deseada. □

1.5. El teorema de Arhangel'skii-Pytkeev

Dado un espacio topológico X, el *grado de Lindelöf* $l(X)$ del espacio X es el más pequeño de los cardinales infinitos τ para los cuales se tiene la propiedad que de toda cubierta abierta del espacio X, es posible extraer una subcubierta cuya cardinalidad no excede a τ. Asimismo, se define al cardinal $l^*(X)$ como la más pequeña de las cotas superiores del conjunto constituido por los cardinales $l(X^n)$ donde $n \in \omega \setminus \{0\}$, esto es,

$$l^*(X) = \sup\{l(X^n) : n \in \omega \setminus \{0\}\}.$$

En esta sección demostraremos el clásico resultado debido a A. V. Arhangel'skii y a E. G. Pytkeev, el cual establece que para cada espacio topológico X, el invariante cardinal $l^*(X)$ coincide con la estrechez del espacio $C_p(X)$.

Para llevar a cabo la demostración de este teorema, demostraremos previamente dos resultados que nos serán de gran utilidad. El primero de estos resultados muestra la relación que existe entre la propiedad de que $l^*(X) \leqslant \tau$ para algún cardinal τ, con el hecho de que de toda ω-cubierta del espacio $C_p(X)$ es posible extraer una ω-subcubierta cuya cardinalidad no excede a τ. Antes de enunciar formalmente este resultado, necesitamos recordar la noción de ω-cubierta y la forma en que se define a la estrechez de un espacio topológico.

1.5.1. DEFINICIÓN. Sea X un espacio topológico. Se dice que una familia $\mathcal{U} \subset \tau(X)$ es una ω-cubierta de X si para cada conjunto finito $F \subset X$ existe un elemento $U \in \mathcal{U}$ tal que $F \subset U$.

Recuérdese que dado un punto x de un espacio X, la *estrechez* $t(x, X)$ *de* X *en el punto* x es el más pequeño de los números cardinales $\tau \geqslant \omega$ que poseen la siguiente propiedad: para cada $A \subset X$, con $x \in \overline{A}$, existe $B \subset A$ tal que $|B| \leqslant \tau$ y $x \in \overline{B}$. De este modo podemos definir a la *estrechez* de un espacio topológico X como el número cardinal infinito $t(X) = \sup\{t(x, X) : x \in X\}$.

1.5.2. TEOREMA. *Sea X un espacio de Tychonoff. Para todo cardinal τ se tiene que $l^*(X) \leqslant \tau$ si y sólo si cada ω-cubierta $\mathcal{U}$ del espacio X posee una ω-subcubierta $\mathcal{V}$ cuya cardinalidad no excede a τ.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $l^*(X) \leqslant \tau$. Dada una ω-cubierta $\mathcal{U}$ de X definimos, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, al conjunto $\mathcal{U}_n = \{U^n : U \in \mathcal{U}\}$. Observe que si $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ entonces para el conjunto $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ existe un elemento $U \in \mathcal{U}$ tal que $F \subset U$ (puesto que $\mathcal{U}$ es una ω-cubierta de X). Entonces $(x_1, \ldots, x_n) \in U^n$. De esta forma hemos establecido que el conjunto $\mathcal{U}_n$ es una cubierta de X^n, para toda $n \in \omega \setminus \{0\}$. Aplicando el hecho de que $l(X^n) \leqslant \tau$, podemos garantizar la existencia de una familia $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}$ tal que $\bigcup\{U^n : U \in \mathcal{V}_n\} = X^n$ y $|\mathcal{V}_n| \leqslant \tau$, para toda $n \in \omega \setminus \{0\}$. Hagamos $\mathcal{V} = \bigcup\{\mathcal{V}_n : n \in \omega \setminus \{0\}\}$. Entonces $\mathcal{V}$ es una ω-cubierta de X, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ y $|\mathcal{V}| \leqslant \tau$. Con todo lo anterior hemos probado que la condición dada en el enunciado del teorema es necesaria.

Supongamos ahora que de cada ω-cubierta $\mathcal{U}$ del espacio X, es posible extraer una ω-subcubierta cuya cardinalidad no excede a τ. Fijemos un índice $n \in \omega \setminus \{0\}$ y demostremos que $l(X^n) \leqslant \tau$.

Para este propósito, consideremos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ del espacio X^n. Diremos que una familia finita $\mathcal{B} \subset \tau(X)$ es *$\mathcal{U}$-dominada*, si para cada $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{B}$ (no necesariamente diferentes) existe un elemento $U \in \mathcal{U}$ tal que $U_1 \times \cdots \times U_n \subset U$. Consideremos a la familia $\mathcal{V} = \{\bigcup \mathcal{B} : \mathcal{B}$ es una familia $\mathcal{U}$-dominada$\}$. Afirmamos que $\mathcal{V}$ es una ω-cubierta de X. En efecto, si $F = \{x_1, \dots, x_k\} \subset X$ entonces para cada conjunto $\xi = \{i_1, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, k\}$ existen vecindades abiertas $V_{i_1}, \dots, V_{i_n}$ de los puntos $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ tales que $V_{i_1} \times \cdots \times V_{i_n} \subset U_\xi$ para algún $U_\xi \in \mathcal{U}$. Debido a que hay un número finito de tales puntos ξ, cada punto x_i obtiene de esta manera un número finito de vecindades. Intersectándo para toda x_i cada una de estas vecindades, obtenemos abiertos W_i para cada $i \leqslant k$, tales que la familia $\mathcal{B} = \{W_i : i \leqslant k\}$ es $\mathcal{U}$-dominada y además $F = \{x_1, \dots, x_k\} \subset \bigcup \mathcal{B}$. Esto demuestra que $\mathcal{V}$ es una ω-cubierta de X.

Por hipótesis existe una ω-subcubierta $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ de cardinalidad $\leqslant \tau$. Ahora bien, para cada $U \in \mathcal{W}$ existe una familia $\mathcal{B}_U$ tal que $\mathcal{B}_U$ es $\mathcal{U}$-dominada y $U = \bigcup \mathcal{B}_U$. Entonces, para cada $U \in \mathcal{W}$, existe una familia finita $\mathcal{U}_U \subset \mathcal{U}$ tal que para cualquier $\xi = \{V_1, \dots, V_n\} \subset \mathcal{B}_U$ se tiene que $V_1 \times \cdots \times V_n \subset G_\xi$ para algún $G_\xi \in \mathcal{U}_U$. Hagamos $\mathcal{C} = \bigcup\{\mathcal{U}_U : U \in \mathcal{W}\}$. Entonces $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$ y $|\mathcal{C}| \leqslant \tau$. Además, es fácil verificar que $\mathcal{C}$ es una cubierta de X^n. Por lo tanto, $l^*(X) \leqslant \tau$. □

1.5.3. Teorema. *Para cualquier espacio de Tychonoff X, se tiene que $t(C_p(X)) \leqslant \tau$ si y sólo si cada ω-cubierta $\mathcal{U}$ de X tiene una ω-subcubierta $\mathcal{V}$ tal que $|\mathcal{V}| \leqslant \tau$.*

Demostración. Supongamos que $t(C_p(X)) \leqslant \tau$. Dada una ω-cubierta $\mathcal{U}$ de X, hagamos

$$D = \{f \in C_p(X) : f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset U \text{ para algún } U \in \mathcal{U}\}.$$

Entonces el conjunto D de esta forma definido es un subconjunto denso de $C_p(X)$. Efectivamente, sea $W = [x_1, \dots, x_n; U_1, \dots, U_n]$ un abierto canónico no vacío de $C_p(X)$. Fijemos un elemento $h \in W$. Como $\mathcal{U}$ es una ω-cubierta de X, para el conjunto $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ existe un elemento $U \in \mathcal{U}$ tal que $F \subset U$. Como X es un espacio de Tychonoff, podemos elegir una función $f \in C_p(X)$ tal que $f(x_i) = h(x_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$ y $f(X \setminus U) \subset \{0\}$. Entonces $f \in W \cap D$. Esto prueba que D es denso en $C_p(X)$.

Ahora bien, como $\varphi(1) \in \overline{D}$ y $t(C_p(X)) \leqslant \tau$ (recuerde que para cada $r \in \mathbb{R}$, los símbolos $\varphi(r)$ denotan a la función constante de valor r definida en el espacio X), existe un conjunto $B \subset D$, con $|B| \leqslant \tau$, tal que $\varphi(1) \in \overline{B}$. Para cada $f \in B$, fijemos un elemento $U_f \in \mathcal{U}$ tal que $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset U_f$. Entonces el conjunto $\mathcal{V} = \{U_f : f \in B\}$ es una ω-subcubierta de $\mathcal{U}$ cuya cardinalidad no excede a τ. En efecto, es claro que $|\mathcal{V}| \leqslant |B| \leqslant \tau$. Así que consideremos un subconjunto finito $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ de X. Como $\varphi(1) \in \overline{B}$, existe un elemento $f \in B$ tal que $f \in [\varphi(1); x_1, \dots, x_n; \frac{1}{2}]$. Entonces para tal función se tiene que $F \subset f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset U_f$. Esto prueba que $\mathcal{V}$ es una ω-subcubierta de $\mathcal{U}$.

Para probar que la condición del teorema es suficiente, supongamos que $A \subset C_p(X)$ y que $f \in \overline{A}$. Como $C_p(X)$ es un espacio homogéneo (cf. Teorema 1.2.4), sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f = \varphi(0)$. Afirmamos que para toda $n \in \omega \setminus \{0\}$, la familia $\mathcal{U}_n = \{g^{-1}((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) : g \in A\}$ es una ω-cubierta de X. En efecto, fijemos un índice m y consideremos un subconjunto finito $F = \{x_1, \dots, x_k\} \subset X$. Como $\varphi(0) \in \overline{A}$, existe $h \in [\varphi(0); x_1, \dots, x_k; \frac{1}{m}] \cap A$. Entonces $F = \{x_1, \dots, x_k\} \subset h^{-1}\big((-\frac{1}{m}, \frac{1}{m})\big)$. De esta forma, $\mathcal{U}_m$ es una ω-cubierta de X.

Por hipótesis, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, existe un conjunto $B_n \subset A$ tal que la familia $\mathcal{V}_n = \{g^{-1}((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) : g \in B_n\}$ es una ω-subcubierta de $\mathcal{U}_n$ y $|\mathcal{V}_n| \leqslant \tau$. Hagamos $B = \bigcup\{B_n : n \in \omega \setminus \{0\}\}$. Entonces $B \subset A$, $|B| \leqslant \tau$ y $\varphi(0) \in \overline{B}$. Esto demuestra que $t(C_p(X)) \leqslant \tau$. □

Como corolario a los dos anteriores teoremas obtenemos el teorema de Arhangel'skii-Pytkeev.

1.5.4. TEOREMA (Arhangel'skii, [**4**]; Pytkeev, [**31**]). *Para cada espacio de Tychonoff X, se tiene que $l^*(X) = t(C_p(X))$.*

1.6. La topología de convergencia uniforme

Recordemos que una sucesión de funciones $(f_n) \subset C(X)$ converge uniformemente a una función $f \in C(X)$ (lo cual es habitualmente denotado utilizando los símbolos $f_n \rightrightarrows f$) si para cada $\epsilon > 0$ existe un índice $m \in \omega$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para cada $x \in X$ y cada $n \geqslant m$.

Utilizando la anterior noción podemos definir un operador sobre el conjunto $C(X)$ que nos permitirá introducir una topología en este conjunto. La forma de hacer esto es definiendo, para cada subconjunto A de $C(X)$, al conjunto $[A]$ como aquel subconjunto de $C(X)$ constituido por todos aquellos elementos $g \in C(X)$ para los cuales existe una sucesión (g_n) de elementos de A que converge uniformemente a g. El operador $[\cdot]$ que hemos definido de esta manera tiene las siguientes propiedades:

(1) $[\emptyset] = \emptyset$;
(2) para todo $A \subset C(X)$, se tiene que $A \subset [A]$ y $[[A]] = [A]$; además,
(3) para cualesquiera $A, B \subset C(X)$, tenemos que $[A \cup B] = [A] \cup [B]$.

Es fácil comprobar, utilizando las propiedades (1), (2) y (3) antes descritas, que la familia

$$\tau_u = \{C(X) \setminus F : F \subset C(X) \text{ es tal que } F = [F]\}$$

es una topología en el conjunto $C(X)$. Tal topología recibe el nombre de *topología de convergencia uniforme* y al espacio topológico de esta forma generado se le denota con los símbolos $C_u(X)$.

En esta sección demostraremos únicamente aquellas propiedades de los espacios $C_u(X)$ que serán de utilidad para el buen desarrollo de los resultados que estableceremos en capítulos posteriores. El lector interesado en estudiar más profundamente a este tipo de espacios topológicos, puede consultar la obra de R. Engelking [**18**] y la de V. V. Tkachuk [**42**].

Una importante propiedad de los espacios $C_u(X)$ que nos será de suma utilidad es la metrizabilidad.

1.6.1. PROPOSICIÓN. *Si X es un espacio de Tychonoff, entonces el espacio $C_u(X)$ es un espacio métrico completo.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos a la función $\rho : C(X) \times C(X) \to \mathbb{R}$ dada por $\rho(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x)) : x \in X\}$ para cada $(f,g) \in C(X)\times C(X)$, donde $d(f(x),g(x)) = \min\{|f(x)-g(x)|, 1\}$ para $x \in X$. La función ρ de esta forma definida es una métrica en el conjunto $C(X)$ que induce la topología de $C_u(X)$. Dejaremos al cuidado del lector verificar que la función ρ es una métrica en $C(X)$ y nos dedicaremos a comprobar que ella induce la topología del espacio $C_u(X)$.

Primeramente notemos que debido a la forma en que se ha definido a la topología del espacio $C_u(X)$, para verificar que ρ induce a esta topología sólo necesitamos demostrar que si $(f_n) \subset C(X)$ y $f \in C(X)$ entonces la sucesión f_n converge uniformemente a f si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$. Para demostrar esto último, supongamos primero que (f_n) converge uniformemente a f. Entonces, dada una $\epsilon > 0$, existe un número $m \in \omega$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para toda $x \in X$ y toda $n \geqslant m$. Por la definición de la métrica ρ, tenemos que $\rho(f_n, f) \leqslant \epsilon$ para toda $n \geqslant m$. Dado que el número real ϵ fue elegido en forma arbitraria, podemos concluir que $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$.

Para la probar la implicación contraria, supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0.$$

Consideremos una $\epsilon > 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\epsilon < 1$. Como $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$, para tal ϵ existe una $m \in \omega$ tal que $\rho(f_n, f) < \epsilon$ para toda $n \geqslant m$. Por la definición de ρ, tenemos que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para toda $x \in X$ y para toda $n \geqslant m$. Entonces $(f_n) \rightrightarrows f$.

Con la finalidad de probar la completitud de la métrica ρ, consideremos una sucesión de Cauchy (f_n) en el espacio $C_u(X)$. Entonces para todo $\epsilon > 0$, existe un índice $m \in \omega$ tal que $\rho(f_n, f_k) < \epsilon$

para cualquier par de índices $n, k \geqslant m$. De aquí tenemos que $|f_n(x) - f_k(x)| < \epsilon$ para todo $x \in X$ y para cualesquiera $n, k \geqslant m$. De esta forma podemos concluir que para todo $x \in X$, la sucesión $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de los números reales $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo, la sucesión $(f_n(x))$ converge a un número real r_x, para todo $x \in X$. Definamos la función $f : X \to \mathbb{R}$ como $f(x) = r_x$ para cada $x \in X$.

Comprobaremos ahora que la sucesión (f_n) converge uniformemente a la función f. Para este propósito, fijemos un índice $m \in \omega$ para el cual $\rho(f_n, f_k) < \frac{\epsilon}{2}$ para todos los índices $n, k \geqslant m$. Entonces $|f_n(x) - f_k(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para cualquier $x \in X$ y para todo $n, k \geqslant m$. Tomando el límite cuando $k \to \infty$, tenemos que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in X$ y toda $n \geqslant m$. Consecuentemente, la sucesión (f_n) converge uniformemente a f sobre el espacio X. De esto último se desprende que la función f es una función continua. $\square$

1.6.2. PROPOSICIÓN. *Para cada espacio de Tychonoff X, el espacio $C_u(X)$ junto con la operación $\phi_+ : C(X) \times C(X) \to C(X)$ dada por $\phi_+(f, g) = f + g$ para cada $(f, g) \in C(X) \times C(X)$, es un grupo topológico.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrar que, al considerar en el conjunto $C(X)$ a la topología de convergencia uniforme, la función ϕ_+ es continua. Para probar esto, consideremos un elemento arbitrario $(f, g) \in C_u(X) \times C_u(X)$. Sea $\epsilon > 0$ cualquiera y consideremos un número $\delta > 0$ tal que $\delta < \min\{\epsilon, 1\}$. Como la topología del espacio $C_u(X)$ es la inducida por la métrica ρ, los conjuntos $B_\rho(f, \frac{\delta}{2})$ y $B_\rho(g, \frac{\delta}{2})$ son vecindades abiertas de f y g en el espacio $C_u(X)$, respectivamente (recuerde que en un espacio métrico (Z, d), si $z \in Z$ y $r > 0$ entonces $B_d(z, r) = \{a \in Z : d(a, z) < r\}$). Afirmamos que tales vecindades tienen la siguiente propiedad: si $h \in B_\rho(f, \frac{\delta}{2})$ y $k \in B_\rho(g, \frac{\delta}{2})$, entonces $\rho(h + k, f + g) < \epsilon$. En efecto, sea $x \in X$ un elemento arbitrario. Entonces $|(h + k)(x) - (f + g)(x)| \leqslant |h(x) - f(x)| + |k(x) - g(x)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$. Como x es arbitraria, lo anterior implica que $\rho(h + k, f + g) \leqslant \delta$. De esta forma, podemos concluir que $\rho(h+k, f+g) < \epsilon$. Por lo tanto, la función ϕ_+ es continua en el punto (f, g). $\square$

1.7. Espacios pseudocompletos

Aún cuando a través de todo este trabajo los espacios que se consideran son espacios de Tychonoff, en este apartado, en el que introduciremos la noción de espacio pseudocompleto, debilitaremos esta hipótesis considerando espacios cuasi-regulares. Recordemos que un espacio topológico X es *cuasi-regular* [1], [29] si para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X es posible hallar un abierto $V \in \tau^*(X)$ tal que $\overline{V} \subset U$. Claramente todo espacio regular es un espacio cuasi-regular. Además, la propiedad de cuasi-regularidad es inherente a subespacios densos. En efecto, sean X un espacio cuasi-regular y $Y \subset X = \overline{Y}$. Consideremos un abierto $V \in \tau^*(Y)$. Entonces existe $W \in \tau^*(X)$ tal que $V = W \cap Y$. Dado que X es cuasi-regular, podemos elegir $U \in \tau^*(X)$ de tal manera que $\mathrm{cl}_X(U) \subset W$. Entonces $\mathrm{cl}_Y(U \cap Y) = \mathrm{cl}_X(U \cap Y) \cap Y = \mathrm{cl}_X(U) \cap Y \subset W \cap Y = V$. Por lo tanto, el espacio Y es cuasi-regular.

