

7



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

## ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"

### APLICACIONES DE MODELOS MATEMATICOS EN EL PARQUE DE DIVERSIONES "LA FERIA DE CHAPULTEPEC"

T E S I S

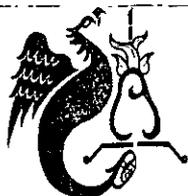
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
LICENCIADO EN MATEMATICAS  
APLICADAS Y COMPUTACION  
P R E S E N T A:  
DELGADO ELIZONDO CHRISTIAN CARLOS  
ESCALONA REYES MARCO ANTONIO  
SANCHEZ JURADO THELMA GABRIELA



ASESOR: FIS. MAT. JORGE LUIS SUAREZ MADARIAGA  
COASESOR: ACT. MARIA DEL CARMEN GONZALEZ VIDEGARAY

278960

ACATLAN, EDO. DE MEX. 2000





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# *Agradecimientos*

# **C h r i s t i a n**

## **GRACIAS A DIOS.**

*Por darme fuerza y salud para poder concluir una de mis metas.*

## **GRACIAS A MIS PADRES.**

*Por su cariño, consejos y apoyo incondicional que en todo momento me han brindado.  
(En especial a mi madre por sus desvelos)*

## **GRACIAS A MIS HERMANOS.**

*Por su cariño, apoyo y motivación.*

## **GRACIAS A MIS AMIGOS.**

*Por compartir esos momentos que hicieron mas grata la carrera.*

*Especialmente a:*

*Toño, Alain, Victor, Alma, Mary, etc.*

## **GRACIAS A MIS COMPAÑEROS Y AMIGOS.**

*Marco y Thelma, por invitarme a realizar este trabajo.*

## **GRACIAS A LA LIC. ROCÍO RENDÓN, ACT. CRUZ MONTES, LIC. DOLORES AGUILERA, LIC. GERARDO ARZATE.**

*Por su aceptación, comprensión, motivación y apoyo incondicional.*

## **GRACIAS A LAURA.**

*Por su Amor y comprensión.*

## **GRACIAS A MIS MAESTROS.**

*Por haber compartido sus conocimientos, los cuales aprovecharé al máximo.*

## **GRACIAS A LOS SINODALES.**

*Por haber dado el Vo.Bo. a esta tesis.*

## **GRACIAS AL ASESOR Y COASESORA**

*Fis. Mat. Jorge Luis Suarez Madariaga,  
Act. Ma. Carmen González Videgaray.*

# *Agradecimientos*

**M**  
**a**  
**r**  
**c**  
**o**

**A Dios.**

*Gracias Señor por haberme permitido lograr este sueño, y por darme los padres que tengo.*

**A Mis Padres.**

*Gracias Señores por darme la oportunidad de vivir y por ser mis guías. Los amo. Se los debo todo.*

**A Mis Hermanos.**

*Por darme la oportunidad de crecer junto a ustedes.*

**A Janet, Fernandito y Román.**

*Por latosos.*

**A Rodolfo.**

*Gracias tío por creer en mí.*

**A Christian.**

*Por ser el mejor amigo y hermano que se pueda tener.*

**A Victor, Alain y Luis.**

**Al C.P. Mario Hernández Verduzco.**

*Gracias porque he vivido lo mejor de mi vida con los Pumas.*

**Al Prof. Luis Ríos.**

*Gracias por enseñarme el significado de no darse por vencido.*

**Al Ing. Arturo Ang Hipp.**

*Gracias por todo su apoyo.*

**A Rosalba.**

*Gracias por tu amor y apoyo.*

**A mi hija.**

**Te amo Alejandra.**

**Al Prof. Jorge Luis Suarez Madariaga.**

*Gracias por sus enseñanzas.*

## *Agradecimientos*

**T  
h  
e  
l  
m  
a**

*El amor es vivir, vivir es libertad,  
libertad es decidir, decidir es elegir un  
camino y el camino eres Tú.*

*Agradeciendo:*

*A Dios por haberme dado el éxito*

*A mis padres por haber confiado en mí*

*A la Universidad Nacional Autónoma  
de México por la oportunidad*

*A mis profesores por el conocimiento  
brindado*

*A mis compañeros por su apoyo y  
amistad.*

# Indice

<b>INTRODUCCION</b>	.... i
<b>OBJETIVO</b>	.... V
<b>CAPITULO I</b>	
<b>ANTECEDENTES</b>	
1.1 Descripción del parque de entretenimiento "La Feria de Chapultepec" ...	1
1.2 Descripción operacional del parque	.... 6
1.3 Clasificación de los juegos	.... 7
1.4 Medidas operacionales del parque en diferentes temporadas	.... 9
1.5 Clases de clientes y sus experiencias con el servicio del parque	.... 10
1.6 Descripción de los problemas del parque	.... 11
<b>CAPITULO II</b>	
<b>PANORAMA SOBRE EL ENFOQUE DE MODELADO EN LA OPTIMIZACION</b>	
2.1 Método científico	.... 14
2.2 Planteamiento del problema	.... 17
2.3 Construcción del modelo	.... 18
2.3.1 Tipos de modelos	.... 19
2.3.2 Modelos descriptivos y explicativos	.... 20
2.3.3 ¿Por qué se hace necesario modelar?	.... 22
<b>CAPITULO III</b>	
<b>TEORIA DE REDES Y MODELO PARA EL DISEÑO DE TOURS</b>	
3.1 Teoría de redes : Conceptos básicos	.... 25
3.2 Problemas prototipos en el análisis de redes	.... 29
3.3 Algoritmo de Dijkstra	.... 30
3.4 Modelo para el diseño de Tours	.... 35
3.4.1 Reconocimiento del problema	.... 35
3.4.2 Modelo para el diseño de tours	.... 35
3.4.2.1 Consideraciones para el diseño del modelo	.... 36
3.4.2.2 Etapas de solución del modelo	.... 40
3.4.2.3 Aplicación del modelo	.... 41
3.4.2.4 Conclusiones	.... 50
3.5 Matriz de transición	.... 51
3.5.1 Metodología para la recolección de datos	.... 51
3.5.2 Obtención de la matriz de transición y Vector de llegadas	.... 52

## CAPITULO IV

### APLICACION DE TEORIA DE JUEGOS

4.1 Introducción	.... 55
4.2 Juegos de suma-cero para dos oponentes	.... 57
4.2.1 Puntos de silla	.... 60
4.2.2 Estrategias mixtas	.... 61
4.2.3 Dominación	.... 63
4.2.4 Soluciones algebraicas o matriciales	.... 65
4.2.5 Soluciones gráficas de juegos de $(2 \times N)$ y $(M \times 2)$	.... 67
4.3 Juegos de suma diferente de cero o metajuegos	.... 69
4.4 Una aplicación de la teoría de juegos	.... 72
4.4.1 Planteamiento del problema	.... 72
4.4.2 Estrategias	.... 73
4.4.3 Modelos matemáticos	.... 73
4.4.4 Forma normal del juego	.... 77
4.4.5 Conclusiones	.... 85

## CAPITULO V

### APLICACION DE POLITICAS OPTIMAS Y PROGRAMACION LINEAL

Introducción	.... 87
5.1 Procesos de Markov	.... 88
5.2 Clasificación de los estados de las cadenas de Markov	.... 97
5.3 Propiedades a largo plazo de las cadenas de Markov	.... 99
5.4 Solución con programación lineal del problema de decisión de Markov	.... 102
5.5 Aplicación de políticas óptimas en "La Feria de Chapultepec"	.... 105
5.5.1 Construcción del modelo y solución	.... 106
5.5.2 Conclusiones	.... 111

## CAPITULO VI

### APLICACION DE SIMULACION Y METODOLOGIA DE BOX-JENKINS

6.1 ¿Qué es la simulación?	.... 113
6.1.1 Cuando usar la simulación	.... 113
6.1.2 Conceptos básicos de la simulación	.... 115
6.2 Metodología de Box-Jenkins	.... 116
6.2.1 Series de tiempo	.... 116
6.2.2 Identificación del modelo	.... 120
6.2.3 Estimación del modelo	.... 122
6.2.3.1 Inicialización de la serie	.... 124
6.2.3.2 Estimación no lineal de los parámetros del modelo	.... 125

6.2.3.3 Obtención de un valor inicial para los parámetros	....	127
6.2.4 Examen del modelo	....	129
6.2.5 Modelos estacionales	....	132
6.3 Análisis de la asistencia al parque "La Feria de Chapultepec" (serie de tiempo) con la introducción de un nuevo paquete	....	136
6.3.1 Planteamiento del problema	....	136
6.3.2 Construcción del modelo (series de tiempo)	....	136
6.3.3 Análisis de resultados	....	146
6.3.4 Recolección de los datos para la simulación del nuevo paquete	....	147
6.3.5 Simulación de un nuevo paquete	....	148
6.3.6 Conclusiones		
Comparación de la asistencia al parque (serie de tiempo) y la simulación del nuevo paquete	....	149
Anexos	....	150
<b>CONCLUSIONES</b>	....	153
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	....	155

# INTRODUCCION

El asombroso crecimiento de las industrias en las últimas décadas ha traído consigo grandes impactos en la economía de muchos países, así como también la complejidad de resolver problemas que se presentan en cada empresa a todo momento. Es tangible que junto con los beneficios que trae el crecimiento de cualquier empresa, el aumento en el grado de especialización crea nuevos problemas tales como la tendencia a convertirse en imperios con sus propias metas y sistemas, perdiendo la visión de cómo sus actividades y objetivos encajan con los de toda la organización.

