UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DESCOMPOSICION DE ESPACIOS DE FUNCIONES USANDO LA FORMULA DE CALDERON

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ARMANDO VELAZQUEZ GONZALEZ

MEXICO, D. F. 2000

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"*Descomposición* de espacios de funciones usando la fórmula de Calderón"

realizado por Armando Velázquez González

Con número de cuenta 8208350-2 , pasante de la carrera de Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de tesis Propietario	DR. SALVADOR PEREZ ESTEVA
Propietario	M.en C. FRANCISCO MARCOS LOPEZ GARCIA
Propietario	DRA. MAGALI LOUISE MARIE FOLCH GABAYET
Suplente	DR. ARMANDO GARCIA MARTINEZ
Suplente	DRA. MARIA DE LA LUZ JIMENA DE TERESA DE OTEYZA

Consejo Departamental de Matemáticas

MAT. CESAR GUEVARA BRAVO

Dedico el presente trabajo

A mi madre: Gudelia González Hernandez.

A mis hermanos: María Auxilio Antonia.
Irene.
Juana.
Ascensión Javier (q.e.p.d).
Jorge.
Antonio Francisco.
Manuel.
Mario.
Arturo.
Abelardo.

A la memoria de mi tío: Fidel Hernandez.

A la memoria del señor: José María Montoya.

A mis tíos: Esperanza Velázquez García (q.e.p.d).
Amparo Velázquez García.
Adán González Salas..

A mis primos: Sílvia González Velázquez.
Adán González Velázquez.

AGRADECIMIENTOS

Por medio de las siguientes líneas quiero expresar mi admiración e infinito amor a mi madre, ya que siendo una familia numerosa y humilde ha logrado, a mis hermanos y a mi, sacarnos adelante sin importar las adversidades.

Agradezco a todos mis hermanos su incondicional apoyo, sin el mi objetivo no se hubiese realizado

Quiero expresar mi agradecimiento a mi tío Fidel Hernandez (q.e.p.d.), por que gracias a sus consejos y a su incondicional apoyo me guió por la senda adecuada.

En la misma medida agradezco al Sr. José María Montoya (q.e.p.d), quien en los momentos más difíciles fue un gran soporte para mí y mi familia.

A mis tíos Esperanza Velázquez García (q.e.p.d) y Adán González Salas, por acogerme y soportarme en su casa a lo largo de mis estudios profesionales.

A mis primos Adán González Velázquez y Sílvia González Velázquez, por hacer más placentera mi estancia en la Universidad.

A Manuel Cruz y Leonardo, por su apoyo técnico en la elaboración de este trabajo y por brindarme su amistad.

A la Dra. Magali Louise Marie Folch Gabayet, por sus sugerencias y comentarios acerca de este trabajo.

Al Dr. Salvador Pérez Esteva, por dirigir este trabajo, por ser un excelente profesor y sobre todo por ser una gran persona.

Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México por acogerme en su seno Espero responder con creces todo el apoyo recibido.

NOTACION Y DEFINICIONES

En todo este trabajo $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ denotarán al campo de los números reales y al campo de los números complejos, respectivamente. $\mathbb{R}^n$ será entendido como el espacio vectorial con un producto interior; es decir, si

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ , \ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \text{ y } c \in \mathbb{R}$$

entonces

$$x+y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \ , \ x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ y } cx = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)\,.$$

La norma euclidiana $(x \cdot x)^{\frac{1}{2}}$ será escrita $|x|$.

Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, denotaremos por $A \backslash B$ a la *diferencia* del conjunto A con el conjunto B; esto es

$$A \backslash B = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in A \text{ y } x \notin B\}\,.$$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto. La clase $C^\infty(\Omega)$ consiste de las funciones de valor real (o complejo) con dominio Ω que tienen derivadas continuas de todos los órdenes. Denotaremos por $C_c^\infty(\Omega)$ al subconjunto de $C^\infty(\Omega)$ que consiste de las funciones con soporte compacto e infinitamente diferenciables. Al espacio $C_c^\infty(\Omega)$ se le llama el *espacio de las funciones de prueba* y se denota por $D(\Omega)$. $D'(\Omega)$ denotará al dual topológico de $D(\Omega)$.

Un *multi-índice* es una $n-ada$ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de enteros no negativos; su longitud (u orden) es $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. La *suma* de dos multi-índices α y β es

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)\,.$$

Se dice que $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_i \leq \beta_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$; cuando $\alpha \leq \beta$ también podemos definir $\beta - \alpha$.

Si α es un multi-índice y $f \in C^\infty(\Omega)$, se define $\partial^\alpha f$ como

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n};$$

de donde $\partial^\alpha \partial^\beta f = \partial^{\alpha+\beta} f$.

Si α es un multi-índice y $x \in \mathbb{R}^n$, se define x^α y $\alpha!$ como

$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n! \text{ y } x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Si $\phi \in C^\infty(\Omega)$, ϕ es llamada *rápidamente decreciente* si

$$\|\phi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| < \infty$$

para todo par de multi-índices α, β. El espacio vectorial de tales funciones es denotado por $S(\mathbb{R}^n)$, $S'(\mathbb{R}^n)$ denotará su dual topológico y es llamado el *espacio de las distribuciones temperadas.*

Dado $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ denotará al espacio de Lebesgue encontrado en cualquier libro básico de análisis.

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se define la *transformada de Fourier* de f en $\mathbb{R}^n$ por

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i\pi x\cdot\zeta} dx,$$

donde $x \cdot \zeta$ es el producto interior en $\mathbb{R}^n$. Análogamente, se define la *transformada de Fourier inversa* de f en $\mathbb{R}^n$ por

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\zeta)\, e^{i\pi x\cdot\zeta} d\zeta.$$

INDICE

INTRODUCCIÓN

El estudio de espacios de funciones constituye una parte esencial del análisis. Ejemplos de estos son los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$, los espacios de Hardy H^p, varias formas de los espacios de Lipschitz $\dot{\Lambda}_\alpha$ y los espacios BMO, así como los espacios de Sobolev L_k^p que son básicos en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales.

En las últimas dos décadas se ha encontrado que muchos espacios de funciones y de distribuciones admiten una descomposición en el sentido de que cualquier elemento del espacio se puede escribir en términos de funciones particularmente sencillas. Tales descomposiciones simplifican el análisis de los espacios y de los operadores que actúan sobre ellos.

Aquí obtenemos un tipo de descomposición, la fórmula de Calderón (teorema 1.4), aplicada al espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^n)$, a los espacios de Lipschitz Λ_α, con $0 < \alpha < 1$, y al espacio de Besov $\dot{B}_1^{0,1}$.

Para la lectura de este trabajo basta un curso básico de análisis funcional conocimiento básico de teoría de distribuciones y algunas propiedades de la transformada de Fourier.

El trabajo aquí presentado está dividido en tres capítulos.

En el primer capítulo trabajamos con el espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Comenzamos probando el lema 1.1, el cual será usado con frecuencia en todo este trabajo. Posteriormente, con ayuda del lema 1.1, se obtiene la importante fórmula reproductora de Calderón (teorema 1.4), la cual nos permitirá descomponer al espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ en el sentido antes mencionado, donde las funciones básicas, denotadas por a_Q, son llamadas átomos (teorema 1.6). El teorema 1.6 tiene un recíproco. En lugar de átomos trataremos el recíproco con moléculas (teorema 1.18), una clase de funciones que incluye a los átomos. Como aplicación de lo anterior, finalizamos este capítulo probando que un operador integral singular de Calderón-Zygmund mapea átomos en moléculas.

En el segundo capítulo trabajamos con los espacios de Lipschitz Λ_α.

Para obtener la descomposición deseada de los espacios de Lipschitz Λ_α (teorema 2.7), se da una caracterización de estos en términos de los espacios $\dot{B}^\alpha$, definidos en (2.5), (teorema 2.6). Como fue el caso para $L^2(\mathbb{R}^n)$, el teorema 2.7 tiene un recíproco (teorema 2.13) que involucra moléculas similares a las introducidas en el capítulo 1. Finalizamos este capítulo probando ciertos aspectos formales como es la convergencia de la integral en la fórmula de Calderón.

El último trata del espacio de Besov $\dot{B}_1^{0,1}$.

A diferencia de los dos espacios tratados en los capítulos 1 y 2, este es un espacio de distribuciones. Comenzamos planteando lo siguiente: sabemos que la norma del espacio de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^n)$ es invariante bajo dilataciones y traslaciones. Si B es un espacio de Banach continuamente contenido en el espacio de las distribuciones temperadas $S'(\mathbb{R}^n)$, cuya norma es invariante bajo dilataciones y traslaciones, ¿cúal es la relación entre B y $L^1(\mathbb{R}^n)$?. Entre otros probamos que si el espacio de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ está contenido en B, entonces $L^1(\mathbb{R}^n)$ está continuamente contenido en B (teorema 3.4). Depués de definir el espacio de Besov $B_1^{0,1}$ y de probar que su norma es invariante bajo dilataciones y traslaciones, probamos que está continuamente contenido en $S_0'(\mathbb{R}^n)$ y que es completo. Concluimos el capítulo enunciando *una descomposición atómica* para $\dot{B}_1^{0,1}$, su recíproco y la minimalidad del espacio $\dot{B}_1^{0,1}$.

FÓRMULA DE CALDERÓN Y UNA DESCOMPOSICIÓN DE $L^2(\mathbb{R}^n)$

Comenzamos definiendo unos conceptos que se usarán frecuentemente.

Definiciones. Sean $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) y $t > 0$.
(i) Se dice que φ es *radial* si

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \text{ siempre que } |x_1| = |x_2|.$$

(ii) Se define la *dilatación* de φ por t como

$$\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi\left(\tfrac{x}{t}\right).$$

(iii) Se define el *soporte* de φ como

$$Sop\ \varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

El lema que a continuación se enunciará es necesario para obtener la descomposición deseada del espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Lema 1.1.

Fíjese $N \in \mathbb{Z}_+$. Entonces existe una función $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

1 $Sop\ \varphi \subset \{x \in \mathbb{R}^n : | x | \leq 1\} = B_1(0)$.

2. φ es radial.

3. $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

4. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma \varphi(x)dx = 0$ si $| \gamma | \leq N, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n, x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}, | \gamma | = \sum_{i=1}^n \gamma_i$.

5. $\displaystyle\int_0^\infty \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t} = 1$ si $\zeta \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Observación. El hecho de que φ sea de valor real y radial implica que $\hat{\varphi}$ es de valor real; así $\left[\hat{\varphi}\,(t\zeta)\right]^2 = \left|\hat{\varphi}\,(t\zeta)\right|^2$. Obsérvese también que (1) y (3) nos dicen que $\varphi \in D\,(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. Sea $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, una función no idénticamente cero, radial y $C^\infty\,(\mathbb{R}^n)$ con soporte en $B_1\,(0)$.

Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida como $h = \Delta^k \theta$, para algún entero $k \geq \frac{n}{2}$ (donde Δ es el operador de Laplace). Es claro que h satisface (1), (2) y (3). Para probar (4) usamos integración por partes y el hecho de que θ tiene soporte compacto. Sólo resta probar (5). Dado que no hemos normalizado a h, no hay razón para esperar que (5) se cumpla. Sin embargo, afirmamos que $\int_0^\infty \left[\hat{h}\,(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t}$ es una integral absolutamente convergente. Para ver esto, se divide a la integral en dos partes

$$\int_0^\infty \left[\hat{h}\,(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t} = \int_0^1 \left[\hat{h}\,(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \left[\hat{h}\,(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t}.$$

Por lo tanto, basta probar que ambas partes son absolutamente convergentes. Dado que $h \in D\,(\mathbb{R}^n) \subset S\,(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{h}\,(t\zeta) \in S\,(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto $\hat{h}\,(t\zeta)$ es rápidamente decreciente cuando $t \to \infty$, para cada $\zeta \neq 0$. Entonces

$$\int_1^\infty \left|\hat{h}\,(t\zeta)\right|^2 \frac{dt}{t} \leq \frac{c}{|\zeta|^2} \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\frac{dt}{t} < \infty.$$

Por lo tanto, el primer sumando de la descomposición es absolutamente convergente. Dado que h satisface (4) y $\hat{h}\,(t\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} h\,(x)\, e^{-2\pi i x\,(t\zeta)} dx$, entonces $\hat{h}\,(0) = 0$. En consecuencia, existe una vecindad alrededor del cero tal que $\hat{h}\,(t\zeta) = O\,(t)$, cuando $t \to 0^+$. Así

$$\int_0^1 \left[\hat{h}\,(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t} = \left\{\int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^1\right\} \left[\hat{h}\,(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t} \leq C_1 \int_0^\varepsilon t^2 \frac{dt}{t} + C \int_\varepsilon^1 t^2 \frac{dt}{t} < \infty.$$

Finalmente, dado que h es radial, también $\hat{h}$ es radial; pero esto implica que $\int_0^\infty \left[\hat{h}\,(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t} = c^2$ depende únicamente de $|\zeta|$, para toda $\zeta \neq 0$.

Además, esta integral también es independiente del valor de $|\zeta|$, puesto que $\frac{dt}{t}$ es la medida de Haar para el grupo multiplicativo de los números reales positivos. Haciendo $\varphi = c^{-1}h$, obtenemos la función deseada. ∎

Antes de enunciar el teorema central de este capítulo, enunciamos dos resultados de integral de Bochner que usaremos continuamente en este y los demás capítulos.

Teorema 1.2

Sea $T : X \to Y$ un operador lineal continuo del espacio de Banach X en el espacio de Banach Y. Si $f(s)$ es una función Bochner $u-$integrable con valores en X, entonces $Tf(s)$ es una función Bochner $u-$integrable con valores en Y, y además se satisface la siguiente igualdad

$$\int_B Tf(s)\, u(ds) = T\int_B f(s)\, u(ds).$$

Teorema 1.3

Sean X un espacio de Banach y (Ω, m, u) un espacio de medida. Una función $u-$ medible $f : \Omega \to X$ es Bochner $u-$integrable si y sólo si

$$\int_\Omega \|f\|\, du < \infty.$$

Ver [3]; pags. 45-47

Teorema 1.4 (Fórmula de Calderón).

Supóngase que $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es una función real, radial y satisface la condición (5) del lema 1.1. Entonces, si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$f(x) = \int_0^\infty (\varphi_t * \varphi_t * f)(x)\, \tfrac{dt}{t}. \tag{1.5}$$

Observación. Esta última igualdad es para ser interpretada en el siguiente sentido en $L^2(\mathbb{R}^n)$: si $0 < \varepsilon < \delta < \infty$ y

$$f_{\varepsilon,\delta}(x) = \int_\varepsilon^\delta (\varphi_t * \varphi_t * f)(x)\, \frac{dt}{t},$$

entonces $\| f - f_{\varepsilon,\delta} \|_{L^2} \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$ y $\delta \to \infty$.

Prueba. La demostración será de la siguiente manera: primero se probará para $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ y después para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Caso 1. Supóngase que $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\varphi_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para toda $t > 0$. Dado que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\varphi_t * f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. En consecuencia $\varphi_t * \varphi_t * f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para toda $t > 0$. Veamos que $f_{\varepsilon,\delta} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para toda ε, δ fijas. Es claro que $f_{\varepsilon,\delta}$ es medible, sólo hay que probar que $\int_{\mathbb{R}^N} |f_{\varepsilon,\delta}(x)|\, dx < \infty$.

Por el teorema de Tonelli

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} |f_{\varepsilon,\delta}(x)|\, dx \\
\leq \; & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\varepsilon}^{\delta} |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x)| \frac{dt}{t} dx \\
= \; & \int_{\varepsilon}^{\delta} \int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x)|\, dx \frac{dt}{t} \\
= \; & \int_{\varepsilon}^{\delta} \|\varphi_t * \varphi_t * f\|_{L^1} \frac{dt}{t} \leq \int_{\varepsilon}^{\delta} \|\varphi_t * \varphi_t\|_{L^1} \|f\|_{L^1} \frac{dt}{t} \\
= \; & \int_{\varepsilon}^{\delta} \|\varphi * \varphi\|_{L^1} \|f\|_{L^1} \frac{dt}{t} = c(f, \varphi) \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dt}{t} = c \ln \frac{\delta}{\varepsilon} < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f_{\varepsilon,\delta} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Aplicando la transformada de Fourier a $f_{\varepsilon,\delta}$, por el teorema de Fubini y por propiedades de la transformada de Fourier de una convolución y de una dilatación, tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{\varepsilon,\delta}(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_{\varepsilon,\delta}(x) e^{-2\pi i x \cdot \zeta} dx = \int_{\varepsilon}^{\delta} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_t * \varphi_t * f)(x) e^{-2\pi i x \cdot \zeta} dx \frac{dt}{t} \\
&= \int_{\varepsilon}^{\delta} (\varphi_t * \varphi_t * f)^{\wedge}(\zeta) \frac{dt}{t} = \int_{\varepsilon}^{\delta} \left[\hat{\varphi}_t(\zeta)\right]^2 \hat{f}(\zeta) \frac{dt}{t} \\
&= \hat{f}(\zeta) \int_{\varepsilon}^{\delta} \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Dado que $\varphi_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces por la desigualdad de Young $\varphi_t * \varphi_t * f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|\varphi_t * \varphi_t * f\|_{L^2} \leq \|\varphi_t * \varphi_t\|_{L^1(R^n)} \|f\|_{L^2} \leq \|\varphi\|_{L^1}^2 \|f\|_{L^2} < \infty.$$

En consecuencia, por la desigualdad de Minkowsky para integrales

$$
\begin{aligned}
\|f_{\varepsilon,\delta}\|_{L^2} &= \left\{\int_{\mathbb{R}^n} |f_{\varepsilon,\delta}(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{\int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\varepsilon}^{\delta} (\varphi_t * \varphi_t * f)(x)\,\frac{dt}{t}\right|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \int_{\varepsilon}^{\delta} \left\{\int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_{\varepsilon}^{\delta} \|\varphi_t * \varphi_t * f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\frac{dt}{t} \leq \|\varphi\|_{L^1}^2 \|f\|_{L^2} \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dt}{t} \\
&= \|\varphi\|_{L^1}^2 \|f\|_{L^2} \ln\frac{\delta}{\varepsilon} < \infty.
\end{aligned}
$$

Esto implica que $f_{\varepsilon,\delta} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para toda $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$ fijos. Así, por el teorema de Plancherel y la expresión obtenida para $\hat{f}_{\varepsilon,\delta}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to\infty} \|f - f_{\varepsilon,\delta}\|_{L^2}^2 \\
= \ & \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to\infty} \left\|(f - f_{\varepsilon,\delta})^{\wedge}\right\|_{L^2}^2 \\
= \ & \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\zeta) - \hat{f}_{\varepsilon,\delta}(\zeta)\right|^2 d\zeta \\
= \ & \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\zeta)\left[1 - \int_{\varepsilon}^{\delta} \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t}\right]\right|^2 d\zeta.
\end{aligned}
$$

Pero

$$
\left|\hat{f}(\zeta)\left[1 - \int_{\varepsilon}^{\delta} \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t}\right]\right| \leq \left|\hat{f}(\zeta)\right| \left[1 + \int_{0}^{\infty} \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t}\right] = 2\left|\hat{f}(\zeta)\right|
$$

y como $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$; lo cual implica que $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$. En consecuencia $\hat{f}$ es integrable y, por lo tanto, $\left|\hat{f}\right|$ también lo es. Además

$$
\lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to\infty} \hat{f}(\zeta)\left[1 - \int_{\varepsilon}^{\delta} \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t}\right] = 0
$$

para toda $\zeta \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Por lo tanto, por el teorema de convergencia dominada se tiene

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to\infty} \|f - f_{\varepsilon,\delta}\|_{L^2}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to\infty} \hat{f}(\zeta) \left[1 - \int_{\varepsilon}^{\delta} \left[\overset{\wedge}{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t}\right]\right|^2 d\zeta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}(\zeta) \left[1 - \int_{0}^{\infty} \left[\overset{\wedge}{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t}\right]\right|^2 d\zeta = 0.
\end{aligned}
$$

Caso 2. Supongamos que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Queremos demostrar que

$$\|f - f_{\varepsilon,\delta}\|_{L^2} \to 0$$

cuando $\varepsilon \to 0$ y $\delta \to \infty$. Como $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio denso de $L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una sucesión $\{f_k\}$ de funciones en $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ que convergen a f en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dado que $f_{\varepsilon,\delta} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo ε, δ fijos, entonces

$$
\begin{aligned}
\|f - f_{\varepsilon,\delta}\|_{L^2} &= \|f - f_k + f_k - f_{\varepsilon,\delta}\|_{L^2} \\
&\leq \|f - f_k\|_{L^2} + \|f_k - f_{\varepsilon,\delta}\|_{L^2} \\
&= \|f - f_k\|_{L^2} + \left\|f_k - (f_k)_{\varepsilon,\delta} + (f_k)_{\varepsilon,\delta} - f_{\varepsilon,\delta}\right\|_{L^2} \\
&\leq \|f - f_k\|_{L^2} + \left\|f_k - (f_k)_{\varepsilon,\delta}\right\|_{L^2} + \left\|(f_k)_{\varepsilon,\delta} - f_{\varepsilon,\delta}\right\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

donde $(f_n)_{\varepsilon,\delta} = \int_{\varepsilon}^{\delta} (\varphi_t * \varphi_t * f_n)(x) \frac{dt}{t}$. Dado que $f_k \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\|f - f_k\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{3}$, y como $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, con k fija, tenemos, por el paso 1, que $\left\|f_k - (f_k)_{\varepsilon,\delta}\right\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{3}$.

Sólo basta probar que el tercer término del lado derecho de la anterior cadena de desigualdades es menor que $\frac{\epsilon}{3}$, siempre que $\varepsilon \to 0, \delta \to \infty$ y $k \to \infty$.

Por el teorema de Plancherel, propiedades de la convolución y la definición de $(f_k)_{\varepsilon,\delta}$, se tiene

$$\left\|(f_k)_{\varepsilon,\delta} - f_{\varepsilon,\delta}\right\|_{L^2} = \left\|\left[(f_k)_{\varepsilon,\delta} - f_{\varepsilon,\delta}\right]^{\wedge}\right\|_{L^2}$$

$$= \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left[(f_k)_{\varepsilon,\delta} - f_{\varepsilon,\delta} \right]^{\wedge} (\zeta) \right|^2 d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left\{ \int_{\varepsilon}^{\delta} [\varphi_t * \varphi_t * (f_k - f)] (x) \frac{dt}{t} \right\}^{\wedge} (\zeta) \right|^2 d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Sea $\gamma_n : (\varepsilon, \delta) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, $(\varepsilon,\delta) \subset \mathbb{R}^1_+$, definida como $\gamma_n(t) = \varphi_t * \varphi_t * (f_n - f)$. Afirmamos que γ_n es Bochner integrable. Dado que

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{\delta} \|\gamma_n(t)\|_{L^2} \frac{dt}{t} &= \int_{\varepsilon}^{\delta} \|\varphi_t * \varphi_t * (f_k - f)\|_{L^2} \frac{dt}{t} \\
&\leq \int_{\varepsilon}^{\delta} \|\varphi_t\|_{L^1}^2 \|f_k - f\|_{L^2} \frac{dt}{t} \\
&= \|\varphi\|_{L^1}^2 \|f_k - f\|_{L^2} \ln \frac{\delta}{\varepsilon} < \infty,
\end{aligned}$$

entonces por el teorema 1.3 se tiene que γ_n es Bochner integrable.

Como $^\wedge \cdot L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ es un operador lineal continuo, entonces por el teorema 1.2 se tiene

$$\begin{aligned}
&\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\varepsilon}^{\delta} [\varphi_t * \varphi_t * (f_n - f)]^{\wedge} (\zeta) \frac{dt}{t} \right|^2 d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\varepsilon}^{\delta} \left[\hat{\varphi}(t\zeta) \right]^2 (f_n - f)^{\wedge} (\zeta) \frac{dt}{t} \right|^2 d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\varepsilon}^{\delta} \left[\hat{\varphi}(t\zeta) \right]^2 \frac{dt}{t} \right|^2 \left| (f_n - f)^{\wedge} (\zeta) \right|^2 d\zeta \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\epsilon}{3}
\end{aligned}$$

si $\varepsilon \to 0, \delta \to \infty$ y $k > N$, donde la N es la de la convergencia de la sucesión (f_k). Por lo tanto el teorema queda demostrado. ■

Ahora podemos establecer la versión de la descomposición del espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ usando la fórmula de Calderón. Antes de enunciar y probar el teorema, damos las siguientes:

Definiciones. Decimos que un cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ es un cubo *diádico* si

$$Q = Q_{v,k} = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{-v}k_i \leq x_i \leq 2^{-v}(k_i + 1), i = 1, 2 \cdots, n\}$$

para algún $v \in \mathbb{Z}$ y $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. Sea $\tilde{Q} = \{Q_{v,k} : v \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n\}$. Para $Q \in \tilde{Q}$ se denota por $\ell(Q)$ la longitud del lado del cubo y por $T(Q)$ a un cubo en $\mathbb{R}_+^{n+1}$ $\left[T(Q) = Q \times \left(\frac{\ell(Q)}{2}, \ell(Q)\right)\right]$. Escribiremos $\sum_Q$ por $\sum_{Q \in \tilde{Q}}$.

Observaciones. $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n \text{ y } t \in \mathbb{R}_+^1\}$. Nótese que

$$\mathbb{R}_+^{n+1} = \bigcup_{Q \in \tilde{Q}} T(Q),$$

donde , excepto por un conjunto de medida cero, es una unión ajena.

Sean $n = 2$, $k = (k_1, k_2)$ y consideremos $v \in \mathbb{Z}$ fija. Los cubos diádicos son cuadrados congruentes. Si hacemos variar k, lo que obtenemos es una latiz cuyos vértices son múltiplos enteros de 2^{-v}. Además, si hacemos variar v lo que obtenemos es: una latiz más fina (es decir, con cuadrados diádicos de lado más chico) o una latiz menos fina (es decir, con cuadrados diádicos de lado más grande). Si imaginamos la latiz para una v fija, es claro que para cualesquiera dos cuadrados diádicos se tiene lo siguiente: la intersección de sus interiores es vacía o son el mismo. También es claro que para cualesquiera dos cuadrados diádicos ajenos se tiene que: tienen intersección vacia o se intersectan en un conjunto de medida cero, y como tenemos una familia numerable de cuadrados diádicos entonces $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{Q \in \tilde{Q}} Q$. Además son ajenos dos a dos excepto en un conjunto de medida cero.

Teorema 1.6

Supóngase que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $N \in \mathbb{Z}_+$. Entonces existen coeficientes $\{s_Q\}, 0 \leq s_Q < \infty$, donde Q varia sobre los cubos diádicos, y funciones $\{a_Q\}$ en $D(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$f = \sum_Q s_Q a_Q \; ; \tag{1.7}$$

$$Sop\ a_Q \subset 3Q \; ; \tag{1.8}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma a_Q(x)\, dx = 0 \text{ si } |\gamma| \leq N \tag{1.9}$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(\partial^\gamma a_Q)(x)| \leq c_\gamma \ell(Q)^{-\left(|\gamma| + \frac{n}{2}\right)} \text{ para } \gamma \in \mathbb{Z}_+^n \; ; \tag{1.10}$$

$$\sum_{Q} s_Q^2 = \|f\|_{L^2}^2 . \tag{1.11}$$

Observación. La igualdad (1 7) es interpretada en el siguiente sentido: para $v \in \mathbb{Z}$ fija. la función $\sum_{\ell(Q)=2^{-v}} s_Q a_Q(x)$ está bien definida para cada x dado que. por (1.8), la suma involucra a lo más un número finito de términos que no son cero. Además, por (1.10) con $|\gamma| = 0$, esta suma representa una función acotada. Sea

$$f_j(x) = \sum_{v=-j}^{j} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} s_Q a_Q(x) .$$

Entonces (1.7) significa que $\lim_{j\to\infty} \|f - f_j\|_{L^2} = 0$.

Los coeficientes s_Q y los "átomos" a_Q dependen de f; las constantes c_γ en (1.10) dependen de la dimensión n, de N y también de γ.

Prueba. Sea $N \in \mathbb{Z}_+$, por el lema 1.1 existe una función $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisface (1)-(5) del lema. Como $Sop\ \varphi \subset B_1(0)$ y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dado que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, por el teorema 1.4 y la identidad (1.5)

$$f(x) = \int_0^\infty (\varphi_t * \varphi_t * f)(x) \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y)\, dy \frac{dt}{t}.$$

Para un cubo diádico $Q \subset \mathbb{R}^n$, $T(Q)$ es un cubo en $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Entonces $\{T(Q)\}_{Q\in\tilde{Q}}$ es una colección de cubos que cubren a $\mathbb{R}_+^{n+1}$ cuyos interiores son ajenos dos a dos. Así, discretizando

$$f(x) = \sum_Q \int\int_{T(Q)} \varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y)\, dy \frac{dt}{t}.$$

Sea

$$s_Q = \left\{ \int\int_{T(Q)} |(\varphi_t * f)(y)|^2\, dy \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Por definición de s_Q, $s_Q \geq 0$ y además

$$s_Q^2 = \int\int_{T(Q)} |(\varphi_t * f)(y)|^2\, dy \frac{dt}{t} = \int_{\frac{\ell(Q)}{2}}^{\ell(Q)} \int_{T(Q)} |(\varphi_t * f)(y)|^2\, dy \frac{dt}{t} < \infty;$$

lo cual implica que $0 \leq s_Q < \infty$ para todo cubo diádico Q.

Si $s_Q \neq 0$, se define

$$a_Q(x) = \frac{1}{s_Q} \int\int_{T(Q)} \varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y)\,dy\frac{dt}{t}. \tag{1.12}$$

Prueba de (1.8). Supóngase que $x \notin 3Q$ y $(y,t) \in T(Q)$, entonces $\frac{\ell(Q)}{2} \leq t \leq \ell(Q)$ y $y \in Q$. Como $x \notin 3Q$ y $y \in Q$ entonces $|x-y| > \ell(Q)$. Por lo tanto $t \leq \ell(Q) < |x-y|$. En consecuencia $1 < \frac{|x-y|}{t}$. Ahora, como $\varphi_t(x-y) = t^{-n}\varphi\left(\frac{x-y}{t}\right)$ y $Sop\ \varphi \subset B_1(0)$, entonces $\varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) = 0$. Por lo tanto $\varphi_t(x-y) = 0$ para toda $x \notin 3Q$ y para todo $(y,t) \in T(Q)$. Esto implica que $\varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y) = 0$ para toda $x \notin 3Q$. En consecuencia $Sop\ a_Q(x) \subset 3Q$. Además, se sigue de lo anterior que para cualquier x fijo la suma $\sum_{\ell(Q)=2^{-v}} s_Q a_Q(x)$ tiene a lo más un número finito de términos distintos de cero. Esto prueba que f_j es una función bien definida.