Para poder introducir la noción de espacio pseudocompleto necesitamos recordar la noción de π-base. Una *π-base* de un espacio topológico X es una familia $\mathcal{B} \subset \tau^*(X)$ con la propiedad de que para cada subconjunto abierto no vacío V del espacio X es posible hallar un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$.

1.7.1. DEFINICIÓN. Sea X un espacio topológico.

(1) Una familia $\{U_n : n \in \omega\} \subset \tau^*(X)$ es llamada *remolino* si $\overline{U_{n+1}} \subset U_n$ para cada $n \in \omega$.

(2) El espacio X es un espacio *pseudocompleto* si éste es cuasi-regular, y además, tiene una sucesión $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ de π-bases (llamada *sucesión pseudocompleta*) tal que para cualquier remolino $\{U_n : n \in \omega\}$, la condición $U_n \in \mathcal{B}_n$ para toda n, implica que $\bigcap\{U_n : n \in \omega\} \neq \emptyset$

Como se podrá apreciar un poco más adelante, todo espacio pseudocompleto tiene la propiedad de Baire (cf. Proposición 1.7.4).

Es bien conocido que cualquier espacio que es metrizable por medio de una métrica completa posee también esta propiedad. Como comprobaremos a continuación, la razón del por que este tipo de espacios topológicos tienen la propiedad de Baire, reside en el hecho de que la clase de los espacios completamente metrizables es una subclase de la clase de los espacios pseudocompletos.

Con el fin de verificar esta última afirmación, supongamos que (X,ρ) es un espacio completamente metrizable. Para cada $n \in \omega$, definamos $\mathcal{B}_n = \{B_\rho(x;r) : 0 < r < \frac{1}{n+1} \text{ y } x \in X\}$, donde $B_\rho(x;r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$. No es difícil verificar que cada una de las familias $\mathcal{B}_n$ es una π-base de X. Comprobemos entonces que la familia $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta para X. En efecto, sea $\{U_n : n \in \omega\}$ un remolino tal que $U_n \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \omega$. Entonces para toda $n \in \omega$, existen $r_n \in (0, \frac{1}{n+1})$ y $x_n \in X$ tales que $U_n = B_\rho(x_n; r_n)$. Dado que $\{U_n : n \in \omega\}$ es decreciente, la familia $\{\overline{U_n} : n \in \omega\}$ es una sucesión decreciente de cerrados tal que $0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \text{diám}_\rho(\overline{U_n}) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$ (donde $\text{diám}_\rho(\overline{U_n})$ denota al diámetro del conjunto $\overline{U_n}$ en el espacio métrico (X,ρ)). Como X es completamente metrizable, se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} \neq \emptyset$. Dado que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} \subset \bigcap_{n\in\omega} U_n$, podemos concluir que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$.

Como un corolario a la siguiente proposición estableceremos que la clase de espacios Čech-completos está también contenida en la clase de los espacios pseudocompletos.

1.7.2. PROPOSICIÓN. *Sea X un espacio cuasi-regular. Supóngase que existe una π-base $\mathcal{B}$ de X tal que $\text{cl}_X(U)$ es numerablemente compacta para cada $U \in \mathcal{B}$. Entonces todo subconjunto denso Y de X de tipo G_δ es un subespacio pseudocompleto.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que Y es un subespacio denso de X, el espacio Y es cuasi-regular. Supongamos que $\{G_n : n \in \omega\} \subset \tau^*(X)$ es tal que $Y = \bigcap_{n\in\omega} G_n$. Para cada $n \in \omega$, definamos $\mathcal{B}_n = \{H \cap Y : H \in \mathcal{B} \text{ y } \text{cl}_X(H) \subset G_n\}$. Claramente $\mathcal{B}_n \subset \tau^*(X)$. Mostraremos que $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta para Y. Para este propósito, demostremos primeramente que cada una de las familias $\mathcal{B}_n$ es una π-base del espacio Y. Fijemos un índice $n \in \omega$ y consideremos un abierto arbitrario $V \in \tau^*(Y)$. Sea $W \in \tau^*(X)$ tal que $V = W \cap Y$. Dado que X es cuasi-regular y $\mathcal{B}$ es una π-base, existe $H \in \mathcal{B}$ tal que $\mathrm{cl}_X(H) \subset W \cap G_n$. Entonces $H \cap Y \subset W \cap Y = V$ y $H \cap Y \in \mathcal{B}_n$. De esta forma, la familia $\mathcal{B}_n$ es una π-base de Y.

Consideremos ahora un remolino $\{U_n : n \in \omega\}$ con la propiedad de que $U_n \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \omega$. Como $U_n \in \mathcal{B}_n$ para toda $n \in \omega$, existen abiertos $H_n \in \mathcal{B}$ tales que $U_n = H_n \cap Y$ y $\mathrm{cl}_X(H_n) \subset G_n$. Observe ahora que debido a que $U_{n+1} \subset U_n$ para todo índice n, la familia $\{\mathrm{cl}_X(U_n) : n \in \omega\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Como $\mathrm{cl}_X(U_0)$ es un espacio numerablemente compacto y $\{\mathrm{cl}_X(U_n) : n \in \omega\}$ está constituida por subespacios cerrados de $\mathrm{cl}_X(U_0)$, se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_X(U_n) \neq \emptyset$. Ahora bien, dado que $\mathrm{cl}_X(H_n) \subset G_n$ para toda n, obtenemos que $\mathrm{cl}_X(U_n) \subset G_n$ para cada índice n, de donde $\bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_X(U_n) \subset \bigcap_{n\in\omega} G_n = Y$. Entonces

$$\begin{aligned}\bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_X(U_n) &= \bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_X(U_{n+1}) = \Big(\bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_X(U_{n+1})\Big) \cap Y \\ &= \bigcap_{n\in\omega} \big(Y \cap \mathrm{cl}_X(U_{n+1})\big) = \bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}_Y(U_{n+1}) \\ &\subset \bigcap_{n\in\omega} U_n.\end{aligned}$$

De aquí, obtenemos que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$. Por lo tanto, la familia $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta para Y. □

1.7.3. COROLARIO. *Todo subconjunto denso de tipo G_δ de un espacio cuasi-regular numerablemente compacto es un espacio pseudocompleto. En particular, los espacios completos en el sentido de Čech son espacios pseudocompletos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X es un espacio cuasi-regular numerablemente compacto y que $Y \subset X$ es denso. Observe que la familia $\tau^*(X)$ es una π-base de X para la cual sucede que

$\mathrm{cl}_X(U)$ es numerablemente compacta, para toda $U \in \tau^*(X)$. Aplicando la proposición anterior podemos llegar a concluir que Y es pseudocompleto. $\square$

Finalizamos la presente sección coleccionando en la siguiente proposición, y en los dos corolarios a ella, algunas de las más importantes propiedades de la clase de los espacios pseudocompletos.

1.7.4. PROPOSICIÓN.

(1) *El producto arbitrario de espacios pseudocompletos es un espacio pseudocompleto.*
(2) *Todo espacio pseudocompleto es un espacio de Baire.*
(3) *Cualquier suma topológica de espacios pseudocompletos es un espacio pseudocompleto.*
(4) *Sean X cuasi-regular y $Y \subset X = \overline{Y}$. Si Y es un espacio pseudocompleto entonces X es pseudocompleto.*
(5) *Todo subespacio abierto de un espacio pseudocompleto es un espacio pseudocompleto.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Sean $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios pseudocompletos y $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ el producto de Tychonoff de los espacios X_α. Demostraremos primeramente que X es un espacio cuasi-regular. Para este fin, elijamos un abierto canónico no vacío $U = \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ del espacio X (la función $\pi_{\alpha_i} : X \to X_{\alpha_i}$ es la α_i-ésima proyección natural asociada al producto $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$). Dado que cada espacio X_{α_i} es cuasi-regular, existen abiertos $V_{\alpha_i} \in \tau(X_{\alpha_i})$ tales que $\overline{V_{\alpha_i}} \subset U_{\alpha_i}$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces $W = \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})$ es un abierto no vacío de X tal que $\overline{W} \subset U$. De esta forma, el espacio X es cuasi-regular.

Supongamos ahora que $\{\mathcal{B}_n^\alpha : n \in \omega\}$ una sucesión pseudocompleta de π-bases de X_α para cada $\alpha \in A$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $X_\alpha \in \mathcal{B}_n^\alpha$ para cada n y para cada α. Para cada índice $n \in \omega$, definimos

$$\mathcal{B}_n = \{\bigcap_{\alpha\in F} \pi_\alpha^{-1}(U_{n,\alpha}) : F \subset A \text{ es finito y } U_{n,\alpha} \in \mathcal{B}_n^\alpha \text{ para cada } \alpha \in F\}$$

Afirmamos que la familia $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta en X. En efecto, no es difícil demostrar que cada familia

$\mathcal{B}_n$ es una π-base de X. Consideremos un remolino $\{U_n : n \in \omega\}$ con la propiedad de que $U_n \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \omega$. Supongamos que $U_n = \bigcap_{\alpha \in F_n} \pi_\alpha^{-1}(U_{n,\alpha})$ donde $F_n \subset A$ es finito. Definamos a $U_{\beta,n} = X_\beta$ en el caso cuando $\beta \in A \setminus F_n$ (para cada $n \in \omega$). Entonces la familia $\{U_{n,\alpha} : n \in \omega\}$ es un remolino en X_α tal que $U_{n,\alpha} \in \mathcal{B}_n^\alpha$ para cada $n \in \omega$. Como la sucesión $\{\mathcal{B}_n^\alpha : n \in \omega\}$ es pseudocompleta, existe $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $x_\alpha \in \bigcap\{U_{n,\alpha} : n \in \omega\}$. Entonces $x = \{x_\alpha\} \in X$ y además $x \in \bigcap\{U_n : n \in \omega\}$. Por lo tanto, la familia $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta para X. Consecuentemente, X es pseudocompleto.

(2) Supongamos que X es un espacio pseudocompleto y que $\{G_n : n \in \omega\}$ es una sucesión de subespacios abiertos densos de X. Consideremos un abierto $G \in \tau^*(X)$ cualquiera. Fijemos una sucesión pseudocompleta $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ de π-bases que constate la propiedad de pseudocompletitud para el espacio X.

Debido a que el conjunto G_0 es un subespacio abierto denso de X, el conjunto $G_0 \cap G \in \tau^*(X)$. Como X es cuasi-regular y $\mathcal{B}_0$ es una π-base de X, existe $U_0 \in \mathcal{B}_0$ tal que $\mathrm{cl}_X(U_0) \subset G_o \cap G$. De igual manera, como el subespacio G_1 es abierto y su cerradura cubre a todo X, tenemos que $U_0 \cap G_1 \in \tau^*(X)$. Aplicando de nuevo el hecho de que X es cuasi-regular y $\mathcal{B}_1$ es π-base de X, podemos elegir $U_1 \in \mathcal{B}_1$ de tal forma que $\mathrm{cl}_X(U_1) \subset U_0 \cap G_1$. Supongamos ahora que tenemos construidos a los conjuntos $U_0, \ldots, U_k$ de tal manera que $\mathrm{cl}_X(U_0) \subset G_0 \cap G$ y $U_j \in \mathcal{B}_j$ y $\mathrm{cl}_X(U_j) \subset U_{j-1} \cap G_j$, para cada $j = 1, \ldots, k$. Como G_{k+1} es un subconjunto abierto denso de X, se tiene que $G_{k+1} \cap U_k \in \tau^*(X)$. Debido a que X es un espacio cuasi-regular y $\mathcal{B}_{k+1}$ es una π-base de X, podemos seleccionar un elemento $U_{k+1} \in \mathcal{B}_{k+1}$ de tal forma que $\mathrm{cl}_X(U_{k+1}) \subset U_k \cap G_{k+1}$.

Notemos ahora que por la forma de haber construido a los conjuntos U_i, la familia $\{U_n : n \in \omega\}$ es un remolino en X tal que $U_n \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \omega$. Aplicando el hecho de que $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta en X, podemos concluir que $\bigcap_{n \in \omega} U_n \neq \emptyset$. Pero $U_n \subset G \cap G_n$ (para cada $n \in \omega$), entonces $G \cap \left(\bigcap_{n\in\omega} G_n\right) \neq \emptyset$. De esta forma hemos probado que X posee la propiedad de Baire.

(3) Supongamos que $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios pseudocompletos y que $X = \Sigma_\alpha X_\alpha$ es la suma topológica de los espacios X_α. Es sencillo verificar que el espacio X es un espacio cuasi-regular.

Por otro lado, si $\{\mathcal{B}_n^\alpha : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta en X_α para cada $\alpha \in A$, definamos para cada índice n a la familia $\mathcal{B}_n = \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{B}_n^\alpha$. Entonces la familia $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta en X.

(4) Como Y es pseudocompleto podemos considerar una sucesión pseudocompleta $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ de π-bases de X. Para cada $n \in \omega$ y para cada $U \in \mathcal{B}_n$, existen abiertos $W(U) \in \tau(X)$ tales que $U = W(U) \cap Y$. Entonces la familia $\mathcal{C}_n = \{W(U) : U \in \mathcal{B}_n\}$ es una π-base de X para cada $n \in \omega$. Efectivamente, fijemos un índice $n \in \omega$ y consideremos un abierto $V \in \tau^*(X)$. Dado que X es cuasi-regular, existe $W \in \tau^*(X)$ tal que $\mathrm{cl}_X(W) \subset V$. Note que la densidad de Y en X implica que $Y \cap W \in \tau^*(Y)$. Como $\mathcal{B}_n$ es π-base de Y, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subset W \cap Y$. Consideremos ahora al abierto $W(U)$ correspondiente a U. Como $U \subset W \cap Y$, se tiene que $W(U) \cap Y \subset W \cap Y$, de donde $\mathrm{cl}_X(W(U) \cap Y) \subset \mathrm{cl}_X(W \cap Y)$. Pero sabemos que Y es denso, entonces $\mathrm{cl}_X(W(U) \cap Y) = \mathrm{cl}_X(W(U))$ y $\mathrm{cl}_X(W \cap Y) = \mathrm{cl}_X(W)$. Consecuentemente $W(U) \subset \mathrm{cl}_X(W(U)) \subset \mathrm{cl}_X(W) \subset V$. De esta forma tenemos que $\mathcal{C}_n$ es una π-base de X.

Verifiquemos ahora que la familia $\{\mathcal{C}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta en X. Sea $\{V_n : n \in \omega\}$ un remolino tal que $V_n \in \mathcal{C}_n$ para cada índice n. Por la definición de las familias $\mathcal{C}_n$, existen $U_n \in \mathcal{B}_n$ tales que $V_n = W(U_n)$ para cada n. Entonces $\{U_n : n \in \omega\}$ es un remolino en Y con la propiedad de que $U_n \in \mathcal{B}_n$ para toda $n \in \omega$ (note que $\mathrm{cl}_Y(U_{n+1}) = \mathrm{cl}_X(U_{n+1}) \cap Y = \mathrm{cl}_X(W(U_{n+1}) \cap Y) \cap Y = \mathrm{cl}_X(W(U_{n+1})) \cap Y \subset W(U_n) \cap Y = U_n$). Aplicando ahora el hecho de que Y es pseudocompleto, podemos ver que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$. Como $\bigcap_{n\in\omega} U_n \subset \bigcap_{n\in\omega} W(U_n)$, se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} V_n \neq \emptyset$. Por lo tanto, podemos concluir que X es pseudocompleto.

(5) Sean X pseudocompleto y $V \in \tau^*(X)$. Probemos primeramente que V es cuasi-regular. Si $W \in \tau^*(V)$ entonces $W \in \tau^*(X)$, de donde existe $U \in \tau^*(X)$ tal que $\mathrm{cl}_X(U) \subset W$. Como $\mathrm{cl}_V(U) = \mathrm{cl}_X(U) \cap V \subset W \cap V = W$, se sigue que V es cuasi-regular.

Ahora consideremos una sucesión pseudocompleta $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ de π-bases del espacio X. Para cada $n \in \omega$, definamos $\mathcal{C}_n = \{B \in \mathcal{B}_n : \mathrm{cl}_X(B) \subset V\}$. Entonces $\{\mathcal{C}_n : n \in \omega\}$ es una sucesión pseudocompleta para V. En efecto, elijamos $W \in \tau^*(V)$. Entonces $W \in \tau^*(X)$. Como $\mathcal{B}_n$ es π-base de X y X es cuasi-regular, existe $B \in \mathcal{B}_n$ tal que $B \subset \mathrm{cl}_X(B) \subset W$. Por lo tanto, $B \in \mathcal{C}_n$ y $B \subset W$. Esto demuestra que cada familia $\mathcal{C}_n$ es una π-base de X.

Por otro lado, si $\{U_n : n \in \omega\}$ es un remolino en V tal que $U_n \in \mathcal{C}_n$ para cada $n \in \omega$. Entonces $U_n \in \mathcal{B}_n$ y $\mathrm{cl}_X(U_n) \subset V$ para toda n, de esta forma la familia $\{U_n : n \in \omega\}$ es un remolino en X con la propiedad de que $U_n \in \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \omega$. Como X es pseudocompleto, tenemos que $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$. □

Utilizando las propiedades plasmadas en los incisos (3), (4) y (5) de la anterior proposición, es fácil demostrar el siguiente resultado.