Otro problema relacionado con esto es que conforme la complejidad y la especialización crecen, se vuelve más difícil asignar recursos disponibles a las diferentes actividades de la forma más eficaz para toda la organización. Este tipo de problemas y la necesidad de encontrar la mejor forma de resolverlos proporcionan el ambiente adecuado para el desarrollo de modelos matemáticos.

Es por eso que nos damos la oportunidad de buscar dicho ambiente en "La Feria de Chapultepec".

En la Ciudad de México el ritmo de vida que se lleva desde hace tiempo es demasiado ajetreado; el ir y venir de un lado a otro aunado al denso tráfico tanto vehicular como de transeúntes ocasiona que la vida de las personas se convierta rutinaria y tediosa.

Años atrás la distracción se encontraba en las ferias que llegaban a los pueblos y a las ciudades, los circos, las carpas, etc. En la actualidad esos lugares han sido reemplazados por grandes parques de diversiones, extensos parques acuáticos, lujosas plazas comerciales, enormes cines, etc.

En el presente trabajo se analiza uno de los lugares antes mencionados: la Feria de Chapultepec, ya que es uno de los lugares más accesible y céntrico al pueblo en comparación a similares como Reino Aventura.

El trabajo presenta un análisis desde diversos enfoques, tales como la Programación Lineal, Simulación, Análisis de Series de Tiempo, Modelos Markovianos de Decisión y Teoría de Juegos.

En el primer capítulo se dan tanto los antecedentes como la descripción del parque de diversiones, en la que se incluye las áreas en que se divide y el porque de estas, los juegos que componen cada área, la descripción operacional del parque, así como también la clasificación de los juegos y sus

características, y preferencias de los clientes hacia cada uno de los juegos. Se describen además los principales problemas que enfrenta el parque.

En el capítulo dos se dan los elementos necesarios para dar posibles soluciones a los problemas de la Feria de Chapultepec. Se habla un poco acerca del método científico, ya que es esencial para la resolución de cualquier tipo de problema.

En el tercer capítulo se tiene como propósito dar conceptos básicos de redes, problemas prototipo de redes, Algoritmo de Dijkstra y el porque se utiliza éste, para poder realizar la aplicación del Modelo para Diseño de Tours.

En el capítulo cuarto se darán conceptos elementales de Teoría de Juegos, tales como juegos de suma-cero, estrategias puras y mixtas, forma extendida y normal de un juego; esto con el fin de realizar una aplicación en la que se reconocen dos jugadores ( visitante y empresa ) y sus respectivas estrategias, para plantear una forma alterna de diseñar tours.

En el capítulo cinco se aplican conceptos de procesos de Markov, la clasificación de estados de las cadenas de Markov, modelos de decisión Markovianos, así como también se presentará el Algoritmo de Políticas Optimas. De esta manera podremos realizar una aplicación que compare las políticas

actuales de la administración de la Feria, es decir, la decisión de continuar con el paquete Ecolín y el Pase Mágico, y la política que se propone con el Modelo para el Diseño de Tours.

En el sexto capítulo se dan conceptos de Simulación, así como de la Metodología de Box – Jenkins, para llevar a cabo un análisis con respecto al número de entradas de visitantes a la Feria de Chapultepec, con los paquetes existentes (Pase Mágico y Paquete Ecolín), comparándolo con la simulación de entradas de un nuevo paquete (Modelo para el Diseño de Tours). El objetivo principal de esta aplicación es mostrar si es conveniente o no crear un nuevo paquete para optimizar utilidades tomando en cuenta la satisfacción de los clientes.

# OBJETIVO

Analizar y aplicar conocimientos de series de tiempo, optimización, teoría de juegos, teoría de gráficas, algoritmo de políticas óptimas y simulación adquiridos en la Licenciatura de Matemáticas Aplicadas y Computación, con el fin de lograr el diseño de varias aplicaciones encaminadas al beneficio de la administración del parque de diversiones "La Feria de Chapultepec".

# HIPOTESIS

El uso de las aplicaciones diseñadas logrará un equilibrio entre los beneficios tanto de la empresa, que podrá ser capaz de brindar un mejor servicio y así aumentar sus utilidades, como de los clientes con respecto a maximizar sus niveles de satisfacción durante su estancia en el parque.

# **CAPITULO I**

## **ANTECEDENTES**

# I. ANTECEDENTES

Uno de los primeros pasos para resolver cualquier problema es observar de manera muy minuciosa el sistema en el que se encuentra dicho problema (entiéndase la palabra sistema como el conjunto de elementos interrelacionados entre sí que funcionan con un objetivo común).

De esta manera, en la presente sección daremos la descripción del Parque de Diversiones " La Feria de Chapultepec ", en la que incluiremos las áreas en las que está dividida la Feria y porqué, los juegos que componen cada área, la descripción operacional del parque, así como también la clasificación de los juegos y sus capacidades, duración del paseo, tiempo de carga y descarga de visitantes en cada uno de ellos, además del costo de cada juego y preferencias.

También se incluirán las medidas que la Administración de La Feria de Chapultepec toma en casos en los que la asistencia de visitantes al Parque es mínima o en caso contrario, en períodos vacacionales, en los que el Parque está generalmente lleno a su capacidad total, los Paquetes que la Administración ofrece para poder acceder al Parque, tales como el Paquete Ecofín, Pase Mágico, y promociones.

Consideramos que es importante conocer las políticas de la empresa, en cuanto a la Administración operacional del Parque, ya que debemos procurar no ir en contra de ellas. Tal es el caso de la importancia de mantener la seguridad de los visitantes al abordar los juegos, y en general en su estancia en la Feria, además de tratar que la satisfacción de los clientes sea cada vez mayor.

Mencionaremos también, las diferentes clases de clientes que asisten al Parque y las preferencias que tienen con respecto a algunos juegos; esto es de suma importancia para el presente análisis ya que para poder lograr los objetivos primordiales de la empresa con lo que respecta a la Administración de la demanda de los juegos, es necesario entender dos aspectos:

- a) Las preferencias de los visitantes, así como el comportamiento que mantienen en el Parque ( rutas ).
- b) Evaluar las implicaciones que tendría la Feria una vez implementados los Modelos que aquí se desarrollarán, esto con lo que respecta a los comportamientos de transición de los clientes en el Parque.

Terminaremos este primer capítulo hablando sobre los problemas del Parque, de los cuales algunos son bien conocidos por la empresa y otros que al parecer no los han detectado.

## 1.1 DESCRIPCIÓN DEL PARQUE DE ENTRETENIMIENTO "LA FERIA DE CHAPULTEPEC"

En el año de 1964, la Ciudad de México ya se constituía como una de las ciudades más importantes y densamente poblada de nuestro planeta.

Nuestras autoridades, conscientes de que la recreación es una necesidad, principalmente para las clases populares, crearon un centro recreativo con carácter popular, dentro de la Segunda Sección del Bosque de Chapultepec; 14 aparatos mecánicos configuraban estas instalaciones, entre los cuales destacó la Montaña Rusa, que en ese momento fue de las más grandes a nivel mundial.

Por espacio de 26 años siguió el Gobierno Federal por conducto de la Delegación Miguel Hidalgo, administrando este Centro Recreativo con lapsos hasta de dos años en los cuales se veían obligados a cerrar las instalaciones por falta de un mantenimiento adecuado.

Y fue en el año de 1993 cuando las autoridades decidieron licitar a la iniciativa privada las ya mencionadas instalaciones de la Feria de Chapultepec.

Un grupo importante de industriales y diversos empresarios presentaron su solicitud para adquirir el contrato de explotación de la Feria.

Fue Grupo Empresarial Chapultepec S. A. de C. V. quien recibió de las autoridades del Departamento del Distrito Federal y de la Delegación Miguel Hidalgo las instalaciones de la Feria de la Segunda Sección de Chapultepec, comprometiéndose a reabrir sus puertas al público 100 días después. Así el 14 de Diciembre de 1993 las nuevas instalaciones de la Feria de Chapultepec Mágico fueron inauguradas por el C. Presidente de la República Mexicana, Carlos Salinas de Gortari, y el Grupo Empresarial Chapultepec cumplió con el compromiso adquirido tres meses antes.

Para poner en marcha la nueva Feria de Chapultepec Mágico, fue necesario invertir 87 millones de nuevos pesos y se contó con el trabajo de 3 mil operarios en tres turnos, mismos que laboraron a toda capacidad para poder cumplir con el cometido, todos ellos comandados por ingenieros y técnicos calificados y expertos en este tipo de instalaciones.

La reestructuración del Parque ( que cuenta con una superficie de 3 hectáreas ) se realizó desde sus cimientos. La Montaña Rusa fue la única que conservó su ubicación por obvias razones; se rehabilitaron 13 de los antiguos juegos adaptándoseles un sistema de alta seguridad y se adquirieron 43, quedando un total de 56 diversiones para el público.

Empresa cien por ciento mexicana encabezada por el Lic. Javier Miguel Afif , Presidente del Consejo, que ha vigilado celosamente que el personal de la ya mencionada empresa sea nacional en todas sus áreas: ingenieros, técnicos, operadores, administradores, desde luego funcionarios y todo tipo de personal son mexicanos.

