



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"SOBRE TEORIA DE CAMPO EN GEOMETRIA NO CONMUTATIVA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A

KARLA DIAZ ORDAZ AVILA



DIRECTOR DE TESIS: DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS



FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

279310



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Sobre teorías de campo en geometría no conmutativa"

realizado por Karla Díaz-Ordaz Avila

con número de cuenta 9550427-6 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Dr. Hernando Quevedo Cubillos

Propietario

Dr. Raymundo Bautista Ramos

Propietario

Dr. Marcos Rosenbaum Pitluck

Suplente

Dr. Mióo Durdevich

Suplente

Dr. León Kushner Schnur

Consejo Departamental de Matemáticas

Héctor Méndez Lango

Dr. Héctor Méndez Lango

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL

AVENIDA DE MEXICO

01000 MEXICO D.F.

TEL. 5623 1111

Sobre Teorías de Campo en Geometría No conmutativa

Por: Karla Díaz Ordaz Ávila

Dedicatoria

Quisiera dedicar el presente trabajo a todas las personas importantes en mi vida.

Primeramente a mis Padres, Enrique y Josefina, por su amor, por su comprensión, por su amistad y su confianza y también por los ocasionales regaños, que sé muy bien me merecía. De ustedes he aprendido los valores de la vida y quiero decirles que a su lado, he sido muy feliz.

A mis dos hermanitas Cau y Vivi.

A mi abue, Lidia, le dedico este trabajo, así como todos los actos de mi vida.

A mi asesor, el Doctor Hernando Quevedo, quien además de ser mi guía en el mundo de la física y las matemáticas, se ha vuelto un gran amigo, en quien confío. Le agradezco *todo* el tiempo que ha invertido en mí, no sólo en la preparación de esta tesis, sino antes y también en otras charlas ajenas a ella. Aprecio de verdad mucho todo lo que has hecho. Gracias por impulsarme a seguir.

A mis sinodales, les agradezco el tiempo invertido en leer y corregir oportunamente la primera versión de esta tesis. Quiero aclarar que cualquier error que en ella se encuentre es responsabilidad mía solamente.

A mis profesores, en especial al Dr. Seligman por todo su apoyo, mientras me dediqué a la Física y al M. en C. José Antonio Gómez, Toño, por brindarme su amistad y ayuda.

A mis amigos, los de la Facultad, las físicas Mónica y Diana N. por la amistad sincera e incondicional, los matemáticos Diana A., Tere, Rita, Carmen y Lalo por todos los momentos compartidos (inclusive aquellos días de locura resolviendo tareas en equipo) y los físico-matemáticos Adriana y Breno, con quienes comparto, además de una gran amistad como con todos los anteriores, el extraño placer de pertenecer a la intersección de estas ciencias, que nos da, creo, un toque especial.

A mi amiga Martha, por ser MI amiga siempre, estemos lejos o cerca, sin importar el momento.

Y finalmente, a tí, Oliver, por ser mi fuente de inspiración, por mostrarme cuán interesantes y apasionantes pueden ser las matemáticas, por animarme a continuar, por tu confianza y comprensión, por darle a mi vida muchísima luz, por el esfuerzo que hemos hecho para permanecer juntos y sobre todo, muy especialmente, por tu amor.

Índice General

Introducción	5
1 Elementos de Geometría Diferencial	11
1.1 Variedades Diferenciables	12
1.1.1 Campos vectoriales	13
1.2 Hazes Fibrados	17
1.2.1 Haz Cotangente; vectores covariantes	24
1.2.2 p -formas	25
1.2.3 Derivada exterior	26
1.3 Hazes fibrados principales	28
1.3.1 Conexión.	29
1.3.2 Transporte paralelo y derivada covariante	34
2 Teorías de Campo	35
2.1 Formalismo lagrangiano	36
2.1.1 Cálculo de Variaciones	36
2.1.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange	39
2.1.3 Transformaciones de Legendre	42
2.2 Mecánica Hamiltoniana	43
2.2.1 Ecuaciones de Hamilton	44
2.3 Estructura simpléctica en variedades.	45
2.3.1 La mecánica Hamiltoniana y su estructura simpléctica	46
2.4 Electromagnetismo	50
2.4.1 Métrica y el operador \star	54

2.4.2	El segundo par de ecuaciones de Maxwell	58
2.4.3	Potencial Electromagnético.	60
2.5	Teorías de Norma: construcción geométrica.	62
2.5.1	Curvatura	63
2.5.2	Idéntidades de Bianchi	66
2.6	Las Teorías de Yang-Mills	67
3	Geometría no conmutativa	73
3.1	Álgebras	74
3.1.1	C^* -álgebras	74
3.2	Variedades diferenciales	75
3.2.1	Teorema de Gel'fand-Naimark	77
3.3	Formulación no conmutativa	79
3.4	Estructura diferencial	80
3.4.1	Cálculo universal	81
3.5	Algebras Topológicas	83
3.6	Grupos Cuánticos	86
3.7	Cálculo espectral	90
3.7.1	Infinitesimales	91
3.7.2	La traza de Dixmier	93
3.7.3	Aspecto métrico	94
3.7.4	Triple espectral	95
3.7.5	Cálculo diferencial en un Triple Espectral	97
3.8	Haces fibrados principales cuánticos.	101
3.8.1	Estructura diferencial	104
3.8.2	Conexión en hfpc.	107
4	Teorías de Campo en geometría no conmutativa.	111
4.1	Teorías de Norma (Primer enfoque)	112
4.2	Teorías de Norma según Connes	114
4.2.1	La acción	114
4.3	Las Ecuaciones de Campo	116
5	Conclusiones Finales	121

A	Mecánica Clásica	125
A.1	Ecuaciones de Euler-Lagrange y Principio de Hamilton	125
A.2	Formulación Lagrangiana para Campos	130
A.2.1	La transición de un sistema discreto a uno continuo . . .	131
A.2.2	Formulación Lagrangiana para sistemas continuos	133
B	Grupos y Álgebras de Lie	139
C	Geometría simpléctica	143
C.1	Campos hamiltonianos	143
C.1.1	Invariantes integrales	144
C.1.2	Transformaciones canónicas	145
C.2	Espacios vectoriales simplécticos	145
C.2.1	Bases simplécticas	146
C.3	Teorema de Darboux	146
C.3.1	Coordenadas simplécticas	147
C.3.2	Teorema de Darboux	147
C.4	Variedades simplécticas de dimensión infinita	151
D	Homología y Cohomología	153

Introducción

El propósito de la geometría no conmutativa es reformular en medida de lo posible la geometría de una variedad en términos de un álgebra de funciones definidas en ella, y así generalizar los resultados al caso de un álgebra no conmutativa. La noción principal que se pierde cuando pasamos del caso conmutativo al no conmutativo es la de punto. La geometría no conmutativa es una *geometría sin puntos*.

En los últimos años el interés por el estudio de las geometrías no conmutativas (o cuánticas) ha crecido enormemente, tanto en las Matemáticas como en la Física.

La primera geometría no conmutativa en aparecer fue el espacio fase cuantizado de la mecánica cuántica no relativista. De hecho, ya Dirac desde 1926 sabía de la posibilidad de describir la física del espacio-fase en términos de una versión cuántica del álgebra de funciones, que él llamo, el **álgebra cuántica**, y a la que dotó de unas diferenciaciones análogas a las clásicas, a las que llamó también “diferenciaciones cuánticas”. Él notó que en esta geometría era imposible localizar los “puntos” lo que desde luego quedaba expresado por el principio de incertidumbre de Heisenberg. Más tarde, inspirados por el trabajo de von Neumann, se le dió importancia al aspecto estadístico de la mecánica cuántica estudiando el álgebra de observables y en el cual el concepto de “punto” es reemplazado por el de un estado.

La importancia de las geometrías no conmutativas ha aumentado debido a que a escalas verdaderamente pequeñas la estructura del espacio-tiempo no puede ser descrita apropiadamente por una variedad diferenciable.

En 1986, A. Connes introdujo toda una teoría matemática para una geo-

metría no conmutativa. Definió objetos equivalentes a las derivadas exteriores y generalizó la cohomología de de Rham para variedades compactas no conmutativas.

Desde este punto de vista, el conjunto de todas las C^* -álgebras no conmutativas constituye el medio "dual" para la topología no conmutativa.

El Teorema de Gel'fand-Naimark (conmutativo) establece una equivalencia entre la categoría de espacios Hausdorff (localmente) compactos y transformaciones continuas (y propias) y la categoría de C^* -álgebras conmutativas y $*$ -homomorfismos. Cualquier C^* -álgebra puede ser realizada como el álgebra de funciones complejas sobre un espacio Hausdorff localmente compacto. Una C^* -álgebra no conmutativa será ahora considerada como el álgebra de funciones continuas de algún "espacio no-conmutativo". La atención estará centrada no en los espacios, que en general no existen, sino en las álgebras de funciones.

Así, en virtud de la dualidad existente entre un espacio M y el álgebra conmutativa de funciones $C(M)$ sobre él, podemos tratar de reescribir todas las matemáticas que conciernen propiedades de los espacios en un lenguaje meramente algebraico. Más aun, podemos intentar reexpresar todos los conceptos de la geometría de una manera que no haga uso explícitamente de la conmutatividad del álgebra. Por supuesto, que no será siempre posible, y en cualquier caso, no resulta del todo fácil. De esta forma, podríamos pensar que la geometría no conmutativa simplemente se trata del estudio de las álgebras asociativas no conmutativas. Pero no es así.

Desde que hablamos de geometría se trata de modelar *espacios* y es precisamente uno de los conceptos claves sobre el cual está basada nuestra intuición sobre los espacios y sus geometrías el que desaparece al pasar a los terrenos no conmutativos. Se trata de la noción de *punto*. Así pues, los temas que interesan a la geometría no conmutativa son cuáles son las propiedades de las álgebras no conmutativas que generalizan las propiedades de los espacios comunes, aún cuando los "puntos" no existen más.

Es posible, pues, construir una topología no conmutativa, una teoría de la medida no conmutativa, un cálculo diferencial para las álgebras no conmutativas, una teoría de espacios fibrados, de conexiones y hasta una teoría de grupos no conmutativa.

Todos estos elementos forman, hasta aquí, parte de una teoría matemática.

Por otro lado, la Física Teórica Moderna ha ido avanzando en este último siglo hacia la formulación de sus teorías de una manera más matemática,

simétrica y compacta. En este marco, tenemos las teorías de norma, que se inspiran en la teoría del electromagnetismo, y obtienen las ecuaciones de campo de una manera bella y simétrica, a partir de la geometría del problema.

Las teorías de norma son una de las herramientas teóricas para el desarrollo de modelos unificadores de las interacciones de las partículas elementales. La idea básica es la *simetría local* es decir, las transformaciones de simetría internas pueden ser realizadas de manera independiente en varios puntos del espacio-tiempo.

Las teorías de norma son un ejemplo de la interrelación entre física fundamental y geometría diferencial. El marco de trabajo adecuado para las teorías de norma en geometría diferencial son los *haces fibrados principales*. El espacio-tiempo físico juega el papel de la variedad base del haz, mientras que el grupo estructural se indentifica con el grupo de simetrías internas. Los campos de norma son las formas de conexión .

Para la obtención de todas las ecuaciones de campo, es necesario la aplicación del Teorema de Mínima acción, el cual nos dice que las soluciones a las ecuaciones de campo son *siempre* valores estacionarios del funcional acción, que se obtiene a partir de la función lagrangiana del sistema, como se hace en la mecánica clásica. Para obtener los valores estacionarios es necesario, pues, el Cálculo de Variaciones.

Si las teorías de norma representan verdaderamente una descripción de la naturaleza, entonces sería de esperarse que estas sean válidas también a escalas muy pequeñas, del orden de la escala de Planck. Pero como hemos dicho la descripción de una variedad suave del espacio tiempo no es adecuada.

Una posible conclusión es que la naturaleza no puede ser siempre modelada en geometría conmutativa de manera satisfactoria. Es por esto que ya muchos se han dado a la tarea de formular la Física en espacios no conmutativos. La geometría *no* conmutativa extiende el concepto clásico del espacio introduciendo el concepto de un espacio *cuántico*. Existen razones para creer que la geometría no conmutativa es capaz de dar una descripción adecuada del espacio-tiempo a escalas del orden de Planck y de reformular de una manera elegante y natural la teoría cuántica de campos que, hasta la fecha, está llena de profundas inconsistencias.

Así, resulta natural buscar una generalización en geometría no conmutativa a la teoría de normas. El marco natural para éstas serán los *haces fibrados principales cuánticos*, donde es posible formular un cálculo diferencial y una teoría de conexiones.

Pero cabe preguntarse, qué tanto es posible *traducir* la física del espacio-tiempo al lenguaje de la geometría no conmutativa. Con la existencia de haces fibrados cuánticos y de conexiones en ellos, es posible formular una teoría de norma. Incluso, es posible construir una acción (euclideana). Pero aún, quedan los problemas hasta ahora infranqueables de la definición de un cálculo de variaciones apropiado, para poder obtener las ecuaciones de campo a partir de un equivalente al principio de mínima acción. Así, pues, es imposible hasta este momento obtener, de manera análoga a como se hace en el caso clásico, las ecuaciones de campo de un sistema.

Han habido, sin embargo, varios intentos de definir teorías de norma en haces principales cuánticos como el trabajo de [B-M] o el de [Du3]. El problema es aún mayor, dado que existen tantas maneras de definir los haces principales en geometría no conmutativa y tantas maneras de definir una conexión que los diferentes enfoques pueden diferir grandemente.

El objetivo del presente trabajo no es el de presentar de manera extensa las matemáticas de esta "nueva" geometría, que cada día expande más sus fronteras, sino el de estudiarlos de la manera más accesible posible, para de ahí, partir hacia el estudio y la formulación de las teorías de norma no conmutativas y proponer, en la medida de lo posible, caminos alternos para llegar a las ecuaciones de campo de la física en dicha geometría.

Para ello, ha sido necesario estudiar e introducir los conceptos básicos de estas construcciones, primero desde el punto de vista clásico, y después en el no conmutativo.

En el camino, por supuesto, se estudian muchas cosas, toda la geometría diferencial ordinaria, la mecánica y las teorías de norma clásicas.

El trabajo está organizado como sigue:

En el capítulo uno se dan los conceptos básicos de la geometría diferencial ordinaria, comenzando desde las bases. El concepto clave de este capítulo, es quizás, el de *haz fibrado principal*, ya que es este objeto geométrico el entorno natural para las teorías de norma.

Algunos conceptos más elaborados y abstractos son dejados de lado por un momento, y no serán introducidos sino en el momento justo que vayan a ser utilizados. De este modo, es importante recalcar, que la geometría es construida a lo largo de todo el trabajo y su exposición no se encuentra restringida al primer capítulo. Esto con fines prácticos, ya que la tesis trata verdaderamente de *geometría* y de pretender confinarla al primer capítulo, el trabajo no contendría más que uno sólo.

En el capítulo dos nos enfocamos a la parte física del problema, se presentan los formalismos de la mecánica clásica en el lenguaje de la geometría diferencial recién adquirida. Se desarrolla la construcción básica para obtener las ecuaciones de campo de un sistema a partir del Principio de Mínima Acción y se introducen las teorías de norma, así como dos ejemplos, los más usuales de la física, y que sirvieron de modelo e inspiración para la construcción de la teoría general, como la correspondiente a $U(1)$ y a $SU(2)$.

En el capítulo 3 damos una introducción a los conceptos básicos de la geometría no conmutativa, prestando especial atención a los grupos cuánticos y los haces fibrados principales cuánticos y al cálculo que en ellos puede ser definido.

Finalmente en el capítulo 4 se presenta un resumen de los dos métodos principales mediante los cuales se pueden construir modelos para teorías de campo en geometría no conmutativa. En primer lugar, presentamos el método de Durdevich, el cual se basa en la analogía con el caso conmutativo y se distingue por su elegancia y exactitud. Luego, presento los fundamentos de la teoría espectral de Connes, donde el desarrollo es un poco histórico, en el sentido de que se van desarrollando nuevos conceptos para solucionar los problemas que van apareciendo en cada etapa del desarrollo. En este capítulo mi intención no es dar todos los detalles necesarios para construir teorías de campo, sino más bien, presentar un panorama general y las definiciones más importantes.

Se incluyen al final del trabajo varios apéndices cuyo objetivo, excepto por el primero, es ahondar un poco en temas que la autora considera interesantes en sí, pero que de haber sido incluidos en el cuerpo de la presente tesis, hubieran representado una digresión innecesaria, a veces, y dañina para la continuidad del texto, que es de por sí, por lo amplio y variado del tema, un poco difícil de seguir.

Así pues, el primer apéndice es una breve introducción a la mecánica clásica dirigida principalmente a aquellos que no poseen muchos conocimientos sobre el tema, pues el tratamiento es bastante elemental. Ahí se introduce el principio de mínima acción y el formalismo que nos lleva a obtener las ecuaciones de campo a partir de él. También se explica brevemente el caso en que se trata de un campo.

Los otros apéndices son de carácter suplementario, al tratar temas que se ven "de pasada" en el desarrollo del texto, pero que tienen una vida propia y son relevantes.

Así, la autora espera aportar con este trabajo una visión general del

problema, que despierte el interés del lector, quién puede consultar las fuentes bibliográficas sobre el tema, en particular las mencionadas al final de la obra. Estos textos son de nivel muy variado, desde el introductorio y didáctico hasta los artículos de investigación.

Quiero hacer notar, que esta rama de las Matemáticas (y de la Física) es aún muy joven y cada día hay nuevos avances en el tema.

Karla Díaz Ordaz Ávila
Ciudad Universitaria, México, D.F.
Mayo 2000

Capítulo 1

Elementos de Geometría Diferencial

En la actualidad, para hacer física necesitamos manejar espacios (o espacio-tiempos) más generales que \mathbb{R}^n . Sin embargo los espacios que aparecen con mayor frecuencia en los problemas de índole física son aquellos que se "parecen" localmente a \mathbb{R}^n , pero que quizás globalmente tienen una estructura más complicada.

El concepto de **variedad** generaliza el concepto de superficie o de curva en \mathbb{R}^n , la *representación paramétrica* de éstas utiliza la existencia de un homeomorfismo de un conjunto abierto de la superficie a \mathbb{R}^n . Una representación paramétrica recibe el nombre de **carta**, o sistema coordenado.

El concepto de variedad *diferenciable* generaliza el concepto de superficie diferenciable en \mathbb{R}^n , es decir, una superficie que tiene un plano tangente definido en cada punto. Más adelante, definiremos los vectores tangentes a una variedad de tal manera que no dependan de ningún sistema de coordenadas en particular. Esto es de particular importancia, ya que es un principio básico de la Física, el hecho de que las leyes de ésta no dependen del sistema de referencia considerado.

Así pues, la intención de este capítulo es la de presentar los elementos geométricos que son necesarios para las formulaciones de las teorías de norma que vamos a desarrollar en capítulos posteriores, así como también familiarizarse con los conceptos que se generalizarán a la Geometría no conmutativa.

Por el resto del presente trabajo, nos enfocaremos sólomente a objetos de dimensión finita (es decir variedades y grupos) y utilizaremos la convención

de *suma de Einstein* (suma sobre índices repetidos) a menos que se indique lo contrario.

1.1 Variedades Diferenciables

1.1.1 Definición: Una **variedad** (topológica) es un espacio topológico del tipo Hausdorff¹ tal que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}^n .

Una **carta** (U, φ) de una variedad X es un conjunto abierto U de X , llamado el dominio de la carta, junto con un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ de U sobre un conjunto abierto V de \mathbb{R}^n .

Las coordenadas (x^1, \dots, x^n) de la imagen de $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$, del punto $x \in U \subset X$ reciben el nombre de **coordenadas de x en la carta (U, φ)** , o bien coordenadas locales de x . A la carta (U, φ) se le conoce también como **sistema de coordenadas locales**.

Un **atlas de clase C^k** en una variedad X es una colección de cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de X tales que los dominios $\{U_\alpha\}$ cubren a X y los homeomorfismos satisfacen una condición de compatibilidad, es decir, las **funciones de transición**:

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

son funciones bien definidas de abiertos de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n de clase C^k .

Lo anterior, dicho en otras palabras, equivale a que cuando (x^i) y (y^i) son ambas coordenadas de x , en las cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) , la función $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ está dada en $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ por n funciones reales de clase C^k .

Dos atlas de clase C^k , $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ y $\{(U_{\alpha'}, \varphi_{\alpha'})\}$ son **equivalentes** si y solo si su unión es nuevamente un atlas de clase C^k .

Una variedad topológica X junto con una clase de equivalencia de atlas de clase C^k forman una **estructura en X** , decimos entonces que X es una **C^k -variedad**.

¹Un espacio topológico X es del tipo Hausdorff si para cada $x \neq y$ ambos en X , existen dos abiertos U y V en la topología de X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V$ es vacía.

Una **variedad diferenciable** es una variedad tal que sus mapeos de transición de abiertos de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n son diferenciables. El término de **variedad suave** se refiere a variedades C^∞ .

Además en lo sucesivo, consideraremos variedades paracompactas², que es una condición topológica que cumplen todas las variedades, salvo casos excepcionales.

Ahora definiremos los conceptos de funciones definidas sobre una variedad.

Una **función (real)** en una variedad X es una regla que asigna un valor (real) a cada punto en X . La función es **diferenciable** en una carta en x si la función $f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en $\varphi(x)$ como función en \mathbb{R}^n .

Un tipo de función de especial importancia para nosotros son las curvas sobre una variedad. Una **curva** es una función (diferenciable)³ de un abierto de \mathbb{R}^1 a la variedad X , es decir, asocia a cada punto de un intervalo abierto dado en \mathbb{R}^1 (que es un número real, digamos λ) un punto en X . Claramente tenemos una curva con **parámetro** λ .

Todas las nociones de parametrización y reparametrización se extienden al dominio de curvas en variedades.

Además, sean X, Y dos espacios. Sea $f : X \rightarrow Y$, g una función en Y . $f^*(g) : x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$.^{*} recibe el nombre *pull-back*.

1.1.1 Campos vectoriales

Aunque todos tenemos una visión más o menos intuitiva de lo que se entiende por un vector (al que representamos comunmente con una flechita) y un campo vectorial (que puede ser visualizado por un campo de tales "flechitas") es necesario dar una definición formal. La clave para hacerlo es tomar en cuenta que dado un campo de flechas (es decir, una regla que asigna a cada punto

²Un espacio Hausdorff X es **paracompacto** si cada cubierta $\{U_i\}$ tiene un refinamiento localmente finito.

$\{\{V_i\}\}$ es un refinamiento de $\{U_i\}$ si $\{V_i\}$ es una cubierta y para cada V_i existe un U_i tal que $V_i \subset U_i$.

(Una cubierta \mathcal{U} es l.f. si para cada punto $x \in X$ existe una vecindad N que tiene intersección no vacía tan sólo con un número finito de elementos de \mathcal{U}).

³Por función diferenciable damos a entender, únicamente, que las coordenadas del punto imagen $\{x^i(\lambda), i = 1, \dots, n\}$ son funciones diferenciables de λ .

de una variedad un vector), uno puede diferenciar cualquier función en la dirección de éstas, pudiendo calcular, de esta manera la derivada direccional de una función f en la dirección de un vector v .

Primeramente definiremos el concepto de vector tangente.

Considérese una curva que pasa a través del punto p en X , descrita por las ecuaciones $\{x^i = x^i(\lambda), i = 1, \dots, n\}$.

Además, considerese también la función diferenciable $f(x^1, \dots, x^n)$ que abreviaremos $f(x^i)$ en X . En cada punto de la curva, f tiene un valor, así a lo largo de la curva existe una función diferenciable $g(\lambda)$ que asigna el valor de f en el punto cuyo parametro es λ , de la siguiente manera:

$$g(\lambda) = f(x^1(\lambda), \dots, x^n(\lambda)) = f(x^i(\lambda))$$

Diferenciando y usando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{dg}{d\lambda} = \sum_i \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial g}{\partial x^i}$$

Y como esto es cierto para cualquier función g , podemos escribir:

$$v_p = \frac{d}{d\lambda} = \sum_i \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.1)$$

Notemos que desde el punto de vista ordinario de la geometría euclídeana, uno diría que el conjunto de números $\left\{\frac{dx^i}{d\lambda}\right\}$ son las componentes de un vector tangente a la curva $x^i(\lambda)$, pues $\{dx^i\}$ son desplazamientos infinitesimales a lo largo de la curva. Puesto que una vez fijado λ , una curva tiene un único parámetro, a cada curva corresponde un único conjunto $\left\{\frac{dx^i}{d\lambda}\right\}$ de números que son considerados las componentes del vector tangente a la curva, es decir, cada curva tiene un único vector tangente en cada punto.

Por el contrario, es claro que, cada vector puede ser tangente a una infinidad de curvas diferentes pasando por un mismo punto p , ya que hay muchas curvas que son tangentes las unas a las otras, más formalmente que tienen el mismo germen⁴ (i.e. existe una vecindad del punto p donde las funciones

⁴La clase de equivalencia de las funciones diferenciables en $x \in X$ que coinciden en una vecindad de x es llamado germen de f .

coinciden) y por ende tienen el mismo vector tangente, o bien, porque la misma trayectoria puede ser reparametrizada de manera diferente, dando como resultado otra curva, que posee el mismo vector tangente que la original. Así que un vector caracteriza en realidad a toda una clase de equivalencia de funciones (la relación de equivalencia es, en este caso, ser tangentes entre sí, en el punto p). De aquí, parece lógico definir:

1.1.2 1era. Definición de vector tangente: Una clase de equivalencia de curvas tangentes en el punto x en X es llamada un **vector tangente v_x en x** .

Esta definición es la más intuitiva. Daremos otra definición, más abstracta, y que se refiere a la propiedad que tienen los vectores de diferenciar aquello que se les pone "en frente".

1.1.3 2nda. Definición de vector tangente: Un vector tangente v_x a una variedad diferenciable X en el punto x es una función lineal del espacio de funciones $C(X)$ a \mathbb{R} , definida en alguna vecindad de $x \in X$, en donde es diferenciable, y que satisface la **regla de Leibniz**:

$$v_x(fg) = f(x)v_x(g) + g(x)v_x(f)$$

Nótese que las propiedades de linealidad y de la regla de Leibniz, implican que $v_x(cte) = 0$.

Lo anterior nos lleva a definir un concepto más abstracto que nos será de utilidad posteriormente:

Una función lineal que satisface la regla de Leibniz recibe el nombre de **derivación**.

Veremos qué es lo que motiva la segunda definición y la deduciremos de la primera definición, exponiendo así su equivalencia.

Se sigue de la definición 1.1.2 que $v_x(f)$ es la derivada direccional de f en la dirección de v_x . Además, de la ecuación (1.1) es fácil observar que las derivadas direccionales, como $v_x = \frac{d}{d\lambda}$, forman un espacio vectorial en x .⁵

⁵La cerradura bajo combinaciones lineales es la única de las condiciones para ser espacio vectorial que el espacio de derivadas no satisface trivialmente. Sin embargo, como se ha señalado se sigue fácilmente de la ecuación (1.1).

En cada sistema coordenado existen curvas que son de alguna manera “especiales” o privilegiadas, éstas son las líneas coordenadas mismas (versión generalizada de nuestros viejos conocidos los “ejes” coordenados). Las derivaciones a lo largo de ellas son claramente $\frac{\partial}{\partial x^i}$, y la ecuación (1.1) nos muestra que cada vector tangente $\frac{d}{d\lambda}$ puede ser expresado como combinación lineal de estas derivadas tan particulares. De aquí se sigue que $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ forman una base para el espacio vectorial (ya que son, evidentemente, linealmente independientes).

Directamente de (1.1) notamos que entonces, una derivación $\frac{d}{d\lambda}$ tiene como componentes en esta base a $\left\{\frac{dx^i}{d\lambda}\right\}$ que son los “vectores tangentes” definidos de la manera natural, lo cual nos lleva a la conclusión de que el espacio de los vectores tangentes a una variedad X en el punto x y el espacio de todas las derivadas a lo largo de las curvas en x están en correspondencia uno a uno. Esto justifica la decisión de los matemáticos de decir que $\frac{d}{d\lambda}$ es el vector tangente a la curva $x^i(\lambda)$, que es precisamente la definición 1.1.3, de manera menos abstracta.⁶ Este punto de vista representa ciertas ventajas, la primera que no hace referencia a desplazamientos de ninguna índole, esto nos llevaría a impresiones, pues, en principio, una variedad no tiene una relación de distancia definida (no toda variedad tiene una *métrica* definida). En segundo lugar, no hace referencia a ningún sistema de coordenadas, y finalmente, desde el punto de vista físico, tiene sentido pues una derivada es un “tipo” de movimiento a lo largo de una curva, que es lo que conceptualmente un vector tangente genera.

Cabe hacer notar, que en una variedad abstracta sólo tiene sentido sumar vectores que se encuentren “basados” en el mismo punto, ya que no conocemos la manera de “relacionar” vectores correspondientes a dos puntos diferentes (en \mathbb{R}^n lo podemos hacer transportando paralelamente un vector a donde “empieza” áquel con el que lo queremos sumar, pero en una variedad, en principio, no tenemos una “receta” que nos diga de qué forma podemos transportar paralelamente un vector, esto se verá más adelante y es lo que motiva la introducción del concepto de *conexión*).

En realidad los vectores no están en X sino en el **espacio tangente a X en x** , al que llamamos $T_x X$.

Como en el caso de \mathbb{R}^n , el espacio tangente puede ser considerado como una aproximación lineal a X localmente. $T_x X$ es utilizado para definir pro-

⁶es decir, este resultado nos da el derecho de definir el vector tangente a la curva como una derivación.

propiedades diferenciales de objetos en una vecindad de x independientemente de las coordenadas locales, es decir, “modela” la variedad X en el punto x . Generalmente, en física, el espacio tangente reemplaza a la variedad X localmente, es decir en un punto dado, lo que se conoce como **linearización local**.

Si X es una variedad de dimensión n , $T_x X$ es isomorfo a \mathbb{R}^n .

Ahora consideremos el conjunto de todos los espacios tangentes a X en cada punto, esto es $\bigcup_{x \in X} T_x X$. Este conjunto, junto con la propia variedad X reciben el nombre de **haz tangente** (esto es tan sólo un caso particular del concepto de haces fibrados que estudiaremos en la siguiente sección)

Para finalizar la presente sección, señalamos que por **campo vectorial** entenderemos una regla que asigna un vector a cada punto de X . Esta es una definición intuitiva, más adelante redefiniremos el concepto con más rigor matemático.

1.2 Haces Fibrados

1.2.1 Definición: Un **haz** es una triada (E, B, π) consistente de dos espacios topológicos E y B y una función suprayectiva $\pi : E \rightarrow B$. El espacio E recibe el nombre de **espacio total** y el espacio B el de **base**. La función π es conocida como la **proyección**.

Los haces han sido introducidos para generalizar los producto topológicos, ya que por ejemplo, la banda de Möbius no puede ser obtenida como un producto topológico (sin embargo si puede ser considerada como un haz).

Sólo consideraremos los casos en que los espacios topológicos $\pi^{-1}(x)$ para cada x son homeomorfos a un espacio F_x .

$\pi^{-1}(x)$ recibe el nombre de **fibra** en x , denotado F_x . Si todas las fibras son homeomorfas entre sí, $F_x = F, \forall x \in B$, F es conocido como **fibra típica**.

Cuando el haz tiene cierta estructura adicional que comprende a un grupo de morfismos de F y una cubierta abierta de B , es llamado un **haz fibrado**. Si F es un espacio vectorial y el grupo es lineal, el haz fibrado es nombrado **haz vectorial**.

Tenemos la siguiente definición:

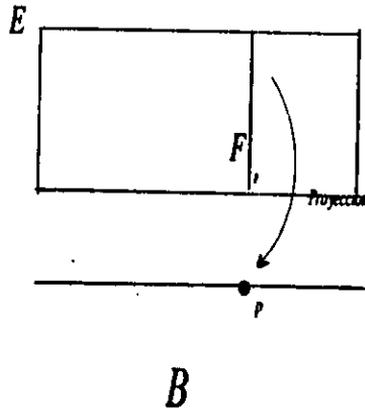


Figura 1.1: Un haz y su proyección sobre la base.

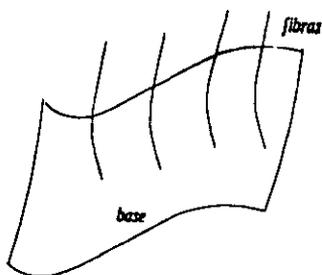


Figura 1.2: Haz fibrado.

1.2.2 Un **haz fibrado** (E, B, π, G) es un haz (E, B, π) junto con una fibra típica F , un grupo topológico G de (homeo)morfismos de F en si mismo, y una cubierta abierta $\{U_j, j \in J\}$ de B , con J una familia de índices que cumple las siguientes condiciones:

a) Localmente, el haz es **trivial**, es decir, es homeomorfo a un producto topológico, para ser más precisos, $\pi^{-1}(U_j)$ es homeomorfo al producto topológico $U_j \times F$, para toda $j \in J$. El homeomorfismo $\varphi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F$ tiene la forma $\varphi_j(x) = (\pi(x), \hat{\varphi}_j(x))$ donde $\hat{\varphi}_j(x)$ es un homeomorfismo de F_x a F y es válido el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \pi \swarrow & & \searrow \varphi_j \\ U_j & \xleftarrow{\text{proyección canónica}} & U_j \times F \end{array}$$

Los conjuntos $\{U_i, \varphi_i\}$ reciben el nombre de familia de **trivializaciones locales**.

b) Existe una relación entre los sub-haces triviales, definidos por las trivializaciones en los conjuntos abiertos U_j que cubren la base, de la siguiente manera. Sea $x \in U_j \cap U_k$. El homeomorfismo $\hat{\varphi}_{k,x} \circ \hat{\varphi}_{j,x}^{-1} : F \rightarrow F$ es un elemento del **grupo estructural** G para toda $x \in U_j \cap U_k$ y toda $j, k \in J$.⁷ Si el grupo G tiene únicamente un elemento entonces el haz es **trivializable**.

Esto quiere decir que cuando dos conjuntos abiertos U_j y U_k se traslapan, un punto que pertenezca a su intersección tendrá dos homeomorfismos de F_x a la fibra típica F , como cada homeomorfismo es invertible esto define un homeomorfismo de la fibra en sí misma al cual exigimos ser un elemento del grupo de estructura. La relación entre $\hat{\varphi}_{k,x}$ y $\hat{\varphi}_{j,x}$ nos da la estructura del haz fibrado.

c) Los mapeos inducidos $g_{jk}(x) : U_j \cap U_k \rightarrow G$ dados por $x \mapsto g_{jk}(x) = \hat{\varphi}_{j,x} \circ \hat{\varphi}_{k,x}^{-1}$ son continuos. Reciben el nombre de **funciones de transición**, y satisfacen la siguiente relación:

$$g_{jk}(x)g_{ki}(x) = g_{ji}(x)$$

⁷ donde estamos identificando al elemento $g \in G$ con la transformación $\sigma_g : F \rightarrow F$ que es un elemento del grupo de transformaciones $\{\sigma_g : G \times X \rightarrow X, g \in G\}$.