Prueba de (1.7). De las definiciones de f_j, s_Q, a_Q y $T(Q)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
f_j(x) &= \sum_{v=-j}^{j} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} s_Q a_Q(x) \\
&= \sum_{v=-j}^{j} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} s_Q \left\{ \frac{1}{s_Q} \int\int_{T(Q)} \varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y)\,dy\frac{dt}{t} \right\} \\
&= \sum_{v=-j}^{j} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \int\int_{T(Q)} \varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y)\,dy\frac{dt}{t} \\
&= \sum_{v=-j}^{j} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \int_{2^{-(v+1)}}^{2^{-v}} \int_{Q} \varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y)\,dy\frac{dt}{t} \\
&= \sum_{v=-j}^{j} \int_{2^{-(v+1)}}^{2^{-v}} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \int_{Q} \varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y)\,dy\frac{dt}{t} \\
&= \sum_{v=-j}^{j} \int_{2^{-(v+1)}}^{2^{-v}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y)\,dy\frac{dt}{t} \\
&= \sum_{v=-j}^{j} \int_{2^{-(v+1)}}^{2^{-v}} (\varphi_t * \varphi_t * f)(x)\frac{dt}{t} \\
&= \int_{2^{j-1}}^{2^{j}} (\varphi_t * \varphi_t * f)(x)\frac{dt}{t} + \int_{2^{-(-j+1)}}^{2^{-(-j+1)}} (\varphi_t * \varphi_t * f)(x)\frac{dt}{t} + \cdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{2^{-(j+1)}}^{2^{-j}} (\varphi_t * \varphi_t * f)(x)\,\frac{dt}{t} \\
&= \int_{2^{-(j+1)}}^{2^{j}} (\varphi_t * \varphi_t * f)(x)\,\frac{dt}{t} = \int_{\varepsilon}^{\delta} (\varphi_t * \varphi_t * f)(x)\,\frac{dt}{t} = f_{\varepsilon,\delta}(x)
\end{aligned}
$$

donde $\varepsilon = 2^{-(j+1)}$ y $\delta = 2^j$. En consecuencia, por el teorema 1.4

$$\lim_{j\to\infty} \|f - f_j\|_{L^2} = \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to\infty} \|f - f_{\varepsilon,\delta}\|_{L^2} = 0.$$

Prueba de (1.11). Usando el teorema de Plancherel , la propiedad (5) del lema 1 1 y el teorema de Tonelli, se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum_Q s_Q^2 &= \sum_Q \int\int_{T(Q)} |(\varphi_t * f)(y)|^2\, dy\frac{dt}{t} \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |(\varphi_t * f)(y)|^2\, dy\frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi_t * f)(y)|^2\, dy\frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{\varphi}(t\zeta)\, \hat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta\frac{dt}{t} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{\int_0^\infty \left|\hat{\varphi}(t\zeta)\right|^2 \frac{dt}{t}\right\} \left|\hat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta \\
&= \left\|\hat{f}\right\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}
$$

Prueba de (1.10). Usando fórmulas de intercambio, la desigualdad de Holder y el hecho de que $t \in \left[\frac{\ell(Q)}{2}, \ell(Q)\right]$, cuando $(y,t) \in T(Q)$, se tiene

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^\gamma a_Q(x)| &= \left|\frac{1}{s_Q}\int\int_{T(Q)} [\partial_x^\gamma \varphi_t(x-y)]\,(\varphi_t * f)(y)\, dy\frac{dt}{t}\right| \\
&\le \frac{1}{s_Q}\int\int_{T(Q)} |\partial_x^\gamma \varphi_t(x-y)|\,|(\varphi_t * f)(y)|\, dy\frac{dt}{t} \\
&\le \frac{1}{s_Q}\left\{\int\int_{T(Q)} |\partial_x^\gamma \varphi_t(x-y)|^2\, dy\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left\{\int\int_{T(Q)}\left|\left(\varphi_t * f\right)(y)\right|^2 dy\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{2}}\\
= &\ \frac{1}{s_Q}\left\{\int\int_{T(Q)}\left|\partial_x^\gamma\varphi_t(x-y)\right|^2 dy\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{2}} s_Q\\
= &\ \left\{\int\int_{T(Q)}\left|\partial_x^\gamma\varphi_t(x-y)\right|^2 dy\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{2}}\\
= &\ \left\{\int\int_{T(Q)} t^{-2|\gamma|}\left|\left(\partial^\gamma\varphi\right)_t(x-y)\right|^2 dy\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{2}}\\
= &\ \left\{\int\int_{T(Q)} t^{-2(|\gamma|+n)}\left|\left(\partial^\gamma\varphi\right)\left(\frac{x-y}{t}\right)\right|^2 dy\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{2}}\\
\leq &\ \left\|\partial^\gamma\varphi\right\|_\infty\left\{\int\int_{T(Q)} t^{-2(|\gamma|+n)-1}dydt\right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Tomando el supremo sobre todas las $x \in \mathbb{R}^n$ en la cadena de desigualdades obtenida, tenemos

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\partial_x^\gamma a_Q(x)\right|\\
\leq &\ \left\|\partial^\gamma\varphi\right\|_\infty\left\{\int\int_{T(Q)} t^{-2(|\gamma|+n)-1}dydt\right\}^{\frac{1}{2}}\\
\leq &\ \left\|\partial^\gamma\varphi\right\|_\infty\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right)^{-|\gamma|-n-\frac{1}{2}}\left\{\int\int_{T(Q)} dydt\right\}^{\frac{1}{2}}\\
= &\ \left\|\partial^\gamma\varphi\right\|_\infty\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right)^{-|\gamma|-n-\frac{1}{2}}\left\{\int_{\frac{\ell(Q)}{2}}^{\ell(Q)}\int_{T(Q)} dydt\right\}^{\frac{1}{2}}\\
= &\ \left\|\partial^\gamma\varphi\right\|_\infty\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right)^{-|\gamma|-n-\frac{1}{2}}|Q|^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\ell(Q)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\\
= &\ \left\|\partial^\gamma\varphi\right\|_\infty 2^{|\gamma|+n}\ell(Q)^{-|\gamma|-\frac{n}{2}} = c_{\gamma,n}\ell(Q)^{-|\gamma|-\frac{n}{2}}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, probemos (1.9). Sea γ un multi-índice tal que $|\gamma| \leq N$, por el teorema de Fubini

$$
\int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma a_Q(x)\,dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma \left\{ \frac{1}{s_Q} \int\int_{T(Q)} \varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y)\, dy \frac{dt}{t} \right\} dx \\
&= \frac{1}{s_Q} \int_{\mathbb{R}^n} \int\int_{T(Q)} x^\gamma \varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y)\, dy \frac{dt}{t} dx \\
&= \frac{1}{s_Q} \int\int_{T(Q)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma \varphi_t(x-y)\, dx \right\} (\varphi_t * f)(y)\, dy \frac{dt}{t}.
\end{aligned}
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma \varphi_t(x-y)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) \frac{dx}{t^n} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (tu+y)^\gamma \varphi(u)\, du = 0
\end{aligned}
$$

donde esta última igualdad se obtiene usando (4) del lema 1.1. Por lo tanto se obtiene (1.9). ■

El teorema 1.6 tiene un recíproco. Una versión de este recíproco es: si los átomos son definidos como funciones a_Q que tienen las propiedades (1.8), (1.9), (1.10) y f está definida por (1.7), con $\sum_Q |s_Q|^2 < \infty$, entonces $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\|f\|_{L^2}^2 \leq c^2 \sum_Q |s_Q|^2$. Esto se puede probar por algún tipo de argumento de espacio de Hilbert, en el cual tratamos la expansión como si fuera ortogonal. Realizaremos esto en un marco más general. En lugar de átomos, trataremos con moléculas, una clase de funciones que incluye a los átomos. Una razón para hacer esto es que muchos operadores en análisis mapean átomos en moléculas (y no en átomos). Esto nos permite obtener estimaciones para estos operadores examinando su comportamiento sobre átomos.

La definición de una molécula asociada con un cubo

$$
Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2. \cdots, n\}
$$

involucra a la "esquina inferior izquierda de Q" , la cual denotamos por $x_Q = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = a$.

Definición. Sean $\varepsilon, \alpha > 0$. Una función m_Q es llamada una $(\alpha, \varepsilon)-$ *molécula* suave para un cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ si y sólo si satisface las tres condiciones siguientes:

$$\textbf{(1.13)} \qquad |m_Q(x)| \leq |Q|^{-\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{|x - x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-(n+\varepsilon)} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n;$$

$$\textbf{(1.14)} \quad |m_Q(x) - m_Q(y)| \leq |Q|^{-\frac{1}{2}} \left\{\frac{|x-y|}{\ell(Q)}\right\}^{\alpha} \sup_{|z|\leq|x-y|} \left\{1 + \frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-(n+\varepsilon)}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$;

$$\textbf{(1.15)} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} m_Q(x)\, dx = 0.$$

Observaciones. (i). (1.13) nos dice que m_Q está "localizado" ó "alcanza su máximo" en Q; así, podemos considerar (1.13) para ser una versión débil de (1.8).

(ii). En lugar de la suavidad C^{∞} considerada en (1.10), requerimos en (1.14) que m_Q satisfaga una condición de tipo Lipschitz de orden α. Además, esta condición de Lipschitz tiene un decaimiento en ∞.

(iii). (1.15) es la cancelación mínima ($N = 0$) en (1.9).

(iv). Las funciones a_Q en el teorema 1.6, salvo un factor constante, son $(\alpha, \varepsilon)-$ moléculas suaves para toda $\varepsilon > 0$ y $0 < \alpha \leq 1$.

Las observaciones (i) a (iii) se siguen inmediatamente.

Prueba de (iv). Sea a_Q un átomo, demostremos que a_Q es una $(\alpha, \varepsilon)-$ molécula suave.

a) Veamos que (1.13) se cumple. Como a_Q es un átomo, entonces

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(\partial^{\gamma} a_Q)(x)| \leq c_{\gamma} \ell(Q)^{-|\gamma|-\frac{n}{2}}$$

para $\gamma \in \mathbb{Z}^n_+$. Haciendo $\gamma = (0, 0, \cdots, 0)$ tenemos que

$$|a_Q(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |a_Q(x)| \leq c\ell(Q)^{-\frac{n}{2}} = c\,|Q|^{-\frac{1}{2}}.$$

Por hipótesis $Sop\ a_Q \subset 3Q$.

Si x es tal que $|x - x_Q| > 3\sqrt{n}\ell(Q)$, entonces $x \in Sop\ a_Q$. En consecuencia $a_Q(x) = 0$ y por lo tanto la desigualdad (1.13) se cumple.

Si x es tal que $|x - x_Q| \leq 3\sqrt{n}\ell(Q)$, entonces $\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)} \leq 3\sqrt{n}$. En consecuencia

$$\frac{|x - x_Q|}{\ell(Q)} + 1 \leq 3\sqrt{n} + 1;$$

lo cual implica

$$\left(3\sqrt{n}+1\right)^{-(n+\varepsilon)} \leq \left\{\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}+1\right\}^{-(n+\varepsilon)}.$$

Así

$$\begin{aligned}
|a_Q(x)| &\leq c|Q|^{-\frac{1}{2}} = c|Q|^{-\frac{1}{2}}\frac{\left(3\sqrt{n}+1\right)^{-(n+\varepsilon)}}{\left(3\sqrt{n}+1\right)^{-(n+\varepsilon)}} \\
&\leq \frac{c}{\left(3\sqrt{n}+1\right)^{-(n+\varepsilon)}}|Q|^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}+1\right\}^{-(n+\varepsilon)} \\
&= c(n,\varepsilon)|Q|^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}+1\right\}^{-(n+\varepsilon)}
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Veamos que (1.14) se cumple. Como a_Q es infinitamente diferenciable y satisface (1.10), tomando $\gamma = (0,0,\cdots,1,\cdots,0)$ en la $i-$ésima coordenada y aplicando el teorema del valor medio en la $i-$ésima variable, se tiene

$$\begin{aligned}
|a_Q(x)-a_Q(y)| &= |\partial_i^\gamma a_Q(\zeta_i)(x_i-y_i)| \leq c_\gamma \ell(Q)^{-1-\frac{n}{2}}|x_i-y_i| \\
&\leq c_\gamma \ell(Q)^{-1-\frac{n}{2}}|x-y| = c_\gamma \ell(Q)^{-\frac{n}{2}}\frac{|x-y|}{\ell(Q)}.
\end{aligned}$$

Si $|x-x_Q| > 3\sqrt{n}\ell(Q)$ y $|y-y_Q| > 3\sqrt{n}\ell(Q)$, entonces $a_Q(x) = a_Q(y) = 0$ y por lo tanto (1.14) se cumple.

Si $|x-x_Q| \leq 3\sqrt{n}\ell(Q)$ y $|y-y_Q| \leq 3\sqrt{n}\ell(Q)$, entonces

$$\begin{aligned}
|x-y| &\leq |x-x_Q|+|y_Q-x_Q|+|y-y_Q| \\
&= |x-x_Q|+|y-y_Q| \leq 6\sqrt{n}\ell(Q).
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
|a_Q(x)-a_Q(y)| &\leq c_\gamma \ell(Q)^{-\frac{n}{2}}\frac{|x-y|}{\ell(Q)} \\
&= c_\gamma |Q|^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{|x-y|}{\ell(Q)}\right]^\alpha \left[\frac{|x-y|}{\ell(Q)}\right]^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; c_\gamma \left|Q\right|^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{|x-y|}{\ell\,(Q)}\right]^{\alpha} \left(6\sqrt{n}\right)^{1-\alpha} \\
&= \; c\,(\alpha,\gamma)\left|Q\right|^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{|x-y|}{\ell\,(Q)}\right]^{\alpha}
\end{aligned}
$$

ya que $\left[\frac{|x-y|}{\ell(Q)}\right]^{1-\alpha} \leq \left(6\sqrt{n}\right)^{1-\alpha}$. Por otra parte

$$
\begin{aligned}
|x-z-x_Q| \; &\leq \; |x-y| + |y-x_Q| + |z| = |x-y| + |y-y_Q| + |z| \\
&\leq \; 9\sqrt{n}\ell\,(Q) + |z| \leq 15\sqrt{n}\ell\,(Q)
\end{aligned}
$$

si $|z| \leq |x-y|$. En consecuencia para todo $|z| \leq |x-y|$, se tiene

$$
\frac{|x-z-x_Q|}{\ell\,(Q)} \leq 15\sqrt{n};
$$

$$
\frac{|x-z-x_Q|}{\ell\,(Q)} + 1 \leq 15\sqrt{n} + 1;
$$

$$
\left\{\frac{|x-z-x_Q|}{\ell\,(Q)} + 1\right\}^{-(n+\varepsilon)} \geq \left\{15\sqrt{n}+1\right\}^{-(n+\varepsilon)}.
$$

Por lo tanto, usando la última estimación y la desigualdad anterior

$$
\begin{aligned}
&|a_Q\,(x) - a_Q(y)| \\
&\leq \; c\alpha,\gamma\left|Q\right|^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{|x-y|}{\ell\,(Q)}\right]^{\alpha} \frac{\left\{15\sqrt{n}+1\right\}^{-(n+\varepsilon)}}{\left\{15\sqrt{n}+1\right\}^{-(n+\varepsilon)}} \\
&\leq \; c\left|Q\right|^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{|x-y|}{\ell\,(Q)}\right]^{\alpha} \sup\nolimits_{|z|\leq|x-y|} \left\{\frac{|x-z-x_Q|}{\ell\,(Q)} + 1\right\}^{-(n+\varepsilon)}
\end{aligned}
$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, donde $c = (\alpha, \gamma, n, \varepsilon)$

Si $|x - x_Q| \leq 3\sqrt{n}\ell\,(Q)$ y $|y - x_Q| > 3\sqrt{n}\ell\,(Q)$, entonces $a_Q\,(y) = 0$ y por (1.10), con $\gamma = (0,0,0,\cdots 0)$, se tiene

$$
|a_Q\,(x) - a_Q(y)| \leq c\left|Q\right|^{-\frac{1}{2}}.
$$

Dado que $|x - x_Q| \leq 3\sqrt{n}\ell\,(Q)$ se tiene que $x \in Sop\ 3Q$ o $x \notin Sop\ 3Q$. Si $x \notin Sop\ 3Q$, entonces $a_Q\,(x) = 0$ y se cumple la propiedad (1.14).

Si $x \in Sop\,3Q$, entonces $|x - x_Q| \leq 2\sqrt{n}\ell(Q)$; en consecuencia $|x - y| \geq \sqrt{n}\ell(Q)$. De donde

$$\left[\frac{|x-y|}{\ell(Q)}\right]^{\alpha} \geq \left(\sqrt{n}\right)^{\alpha}.$$

Así

$$|a_Q(x) - a_Q(y)| \leq c\,|Q|^{-\frac{1}{2}} \frac{\left(\sqrt{n}\right)^{\alpha}}{\left(\sqrt{n}\right)^{\alpha}} \leq c_{\alpha,n}\,|Q|^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{|x-y|}{\ell(Q)}\right]^{\alpha}.$$

Por otra parte, sabemos que

$$\begin{aligned} \sup\nolimits_{|z|\leq|x-y|}\left\{1 + \frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon} &\geq \left\{1 + \frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon} \\ &\geq \left(3\sqrt{n}+1\right)^{-n-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Usando esto último se tiene

$$\begin{aligned} &|a_Q(x) - a_Q(y)| \\ \leq\ & c\,|Q|^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{|x-y|}{\ell(Q)}\right]^{\alpha} \left(3\sqrt{n}+1\right)^{-n-\varepsilon} \left(3\sqrt{n}+1\right)^{n+\varepsilon} \\ \leq\ & c\,|Q|^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{|x-y|}{\ell(Q)}\right]^{\alpha} \sup\nolimits_{|z|\leq|x-y|}\left\{1 + \frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon} \end{aligned}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

c) (1.15) es consecuencia de que $a_Q(x)$ satisface (1.9) con $\gamma = (0, \cdots, 0)$. ■

Antes de enunciar el inverso del teorema 1.6 probemos un lema, el cual nos dice que m_P y m_Q son "casi ortogonales".

Lema 1.16

Si m_P y m_Q son (α, ε) –moléculas suaves para los cubos diádicos P y Q, donde $\ell(P) \leq \ell(Q)$ y $\alpha < \varepsilon$, entonces

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} m_P(x)\,\overline{m_Q(x)}\,dx\right| \leq c\left\{\frac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right\}^{\alpha+\frac{n}{2}} \left\{1 + \frac{|x_Q - x_P|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}.$$

Prueba. Como m_P satisface (1.15), entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} m_P(x)\,\overline{m_Q(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} m_P(x)\left[\overline{m_Q(x)} - \overline{m_Q(x_P)}\right]dx.$$

Sea $A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_P| \leq 3\ell(Q)\}$. Tenemos dos casos.
Caso I. Si $x \in A$, entonces

$$|x_Q - x_P| \leq |x - z - x_Q| + |x - x_P| + |z| \leq |x - z - x_Q| + 6\ell(Q)$$

para todo $|z| \leq |x - x_P|$. De donde

$$1 + \frac{|x_Q - x_P|}{\ell(Q)} \leq \frac{|x - z - x_Q|}{\ell(Q)} + 7 \leq 7\left(1 + \frac{|x - z - x_Q|}{\ell(Q)}\right)$$

para todo $|z| \leq |x - x_P|$. En consecuencia

$$(\dagger) \qquad \sup_{|z|\leq|x-x_P|}\left\{\left(1 + \frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right)\right\}^{-n-\varepsilon} \leq c\left\{1 + \frac{|x_Q-x_P|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}.$$

Ahora, usando la igualdad anterior, se tiene

$$\left|\int_{R^n} m_P(x)\,\overline{m_Q(x)}dx\right| \leq I + II,$$

donde

$$I = \int_A |m_P(x)|\,|m_Q(x) - m_Q(x_P)|\,dx$$

y

$$II = \int_{R^n - A} |m_P(x)|\,|m_Q(x) - m_Q(x_P)|\,dx$$

Estimemos I. Como m_Q y m_P son $(\alpha, \varepsilon)-$moléculas suaves y por $(\dagger)$, se tiene

$$I \leq \int_A |m_P(x)|\left\{|Q|^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\right]^\alpha \sup_{|z|\leq|x-x_P|}\left[1 + \frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon}\right\}dx$$

$$\leq c\,|Q|^{-\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{|x_Q-x_P|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\int_A |m_P(x)|\left[\frac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\right]^\alpha dx$$

$$\leq c|Q|^{-\frac{1}{2}}|P|^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\tfrac{|x_Q-x_P|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\int_A\left[1+\tfrac{|x-x_P|}{\ell(P)}\right]^{-n-\varepsilon}\left[\tfrac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\right]^{\alpha}dx$$
$$=c|Q|^{-\frac{1}{2}}|P|^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\tfrac{|x_Q-x_P|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\alpha}\int_A\left[1+\tfrac{|x-x_P|}{\ell(P)}\right]^{-n-\varepsilon}\left[\tfrac{|x-x_P|}{\ell(P)}\right]^{\alpha}dx$$
$$\leq c|Q|^{-\frac{1}{2}}|P|^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\tfrac{|x_Q-x_P|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\alpha}\int_A\left[1+\tfrac{|x-x_P|}{\ell(P)}\right]^{-n-\varepsilon+\alpha}dx$$
$$\leq c|Q|^{-\frac{1}{2}}|P|^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\tfrac{|x_Q-x_P|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}\left[1+\tfrac{|x-x_P|}{\ell(P)}\right]^{-n-\varepsilon+\alpha}dx.$$

Pero

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\left[1+\frac{|x-x_P|}{\ell(P)}\right]^{-n-\varepsilon+\alpha}dx\\
=\ &\int_0^{\infty}\int_{S^{n-1}}\left(1+\frac{r}{\ell(P)}\right)^{-n-\varepsilon+\alpha}r^{n-1}d\varrho\left(x'\right)dr\\
=\ &|S^{n-1}|\int_0^{\infty}\left(1+\frac{r}{\ell(P)}\right)^{-n-\varepsilon+\alpha}r^{n-1}dr\\
=\ &|S^{n-1}|\,\ell(P)^{n+\varepsilon-\alpha}\int_0^{\infty}(\ell(P)+r)^{-n-\varepsilon+\alpha}r^{n-1}dr\\
\leq\ &|S^{n-1}|\,\ell(P)^{n+\varepsilon-\alpha}\int_0^{\infty}(\ell(P)+r)^{\alpha-\varepsilon-1}dr\\
=\ &\frac{|S^{n-1}|}{\varepsilon-\alpha}\ell(P)^{n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
I\ &\leq\ c\ell(P)^{-\frac{n}{2}}\ell(Q)^{-\frac{n}{2}}\left\{1+\frac{|x_Q-x_P|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\left(\frac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\alpha}\left(\frac{|S^{n-1}|}{\varepsilon-\alpha}\ell(P)^{n}\right)\\
&=\ c\left(\frac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\alpha+\frac{n}{2}}\left\{1+\frac{|x_Q-x_P|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}
\end{aligned}$$

donde c es una constante genérica que depende de la dimensión n, de ε y α, además la medida del cubo $Q\subset\mathbb{R}^n$, de lado $\ell(Q)$, es $[\ell(Q)]^n$.

Caso II. Para estimar II observemos lo siguiente, si $x\notin A$, entonces $|x-x_P|>3\ell(Q)$; lo cual implica

$$\begin{aligned}1+\frac{|x-x_P|}{\ell(P)} &> \frac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\frac{\ell(Q)}{\ell(P)}=\frac{1}{2}\frac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\frac{\ell(Q)}{\ell(P)}+\frac{1}{2}\frac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\frac{\ell(Q)}{\ell(P)}\\ &> \frac{1}{2}\frac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\frac{\ell(Q)}{\ell(P)}+\frac{3}{2}\frac{\ell(Q)}{\ell(P)}>\frac{1}{2}\frac{\ell(Q)}{\ell(P)}\left(1+\frac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\right).\end{aligned}$$

Como $n+\varepsilon>0$, entonces

$$\left\{1+\frac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}<\left\{\frac{1}{2}\frac{\ell(Q)}{\ell(P)}\left(1+\frac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\right)\right\}^{-n-\varepsilon}.$$

Usando esta última desigualdad y (1.13), tenemos que

$$(\ddagger)\qquad \begin{aligned}|m_P(x)| &\le |P|^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{|x-x_P|}{\ell(P)}\right\}^{-n-\varepsilon}\\ &\le 2^{n+\varepsilon}|P|^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{n+\varepsilon}\left(1+\frac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon}.\end{aligned}$$

Para estimar II hacemos lo siguiente

$$\begin{aligned}II &\le \int_{\mathbb{R}^n-A}|m_P(x)|\,|m_Q(x)|\,dx+\int_{\mathbb{R}^n-A}|m_P(x)|\,|m_Q(x_P)|\,dx\\ &= II_1+II_2\end{aligned}$$

y trabajamos con II_1 e II_2 por separado.

Estimación de II_2. Usando ($\ddagger$) y (1.13) para $m_Q(x_P)$, se tiene

$$II_2\le 2^{n+\varepsilon}|P|^{-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{n+\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n-A}\left(1+\tfrac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon}|m_Q(x_P)|\,dx$$

$$\le 2^{n+\varepsilon}|P|^{-\frac{1}{2}}|Q|^{-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{n+\varepsilon}\left\{1+\tfrac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n-A}\left(1+\tfrac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon}dx$$

$$\le 2^{n+\varepsilon}|P|^{-\frac{1}{2}}|Q|^{-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{n+\varepsilon}\left\{1+\tfrac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+\tfrac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon}dx$$

$$\le 2^{n+\varepsilon}|P|^{-\frac{1}{2}}|Q|^{-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{n+\varepsilon}\left\{1+\tfrac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\left(\tfrac{|S^{n-1}|}{\varepsilon}\ell(Q)^n\right)$$

$$=2^{n+\varepsilon}\tfrac{|S^{n-1}|}{\varepsilon}|P|^{-\frac{1}{2}}|Q|^{-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{n+\varepsilon}\left\{1+\tfrac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\ell(Q)^n$$

$$= c\left(\frac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\frac{n}{2}+\varepsilon}\left\{1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon} \leq c\left(\frac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\frac{n}{2}+\alpha}\left\{1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}$$

donde esta última desigualdad se obtiene por la hipótesis de que $\ell(P) \leq \ell(Q)$, $\alpha < \varepsilon$ y la estimación de la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+\frac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon} dx \leq \frac{|S^{n-1}|}{\varepsilon}\ell(P)^n,$$

la cual se obtiene integrando en coordenadas esféricas.

Estimación de II_1 Sean $B = \left\{x \in \mathbb{R}^n - A : |x-x_P| > \frac{1}{2}|x_P - x_Q|\right\}$ y

$C = \left\{x \in \mathbb{R}^n - A : |x-x_P| \leq \frac{1}{2}|x_P - x_Q|\right\}$.

Para estimar II_1 se divide en dos integrales usando los dos conjuntos antes definidos. Así

$$II_1 = \int_B |m_P(x)|\,|m_Q(x)|\,dx + \int_C |m_P(x)|\,|m_Q(x)|\,dx = II_3 + II_4.$$

Sólo basta probar que las dos integrales anteriores satisfacen la conclusión del lema

Estimación de II_3. Como $x \in B$, entonces $|x-x_P| \geq \frac{1}{2}|x_P - x_Q|$; en consecuencia

$$1+\frac{|x-x_P|}{\ell(Q)} \geq 1+\frac{1}{2}\frac{|x-x_P|}{\ell(Q)} \geq \frac{1}{2}\left(1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right).$$

De donde

$$\left(1+\frac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon} \leq \left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right)\right\}^{-n-\varepsilon}$$

En consecuencia por (1.13), para cuando $x \in B$ y por la desigualdad anterior se tiene

$$II_3 \leq 2^{n+\varepsilon}|P|^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{n+\varepsilon}\int_B\left(1+\frac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon}|m_Q(x)|\,dx$$

$$\leq 2^{n+\varepsilon}|P|^{-\frac{1}{2}}|Q|^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{n+\varepsilon}\int_B\left(1+\frac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon}\left(1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon}$$

$$\leq 4^{n+\varepsilon}|P|^{-\frac{1}{2}}|Q|^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{n+\varepsilon}\left\{1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\int_B\left(1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon}dx$$

$$4^{n+\varepsilon}\left|P\right|^{-\frac{1}{2}}\left|Q\right|^{-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{n+\varepsilon}\left\{1+\tfrac{\left|x_P-x_Q\right|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+\tfrac{\left|x-x_Q\right|}{\ell(Q)}\right)dx$$
$$\leq c\left|P\right|^{-\frac{1}{2}}\left|Q\right|^{-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{n+\varepsilon}\ell(Q)^n\left\{1+\tfrac{\left|x_P-x_Q\right|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}$$
$$=c\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\frac{n}{2}+\varepsilon}\left\{1+\tfrac{\left|x_P-x_Q\right|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\leq c\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\frac{n}{2}+\alpha}\left\{1+\tfrac{\left|x_P-x_Q\right|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}$$

donde esta última desigualdad es consecuencia de la hipótesis $\ell(P)\leq\ell(Q), \alpha<\varepsilon$, y la penúltima desigualdad se sigue por que la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+\frac{\left|x-x_Q\right|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon}dx\leq c\ell(Q)^n,$$

usando coordenadas esféricas. Por lo tanto

$$II_3\leq c\left(\frac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\frac{n}{2}+\alpha}\left\{1+\frac{\left|x_P-x_Q\right|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}$$

donde c es una constante que sólo depende de la dimensión n, de ε y de α.

Estimación de II_4. Dado que $\left|x_P-x_Q\right|-\left|x-x_P\right|\leq\left|x-x_Q\right|$ y $x\in C$ entonces

$$-\frac{1}{2}\left|x_P-x_Q\right|\leq-\left|x-x_P\right|.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left|x_P-x_Q\right| &= \left|x_P-x_Q\right|-\frac{1}{2}\left|x_P-x_Q\right|\\ &\leq \left|x_Q-x_P\right|-\left|x-x_P\right|\leq\left|x-x_Q\right|.\end{aligned}$$

Usando esto último, (1.13) y (‡), se tiene

$$II_4\leq 2^{n+\varepsilon}\left|P\right|^{-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{n+\varepsilon}\int_C\left(1+\tfrac{\left|x-x_P\right|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon}\left|m_Q\left(x\right)\right|dx$$
$$\leq 2^{n+\varepsilon}\left|P\right|^{-\frac{1}{2}}\left|Q\right|^{-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{n+\varepsilon}\int_C\left(1+\tfrac{\left|x-x_P\right|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon}\left(1+\tfrac{\left|x-x_Q\right|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon}dx$$
$$\leq 4^{n+\varepsilon}\left|P\right|^{-\frac{1}{2}}\left|Q\right|^{-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{n+\varepsilon}\left\{1+\tfrac{\left|x_P-x_Q\right|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\int_C\left(1+\tfrac{\left|x-x_P\right|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon}dx$$
$$\leq 4^{n+\varepsilon}\left|P\right|^{-\frac{1}{2}}\left|Q\right|^{-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{n+\varepsilon}\left\{1+\tfrac{\left|x_P-x_Q\right|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+\tfrac{\left|x-x_P\right|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon}dx$$

$$\leq c\,|P|^{-\frac{1}{2}}\,|Q|^{-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{n+\varepsilon}\ell(Q)^n\left\{1+\tfrac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}$$

$$= c\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\frac{n}{2}+\varepsilon}\left\{1+\tfrac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon} \leq c\left(\tfrac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\frac{n}{2}+\alpha}\left\{1+\tfrac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}$$

donde esta última desigualdad es consecuencia de nuestra hipótesis $\ell(P) \leq \ell(Q)$ y $\alpha < \varepsilon$. La tercer desigualdad se obtiene por lo siguiente

$$\frac{1}{2}\,|x_P - x_Q| \leq |x - x_Q|\,;$$

lo cual implica que $\frac{1}{2}\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)} \leq \frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}$, de donde obtenemos que

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right) \leq 1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}.$$

En consecuencia

$$2^{n+\varepsilon}\left(1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon} \geq \left(1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon}.$$

La penúltima desigualdad se obtiene por el hecho de que

$$\int_{\Re^n}\left(1+\frac{|x-x_P|}{\ell(Q)}\right)^{-n-\varepsilon}dx \leq c\ell(Q)^n,$$

la cual se estima usando coordenadas esféricas. ■

Proposición 1.17

La serie $\sum_{k\in Z^n}[1+|k|]^{-n-\varepsilon}$ converge a uana constante que sólo depende de la dimensión n y de ε.

Prueba. La demostración se sigue de la aplicación de la propiedad de comparación de la integral.