Como dato complementario, para la remodelación de la tradicional Montaña Rusa, fue necesario el trabajo de 230 personas, de las cuales 175 se dedicaron a pintarla en un tiempo de 1080 horas y se utilizaron 40 mil litros de pintura; los 45 trabajadores restantes se dedicaron a la remodelación y pruebas del sistema de cómputo que la controla y con el cual se logra dar una mayor seguridad a los usuarios. La Montaña Rusa realiza un recorrido de 1240 mts. a lo largo de su estructura y cuenta con tres pendientes en donde la mayoría tiene 33 mts. de altura, una caída máxima de 24 mts. y la máxima velocidad que pueden alcanzar los vagones es de 72 km/h. Su recorrido es de 4 minutos 10 segundos.

La Feria cuenta con 4 variedades de Montaña que son: La Montaña Rusa, El Cascabel, El Tornado y el Dragón. Cuenta además con La Nao de China que realiza giros de hasta 360 grados. Los Troncos, diversión semiacuática, dos trenes escénicos, uno que realiza un recorrido

por la Segunda Sección del Bosque y el otro que efectúa un paseo por casi todo el interior de la Feria.

De entre las novedades se encuentra también, el Gran Premio, donde los fanáticos a la velocidad en pistas pueden encontrar un desahogo divertido.

Para la mayor diversión del público, la Feria de Chapultepec Mágico cuenta también con:

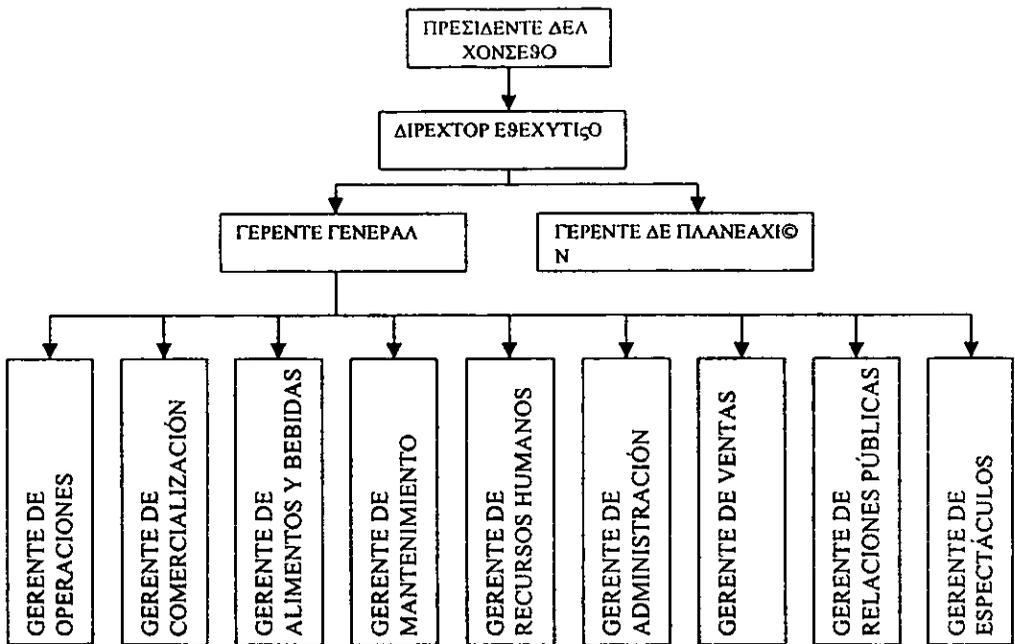
El Puente Mezcala, Los Mini Carros Chocones, El Payaso Loco, Las Lanchitas Harbor, La Medusa, La Cabaña Chueca, Las Cascadas, El Rescate, La Casona de los Sustos, Los Carros Chocones, El Carrusel Doble, que parece haber salido de los cuentos infantiles, El Tren del Amor, El Ciclón, Aladino, y los 11 Juegos de Destreza.

Uno de los objetivos principales del Parque es brindar entretenimiento y diversión a todo el público. La labor de interés social que la Feria de Chapultepec brinda, principalmente se enfoca a niños de muy escasos recursos. Se inició en el mes de Abril de 1994 dedicándoles un día en el cual 25 mil pequeños de zonas marginadas del área metropolitana y 100 niños traídos de regiones indígenas de diversos Estados de la República, como los son niños de la zona de Chiapas, de la zona Tarahumara, de Estados aledaños a la Ciudad de México y la Sierra Oaxaqueña, disfrutaron gratuitamente de todos y cada uno de los juegos del Parque.

Independientemente de la temporada, se les otorga acceso gratuito a las instalaciones a niños de diferentes instituciones de asistencia social, niños de la calle, etc.

Se desarrollan eventos en apoyo a asociaciones, cuyo fin es brindarle atención a niños que padecen enfermedades terminales. Se hacen aportaciones a instituciones de carácter social que lo requieran.

La Feria de Chapultepec tiene una planilla compuesta por 800 personas y que quedan constituidas en las siguientes áreas: Un Consejo de Administración, Dirección Ejecutiva, Gerencia General y las Gerencias de Operaciones, Comercialización, Alimentos y Bebidas, Mantenimiento, Ventas, Espectáculos, Recursos Humanos y Relaciones Públicas.



Cada uno de los gerentes que encabezan las distintas áreas, tiene la responsabilidad de que sus departamentos funcionen en óptimas condiciones, los cuales se coordinan entre sí para lograr su cometido.

Desde que el Grupo Empresarial Chapultepec tomó posesión de las instalaciones, se ha tenido interés en darle destacado lugar a los medios de difusión y es así como se ha logrado ser escenario de entrevistas en los principales programas de televisión con apertura nacional, ser noticia de primera plana en casi todos los periódicos de la Ciudad de México, ser escenario de un número importante de telecomedias, programas de entretenimiento y se ha realizado una infinidad de transmisiones a control remoto de las principales cadenas radiofónicas de nuestro país. También se organizan periódicamente conferencias de prensa para informarles de los eventos a realizar; en algunos casos se han organizado convivios con distintos medios, como es el tradicional desayuno para los hijos de periodistas y de medios en general con motivo del Día de Reyes, en los cuales se les brinda un Show infantil, se les dan obsequios y se rifan bicicletas.

La Feria de Chapultepec Mágico no ha dejado de ser popular, por tal motivo ofrece los siguientes paquetes para acceder al Parque a un costo bajo :

### Paquete ECOLIN

Este paquete incluye todos los juegos, todas las veces que se desee (incluyendo Casona del Terror), a excepción de que Montaña Rusa y Cascabel sólo será un recorrido.

No se incluyen los juegos: Supernova, Gran Premio y Destreza.

El costo de este paquete es de \$75.

### Pase Mágico

Este pase incluye 30 juegos, de los cuales 22 son para niños y 8 para adultos.

El costo es de \$15.

Es importante hacer notar que según el tipo de gente que asista al parque (niños, jóvenes y adultos) deberá tomar en cuenta las restricciones de estatura, de esta manera podrá hacer una mejor elección del paquete que más les convenga. Las restricciones de estatura se presentan en la siguiente tabla:

Juego	Estatura	Juego	Estatura
Avión del Amor	1.35 min.	Tamborcitos	1.40 max
Batidora	1.30 min	Cascadas	1.10 min
Castillo Fantasia	1.40 max	Cascabel	1.20 min
911	1.40 max	Dragón	1.10 min
Látigo Volador	1.20 min	Lanchitas	1.40 max
Mini-rueda	1.40 max	Nao de China	1.30 min
Montaña Rusa	1.45 min	Tren Espacial	1.35 max
Rueda Doble	1.35 min	Batimóvil	1.40 max
Tren Periférico	s / e	Castillo Feliz	1.40 max
Trabat	1.20 min	Dackar	1.40 max
Bomberos	s / e	Laberinto Infantil	1.40 max
Sillas Voladoras	.90min 1.40max	Chocones	1.30 min
Pulpo	1.20 min	Gran Premio	1.50 min
Topolinos	1.40 max	Minichocones	1.40 max
Julio Verne	s / e	Puente Mezcala	1.40 max
Barón Rojo	1.40 max	Tren Expreso	s / e
Carrusel Infantil	1.35 max	Tornado	1.30 min
Supernova	1.20 min	Show de Magia y Circo	s / e
Troncos	3 años min	Martillo	1.45 min
Tren del Amor	1.40 min	Payaso Loco	1.00 min 1.40 max
Carrusel Doble	s / e	Sombrillas	1.30 min
Castillo de Cristal	s / e	Tazas Locas	1.40 max
Castillo Mágico	1.10 max	Tren Río Grande	1.40 max
Fórmula 1	1.35 max	Aladino	1.38 min
Látigo Infantil	1.40 max	Cabaña Chueca	1.10 min
Monorriel	1.45 max	Casona del Terror	8 años min
Supersónicos	1.40 max	Ciclón	1.10 min

s / e : sin limite de estatura

Tabla 1.1

## 1.2 DESCRIPCIÓN OPERACIONAL DEL PARQUE

Es importante mencionar que el Parque de Diversiones se encuentra dividido en tres áreas, debido a los siguientes propósitos:

- Brindar la mayor seguridad posible a los visitantes teniendo así salidas de emergencia en cada área.
- Para una mejor operatividad de los juegos. Se tienen operarios, técnicos e ingenieros especializados en los juegos de cada área, esto también para seguridad de los visitantes.
- Brindar un Parque limpio a los visitantes. Según la Administración es más rápido limpiar por áreas que el Parque en su totalidad.
- Obtener un mayor control en la Administración del Parque. Se cuenta con personal encargado de resolver o detectar cualquier problema en cada área.