1.7.5. COROLARIO. *Supongamos que X es un espacio cuasi-regular y que $\mathcal{U} \subset \tau^*(X)$ es tal que $\overline{\bigcup \mathcal{U}} = X$. Si cada elemento de $\mathcal{U}$ es un espacio pseudocompleto entonces X es pseudocompleto.*

1.7.6. COROLARIO. *Si un espacio cuasi-regular X es la unión finita de subespacios pseudocompletos entonces el espacio X es pseudocompleto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$, donde cada subespacio X_i es un espacio pseudocompleto. Definamos para cada $i = 1, \ldots, n$ a los conjuntos $F_i = \mathrm{cl}_X(X_i)$ y $V_i = \mathrm{int}_X F_i$. Obviamente el conjunto $X_i \cap V_i$ es un subespacio denso de V_i para cada $i = 1, \ldots, n$, además cada conjunto $X_i \cap V_i$ es un espacio pseudocompleto. Aplicando el inciso (4) de la proposición 1.7.4, obtenemos que cada subespacio V_i es pseudocompleto. Note ahora que $X = \overline{\bigcup_{i=1}^n V_i}$. Entonces, por el Corolario 1.7.5, podemos concluir que X es pseudocompleto. □

2

Propiedades finitamente aditivas y numerablemente aditivas en $C_p(X)$

2.1. Introducción

Uno de los métodos más importantes del estudio matemático es la reducción de la investigación de un objeto a una clasificación de objetos más simples que de algún modo representen al objeto estudiado. En el caso particular de la topología, esta reducción puede darse mediante la descomposición de un espacio topológico en una unión de sus subespacios. De esta manera, si uno conoce las propiedades de los elementos de la descomposición de un espacio topológico, con frecuencia es posible obtener información útil sobre el espacio mismo. Por ejemplo, es bien conocido que si un espacio topológico X es una unión numerable de subespacios que tienen peso de red numerable, entonces el espacio X también tiene peso de red numerable.

De modo que, cuando trabaja uno con uniones numerables o finitas de espacios topológicos, siempre surge el deseo de garantizar la aditividad de las propiedades consideradas. Desafortunadamente esto no siempre es posible de hacer. Es sabido, por ejemplo, que un espacio puede ser unión de dos subespacios paracompactos sin ser paracompacto, y no obstante a que uno puede garantizar la paracompacidad de un tal espacio si se supone adicionalmente que ambos subespacios son cerrados, el solo hecho de requerir que los elementos de una descomposición de un espacio topológico sean subespacios cerrados, no es suficiente para garantizar la aditividad de varias propiedades topológicas: S. Mrówka construyó en [27] un espacio no realcompacto que es la unión de dos de sus subespacios cerrados realcompactos. Como hemos ya hecho observar, un buen número de propiedades topológicas tienen un comportamiento similar al de la paracompacidad y al de la realcompacidad: estas propiedades no se preservan bajo la formación de uniones numerables o finitas de subespacios. Como ejemplos de propiedades topológicas de este tipo, podemos citar a la versión hereditaria de la paracompacidad, a la propiedad de tener estrechez numerable, a la propiedad de poseer carácter numerable, a la propiedad de tener peso numerable, a la normalidad y también a la normalidad perfecta, entre muchas otras más.

Quizás V. V. Tkachuk fue uno de los primeros especialistas en realizar un análisis sistemático de las propiedades topológicas no aditivas, con respecto a la posibilidad de que estas propiedades modificaran su comportamiento en los espacios de tipo $C_p(X)$. En su artículo [41], Tkachuk demostró la aditividad numerable en la clase de los espacios $C_p(X)$ de las siguientes propiedades topológicas no aditivas: π-carácter hereditario $\leqslant \tau$, pseudocarácter $\leqslant \tau$, estrechez $\leqslant \tau$, π-peso hereditario $\leqslant \tau$, peso $\leqslant \tau$, carácter $\leqslant \tau$, i-peso $\leqslant \tau$, número diagonal $\leqslant \tau$, completitud en el sentido de Čech y la propiedad de Fréchet-Urysohn. (Tal vez Tkachuk fue uno de los primeros en utilizar el término "numerablemente aditiva" para significar que una propiedad topológica es preservada bajo la formación de uniones numerables. En este punto, es importante mencionar que esta terminología difiere de la dada en [18] en donde una propiedad topológica se llama numerablemente aditiva si ésta se preserva mediante sumas topológicas numerables). En este mismo artículo, Tkachuk establece que para otras tantas propiedades topológicas no aditivas se cumple una versión débil de la aditividad numerable en los espacios $C_p(X)$. Él demuestra que en el caso en que $C_p(X) = \bigcup\{C_n : n \in \omega\}$, la hipótesis de que cada C_n es un subespacio cerrado implica la existencia de un elemento C_m de la descomposición de $C_p(X)$ que contiene una copia homeomorfa del espacio $C_p(X)$. Con este resultado, Tkachuk llega a establecer que si un espacio de funciones continuas $C_p(X)$ es una unión numerable de subespacios cerrados que son realcompactos (respectivamente, completamente normales, hereditariamente normales, hereditariamente paracompactos o con la propiedad de radialidad) entonces el espacio $C_p(X)$ tiene la misma propiedad.

En el verano del año 1997, V. V. Tkachuk planteó al autor de la presente obra el problema de si es posible omitir el adjetivo "cerrado" en todos estos resultados de "aditividad numerable débil". Esta pregunta (en particular, la concerniente a la posibilidad de que el espacio $C_p(X)$ sea realcompacto en caso de que éste sea una unión numerable de subespacios realcompactos), motivó las investigaciones que el autor realizó sobre el tema y cuyas conclusiones están plasmadas en **[13]**. La intención de este capítulo es exponer todos los resultados obtenidos en esta investigación. A continuación damos un resumen de los principales resultados que se exponen en este capítulo.

(1) El teorema de la aditividad finita de la realcompacidad en los espacios $C_p(X)$ (Teorema 2.2.11 y Corolario 2.2.12).
(2) El teorema de la aditividad finita de la τ-monoliticidad para cualquier cardinal $\tau \geqslant \omega$ (Corolario 2.2.17).
(3) El teorema de la aditividad numerable de la propiedad de Eberlein-Grothendieck en los espacios $C_p(X)$ (cf. Teorema 2.3.7).

2.2. La realcompacidad y sus aplicaciones

En los trabajos de Tkachuk sobre la aditividad numerable en la clase de espacios $C_p(X)$ de propiedades no aditivas (véase [**41**]), hay un resultado que es pieza clave en la demostración de diversos teoremas. Este resultado establece que una descomposición del espacio $C_p(X)$ en una unión numerable de sus subespacios C_n ($n \in \omega$) implica la existencia de un subespacio Z de $C_p(X)$ (homeomorfo $C_p(X)$) y la existencia de un índice $m \in \omega$, para los cuales se tiene que $Z \cap C_m$ es un subespacio denso de Z (cf. [**41**, Lema 1.1]).

En nuestro caso, existen también piedras ángulares sobre las cuales se basan un gran número de resultados acerca de la aditividad finita en espacios $C_p(X)$ de propiedades topológicas no aditivas. Una de ellas establece que toda descomposición finita de un espacio $C_p(X)$ en subespacios que tienen una propiedad topológica hereditaria respecto de subespacios de tipo F_σ, induce una descomposición finita de $C_p(X)$ en subespacios densos que siguen teniendo la misma propiedad. De ahora en adelante, diremos que una propiedad topológica es *F_σ-hereditaria* si esta propiedad es hereditaria respecto a subespacios de tipo F_σ.

2.2.1. LEMA (Casarrubias Segura, [13]). *Sea $n \in \omega \setminus \{0\}$. Supongamos que $\mathcal{P}$ es una propiedad topológica F_σ-hereditaria y que $C_p(X) = \bigcup_{i=1}^n C_i$. Si cada uno de los subespacios C_i tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces existen subespacios $B_1, \ldots, B_m$ (para algún $m \leqslant n$) tales que:*

(1) *cada subespacio B_i es un subespacio denso de $C_p(X)$ que tiene la propiedad $\mathcal{P}$;*
(2) $C_p(X) = \bigcup_{i=1}^m B_i$.

DEMOSTRACIÓN. Realizaremos la demostración del lema aplicando inducción matemática sobre el número de subespacios en la descomposición de $C_p(X)$.

Observemos primero que la afirmación del lema es trivialmente cierta cuando $n = 1$. Supongamos entonces que $n \geqslant 2$ y que el resultado es válido para cualquier descomposición de $C_p(X)$ en a lo más $(n-1)$ subespacios.

Supongamos ahora que $C_p(X) = \bigcup_{i=1}^n C_i$ y que cada subespacio C_i tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Obsérvese que en el caso cuando todos los subespacios C_i son subespacios densos del espacio $C_p(X)$, podemos culminar la demostración considerando a la descomposición original del espacio $C_p(X)$. Por consiguiente, podemos suponer que existe un índice $j \in \{1, \ldots, n\}$ para el cual $\overline{C_j} \neq C_p(X)$. Elijamos un abierto canónico no vacío W en el espacio $C_p(X)$ con la propiedad de que $W \cap C_j = \emptyset$. Debido a que $C_p(X) = \bigcup_{i=1}^n C_i$, lo anterior implica que $W \subset \bigcup_{i \neq j} C_i$. Definamos $D_i = W \cap C_i$

para cada $i \neq j$. Obsérvese ahora que cada uno de los subespacios D_i resulta ser un subespacio de tipo F_σ del correspondiente subespacio C_i (recuerde el lector que los abiertos canónicos del espacio $C_p(X)$ son subespacios de tipo F_σ). Entonces cada uno de los subespacios D_i hereda la propiedad $\mathcal{P}$ del correspondiente subespacio C_i. Elijamos ahora un homeomorfismo $h : W \to C_p(X)$. Claramente, el homeomorfismo h y la descomposición $W = \bigcup_{i \neq j} D_i$ inducen la descomposición finita $C_p(X) = \bigcup_{i \neq j} h(D_i)$. Note que cada subespacio $h(D_i)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y que tenemos a lo más $(n-1)$ subespacios en esta descomposición. Aplicando ahora la hipótesis de inducción podemos asegurar la existencia de subespacios $B_1, \ldots, B_m$ (para algún $m \leqslant n-1$) que satisfacen las condiciones (1) y (2). $\square$

Con la finalidad de motivar nuestro siguiente resultado, recordaremos la construcción del clásico espacio Ψ de Moore-Mrówka (véase [**21**, Problema 5I]).

Consideremos una familia maximal casi ajena γ de cardinalidad $\mathfrak{c}$, constituida por subconjuntos infinitos del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$. Para cada elemento $A \in \gamma$, fijemos un elemento $x_A \notin \mathbb{N}$. Hagamos $D = \{x_A : A \in \gamma\}$ y consideremos en el conjunto $X = \mathbb{N} \cup D$ la siguiente topología: todos los puntos de $\mathbb{N}$ son puntos aislados en X y una vecindad básica de un punto de la forma x_A $(A \in \gamma)$ es cualquier subconjunto que contiene a x_A y a todos excepto a un número finito de puntos del conjunto A. De esta forma generamos al espacio Ψ de Moore-Mrówka. No es difícil verificar que el espacio Ψ tiene las siguientes propiedades: para cada $A \in \gamma$, el subespacio $A \cup \{x_A\}$ es la compactación de Alexandroff de A y $\mathbb{N}$ es un subespacio discreto denso de Ψ. El subespacio D es un subespacio discreto y cerrado en Ψ. El espacio Ψ es un espacio pseudocompacto no numerablemente compacto, y por lo tanto no es realcompacto ni un espacio normal.

Dado que $\mathbb{N}$ y D son subespacios discretos del espacio Ψ, éste es la unión finita de subespacios paracompactos, pero él mismo no posee esta propiedad (el espacio Ψ no es paracompacto puesto que no es un espacio normal). Esto último argumenta el hecho de que la paracompacidad no es una propiedad finitamente aditiva en la clase de los espacios de Tychonoff.

Aplicando el Lema 2.2.1 podemos demostrar que este mal comportamiento de la paracompacidad desaparece al considerar a esta propiedad topológica en espacios de tipo $C_p(X)$.

2.2.2. TEOREMA (Casarrubias Segura, [**13**]). *La paracompacidad es una propiedad finitamente aditiva en la clase de los espacios* $C_p(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que $C_p(X) = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ y que cada subespacio C_i es un espacio paracompacto. Como una aplicación del Lema 2.2.1, la anterior descomposición finita de $C_p(X)$ induce una descomposición finita del espacio $C_p(X)$ en subespacios B_i, los cuales tienen la propiedad de ser espacios paracompactos y subespacios densos de $C_p(X)$. Debido a que cada uno de los subespacios B_i es un subespacio denso, todos estos subespacios heredan de $C_p(X)$ la propiedad de Souslin, por lo cual cada uno de ellos es un espacio de Lindelöf (recuérdese que en presencia de la propiedad de Souslin, la paracompacidad y la propiedad de Lindelöf coinciden). Ahora bien, dado que la unión numerable de subespacios de Lindelöf es un espacio de Lindelöf, el espacio $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf, y por lo tanto, un espacio paracompacto. $\square$

Es sencillo darse cuenta que el espacio de Moore-Mrówka es también un ejemplo que permite corroborar que la realcompacidad no es una propiedad finitamente aditiva en la clase de espacios de Tychonoff. En efecto, recordemos simplemente que Ψ es igual a la unión de los subespacios $\mathbb{N}$ y D. Notemos ahora que el espacio $\mathbb{N}$ es realcompacto pues este espacio, siendo numerable, es de Lindelöf. Por otra parte, el espacio D es un espacio discreto de cardinalidad 2^{ω}, de donde éste puede ser mapeado continua e inyectivamente sobre la recta real $\mathbb{R}$, la cual, como bien se sabe, es un espacio segundo numerable. Esto último es suficiente para argumentar que el espacio D es un espacio realcompacto [18].

Nuestra idea ahora es probar que la realcompacidad cambia este comportamiento en la clase de espacios $C_p(X)$. Para este propósito, necesitamos el concepto de τ-localización.

2.2.3. DEFINICIÓN. Sea τ un número cardinal infinito. Se dice que un subespacio Y de un espacio topológico X está *τ-localizado* en el espacio X si para cada elemento $x \in X \setminus Y$ es posible elegir un subconjunto G de tipo G_τ en X de tal manera que $x \in G \subset X \setminus Y$.

Como veremos enseguida, el concepto de τ-localización permite extender a cardinalidades superiores la noción de espacio realcompacto (es oportuno que el lector recuerde que una de las formas equivalentes de definir a los espacios realcompactos es la siguiente: un espacio de Tychonoff X es *realcompacto* si para cada elemento $y \in \beta X \setminus X$ existe un subconjunto H de tipo G_δ en βX tal que $x \in H \subset \beta X \setminus X$).

2.2.4. DEFINICIÓN. Sea X un espacio de Tychonoff. El *número de Hewitt-Nachbin* (o el *grado de realcompacidad*) de X es el número cardinal infinito

$$q(X) = \min\{\tau \geqslant \omega : X \text{ está } \tau\text{-localizado en } \beta X\}.$$

A. V. Arhangel'skii demostró en [6] la coincidencia del número de Hewitt-Nachbin de un espacio de funciones $C_p(X)$ con la estrechez funcional débil del correspondiente espacio X.

Recuérdese que, dados un espacio topológico X y un cardinal infinito τ, una función f de valores reales definida sobre el espacio X es *estrictamente τ-continua* si para cada conjunto $A \subset X$ cuya cardinalidad no excede a τ, la restricción de la función f al subespacio A coincide con la restricción de alguna función continua $g \in C(X)$ al subespacio A. Así, la *estrechez funcional débil* $t_{\mathbb{R}}(X)$ *de* X es definida como el más pequeño de los números cardinales infinitos τ, para los cuales toda función estrictamente τ-continua es una función continua (es oportuno mencionar que algunos autores utilizan el nombre de *miniestrechez* para esta función cardinal y el símbolo $t_m(X)$ para denotar a la miniestrechez de un espacio topológico X).

Con estas nociones estamos en posición de enunciar formalmente el resultado de Arhangelskii que ya hemos mencionado con anterioridad.

2.2.5. TEOREMA (Arhangel'skii, [6]). *Para cada espacio topológico X, se tiene que $q(C_p(X)) = t_{\mathbb{R}}(X)$.*

Una propiedad deseable, para nuestros fines, de los subespacios de un espacio de funciones $C_p(X)$ con el grado de realcompacidad menor o igual a un cardinal fijo τ, es su τ-localización en algún producto de rectas reales. La relación existente entre el número de Hewitt-Nachbin y la noción de τ-localización induce a pensar que esto es posible sin requerir adicionalmente alguna propiedad en tales subespacios. En general, esto no es así. Pero afortunadamente, A. Chigogidze demostró que la combinación de la propiedad de poseer grado de realcompacidad menor o igual que un número cardinal τ con la propiedad de ser un subespacio denso, implican la τ-localización de los subespacios de los llamados espacios m_τ.

Dado un número cardinal infinito τ, un espacio topológico X es un *espacio* m_τ si para cada subconjunto abierto U de X y para cada $x \in \overline{U}$ existe un subconjunto G de tipo G_τ en X tal que $x \in G \subset \overline{U}$. (Cabe mencionar que los espacios m_ω reciben también el nombre de *espacios de Moscú*).

Un buen ejemplo de espacio m_τ es cualquier producto de rectas reales. En efecto, la cerradura de cualquier subespacio abierto de un producto topológico $\mathbb{R}^X$ es un z-conjunto (para una demostración detallada de esta afirmación remitimos al lector a la Proposición 0.3.15 en [11]). Es fácil comprobar que esta última propiedad (la referente a la cerradura de subespacios abiertos) es heredada por todos los subespacios densos. Así, cualquier espacio de funciones $C_p(X)$ tiene la propiedad de que la cerradura de cualquiera de sus subespacios abiertos es el conjunto nulo de alguna función real continua definida sobre él mismo. E. V. Schepin llama a los espacios con estas características espacios *perfectamente κ-normales*. Notemos ahora que partiendo de la definición de espacio m_τ, es sencillo verificar que cualquier espacio perfectamente κ-normal es un espacio m_ω y que todo espacio m_ω es un espacio m_τ para todo $\tau \geqslant \omega$.