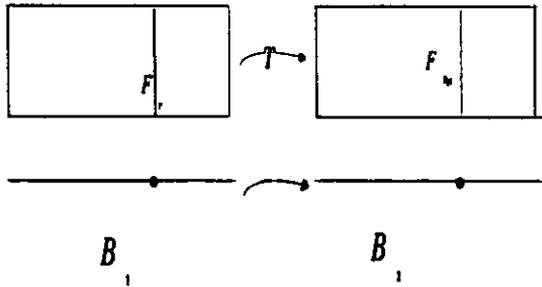


Figura 1.3: T es un morfismo de haces.

Ahora si tenemos dos haces (E_1, B_1, π_1) y (E_2, B_2, π_2) las funciones entre ellos que serán de nuestro interés serán aquellas que preserven la estructura de haz fibrado i.e. aquellas que mapean fibras en fibras. Estas reciben el nombre de morfismos de haces.

Un **morfismo de haces** es una pareja de funciones (F, f) tales que:

$$F : E_1 \rightarrow E_2, \quad f : B_1 \rightarrow B_2$$

y tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{F} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

Se dice que un haz fibrado es C^k -diferenciable si E, B y la fibra típica F son variedades C^k -diferenciables, π es una función de clase C^k , G es un

grupo de Lie⁸, y los mapeos de transición g_{jk} correspondientes a un posible atlas de B son también de clase C^k .

1.2.3 Coordenadas en un haz fibrado:

Como hemos podido notar, en nuestro desarrollo, es importante contar con coordenadas definidas en una variedad. No todos los sistemas de coordenadas del espacio E visto como variedad son apropiadas para E visto como haz fibrado, es necesario que el sistema de coordenadas preserve la estructura de haz fibrado. Así, si (E, B, π) es un haz fibrado, donde E y B son variedades de dimensión $n + p$ y n respectivamente, una carta (U, φ) en E definirá coordenadas para el fibrado, si la función $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ es un morfismo entre haces, con \mathbb{R}^{n+p} provisto de la estructura natural de haz fibrado (producto cartesiano) $\mathbb{R}^{n+p} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

Con nuestras nuevas herramientas de haces fibrados revisemos el caso particular del haz tangente, definido en la sección anterior.

Sea $T(X^n)$ el espacio formado de las parejas (x, v_x) para toda x en una variedad diferenciable de dimensión n , X^n y toda $v_x \in T_x(X^n)$. Podemos darle una estructura de haz fibrado $(T(X^n), X^n, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$ como sigue:

Fibra en x : $T_x(X^n)$

Fibra típica F : \mathbb{R}^n

Proyección π : $(x, v_x) \mapsto x$

Cubierta de X^n : $\{U_j : (U_j, \psi_j) \text{ es un atlas de } X^n\}$

Homeomorfismo φ_j definido como la pareja $(\pi, \psi'_j \circ \pi_2)$ con $\pi_2(x, v_x) = v_x$ y $\psi'_j(v_x)$ es la representación de v_x en la carta (U_j, ψ_j) , dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_j &= (\pi, \psi'_j \circ \pi_2) : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{R}^n \\ &(x, v_x) \mapsto (x, \psi'_j(v_x)) \end{aligned}$$

Grupo estructural G : $GL(n, \mathbb{R})$ el grupo de automorfismos lineales de \mathbb{R}^n cuya expresión como matrices de $n \times n$ no son singulares (determinante diferente de cero).

Si $\psi'_{1,x} : v_x \in T_x(X^n) \mapsto V \in \mathbb{R}^n$ y $\psi'_{2,x} : v_x \in T_x(X^n) \mapsto V' \in \mathbb{R}^n$ son dos cartas tales que x está en la intersección de sus dominios, entonces el mapeo de transición $\psi'_{1,x} \circ \psi'^{-1}_{2,x} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dado por $V' \mapsto V$, es un elemento de $GL(n, \mathbb{R})$, (que es, por cierto, un grupo de Lie).

⁸Ver apéndice B.

■
 Definimos una **sección transversal** de un haz (E, B, π) como la función:

$$f : B \rightarrow E, \text{ tal que } \pi \circ f = \text{identidad}$$

Un **campo vectorial** v en X^n es una sección transversal del haz tangente $T(X^n)$. (Esto resume nuestra definición anterior, ya que a cada punto $x \in X^n$ le asocia un vector tangente $v_x \in T_x(X^n)$).

Un campo vectorial sobre una variedad (C^k-) diferenciable X^n es (C^r-) **diferenciable** si la función $v : X^n \rightarrow T(X^n)$ es diferenciable (o de clase C^r).

Así como hemos definido un vector tangente como una derivación en el álgebra de gérmenes, podemos definir un campo vectorial como una derivación en el álgebra $C^k(X^n)$ de funciones de clase C^k en X^n .

$$v : C^k(X^n) \rightarrow C^{k-1}(X^n) \text{ dada por } v(f) = vf$$

o en coordenadas locales

$$(vf)(x^j) = v_x^i \frac{\partial f(x^j)}{\partial x^i}$$

Decimos que un campo vectorial es **invariante bajo el difeomorfismo** $f : X \rightarrow X$ si $f'(x)v_x = v_{f(x)}$ para cada $x \in X$, donde $f'(x)v$ es la imagen del campo vectorial bajo el difeomorfismo f que está dada por la siguiente igualdad entre funciones:

$$f'v(g) = v(g \circ f) \circ f^{-1}.$$

Uno de los conceptos más importantes en el formalismo Hamiltoniano, es, como veremos más tarde, el haz cotangente, que en la siguiente sección introduciremos así como también otros elementos que nos serán de utilidad posteriormente.

1.2.1 Haz Cotangente; vectores covariantes

El espacio $T_x^*(X^n)$ dual al haz tangente $T_x(X^n)$ de una variedad X^n es el espacio de formas lineales en $T_x(X^n)$; forma un espacio vectorial de dimensión n que recibe el nombre de **espacio vectorial cotangente** a X^n en x .

Los elementos de $T_x^*(X^n)$ son llamados **vectores covariantes**, o **co-vectores** (también se conocen como 1-formas diferenciales) mientras que los elementos de $T_x(X^n)$ son llamados **vectores contravariantes**, **vectores tangentes** o simplemente **vectores**. Esto siguiendo la tradicional nomenclatura encontrada en Física⁹, más tarde en el capítulo observaremos que la razón de esta distinción es la diferente forma de transformarse bajo un cambio de coordenadas que cada objeto posee.

Nótese que dada $\omega_x \in T_x^*(X^n)$ y $v_x \in T_x(X^n)$ tenemos la operación:

$$\omega_x(v_x) \in \mathbb{R}$$

(conocida como la **contracción**¹⁰ de v_x con ω_x). Como $T_x^{**}(X^n) = T_x(X^n)$ se tiene que $\omega_x(v_x) = v_x(\omega_x) = \langle \omega_x, v_x \rangle$.

Aún cuando no existe ningún isomorfismo natural canónico entre un espacio y su dual, dada una base (e_1, \dots, e_n) en T_x podemos construir su dual $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ en T_x^* de la siguiente manera:

Sean (v_x^i) las componentes de un vector v_x en la base (e_i) . Estas componentes constituyen n formas lineales definidas en v_x . Así es natural definir la forma θ^i como:

$$\theta^i(v_x) = v_x^i \tag{1.2}$$

Así:

$$\theta^i(e_j) = \delta_j^i.$$

La **base dual** a la base natural $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ en T_x , a la que designaremos (dx^i) cumple:

⁹Existen discrepancias en la forma que los matemáticos designan los mismos objetos, véase [Ba] págs 31-34.

¹⁰La operación contracción puede ser más general, en el contexto de tensores se entiende como una operación intrínseca realizada sobre un índice covariante y uno contravariante, ver apéndice para mayores detalles.

$$\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle = \delta_j^i$$

(dx^i) recibe el nombre de **base conatural**.

El haz cotangente está formado por $(T^*(X^n), X^n, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$ donde $T^*(X^n)$ es el espacio formado por las parejas (x, ω_x) para toda $x \in X^n$ y $\omega_x \in T_x^*(X^n)$. Una sección transversal en el haz cotangente, es decir, un campo vectorial cotangente es también conocido como una **1-forma**.

Mientras que los vectores *contravariantes* se transforman según la regla $(e_{i'}) = a(e_i)$ con a una matriz invertible, los vectores *covariantes* se transforman con la regla inversa, i.e. $(\theta^{i'}) = a^{-1}(\theta^i)$.

Es fácil imaginarse que las 1-formas pueden ser generalizadas. A continuación veremos cómo.

1.2.2 p-formas

Así como hemos construido el espacio de 1-formas, el cual denotaremos por Λ^1 , definiremos en general las p -formas y sus correspondientes espacios, como sigue:

Una **p-forma** es una función *p-multilineal y antisimétrica*, definida en un espacio tangencial (es decir sobre $T(X^n)$ para alguna variedad X^n , los p argumentos que toma son vectores). En el lenguaje de tensores una p -forma se puede definir como un p -tensor covariante totalmente antisimétrico.

El espacio de p -formas de clase C^k es un sub-módulo $\Lambda^p(X)$, sobre el anillo de funciones C^k del módulo de todos los tensores covariantes de clase C^k sobre X : la suma de dos p -formas es una p -forma, el producto de una p -forma con una función f es una p -forma. Nótese que si la dimensión de la variedad X es n , una forma de grado $p > n$ es idénticamente cero, ya que las únicas componentes diferentes de cero de un tensor totalmente antisimétrico de grado p son aquellas en las cuales todos los índices son diferentes, lo cual no puede suceder en el caso $p > n$.

Definimos una operación entre una p -forma y una q -forma, que recibe el nombre de producto exterior, o **producto cuña o exterior**, como sigue:

$$\wedge : (\Lambda^p(X), \Lambda^q(X)) \rightarrow \Lambda^{p+q}(X)$$

tal que $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$, con $\alpha \wedge \beta$ definido por:

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi} (\text{sign } \pi) \pi [\alpha(v_1, \dots, v_p) \beta(v_{p+1}, \dots, v_{p+q})] \quad (1.3)$$

donde $v_i \in T(X^n)$ y π es una permutación de $(1, 2, \dots, p+q)$.

Este producto es bilineal, asociativo y en general no conmuta:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \quad (1.4)$$

El conjunto de todos los módulos $\Lambda^p(X)$ para toda p , junto con el producto exterior es llamada **álgebra exterior** (o de Grassman) y se denota $\Lambda(X)$.

1.2.3 Derivada exterior

Lo que estamos a punto de definir nos da una buena generalización de nuestros viejos conocidos el *gradiente*, la *divergencia* y el *rotacional* sobre variedades.

1.2.4 Definición: La **derivada exterior d** mapea una p -forma α de clase C^k en una $p+1$ -forma $d\alpha$ de clase C^{k-1} y que definimos como el operador que tiene las siguientes propiedades:

- 1) d es lineal: $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$ si λ es una constante $d(\lambda\alpha) = \lambda d\alpha$
- 2) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$, con $p = \text{grado de } \alpha$
- 3) $d^2 = 0$
- 4) Si f es una 0-forma (es decir una función) df coincide con la diferencial ordinaria de f .
- 5) El operador d es local, i.e. si dos formas α y β coinciden en un abierto U entonces $d\alpha = d\beta$ en U .

Estas propiedades definen de manera única al operador d .

Utilizando las propiedades del operador, calculamos la expresión local para la derivada de una p -forma α :

$\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ donde $\alpha_{i_1 \dots i_p}$ es una 0-forma.

$d\alpha = d(\alpha_{i_1 \dots i_p}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ por lo que obtenemos la expansión:

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (1.5)$$

Veamos como este operador resume, en el caso de \mathbb{R}^3 , los operadores diferenciales usuales en dicho espacio.

La derivada exterior de una 0-forma f es la 1-forma:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad (1.6)$$

Observamos que las componentes de df son las componentes del gradiente de f .

La derivada exterior de una 1-forma $\alpha = Adx + Bdy + Cdz$ es:

$$d\alpha = dA \wedge dx + dB \wedge dy + dC \wedge dz$$

Utilizando la regla para d de una función llegamos:

$$d\alpha = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy \quad (1.7)$$

Ahora, si consideramos un vector V con componentes (A, B, C) , las componentes de $d\alpha$ con respecto a la base indicada coinciden con las componentes del rotacional de $V = \nabla \times V$

Finalmente, la derivada de una 2-forma $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$. Tenemos:

$$\begin{aligned} d\omega &= dP dy \wedge dz + dQ dz \wedge dx + dR dx \wedge dy \\ &= \partial_x P dx \wedge dy \wedge dz + \partial_y Q dy \wedge dz \wedge dx + \partial_z R dz \wedge dx \wedge dy \end{aligned}$$

con lo que:

$$d\omega = (\partial_x P + \partial_y Q + \partial_z R) dx \wedge dy \wedge dz \quad (1.8)$$

que es la divergencia de un vector en \mathbb{R}^3 , disfrazada.

El álgebra $\Lambda(X)$ junto con el operador diferencial d es un álgebra graduada ¹¹.

¹¹Un álgebra graduada \mathcal{A} es una colección de módulos indexados por números enteros p junto con un operador bilineal $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Si el operador es un operador diferencial, debe cumplir la regla de Leibniz "graduada" es decir:

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^{\text{grad}\omega} \omega \wedge d\theta.$$

Ya con nuestra herramienta básica antes de desarrollar los formalismos de la mecánica, introduciremos el concepto de haces fibrados principales, ya que este es el marco idóneo para estudiar la geometría de las teorías de norma, como veremos más tarde.

1.3 Haces fibrados principales

En los últimos años, la importancia de los haces fibrados ha aumentado, especialmente, por el papel fundamental que tienen las conexiones definidas sobre haces fibrados principales en el desarrollo de las teorías de norma de la física teórica. Es por esto que nos enfocaremos especialmente a su estudio (definiremos en este contexto muchos conceptos que tienen validez general en cualquier tipo de haz fibrado) y a la manera en la que éstos conforman la *Geometría de los Campos de Norma*.

1.3.1 Definición: Un haz fibrado principal (P, X, π, G) es aquel en el cual la fibra típica F y el grupo de estructura G son idénticos (difeomorfos), y en el cual G actúa en F mediante la traslación izquierda¹².

Es decir, es un haz fibrado con dos características extras, $F \simeq G$ y la acción de G en F es la operación de grupo. Hay varias maneras de llegar a un hfp a partir de un haz fibrado. Si no se puede establecer un difeomorfismo entonces simplemente se define que ahora la fibra $F \equiv G$.

Aunque cada fibra es difeomorfa a la fibra típica G , el difeomorfismo no es canónico, depende de la cubierta $\{U_i\}$ de X y de la elección de funciones $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$.

Ahora definiremos un elemento extra, que no forma parte de la estructura diferencial de una variedad, sino que da forma y curvatura a ésta. Estamos hablando de la conexión, que juega un papel muy importante en las teorías de norma de la física moderna. Existen otros elementos geométricos que dan mayor estructura, como la forma de volumen y la métrica que también presentaremos más adelante, (pues éstos tienen un papel fundamental en la formulación de la teoría de norma del electromagnetismo).

¹² $L_g : G \rightarrow G$ está dada por $L_g(h) = gh$

1.3.1 Conexión.

En una variedad diferencial no hay una noción intrínseca de paralelismo, y como ya hemos dicho sólo es posible “comparar” vectores que se encuentran situados en el mismo punto. Una **conexión** es una regla que nos indica como **transportar paralelamente** vectores de un punto a otro.

Las conexiones pueden ser definidas como 1-formas valuadas en el álgebra de Lie \mathfrak{g} correspondiente al grupo G que satisfacen ciertas condiciones, sin embargo, para los desarrollos que haremos posteriormente nos es conveniente introducir una definición más abstracta que nos permita definir la conexión de manera independiente de cualquier trivialización local. Estableceremos más adelante la equivalencia de ambas definiciones.

Nuestro planteamiento se basa en la *separación* del espacio tangente en un subespacio “vertical” y uno “horizontal”.

En nuestro desarrollo usaremos ampliamente teoría de grupos y álgebras de Lie, por lo que haremos un pequeño resumen de los elementos básicos.¹³

Sea G un grupo de Lie de dimensión finita. La **acción izquierda** L_g y la **acción derecha** R_g están definidas por $L_g h = gh$ y $R_g h = hg$ para $g, h \in G$. L_g induce una función $L_{g*} : T_h(G) \rightarrow T_{gh}(G)$. El conjunto de campos vectoriales invariante bajo la translación izquierda junto con el paréntesis de Lie forman un **álgebra de Lie de G** , que denotamos como \mathfrak{g} . Como cualquier $A \in \mathfrak{g}$ queda especificado por su valor en el elemento unidad e y viceversa,¹⁴ entonces existe un isomorfismo de espacios vectoriales entre $\mathfrak{g} \simeq T_e(G)$.

El álgebra de Lie \mathfrak{g} es cerrada bajo el paréntesis de Lie $[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}^\gamma T_\gamma$ donde T_α son los generadores de \mathfrak{g} . Los $f_{\alpha\beta}^\gamma$ son llamados **constantes de estructura**.

La **acción adjunta** $\text{ad}: G \rightarrow G$ está definida por $\text{ad}_g h = ghg^{-1}$. La transformación tangente de ad_g es llamado el “mapeo” adjunto, lo denotamos $\text{Ad}_g : T_h(G) \rightarrow T_{ghg^{-1}}(G)$.¹⁵

Antes de definir la conexión daremos unas definiciones previas.

Sea u un elemento del haz fibrado principal (P, X, π, G) y sea G_p la fibra en $p = \pi(u)$. El **subespacio vertical** $V_u P$ es un subespacio de $T_u P$ que es

¹³Véase también el apéndice B.

¹⁴Dado $s \in T_e G$ existe un único X campo invariante por la izquierda tal que $X(e) = sX$.

¹⁵Si $h = e$, $\text{Ad}_g : T_e(G) \rightarrow T_e(G)$.

tangente a G_p en u . Téngase cuidado de no confundir T_uP que es el espacio tangente de P con T_pX que es el tangente a X .

Costruyamos V_uP . Tomamos un elemento $A \in \mathfrak{g}$. Definimos una curva en P a través de u utilizando la acción derecha¹⁶:

$$R_{\exp(tA)}u = u \exp(tA)$$

Como $\pi(u) = \pi(u \exp(tA)) = p$, la curva se encuentra en G_p . Definimos el vector $A^\# \in T_uP$ por:

$$A^\# f(u) = \frac{d}{dt} f(u \exp(tA))_{t=0} \quad (1.9)$$

donde $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave arbitraria. El vector $A^\#$ es tangente a G_p en u por lo tanto $A^\# \in V_uP$.

Así, definimos un vector $A^\#$ para cada punto en P y construimos un campo vectorial $A^\#$, llamado el **campo vectorial fundamental** generado por A . Existe un isomorfismo de espacios vectoriales $\# : \mathfrak{g} \rightarrow V_uP$ dado por $A \mapsto A^\#$. El **subespacio horizontal** H_uP es el complemento de V_uP en T_uP y queda especificado unívocamente si una conexión es definida en P .

1.3.2 Definición 1: Sea (P, X, π, G) un haz fibrado principal. Una **conexión** en (P, X, π, G) es una separación única del espacio tangente T_uP en el subespacio vertical V_uP y el subespacio horizontal H_uP tal que:

- 1) $T_uP = H_uP \oplus V_uP$.
- 2) Un campo vectorial suave Y en P es separado en los campos $Y^H \in H_uP$ y $Y^V \in V_uP$ tal que $Y = Y^H + Y^V$.
- 3) $H_{ug}P = R_g \cdot H_uP$ para $u \in P$ arbitraria y $g \in G$. Obsérvese la siguiente figura:

La condición 3) dice que los subespacios horizontales H_uP y $H_{ug}P$ en la *misma* fibra están relacionados por medio del mapeo R_g inducido (su derivada) por la acción derecha. Esto nos indica que un subespacio H_uP en u genera *todos* los subespacios horizontales en la misma fibra. Esta condición

¹⁶Véase apéndice B para la función \exp .

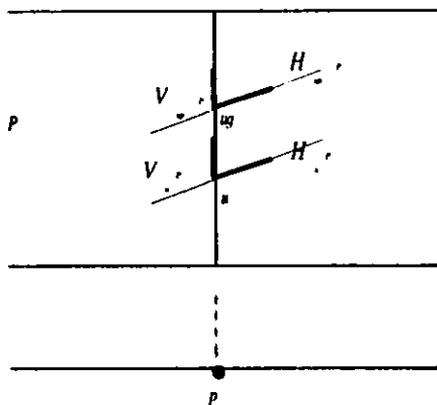


Figura 1.4: El espacio horizontal $H_{u\tilde{g}}P$ se obtiene a partir de H_uP mediante la acción derecha.

asegura que si un punto u es transportado paralelamente, también lo será su múltiplo ug , $g \in G$. Obsérvese la figura (1.4).

Nuestra definición puede ser demasiado abstracta, y no es evidente hasta este momento que tiene que ver con los potenciales de norma que, después de todo, son a lo que lo queremos aplicar. Es conveniente ver la conexión como una 1-forma ω en P con valores en el espacio vectorial \mathfrak{g} (el álgebra de Lie de G).

Estableceremos además la equivalencia de ambas definiciones. La ventaja de la primera, es decir, donde la conexión está basada en la separación del espacio T_uP , es que no depende de ninguna información extra, y es más geométrica. Sin embargo, el concepto de conexión es más tangible en la siguiente definición [Na]:

1.3.3 Definición 2: Una 1-forma de conexión $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$ es una *proyección* de T_uP en la componente vertical $V_uP \simeq \mathfrak{g}$. Las propiedades de proyección pueden ser resumidas en las siguientes propiedades:

- 1) $\omega(A^\#) = A \quad A \in \mathfrak{g}$.
- 2) $R_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega$
esto es, para $Y \in T_uP$:

$$R_g^* \omega_{ug}(Y) = \omega_{ug}(R_g \cdot Y) = g^{-1} \omega_u(Y) g \quad (1.10)$$

Veamos ahora como esta definición es equivalente a la anterior. Defínase el subespacio horizontal H_uP como el núcleo de ω :

$$H_uP \equiv \{Y \in T_uP : \omega(Y) = 0\} \quad (1.11)$$

Observemos que los espacios horizontales definidos según (1.11) satisfacen:

$$R_g \cdot H_uP = H_{ug}P \quad (1.12)$$

Razón: Fijamos un punto $u \in P$, y definimos H_uP mediante (1.11). Tomamos $Y \in H_uP$ y construimos $R_g \cdot Y \in T_{ug}P$. Tenemos, por (1.10):

$$\omega(R_g \cdot Y) = R_g^* \omega(Y) = g^{-1} \omega(Y) g = 0$$

pues $\omega(Y) = 0$. Así, $R_{g^*}\omega(Y) \in H_{ug}P$.

Ahora, notemos que como R_{g^*} es una función lineal invertible, cualquier vector $Z \in H_{ug}P$ puede ser expresado como $Z = R_{g^*}(Y)$ para alguna $Y \in H_uP$, por lo tanto $H_{ug}P \subseteq R_{g^*}H_uP$, concluyendo (1.12).

■

De esta manera hemos demostrado que la definición de 1-forma de conexión es equivalente a la de conexión, pues ω separa T_uP en $H_uP \oplus V_uP$ de acuerdo con las condiciones de la definición 1.3.2.

La 1-forma de conexión ω aquí definida es conocida como la **conexión de Ereshmann**.

Veamos brevemente la forma local de la 1-forma de conexión.

Si $\{U_i\}$ es una cubierta abierta de X y σ_i una sección local definida para cada U_i . Podemos definir la 1-forma en U_i asociada a ω que toma valores en el álgebra de Lie de G como:

$$\bar{\omega} \equiv \sigma_i^* \omega \in \mathfrak{g} \otimes \Lambda^1(U_i).$$

De hecho, existe un teorema que nos asegura que dadas una 1-forma diferenciable $\bar{\omega}$ en U un abierto de X que toma valores en \mathfrak{g} y una sección diferenciable f de $\pi^{-1}(U)$ existe una y sólo una 1-forma de conexión ω en $\pi^{-1}(U)$ tal que:

$$f^* \omega = \bar{\omega}.$$

Recordemos que uno de los elementos necesarios en la definición de haz fibrado es la condición de ser localmente triviales. Dada una trivialización $\{U, \phi\}$ del haz P y una conexión ω en P existe una única familia $\{\bar{\omega}_i\}$ de 1-formas de conexión en la variedad base. Definimos una **sección s_i de $\pi^{-1}(U_i)$ canónicamente asociada con la trivialización ϕ_i** de la siguiente manera:

$$s_i = \phi_i^{-1} \circ Id, \text{ donde } Id : x \mapsto (x, e), \text{ } e \text{ el elemento identidad de } G.$$

Ahora, definimos $\bar{\omega}_i = s_i^* \omega$ que llamamos **conexión en la trivialización local ϕ_i** .

En las teorías físicas de Yang-Mills, las 1-formas de conexión $\bar{\omega}_i$ son conocidas como **potenciales de norma** y para respetar la notación tradicional utilizada en Física, las denotaremos A_i y las trivializaciones como **normas locales**. Las $\bar{\omega}_i = A_i$ son múltiplos (constantes) de los potenciales vectoriales tradicionales A .

■

1.3.2 Transporte paralelo y derivada covariante

En un haz fibrado principal (P, X, π, G) , una conexión nos da una correspondencia entre cualesquiera dos fibras a lo largo de una curva C en X . Por medio de esta correspondencia, uno puede afirmar que el punto u que pertenece a la fibra sobre p , punto por el cual pasa la curva C es transportado paralelamente de la siguiente forma. Sea \hat{C} la curva tal que $\pi(\hat{C}) = C$ y tal que sus vectores tangentes en cualquier punto sean horizontales, i.e. que pertenezcan a $H_u P$. Dada C y un punto $u \in P$ solo existe una tal curva \hat{C} que recibe el nombre de **levantamiento horizontal** de la curva C .¹⁷

De esta manera, para **transportar paralelamente** una fibra de p a p' a lo largo de C , se toma cada $u \in \pi^{-1}(p)$, se construye el *único* levantamiento horizontal \hat{C} de C que tiene como punto inicial u y nos fijamos que lo lleva a $u' \in \pi^{-1}(p')$, donde u' el punto en \hat{C} que esta sobre p' .

La conexión nos permite además obtener un tipo de derivada direccional, que conocemos con el nombre de **derivada covariante** y denotaremos D , y que es por definición:

$$D\phi(Y_1, \dots, Y_{r+1}) \equiv d_P\phi(Y_1^H, \dots, Y_{r+1}^H) \quad (1.13)$$

donde $\phi \in \Lambda^r(P) \otimes V$ es decir es una r -forma que toma valores en el espacio vectorial V que tiene dimensión k , y $(Y_1, \dots, Y_{r+1}) \in T_u P$ y d_P es la derivada exterior en P .

Podemos, así mismo, expresar a la derivada covariante de una manera un poco más intuitiva como el límite de la diferencia entre un vector v en el punto x y el vector que resulta de transportarlo paralelamente a lo largo de una cierta curva C por medio de nuestra conexión, cuando el "desplazamiento" ϵ a lo largo de C tiende a cero (u representa en este caso el vector tangente a C):

$$\nabla_u v = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v_{x+\epsilon} - v_x}{\epsilon}$$

Ahora que ya estamos dotados de una herramienta matemática más sólida, retomaremos los formalismos de la Física desde un punto de vista geométrico. Este es el objetivo de nuestro siguiente capítulo.

¹⁷La existencia y unicidad quedan garantizadas por el Teorema Fundamental de las Ecuaciones Diferenciales ordinarias, ya que al ser Y un vector tangente a \hat{C} vector horizontal, por definición cumple $\omega(Y) = 0$ que es una ecuación diferencial ordinaria.

Capítulo 2

Teorías de Campo

Es casi imposible concebir un problema físico que no envuelva algún tipo de espacio continuo para su realización, ya sea el espacio físico tridimensional, o el espacio-tiempo de cuatro dimensiones, quizás el espacio-fase de la mecánica clásica (o cuántica) o bien el espacio de estados en equilibrio termodinámico, los cuales, llegan a tener mas de 4 dimensiones. Todos estos espacios tienen propiedades geométricas diferentes (y propiedades físicas que son asignadas mediante la teoría correspondiente) pero tienen una característica común, y es, a saber, que son espacios continuos, en lugar de latices o puntos aislados.

La importancia que la geometría diferencial ha alcanzado en los terrenos de la física moderna reside precisamente en que nos da las herramientas para estudiar este tipo de espacios. La característica esencial común a todos ellos está impresa en el concepto matemático de *variedad diferenciable*, que es el término correcto para nuestros “espacios” antes mencionados.

En este capítulo veremos la manera en que se construyen las teorías clásicas de campo.

En la primera parte veremos el formalismo Lagrangiano y más adelante comenzaremos con la teoría de norma más sencilla y que sirvió de inspiración para las demás teorías de norma: el electromagnetismo.

Posteriormente, explicaremos la parte básica de las teorías de campo que consiste en dar una base geométrica para poder determinar la acción, y de esta manera, aplicando el principio variacional de mínima acción, obtener las ecuaciones de campo.

2.1 Formalismo lagrangiano

La mecánica lagrangiana describe el movimiento de un sistema mecánico por medio del espacio de configuración. El *espacio de configuración* de un sistema mecánico tiene una estructura de variedad diferenciable sobre el cual actúa un grupo que se asocia a la teoría analizando las simetrías del sistema.

Los elementos básicos de la mecánica lagrangiana son invariantes bajo este grupo.

Un sistema mecánico está especificado por una variedad (espacio de configuraciones) y una función definida sobre su haz tangente (la función lagrangiana).

Las ecuaciones de movimiento son obtenidas a partir de un principio variacional aplicado a cierta integral conocida como acción. Si es necesario para el lector familiarizarse con los métodos de la mecánica clásica y el tratamiento para campos, véase el apéndice A.

2.1.1 Cálculo de Variaciones

Sea γ una curva con parámetro t , i.e. $\gamma = x(t)$. [Ar]

Llamamos a γ' una **aproximación** de γ si $\gamma'(t) = x(t) + h(t)$ con h una función "pequeña". Por conveniencia, la escribiremos como $\gamma' = \gamma + h$

En lo que resta de esta sección trabajaremos con un funcional muy especial para la física, la *acción*, y los conceptos serán introducidos de tal manera que se adapten a los teoremas del formalismo lagrangiano que se desarrollarán.

Sea $\gamma = x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ una curva en el plano xt , $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ y $L = L(a, b, c)$ una función diferenciable en tres variables.

Definimos el funcional $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$

2.1.1 Afirmación: *El funcional Φ es diferenciable y su derivada en γ está dada por:*

$$D\Phi(\gamma) = F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right)_{t_0}^{t_1} \quad (2.1)$$

Demostración:

$$\Phi(\gamma+h) - \Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \left[L(x+h, \dot{x}+\dot{h}, t) - L(x, \dot{x}, t) \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right] dt + O(h^2) = F(h) + R$$

$$\text{donde } F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right] dt \text{ y } R = O(h^2)$$

Integrando F por partes tenemos.

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} dt = - \int_{t_0}^{t_1} h \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt + \left(h \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)_{t_0}^{t_1}$$

lo que concluye la prueba.

■

Así, un extremo (o punto estacionario) del funcional $\Phi(\gamma)$ es una curva γ tal que:

$$F(h) = 0 \text{ para toda } h.$$

De este modo, tenemos:

2.1.2 Afirmación 2: Una curva γ es un extremo del funcional Φ definido anteriormente sobre el espacio de curvas que pasan a través de los puntos $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$, si y sólo si:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{2.2}$$

sobre la curva $x(t)$.

Para probarlo, utilizaremos el siguiente lema:

2.1.3 Lema fundamental del cálculo de variaciones:

Si una función continua $f(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ satisface $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0$ para cualquier función continua $h(t)$ con $h(t_0) = h(t_1) = 0$, entonces $f(t) \equiv 0$.

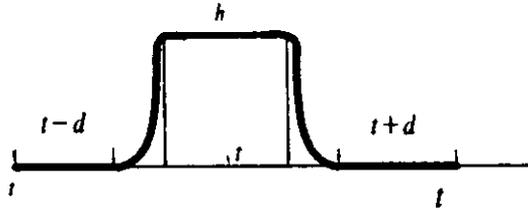


Figura 2.1: Construcción de la función h .

Prueba del lema:

Supongamos que f no es idénticamente 0, entonces existe $t^* \in [t_0, t_1]$ tal que $f(t^*) > 0$.

Como f es continua, existe una vecindad Δ de t^* en donde $f(t) > 0$.

Tomemos $h(t)$ una función continua tal que $h(t) = 0$ fuera de Δ y $h(t) > 0$ en Δ , en particular digamos que $h(t) = 1$ en Δ , como se muestra en la figura (2.1).

Entonces, claramente:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt > d$$

donde d es la longitud del intervalo Δ . Esto contradice la hipótesis de que la integral es cero para cualquier función h , lo que prueba que $f(t) = 0$ para toda $t \in [t_0, t_1]$.



Utilizando el lema, probaremos la afirmación 2.1.2.

Demostración :

Por la afirmación 2.1.1 tenemos que

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right)_{t_0}^{t_1}$$

donde el último término se anula, ya que $h(t_0) = h(t_1) = 0$.

Entonces si la curva γ es un extremo entonces $F(h) = 0$, para toda función continua h con $h(t_0) = h(t_1) = 0$

Así, si hacemos $f(t) = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ tenemos $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0$ para toda h . Por el lema 2.1.3 concluimos que $f(t) \equiv 0$.

Recíprocamente, si $f(t) \equiv 0$, entonces claramente $F(h) \equiv 0$, $\forall h$ tal que $h(t_0) = h(t_1)$.



Estamos listos ya para replantearnos la mecánica lagrangiana en términos geométricos.

2.1.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Todas las afirmaciones hechas en la subsección anterior son válidas para cualquier funcional diferenciable que posea la forma de Φ , por lo que es posible abstraer las ecuaciones de Euler-Lagrange del problema físico del cual surgieron, y generar una teoría matemática congruente con dichos elementos.