A continuación se describirá cada una de las áreas de la Feria de Chapultepec:

### AREA 1

Esta área es la más grande en terreno, ya que consta de juegos que son bastante amplios, tales como La Montaña Rusa. Se encuentran 17 juegos que en su mayoría son considerados los juegos más agresivos, es por ello que generalmente es gente joven la que invierte la mayor parte de su tiempo en esta área. Los juegos pertenecientes a dicha área son:

Palacio de Cristal, Castillo Fantasía, Castillo Infantil, Cidón, Cruce del Expreso, Dragón, Expreso, Fórmula 1, Gran Premio, Nao de China, Látigo Volador, Montaña Rusa, Pulpo, Trabat, Tren Espacial, Troncos, y Casona del Terror.

Consta de tres salidas de emergencia y es el área que contiene mayor número de técnicos especialistas en los juegos ya citados.

Los juegos preferidos de esta área son La Montaña Rusa, Gran Premio, Nao de China y Troncos.

### AREA 2

En contraste con el área 1, esta zona es la más pequeña de todas a pesar de que contiene el mayor número de juegos. Consta de 22 juegos, los cuales en su mayoría son juegos menos agresivos que los del área 1, y son generalmente para todo tipo de visitantes ( más adelante mencionaremos qué tipo de visitantes asisten al Parque ). Los juegos que se encuentran en esta zona son:

Arcoiris, Avión del Amor, Barón Rojo, Batimóvil, Bomberos, Cabaña Chueca, Cascabel, Castillo Feliz, Castillo Mágico, Chocones, Julio Verne, Laberinto, Látigo Infantil, Martillo, Monorriel, Payaso Loco, Puente Mezcala, Rueda Doble, Sillas Voladoras, Supernova, Supersónicos y Tazas Locas.

En la presente área existe un lugar llamado Destreza, en la cual hay varios juegos al estilo de Tiro al Blanco, en donde se organizan varios concursos.

Debido a que esta zona es la más pequeña sólo se cuenta con una salida de emergencia.

### AREA 3

La primer zona que los visitantes ven es precisamente esta área, ya que el acceso al Parque se encuentra ubicado aquí. La presente zona contiene juegos básicamente infantiles, aunque existen algunos que causan gran sensación a todo el público, tales como Carrusel Doble, Tornado, Aladino y Cascadas. En esta área se presenta todo tipo de gente. Se encuentran aquí 17 juegos que son:

Aladino, Batidora, Cantoya, Carrusel Doble, Cascadas, Emergencia 911, Fantasia, Lanchitas Harbor, Mini Chocones, Mini Rueda, Pirata Infantil, Sombrillas, Tamborcitos, Topolinos, Tornado, Tren del Amor y Tren Rio Grande.

Se encuentra también Servicio de paquetería y Lockers además de dos salidas de emergencia. El estacionamiento forma parte de esta zona.

### 1.3 CLASIFICACIÓN DE LOS JUEGOS.

Desde una perspectiva de operaciones, los juegos ofrecidos en el Parque pueden ser clasificados en tres categorías:

1. Juegos en Grupo
2. Juegos Continuos
3. Juegos Individuales

Los **juegos en grupo** son aquellos en donde los clientes son agrupados y no necesariamente las unidades deben ser llenadas en su totalidad por los clientes. Las Tazas Locas y Troncos son un ejemplo de ellos.

Los **juegos continuos** son aquellos en los cuales es necesario llenar todas las unidades en su totalidad ( asientos ) para que el juego tenga un buen funcionamiento. Un ejemplo de este tipo de juegos son el Tornado y Supernova.

Los **juegos individuales**, como su nombre lo indica, son paseos en los que las unidades de operación son para una sola persona. Ejemplo de ello es el Martillo.

La administración efectiva de los juegos requiere de un claro entendimiento de la capacidad del juego. Generalmente, la capacidad nominal de un juego está determinada por el número de unidades operando ( carros, botes, trenes, etc. ), y el número de asientos por unidad operando.

Para nuestro estudio, hemos descartado los juegos infantiles, la justificación de ello es que en base a encuestas realizadas por la Administración del Parque, un poco más del 76% de visitantes son personas cuya edad oscila entre los 15 y 24 años de edad, así los juegos infantiles nunca están saturados, ni siquiera en temporadas vacacionales, de esta manera el estudio a realizar no causaría ningún efecto en ellos. Otro punto importante es que la mayoría de los juegos se requiere de cierta estatura para poder acceder a ellos, estaturas que obviamente los niños no cumplirán

A continuación presentamos una serie de datos para cada juego incluido en este estudio, las cuales fueron utilizadas posteriormente para nuestro análisis:

JUEGO	TIPO DE JUEGO	CAPACIDAD (personas)	DURACIÓN	TIEMPO DE CARGA Y DESCARGA	TIEMPO TOTAL	PREFERENCIA (%)	COSTO
1. Tornado	Continuo	48	2.50	1.50	4.00	5.80 %	\$7
2. Avión del Amor	Grupo	8	2.00	1.50	3.50	0.39 %	*
3. Batidora	Grupo	36	2.00	1.30	3.30	0.08 %	*
4. Sombrillas	Grupo	20	2.00	1.30	3.30	0.08 %	*
5. Pulpo	Grupo	20	2.50	1.50	4.00	0.08 %	*
6. Julio Verne	Continuo	36	3.00	1.50	4.50	0.08 %	*
7. Cascabel	Continuo	28	3.00	1.40	4.40	11.99 %	\$8
8. Martillo	Individual	8	2.00	1.30	3.30	0.77 %	*
9. Tren del Amor	Continuo	40	3.00	1.30	4.30	1.75 %	\$5
10. Aladino	Continuo	36	2.30	2.00	4.30	3.52 %	\$6
11. Cascadas	Individual	s / I	1.00	1.30	2.30	0.82 %	\$4
12. Palacio de Cristal	Individual	s / I	2.30	1.00	3.30	0.08 %	\$4
13. Carrusel Doble	Grupo	60	2.30	2.00	4.30	0.08 %	\$5
14. Trabat	Grupo	40	3.00	1.30	4.30	0.08 %	\$4
15. Cabaña Chueca	Continuo	s / I	17.00	1.00	18.00	0.42 %	\$4
16. Montaña Rusa	Continuo	24 / 48	4.10	1.30	5.40	40.42 %	\$10
17. Dragón	Continuo	20	1.90	1.30	3.20	0.69 %	\$4
18. Carros Chocones	Grupo	140 / D 80	2.10	2.00	4.10	2.00 %	\$6
19. Gran Premio	Grupo	130 / D 60	2.00	1.00	3.00	0.08 %	P \$7 / C \$5
20. Látigo Volador	Continuo	24	2.00	1.00	3.00	0.08 %	*
21. Nao de China	Continuo	40	1.30	2.00	3.30	2.44 %	\$6
22. Casona del Terror	Individual	s / I	15.00	1.00	16.00	3.37 %	\$9
23. Ciclón	Continuo	40	2.00	1.30	3.30	0.08 %	\$4
24. Supernova	Continuo	48	3.00	1.30	4.30	3.09 %	\$6
25. Troncos	Grupo	72	3.00	1.00	4.00	8.27 %	\$6
26. Tazas Locas	Grupo	36	2.00	1.30	3.30	0.08 %	*

\* El juego esta incluido en el Pase Mágico

D : Dos personas

I : Individual

s / I : sin limite de capacidad

Tabla 1.2

Es importante mencionar que la capacidad observada de un juego puede diferir de la capacidad nominal. Para los juegos continuos e individuales, dichas capacidades son básicamente iguales; pero para juegos grupales, la capacidad observada está en función del número de visitantes agrupados y cargados en las unidades operando del juego. Los clientes individuales pueden desear sentarse solos, ocupando una unidad entera, al igual que lo hacen grupos o familias pequeñas. Como resultado, la capacidad observada del juego varía significativamente de la capacidad nominal y para algunos juegos llega a ser un 60% menor de la capacidad nominal.

#### 1.4 MEDIDAS OPERACIONALES EN EL PARQUE EN DIFERENTES TEMPORADAS

La complejidad en la administración de las operaciones del Parque se debe principalmente a la gran variación en los patrones de llegada de los clientes, en los que influyen hora del día, día, temporada del año, clima, etc. y desde luego las preferencias de los visitantes en cuanto a los juegos.

En cuanto a los patrones de llegadas de los visitantes, la Administración tiene algunas medidas importantes para el presente análisis, las cuales consisten en lo siguiente:

Normalmente en **temporadas escolares y días entre semana** la asistencia al Parque disminuye considerablemente, con lo que es necesario quitar algunas unidades, como en el caso de Los Troncos, el cual consiste en un paseo semiacuático circular, en donde se tiene que esperar a que todas las unidades lleguen a su destino. Ello explica que cuando hay poca gente es innecesario esperar unidades que estarán vacías.

Algunos juegos que necesitan peso, es decir que necesitan ser llenados casi en su totalidad, deben ser abiertos sólo en las horas pico, ya que de lo contrario podría ocasionarse un accidente; además, para la Administración de la Feria no le es conveniente esperar a los visitantes para que el juego sea llenado, y podemos agregar que en cuestiones monetarias tampoco le conviene tener varios juegos en funcionamiento si no serán usados con la frecuencia suficiente.

En casos extremos, cuando la asistencia fue demasiado baja, algunos juegos no son abiertos.

En contraste con las temporadas anteriores, es decir en **vacaciones o fines de semana**, el Parque toma las siguientes medidas con el propósito de agilizar el funcionamiento del Parque, ya que la asistencia aumenta considerablemente.

Anticipadamente, la Administración contrata personal eventual para operar los juegos y controlar a la gente más rápidamente, en los casos de carga y descarga de los juegos, en el orden de las filas, en dar las instrucciones pertinentes, etc.