Teorema 1.18

Supóngase que $0 < \alpha \leq 1, 0 < \varepsilon$ y, para cada cubo diádico Q, m_Q es una $(\alpha,\varepsilon)-$molécula suave para Q. Sea $f = \sum_Q s_Q m_Q$ para una sucesión escalar $\{s_Q\}_{Q\in\tilde{Q}}$ que satisface $\sum_Q |s_Q|^2 < \infty$. Entonces la serie que define a f converge en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f\|_{L^2} \leq c(n,\alpha,\varepsilon)\left\{\sum_Q |s_Q|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Prueba. Provisionalmente supongamos que $\alpha < \varepsilon$. Veamos que la serie $\sum_Q s_Q m_Q$ converge en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Es claro que hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los cubos diádicos y el conjunto de los números naturales. Sean $\{s_k\}$ y $\{m_k\}$ las sucesiones numeradas con los numeros naturales. Sea $f_n = \sum_{k=1}^n s_k m_k$, veamos que $\{f_n\}$ converge en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sean $n > m \geq N$ y $\varepsilon > 0$, entonces por el lema 1.16 y por las hipótesis, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_{L^2}^2 &\leq \sum_{k=m+1}^{n} |s_k|^2 \|m_k\|_{L^2}^2 \leq \sum_{l,k=m+1}^{n} |s_k|^2 |\langle m_k, m_l\rangle| \\
&= \sum_{l,k=m+1}^{n} |s_k|^2 \left|\int_{\mathbb{R}^n} m_k(x)\overline{m_l(x)}dx\right| \\
&\leq c_1 \sum_{k=m+1}^{n} |s_k|^2 < c.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|f_n - f_m\|_{L^2}^2 < c \text{ para toda } n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Esto implica que la cola de la serie tiende a cero cuando m tiende a infinito. De donde

$$\|f_n - f_m\|_{L^2}^2 < \varepsilon \text{ si } n \text{ y } m \text{ son muy grandes.}$$

Por lo tanto $\{f_n\}$ es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^n)$. En consecuencia, existe $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_Q s_Q m_Q.$$

Probemos que la desigualdad del teorema se satisface. Claramente es suficiente establecer la desigualdad deseada para una sucesión finita no cero $\{s_Q\}$ (con $c(n,\alpha,\varepsilon)$ independiente de la sucesión). Entonces

$$\|f\|_{L^2}^2=\langle f,f\rangle=\int_{\Re^n}\left(\sum_P s_P m_P\right)\left(\overline{\sum_P s_P m_P}\right)dx$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\langle f,f\rangle &= \left\langle \sum_P s_P m_P,\sum_Q s_Q m_Q\right\rangle=\sum_{\ell(P)\leq\ell(Q)} s_P\overline{s_Q}\,\langle m_P.m_Q\rangle\\
&\leq \sum_{\ell(P)\leq\ell(Q)} |s_P|\,|s_Q|\,|\langle m_P,m_Q\rangle|\\
&= \sum_{\ell(P)\leq\ell(Q)} |s_P|\,|s_Q|\left|\int_{\Re^n} m_P(x)\,\overline{m_Q(x)}\right|.
\end{aligned}$$

En consecuencia, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz en $\ell^2(\mathbb{R}^n)$ y por el lema 1.16 se tiene

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^2}^2 &\leq \sum_{\ell(P)\leq\ell(Q)} |s_P|\,|s_Q|\left|\int_{\Re^n} m_P(x)\,\overline{m_Q(x)}\right|\\
&\leq c\sum_{\ell(P)\leq\ell(Q)} |s_P|\,|s_Q|\left(\frac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\frac{n}{2}+\alpha}\left[1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon}\\
& c\sum_{\ell(P)\leq\ell(Q)}\left\{|s_P|\left(\frac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left[1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-\frac{n+\varepsilon}{2}}\right\}\\
&\times\left\{|s_Q|\left(\frac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\frac{\alpha+n}{2}}\left[1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-\frac{n+\varepsilon}{2}}\right\}\\
&\leq c\left\{\sum_{\ell(P)\leq\ell(Q)}|s_P|^2\left(\frac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\alpha}\left[1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon}\right\}^{\frac12}\\
&\times\left\{\sum_{\ell(P)\leq\ell(Q)}|s_Q|^2\left(\frac{\ell(P)}{\ell(Q)}\right)^{\alpha+n}\left[1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon}\right\}^{\frac12}
\end{aligned}$$

$$= \quad 2cA^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}.$$

Supóngase que $\ell(Q) = 2^{-v}$ y $\ell(P) = 2^{-u}$. Dado que $\ell(P) \leq \ell(Q)$, entonces $2^{v-u} \leq 1$; en consecuencia $u \geq v$. Así

$$A = \sum_{u\in\mathbb{Z}} \sum_{\ell(P)=2^{-u}} |s_P|^2 \sum_{v=-\infty}^{u} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} 2^{(v-u)\alpha} \left[1 + \frac{|x_P - x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon}.$$

Para B consideremos el conjunto de cubos diádicos P tales que $\ell(P) = 2^{-u}\ell(Q)$. Entonces $u \geq 0$, por que $\ell(P) \leq \ell(Q)$. En consecuencia B puede ser escrito de la siguiente manera

$$B = \sum_{Q} |s_Q|^2 \sum_{u=0}^{\infty} 2^{-u(\alpha+n)} \sum_{\{P:\ell(P)=2^{-u}\ell(Q)\}} \left[1 + \frac{|x_P - x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon}.$$

Pero se afirma que

$$\sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \left[1 + \frac{|x - x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon} \leq c \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1 + |k|)^{-n-\varepsilon} = c(n, \varepsilon).$$

Para ver esta desigualdad, primero probemos que la suma de la izquierda es periódica, con periodo $2^{-v}k$, donde k es cualquiera de los vectores base canónicos $(1, 0, 0, \cdots, 0), (0, 1, 0. \cdots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \cdots, 1)$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \left[1 + \frac{|(x + 2^{-v}k) - x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon} \\
= &\sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \left[1 + \frac{|x - (x_Q - 2^{-v}k)|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon} \\
= &\sum_{\ell(Q')=2^{-v}} \left[1 + \frac{|x - x_{Q'}|}{\ell(Q')}\right]^{-n-\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera suma es periódica. Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x \in Q_{v,0} = \{x : 0 \leq x_i \leq 2^{-v}\}$.

Sea $k \in \mathbb{Z}^n$ tal que $|k| > M$, para $M \in \mathbb{R}_+$ muy grande. Es claro que hay una biyección entre x_Q y $2^{-v}k$. Dado que $x \in Q_{v,0}$ y $|k|$ es muy grande, entonces

$$\frac{|x - 2^{-v}k|}{\ell(Q)} \sim \frac{|2^{-v}k|}{\ell(Q)}.$$

En consecuencia

$$\sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \left[1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon} \sim \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \left[1+\frac{|2^{-v}k|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,|k|>M} (1+|k|)^{-n-\varepsilon}$$

donde la suma de la izquierda corre sobre todos los cubos Q que satisfacen lo anterior.

Sea $k \in \mathbb{Z}^n$ tal que $|k| \leq M$, entonces $1+|k| \leq 1+M$; lo cual implica

$$(1+M)^{-n-\varepsilon} \leq (1+|k|)^{-n-\varepsilon}.$$

Por otra parte

$$\left[1+\frac{|x-2^{-v}k|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon} \leq 1.$$

Así

$$\left[1+\frac{|x-2^{-v}k|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon} \leq \frac{(1+M)^{-n-\varepsilon}}{(1+M)^{-n-\varepsilon}} \leq (1+M)^{n+\varepsilon}(1+|k|)^{-n-\varepsilon}.$$

Por lo tanto

$$\sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \left[1+\frac{|x-2^{-v}k|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon} = \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \left[1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon} \leq c \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,|k|\leq M} (1+|k|)^{-n-\varepsilon},$$

donde la suma de la izquierda corre sobre los cubos diádicos Q que satisfacen las condiciones dadas y $c=(1+M)^{n+\varepsilon}$.

Sumando las desigualdades obtenidas, se tiene

$$\sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \left[1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon} \leq c \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,|k|\leq M} (1+|k|)^{-n-\varepsilon} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,|k|>M} (1+|k|)^{-n-\varepsilon}$$

$$
\begin{aligned}
&= c\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,|k|\le M}(1+|k|)^{-n-\varepsilon}+(1+M)^{-n-\varepsilon}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,|k|>M}(1+|k|)^{-n-\varepsilon}\right\}\\
&\le c\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|)^{-n-\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\sum_{\ell(Q)=2^{-v}}\left[1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon}\le c\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(|k|+1)^{-n-\varepsilon}.$$

Por la proposición 1.17 se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell(Q)=2^{-v}}\left[1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon} &\le (1+M)^{n+\varepsilon}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(|k|+1)^{-n-\varepsilon}\\
&= c(n,\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Dado que $x\in\mathbb{R}^n$ es cualquiera, tomando $x=x_P$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{u\in\mathbb{Z}}\sum_{\ell(P)=2^{-u}}|s_P|^2\sum_{v=-\infty}^{u}2^{(v-u)\alpha}\sum_{\ell(Q)=2^{-v}}\left[1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon}\\
&\le \sum_{u\in\mathbb{Z}}\sum_{\ell(P)=2^{-u}}|s_P|^2\sum_{v=-\infty}^{u}2^{(v-u)\alpha}c(n,\varepsilon)\\
&= c(n,\varepsilon)\sum_{u\in\mathbb{Z}}\sum_{\ell(P)=2^{-u}}|s_P|^2\frac{2^\alpha}{2^\alpha-1}=c(n,\alpha,\varepsilon)\sum_P|s_P|^2.
\end{aligned}
$$

Para estimar B notese que como $\ell(P)=2^{-u}\ell(Q)$ y $u\ge 0$, entonces hay 2^{nu} cubos diádicos P contenidos en Q. Puesto que

$$B=\sum_Q|s_Q|^2\sum_{u=0}^{\infty}2^{-u(\alpha+n)}\sum_{\{P:\ell(P)=2^{-u}\ell(Q)\}}\left[1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon},$$

consideremos la serie

$$\sum_{\{P:\ell(P)=2^{-u}\ell(Q)\}}\left[1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon}.$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\{P:\ell(P)=2^{-u}\ell(Q)\}} \left[1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon} \\
= & \sum_{\{P:\ell(P)=2^{-u}\ell(Q)\}} \left[\frac{2^{-u}}{2^{-u}}+\frac{2^{-u}\,|x_P-x_Q|}{2^{-u}\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon} \\
= & \sum_{\{P:\ell(P)=2^{-u}\ell(Q)\}} \left[\frac{2^{-u}}{2^{-u}}+\frac{2^{-u}\,|x_P-x_Q|}{\ell(P)}\right]^{-n-\varepsilon} \\
= & \; 2^{n(u+\varepsilon)} \sum_{\{P:\ell(P)=2^{-u}\ell(Q)\}} \left[\frac{1}{2^{-u}}+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(P)}\right]^{-n-\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Pero como $u \geq 0$, entonces $\frac{1}{2^{-u}} \geq 1$. En consecuencia

$$
\frac{1}{2^{-u}}+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(P)} \geq 1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(P)}.
$$

Así

$$
\left[\frac{1}{2^{-u}}+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(P)}\right]^{-n-\varepsilon} \leq \left[1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(P)}\right]^{-n-\varepsilon}.
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\{P:\ell(P)=2^{-u}\ell(Q)\}} \left[\frac{1}{2^{-u}}+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(P)}\right]^{-n-\varepsilon} \\
\leq & \sum_{\{P:\ell(P)=2^{-u}\ell(Q)\}} \left[1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(P)}\right]^{-n-\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Usando esto último tenemos que

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\{P:\ell(P)=2^{-u}\ell(Q)\}} \left[1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon} \\
\leq & \; 2^{nu}2^{n\varepsilon} \sum_{\{P:\ell(P)=2^{-u}\ell(Q)\}} \left[1+\frac{|x_P-x_Q|}{\ell(P)}\right]^{-n-\varepsilon} \leq 2^{nu}c\,(n,\varepsilon).
\end{aligned}
$$

En consecuencia

$$
\begin{aligned}
B &\leq \sum_Q |s_Q|^2 \sum_{u=0}^{\infty} 2^{-u(\alpha+n)} c(n,\varepsilon) 2^{nu} = c(n,\varepsilon) \sum_Q |s_Q|^2 \sum_{u=0}^{\infty} 2^{-u\alpha} \\
&= c(n,\alpha,\varepsilon) \sum_Q |s_Q|^2 .
\end{aligned}
$$

Esto nos da la estimación deseada para $\|f\|_{L^2}$.

Para terminar la prueba del teorema, tenemos que quitar la hipótesis $\alpha < \varepsilon$. Que esto se pueda hacer es una consecuencia de que si $\alpha < \beta$, entonces $\frac{1}{2}$ veces una $(\beta, \varepsilon)-$molécula es una $(\alpha, \varepsilon)-$molécula. Para ver esto, todo lo que necesitamos demostrar es que si (1.14) se cumple con potencia β (en lugar de α), entonces esta desigualdad es cierta con potencia α si multiplicamos el lado derecho por dos. Para hacer esto, tenemos dos casos.

Caso 1. Supóngase que $|x-y| \leq \ell(Q)$. Dado que m_Q cumple (1.14) con potencia β se tiene

$$
|m_Q(x) - m_Q(y)| \leq |Q|^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{|x-y|}{\ell(Q)} \right\}^{\beta} \sup_{|z| \leq |x-y|} \left\{ 1 + \frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)} \right\}^{-(n+\varepsilon)} .
$$

Como $\alpha < \beta, 0 < \alpha \leq 1$, y $\frac{|x-y|}{\ell(Q)} \leq 1$, entonces

$$
\left\{ \frac{|x-y|}{\ell(Q)} \right\}^{\beta} \leq \left\{ \frac{|x-y|}{\ell(Q)} \right\}^{\alpha} .
$$

Esto nos da

$$
\begin{aligned}
& |m_Q(x) - m_Q(y)| \\
\leq\ & |Q|^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{|x-y|}{\ell(Q)} \right\}^{\alpha} \sup_{|z| \leq |x-y|} \left\{ 1 + \frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)} \right\}^{-(n+\varepsilon)} \\
\leq\ & 2|Q|^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{|x-y|}{\ell(Q)} \right\}^{\alpha} \sup_{|z| \leq |x-y|} \left\{ 1 + \frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)} \right\}^{-(n+\varepsilon)} .
\end{aligned}
$$

Caso 2. Supóngase que $|x-y| > \ell(Q)$. Como m_Q es una $(\beta, \varepsilon)-$molécula, usando (1.13), se tiene

$$\begin{aligned}|m_Q(x)-m_Q(y)| &\leq |m_Q(x)|+|m_Q(y)|\\ &\leq |Q|^{-\frac{1}{2}}\left\{\left[1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon}+\left[1+\frac{|y-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon}\right\}\end{aligned}$$

para toda $x,y\in R^n$. Pero por hipótesis

$$\left\{1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\leq \sup_{|z|\leq|x-y|}\left\{1+\frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon},$$

además tomando $y=x-(x-y)=x-\widetilde{z}$, y $\widetilde{z}=x-y$. Por lo tanto $|\widetilde{z}|=|x-y|$, entonces

$$\begin{aligned}\left\{1+\frac{|y-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon} &= \left\{1+\frac{|x-\widetilde{z}-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\\ &\leq \sup_{|z|\leq|x-y|}\left\{1+\frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}&|m_Q(x)-m_Q(y)|\\ \leq\ & 2|Q|^{-\frac{1}{2}}\sup_{|z|\leq|x-y|}\left\{1+\frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\\ \leq\ & 2|Q|^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{|x-y|}{\ell(Q)}\right\}^{\alpha}\sup_{|z|\leq|x-y|}\left\{1+\frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}. \blacksquare\end{aligned}$$

Finalizamos este capítulo demostrando que un operador integral singular de Calderón-Zygmund mapea átomos en moléculas. Para evitar tecnicismos consideremos una clase especial de tales operadores. Las ideas presentadas aquí pueden ser usadas para estudiar los operadores de Calderón-Zygmund más generales. Consideremos un operador de convolución T de la forma

$$(Tf)(x)=\int_{\Re^n}K(x-y)f(y)dy$$

donde el núcleo K tiene soporte fuera de una vecindad del origen, $\{x : |x| < \delta\}$, y, para un $0 < \alpha \leq 1$, satisface

$$|K(x)| \leq c\,|x|^{-n}\,; \tag{1.19}$$

$$|K(x-y) - K(x)| \leq c\,|y|^{\alpha}\,|x|^{-\alpha-n} \text{ cuando } |y| \leq \tfrac{|x|}{2}; \tag{1.20}$$

y

$$\int_{R_1<|x|<R_2} K(x)\,dx = 0 \text{ cuando } 0 < R_1 < R_2 < \infty. \tag{1.21}$$

Sea a_Q una función que satisface (1.6), (1.7) con $\gamma = 0$, y (1.8) con $|\gamma| \leq 1$. Tenemos que probar que $Ta_Q = cm_Q$, donde m_Q es una (α,α) −molécula suave y c es independiente de δ y la función a_Q satisface las condiciones mencionadas. El hecho de que T mapea un átomo a_Q en un múltiplo de una molécula m_Q, muestra que T se comporta igual que un operador local.

Prueba. Probemos (1.15). Por el teorema de Fubini y por (1.21), tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} (Ta_Q)(x)\,dx \\
=\;& \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\,a_Q(y)\,dydx \\
=\;& \int_{\mathbb{R}^n} a_Q(y)\left\{\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\,dx\right\}dy \\
=\;& \int_{\mathbb{R}^n} a_Q(y)\left\{\lim_{R_1\to 0,R_2\to\infty}\int_{R_1<|x-y|<R_2} K(x-y)\,dx\right\}dy \\
=\;& \int_{\mathbb{R}^n} a_Q(y)\left\{\lim_{R_1\to 0,R_2\to\infty}\int_{R_1<|z|<R_2} K(z)\,dz\right\}dy = 0
\end{aligned}$$

Para obtener (1.13) lo hacemos en dos casos.

Caso 1. Supóngase que $x \in 10\sqrt{n}Q$. Como $Sop\ a_Q \subset 3Q$, entonces $3Q \subset 3\sqrt{n}Q \subset 4\sqrt{n}Q$; así $|x-y| \leq 6\frac{1}{2}n\ell(Q)$ para $y \in Sop\ a_Q$. En consecuencia, usando (1.21), el teorema del valor medio en la i-ésima coordenada y (1,10) con $\gamma = (0,0,0,\cdots 0,1,0,\cdots 0)$, se tiene

$$|(Ta_Q)(x)| \;=\; \left|\int_{|x-y|\leq 6\frac{1}{2}n\ell(Q)} K(x-y)\left\{a_Q(y) - a_Q(x)\right\}\,dy\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{|x-y|\leq 6\frac{1}{2}n\ell(Q)} |K(x-y)|\,|a_Q(y)-a_Q(x)|\,dy \\
&\leq \int_{|x-y|\leq 6\frac{1}{2}n\ell(Q)} |K(x-y)|\,|\partial_i^{\gamma} a_Q(\xi_i)|\,|x_i-y_i|\,dy \\
&\leq c\ell(Q)^{-1-\frac{n}{2}} \int_{|x-y|\leq 6\frac{1}{2}n\ell(Q)} |K(x-y)|\,|x-y|\,dy \\
&= c\ell(Q)^{-1-\frac{n}{2}} \int_{|z|\leq 6\frac{1}{2}n\ell(Q)} |K(z)|\,|z|\,dz \\
&\leq c\ell(Q)^{-1-\frac{n}{2}} \int_{|z|\leq 6\frac{1}{2}n\ell(Q)} |z|^{-n+1}\,dz \\
&= c\ell(Q)^{-1-\frac{n}{2}} \int_{S^{n-1}} \int_0^{6\frac{1}{2}n\ell(Q)} r^{-n+1+n-1}\,dr\,d\varrho(z') \\
&= c\ell(Q)^{-1-\frac{n}{2}} \left|S^{n-1}\right| \int_0^{6\frac{1}{2}n\ell(Q)} dr = c\ell(Q)^{-\frac{n}{2}}.
\end{aligned}
$$

Pero $|x-x_Q| \leq \left(5n+\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ell(Q)$; lo cual implica que $1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)} \leq \left(5n+\frac{\sqrt{n}}{2}+1\right)$; en consecuencia

$$
\left\{1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\alpha} \geq (5n+\frac{\sqrt{n}}{2}+1)^{-n-\alpha}.
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
|(Ta_Q)(x)| &\leq c\ell(Q)^{-\frac{n}{2}} \frac{(5n+\frac{\sqrt{n}}{2}+1)^{-n-\alpha}}{(5n+\frac{\sqrt{n}}{2}+1)^{-n-\alpha}} \\
&\leq c_{\alpha,n}\ell(Q)^{-\frac{n}{2}} \left\{1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\alpha} \\
&= c_{\alpha,n}\,|Q|^{-\frac{1}{2}} \left\{1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Caso 2. Supóngase que $x \notin 10\sqrt{n}Q$ y $y \in 3Q$, entonces $|y-x_Q| \leq 2\sqrt{n}\ell(Q)$ y

$|x-x_Q| \geq 4\sqrt{n}\ell(Q)$; lo cual implica que $|y-x_Q| \leq 2\sqrt{n}\ell(Q) \leq \frac{1}{2}|x-x_Q|$. En consecuencia, por (1.20) y (1.9), (1.10) (con $\gamma = 0$)

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(Ta_Q\right)(x)\right| \\
= &\left|\int_{3Q}\left[K(x-y)-K(x-x_Q)\right]a_Q(y)dy\right| \\
\leq &\int_{3Q}\left|K(x-y)-K(x-x_Q)\right|\left|a_Q(y)\right|dy \\
\leq &\ c\int_{3Q}\frac{|y-x_Q|^{\alpha}}{|x-x_Q|^{n+\alpha}}\ell(Q)^{-\frac{n}{2}}dy \\
= &\ c\ell(Q)^{-\frac{n}{2}}\left|x-x_Q\right|^{-n-\alpha}\int_{3Q}|y-x_Q|^{\alpha}dy \\
\leq &\ c\ell(Q)^{-\frac{n}{2}}\left|x-x_Q\right|^{-n-\alpha}(2\sqrt{n}\ell(Q))^{\alpha}\int_{3Q}dy \\
= &\ c\ell(Q)^{-\frac{n}{2}+\alpha}\left|x-x_Q\right|^{-n-\alpha}\int_{3Q}dy \\
= &\ c\ell(Q)^{-\frac{n}{2}+\alpha}\left|x-x_Q\right|^{-n-\alpha}|3Q| = c\ell(Q)^{-\frac{n}{2}}\left\{\frac{\ell(Q)}{|x-x_Q|}\right\}^{n+\alpha}.
\end{aligned}
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{\ell(Q)}{|x-x_Q|}\right\}^{n+\alpha} \\
= &\left\{\frac{\ell(Q)}{|x-x_Q|}\right\}^{n+\alpha}\left\{1+\frac{|x-x_Q|}{\ell\left(Q\right)}\right\}^{n+\alpha}\left\{1+\frac{|x-x_Q|}{\ell\left(Q\right)}\right\}^{-n-\alpha} \\
= &\left\{\frac{\ell(Q)}{|x-x_Q|}+1\right\}^{n+\alpha}\left\{1+\frac{|x-x_Q|}{\ell\left(Q\right)}\right\}^{-n-\alpha} \\
\leq &\left(\frac{1}{4\sqrt{n}}+1\right)^{n+\alpha}\left\{1+\frac{|x-x_Q|}{\ell\left(Q\right)}\right\}^{-n-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Usando esta desigualdad en la estimación, se tiene

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(Ta_Q\right)(x)\right| \\
\leq &\ c\ell(Q)^{-\frac{n}{2}}\left\{\frac{\ell(Q)}{|x-x_Q|}\right\}^{n+\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c\,|Q|^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{\ell(Q)}{|x-x_Q|}\right\}^{n+\alpha}\left\{1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{n+\alpha}\left\{\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}+1\right\}^{-n-\alpha}\\
&\leq c\,|Q|^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Así, en ambos casos tenemos

$$
|(Ta_Q)(x)| \leq c\ell(Q)^{-\frac{n}{2}}\left\{\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}+1\right\}^{-n-\alpha},
$$

con c una constante genérica que depende de la dimensión n y de α, y tenemos (1.13) para $m_Q = c^{-1}Ta_Q$.

Finalmente probemos (1.14). La prueba se realizará en casos.

Caso 1. Supóngase que $|x-y| > \ell(Q)$, entonces aplicando el resultado anterior, se tiene

$$
\begin{aligned}
&|(Ta_Q)(x) - (Ta_Q)(y)|\\
\leq\ &|(Ta_Q)(x)| + |(Ta_Q)(y)|\\
\leq\ &c\,|Q|^{-\frac{1}{2}}\left\{\left[1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\alpha}+\left[1+\frac{|y-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\alpha}\right\}
\end{aligned}
$$

para toda $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dado que

$$
\left\{1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\alpha} \leq \sup_{|z|\leq|x-y|}\left\{1+\frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\alpha}
$$

y tomando $y = x-(x-y) = x-\widetilde{z}$, con $\widetilde{z} = x-y$. Entonces $|\widetilde{z}| = |x-y|$ y

$$
\begin{aligned}
\left\{1+\frac{|y-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\alpha} &= \left\{1+\frac{|x-\widetilde{z}-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\alpha}\\
&\leq \sup_{|z|\leq|x-y|}\left\{1+\frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Usando estas estimaciones se tiene

$$
\begin{aligned}
&|(Ta_Q)(x) - (Ta_Q)(y)|\\
\leq\ &2c\,|Q|^{-\frac{1}{2}}\sup_{|z|\leq|x-y|}\left\{1+\frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\alpha}\\
\leq\ &2c\,|Q|^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{|x-y|}{\ell(Q)}\right\}^{\alpha}\sup_{|z|\leq|x-y|}\left\{1+\frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Caso 2. Supóngase que $|x-y| \leq \ell(Q)$. Este caso lo dividimos en dos casos más: cuando $x \notin 7\sqrt{n}Q$ y cuando $x \in 7\sqrt{n}Q$.

Caso 2.1. Si $x \notin 7\sqrt{n}Q$, entonces $|x-y| \leq \ell(Q) \leq \frac{1}{2}|x-z|$ cuando $z \in 3Q$. En consecuencia, podemos aplicar (1.20) y (1.21), con $\gamma = (0,0,\cdots,0)$, para obtener

$$\begin{aligned}
&|(Ta_Q)(y) - (Ta_Q)(x)| \\
= &\left|\int_{3Q} [K(y-z) - K(x-z)]\, a_Q(z)\, dz\right| \\
\leq &\int_{3Q} |K(y-z) - K(x-z)|\, |a_Q(z)|\, dz \\
\leq &\ c\,|Q|^{-\frac{1}{2}}\,|x-y|^{\alpha} \int_{3Q} |x-z|^{-n-\alpha}\, dz.
\end{aligned}$$

Pero como $x \notin 7\sqrt{n}Q$ y $z \in 3Q$, entonces existe $k > 0$ tal que $|x-z| \geq k\,|x-x_Q|$; de donde $|x-z|^{-n-\alpha} \leq \{k\,|x-x_Q|\}^{-n-\alpha}$.

Aplicando esto último tenemos

$$\begin{aligned}
&|(Ta_Q)(y) - (Ta_Q)(x)| \\
\leq &\ c\,|Q|^{-\frac{1}{2}}\,|x-y|^{\alpha}\,|x-x_Q|^{-n-\alpha} \int_{3Q} dz \\
= &\ c\,|Q|^{\frac{1}{2}}\,|x-y|^{\alpha}\,|x-x_Q|^{-n-\alpha} \\
= &\ c\,|Q|^{\frac{1}{2}}\,|Q|^{1}\,|Q|^{-1}\,|x-y|^{\alpha}\,|x-x_Q|^{-n-\alpha} \\
= &\ c\,|Q|^{-\frac{1}{2}} \left\{\frac{|x-y|}{\ell(Q)}\right\}^{\alpha} \left\{\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\alpha}.
\end{aligned}$$

Dado que $|x-x_Q| \geq 3\ell(Q)$ y si $|z| \leq |x-y|$, entonces

$$\begin{aligned}
|x-z-x_Q| &\leq |x-x_Q| + |z| \leq |x-x_Q| + |x-y| \\
&\leq |x-x_Q| + \ell(Q) \leq 2\,|x-x_Q|
\end{aligned}$$

para toda $|z| \leq |x-y|$ (por que $|x-x_Q| \geq 3\ell(Q)$); en consecuencia

$$\begin{aligned}
\frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)} + 1 &\leq 2\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)} + 1 \\
&= \frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\left[2 + \frac{\ell(Q)}{|x-x_Q|}\right] \leq \frac{7}{3}\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)},
\end{aligned}$$

para toda $|z| \leq |x-y|$; de donde obtenemos

$$\left\{\frac{7}{3}\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\alpha} \leq \sup_{|z|\leq|x-y|}\left\{\frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}+1\right\}^{-n-\alpha}.$$

Esto nos da

$$\begin{aligned} &|(Ta_Q)(y)-(Ta_Q)(x)| \\ \leq \;& c\,|Q|^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{|x-y|}{\ell(Q)}\right\}^{\alpha}\sup_{|z|\leq|x-y|}\left\{\frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}+1\right\}^{-n-\alpha}.\end{aligned}$$

Caso 2.2. Supóngase que $x \in 7\sqrt{n}Q$. Como $|x-y| \leq \ell(Q)$. entonces $y \in 10\sqrt{n}Q$ y si $(x-w)$ o $(y-w) \in 3Q$ se tiene que

$$|w| \leq |x-w| + |x| \leq 3\sqrt{n}\ell(Q) + k\ell(Q) = A(n)\,\ell(Q)$$

donde k es una constante. Así, usando la propiedad de cancelación (1.21), se tiene

$$\begin{aligned}(Ta_Q)(x)-(Ta_Q)(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} K(w)\left[a_Q(x-w)-a_Q(y-w)\right]dw \\ &= I+II+III\end{aligned}$$

donde

$$I = \int_{|w|\leq 3|x-y|} K(w)\left[a_Q(x-w)-a_Q(x)\right]dw,$$

$$II = -\int_{|w|\leq 3|x-y|} K(w)\left[a_Q(y-w)-a_Q(y)\right]dw$$

y

$$III = \int_{3|x-y|\leq|w|\leq A\ell(Q)} K(w)\left[a_Q(x-w)-a_Q(y-w)\right]dw.$$

Usando (1.10), con $|\gamma| = 1$, (1.19), y el teorema del valor medio en la $i-$ésima cooordenada, se tiene

$$\begin{aligned}|I| &\leq \int_{|w|\leq 3|x-y|} |K(w)|\,|a_Q(x-w)-a_Q(x)|\,dw \\ &\leq \int_{|w|\leq 3|x-y|} |K(w)|\,|\partial_i^{\gamma} a_Q(\zeta_i)|\,|w_i|\,dw\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{|w|\leq 3|x-y|} |K(w)| \left|\partial_i^\gamma a_Q(\zeta_i)\right| |w| \, dw \\
&= c\ell(Q)^{-1-\frac{n}{2}} \int_{|w|\leq 3|x-y|} |w|^{-n+1} \, dw \\
&= c\ell(Q)^{-1-\frac{n}{2}} \int_{S^{n-1}} \int_0^{3|x-y|} r^{-n+1} r^{n-1} dr d\varrho\left(w'\right) \\
&= c|Q|^{-\frac{1}{2}} \frac{|x-y|}{\ell(Q)}.
\end{aligned}$$

Pero como $\alpha \in (0,1)$ y $|x-y| \leq \ell(Q)$, entonces $\left(\frac{|x-y|}{\ell(Q)}\right)^\alpha \geq \frac{|x-y|}{\ell(Q)}$. Así

$$|I| \leq c|Q|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{|x-y|}{\ell(Q)}\right)^\alpha.$$

De manera análoga se prueba que el módulo de II está acotado por una expresión similar a la que obtuvimos.

Por otra parte, usando el teorema del valor medio en la $i-$ésima coordenada, (1.10) *con* $|\gamma| = 1$ *y coordenadas esféricas, se tiene*

$$\begin{aligned}
|III| &\leq \int_{3|x-y|\leq|w|\leq A\ell(Q)} |K(w)| \left|a_Q(x-w) - a_Q(y-w)\right| dw \\
&= \int_{3|x-y|\leq|w|\leq A\ell(Q)} |K(w)| \left|\partial_i^\gamma a_Q(\zeta_i)\right| |x_i - y_i| \, dw \\
&\leq \int_{3|x-y|\leq|w|\leq A\ell(Q)} |K(w)| \left|\partial_i^\gamma a_Q(\zeta_i)\right| |x-y| \, dw \\
&\leq c\ell(Q)^{-1-\frac{n}{2}} |x-y| \int_{3|x-y|\leq|w|\leq A\ell(Q)} |K(w)| \, dw \\
&\leq c|Q|^{-\frac{1}{2}} \frac{|x-y|}{\ell(Q)} \int_{3|x-y|\leq|w|\leq A\ell(Q)} |w|^{-n} \, dw \\
&= c|Q|^{-\frac{1}{2}} \frac{|x-y|}{\ell(Q)} \ln\left(\frac{A\ell(Q)}{3|x-y|}\right).
\end{aligned}$$

Pero como $|x-y| > 0$, entonces existe $k > 0$ tal que $3|x-y| > k$. Esto último implica que $\ln \frac{A\ell(Q)}{3|x-y|}$ está acotado. En consecuencia

$$|III| \leq c|Q|^{-\frac{1}{2}} \frac{|x-y|}{\ell(Q)} \leq c|Q|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{|x-y|}{\ell(Q)}\right)^\alpha,$$

puesto que $\alpha \in (0,1)$ y $|x-y| \leq \ell(Q)$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |(Ta_Q)(y) - (Ta_Q)(x)| &\leq |I| + |II| + |III| \\ &\leq c|Q|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{|x-y|}{\ell(Q)} \right)^{\alpha}. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} |x - z - x_Q| &\leq |x - x_Q| + |z| \leq |x - x_Q| + |x-y| \\ &\leq 4n\ell(Q) + \ell(Q), \end{aligned}$$

para toda $|z| \leq |x-y|$; de donde

$$\frac{|x - z - x_Q|}{\ell(Q)} + 1 \leq 4n + 2$$

para toda $|z| \leq |x-y|$; en consecuencia

$$\sup_{|z|\leq|x-y|} \left\{ 1 + \frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)} \right\}^{-n-\alpha} \geq (4n+2)^{-n-\alpha}.$$

Esto nos da

$$\begin{aligned} &|(Ta_Q)(y) - (Ta_Q)(x)| \\ \leq\ & \frac{c}{(4n+2)^{-n-\alpha}} |Q|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{|x-y|}{\ell(Q)} \right)^{\alpha} (4n+2)^{-n-\alpha} \\ \leq\ & c|Q|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{|x-y|}{\ell(Q)} \right)^{\alpha} \sup_{|z|\leq|x-y|} \left\{ 1 + \frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)} \right\}^{-n-\alpha}. \end{aligned}$$

Así, tomando los casos 2.1 y 2.2, se tiene

$$\begin{aligned} &|(Ta_Q)(y) - (Ta_Q)(x)| \\ \leq\ & c|Q|^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{|x-y|}{\ell(Q)} \right)^{\alpha} \sup_{|z|\leq|x-y|} \left\{ 1 + \frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)} \right\}^{-n-\alpha} \end{aligned}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Tomando $m_Q = c^{-1} Ta_Q$, se tiene el resultado. ■

DESCOMPOSICIÓN DE ESPACIOS DE LIPSCHITZ

La descomposición de $L^2(\mathbb{R}^n)$, que hemos presentado, es una aplicación directa de la fórmula de reproducción de Calderón. En un principio, puede parecer sorprendente que los espacios de Lipschitz tengan también tal descomposición que es obtenida desde esta fórmula. El espacio de Lipschitz homogéneo $\dot{\Lambda}_\alpha, 0 < \alpha < 1$, consiste de las funciones f definidas en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\textbf{(2.1)} \qquad |f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|^\alpha \text{ para toda } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Si denotamos por $\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}$ al ínfimo de todas las constantes c para las cuales (2.1) se cumple, entonces $\|\cdot\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}$ es una norma para $\dot{\Lambda}_\alpha$ (módulo constantes) y $\left(\dot{\Lambda}_\alpha, \|\cdot\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}\right)$ es un espacio completo.