Como ya hemos dicho, un sistema lagrangiano queda representado por su espacio de configuraciones, el cual está formado por las posiciones de las partículas que forman parte del sistema. Observaremos que este espacio de configuraciones posee una estructura geométrica de variedad diferenciable, lo cual nos permite pensar en el lagrangiano como una función definida sobre su haz tangente. Esto dota a nuestra teoría de una independencia de las coordenadas elegidas, así como facilita la aplicación a sistemas más abstractos.

2.1.4 Definición: La ecuación:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

recibe el nombre de **ecuación de Euler-Lagrange** para el funcional

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (2.4)$$

el cual recibe el nombre de **acción**.

Ahora, por las afirmaciones de la sección anterior podemos enunciar el siguiente:

2.1.5 Teorema: *La curva $\gamma = x(t), t \in [t_0, t_1]$ es un extremo del funcional*

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$$

sobre el espacio de curvas que unen los puntos (t_0, x_0) y (t_1, x_1) , si y sólo si la ecuación de Euler-Lagrange se satisface a lo largo de γ .

Este es un sistema de n ecuaciones de segundo orden y la solución depende en $2n$ constantes arbitrarias; para fijarlas se utilizan las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$ (recordemos que x representa en este caso un vector en n dimensiones).

Cabe aclarar que la condición de que una curva sea extremo de un funcional no depende de la elección del sistema de coordenadas.

Ahora señalaremos la equivalencia de las ecuaciones de Newton del movimiento en un sistema con potencial y las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Las ecuaciones de Newton para la dinámica son:

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i) + \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0 \quad (2.5)$$

donde U es la energía potencial del sistema.

2.1.6 El Principio de Hamilton de mínima acción nos dice:

El movimiento de un sistema mecánico descrito por (??) coincide con la trayectoria que es extremo del funcional

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$$

con $L = T - U$ la diferencia entre la energía cinética y la potencial.

Como $U = U(\vec{r})$ y $T = \sum m_i \frac{\dot{r}_i^2}{2}$ tenemos $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} = m_i \dot{r}_i$ y $\frac{\partial L}{\partial r_i} = -\frac{\partial U}{\partial r_i}$

por lo que la ecuación de Euler-Lagrange (2.3) se convierte:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} = \frac{d}{dt} m_i \dot{r}_i + \frac{\partial U}{\partial r_i}$$

estableciendo su equivalencia con (??).



2.1.7 Definición: En mecánica utilizamos la siguiente terminología : $L(q, \dot{q}, t) = T - U$ es la función lagrangiana o **lagrangiano**, q_i son las **coordenadas generalizadas**, \dot{q}_i son las **velocidades generalizadas**, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ son los **momentos generalizados**, $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ son las **fuerzas**

generalizadas, el funcional $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt$ es la **acción**, y

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \text{ son las ecuaciones de Euler-Lagrange.}$$

Antes de introducir el formalismo hamiltoniano, es conveniente desarrollar, brevemente una herramienta matemática, que nos permita obtener la función hamiltoniana de un sistema, conocido su lagrangiano. Esta es la transformada de Legendre.

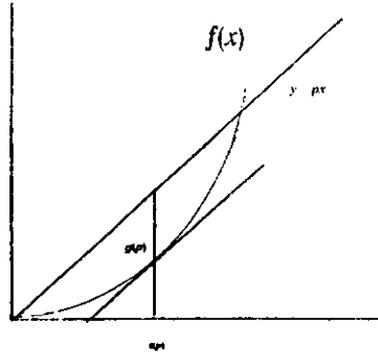


Figura 2.2: Transformada de Legendre

2.1.3 Transformaciones de Legendre

La transformada de Legendre es una herramienta muy útil ya que lleva funciones de un espacio vectorial a su espacio dual. Por esta razón es utilizada en Análisis y también muy comúnmente en Física.

2.1.8 Definición: Sea $y = f(x)$ una función convexa, (i.e. $f''(x) > 0$). La **transformada de Legendre** de una función f es una nueva función g de una nueva variable p , que se construye de la siguiente manera.

Obsérvese la figura (2.2).

Trazamos la gráfica de f en el plano xy . Sea p un número dado y consideremos la línea recta $y = px$. Tomemos el punto $x = x(p)$ como aquél en el cual la distancia entre la curva y la recta es la máxima en la dirección vertical. De esta manera, para cada punto p la función $px - f(x) = F(p, x)$ tiene un máximo con respecto a x en el punto $x(p)$.

Ahora definamos:

$$g(p) = F(p, x(p)) = px - f(x) \quad (2.6)$$

Esta es la transformada de Legendre

El punto $x(p)$ queda definido por una condición de extremidad, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, i.e. $f'(x) = p$.

Como f es convexa, si el punto $x(p)$ existe, entonces es único.

La transformada de Legendre lleva funciones convexas en funciones convexas.

Además es involutiva $g^2 = I$, ie si f es llevada a h bajo g entonces h será llevada a f .

La transformada de Legendre establece relaciones entre las funciones que son imagen una de la otra bajo ella.

Transformada de Legendre para varias variables

No es difícil llevar todo este desarrollo al caso en que f es una función de una variable vectorial $x = (x_1, \dots, x_n)$.

La transformada de Legendre $g(p)$, con $p = (p_1, \dots, p_n)$ de f queda definida, como antes, por las relaciones:¹

$$g(p) = F(p, x(p)) = \max_x F(p, x) \quad (2.7)$$

con $F(p, x) = \langle p, x \rangle - f(x)$ y $p = \frac{\partial f}{\partial x}$.

2.2 Mecánica Hamiltoniana

La mecánica Hamiltoniana es, en un sentido, más general que la de Lagrange, ya que nos permite resolver un mayor número de problemas físicos; el espacio-fase es, como veremos, el haz cotangente al espacio de configuración y el hamiltoniano es la transformada de Legendre del lagrangiano.

¹ $\langle a, b \rangle$ es la notación utilizada para el producto interior

El punto de vista hamiltoniano nos permite resolver completamente una serie de problemas mecánicos que no dan resultados por otros métodos, y es por esto que lo desarrollaremos a continuación.

2.2.1 Ecuaciones de Hamilton

Por medio de la transformada de Legendre podemos convertir un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden, como las ecuaciones de Euler-Lagrange, en un conjunto de $2n$ ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, que tiene además propiedades de simetría. Este conjunto recibe el nombre de **sistema Hamiltoniano de ecuaciones**.

Consideremos un sistema de ecuaciones de Lagrange. Si $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ entonces las podemos escribir como $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$, con $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la función lagrangiana, que supondremos es convexa con respecto a \dot{q} .

Por definición, ec. (2.6), la transformada de Legendre del lagrangiano con respecto de \dot{q} es la función:

$$H(p) = p \dot{q} - L(\dot{q}) \quad (2.8)$$

en donde \dot{q} está expresada en términos de p mediante la fórmula $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, que depende de q y t . La función H se conoce como función Hamiltoniana, o **hamiltoniano**.

La diferencial total del Hamiltoniano $dH = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial t} dt$ deberá ser igual a la derivada de $p \dot{q} - L(\dot{q})$ según su definición, por lo tanto $dH = \dot{q} dp - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \frac{\partial L}{\partial t} dt$ por lo que igualando términos, tenemos:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Ahora, aplicando las ecuaciones de Lagrange $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$ obtenemos:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (2.9)$$

que junto con la expresión obtenida anteriormente para \dot{q} :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (2.10)$$

constituyen las **ecuaciones de Hamilton-Jacobi**.

Con lo anterior hemos demostrado que si la trayectoria $q(t)$ satisface las ecuaciones de Lagrange entonces $(p(t), q(t))$ satisface las ecuaciones de Hamilton e inversamente, por lo tanto el formalismo Hamiltoniano nos da una manera equivalente de abordar los problemas al Lagrangiano.

Como hemos dicho, la transformada de Legendre lleva una función a su espacio dual, por lo que es claro que el hamiltoniano H está definido en el espacio dual al tangente $T(M)$ de M , donde M es el espacio donde se desarrolla el sistema, es decir el espacio de configuración. En términos de las matemáticas desarrolladas, podemos decir que H tiene su dominio en el espacio cotangente T^*M (el espacio-fase).

Ahora daremos una visión geométrica de la dinámica Hamiltoniana, definiendo la variedad que llamaremos **espacio-fase** y que tendrá coordenadas p y q .

La mecánica Hamiltoniana es la *geometría del espacio fase*. El espacio-fase tiene una estructura de variedad simpléctica.

Un poco de geometría simpléctica se desarrolla a continuación.

2.3 Estructura simpléctica en variedades.

2.3.1 Definición: Sea X una variedad de dimensión par $2n$.

Una **forma simpléctica** ω sobre X es una 2-forma tal que:

- 1) ω es cerrada, i.e. $d\omega = 0$
- 2) Para cada $x \in X$, $\omega_x : T_x X \times T_x X \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal no degenerada (la función $T_x X \rightarrow T_x^* X$ dada por $v \mapsto \omega_x(v, \cdot)$ es un isomorfismo)

Como X es una $2n$ -variedad entonces existen coordenadas $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ llamadas canónicas, alrededor de cada punto, en las cuales la forma simpléctica canónica ω tiene la expresión

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i \quad (2.11)$$

Véase el apéndice C para la justificación de este hecho (Teorema de Darboux).

Estas propiedades se pueden generalizar al caso de dimensión infinita.²

2.3.2 Definición Un mapeo $f : X \rightarrow X$ en una variedad X con forma simpléctica débil ω es llamado **simpléctico** cuando

$$f^*\omega = \omega \quad (2.12)$$

donde f^* denota la imagen recíproca o ‘pull-back’ de ω bajo f .

Ilustraremos a continuación la aparición de las variedades simplécticas en la mecánica.

2.3.1 La mecánica Hamiltoniana y su estructura simpléctica

Sea S un sistema dinámico y V la variedad diferenciable n -dimensional que representa el espacio de configuraciones de S , es decir cada punto de V representa uno y sólo uno de los estados del sistema al tiempo t (la dimensión de V es igual al número de grados de libertad de S).

Sea $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ su lagrangiano³ (que es una función en $T(V)$)⁴ con q_i las coordenadas generalizadas. El momento p_i está definido como:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{q}_i, t)}$$

Considérese su haz cotangente T^*V que tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$ (recuérdese que un punto en T^*V es una

²Vease el Apéndice C.

³la notación indica derivada exterior, que como hemos visto, en este caso, por ser q_i una 0-forma queda definida como $\frac{\partial f_j}{\partial x^i} \equiv f_{j,i}$. Véase el apéndice A para esta convención.

⁴Puede suceder que $\mathcal{L} : T(V) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en cuyo caso el lagrangiano depende explícitamente del tiempo, algunas modificaciones serían necesarias hacer a la discusión desarrollada, como definir $\bar{q} : t \rightarrow (q^i(t), \frac{dq_i(t)}{dt}, t)$. En esta caso el Hamiltoniano también dependería explícitamente del tiempo $H : T^*V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1-forma definida sobre el espacio tangente a V). T^*V recibe el nombre de **espacio-fase**.

Elegimos $\{q_i\}$ las coordenadas generalizadas del sistema para describir puntos en V , y $\{p_i\}$ sus momentos asociados (estos pertenecen a T^*V). Juntos las q_i y p_i forman un sistema de coordenadas locales para los puntos en T^*V .

Podemos definir la función Hamiltoniana en T^*V como (generalizando la ec. (2.8) a varias variables):

$$H(p, q) = pq_{,t} - \mathcal{L}$$

De la ecuación de la dinámica:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (q_{i,t})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (q_i)} = 0$$

y de la definición de p tenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = - \frac{dp_i}{dt} \quad (2.13)$$

y

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt} \quad (2.14)$$

que son conocidas como **ecuaciones de Hamilton-Jacobi** (en varias variables).

El espacio-fase T^*V tiene una estructura simpléctica natural. En las coordenadas locales mencionadas, la forma simpléctica está dada por la fórmula

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i \quad (2.15)$$

2.3.3 Afirmación: Consideremos el caso de un sistema con un solo grado de libertad, su espacio-fase M tiene coordenadas p y q .

Definimos la 2-forma $\omega = dq \wedge dp$.

Consideremos la curva $\{q = f(t), p = g(t)\}$ en la cual M tiene una solución a las ecuaciones de Hamilton-Jacobi. Su vector tangente, $u = \frac{d}{dt} = f_{,t} \frac{\partial}{\partial q} + g_{,t} \frac{\partial}{\partial p}$, tiene la propiedad

$$\mathcal{L}_u \omega = 0. \quad (2.16)$$

Demostración:

Como $d\omega = 0$, por la fórmula para la derivada de Lie de una p-forma⁵:

$$\mathcal{L}_u \omega = d[\omega(u)]. \quad (2.17)$$

Pero como $\omega = dq \otimes dp - dp \otimes dq$, tenemos:

$$\begin{aligned} \omega(u) &= \langle dq, u \rangle dp - \langle dp, u \rangle dq \\ &= \frac{df}{dt} dp - \frac{dg}{dt} dq. \end{aligned}$$

Por otro lado, como f y g satisfacen las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, tenemos:

$$\omega(u) = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq = dH$$

por lo cual $d(\omega(u))$ se anula (pues es una segunda derivada) probando la afirmación.

■

En este caso u es un campo vectorial Hamiltoniano (porque satisface la ecuación (2.16)). Explicaremos a continuación más detalladamente este concepto.

⁵Utilizando la expresión para la derivada de Lie $\mathcal{L}_u \omega = d[\omega(u)] + (d\omega)u$. Véase [Sch] páginas 142 y 143 para la prueba.

Campos vectoriales Hamiltonianos

2.3.4 **Definición:** Un campo vectorial v en una variedad simpléctica (X, ω) es **localmente Hamiltoniano** si su flujo deja ω invariante; esto es:

$$\mathcal{L}_v \omega \equiv di_v \omega = 0 \quad (2.18)$$

Si $di_v \omega$ no es solamente cerrada, sino además es una diferencial exacta entonces:

$$i_v \omega = -dH \quad (2.19)$$

Se dice que v es **globalmente hamiltoniano** y H , determinado hasta por una constante aditiva, recibe el nombre de **Hamiltoniano**.

Recíprocamente, si H es una función de clase C^1 dada, con diferencial dH y ω es una forma simpléctica en X , existe un y sólo un campo vectorial v determinado por $i_v \omega = -dH$, ya que el mapeo $T_x X \rightarrow T_x^* X$, $v_x \mapsto \omega_x(v_x, \cdot) \equiv i_{v_x} \omega_x$ es un isomorfismo.⁶

Nótese que si ω es una forma simpléctica débil, dado H , v no existe necesariamente.

La forma simpléctica ω tiene un papel semejante al que la métrica tiene en variedades Riemannianas, y que es dar un mapeo invertible, 1-1, entre vectores y 1-formas. Si v es un campo vectorial en una variedad X , definimos el campo de 1-formas asociado a v como :

$$\tilde{v} \equiv \omega(v) \quad (2.20)$$

donde hemos utilizado una tilde para distinguir la 1-forma del vector v . En términos de componentes, en la base canónica:

$$(\tilde{v})_i = \omega_{ij} v^j$$

De manera totalmente análoga, dada el campo de 1-formas α existe un único vector $\bar{\alpha}$ tal que:

$$\alpha = \omega(\bar{\alpha}) \quad (2.21)$$

⁶Ver [Ch] pag. 257

El espacio fase no es simplemente una variedad sino que está dotado de una estructura de espacio vectorial, es decir que es una variedad que puede ser identificada con su espacio tangente en cada punto. Un espacio vectorial es su propio espacio tangente, más aun, entre todos los espacio tangentes T_p existe una identificación natural, de uno con cualquier otro, así podemos hablar de vectores en diferentes T_p y compararlos, incluso decir si son iguales si sus componentes lo son.

Además, dado que cada punto en el espacio fase es un vector, podemos utilizar la forma simpléctica ω para definir un producto interior entre los elementos del espacio-fase. Así, si $y_{(1)} = \{q_{(1)}^a, p_{(1)a}, a = 1, \dots, n\}$ y $y_{(2)} = \{q_{(2)}^a, p_{(2)a}, a = 1, \dots, n\}$ el producto interno se define como:

$$\omega(y_{(1)}, y_{(2)}) = \sum_a (q_{(1)}^a p_{(2)a} - q_{(2)}^a p_{(1)a}) \quad (2.22)$$

El producto interior nos da una manera elegante de definir las cantidades conservadas asociadas a soluciones de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi.

Como la forma simpléctica definida por (2.15) no depende de las coordenadas utilizadas para X , es, por lo tanto, una estructura **natural** en el haz cotangente $T^*(X)$.⁷

Finalmente, introduciremos la teoría de norma, primero la correspondiente al electromagnetismo, que se describe en un haz fibrado principal cuyo espacio base es el espacio de Minkowski y el grupo de estructura es $U(1)$. Esta teoría sirve de modelo para las demás teorías de norma y además ejemplifica la belleza y elegancia de las teorías geométricas. En el proceso, introduciremos también más elementos geométricos de validez general. En la última sección del capítulo desarrollaremos la teoría clásica general.

2.4 Electromagnetismo

La teoría física que modela los fenómenos electromagnéticos, y unifica dos fuerzas que en un principio parecían ser ajenas, la eléctrica y la magnética, de una forma elegante, es la teoría de Maxwell.

⁷Ver Apéndice C, donde se habla de estructuras simplécticas y el teorema de Darboux.

Ésta, en su forma clásica, describe el comportamiento de los campos vectoriales eléctrico E y el campo magnético B , definidos a través del espacio, considerado como \mathbb{R}^3 , y son así mismo funciones del tiempo.

Los campos eléctrico y magnético dependen de la **densidad de carga eléctrica** ρ que es una función que depende del tiempo y de la **densidad de corriente** j que es un campo vectorial dependiente del tiempo definido en el espacio.

En unidades en las cuales la velocidad de la luz es igual a 1, las **ecuaciones de Maxwell** son:

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.23)$$

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad (2.24)$$

$$\nabla \cdot E = \rho \quad (2.25)$$

$$\nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} = j \quad (2.26)$$

Notemos que las ecuaciones de Maxwell pueden agruparse de manera natural en dos pares, las primeras dos no dependen de la densidad de carga ni de corriente, son ecuaciones homogéneas, y el segundo par, que se parece mucho al primero, solo intercambiando los papeles de B y de E y la aparición de un signo negativo, pero que sí depende de éstas.

La simetría entre ambos pares es más evidente en las ecuaciones de Maxwell en el vacío:

$$\nabla \cdot B = 0, \quad \nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad (2.27)$$

$$\nabla \cdot E = 0, \quad \nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (2.28)$$

Si empleamos la transformación

$$B \mapsto E, \quad E \mapsto -B$$

el primer par de ecuaciones es transformado en el segundo y viceversa. Esta simetría es llamada **dualidad** y es la clave de que exista una teoría unificada para ambos campos.

Nuestro objetivo es reescribir las ecuaciones de Maxwell con las herramientas de la geometría diferencial, lo que es conocido como la teoría de norma $U(1)$ del electromagnetismo.

Primero, reescribiremos el primer par de ecuaciones de Maxwell, (2.23) y (2.24) utilizando la derivada exterior.

Como hemos visto antes, la divergencia en \mathbb{R}^3 se puede expresar como la derivada exterior de una 2-forma. Así, en lugar de tratar al campo magnético como un campo vectorial $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ lo trataremos como una 2-forma

$$B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

También recordemos que en términos de la derivada exterior, el rotacional se puede expresar como la derivada exterior de una 1-forma en \mathbb{R}^3 , así que también en vez de tomar al campo eléctrico como un campo vectorial $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$, lo trataremos como la 1-forma

$$E = E_x dx + E_y dy + E_z dz.$$

Así, el primer par de ecuaciones de Maxwell en el caso estático se convierte:

$$dE = 0, \quad dB = 0$$

Ahora, consideremos el caso dependiente del tiempo, los campos eléctrico y magnético están definidos ahora en el espacio-tiempo \mathbb{R}^4 , con las coordenadas canónicas, que denominaremos como (x_0, x_1, x_2, x_3) .

Como nuestros campos eléctrico y magnético están definidos ahora como formas, podemos combinar ambos para formar un campo electromagnético F que es una 2-forma en \mathbb{R}^4 como sigue:

$$F = B + E \wedge dx_0 \tag{2.29}$$

que tiene componentes:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{2.30}$$

Esto nos permite escribir a F , que es conocido como el **tensor** (ó **2-forma**) de **Faraday**, como:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_x & -B_y \\ E_y & -B_x & 0 & B_z \\ E_z & B_y & -B_z & 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

En términos de la 2-forma de Faraday, el primer par de ecuaciones de Maxwell, es decir, las ecuaciones que son homogéneas, se puede escribir de una manera unificada y elegante como:

$$dF = 0 \quad (2.32)$$

Para comprobarlo, notemos primero que :

$$dF = d(B + E \wedge dx_0) = dB + dE \wedge dx_0$$

Ahora, separemos el operador d en una parte espacial y la parte temporal, si ω es una forma cualquiera, entonces:

$$d\omega = \partial_i \omega_I dx^i \wedge dx^I + \partial_0 \omega_I dx^0 \wedge dx^I \quad (2.33)$$

donde I varía sobre índices múltiples e i toma los valores 1,2 y 3. Para facilitar nuestras ecuaciones, denotaremos [Ba]:

$$d_S \omega = \partial_i \omega_I dx^i \wedge dx^I \quad (2.34)$$

con $i = 1, 2, 3$ la parte espacial y

$$dt \wedge \partial_t \omega = \partial_0 \omega_I dx^0 \wedge dx^I \quad (2.35)$$

la parte temporal de la derivada exterior.

Así, tenemos:

$$\begin{aligned} dF &= dB + dE \wedge dx_0 \\ &= d_S B + (dt \wedge \partial_t B) + (d_S E + dt \wedge \partial_t E) \wedge dt \\ &= d_S B + (\partial_t B + d_S E) \wedge dt \end{aligned}$$

Notemos que el primer término no incluye componente en dt mientras que el otro si. Así, nuestra condición 2.32 es equivalente al par de ecuaciones:

$$d_S B = 0 \quad (2.36)$$

$$\partial_t B + d_S E = 0 \quad (2.37)$$

que son las dos primeras ecuaciones de Maxwell, ya que:

$$\begin{aligned} d_S B &= \partial_1 B_x dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \partial_2 B_y dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \partial_3 B_3 dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &= (\partial_1 B_x + \partial_2 B_y + \partial_3 B_3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

que como vimos en la sección (1.2.3) sobre la derivada exterior, es la expresión para la divergencia (ec. 1.8).

$$d_S B = \nabla \cdot B = 0$$

y

$$d_S E = \partial_2 E_x dx^2 \wedge dx^1 + \partial_3 E_x dx^3 \wedge dx^1 + \partial_1 E_y dx^1 \wedge dx^2 + \partial_3 E_y dx^3 \wedge dx^2 + \partial_1 E_z dx^1 \wedge dx^3 + \partial_2 E_z dx^2 \wedge dx^3$$

$$d_S E = (\partial_1 E_y - \partial_2 E_x) dx^1 \wedge dx^2 + (\partial_2 E_z - \partial_3 E_y) dx^2 \wedge dx^3 + (\partial_3 E_x - \partial_1 E_z) dx^3 \wedge dx^1$$

que es de acuerdo con la ecuación (1.7), la expresión para el rotacional de E . Así:

$$d_S E = \nabla \times E$$

y la ecuación (2.37) recupera la forma de la conocida ecuación de Maxwell (2.24).

El primer par de ecuaciones de Maxwell no involucra ningún tipo de medición de distancias en el espacio-tiempo, son **generalmente covariantes** i.e. el pull-back de una solución bajo cualquier difeomorfismo es otra solución. Esto no sucede en el segundo par de las ecuaciones, las ecuaciones (2.25) y (2.26).

2.4.1 Métrica y el operador \star

Para transformar las otras dos ecuaciones de Maxwell es necesario exigir un poco más de estructura a la variedad en que modelamos el electromagnetismo

ya que éstas requieren para su formulación de una regla para medir distancias y tiempos.

Tal estructura diferencial es la métrica.⁸

El tensor métrico g es un campo tensorial de tipo 2-covariante definido sobre una variedad X , tal que:

- 1) g es simétrico
- 2) para cada $x \in X$, la forma bilineal g_x es no-degenerada⁹, es decir, para $w \in T_x$ $g(v, w) = 0$ para todo $v \in T_x$ si y sólo si $w = 0$.

Una variedad con una métrica g recibe el nombre de **variedad Riemanniana**.

La métrica dota a la variedad de una riqueza muy grande, por ejemplo, dada una métrica g existe un isomorfismo de $T(X)$ a $T^*(X)$ definido:

$$v \mapsto g(v, \cdot)$$

para toda $v \in T_x$.

Esta función es la que nos permite “subir” y “bajar” los índices de los vectores, formas y tensores. Es decir, transforma formas en vectores y viceversa.

Si la métrica nos permite medir distancias debe también dotarnos de una manera de medir volúmenes, esto es importante para el desarrollo de las ecuaciones de Maxwell que haremos más adelante y en general para la definición de la integral, veamos pues la **forma de volumen**.

Sea X una variedad de dimensión n . Una forma de volumen ω se define como una n - forma que no se anula en ninguna parte. Así para cada punto $x \in X$, ω_x es un elemento de volumen en $T_x^*(X)$. Como todas las n - formas en un punto forman un espacio vectorial unidimensional, definimos la **forma canónica de volumen**:

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (2.38)$$

⁸La métrica en un espacio vectorial M es una función bilineal $g : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ simétrica, positiva y no degenerada.

⁹Podemos hacer esta afirmación ya que estamos considerando variedades de dimensión finita.

La forma de volumen da una orientación a la variedad, de esta manera podemos decidir sin ambigüedades si una base arbitraria (θ^i) del espacio cotangente $T_x^*(X)$ tiene quiralidad derecha o izquierda. Esto lo podemos hacer expresando la forma $\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n$ como ω por una constante (ya que hemos dicho que forman un espacio unidimensional) y dependiendo si la constante es positiva o negativa podemos determinar si la orientación es derecha o izquierda.

En una n -variedad orientable X con métrica \mathbf{g} existe una forma de volumen canónica en X la cual construimos como sigue:

Si $\mathbf{g}_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\partial_\mu, \partial_\nu)$ definimos $\omega = vol = \sqrt{|\det \mathbf{g}_{\mu\nu}|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$

Además definimos un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\Lambda_x^p(X)$ utilizando el producto interior en $T_x^*(X)$, sean $\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \dots dx^{i_p}$, $\beta = \frac{1}{p!} \beta_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \dots dx^{i_p}$ entonces:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 \dots i_p} \beta^{i_1 \dots i_p}. \quad (2.39)$$

Sin embargo, en nuestro esfuerzo por expresar las ecuaciones de Maxwell de manera independiente de las coordenadas, y generalizar la teoría a cualquier variedad, la aplicación de la métrica que utilizaremos más directamente es el **operador estrella** \star , que mapea p -formas en $(n - p)$ -formas de la siguiente manera:

$$\star : \Lambda^p(X) \rightarrow \Lambda^{n-p}(X)$$

como el único mapeo lineal entre estos espacios tal que, para toda $\omega, \mu \in \Lambda^p(X)$,

$$\omega \wedge \star \mu = vol \langle \omega, \mu \rangle \quad (2.40)$$

usualmente a $\star \mu$ lo conocemos como el \star -dual de μ .

Pero de esta definición formal no resulta obvio como calcularlo. Derivemos una expresión para este operador.

Supongamos que $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ es una base ortonormal orientada positivamente de 1-formas en alguna carta, i.e. $\langle \theta^\mu, \theta^\nu \rangle = 0$ si $\mu \neq \nu$ y $\langle \theta^\mu, \theta^\mu \rangle = \epsilon(\mu)$ donde $\epsilon(\mu) = \pm 1$.

Así, para cualesquiera índices $1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n$ tenemos:

$$\star (\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}) = \pm \theta^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \theta^{i_n} \quad (2.41)$$

donde $\{i_{p+1}, \dots, i_n\}$ es el conjunto de los índices de 1 a n que no están incluidos en $\{i_1, \dots, i_p\}$.

El signo \pm está dado por:

$$\text{sign}(i_1, \dots, i_p)\epsilon(i_1)\dots\epsilon(i_p)$$

donde $\text{sign}(i_1, \dots, i_p)$ denota el signo de la permutación (i_1, \dots, i_p) .

Nuestra fórmula para el operador \star , en el caso particular de \mathbb{R}^3 con la métrica y orientación usual, tomando dx, dy y dz como una base de 1-formas, nos da:

$$\star dx = dy \wedge dz, \quad \star dy = dz \wedge dx, \quad \star dz = dx \wedge dy \quad (2.42)$$

e inversamente:

$$dx = \star(dy \wedge dz), \quad dy = \star(dz \wedge dx), \quad dz = \star(dx \wedge dy) \quad (2.43)$$

Además notemos que la 0-forma 1 se transforma en la forma de volumen y viceversa:

$$\star 1 = (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3), \quad \star(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = 1.$$

Finalmente, si utilizamos el símbolo de Levi-Civita $\epsilon_{j_{p+1}\dots j_n}^{i_1\dots i_p}$, para $1 \leq i_j \leq n$, tenemos que para cualquier p -forma ω :

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1\dots i_p} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}$$

su \star - dual es:

$$(\star\omega)_{j_{p+1}\dots j_n} = \frac{1}{p!} \epsilon_{j_{p+1}\dots j_n}^{i_1\dots i_p} \omega_{i_1\dots i_p} \quad (2.44)$$

y si no contamos con una base ortonormal, entonces lo podemos definir, a partir de la métrica g como¹⁰:

$$(\star\omega)_{j_{p+1}\dots j_n} = |g|^{\frac{1}{2}} \frac{1}{p!} \sum \omega_{i_1\dots i_p} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \epsilon_{j_1\dots j_p j_{p+1}\dots j_n} \quad (2.45)$$

¹⁰ ϵ_{ijk} el símbolo de Levi-Civita generalizado:

$$\epsilon_{i_1\dots i_n} = \left\{ \begin{array}{l} +1 \text{ si } i, j, \dots, k \text{ es una permutación par de } 1, \dots, n \\ -1 \text{ si } i, j, \dots, k \text{ es una permutación impar de } 1, \dots, n \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{array} \right\}$$

2.4.2 El segundo par de ecuaciones de Maxwell

A continuación utilizaremos el operador \star para escribir las ecuaciones (2.25) y (2.26) en términos de formas diferenciales.

Sean $v, w \in M$ con $v = v^i e_i$, $w = w^i e_i$ en el espacio-tiempo. Definimos la **métrica de Minkowski**:

$$\eta(v, w) = -v^0 w^0 + v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3 \quad (2.46)$$

Calculando el \star -dual de F (ec. 2.31) tenemos:

$$(\star F)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

En otras palabras, tomar el dual de F equivale a hacer la sustitución:

$$E_i \mapsto -B_i, \quad B_i \mapsto E_i \quad (2.48)$$

que como hemos visto anteriormente es la principal diferencia entre los dos pares de ecuaciones de Maxwell.

La otra diferencia entre ellos, es que el último par, depende de las densidades de corriente y carga.

Podemos combinar la densidad de corriente $j = j_1 dx^1 + j_2 dx^2 + j_3 dx^3$ con la densidad de carga eléctrica ρ en un único campo vectorial sobre el espacio de Minkowsky:

$$\vec{J} = \rho \partial_0 + j_1 dx^1 + j_2 dx^2 + j_3 dx^3 \quad (2.49)$$

y utilizando la métrica, tomamos la 1-forma asociada a este campo vectorial:

$$J = j - \rho dt \quad (2.50)$$

que llamaremos **corriente**.

Ahora afirmamos que las ecuaciones (2.25) y (2.26) se pueden escribir como:

$$\star d \star F = J. \quad (2.51)$$

Veamos por qué.

Supongamos que la variedad espaciotiempo M es cualquier variedad. Entonces el campo electromagnético F es una 2-forma mientras que la corriente J es una 1-forma, ambas sobre M , y como ya hemos visto la primera ecuación de Maxwell se escribe $dF = 0$. Tomamos a M como una variedad Riemanniana, orientada, con una métrica g y suponemos que $M = \mathbb{R} \times X$, donde X es considerado como el "espacio" de tal manera que podamos dividir, de alguna manera al operador \star en su parte temporal y su parte espacial. Además la métrica g se puede escribir como $g = -dt^2 + g$ donde g es una métrica Riemanniana en el espacio X .¹¹ Así, de la ecuación (2.29) y (2.48), tenemos¹²:

$$\star F = \star_X E - \star_X B \wedge dt \quad (2.52)$$

De aquí, tomando la derivada exterior:

$$d\star F = \star_X \partial_t E \wedge dt + d_X \star_X E - d_X \star_X B \wedge dt$$

y

$$\star d\star F = -\partial_t E - \star_X d_X \star_X E \wedge dt + \star_X d_X \star_X B \quad (2.53)$$

De (2.51) y (2.53), igualando términos, llegamos a:

$$\star_X d_X \star_X E = \rho \quad (2.54)$$

$$-\partial_t E + \star_X d_X \star_X B = j \quad (2.55)$$

que son las expresiones¹³ de (2.25) y (2.26), ya que en el caso del electromagnetismo \star_X denota el operador \star en \mathbb{R}^3 .

¹¹en el caso del espacio de Minkowski, X es simplemente \mathbb{R}^3 con la métrica euclídeana.

¹² \star_X es el operador \star definido sobre la parte espacial X del espacio-tiempo, definido de acuerdo con las ecuaciones (2.40) y (2.41).

¹³por las ecuaciones (2.42) y (2.43) para el operador \star en \mathbb{R}^3 .

2.4.3 Potencial Electromagnético.

La existencia de un potencial vectorial para las ecuaciones de Maxwell se sigue de la ecuación (2.32): como F es una 2-forma cerrada¹⁴ existe una 1-forma A tal que:

$$F = dA \quad (2.56)$$

en alguna vecindad de cualquier punto. Esta 1-forma puede ser transformada, mediante la métrica en el campo vectorial \vec{A} .

Es de gran importancia el hecho de que A no está completamente determinado, pues $A' = A + df$ para cualquier función arbitraria f es también una solución a (2.56). Esta manera de cambiar de un potencial válido a otro recibe el nombre de **transformación de norma** y nuestra libertad de poder escoger A dentro de las transformaciones antes mencionadas constituye la **libertad de norma**.

Algunas veces es de utilidad usar la libertad de norma para hacer que el potencial vectorial satisfaga varias otras condiciones. Elegir una de tales condiciones es llamado **elección de una norma**.

Consideremos un haz fibrado principal con grupo de estructura $U(1)$, i.e. el grupo de los números complejos de norma unitaria escritos como $z = \exp ia$. Una función de transición de $U_i \cap U_j$ en $U(1)$ está dada por:

$$g_{ij}(x) = \exp i\phi(x), \quad g_{ji}(x) = \exp(-i\phi(x))$$

donde $x \mapsto \phi(x)$ es una función real definida en $U_i \cap U_j$.