2.2.6. PROPOSICIÓN (Chigogidze; op. cit. [11]). *Sean τ un cardinal infinito y X un espacio m_τ. Entonces todo subconjunto denso de X cuyo número de Hewitt-Nachbin no excede a τ, está τ-localizado en X.*

Sobre la base de este resultado de Chigogidze podemos demostrar que la realcompacidad hereditaria es una propiedad topológica finitamente aditiva en la clase de los espacios $C_p(X)$. Para lograr esto, sólo requerimos adicionalmente de dos hechos. Primeramente, un hecho básico acerca de la τ-localización: *la unión numerable de subespacios τ-localizados es un subespacio τ-localizado.* En segundo término, necesitaremos el siguiente resultado que probablemente es conocido, pero para el cual el autor no pudo hallar referencia alguna. Esto último nos motiva a demostrarlo formalmente aquí. Para enunciar al mismo con toda precisión es necesario hacer recordar al lector las definiciones de la versión hereditaria del número de Hewitt-Nachbin y de la función cardinal iw. Recordemos que el *número hereditario de Hewitt-Nachbin* de un espacio topológico X es el número cardinal infinito $hq(X) = \sup\{q(Y) : Y \subset X\}$. Por otro lado, dado un espacio topológico X, se define al invariante cardinal $iw(X)$ de la siguiente forma:

$$iw(X) = \min\{w(Y) : X \text{ puede ser condensado sobre } Y\}.$$

2.2.7. LEMA. *Para cada espacio topológico X, se tiene que*

$$hq(C_p(X)) = \psi(C_p(X)).$$

DEMOSTRACIÓN. A. V. Arhangel'skii demostró que

$$\psi(C_p(Z)) = iw(C_p(Z)) = d(Z)$$

para todo espacio topológico Z (véase [11, 1.1.4]). Aplicando este hecho, podemos elegir una condensación (es decir, una biyección continua) $f : C_p(X) \to Y$ del espacio $C_p(X)$ sobre un espacio Y cuyo peso no excede al número cardinal $\tau = \psi(C_p(X))$. Obsérvese ahora que siendo la función f una condensación se tiene que

$$hq(C_p(X)) \leqslant hq(Y) \leqslant w(Y) \leqslant \tau,$$

de donde $hq(C_p(X)) \leqslant \tau$.

Con la finalidad de demostrar la desigualdad contraria, hagamos $\tau = hq(C_p(X))$ y consideremos un elemento arbitrario $f \in C_p(X)$. Dado que el subespacio $Y = C_p(X) \setminus \{f\}$ es un subespacio denso de $C_p(X)$, podemos aplicar la Proposicion 2.2.6 y de esta forma obtener que Y es un subespacio que está τ-localizado en el espacio $C_p(X)$. Ahora nótese que lo anterior implica la existencia de un subconjunto G de tipo G_τ en $C_p(X)$ para el cual sucede que $f \in G \subset C_p(X) \setminus Y = \{f\}$. Por lo tanto, tenemos que $\psi(f; C_p(X)) \leqslant \tau$. Siendo f un elemento arbitrario del espacio $C_p(X)$, podemos concluir que $\psi(C_p(X)) \leqslant \tau$. □

2.2.8. TEOREMA (Casarrubias Segura, [13]). *Sean $\tau \geqslant \omega$ y $n \in \omega \setminus \{0\}$. Si $C_p(X) = \bigcup_{i=1}^n C_i$ con $hq(C_i) \leqslant \tau$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $hq(C_p(X)) \leqslant \tau$. En particular, la realcompacidad hereditaria es una propiedad topológica finitamente aditiva en los espacios $C_p(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el Lema 2.2.1 podemos suponer, sin perder generalidad, que cada uno de los subespacios C_i es un subespacio denso del espacio $C_p(X)$. Dado que $q(C_i) \leqslant \tau$ para toda $i = 1, \ldots, n$, aplicando la Proposicion 2.2.6, obtenemos que cada uno de los subespacios C_i está τ-localizado en el espacio $C_p(X)$. Demostraremos que $hq(C_p(X)) \leqslant \tau$ comprobando que $\psi(C_p(X)) \leqslant \tau$ (véase el Lema 2.2.7).

Sean $f \in C_p(X)$ y $Y = C_p(X) \setminus \{f\}$. Observemos primero que f no puede ser punto aislado en ninguno de los subespacios C_i, ya que el espacio $C_p(X)$ no tiene puntos aislados.

Notemos ahora que por la forma de haber definido al subespacio Y, para demostrar que $\psi(f; C_p(X)) \leqslant \tau$, bastará probar la τ-localización de Y en el espacio $C_p(X)$. Ahora bien, obsérvese que siendo cada subespacio C_i un subespacio denso del espacio $C_p(X)$, se tiene que $D_i = Y \cap C_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pero dado que $C_p(X) = \bigcup_{i=1}^n C_i$, lo anterior implica que $Y = \bigcup_{i=1}^n D_i$. De modo que la τ-localización del subespacio Y en el espacio $C_p(X)$ puede ser implicada por la correspondiente τ-localización de los subespacios D_i.

Por otro lado, como cada uno de los subespacios C_i está τ-localizado en el espacio $C_p(X)$, para comprobar que los subespacios D_i son subespacios τ-localizados del espacio de funciones $C_p(X)$, es suficiente verificar que cada subespacio D_i está τ-localizado en el correspondiente subespacio C_i [**11**, 2.4.9]. Concluiremos la demostración del teorema probando esto último.

Fijemos un índice $k \in \{1, \ldots, n\}$. Siendo un subespacio denso del espacio $C_p(X)$, el subespacio C_k es un espacio m_ω. Observe ahora que debido a que $D_k = C_k \setminus \{f\}$, este conjunto es un subespacio denso de C_k (recuerde que el punto f no es punto aislado de ninguno de los subespacios C_i). Además, por hipótesis el grado de realcompacidad de D_k no puede exceder al cardinal τ. Entonces, aplicando la Proposición 2.2.6, vemos que el subespacio D_k está τ-localizado en C_k. □

Una propiedad similar a la realcompacidad hereditaria es la versión hereditaria de la completitud en el sentido de Dieudonné. A raíz del anterior resultado es natural preguntarse si esta propiedad topológica es también una propiedad finitamente aditiva en los espacios de funciones $C_p(X)$. La siguiente proposición da respuesta positiva a este planteamiento.

2.2.9. Proposición (Casarrubias Segura, [**13**]). *La completitud hereditaria en el sentido de Dieudonné es una propiedad topológica finitamente aditiva en los espacios $C_p(X)$.*

Demostración. Supongamos que $C_p(X) = \bigcup_{i=1}^n C_i$ y que cada subespacio C_i es un espacio hereditariamente completo en el sentido de Dieudonné. Aplicando el Lema 2.2.1, podemos suponer que cada C_i es denso en $C_p(X)$. Esto implica que tanto C_i como cualquier subespacio denso de C_i, tiene la propiedad de Souslin para cada $i = 1, \ldots, n$. Dado que en presencia de la propiedad de

Souslin la completitud en el sentido de Dieudonné coincide con la realcompacidad [18, 8.5.13], tenemos que tanto C_i como cualquier subespacio denso suyo es realcompacto. Como C_i no tiene puntos aislados, el subespacio $C_i \setminus \{f\}$ es denso en C_i para toda $f \in C_i$. De aquí, $C_i \setminus \{f\}$ es realcompacto para cada $f \in C_i$. A raíz de esto último, podemos concluir que C_i es hereditariamente realcompacto (véase [18, 3.11.A]). Resulta entonces que $C_p(X)$ es unión finita de subespacios hereditariamente realcompactos. Aplicando ahora el Teorema 2.2.8, tenemos que $C_p(X)$ es hereditariamente realcompacto y por lo tanto, hereditariamente completo en el sentido de Dieudonné. □

El siguiente lema es particularmente importante para nuestro propósito de probar la aditividad finita de la realcompacidad en los espacios $C_p(X)$. Este lema nos proporciona una importante forma de percibir al número de Hewitt-Nachbin de un espacio de tipo $C_p(X)$ en términos del grado de realcompacidad de ciertos subconjuntos de tipo G_δ en $C_p(X)$.

2.2.10. LEMA (Casarrubias Segura, [13]). *Sea $\tau \geqslant \omega$. Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier espacio topológico X:*

(1) $q(C_p(X)) \leqslant \tau$;

(2) *existen $\phi \in C_p(X)$ y $Y \in [X]^{\leqslant \tau}$ tales que*

$$q(\{f \in C_p(X) : f \restriction Y \equiv \phi \restriction Y\}) \leqslant \tau.$$

DEMOSTRACIÓN. (1) $\Rightarrow$ (2). Seleccionemos en forma arbitraria un elemento $\phi \in C_p(X)$ y un subconjunto $Y \in [X]^{\leqslant \tau}$. Consideremos ahora al mapeo restricción $\pi_Y : C_p(X) \to C_p(Y)$. Dado que el conjunto $\{f \in C_p(X) : f \restriction Y \equiv \phi \restriction Y\}$ es igual a la preimagen $\pi_Y^{-1}(\phi \restriction Y)$, este conjunto es un subespacio cerrado de $C_p(X)$. Aplicando ahora el hecho de que el número de Hewitt-Nachbin no se incrementa al considerar subespacios cerrados, podemos concluir que $q(\{f \in C_p(X) : f \restriction Y \equiv \phi \restriction Y\}) \leqslant \tau$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Observemos que debido a que $C_p(X)$ es un espacio homogéneo, los subespacios $\{f \in C_p(X) : f \restriction Y \equiv \phi \restriction Y\}$ y

$\{f \in C_p(X) : f \restriction Y \equiv 0\}$ son homeomorfos. Por lo tanto, el número de Hewitt-Nachbin del subespacio $\{f \in C_p(X) : f \restriction Y \equiv 0\}$ no excede al cardinal τ. Por otra parte, no es difícil demostrar que los subconjuntos $\{f \in C_p(X) : f \restriction Y \equiv 0\}$ y $\{f \in C_p(X) : f \restriction \overline{Y} \equiv 0\}$ coinciden (el lector simplemente tendría que aplicar la definición de continuidad para comprobar esta igualdad). Con todo esto, obtenemos un hecho importante para la demostración de esta parte del lema: el grado de realcompacidad del conjunto $G = \{f \in C_p(X) : f \restriction \overline{Y} \equiv 0\}$ es menor o igual que τ.

AFIRMACIÓN. La restricción $\pi_{X\setminus\overline{Y}} \restriction G : G \to \pi_{X\setminus\overline{Y}}(G)$ del mapeo $\pi_{X\setminus\overline{Y}} : C_p(X) \to C_p(X \setminus \overline{Y})$ al subespacio G es un homeomorfismo. En particular, $q(\pi_{X\setminus\overline{Y}}(G)) \leqslant \tau$.

En efecto, la continuidad del mapeo restricción $\pi_{X\setminus\overline{Y}}$ evidentemente implica la continuidad del mapeo $\pi_{X\setminus\overline{Y}} \restriction G$. Además, no es difícil cerciorarse de que este mapeo es una inyección. De modo que para comprobar que el mapeo $\pi_{X\setminus\overline{Y}} \restriction G$ es un homeomorfismo, es suficiente demostrar que este mapeo es abierto. Para tal fin, consideremos un abierto canónico $W = [x_1, \ldots, x_n; U_1, \ldots, U_n]$ del espacio $C_p(X)$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $W \cap G \neq \emptyset$. Observe que en el caso cuando $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \overline{Y}$, tenemos que el conjunto $\pi_{X\setminus\overline{Y}}(W \cap G) = \pi_{X\setminus\overline{Y}}(G)$ es abierto en $\pi_{X\setminus\overline{Y}}(G)$. Ahora bien, si $\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \overline{Y} \neq \emptyset$, entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \overline{Y} = \{x_1, \ldots, x_k\}$, donde $1 \leqslant k \leqslant n$. Es fácil verificar ahora que

$$\pi_{X\setminus\overline{Y}}(W \cap G) = [x_1, \ldots, x_k; U_1, \ldots, U_k] \cap \pi_{X\setminus\overline{Y}}(G).$$

De esta forma tenemos que $\pi_{X\setminus\overline{Y}}(W \cap G)$ es abierto en $\pi_{X\setminus\overline{Y}}(G)$. Como los conjuntos de tipo $W \cap G$ forman una base en G cuando W recorre la familia de los abiertos canónicos de $C_p(X)$, el mapeo $\pi_{X\setminus\overline{Y}} \restriction G$ es abierto. ⊠

La idea clave para la demostración de esta parte del lema es comprobar que el subespacio $\pi_{X\setminus\overline{Y}}(G)$ es un subespacio τ-localizado en el producto $\mathbb{R}^{X\setminus\overline{Y}}$ y utilizar este hecho para probar que la hipótesis $q(C_p(X)) > \tau$ genera contradicciones. Observemos que a raíz de la afirmación anterior, para poder concluir la τ-localización de este subespacio bastará aplicar la Proposicion 2.2.6 comprobando antes, claro está, que $\pi_{X\setminus\overline{Y}}(G)$ es un subespacio denso del producto $\mathbb{R}^{X\setminus\overline{Y}}$ (recuerde que cualquier producto de rectas reales es un espacio m_ω).

Verifiquemos que el subespacio $\pi_{X\setminus\overline{Y}}(G)$ es un subconjunto denso del producto $\mathbb{R}^{X\setminus\overline{Y}}$. Consideremos un subconjunto abierto canónico $W = [x_1, \ldots, x_k; U_1, \ldots, U_k]$ no vacío de $\mathbb{R}^{X\setminus\overline{Y}}$. Elijamos arbitrariamente un elemento $h \in W$. Dado que X es un espacio de Tychonoff, podemos elegir una función $g \in C(X)$ de tal manera que $g \restriction \overline{Y} \equiv 0$ y $g(x_j) = h(x_j)$ para todo $j = 1, \ldots, k$. Entonces $g \in G$ y $\pi_{X\setminus\overline{Y}}(g) \in W$, de donde el subespacio $\pi_{X\setminus\overline{Y}}(G)$ es un subespacio denso de $\mathbb{R}^{X\setminus\overline{Y}}$.

Como hemos ya indicado, la Proposicion 2.2.6 implica que el subespacio $\pi_{X\setminus\overline{Y}}(G)$ es un subespacio que está τ-localizado en el producto $\mathbb{R}^{X\setminus\overline{Y}}$.

Para finalizar la demostración del lema, supongamos que se tiene que $q(C_p(X)) > \tau$. Dado que $t_{\mathbb{R}}(X) = q(C_p(X))$, podemos elegir una función estrictamente τ-continua $\theta \in \mathbb{R}^X \setminus C_p(X)$. Debido a que $Y \in [X]^{\leqslant\tau}$ y al hecho de que θ es una función estrictamente τ-continua, existe $f \in C_p(X)$ tal que $f \restriction Y = \theta \restriction Y$. Definamos $\eta = \theta - f$. Claramente la función η no es una función continua (pues la función θ no tiene esta propiedad). Note también que siendo la función η una diferencia de funciones estrictamente τ-continuas, esta función es también una función estrictamente τ-continua. Es claro, además, que la igualdad $f \restriction Y = \theta \restriction Y$ implica que $\eta \restriction Y \equiv 0$.

Todos los hechos anteriores acerca de la función η nos permiten comprobar que

$$\eta \restriction (X \setminus \overline{Y}) \in \mathbb{R}^{X\setminus\overline{Y}} \setminus \pi_{X\setminus\overline{Y}}(G).$$

Efectivamente, si esto no fuera así, podríamos seleccionar una función h en G de tal forma que $\eta \restriction (X \setminus \overline{Y}) = h \restriction (X \setminus \overline{Y})$. Por otro lado, observe que la τ-continuidad estricta de la función

η implica que $\eta \restriction \overline{Y} \equiv 0$; además, por la propia definición del conjunto G, se tiene que $h \restriction \overline{Y} \equiv 0$. Entonces $\eta = h \in C_p(X)$, lo cual es una contradicción.

Ahora, aplicando la τ-localización de $\pi_{X\setminus\overline{Y}}(G)$ en $\mathbb{R}^{X\setminus\overline{Y}}$, vemos que existe un subconjunto H de tipo G_δ en $\mathbb{R}^{X\setminus\overline{Y}}$ tal que

$$\eta \restriction (X \setminus \overline{Y}) \in H \subset \mathbb{R}^{X\setminus\overline{Y}} \setminus \pi_{X\setminus\overline{Y}}(G).$$

Supongamos que $H = \bigcap_{m\in\omega} H_m$, donde H_m es un subconjunto abierto del espacio $\mathbb{R}^{X\setminus\overline{Y}} \setminus \pi_{X\setminus\overline{Y}}(G)$. Seleccionemos, para cada $m \in \omega$, un abierto canónico $[x_1^m, \ldots, x_{n_m}^m; U_1^m, \ldots, U_n^m]$ del espacio $\mathbb{R}^{X\setminus\overline{Y}}$ de tal manera que

$$\eta \restriction (X \setminus \overline{Y}) \in [x_1^m, \ldots, x_{n_m}^m; U_1^m, \ldots, U_n^m] \subset H_m.$$

Definamos a $Z = \bigcup_{m\in\omega}\{x_1^m, \ldots, x_{n_m}^m\}$. Entonces $Z \in [X \setminus \overline{Y}]^{\leqslant\tau}$ y además

$$\pi_{X\setminus\overline{Y}}(\eta) \restriction Z \in \{f \in \mathbb{R}^{X\setminus\overline{Y}} : f \restriction Z \equiv \pi_{X\setminus\overline{Y}}(\eta) \restriction Z\} \subset \mathbb{R}^{X\setminus\overline{Y}} \setminus \pi_{X\setminus\overline{Y}}(G).$$

Recordemos ahora que η es una función estrictamente τ-continua. Entonces, dado que $Z \cup Y \in [X]^{\leqslant\tau}$, existe un elemento $k \in C_p(X)$ tal que $k \restriction (Z \cup Y) = \eta \restriction (Z \cup Y)$. Como $\eta \restriction Y \equiv 0$, tenemos que $k \restriction Y \equiv 0$ y $k \restriction Z = \eta \restriction Z$. De aquí

$$k \restriction (X \setminus \overline{Y}) \in \{f \in \mathbb{R}^{X\setminus\overline{Y}} : f \restriction Z \equiv \pi_{X\setminus\overline{Y}}(\eta) \restriction Z\} \subset \mathbb{R}^{X\setminus\overline{Y}} \setminus \pi_{X\setminus\overline{Y}}(G),$$

pero esto último contradice el hecho de que $k \restriction (X\setminus\overline{Y}) \in \pi_{X\setminus\overline{Y}}(G)$. Por lo tanto, $q(C_p(X)) \leqslant \tau$. □

La aplicación más importante del lema anterior está plasmada en el siguiente teorema, el cual puede considerarse la principal contribución del autor a la investigación concerniente a determinar qué propiedades topológicas no aditivas son propiedades finitamente aditivas en la clase de espacios de funciones $C_p(X)$.