Probemos que $\|\cdot\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} : \dot{\Lambda}_\alpha \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es una norma. Esto es

(i) $\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \geq 0$ para toda $f \in \dot{\Lambda}_\alpha$;

(ii) $\|\lambda f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} = |\lambda|\, \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y para toda $f \in \dot{\Lambda}_\alpha$;

(iii) $\|f + g\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \leq \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} + \|g\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}$ para toda $f, g \in \dot{\Lambda}_\alpha$;

(iv) $\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} = 0$ si y sólo si $f = cte.$

Es claro que, apartir de la definición de $\|\cdot\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}$, (i) y (ii) son inmediatas. Probemos (iii).

Sean $f, g \in \dot{\Lambda}_\alpha$. Por definición de $\|\cdot\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}$ y por propiedades del supremo, se tiene

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} &= \sup_{x \neq y} \frac{|(f+g)(x) - (f+g)(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|^\alpha} \right\} \\
&\leq \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \sup_{x \neq y} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
&= \|f\|_{\Lambda_\alpha} + \|g\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}.
\end{aligned}$$

Probemos (iv).

Sea $f \in \dot{\Lambda}_\alpha$ Si $\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} = 0$, entonces $\sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} = 0$; lo cual implica que $|f(x) - f(y)| = 0$ para toda $x \neq y \in \mathbb{R}^n$; en consecuencia $f(x) = f(y)$ para toda $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ Por lo tanto $f = cte$ para toda $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Si $f = cte$, entonces $|f(x) - f(y)| = 0 = 0\,|x-y|^\alpha$ para toda $x, y \in \mathbb{R}^n$. En consecuencia $\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} = 0$.

Proposición 2.2

El espacio $\left(\dot{\Lambda}_\alpha, \|\cdot\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}\right)$ es completo.

Prueba. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\dot{\Lambda}_\alpha$, demostremos que existe una función f tal que $f \in \dot{\Lambda}_\alpha$ y $f_n \to f$ en $\dot{\Lambda}_\alpha$.

Como $\{f_n\}$ es de Cauchy, entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\|f_n - f_m\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \leq \varepsilon$ para toda $n, m \geq M$. En consecuencia

$$\sup_{x \neq y} \frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \varepsilon;$$

lo cual implica

$$\frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \varepsilon$$

para toda $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$

Sin pérdida de generalidad, se puede tomar $y = 0$ y como $f_n, f_m \in \dot{\Lambda}_\alpha$ también se puede tomar $f_n(0) = f_m(0) = 0$, entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\,|x|^\alpha$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$. Tomemos $x \in \mathbb{R}^n$ fija, entonces la desigualdad anterior *implica que la sucesión puntual* $\{f_n(x)\}$ *es de Cauchy sobre el campo de* los números complejos; de donde existe $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Por lo tanto, haciendo variar $x \in \mathbb{R}^n$, existe una función f, con dominio en $\mathbb{R}^n$, tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Probemos que $f_n \to f$ en $\dot{\Lambda}_\alpha$. Por definición

$$\begin{aligned} & \frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ \leq & \sup_{x \neq y} \frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ = & \|f_n - f_m\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

para toda $x \neq y$. Fijando n y haciendo tender m a infinito se tiene

$$\begin{aligned} & \lim_{m \to \infty} \frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \\ = \; & \frac{|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

para toda $x \neq y$; aplicando el supremo sobre todas las $x \neq y$ se tiene

$$\sup_{x \neq y} \frac{|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(y)|}{|x-y|^{\alpha}} = \|f_n - f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto $f_n \to f$ en $\dot{\Lambda}_\alpha$. Finalmente, dado que $f_n \in \Lambda_\alpha$, se tiene

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \leq \|f_n - f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} + \|f_n\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \leq \varepsilon + \|f_n\|_{\dot{\Lambda}_\alpha},$$

lo cual implica que $f \in \dot{\Lambda}_\alpha$. ■

Antes de dar una caracterización de $\dot{\Lambda}_\alpha$ que nos muestra la plausibilidad del papel jugado por la fórmula de reproducción de Calderón en el estudio de este espacio, enunciamos un resultado de teoría de distribuciones que será utilizado y un teorema que se usará con frecuencia.

Sean μ una medida definida en un subconjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, E y F espacios de Fréchet.

Teorema 2.3

Si $f : \Omega \to E$ es μ-integrable en E y T es un operador lineal continuo del espacio E en el espacio F, entonces Tf es μ-integrable en E y además

$$\int Tf(x)\, d\mu = T\left[\int f(x)\, d\mu\right].$$

Ver [5] ; capítulo 6.

Lema 2.4

Toda distribución cuyo soporte es $\{0\}$ puede ser represertada por una única combinación lineal finita de las derivadas de la delta de Dirac δ.

Ver [1] ; pag. 76.

Sea φ una función que tiene las propiedades del lema 1.1 (de hecho, es posible suponer menos sobre φ, por ejemplo es suficiente saber que $\varphi \in S(R^n)$ y únicamente necesitamos la propiedad de cancelación (4) para $N = 0$). Sea $\dot{B}^\alpha$ el espacio de todas las funciones f definidas en R^n tales que $f(x) = O(|x|^\alpha)$ cuando $|x| \to \infty$ y

$$\textbf{(2.5)} \qquad \sup\nolimits_{0<t, x\in\mathbb{R}^n} t^{-\alpha} |(\varphi_t * f)(x)| \equiv \|f\|_{\dot{B}^\alpha} < \infty.$$

A causa de la propiedad de cancelación de φ, como es el caso con $\dot{\Lambda}_\alpha$, $\dot{B}^\alpha$ debe ser considerado como un espacio de clases de equivalencia de funciones módulo constantes; con esto entendido $\|\cdot\|_{\dot{B}^\alpha}$ es una norma en B^α . Es claro que (i), (ii), y (iii) son consecuencia inmediata de la definición de $\|\cdot\|_{B^\alpha}$. Sólo hay que probar (iv).

Supóngase que $f = k$, donde k es una constante, entonces

$$\begin{aligned} \|f\|_{B^\alpha} &= \sup\nolimits_{0<t,x\in\mathbb{R}^n} t^{-\alpha} |(\varphi_t * f)(x)| \\ &= \sup\nolimits_{0<t,x\in\mathbb{R}^n} t^{-\alpha} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(y)\, k dy \right| = 0 \end{aligned}$$

Supóngase que $\|f\|_{B^\alpha} = 0$, entonces

$$\sup\nolimits_{0<t,x\in\mathbb{R}^n} t^{-\alpha} |(\varphi_t * f)(x)| = 0;$$

lo cual implica que $t^{-\alpha} |(\varphi_t * f)(x)| = 0$ para toda $t > 0$ y para toda $x \in \mathbb{R}^n$; de donde se tiene que $(\varphi_t * f)(x) = 0$ para toda $t > 0$ y para toda $x \in \mathbb{R}^n$. En consecuencia

$$(\varphi_t * \varphi_t * f)(x) = 0$$

para toda $t > 0$ y para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Como $\varphi_t * \varphi_t * f$ es una distribución, podemos aplicar la transformada de Fourier a la igualdad anterior, y por propiedades de la transformada de Fourier de una convolución se tiene

$$(\varphi_t * \varphi_t * f)^\wedge = \left[\hat{\varphi}(t\cdot)\right]^2 \hat{f} = 0$$

para toda $t > 0$. Dado que $\varphi_t \in D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{\varphi}(t\cdot) \in S(\mathbb{R}^n)$ y como $f \in \dot{B}^\alpha(\mathbb{R}^n)$, entonces $f \in S'(\mathbb{R}^n)$. Pero como la transformada de Fourier es un operador biyectivo en $S'(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{f} \in S'(\mathbb{R}^n)$. En consecuencia

$$\left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \hat{f} \in S'(\mathbb{R}^n).$$

Por lo tanto, la última igualdad implica que

$$\left\langle \left[\hat{\varphi}(t\cdot)\right]^2 \hat{f}, \psi(\cdot) \right\rangle = 0$$

para toda $t > 0$ y para toda $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. En consecuencia

$$\left\langle \hat{f}, \left[\hat{\varphi}(t\cdot)\right]^2 \psi(\cdot) \right\rangle = 0$$

para toda $t > 0$ y para toda $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Integrando con respecto a t se tiene

$$\int_0^\infty \left\langle \hat{f}, \left[\hat{\varphi}(t\cdot)\right]^2 \psi(\cdot) \right\rangle \frac{dt}{t} = 0.$$

Sea $\gamma : (0, \infty) \to S(\mathbb{R}^n)$ definida como $\gamma(t) \equiv \left[\hat{\varphi}(t\cdot)\right]^2 \psi(\cdot)$. Se puede verificar que γ es Lebesgue integrable en $S(\mathbb{R}^n)$ y dado que $\hat{f} \in S'(\mathbb{R}^n)$, entonces por el teorema 2.3 y por la propiedad (5) del lema 1.1 se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left\langle \hat{f}, \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \psi(\zeta) \right\rangle \frac{dt}{t} &= \left\langle \hat{f}, \int_0^\infty \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \psi(\zeta) \frac{dt}{t} \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{f}, \psi(\zeta) \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

para todo $\zeta \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Esto último implica que $Sop\ \hat{f} = \{0\}$ y como $\hat{f} \in S'(\mathbb{R}^n) \subseteq D'(\mathbb{R}^n)$, entonces, por el lema 2.4 existe un entero M no negativo tal que

$$\hat{f}(\zeta) = \sum_{|\beta| \leq M} c_\beta \left(\partial^\beta \delta\right)(\zeta)$$

donde las c_β son números complejos y δ es la delta de Dirac. Aplicando la transformada de Fourier inversa a la última igualdad se tiene

$$f(x) = \sum_{|\beta| \leq M} c_\beta \left(\partial^\beta \delta\right)^\vee (x) = P(x)$$

donde $P(x)$ es un polinomio en x de grado menor o igual a M. Pero por ser $f \in \dot{B}^{\alpha}$, $f(x) = O(|x|^{\alpha})$ cuando $|x| \to \infty$ y como $0 < \alpha < 1$, entonces $P(x)$ es un polinomio constante. Así, f es una función constante. ■

El siguiente resultado nos será útil para probar el teorema 2.7.

Teorema 2.6

Si $0 < \alpha < 1$, entonces $\dot{B}^{\alpha} = \dot{\Lambda}_\alpha$ y las normas $\|\cdot\|_{\Lambda_\alpha}$ y $\|\cdot\|_{B^\alpha}$ son equivalentes.

Prueba. Sea $f \in \dot{\Lambda}_\alpha$. Demostremos que $f \in \dot{B}^{\alpha}$; es decir, que $f(x) = O(|x|^{\alpha})$ cuando $|x| \to \infty$ y $\|f\|_{B^\alpha} < \infty$.

Como $f \in \Lambda_\alpha$, entonces $|f(x) - f(y)| \leq \|f\|_{\Lambda_\alpha} |x-y|^{\alpha}$ para toda $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dado que f es una clase de equivalencia de funciones módulo constantes, sin pérdida de generalidad se puede suponer que en $y = 0$ el valor de f es 0. En consecuencia

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\Lambda_\alpha} |x|^{\alpha}$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto

$$\frac{|f(x)|}{|x|^{\alpha}} \leq \|f\|_{\Lambda_\alpha} < \infty$$

cuando $|x| \to \infty$. Esto implica que $f(x) = O(|x|^{\alpha})$.

Probemos que $\|f\|_{B^\alpha} < \infty$. Dado que $f \in \Lambda_\alpha$ y por el inciso (4) del lema 1.1 se tiene que

$$\begin{aligned}
|(\varphi_t * f)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(x-y) f(y)\, dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(x-y) \{f(y) - f(x)\}\, dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_t(x-y)| \, |f(y) - f(x)|\, dy \\
&\leq \|f\|_{\Lambda_\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_t(x-y)| \, |x-y|^{\alpha}\, dy \\
&= t^{\alpha} \|f\|_{\Lambda_\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(u)| \, |u|^{\alpha}\, du.
\end{aligned}$$

Sólo basta ver que la integral $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(u)|\,|u|^\alpha\,du$ es finita.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(u)|\,|u|^\alpha\,du &= \int_{|u|\leq 1} |\varphi(u)|\,|u|^\alpha\,du + \int_{|u|>1} |\varphi(u)|\,|u|^\alpha\,du \\
&= I + II.
\end{aligned}
$$

Estimemos I. Como $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces $|\varphi(u)| \leq k\,|u|^{-n}$, donde k es una constante; en consecuencia usando coordenadas esféricas

$$
\begin{aligned}
I &\leq k \int_{|u|\leq 1} |u|^{-n+\alpha}\,du = k \int_{S^{n-1}} \int_0^1 r^{-n+\alpha} r^{n-1} d\varrho\left(u'\right) dr \\
&= k\left|S^{n-1}\right| \int_0^1 r^{\alpha-1} dr = \frac{k\left|S^{n-1}\right|}{\alpha} < \infty.
\end{aligned}
$$

Análogamente, pero con $|\varphi(u)| \leq c\,|u|^{-n-1}$

$$
\begin{aligned}
II &\leq c \int_{|u|>1} |u|^{-n-1+\alpha}\,du \leq \int_{S^{n-1}} \int_1^\infty r^{-n-1+\alpha} r^{n-1} d\varrho\left(u'\right) dr \\
&= \frac{c\left|S^{n-1}\right|}{1-\alpha} < \infty.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
|(\varphi_t * f)(x)| \leq k t^\alpha \|f\|_{\Lambda_\alpha};
$$

lo cual implica que

$$
t^{-\alpha} |(\varphi_t * f)(x)| \leq k \|f\|_{\Lambda_\alpha}
$$

para toda $t > 0$ y para toda $x \in \mathbb{R}^n$. Así

$$
\|f\|_{\dot{B}^\alpha} \leq k \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} < \infty.
$$

Ahora probemos el recíproco. Supongamos que $f \in \dot{B}^\alpha$, queremos demostrar que $f \in \Lambda_\alpha$. Supóngase que nuestras hipótesis nos permiten representar a f por la fórmula 1.5. Entonces

$$
\begin{aligned}
&|f(x) - f(y)| \\
&= \left| \int_0^\infty (\varphi_t * \varphi_t * f)(x) \frac{dt}{t} - \int_0^\infty (\varphi_t * \varphi_t * f)(y) \frac{dt}{t} \right| \\
&\leq \left\{ \int_0^{|x-y|} + \int_{|x-y|}^\infty \right\} \left\{ |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x) - (\varphi_t * \varphi_t * f)(y)| \frac{dt}{t} \right\} \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Estimemos I_1. Como $f \in \dot{B}^{\alpha}$, entonces

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(\varphi_t * f)(x)| &= \|\varphi_t * f\|_\infty \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n, t>0} t^{-\alpha} |(\varphi_t * f)(x)| \\ &= \|f\|_{\dot{B}^\alpha} < \infty; \end{aligned}$$

en consecuencia, usando las propiedades de la convolución y el hecho de que $\varphi_t \in S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \|\varphi_t * \varphi_t * f\|_\infty &\le \|\varphi_t\|_{L^1} \|\varphi_t * f\|_\infty = t^\alpha \|\varphi\|_{L^1} t^{-\alpha} \|\varphi_t * f\|_\infty \\ &\le t^\alpha \|\varphi\|_{L^1} \|f\|_{\dot{B}^\alpha}. \end{aligned}$$

Así, usando esto último

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{|x-y|} |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x) - (\varphi_t * \varphi_t * f)(y)| \frac{dt}{t} \\ &\le \int_0^{|x-y|} |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x)| \frac{dt}{t} + \int_0^{|x-y|} |(\varphi_t * \varphi_t * f)(y)| \frac{dt}{t} \\ &\le 2\int_0^{|x-y|} \|\varphi_t * \varphi_t * f\|_\infty \frac{dt}{t} \le 2\|\varphi\|_{L^1} \|f\|_{\dot{B}^\alpha} \int_0^{|x-y|} t^{\alpha-1} dt \\ &= c_{\alpha,\varphi} \|f\|_{\dot{B}^\alpha} |x-y|^\alpha. \end{aligned}$$

Estimemos I_2. Observemos que como $|x-y| \le t$ en el dominio de integración, entonces por ser $\varphi \in S(R^n)$, por el teorema del valor medio y dado que $f \in \dot{B}^{\alpha}$

$$\begin{aligned} & |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x) - (\varphi_t * \varphi_t * f)(y)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(x-z)(\varphi_t * f)(z)\,dz - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(y-z)(\varphi_t * f)(z)\,dz \right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_t(x-z) - \varphi_t(y-z)| |(\varphi_t * f)(z)|\,dz \\ &= t^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_t(x-z) - \varphi_t(y-z)| t^{-\alpha} |(\varphi_t * f)(z)|\,dz \\ &\le t^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_t(x-z) - \varphi_t(y-z)| \sup_{z\in\mathbb{R}^n, t>0} t^{-\alpha} |(\varphi_t * f)(z)|\,dz \\ &= t^\alpha \|f\|_{\dot{B}^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_t(x-z) - \varphi_t(y-z)|\,dz \\ &= t^\alpha \|f\|_{\dot{B}^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \varphi\left(\frac{x-z}{t}\right) - \varphi\left(\frac{y-z}{t}\right) \right| \frac{dz}{t^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t^{\alpha}\|f\|_{\dot{B}^{\alpha}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\varphi\left(u+\frac{x-y}{t}\right)-\varphi(u)\right|du \\
&= t^{\alpha}\|f\|_{\dot{B}^{\alpha}}\int_{\mathbb{R}^n}|(\nabla\varphi)(z+\eta)|\left|\frac{x-y}{t}\right|dz \\
&\leq t^{\alpha-1}\|f\|_{\dot{B}^{\alpha}}|x-y|\int_{\mathbb{R}^n}\sup\nolimits_{|\eta|\leq 1}|(\nabla\varphi)(z+\eta)|\,dz \\
&= c_{\varphi}\, t^{\alpha-1}\|f\|_{\dot{B}^{\alpha}}|x-y|\,.
\end{aligned}$$

Esto nos da

$$I_2 \leq c_{\varphi}\ \|f\|_{\dot{B}^{\alpha}}|x-y|\int_{|x-y|}^{\infty}t^{\alpha-2}dt = c_{\varphi,\alpha}\|f\|_{\dot{B}^{\alpha}}|x-y|^{\alpha}\,.$$

De las estimaciones de I_1 e I_2 se sigue

$$|f(x)-f(y)| \leq c_{\varphi,\alpha}\ \ \|f\|_{\dot{B}^{\alpha}}|x-y|^{\alpha}$$

para toda $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Así

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_{\alpha}} \leq c\,\|f\|_{\dot{B}^{\alpha}}\,,$$

lo cual implica que $f \in \dot{\Lambda}_{\alpha}$. ■

Este es el resultado deseado. Pero nuestro argumento estuvo basado en la igualdad (1.5). Primero señalemos que, dado que los espacios que estamos considerando consisten de clases de equivalencia de funciones (módulo constantes), no podemos esperar que tal igualdad se cumpla en general: de nuestras suposiciones, el lado derecho de la igualdad (1.5) es cero si f es constante. Así, lo mejor que podemos esperar es la igualdad

$$f(x)-f(y)=\int_{0}^{\infty}\{(\varphi_t*\varphi_t*f)(x)-(\varphi_t*\varphi_t*f)(y)\}$$

que precisamente es lo que usamos en nuestro argumento. Esta igualdad se cumple si el lado derecho es interpretado como convergencia módulo constantes. Discutiremos este punto técnico en la parte final del capítulo. Una observación similar se aplica a la convergencia de la descomposición atómica de $f \in \dot{\Lambda}_{\alpha}$ en el siguiente teorema. Aquí presentamos los aspectos formales de ésta descomposición e ignoramos esas cuestiones de convergencia, las cuales se tratarán al final del capítulo. Resulta que estos aspectos formales son similares a los de esa situación en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y dan una buena ilustración de cómo las técnicas que estamos desarrollando se aplican a los espacios de Lipschitz.

Teorema 2.7

Supóngase que $0 < \alpha < 1$, $f \in\dot{\Lambda}_\alpha$ y $N \in \mathbb{Z}_+$. Entonces, existe una sucesión $\{a_Q\} \subset D(\mathbb{R}^n)$, indexada por los cubos diádicos, y una sucesión de coeficientes $\{s_Q\}$, $0 \le s_Q < \infty$, tal que

$$f = \sum_Q s_Q a_Q; \tag{2.8}$$

$$Sop\ a_Q \subset 3Q; \tag{2.9}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma a_Q(x)\,dx = 0 \text{ si } |\gamma| \le N; \tag{2.10}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(\partial^\gamma a_Q)(x)| \le c_\gamma \ell(Q)^{-|\gamma|-\frac{n}{2}} \text{ para toda } \gamma \in \mathbb{Z}_+^n; \tag{2.11}$$

y

$$|Q|^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{n}} s_Q = \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \text{ para cada cubo diádico.} \tag{2.12}$$

Observaciones. (2.9), (2.10) y (2.11) son exactamente los mismos que (1.8), (1.9) y (1.10). La igualdad (2.8) es, formalmente, la misma que (1.7). Cuando establezcamos el recíproco de este teorema, veremos que (2.12) es la condición "natural" que los "coeficientes" de una función de Lipschitz deben de satisfacer.

Prueba. Como $N \in \mathbb{Z}_+$, entonces, por el lema 1.1, existe φ que satisface (1)-(5) del mismo lema. Consideremos a tal φ y $f \in\dot{\Lambda}_\alpha$. Entonces

$$f(x) = \sum_Q \int\int_{T(Q)} \varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y)\,dy\frac{dt}{t}$$

(se le recuerda al lector que el significado y validez de esta fórmula será discutido al final del capítulo). Sea $s_Q = |Q|^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{n}} \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}$ para cada cubo diádico Q; así (2.12) es verdadero. Sea

$$a_Q(x) = \frac{1}{s_Q}\int\int_{T(Q)} \varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y)\,dy\frac{dt}{t},$$

entonces

$$\sum_{Q} s_Q a_Q(x) = \sum_{Q} \int\int_{T(Q)} \varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y)\, dy \frac{dt}{t} = f(x),$$

de donde (2.8) se sigue. Los incisos (2.9) y (2.10) se siguen por los mismos argumentos que usamos para establecer (1.8) y (1.9) en el teorema (1.6). Finalmente probemos (2.11).

Prueba de (2.11). Usando fórmulas de intercambio, lo cual se puede hacer por ser $\varphi_t \in D(\mathbb{R}^n)$ y por ser el dominio de integración un compacto, se tiene

$$\begin{aligned}
&|\partial^\gamma a_Q(x)| \\
=\ & \left|\partial^\gamma \left\{\frac{1}{s_Q}\int\int_{T(Q)} \varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y)\, dy \frac{dt}{t}\right\}\right| \\
\leq\ & \frac{1}{s_Q}\int\int_{T(Q)} |\partial^\gamma \varphi_t(x-y)|\, |(\varphi_t * f)(y)|\, dy \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Pero como $0 < \alpha < 1$, por el teorema 2.6 se tiene que $\dot{B}^{\alpha} = \dot{\Lambda}_\alpha$ y existen constantes positivas c y k tales que

$$c\, \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \leq \|f\|_{\dot{B}^\alpha} \leq k\, \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha};$$

en consecuencia $t^{-\alpha}\, |(\varphi_t * f)(y)| \leq k\, \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}$; lo cual implica que $|(\varphi_t * f)(y)| \leq t^\alpha k\, \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}$ para $y \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$, y $\frac{\ell(Q)}{2} \leq t \leq \ell(Q)$ para $(x,t) \in T(Q)$.

Así, usando esto último y la definición de s_Q, se tiene que

$$\begin{aligned}
&|\partial^\gamma a_Q(x)| \\
\leq\ & \frac{1}{s_Q} k\, \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \int\int_{T(Q)} t^\alpha\, |\partial^\gamma \varphi_t(x-y)|\, dy \frac{dt}{t} \\
\leq\ & \frac{1}{s_Q} k\, \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \int\int_{T(Q)} t^{\alpha-n-|\gamma|}\, \|\partial^\gamma \varphi\|_\infty\, dy \frac{dt}{t} \\
=\ & |Q|^{-\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{2}}\, k\, \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}\, \|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha}^{-1}\, \|\partial^\gamma \varphi\|_\infty \int\int_{T(Q)} t^{\alpha-n-|\gamma|} dy \frac{dt}{t} \\
=\ & k_\varphi\, |Q|^{-\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{2}} \int_Q dy \int_{\frac{\ell(Q)}{2}}^{\ell(Q)} t^{\alpha-n-|\gamma|-1} dt \\
\leq\ & k_\varphi\, |Q|^{-\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{2}}\, \ell(Q)^\alpha \int_Q dy \int_{\frac{\ell(Q)}{2}}^{\ell(Q)} t^{-n-|\gamma|-1} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= k_{\rho} |Q|^{-\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{2}} \ell(Q)^{\alpha} \int_{\frac{\ell(Q)}{2}}^{\ell(Q)} t^{-n-|\gamma|-1} dt \\ &= k_{\varphi,\gamma} \ell(Q)^{-\alpha+\frac{n}{2}+\alpha-n-|\gamma|} = k_{\varphi,\gamma} \ell(Q)^{-\frac{n}{2}-|\gamma|}. \end{aligned}$$

De donde

$$|\partial^{\gamma} a_Q(x)| \leq k_{\varphi,\gamma} \ell(Q)^{-\frac{n}{2}-|\gamma|}$$

para toda $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ y para toda $x \in \mathbb{R}^n$. En consecuencia

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^{\gamma} a_Q(x)| \leq k_{\varphi,\gamma} \ell(Q)^{-\frac{n}{2}-|\gamma|}$$

para toda $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$. ■

Como fue el caso para $L^2(\mathbb{R}^n)$, hay un recíproco. El recíproco involucra *las mismas moléculas que introducimos en el capítulo 1, excepto que la* condición de momento cero (la condición (1.15)) no es requerida.

Teorema 2.13

Supóngase que m_Q, Q un cubo diádico, es una función que satisface

$$(2.14) \quad |m_Q(x)| \leq |Q|^{-\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-(n+\varepsilon)} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

y

$$(2.15) \quad |m_Q(x) - m_Q(y)| \leq |Q|^{-\frac{1}{2}} \left\{\frac{|x-y|}{\ell(Q)}\right\}^{\beta} \sup_{|z|\leq|x-y|} \left\{1 + \frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-(n+\varepsilon)}$$

para toda $x, y \in \mathbb{R}^n$, donde $0 < \alpha < \beta \leq 1$ y $0 < \varepsilon$. Además, supóngase que $\{s_Q\}$ es una sucesión indexada por los cubos diádicos que satisface

$$A \equiv \sup_Q |Q|^{-\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{2}} |s_Q| < \infty.$$

Entonces $f = \sum_Q s_Q m_Q$ pertenece a $\dot{\Lambda}_\alpha$ y existe una constante $c = c(n, \alpha, \beta, \gamma)$ tal que

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \leq cA.$$

Prueba. $f \in \dot{\Lambda}_\alpha$ si y sólo si existe c constante tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\alpha$ para toda $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Si $x = y$ la desigualdad se cumple. Sea $x \neq y$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$2^{-(k+1)} \leq |x-y| < 2^{-k}$. Usando ésto, descomponemos a f de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_Q s_Q m_Q(x) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} s_Q m_Q(x) \\ &= \sum_{v=-\infty}^{k} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} s_Q m_Q(x) + \sum_{v=k+1}^{\infty} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} s_Q m_Q(x) \\ &= f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

La prueba consiste en estimar f_1 y f_2.

Estimación de f_1. De (2.15) y por la hipótesis, se tiene que

$$|f_1(x) - f_1(y)| \leq \sum_{v=-\infty}^{k} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} |s_Q| \, |m_Q(x) - m_Q(y)|$$

$$\leq \sum_{v=-\infty}^{k} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} |s_Q| \, |Q|^{-\frac{1}{2}} \left\{ \tfrac{|x-y|}{\ell(Q)} \right\}^\beta \sup_{|z| \leq |x-y|} \left\{ 1 + \tfrac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)} \right\}^{-n-\varepsilon}$$

$$= A|x-y|^\beta \sum_{v=-\infty}^{k} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \ell(Q)^{\alpha-\beta} \sup_{|z| \leq |x-y|} \left\{ 1 + \tfrac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)} \right\}^{-n-\varepsilon}$$

$$= A|x-y|^\beta \sum_{v=-\infty}^{k} (2^{-v})^{\alpha-\beta} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \sup_{|z| \leq |x-y|} \left\{ 1 + \tfrac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)} \right\}^{-n-\varepsilon}$$

Dado que en este caso $v \leq k$, entonces $2^{-k} \leq 2^{-v} = \ell(Q)$; en consecuencia

$$|z| \leq |x-y| \leq 2^{-k} \leq 2^{-v} = \ell(Q).$$

Así

$$\begin{aligned} |x - x_Q| &\leq |x-z-x_Q| + |z| \leq |x-z-x_Q| + |x-y| \\ &\leq |x-z-x_Q| + \ell(Q) \end{aligned}$$

para toda $|z| \leq |x-y|$; de donde

$$\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)} + 1 \leq \frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)} + 2 \leq 2\left[1 + \frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right]$$

para toda $|z| \leq |x-y|$; lo cual implica que

$$\sup_{|z|\leq|x-y|}\left\{1+\frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}\leq 2^{n+\varepsilon}\left\{\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}+1\right\}^{-n-\varepsilon}.$$

Esto nos da

$$\begin{aligned}
&|f_1(x)-f_1(y)| \\
\leq\ & A|x-y|^{\beta}\sum_{v=-\infty}^{k}\left(2^{-v}\right)^{\alpha-\beta}\sum_{\ell(Q)=2^{-v}}2^{n+\varepsilon}\left\{\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}+1\right\}^{-n-\varepsilon} \\
\leq\ & ck2^{n+\varepsilon}A|x-y|^{\beta}\sum_{v=-\infty}^{k}\left(2^{-v}\right)^{\alpha-\beta}\sum_{j\in\mathbf{Z}^n}(1+|j|)^{-n-\varepsilon} \\
=\ & c(n.\varepsilon)A|x-y|^{\beta}\sum_{v=-\infty}^{k}\left(2^{-v}\right)^{\alpha-\beta} \\
=\ & c(n,\varepsilon)A|x-y|^{\beta}\frac{2^{-k(\alpha-\beta)}}{1-2^{\alpha-\beta}},
\end{aligned}$$

donde usamos la siguiente desigualdad (la cual fue probada dentro de la demostración del teorema 1.18)

$$\sum_{\ell(Q)=2^{-v}}\left[1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right]^{-n-\varepsilon}\leq c\sum_{j\in\mathbf{Z}^n}(1+|j|)^{-n-\varepsilon}=c(n,\varepsilon).$$

Además dado que $|x-y|<2^{-k}$, entonces $2^k<|x-y|^{-1}$; lo cual implica que $2^{k(\beta-\alpha)}\leq|x-y|^{\alpha-\beta}$. Esto nos da

$$|f_1(x)-f_1(y)|\leq c(n,\varepsilon,\alpha,\beta)A|x-y|^{\beta}|x-y|^{\alpha-\beta}=cA|x-y|^{\alpha}.$$

Estimación de f_2. La estimación para f_2 se sigue directamente de (2.14):

$$\begin{aligned}
f_2(x) &\leq \sum_{v=k+1}^{\infty}\sum_{\ell(Q)=2^{-v}}|s_Q||m_Q(x)| \\
&\leq \sum_{v=k+1}^{\infty}\sum_{\ell(Q)=2^{-v}}|s_Q||Q|^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{v=k+1}^{\infty} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} |s_Q| \, |Q|^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{n}} \, |Q|^{\frac{\alpha}{n}} \left\{1 + \frac{|x - x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon} \\
&\leq A \sum_{v=k+1}^{\infty} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} |Q|^{\frac{\alpha}{n}} \left\{1 + \frac{|x - x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon} \\
&= A \sum_{v=k+1}^{\infty} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \ell(Q)^{\alpha} \left\{1 + \frac{|x - x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon} \\
&= A \sum_{v=k+1}^{\infty} 2^{-v\alpha} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \left\{1 + \frac{|x - x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon} \\
&\leq c(n,\varepsilon) \, A \sum_{v=k+1}^{\infty} 2^{-v\alpha},
\end{aligned}
$$

donde se volvió a usar la desigualdad arriba mencionada. Pero

$$
\sum_{v=k+1}^{\infty} 2^{-v\alpha} = \frac{2^{-k\alpha}}{2^{\alpha} - 1}.
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
|f_2(x)| &\leq c(n,\varepsilon) \, A \frac{2^{-k\alpha}}{2^{\alpha} - 1} = c(n,\alpha,\varepsilon) \, A 2^{-k\alpha} \\
&= c(n,\alpha,\varepsilon) \, A 2^{-(k+1)\alpha} 2^{\alpha} = c(n,\alpha,\varepsilon) \, A 2^{-\alpha(k+1)}.
\end{aligned}
$$

Pero como $\alpha > 0$ y $2^{-(k+1)} \leq |x - y|$, entonces $2^{-\alpha(k+1)} \leq |x - y|^{\alpha}$. Esto nos da

$$
|f_2(x)| \leq c(n,\alpha,\varepsilon) \, A \, |x - y|^{\alpha}.
$$

Por lo tanto

$$
|f_2(x) - f_2(y)| \leq |f_2(x)| + |f_2(y)| \leq cA \, |x - y|^{\alpha}.
$$

Así, el teorema queda demostrado. ■

Como hemos notado, únicamente presentamos los aspectos formales de los argumentos de estos teoremas. A continuación discutimos sus interpretaciones y sus resultados de convergencia.