Se aumenta la capacidad de los juegos, como es el caso de la Montaña Rusa, en la que existen 4 carros, de los cuales 2 son usados para todo el año y 2 son añadidos para esta temporada.

En horas pico, se trata de agilizar la carga y descarga de los visitantes, esto se logra con las llamadas plataformas, en las que mientras el juego esta funcionando se tiene ya contada a la

gente que ha de subirse a la siguiente vuelta o paseo. En el caso de la Montaña Rusa, puede estar funcionando el juego teniendo el siguiente carro cargado esperando sólo el término del viaje anterior para iniciar un nuevo paseo.

En cuestión de funcionamiento de los juegos, generalmente son usados automáticamente; pero en casos en que la asistencia al parque ha sobrepasado límites, pueden operarse en forma manual, así pudiendo disminuir el número de ciclos o aumentar la rapidez de los mismos.

Es importante comentar que estas medidas desde luego no son suficientes, ya que hemos observado que para muchos juegos el tiempo de espera es bastante amplio, las colas son largas y algunas personas no están dispuestas a esperar tanto tiempo.

### 1.5 CLASES DE CLIENTES Y SUS EXPERIENCIAS CON EL SERVICIO DEL PARQUE

Uno de los factores principales de nuestro estudio es considerar las clases de clientes que asisten al Parque, así como también sus experiencias, ya que juegan un papel importante en las evaluaciones de las operaciones del mismo. La complejidad en la administración de las operaciones del Parque se debe principalmente a la gran variación en los patrones de llegada de los clientes y sus preferencias de entretenimiento.

Los clientes exhiben una gran variación en sus preferencias, y sus percepciones del servicio pueden ser clasificados en 3 grupos principales:

1. Grupos jóvenes, especialmente adolescentes.
2. Grupos familiares, y
3. Ciudadanos adultos

La principal atracción para los visitantes jóvenes se encuentra en los juegos de emociones fuertes, y parecen menos sensibles a las grandes esperas. En contraste, los ciudadanos adultos son influenciados por los tiempos de espera y tienden a planear la secuencia de paseos a fin de reducir estos tiempos. Las familias generalmente se hallan restringidas por sus limitaciones de estaturas, que los excluye de ciertos juegos.

Los grupos familiares tienen una menor tolerancia a las largas esperas que la de los adolescentes. A nivel global el comportamiento de los tres grupos de clientes puede ser caracterizado por su conducta de transición en el parque, es decir, por la tolerancia a la espera, la preferencia por cada juego, y las distancias que tienen que recorrer para pasar de un juego a otro.

Es importante mencionar que tradicionalmente el esperar ha sido visto como una medida negativa, y estudios en la literatura de manejo de operaciones típicamente asume una relación monótona entre los tiempos de espera y la satisfacción de los clientes. Sin embargo existe algo de evidencia para sugerir que esto podría no ser universalmente cierto en todas las instancias en las industrias de servicio. Como se explicó anteriormente, mientras pocos clientes toleran o desean largas esperas, parece que en algunas situaciones la experiencia y percepción del

servicio por parte de los clientes es aumentada por alguna espera. Por ejemplo, actualmente en los bancos se aplica el servicio de cola o fila única en lugar de múltiples filas.

Así podemos concluir que esperar podría contribuir a la experiencia del cliente. A pesar de que tiempos de espera excesivos son algo indeseables, en algunos casos, como se mencionó anteriormente, tiempos muy cortos de espera tienden a tener impactos negativos, porque pueden disminuir la percepción del servicio. También se sugiere que después de cierto número de vueltas, más vueltas proporcionan una mejora en la satisfacción del cliente.

## 1.6 DESCRIPCIÓN DE LOS PROBLEMAS DEL PARQUE

Para poder solucionar cualquier problema siempre será necesario conocer las causas de dicho problema, la forma en que tales causas afectan el problema, y la descripción de las mismas. Por ello, en esta sección describimos los principales problemas de la Feria de Chapultepec y algunas otras situaciones que de alguna forma afectan nuestro estudio.

Uno de los principales problemas que se presentan durante la operación del Parque es, obviamente, el largo excesivo de las colas en algunos juegos. Este problema se agrava aún más en fines de semana, en horas pico, que por la investigación hecha se encontró que se presenta aproximadamente de 10:30 a.m. a 14:00 p.m.

En una conversación que tuvimos con la Administración de la Feria de Chapultepec, nos mencionaron que los juegos más gustados son desde luego los más caros, y que para ellos entre más gente asista a estos juegos mejor, dado que ahorran capital al operar los demás juegos a una capacidad menor.

De momento lo anterior parecería alarmante, pero la explicación siguiente nos hará comprender el porqué la Administración toma dicha actitud.

Una vez que la gente haya adquirido el Paquete Ecolín (que incluye todos los juegos con excepción de Supernova, Gran Premio y Destreza, y Montaña Rusa sólo una vez) a un costo de \$75, la empresa ya se ha beneficiado desde un inicio, por ello si hay bastante gente en espera de abordar un juego que sea de suma preferencia, por ejemplo la Montaña Rusa, en donde el tiempo de espera no es corto por la gran afluencia que hay, la gente dejará de subirse a otros juegos incluidos en el Paquete.

Es por ello que la Administración, al menos de momento, no tiene como objetivo minimizar el largo de las colas porque se antepone el factor UTILIDADES.

Cabe mencionar que la misma Administración comentó que es sumamente difícil que los visitantes recorran el Parque en su totalidad. Lo anterior no es precisamente porque el Parque sea muy grande sino por los largos tiempos de espera.

Respecto a este problema vale la pena analizar lo siguiente:

- La gente que haya visitado el Parque y haya esperado mucho tiempo, ¿estará dispuesta a regresar?.

- Una vez que los visitantes conozcan dicho Paquete, ¿estarán dispuestos a adquirirlo de nuevo?
- Sabemos que existe una relación entre tiempos de espera y satisfacción de los clientes, ¿no afecta que por los tiempos de espera excesivos se minimice la satisfacción de los visitantes y al mismo tiempo se afecte de alguna manera, tal vez no muy clara, la economía de la Feria de Chapultepec?

También nos comentaron que tal vez para ellos no era conveniente la implementación de otros paquetes. Esto se explica porque lo que conviene es que la gente pague y deje de usar los demás juegos, ya que así evitan no sólo el desgaste de estos últimos, sino también gastos de operación, gastos de personal, energía eléctrica, etc.

Con lo anterior también podemos explicar el porqué no se respeta el largo máximo y mínimo de la cola establecida por la Administración en cada juego.

Semanalmente se hacen encuestas por parte de la Administración del Parque acerca de la calidad del servicio ofrecido, y dentro de éstas se encuentra una pregunta referente al Paquete Ecolín y observamos que cerca del 65% de las opiniones y sugerencias es que se incluyan todos los juegos sin excepciones, para ser más exactos Supernova y Gran Premio que como sabemos son parte del conjunto de juegos con mayor preferencia y por supuesto los más caros. Además se pide que se incluya la Montaña Rusa sin la restricción de subirse sólo una vez.

De estadísticas proporcionadas por la empresa analizamos que mucha gente, específicamente familias, adquieren el Paquete para ella y sus hijos (generalmente de 8 a 12 años, a los cuales no les atrae subirse a juegos infantiles) y una vez entrado al Parque, al querer abordar los juegos que más les atraen, el límite inferior de estaturas es tan alto que se dan cuenta que para sus hijos dicho Paquete no conviene, porque no se les permite disfrutar el juego por cuestiones de seguridad.

Pensamos que de no hacer caso a las peticiones de los visitantes, la Feria de Chapultepec estará en problemas en un futuro.

Para nosotros es importante hacer notar que la descripción de los anteriores problemas tiene como primicia mejorar la Administración del Parque, incrementar la satisfacción de los visitantes con un máximo de utilidades minimizando costos mediante modelos, y no lo que podría pensarse en algún momento, como es el querer desprestigiar a la empresa haciendo notar algunas políticas que tal vez con el presente trabajo dejarán de usarse por hacer notar que no son del todo las políticas óptimas, no sólo en cuestiones económicas, sino también en cuestiones de calidad de servicio.

# **CAPITULO II**



## **PANORAMA SOBRE EL ENFOQUE DE MODELADO EN LA OPTIMIZACION**

## II. PANORAMA SOBRE EL ENFOQUE DE MODELADO EN LA OPTIMIZACIÓN

Las leyes del Universo están, en gran parte, escritas en el lenguaje de las Matemáticas, es por ello que resulta muy importante que podamos primeramente entenderlas y posteriormente emplearlas para la solución de problemas.

A todo el mundo le gusta "entender": cómo funciona un automóvil y poder manejarlo bien y componerlo; entender las reglas y las habilidades necesarias para jugar el fútbol, y poder hacerlo bien y opinar sobre la actuación de un equipo o la decisión de un árbitro; entender los principios de la música y poder tocar un instrumento o apreciar mejor una interpretación; entender de negocios, de leyes y reglamentos; entender la psicología y los problemas de los amigos así como sus relaciones mutuas; entender de historia, de política, etc.

El placer de entender algo surge de la apreciación de nuestras capacidades, de la sensación de que una de las partes más importantes de nuestro cuerpo, que es el cerebro, está funcionando bien. Esta sensación es similar, y en muchos sentidos superior, a la que recibimos cuando notamos que nuestros músculos funcionan bien al hacer un deporte, un ejercicio o al bailar; al probar que nuestros sentidos son capaces de distinguir una señal muy débil o un detalle muy fino; al comprobar, cuando cantamos, que nuestro oído, nuestros pulmones y cuerdas vocales funcionan bien, etc. Todo esto es parte del placer de sentirse vivo, sano, capaz del placer de poder actuar, crear, dar y recibir.