El hecho de que $U(1)$ es abeliano simplifica grandemente la geometría del campo de Maxwell, y también simplifica las propiedades de transformación de A y F bajo transformaciones de norma.

Bajo una transformación de norma, tenemos:

$$F \rightarrow F' = hFh^{-1} \quad (2.57)$$

$$= F \quad (2.58)$$

con $h = h(x) = \exp i f(x)$, $f(x)$ una función real de x .

¹⁴Ver apéndice D.

El álgebra de Lie de $U(1)$ es simplemente \mathbb{R} ,¹⁵ como F es una 2-forma real vemos que componente por componente:

$$hF_{\mu\nu}h^{-1} = \exp i f(x) \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_x & -B_y \\ E_y & -B_x & 0 & B_z \\ E_z & B_y & -B_z & 0 \end{pmatrix} \exp(-if(x))$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -e^{i f(x)} E_x e^{-i f(x)} & -e^{i f(x)} E_y e^{-i f(x)} & -e^{i f(x)} E_z e^{-i f(x)} \\ e^{i f(x)} E_x e^{-i f(x)} & 0 & e^{i f(x)} B_x e^{-i f(x)} & -e^{i f(x)} B_y e^{-i f(x)} \\ e^{i f(x)} E_y e^{-i f(x)} & -e^{i f(x)} B_x e^{-i f(x)} & 0 & e^{i f(x)} B_z e^{-i f(x)} \\ e^{i f(x)} E_z e^{-i f(x)} & e^{i f(x)} B_y e^{-i f(x)} & -e^{i f(x)} B_z e^{-i f(x)} & 0 \end{pmatrix} =$$

y como

$$\exp(-i f(x)) E_i = E_i \exp(-if(x))$$

y

$$\exp(-i f(x)) B_i = B_i \exp(-if(x))$$

por la naturaleza abeliana del grupo, concluimos la igualdad en (2.58) y decimos que F es **invariante** bajo transformaciones de norma.

Análogamente para A la transformación de norma es como hemos dicho, tenemos:

$$A' = A + df \tag{2.59}$$

la cual la podemos ver en términos más abstractos como el resultado de efectuar la transformación:

$$A' = hAh^{-1} + h\mathbf{d}h^{-1} \tag{2.60}$$

$$= A + h\mathbf{d}h^{-1} \tag{2.61}$$

en donde si ponemos $h(x) = \exp i f(x)$, con $f(x)$ una función real de x recuperamos (2.59).

¹⁵pues $U(n) = \{U = GL(n, \mathbb{C}) : UU^* = 1\}$ tiene como álgebra de Lie el álgebra de las matrices antihermitianas. Véase el apéndice B sobre grupos de Lie y [Na] pag. 172 para una idea de la prueba.

Si el haz fibrado que modela las ecuaciones de Maxwell tiene como base del fibrado principal $U(1)$ una variedad plana M como por ejemplo el espacio-tiempo de Minkowski, que es contraíble, el haz es trivial. Pero cuando tratamos de encontrar monopolos magnéticos el uso de esta teoría nos lleva a considerar fibrados no-contraíbles.

A continuación, veremos las teorías de norma de una manera más general

2.5 Teorías de Norma: construcción geométrica.

Como hemos visto antes la teoría de campos se caracteriza por una cantidad física fundamental, que hemos llamado la **acción**.

La **acción** es el funcional que tiene la siguiente forma general:

$$\Phi = \int \mathcal{L}(x) dx$$

donde $\mathcal{L}(x)$ es el lagrangiano¹⁶ correspondiente al campo en cuestión, al que denotaremos $\phi(x)$.

Las ecuaciones fundamentales de la teoría de campos son las ecuaciones de movimiento. Estas ecuaciones se obtienen a partir de un principio variacional, del **principio de mínima acción**:

$$\delta\Phi = 0$$

En lo subsecuente, formularemos la teoría de norma en el lenguaje geométrico que hemos desarrollado.

Para poder desarrollar de manera apropiada la teoría de campos en un ambiente de geometría, necesitamos utilizar prácticamente todos los conceptos que hemos venido desarrollando hasta el momento.

Con el fin de que nuestra exposición sea clara, retomaremos algunos conceptos e introduciremos algunos nuevos que utilizaremos en la formulación geométrica de las teorías de norma.

Las nociones matemáticas de conexión y curvatura son fundamentales para las teorías de la física moderna, a continuación las veremos de un modo general, para posteriormente dar dos ejemplos particulares y llevar, en la

¹⁶o densidad de Lagrangiano.

medida de lo posible, la interpretación de la geometría como ecuaciones de campo a teorías no conmutativas.

El principio de las teorías de norma es que los campos deberán ser secciones del haz fibrado y que las leyes de la física deberán ser ecuaciones diferenciales tales que si s es una solución, entonces gs lo es también para cualquier $g \in \mathcal{G}$ el grupo formado por todas las transformaciones de norma posibles. Una ecuación diferencial de este tipo es llamada norma-invariante.

2.5.1 Curvatura

Sea $\mathbf{A} = A_{\mu}^{\alpha}(x)dx^{\mu}$ la forma de conexión en la base, la cual supondremos que proviene de una cierta 1-forma $\omega = g^{-1}dg + g^{-1}\mathbf{A}g$, como lo hemos hecho en el capítulo 1, en la sección sobre conexión, donde las coordenadas locales en el fibrado principal $P = (P, B, \pi, G)$ son (x, g) , $x \in B, g \in G$.¹⁷ Entonces bajo un cambio de coordenadas del haz fibrado que van de (x, g) a (x', g') con $x = x'$ y $g' = hg$ la 1-forma ω induce una ley de transformación para la conexión, debida a la invariancia de ω :

$$g^{-1}dg + g^{-1}\mathbf{A}g = g'^{-1}dg' + g'^{-1}\mathbf{A}'g' \tag{2.62}$$

Pero como $g' = hg$ tenemos:

$$dg' = dhg + hdg \tag{2.63}$$

Así, el lado derecho de (2.62) se convierte:

$$g^{-1}h^{-1}(dhg + hdg) + g^{-1}h^{-1}\mathbf{A}'hg \tag{2.64}$$

por lo que de la ec. (2.62) deducimos:

$$\mathbf{A} = h^{-1}dh + h^{-1}\mathbf{A}'h \tag{2.65}$$

O bien:

$$\mathbf{A}' = hdh^{-1} + h\mathbf{A}h^{-1} \tag{2.66}$$

que es la ley de transformación de la conexión \mathbf{A} . En Física recibe el nombre de **ley de transformación de norma**. Así, vemos que matemáticamente lo que en física es una transformación de norma matemáticamente representa

¹⁷ B la variedad que es base del fibrado P .

un cambio de coordenadas fibradas en un haz fibrado principal. Recordemos que la conexión $A_\mu^a(x)$ es llamada, en física, **potencial de norma**.

Como lo hemos hecho en el capítulo 1, la conexión nos permite definir la derivada covariante ec. (1.13), con ésta, definiremos el concepto de curvatura que nos da una medida de la no conmutatividad del transporte paralelo.

Definimos la **2-forma de curvatura** Ω como la derivada covariante de la 1-forma de conexión ω :

$$\Omega \equiv D\omega \in \Lambda^2(P) \otimes \mathfrak{g} \quad (2.67)$$

La curvatura satisface lo que se conoce como la **ecuación de estructura de Cartan**¹⁸, i.e. si $X, Y \in T_u P$ y ω es la 1-forma de conexión tal que $\Omega = D\omega$ entonces:

$$\Omega(X, Y) = d_p \omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] \quad (2.68)$$

que también se puede escribir como:

$$\Omega = d_p \omega + \omega \wedge \omega \quad (2.69)$$

Forma local de curvatura en la variedad Base.

En una trivialización local (U_i, ϕ_i) la 2-forma Ω en $\pi^{-1}(U_i)$ está representada por la 2-forma $\overline{\Omega}_i$ en U_i definida a través de la sección transversal correspondiente σ_i como:

$$\overline{\Omega}_i = \sigma_i^* \Omega \quad (2.70)$$

En teorías de norma a $\overline{\Omega}_i$ se le conoce como **fuerza del campo en la norma** ϕ_i , y usualmente se le denota por \mathbb{F}_i . La trivialización recibe el nombre de **norma**. Para que nuestra notación coincida con la tradicionalmente usada aquí la denotaremos \mathbf{F} (olvidándonos del índice que denota la trivialización utilizada).

Como resultado de la ecuación de estructura de Cartan y de la conmutatividad del *pull-back* con la derivada exterior d en la variedad base B tenemos

¹⁸Véase [Na] pág. 342 para la prueba.

que la 2-forma de curvatura se escribe en términos del potencial de norma $\bar{\omega} = \mathbf{A}$ como¹⁹:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} \quad (2.71)$$

que puede ser reescrita como:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A} + \frac{1}{2} [\mathbf{A}, \mathbf{A}]. \quad (2.72)$$

La acción de \mathbf{F} sobre vectores X, Y de TB está dada por:

$$\mathbf{F}(X, Y) = d\mathbf{A}(X, Y) + [\mathbf{A}(X), \mathbf{A}(Y)]. \quad (2.73)$$

La expresión en términos de componentes de \mathbf{F} en una carta U con coordenadas x^μ se deriva directamente de la ecuación de estructura, si el potencial de norma es $\mathbf{A} = A_\mu(x)dx^\mu$ con $A_\mu \in \mathfrak{g}$ y $\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ es:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (2.74)$$

Como $F_{\mu\nu}$ y A_μ son funciones \mathfrak{g} -valuadas, las podemos expresar en términos de la base $\{T_i\}$ de \mathfrak{g} como:

$$A_\mu = A_\mu^i T_i, \quad F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^i T_i. \quad (2.75)$$

Ya que la base $\{T_i\}$ satisface la relación de conmutación $[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c$,²⁰ podemos escribir la bien conocida expresión:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.76)$$

A partir de la forma en que \mathbf{A} se transforma tenemos que bajo transformaciones de norma i.e. un cambio de coordenadas fibradas donde $g' = hg$, \mathbf{F} se transforma:

$$\mathbf{F} = h\mathbf{F}h^{-1}$$

¹⁹De la ecuación de Cartan tenemos:

$$\mathbf{F} = \sigma^* (d_p \omega + \omega \wedge \omega) = d\sigma^* \omega + \sigma^* \omega \wedge \sigma^* \omega = d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}$$

²⁰ f_{bc}^a son las llamadas constantes de estructura.

2.5.2 Idéntidades de Bianchi

La curvatura satisface un conjunto de identidades tensoriales de gran importancia conocidas como las identidades de Bianchi, que son muy conocidas a los físicos en el contexto de la relatividad general.

Como ω y Ω son funciones \mathfrak{g} -valuadas, podemos expresarlas en términos de la base $\{T_i\}$ de \mathfrak{g} como $\omega = \omega^a T_a$, $\Omega = \Omega^a T_a$ y entonces (2.69) nos da:

$$\Omega^a = d_p \omega^a + f_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c \quad (2.77)$$

tomando la derivada exterior de la expresión anterior:

$$d_p \Omega^a = f_{bc}^a d_p \omega^b \wedge \omega^c + f_{bc}^a \omega^b \wedge d_p \omega^c. \quad (2.78)$$

Ahora recordemos que, para un vector horizontal X , $\omega(X) = 0$, entonces, para $X, Y, Z \in T_u P$ tenemos:

$$D\Omega(X, Y, Z) = d_p \Omega(X^H, Y^H, Z^H) = 0$$

Así hemos demostrado:

$$D\Omega = 0 \quad (2.79)$$

que es la conocida **identidad de Bianchi**.

En nuestro tratamiento local en la base, ésta tendrá la forma²¹:

$$DF = 0$$

lo que se puede “traducir” en:

$$dF + A \wedge F - F \wedge A = dF + [A, F] = 0 \quad (2.80)$$

que se sigue de $F = dA + A \wedge A$.²²

²¹Hemos utilizado la misma notación, abusando un poco, por simplicidad, pero en este caso la acción de este operador D sobre una p - forma \mathfrak{g} -valuada η en B está dada por:

$$D\eta \equiv d\eta + [A, \eta]$$

Nótese que en el caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(1)$ $D\eta \equiv d\eta$.

²²véase [Na] pág. 345.

2.6 Las Teorías de Yang-Mills

Ahora retomando el formalismo de Lagrange para encontrar las ecuaciones de movimiento, veremos el formalismo para una clase particular de teorías de norma no-Abelianas.

Recordamos que antes de obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange, necesitamos un lagrangiano, función que como hemos visto está definida en el haz tangente del espacio de configuraciones.

Uno quiere construir un lagrangiano invariante bajo transformaciones locales de norma, la conexión estando definida en haz fibrado principal sobre el espacio-tiempo cuyo grupo es un grupo de norma. El *pull back* de la 1-forma de conexión por una sección local es un **potencial de norma** y la sección es llamada **norma local**. El *pull back* de la curvatura es el **campo de norma**.

Inspirados en la teoría del electromagnetismo, en la cual el potencial de norma es el potencial vectorial electromagnético, suponemos que en una teoría de norma el potencial posee una dinámica propia, es decir, que el lagrangiano incluye un término de energía cinética del potencial de norma. Requerimos que el término de energía cinética sea independiente de los campos de materia, invariante bajo transformaciones de Lorentz y de norma, y que contenga un término cuadrático en las derivadas del potencial, pero no de grado mayor. De esta manera queda definido de manera única, hasta por una constante g que determina la constante de acoplamiento. La manera natural de escribir el término de energía cinética es $-\frac{1}{4g^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ con $F_{\mu\nu}$ el *pull-back* de la forma de curvatura, como antes, pero toma valores en la representación adjunta del álgebra de Lie del grupo de norma y no en el álgebra abstracta. Por convención, los físicos dejan fuera el factor g por lo que el lagrangiano de una teoría de norma²³ con grupo, digamos, $U(n)$ está dado por:

²³Si quisieramos trabajar con una teoría cuyo grupo sea G un grupo de Lie arbitrario entonces, reemplazamos la traza de la ecuación anterior por la forma de Killing de G ; i.e. $\text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$ es sustituida por:

$$I_{ab} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \quad (2.81)$$

donde I_{ab} es el tensor métrico de la forma bilineal de Killing, $a, b = 1, \dots, d$ con d la dimensión de \mathfrak{g} el álgebra de Lie correspondiente a G y $F_{\mu\nu}^a$ son las componentes de $F_{\mu\nu}$ relativas a una base de \mathfrak{g} .

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{4} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (2.82)$$

Normalmente consideraremos $\mathcal{L}_0 = 0$.

El ejemplo más sencillo es, entonces, la teoría del electromagnetismo, que hemos visto de manera amplia anteriormente. Pero, volvamos brevemente a este ejemplo, abordándolo desde una manera más geométrica.

Supondremos el espacio base M como un espacio de Minkowski 4-dimensional. Como esta teoría se encuentra modelada por $U(1)$ que es abeliano, dejaremos de lado los índices del grupo y pondremos las constantes de estructura $f_{bc}^a = 0$. Hemos visto también que el haz fibrado correspondiente es trivial, i.e. $P = \mathbb{R}^4 \times U(1)$ y que por lo tanto una sola trivialización local es requerida. El potencial de norma es en este caso:

$$\mathbf{A} = A_\mu dx^\mu \quad (2.83)$$

Nuestro potencial de norma \mathbf{A} difiere del potencial vectorial usual \vec{A} por i que es un factor del álgebra de Lie $A_\mu = i\vec{A}_\mu$. El campo de fuerza \mathbf{F} es $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$ que en componentes se expresa como:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \quad (2.84)$$

donde en la última igualdad hemos utilizado la convención de los físicos (ver apéndice A), para simplificar la escritura.

De (2.71) vemos que \mathbf{F} satisface la identidad de Bianchi:

$$D\mathbf{F} = d\mathbf{F} = d\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge d\mathbf{A} = \mathbf{F} \wedge \mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{F} = 0 \quad (2.85)$$

En componentes tenemos:

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\lambda\mu,\nu} + F_{\nu\lambda,\mu} = 0.$$

Si identificamos $F_{\mu\nu}$ con las componentes del tensor de Faraday (¡que hemos llamado igual!) visto anteriormente, el campo eléctrico \mathbf{E} tiene componentes $E_i = F_{i0}$ y el campo magnético \mathbf{B} , $B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}$, por lo que la identidad de Bianchi, ec. (2.85) representa las dos primeras ecuaciones de Maxwell (2.27).

Estas ecuaciones son *geométricas* más que *dinámicas*. Para obtener las ecuaciones de la dinámica es necesario recurrir a un principio variacional, es decir al principio de mínima acción y a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

La acción de Maxwell $\Phi_{U(1)}$ es un funcional de \mathbf{A} y está dado por:

$$\Phi_{U(1)} = -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x \quad (2.86)$$

Al realizar la variación de $\Phi_{U(1)}$ con respecto de A_μ obtenemos la ecuación de movimiento:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.87)$$

que se reduce al segundo par de ecuaciones de Maxwell en el vacío, ec. (2.28).

■

Veamos un último ejemplo.

Ahora eligimos $G = SU(2)$ ²⁴ y M la variedad en la cual está definido $F_{\mu\nu}$ será considerada como 4-dimensional.

El haz fibrado que describe la teoría de norma correspondiente es $(\mathbb{R}^4, SU(2))$ como \mathbb{R}^4 es un haz trivial sólo hay un potencial de norma, que será proporcional a los generadores del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ que está formada por las

matrices con traza igual a 0 y antihermitianas²⁵ $\{iA\} = \begin{pmatrix} z & x + iy \\ x - iy & -z \end{pmatrix}$

con $x, y, z \in \mathbb{R}$ de las que las matrices de Pauli forman una base:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$iA = i(x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3)$$

Ahora, para tener la normalización estándar de las constantes de estructura tomaremos la base como $T_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{2i}$, de esta manera tenemos:

$$[T_\alpha, T_\beta] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma$$

El potencial de norma asociado a $SU(2)$ es:

$$\mathbf{A} = A_\mu^\alpha T_\alpha dx^\mu \quad (2.88)$$

²⁴Esta representa la teoría de las interacciones fuertes, sugerida por Yang y Mills, en analogía con la teoría del electromagnetismo de Weyl, resultó ser físicamente inadmisibles, pero abrió el camino al principio de norma y al de simetrías ocultas, que es hoy en día base para entender y construir una teoría de la unificación de las fuerzas fundamentales.

²⁵Para una idea de la prueba consúltese [Na].

La curvatura estará dada por:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (2.89)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha \quad (2.90)$$

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_{\nu\alpha} - \partial_\nu A_{\mu\alpha} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\mu\beta} A_{\nu\gamma} \quad (2.91)$$

La idéntidad de Bianchi queda escrita como:

$$D\mathbf{F} = d\mathbf{F} + [\mathbf{A}, \mathbf{F}] = 0 \quad (2.92)$$

El lagrangiano del sistema, que viene dado proporcional a la traza de $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, nos permite calcular la acción:

$$\Phi_{\mathbf{A}} = -\frac{1}{4} \int_M \text{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (2.93)$$

El símbolo de permutación $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ puede ser utilizado para definir el dual de $F_{\mu\nu}$, que es la 2-forma $\star F_{\mu\nu}$ ²⁶:

$$\star F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \quad (2.94)$$

La acción se puede escribir más convenientemente en términos de las dos formas \mathbf{F} y $\star\mathbf{F}$ como :

$$\Phi_{\mathbf{A}} = - \int_M \text{Tr} (\mathbf{F} \wedge \star\mathbf{F}) \quad (2.95)$$

Al variar con respecto de A_μ obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$0 = \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\beta}^a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha^a} = -\partial_\beta F_a^{\beta\alpha} + f_{ca}^b A_\beta^c F_a^{\beta\alpha} = -D_\beta F_a^{\beta\alpha} \quad (2.96)$$

por lo tanto:

²⁶que coincide con el operador estrella \star definido anteriormente.

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.97)$$

Es posible demostrar que esta es la expresión en coordenadas del *pull back* de $D\star\Omega = 0$, por lo que en muchos textos de física encontraremos la expresión:

$$D\star\mathbf{F} = 0 \quad (2.98)$$

Estas ecuaciones tienen que ser resueltas para una conexión \mathbf{A} después de haber dado condiciones de frontera apropiadas. Sin embargo al ser ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas que contienen términos cuadráticos y cúbicos de \mathbf{A} no es posible resolverlas por ningún método elemental. Es claro que en el caso de que el campo sea auto-dual o anti-auto-dual $\star\Omega = \pm\Omega$, las ecuaciones de campo ecs. (2.98) se satisfacen automáticamente gracias a la identidad de Bianchi.²⁷

²⁷Las soluciones a la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a la teoría $SU(2)$ que son autoduales, o anti-autoduales reciben el nombre de **instantones**.

Capítulo 3

Geometría no conmutativa

La geometría no conmutativa está basada la observación (contenida en el Teorema de Gel'fand-Naimark) de la existencia de una equivalencia entre la categoría de espacios topológicos compactos y sus funciones continuas y la categoría de C^* -álgebras y sus $*$ -homomorfismos. En lugar de trabajar con los puntos en un espacio o una variedad M podemos trabajar de manera equivalente con el álgebra de funciones $C(M)$ en M y construir un concepto dual al concepto de distancia en esta álgebra (Connes).

En esta formulación algebraica no necesitamos suponer que el álgebra es conmutativa. En geometría no conmutativa, muchos objetos llevan el adjetivo "cuántico", esta terminología ha sido adoptada de la física. El proceso de cuantización convierte un álgebra conmutativa de observables de un sistema clásico en un álgebra no conmutativa de representaciones irreducibles de operadores compactos sobre un espacio de Hilbert.

Primeramente, veremos la formulación de la geometría diferencial ordinaria de tal manera que se pueda generalizar, dentro de lo posible, al caso no conmutativo. La definición de campos vectoriales y formas diferenciales que introduciremos hará evidente la dependencia directa de éstas del álgebra de funciones de una variedad.

En la última sección del capítulo generalizaremos la idea de haz fibrado principal, para el caso no conmutativo (según [Du2]), lo que nos permitirá de formular teorías de norma en dichas geometrías.

3.1 Álgebras

Debido a que necesitaremos “traducir” nuestra geometría diferencial al lenguaje de las álgebras, a continuación presentaremos los elementos principales que vamos a necesitar.

En lo que resta, cualquier álgebra \mathcal{A} será sobre el campo de los complejos \mathbb{C} . Esto significa que \mathcal{A} es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} , de tal forma que objetos como $\alpha a + \beta b$ con $a, b \in \mathcal{A}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tienen sentido y pertenecen a \mathcal{A} . Existe, también un producto $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$: $(a, b) \mapsto ab$ que es distributivo con respecto a la adición:

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc, \quad \forall a, b, c \in \mathcal{A} \quad (3.1)$$

En general, el producto no es conmutativo:

$$ab \neq ba$$

Supondremos que \mathcal{A} tiene una unidad I , a menos que se indique lo contrario.

3.1.1 C^* -álgebras

El álgebra \mathcal{A} es una $*$ -álgebra si admite una involución $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ antilineal, es decir:

involutividad: $a^{**} = a,$

antilinealidad $(ab)^* = b^*a^*,$

$(\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha}a^* + \bar{\beta}b^*$ para cualquier $a, b \in \mathcal{A}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ donde la barra denota la conjugación compleja usual.

Un **álgebra normada** \mathcal{A} es un álgebra con una norma $\|\cdot\|: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$, $\forall f, g \in \mathcal{A}$. La topología definida por la norma recibe el nombre de **topología uniforme**. Un **álgebra de Banach** es un álgebra \mathcal{A} con norma que es completa con respecto a la topología uniforme. Una **$*$ -álgebra de Banach** es una $*$ -álgebra normada completa y tal que:

$$\|a^*\| = \|a\|, \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Una C^* -álgebra \mathcal{A} es una $*$ -álgebra de Banach cuya norma satisface la siguiente condición adicional:

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (3.2)$$

El álgebra conmutativa $C(M)$ de funciones continuas sobre un espacio Hausdorff M es una C^* -álgebra con $*$ la conjugación compleja y la norma dada por la norma del supremo: $\|f\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x)|$.

Otro ejemplo lo constituye el álgebra no conmutativa $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} de dimensión infinita, con la involución $*$ dada por el adjunto y la norma por el operador norma: $\|B\| = \sup \{\|B\chi\| : \chi \in \mathcal{H}, \|\chi\| \leq 1\}$.

Un subespacio \mathcal{I} (propio, cerrado bajo la norma) del álgebra \mathcal{A} es un **ideal izquierdo** (respectivamente **derecho**) si $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{I}$ implica que $ab \in \mathcal{I}$ (respectivamente $ba \in \mathcal{I}$). El ideal \mathcal{I} (izquierdo, derecho o de ambos lados) es llamado **maximal** si no existe otro ideal del mismo tipo en el cual \mathcal{I} esté contenido. Un ideal es automáticamente un álgebra. Si el álgebra \mathcal{A} tiene una involución, un ideal que contiene el $*$ de cada elemento es llamado **$*$ -ideal** y es automáticamente un ideal de ambos lados. Una C^* -álgebra \mathcal{A} es **simple** si no tiene ideales de ambos lados no triviales.

Un elemento $a \in \mathcal{A}$ es llamado **autoadjunto** o **hermitiano** si $a = a^*$.

Un **$*$ -morfismo** entre dos C^* -álgebras \mathcal{A} y \mathcal{B} es un \mathbb{C} -mapeo lineal $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ que satisface las condiciones siguientes:

$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b), \quad (3.3)$$

$$\pi(a^*) = \pi(a)^*, \quad \forall a, b \in \mathcal{A} \quad (3.4)$$

Es decir, que respeta la estructura de álgebra y la involución.

Una **representación** de una C^* -álgebra \mathcal{A} es una pareja (\mathcal{H}, π) donde \mathcal{H} es un espacio de Hilbert y π un $*$ -morfismo de \mathcal{A} a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, con $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ la C^* -álgebra de operadores acotados en \mathcal{H} . Se dice que es **fiel** si el núcleo de π es igual a cero. Además dos representaciones π y π' son **equivalentes** si existe un operador unitario U tal que $\pi' = U^{-1}\pi(f)U$ para cada $f \in \mathcal{A}$. El isomorfismo entre $\pi(\mathcal{A})$ y $\pi'(\mathcal{A})$ recibe el nombre de **isomorfismo espacial** o **equivalencia unitaria**.

3.2 Variedades diferenciales

Sea V una variedad real suave, compacta orientada y sin frontera de dimensión m y denominemos $C(V)$ al álgebra conmutativa y asociativa de funciones

reales suaves¹ en V . Las operaciones de suma y producto entre dos funciones, elementos de $C(V)$ quedan definidos por:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (fg)(x) &= f(x)g(x)\end{aligned}$$

Las propiedades asociativas conmutativas y distributivas se siguen de sus correspondientes en \mathbb{R} .

Este tipo de variedades pueden ser encajadas² en un espacio euclideo de dimensión n suficientemente grande. La variedad V queda definida por las $n - m$ relaciones en las coordenadas euclidianas x^i y el álgebra $C(V)$ puede ser considerada como el cociente del álgebra de funciones suaves de \mathbb{R}^n entre el ideal generado por dichas relaciones.³

Sea X un campo vectorial suave en V , el espacio vectorial $\mathcal{X}(V)$ formado por tales campos es un $C(V)$ -módulo izquierdo, es decir, si $f \in C(V)$ y $X \in \mathcal{X}$ entonces $fX \in \mathcal{X}(V)$.⁴

Sea $e_i = \partial_i$ la base natural de los vectores en el espacio \mathbb{R}^n en el cual estamos encajando la variedad. El $C(\mathbb{R}^n)$ -módulo $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ de los campos vectoriales suaves en \mathbb{R}^n es un **módulo libre** de rango n . Es decir, puede ser identificado como la suma de n copias de $C(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{X}(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_1^n C(\mathbb{R}^n) \quad (3.5)$$

Lo anterior en particular nos dice que cada elemento $X \in \mathcal{X}(V)$ se puede escribir como una combinación lineal de elementos de la base $X = X^i e_i$ con los $X^i \in C(V)$.

Si existe un marco e_α , $1 \leq \alpha \leq m$, en V ; $\mathcal{X}(V)$ es un módulo de rango m y se dice que la variedad V es **paralelizable**. En general, un marco sólo puede ser definido de manera local sobre V .

¹ $C(V) = C^\infty(V)$ si la variedad tiene una estructura diferencial o $C(V) = C^0(V)$ si solo es estructura topológica.

²del término en inglés *embedding* que denomina a una función diferenciable $f : Y^q \rightarrow X^n$ si la $\dim(\text{im}(f(Y^q))) = \text{rank } f = q$ para cada $y \in Y^q$ y es inyectivo.

³Un ideal de un álgebra es una subálgebra que es cerrada bajo multiplicación por un elemento del álgebra.

⁴recordemos que un módulo es un espacio vectorial sobre el cual actúa una acción de un álgebra.

Definimos el **paréntesis de Lie** $[X, Y]$ de dos elementos $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ como:

$$[X, Y]f = (XY - YX)f = (X^i e_i Y^j - Y^i e_i X^j) e_j f \quad (3.6)$$

$[X, Y]$ es a su vez elemento de $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Si V es una subvariedad de \mathbb{R}^n el paréntesis de Lie de dos elementos de $\mathcal{X}(V)$ es también elemento de $\mathcal{X}(V)$. Si V es paralelizable podemos escribir de manera local:

$$[e_\alpha, e_\beta] = C_{\alpha, \beta}^\gamma e_\gamma \quad (3.7)$$

donde las funciones de estructura $C_{\alpha, \beta}^\gamma$ son elementos de $C(V)$.

Recordemos que los campos vectoriales pueden ser definidos como **derivaciones** (definición 1.1.2), en este nuevo enfoque, como derivaciones del álgebra $C(V)$, es decir, una transformación lineal de $C(V)$ en sí misma que satisface la regla de *Leibniz*:

$$X(fg) = (Xf)g + fXg$$

Esto nos permite identificar $\mathcal{X}(V)$ con las derivaciones $Der(C(V))$ del álgebra $C(V)$:

$$\mathcal{X}(V) \cong Der(C(V))$$

Además esta identificación nos permitirá generalizar la noción de campo vectorial al caso no conmutativo.

Los elementos hermitianos no forman una subálgebra, ya que en general si $f, g \in C(V)$ son hermitianos $(fg)^* = g^* f^*$.

Con este enfoque, en lugar de trabajar con las variedades diferenciales, trabajamos con el álgebra de funciones suaves sobre ellas, lo que más tarde nos permitirá formular el caso no conmutativo. La justificación se encuentra en el siguiente teorema.

3.2.1 Teorema de Gel'fand-Naimark

Cuando uno tiene un espacio V uno sabe construir el álgebra de funciones sobre M con valores reales o complejos. Como ya hemos dicho esta álgebra es conmutativa. Si nuestro espacio V tiene estructura topológica podemos

construir $C^0(V)$ el álgebra de las funciones continuas, y si tiene una estructura diferencial podemos construir $C^\infty(V)$ el álgebra de funciones diferenciables.

Sin embargo, es posible invertir los papeles, es decir, es posible partir de un álgebra conmutativa \mathcal{A} y construir un espacio V tal que \mathcal{A} se identifique como el álgebra de funciones sobre V . Precisemos cómo [Cq].

Tomamos un álgebra \mathcal{A} de Banach, llamamos **caracter de \mathcal{A}** a todo homomorfismo ϕ no nulo de \mathcal{A} en los complejos, es decir, ϕ es un funcional $*$ -lineal multiplicativo : $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. El conjunto V de todos los caracteres de \mathcal{A} recibe el nombre de **espectro de \mathcal{A}** (que, ventajosamente denotaremos V).

Ahora, supongamos que el álgebra \mathcal{A} es conmutativa. La **transformación de Gelfand** es la aplicación \mathcal{F} de \mathcal{A} en el álgebra conmutativa $C^0(V)$ que a $f \in \mathcal{A}$ asocia $\hat{f} \in C^0(V)$, definida para todo caracter $x \in V$ de \mathcal{A} , por:

$$\hat{f}(x) = x(f) \quad (3.8)$$

No lo demostraremos aquí, pero \mathcal{F} es un homomorfismo de álgebras de Banach conmutativas.

Así, podemos enunciar (sin demostrar) el:

4.2.1 Teorema de Gelfand : *Cuando \mathcal{A} es una C^* -álgebra conmutativa, la transformación de Gelfand entre \mathcal{A} y el álgebra $C^0(V)$ de funciones continuas sobre el espectro de \mathcal{A} es un isomorfismo isométrico.*

Este teorema nos hace pensar que en la geometría es 'equivalente' trabajar en un espacio o variedad, o trabajar en un álgebra conmutativa.

Un álgebra no conmutativa no puede ser considerada como un álgebra de funciones (en valores reales o complejos) sobre un espacio, ya que el álgebra sería conmutativa. Más adelante veremos que la geometría no conmutativa consistirá en re-escribir las propiedades geométricas de las variedades en el lenguaje de álgebras, tratando de "borrar" tanto como sea posible el adjetivo "conmutativo". Haciendo esto, creamos una nueva geometría, la que corresponde a las álgebras no conmutativas. Las variedades no conmutativas, sin embargo, no existen.

Desde el punto de vista práctico, como el de la Física, es común describir nuestro espacio desde el punto de vista de la geometría con "puntos", en lugar de funciones en un álgebra, pero como hemos visto los dos puntos de

vista son equivalentes y uno puede pasar de uno al otro mediante la fórmula $\hat{f}(x) = x(f)$.

Por el momento, no nos adentraremos demasiado en la estructura diferencial de nuestros espacios conmutativos, vistos desde el punto de vista algebraico, solo mencionaremos de manera breve que una **forma diferencial α de orden p** es una función p -lineal completamente antisimétrica de $\mathcal{X}(V)$ a $C(V)$. El conjunto de las p -formas en $C(V)$ se denota⁵ como $\Omega^p(V)$ y es un $C(V)$ -**bimódulo**, es decir, para $g \in C(V)$:

$$(g\alpha)(X_1, \dots, X_p) = (\alpha g)(X_1, \dots, X_p) = g(\alpha(X_1, \dots, X_p))$$

Llamaremos $\Omega^*(V)$ a la unión de los $\Omega^p(V)$ para toda p .

El producto exterior y la derivada exterior quedan definidas exactamente como en las ecs. (1.3) y (1.5).

En general y como hemos visto para los conceptos de derivación y campo vectorial, todos los conceptos que definimos en una variedad en los capítulos anteriores siguen siendo válidos con este enfoque.

Ahora tratemos el caso no conmutativo.

3.3 Formulación no conmutativa

En la sección previa hemos dicho que es posible formular gran parte de la geometría diferencial ordinaria de una variedad en términos de un álgebra de funciones suaves definidas sobre ella.