(I). Sobre la convergencia de las representaciones molecular y atómica de elementos en $\dot{\Lambda}_\alpha$.

En los teoremas (2.7) y (2.13) consideramos las series $\sum_Q s_Q a_Q$ y $\sum_Q s_Q m_Q$, respectivamente, como expresiones formales. Ahora discutiremos el sentido en el cual estas series representan elementos f en $\dot{\Lambda}_\alpha$. Comenzamos con la siguiente observación: dado que $\int \varphi = 0$ (propiedad (4) del lema 1.1) se sigue que si reemplazamos f por $f + c$, c una constante, en la fórmula de Calderón

$$f(x) = \int_0^\infty (\varphi_t * \varphi_t * f)(x) \frac{dt}{t},$$

la descomposición atómica suave resultante (igualdad (2.8) del teorema 2.7) de $f + c$, precisamente será la misma como la que obtuvimos para f. Esto es apropiado y no es sorprendente para funciones $f \in \dot{\Lambda}_\alpha$, dado que $\dot{\Lambda}_\alpha$ es un espacio de funciones módulo constantes. Esta "ambigüedad" no es importante para la teoría $L^2(R^n)$ que se desarrolló en el capítulo 1, puesto que las funciones constantes distintas de cero no pertenecen a $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como una consecuencia, podríamos suponer que lo mejor que podemos esperar para la convergencia en (2.8) es que, para cada $f \in \dot{\Lambda}_\alpha$, existe una constante c tal que $f = c + \sum_Q s_Q a_Q$. Resulta que la situación es más complicada: en un sentido, la convergencia de esta última es "módulo constantes". Hagamos esta afirmación más precisa

Comencemos examinando la convergencia de la serie $\sum_Q s_Q m_Q$ cuando

$$A \equiv \sup_Q |s_Q| |Q|^{-\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2}} < \infty,$$

y m_Q satisface (2.14) y (2.15) para $0 < \alpha < \beta \leq 1$ y $\varepsilon > 0$.

Sabemos que

$$\begin{aligned}
\sum_Q s_Q m_Q(x) &= \sum_{v=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} s_Q m_Q(x) \\
&= \sum_{v=-\infty}^{-N} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} s_Q m_Q(x) + \sum_{v=-N}^{\infty} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} s_Q m_Q(x)
\end{aligned}$$

para toda $N \in \mathbb{Z}_+$. En consecuencia, para cada $v \in \mathbb{Z}$, por (2.14) y por la hipótesis, se tiene que

$$\begin{aligned}
& \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} |s_Q| \, |m_Q(x)| \\
\leq & \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} |s_Q| \, |Q|^{-\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{|x - x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon} \\
= & \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} |s_Q| \, |Q|^{-\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{2}} |Q|^{\frac{\alpha}{n}} \left\{1 + \frac{|x - x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon} \\
\leq & \; A \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} |Q|^{\frac{\alpha}{n}} \left\{1 + \frac{|x - x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon} \\
= & \; A \, 2^{-\alpha v} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \left\{1 + \frac{|x - x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Pero en la demostración del teorema 1.18, en el capítulo 1, se probó que

$$\sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \left\{1 + \frac{|x - x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon}$$

está dominada por una constante c que es independiente de v. En particular, para todo $N \in \mathbb{Z}_+$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{v=-N}^{\infty} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} |s_Q| \, |m_Q(x)| &\leq cA \sum_{v=-N}^{\infty} 2^{-v\alpha} = cA \; 2^{\alpha N} \left[\frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1}\right] \\
&= cA \; 2^{\alpha N},
\end{aligned}$$

lo cual nos da la convergencia de la parte de la suma $\sum s_Q m_Q(x)$ que involucra solamente cubos "pequeños" (aquellos con lado no mayor que 2^N). Sin embargo, esta estimación no nos da información de la suma complementaria

$$\sum_{v=-\infty}^{-N} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} s_Q m_Q(x).$$

De hecho, no es difícil dar un ejemplo donde se muestre que esta última serie no converge puntualmente.

Presentaremos este ejemplo después de probar que hay una manera de obtener un elemento $f \in \Lambda_\alpha$ que está representado por la suma $\sum_Q s_Q m_Q$. Más precisamente, veremos que si

$$f_N(x) = \sum_{v=-N}^{\infty} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} s_Q m_Q(x),$$

lo cual tiene sentido porque la serie del lado derecho es absolutamente convergente, entonces existen constantes $\{c_N\}, N \geq 0$, tales que la sucesión $\{f_N(x) - c_N\}$ converge. Además, la función límite obtenida pertenece a Λ_α .

Definición. Para un punto $p \in \mathbb{R}^n$, se define

$$f_{N,p}(x) \equiv f_N(x) - f_N(p),$$

para cada $N \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

Como ya se indicó, los miembros de Λ_α son clases de equivalencia y $f_{N,p}(x)$ es la función equivalente a f_N que es cero en p.

Lema 2.16

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ *fijo, la sucesión de números complejos*

$$\{f_{N,p}(x)\}, \, N \geq 0,$$

es una sucesión de Cauchy.

Prueba. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ fijo. Sea $N_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $|x-p| < 2^{N_0}$. Entonces por (2.15) y si $N_0 \leq M \leq N$, se tiene

$$\begin{aligned}
&|f_{N,p}(x) - f_{M,p}(x)| = |\{f_N(x) - f_M(x)\} - \{f_N(p) - f_M(p)\}| \\
&= \left| \sum_{v=-N}^{-M-1} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} s_Q m_Q(x) - \sum_{v=-N}^{-M-1} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} s_Q m_Q(p) \right| \\
&\leq \sum_{v=-N}^{-M-1} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} |s_Q| \, |m_Q(x) - m_Q(p)| \\
&\leq \sum_{v=-N}^{-M-1} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} |s_Q| \, |Q|^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{|x-p|}{\ell(Q)} \right\}^{\beta} \sup\nolimits_{|z| \leq |x-p|} \left\{ 1 + \frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)} \right\}^{-(n+\varepsilon)}
\end{aligned}$$

$$\leq A \sum_{v=-N}^{-M-1} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \ell(Q)^{\alpha-\beta} |x-p|^{\beta} \sup_{|z|\leq|x-p|} \left\{1+\tfrac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-(n+\varepsilon)}$$

$$= A|x-p|^{\beta} \sum_{v=-N}^{-M-1} (2^{-v})^{\alpha-\beta} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \sup_{|z|\leq|x-p|} \left\{1+\tfrac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-(n+\varepsilon)}.$$

Pero, para todo cubo Q involucrado en la suma anterior

$$|x-p| \leq 2^{N_0} \leq 2^{M} \leq 2^{N} = 2^{-(-N)} = 2^{-v} = \ell(Q);$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} |x-x_Q| &\leq |x-z-x_Q| + |z| \leq |x-z-x_Q| + |x-p| \\ &\leq |x-z-x_Q| + \ell(Q) \end{aligned}$$

para todo $|z| \leq |x-p|$; de donde

$$\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)} + 1 \leq 2\left\{1+\frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}$$

para todo $|z| \leq |x-p|$; lo cual implica que

$$\sup_{|z|\leq|x-p|} \left\{1+\frac{|x-z-x_Q|}{\ell(Q)}\right\}^{-n-\varepsilon} \leq 2^{n+\varepsilon} \left\{\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}+1\right\}^{-n-\varepsilon}.$$

Esto nos da

$$\begin{aligned} &|f_{N,p}(x) - f_{M,p}(x)| \\ \leq\ & 2^{n+\varepsilon} A|x-p|^{\beta} \sum_{v=-N}^{-M-1} (2^{-v})^{\alpha-\beta} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} \left\{\frac{|x-x_Q|}{\ell(Q)}+1\right\}^{-n-\varepsilon} \\ \leq\ & c(n,\varepsilon) A|x-p|^{\beta} \sum_{v=-N}^{-M-1} (2^{-v})^{\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \sum_{v=-N}^{-M-1} (2^{-v})^{\alpha-\beta} &= \frac{2^{(M+1)(\alpha-\beta)} - 2^{(N+1)(\alpha-\beta)}}{1-2^{\alpha-\beta}} \\ &\leq \frac{2^{(M+1)(\alpha-\beta)}}{1-2^{\alpha-\beta}} \leq \frac{2^{M(\alpha-\beta)}}{1-2^{\alpha-\beta}}, \end{aligned}$$

por que $\alpha - \beta < 0$. Por lo tanto

$$|f_{N,p}(x) - f_{M,p}(x)| \leq c(n, \alpha, \beta, \varepsilon) A |x-p|^{\beta} 2^{M(\alpha-\beta)} \to 0$$

cuando $M \to \infty$. Así $\{f_{N,p}(x)\}$, $N \geq 0$, es de Cauchy. Desde luego, el valor de la constante c cambia de una desigualdad a otra. El hecho importante es que el último valor de c depende de $\alpha, \beta, \varepsilon$ y n. ■

Obsérvese que estas estimaciones, las cuales dependen de $|x-p|^{\beta}$, no nos dan una condición de Cauchy uniforme. Sin embargo, obtenemos una función límite f_p tal que

$$f_p(x) = \lim_{N\to\infty} f_{N,p}(x).$$

Proposición 2.17

La función $f_p(x)$ es un elemento del espacio de Lipschitz $\dot{\Lambda}_{\alpha}$.

Prueba: Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|f_p(x) - f_p(y)| = \lim_{N\to\infty} |f_{N,p}(x) - f_{N,p}(y)|.$$

Pero

$$\begin{aligned}
& |f_{N,p}(x) - f_{N,p}(y)| \\
= \; & |\{f_N(x) - f_N(p)\} - \{f_N(y) - f_N(p)\}| \\
= \; & |f_N(x) - f_N(y)| \\
= \; & \left| \sum_{v=-N}^{\infty} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} s_Q \{m_Q(x) - m_Q(y)\} \right| \\
\leq \; & \sum_{v=-N}^{\infty} \sum_{\ell(Q)=2^{-v}} |s_Q| |m_Q(x) - m_Q(y)| \leq cA|x-y|^{\alpha},
\end{aligned}$$

donde esta última desigualdad se obtiene por el mismo argumento que se utilizó en la prueba del teorema 2.13, y donde c y A son constantes independientes de N. Por lo tanto

$$|f_p(x) - f_p(y)| \leq \lim_{N\to\infty} cA|x-y|^{\alpha} = cA|x-y|^{\alpha}. \blacksquare$$

La dependencia de la función límite f_p en la elección del punto es fácilmente vista por la igualdad

$$f_q(x) = f_p(x) - f_p(q), \tag{2}$$

la cual es consistente con la propiedad $f_q(q) = 0$. Esto se sigue de la igualdad

$$\begin{aligned} & f_{N,q}(x) - f_{N,p}(x) + f_{N,p}(q) \\ = \;& \{f_N(x) - f_N(q)\} - \{f_N(x) - f_N(p)\} + \{f_N(q) - f_N(p)\} = 0 \end{aligned}$$

y haciendo N tender a ∞.

Reunimos estos hechos en una versión más completa del teorema 2.13:

Teorema 2.13'

Supóngase que $0 < \alpha < \beta \leq 1, 0 < \varepsilon$ y que, para cada cubo diádico $Q \subset \mathbb{R}^n$, m_Q satisface (2.14) y (2.15), y $\{s_Q\}$ es una sucesión de escalares (indexada por los cubos diádicos) tal que

$$A \equiv \sup_Q |s_Q| \, |Q|^{-\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2}} < \infty.$$

Entonces la serie

$$\sum_Q s_Q m_Q$$

representa un elemento de $\dot{\Lambda}_\alpha$ en el siguiente sentido: para cada $N \in \mathbb{Z}_+$ la serie

$$\sum_{\ell(Q) \leq 2^N} s_Q m_Q(x)$$

converge absoluta y uniformemente a una función $f_N(x)$ en $\dot{\Lambda}_\alpha$ de norma $\|f_N\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \leq cA$. Además, existe una sucesión de constantes $\{c_N\}$ tal que $\{f_N(x) - c_N\}$ converge puntualmente a una función $f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $f \in \dot{\Lambda}_\alpha$ con norma $\|f\|_{\dot{\Lambda}_\alpha} \leq cA$. La constante $c = c(n, \alpha, \beta, \varepsilon)$ es independiente de la elección de las sucesiones $\{s_Q\}$ y $\{m_Q\}$ (que satisfacen las condiciones mencionadas). La función f es única en el siguiente sentido: si

$\{f_N(x) - d_N\}$ es una sucesión que converge a $g(x)$ (puntualmente), entonces $g(x) = f(x) + cte$. Podemos escoger $\{c_N\} = \{-f_N(0)\}$ tal que $f(0) = 0$ (o, más generalmente, $\{c_N\} = \{-f_N(p)\}$ para cualquier $p \in \mathbb{R}^n$).

Hemos probado todo, excepto el hecho de que $g(x)$ difiere de $f(x)$ por una constante. Pero esto se sigue de nuestra construcción:

$$\begin{aligned}
f_p(x) - g(x) &= f_p(x) - \lim_{N\to\infty}\{f_N(x) - d_N\} \\
&= \lim_{N\to\infty} f_{N,p}(x) - \lim_{N\to\infty}\{f_N(x) - d_N\} \\
&= \lim_{N\to\infty}\{f_N(x) - f_N(p)\} - \lim_{N\to\infty}\{f_N(x) - d_N\} \\
&= \lim_{N\to\infty}\{-f_N(p) + d_N\}.
\end{aligned}$$

Pero el último límite existe y es independiente de x. Por lo tanto $g(x) = f(x) + cte$.

Se da el ejemplo prometido mostrando que la serie $\sum_{\ell(Q)>2^N} s_Q m_Q(x)$, en general, no converge.

Sea Q_0 el cubo diádico de lado uno con el origen como su "esquina inferior izquierda". Claramente, es posible construir una función $m(x)$ que satisfaga (2.14) y (2.15) para Q_0 tal que $m(x) > \delta > 0$ para $x \in B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, para algún $r > 0$ pequeño. Para cada $v \leq 0$. sea $m_{Q_v}(x) = |Q_v|^{-\frac{1}{2}} m(2^v x)$, donde Q_v es el cubo diádico de lado 2^{-v} con el origen como su "esquina inferior izquierda".

Proposición 2.18

m_Q satisface (2.14) y (2.15) para Q_v.

Prueba. Como $m(x)$ satisface (2.14) y (2.15) para Q_0, $x_{Q_0} = 0$ y $\ell(Q_0) = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
|m_{Q_v}(x)| &= |Q_v|^{-\frac{1}{2}} |m(2^v x)| \\
&\leq |Q_v|^{-\frac{1}{2}} \left[|Q_0|^{-\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{|2^v x - x_{Q_0}|}{\ell(Q_0)}\right\}^{-n-\varepsilon} \right] \\
&= |Q_v|^{-\frac{1}{2}} \{1 + |2^v x|\}^{-n-\varepsilon} \\
&= |Q_v|^{-\frac{1}{2}} \left\{1 + \frac{|x - x_{Q_v}|}{\ell(Q_v)}\right\}^{-n-\varepsilon}
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

$$
\begin{aligned}
& |m_{Q_v}(x) - m_{Q_v}(y)| \\
= \; & |Q_v|^{-\frac{1}{2}} |m(2^v x) - m(2^v y)| \\
\leq \; & |Q_v|^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{|2^v x - 2^v y|}{\ell(Q_0)} \right\}^{\beta} \sup_{|z| \leq 2^v |x-y|} \left\{ 1 + \frac{|2^v x - z - x_{Q_0}|}{\ell(Q_0)} \right\}^{-n-\varepsilon} \\
= \; & |Q_v|^{-\frac{1}{2}} \{2^v |x-y|\}^{\beta} \sup_{|z| \leq 2^v |x-y|} \{1 + |2^v x - z|\}^{-n-\varepsilon} \\
= \; & |Q_v|^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{|x-y|}{\ell(Q_v)} \right\}^{\beta} \sup_{|z'| \leq 2^v |x-y|} \left\{ 1 + \frac{|x - z' - x_{Q_v}|}{\ell(Q_v)} \right\}^{-n-\varepsilon}
\end{aligned}
$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Para los otros cubos diádicos Q sea $m_Q(x) \equiv 0$. Con $0 < \alpha < \beta$, sea ${}_{Q_v} = |Q_v|^{\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{2}}$ y $s_Q = 0$ para los restantes cubos diádicos. Así

$$
\begin{aligned}
\sum_Q s_Q m_Q(x) &= \sum_{v=-\infty}^{0} s_{Q_v} m_{Q_v}(x) = \sum_{v=-\infty}^{0} |Q_v|^{\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{2}} m_{Q_v}(x) \\
&= \sum_{v=-\infty}^{0} |Q_v|^{\frac{\alpha}{n}} m(2^v x) = \sum_{v=-\infty}^{0} \ell(Q_v)^{\alpha} m(2^v x) \\
&= \sum_{v=-\infty}^{0} 2^{-v\alpha} m(2^v x) = \sum_{v=0}^{\infty} 2^{v\alpha} m\left(2^{-v} x\right).
\end{aligned}
$$

Pero $m(2^{-v}x) > \delta > 0$ para $|x| \leq 2^v r$, $v \geq 0$. En particular, $m(2^{-v}x) > \delta$ para $x \in B_r(0)$. En consecuencia

$$
\sum_{\ell(Q) > 2^N} s_Q m_Q(x) > \sum_{v=N+1} 2^{v\alpha} \delta,
$$

lo cual muestra que la serie de la izquierda de esta desigualdad diverge uniformemente a $+\infty$ en $B_r(0)$. ■

(II) Convergencia de la integral en la fórmula de Calderón.

Hemos visto el importante papel jugado por la fórmula (1.5) en nuestro estudio de los espacios que hemos considerado. En el teorema 1.4 del capítulo 1, observamos que la integral asociada en esta fórmula puede ser considerada como un L^2-límite. Sin embargo, necesitaremos examinar el significado de la fórmula más cercanamente cuando la usemos en otras instancias.

Un conjunto natural de condiciones bajo los cuales la transformada de Fourier inversa de una función f es estudiada, es cuando f y $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. En este caso $\hat{f}$ es continua y (después de la modificación sobre un conjunto de medida cero) así lo es f. De esto se sigue que la transformada de Fourier inversa es válida en todos los puntos: $\left(\hat{f}\right)^{\vee}(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. No es sorprendente, dado el papel jugado por la transformada de Fourier, que bajo las mismas hipótesis lo mismo es cierto para la fórmula de reproducción de Calderón:

Teorema 2.19

Supóngase que f y $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sea $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ de valor real, radial, $\int \varphi = 0$ $Sop\ \varphi \subseteq B_1(0)$ y

$$\int_0^{\infty} \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t} = 1$$

si $\zeta \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to\infty} f_{\varepsilon,\delta}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to\infty} \int_{\varepsilon}^{\delta} (\varphi_t * \varphi_t * f)(x) \frac{dt}{t} = f(x)$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$, siempre que f sea el representante continuo de la clase de equivalencia determinada por f en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. Probemos que $f_{\varepsilon,\delta} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para toda ε, δ fijas. Es claro que $f_{\varepsilon,\delta}$ es medible. Sólo resta probar que $\| f_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1} < \infty$.

Por el teorema de Tonelli se tiene que

$$\begin{aligned}\| f_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |f_{\varepsilon,\delta}(x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\varepsilon}^{\delta} |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x)| \frac{dt}{t} dx \\ &= \int_{\varepsilon}^{\delta}\int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x)|\, dx \frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Pero como el soporte de φ_t está contenido en $B_t(0)$, entonces por la desigualdad de Young se tiene que $\varphi_t * \varphi_t * f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x)|\, dx &= \|\varphi_t * \varphi_t * f\|_{L^1} \leq \|\varphi_t\|_{L^1}^2 \|f\|_{L^1} \\ &= \|\varphi\|_{L^1}^2 \|f\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\| f_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1} \leq \|\varphi\|_{L^1}^2 \|f\|_{L^1} \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dt}{t} = \|\varphi\|_{L^1}^2 \|f\|_{L^1} \ln \frac{\delta}{\varepsilon} < \infty.$$

Dado que $f_{\varepsilon,\delta} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ podemos calcular su transformada de Fourier. Entonces, por el teorema de Fubini y las propiedades de la transformada de Fourier de una convolución y una dilatación, se tiene

$$\begin{aligned}\hat{f}_{\varepsilon,\delta}(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_{\varepsilon,\delta}(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\zeta} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\delta} (\varphi_t * \varphi_t * f)(x) \frac{dt}{t} \right\} e^{-2\pi i x\cdot\zeta} dx \\ &= \int_{\varepsilon}^{\delta} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_t * \varphi_t * f)(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\zeta} dx \frac{dt}{t} \\ &= \int_{\varepsilon}^{\delta} (\varphi_t * \varphi_t * f)^{\wedge}(\zeta) \frac{dt}{t} \\ &= \int_{\varepsilon}^{\delta} \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \hat{f}(\zeta) \frac{dt}{t} = \hat{f}(\zeta) \int_{\varepsilon}^{\delta} \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Por las hipótesis en φ se tiene

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}_{\varepsilon,\delta}(\zeta)\right| &\leq \left|\hat{f}(\zeta)\right| \int_{\varepsilon}^{\delta} \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t} \\ &\leq \left|\hat{f}(\zeta)\right| \int_{0}^{\infty} \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t} = \left|\hat{f}(\zeta)\right|.\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}_{\varepsilon,\delta}(\zeta)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\zeta)\right| = \left\|\hat{f}\right\|_{L^1} < \infty.$$

Por lo tanto $\hat{f}_{\varepsilon,\delta} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo ε, δ fijos y, en consecuencia, por la transformada de Fourier inversa

$$f(x) - f_{\varepsilon,\delta}(x) = \left[\hat{f} - \hat{f}_{\varepsilon,\delta}\right]^{\vee}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ fija. Desarrollando el lado derecho de la igualdad anterior y usando la expresión obtenida para $\hat{f}_{\varepsilon,\delta}$, se tiene

$$\begin{aligned}
f(x) - f_{\varepsilon,\delta}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\hat{f}(\zeta) - \hat{f}_{\varepsilon,\delta}(\zeta)\right] e^{2\pi i x\cdot\zeta} d\zeta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{\hat{f}(\zeta) - \hat{f}(\zeta) \int_{\varepsilon}^{\delta} \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t}\right\} e^{2\pi i x\cdot\zeta} d\zeta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\zeta) \left\{1 - \int_{\varepsilon}^{\delta} \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t}\right\} e^{2\pi i x\cdot\zeta} d\zeta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} h_{\varepsilon,\delta}(\zeta, x)\, d\zeta.
\end{aligned}$$

Ahora, como

$$|h_{\varepsilon,\delta}(\zeta, x)| = \left|\hat{f}(\zeta)\right| \left|1 - \int_{\varepsilon}^{\delta} \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t}\right| \leq 2\left|\hat{f}(\zeta)\right|$$

para todo ε, δ, dado que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y además

$$\lim_{\varepsilon\to 0, \delta\to\infty} h_{\varepsilon,\delta}(\zeta, x) = 0$$

para toda $\zeta \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, entonces por el teorema de convergencia dominada

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0, \delta\to\infty} \left[f(x) - f_{\varepsilon,\delta}(x)\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0, \delta\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_{\varepsilon,\delta}(\zeta, x)\, d\zeta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon\to 0, \delta\to\infty} h_{\varepsilon,\delta}(\zeta, x)\, d\zeta = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto el teorema queda demostrado. ■

Habiendo establecido que la fórmula de Calderón se cumple en el sentido puntual para funciones f suficientemente bonitas, ahora investigaremos la razón de la convergencia de la integral asociada cuando las suposiciones adicionales son hechas sobre f.

Lema 2.20

Supóngase que $g \in S(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in S_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S(\mathbb{R}^n) : \int f = 0 \right\}$. Entonces para cada $M \in \mathbb{Z}_+$ y $0 < t \leq 1$,

$$|(\psi_t * g)(x)| \leq ct\,(1 + |x|)^{-M},$$

donde $c = c(g, \psi, M, n)$.

Prueba . Dado que ψ tiene media cero, tenemos

$$\begin{aligned}
(\psi_t * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_t(y) \{g(x-y) - g(x)\}\, dy \\
&= \left(\int_{|y| < \frac{|x|}{2}} + \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} \right) \psi_t(y) \{g(x-y) - g(x)\}\, dy \\
&= I + II.
\end{aligned}$$

Estimación de I. Como $|y| < \frac{|x|}{2}$ tenemos que $\frac{|x|}{2} \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|x|$ y dado que $g \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
|g(x-y) - g(x)| &= |\nabla g(x + y[\theta - 1])|\, |y| \\
&= |\nabla g(x - z)|\, |y| \leq |y| \sup_{|z| < \frac{|x|}{2}} |\nabla g(x - z)|,
\end{aligned}$$

donde $z = y[1 - \theta]$ y θ es algún valor entre 0 y 1

Por otra parte, por ser $g \in S(\mathbb{R}^n)$, $|\nabla g(x - z)| \leq c(g)\,(1 + |x - z|)^{-M}$ para toda $M \in \mathbb{Z}_+$. Además, como $|z| \leq |y| \leq \frac{|x|}{2}$ se sigue que $|x - z| \geq |x| - |z| \geq \frac{|x|}{2}$; lo cual implica que $|x - z| + 1 \geq \frac{|x|}{2} + 1 \geq \frac{1}{2}(1 + |x|)$. En consecuencia $(|x - z| + 1)^{-M} \leq 2^M (1 + |x|)^{-M}$.

Así, usando todo lo anterior se tiene

$$\begin{aligned}
|g(x-y) - g(x)| &\leq c(g)\, |y| \sup_{|z| < \frac{|x|}{2}} (1 + |x - z|)^{-M} \\
&\leq 2^M c(g)\, |y|\, (1 + |x|)^{-M}
\end{aligned}$$

para toda $M \in \mathbb{Z}_+$. Esto nos da la estimación

$$\begin{aligned} |I| &\le \int_{|y|<\frac{|x|}{2}} |\psi_t(y)|\,|g(x-y)-g(x)|\,dy \\ &\le c(g,M)(1+|x|)^{-M}\int_{|y|<\frac{|x|}{2}} |\psi_t(y)|\,|y|\,dy \\ &= c(g,M)(1+|x|)^{-M}\,t\int_{|y|<\frac{|x|}{2}} \left|\psi\left(\frac{y}{t}\right)\right|\left|\frac{y}{t}\right|\frac{dy}{t^n} \\ &= c(g,M)(1+|x|)^{-M}\,t\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(u)|\,|u|\,du \\ &\le c(g,\psi,M)\,t\,(1+|x|)^{-M}, \end{aligned}$$

puesto que $\psi \in S_0(\mathbb{R}^n)$ e integrando en coordenadas esféricas

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(u)|\,|u|\,du < \infty.$$

Estimación de II. Para esta estimación hacemos uso del teorema del valor medio (aplicado a g):

$$\begin{aligned} |II| &\le \int_{|y|\ge\frac{|x|}{2}} |\psi_t(y)|\,|g(x-y)-g(x)|\,dy \\ &= \int_{|y|\ge\frac{|x|}{2}} |\psi_t(y)|\,|\nabla g(z)|\,|y|\,dy \\ &\le \|\nabla g\|_\infty \int_{|y|\ge\frac{|x|}{2}} |\psi_t(y)|\,|y|\,dy \\ &= \|\nabla g\|_\infty\, t\int_{|y|\ge\frac{|x|}{2}} \left|\psi\left(\frac{y}{t}\right)\right|\left|\frac{y}{t}\right|\frac{dy}{t^n} \\ &= c(g)\,t\int_{|w|\ge\frac{|x|}{2t}} |\psi(w)|\,|w|\,dw, \end{aligned}$$

donde $z = x + (\theta-1)y$, para algún $0 \le \theta \le 1$.

Dado que $\psi \in S_0(\mathbb{R}^n)$, entonces $|\psi(w)| \le c\,|w|^{-n-M-1}$ para toda $M \in \mathbb{Z}_+$. Por lo tanto, usando lo anterior e integrando en coordenadas esféricas se tiene

$$|II| \le c(g,\psi)\,t\int_{|w|\ge\frac{|x|}{2t}} |w|^{-n-M}\,dw$$

$$
\begin{aligned}
&= c(g,\psi)\, t \int_{S^{n-1}} \int_{\frac{|x|}{2t}}^{\infty} r^{n-1-n-M} dr d\varrho\left(w'\right) \\
&= c(g,\psi,n)\, t \int_{\frac{|x|}{2t}}^{\infty} r^{-M-1} dr = c(g,\psi,n,M)\, t^{M+1} |x|^{-M},
\end{aligned}
$$

siempre que $M > 0$ (si $M = 0$, la estimación es obvia).

Si $|x| > 1$, entonces la última desigualdad no excede a $t(1+|x|)^{-M}$ veces una constante (dado que $0 < t \leq 1$).

Si $|x| \leq 1$, entonces $|x| + 1 \leq 2$; lo cual implica que $(|x|+1)^{-M} \geq 2^{-M}$. En consecuencia

$$
\begin{aligned}
|II| &\leq c(g)\, t \int_{|w| \geq \frac{|x|}{2t}} |\psi(w)|\, |w|\, dw \\
&\leq c(g)\, t \int_{R^n} |\psi(w)|\, |w|\, dw \\
&= c(g,\psi)\, t \leq c(g,\psi)\, t\,(1+|x|)^{-M}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el lema queda demostrado. ■

Definición. Se define $S_k(\mathbb{R}^n)$ como

$$
S_k(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S(\mathbb{R}^n) : \int x^{\gamma} f(x)\, dx = 0, |\gamma| \leq k \right\}
$$

para toda $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. También se define

$$
\begin{aligned}
S_{\infty}(\mathbb{R}^n) &= \left\{ f \in S(\mathbb{R}^n) : \int x^{\gamma} f(x)\, dx = 0, \text{ para toda } \gamma \in \mathbb{Z}_+^n \right\} \\
&= \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}
$$

Finalmente probaremos el

Teorema 2.21

Supóngase que $f \in S_{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in S_0(\mathbb{R}^n)$, φ es real, radial y satisface

$$
\int_0^{\infty} \left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2 \frac{dt}{t} = 1
$$

si $\zeta \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Entonces $f_{\varepsilon,\delta} \to f$ en la topología de $S(\mathbb{R}^n)$ cuando $\varepsilon \to 0$ y $\delta \to \infty$.