2.2.11. TEOREMA (Casarrubias Segura, [**13**]). *Sean $\tau \geqslant \omega$ y $n \in \omega \setminus \{0\}$. Si $C_p(X) = \bigcup_{i=1}^n C_i$ con $q(C_i) \leqslant \tau$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $q(C_p(X)) \leqslant \tau$.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos este resultado aplicando inducción matemática sobre el número de subespacios en la descomposición de $C_p(X)$. Evidentemente para $n = 1$ nuestra afirmación es cierta. Supongamos que $n \geqslant 2$ y que el resultado es válido para cualquier descomposición de $C_p(X)$ en a lo más $(n-1)$ subespacios.

Supongamos que $C_p(X) = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ y que el grado de realcompacidad de cada uno de los subespacios C_i no excede al cardinal τ. Notemos primeramente que a raíz del Lema 2.2.1, podemos suponer, sin perder generalidad, que cada uno de los subespacios C_i es un subespacio denso del espacio $C_p(X)$. Observemos también que debido a que $C_p(X)$ es un espacio m_ω y al hecho de que $q(C_i) \leqslant \tau$ para todo $i = 1, \ldots, n$, cada uno de los subespacios C_i está τ-localizado en el espacio $C_p(X)$ (vea la Proposicion 2.2.6).

Ahora bien, si $C_p(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} C_i = \emptyset$ entonces aplicando la hipótesis de inducción tenemos que $q(C_p(X)) \leqslant \tau$. En caso contrario, podemos elegir un elemento $\phi \in C_p(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} C_i$. Ahora, dado que cada uno de los subespacios C_i está τ-localizado en el espacio $C_p(X)$, para toda $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ existe un subconjunto G_i de tipo G_τ en $C_p(X)$ tal que $\phi \in G_i \subset C_p(X) \setminus C_i$. Entonces para toda $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, podemos seleccionar un subconjunto $Y_i \in [X]^{\leqslant \tau}$ de tal forma que

$$\phi \in \{f \in C_p(X) : f \upharpoonright Y_i \equiv \phi \upharpoonright Y_i\} \subset G_i.$$

Definamos $Y = \bigcup_{i=1}^{n-1} Y_i$. Entonces $Y \in [X]^{\leqslant \tau}$ y además

$$\phi \in \{h \in C_p(X) : h \upharpoonright Y \equiv \phi \upharpoonright Y\} \subset \bigcap_{i=1}^{n-1} G_i \subset C_p(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} C_i \subset C_n.$$

Como $\{h \in C_p(X) : h \upharpoonright Y \equiv \phi \upharpoonright Y\} \subset C_p(X)$ es un subespacio cerrado y $q(C_n) \leqslant \tau$, tenemos que

$$q(\{h \in C_p(X) : h \upharpoonright Y \equiv \phi \upharpoonright Y\}) \leqslant \tau.$$

Aplicando el Lema 2.2.12 podemos concluir que $q(C_p(X)) \leqslant \tau$. $\square$

Como una aplicación inmediata del teorema anterior obtenemos la aditividad finita de la realcompacidad en los espacios $C_p(X)$.

El siguiente corolario expresa que la completitud en el sentido de Dieudonné es también una propiedad topológica finitamente aditiva en esta clase de espacios topológicos.

2.2.12. COROLARIO (Casarrubias Segura, [13]). *Las siguientes propiedades son propiedades topológicas finitamente aditivas en la clase de espacios $C_p(X)$.*

(1) *La realcompacidad;*
(2) *la completitud en el sentido de Dieudonné.*

DEMOSTRACIÓN. (2) Supongamos que $C_p(X) = \bigcup_{i=1}^n C_i$ es una unión finita de subespacios completos en el sentido de Dieudonné. Dado que la completitud en el sentido de Dieudonné es hereditaria respecto de subconjuntos de tipo F_σ [18, 8.5.13 inciso (f)], podemos aplicar el Lema 2.2.1 para inducir una descomposición finita $C_p(X) = \bigcup_{i=1}^m B_i$, constituida completamente por subespacios densos del espacio $C_p(X)$, y que a la vez son espacios completos en el sentido de Dieudonné. Dado que cada uno de los subespacios B_i hereda de $C_p(X)$ la propiedad de Souslin, cada uno de ellos es un espacio realcompacto [18, 8.5.13]. De aquí, aplicando el inciso (1), vemos que $C_p(X)$ es un espacio realcompacto, y por lo tanto, completo en el sentido de Dieudonné. □

Una parte importante de las investigaciones que se realizan en la C_p-teoría están encaminadas a la tarea de expresar propiedades de un espacio topológico X en términos de la topología del espacio $C_p(X)$. Si una propiedad topológica $\mathcal{P}$ de un espacio X puede ser expresada en términos de propiedades de la topología del espacio $C_p(X)$, entonces ésta propiedad es una propiedad topológica *t-invariante*, lo cual significa que cualquier espacio topológico Y tiene la propiedad $\mathcal{P}$ en cuanto $C_p(Y)$ sea homeomorfo a un espacio $C_p(X)$, para algún espacio X que tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

V. V. Tkachuk estableció en [34] (véase también [35]) que, para un espacio topológico X, la propiedad de ser un espacio discreto es equivalente a la presencia de la pseudocompletitud y la realcompacidad en el espacio $C_p(X)$, estableciendo de esta forma la t-invariancia de la discretitud. (Hoy día no se conoce la solución a muchos problemas en los que se pregunta si un espacio X es discreto, o posee alguna propiedad cercana a la discretitud, suponiendo alguna "semejanza" de $C_p(X)$ con $\mathbb{R}^\tau$. El lector interesado en esta temática puede consultar los artículos [40] y [44] para más detalles).

Combinando nuestro resultado sobre la aditividad finita de la realcompacidad con el hecho de que la pseudocompletitud es una propiedad topológica finitamente aditiva en la clase de espacios de Tychonoff (véase la sección 7 del Capítulo 1 para una demostración de este hecho), podemos extender este resultado de Tkachuk al caso en que $C_p(X)$ es una unión finita de subespacios homeomorfos a productos de rectas reales.

2.2.13. COROLARIO (Casarrubias Segura, [**13**]). *Sea $n \in \omega \setminus \{0\}$. Supóngase que τ_i es un número cardinal infinito para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si $C_p(X) = \bigcup_{i=1}^n C_i$, donde C_i es homeomorfo al espacio $\mathbb{R}^{\tau_i}$ para toda i, entonces el espacio X es discreto.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que C_i es homeomorfo a $\mathbb{R}^{\tau_i}$, el subespacio C_i es un espacio realcompacto para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Aplicando el inciso (1) del Corolario 2.2.12, podemos concluir que el espacio $C_p(X)$ es un espacio realcompacto. Además, cada uno de los subespacios C_i es un espacio pseudocompleto, por lo cual $C_p(X)$ es un espacio pseudocompleto. Pero como hemos ya mencionado, la presencia de la realcompacidad y la pseudocompletitud en el espacio $C_p(X)$ implican la discretitud del espacio X [**34, 35**]. $\square$

Una propiedad topológica muy interesante e importante es la monoliticidad. Recuérdese que, dado un número cardinal infinito τ, un espacio topológico X es llamado *τ-monolítico* si para cada $A \subset X$ con $|A| \leqslant \tau$, se tiene que $nw(\overline{A}) \leqslant \tau$. De esta forma, un espacio topológico X es *monolítico* si éste es un espacio τ-monolítico para cada cardinal infinito τ.

La noción de τ-monoliticidad fue introducida en [5] por A.V. Arhangel'skii. A partir de aquel entonces, Arhangel'skii inició un estudio sistemático de esta propiedad topológica (véanse por ejemplo [5], [7] y [8]) llegando a concluir uno de los más bellos teoremas de dualidad de la C_p-teoría: un espacio topológico X es τ-monolítico si y sólo si $C_p(X)$ es un espacio τ-estable (recuerde el lector que un espacio topológico Z es τ-estable si para cualquier imagen continua Y del espacio Z las propiedades $iw(Y) \leqslant \tau$ y $nw(Y) \leqslant \tau$, son equivalentes).

El mismo Arhangel'skii hizo observar en [11, 2.6.13] que la monoliticidad no es una propiedad topológica finitamente aditiva en la clase de espacios de Tychonoff, citando, para corrobar este hecho, al famoso espacio construido por Niemytzki.

Como es bien sabido el plano de Niemytzki es un espacio separable cuyo peso de red es igual al cardinal $\mathfrak{c}$ y es la unión de dos de sus subespacios metrizables: el semiplano superior, el cual es homeomorfo al semiplano superior del espacio usual $\mathbb{R}^2$, y el eje horizontal, el cual es un subespacio discreto con la topología relativa al plano de Niemytzki. De este modo, este espacio topológico es la unión de dos subespacios monolíticos, sin ser un espacio monolítico. (Es bien conocido [8] que un espacio topológico es monolítico si y sólo si para todo subespacio de él, el peso de red y la densidad coinciden. Esto implica en particular que el plano de Niemytzki no puede ser un espacio monolítico y también que los dos subespacios metrizables antes descritos son espacios monolíticos).

En [39], V. V. Tkachuk extendió la noción de τ-monoliticidad introducida por A.V. Arhangel'skii , observando que este concepto nace al ser considerado el cálculo de la función cardinal nw en la cerradura de aquellos susbespacios cuya cardinalidad no excede al cardinal τ. Con esta reflexión, Tkachuk generó el concepto de espacio η_τ-monolítico considerando una función cardinal η para jugar el papel (en su noción) que juega el peso de red en la noción de τ-monoliticidad.

Dados una función cardinal η y un cardinal infinito τ, se dice que un espacio X es *η_τ-monolítico* si para todo subconjunto A de X, con $|A| \leqslant \tau$, ocurre que $\eta(\overline{A}) \leqslant \tau$. De esta forma, la nw_τ-monoliticidad en el sentido de Tkachuk es equivalente a la τ-monoliticidad en el sentido de Arhangel'skii. Con todo lo anterior, la noción de espacio η-monolítico (para una función cardinal η) ya es muy natural. Un espacio topológico X es *η-monolítico* si éste es un espacio η_τ-monolítico para todo cardinal infinito τ.

En el mismo artículo ([39]), Tkachuk realizó un estudio completo de la propiedad de ser un espacio η_τ-monolítico y generó de igual manera un teorema de dualidad (análogo al teorema de dualidad de Arhangel'skii) que relaciona la η-monoliticidad de un espacio topológico con lo que Tkachuk llamó θ-estabilidad del espacio $C_p(X)$ (vea el artículo [39] para más detalles al respecto).

A través de un análisis de la demostración del Lema 2.2.1, es factible observar que al considerar una propiedad topológica hereditaria $\mathcal{P}$ (tal como lo es la monoliticidad) obtenemos de manera no muy complicada una versión más fuerte de este lema (lo cual es esperable al fortalecer los requerimientos para la propiedad $\mathcal{P}$). El resultado así generado es una fuerte herramienta que nos permitirá demostrar la aditividad finita de la monoliticidad en la clase de espacios $C_p(X)$.

2.2.14. LEMA (Casarrubias Segura, [**13**]). *Sean $n \in \omega \setminus \{0\}$ y $\mathcal{P}$ una propiedad topológica hereditaria. Supóngase que $C_p(X) = \bigcup_{i=1}^n C_i$. Si cada subespacio C_i posee la propiedad $\mathcal{P}$, entonces existen subespacios $B_1, \ldots, B_m$ (para algún $m \leqslant n$) tales que:*

(1) *$C_p(X) = \bigcup_{i=1}^m B_i$, donde*
(2) *cada subespacio B_i tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y $\mathrm{cl}_{C_u(X)}(B_i) = C_p(X)$ para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos el resultado haciendo inducción sobre n. Para $n = 1$, la proposición es evidentemente cierta. Supongamos que $n \geqslant 2$ y que la afirmación es verdadera para cualquier descomposición en a lo más $(n-1)$ subespacios de $C_p(X)$. Supongamos también que $C_p(X) = \bigcup_{i=1}^n C_i$, donde además asumimos que cada subespacio C_i posee la propiedad $\mathcal{P}$. Si cada uno de los subespacios C_i es un subespacio denso de $C_u(X)$ entonces es suficiente considerar la descomposición original de $C_p(X)$ para culminar la demostración del resultado. Por otro lado, si existe un índice

$i \in \{1, \ldots, n\}$ para el cual se tiene que $\mathrm{cl}_{C_u(X)}(C_i) \neq C_u(X)$, entonces por la definición de la topología del espacio $C_u(X)$, existen $g \in C(X)$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$B(g;\epsilon) = \{h \in C(X) : |h(x) - g(x)| < \epsilon \; \forall \; x \in X\} \subset C_u(X) \setminus C_i \subset \bigcup_{j \neq i} C_j.$$

Dado que $C_u(X)$ es un espacio homogéneo, podemos suponer que $g \equiv 0$.

Definamos $D_j = B(g;\epsilon) \cap C_j$, para cada $j \neq i$. Como $C_p(X) \simeq C_p(X, (-\epsilon, \epsilon)) = B(g;\epsilon)$, de manera natural podemos inducir una descomposición $C_p(X) = \bigcup_{j \neq i} D'_j$, donde cada subespacio D'_j tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Finalmente, aplicando la hipótesis de inducción, tenemos la existencia de m subespacios (para algún $m \leqslant n - 1$) $B_1, \ldots, B_{m-1}$ que satisfacen las condiciones (1) y (2). □

Un hecho, cuya demostración es una tarea rutinaria, es que si τ es un cardinal infinito y η es una función cardinal hereditaria, entonces la η_τ-monoliticidad es una propiedad topológica hereditaria.

2.2.15. TEOREMA (Casarrubias Segura, [13]). *Sea $n \in \omega \setminus \{0\}$. Supongamos que η es una función cardinal finitamente aditiva y hereditaria, y que $C_p(X) = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. Si cada subespacio C_i es un espacio η_τ-monolítico, entonces $C_p(X)$ es también un espacio η_τ-monolítico.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el Lema 2.2.14 podemos suponer que todos los subespacios C_i son subespacios densos del espacio $C_u(X)$.

Tomemos ahora un subconjunto arbitrario A de $C_p(X)$ con el único requisito de que $|A| \leqslant \tau$. Definamos para toda $i = 1, \ldots, n$, el conjunto $A_i = A \cap C_i$. No es difícil convencerse de que $\overline{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_j}$. Ahora bien, dado que η es una función cardinal finitamente aditiva, para poder demostrar que $\eta(\overline{A}) \leqslant \tau$ bastará demostrar que $\eta(\overline{A_i}) \leqslant \tau$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Para probar esto último, fijemos un índice $k \in \{1, \ldots, n\}$. Obsérvese que $\overline{A_k} = \bigcup_{i=1}^{n} (\overline{A_k} \cap C_i)$. De nuevo, debido al hecho de que η es finitamente aditiva, es suficiente demostrar que $\eta(\overline{A_k} \cap C_i) \leqslant \tau$

para cada $i = 1, \dots, n$. Para comprobar esto último, observe que debido a que $A_k \subset C_k$, $|A_k| \leqslant \tau$ y C_k es un espacio η_τ-monolítico, obtenemos que $\eta(\overline{A_k} \cap C_k) = \eta(\mathrm{cl}_{C_k}(A_k)) \leqslant \tau$. Fijemos ahora un índice $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$. Como $C_u(X)$ es un espacio de Fréchet-Urysohn y cada espacio C_i es un subespacio denso de $C_u(X)$, para cada $a \in A_k$ existe una sucesión $\{f_n^a\}_{n<\omega} \subset C_j$ que converge uniformemente al punto a. Definamos a $B = \{f_n^a : a \in A_k, n < \omega\}$. Entonces $\overline{A_k} \subset \overline{B}$, de donde tenemos que $\overline{A_k} \cap C_j \subset \overline{B} \cap C_j$. Como C_j es η_τ-monolítico, $B \subset C_j$ y $|B| \leqslant \tau$, podemos deducir fácilmente que $\eta(\overline{B} \cap C_j) = \eta(\mathrm{cl}_{C_j}(B)) \leqslant \tau$. De modo que $\eta(\overline{A_k} \cap C_j) \leqslant \tau$. □

Finalizamos la presente sección con los siguientes corolarios al teorema anterior.

2.2.16. Corolario (Casarrubias Segura, [13]). *Supóngase que* $\eta \in \{nw, s, hd, hl\}$. *Si el espacio* $C_p(X)$ *es una unión finita de subespacios* η*-monolíticos entonces* $C_p(X)$ *es un espacio* η*-monolítico.*

2.2.17. Corolario (Casarrubias Segura, [13]). *Sea* $\tau \geqslant \omega$. *La propiedad de ser un espacio* τ*-monolítico es una propiedad finitamente aditiva en la clase de espacios* $C_p(X)$.

2.3. La propiedad de Eberlein-Grothendieck es numerablemente aditiva en $C_p(X)$

El problema de determinar qué tipo de espacios topológicos X y Y tienen la propiedad de que el espacio $C_p(Y)$ puede ser inmerso en el espacio $C_p(X)$ ha sido, desde sus inicios, un problema fundamental de la C_p-teoría. De particular interés para los especialistas de esta área de estudios es la descripción de aquellos espacios topológicos que pueden ser inmersos en espacios de funciones definidos sobre espacios compactos. Se dice que un espacio topológico X es un espacio de *Eberlein-Grothendieck* (o un *espacio EG*) si éste es homeomorfo a un subespacio del espacio $C_p(K)$, para algún espacio compacto K (o equivalentemente, para algún espacio σ-compacto K).

La clase de los espacios EG contiene como una subclase a la importante clase de espacios topológicos segundo numerables. Sin embargo, es conocido [11, 3.1.7] que no necesariamente todo espacio con red numerable (incluso, no todo espacio numerable) es un espacio EG: si $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ entonces el subespacio $\mathbb{N} \cup \{p\}$ de $\beta\mathbb{N}$ no puede ser homeomorfo a ningún subespacio de un espacio $C_p(K)$, con K compacto.