En el marco de la geometría no conmutativa, partimos de cualquier álgebra asociativa \mathcal{A} , que suponemos por simplicidad que tiene unidad, pero no necesariamente conmutativa. \mathcal{A} va a “reemplazar” en nuestra construcción a $C(V)$, es decir, de alguna manera reemplaza también a la variedad V , y queremos asociar a \mathcal{A} un álgebra diferencial graduada Ω , que coincida con \mathcal{A} en grado cero. Por analogía con la construcción que se hace del Cálculo de de Rham, en el caso conmutativo, haremos que los elementos de Ω tomen el lugar de las formas diferenciales “cuánticas”.

Pese a la similitud con la que construimos estas geometrías no conmutativas, existen grandes diferencias con la geometría diferencial ordinaria, como

⁵reservaremos $\Lambda^p(V)$ para el cálculo de de Rham que es el que hemos definido anteriormente.

ya hemos mencionado, el concepto de punto pierde sentido. El conjunto de las derivaciones no es ya un módulo sobre el álgebra, existen diferentes tipos de formas diferenciales, por lo cual la definición de un cálculo no es única, y no hay una definición satisfactoria para muchos de los elementos básicos con los que hemos trabajado, como es el caso de la curvatura para conexiones lineales.

Sin embargo, la importancia de estas geometrías para la física reside en el hecho de que las teorías de campo pueden ser estudiadas en ellas de manera más natural.

3.4 Estructura diferencial

El conjunto de todas las derivaciones de un álgebra \mathcal{A} es isomorfo al espacio de todos los campos vectoriales de una variedad V . Una derivación X_f definida en términos del conmutador por $X_f g = [f, g]$ recibe el nombre de **derivación interna**⁶, a una que esté definida de cualquier otra manera le llamaremos **derivación externa**. La regla de Leibniz para las derivaciones internas es equivalente a la identidad de Jacobi para el conmutador.

Todas las álgebras no conmutativas tienen derivaciones. Si el álgebra tiene una involución entonces definimos una derivación real, como en el caso conmutativo:

$$X^* f = (X f^*)^* \quad (3.9)$$

Una derivación real lleva un elemento hermitiano en otro elemento hermitiano.

Sabemos que en el caso conmutativo, dada una variedad V podemos construir (como lo hicimos en el capítulo 1) un álgebra diferencial graduada $\Lambda(V)$ tal que a primer orden $\Lambda^1(V) = C^\infty(V)$. En el caso no conmutativo, partimos de un álgebra asociativa no conmutativa \mathcal{A} que como hemos dicho, reemplaza al álgebra $C^\infty(V)$ (es decir, "filosóficamente" a la propia variedad V). Uno puede asociar un álgebra diferencial graduada Ω que coincida con \mathcal{A} en grado 0. Los elementos de esta álgebra tomarán el papel de formas diferenciales. Existen muchas posibilidades de obtener dicha álgebra, cada posibilidad define un cálculo diferencial sobre el álgebra \mathcal{A} .

⁶inspirada en la definición de la derivada de Lie.

Sin embargo, existe una posibilidad más general que las otras, en el sentido que las demás se pueden obtener de ésta, mediante la imposición de ciertas relaciones suplementarias. Esta álgebra recibe el nombre de **cálculo de formas universales**.

3.4.1 Cálculo universal

Veremos la construcción del cálculo universal explícitamente en términos de productos tensoriales [Cq].⁷

Sea \mathcal{A} un álgebra asociativa y $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ el producto de \mathcal{A} . Definimos $\Omega^0 \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$.

Tomemos $a, b \in \mathcal{A}$ y escribimos:

$$\delta b \equiv 1 \otimes b - b \otimes 1 \quad (3.10)$$

Así, δb aparece como un tipo de diferencia discreta (diferencial de Karoubi). Más generalmente hacemos:

$$a \delta b \equiv a \otimes b - ab \otimes 1 \quad (3.11)$$

Sea $\Omega^1 \mathcal{A}$ el espacio vectorial generado por los elementos de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ del tipo $a \delta b$. Sea $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $m(a \otimes b) = ab$. Nótese que $a \otimes b - ab \otimes 1$ pertenece al núcleo del operador de multiplicación $m(a \otimes b - ab \otimes 1) = ab - ab1 = 0$. Más generalmente, es claro que los elementos de $\ker(m)$ (que es un submódulo de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$) son combinaciones lineales de elementos de este tipo. Es decir:

$$\Omega^1 \mathcal{A} = \ker(m) \quad (3.12)$$

Con esto, $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^1 \mathcal{A}$.

Entonces, para obtener formas de grados mayores, definimos:

$$\Omega^2 \mathcal{A} \equiv \Omega^1 \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A} \quad (3.13)$$

y en general:

⁷Se verá la construcción de este cálculo mediante símbolos y relaciones cuando construyamos el cálculo diferencial de Connes (Véase [La]).

$$\Omega^p \mathcal{A} := \Omega^1 \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A} \quad (3.14)$$

Notamos que $\Omega^p \mathcal{A}$ está contenida en la $(p+1)$ -ésima potencia tensorial de \mathcal{A} , remarcamos que el producto tensorial se toma sobre \mathcal{A} y por eso el subíndice en el signo de producto.

La multiplicación y la estructura de bimódulo está dada por [La]:

$$(\omega_1 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \omega_p)(\omega_{p+1} \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \omega_{p+q}) := \omega_1 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \omega_{p+q},$$

$$a(\omega_1 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \omega_p) := (a\omega_1) \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \omega_p,$$

$$(\omega_1 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \omega_p) a := \omega_1 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} (\omega_p a), \quad \forall \omega_j \in \Omega^1 \mathcal{A}, a \in \mathcal{A}.$$

La diferencial δ de cualquier $\omega = \sum a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1) \in \Omega^1 \mathcal{A}$ está dada por:

$$\delta \omega := \sum (1 \otimes a_i - a_i \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)$$

y puede ser extendida usando la regla de Leibniz con respecto al producto $\otimes_{\mathcal{A}}$ a todo $\Omega^p \mathcal{A}$.

Este, como hemos dicho es el cálculo diferencial más general, en el sentido de que de él se pueden obtener los demás. Más adelante veremos el cálculo de formas diferenciales de Connes y a continuación, veremos brevemente el cálculo de Woronowics [Wo].

Cálculo de Woronowics.

Sea \mathcal{A} un álgebra asociativa. $\mathcal{A}^2 = \{q \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \quad mq = 0\}$, y $\delta b \equiv 1 \otimes b - b \otimes 1$ la diferencial de Karoubi. Sea Γ un cálculo diferencial de primer orden sobre \mathcal{A} , (es decir, posee una diferencial $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma$ y esta generado linealmente por elementos de la forma adb con $a, b \in \mathcal{A}$), sea $\pi : \mathcal{A}^2 \rightarrow \Gamma$ el epimorfismo canónico:

$$\pi \left(\sum a_k \otimes b_k \right) = \sum a_k db_k \quad (3.15)$$

Definimos $d = \pi \circ \delta :$

$$da = \pi(1 \otimes a - a \otimes 1) = 1da \quad (3.16)$$

y sea $N = \{(\sum a_k \otimes b_k) \in \mathcal{A}^2 : \sum a_k db_k = 0\}$ el núcleo de π . Tenemos $\Gamma = \mathcal{A}^2/N$.

Para construir el cálculo diferencial exterior de Woronowics de mayor orden, necesitamos considerar el álgebra tensorial del cálculo de primer orden (en analogía con el cálculo universal) y *antisimetrizar* (ya que nos gustaría que las formas diferenciales sean, como en el caso clásico antisimétricas).

Tomamos el álgebra tensorial sobre Γ :

$$\Gamma^{\otimes} = \sum_{k \geq 0} \oplus \Gamma^{\otimes k} \tag{3.17}$$

donde $\Gamma^{\otimes k} = \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$.

Definimos una operación antisimetrizadora $A_n : \Gamma^{\otimes n} \rightarrow \Gamma^{\otimes n}$ por:

$$A_n = \sum_{p \in P(n)} (-1)^p \Pi_p \tag{3.18}$$

donde una expresión típica de un elemento de Π_p es

$$\underbrace{id \otimes \dots \otimes id}_{j-1 \text{ veces}} \otimes \sigma \otimes \underbrace{id \otimes \dots \otimes id}_{n-(j+2) \text{ veces}}$$

y σ trenza los elementos j y $j + 1$ de $p \otimes n$.

Llamemos S^n al núcleo de la operación de antisimetrización y definimos:

$$\Gamma^{\wedge k} = \Gamma^{\otimes k} / S^n \tag{3.19}$$

Entonces el álgebra diferencial graduada que define nuestro cálculo queda dada por:

$$\Gamma^{\wedge} = \sum_{k \geq 0} \oplus \Gamma^{\wedge k}. \tag{3.20}$$

Otro tipo de cálculo diferencial es el de Connes, que veremos posteriormente.

3.5 Algebras Topológicas

Es común, para ayudarnos a adquirir una intuición de la geomrtría no conmutativa, ilustrar, tanto como se pueda, el formalismo con ejemplos de mecánica cuántica y de teoría cuántica de campos. Los observables de ambas teorías

son elementos autoadjuntos de un álgebra con involución. Supondremos, por simplicidad, que el álgebra es un álgebra de Banach. La norma definirá una topología en \mathcal{A} .⁸

En el límite clásico el álgebra de observables es conmutativa. Si $a \mapsto a^*$ es la involución, entonces supondremos que:

$$\|aa^*\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (3.21)$$

es decir, es una C^* -álgebra.

Para ver que sucede, tomamos el álgebra $C^0(V)$ de funciones continuas sobre un espacio compacto V . (Si bien que ésta es conmutativa, es sólo para darnos una idea y tener una mejor intuición). La norma de un elemento $f \in C^0(V)$ puede ser definida como:

$$\|f\| = \sup_{x \in V} |f(x)| \quad (3.22)$$

Además a cada $f \in C^0(V)$ asociamos el operador \hat{f} definido por $\hat{f} : g \mapsto fg$ para $g \in C^0(V)$ arbitraria. Podemos escribir:

$$\|\hat{f}\| = \sup_g \{\|fg\| : \|g\| \leq 1\} \quad (3.23)$$

El dual \mathcal{A}^* de una C^* -álgebra \mathcal{A} es el espacio de todas los funcionales lineales definidos en \mathcal{A} . La norma para un elemento $\omega \in \mathcal{A}^*$ está definida:

$$\|\omega\| = \sup_{a \in \mathcal{A}} \{|\omega(a)| : \|a\| \leq 1\} \quad (3.24)$$

Un funcional lineal es **positivo** si $\omega(aa^*) \geq 0$ para toda $a \in \mathcal{A}$. Un **estado** es un funcional lineal positivo con norma unitaria. El conjunto Ω de todos los estados es un conjunto convexo.

Los **elementos extremos** de un conjunto convexo son aquellos que no pueden ser descompuestos como suma convexa de otros dos elementos en el conjunto. Si ω es un elemento extremo del conjunto de estados recibe el nombre de **estado puro**. De cualquier otra forma ω es llamado **estado mixto**.

Si el álgebra es $\mathcal{A} = C^0(V)$ entonces un estado es equivalente a una medida de probabilidad en V y podemos escribir:

⁸Una sucesión de elementos a_i tiende a cero si y solo si $\|a_i\| \rightarrow 0$. Como la falta de conmutatividad se debe a los efectos cuánticos tenemos $\|ab - ba\| \neq 0$.

$$\omega_\mu(f) = \int f d\mu$$

Un estado es **puro** si y solamente si es una medida de Dirac concentrada en un punto $x \in V$, en cuyo caso podemos escribir:

$$\omega_\mu(f) = f(x)$$

Los estados puros pueden ser identificados con los *puntos* de V y podemos decir que \mathcal{A} es un *álgebra de funciones en el espacio de estados puros*. El espacio puede ser dotado de una topología con respecto a la cual las funciones son continuas. Cada medida en V convierte a $C^0(V)$ en un espacio de Hilbert con producto interior:

$$(g, h) = \int \bar{g}h d\mu$$

Sea \mathcal{A} es una C^* -álgebra general de operadores en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Cada vector unitario $\psi \in \mathcal{H}$ define un estado ω_ψ mediante la fórmula:

$$\omega_\psi(a) = (\psi, a\psi) \tag{3.25}$$

El vector ψ es un vector de estado

Un estado más general es un **estado normal**, el cual puede ser expresado como:

$$\omega_\rho(a) = \text{Tr}(\rho a)$$

La **matriz de densidad** ρ es un operador acotado positivo en \mathcal{H} con traza unitaria. El estado ω_ρ es un estado puro si y sólo si ρ es un proyector de rango 1.

El álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de todos los operadores acotados de un espacio de Hilbert \mathcal{H} es una C^* -álgebra no conmutativa e inversamente toda C^* -álgebra puede ser realizada como una sub-álgebra cerrada de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para algún \mathcal{H} .

De hecho $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una C^* -álgebra con un estado dado por (3.25). El **teorema GNS (Gelfand-Naimark-Segal)**, afirma que, recíprocamente, cualquier C^* -álgebra \mathcal{A} con un estado ω puede ser considerada como una

subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para alguna \mathcal{H} . La prueba envuelve la construcción explícita de \mathcal{H} a partir de \mathcal{A} usando ω . (Véase [La] apéndice B)

Se puede demostrar que una C^* -álgebra puede ser considerada como un álgebra de funciones sobre sus *estados puros*. Sea V un espacio de estados puros de una C^* -álgebra no conmutativa \mathcal{A} . Entonces, aunque \mathcal{A} y $C^0(V)$ no son isomorfos como álgebras, podemos definir una inclusión de \mathcal{A} a un espacio vectorial en $C^0(V)$ mediante la función $a \mapsto f_a$ con f_a definida como $f_a(\omega) = \omega(a)$. Así, un *estado puro* es una generalización natural en el caso no conmutativo de un *punto*.

3.6 Grupos Cuánticos

Podríamos pensar que si vamos a hacer un espacio no conmutativo entonces deberíamos de igual manera poder “extender” el concepto de *grupo* al caso no conmutativo.

Sea $\mathcal{A}(m, i)$ un álgebra asociativa sobre los número complejos, con producto asociativo m :

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{m} \mathcal{A}$$

y una unidad i :

$$\mathbb{C} \xrightarrow{i} \mathcal{A}$$

Solamente si \mathcal{A} es conmutativa m resulta ser un homomorfismo entre álgebras. Designemos por I la transformación identidad. Definimos $m \otimes I$ y $I \otimes m$ mediante los mapeos.

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{m \otimes I} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}) \xrightarrow{I \otimes m} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$$

De esta manera la ley asociativa se puede escribir como:

$$m \circ (I \otimes m) = m \circ (m \otimes I)$$

Como i es la unidad podemos escribir la siguiente relación:

$$m \circ (I \otimes i) = m \circ (i \otimes I) = I$$

Una **coálgebra** $\mathcal{A}(\Delta, \epsilon)$ sobre los números complejos es un espacio vectorial con coproducto coasociativo Δ

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$$

y counidad ϵ :

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C}$$

Definimos la función τ de transposición de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ en sí mismo como sigue:

$$\tau(a \otimes b) = b \otimes a$$

Una **biálgebra** $\mathcal{A}(m, i, \Delta, \epsilon)$ sobre los números complejos es un espacio vectorial que es, a la vez, un álgebra y una coálgebra, tal que se cumplen las condiciones de compatibilidad:

$$\begin{aligned} \Delta \circ m &= (m \otimes m)(id \otimes \tau \otimes id)(\Delta \otimes \Delta), & \epsilon \circ m &= m \circ (\epsilon \otimes id) \quad (3.26) \\ \Delta \circ i &= i \otimes i, & \epsilon \circ i &= id_{\mathbb{C}} \quad (3.27) \end{aligned}$$

Estas condiciones se satisfacen con facilidad si \mathcal{A} es un álgebra de funciones suaves sobre un grupo.

Un **álgebra de Hopf** $\mathcal{A}(m, i, \Delta, \epsilon)$ es una biálgebra con una función antipodal, i.e. una función lineal:

$$\mathcal{A} \xrightarrow{S} \mathcal{A}$$

de \mathcal{A} en sí misma, que satisface las siguientes relaciones:

$$(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta \quad (3.28)$$

$$(I \otimes \epsilon) \circ \Delta = (\epsilon \otimes I) \circ \Delta = I \quad (3.29)$$

$$m \circ (I \otimes S) \circ \Delta = m \circ (S \otimes I) \circ \Delta = i \circ \epsilon \quad (3.30)$$

Podemos pensar entonces que un álgebra de Hopf es una generalización no conmutativa del álgebra de funciones regulares en un grupo. El axioma 3.28 expresa la asociatividad de la multiplicación, el axioma 3.29 asegura la existencia de unidad en el grupo y el axioma 3.30 la existencia de inversos, todas escritas de manera "dual".

Las álgebras de Hopf asociadas con el álgebra de matrices $T = (t_{ij})$ tales que

$$\Delta(t_{ij}) = t_{ik} \otimes t_{kj} \quad (3.31)$$

$$\epsilon(t_{ij}) = \delta_{ij} \quad (3.32)$$

las entradas t_{ij} son no conmutativas y satisfacen la ecuación de Yang-Baxter cuántica $RT_1T_2 = T_2T_1R$ se conocen con el nombre de **grupos cuánticos**

R recibe el nombre de matriz fundamental ($\det R \neq 0$).

Como ejemplo, veamos la versión cuántica del grupo $G = SL(2, \mathbb{C})$. ([Ma] y [Mo])

Adoptaremos una notación matricial por conveniencia. Así pues, consideremos los R_{kl}^{ij} como matrices de $n^2 \times n^2$ agrupando los índices en i, j y k, l . Definimos las matrices de $n^2 \times n^2$, T_1 y T_2 como:

$$T_1 = T \otimes I, \quad T_2 = I \otimes T \quad (3.33)$$

i.e.:

$$T_{1rs}^{pq} = t_r^p \delta_s^q, \quad T_{2rs}^{pq} = \delta_r^p t_s^q$$

Tenemos $(T_1T_2)_{rs}^{pq} = t_r^p \otimes t_s^q$ y como $r = s = 2$ la ecuación de Yang-Baxter se puede escribir como una ecuación para matrices de $n^2 \times n^2$:

$$RT_1T_2 = T_2T_1R \quad (3.34)$$

Si introducimos las matrices e_{ij} de $n \times n$ que tienen un 1 en el i -ésimo renglón y la j -ésima columna y ceros en el resto de las entradas. La ec. (??) se puede escribir como una ecuación matricial, de $n^2 \times n^2$:

$$R = \sum_{i,j} e_{ii} \otimes e_{jj} \quad (3.35)$$

para cada número complejo $q \neq 0$ definimos la matriz:

$$R_q = q \sum_i e_{ii} \otimes e_{ii} + \sum_{i \neq j} e_{ii} \otimes e_{jj} + (q - q^{-1}) \sum_{i > j} e_{ij} \otimes e_{ji} \quad (3.36)$$

El determinante:

$$\det_q(a_j^i) = \sum_{\sigma} (-q)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)}^1 \dots a_{\sigma(n)}^n \quad (3.37)$$

está en el centro de \mathcal{A} gracias a las relaciones (3.34), la suma se hace sobre todas las permutaciones σ y $|\sigma|$ es la longitud de la permutación.

Pero como estamos considerando $GL_q(2, \mathbb{C})$ y podemos escribir:

$$(t_j^i) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Si reordenamos los índices $(11, 12, 21, 22) = (1, 2, 3, 4)$ podemos escribir la matriz R_q como matriz de 4×4 :

$$R_q = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix},$$

Las relaciones de conmutación se siguen de la ec. (3.34):

$$ab = qba, \quad ac = qca, \quad bc = cb \quad (3.38)$$

$$bd = qdb, \quad cd = qdc, \quad ad - da = (q - q^{-1})bc \quad (3.39)$$

De (3.37) podemos observar que el determinante estará dado por:

$$\det_q T = \det_q(t_j^i) = ad - qbc$$

y por los axiomas de la antípoda esta estará dada por:

$$S(T) = S(t_j^i) = \begin{pmatrix} d & -q^{-1}b \\ -qc & a \end{pmatrix}$$



Hasta aquí, nuestras geometrías no están dotadas de un concepto de distancia y sabemos como derivar pero no integrar.

A continuación presentaremos la geometría no conmutativa à la Connes, donde se dualiza el concepto de *distancia* y se dota de una estructura extra, que nos permite *integrar*.

3.7 Cálculo espectral

En esta sección presentaremos la generalización no conmutativa del cálculo integral en una variedad. [La]

Recordemos que en el cálculo diferencial ordinario se busca construir la integral, de tal manera, que los infinitesimales de orden mayor que 1 puedan ser “dejados de lado” a la hora de aproximar a la integral mediante las sumas (de Riemann, por ejemplo).⁹ Sin embargo, en esta construcción se utiliza fuertemente el concepto de punto, por lo que en la geometría no conmutativa

⁹La variable $f(x)$ (típicamente el incremento Δx) es un **infinitesimal** si tiende a cero, i.e. si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$, los valores subsecuentes de $f(x)$ cumplen que $|f_n(x)| < \epsilon$ todos los valores posteriores también serán menores, i.e. $|f_{n+p}(x)| < \epsilon$. Esto nos dice que podemos encontrar una n tal que f_n sea menor que cualquier número positivo. Si para $0 < c < \infty$:

$$f(x) \leq \frac{c}{x^\alpha} \quad (3.40)$$

Decimos que $\alpha > 0$ es el **orden** del infinitesimal. Las variables que tienden a 0 de igual manera en como lo hace $f(x)$ tienen el mismo *orden* que $f(x)$.

Veamos como “desechamos” en la teoría de integración los infinitesimales de órdenes superiores.

Sea $g(x) \in C^\infty[a, b]$. Aproximaremos la integral como el límite de las sumas de las áreas de pequeños rectángulos con base Δx (una subdivisión regular del intervalo $[a, b]$ en n partes iguales) y altura $g(\xi_i)$ (con ξ_i un elemento en el subintervalo $[a + (i - 1)\Delta x, a + i\Delta x]$,

$$\text{con } i = 1 \dots n) : \int_a^b g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x .$$

Es claro que Δx así definido es un infinitesimal. Pero ¿qué tan acertada es nuestra aproximación? Supongamos que aproximamos el área debajo de la curva para cada subintervalo, denotada ΔU es igual (exactamente) a $\Delta U = g(\xi_i) \Delta x + \alpha \Delta x$. Supongamos entonces

que la corrección no es mayor que una constante K por $(\Delta x)^2$ entonces: $|\alpha \Delta x| \leq K (\Delta x)^2$, con K la misma constante para todos los subintervalos (y de hecho todos los métodos de división).

Entonces: $\int_a^b g(x) dx = \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x + \sum_{i=1}^n \alpha \Delta x$ y nuestra primera aproximación es-

no podemos imitar tal procedimiento. Es necesario entonces recurrir a otros conceptos. Veamos cuáles.

Consideremos el espacio de Hilbert \mathcal{H} de dimensión infinita y sea T un operador en \mathcal{H} . Decimos que T es **compacto** en \mathcal{H} si puede ser aproximado en norma por operadores de rango finito. Una condición equivalente para caracterizar a los operadores compactos es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{si } \forall \varepsilon > 0, \exists \text{ un subespacio de dimensión finita} \\ \mathcal{H}' \subset \mathcal{H} : \|T|_{\mathcal{H}'^\perp}\| < \varepsilon \end{aligned} \quad (3.41)$$

Esta condición nos dice que los operadores compactos son "pequeños" en cierto sentido, pues el número real ε se puede hacer tan pequeño como se quiera y la norma del operador T será siempre aun más pequeña que ε en el complemento ortogonal de \mathcal{H}' ; de esta manera, los operadores compactos juegan un papel de *infinitesimales*.

3.7.1 Infinitesimales

Para poder realizar la exposición de la teoría de infinitesimales según Connes, necesitamos enunciar algunos hechos de los operadores compactos (nos referiremos a M. Reed, B. Simons *Fourier Analysis, Self-Adjointness* (Academic Press 1975) y B. Simon *Trace ideals and their applications* (Cambridge University Press, 1979) para los detalles y las pruebas).

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert, el álgebra de operadores compactos sobre él, será denotada por $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. El álgebra de operadores acotados será $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.¹⁰

tará acotada por: $\left| \int_a^b g(x) dx - \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x \right| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha \Delta x \right| \leq \sum_{i=1}^n K (\Delta x)^2 = K (b-a) \Delta x$.

Así nuestro error en la aproximación es del orden de Δx , que al ser un infinitesimal tiende a 0.

Podemos decir, que en la aproximación $\Delta U \approx g(\xi) \Delta x$ debemos incluir todos los términos del orden de Δx y dejar de lado los de órdenes superiores (como $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$ o términos cruzados como $\Delta x \Delta y$, si es el caso). Es decir, no tomamos en cuenta a los infinitesimales de orden mayor que 1.

¹⁰Sean X y Y espacios normados. $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un operador lineal es acotado si existe un número real c tal que $\forall x \in D(T)$:

$$\|TX\| \leq c \|x\|.$$

Si \mathcal{A} es cualquier álgebra, el conjunto resolvente $r(a)$ de un elemento $a \in \mathcal{A}$ es el subconjunto de números complejos dado por:

$$r(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid a - \lambda \mathbb{I} \text{ es invertible}\}.$$

Para cualquier $\lambda \in r(a)$, el inverso $(a - \lambda \mathbb{I})^{-1}$ recibe el nombre de **resolvente de a en λ** . El complemento de $r(a)$ es el **espectro $\sigma(a)$** de a .

4.2.1 Proposición: *Sea T un operador compacto en \mathcal{H} . Entonces su espectro $\sigma(T)$ es un conjunto discreto que no tiene puntos límites excepto quizás $\lambda = 0$. Más aun, cualquier $\lambda \in \sigma(T)$ diferente de 0 es un valor propio de multiplicidad finita.*

En general, sin embargo, un operador compacto no necesariamente admite valores propios.

4.2.2 Proposición: *Sea T un operador compacto autoadjunto en \mathcal{H} . Entonces existe una base ortonormal completa $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, para \mathcal{H} tal que $T(\phi_n) = \lambda_n \phi_n$ y $\lambda_n \rightarrow 0$ conforme $n \rightarrow \infty$.*

4.2.3 Proposición: *Sea T un operador compacto en \mathcal{H} . Entonces tiene una expansión uniformemente convergente (en norma).*

$$T = \sum_{n \geq 0} \lambda_n(T) U |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$$

donde U representa una transformación unitaria del eigenvector $|\phi_n\rangle$.

Puesto que esta expansión es convergente se puede interpretar como una manera de aproximar al operador compacto T mediante operadores de rango finito (i.e. matrices finitas) a pesar de que \mathcal{H} es de dimensión infinita.

Ahora definimos en \mathcal{H} los infinitesimales como sigue:

4.2.4 Definición: Los **infinitesimales de orden α** son todos aquellos operadores $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tales que para $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\lambda_n(T) = O(n^{-\alpha}), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \quad (3.42)$$

i.e. $\exists 0 < C < \infty$ tal que $\lambda_n(T) \leq Cn^{-\alpha}, \quad \forall n \geq 1$

Hemos visto entonces que el caracter de infinitesimales de los operadores se basa en el comportamiento de los valores propios de los operadores compactos en \mathcal{H} . El tamaño del infinitesimal $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ está determinado por la forma en que la sucesión $\{\lambda_n(T)\}_{n \rightarrow \infty}$ decae.

Sin entrar en muchos detalles debido a una propiedad sub-multiplicativa de los operadores compactos el orden de los infinitesimales se comporta *bien*, es decir,

$$T_j \text{ es de orden } \alpha_j \Rightarrow T_1 T_2 \text{ es de orden } \alpha_1 + \alpha_2.$$

Aunque a primera vista este concepto parece no tener relación alguna con el cálculo estándar, en analogía con el cálculo diferencial ordinario, construiremos ahora una operación que nos permita eliminar todos los infinitesimales de orden $\alpha > 1$ y así obtener el concepto de integral.

3.7.2 La traza de Dixmier

Un primer intento para definir la integral se podría hacer mediante la *traza* de un operador compacto $trT = \sum \lambda_n(T)$, sin embargo esta traza contiene en su dominio infinitesimales de orden $\alpha > 1$ (la traza de operadores infinitesimales de orden mayor que 1 no se anula) y además no todos los infinitesimales de orden menor a 1 están contenidos en su dominio pues para infinitesimales de orden 1, la suma diverge de manera logarítmica (véase [La] página 75 para mayor detalle) :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n(T) \leq C \ln N.$$

Así, observando los problemas que la traza regular presenta, podemos construir una nueva traza, de tal manera que los infinitesimales de orden 1 están en su dominio, pero los infinitesimales de orden mayor a 1 tienen traza nula, y eliminando las divergencias :

La solución a este problema es la **traza de Dixmier**

$$\text{tr}_D(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln N} \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n(T) \quad (3.43)$$

que tiene las siguientes propiedades:

1. $\text{tr}_D(T) \geq 0$ si $T \geq 0$.
2. $\text{tr}_D(T) = 0$ si T es de orden $\alpha > 1$.
3. $\text{tr}_D(\mu_1 T_1 + \mu_2 T_2) = \mu_1 \text{tr}_D(T_1) + \mu_2 \text{tr}_D(T_2)$, $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.
4. $\text{tr}_D(BT) = \text{tr}_D(TB)$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

La propiedad 2. nos muestra que realmente la traza de Dixmier cumple con la condición impuesta para poder “integrar”.¹¹

A continuación ilustraremos los ingredientes introducidos por Connes para la construcción de un cálculo diferencial para álgebras no conmutativas. Estos ingredientes fueron resultado de la *dualización* del concepto de distancia a geometría no conmutativa. Discutamos pues a continuación, como A. Connes dualiza el concepto de *distancia*.

3.7.3 Aspecto métrico

Sabemos que en el caso de una variedad Riemannian M , la distancia geodésica está dada por [Ro]:

$$d_\gamma(x, y) = \inf_{\gamma} \{ \text{longitud de las curvas } \gamma \text{ que van de } x \text{ a } y \} \quad (3.45)$$

¹¹La relación directa de la traza de Dixmier con la integral fue demostrada por A. Connes [Co], quien probó la igualdad:

$$\text{tr}_D(T) = \text{Res}_M(T) := \int_{S^*M} \text{tr} \sigma_{-n}(T) d\mu \quad (3.44)$$

con el residuo de Wodzicki $\text{Res}_M(T)$. Aquí M es una variedad Riemanniana compacta de dimensión n , S^*M es la co-esfera $S^*M = \{(x, f) \in T^*M : \|f\| = 1\} \subset T^*M$, $d\mu$ es la medida asociada con la métrica correspondiente y $\sigma_{-n}(T)$ es el símbolo principal de T , es decir, si T es de rango n i.e. $T := \sum_{|m| \leq n} A_m(x) \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m}$, entonces $\sigma_n(T) = \sum_{|m|=n} A_m(x) f_m$ donde $f = \sum f_m dx^m$ es un elemento del espacio cotangente T^* . Por lo tanto $\sigma_n(T)$ es una función matricial en T^*M .

dicha longitud determinada por la métrica.

De acuerdo con el Teorema de Gel'fand-Naimark, si denotamos por \mathcal{A} al álgebra $C^\infty(M)$ de funciones suaves sobre ella, \mathcal{A} tiene una representación en \mathcal{H} un espacio de Hilbert, la ecuación anterior puede ser *dualizada* de la siguiente manera. Sea:

$$d(x, y) = \sup \left\{ f(x) - f(y) : f \in \mathcal{A}, \left\| \frac{df}{ds} \right\| \leq 1 \right\} \quad (3.46)$$

donde ds es el elemento de línea dado por la estructura Riemanniana.

Para medir distancias en un “espacio no conmutativo” X generalizamos (3.46) especificando una estructura métrica en X , definimos una “unidad de longitud” mediante un operador en \mathcal{H} . Así, al final es posible dar un equivalente al concepto de distancia en términos de un operador autoadjunto D (véase [Ro] para ver como se obtiene) como:

$$d(\phi, \chi) = \sup \{ \phi(a) - \chi(a) : a \in \mathcal{A}, \|[D, a]\| \leq 1 \} \quad (3.47)$$

así, la estructura geométrica está contenida en el operador D por lo que es natural y resulta más fácil hacer la descripción de dicha geometría, pensar que los ingredientes básicos para tener una geometría no conmutativa son $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$.

De aquí, Connes parte hacia la construcción del triple espectral.

3.7.4 Triple espectral

El cálculo espectral de Connes se construye a partir del llamado **triple espectral** $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ donde \mathcal{A} es un álgebra involutiva de operadores acotados en \mathcal{H} y D es un operador autoadjunto ($D = D^*$) que cumple las siguientes condiciones:

1. El resolvente de $D : (D - \lambda)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ es un operador compacto en \mathcal{H} .
2. $[D, a] = Da - aD \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\forall a \in \mathcal{A}$.

Cabe hacer notar que el álgebra \mathcal{A} puede ser conmutativa o no conmutativa.

Debido a las suposiciones de la definición del triple espectral, el operador autoadjunto D tiene un espectro real, es decir el conjunto de sus valores

propios $\{\lambda_n\}$ es discreto y cada valor propio tiene multiplicidad finita. Más aun $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ conforme $n \rightarrow \infty$ pues $(D - \lambda)^{-1}$ es compacto por lo que sus valores característicos convergen a 0 (y $|\lambda_n| = \lambda_n(|D|) \rightarrow \infty$).

El triple canónico en una variedad

El ejemplo básico de un triple espectral es el caso particular en el que \mathcal{A} es el álgebra de funciones suaves complejas sobre una variedad Riemanniana espinorial (M, g) , \mathcal{H} es el espacio de Hilbert asociado ($\mathcal{H} = L^2(M, S)$) y D es el operador de Dirac asociado con la conexión de Levi-Civita ($\omega = \omega_\mu dx^\mu$) compatible con la métrica g .

Este caso particular recibe el nombre de **triple espectral (canónico) Riemanniano**.

Cabe mencionar, que de alguna manera, el operador de Dirac definido sobre \mathcal{H} contiene casi toda la información geométrica relacionada con la variedad Riemanniana M . Esto explica la importancia de este operador en la construcción geométrica de modelos para teorías de campo.

Además el operador de Dirac D posee un espectro discreto y real $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, y puesto que el resolvente $(D - \lambda)^{-1}$ es compacto en \mathcal{H} , entonces:

$$\lambda_n ((D - \lambda)^{-1}) \rightarrow 0 \text{ y } \lambda_n (|D|) \rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Así vemos que será necesario tomar el operador $|D|^{-n}$ en la definición de integral, en lugar de tomar $|D|$. Por otra parte, el comportamiento de los eigenvalores del operador D nos permite definir el concepto de dimensión:

4.2.5 Definición: Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triple espectral Riemanniano. Se dice que la **dimensión del triple** es $n > 0$ si $|D|^{-1}$ es infinitesimal de orden $\frac{1}{n}$, es decir, $|D|^{-n}$ es infinitesimal de orden 1.