Este teorema, como lo veremos, es una consecuencia del lema 2.20 y del siguiente resultado.

Lema 2.22

Supongase que $g \in S_k(\dot{\mathbb{R}}^n)$ y $\psi \in S_0(\mathbb{R}^n)$. Entonces para cada $M \in \mathbb{Z}_+$ y $t \geq 1$

$$|(\psi_t * g)(x)| \leq c(g, \psi, M, n, k)\, t^{-n-k-1} \left(1 + \frac{|x|}{t}\right)^{-M}.$$

De hecho esta estimación es válida para $k = -1$, si ponemos $S_{-1}(\mathbb{R}^n) \equiv S(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. Dado que $g \in S_k(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
(\psi_t * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_t(y)\, g(x-y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi_t(y)\, g(x-y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) \left[\sum_{|\gamma| \leq k} \tfrac{(y-x)^\gamma}{\gamma!} (\partial^\gamma \psi_t)(x)\right] dy \\
&= \left\{\int_{|x-y| \leq \frac{|x|}{2}} + \int_{|x-y| > \frac{|x|}{2}}\right\} \left[\psi_t(y) - \sum_{|\gamma| \leq k} \tfrac{(y-x)^\gamma}{\gamma!} (\partial^\gamma \psi_t)(x)\right] g(x-y)\, dy \\
&= I + II.
\end{aligned}$$

Estimación de I. Si $|z| \leq |x-y| \leq \frac{|x|}{2}$, entonces $\frac{|x|}{2} \leq |x-z| \leq \frac{3}{2}|x|$. Consideremos el integrando de I excepto $g(x-y)$. Como $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ y por el teorema de Taylor en varias variables, se tiene

$$\begin{aligned}
&\left|\psi_t(y) - \sum_{|\gamma| \leq k} \frac{(y-x)^\gamma}{\gamma!} (\partial^\gamma \psi_t)(x)\right| \\
&= \left|(k+1) \sum_{|\gamma|=k+1} \frac{(y-x)^\gamma}{\gamma!} \int_0^1 (1-\theta)^k (\partial^\gamma \psi_t)\left[(1-\theta)x + \theta y\right] d\theta\right| \\
&\leq (k+1)|y-x|^{|\gamma|} \sum_{|\gamma|=k+1} \frac{1}{\gamma!} \int_0^1 (1-\theta)^k |(\partial^\gamma \psi_t)(x-z)|\, d\theta \\
&\leq c(n,k)\, |x-y|^{k+1} \sup_{|\gamma|=k+1, |z| \leq |x-y|} |(\partial^\gamma \psi_t)(x-z)|,
\end{aligned}$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$, $z = \theta(x-y)$ y $|z| \leq |x-y|$.

Pero

$$\begin{aligned}(\partial^\gamma \psi_t)(x-z) &= t^{-n}(\partial^\gamma \psi)\left(\frac{x-z}{t}\right) = t^{-n-|\gamma|}\partial^\gamma \psi(\tau) \\ &= t^{-n-k-1}\partial^\gamma \psi(\tau),\end{aligned}$$

donde $\tau = \frac{x-z}{t}$. Además, dado que $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, se tiene

$$|\partial^\gamma \psi(\tau)| \leq c(\psi)(1+|\tau|)^{-M}$$

para toda $M \in \mathbb{Z}_+$. Así

$$\begin{aligned}&\left|\psi_t(y) - \sum_{|\gamma|\leq k} \frac{(y-x)^\gamma}{\gamma!}(\partial^\gamma \psi_t)(x)\right| \\ &\leq c(\psi,k,n)\,|x-y|^{k+1}\,t^{-n-k-1}\sup_{|z|\leq|x-y|}\left(1+\frac{|x-z|}{t}\right)^{-M}.\end{aligned}$$

Por otra parte como $|x-z| \geq \frac{|x|}{2}$, entonces $2|x-z| \geq |x|$; en consecuencia $2\frac{|x-z|}{t} \geq \frac{|x|}{t}$; de lo cual se sigue que $1 + 2\frac{|x-z|}{t} \geq 1 + \frac{|x|}{t}$; lo cual implica que $2\left(1+\frac{|x-z|}{t}\right) \geq 1 + \frac{|x|}{t}$; de donde concluimos que

$$\sup_{|z|\leq|x-y|}\left(1+\frac{|x-z|}{t}\right)^{-M} \leq 2^M\left(1+\frac{|x|}{t}\right)^{-M}$$

para toda $M \in \mathbb{Z}_+$. Así, usando esta última desigualdad se tiene

$$\begin{aligned}&\left|\psi_t(y) - \sum_{|\gamma|\leq k} \frac{(y-x)^\gamma}{\gamma!}(\partial^\gamma \psi_t)(x)\right| \\ &\leq cMt^{-n-k-1}\left(1+\frac{|x|}{t}\right)^{-M}|x-y|^{k+1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}|I| &\leq ct^{-n-k-1}\left(1+\frac{|x|}{t}\right)^{-M}\int_{|x-y|\leq\frac{|x|}{2}} |g(x-y)|\,|x-y|^{k+1}\,dy \\ &\leq ct^{-n-k-1}\left(1+\frac{|x|}{t}\right)^{-M}\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|\,|x-y|^{k+1}\,dy \\ &\leq ct^{-n-k-1}\left(1+\frac{|x|}{t}\right)^{-M},\end{aligned}$$

ya que la integral de la penúltima desigualdad es finita y c es una constante que depende de ψ, k, n,y M.

Estimación de II. Consideremos $|x-y| > \frac{|x|}{2}$. Nuevamente por el teorema de Taylor se tiene

$$
\begin{aligned}
& \left|\psi_t(y) - \sum_{|\gamma|\leq k} \frac{(y-x)^\gamma}{\gamma!}\left(\partial^\gamma \psi_t\right)(x)\right| \\
\leq\; & \frac{(k+1)}{\gamma!}|y-x|^{k+1} \sum_{|\gamma|=k+1} \int_0^1 (1-\theta)^k \left|\left(\partial^\gamma \psi_t\right)(x-z)\right| d\theta \\
=\; & \frac{(k+1)}{\gamma!}|y-x|^{k+1} t^{-n-|\gamma|} \sum_{|\gamma|=k+1} \int_0^1 (1-\theta)^k \left|\left(\partial^\gamma \psi\right)(\tau)\right| d\theta \\
\leq\; & \left\|\partial^\gamma \psi\right\|_\infty \frac{(k+1)}{\gamma!}|y-x|^{k+1} t^{-n-k-1} \sum_{|\gamma|=k+1} \int_0^1 (1-\theta)^k d\theta \\
=\; & c(k,\psi,n)|y-x|^{k+1} t^{-n-k-1},
\end{aligned}
$$

puesto que $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto

$$
|II| \leq c(k,\psi,n) t^{-n-k-1} \int_{|x-y|>\frac{|x|}{2}} |y-x|^{k+1} |g(x-y)| \, dy.
$$

Pero por ser $g \in S(\mathbb{R}^n)$

$$
|g(x-y)| \leq c(g)|x-y|^{-k-1-M-n}
$$

para toda $M \in \mathbb{Z}_+$. Por lo tanto, usando cooordenadas esféricas y esto último, se tiene

$$
\begin{aligned}
|II| \;&\leq\; c(k,n,g,\psi) t^{-n-k-1} \int_{|x-y|>\frac{|x|}{2}} |y-x|^{-M-n} dy \\
&=\; ct^{-n-k-1} \int_{S^{n-1}} \int_{\frac{|x|}{2}}^\infty r^{-M-n} r^{n-1} dr d\varrho\left(y'\right) \\
&=\; ct^{-n-k-1} \int_{\frac{|x|}{2}}^\infty r^{-M-1} dr = c(k,n,M,g,\psi)|x|^{-M} t^{-n-k-1}.
\end{aligned}
$$

Si $|x| > 1$, entonces

$$|x| = \frac{|x|}{2} + \frac{|x|}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{|x|}{t},$$

puesto que $t \geq 1$; en consecuencia

$$|x|^{-M} \leq 2^{-M}\left(1 + \frac{|x|}{t}\right)^{-M},$$

de donde se obtiene la estimación deseada.

Si $|x| \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} |II| &\leq c(k,\psi,n)\, t^{-n-k-1} \int_{|x-y|>\frac{|x|}{2}} |y-x|^{k+1} |g(x-y)|\, dy \\ &\leq ct^{-n-k-1} \int_{R^n} |u|^{k+1} |g(u)|\, du \leq c(k,n,\psi,g)\, t^{-n-k-1}, \end{aligned}$$

por ser $g \in S(\mathbb{R}^n)$. Pero como $|x| \leq 1$ y $t \geq 1$, entonces $\frac{|x|}{t} \leq \frac{1}{t} \leq 1$; lo cual implica que $1 + \frac{|x|}{t} \leq 2$; en consecuencia

$$2^M \left(1 + \frac{|x|}{t}\right)^{-M} \geq 1.$$

Por lo tanto, usando esto último

$$|II| \leq c(k,n,\psi,g,M)\, t^{-n-k-1}\left(1 + \frac{|x|}{t}\right)^{-M}. \blacksquare$$

Corolario 2.23

Supóngase que $g \in S_k(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in S_0(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\int_0^\infty |(\psi_t * g)(x)| \frac{dt}{t} \leq c(g,\psi,k,n)\,[1+|x|]^{-n-k-1}.$$

Prueba. Descompongamos la integral en dos partes

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |(\psi_t * g)(x)| \frac{dt}{t} &= \int_0^1 |(\psi_t * g)(x)| \frac{dt}{t} + \int_1^\infty |(\psi_t * g)(x)| \frac{dt}{t} \\ &= I + II. \end{aligned}$$

Estimación de I. Aplicando el lema 2.20 con $M = n + k + 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |(\psi_t * g)(x)| \frac{dt}{t} &\leq c(g, k, \psi, n) \int_0^1 t(1 + |x|)^{-n-k-1} \frac{dt}{t} \\
&= c(g, k, \psi, n)(1 + |x|)^{-n-k-1}.
\end{aligned}$$

Estimación de II. Si $|x| \leq 1$, aplicamos el lema 2.22, con $M = n+k+1$, para obtener

$$\int_1^\infty |(\psi_t * g)(x)| \frac{dt}{t} \leq c(g, k, \psi, n) \int_1^\infty t^{-n-k-1} \frac{dt}{t} = c(g, k, \psi, n).$$

Pero como $|x| \leq 1$, entonces $1 + |x| \leq 2$; lo cual implica que $(1 + |x|)^{-1} \geq 2^{-1}$; de donde concluimos que

$$2^{n+k+1}(1 + |x|)^{-n-k-1} \geq 1.$$

Por lo tanto

$$\int_1^\infty |(\psi_t * g)(x)| \frac{dt}{t} \leq c(g, k, \psi, n)(1 + |x|)^{-n-k-1}.$$

Si $|x| > 1$, dividimos la integral en las siguientes dos integrales

$$\int_1^\infty |(\psi_t * g)(x)| \frac{dt}{t} = \int_1^{|x|} |(\psi_t * g)(x)| \frac{dt}{t} + \int_{|x|}^\infty |(\psi_t * g)(x)| \frac{dt}{t}.$$

Aplicando el lema 2.22, con $M = n + k + 2$, al primer sumando de la igualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\int_1^{|x|} |(\psi_t * g)(x)| \frac{dt}{t} &\leq c \int_1^{|x|} t^{-n-k-1} \left(1 + \frac{|x|}{t}\right)^{-n-k-2} \frac{dt}{t} \\
&\leq c \int_1^{|x|} t^{-n-k-1} \left(\frac{|x|}{t}\right)^{-n-k-2} \frac{dt}{t} \\
&= c \int_1^{|x|} |x|^{-n-k-2} \, dt \\
&= c\,|x|^{-n-k-2}(|x| - 1),
\end{aligned}$$

ya que $\frac{|x|}{t}+1 > \frac{|x|}{t}$ implica que $\left(\frac{|x|}{t}+1\right)^{-n-k-2} \leq \left(\frac{|x|}{2}\right)^{-n-k-2}$ y $|x|^{-n-k-2}(|x|-1) \cdot |x|^{-n-k-1}$. Además $1+|x| \leq 2|x|$; lo cual implica que $(1+|x|)^{-n-k-1} \geq (2|x|)^{-n-k-1}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_1^{|x|} |(\psi_t * g)(x)| \frac{dt}{t} &\leq c|x|^{-n-k-1} \leq 2^{k+n+1}c(1+|x|)^{-n-k-1} \\ &= c(1+|x|)^{-n-k-1}.\end{aligned}$$

Finalmente, aplicamos el lema 2.22, con $M=0$, para obtener

$$\begin{aligned}\int_{|x|}^{\infty} |(\psi_t * g)(x)| \frac{dt}{t} &\leq c\int_{|x|}^{\infty} t^{-n-k-1}\frac{dt}{t} = c|x|^{-n-k-1} \\ &\leq 2^{k+n+1}c(1+|x|)^{-n-k-1}\end{aligned}$$

y la estimación deseada ahora es obvia. Esto concluye la demostración. ■

Ahora podemos usar el lema 2.20, el lema 2.22 y el corolario 2.23 para probar el teorema 2.21. Demostraremos que la hipótesis $f \in S_\infty(\mathbb{R}^n)$ nos da la estimación

$$(\star) \qquad |f(x) - f_{\varepsilon,\delta}(x)| \leq c\left(\varepsilon + \tfrac{1}{\delta}\right)(1+|x|)^{-N}$$

para toda $N \in \mathbb{Z}_+$, donde $c = c(\varphi, f, N, n)$. Esto, desde luego, nos da

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|f(x)-f_{\varepsilon,\delta}(x)| = 0.$$

Pero $\partial^\gamma f_{\varepsilon,\delta}(x) = (\partial^\gamma f)_{\varepsilon,\delta}$ y podemos aplicar este último resultado a $\partial^\gamma f$ (la cual también debe de pertenecer a $S_\infty(\mathbb{R}^n)$, puesto que $f \in S_\infty(\mathbb{R}^n)$) para obtener

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^N|(\partial^\gamma[f-f_{\varepsilon,\delta}](x))| = 0,$$

que es la conclución deseada del teorema 2.21. Así, todo lo que necesitamos hacer es establecer la desigualdad $(\star)$.

Prueba de $(\star)$.Como $\varphi \in S_0(R^n)$ entonces $\varphi * \varphi \equiv \psi \in S_0(R^n)$. Obsérvese que $\psi_t = \varphi_t * \varphi_t$, ya que

$$\psi_t(x) = (\varphi * \varphi)_t(x) = t^{-n}(\varphi*\varphi)\left(\frac{x}{t}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\frac{x}{t}-y\right)\varphi(y)\,dy \\
&= t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\frac{x-ty}{t}\right)\varphi(y)\,dy \\
&= t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\frac{x-ty}{t}\right)\varphi\left(\frac{ty}{t}\right)\frac{t^n}{t^n}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}t^{-n}\varphi\left(\frac{x-z}{t}\right)\varphi\left(\frac{z}{t}\right)t^{-n}dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi_t(x-z)\,\varphi_t(z)\,dz \\
&= (\varphi_t*\varphi_t)(x).
\end{aligned}$$

Por otra parte, dado que $f\in S_\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces $f\in S(\mathbb{R}^n)$; lo cual implica que $\hat{f}\in S(\mathbb{R}^n)$; en consecuencia $f,\hat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Además dado que $\varphi\in S_0(\mathbb{R}^n)$, entonces $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, y como φ es radial, real y satisface

$$\int_0^\infty\left[\hat{\varphi}(t\zeta)\right]^2\frac{dt}{t}=1$$

si $\zeta\in\mathbb{R}^n-\{0\}$, entonces por el teorema 2.19

$$f(x)=\lim_{\varepsilon\to0,\delta\to\infty}f_{\varepsilon,\delta}(x)=\lim_{\varepsilon\to0,\delta\to\infty}\int_\varepsilon^\delta(\varphi_t*\varphi_t*f)(x)\,\frac{dt}{t}.$$

Así

$$\begin{aligned}
&f(x)-f_{\varepsilon,\delta}(x) \\
&= \int_0^\infty(\varphi_t*\varphi_t*f)(x)\,\frac{dt}{t}-\int_\varepsilon^\delta(\varphi_t*\varphi_t*f)(x)\,\frac{dt}{t} \\
&= \left\{\int_0^\varepsilon+\int_\delta^\infty\right\}(\varphi_t*\varphi_t*f)(x)\,\frac{dt}{t}=I+II
\end{aligned}$$

donde, por el corolario 2.23, las dos integrales convergen absolutamente. Podemos suponer que $0<\varepsilon<1<\delta<\infty$.

Estimación de I. Como $f\in S(\mathbb{R}^n)$ y $\psi_t\in S_0(\mathbb{R}^n)$, entonces por el lema 2.20, con $M=N$, se tiene

$$\begin{aligned}
|I| &\le \int_0^\varepsilon|(\varphi_t*\varphi_t*f)(x)|\,\frac{dt}{t}\le c\int_0^\varepsilon t\,(1+|x|)^{-N}\,\frac{dt}{t} \\
&= c\varepsilon\,(1+|x|)^{-N},
\end{aligned}$$

donde $c = c(f, \varphi, N, n)$.

Estimación de II. Si $|x| \leq 1$ y como $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$, $\psi_t \in S_0(\mathbb{R}^n)$, entonces por el lema 2.22 con $M = k = 0$

$$|(\psi_t * f)(x)| \leq c(f, \psi, n)\, t^{-n-1};$$

lo cual implica

$$\begin{aligned}\int_\delta^\infty |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x)| \frac{dt}{t} &\leq c(f, \psi, n) \int_\delta^\infty t^{-n-2} dt \\ &= c(f, \psi, n)\, \delta^{-n-1}.\end{aligned}$$

Pero como $|x| \leq 1$, entonces $1 + |x| < 2\delta$; lo cual implica que $(1 + |x|)^{-n} > (2\delta)^{-n}$. En consecuencia

$$\delta^{-n} < 2^n (1 + |x|)^{-n} < 2^n (1 + |x|)^{-N}$$

cuando $N \leq n$. Así

$$(\dagger) \qquad \int_\delta^\infty |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x)| \tfrac{dt}{t} \leq c(f, \psi, n)\, \delta^{-1} (1 + |x|)^{-N}.$$

Si $N > n$, aplicamos el lema 2.22 con $k = N - n$ y $M = 0$ para obtener

$$\int_\delta^\infty |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x)| \frac{dt}{t} \leq c \int_\delta^\infty t^{-N-2} dt = c\delta^{-N-1}.$$

Nuevamente, usando el hecho de que $|x| \leq 1 < \delta$, se tiene que $\delta^{-N} < 2^N (1 + |x|)^{-N}$ y obtenemos

$$(\dagger') \qquad \int_\delta^\infty |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x)| \tfrac{dt}{t} \leq c(M, n, f, \varphi)\, \delta^{-1} (1 + |x|)^{-N};$$

esta desigualdad, desde luego, incluye a $(\dagger)$.

En consecuencia, podemos suponer que $|x| > 1$. Si, en este caso, $1 < |x| < \delta$ nuevamente aplicamos el lema 2.22 con $M = 0$ y $k = N - n$ para obtener $(\dagger')$. Finalmente, si $|x| \geq \delta$ aplicamos el lema 2.22 con $M = N$ y $k = N - n$ para obtener

$$|(\varphi_t * \varphi_t * f)(x)| \leq c(\varphi, f, N, n)\, t^{-N-1} \left(1 + \frac{|x|}{t}\right)^{-N};$$

lo cual implica

$$\begin{aligned}
&\int_{\delta}^{\infty} |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x)| \frac{dt}{t} \\
\leq\ & c\int_{\delta}^{\infty} t^{-N-2}\left(1+\frac{|x|}{t}\right)^{-N} dt \\
=\ & c\left\{\int_{\delta}^{|x|} + \int_{|x|}^{\infty}\right\} t^{-N-2}\left(1+\frac{|x|}{t}\right)^{-N} dt.
\end{aligned}$$

Consideremos la primer integral. Ahí $\delta \leq t \leq |x|$; así

$$t^{-N-2}\left(1+\frac{|x|}{t}\right)^{-N} = t^{-2}(t+|x|)^{-N} \leq |x|^{-N} t^{-2}.$$

En consecuencia

$$\int_{\delta}^{|x|} t^{-N-2}\left(1+\frac{|x|}{t}\right)^{-N} dt \leq \int_{\delta}^{|x|} |x|^{-N} t^{-2} dt = |x|^{-N}\left(\delta^{-1}+|x|^{-1}\right).$$

Consideremos la segunda integral. Ahí $\delta < |x| \leq t < \infty$, entonces $1+\frac{|x|}{t} > 1$; lo cual implica $\left(1+\frac{|x|}{t}\right)^{-N} < 1$. De donde se deduce

$$\int_{|x|}^{\infty} t^{-N-2}\left(1+\frac{|x|}{t}\right)^{-N} dt \leq \int_{|x|}^{\infty} t^{-N-2} dt = c\,|x|^{-N}\left(\delta^{-1}+|x|^{-1}\right).$$

Por lo tanto

$$\int_{\delta}^{\infty} |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x)| \frac{dt}{t} \leq c\,|x|^{-N}\left(\delta^{-1}+|x|^{-1}\right).$$

Por otro lado como $1 < \delta \leq |x|$, entonces $2|x| \geq 1+|x|$; lo cual implica $(2|x|)^{-N} \leq (1+|x|)^{-N}$. Además $\delta^{-1}+|x|^{-1} \leq 2\delta^{-1}$. Así usando esto último se tiene

$$\begin{aligned}
c\,|x|^{-N}\left(\delta^{-1}+|x|^{-1}\right) &= c\frac{2^{-N}}{2^{-N}}|x|^{-N}\left(\delta^{-1}+|x|^{-1}\right) \\
&\leq c\,(1+|x|)^{-N}\left(\delta^{-1}+|x|^{-1}\right) \\
&\leq c\,(1+|x|)^{-N}\delta^{-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando las estimaciones de I y II, se tiene

$$|f(x) - f_{\varepsilon,\delta}(x)| \leq c\varepsilon(1 + |x|)^{-N} + c\delta^{-1}(1 + |x|)^{-N},$$

donde c es una constante. Haciendo $\varepsilon \to 0$ y $\delta \to \infty$, se obtiene $(\star)$. ∎

Definición. Sean $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ y $g \in D(\mathbb{R}^n)$. Se define la *convolución* de f y g como

$$(f * g)(x) = \langle f, \tau_x \widetilde{g} \rangle$$

donde $\widetilde{g}(x) = g(-x)$ y $[\tau_x \widetilde{g}](y) = \widetilde{g}(y - x)$.

Corolario 2.24

Si $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ y $g \in S_\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\langle f_{\varepsilon,\delta}, g \rangle = \langle f, g_{\varepsilon,\delta} \rangle \to \langle f, g \rangle$$

cuando $\varepsilon \to 0$ y $\delta \to \infty$.

Prueba. Probemos primero la igualdad. Por el teorema de Fubini y la definición de la convolución de una distribución con una función en el espacio $D(\mathbb{R}^n)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\langle f_{\varepsilon,\delta}, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f_{\varepsilon,\delta}(x)\, g(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_\varepsilon^\delta g(x)\, [\varphi_t * \varphi_t * f](x) \frac{dt}{t} dx \\
&= \int_\varepsilon^\delta \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, [\varphi_t * \varphi_t * f](x)\, dx \frac{dt}{t} \\
&= \int_\varepsilon^\delta \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \left\langle f, \tau_x \left(\widetilde{\varphi_t * \varphi_t}\right)\right\rangle dx \frac{dt}{t}. \\
&= \int_\varepsilon^\delta \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle f, \left[\tau_x \left(\widetilde{\varphi_t * \varphi_t}\right)\right] g(x) \right\rangle dx \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Sea $\alpha : \mathbb{R}^n \to S(\mathbb{R}^n)$ definida como $\alpha(x) = \left[\tau_x \left(\widetilde{\varphi_t * \varphi_t}\right)\right] g(x)$. Se puede verificar que α es Lebesgue integrable en $S(\mathbb{R}^n)$ y como $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, entonces por el teorema 2.3 se tiene

$$\langle f_{\varepsilon,\delta}, g \rangle = \int_\varepsilon^\delta \left\langle f, \int_{\mathbb{R}^n} \left[\tau_x \left(\widetilde{\varphi_t * \varphi_t}\right)\right] g(x)\, dx \right\rangle \frac{dt}{t}.$$

Pero por ser φ radial, $\varphi_t * \varphi_t$ es par y además

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\left[\tau_x\left(\widetilde{\varphi_t * \varphi_t}\right)\right](\cdot)\,dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\left(\widetilde{\varphi_t * \varphi_t}\right)(\cdot - x)\,dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\left(\varphi_t * \varphi_t\right)(x - \cdot)\,dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\left(\varphi_t * \varphi_t\right)(\cdot - x)\,dx \\
= & \left(\varphi_t * \varphi_t * g\right)(\cdot).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\langle f_{\varepsilon,\delta}, g\rangle = \int_{\varepsilon}^{\delta} \langle f, \varphi_t * \varphi_t * g\rangle \frac{dt}{t}.$$

Sea $\gamma : (\varepsilon,\delta) \to S(\mathbb{R}^n)$, con $(\varepsilon,\delta) \subset \mathbb{R}^1_+$, definida como $\gamma(t) = \varphi_t * \varphi_t * g$. Se puede verificar que γ es Lebesgue integrable en $S(\mathbb{R}^n)$ y como $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, entonces por el teorema 2.3 se tiene

$$\langle f_{\varepsilon,\delta}, g\rangle = \left\langle f, \int_{\varepsilon}^{\delta} \varphi_t * \varphi_t * g \frac{dt}{t}\right\rangle = \langle f, g_{\varepsilon,\delta}\rangle.$$

Dado que $g \in S_\infty(\mathbb{R}^n)$, por el teorema 2.21 se tiene que $g_{\varepsilon,\delta} \to g$ en la topología de $S(\mathbb{R}^n)$ cuando $\varepsilon \to 0$ y $\delta \to \infty$. Así

$$\langle f_{\varepsilon,\delta}, g\rangle \to \langle f, g\rangle \text{ cuando } \varepsilon \to 0 \text{ y } \delta \to \infty.$$

En consecuencia, para toda $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, $f_{\varepsilon,\delta} \to f$ cuando $\varepsilon \to 0$ y $\delta \to \infty$ en $S'_\infty(\mathbb{R}^n) \approx S'(\mathbb{R}^n)/P(\mathbb{R}^n)$. Esto es, la fórmula de Calderón converge en $S'(\mathbb{R}^n)$ en el sentido de convergencia en $S'(\mathbb{R}^n)$ módulo polinomios. ■

Este hecho general es suficiente para justificar la mayoria de los usos de la fórmula de Calderón.

Resultados más precisos pueden ser obtenidos usando las estimaciones anteriores.

Corolario 2.25

Sea φ como en el teorema 2.21. Si f satisface que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,(1+|x|)^{-n-k-1}\,dx < \infty,$$

para algún k en $\mathbb{Z}$, $k \geq -1$, entonces

$$\lim_{\varepsilon \to 0, \delta \to \infty} f_{\varepsilon,\delta} = f$$

en $S'(\mathbb{R}^n)/P_k(^n)$, donde $P_k(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a k.

Ver [6].

Aplicando este último resultado a $f \in \dot{\Lambda}_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, y el hecho de que $f(x) = O(|x|^\alpha)$ cuando $|x| \to \infty$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,(1+|x|)^{-n-1}\,dx = \left\{\int_{|x|>k} + \int_{|x|\leq k}\right\} |f(x)|\,(1+|x|)^{-n-1}\,dx,$$

donde $k > 0$ es muy grande. Es claro que la segunda integral de esta descomposición es finita y la primera integral también lo es, puesto que

$$\begin{aligned}
& \int_{|x|>k} |f(x)|\,(1+|x|)^{-n-1}\,dx \\
= \;& c\int_{|x|>k} |x|^\alpha\,(1+|x|)^{-n-1}\,dx \\
\leq \;& \int_{|x|>k} (1+|x|)^{-n-1+\alpha}\,dx \\
= \;& c\int_k^\infty \int_{S^{n-1}} (1+r)^{-n-1+\alpha}\, r^{n-1} d\varrho(x')\,dr \\
\leq \;& c\int_k^\infty (1+r)^{-\alpha-2}\,dr = ck^{\alpha-1} < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,(1+|x|)^{-n-1}\,dx < \infty.$$

En consecuencia, por el corolario 2.25

$$f_{\varepsilon,\delta} \to f$$

en $S'(\mathbb{R}^n)/P_0(\mathbb{R}^n)$. Esto es $f_{\varepsilon,\delta} \to f$ en $S'(\mathbb{R}^n)$ módulo constantes, que es lo que se queria probar puesto que todo elemento del espacio de Lipschitz está en el espacio de las distribuciones temperadas.

DESCOMPOSICIÓN DE $B_1^{0,1}$

Enfoquémonos en espacios de funciones que se comportan de una forma particularmente simple bajo la acción del grupo de dilataciones (por los números reales positivos) y el grupo de las traslaciones (por elementos de $\mathbb{R}^n$). El primer grupo mapea $f(x)$ en $f_t(x) = t^{-n} f\left(\frac{x}{t}\right)$ para cada $t > 0$, y el segundo grupo mapea $f(\cdot)$ en $f(\cdot - h)$ para cada $h \in \mathbb{R}^n$. La norma del espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ goza de las siguientes propiedades:

(3.1) $$\|f_t\|_1 = \|f\|_1 \text{ para toda } t > 0;$$

y

(3.2) $$\|f(\cdot - h)\|_1 = \|f\|_1 \text{ para toda } h \in \mathbb{R}^n.$$

Supóngase que B es otro espacio de Banach, continuamente contenido en el espacio de las distribuciones temperadas $S'(\mathbb{R}^n)$, cuya norma $\|\cdot\|_B = \|\cdot\|$ satisface (3.1) y (3.2). ¿Cúal es la relación entre B y $L^1(\mathbb{R}^n)$?. Es fácil ver que, bajo suposiciones adicionales muy ligeras, B debe de contener a $L^1(\mathbb{R}^n)$ y el mapeo inclusión debe ser continuo. Por ejemplo, supongamos que $\chi_0 \in B$, donde χ_0 es la función característica del cubo unitario

$$Q_0 = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3, \cdots, n\}.$$

Entonces, de esto se sigue que $L^1(\mathbb{R}^n) \subset B$ y el mapeo inclusión es continuo $(i : L^1(\mathbb{R}^n) \to B)$. Probemos esta última afirmación.

Prueba. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $0 < \varepsilon < 1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\|f\|_1 = 1$. Como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces existen $u_1 \in \mathbb{Z}$ y escalares s_Q tal que

$$e_1 = \sum_{\ell(Q)=2^{-u_1}} s_Q \chi_Q$$

satisface

$$\|f - e_1\|_{L^1} < \varepsilon,$$

donde $\chi_Q(x) = \chi_0\left(\frac{x - x_Q}{\ell(Q)}\right)$ es la función característica del cubo diádico Q cuyo lado tiene longitud 2^{-u_1} con esquina inferior izquierda x_Q. Dado que χ_Q es una traslación seguida de una dilatación, entonces $\chi_Q \in B$; lo cual implica que $s_Q\chi_Q \in B$; en consecuencia $e_1 \in B$. Repitiendo el mismo proceso, podemos encontrar un entero $u_2 > u_1$ y escalares s_Q tal que

$$e_2 = \sum_{\ell(Q)=2^{-u_2}} s_Q\chi_Q$$

satisface

$$\|f - e_1 - e_2\|_{L^1} < \varepsilon^2$$

el cubo diádico Q cuyo lado tiene longitud 2^{-u_2} con esquina inferior izquierda x_Q. Continuando de esta manera, obtenemos una sucesión de enteros $u_1 < u_2 < \cdots < u_j < \cdots$ y funciones

$$e_j = \sum_{\ell(Q)=2^{-u_j}} s_Q\chi_Q$$

tales que $\|f - f_m\|_{L^1} < \varepsilon^m$, donde $f_m = \sum_{j=1}^{m} e_j$.