Esta característica del espacio $\mathbb{N} \cup \{p\}$ nos ayuda a constatar que la propiedad de Eberlein-Grothendieck no es preservada bajo la formación de uniones finitas. Nuestro objetivo en esta sección es mostrar que la propiedad de Eberlein-Grothendieck cambia este comportamiento en la clase de los espacios $C_p(X)$, para lo cual probaremos que esta propiedad es numerablemente aditiva en esta clase de espacios topológicos. Como se podrá apreciar a través del desarrollo de la demostración de este hecho, nuestro método para demostrar este resultado está en estrecha relación con el método utilizado por O. G. Okunev en [28], para la demostración de uno de sus teoremas, el cual establece que la propiedad de Eberlein-Grothendieck en el espacio $C_p(X)$ es equivalente a que X sea un espacio σ-compacto. (Debemos señalar que de ahora en adelante utilizaremos los símbolos 0_X para denotar a la función constante cero definida en el espacio X).

2.3.1. DEFINICIÓN. Sea X un espacio topológico. Diremos que un subespacio $\Phi \subset C_p(X)$ es $\mathcal{D}$-*separador* si tiene las siguientes propiedades:

(1) $0_X \in \Phi$,
(2) $f(X) \subset [-1,1]$ para toda $f \in \Phi$, y
(3) $\forall \epsilon > 0$, si $P \subset X$ es cerrado y $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X \setminus P$, entonces existe $f \in \Phi$ tal que $|f(x_i)| < \epsilon$ para toda $i = 1, 2, \dots, n$ y $|f(x)| \in [\frac{3}{4}, 1]$ para todo $x \in P$.

2.3.2. OBSERVACIÓN. Es sencillo darse cuenta de que *cualquier subconjunto denso de un espacio $C_u(X)$ es un conjunto $\mathcal{D}$-separador de funciones reales continuas.* En efecto, supongamos que $D \subset C_u(X) = \overline{D}$. Dado que $C_u(X)$ es un espacio homogéneo, existe un subespacio $D' \subset C_u(X)$ tal que $D \simeq D'$ y $0 \in D'$. Probaremos que D' es un conjunto $\mathcal{D}$-separador. Para este propósito, elijamos arbitrariamente $\epsilon > 0$, $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ y un subconjunto cerrado P de X tal que $P \cap \{x_1, \dots, x_n\} = \emptyset$. Como X es un espacio de Tychonoff, existe una función $g \in C(X)$ tal que $g \restriction \{x_1, \dots, x_n\} \equiv 0$ y $g(P) \subset \{\frac{7}{8}\}$. Definamos $\delta = \min\{\epsilon, \frac{1}{8}\}$. Como D es denso en $C_u(X)$, existe $d \in D$ tal que $d \in B(g; \delta) = \{h \in C_u(X) : |h(x) - g(x)| < \delta$ para todo $x \in X\}$. Ahora resta notar que $|d(x_i)| < \epsilon$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$ y $|d(x)| \in [\frac{3}{4}, 1]$ para todo $x \in P$. De este modo, el conjunto D' es $\mathcal{D}$-separador.

Dado un espacio topológico X, definimos a la clase $\mathcal{K}(X)$ como la más pequeña de las clases de espacios topológicos que contienen a X, a todos los espacios compactos y a todos los espacios metrizables separables, y que es invariante bajo la formación de productos y uniones numerables, imágenes continuas y subespacios cerrados.

2.3.3. DEFINICIÓN. Sea X un espacio topológico. Para cualquier subespacio $\Phi \subset C_p(X, I)$ $(I = [-1, 1])$ que contiene a la función constante cero 0_X, definimos a $Z_\Phi(X)$ como el subespacio de I^Φ formado por todas aquellas funciones $\phi \in I^\Phi$ tales que $\phi(0_X) = 0$ y para las cuales existe una vecindad W de 0_X en Φ tal que $\phi(W) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

La demostración del siguiente lema puede ser consultada en [**11**, págs. 97–98].

2.3.4. LEMA. *Sean X un espacio topológico y $\Phi \subset C(X, I)$ tales que $0_X \in \Phi$. Entonces*

(1) *$Z_\Phi(X) \in \mathcal{K}(X)$ y*
(2) *si Φ es un conjunto $\mathcal{D}$-separador entonces X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $Z_\Phi(X)$.*

2.3.5. PROPOSICIÓN ([**11**]). *Sean X y Y espacios de Tychonoff. Si algún conjunto $\mathcal{D}$-separador $\Phi \subset C_p(X)$ es homeomorfo a un subespacio de $C_p(Y)$, entonces $X \in \mathcal{K}(Y)$.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el Lema 2.3.4, tenemos que X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $Z_\Phi(X)$. Por otra parte, consideremos una inmersión $\psi : \Phi \to C_p(Y)$. Observemos primero que debido a que $C_p(Y)$ es un espacio homogéneo, podemos suponer que el subespacio $\psi(\Phi)$ contiene a la función constante 0_Y y que la inmersión ψ tiene la propiedad de mapear a la función constante 0_X sobre la función constante 0_Y. Aplicando ahora el inciso (1) del Lema 2.3.4 al conjunto $\psi(\Phi)$, podemos fácilmente deducir que el conjunto $Z_{\psi(\Phi)}(Y)$ es un elemento de la clase $\mathcal{K}(Y)$.

AFIRMACIÓN. El espacio $Z_\Phi(X)$ es una imagen continua del espacio $Z_{\psi(\Phi)}(Y)$.

En efecto, sea $\theta : Z_{\psi(\Phi)}(X) \to Z_\Phi(X)$ la función dada por $\theta(t) = t \circ \psi$, donde $t \in Z_{\psi(\Phi)}(X)$. Debido a que la topología de los espacios $Z_\Phi(X)$ y $Z_{\psi(\Phi)}(Y)$ es la inducida por los productos topológicos I^Φ e $I^{\psi(\Phi)}$, es fácil verificar que la función θ es una función continua. Probemos que θ es una función sobreyectiva. Sea $g = \psi^{-1} : \psi(\Phi) \to \Phi$ y $s \in Z_\Phi(X)$ un elemento arbitrario. Definamos $t = s \circ g$. Claramente para esta función tenemos que $\theta(t) = s$, de donde, bastará demostrar que $t \in Z_{\psi(\Phi)}(Y)$. Observe ahora que $t(0_Y) = (s \circ g)(0_Y) = s(g(0_Y)) = s(0_X) = 0$ (recuerde que $\psi(0_X) = 0_Y$ y que $s \in Z_\Phi(X)$). Por otra parte, como $s \in Z_\Phi(X)$ existe una vecindad W de 0_X en Φ tal que $s(W) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Dado que ψ es una inmersión que mapea a 0_X sobre 0_Y, el conjunto $\psi(W)$ es una vecindad de 0_Y en $\psi(\Phi)$. Además, $t(\psi(W)) = s(g(\psi(W))) = s(W)$. En consecuencia, $t \in Z_{\psi(\Phi)}(Y)$. ⊠

Para finalizar la demostración de la proposición, notemos que debido a que la clase $\mathcal{K}(Y)$ es cerrada bajo imágenes continuas y $Z_{\psi(\Phi)}(Y) \in \mathcal{K}(Y)$, el espacio $Z_\Phi(X)$ pertenece a la clase $\mathcal{K}(Y)$. Como X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $Z_\Phi(X)$ y $\mathcal{K}(Y)$ es invariante bajo la formación de subespacios cerrados, concluimos que $X \in \mathcal{K}(Y)$. □

2.3.6. OBSERVACIÓN. Es sabido [11] que si X es un espacio σ-compacto entonces la clase $\mathcal{K}(X)$ está constituida completamente por espacios σ-compactos. Este comportamiento de la clase $\mathcal{K}(X)$

es el mismo para varios tipos de espacios topológicos X. Por ejemplo, si X es un espacio Lindelöf Σ, esto es, un espacio Σ que tiene la propiedad de Lindelöf (véase [**20**] para una definición de espacio Σ) entonces $\mathcal{K}(X)$ está formada por espacios Lindelöf Σ. Asimismo, si X es un espacio K-analítico entonces $\mathcal{K}(X)$ es una subclase de la clase de los espacios K-analíticos (recuerde el lector que los espacios *K-analíticos* son definidos como las imágenes continuas de los espacios $K_{\sigma\delta}$ y que un espacio X es un *espacio $K_{\sigma\delta}$* si existe un espacio Z tal que X es la intersección de una familia numerable de subespacios σ-compactos de Z [**11, 32**]).

2.3.7. TEOREMA (Casarrubias Segura, [**13**]). *Sea X un espacio topológico. Supóngase que $C_p(X) = \bigcup\{C_n : n \in \omega\}$. Si cada subespacio C_n puede ser inmerso en un espacio $C_p(K_n)$, para algún espacio σ-compacto K_n (respectivamente, para algún espacio Lindelöf Σ, para algún espacio K-analítico) entonces X es un espacio σ-compacto (respectivamente, un espacio Lindelöf Σ, un espacio K-analítico).*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el Lema 1.1 de [**41**], podemos garantizar la existencia de una función $f \in C_p(X)$, un número real $\epsilon > 0$ y un número $m \in \omega$, tales que el subespacio $\Phi = (C_m + f) \cap C(X, (-\epsilon, \epsilon))$ es denso en $C_u(X, (-\epsilon, \epsilon))$. Como $C_u(X, (-\epsilon, \epsilon))$ es homeomorfo a $C_u(X)$, el conjunto Φ es homeomorfo a un subespacio denso Φ_1 del espacio $C_u(X)$. Observe ahora que el subespacio Φ_1 es una familia de funciones continuas reales $\mathcal{D}$-separadora (véase la Observacion 2.3.2), de donde, aplicando la Proposición 2.3.5 (claramente el subespacio Φ_1 puede ser inmerso en el espacio $C_p(K_m)$), tenemos que $X \in \mathcal{K}(K_m)$. Por lo tanto, aplicando la Observación 2.3.6, podemos concluir que X es un espacio σ-compacto (respectivamente, un espacio Lindelöf Σ, un espacio K-analítico). □

Finalizamos la presente sección con el siguiente teorema que permite concluir la analiticidad de un espacio topológico bajo ciertas condiciones sobre los elementos de una descomposición numerable del espacio $C_p(X)$. En este punto es importante que el lector recuerde que un espacio topológico X es *analítico* si éste es una imagen continua del espacio de los números irracionales $\mathbb{P}$.

2.3.8. TEOREMA (Casarrubias Segura, [**13**]). *Si* $C_p(X) = \bigcup\{C_n : n \in \omega\}$ *y cada subespacio* C_n *puede ser inmerso en un espacio* $C_p(K_n)$, *para algún espacio analítico* K_n, *entonces* X *es un espacio analítico.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que todo espacio analítico es un espacio K-analítico, por el teorema anterior X es un espacio K-analítico. Por otra parte, como los espacios analíticos tienen peso de red numerable y la función cardinal nw es numerablemente aditiva, el espacio $C_p(X)$ tiene peso de red numerable. Por lo tanto, X tiene peso de red numerable (cf. [**11**, 1.1.3]). Como todo espacio K-analítico con peso de red numerable es un espacio analítico, el espacio X es analítico. □

2.4. Problemas abiertos

En la tarea de determinar cuáles propiedades topológicas no aditivas son numerablemente aditivas en espacios de tipo $C_p(X)$, queda aún mucho por realizar. Finalizamos el presente capítulo presentando en esta sección algunos problemas no resueltos.

2.4.1. PROBLEMA. *Supóngase que* $C_p(X) = \bigcup\{C_n : n \in \omega\}$ *y que todos los subespacios* C_n *son espacios realcompactos. ¿Es* $C_p(X)$ *realcompacto?*

2.4.2. PROBLEMA. *¿Es la paracompacidad numerablemente aditiva en* $C_p(X)$*?*

2.4.3. PROBLEMA. *¿Es la metacompacidad numerablemente aditiva en* $C_p(X)$*? ¿Es finitamente aditiva?*

2.4.4. PROBLEMA. *¿Es la monoliticidad una propiedad topológica numerablemente aditiva en* $C_p(X)$*?*

2.4.5. PROBLEMA. *Supongamos que $C_p(X) = A \cup B$, donde A y B son subespacios normales de $C_p(X)$. ¿Es $C_p(X)$ un espacio normal bajo estas condiciones? ¿Que ocurre si además X es compacto?*

2.4.6. PROBLEMA. *Supongamos que $C_p(X) = A \cup B$, donde A y B son subespacios perfectamente normales de $C_p(X)$. ¿Es $C_p(X)$ un espacio perfectamente normal bajo estas condiciones?*

2.4.7. PROBLEMA. *Supongamos que $C_p(X) = A \cup B$, donde A y B son subespacios colectivamente normales de $C_p(X)$. ¿Es $C_p(X)$ un espacio colectivamente normal? ¿Que ocurre si además X es compacto?*

3

Topologías más débiles compactas en $C_p(X)$

3.1. Introducción

Un método de investigación frecuentemente utilizado en la tarea de clasificar a los espacios topológicos es el estudio de las propiedades de topologías más débiles que una topología dada. La razón principal de ello, reside en el hecho de que cada topología de Tychonoff es el supremo de topologías segundo numerables. Por lo tanto, una topología de Tychonoff más débil constituye una aproximación a la topología original de un espacio, y cuando esta aproximación tiene buenas propiedades, entonces es posible obtener información relevante acerca de la topología original del espacio que se está considerando. Parte del objetivo principal de este capítulo es analizar cuándo existen topologías más débiles en $C_p(X)$ que tengan propiedades similares a la compacidad.

Notemos, por otra parte, que preguntarnos si la topología de un espacio topológico puede ser debilitada a una topología con propiedades específicas es equivalente a preguntarnos si tal espacio puede ser mapeado continua y biyectivamente sobre algún espacio con las propiedades deseadas. Efectivamente, observemos que cuando uno tiene una topología τ más débil que la topología de un espacio topológico X, entonces uno puede construir un "nuevo" espacio topológico, sobre el cual el espacio X puede ser mapeado continua y biyectivamente, a saber, el espacio (X, τ). De igual manera, si uno mapea continua y biyectivamente, por medio de un mapeo f, a un espacio topológico X sobre otro espacio topológico Y, uno está "detectando" en verdad una topología más débil que la topología original del espacio X, a saber, la topología $\tau = \{f^{-1}(U) : U \text{ es abierto en } Y\}$. De esta forma, la búsqueda de topologías con buenas propiedades, que sean más débiles que una topología dada, tiene una estrecha relación con el llamado problema de condensación.

El problema de condensación establece la tarea de describir a aquellos espacios topológicos cuyas propiedades pueden ser mejoradas por medio de condensaciones, esto es, por medio de mapeos biyectivos continuos. (La escuela rusa de topología tiene acuñado el término *condensación* para nombrar a los mapeos continuos que son biyectivos, y de este modo es usual decir que un espacio topológico X *se condensa* sobre un espacio topológico Y si existe un mapeo continuo biyectivo de X sobre Y). Es importante mencionar que un buen número de resultados que han contribuido a la solución del problema de condensación fueron obtenidos aún antes del planteamiento formal del mismo, el cual fue realizado por P. Alexandroff en [2, 3]. Por ejemplo, en 1939 Parkhomenko construyó un subespacio de tipo G_δ del espacio $\mathbb{R}^2$ que no admite condensaciones sobre espacios compactos (op. cit. [33]).

Con el nacimiento y desarrollo de la C_p-teoría fue muy natural trasladar el problema de condensación al ámbito de esta teoría, logrando con ello la generación de grandes contribuciones a la solución de este problema (esto último gracias a la profusa investigación de los especialistas de esta área de estudios). Sólo por citar una de estas relevantes contribuciones, podemos recordar el clásico resultado de Arhangel'skii que establece que un espacio de funciones $C_p(X)$ puede ser condensado sobre un espacio metrizable si y sólo si X es un espacio separable (cf. [11, 1.1.4]).

En forma muy particular, este capítulo está dedicado a exponer los métodos utilizados en [14] para dar solución a algunos problemas planteados por A. V. Arhangel'skii en [10], que tienen una extrecha relación con el problema de condensación en el contexto de la C_p-teoría. A continuación, presentamos una lista de los resultados principales de este capítulo.

(1) Si $\mathbb{D}$ es el espacio discreto de dos elementos, y τ es un cardinal infinito, entonces $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ puede ser condensado sobre un espacio de Tychonoff Y, con la propiedad de que Y^n es Lindelöf para todo $n \in \omega \setminus \{0\}$ (Proposición 3.2.2). Este resultado da una respuesta positiva a la primera parte del Problema 38 de [**10**].

(2) Para cada cardinal infinito τ, los espacios $C_p(C_p(\mathbb{D}^\tau))$ y $L_p(\mathbb{D}^\tau)$ tienen subespacios densos de estrechez numerable (cf. Teorema 3.2.3 y Teorema 3.2.5). Estos resultados solucionan completamente el Problema 40 de [**10**].

(3) Si X es un espacio compacto metrizable infinito entonces el espacio $C_p(X)$ puede ser condensado sobre el cubo de Hilbert $\mathbb{I}^\omega$ (cf. Teorema 3.2.9). Como una consecuencia de esto, obtenemos una respuesta positiva al Problema 39 de [**10**] y demostramos que para todo espacio metrizable numerable X, el espacio $C_p(X)$ puede ser condensado sobre un espacio compacto (cf. Teorema 3.2.11).

3.2. Condensaciones del espacio $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ sobre espacios compactos

A. V. Arhangel'skii preguntó en [**9**] (como parte del Problema 9) si cualquier espacio de Tychonoff podía ser condensado sobre un espacio de Lindelöf. En [**38**], V. V. Tkachuk construyó un ejemplo de un espacio topológico de Tychonoff que no admite condensaciones sobre espacios de Lindelöf, ni sobre espacios pseudocompactos, dando de esta manera una respuesta negativa a la pregunta de Arhangel'skii. A raíz de este acontecimiento, I. V. Yaschenko preguntó si una tal condensación (de cualquier espacio de Tychonoff sobre algún espacio de Lindelöf) existe si se supone adicionalmente que el espacio de Tychonoff es realcompacto (cf. [**10**, Problema 36]). De manera natural, Arhangel'skii trasladó la pregunta de Yaschenko al contexto de la C_p-teoría y estableció de esta manera el Problema 37 de [**10**]. En este mismo artículo, Arhangel'skii hace observar un hecho por sí solo interesante acerca de ciertos espacios $C_p(X)$ (y que está relacionado con el problema de Yaschenko): es consistente con **ZFC** que todo espacio de tipo $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ es realcompacto. Esta última observación llevó a Arhangel'skii a preguntar si un espacio de tipo $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ admite una condensación sobre un espacio de Lindelöf (cf. [**10**, Problema 38]).