En un triple espectral Riemanniano de dimensión n definimos ahora la **medida de Riemann (o integral)** de la siguiente manera:

$$\int_M a = c(n) \text{tr}_D (a |D|^{-n}), \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (3.48)$$

donde $c(n)$ es una constante determinada por el comportamiento asintótico de los eigenvalores del operador $|D|$:

$$\lambda_m (|D|^{-n}) \leq \frac{1}{c(n)m}, \quad m \rightarrow \infty$$

esta operación de integral satisface las relaciones:

$$\begin{aligned} \int ab &= \int ba, & \forall a, b \in \mathcal{A} \\ \int aa^* &\geq 0, & \forall a \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

La definición de integral (3.48) es adecuada en el siguiente sentido. Puesto que a es una función (compleja) suave en M , también actúa como un operador multiplicativo en \mathcal{H} , es decir: $(ah)(x) = a(x)h(x)$, $\forall a \in \mathcal{A}$, $h \in \mathcal{H}$. Además a es un operador acotado en \mathcal{H} (vease la condición 2 del triple espectral). Entonces, el objetivo del operador $|D|^{-n}$ en la definición (3.48) es hacer que el operador acotado a pase a ser un operador compacto e infinitesimal de orden 1. De esta manera tiene sentido aplicar la operación de la traza de Dixmier sobre el operador $a|D|^{-n}$, y el operador $|D|^{-n}$ es el análogo del *elemento de volumen* de la variedad M .

Es posible definir una medida (integral) e inclusive una función de distancia en un triple espectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D')$ en general, de manera análoga a como se ha hecho para el triplete canónico, solo requerimos que el operador D' contenga toda la información acerca de los infinitesimales de \mathcal{H} para que al igual que el operador de Dirac, nos permita poder aplicar la traza de Dixmier a cualquier $a \in \mathcal{A}$. Sin embargo, fue demostrado por Connes que el operador unitario más general definido sobre todo \mathcal{H} que cumple esta condición es el operador de Dirac.

Es importante mencionar que es posible regresar (modulo una constante) de (3.48) a la integral correspondiente en el cálculo ordinario utilizando la relación entre la traza de Dixmier y el residuo de Wodzicki¹². Es decir, en el límite del cálculo ordinario la definición (3.48) nos lleva a la integral de Riemann usual.

Ahora demos una estructura diferencial.

3.7.5 Cálculo diferencial en un Triple Espectral

Sea \mathcal{A} un álgebra asociativa con unidad (por simplicidad). Ya sabemos como construir el álgebra de formas universales $\Omega(\mathcal{A})$ de manera tensorial, veamos como se hace de mediante símbolos y relaciones [La].

¹²que es la única traza que en el álgebra de operadores pseudodiferenciales coincide con la traza de Dixmier.

Para construir un álgebra diferencial graduada comenzamos por definir el álgebra de grado 0 como:

$$\Omega^0 \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

El álgebra de 1-formas se define mediante el operador δ que actúa sobre cualquier elemento de \mathcal{A} y satisface las relaciones:

$$\begin{aligned} \delta(ab) &= (\delta a)b + a(\delta b) \\ \delta(\alpha a + \beta b) &= \alpha \delta a + \beta \delta b, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Esta última condición es tan sólo la regla de Leibniz para $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^1(\mathcal{A})$.

De la primera condición deducimos que $\delta(1) = 0$, que implica a su vez $\delta(\mathbb{C}) = 0$.

Así, un elemento cualquiera de $\Omega^1 \mathcal{A}$ es una suma finita de la forma

$$\omega = \sum_i a_i \delta b_i, \quad a_i, b_i \in \mathcal{A} \quad (3.49)$$

Este proceso se puede continuar obteniendo así el espacio Ω^p como:

$$\Omega^p = \underbrace{\Omega^1 \dots \Omega^1}_{p \text{ veces}}$$

con el **producto** de dos 1-formas definido:

$$(a_0 \delta a_1)(b_0 \delta b_1) : = a_0 (\delta a_1) b_0 \delta b_1 \quad (3.50)$$

$$= a_0 \delta(a_1 b_0) \delta b_1 - a_0 a_1 \delta b_0 \delta b_1. \quad (3.51)$$

Así, los elementos de $\Omega^p \mathcal{A}$ son combinaciones lineales de monomios de la forma:

$$\omega = a_0 \delta a_1 \delta a_2 \dots \delta a_p, \quad a_k \in \mathcal{A} \quad (3.52)$$

En el caso de un triple espectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, construimos un cálculo diferencial en el a partir del álgebra universal $\Omega \mathcal{A}$.

Sea $\omega \in \Omega(\mathcal{A})$ de la forma $\omega = a_0 \delta a_1 \delta a_2 \dots \delta a_n$ a la cual le asociaremos el operador:

$$\pi(\omega) = a_0[D, a_1][D, a_2] \dots [D, a_n], \quad a_k \in \mathcal{A} \quad (3.53)$$

esta aplicación es una *representación* de $\Omega(\mathcal{A})$ a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Esto se deriva del hecho de que la derivación del álgebra d está representada por $[D, \cdot]$.

Así, podríamos pensar en definir las formas como la imagen $\pi(\Omega\mathcal{A})$.

Sin embargo, d es tal que $d^2 = 0$ mientras que $[D, \cdot]$ no tiene esta propiedad, por lo tanto la representación π no es entre álgebras diferenciales. Esto significa que la representación tiene el problema de que si $\omega \in \Omega^p\mathcal{A}$ es tal que $\pi(\omega) = 0$ no necesariamente implica $\pi(d\omega) = 0$. Por esta razón, es necesario¹³ “quitarle” al álgebra $\Omega\mathcal{A}$ aquellas formas que tienen este “mal comportamiento” i.e. $\pi(\omega) = 0$ mientras $\pi(\delta\omega) \neq 0$. A estas formas se les llama **formas basura**.

Podemos pensar que π es una *proyección* del cálculo de formas universales al cálculo de Connes.

Cálculo de formas diferenciales de Connes

Podemos deshacernos de estas formas basura y construir un álgebra diferencial verdadera y hacer π un homomorfismo de álgebras diferenciales. [Cq]

Sea K el núcleo de π , lo podemos escribir como $K = \bigoplus_p J_0^p$ con $J_0^p = \{\omega \in \Omega^p\mathcal{A} : \pi(\omega) = 0\}$. Es un ideal de $\Omega(\mathcal{A})$, pues π es una representación de álgebras, pero no es, en general, un ideal diferencial: $\delta K \not\subset K$. Por esta razón definimos:

$$J = K + \delta K, \quad (3.54)$$

que es por construcción un ideal diferencial graduado de $\Omega\mathcal{A}$.

El **álgebra de formas diferenciales de Connes** se define entonces como:

$$\Omega_C\mathcal{A} = \Omega\mathcal{A}/J \simeq \pi(\Omega\mathcal{A})/\pi(\delta J_0). \quad (3.55)$$

la cual resulta ser graduada y el espacio de p -formas está dado por:

$$\Omega_C^p\mathcal{A} = \Omega^p\mathcal{A}/J^p.$$

¹³Es de gran importancia eliminar tales formas pues, por ejemplo podríamos tener una conexión 0 que ¡tenga curvatura diferente de 0!

Como J es un ideal diferencial, la diferencial exterior d define una diferencial en $\Omega_C \mathcal{A}$:

$$d : \Omega_C^p \mathcal{A} \rightarrow \Omega_C^{p+1} \mathcal{A} \quad (3.56)$$

$$d[\omega] : = [\delta\omega] \quad (3.57)$$

con $\omega \in \Omega_C^p \mathcal{A}$ y $[\omega]$ la clase correspondiente en $\Omega_C^p \mathcal{A}$.

Así, sin entrar mucho en detalles veamos como es la forma general de $[\text{La}]$:

- **0-formas**

Como \mathcal{A} es una subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, tenemos $J \cap \Omega^0 \mathcal{A} = K \cap \mathcal{A} = \{0\}$. Por lo tanto, $\Omega_C^0 \mathcal{A} \simeq \mathcal{A}$.

- **1-formas**

Tenemos $J \cap \Omega^1 \mathcal{A} = K \cap \Omega^1 \mathcal{A} + K \cap \Omega^0 \mathcal{A} = K \cap \Omega^1 \mathcal{A}$. Por lo tanto $\Omega_C^1 \mathcal{A} \simeq \pi(\Omega^1 \mathcal{A})$ y sus elementos tienen la forma siguiente:

$$\omega_1 = \sum_j a_0^j [D, a_1^j], \quad a_i^j \in \mathcal{A}. \quad (3.58)$$

- **2-formas**

Tenemos $J \cap \Omega^2 \mathcal{A} = K \cap \Omega^2 \mathcal{A} + K \cap \Omega^1 \mathcal{A}$. Por lo tanto $\Omega_C^2 \mathcal{A} \simeq \pi(\Omega^2 \mathcal{A}) / \pi(\delta(K \cap \Omega^1 \mathcal{A}))$ y así los elementos de $\Omega_C^2 \mathcal{A}$ son clases de elemento de la forma siguiente:

$$\omega_2 = \sum_j a_0^j [D, a_1^j] [D, a_2^j], \quad a_i^j \in \mathcal{A}. \quad (3.59)$$

módulo el bimódulo de operadores:

$$\left\{ \sum_j [D, b_0^j] [D, b_1^j] : b_i^j \in \mathcal{A}, \quad \sum_j b_0^j [D, b_1^j] = 0 \right\}.$$

- **p-formas**

Los elementos de $\Omega_C^p \mathcal{A}$ son clases de elemento de la forma siguiente:

$$\omega_p = \sum_j a_0^j [D, a_1^j] [D, a_2^j] \dots [D, a_p^j], \quad a_i^j \in \mathcal{A}. \quad (3.60)$$

módulo el bimódulo de operadores:

$$\left\{ \sum_j [D, b_0^j] \dots [D, b_{p-1}^j] : b_i^j \in \mathcal{A}, \sum_j b_0^j [D, b_1^j] \dots [D, b_{p-1}^j] = 0 \right\}.$$

Hemos visto ya las herramientas de la geometría no conmutativa de Connes que necesitaremos en el próximo capítulo para formular teorías de norma à la Connes.

Existen, como veremos, varios enfoques, por lo que veremos a continuación el formalismo de haces fibrados principales cuánticos que nos permitirá enunciar una teoría de norma de manera muy semejante a como se hace en el caso clásico.

3.8 Haces fibrados principales cuánticos.

Ya hemos definido, para el caso de la geometría diferencial el concepto de haz fibrado, y en particular el de haz fibrado principal.

La clave para encontrar la versión “cuántica” o no conmutativa de estos, está en tomar el enfoque de los haces como álgebras de funciones de ciertas variedades. Es decir, trataremos de generalizar el caso de la geometría diferencial ordinaria donde teníamos que un haz fibrado era la quinteta (E, B, F, G, π) , en la cual existe una proyección π de E a B , una fibra F y un grupo G que actúa sobre P .

Como hemos visto la geometría no conmutativa está basada en la simple idea de que, en lugar de trabajar con un espacio o variedad M o con el álgebra de funciones $C(M)$ en M , trabajamos equivalentemente con un álgebra no conmutativa \mathcal{B} , que pensamos como el álgebra de funciones de un espacio (no existente) que llamamos **espacio cuántico**.

Así, un haz fibrado no conmutativo es cualquier quinteta $(\mathcal{E}, \mathcal{B}, \mathcal{F}, G, \pi)$ con $\mathcal{F}, \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ álgebras donde cualquiera de ellas puede ser considerada no

conmutativa y un grupo G que actúa sobre \mathcal{E} . Es decir, existen varias maneras de hacer un haz fibrado cuántico, por ejemplo, la base \mathcal{B} puede permanecer una variedad clásica, mientras que la fibra \mathcal{F} o el grupo son cuánticos.

Hemos visto que los haces fibrados principales tienen especial importancia para las Teorías de Norma, por lo que nos dedicaremos a definir estos con más precisión.

En lo que resta de esta sección, trabajaremos con grupos cuánticos matriciales¹⁴ compactos.

La notación que utilizaremos es la siguiente:

G es un grupo cuántico de matrices, \mathcal{A} denota la $*$ -álgebra de “funciones polinomiales” sobre G . La estructura de grupo en G queda determinada por el coproducto $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, la counidad $\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ y el antípodo $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Así, el resultado de aplicar $n - 1$ veces el coproducto a un elemento $a \in \mathcal{A}$ se escribirá simbólicamente como $a^{(1)} \otimes \dots \otimes a^{(n)}$. La acción adjunta de G en sí mismo, $\text{ad} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ está dada por:

$$\text{ad}(a) = a^{(2)} \otimes S(a^{(1)})a^{(3)} \quad (3.61)$$

Si M es una variedad suave denotaremos $C(M)$ la $*$ -álgebra de funciones suaves compleja, y $C_c(M)$ la $*$ -álgebra de funciones suaves con soporte compacto.

Daremos dos definiciones de haz fibrado principal cuántico, en el entendido de que la segunda es más general que la primera, pero tan solo para ilustrar que uno de los elementos del hfpc puede permanecer “clásico” mientras que otros elementos son los que aportan la no conmutatividad.

Esta primera definición es “semiclásica” pues los grupos de estructura serán considerados objetos cuánticos, mientras que los espacios bases son variedades suaves clásicas.

3.7.1 Definición: Un haz fibrado principal cuántico (hfpc) con una variedad suave M como base, es una tripleta $P = (\mathcal{B}, i, F)$ donde \mathcal{B} es una $*$ -álgebra (con unidad), $i : C(M) \rightarrow \mathcal{B}$ una función lineal unitaria y $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ una transformación lineal tal que para cada $x \in M$ existe un conjunto abierto $U \subseteq M$ que contiene a x y un homomorfismo

¹⁴Supondremos que los grupos con los que estamos trabajando aceptan una representación matricial, ya que este sucede en la mayoría de los casos y simplifica los cálculos.

$\pi_U : \mathcal{B} \rightarrow C(U) \otimes \mathcal{A}$ tal que las siguientes propiedades se satisfacen [Du1]:

$$\pi_U i(f) = (f|_U) \otimes 1, \quad \text{para cada } f \in C(M) \quad (3.62)$$

$$\text{Si } q = i(\varphi)b \text{ con } \varphi \in C_c(U)$$

$$\text{entonces } \pi_U(q) = 0 \Rightarrow q = 0 \quad (3.63)$$

$$(\text{id} \otimes \Delta) \pi_U = (\pi_U \otimes \text{id}) F, \quad \pi_U(\mathcal{B}) \supseteq C_c(U) \otimes \mathcal{A} \quad (3.64)$$

Esta definición surge de la geometría diferencial clásica. La función $i : C(M) \rightarrow \mathcal{B}$ se puede interpretar como la proyección “dual” del haz fibrado P a su base M y la función F como una acción derecha “dual” de G en P , algunas veces recibe el nombre de coacción (porque como hemos visto, va en el sentido “contrario”). Los π_U pueden ser considerados como las trivializaciones locales “duales” del haz.

Una **trivialización local** de P es una pareja (U, π_U) donde $U \subseteq M$ es un conjunto abierto no vacío y $\pi_U : \mathcal{B} \rightarrow C(U) \otimes \mathcal{A}$ es un $*$ -homomorfismo que cumple las condiciones de la definición anterior.

Ahora daremos una definición de hfpc más general¹⁵, la variedad de la base, los grupos de estructura y por ende los haces fibrados principales correspondientes serán considerados como *cuánticos*.

Esta definición traduce al lenguaje de la geometría no conmutativa la idea clásica de que un haz fibrado principal es un espacio en el cual actúa el grupo de estructura de manera libre por la derecha, tal que la variedad base es difeomorfa al espacio de las órbitas.

Considérese un espacio cuántico M , formalmente representado por una $*$ -álgebra con unidad \mathcal{V} , los elementos de \mathcal{V} , geoméricamente tienen el papel de “funciones” adecuadas en este espacio.

3.7.2 Definición: (Según [Du2]) Un **haz fibrado principal cuántico** (hfpc) sobre M es una tripleta $P = (\mathcal{B}, i, F)$ donde \mathcal{B} es una $*$ -álgebra (con unidad), $i : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{B}$ y $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ son $*$ -homomorfismos tales que:

¹⁵en realidad, hay tantas maneras de construir un hfpc que no existe hasta la fecha una definición única para ellos.

$i : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{B}$ es inyectivo y

$$b \in i(\mathcal{V}) \Leftrightarrow F(b) = b \otimes 1 \quad (3.65)$$

$$(\text{id} \otimes \Delta) F = (F \otimes \text{id}) F, \quad (3.66)$$

$$\text{id} = (\text{id} \otimes \epsilon) F \quad (3.67)$$

Existe una transformación lineal $X : \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$

$$\text{definida por } X(q \otimes b) = qF(b) \quad (3.68)$$

Esta definición además de generalizar la anterior a donde todos los objetos pueden ser considerados como cuánticos, tiene cierta semejanza con la de la geometría diferencial clásica. Los elementos de \mathcal{B} son interpretables como funciones sobre el espacio cuántico P . La función F juega el papel de una acción derecha “dual” de G en P . La función $i : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{B}$ se puede interpretar como la proyección “dual” del haz fibrado P a su base M , la primera condición nos está diciendo, entonces, que M puede ser identificado con el “espacio de órbitas” de la acción F .

Así mismo, los elementos en \mathcal{V} pueden ser identificados por sus imágenes en $i(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{B}$.

La condición (3.68) es la versión cuántica del requerimiento clásico de que la acción de G en P sea libre (por eso la necesidad de que sea supra).

Ahora, veamos cosas relacionadas al cálculo diferencial en un hfpc para después dar unos ejemplos.

3.8.1 Estructura diferencial

Como antes, dejemos que G denote un grupo cuántico matricial, \mathcal{A} una $*$ -álgebra de funciones polinomiales en G y Δ, ϵ y S el coproducto, la counidad y el antípodo respectivamente. Sea Γ un cálculo diferencial de primer orden sobre G , (es decir, posee una diferencial $d : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma$ y está generado linealmente por elementos de la forma adb con $a, b \in \mathcal{A}$), Definimos el álgebra tensorial sobre Γ :

$$\Gamma^{\otimes} = \sum_{k \geq 0} \oplus \Gamma^{\otimes k} \quad (3.69)$$

donde $\Gamma^{\otimes k} = \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$ y sea :

$$\Gamma^{\wedge} = \sum_{k \geq 0} \oplus \Gamma^{\wedge k} \quad (3.70)$$

la envolvente diferencial universal de Γ que se obtiene a partir de Γ^\otimes factorizando a través del ideal $S^\wedge \subseteq \Gamma^\otimes$ generado por los elementos de la forma $Q = \sum_i da_i \otimes_A db_i$, donde $a_i, b_i \in \mathcal{A}$ que satisfacen $\sum_i a_i db_i = 0$.

Supongamos que Γ es bicovariante y denotemos la acción izquierda de G en Γ por L_Γ , $L_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathcal{A} \otimes \Gamma$ y la acción derecha de G en Γ por R_Γ , $R_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathcal{A} \otimes \Gamma$. Sea Γ_{inv} el espacio de elementos invariantes por la izquierda de Γ (una especie de "dual" del álgebra de Lie de G) y sea $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma_{inv}$ la proyección canónica dada por $\pi(a) = S(a^{(1)}) da^{(2)}$.

Γ_{inv} posee una estructura natural de \mathcal{A} -módulo derecho, que denotaremos por \circ . Explícitamente:

$$\pi(a) \circ b = \pi[(a - \epsilon(a)1)b] \tag{3.71}$$

para cualquier $a, b \in \mathcal{A}$.

El espacio Γ_{inv} es invariante también por la derecha y la restricción de la acción adjunta (ec. 3.61) a Γ_{inv} denotada por $\varpi : \Gamma_{inv} \rightarrow \Gamma_{inv} \otimes \mathcal{A}$ quedará caracterizada por:

$$\varpi\pi = (\pi \otimes id) \text{ ad} \tag{3.72}$$

y puede ser interpretada como la acción adjunta de G en Γ_{inv} .

Designemos mediante Γ_{inv}^\otimes y Γ_{inv}^\wedge las subálgebras de elementos invariantes por la izquierda de Γ^\otimes y Γ^\wedge respectivamente.

La $*$ -álgebra diferencial graduada $\Omega(P)$ que representa el cálculo diferencial en P será construida (siguiendo [Du2]) a partir de un $*$ -cálculo de primer orden Γ que consideraremos bicovariante. Consideremos el espacio vectorial graduado $\text{ver}(P) = \mathcal{B} \otimes \Gamma_{inv}^\wedge$ donde la graduación es inducida por Γ_{inv}^\wedge .

Los elementos de $\text{ver}(P)$ pueden ser interpretados como formas diferenciales verticales en el haz. En [Du2] (lema 3.2) se prueba que la estructura diferencial en $\text{ver}(P)$ está dada por las siguientes relaciones¹⁶:

¹⁶o dada por la ec. (3.71) puede ser extendida a $\Gamma_{inv}^{\wedge, \otimes}$, dando a éstos una estructura de \mathcal{A} -módulos derechos:

$$1a = \epsilon(a)1 \tag{3.73}$$

$$(\vartheta\eta) \circ a = (\vartheta \circ a^{(1)}) (\eta \circ a^{(2)}) \tag{3.74}$$

para todo $\vartheta, \eta \in \Gamma_{inv}^{\wedge, \otimes}$ y $a \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned}
(q \otimes \eta)(b \otimes \vartheta) &= \sum_k qb_k \otimes (\eta \circ a_k) \vartheta \\
(b \otimes \vartheta)^* &= \sum_k b_k^* \otimes (\vartheta^* \circ a_k^*) \\
d_v(b \otimes \vartheta) &= \sum_k b_k \otimes \pi(a_k) \vartheta + b \otimes d\vartheta
\end{aligned}$$

donde $F(b) = \sum_k b_k \otimes a_k$.

Ahora, definimos un cálculo diferencial completo sobre el haz fibrado P como la $*$ -álgebra diferencial graduada $\Omega(P)$ que cumple las siguientes propiedades:

i. como álgebra diferencial $\Omega(P)$ es generada por $\mathcal{B} = \Omega^0(P)$. En el caso en que la base es una variedad y tenemos trivializaciones, para cada trivialización (U, π_U) de P existe un único homomorfismo de álgebras diferenciales que extiende a π_U ; $\pi_U^\wedge : \Omega(P) \rightarrow \Omega(P) \hat{\otimes} \Gamma^\wedge$.¹⁷

ii. La función $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ se puede extender a un homomorfismo de álgebras diferenciales graduadas (imitando el mapeo *pull-back*):

$$\hat{F} : \Omega(P) \rightarrow \Omega(P) \hat{\otimes} \Gamma^\wedge$$

donde el símbolo $\hat{\otimes}$ es usado para denotar el producto tensorial graduado de álgebras diferenciales graduadas. La función \hat{F} queda determinada de manera única. Más aun, podemos extender F a un $*$ -homomorfismo de $\Omega(P) \rightarrow \Omega(P) \otimes \mathcal{A}$ como $F^\wedge = (id \otimes \Pi) \hat{F}$ donde $\Pi : \Gamma^\wedge \rightarrow \mathcal{A}$ es la proyección. F^\wedge puede ser entendido como una acción derecha de G sobre $\Omega(P)$.

Los elementos de $\Omega(P)$ juegan el papel de formas diferenciales en P .

Sea $\pi_v : \Omega(P) \rightarrow \text{ver}(P)$ la proyección correspondiente (que respete el grado).

Definimos $\text{hor}(P)$ como la $*$ -subálgebra graduada de $\Omega(P)$:

$$\text{hor}(P) = \hat{F}^{-1}(\Omega(P) \otimes \mathcal{A}). \quad (3.75)$$

¹⁷También la función $i : C(M) \rightarrow \mathcal{B}$ de la definición de hfpc con base una variedad suave admite una extensión natural $i^\wedge : \Omega(P) \rightarrow \Omega(P)$, que puede ser interpretado como el *pull-back* de las formas diferenciales de M a P .

Sus elementos son llamados **formas horizontales**. Es decir, en forma local una forma $\omega \in \Omega(P)$ es horizontal si¹⁸ $\pi_U^\wedge(\omega) \in \Omega(U) \otimes \mathcal{A}$ para cada trivialización local (U, π_U) .

El álgebra $\mathfrak{hor}(P)$ es invariante bajo la acción derecha de G , es decir:

$$F^\wedge(\mathfrak{hor}(P)) = \mathfrak{hor}(P) \otimes \mathcal{A}. \tag{3.76}$$

Es claro que $\mathfrak{hor}^0(P) = \mathcal{B}$.

Estamos listos para definir la noción de conexión para hfpc y la de curvatura cuántica, lo haremos siguiendo lo expuesto en expuesto por [Du1] y [Du2].

3.8.2 Conexión en hfpc.

Sean V un espacio vectorial y $v : V \rightarrow V \otimes \mathcal{A}$ una representación de G en V .

Ahora, sea $\psi(v, P)$ el espacio de todas las funciones lineales $\varphi : V \rightarrow \Omega(P)$ que hacen que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & \Omega(P) \\ v \downarrow & & \downarrow F^\wedge \\ V \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow[\varphi \otimes id]{} & \Omega(P) \otimes \mathcal{A} \end{array}$$

El espacio $\psi(v, P)$ tiene una estructura de álgebra graduada $\psi(v, P) = \sum_{k \geq 0} \oplus \psi^k$. Los elementos de ψ^k se pueden interpretar como k -formas (pseudotensoriales) en P con valores en el espacio dual V^* . $\psi(v, P)$ es cerrado con respecto a $d : \Omega(P) \rightarrow \Omega(P)$.

Llamemos $\tau(v, P)$ el subespacio graduado de formas que tienen valores en $\mathfrak{hor}(P)$. Si el espacio V tiene una involución $*$ antilineal, entonces la formula:

$$\varphi^*(\vartheta) = \varphi(\vartheta^*)^* \tag{3.77}$$

nos da $*$ -involuciones naturales en $\psi(v, P)$ y $\tau(v, P)$.

Para los propósitos del resto de este trabajo, (inclusive la construcción de teorías de norma en hfpc) nos interesa el caso en que $V = \Gamma_{inv}$ y $v = \varpi$.

¹⁸ $\pi_U^\wedge : \Omega(P) \rightarrow \Omega(P) \otimes \Gamma^\wedge$ extiende a π_U .

Definición: Una **conexión** en P es una transformación hermitiana $\omega \in \psi^1(P)$ tal que:

$$\pi_*\omega(\vartheta) = 1 \otimes \vartheta \quad (3.78)$$

para cada $\vartheta \in \Gamma_{inv}$.

La condición anterior es la versión cuántica del requerimiento clásico de que las conexiones (entendidas como 1-formas valuadas en el álgebra de Lie de G) mapean campos vectoriales fundamentales en sus generadores.

Todo haz fibrado principal cuántico P admite al menos una conexión.

Si la base del fibrado cuántico es una variedad suave (i.e. tenemos trivializaciones) en términos locales, las conexiones tienen la siguiente representación:

$$\pi_*\hat{\omega}(\vartheta) = (A^U \otimes id) \varpi(\vartheta) + 1_U \otimes \vartheta, \quad (3.79)$$

donde $A^U : \Gamma_{inv} \rightarrow \Omega(P)$ es una transformación lineal hermitiana con valores 1-formas, que juega el papel del **potencial de norma**.

Definimos una función $\delta : \Gamma_{inv} \rightarrow \Gamma_{inv} \otimes \Gamma_{inv}$ tal que si $\delta(\vartheta) = \sum_k \vartheta_k^1 \otimes \vartheta_k^2$ entonces $\delta(\vartheta^*) = -\sum_k (\vartheta_k^2)^* \otimes (\vartheta_k^1)^*$ y $d\vartheta = \sum_k \vartheta_k^1 \vartheta_k^2$. Una transformación que cumple con estas condiciones recibe el nombre de **diferencial encajada**. Sea m_Ω la multiplicación en $\Omega(P)$. Entonces, para cualesquiera dos transformaciones $\varphi, \eta \in \Gamma_{inv}$ con valores $\Omega(P)$ definimos $\langle \varphi, \eta \rangle : \Gamma_{inv} \rightarrow \Omega(P)$ por:

$$\langle \varphi, \eta \rangle = m_\Omega(\varphi \otimes \eta) \delta \quad (3.80)$$

Por construcción $\psi(P)$ es cerrada bajo esta operación.¹⁹

Así, la **curvatura** Ω_ω de una conexión ω puede ser definida como:

$$\Omega_\omega = d\omega - \langle \omega, \omega \rangle \quad (3.82)$$

¹⁹Si $\varphi, \eta \in \Gamma_{inv}$ son dos transformaciones con valores en un álgebra arbitraria \mathcal{O} definimos $\langle \varphi, \psi \rangle : \Gamma_{inv} \rightarrow \mathcal{O}$ dada por:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_k \varphi(\vartheta_k^1) \psi(\vartheta_k^2). \quad (3.81)$$

que corresponde a la ecuación de estructura de la teoría clásica. Es claro que la curvatura dependerá explícitamente de la diferencial encajada δ .

Localmente (de nuevo, suponiendo que tenemos trivializaciones) y en términos de los correspondientes potenciales de norma tenemos:

$$\pi_U^* \Omega_\omega(\vartheta) = (F^U \otimes id) \varpi(\vartheta), \quad (3.83)$$

donde $F^U = dA^U - \langle A^U, A^U \rangle$.

Proyección horizontal y derivada covariante.²⁰

Sin entrar en los detalles técnicos de la construcción, brevemente, mencionaremos que, como en el caso clásico, teniendo una conexión ω en un hfp podemos definir la proyección horizontal y por lo tanto, a la derivada covariante como la parte horizontal de d .

Así, para cada $\omega \in \text{con}(P)$ ²¹, sea $h_\omega : \Omega(P) \rightarrow \text{hor}(P)$ una función lineal que “proyecta” $\Omega(P)$ en $\text{hor}(P)$ de manera suprayectiva. Esta función recibe el nombre de **proyector horizontal** asociado a ω .

Sea $D_\omega : \Omega(P) \rightarrow \Omega(P)$ la transformación lineal definida como la composición:

$$D_\omega = h_\omega d \quad (3.84)$$

D_ω recibe el nombre de **derivada covariante** asociada a ω .

Tanto h_ω como D_ω son mapeos “horizontales”.

Finalmente señalamos que como en el caso clásico, la **curvatura** también puede ser definida por:

$$\Omega = D_\omega \omega \quad (3.85)$$

Ahora sí, ya tenemos todo para poder abordar las teorías de norma en geometría no conmutativa.

²⁰ Para un tratamiento formal así como todos los detalles técnicos, véase [Du2].

²¹ el espacio de todas las conexiones en P .

Capítulo 4

Teorías de Campo en geometría no conmutativa.

En los capítulos anteriores hemos visto que para construir una teoría de campos desde el punto de vista geométrico se necesitan dos ingredientes principales.

En primer lugar debemos contar con el elemento geométrico que consiste en un hfp, cuyo espacio base es, en general, el espacio de Minkowski. Si además contamos con una conexión, podemos inmediatamente proponer un funcional llamado acción que constituye la parte central de la teoría.

En segundo lugar, es necesario aplicar el principio de mínima acción al funcional obtenido como hemos dicho anteriormente, para así encontrar las ecuaciones de campo que gobiernan todos los fenómenos a describir con dicha teoría. Recordemos que el principio de mínima acción equivale a calcular la derivada variacional con respecto a los campos que integran la teoría.

Mediante el esquema anterior se han logrado obtener las teorías de norma que describen tres de las cuatro interacciones existentes en la naturaleza: electromagnética, débil y fuerte. Esto nos muestra el éxito del método descrito. Sin embargo, la Gravitación presenta problemas al tratar de ser considerada como una teoría de norma, por lo que requiere un tratamiento especial (que no veremos en este trabajo).

Existen varios diferentes enfoques en la construcción de las teorías de norma en hfp uno de los primeros fue dado por [B-M] pero este enfoque no es tan general como los otros dos que presentaremos, ya que los conceptos

básicos del formalismo sólo pueden ser construidos en casos muy especiales, en haces con cálculo universal y algunas otras propiedades extras. Debido a su poco alcance, no expondremos este formalismo aquí.

Trataremos dos enfoques diferentes, el primero una construcción muy elegante, utilizando las herramientas matemáticas presentadas en (3.8.2) y el segundo el creado por A. Connes.

En este segundo enfoque, para describir la parte “cuántica” de la teoría, se introducen operadores que reemplazan a los campos propios de la teoría. Aquí, el desarrollo pierde su elegancia geométrica y matemática, ya que para calcular los observables de fenómenos físicos concretos es necesario deshacerse de las así llamadas “divergencias” que en general predicen valores infinitos para los observables. Las divergencias se eliminan con el método de renormalización, un método que a pesar de su gran éxito a nivel experimental no deja de ser poco elegante y hasta cierto punto artesanal. Sería un gran triunfo para la física teórica si se pudieran establecer teorías de campo que no requieran de la renormalización. Es aquí donde se pretende que la geometría no conmutativa entre a jugar un papel importante.

En base a las ideas presentadas en los capítulos anteriores sobre el principio de mínima acción y la geometría de hfp, en este capítulo trataremos de ver los problemas que aparecen cuando se intenta repetir el mismo esquema en el marco de la geometría no conmutativa descrita en el capítulo anterior.

4.1 Teorías de Norma (Primer enfoque)

El primer enfoque a las teorías de norma generaliza de manera natural la situación clásica, es decir también construye una acción y “postula” las soluciones que son estacionarias con respecto a ésta. Todo esto se hace en el marco de los haces fibrados principales cuánticos según fueron descritos en el capítulo anterior (según M. Durdevich ([Du2] y [Du3]), a quién también se le debe el desarrollo que a continuación se presenta). Los campos de norma, como en el caso clásico quedan representados geoméricamente por conexiones en P el haz fibrado principal cuántico correspondiente.

Tomaremos también el cálculo que fue construido en la sección 3.8.2, sin embargo en el presente trabajo sólo trataremos el desarrollo cuando el haz fibrado cuántico tiene como base una variedad suave M que jugará el papel del espacio-tiempo, y G será un grupo cuántico matricial (el grupo de estructura del haz) representando el grupo de simetrías locales del sistema.

Supondremos además que M es orientada y (pseudo)Riemanniana.

Las propiedades dinámicas de la teoría de norma serán determinadas después de fijar un Lagrangiano apropiado. En analogía con el caso clásico, consideraremos únicamente aquellos que son funciones cuadráticas de la forma de curvatura.