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\|e_j\|_{L^1} &= \|f_j - f_{j-1} + f - f\|_{L^1} \\
&\leq \|f_j - f\|_{L^1} + \|f_{j-1} - f\|_{L^1} < \varepsilon^{j-1}(\varepsilon + 1)
\end{aligned}$$

y

$$\|e_j\|_{L^1(R^n)} = \left\| \sum_{\ell(Q)=2^{-u_j}} s_Q\chi_Q \right\|_{L^1(R^n)} = \sum_{\ell(Q)=2^{-u_j}} |s_Q|\,|Q|\,.$$

En consecuencia

$$\sum_{\ell(Q)=2^{-u_j}} |s_Q|\,|Q| < \varepsilon^{j-1}(\varepsilon + 1)\,.$$

De esta última desigualdad se sigue que $\{f_m\}$ es una sucesión de Cauchy en B : Si $m > k$, entonces usando 3.1 y 3.2 se tiene

$$\|f_m - f_k\|_B = \left\| \sum_{j=k+1}^{m} e_j \right\|_B \leq \sum_{j=k+1}^{m} \|e_j\|_B = \sum_{j=k+1}^{m} \left\| \sum_{\ell(Q)=2^{-u_j}} s_Q\chi_Q \right\|_B$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=k+1}^{m} \sum_{\ell(Q)=2^{-u_j}} |s_Q| \, \|\chi_Q\|_B \\
&= \sum_{j=k+1}^{m} \sum_{\ell(Q)=2^{-u_j}} |s_Q| \left\| \ell(Q)^n \, \ell(Q)^{-n} \chi_0 \left(\frac{x - x_Q}{\ell(Q)} \right) \right\|_B \\
&= \sum_{j=k+1}^{m} \sum_{\ell(Q)=2^{-u_j}} |s_Q| \, |Q| \left\| \ell(Q)^{-n} \chi_0 \left(\frac{x - x_Q}{\ell(Q)} \right) \right\|_B \\
&= \sum_{j=k+1}^{m} \sum_{\ell(Q)=2^{-u_j}} |s_Q| \, |Q| \, \|\chi_0\|_B \leq \|\chi_0\|_B \sum_{j=k+1}^{m} \varepsilon^{j-1} (\varepsilon + 1) \\
&= \|\chi_0\|_B (\varepsilon + 1) \left[\frac{1 - \varepsilon^{m-k}}{1 - \varepsilon} \right] \varepsilon^k < \|\chi_0\|_B \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \varepsilon^k,
\end{aligned}
$$

puesto que $1 - \varepsilon^{m-k} < 1$.

Dado que el último término tiende a cero cuando k tiende a infinito, entonces $\{f_m\}$ es una sucesión de Cauchy; lo cual implica que existe una función $g \in B$ tal que

$$f_m \to g \ \text{ en } \ B.$$

Además, dado que B está continuamente contenido en $S'(\mathbb{R}^n)$, $\{f_m\}$ converge a g en el espacio de distribuciones temperadas, es decir

$$f_m \to g \ \text{ en } \ S'(\mathbb{R}^n).$$

Por otra parte, sabemos que $\|f - f_m\|_{L^1} < \varepsilon^m$. Si m tiende a infinito, entonces $\|f - f_m\|_{L^1}$ tiende a cero. En consecuencia

$$f_m \to f \ \text{ en } \ L^1(\mathbb{R}^n).$$

Pero, por un resultado de teoria de distribuciones, se tiene que $L^1(\mathbb{R}^n)$ está continuamente contenido en $S'(\mathbb{R}^n)$. En consecuencia

$$f_m \to f \ \text{ en } \ S'(\mathbb{R}^n).$$

Por otra parte se sabe que $S'(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial topológico Hausdorff; lo cual implica que $f = g$ Por lo tanto $f \in B$. En consecuencia $L^1(\mathbb{R}^n) \subset B$.

Sólo resta probar que el mapeo inclusión $i : L^1(\mathbb{R}^n) \to B$ es continuo; es decir, probemos que

$$\|f\|_B \leq c\,\|f\|_{L^1} \quad \text{para toda} \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Obsérvese que nuestro argumento muestra que

$$\begin{aligned}
\|f_m\|_B &= \left\|\sum_{j=1}^m e_j\right\|_B \leq \sum_{j=1}^m \|e_j\|_B = \sum_{j=1}^m \left\|\sum_{\ell(Q)=2^{-u_j}} s_Q\chi_Q\right\|_B \\
&\leq \sum_{j=1}^m \sum_{\ell(Q)=2^{-u_j}} |s_Q|\,\|\chi_Q\|_B = \sum_{j=1}^m \sum_{\ell(Q)=2^{-u_j}} |s_Q|\,|Q|\,\|\chi_0\|_B \\
&= \|\chi_0\|_B \sum_{j=1}^m \|e_j\|_1 \leq (1+\varepsilon)\,\|\chi_0\|_B \sum_{j=1}^m \varepsilon^{j-1} \\
&= (1+\varepsilon)\,\|\chi_0\|_B \,\frac{1+\varepsilon^m}{1-\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Haciendo m tender a infinito y como $f_m \to f$ en B, entonces $\|f_m\|_B \to \|f\|_B$, $\varepsilon^m \to 0$ y

$$\|f\|_B \leq \|\chi_0\|_B \,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Dado que ε puede ser elegido arbitrariamente cercano a cero, esto nos da la estimación precisa

(3.3) $$\|f\|_B \leq \|\chi_0\|_B = \|\chi_0\|_B\,\|f\|_{L^1}. \blacksquare$$

En lugar de suponer que $\chi_0 \in B$, quizás es más natural suponer que el espacio de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ está contenido en B. No es difícil adaptar el argumento anterior a esta situación para obtener el siguiente

Teorema 3.4.

Supóngase que $(B, \|\cdot\|_B)$ es un espacio de Banach continuamente contenido en el espacio de las distribuciones temperadas. Si la norma de B satisface (3.1), (3.2) y $S(\mathbb{R}^n) \subset B$, entonces $L^1(\mathbb{R}^n) \subset B$ y la desigualdad (3.3) se cumple.

Prueba. Por el resultado anterior es suficiente probar que $\chi_0 \in B$. Sea $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ tal que $Sop\ \phi \subset Q_0, 0 \leq \phi \leq 1$ y $\|\chi_0 - \phi\|_{L^1} < \varepsilon$. Hacemos una construcción inductiva, similar a la que se realizó antes, para obtener una sucesión de funciones $\left\{\widetilde{f}_m\right\}$ en $S(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\widetilde{f}_m \to \chi_0 \ \text{ en } \ B \ \text{ y } \ \widetilde{f}_m \to \chi_0 \ \text{ en } \ L^1(\mathbb{R}^n).$$

Comenzamos con $e_1 = \chi_0$ y $\widetilde{e}_1 = \phi$. Sea $0 < \varepsilon < 1$, entonces afirmamos que existen enteros $u_2 < u_3 < \cdots < u_m < \cdots$, y coeficientes $\{s_Q\}$, asociados con los cubos diádicos Q, tales que las funciones

$$e_m = \sum_{\ell(Q)=2^{-u_m}} s_Q \chi_Q$$

y

$$\widetilde{e}_m = \sum_{\ell(Q)=2^{-u_m}} s_Q \phi_Q,$$

donde $\phi_Q(x) = \phi\left(\frac{x-x_Q}{\ell(Q)}\right)$ y $m = 2, 3, \cdots$, satisfacen

(i) $$\|\widetilde{e}_m\|_{L^1} \leq \|e_m\|_{L^1} \leq (m-1)(1+\varepsilon)\varepsilon^{m-1};$$

(ii) $$\left\|\chi_0 - \widetilde{f}_m\right\|_{L^1} \leq [m + (m-1)\varepsilon]\varepsilon^m,$$

donde $\widetilde{f}_m = \sum_{l=1}^{m} \widetilde{e}_l$. Para obtener estas funciones para $m = 2$, primero escogemos $u_2 > 1$ y una función escalonada

$$e_2 = \sum_{\ell(Q)=2^{-u_2}} s_Q \chi_Q$$

que satisface $\|\chi_0 - \widetilde{e}_1 - e_2\|_{L^1} < \varepsilon^2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|e_2\|_{L^1} &= \|e_2 - \chi_0 + \widetilde{e}_1 + \chi_0 - \widetilde{e}_1\|_{L^1} \\
&\leq \|\chi_0 - \widetilde{e}_1 - e_2\|_{L^1} + \|\chi_0 - \widetilde{e}_1\|_{L^1} < \varepsilon(\varepsilon + 1).
\end{aligned}$$

Probemos (i). Por la última desigualdad obtenida y el hecho de ser $\phi_Q \leq \chi_Q$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{e}_2\|_{L^1} &= \left\| \sum_{\ell(Q)=2^{-u_2}} s_Q \phi_Q \right\|_{L^1} \leq \sum_{\ell(Q)=2^{-u_2}} |s_Q| \, \|\phi_Q\|_{L^1} \\
&= \sum_{\ell(Q)=2^{-u_2}} |s_Q| \int_{\mathbb{R}^n} \phi_Q(x)\, dx \leq \sum_{\ell(Q)=2^{-u_2}} |s_Q| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Q(x)\, dx \\
&= \sum_{\ell(Q)=2^{-u_2}} |s_Q| \, |Q| = \|e_2\|_{L^1} < \varepsilon(\varepsilon+1).
\end{aligned}$$

Para ver que (ii) se cumple, observemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_0 - \widetilde{f}_2\right\|_{L^1} &= \|\chi_0 - \widetilde{e}_1 - \widetilde{e}_2 - e_2 + e_2\|_{L^1} \\
&\leq \|\chi_0 - \widetilde{e}_1 - e_2\|_{L^1} + \|e_2 - \widetilde{e}_2\|_{L^1} \\
&\leq \varepsilon^2 + \|e_2 - \widetilde{e}_2\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Pero por ser la norma de $L^1(\mathbb{R}^n)$ invariante bajo traslaciones, dilataciones y por la definición de ϕ_Q, se tiene

$$\begin{aligned}
&\|e_2 - \widetilde{e}_2\|_{L^1} \\
&= \left\| \sum_{\ell(Q)=2^{-u_2}} s_Q \left(\chi_Q - \phi_Q\right)(x) \right\|_{L^1} \\
&\leq \sum_{\ell(Q)=2^{-u_2}} |s_Q| \left\|\chi_Q - \phi_Q\right\|_{L^1} \\
&= \sum_{\ell(Q)=2^{-u_2}} |s_Q| \int_{\mathbb{R}^n} \left[\chi_Q - \phi_Q\right](x)\, dx \\
&= \sum_{\ell(Q)=2^{-u_2}} |s_Q| \, |Q| \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \ell(Q)^{-n} \left[\chi_0\left(\frac{x - x_Q}{\ell(Q)}\right) - \phi\left(\frac{x - x_Q}{\ell(Q)}\right) \right] \right\} dx \\
&= \sum_{\ell(Q)=2^{-u_2}} |s_Q| \, |Q| \, \|\chi_0 - \phi\|_{L^1} = \|\chi_0 - \phi\|_{L^1} \|e_2\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando las estimaciones de $\|\chi_0 - \phi\|_{L^1}$, $\|e_2\|_{L^1}$ y la última desigualdad se tiene

$$\left\|\chi_0 - \widetilde{f}_2\right\|_{L^1} \leq \varepsilon^2 + \|\chi_0 - \phi\|_{L^1} \|e_2\|_{L^1} \leq \varepsilon^2 (2 + \varepsilon).$$

Supongamos que tenemos estas funciones para $m-1>1$. Demostremos que vale para m.

Podemos encontrar $u_m > u_{m-1}$ y una función simple e_m tales que

$$(\star) \qquad \left\|\chi_0 - \widetilde{f}_{m-1} - e_m\right\|_{L^1} \leq \varepsilon^m.$$

Entonces, por la hipótesis se tiene

$$\begin{aligned}
\|e_m\|_{L^1} &= \left\|\chi_0 - \widetilde{f}_{m-1} - e_m - \chi_0 + \widetilde{f}_{m-1}\right\|_{L^1} \\
&\leq \left\|\chi_0 - \widetilde{f}_{m-1} - e_m\right\|_{L^1} + \left\|\chi_0 - \widetilde{f}_{m-1}\right\|_{L^1} \\
&< \varepsilon^m + \left\|\chi_0 - \widetilde{f}_{m-1}\right\|_{L^1} \leq \varepsilon^m + \left[(m-1) + (m-2)\,\varepsilon\right]\varepsilon^{m-1} \\
&= \varepsilon^{m-1}(m-1)(1+\varepsilon).
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{e}_m\|_{L^1} &= \left\|\sum_{\ell(Q)=2^{-u_m}} s_Q\phi_Q\right\|_{L^1} \leq \sum_{\ell(Q)=2^{-u_m}} |s_Q|\, \|\phi_Q\|_{L^1(R^n)} \\
&= \sum_{\ell(Q)=2^{-u_m}} |s_Q| \int_{\mathbb{R}^n} \phi_Q(x)\,dx \leq \sum_{\ell(Q)=2^{-u_m}} |s_Q| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Q(x)\,dx \\
&= \sum_{\ell(Q)=2^{-u_m}} |s_Q|\,|Q| = \|e_m\|_{L^1} < \varepsilon^{m-1}(\varepsilon+1)(m-1),
\end{aligned}$$

por que $0 \leq \phi_Q \leq \chi_Q$ y por la última desigualdad. Por lo tanto (i) se cumple para m

Veamos que (ii) se cumple para m. Por $(\star)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_0 - \widetilde{f}_m\right\|_{L^1} &= \left\|\chi_0 - \widetilde{f}_{m-1} - e_m + e_m - \widetilde{e}_m\right\|_{L^1} \\
&\leq \left\|\chi_0 - \widetilde{f}_{m-1} - e_m\right\|_{L^1} + \|e_m - \widetilde{e}_m\|_{L^1} \\
&< \varepsilon^m + \|e_m - \widetilde{e}_m\|_{L^1}
\end{aligned}$$

Pero por un análisis análogo al de la estimación de $\|e_2 - \widetilde{e}_2\|_{L^1}$, se tiene que

$$\|e_m - \widetilde{e}_m\|_{L^1} \leq \|\chi_0 - \phi\|_{L^1}\, \|e_m\|_{L^1}.$$

Por lo tanto, por ser $\|\chi_0 - \phi\|_{L^1} < \varepsilon$ y por (i), se tiene

$$\begin{aligned}\left\|\chi_0 - \widetilde{f}_m\right\|_{L^1} &\leq \varepsilon^m + \|\chi_0 - \phi\|_{L^1} \|e_m\|_{L^1} \\ &\leq \varepsilon^m + \varepsilon^m (\varepsilon + 1)(m-1) = \varepsilon^m [m + (m-1)\varepsilon].\end{aligned}$$

De donde se obtiene (ii). De esto es fácil ver que $\left\{\widetilde{f}_m\right\}$ es de Cauchy en B. Supóngase que $m > k$ entonces

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{f}_m - \widetilde{f}_k\right\|_B &= \left\|\sum_{j=k+1}^{m} \widetilde{e}_j\right\|_B \leq \sum_{j=k+1}^{m} \|\widetilde{e}_j\|_B = \sum_{j=k+1}^{m} \left\|\sum_{\ell(Q)=2^{-u_j}} s_Q\phi_Q\right\|_B \\ &\leq \sum_{j=k+1}^{m} \sum_{\ell(Q)=2^{-u_j}} |s_Q| \|\phi_Q\|_B \\ &= \sum_{j=k+1}^{m} \sum_{\ell(Q)=2^{-u_j}} |s_Q| |Q| \left\|\ell(Q)^{-n} \phi\left(\frac{x - x_Q}{\ell(Q)}\right)\right\|_B \\ &= \sum_{j=k+1}^{m} \sum_{\ell(Q)=2^{-u_j}} |s_Q| |Q| \|\phi\|_B = \|\phi\|_B \sum_{j=k+1}^{m} \|e_j\|_{L^1} \\ &\leq \|\phi\|_B \sum_{j=k+1}^{m} \varepsilon^{j-1} (1+\varepsilon)(j-1) \\ &= \|\phi\|_B (1+\varepsilon)\varepsilon \sum_{j=k+1}^{m} \varepsilon^{j-2} (j-1) \\ &= \|\phi\|_B (1+\varepsilon)\varepsilon \sum_{j=k}^{m} \varepsilon^{j-1} j \leq \|\phi\|_B (1+\varepsilon)\varepsilon \sum_{j=k}^{\infty} \varepsilon^{j-1} j.\end{aligned}$$

Pero $\sum_{j=k}^{\infty} \varepsilon^{j-1} j$ es convergente (por el criterio de la razón). Así, la última expresión de la estimación de $\left\|\widetilde{f}_m - \widetilde{f}_k\right\|_B$ tiende a cero cuando $k \to \infty$. Por lo tanto la sucesión $\left\{\widetilde{f}_m\right\}$ es de Cauchy en B y como es un espacio de Banach, entonces existe $f \in B$ tal que $\widetilde{f}_m \to f$ en B.

Además, por (ii)

$$\left\|\chi_0 - \widetilde{f}_m\right\|_{L^1} \leq \varepsilon^m \left[m + (m-1)\varepsilon\right].$$

Si hacemos m tender a infinito, entonces

$$\varepsilon^m \left[m + (m-1)\varepsilon\right] \to 0,$$

por que $0 < \varepsilon < 1$. En consecuencia $\widetilde{f}_m \to \chi_0$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Pero por hipótesis B está continuamente contenido en $S'(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\widetilde{f}_m \to \chi_0 \quad \text{en} \quad S'(\mathbb{R}^n).$$

En consecuencia, por ser $S'(\mathbb{R}^n)$ un espacio vectorial topológico Hausdorff, $f = \chi_0$. Por lo tanto $\chi_0 \in B$. ■

El espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ no es apropiado para muchos problemas en análisis. Muchos operadores importantes no son acotados en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Por ejemplo, este es el caso con la transformada de Hilbert H, definida por la igualdad

$$\begin{aligned} Hf(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \widetilde{f}_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Si $f = \chi_{[-1,1]}$, entonces $Hf(x) = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{|x+1|}{|x-1|}\right)$ para $|x| \neq 1$. La prueba es como sigue.

Si $x \notin [-1,1]$, entonces

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{dy}{x-y} = -\frac{1}{\pi} \left\{\ln|x-1| - \ln|x+1|\right\} = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{|x+1|}{|x-1|}\right).$$

Si $x \in (-1,1)$, tomando ε lo suficientemente pequeña se tiene

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\chi_{[-1,1]}(y)}{x-y} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{dy}{x-y} + \int_{x+\varepsilon}^{1} \frac{dy}{x-y} \right\} = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{|x+1|}{|x-1|}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{f_\varepsilon}(x)=\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{|x+1|}{|x-1|}\right),\ \text{si}\ |x|\neq 1.$$

Pero

$$\ln\left(\frac{|x+1|}{|x-1|}\right)=\ln\left|1+\frac{2}{x-1}\right|\approx\frac{1}{|x-1|}\approx\frac{1}{|x|}$$

cuando $|x|\to\infty$. Así, $\chi_{[-1,1]}\notin L^1(\mathbb{R})$.

Por otra parte supóngase que $f=\chi_{[0,1]}-\chi_{[-1,0]}$, entonces un cálculo similar al anterior muestra que $Hf\in L^1(\mathbb{R})$.

La diferencia básica entre estas dos elecciones para f es que la primera no tiene media cero, mientras que la segunda tiene media cero. Motivados por este hecho podemos preguntarnos ¿qué puede decirse acerca de B, un espacio de Banach que satisface (3.1) y (3.2), si reemplazamos la condición $S(\mathbb{R}^n)\subset B$ por la condición $S_0(\mathbb{R}^n)=\left\{f\in S(\mathbb{R}^n):\int f=0\right\}\subset B$?. Si hacemos esto, es entonces natural suponer que B está continuamente contenido en $S_0'(\mathbb{R}^n)$, el dual de $S_0(\mathbb{R}^n)$; $S_0'(\mathbb{R}^n)$ es identificado, naturalmente, con el espacio de las distribuciones temperadas módulo constantes. Ahora introducimos el espacio minimal que tiene estas propiedades. Resulta que este espacio se puede caracterizar usando la fórmula de reproducción de Calderón de una manera que es completamente análoga a las caracterizaciones que hemos presentado en los capítulos 1 y 2. Después mencionaremos la minimalidad de este espacio y mencionaremos otras descomposiciones del mismo.

Definición. Sea $f\in D'(\mathbb{R}^n)$ y sea $\varphi\in D(\mathbb{R}^n)$. Se define la *dilatación de una distribución*, denotada por f_r, como

$$\langle f_r,\varphi\rangle=\langle f,\varphi(r\cdot)\rangle.$$

Sea φ una función que satisface las propiedades del lema 1.1. Considérese el espacio $\dot{B}_1^{0,1}$ que consiste de todas las $f\in S_0'(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\|f\|_{\dot{B}_1^{0,1}}\equiv\int_0^\infty\|\varphi_t*f\|_{L^1}\frac{dt}{t}<\infty.$$

Proposición 3.5

La función $\|\cdot\|_{B_1^{0,1}} : B_1^{0,1} \to \mathbb{R}$ es una norma para $\dot{B}_1^{0,1}$.

Prueba. Es claro, apartir de la definición de $\|\cdot\|_{\dot{B}_1^{0,1}}$, que $\|f\|_{\dot{B}_1^{0,1}} \geq 0$ y $\|\alpha f\|_{B_1^{0,1}} = |\alpha| \, \|f\|_{\dot{B}_1^{0,1}}$ para toda $\alpha \in \mathbb{C}$ y para toda $f \in B_1^{0,1}$. Sean $f, g \in B_1^{0,1}$, probemos la desigualdad del triángulo. Por la distributividad de la convolución con respecto a la suma y por ser $\|\cdot\|_{L^1}$ una norma, entonces

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_{\dot{B}_1^{0,1}} &= \int_0^\infty \|\varphi_t * (f+g)\|_{L^1} \frac{dt}{t} \\
&\leq \int_0^\infty \|\varphi_t * f\|_{L^1} \frac{dt}{t} + \int_0^\infty \|\varphi_t * g\|_{L^1} \frac{dt}{t} \\
&= \|f\|_{\dot{B}_1^{0,1}} + \|g\|_{B_1^{0,1}}.
\end{aligned}
$$

Sea $f \in B_1^{0,1}$, probemos que $\|f\|_{B_1^{0,1}} = 0$ si y sólo si $f = 0$. Es claro que si $f = 0$, entonces $\|f\|_{B_1^{0,1}} = 0$.

Sea $f \in S_0'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f\|_{\dot{B}_1^{0,1}} = 0$. Por demostrar que $f = 0$.

Dado que $S_0(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$, $S_0(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio vectorial de $S(\mathbb{R}^n)$ y $f : S_0(R^n) \to \mathbb{C}$ es una funcional lineal continua, entonces por el teorema de Hahn-Banach existe una funcional lineal continua f_1 sobre $S(\mathbb{R}^n)$ la cual es una extensión de f. Entonces puesto que $\varphi_t * f = \varphi_t * f_1$

$$\int_0^\infty \|\varphi_t * f_1\|_{L^1} \frac{dt}{t} = 0;$$

lo cual implica que

$$\|\varphi_t * f_1\|_{L^1} = 0$$

para toda $t > 0$. En consecuencia $\varphi_t * f_1 = 0$ para toda $t > 0$ y para casi toda x. Por lo tanto

$$\varphi_t * \varphi_t * f_1 = 0$$

para toda $t > 0$ y para casi toda x. Como $\varphi_t \in S(\mathbb{R}^n)$ y $f_1 \in S'(\mathbb{R}^n)$, entonces $\varphi_t * \varphi_t * f_1$ es una distribución temperada. En consecuencia, aplicando transformada de Fourier y por propiedades de la transformada de Fourier de una convolución, se tiene

$$[\varphi_t * \varphi_t * f_1]^\wedge = \left[\hat{\varphi}(t\cdot)\right]^2 \hat{f}_1 = 0$$

para toda $t > 0$. Como la transformada de Fourier es un operador biyectivo sobre $S'(\mathbb{R}^n)$ y también es un operador biyectivo sobre $S(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\left[\hat{\varphi}(t\cdot)\right]^2 \hat{f}_1 \in S'(\mathbb{R}^n)$$

para toda $t > 0$. En consecuencia

$$\left\langle \left[\hat{\varphi}(t\cdot)\right]^2 \hat{f}_1, \psi(\cdot) \right\rangle = \left\langle \hat{f}_1, \left[\hat{\varphi}(t\cdot)\right]^2 \psi(\cdot) \right\rangle = 0$$

para toda $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ y para toda $t > 0$. Integrando con respecto a t con medida $\frac{dt}{t}$, se tiene

$$\int_0^\infty \left\langle \hat{f}_1, \left[\hat{\varphi}(t\cdot)\right]^2 \psi(\cdot) \right\rangle \frac{dt}{t} = 0$$

para toda $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Sea $\gamma : (0, \infty) \to S(\mathbb{R}^n)$ definida como $\gamma(t) = \left[\hat{\varphi}(t\cdot)\right]^2 \psi(\cdot)$. Se puede verificar que γ es Lebesgue integrable en $S(\mathbb{R}^n)$ y puesto que $\hat{f}_1 \in S'(\mathbb{R}^n)$, entonces por el teorema 2.3 del capítulo 2 se tiene

$$\int_0^\infty \left\langle \hat{f}_1, \left[\hat{\varphi}(t\cdot)\right]^2 \psi(\cdot) \right\rangle \frac{dt}{t} = \left\langle \hat{f}_1, \int_0^\infty \left[\hat{\varphi}(t\cdot)\right]^2 \psi(\cdot) \frac{dt}{t} \right\rangle = 0.$$

Pero por la propiedad (5) del lema 1.1 y por la última igualdad, se tiene

$$\left\langle \hat{f}_1, \psi(\cdot) \right\rangle = 0$$

para toda $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto

$$\hat{f}_1 = 0 \quad \text{en} \quad S'(\mathbb{R}^n).$$

En consecuencia

$$f_1 = 0 \quad \text{en} \quad S'(\mathbb{R}^n).$$

Así

$$f \equiv f_1 \mid S_0(\mathbb{R}^n) = 0,$$

que es lo que se queria probar. ■

Proposición 3.6

$B_1^{0,1}$ está continuamente contenido en $S_0'(\mathbb{R}^n)$, donde $S_0'(\mathbb{R}^n)$ tiene la topología débil*.

Prueba. Por definición $B_1^{0,1} \subset S_0'(\mathbb{R}^n)$. Sólo resta probar que el mapeo inclusión es continuo. Para probar esto se usa continuidad por sucesiones. El mapeo

$$i : \dot{B}_1^{0,1} \to S_0'(\mathbb{R}^n)$$

es continuo si y sólo si para toda sucesión $\{f_n\}, n \in \mathbb{Z}_+$, que converge a 0 en $B_1^{0,1}$, $\{f_n\}$ converge a 0 en $S_0'(\mathbb{R}^n)$.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $B_1^{0,1}$ que converge a 0 en $\dot{B}_1^{0,1}$, queremos demostrar que

$$\langle f_n, \psi \rangle \to 0$$

cuando $n \to \infty$, para toda $\psi \in S_0(\mathbb{R}^n)$.

Sea $\psi \in S_0(\mathbb{R}^n)$. Dado que $S_0(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. En consecuencia por el teorema 1.4

$$\psi(\cdot) = \int_0^\infty (\varphi_t * \varphi_t * \psi)(\cdot) \frac{dt}{t}.$$

Así

$$\langle f_n, \psi \rangle = \left\langle f_n, \int_0^\infty (\varphi_t * \varphi_t * \psi) \frac{dt}{t} \right\rangle.$$

Sea $\alpha : (0, \infty) \to S_0(\mathbb{R}^n)$ definida como $\alpha(t) = \varphi_t * \varphi_t * \psi$. Se puede verificar que α es Lebesgue integrable en $S_0(\mathbb{R}^n)$ y como $f_n \in S_0'(\mathbb{R}^n)$, entonces por el teorema 2.3

$$\begin{aligned}
\left\langle f_n, \int_0^\infty (\varphi_t * \varphi_t * \psi) \frac{dt}{t} \right\rangle &= \int_0^\infty \langle f_n, (\varphi_t * \varphi_t * \psi) \rangle \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty \left\langle f_n, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(\cdot - y)(\varphi_t * \psi)(y)\, dy \right\rangle \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Sea $\beta : \mathbb{R}^n \to S_0(\mathbb{R}^n)$ definida como $\beta(y) = \varphi_t(\cdot - y)(\varphi_t * \psi)(y)$. Se puede verificar que β es Lebesgue integrable en $S_0(\mathbb{R}^n)$ y como $f_n \in S_0'(\mathbb{R}^n)$ entonces por el teorema 2.3

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left\langle f_n, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(\cdot - y)(\varphi_t * \psi)(y)\,dy \right\rangle \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \langle f_n, \varphi_t(\cdot - y)(\varphi_t * \psi)(y)\rangle\,dy \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_t * \psi)(y) \langle f_n, \varphi_t(\cdot - y)\rangle\,dy \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_t * \psi)(y)(f_n * \varphi_t)(y)\,dy \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}
|\langle f_n, \psi\rangle| &\leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi_t * \psi)(y)|\,|f_n * \varphi_t|(y)\,dy \frac{dt}{t} \\
&\leq c\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |f_n * \varphi_t|(y)\,dy \frac{dt}{t} = c\int_0^\infty \|f_n * \varphi_t\|_{L^1} \frac{dt}{t} \\
&= c\,\|f_n\|_{B_1^{0,1}} \to 0,
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto

$$\langle f_n, \psi\rangle \to 0,$$

cuando $n \to \infty$, para toda $\psi \in S_0(\mathbb{R}^n)$. ■

Antes de probar que el espacio $\dot{B}_1^{0,1}$ es completo, se define la transformada de Fourier en $S_0'(\mathbb{R}^n)$. Comenzamos definiendo un hiperplano y damos una caracterización del mismo sin demostrarlo.

Definición. Sea X un espacio vectorial. Un *hiperplano* es un subespacio vectorial M de X tal que $dim X/M = 1$ (también se dice que M es de *codimensión* 1).

Teorema 3.7

Sea X un espacio vectorial. Un subespacio vectorial M de X es un hiperplano si y sólo si M es el núcleo de una funcional lineal no cero.

Ver [2] ; pag. 73

Lema 3.8

$S_0(\mathbb{R}^n)$ es un hiperplano de $S(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. Sea $L : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, definida como $L\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx$. Es claro que L es lineal y esta bien definida. Además si $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \notin S_0(\mathbb{R}^n)$, entonces $L\psi \neq 0$ y $KerL = S_0(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto $S_0(\mathbb{R}^n)$ es de codimensión 1. ■

Como consecuencia se tiene que

$$S(\mathbb{R}^n) = S_0(\mathbb{R}^n) \oplus c\varphi_0$$

donde $\varphi_0 \in S(\mathbb{R}^n) \setminus S_0(\mathbb{R}^n)$, $c \in \mathbb{C}$ y $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0 = 1$.

Se sabe que la transformada de Fourier, definida en $S'(\mathbb{R}^n)$, es un operador biyectivo. Lo que se pretende es definir la transformada de Fourier en $S_0'(\mathbb{R}^n)$, de tal manera que la transformada de Fourier de un elemento T del espacio $S_0'(\mathbb{R}^n)$ sea T aplicada a un elemento del espacio $S_0(\mathbb{R}^n)$.

Sea $T \in S_0'(\mathbb{R}^n)$, T se puede extender continuamente a $S(\mathbb{R}^n)$ del siguiente modo. Sea $\widetilde{T}$ la extensión de T tal que

$$(\bullet) \qquad \widetilde{T}(f + c\varphi_0) \equiv Tf$$

con $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$, y tal que

$$(\bullet\bullet) \qquad \widehat{T} \equiv \widehat{\widetilde{T}}.$$

Sea $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$. Entonces por $(\bullet\bullet)$ y por tener definida la transformada de Fourier sobre $S(\mathbb{R}^n)$, se tiene

$$\widehat{T}(f) = \widehat{\widetilde{T}}(f) = \widetilde{T}\left(\widehat{f}\right)$$

donde $\widehat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$. En consecuencia

$$\widehat{f} = g + c\varphi_0$$

donde $g \in S_0(\mathbb{R}^n)$. Integrando la última igualdad se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} = \int_{\mathbb{R}^n} (g + c\varphi_0) = c.$$

Por otra parte

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\zeta)\, d\zeta = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\zeta)\, e^{2i\pi 0\cdot\zeta} d\zeta = f(0).$$

En consecuencia $c = f(0)$. Por lo tanto

$$\hat{f} = g + f(0)\,\varphi_0;$$

lo cual implica que

$$g = \hat{f} - f(0)\,\varphi_0.$$

Sustituyendo el valor de g en la penúltima igualdad, se tiene

$$\hat{f} = \left(\hat{f} - f(0)\,\varphi_0\right) + f(0)\,\varphi_0,$$

donde $\hat{f} - f(0)\,\varphi_0 \in S_0(\mathbb{R}^n)$. Así, por $(\bullet)$ y $(\bullet\bullet)$ se tiene

$$\hat{T}(f) = \widetilde{T}\left(\hat{f}\right) = \widetilde{T}\left[\left(\hat{f} - f(0)\,\varphi_0\right) + f(0)\,\varphi_0\right] = T\left(\hat{f} - f(0)\,\varphi_0\right)$$

con $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$.