En la primera proposición de este capítulo demostraremos que todo espacio de tipo $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ no sólo admite condensaciones sobre espacios de Lindelöf, sino que es posible condensar a cualquier espacio de este tipo sobre un espacio de Tychonoff que tiene todas sus potencias finitas de Lindelöf. Para poder llevar a cabo con toda precisición la demostración de este resultado necesitamos recordar algunas hechos acerca de Σ-productos.

3.2.1. Definición. Sean $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos, $Y = \prod\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ y $y = \{y_\alpha\}_{\alpha\in A} \in Y$ un punto arbitrario. El *Σ-producto de los espacios Y_α basado en el punto y* es el subespacio

$$\Sigma(y, Y) = \{z \in Y : |\{\beta \in A : z_\beta \neq y_\beta\}| \leqslant \omega\}$$

del producto topológico $Y = \prod\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$.

I. Glicksberg demostró en [**19**] (véase también [**18**, 3.12.24]) que para cualquier Σ-producto de una familia $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ de espacios compactos, la compactificación de Stone-Čech del Σ-producto coincide con el producto de los espacios Y_α. Basándonos en este resultado, es sencillo darnos cuenta de que en el caso cuando X es el Σ-producto de τ copias ($\tau \geqslant \omega$) del espacio discreto $\mathbb{D}$, se tiene que $\mathbb{D}^\tau = \beta X$ (observe que debido a que el espacio $\mathbb{D}^\tau$ es un espacio homogéneo, cualquier par de Σ-productos basados en puntos distintos del espacio $\mathbb{D}^\tau$ resultan ser espacios homeomorfos, por lo tanto podemos decir que existe únicamente un Σ-producto de τ-copias del espacio discreto $\mathbb{D}$).

Otro hecho muy interesante, que puede ser obtenido como una consecuencia inmediata de un resultado debido a S. P. Gul'ko, es que si X es un Σ-producto de una familia de espacios metrizables separables, entonces el espacio $C_p(X, Y)$ tiene la propiedad de Lindelöf para cualquier espacio metrizable y separable Y (véase el Teorema 2 de [**22**]).

Con todo lo anterior estamos ya en posición de enunciar la primera proposición de este capítulo.

3.2.2. PROPOSICIÓN (Casarrubias Segura, [14]). *Sea $\tau \geqslant \omega$. El espacio $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ admite una condensación sobre un espacio de Tychonoff cuyas potencias finitas son de Lindelöf.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos al Σ-producto X de τ copias del espacio $\mathbb{D}$. Como hemos ya indicado, para tal Σ-producto tenemos que $\mathbb{D}^\tau = \beta X$. Ahora bien, dado que X es un Σ-producto de espacios con peso numerable, podemos aplicar el Teorema 2 de [22] para concluir que el espacio $C_p(X, \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Lindelöf para toda $n \in \omega \setminus \{0\}$. Como $C_p(X, \mathbb{R}^n)$ es homeomorfo a $C_p(X)^n$ para toda $n \in \omega \setminus \{0\}$, obtenemos de esta forma que todas las potencias finitas del espacio $C_p(X)$ tienen la propiedad de Lindelöf.

Observe ahora que siendo X un Σ-producto de espacios compactos, este espacio es un subespacio denso y pseudocompacto del espacio $\mathbb{D}^\tau$, de donde el mapeo restricción $\pi_X : C_p(\mathbb{D}^\tau) \to C_p(X)$ es una condensación (cf. Proposición 1.3.3). $\square$

Una vez que tenemos establecido que todo espacio de funciones de tipo $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ puede ser condensado sobre un espacio que tiene la propiedad de que todas sus potencias finitas son de Lindelöf, podemos demostrar que la segunda iteración $C_p(C_p(\mathbb{D}^\tau))$ posee un subespacio denso de estrechez numerable para cualquier cardinal infinito τ. Este resultado responde positivamente a la primera pregunta del Problema 40 de [10].

3.2.3. TEOREMA (Casarrubias Segura, [14]). *Sea $\tau \geqslant \omega$. El espacio $C_p(C_p(\mathbb{D}^\tau))$ tiene un subespacio denso de estrechez numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X el Σ-producto de τ copias del espacio discreto $\mathbb{D}$. Aplicando nuevamente el Teorema 2 de [22], obtenemos que el espacio $C_p(X)^n$ tiene la propiedad de Lindelöf para toda $n \in \omega \setminus \{0\}$. Aplicando ahora el teorema de Arhangel'skii-Pytkeev (Teorema 1.5.4), es fácil concluir que $t(C_p(C_p(X))) = \omega$.

Por otra parte, debido a que el mapeo restricción $\pi_X : C_p(\mathbb{D}^\tau) \to C_p(X)$ es una condensación, el espacio $\pi_X^*(C_p(C_p(X)))$ es un subespacio denso de $C_p(C_p(\mathbb{D}^\tau))$ homeomorfo a $C_p(C_p(X))$ (véase la Proposición 1.3.2). Por lo tanto, el espacio $\pi_X^*(C_p(C_p(X)))$ es un subespacio denso de $C_p(C_p(\mathbb{D}^\tau))$ que tiene estrechez numerable. □

El problema 40 de [10] tiene una segunda parte en la cual se pregunta si un espacio de tipo $L_p(\mathbb{D}^\tau)$, donde $\tau \geqslant \omega$, puede poseer un subespacio denso de estrechez numerable. A continuación daremos una respuesta positiva a esta pregunta. Antes de formular el resultado que muestra esto, necesitamos establecer un lema técnico que muy probablemente es conocido, pero para el cual no fue posible hallar, por parte del autor de esta obra, una mención explícita del mismo en la literatura especializada. Esto nos motiva a enunciarlo y demostrarlo formalmente aquí.

3.2.4. LEMA (op. cit. [14]). *Sea X un espacio topológico. Si $Y \subset X = \overline{Y}$ entonces la envolvente lineal $\langle Y \rangle$ de Y en el espacio vectorial topológico $L_p(X)$ es un subconjunto denso de $L_p(X)$.*

DEMOSTRACIÓN. Definamos, para cada $n \in \omega\setminus\{0\}$, al subespacio

$$L_p^n(X) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n : x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Es claro que para los subespacios de esta forma definidos se tiene que

$$L_p(X) = \bigcup_{n\in\omega\setminus\{0\}} L_p^n(X).$$

Consecuentemente, para demostrar que el subespacio $\langle Y \rangle$ es un subespacio denso de $L_p(X)$, será suficiente verificar que $\langle Y \rangle \cap L_p^n(X)$ es un subespacio denso de $L_p^n(X)$ para toda $n \in \omega \setminus \{0\}$.

Fijemos un índice $n \in \omega\setminus\{0\}$ y consideremos al mapeo continuo $\psi_n : X^n \times \mathbb{R}^n \to L_p(X)$ definido por la fórmula

$$\psi_n(((x_1, \ldots, x_n), (\lambda_1, \ldots, \lambda_n))) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

donde $((x_1, \ldots, x_n), (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) \in X^n \times \mathbb{R}^n$. No es difícil comprobar que $\langle Y \rangle \cap L_p^n(X) = \psi_n(Y^n \times \mathbb{R}^n)$. Para concluir la demostración del lema, notemos que debido a que Y es un subespacio denso del espacio X, el conjunto $Y^n \times \mathbb{R}^n$ es denso en $X^n \times \mathbb{R}^n$, de donde el conjunto $\psi_n(Y^n \times \mathbb{R}^n)$ es un subconjunto denso de $\psi_n(X^n \times \mathbb{R}^n) = L_p^n(X)$. $\square$

3.2.5. TEOREMA (Casarrubias Segura, [**14**]). *Sea $\tau \geqslant \omega$. El espacio $L_p(\mathbb{D}^\tau)$ tiene un subespacio denso de estrechez numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos nuevamente al Σ-producto X de τ copias del espacio $\mathbb{D}$. Como ya hemos observado en varias ocaciones, tal Σ-producto es un espacio pseudocompacto y además $\beta X = \mathbb{D}^\tau$. Esto implica en particular que el mapeo restricción

$$\pi_X : C_p(\mathbb{D}^\tau) \to C_p(X)$$

es un mapeo biyectivo.

Ahora bien, por la Proposición 1.3.2, sabemos que la sobreyectividad del mapeo π_X implica que el mapeo inducido

$$\pi_X^* : C_p(C_p(X)) \to C_p(C_p(\mathbb{D}^\tau))$$

es una inmersión. Por otra parte, notemos que la linealidad de la función restricción π_X implica que $\pi_X^*(L_p(X)) \subset L_p(\mathbb{D}^\tau)$. Por lo tanto, tenemos que la función

$$\pi_X^* \restriction L_p(X) : L_p(X) \to L_p(\mathbb{D}^\tau)$$

es también una inmersión.

Notemos ahora que $\pi_X^*(L_p(X))$ es en realidad la envolvente lineal de X respecto a $L_p(\mathbb{D}^\tau)$. En efecto, para demostrar esto recordemos que un espacio Z se inmerge en el espacio $C_p(C_p(Z))$ por medio de la función i_Z cuya regla de asociación está dada por $i_Z(z) = \pi_z \restriction C_p(Z)$, para cada $z \in Z$ (consulte la sección 4 del Capítulo 1 para más detalles al respecto). Tomando en cuenta la anterior observación, y utilizando las definiciones de $\langle X \rangle$ y del espacio $L_p(X)$, es fácil convercerse de que para demostrar la igualdad $\pi_X^*(L_p(X)) = \langle X \rangle$, es suficiente verificar que $i_{\mathbb{D}^\tau}(x) = i_X(x) \circ \pi_X$

para todo $x \in X$. Para demostrar esto último, fijemos un elemento $x \in X$ y elijamos en forma arbitraria una función $f \in C_p(\mathbb{D}^\tau)$. Entonces $i_{\mathbb{D}^\tau}(x)(f) = \pi_x(f) = f(x) = (f \restriction X)(x) = (\pi_X(f))(x) = (i_X(x) \circ \pi_X)(f)$, lo cual prueba la igualdad deseada para los elementos $x \in X$ y $f \in C_p(\mathbb{D}^\tau)$ seleccionados.

Aplicando ahora el Lema 3.2.4 podemos concluir que el subespacio $\pi_X^*(L_p(X))$ es denso en $L_p(\mathbb{D}^\tau)$. Ahora sólo nos resta recordar que, a raíz del teorema de Arhangel'skii-Pytkeev, el espacio $C_p(C_p(X))$ tiene estrechez numerable, de donde lo mismo ocurre para el subespacio $\pi_X^*(L_p(X))$ de $L_p(\mathbb{D}^\tau)$. □

Una pregunta que nace de manera muy natural a partir del establecimiento de la Proposición 3.2.2 es si cualquier espacio de tipo $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ puede ser condensado sobre algún espacio compacto (de hecho, esta pregunta forma parte del Problema 38 de [**10**]). Como una consecuencia de uno de los principales resultados de este capítulo, en el Corolario 3.2.10 demostraremos que para el caso cuando $\tau = \omega$, el correspondiente espacio $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ admite una condensación sobre el cubo de Hilbert $\mathbb{I}^\omega$.

A continuación probaremos que la proposición *"el espacio $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ puede ser condensado sobre un espacio compacto, para cualquier cardinal $\tau > \omega$"* no es verdadera en algunos modelos de **ZFC**. Para llevar a cabo la prueba de este hecho, necesitamos introducir el siguiente lema, el cual nos proporciona condiciones para un espacio topológico X, bajo las cuales no es posible que el espacio $C_p(X)$ admita una condensación sobre un espacio compacto.

3.2.6. LEMA (Casarrubias Segura, [**14**]). *Si $\tau > \omega$ y X es un espacio para el cual se tiene que $d(X) \geqslant \tau$ y $|C(X)| < 2^\tau$, entonces el espacio $C_p(X)$ no puede ser condensado sobre ningún espacio compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, por el contrario, que el espacio $C_p(X)$ puede ser condensado sobre un espacio compacto K. Consideremos una condensación $\theta : C_p(X) \to K$. Es claro que debido a que θ es una biyección, se tiene que $|K| = |C_p(X)| < 2^\tau$. Usando ahora el clásico teorema de Čech-Pospišil [**24**, 3.16] (véase también [23, 7.19]), podemos garantizar la existencia de un elemento $h \in K$ tal que $\chi(h, K) < \tau$. Seleccionemos una función $f \in C_p(X)$ de tal manera que $\theta(f) = h$. Dado que θ es una condensación y $\chi(h, K) < \tau$, tenemos que $\psi(f, C_p(X)) < \tau$. Ahora bien, como $C_p(X)$ es un espacio homogéneo podemos concluir que $\psi(C_p(X)) < \tau$. Pero $d(X) = \psi(C_p(X))$ [11, 1.1.4]. Entonces $d(X) < \tau$, lo que es una contradicción. $\square$

Es conocido que existen modelos de **ZFC** en los cuales se tiene que $2^\omega = \omega_1$ y $2^{\omega_1} > \omega_2$ (cf. [26]). En el siguiente corolario, probaremos que la proposición "el espacio $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ puede ser condensado sobre un espacio compacto, para cualquier cardinal $\tau > \omega$" no puede ser cierta en tales modelos de **ZFC**. Para la demostración de este resultado necesitaremos utilizar los siguientes hechos bien conocidos:

Dado un número cardinal infinito τ, se define al logaritmo $\log(\tau)$ del cardinal τ como el más pequeño de los números cardinales infinitos λ para los cuales sucede que $2^\lambda \geqslant \tau$. Es bien sabido [23] que $d(\mathbb{D}^\tau) = \log(\tau)$ para cualquier cardinal $\tau \geqslant \omega$. Asimismo, es bien conocido que para cualquier espacio regular X, la cardinalidad del conjunto $C(X)$ no puede exceder al cardinal $\pi\chi(X)^{c(X)}$ (véase [23]). Recuerde que el *π-carácter $\pi\chi(X)$ de un espacio topológico X* se define como el supremo de los π-caracteres locales $\pi\chi(X, x)$ (donde x recorre a todos los elementos del espacio X) y que $\pi\chi(x, X)$ es la mínima cardinalidad para una familia $\mathcal{V} \subset \tau^*(X)$ que tiene la propiedad de que cualquier abierto $U \in \tau(x, X)$ contiene al menos un elemento de esta familia.

3.2.7. Corolario (Casarrubias Segura, [14]). $(\mathbf{CH} + 2^{\omega_1} > \omega_2)$ *El espacio $C_p(\mathbb{D}^{\omega_2})$ no puede ser condensado sobre ningún espacio compacto.*

Demostración. Como $2^{\omega_1} > \omega_2$, tenemos que $\log(\omega_2) \leqslant \omega_1$. Además, $\omega < \log(\omega_2)$ puesto que $2^\omega = \omega_1 < \omega_2$. Entonces $d(\mathbb{D}^{\omega_2}) = \omega_1$. Por otra parte, como $\pi\chi(\mathbb{D}^{\omega_2}) = \omega_2$, se tiene que $|C(\mathbb{D}^{\omega_2})| \leqslant \pi\chi(\mathbb{D}^{\omega_2})^{c(\mathbb{D}^{\omega_2})} = \omega_2^\omega = \omega_2 < 2^{\omega_1}$. Aplicando ahora el lema anterior podemos ver que el espacio $C_p(\mathbb{D}^{\omega_2})$ no puede ser condensado sobre ningún espacio compacto. □

Estamos ya en posición de enunciar uno de los más importantes resultados de este capítulo. Para la demostración del mismo, será esencial utilizar el resultado plasmado en el siguiente teorema. La demostración de este resultado puede ser obtenida como una consecuencia inmediata de un teorema de E. G. Pytkeev (cf. [30, Teorema 1]). Cabe mencionar que este teorema de E. G. Pytkeev es considerado una de las más relevantes contribuciones a la solución del problema de condensación.

3.2.8. TEOREMA. *Si un espacio X es homeomorfo a un subespacio de Borel no σ-compacto de un espacio polaco, entonces el espacio X admite una condensación sobre el cubo de Hilbert $\mathbb{I}^\omega$.*

Recuerde que un espacio topológico es un *espacio polaco* si éste es un espacio completamente metrizable y separable.

3.2.9. TEOREMA (Casarrubias Segura, [14]). *Sea X un espacio compacto infinito. Si $w(X) \leqslant \omega$ entonces $C_p(X)$ admite una condensación sobre el cubo de Hilbert $\mathbb{I}^\omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un subespacio denso numerable y no discreto Y del espacio X (a partir de las propiedades de X es posible garantizar la existencia de un tal subespacio Y). Como Y es un subespacio denso de X, se tiene que el mapeo restricción $\pi_Y : C_p(X) \to C_p(Y|X)$ es una condensación (recuérdese que $C_p(Y|X) = \pi_Y(C_p(X))$). De esta forma, para demostrar que el espacio $C_p(X)$ puede ser condensado sobre el cubo de Hilbert $\mathbb{I}^\omega$, será suficiente probar que el espacio $C_p(Y|X)$ admite una tal condensación. Para poder demostrar esto último, aplicaremos el Teorema 3.2.8 al espacio $C_p(Y|X)$, comprobando previamente que este espacio es homeomorfo a un subespacio de Borel no σ-compacto de algún espacio polaco. Como veremos a continuación, el espacio $C_p(Y|X)$ es de hecho un subespacio de Borel no σ-compacto del espacio polaco $\mathbb{R}^Y$ (recuerde que Y es numerable).

AFIRMACIÓN 1. El espacio $C_p(Y|X)$ es un espacio $K_{\sigma\delta}$ en $\mathbb{R}^Y$ y por lo tanto es un subconjunto de Borel en $\mathbb{R}^Y$.

Sea $D \subset C_u(X)$ un subconjunto denso numerable (obsérvese que debido a que X es un espacio compacto metrizable, el espacio $C_u(X)$ es un espacio métrico separable). Definamos a los conjuntos

$$K_n = \bigcup_{d \in D} \overline{B}(\pi_Y(d); \tfrac{1}{n}),$$

para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, donde

$\overline{B}(\pi_Y(d); \frac{1}{n}) = \{h \in \mathbb{R}^Y : |h(y) - \pi_Y(d)(y)| \leqslant \frac{1}{n}$ para cualquier $y \in Y\}$.