Designemos por \star el operador de Hodge en $\Lambda(M)$. Puede ser extendido de manera única a una función lineal $\star : \mathfrak{hor}(P) \rightarrow \mathfrak{hor}(P)$ tal que:

$$\star [i^\wedge(\alpha) b] = i^\wedge [\star(\alpha)] b. \quad (4.1)$$

con $\alpha \in \Lambda(M)$ y $b \in \mathcal{B}$ e i^\wedge como en la nota al pie de página sección (3.8.1).

Como hemos dicho, "copiando" lo que sucede en el caso clásico, los campos de norma serán representados por las formas de conexión ω en P .

Para estudiar la dinámica del sistema, es necesario definir un lagrangiano. Resulta natural considerar lagrangianos que son funciones cuadráticas de la curvatura Ω_ω . Como hemos visto, la curvatura Ω_ω depende, además de en la conexión ω , de la elección de la diferencial encajada $\delta : \Gamma_{inv} \rightarrow \Gamma_{inv} \otimes \Gamma_{inv}$. Como consecuencia, las propiedades dinámicas de la teoría de norma correspondiente son fuertemente influenciadas por δ . En el caso clásico, esto no sucede, pues la curvatura es δ -invariante.

Consideremos una función $L : \text{con}(P) \rightarrow \mathfrak{hor}(P)$ dada por:

$$L(\omega) = \sum_i \Omega_\omega(e_i) \star [\Omega_\omega(\bar{e}_i)], \quad (4.2)$$

donde los elementos e_i forman un sistema ortonormal en Γ_{inv} y la barra denota la conjugación en Γ_{inv} . L resulta independiente de la elección de dicho sistema ortonormal.

L toma valores en $\Omega^n(M)$ con n la dimensión de M . En términos de trivializaciones locales tenemos:

$$\pi_U^\wedge(L(\omega)) = \sum_i F^U(e_i) \star [F^U(\bar{e}_i)] \otimes 1. \quad (4.3)$$

L será interpretado como nuestro lagrangiano.

En términos de las representaciones locales los puntos estacionarios de la acción correspondiente $\Phi(\omega) = \int_M L(\omega)$ están dados por:

$$d \star F^U(\bar{e}_k) - \frac{1}{2} \sum_{ij} (d_i^{jk} - d_i^{kj}) A^U(e_j) \star F^U(\bar{e}_i) = 0 \quad (4.4)$$

donde los números d_k^{ij} quedan determinados por:

$$\delta(e_k) = -\frac{1}{2} \sum_{ij} d_k^{ij} e_i \otimes e_j. \quad (4.5)$$

Las ecuaciones (4.4) corresponden a las ecuaciones clásicas de movimiento de Yang-Mills. Los números $\frac{(d_i^{jk} - d_i^{kj})}{2}$ juegan el papel de constantes de estructura del álgebra de Lie de G .

Si el espacio Γ_{inv} es de dimensión infinita surgen dificultades técnicas relacionadas con la convergencia de la suma en las ecs. (4.2)-(4.5). En este caso es necesario restringir las posibles conexiones ω de tal manera que éstas tengan componentes que decaen suficientemente rápido en un sentido apropiado. Esta es la principal dificultad de este método.

Existe un trabajo por el mismo autor en donde con herramientas más “pesadas” se generaliza al caso de un hffc general.

Otro problema de este enfoque es la falta de un “límite” clásico adecuado, por lo que no podemos comparar con las teorías ya existentes.

Ahora veamos un enfoque diferente pero que por la manera en la que se construye da resultados que se pueden interpretar desde el punto de vista de la Física.

4.2 Teorías de Norma según Connes

Veamos el primer ingrediente para construir una teoría de campo.

4.2.1 La acción

En términos generales podemos decir que la acción de una teoría de campos contiene dos elementos esenciales. Por un lado, la función lagrangiana representa el campo a describir. En el capítulo anterior vimos que dada una conexión en geometría no conmutativa es posible construir la curvatura correspondiente de manera análoga a como se hace en geometría clásica. Entonces, parece obvio que podemos postular una función lagrangiana del tipo Yang-Mills (que va como el cuadrado de la curvatura local) como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.6)$$

El segundo elemento necesario para construir la acción es la integración, es donde el elemento de volumen juega el papel de medida. Sin embargo, este elemento de volumen está construido en base al concepto de punto que ahora hemos perdido en la transición hacia la geometría no conmutativa. Una propuesta para solucionar esto, fue hecha por Connes [Co] y está basada como hemos visto, en una nueva teoría de infinitesimales y en el cálculo espectral que consiste en una generalización no conmutativa del cálculo estándar usado en variedades diferenciales. Con todas estas herramientas es posible definir:

Acción de Yang-Mills

De lo anterior, resulta claro que debemos definir la acción de Yang-Mills como:

$$\Phi = \int |F|^2 = c(n) \operatorname{tr}_D (|F|^2 |D|^{-n}) \quad (4.7)$$

En esta última fórmula hemos omitido la constante de proporcionalidad para el Lagrangiano de Yang-Mills, pues de todas maneras puede ser absorbida en la definición de la constante $c(n)$.

Es necesario tener en cuenta que la 2-forma de curvatura F debe estar bien definida. En el capítulo anterior, hemos visto como se puede introducir un cálculo universal en el triple espectral, para que las formas estén bien definidas.

De este modo, la 2-forma de curvatura $F \in \Omega_C^2 \mathcal{A}$ está bien definida y puede ser utilizada en la definición de acción (ec. 4.7).

Cabe mencionar que en todo el desarrollo anterior hemos partido de la existencia de una variedad Riemanniana M , suposición que resulta ser necesaria para la construcción del triplete espectral.

La acción (4.7) hereda por lo tanto, la estructura geométrica de M . Dada la naturaleza Riemanniana de M , localmente la estructura geométrica es Euclideana.

Esto es algo desafortunado, ya que como hemos dicho nuestro objetivo es formular teorías de campo que deben ser invariantes con respecto a

cambios de marcos de referencia, en particular, y para que verdaderamente reflejen la naturaleza, deberán sujetarse a la relatividad especial, es decir, deberán ser invariantes con respecto a transformaciones de Lorentz (o Poincaré). La estructura euclídeana de M no permite que las teorías construidas con el formalismo anterior posean dicha invariancia. Sería necesario partir de una variedad pseudoriemanniana que localmente heredara la estructura pseudoeuclídeana de la relatividad especial.

No obstante, ha sido demostrado (A. Connes) que el uso de una variedad pseudoriemanniana trae consigo una serie de problemas técnicos que hasta ahora no se han podido ser resueltos. Este es uno de los problemas centrales en el estudio de modelos para teorías de campo en geometría no conmutativa.

Así pues, creemos que el problema del carácter euclídeano de la geometría no conmutativa debe ser un tema central para futuras investigaciones.

4.3 Las Ecuaciones de Campo

Ya hemos mencionado que las teorías de campo se basan por una parte en la acción como elemento de partida y por otra parte el segundo elemento es el principio de mínima acción que nos lleva a las ecuaciones de campo. En la sección anterior explicamos como se puede construir una acción en un triplete espectral, por lo menos en el caso Riemanniano.

Hemos visto que el principio de mínima acción nos dice que la acción Φ tiene como extremos a las soluciones del sistema $\delta\Phi = 0$, si los campos cumplen con las condiciones adecuadas en la frontera de integración. Esta derivada variacional se calcula con respecto a los potenciales o variables dinámicas que determinan el campo a describir y así se obtienen las ecuaciones de campo.

Al tratar de repetir este procedimiento en geometría no conmutativa surgen varios problemas.

Sea ω la conexión mediante la cual definimos la acción (4.7). Para poder formular un principio variacional adecuadamente, la variable dinámica ω debe satisfacer ciertas condiciones en la frontera. Pero el concepto de frontera está directamente vinculado al concepto de *punto* que como hemos visto, no tiene sentido en el contexto de la geometría no conmutativa.

De aquí que, imponer condiciones de frontera sobre ω implicaría tener, primero, que generalizar el concepto de frontera al caso no conmutativo.

Una solución elegante a este problema, consiste en cambiar las variables dinámicas de los campos. Veamos como:

Sean $g_{\mu\nu}$ la métrica Riemanniana asociada con la variedad espinorial M y $\phi(x)$ la función que representa el campo a describir. El **operador de Dirac** correspondiente tiene la forma $D = \gamma^\mu (\partial_\mu + \omega_\mu)$, donde $\gamma^\mu(x)$ son las matrices que satisfacen $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = -g^{\mu\nu}$, y ω_μ es la conexión de Levi-Civita asociada con la métrica $g_{\mu\nu}$. Como ya habíamos argumentado antes, el operador de Dirac posee un espectro discreto $D\psi_n = \lambda_n \psi_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ y las funciones propias $\{\psi_n\}$ forman un sistema completo. Localmente la ecuación para los eigenvalores se puede escribir como:

$$D\psi_n = \gamma^a e_a^\mu (\partial_\mu + \omega_{\mu bc} \gamma^b \gamma^c) \psi_n = \lambda_n \psi_n \quad (4.8)$$

con e_a^μ siendo la tetrada local:

$$e_a^\mu e_b^\nu \eta^{ab} = g^{\mu\nu}, \quad \eta^{ab} = \text{diag}(+1, +1, \dots),$$

tantas veces como $\dim M$.

De la ecuación (4.8) resulta claro que los eigenvalores λ_n dependen explícitamente de la métrica $g_{\mu\nu}$, es decir, los eigenvalores λ_n heredan las propiedades geométricas de M . (Es así que decimos que el operador de Dirac contiene la información geométrica del espacio).

Por otra parte, es posible expresar los campos $\phi(x)$ en términos de las componentes de la base formada por $\{\psi_n\}$:

$$\phi(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \psi_n(x) \quad (4.9)$$

Originalmente, las variables dinámicas de los campos a describir eran $g_{\mu\nu}$ y $\phi(x)$. La ecuación (4.9) nos muestra que, una vez conocidas las funciones propias del operador D , la función $\phi(x)$ puede ser determinada completamente mediante los coeficientes a_n de la expansión. Esto quiere decir, que conocer a_n es equivalente a conocer $\phi(x)$ y podemos utilizar a_n como variable dinámica del campo a describir.

Además, en lugar de la métrica $g_{\mu\nu}$ podemos utilizar los valores propios λ_n del operador de Dirac, puesto que como vimos, éstos últimos contienen las características geométricas de $g_{\mu\nu}$. Así, tenemos un nuevo sistema de variables dinámicas conformado por $\{\lambda_n, a_n\}$ y es posible demostrar que este nuevo sistema es en realidad equivalente a $\{g_{\mu\nu}(x), \phi(x)\}$. De esta manera,

podemos resolver, de manera indirecta, el problema de conocer los valores de las variables dinámicas en la frontera.

Una vez conocidas las variables dinámicas, es necesario aplicar el principio de mínima acción y encontrar los valores estacionarios de la acción para así encontrar las ecuaciones de campo. Aquí, nos encontramos con un nuevo problema, y es la derivada variacional.

Podemos escribir el principio de mínima acción, diciendo que las derivadas variacionales de la forma:

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\lambda_n} = 0, \quad \frac{\delta\Phi}{\delta a_n} = 0 \quad (4.10)$$

generan las ecuaciones de campo correspondientes. Sin embargo, un problema surge de inmediato, del hecho de que la derivada variacional en su forma estándar contiene variaciones con respecto a las variables dinámicas $\{g_{\mu\nu}, \phi\}$ y a sus derivadas $\{g_{\mu\nu,\tau}, \phi_{,\tau}\}$. Es, entonces, necesario expresar a éstas últimas también en términos de $\{\lambda_n, a_n\}$. Esto no es posible realizarlo de manera única, debido a que, primeramente, diferentes campos $\{g_{\mu\nu}, \phi\}$ y $\{g'_{\mu\nu}, \phi'\}$ pueden tener el mismo espectro $\{\lambda_n, a_n\}$ (simetría espectral) y, en segundo lugar, el conjunto de valores propios $\{\lambda_n\}$ (y consecuentemente el conjunto $\{a_n\}$) no es linealmente independiente. En otras palabras, suponiendo que las variaciones (4.10) puedan ser definidas correctamente en el contexto de la geometría no conmutativa, generarían una gran cantidad de ecuaciones de campo y no hay forma de seleccionar las correctas, por lo menos teóricamente.

El problema de la dependencia lineal de los $\{\lambda_n\}$ implica que existen relaciones entre diferentes λ_n lo que significa que una teoría de campo basada en las variables dinámicas $\{\lambda_n\}$ es obligatoriamente una teoría con constricciones. Esto es un tema que aun no ha sido investigado en la geometría no conmutativa.

Debido a estos problemas, los modelos desarrollados hasta hoy usando el método de Connes han tenido que reducir la generalidad, ya sea postulando ecuaciones de campo análogas a las que se tienen en el caso clásico o bien eliminando la no conmutatividad para derivar las ecuaciones de campo mediante un principio variacional estándar (C. Rovelli y G. Landi en [L-R] o A. Connes en [Co2]). Debido a esta simplificación, los modelos así construídos presentan graves incongruencias con su interpretación física¹

¹ como las relaciones imposibles entre las masas de los fermiones y los bosones y la

En términos generales, podemos afirmar que actualmente no se cuenta con un método eficiente que abarque todos los casos para derivar las ecuaciones de campo de una manera satisfactoria, y congruente con la Naturaleza. Esto es ante todo un problema altamente técnico, si se desea seguir implementando el principio de mínima acción en geometría no conmutativa. De lo contrario será necesario inventar un nuevo método para obtener las ecuaciones de campo sin utilizar dicho principio variacional.

Ante esto, creemos que es conveniente mencionar algunas vías alternas que podrían dar información a partir de la acción dada.

Como hemos visto tanto en el formalismo de Connes como en el de Durevich es posible definir la curvatura en un hpc. Como la curvatura satisface las condiciones necesarias para construir la acción, también debe satisfacer las ecuaciones de Bianchi:

$$D_\omega \Omega = 0 \quad (4.11)$$

donde D_ω es la derivada covariante correspondiente a la conexión ω y Ω es la curvatura. Esta identidad como vimos anteriormente, en teorías de Yang-Mills corresponde a la parte geométrica (i.e. estática) de las ecuaciones de campo. En el caso de la teoría de la gravitación (4.11) implica una ley de conservación para el campo de materia que genera al campo gravitacional.

Este es un ejemplo sencillo en el que una identidad geométrica corresponde a una parte de las ecuaciones de campo. Con esto en mente, resulta natural exigir que en geometría no conmutativa la relación (4.11) se pueda interpretar como ecuación de campo.

Otra posibilidad la ofrece el Teorema de Noether, el cual afirma que si clásicamente existe una transformación infinitesimal con respecto a la cual la acción es invariante, entonces existen cantidades conservadas que son primeras integrales de las ecuaciones de campo. Existen casos clásicos, con alta simetrías, en las que las primeras integrales permiten integrar completamente las ecuaciones de campo o, de manera equivalente, es posible *derivar* las ecuaciones de campo a partir de las primeras integrales. Como consecuencia de estas observaciones, creemos que un tema interesante a investigar en el futuro sería lo relacionado con las simetrías de la acción. En particular, los

predicción de partículas fermiónicas en el modelo estándar de las teorías de Yang-Mills sin sentido físico, o la existencia de un término cosmológico dominante y contrario a las observaciones en los modelos gravitacionales..

modelos σ no lineales que en el caso clásico son totalmente integrables y se pueden construir sobre un hfp de manera análoga a las teorías de Yang-Mills.

Capítulo 5

Conclusiones Finales

El objetivo de este trabajo es el estudio de la formulación en de teorías de campo en geometría no conmutativa.

Para ello, fue necesario comenzar estudiando los conceptos de geometría diferencial necesarios para entender la construcción geométrica de las teorías de norma.

Esto resultó también útil en el sentido de que se puede intentar hacer un paralelismo entre todos estos conceptos clásicos y aquellos que se construyen en el campo de la geometría no conmutativa, después de todo, el objetivo de ésta es el de *extender* la geometría ordinaria.

Para construir teorías de campo no conmutativas es necesario primero estudiar la construcción de teorías de campo en geometría diferencial ordinaria, ya que como hemos visto, en gran medida, los modelos que intentan generalizar dichas teorías a geometría no conmutativa lo hacen estableciendo analogías con la teoría clásica. Así mismo, fue necesario estudiar el segundo ingrediente, es decir *la geometría no conmutativa*. Esta es en realidad más que un ingrediente, sino que es en ella misma una gran herramienta y una nueva rama de las matemáticas contemporáneas.

Hasta aquí, el presente trabajo ya representa un compendio, bastante extenso, y espero, claro, de las teorías clásicas y la geometría no conmutativa.

El verdadero problema surgió cuando comencé a estudiar los modelos de teorías de norma en geometría no conmutativa, ya que muy pronto todos los conceptos adquiridos y expuestos con anterioridad se tornan insuficientes y a cada paso se requieren nuevos conocimientos, en la mayoría de los casos bastantes elevados de física y matemáticas.

Para abordar dichos modelos de las teorías de norma en geometría no

conmutativa hubiera sido necesario, quizás duplicar el tamaño de la presente tesis, así como, obviamente el tiempo de elaboración. Además debo señalar, que el tema se encuentra en la frontera de la teoría actual, por lo que en estos momentos cientos de matemáticos y físicos teóricos se encuentran trabajando en él, y es difícil mantenerse al tanto de los avances.

Por esto, y para mantener la presente tesis dentro de los límites de lo razonable para una tesis de licenciatura, decidimos limitarnos a presentar los modelos más sobresalientes de una manera más bien expositiva y destacando solo los aspectos más importantes, en lugar de ahondar en los aspectos más técnicos (que a veces suelen ser más bien oscuros) y dar una idea general de los métodos para construir el formalismo de teorías de norma.

Se estudiaron dos enfoques, básicamente distintos.

En primer lugar, la construcción de Durdevich que tiene ciertas ventajas, como la gran analogía con el caso conmutativo, la posibilidad de obtener las ecuaciones de campo en base a un principio variacional y su elegancia matemática. La desventaja de este método es la dificultad técnica que existe para realizar los cálculos cuando se quiere llevar a un caso específico, así como también la falta de una comparación con el caso clásico, es decir, los modelos de teorías de campo así construidos no tienen una manera de pasar al límite clásico, por lo que es imposible decir si concuerdan con la realidad física.

El segundo enfoque, el de Connes, fue construido de tal manera que se recupere la física que hay detrás del modelo, ya que se trabaja con operadores y la acción se construye a partir del operador de Dirac que como hemos visto contiene toda la información geométrica. Dicho operador de Dirac juega un papel *fundamental* ya que las variables dinámicas son definidas a partir de los valores propios de éste y sus funciones propias correspondientes. Pero este enfoque tiene también grandes desventajas, como hemos dicho antes, la principal quizás que el espacio está dotado de una estructura Euclideana, que no retrata al espacio-tiempo físico, además de que también presenta problemas técnicos (la definición apropiada de un cálculo de variaciones).

Es por esto, que de manera muy *breve*, se proponen dos opciones para futuras investigaciones (que esperamos poder desarrollar en un futuro).

Investigar las identidades de Bianchi, ya que, al menos en el caso clásico estas nos dan la mitad de las ecuaciones de movimiento, y por ende es natural esperar un comportamiento similar en el caso no conmutativo e investigar el Teorema de Noether en geometría no conmutativa para obtener más información acerca de las simetrías del sistema y de cómo dichas invariancias nos

pueden ayudar a encontrar las ecuaciones de campo. También una posibilidad es investigar los modelos σ no lineales en un ambiente de geometría no conmutativa.

Esperamos que estas opciones, y más, nos lleven en un futuro a lo que será la formulación de Teorías de Campo en geometría no conmutativa, que representen de una manera natural los fenómenos cuánticos y serán un gran avance en la Física Matemática actual.

Apéndice A

Mecánica Clásica

La formulación newtoniana no resulta ser la más eficiente en la resolución de todos los sistemas mecánicos. Con el propósito de encontrar métodos más generales y sencillos se desarrollaron varios formalismos, equivalentes en teoría, pero que en el análisis y la solución de problemas más extensos, no tienen el mismo alcance.

Tal es el caso de los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano.

La ventaja de estos, es que son independientes de las coordenadas elegidas para definir el sistema, que es uno de los principios básicos de la física. Nos basaremos en [Go].

A.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange y Principio de Hamilton

El estudio de la evolución de un sistema newtoniano envuelve la consideración de su estado instantáneo y de pequeños desplazamientos virtuales alrededor de este, es decir, involucra un “principio diferencial”.

En el formalismo lagrangiano, esto se representa por medio de ecuaciones diferenciales de segundo orden, que sin embargo reflejan un comportamiento global del sistema, pues provienen de un “principio integral”, el principio de Hamilton.

Un principio que considere el movimiento completo del sistema entre los tiempos t_1 y t_2 y las pequeñas variaciones virtuales alrededor de la trayectoria real constituye un “principio integral”.

El “Principio de Mínima Acción” nos permite obtener las ecuaciones de movimiento en cualquier sistema de coordenadas.

Demos pues, una primera version de este principio, para más adelante enunciarlo para sistemas abstractos.

A.1 Principio de mínima acción para sistemas monogénicos¹ :El

funcional $\Phi = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ tiene un valor estacionario para la trayectoria correcta del movimiento en donde $L = T - V$ la diferencia entre la energía cinética y potencial.

La noción de valor estacionario para una integral de línea corresponde en la teoría ordinaria de funciones a que la primera derivada se anule.

Primeramente expodremos, de una forma casi intuitiva, algunas definiciones y técnicas del cálculo de variaciones, aunque ya en el texto son abordadas de manera más formal.

Cálculo de Variaciones

A.2 Definición: Sea $f(y, \dot{y}, x)$ un funcional definido en una curva $y = y(x)$ entre x_1 y x_2 y $\dot{y} \equiv \frac{dy}{dx}$

Se dice que un funcional f es **diferenciable** si $f(y + \eta) - f(y) = F + R$ donde F depende linealmente de η , que es, a su vez, una función arbitraria de x que se anula en los extremos de la curva y y $R(\eta, y) = O(\eta^2)$, en el sentido que para $|\eta| < \epsilon$ y $|\frac{d\eta}{dx}| < \epsilon$, entonces tenemos $|R| < \epsilon^2$. La parte lineal del incremento, i.e. $F(\eta)$ recibe el nombre de **diferencial**.

Si el funcional es diferenciable, se puede probar que su diferencial es única. La diferencial de un funcional es también llamada variación y η es llamada la **variación de la curva**.

Deseamos encontrar una trayectoria $y(x)$ tal que la integral de línea Φ de la función f , con $\Phi = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx$ tenga un valor estacionario. Sólo

¹un sistema monogénico es aquel en donde todas las fuerzas son derivadas de un potencial escalar general que depende de (q_i, \dot{q}_i, t) .

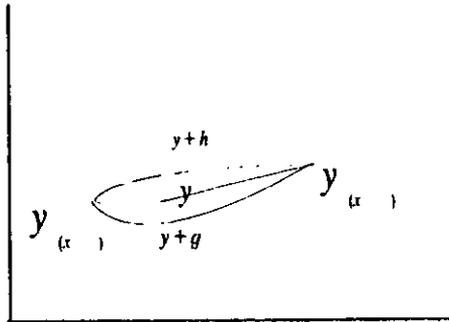


Figura A.1: La variación de la trayectoria $y(x)$ con extremos fijos

consideraremos las trayectorias con variación para las cuales $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, es decir que tienen los mismos puntos iniciales y finales que la curva original.

Una familia de curvas variadas se denotará por $y(x, \alpha)$, con $y(x, 0)$ la trayectoria original y α un parámetro infinitesimal.

Si seleccionamos cualquier función $\eta(x)$ que se anule en $x = x_1$ y $x = x_2$ entonces una familia posible de curvas (con la forma requerida) está dada por:

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x)$$

donde y y $\eta \in C^2[x_1, x_2]$ y no singulares.

La condición para obtener un punto estacionario es

$$\left(\frac{d\Phi}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = 0$$

Esto es:

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right\} dx$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0$.

$$\text{Pero } \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx$$

asi que integrando por partes tenemos:

$$= \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx$$

Como todas las curvas variación que estamos considerando pasan a través de los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , la derivada parcial de y con respecto a α en x_1 y x_2 debe anularse. Tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx$$

La condición para un valor estacionario es equivalente a:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_0 dx = 0$$

$\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ es arbitraria excepto por condiciones de continuidad y puntos finales por lo que es posible aplicar el *Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones*², que probamos en la sección 2.1.1 y que nos permite asegurar que esto es cierto solamente en el caso en que:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \tag{A.1}$$

que es la llamada **ecuación de Euler-Lagrange**.³

Para simplificar nuestras expresiones, introducimos la siguiente notación:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_0 d\alpha \equiv \delta y \quad \text{y} \quad \left(\frac{dJ}{d\alpha} \right)_0 d\alpha \equiv \delta J$$

Así, la afirmación de que Φ tenga un valor estacionario puede ser escrita como:

$$\delta \Phi = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \delta y dx = 0$$

pidiendo que $y(x)$ satisfaga la ecuación (A.1).



²Lema: Si $\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)dx = 0$ para toda función $\eta(x)$ arbitraria, continua hasta la segunda derivada, entonces $M(x)$ debe anularse idénticamente en el intervalo (x_1, x_2) .

³Las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden ser introducidas en la mecánica clásica sin la utilización del principio de mínima acción, directamente de generalizaciones de las ecuaciones de Newton. Veremos más adelante que ambos conjuntos de ecuaciones son equivalentes, en el sentido en que dan las mismas soluciones para la dinámica de un sistema.

Con estas técnicas que hemos introducido, de manera muy intuitiva, se pueden obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange, cuando el tiempo t toma el papel de x , las coordenadas generalizadas el lugar de y y el lagrangiano del sistema es la función conformando el funcional integral Φ , que se conoce como **acción**.

Retomando el principio de Hamilton, la solución al problema dinámico de dicho sistema sera, como se ha dicho, cuando la trayectoria sea valor estacionario de Φ , es decir, cuando la variación de Φ (que puede ser entendida hasta este punto como el cambio sobre la superficie del movimiento) sea igual a cero:

$$\delta\Phi = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

Esto quiere decir que el movimiento de un sistema mecánico coincide con los valores extremos del funcional Φ .

Hasta el momento, nada hemos especificado sobre el sistema que se analiza. Las técnicas que se han mencionado nos sirven para analizar sistemas mecánicos con hasta una cantidad numerable de grados de libertad. Esto limita la aplicación del método desarrollado a sistemas más generales, en particular, a los llamados campos. Sin embargo, no es difícil modificar los argumentos precedentes para poder atacar sistemas continuos.

A continuación, generalizaremos el principio de mínima acción a sistemas continuos y campos.

A.2 Formulación Lagrangiana para Campos

El método más directo para realizar dicha generalización es aproximarse a los sistemas continuos mediante uno discreto, es decir, que contiene partículas distribuidas no de manera continua y examinar los cambios que resultará necesario realizar a las ecuaciones que describen dicho movimiento cuando el límite continuo es alcanzado.

A.2.1 La transición de un sistema discreto a uno continuo

Aplicaremos el procedimiento mencionado a una cuerda infinitamente extensa que sufre pequeñas vibraciones longitudinales. El sistema discreto que nos servirá para aproximar dicha cuerda es una cadena de partículas puntuales, todas con la misma masa m y espaciadas una distancia a . Se encuentran además conectadas por resortes sin masa todos iguales, con una constante de restitución k (lo que nos proporcionara un equivalente discreto a un potencial continuo uniforme).

Obsérvese la figura A.1

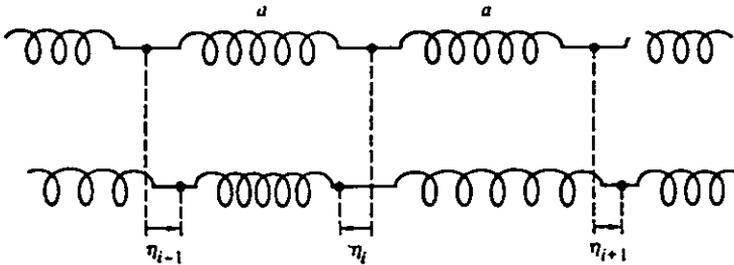


figura A.1 Sistema discreto de masas iguales conectadas por resortes, como aproximación a la cuerda elástica (continua).

Las partículas estarán restringidas a moverse sólo en la dirección en la que se extiende la cadena.

Este sistema discreto se puede abordar con las técnicas usuales. Así denotemos el desplazamiento de la i -ésima partícula desde su posición de equilibrio por η_i , la energía cinética del sistema se escribe:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{\eta}_i^2$$

mientras que su energía potencial corresponde simplemente a la suma de las energías potenciales de cada resorte resultantes las compresiones o elongaciones de éstos. Así:

$$V = \frac{1}{2} \sum_i k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2$$

Con estos datos ya podemos construir el Lagrangiano del sistema:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i [m \dot{\eta}_i^2 - k(\eta_{i+1} - \eta_i)^2]$$

Ahora como lo que queremos es poder tomar el límite cuando la separación en equilibrio entre las partículas tiende a cero, es necesario introducir a en dicha ecuación

Hacemos:

$$L = \frac{1}{2} \sum_i a \left[\frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right] = \sum_i a L_i$$

Con lo cual, las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan:

$$\frac{m}{a} \ddot{\eta}_i - ka \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a^2} \right) + ka \left(\frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a^2} \right) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Cuando $a \rightarrow 0$, $\frac{m}{a}$ se convierte en μ la masa por unidad de longitud, es decir, una densidad de masa, y ka en el Módulo de Young de la cuerda continua⁴.

Así mismo, al pasar del sistema discreto al continuo el índice i que indica la partícula puntual en la que nos encontramos, a lo largo de la cadena, se convierte en la posición que varía continuamente, i.e. es una coordenada de posición, a la que llamaremos x , así en lugar de la variable η_i tendremos $\eta(x)$. Más aún, la cantidad $\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a}$ que aparece en L_i se convierte en

⁴La derivación de como ka tiende al modulo de Young no es obvia y requiere de algunos cálculos.

$\frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a}$ lo cual obviamente tiende a $\frac{d\eta}{dx}$ cuando a tiende a cero. (a toma el papel de dx). Finalmente la suma se transforma en una integral sobre x , con esto el Lagrangiano para el sistema continuo se escribe como:

$$L = \frac{1}{2} \int \left(\mu \dot{\eta}^2 - Y \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right) dx \quad (\text{A.3})$$

Cuando $a \rightarrow 0$ los dos últimos términos de la ec. (A.2) se convierten en

$$\lim_{a \rightarrow 0} -\frac{Y}{a} \left\{ \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_x - \left(\frac{d\eta}{dx} \right)_{x-a} \right\}$$

lo que define una segunda derivada de η .

Así las ecuaciones de movimiento para la cuerda elástica son:

$$\mu \frac{d^2\eta}{dt^2} - Y \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0$$

que es la famosa ecuación de onda en una dimensión con velocidad de propagación $v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}$

De este modo, el ejemplo desarrollado, nos ilustra la manera en que podemos pasar de un sistema discreto a un continuo. Cabe hacer notar que la coordenada espacial x , es solamente una coordenada que describe la posición a lo largo de la cuerda que forma el sistema y no una coordenada generalizada. Así como, en el caso discreto, para cada valor de i existe una coordenada generalizada η_i , para cada valor de x corresponde un valor de la coordenada $\eta(x)$.

La ecuación (A.3) muestra al lagrangiano como una integral sobre x , claramente esto puede ser generalizado, en el caso de tres dimensiones, mediante la definición de una función de densidad lagrangiana, de tal manera:

$$L = \iiint \mathcal{L} \, dx dy dz$$

\mathcal{L} es la **densidad de lagrangiano** y es ésta, y no el lagrangiano mismo, que es más utilizada para describir el movimiento de un sistema.

Ahora, ya estamos listos para introducir, con más generalidad, el formalismo lagrangiano para sistemas continuos, y desprendernos así de nuestro ejemplo.

A.2.2 Formulación Lagrangiana para sistemas continuos

La función densidad lagrangiana, para cualquier sistema continuo en una dimensión, en general aparecerá de la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(\eta, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d\eta}{dt}, x, t \right)$$

El lagrangiano total, es como hemos dicho antes la integral de \mathcal{L} sobre el rango de x definido para el sistema.

El Principio de Hamilton para dicho lagrangiano toma la forma:

$$\delta\Phi = \delta \iint \mathcal{L} dx dt = 0$$

Comprobaremos que las ecuaciones de movimiento para un sistema continuo (como las obtenidas en la sección anterior) son derivables directamente de la variación de la doble integral de \mathcal{L} . Las variables x y t no son afectadas por la variación, ni indirectamente ni en los límites de integración; la variación se lleva a cabo solamente en η y sus derivadas. La variación será considerada nula en los puntos finales t_1 y t_2 así como también en x_1 y x_2 .

Paralelamente a los métodos introducidos en la sección anterior, podemos tomar una familia de curvas variadas:

$$\eta(x, t; \alpha) = \eta(x, t; 0) + \alpha\zeta(x, t).$$

donde $\eta(x, t; 0)$ es la curva que satisface el Principio de Hamilton y ζ es cualquier función "decente" que se anule en los puntos finales.

Φ como función de α tiene una derivada:

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dt} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dx} \right) \right\} dx dt$$

Mediante integración por partes en x y t ; y teniendo en cuenta que la variación de η es igual a cero en los límites de integración, se tienen las siguientes relaciones:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dt} \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} dt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d\eta}{dx} \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} dx$$

sustituyendo en nuestra expresión para $\frac{d\Phi}{d\alpha}$ e igualando a 0, obtenemos el principio de Hamilton de la forma siguiente:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \right) \right\} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right)_0 dx dt = 0$$

y ahora por el lema fundamental dada la naturaleza arbitraria de las curvas variadas es necesario que la expresión entre llaves sea idénticamente cero:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dt}} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{d\eta}{dx}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0$$

Esta última expresión nos da la ecuación del movimiento que se deriva del principio de Hamilton.

Aun es necesario hacer una generalización más, para tratar sistemas en tres coordenadas. Nótese que el Principio de Hamilton no hace distinción alguna entre las variables espaciales y temporales; ambas deberán ser tratadas como variables independientes. No hay variación alguna de las cantidades del campo en los límites de integración en ningún caso.

Es matemáticamente conveniente pensar en este espacio 4-dimensional con coordenadas $x_0 = t$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $x_3 = z$.

Además como el campo puede tener varias componentes, éstas serán denotadas por η_ρ (daremos a este índice la condición de generalidad más amplia

posible, en ocasiones puede representar un sólo índice que toma varios valores así como también ρ puede representar índices múltiples).