Por lo tanto si $T \in S_0'(\mathbb{R}^n)$ definimos la transformada de Fourier en $S_0'(\mathbb{R}^n)$ de la siguiente manera

$$\hat{T}(f) \equiv T\left(\hat{f} - f(0)\,\varphi_0\right)$$

con $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$.

Toerema 3.9

El espacio $\dot{B}_1^{0,1}$ es completo.

Prueba. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\dot{B}_1^{0,1}$, demostremos que existe $f \in \dot{B}_1^{0,1}$ tal que $f_n \to f$ en $\dot{B}_1^{0,1}$. Por hipótesis, dada $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_{\dot{B}_1^{0,1}} < \varepsilon$$

si $n, m \geq k$. Por la proposición 3.6 se tiene que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $S_0'(\mathbb{R}^n)$. Además $\{\langle f_n, \phi\rangle\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ para toda $\phi \in S_0(\mathbb{R}^n)$ y en consecuencia su límite existe. Sea f definida por

$$\langle f, \phi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, \phi\rangle$$

con $\phi \in S_0(\mathbb{R}^n)$. Por el teorema de Banach-Steinhaus se tiene que

$$f : S_0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$$

es continua. También se tiene que f es lineal, ya que para toda $\phi, \psi \in S_0(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\langle f, \phi + \alpha\psi\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle f_n, \phi + \alpha\psi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, \phi\rangle + \alpha \lim_{n\to\infty} \langle f_n, \psi\rangle \\
&= \langle f, \phi\rangle + \alpha \langle f, \psi\rangle .
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f \in S_0'(\mathbb{R}^n)$. Sólo resta ver que $\|f\|_{\dot{B}_1^{0,1}} < \infty$ para probar que $f \in \dot{B}_1^{0,1}$.

Como $\|f_m - f_n\|_{\dot{B}_1^{0,1}} \leq \varepsilon$ si $n, m \geq N$, para alguna $N \in \mathbb{Z}_+$, entonces

$$\int_0^\infty \|\varphi_t * (f_n - f_m)\|_{L^1} \frac{dt}{t} < \infty$$

lo cual implica, por ser $\varphi_t * (f_n - f_m) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, que

$$[\varphi_t * (f_n - f_m)](x) \to [\varphi_t * (f_n - f)](x)$$

puntualmente. Aplicando el lema de Fatou a la sucesión $[\varphi_t * (f_n - f_m)]_m$ se tiene

$$\|\varphi_t * (f_n - f)\|_{L^1} \leq \underline{\lim}_{m\to\infty} \|\varphi_t * (f_n - f_m)\|_{L^1};$$

lo cual implica

$$\int_0^\infty \|\varphi_t * (f_n - f)\|_{L^1} \frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty \underline{\lim}_{m\to\infty} \|\varphi_t * (f_n - f_m)\|_{L^1} \frac{dt}{t}.$$

Aplicando nuevamente el lema de Fatou a la integral de la derecha, se tiene

$$\int_0^\infty \underline{\lim}_{m\to\infty} \|\varphi_t * (f_n - f_m)\|_{L^1} \frac{dt}{t} \leq \underline{\lim}_{m\to\infty} \int_0^\infty \|\varphi_t * (f_n - f_m)\|_{L^1} \frac{dt}{t};$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_{\dot{B}_1^{0,1}} &\leq \underline{\lim}_{m\to\infty} \int_0^\infty \|\varphi_t * (f_n - f_m)\|_{L^1} \frac{dt}{t} \\ &= \underline{\lim}_{m\to\infty} \|f_m - f_n\|_{\dot{B}_1^{0,1}} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

si $n > N$. Tomando $\varepsilon = 1$ se tiene

$$\|f\|_{\dot{B}_1^{0,1}} = \|f - f_n + f_n\|_{\dot{B}_1^{0,1}} \leq \|f - f_n\|_{\dot{B}_1^{0,1}} + \|f_n\|_{\dot{B}_1^{0,1}} \leq 1 + \|f_n\|_{\dot{B}_1^{0,1}} < \infty.$$

Así, $f \in \dot{B}_1^{0,1}$. Finalmente probemos que

$$f_n \to f \text{ en } \dot{B}_1^{0,1}.$$

Esto es consecuencia de lo anterior, ya que si tomamos ε arbitrario se tiene

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_{\dot{B}_1^{0,1}} &\leq \underline{\lim}_{m\to\infty} \int_0^\infty \|\varphi_t * (f_n - f_m)\|_{L^1} \frac{dt}{t} \\ &= \underline{\lim}_{m\to\infty} \|f_m - f_n\|_{B_1^{0,1}} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

si $n > N$. Por lo tanto el espacio $\dot{B}_1^{0,1}$ es completo. ■

Proposición 3.10

La norma $\|\cdot\|_{\dot{B}_1^{0,1}}$ es invariante bajo traslaciones y dilataciones.

Prueba. Sea $f \in \dot{B}_1^{0,1}$ y $h \in \mathbb{R}^n$. Probemos que

$$\|f(\cdot - h)\|_{\dot{B}_1^{0,1}} = \|f\|_{\dot{B}_1^{0,1}}.$$

Como $\varphi_t \in S(\mathbb{R}^n)$, $f \in S_0'(\mathbb{R}^n)$, entonces por la definición de la convolución para distribuciones, se tiene

$$\begin{aligned}\|f(\cdot-h)\|_{\dot{B}_1^{0,1}} &= \int_0^\infty \|\varphi_t*(\tau_h f)\|_{L^1}\frac{dt}{t}=\int_0^\infty \|\tau_h(\varphi_t*f)\|_{L^1}\frac{dt}{t}\\ &= \int_0^\infty \|\varphi_t*f\|_{L^1}\frac{dt}{t}=\|f\|_{\dot{B}_1^{0,1}},\end{aligned}$$

donde se usó la propiedad de la traslación de una convolución de una distribución por una función en el espacio de Schwartz, y también el hecho que la norma $L^1(\mathbb{R}^n)$ es invariante bajo traslaciones.

Sea $f\in\dot{B}_1^{0,1}$ y $r>0$. Probemos que

$$\|f_r\|_{\dot{B}_1^{0,1}}=\|f\|_{\dot{B}_1^{0,1}}.$$

$$\begin{aligned}\|f_r\|_{\dot{B}_1^{0,1}} &= \int_0^\infty \|\varphi_t*f_r\|_{L^1}\frac{dt}{t}=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|(\varphi_t*f_r)(x)|\,dx\frac{dt}{t}\\ &= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|\langle f,(\tau_x\widetilde{\varphi}_t)(r\cdot)\rangle|\,dx\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Pero

$$(\tau_x\widetilde{\varphi}_t)(r\cdot)=\widetilde{\varphi}_t(r\cdot-x)=\varphi_t(x-r\cdot)=t^{-n}\varphi\left(\frac{x-r\cdot}{t}\right)=t^{-n}\varphi\left[\frac{r}{t}\left(\frac{x}{r}-\cdot\right)\right].$$

Sustituyendo se tiene

$$\|f_r\|_{\dot{B}_1^{0,1}}=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\left|\left\langle f,t^{-n}\varphi\left[\frac{r}{t}\left(\frac{x}{r}-\cdot\right)\right]\right\rangle\right|dx\frac{dt}{t}.$$

Haciendo el cambio de variable $u=\frac{x}{r}$ y el hecho de que f es lineal, implica que lo anterior es igual a

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\left|\left\langle f,t^{-n}r^n\varphi\left[\frac{r}{t}\left(\frac{x}{r}-\cdot\right)\right]\right\rangle\right|\frac{dx}{r^n}\frac{dt}{t}\\ =\;&\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\left|\left\langle f,\left(\frac{t}{r}\right)^{-n}\varphi\left(\frac{u-\cdot}{tr^{-1}}\right)\right\rangle\right|du\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Aplicando otro cambio de variable $s=\frac{t}{r}$, se tiene que lo anterior es igual a

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left\langle f, s^{-n} \varphi\left(\frac{u-\cdot}{s}\right) \right\rangle \right| du \frac{rds}{rs} \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left| \langle f, \varphi_s(u-\cdot) \rangle \right| du \frac{ds}{s} \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left| \langle f, \widetilde{\varphi}_s(\cdot - u) \rangle \right| du \frac{ds}{s} \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left| \langle f, (\tau_u \widetilde{\varphi}_s)(\cdot) \rangle \right| du \frac{ds}{s} \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left| (\varphi_s * f)(u) \right| du \frac{ds}{s} = \|f\|_{\dot{B}_1^{0,1}} . \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición 3.11

$S_0(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}_1^{0,1}$.

Prueba. Sean $\varphi, \psi \in S_0(\mathbb{R}^n)$, queremos demostrar que

$$\|\psi\|_{\dot{B}_1^{0,1}} = \int_0^\infty \|\varphi_t * \psi\|_{L^1} \frac{dt}{t} < \infty.$$

Por el corolario 2.23, con $k = 0$, se tiene

$$\int_0^\infty |\varphi_t * \psi| \frac{dt}{t} \le c(\varphi, \psi, n)(1 + |x|)^{-n-1} .$$

En consecuencia, por el teorema de Fubini e integrando en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_{\dot{B}_1^{0,1}} &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi_t * \psi)(x)| \, dx \frac{dt}{t} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |(\varphi_t * \psi)(x)| \frac{dt}{t} dx \\
&\le c \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-n-1} dx = c \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty (1 + r)^{-n-1} r^{n-1} dr d\sigma(x') \\
&= c \left| S^{n-1} \right| \int_0^\infty (1 + r)^{-2} dr < \infty. \blacksquare
\end{aligned}$$

$\dot{B}_1^{0,1}$ es llamado el *espacio de Besov*. En el siguiente resultado se prueba que $\dot{B}_1^{0,1}$ tiene una descomposición atómica suave. El enunciado del teorema y su prueba son muy similares a las que hemos presentado en los dos capítulos anteriores.

Teorema 3.12

Supóngase que $f \in \dot{B}_1^{0,1}$ y $N \in \mathbb{Z}_+$. Entonces existen coeficientes $\{s_Q\}$, $0 \leq s_Q < \infty$, donde Q varia sobre los cubos diádicos, y funciones $\{a_Q\}$ en $D(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$f = \sum_Q s_Q a_Q \ ; \tag{3.13}$$

$$Sop\ a_Q \subset 3Q \ ; \tag{3.14}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma a_Q(x)\, dx = 0 \text{ si } |\gamma| \leq N \ ; \tag{3.15}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(\partial^\gamma a_Q)(x)| \leq c_\gamma \ell(Q)^{-|\gamma|-\frac{n}{2}} \text{ para } \gamma \in \mathbb{Z}_+^n \ ; \tag{3.16}$$

$$\sum_Q |s_Q|\,|Q|^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{\dot{B}_1^{0,1}} . \tag{3.17}$$

Prueba. Como en los casos previos, aplicamos la fórmula de Calderón para $f \in \dot{B}_1^{0,1}$:

$$f(x) = \int_0^\infty (\varphi_t * \varphi_t * f)(x) \tfrac{dt}{t}, \tag{$\dagger$}$$

la cual converge en $S_0'(\mathbb{R}^n)$ (observese que la integral de la derecha converge absolutamente a una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$ si $f \in \dot{B}_1^{0,1}$).

Discretizando el lado derecho de la igualdad anterior, como se hizo en la prueba del teorema 1.6, se tiene

$$f(x) = \sum_Q \int\int_{T(Q)} \varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y)\, dy \frac{dt}{t}.$$

Sea

$$s_Q = |Q|^{-\frac{1}{2}} \int\int_{T(Q)} |(\varphi_t * f)(y)|\, dy \frac{dt}{t}$$

y, cuando $s_Q \neq 0$,

$$a_Q(x) = \frac{1}{s_Q}\int\int_{T(Q)} \varphi_t(x-y)(\varphi_t * f)(y)\,dy\frac{dt}{t}.$$

Es claro, a partir de las definiciones de s_Q y a_Q, que (3.13) se cumple. La prueba de (3.14) es igual a la prueba de (1.8). De manera análoga a como se probó (1.9), se prueba (3.15). (3.17) se sigue inmediatamente de la definición de s_Q y de que la suma corre sobre todos los cubos diádicos Q $\left(\mathbb{R}^{n+1}_+ = \bigcup_Q T(Q)\right)$. Sólo resta probar (3.16). Por fórmulas de intercambio

$$\begin{aligned}
(\partial^\gamma a_Q)(x) &= \frac{1}{s_Q}\int\int_{T(Q)} (\partial_x^\gamma \varphi_t)(x-y)(\varphi_t * f)(y)\,dy\frac{dt}{t} \\
&= \frac{1}{s_Q}\int\int_{T(Q)} t^{-n-|\gamma|}\partial^\gamma\varphi\left(\frac{x-y}{t}\right)(\varphi_t * f)(y)\,dy\frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|(\partial^\gamma a_Q)(x)| &\leq \frac{1}{s_Q}\int\int_{T(Q)} t^{-n-|\gamma|}\left|\partial^\gamma\varphi\left(\frac{x-y}{t}\right)\right| |(\varphi_t * f)(y)|\,dy\frac{dt}{t} \\
&\leq \frac{\|\partial^\gamma\varphi\|_\infty}{s_Q}\int\int_{T(Q)} t^{-n-|\gamma|}|(\varphi_t * f)(y)|\,dy\frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Pero como $\frac{\ell(Q)}{2} \leq t \leq \ell(Q)$, entonces $t^{-n-|\gamma|} \leq 2^{n+|\gamma|}\ell(Q)^{-n-|\gamma|}$. Usando esto último, la definición de s_Q y tomando el supremo sobre todas las $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(\partial^\gamma a_Q)(x)| \\
\leq\ & \frac{\|\partial^\gamma\varphi\|_\infty}{s_Q} 2^{n+|\gamma|}\ell(Q)^{-n-|\gamma|}\int\int_{T(Q)} |(\varphi_t * f)(y)|\,dy\frac{dt}{t} \\
=\ & \|\partial^\gamma\varphi\|_\infty 2^{n+|\gamma|}\ell(Q)^{-\frac{n}{2}-|\gamma|} = c(\varphi,\gamma,n)\,\ell(Q)^{-\frac{n}{2}-|\gamma|}.
\end{aligned}$$

Para terminar, probemos que (†) converge en $S_0'(\mathbb{R}^n)$. Sean $0 < \varepsilon < \delta < \infty$ y defínase $f_{\varepsilon,\delta}$ como

$$f_{\varepsilon,\delta}(x) = \int_\varepsilon^\delta (\varphi_t * \varphi_t * f)(x)\,\frac{dt}{t}.$$

Por demostrar que

$$f_{\varepsilon,\delta} \to f \text{ en } S_0'(\mathbb{R}^n)$$

cuando $\varepsilon \to 0$ y $\delta \to \infty$. La prueba consistira de varios pasos.

Paso 1. $f_{\varepsilon,\delta} \in S_0'(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. Sean $0 < \varepsilon < \delta < \infty$ fijos y $f \in \dot{B}_1^{0,1}$, probemos que $f_{\varepsilon,\delta} \in S'(\mathbb{R}^n)$. Veamos que $f_{\varepsilon,\delta} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Es claro que $f_{\varepsilon,\delta}$ es medible, sólo basta probar que la norma L^1 de $f_{\varepsilon,\delta}$ es finita.

Por el teorema de Tonelli, por la desigualdad de Young y por ser $f \in \dot{B}_1^{0,1}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|f_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\varepsilon}^{\delta} (\varphi_t * \varphi_t * f)(x) \frac{dt}{t} \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\varepsilon}^{\delta} |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x)| \frac{dt}{t} dx \\
&= \int_{\varepsilon}^{\delta} \int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi_t * \varphi_t * f)(x)| \, dx \frac{dt}{t} = \int_{\varepsilon}^{\delta} \|\varphi_t * \varphi_t * f\|_{L^1} \frac{dt}{t} \\
&\leq \|\varphi\|_{L^1} \int_{\varepsilon}^{\delta} \|\varphi_t * f\|_{L^1} \frac{dt}{t} \leq \|\varphi\|_{L^1} \int_0^{\infty} \|\varphi_t * f\|_{L^1} \frac{dt}{t} \\
&= \|\varphi\|_{L^1} \|f\|_{\dot{B}_1^{0,1}} < \infty.
\end{aligned}$$

Así, $f_{\varepsilon,\delta} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para toda $0 < \varepsilon < \delta < \infty$. Pero $L^1(\mathbb{R}^n)$ está continuamente contenido en $S'(\mathbb{R}^n)$ y como $S'(\mathbb{R}^n) \subset S_0'(\mathbb{R}^n)$, entonces $f_{\varepsilon,\delta} \in S_0'(\mathbb{R}^n)$ para toda $0 < \varepsilon < \delta < \infty$.

Paso 2. Si $f \in S_0'(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{f} \in S_0'(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. $\hat{f} \in S_0'(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $\hat{f}$ es lineal y continua. Sean $\psi, \phi \in S_0(\mathbb{R}^n)$ y α un escalar, queremos demostrar que

$$\left\langle \hat{f}, \psi + \phi \right\rangle = \left\langle \hat{f}, \psi \right\rangle + \left\langle \hat{f}, \phi \right\rangle.$$

Usando la definición de la transformada de Fourier en $S_0'(\mathbb{R}^n)$, la linealidad del operador transformada de Fourier sobre $S(\mathbb{R}^n)$, la linealidad de f y el hecho de que $\hat{\psi} - \psi(0)\varphi_0, \hat{\phi} - \phi(0)\varphi_0 \in S_0(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\left\langle \hat{f}, \psi + \phi \right\rangle = \langle f, (\psi + \phi)^\wedge - (\psi + \phi)(0)\varphi_0 \rangle$$

$$= \left\langle f, \left[\overset{\wedge}{\psi} - \psi(0)\varphi_0\right] + \left[\overset{\wedge}{\phi} - \phi(0)\varphi_0\right] \right\rangle$$
$$= \left\langle \hat{f}, \psi \right\rangle + \left\langle \hat{f}, \phi \right\rangle.$$

y

$$\left\langle \hat{f}, \alpha\psi \right\rangle = \left\langle f, (\alpha\psi)^{\wedge} - (\alpha\psi)(0)\varphi_0 \right\rangle = \alpha \left\langle f, \overset{\wedge}{\psi} - \psi(0)\varphi_0 \right\rangle = \alpha \left\langle \hat{f}, \psi \right\rangle.$$

Por lo tanto $\hat{f}$ es lineal. Sólo resta probar que $\hat{f}$ es continua. Sea $\{\psi_k\}$ una sucesión en $S_0(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi_k \to 0$ en $S_0(\mathbb{R}^n)$, probemos que $\left\langle \hat{f}, \psi_k \right\rangle \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Por definición de la transformada de Fourier en $S_0'(\mathbb{R}^n)$, se tiene

$$\left\langle \hat{f}, \psi_k \right\rangle = \left\langle f, \overset{\wedge}{\psi_k} - \psi_k(0)\varphi_0 \right\rangle = \left\langle f, \widetilde{\psi}_k \right\rangle$$

donde $\widetilde{\psi}_k = \overset{\wedge}{\psi_k} - \psi_k(0)\varphi_0$. Es claro que $\widetilde{\psi}_k \in S_0(\mathbb{R}^n)$ para toda $n = 1, 2, 3, \cdots$. Basta probar que $\widetilde{\psi}_k \to 0$ en $S_0(\mathbb{R}^n)$, puesto que $f \in S_0'(\mathbb{R}^n)$.

$$\widetilde{\psi}_k \to 0 \text{ en } S_0(R^n) \text{ si y sólo si } \left\| \widetilde{\psi}_k \right\|_{\alpha,\beta} \to 0$$

cuando $n \to \infty$ para todos multi-índices α, β, donde

$$\left\| \widetilde{\psi}_k \right\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta \left[\overset{\wedge}{\psi_k} - \psi_k(0)\varphi_0\right](x) \right|.$$

Tenemos que

$$x^\alpha \partial^\beta \left[\overset{\wedge}{\psi_k} - \psi_k(0)\varphi_0\right](x) = x^\alpha (\partial^\beta \overset{\wedge}{\psi_k})(x) - x^\alpha \psi_k(0)\left[\partial^\beta \varphi_0\right](x).$$

Por hipótesis $\psi_k \to 0$ en $S_0(\mathbb{R}^n)$, entonces $\psi_k(x) \to 0$ puntualmente. En consecuencia $\psi_k(0) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Por lo tanto

$$x^\alpha \psi_k(0)\left[\partial^\beta \varphi_0\right](x) \to 0 \text{ cuando } k \to \infty.$$

Por otra parte como $\psi_k \in S_0(\mathbb{R}^n)$, entonces $\overset{\wedge}{\psi}_k \in S(\mathbb{R}^n)$, y por propiedades de la transformada de Fourier se tiene

$$x^\alpha(\partial^\beta \overset{\wedge}{\psi}_k)(x) = (-1)^{-|\beta|} x^\alpha (-1)^{|\beta|} (\partial^\beta \overset{\wedge}{\psi}_k)(x) = (-1)^{-|\beta|} x^\alpha \left(\zeta^\beta \psi_k\right)^\wedge (x).$$

y como $^\wedge : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ es continuo, entonces haciendo $k \to \infty$

$$(-1)^{-|\beta|} x^\alpha \left(\zeta^\beta \psi_k\right)^\wedge \to 0,$$

por que $\psi_k \to 0$ en $S_0(\mathbb{R}^n)$ cuando $k \to \infty$. Por lo tanto

$$\widetilde{\psi}_k \to 0 \text{ en } S_0(\mathbb{R}^n).$$

con lo que $\hat{f} \in S_0'(\mathbb{R}^n)$.

Paso 3. $\hat{f}_{\varepsilon,\delta} \to \hat{f}$ en $S'(\mathbb{R}^n)$ cuando $\varepsilon \to 0$ y $\delta \to \infty$.

Prueba. Sea $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, queremos demostrar que

$$\left\langle \hat{f}_{\varepsilon,\delta} - \hat{f}, \psi \right\rangle \to 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0 \text{ y cuando } \delta \to \infty.$$

Por la propiedad (5) del lema 1.1 y por propiedades de la transformada de Fourier de una convolución, se tiene

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{f}_{\varepsilon,\delta} - \hat{f}, \psi \right\rangle &= \left\langle \hat{f}_{\varepsilon,\delta} - \hat{f} \int_0^\infty \left[\hat{\varphi}(t\cdot)\right]^2 \frac{dt}{t}, \psi \right\rangle \\
&= \left\langle \hat{f}_{\varepsilon,\delta} - \int_0^\infty \hat{f} \left[\hat{\varphi}(t\cdot)\right]^2 \frac{dt}{t}, \psi \right\rangle \\
&= \left\langle \hat{f}_{\varepsilon,\delta} - \int_0^\infty \left[\varphi_t * \varphi_t * f\right]^\wedge \frac{dt}{t}, \psi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Sea $\gamma : (0,\infty) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ definida por $\gamma(t) = \varphi_t * \varphi_t * f$. γ es una función Bochner integrable, puesto que por la desigualdad de Young

$$\int_0^\infty \|\gamma(t)\|_{L^1} \frac{dt}{t} \leq \|\varphi\|_{L^1} \int_0^\infty \|\varphi_t * f\|_{L^1} \frac{dt}{t} < \infty.$$

Por lo tanto, por el teorema 1.3, γ es Bochner integrable. Además, como

$$^\wedge : L^1(R^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$$

es un operador lineal continuo, entonces por el teorema 1.2

$$\left\{\left(\int_0^\infty \gamma(t)\right)\frac{dt}{t}\right\}^\wedge = \int_0^\infty [\gamma(t)]^\wedge \frac{dt}{t}.$$

Usando esto último y la linealidad de la transformada de Fourier, se tiene

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{f}_{\varepsilon,\delta} - \int_0^\infty [\varphi_t * \varphi_t * f]^\wedge \frac{dt}{t}, \psi \right\rangle &= \left\langle \hat{f}_{\varepsilon,\delta} - \left\{\int_0^\infty \varphi_t * \varphi_t * f \frac{dt}{t}\right\}^\wedge, \psi \right\rangle \\
&= \left\langle \left\{ f_{\varepsilon,\delta} - \int_0^\infty \varphi_t * \varphi_t * f \frac{dt}{t}\right\}^\wedge, \psi \right\rangle \\
&= \left\langle f_{\varepsilon,\delta} - \int_0^\infty \varphi_t * \varphi_t * f \frac{dt}{t}, \hat{\psi} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Pero

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to\infty} \left\{ f_{\varepsilon,\delta} - \int_0^\infty \varphi_t * \varphi_t * f \frac{dt}{t}\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to\infty} f_{\varepsilon,\delta} - \int_0^\infty \varphi_t * \varphi_t * f \frac{dt}{t} = 0.$$

Por lo tanto

$$\left\langle \hat{f}_{\varepsilon,\delta} - \hat{f}, \psi \right\rangle \to 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0 \text{ y } \delta \to \infty.$$

Finalmente tenemos los argumentos necesarios para probar que

$$f_{\varepsilon,\delta} \to f \text{ en } S_0'(\mathbb{R}^n) \text{ cuando } \varepsilon \to 0 \text{ y } \delta \to \infty.$$

$f_{\varepsilon,\delta} \to f$ en $S_0'(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si para toda $\psi \in S_0(\mathbb{R}^n)$

$$\langle f_{\varepsilon,\delta} - f, \psi \rangle \to 0$$

cuado $\varepsilon \to 0$ y $\delta \to \infty$. Sea $\psi \in S_0(\mathbb{R}^n)$ y consideremos $\check{\psi}$ (no necesariamente esta en $S_0(R^n)$). Como la transformada de Fourier es lineal y por definición de transformada de Fourier en $S_0'(\mathbb{R}^n)$, se tiene

$$\left\langle \hat{f}_{\varepsilon,\delta} - \hat{f}, \check{\psi} \right\rangle = \left\langle f_{\varepsilon,\delta} - f, \psi - \check{\psi}(0)\varphi_0 \right\rangle.$$

Pero como $\psi \in S_0(\mathbb{R}^n)$ y $\check{\psi}(\zeta) = \int_{\Re^n} \psi(x)\, e^{2\pi i x\,\zeta} dx$, entonces $\check{\psi}(0) = 0$. En consecuencia

$$\left\langle \hat{f}_{\varepsilon,\delta} - \hat{f}, \check{\psi} \right\rangle = \langle f_{\varepsilon,\delta} - f, \psi \rangle .$$

Usando el paso 3 se tiene

$$\left\langle \hat{f}_{\varepsilon,\delta} - \hat{f}, \check{\psi} \right\rangle = \langle f_{\varepsilon,\delta} - f, \psi \rangle \to 0$$

cuando $\varepsilon \to 0$ y $\delta \to \infty$. Por lo tanto

$$f_{\varepsilon,\delta} \to f \text{ en } S_0'(\mathbb{R}^n)$$

cuando $\varepsilon \to 0$ y $\delta \to \infty$. Esto termina la demostración del teorema. ∎

Como fue el caso en los dos ejemplos de descomposición atómica suaves, este teorema tiene una inversa: si $\{s_Q\}_{, Q \in \tilde{Q}}$, es una sucesión de coeficientes que satisfacen $\sum_Q |s_Q|\,|Q|^{-\frac{1}{2}} < \infty$, y $\{a_Q\}$ es una sucesión de funciones que satisfacen (3.14), (3.15) y (3.16), entonces $f = \sum_Q s_Q a_Q \in \dot{B}_1^{0,1}$ y

$$\|f\|_{\dot{B}_1^{0,1}} \leq c \sum_Q |s_Q|\,|Q|^{-\frac{1}{2}} .$$

La versión general (molecular) de esta inversa, y su prueba, son muy similares a los teoremas (1.18) y (2.13).

A continuación establecemos la propiedad minimal del espacio $\dot{B}_1^{0,1}$. Para la demostración de estos resultados ver [4]; pags. 31-33.

Comenzamos dando un argumento "suave" que nos da una descomposición atómica de este espacio directamente de la fórmula de Calderón (la cual puede ser pensada como una versión continua de nuestra descomposición atómica suave). Esto es, se prueba el análogo del teorema 3.12.

Teorema 3.18

Supóngase que $f \in \dot{B}_1^{0,1}$ y φ satisface las propiedades del lema 1.1. Entonces existen sucesiones numéricas $\{s_k\}$ y $\{t_k\}$, $t_k \geq 0$, y una sucesión de puntos $h_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots$, tales que, si $a_k(x) = t_k^{\frac{n}{2}} \varphi_{t_k}(x - h_k)$, tenemos que $f = \sum_{k=1}^{\infty} s_k a_k$ (con convergencia en la norma de $\dot{B}_1^{0,1}$) y

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k^{\frac{n}{2}} |s_k| \leq c \|f\|_{\dot{B}_1^{0,1}} .$$

Para la prueba de este resultado se usa un resultado de análisis funcional que puede ser obtenido del teorema de Hahn-Banach:

Lema 3.19

Sea K un subconjunto cerrado, convexo y acotado de un espacio de Banach B sobre los reales. Si $x \notin K$, entonces existe una funcional lineal continua l de valor real en B tal que

$$\mathrm{Sup}_{w \in K} l(w) < l(x) .$$

Observemos que en la descomposición en el teorema 3.18 hemos perdido la información acerca de la localización precisa de los cubos que son el soporte de los átomos del teorema 3.12. Por otra parte, el teorema 3.18 nos da una expresión más explícita para las funciones que corresponden a los átomos suaves. En particular, este resultado nos dice que $\dot{B}_1^{0,1}$ está generado por las traslaciones y dilataciones de un solo elemento φ. La minimalidad de este espacio ahora es inmediata:

Corolario 3.20

Supóngase que $(B, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach continuamente contenido en $S_0'(\mathbb{R}^n)$. Si la norma de B satisface (3.1) , (3.2) y $S_0(\mathbb{R}^n) \subset B$, entonces $\dot{B}_1^{0,1}$ está continuamente contenido en B.

Observemos que los teoremas 3.12 y 3.18 nos dan dos tipos diferentes de descomposición del espacio de Besov $\dot{B}_1^{0,1}$. Este fenómeno, también como las características especiales de cada descomposición, ocurre en el marco de una clase grande de espacios.

Hay otra descomposición, más natural, del espacio $\dot{B}_1^{0,1}$ $(\mathbb{R})$ que merece ser mencionada: la descomposición de átomos especiales. Para un intervalo finito $I = [a, b]$, sean $I_r = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ y $I_l = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$. El átomo especial asociado con I es la función $h_I = \frac{1}{|I|}\left\{\chi_{I_r} - \chi_{I_l}\right\}$. Claramente $\|h_I\| = 1$. Sea B el espacio de todas las

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j h_{I_j};$$

tales que $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| < \infty$. Si definimos

$$\|f\| = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| : f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j h_{I_j}\right\}$$

para $f \in B$, entonces B es un espacio de Banach, llamado el espacio de átomos especiales, que satisface las condiciones del corolario 3.20. Resulta que $B = B_1^{0,1}$; más precisamente, tenemos:

Teorema 3.21

El espacio de átomos especiales $(B, \|\cdot\|)$ coincide con $\dot{B}_1^{0,1}$ $(\mathbb{R})$ y existen constantes $a, b > 0$ tales que

$$a\|f\| \leq \|f\|_{\dot{B}_1^{0,1}} \leq b\|f\|.$$

BIBLIOGRAFIA

1. Al-Gwaiz M.A., *Theory of Distributions*, M. Dekker, New York, 1992.

2 Conway Jhon B., *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag Inc., New York, 1990.

3. Diestel J., Uhl J., *Vector Measures*, American Mathematical Society. Rhode Island, 1977.

4. Frazier Michael. Björn Jaworth, Weiss Guido, *Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces*, American Mathematical Society. Rhode Island, 1991.

5. Garnir H.G., Schmets J., De Wilde M., *Analyse Fonctionelle*, tomo 2. Birkhäuser Verlag Basel, 1972.

6. Janson S., Taibleson M.H., *I Teoremi di Rappresentazione di Calderón*, Rend. Sem. Mat. Ist. Politecn. Torino **34** (1981), 27-35.

7. Rudin Walter, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1991.

8. Rudin Walter, *Real and Complex Analysis*, McGraw- Hill Book Company. New York, 1987.

9. Stein Elias M., Weiss Guido, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1975.