Casi todos al nacer tenemos la posibilidad de desarrollar todas o casi todas estas capacidades de nuestro organismo. Pero desgraciadamente, por razones económicas, sociales o culturales, la mayoría de las personas se ven impedidas para desarrollarlas todas y por lo general se ven limitadas y obligadas a especializarse más o menos bien en una sola de ellas.

Si bien no todo el mundo nace capacitado para ser un cantante de primera línea, casi todos nacemos con facultades para entonar una canción acompañándonos con una guitarra, o para participar en un coro. Si existimos algunos que somos incapaces de entonar "la cucaracha", esto se debe a que nadie nos abrió el camino, motivándonos a hacerlo, guiando nuestros primeros pasos e indicándonos los principios más elementales.

Lo mismo que con cualquier otra facultad del ser humano, la capacidad de entender y, en particular, de entender "matemáticamente" las cosas y de entender las mismas matemáticas, es algo que se puede desarrollar en cualquier persona. Pero para lograrlo es necesario abrirle las puertas, motivarla, guiar sus primeros pasos e indicarle los principios elementales de las matemáticas.

Cómo funciona un aparato, o cómo están distribuidas las líneas de camiones o del metro en una ciudad y cómo se puede combinar unos con otros para llegar a un lugar; cómo giran las manecillas del reloj y cómo se lee la hora; cómo se cambian las distintas monedas y billetes;

todas éstas son cosas que entendemos, desde temprana edad, los habitantes del mundo moderno, son cosas que a todos nos gusta entender y podemos aplicar ese entendimiento para resolver muchos problemas en la vida diaria.

La ciencia, y en particular las matemáticas, nos abren un campo enorme de cosas que podemos entender y disfrutar, y nos permiten entender mejor las cosas que están a nuestro alrededor, crear cosas nuevas y cambiar las cosas viejas que ya no funcionan. Todos los problemas de un individuo o de la sociedad se pueden resolver mejor si se atacan de manera científica. No sólo los problemas del átomo o de los viajes espaciales, sino también los problemas diarios que se le presentan al hombre en su relación con la naturaleza, con sus compañeros o con su sociedad. Pero para que éste método científico pueda ser aplicado es necesario conocer lo que hacen las ciencias, dominar sus principios más elementales. Las matemáticas juegan un papel muy importante dentro de este método científico de atacar los problemas, por lo cual es necesario que todo el mundo desarrolle su capacidad de entender y disfrutar de las matemáticas, la forma en que se relacionan con los problemas de la vida real y cómo ayuda a resolverlos.

En la presente sección se darán los elementos necesarios para resolver los problemas de la Feria de Chapultepec mencionados en el Capítulo anterior. Así, iniciaremos hablando un poco sobre el Método Científico, ya que como hemos comentado es esencial para la solución de problemas. Posteriormente, se verá cómo debe plantearse un problema, entender los elementos que lo forman, las relaciones de éstos, además de comprender cómo podríamos representar este problema por medio de modelos matemáticos. En este caso haremos uso también de la Programación Lineal, Teoría de Redes, Teoría de Juegos, Simulación, Análisis de Series de Tiempo y Modelos Markovianos de Decisión.

## 2.1 MÉTODO CIENTÍFICO

La clave para acercarnos a la verdad o llegar al conocimiento es el método, que es el camino que se sigue para alcanzar un objetivo. El método es un elemento necesario en la ciencia, ya que sin él no sería fácil demostrar la validez objetiva de lo que se afirma; así, el método conduce a resultados confiables, válidos y precisos; de otra manera, sólo se obtendrían resultados vagos y confusos.

El método se logra con base en la relación entre nuestros pensamientos y los objetivos. El método científico sigue el camino de la duda sistemática y aprovecha el análisis, la síntesis, la deducción y la inducción. El método científico es el camino planeado o la estrategia para descubrir o determinar las propiedades del objeto de estudio.

El método científico opera con conceptos, definiciones, hipótesis, variables e indicadores que son los elementos básicos que proporcionan los recursos e instrumentos intelectuales con los que se ha de trabajar para construir el sistema teórico de la ciencia.

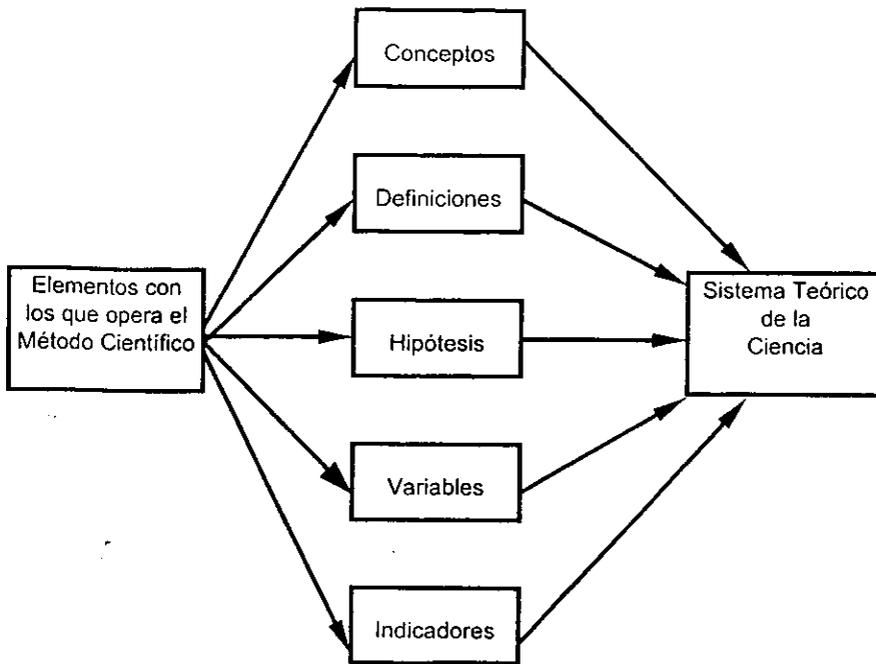


Figura 2.1

El empleo del Método Científico es lo que distingue a la ciencia de otros tipos de conocimientos. El conocimiento científico es definitivo y el método científico se encarga de perfeccionarlo. El conocimiento científico estará sujeto a duda cuando descubrimientos, nuevos instrumentos, etc., permitan encontrar aspectos que antes no habían sido posibles captar.

El Método Científico engloba el ciclo o las etapas de la investigación que comienza el planteamiento de un problema, la formulación de una hipótesis, la comprobación de las hipótesis y, finalmente, la interpretación de resultados y conclusiones.