La derivación de alguna de las componentes del campo con respecto de una coordenada x_ν se representará por el subíndice ν separado del subíndice ρ por una coma. Cuando sólo existe una componente del campo, un espacio en blanco antecede a la coma. Esta notación será utilizada por el resto del capítulo, cuando sea conveniente, con fines de simplificar la escritura. También la convención de suma sobre índices repetidos será asumida. En caso contrario, así lo indicaremos. Utilizaremos la convención en la cual índices con letras romanas representarán coordenadas espaciales, i.e. pueden tomar los valores 1, 2 y 3; mientras que los caracteres griegos correrán de 0 a 3.

$$\text{Notación: } \eta_{\rho,\nu} \equiv \frac{d\eta_\rho}{dx_\nu}.$$

Así, la forma más general que la densidad lagrangiana puede tomar es:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta_\rho, \eta_{\rho,\nu}, x_\nu)$$

Por lo que el lagrangiano total es:

$$L = \int \mathcal{L}(dx_i)$$

El **Principio de Hamilton** se expresa como la integral sobre una región en nuestro espacio 4-dimensional:

$$\delta\Phi = \delta \int \mathcal{L}(dx_\mu) = 0$$

donde la variación de las η_ρ se anula en la superficie S que delimita la región de integración.

Para obtener las ecuaciones de Euler-Langrange procederemos como antes. Construimos una familia de funciones "variadas" con un parámetro α , que se reducen a $\eta_\rho(x_\nu)$ conforme el parámetro α tiende a cero. Esto se logra añadiendo a η_ρ el producto $\alpha\zeta_\rho$, donde $\zeta_\rho(x_\nu)$ son funciones arbitrarias adecuadas, que se anulan en la superficie S.

Tenemos:

$$\delta\Phi = 0 \Leftrightarrow \frac{d\Phi}{d\alpha} = 0$$

Calculando directamente,

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} \frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \frac{\partial \eta_{\rho,\nu}}{\partial \alpha} \right) dx_\mu$$

Integrando por partes:

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} - \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \right) \right] \frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} (dx_\mu) + \int \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} \right) (dx_\mu)$$

donde la última integral se anula cuando $\alpha \rightarrow 0$, pues puede ser transformada, por medio del Teorema de la Divergencia en cuatro dimensiones, en una integral sobre la superficie S (que limita la región de integración en 4-dimensiones). Esta integral de superficie se anula, a su vez, porque la variación de η_ρ en la vecindad del campo adecuado es cero sobre la superficie.

Así la última expresión, en el límite $\alpha \rightarrow 0$ se reduce a:

$$\left(\frac{d\Phi}{d\alpha} \right)_0 = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} - \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \right) \right] \left(\frac{\partial \eta_\rho}{\partial \alpha} \right)_0 (dx_\mu) \quad (\text{A.4})$$

Nuevamente, dada la naturaleza arbitraria de la variación para cada η_ρ es necesario que la cantidad entre corchetes se anule para cada componente, para que las soluciones satisfagan el Principio de Hamilton. Así:

$$\frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{\rho,\nu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} = 0$$

que es la expresión buscada para las ecuaciones de Euler-Lagrange. Esto representa un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales para las cantidades del campo, con tantas ecuaciones como diferentes valores de ρ haya.



Apéndice B

Grupos y Álgebras de Lie

Existen muchos textos sobre la teoría de grupos de Lie y se recomienda al lector que desee aprender más sobre el tema consultar, por ejemplo [Wa]. El propósito de este apéndice es apenas el de dar las bases, para mantener la obra tan "autocontenida" como sea posible.

Un **grupo de Lie** es una variedad diferenciable G que posee estructura de grupo y cuyas operaciones de grupo (producto e inverso) son diferenciables:

$$\begin{aligned} (i) \quad \cdot : G \times G &\rightarrow G, & (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 \cdot g_2 \\ (ii) \quad {}^{-1} : G &\rightarrow G, & g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

El elemento unidad del grupo de Lie se denota e . La dimensión del grupo de Lie G queda definida por su dimensión como variedad.

Resulta que la estructura de grupo está casi siempre completamente determinada por su comportamiento cerca de la identidad.

Si G es un grupo de Lie, definimos el **álgebra de Lie** correspondiente, denotada \mathfrak{g} , como el espacio tangente a G en e . Es un espacio vectorial con la misma dimensión que G .

Aunque no lo probaremos aquí, es importante hacer notar que todo grupo de Lie G tiene una función exponencial definida:

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

determinada unívocamente por las propiedades:

1. $\exp(0)$ es el elemento identidad en G
2. $\exp(sx) \exp(tx) = \exp((s+t)x)$,

$$3. \frac{d}{dt} \exp(tx) |_{t=0} = x$$

Con estas propiedades y el teorema de la función inversa se puede probar que \exp mapea cualquier abierto que contenga a $0 \in \mathfrak{g}$ suficientemente pequeño en un abierto que contiene a e la identidad en G . Se sigue que cualquier elemento de la componente de la identidad de G es el producto de elementos de la forma $\exp(x)$. Esto nos es útil para calcular el álgebra de Lie de un cierto grupo G .

Hemos definido el álgebra de Lie como el espacio tangente a la identidad, pero un grupo de Lie es tan simétrico que cada espacio tangente luce exactamente como todos los demás. Veamos en qué sentido.

Dado un elemento g de G un grupo de Lie, existe una función L_g de G en G dada por $h \mapsto gh$, llamada **multiplicación izquierda** por g , como tiene inversa, es decir, multiplicar por la izquierda por g^{-1} es un difeomorfismo, esto significa que podemos "empujar" cualquier campo vectorial sobre G usando L_g :

$$(L_g)_* : Vect(G) \rightarrow Vect(G)$$

Decimos que el campo vectorial v en G es **invariante por la izquierda** si $(L_g)_* v = v$, para toda $g \in G$. Como $(L_g)_*$ es lineal, los campos vectoriales invariantes por la izquierda forman un subespacio vectorial de $Vect(G)$, más aun, es una subálgebra vectorial (i.e. un subespacio cerrado bajo el paréntesis de Lie).

Lo impresionante de esto, es que el espacio de los campos vectoriales invariantes por la izquierda en G es *isomorfo* al álgebra de Lie \mathfrak{g} . Veamos esto.

Dado un vector $v_1 \in \mathfrak{g}$, (un vector tangente a $e \in G$) podemos obtener un campo vectorial invariante por la izquierda como sigue:

$$v_g = (L_g)_* v_1$$

Afirmamos que el campo vectorial así definido es invariante por la izquierda. Necesitamos demostrar que para cada $g \in G$ tenemos $(L_g)_* v = v$, es decir, que para cualquier $h \in G$,

$$(L_g)_* v_h = v_{L_g h}$$

que es lo mismo que

$$(L_g)_*v_h = v_{gh}$$

Para probarlo, usamos la definición de v :

$$\begin{aligned} (L_g)_*v_h &= (L_g)_*(L_h)_*v_1 \\ &= (L_gL_h)_*v_1 \\ &= (L_{gh})_*v_1 \\ &= v_{gh} \end{aligned}$$

De manera inversa, podemos tomar cualquier campo vectorial v invariante por la izquierda, tomar su valor en e y obtener un vector en \mathfrak{g} . Así, podemos establecer un isomorfismo entre el espacio de los campos invariantes por la izquierda y \mathfrak{g} .

En muchas ocasiones lo anterior es utilizado para dar una nueva definición de álgebra de Lie, como el espacio de los campos vectoriales invariantes por la izquierda.

Apéndice C

Geometría simpléctica

En el capítulo 2 hemos visto brevemente algo sobre geometría simpléctica y la estructura natural del formalismo hamiltoniano. En el presente apéndice trataremos más a profundidad estos temas, así como el Teorema de Darboux y veremos como se puede generalizar el formalismo a variedades de dimensión infinita.

C.1 Campos hamiltonianos

Hemos visto que los campos Hamiltonianos son aquellos campos u definidos en una variedad simpléctica (X, ω) tales que:

$$\mathcal{L}_u \omega = 0 \tag{C.1}$$

Podemos construir un campo hamiltoniano asociado a una función H (el hamiltoniano) tomando la 1-forma diferencial dH sobre X y de esta manera tenemos en cada punto $x \in X$ un vector tangente a X y podemos obtener mediante la función $I : T^*X_x \rightarrow TX_x$ (el isomorfismo que asocia a cada vector una 1-forma $\omega_\xi(\eta) = \omega(\eta, \xi)$, $\forall \eta \in TX_x$, utilizando la forma simpléctica ω) un campo vectorial IdH en X . Si la función H es la **función hamiltoniana** entonces IdH es el **campo hamiltoniano**.

Sea u un campo vectorial correspondiente a H (el Hamiltoniano) como $i_u \omega = -dH$. Este da lugar a un grupo de difeomorfismos $g^t : X \rightarrow X$:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g^t x = u(x) \tag{C.2}$$

El grupo g^t recibe el nombre de **flujo hamiltoniano**, con hamiltoniano H .

Como consecuencia de la definición de campos hamiltonianos tenemos el siguiente teorema:

C.1 Teorema: Un flujo hamiltoniano preserva la estructura simpléctica:

$$(g^t)^* \omega = \omega \quad (\text{C.3})$$

(véase [Ar] para una prueba del teorema).

Además, se dice que cualquier difeomorfismo f de X es **simpléctico** o **simplectomorfismo** si deja invariante la forma simpléctica ω .

$$f^* \omega = \omega \quad (\text{C.4})$$

Tenemos un ultimo teorema acerca de los campos hamiltonianos:

C.2 Teorema: El conjunto de campos hamiltonianos es una subálgebra de Lie del álgebra de Lie del conjunto de campos vectoriales.

Desmostración:

Si v_1 y v_2 son campos hamiltonianos, $\{v_1, v_2\}$ es también hamiltoniano, ya que $\mathcal{L}_{\{v_1, v_2\}} \omega = [\mathcal{L}_{v_1}, \mathcal{L}_{v_2}] \omega$. Las otras propiedades se verifican fácilmente.

En la mecánica hamiltoniana las llamadas transformaciones canónicas juegan un papel muy importante, veamoslas en el contexto de una variedad simpléctica arbitraria.

C.1.1 Invariantes integrales

Sea $\dot{g} : X \rightarrow X$ una función diferenciable.

Decimos que una k -forma ω es un **invariante integral** de la función g si las integrales de ω en cualquier k -cadena c y su imagen bajo g son las misma:

$$\int_{g^c} \omega = \int_c \omega$$

C.3 Teorema: La forma ω que da la estructura simpléctica a X es un invariante integral del flujo hamiltoniano.

Esto solo reformula en nuestros nuevos términos el teorema anterior. De hecho, si consideramos las potencias exteriores de ω :

$$\omega^2 = \omega \wedge \omega, \quad \omega^3 = \omega \wedge \omega \wedge \omega, \dots$$

todas las formas así definidas serán invariantes integrales del flujo hamiltoniano.

Así, definimos un elemento de volumen ω^n , con lo que el flujo hamiltoniano preservará el volumen, obteniéndose así el Teorema de Liouville como un corolario.

C.1.2 Transformaciones canónicas

Decimos que una función $\dot{g} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es una **transformación canónica** si tiene a ω la forma simpléctica como un invariante integral.

Las formas $\omega^2, \dots, \omega^n$ son invariantes integrales de cada transformación canónica. Por lo tanto, bajo una transformación canónica la suma de las áreas orientadas de las proyecciones sobre los planos coordenados es preservada. De manera particular, las transformaciones canónicas preservan el volumen.

C.2 Espacios vectoriales simplécticos

Sabemos que la estructura euclídeana en un espacio vectorial está dada por una forma bilineal simétrica, y la estructura simpléctica está dada por una forma skew. La geometría de un espacio simpléctico aunque diferente de la de un espacio euclídeano, tiene con éste algunas similitudes.

Tomaremos como modelo de nuestro espacio vectorial de dimensión par a \mathbb{R}^{2n} .

Definimos una **estructura simpléctica lineal** en \mathbb{R}^{2n} como una 2-forma bilineal skew no degenerada. A esta forma le daremos el nombre de **producto escalar antisimétrico** y lo denotaremos como $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$. El espacio \mathbb{R}^{2n} junto con la estructura simpléctica $[,]$ es llamado **espacio vectorial simpléctico**.

Veamos un ejemplo, en \mathbb{R}^{2n} sea $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ las coordenadas y ω la 2-forma $\omega = p_1 \wedge q_1 + \dots + p_n \wedge q_n$. Como esta forma es no degenerada y skew simétrica, podemos formar el producto escalar antisimétrico con ella: $[\xi, \eta] = \omega(\xi, \eta)$.

Así, el espacio \mathbb{R}^{2n} con coordenadas $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ tiene una estructura simpléctica. Esta estructura recibe el nombre de **estructura simpléctica estándar**.

Con la estructura estándar, el producto skew escalar de dos vectores representa la suma de las áreas orientadas del paralelogramo (ξ, η) en los n planos coordenados (p_i, q_i) .

Dos vectores ξ, η son llamados ortogonales antisimétricos si su producto escalar antisimétrico es igual a 0.

C.2.1 Bases simplécticas

Así, como en el caso euclideo, a partir del producto escalar podemos elegir una base distinguida, de manera que los vectores en ella sean ortonormales entre sí, podemos en el caso simpléctico de la misma manera introducir una base que es ortonormal referente a la estructura simpléctica estándar, como a continuación:

C.4 Definición: Una base simpléctica es un conjunto de $2n$ vectores e_{p_i}, e_{q_i} , $i = 1 \dots n$ cuyos productos escalares tienen la forma:

$$[e_{p_i}, e_{p_j}] = [e_{p_i}, e_{q_j}] = [e_{q_i}, e_{q_j}] = 0, \quad [e_{p_i}, e_{q_i}] = 1 \quad (\text{C.5})$$

Todos los espacios simplécticos poseen una base, de hecho podemos tomar cualquier vector diferente de cero como el primer vector de la base (véase [Ar]).

Antes de ver brevemente como se generalizan estos conceptos al caso de dimensión infinita probaremos el teorema de Darboux.

C.3 Teorema de Darboux

El teorema de Darboux es el que nos garantiza que cada variedad simpléctica tiene coordenadas locales $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ en las cuales la estructura simpléctica puede ser escrita de la manera más sencilla posible $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$.

C.3.1 Coordenadas simplécticas

Recordemos que en la definición de una variedad existen unas condiciones de compatibilidad entre las cartas que conforman un atlas. Las funciones $\varphi_i^{-1}\varphi_j$ que van de una carta a otra.

Definimos un atlas simpléctico en una variedad X de dimensión $2n$ si la forma simpléctica estandar $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ es introducida en el espacio de coordenadas $\mathbb{R}^{2n} = \langle (p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \rangle$ y la manera de pasar de una carta a otra es realizada por una transformación canónica $\varphi_i^{-1}\varphi_j$.

Cada variedad simpléctica tiene un atlas simpléctico, esto queda expresado en el siguiente teorema:

C.3.2 Teorema de Darboux

Sea ω una 2-forma diferencial cerrada no degenerada en una vecindad de un punto x en el espacio \mathbb{R}^{2n} . Entonces en alguna vecindad de x podemos escoger un sistema de coordenadas $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ tal que la forma tiene la forma estándar: $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.

Veamos la construcción de estas coordenadas.

Para la primera coordenada p_1 tomamos cualquier función lineal no constante y por simplicidad suponemos que $p_i(x) = 0$. Definimos $P_1 = Idp_1$ x Así, P_1 es el campo hamiltoniano correspondiente a la función p_1 . Como $P_1(x) \neq 0$ podemos trazar un hiperplano N por x que no contenga al vector $P_1(x)$.

Consideremos el flujo hamiltoniano P_1^t correspondientes a la función hamiltoniana p_1 . Considerámos el tiempo t necesario para ir de $y \in N$ al punto $z = P_1^t(y)$ bajo la acción de P_1^t como función de z . Por los teoremas usuales de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, la función está bien definida y es diferenciable en una vecindad del punto $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Llamemos a esta función q_1 . Nótese que $q_1 = 0$ en N y que su derivada en la dirección del campo P_1 es igual a 1. El paréntesis de Poisson de las funciones p_1 y q_1 contruídas es igual a 1:

$$[q_1, p_1] = 1.$$

Así, la construcción para el caso $n = 1$ está concluida. Sea $n > 1$. Supongamos que el Teorema de Darboux es válido para \mathbb{R}^{2n-2} . Consideremos

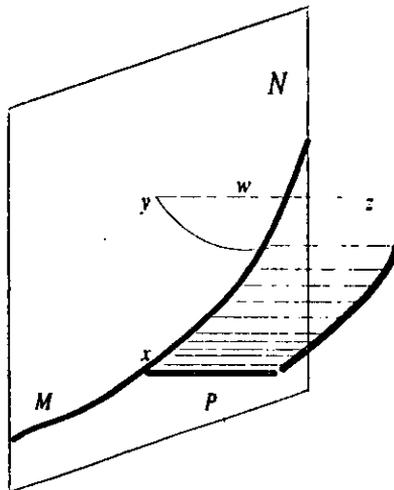


Figura C.1: Construcción de las coordenadas simplécticas

el conjunto M dado por las ecuaciones $p_1 = q_1 = 0$. Las diferenciales dp_1, dq_1 son linealmente independientes en x ya que $\omega(Idp_1, Idq_1) = [q_1, p_1] = 1$. Por lo tanto, por el teorema de la función implícita el conjunto M es una variedad de dimensión $2n - 2$ en una vecindad de x .

Ahora, dado que la forma simpléctica ω es no degenerada en TM_x , podemos afirmar el siguiente lema:

C.5 Lema : *La estructura simpléctica ω en \mathbb{R}^{2n} induce una estructura simpléctica en una vecindad del punto x en M .*

Probemos el lema. Consideremos el espacio vectorial simpléctico $T\mathbb{R}_x^{2n}$; los vectores $P_1(x), Q_1(x)$ correspondientes a los campos hamiltonianos de las funciones p_1 y q_1 pertenecen a $T\mathbb{R}_x^{2n}$. Sea $\xi \in TM_x$. Las derivadas de p_1 y q_1 en la dirección de ξ son iguales a 0, lo que significa que $dp_1(\xi) = \omega(\xi, P_1) = 0$ y $dq_1(\xi) = \omega(\xi, Q_1) = 0$. Así, TM_x es el complemento skew-ortogonal de $P_1(x)$ y $Q_1(x)$ y esto determina que ω es no degenerada en TM_x .

Ahora, continuemos con la construcción de nuestras coordenadas. Por medio de la hipótesis de inducción, sabemos que hay coordenadas simplécticas en una vecindad del punto x en la variedad simpléctica $(M, \omega|_M)$. Las designaremos p_i, q_i ($i = 2, \dots, n$). Extendemos las funciones p_2, \dots, q_n a una vecindad de x en \mathbb{R}^{2n} a continuación: cada punto z en una vecindad de x en \mathbb{R}^{2n} puede ser escrito unívocamente en la forma $z = P_1^t Q_1^s w$ con $w \in M$ y s y t son números pequeños. Fijamos los valores de las coordenadas p_2, \dots, q_n en z igual a sus valores en el punto w (véase la figura C.1). Así las $2n$ funciones $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ forman un sistema local de coordenadas en una vecindad de x en \mathbb{R}^{2n} .

Para finalizar la prueba del teorema de Darboux, veremos que las coordenadas así construidas son, en verdad, simplécticas.

Designemos P_i^t y Q_i^t los flujos hamiltonianos con funciones hamiltonianas p_i y q_i y P_i y Q_i los campos vectoriales correspondientes. Calculemos los paréntesis de Poisson de las funciones $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$. Ya vimos que $[p_1, q_1] = 1$ por lo tanto concluimos que los flujos P_1^t y Q_1^s conmutan, i.e. $P_1^t Q_1^s = Q_1^s P_1^t$.

De la definición de las p_1, \dots, q_n observamos que cada una de estas funciones es invariante con respecto de los flujos P_1^t y Q_1^t . Así, el paréntesis de Poisson de p_1 y q_1 con las demás $2n - 2$ funciones p_i, q_i ($i > 1$) es igual a 0. Por lo tanto, la función $P_1^t Q_1^s$ conmuta con todos los otros $2n - 2$ flujos P_i^t y Q_i^t ($i > 1$).

Esto implica, que $P_1^t Q_1^s$ deja invariantes cada uno de los $2n - 2$ campos P_i y Q_i ($i > 1$), es decir, los deja fijos. Entonces $P_1^t Q_1^s$ preserva la estructura simpléctica ω ya que los flujos P_1^t y Q_1^s son hamiltonianos, por lo que, los valores de la 2-forma ω en los vectores de cualquiera de los $2n - 2$ campos P_i y Q_i ($i > 1$) son los mismos en los puntos $z = P_1^t Q_1^s(w) \in \mathbb{R}^{2n}$ y $w \in M$. Pero estos valores son iguales al paréntesis de Poisson de las p_1 y q_1 , así los paréntesis de Poisson de cualesquiera dos de las $2n - 2$ funciones coordenadas p_i, q_i ($i > 1$) en los puntos z y w serán iguales.

Como las funciones p_1 y q_1 son primeras integrales de cada uno de los $2n - 2$ flujos P_1^t y Q_1^s ($i > 1$), entonces cada uno de los $2n - 2$ campos P_i y Q_i ($i > 1$) son tangentes a la variedad de nivel $p_1 = q_1 = 0$. Pero esta variedad es M , por lo tanto los $2n - 2$ campos P_i y Q_i ($i > 1$) son tangentes a M . Como consecuencia, estos campos son hamiltonianos en la variedad simpléctica $(M, \omega|_M)$, las funciones hamiltonianas correspondientes son $p_i|_M, q_i|_M$ ($i > 1$). Por lo tanto, en el espacio total $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$, el paréntesis de Poisson de cualesquiera dos de las $2n - 2$ coordenadas p_i y q_i ($i > 1$) considerado en M es el mismo que el paréntesis de Poisson de éstas en la variedad simpléctica $(M, \omega|_M)$.

Ahora, por nuestra hipótesis de inducción, las $2n - 2$ coordenadas $p_i|_M$ y $q_i|_M$ ($i > 1$) en M son simplécticas, por lo que, en el espacio total $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$, el paréntesis de Poisson de las coordenadas p_i y q_i construídas, tienen los valores estándar:

$$[p_i, p_j] = [p_i, q_j] = [q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, q_i] = 1$$

Los paréntesis de Poisson de las coordenadas p_i y q_i en \mathbb{R}^{2n} tienen la misma forma si hacemos $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$; pero una forma bilineal cualquiera es determinada por sus valores en los pares de vectores de la base. Así, los paréntesis de Poisson de las funciones coordenadas determinan la forma de ω de manera única. Por lo tanto ω tiene la forma:

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n$$

y el teorema de Darboux queda probado.

■

La teoría se puede generalizar al caso de dimensión infinita como sigue:

C.4 Variedades simplécticas de dimensión infinita

C.6 Definición: Sea X una variedad modelada sobre E un espacio de Banach, T^*X su haz cotangente y $\pi : T^*X \rightarrow X$ la proyección canónica. La 1-forma canónica θ en T^*X está definida por

$$\theta_{(x,p)}(w) = p(\pi'w) \quad (\text{C.6})$$

con $x \in X$, $p \in T_x^*X$ y $w \in T_{(x,p)}(T^*X)$ y π' es la función derivada de π , i.e. $\pi' : T(T^*X) \rightarrow T(X)$.

En una carta donde $(x,p) \in E \times E^*$, $w = (V, P) \in E \times E^*$ la fórmula queda :

$$\theta_{(x,p)}(V, P) = p(V)$$

Si E es de dimensión finita, en coordenadas naturales tenemos:

$$\theta = \sum p_i dx^i$$

Consideremos la 2- forma cerrada exacta en T^*X , $\omega = d\theta$

En una carta:

$$\omega_{(x,p)}((V_1, P_1), (V_2, P_2)) = P_1(V_2) - P_2(V_1)$$

si E es real, $\omega = \sum dp_i \wedge dx^i$

C.7 Teorema (sin demostración):

- 1) La forma ω es una forma simpléctica débil en T^*X , llamada canónica
- 2) Es una forma simpléctica en T^*X si E es reflexivo.

Apéndice D

Homología y Cohomología

A partir de la teoría de integración y del Teorema de Stokes se desprenden importantes teorías como la de Homología y Cohomología.

Definimos un **p-simplejo** como un subconjunto de \mathbb{R}^n definido en términos de $p + 1$ puntos linealmente independientes. Esta definición es una generalización, a dimensiones mayores o menores del concepto de un triángulo (2-simplejo) en términos de tres puntos linealmente independientes. Un **p-rectángulo** P en \mathbb{R}^p es un subconjunto de \mathbb{R}^p naturalmente orientado definido por:

$$a^i \leq x^i \leq b^i, \quad i = 1, \dots, p$$

La frontera ∂P de un rectángulo P en \mathbb{R}^p es la unión de los $2p$ rectángulos en \mathbb{R}^{p-1} definidos por las caras $x^i = a^i$ y $x^i = b^i$ del rectángulo P ; las $p - 1$ coordenadas de un punto en una de esas caras son $(x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^p)$ con $a^j \leq x^j \leq b^j$, $j = 1, \dots, \hat{i}, \dots, p$. (el "sombbrero" en el índice implica que es omitido). La frontera también se puede definir para simplejos.

Dado que los rectángulos son los elementos fundamentales para definir cadenas y formular una teoría de integración, podemos extender el concepto de frontera a cualquier cadena, como la unión de las fronteras de los rectángulos que la forman menos las intersecciones de éstas.

El teorema de Stokes nos dice:

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$$

lo que también se puede escribir de manera simbólica como:

$$\langle C, d\omega \rangle = \langle \partial C, \omega \rangle$$

No probaremos aquí el teorema de Stokes, sino que lo utilizaremos como punto de partida para construir la teoría de Cohomología y homología.

Dada la forma simétrica del teorema de Stokes y puesto que $d^2 = 0$ tenemos que $\partial^2 = 0$. De hecho:

$$\langle \partial^2 C, \omega \rangle = \langle \partial C, d\omega \rangle = \langle C, d^2 \omega \rangle = 0$$

Estas igualdades nos dan aun una idea más grande de las similitudes entre las formas y las cadenas y entre los operadores de derivación y de frontera.

Tanto el conjunto de formas $\Lambda(X)$ como el de cadenas finitas $C(X)$ en una variedad X tienen estructura de espacios vectoriales graduados con operador diferencial:

$\Lambda(X)$ [$C(X)$] es una colección de espacios vectoriales $\Lambda^p(X)$ [$C_p(X)$] sobre \mathbb{R} , y tiene un operador de coborde [borde] tal que :

$$\begin{array}{lll} \text{coborde } d : \Lambda(X) \rightarrow \Lambda(X), & d\Lambda^p \subset \Lambda^{p+1}, & d^2 = 0 \\ \text{borde } \partial : C(X) \rightarrow C(X), & \partial C_p \subset C_{p-1}, & \partial^2 = 0. \end{array}$$

Una forma ω tal que $d\omega = 0$ recibe el nombre de **cociclo (forma cerrada)**.

Una cadena finita C tal que $\partial C = 0$ recibe el nombre de **ciclo**.

Una forma ω tal que $\omega = d\theta$ recibe el nombre de **coborde (cofrontera o forma exacta)**.

Una cadena finita C tal que $C = \partial B$ recibe el nombre de **borde (frontera)**.

Nótese que :

$$\begin{array}{l} \omega = d\theta \Rightarrow d\omega = 0 \text{ pero } d\omega = 0 \not\Rightarrow \omega = d\theta \\ C = \partial B \Rightarrow \partial C = 0 \text{ pero } \partial C = 0 \not\Rightarrow C = \partial B \end{array}$$

Sea $Z^p[Z_p]$ el espacio vectorial de los cociclos [ciclos] de grado [dimensión] p , sea $B^p[B_p]$ el espacio vectorial de los cobordes [bordes] de grado [dimensión] p . Como $d^2 = 0$, $B^p \subset Z^p$, y como $\partial^2 = 0$, $B_p \subset Z_p$.

El espacio $H^p = Z^p/B^p$ es el **espacio de p -cohomología** de X . Los elementos de $H^p(X)$ son conjuntos equivalentes de cociclos. Dos cociclos pertenecen al mismo conjunto equivalente, o son **homologos** si y sólo si difieren por un coborde, i.e. $\omega_1 \sim \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 - \omega_2 = d\theta$.

Análogamente $H_p = Z_p/B_p$ es el **espacio de p -homología** de X . Dos ciclos son **homólogos** (es decir, pertenecen a la misma clase de homología) si y sólo si difieren por un borde.

La dimensión del grupo de p -cohomología [u homología] es llamado el **número de Betti** b^p [b_p] de X .

Bibliografía

[A] Arnold, V.I.

Mathematical Methods of Classical Mechanics.

Segunda ed. Serie GTM, Springer. 1997.

[Ba] Baez, John; Muniain, Javier P. de,

Gauge Fields, Knots, and Gravity.

World Scientific Press, Singapore, 1994.

[Br] Brzezinski, T. *Quantum fibre bundles: An introduction*

[B-M] Brzezinski, T. y Majid, S. *Quantum group gauge theory on quantum spaces*

Comm. Math. Phys. **157** (1993) 591-638.

[Ch] Choquet-Bruhat, Y.; DeWitt-Morette, C, et al.

Analysis, manifolds and physics.

630 p, ed. revisada. Ed. North-Holland Physics Publishing
1982

[Co] Connes, Alain.

Noncommutative Geometry.

661 p, Academic press. ed inglesa. 1994.

[Co2] Connes, Alain, A.H. Chamseddine *The spectral action principle*

Comm. Math. Phys. **182** (1996) 155-176.

[Cq] Coquereaux, Robert.

Espaces Fibrés et Connexions.

234p. 1998

[Du1] Đurđević, Mićo. *Geometry of Quantum Principal Bundles I*

Comm. Math. Phys. **175** (1996) 457-521.

[Du2] Đurđević, Mićo. *Geometry of Quantum Principal Bundles II*

Rev. Math. Phys. Vol. 9, No. 5 (1997) 531-607

[Du3] Đurđević, Mićo. *Quantum Principal Bundles and corresponding Gauge theories*

[Go] Goldstein, Herbert

Classical Mechanics

2nda ed. Ed Addison Wesley, 672p.

[La] Landi, G,

An introduction to Noncommutative Spaces and their Geometry

181 p. 1997.

[L-M] Landi, G, Rovelli Carlo; *General relativity in terms of Dirac eigenvalues*

Physical Review Letters Vol. 78 Num 16.

[Ma] Madore, J.

An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its physical applications.

258 p. LMS lecture notes 206, DRAFT Version 1998.

[Mo] Mo-Lin Ge, Bao-Heng Zhao.

Introduction to Quantum group and Integrable massive models of quantum Field theory.

Nankai Lectures on Mathematical Physics 1989.

World Scientific.

[Na] Nakahara, M.

Geometry, Topology and Physics

505p. Graduate Student series in Physics

Ed. Adam Hilger.

[NS] Nash, C. and Sen, S.

Topology and Geometry for physicists.

311p. Ed. Academic Press. 1983.

[Ro] Rosenbaum, Marcos

The short scale structure of space-time and the Dirac operator.

International Journal of Theoretical Physics. **39** 1-22, 2000

[Sc] Schutz, Bernard F.

Geometrical methods of mathematical physics

250 p, Ed Cambridge University Press. 1980.

[Sp] Spivak, M.

A Comprehensive Introduction to Differential Geometry

Vols I y II

Ed. Publish or Perish

[Wa] Warner, Frank W.

Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups.

1971.

Índice de Materias

- álgebra
 - *-álgebra, 74
 - C^* -, 74
 - de Hopf, 87
 - exterior, 26
 - graduada, 27
 - normada, 74
- álgebra de Lie, 139
- acción
 - adjunta, 29
 - izquierda, 29, 105
 - mecánica, 40
- atlas, 12
 - equivalentes, 12
 - simpléctico, 147
- autoadjunto, 75
- base, 17
 - dual, 24
- biálgebra, 87
- bimódulo, 79
- cálculo
 - universal, 81
- campo hamiltoniano, 49
- campo vectorial, 17, 23
- caracter, 78
- carta, 12
- coálgebra, 87
- cociclo, 154
- cohomología, 154
- conexión
 - 1-forma de, 32
 - de Ereshmann, 33
 - en hfp, 30
 - en la trivialización local, 33
- constantes de estructura, 29
- coordenadas, 12
 - de un haz fibrado, 22
- curva, 13
- curvatura, 64, 108
- derivación, 15
 - interna, 80
- derivada
 - covariante, 34, 109
 - exterior, 26
- diferencial
 - encajada, 108
- dimensión
 - del triple espectral, 96
- ecuaciones de Euler-Lagrange, 40
- Ecuaciones de Hamilton-Jacobi, 45
- ecuaciones de Maxwell, 51
- espacio
 - horizontal, 30
 - vertical, 29
- espacio-fase, 47
- espectro, 78, 92
- estado, 84

- estructura, 12
- fibra, 17
- flujo hamiltoniano, 143
- forma
 - 1-, 25
 - de Faraday, 52
 - de volumen, 55
 - p-, 25
- forma simpléctica, 45
- función
 - de transición, 12, 20
 - en una variedad, 13
 - simpléctica, 46
- Gelfand
 - Teorema de, 78
 - transformación de, 78
- Gelfand-Naimark-Segal
 - Teorema de, 85
- germen, 14
- grupo de Lie, 139
- grupo estructural, 20
- Hamiltoniano, 44
- hamiltoniano, 49
- haz, 17
 - cotangente, 24
 - fibrado, 17
 - principal, 28
 - principal cuántico, 102, 103
 - tangente, 17
- ideal
 - maximal, 75
- ideal izquierdo, 75
- identidades de Bianchi, 66
- infinitesimales, 92
- integral, 96
- involución, 74
- lagrangiano de Yang-Mills, 67
- levantamiento horizontal, 34
- métrica, 55
- morfismo
 - *-, 75
 - entre haces, 21
- norma, 64
 - campo de, 67
 - ley de transformación de, 63
 - libertad de, 60
 - local, 67
 - potencial de, 33, 64
- operador estrella, 56
- p-rectángulo, 153
- paréntesis de Lie, 77
- Principio de Hamilton, 40
- producto exterior, 25
- proyección, 17
- pull-back, 13
- representación, 75
- residuo de Wodzicki, 94
- resolvente, 92
- sección, 33
- sección transversal, 23
- Stokes
 - teorema de, 153
- transformación canónica, 145
- Transformada de Legendre, 42
- transporte paralelo, 34
- traza de Dixmier, 93
- triple espectral, 95

canónico, 96
trivialización
 local, 20, 103
variedad, 12
 Riemanniana, 55
vector
 covariante, 24
 tangente, 15