Observemos primero que debido a que $\overline{B}(\pi_Y(d); \frac{1}{n})$ es homeomorfo a $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]^Y$ para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, cada uno de los espacios K_n es un subespacio σ-compacto de $\mathbb{R}^Y$. Para concluir la demostración de la afirmación, demostraremos que $C_p(Y|X) = \bigcap_{n \in \omega \setminus \{0\}} K_n$.

No es difícil verificar que $C_p(Y|X) \subset \bigcap_{n \in \omega \setminus \{0\}} K_n$. En efecto, supongamos que $g \in C_p(Y|X)$. Entonces existe una función $f \in C_p(X)$ tal que $\pi_Y(f) = g$. Para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, consideremos al subconjunto abierto

$$B(f; \tfrac{1}{n}) = \{h \in C_u(X) : |h(x) - f(x)| < \tfrac{1}{n} \text{ para cada } x \in X\}$$

del espacio $C_u(X)$. Como D es denso en $C_u(X)$, podemos seleccionar, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, un elemento $d_n \in D$ de tal forma que $d_n \in B(f; \frac{1}{n})$. Entonces $\pi_Y(f) \in \overline{B}(\pi_Y(d_n); \frac{1}{n})$ para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$. Consecuentemente, $g \in \bigcap_{n \in \omega \setminus \{0\}} K_n$.

Para demostrar la contención contraria, elijamos arbitrariamente un elemento $g \in \bigcap_{n \in \omega \setminus \{0\}} K_n$. Entonces, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, podemos seleccionar una función $f_n \in D$ tal que $g \in \overline{B}_Y(\pi_Y(f_n); \frac{1}{n})$. Note que por la manera de haber seleccionado a las funciones f_n, la sucesión $\{\pi_Y(f_n)\}$ converge uniformemente a la función g sobre el espacio Y. Ahora bien, esto último implica, en particular, que la sucesión $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio $C_u(X)$. Efectivamente, como $\{\pi_Y(f_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en $C_u(Y)$, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $k \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $(f_n - f_m)(Y) \subset [-\epsilon, \epsilon]$ para todos los índices $n, m > k$. Pero $(f_n - f_m)(X) = (f_n - f_m)(\overline{Y}) \subset \overline{(f_n - f_m)(Y)}$. Entonces

$(f_n - f_m)(X) \subset [-\epsilon, \epsilon]$ para cualquier par de índices $n, m > k$. Consecuentemente, $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio $C_u(X)$. Ahora, como $C_u(X)$ es un espacio completo podemos elegir una función $h \in C(X)$ de tal manera que $\{f_n\}$ converge uniformemente a h. Pero entonces $h \restriction Y = g$. Por lo tanto, $g \in C_p(Y|X)$. ⊠

Con la finalidad de evitar cualquier confusión en la demostración de que el espacio $C_p(Y|X)$ no puede ser un espacio σ-compacto, utilizaremos las notaciones: π_Z^X, π_Z^Y y π_Y^X, para los mapeos restricción $\pi_Z : C_p(X) \to C_p(Z)$, $\pi_Z : C_p(Y) \to C_p(Z)$ y $\pi_Y : C_p(X) \to C_p(Y)$, respectivamente.

AFIRMACIÓN 2. El espacio $C_p(Y|X)$ no es un espacio σ-compacto.

Supongamos lo contrario y consideremos una sucesión convergente no trivial $Z = \{y_n : n \in \omega\} \cup \{y'\}$ en el espacio Y (como Y no es discreto existe al menos una tal sucesión). Dado que Z es un subespacio compacto del espacio X, tenemos que el mapeo restricción $\pi_Z^X : C_p(X) \to C_p(Z)$ es sobreyectivo. Pero $\pi_Z^X = \pi_Z^Y \circ \pi_Y^X$. Entonces la función

$$\pi_Z^Y \restriction C_p(Y|X) : C_p(Y|X) \to C_p(Z)$$

es también una función sobreyectiva. Por lo tanto, la hipótesis de que el espacio $C_p(Y|X)$ es σ-compacto implica que el espacio $C_p(Z)$ es también un espacio σ-compacto. Aplicando ahora el principal teorema de [**43**] al espacio $C_p(Z)$, podemos concluir que $|Z| < \omega$, lo cual es una contradicción. □

El siguiente corolario al teorema anterior da una respuesta positiva al Problema 39 de [**10**].

3.2.10. COROLARIO (Casarrubias Segura, [**14**]). *El espacio topológico $C_p(\mathbb{D}^\omega)$ admite una condensación sobre el cubo de Hilbert $\mathbb{I}^\omega$.*

La demostración de nuestro próximo teorema está basada en el Teorema 3.2.9 y en un resultado plasmado en el artículo [**16**], el cual es debido a T. Dobrowolski, S. P. Gul'ko y J. Mogilski.

El principal teorema de [16] trae como consecuencia inmediata el hecho de que si X es un espacio metrizable numerable no discreto, entonces el espacio $C_p(X)$ es homeomorfo al espacio $C_p(Y)$, donde Y es una sucesión convergente.

3.2.11. TEOREMA (Casarrubias Segura, [14]). *Si X es un espacio numerable metrizable, entonces $C_p(X)$ admite una condensación sobre un espacio compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Si X es discreto entonces $C_p(X) \simeq \mathbb{R}^\omega$. Ahora, como el espacio de los números reales puede ser condensado sobre un espacio compacto, tenemos que el espacio $C_p(X)$ admite también una condensación sobre un espacio compacto. En el caso cuando X no es discreto, y debido a que este espacio es un espacio métrico numerable, podemos suponer que $C_p(X) \simeq C_p(Y)$, donde Y es una sucesión convergente. Aplicando ahora el Teorema 3.2.9 al espacio $C_p(Y)$, obtenemos fácilmente que este espacio admite una condensación sobre el cubo de Hilbert $\mathbb{I}^\omega$. Por lo tanto, el espacio $C_p(X)$ puede ser condensado sobre un espacio compacto. $\square$

Se dice que un punto x de un espacio topológico X es un *punto P débil* si $x \notin \overline{A}$ para cualquier subconjunto numerable $A \subset X \setminus \{x\}$. Por otro lado, un punto x del espacio topológico X se llama *punto P* si cualquier subconjunto de tipo G_δ de X que lo contiene es una vecindad de él. Como es de esperarse, todo punto P es un punto P débil, sin embargo el recíproco a esto es falso: el espacio $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tiene puntos P débiles que no son puntos P [25].

Es conocido [10, 6.3, 6.4] que el espacio D de todos los puntos P débiles del espacio $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es un espacio pseudocompacto infinito b-discreto. Recuerde que un espacio topológico X es *b-discreto* si todo subespacio numerable de X es discreto y C^*-encajado en X (recuerde que un subespacio A de un espacio topológico X está *C^*-encajado* en X si toda función real continua y acotada definida en el subespacio A tiene una extensión continua a todo X).

V. V. Tkachuk demostró que la pseudocompacidad y la b-discretitud de un espacio topológico X caracterizan a la σ-pseudocompacidad en el espacio $C_p(X)$ (cf. [36]). Utilizando este resultado, es fácil concluir que el espacio $C_p(D)$ es un espacio σ-pseudocompacto. Por otra parte, K. Kunen demostró en [25] que el espacio D es un subespacio denso de $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ y que $\beta D = \beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$. Esto implica en particular que el espacio $C_p(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})$ puede ser condensado sobre $C_p(D)$ (cf. Proposición 1.3.3), el cual, como ya hemos mencionado, es un espacio σ-pseudocompacto.

Todo lo anterior motivó a A. V. Arhangel'skii a preguntar si el espacio $C_p(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})$ admite una condensación sobre algún espacio σ-compacto o sobre algún espacio de Lindelöf (cf. [10, Problema 34]). Nuestro último teorema de este capítulo puede considerarse un avance en la solución de este problema.

3.2.12. TEOREMA (Casarrubias Segura, [14]). *El espacio topológico $C_p(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})$ no puede ser condensado sobre ningún espacio compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos primeramente que $|C(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$. En efecto, recordemos que el espacio $\mathbb{R}$ es homeomorfo a un subespacio del espacio $C_p(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})$, de donde $\mathfrak{c} \leqslant |C_p(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})|$. Por otro lado, como $\mathbb{N}$ es un subespacio abierto del espacio $\beta\mathbb{N}$, el mapeo $\pi_{\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}} : C_p(\beta\mathbb{N}) \to C_p(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})$ es un mapeo sobreyectivo, de donde $|C_p(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})| \leqslant |C_p(\beta\mathbb{N})| \leqslant 2^{d(\beta\mathbb{N})} = \mathfrak{c}$.

Aplicando ahora el Lema 3.2.6, recuerde que $d(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}) = \mathfrak{c}$, podemos concluir que el espacio $C_p(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})$ no puede ser condensado sobre ningún espacio compacto. □

3.3. Problemas abiertos

Un gran número de preguntas concernientes al problema de condensación están aún sin resolverse y como si fuese una regla, aquellos resultados que ayudan a solucionar, o solucionan, un problema abierto siempre generan otros tantos. En particular, algunos de los siguientes problemas surgen de manera natural de algunos de los resultados de este capítulo.

El Corolario 3.2.7. motiva las siguientes preguntas (veáse el Problema 38 de [10]).

3.3.1. PROBLEMA. *Sea $\tau > \mathfrak{c}$. ¿Es cierto en* **ZFC** *que $C_p(\mathbb{D}^\tau)$ no se condensa sobre ningún espacio compacto?*

3.3.2. PROBLEMA. *¿Es posible condensar al espacio $C_p(\mathbb{D}^\mathfrak{c})$ sobre algún espacio compacto?*

Algunas preguntas naturales, a raíz del establecimiento del resultado plasmado en el Teorema 3.2.9, son las siguientes.

3.3.3. PROBLEMA. *Sea X un espacio compacto separable. ¿Es cierto que $C_p(X)$ se puede condensar sobre algún espacio compacto? ¿Es posible condensarlo sobre algún espacio σ-compacto?*

3.3.4. PROBLEMA. *Supongamos que X es un espacio compacto para el cual ocurre que $C_p(X)$ se condensa sobre un espacio compacto. ¿Es el espacio X un espacio separable bajo estas condiciones?*

El hecho de saber que para todo espacio metrizable numerable X el espacio $C_p(X)$ puede ser condensado sobre un espacio compacto (véase el Teorema 3.2.11), genera de inmediato la idea de debilitar las hipótesis de este teorema para preguntarse si sigue siendo válida la conclusión del mismo. De esta manera es que surgen los siguientes problemas.

3.3.5. PROBLEMA. *Sea X un espacio regular numerable. ¿Admite el espacio $C_p(X)$ una condensación sobre algún espacio compacto?*

3.3.6. PROBLEMA. *Sea X un espacio Tychonoff tal que $w(X) \leqslant \omega$. ¿Es posible condensar al espacio $C_p(X)$ sobre algún espacio compacto?*

3.3.7. PROBLEMA. *Supongamos que X es un espacio de Tychonoff y que $nw(X) \leqslant \omega$. ¿Se puede condensar al espacio $C_p(X)$ sobre algún espacio compacto bajo estas condiciones?*

Respecto al Teorema 3.2.12, sigue aún sin conocerse la respuesta al Problema 34 planteado por Arhangel'skii en [**10**] (el cual motivó este resultado).

3.3.8. PROBLEMA (Problema 34 de [**10**]). *¿Se puede condensar al espacio $C_p(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N})$ sobre algún espacio σ-compacto? ¿Sobre algún espacio de Lindelöf?*

3.3.9. PROBLEMA. *¿Se puede condensar al espacio $C_p(\beta\mathbb{N})$ sobre algún espacio compacto?*

Referencias

[1] Aarts, J. M.; D. J. Lutzer, *Pseudocompleteness and the product of Baire spaces*, Pacific Journal Math. **48** (1986), no. 1, 1–10.

[2] Alexandroff, P., *On some results concerning topological spaces and their continuous mappings*, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proc. Sympos., Prague, 1961), Publ. House Czech. Acad. Sci., Prague, and Academic Press, New York, 1962, 41–54.

[3] Alexandroff, P., *On some fundamental directions in general topology*, Russian Math. Surveys **19** (1964).

[4] Arhangel'skii, A. V., *On some topological spaces that arise in functional analysis*, Russian Math. Survey **31** (1976), no. 5, 14–30.

[5] Arhangel'skii, A. V., *Factorization theorems and function spaces: stability and monolithity*, Soviet Math. Dokl. **26** (1982), 177–181.

[6] Arhangel'skii, A. V., *Functional tightness, Q-spaces and τ-embeddings*, Comment. Math. Univ. Carolin. **24** (1983), 105–120.

[7] Arhangel'skii, A. V., *On relations between topological properties of X and $C_p(X)$*, en General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, 5, Berlin, 1983, 24–36.

[8] Arhangel'skii, A. V., *Continuous maps, factorization theorems and function spaces*, Trans. Moscow Math. Soc. **47** (1985), 1–22.

[9] Arhangel'skii, A. V., *Some problems and lines of investigation in general topology*, Comment. Math. Univ. Carolin. 29 (1988), no. 4, 611–629.

[10] Arhangel'skii, A. V., *C_p-theory*, en Recent Progress in General Topology (editores: M. Hušek y J. van Mill), Elsevier S. P., 1989, 1–56.

[11] Arhangel'skii, A. V., *Topological Functions Spaces*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht–Boston–London, 1992.

[12] Arhangel'skii, A. V., *Embeddings in C_p-spaces*, Topology and its Applications **85** (1998), 9–33.

[13] Casarrubias Segura, F., *Realcompactness and monolithity are finitely additive in $C_p(X)$*, Topology Proceedings (en prensa).

[14] Casarrubias Segura, F., *On compact weaker topologies in function spaces*, Topology and its Applications (en prensa).

[15] Corson, H. H., *Normality in subsets of product spaces*, Amer. J. Math. **81** (1959), 785–796.

[16] Dobrowolski, T.; S. P. Gul'ko; J. Mogilski, *Function spaces homeomorphic to the countable product of ℓ_2^f*, Topology and its Applications **34** (1990), 153–160.

[17] Dijkstra, J.; T. Griliot; D. J. Lutzer; J. van Mill, *Function spaces of low Borel complexity*, Proc. Amer. Math. Soc. **94**, 703–710.

[18] Engelking, R., *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Verlag Helderman, 1989.

[19] Glicksberg, I., *Stone-Čech compactifications of products*, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 369–382.

[20] Gruenhage, G., *Generalized metric spaces*, en Handbook of Set Theoretic Topology, Elsevier Science Publishers B. V., 1984, 423–502.

[21] Gillman, L.; M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Graduate Text in Mathematics, vol. 43, Springer-Verlag, New York, 1960.

[22] Gul'ko, S. P., *On properties of subsets of Σ-products*, Soviet Math. Dokl. **18** (1977), no. 6, 1438–1442.

[23] Hodel, R., *Cardinal functions I*, en Handbook of Set Theoretic Topology, Elsevier Science Publishers B. V., 1984, 1–61.

[24] Juhász, I., *Cardinal Functions in Topology –ten years later*, Mathematical Centre Tracts, vol. 123, Mathematisch Centre, Amsterdam 1980.

[25] Kunen, K., *Weak P-points in* $\mathbb{N}^*$, en Topology, Colloquia Mathematica Societas János Bolyai **23**, 741–749, Budapest, Hungary.

[26] Kunen, K., *Set Theory: An introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Fundations of Mathematics, vol. 102, North–Holland, 1980.

[27] Mrówka, S., *Some comments on the author's example of a non-R-compact space*, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math. **18** (1970), 443–448.

[28] Okunev, O. G., *Weak topology of an associated space and t-equivalence*, Math. Notes **46** (1990), no. 1–2, 534–538.

[29] Oxtoby, J. C., *Cartesian products of Baire spaces*, Fund. Math. **49** (1961), 157–166.

[30] Pytkeev, E. G., *Upper bounds of topologies*, Math. Notes **20** (1976), 831–837.

[31] Pytkeev, E. G., *The tightness of spaces of continuous functions*, Russian Math. Survey **37** (1982), no. 1, 176–177.

[32] Rogers, A.; E. Jayne (editores), *Analytic Sets*, Academic Press, London, 1980.

[33] Shakhmatov, D. B., *Compact spaces and their generalizations*, en Recent Progress in General Topology (editores: M. Hušek y J. van Mill), Elsevier Science Publishers B. V., 1992, 571–640.

[34] Tkachuk, V. V., *On cardinal invariants of Souslin number type*, Soviet. Math. Dokl. **27** (1983), no. 3, 681–684.

[35] Tkachuk, V. V., *Duality with respect to the functor* C_p *and cardinal invariants of the type of the Souslin number*, Math. Notes **23** (1985), no. 3, 247–252.

[36] Tkachuk, V. V., *The spaces $C_p(X)$: Decomposition into countable union of bounded subspaces and completeness properties*, Topology ant its Applications **22** (1986), 241–253.

[37] Tkachuk, V. V., *Spaces that are projective with respect to classes of mappings*, Trans. Moscow Math. Soc. (1988), 139–156.

[38] Tkachuk, V. V., *Growths over discrete. Some applications*, Moscow Univ. Math. Bull. **45** (1990), no. 4, 19–21.

[39] Tkachuk, V. V., *Methods in the theory of cardinal invariants and the theory of mappings in application to function spaces*, Siberian Math. J. **32** (1991), 93–107.

[40] Tkachuk, V. V., *Mapeos de $\mathbb{R}^\tau$ sobre $C_p(X)$*, Proyecto de investigación, Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa, 1991.

[41] Tkachuk, V. V., *Decomposition of $C_p(X)$ into a countable union of subspaces with "good" properties implies "good" properties in $C_p(X)$*, Trans. Moscow Math. Soc. **55** (1994), 239–248.

[42] Tkachuk, V. V., *Curso básico de topología general*, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, 1999.

[43] Tkachuk, V. V.; D. B. Shakhmatov, *When is $C_p(X)$ σ-countably compact?*, Vestnik Moskovskogo Universiteta. Matematika **41**, (1986), no. 1, 70–72.

[44] van Mill, J., *$C_p(X)$ in not $G_{\delta\sigma}$: a Simple Proof*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics **47**, (1999), no. 4, 319–323.

Lista de símbolos

Índice de autores

Índice de conceptos