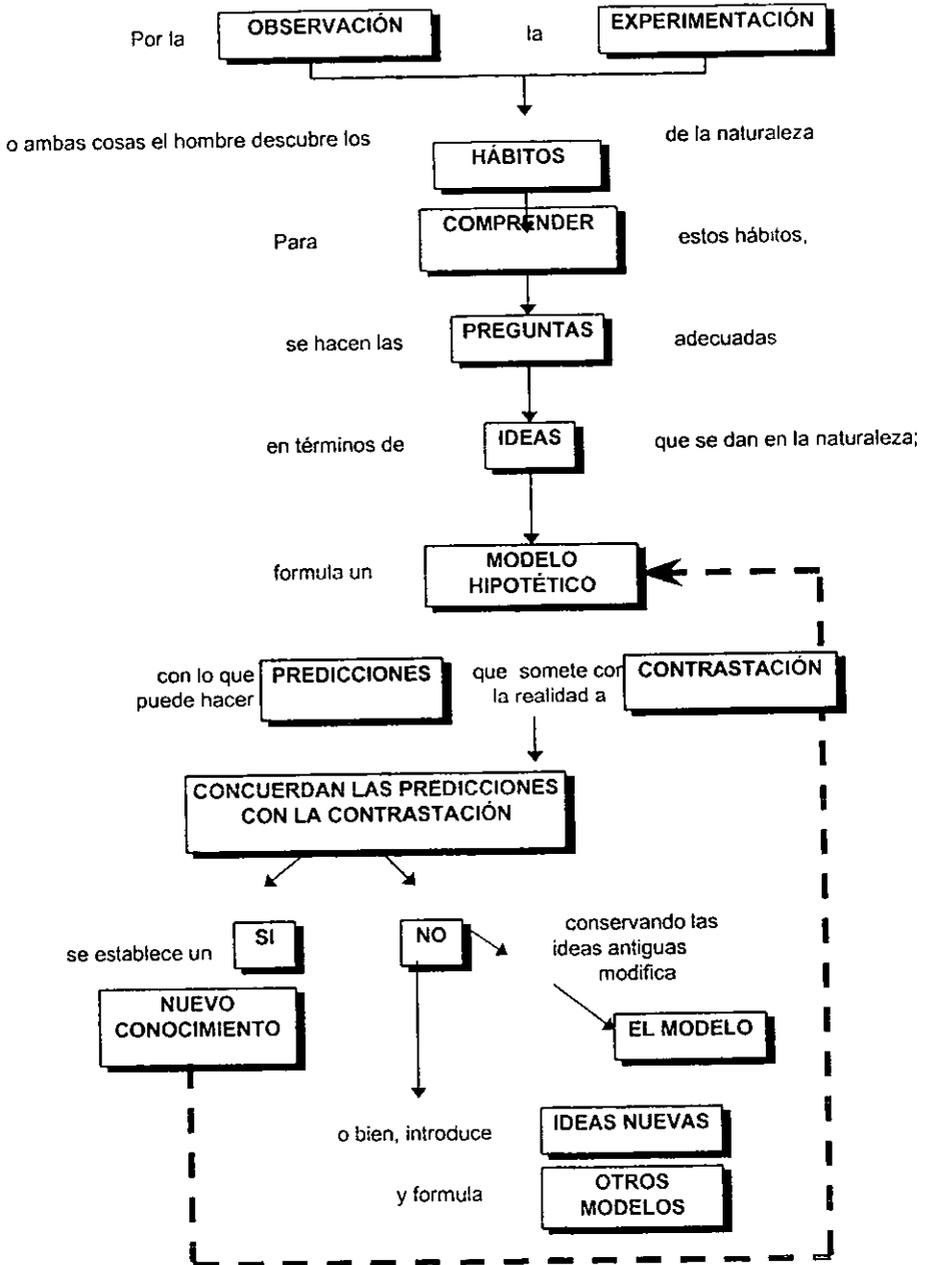


Figura 2.2

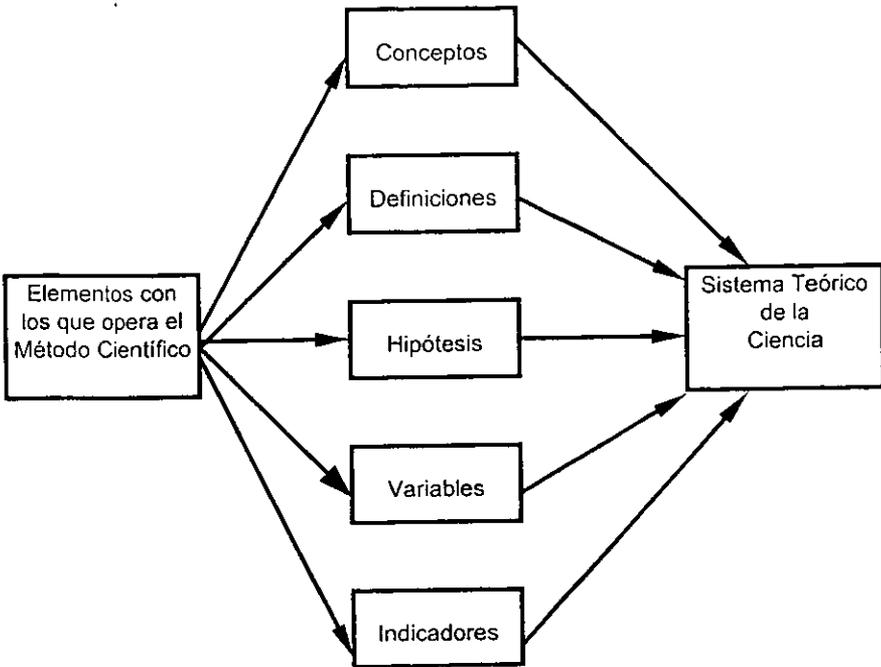


Figura 2.1

El empleo del Método Científico es lo que distingue a la ciencia de otros tipos de conocimientos. El conocimiento científico es definitivo y el método científico se encarga de perfeccionarlo. El conocimiento científico estará sujeto a duda cuando descubrimientos, nuevos instrumentos, etc., permitan encontrar aspectos que antes no habían sido posibles captar.

El Método Científico engloba el ciclo o las etapas de la investigación que comienza el planteamiento de un problema, la formulación de una hipótesis, la comprobación de las hipótesis y, finalmente, la interpretación de resultados y conclusiones.

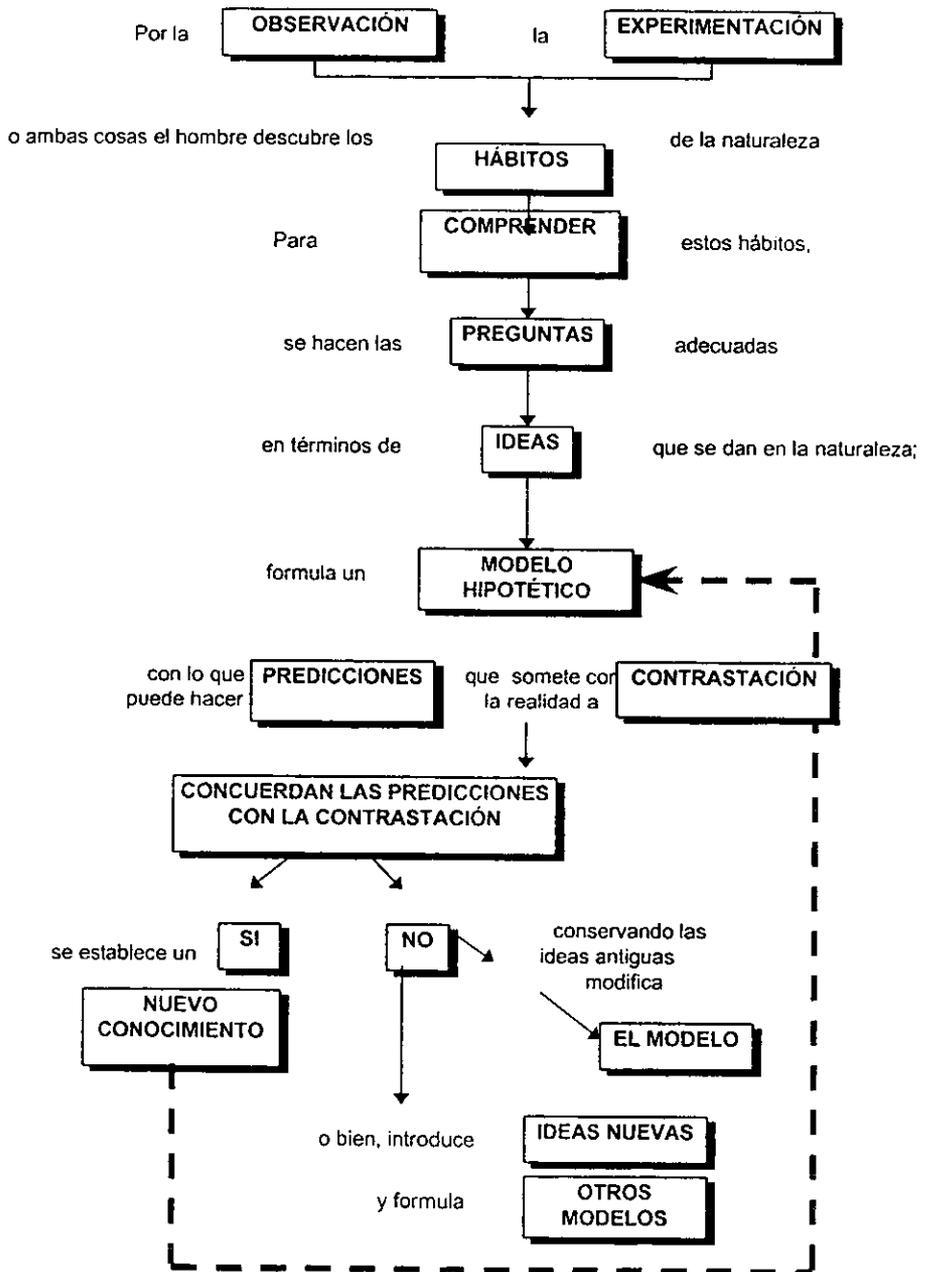


Figura 2.2

## 2.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Un problema es una situación adversa o fuera de control. Para encontrar la solución a éste, primero se debe ser capaz de encontrar el problema y formularlo de manera que sea factible someterlo a una investigación. Por lo regular, el analista en investigación de operaciones, al igual que un médico, se topa con los síntomas y no con el diagnóstico. Comúnmente, se deben buscar síntomas adicionales, antes de poder hacer un diagnóstico correcto. Para encontrar y formular correctamente un problema, se debe saber en qué consiste el mismo.

Primero, se deben de considerar las condiciones que se necesitan para que exista la situación problemática más simple posible:

- ⇒ Debe existir un individuo (  $I$  ) a quien se le pueda atribuir el problema. El individuo ocupa un medio ambiente (  $N$  ).
- ⇒ El individuo debe tener cuando menos dos posibles cursos de acción (  $C_1$  y  $C_2$  ) que puede seguir; es decir, debe poder hacer una selección de comportamiento.
- ⇒ Deben existir, cuando menos, dos resultados posibles, (  $O_1$  y  $O_2$  ), de su selección, de los cuales él prefiere uno en vez del otro ; es decir, debe haber, cuando menos, un resultado que él quiera, un objetivo.
- ⇒ Los cursos de acción disponibles, deben ofrecer cierta oportunidad de lograr su objetivo, pero no pueden dar la misma oportunidad a ambos. De otra manera su selección no tendría importancia. De aquí que las selecciones deban tener eficiencias distintas para los resultados deseados.

Si se satisfacen estas cuatro condiciones, se puede decir que existe un problema, pero podemos decir que el individuo (  $I$  ) tiene el problema, solamente si no sabe cuál curso de acción es el mejor y desea conocerlo. Debe tener dudas con respecto a la solución.

En pocas palabras, se puede decir que un individuo tiene un problema si él quiere algo, tiene formas alternas de perseguir ese algo, pero con distintas eficiencias para obtenerlo y duda acerca del curso de acción que deba tomar.

La complejidad de un problema puede aumentar por una combinación de las siguientes condiciones:

1. El problema lo tiene un grupo de individuos, no sólo uno.
2. El medio ambiente (  $N$  ) cambia, de modo que afecta la efectividad de los cursos de acción o los valores de los resultados.
3. El número de cursos de acción alternativos puede ser muy grande.
4. El número de objetivos puede también ser muy grande, y dichos objetivos pueden no ser completamente consistentes.

5. Los cursos de acciones tomados por él o por los tomadores de decisiones pueden ser llevados a cabo por otros cuya buena voluntad y habilidad para actuar son, en consecuencia, relevantes.
6. Algunas personas que no intervienen en la toma o realización de la decisión pueden resultar afectadas por ella, y reaccionar favorable o desfavorablemente.

Entonces, para formular un problema, debemos tener la siguiente información:

⇒ ¿Quién tomará la decisión?

⇒ ¿Cuál o cuáles son sus objetivos?

( De éstos y otros datos derivamos una medida de la capacidad,  $Z$ , para evaluar los cursos de acción alternativos).

⇒ ¿Qué aspectos de la situación están sujetos al control de quien toma las decisiones ( las variables controlables  $X_i$  ), y con qué amplitud se pueden controlar esas variables ( las restricciones ) ?

⇒ ¿Qué otros aspectos del medio, comprendiendo o no a los humanos, pueden afectar los resultados de las selecciones disponibles ( las variables no controlables  $Y_j$  ) ?

De aquí que formular un problema para su investigación consiste en identificar, definir y especificar las medidas de los componentes de un modelo de decisión. La determinación de las relaciones entre estos componentes es el objetivo de la fase de la investigación correspondiente a la construcción del modelo.

### 2.3 CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

Se había mencionado con anterioridad, que para facilitar la solución de problemas es necesario hacer uso de varios elementos, entre los cuales se encuentra la **abstracción**, con la cual creamos modelos, que son precisamente representaciones de la realidad.

El proceso de la elaboración de modelos matemáticos comprende:

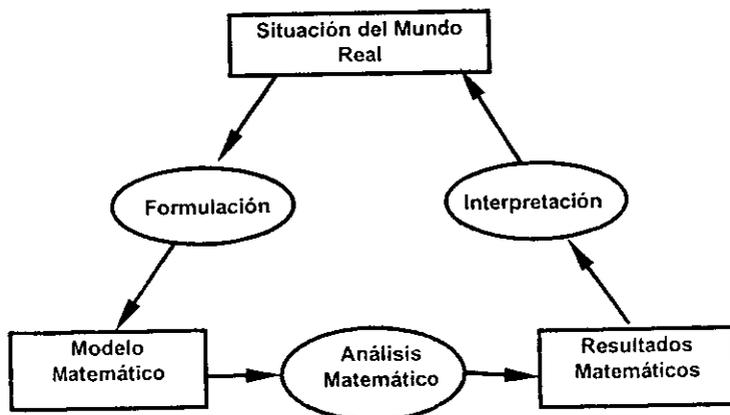


Figura 2.3

1. La formulación de un problema del mundo real en términos matemáticos (esto es, la construcción de un modelo matemático).
2. El análisis o solución del problema matemático resultante.
3. La interpretación de los resultados matemáticos en el contexto de la situación original del mundo real.

Un modelo matemático satisfactorio ha de cumplir dos requerimientos contradictorios:

- Debe ser lo suficientemente detallado como para representar la situación del mundo real con relativa exactitud, y
- A pesar de ello, debe ser bastante sencillo para permitir un análisis matemático práctico.

Si el modelo es tan detallado que representa plenamente la situación física, puede resultar demasiado difícil de llevar a cabo. Si es demasiado simple, los resultados pueden ser inexactos o aún inútiles. Por lo tanto hay un compromiso inevitable entre lo que es físicamente realista y lo que es matemáticamente viable. La construcción de un modelo que salve adecuadamente esta brecha entre realismo y factibilidad es, pues, el paso crucial y delicado del proceso. Se deben encontrar caminos para simplificar el modelo matemático sin sacrificar rasgos esenciales de la situación del mundo real.

Si los modelos fueran complejos y difíciles de controlar como la realidad, no habría ninguna ventaja en utilizarlos. Afortunadamente, en general, podemos construir modelos que son mucho más sencillos que la realidad y a la vez, pueden utilizarse para predecir y explicar fenómenos con un alto grado de precisión. Pues, a pesar de que pueda requerirse un gran número de variables para predecir con exactitud perfecta un fenómeno, normalmente basta un número pequeño de variables para lograrlo. Por supuesto, el arte está en encontrar el número de variables adecuado y su correcta interrelación.

A continuación veremos los tipos de modelos, algunos ejemplos y aplicaciones.

### 2.3.1 Tipos de Modelos

Comúnmente se utilizan tres tipos de modelos en casi toda la ciencia: *icónicos*, *análogos* y *simbólicos*.

En los modelos *icónicos*, las propiedades relevantes del fenómeno real se representan de acuerdo con las mismas propiedades, normalmente con un cambio de escala. De aquí que, en general, estos modelos se vean como lo que representan, pero difieren en tamaño, son *imágenes*. En general, los modelos icónicos son específicos, concretos, y difíciles de manejar para fines experimentales.

Los modelos *análogos* utilizan un conjunto de propiedades para representar a otro. Por ejemplo, las redes que se valen de magnitudes y localizaciones geométricas para representar una amplia diversidad de variables y sus interrelaciones. Generalmente los modelos análogos son menos específicos, menos concretos, pero más sencillos de manipular que los icónicos.

Los modelos *simbólicos* utilizan letras, números y otros tipos de símbolos para representar las variables y sus relaciones. De aquí que sean el tipo de modelo más general y abstracto. Normalmente son los más sencillos de manejar experimentalmente. Los modelos simbólicos toman la forma de relaciones matemáticas (casi siempre ecuaciones o desigualdades - "inecuaciones" ) que reflejan la estructura de lo que representan.

En muchos proyectos de investigación se utilizan sucesivamente los tres tipos de modelos; los modelos icónicos y los análogos se utilizan a veces como aproximaciones iniciales, que posteriormente se perfeccionan con modelos simbólicos. El diagrama de flujo obtenido en el análisis de un sistema es una representación inicial; frecuentemente se hace con una combinación de elementos icónicos y análogos. Las representaciones preliminares y tentativas del sistema que con frecuencia se usan en el desarrollo del modelo, que al final se utiliza para obtener una solución, a menudo se denominan *modelos conceptuales*. Frecuentemente estos modelos son diagramas que representan nuestra concepción de qué variables son relevantes y cómo se relacionan. De manera común, las relaciones se describen cuantitativamente; por ejemplo, puede afirmarse que al aumentar una variable se produce la reducción de otra.

### 2.3.2 Modelos Descriptivos y Explicativos.

Es importante distinguir entre los modelos: 1) los que tienen variables controlables, y 2) aquellos que no las contienen. En general, los primeros son *explicativos* y los segundos *descriptivos*. Los modelos de decisión de la forma  $Z = f(X, Y)$  son explicativos. Sin embargo, con frecuencia es necesario construir modelos descriptivos como paso preliminar en el desarrollo de un modelo explicativo.

En los problemas que implican sistemas en los que la mayoría de las variables relevantes están sujetas a control, las relaciones causales generalmente se revelan por medio de un examen directo del sistema. Si el sistema está menos sujeto a control, las relaciones causales rara vez aparecen. En tales problemas generalmente se requiere una buena cantidad de análisis y experimentación antes de tener el conocimiento suficiente como para construir un modelo explicativo. Entre más obscura es la estructura del sistema, es decir, entre menos claras sean las relaciones causales entre sus variables, más difícil es construir el modelo

De esta manera, la calidad de un modelo depende principalmente de la imaginación y creatividad del equipo de investigación del problema. La intuición, la perspicacia, y otras operaciones mentales que son esencialmente no regulables juegan un papel importante en el proceso. Por tanto, no es posible definir un proceso para la construcción de un modelo. Sin embargo, cuando se examina la experiencia pasada en la construcción de modelos, surgen ciertos *patrones*. El conocimiento de estos patrones puede estimular la imaginación y guiar la creatividad. Estos patrones varían dependiendo de la ambigüedad de la estructura del sistema que se estudia y de la facilidad de acceso que tenga el investigador a los trabajos internos del sistema. Debe tenerse en cuenta que estos patrones no son universales, ya que cada investigador podría descubrir los suyos propios.

**Patrón 1.** Este patrón ocurre cuando la estructura del sistema es lo suficientemente simple y clara como para entenderse por medio de una inspección y/o una discusión con quienes están implicados en y con el sistema. De aquí que en situaciones muy simples se puede, muchas veces, ir directamente del examen del sistema al modelo confeccionado apropiadamente.

**Patrón 2.** En situaciones en las que la estructura es relativamente evidente, pero la forma de representarla simbólicamente no lo es igual, podemos muchas veces suscribir una analogía de la

estructura del sistema problema a otro cuya estructura se conoce mejor. Entonces podemos usar ya sea el otro sistema análogo o el modelo simbólico de él, como un modelo del sistema-problema.

**Patrón 3.** En este tipo de situación la estructura del sistema no es evidente, pero puede extraerse por análisis de los datos que describen la operación del sistema. Los datos pueden estar disponibles o puede que sea necesario recolectarlos, pero en cualquier caso el análisis de ellos es suficiente para revelar la estructura del sistema en cuestión. Realmente, el análisis produce hipótesis estructurales que requieren confirmación por medio de la utilización de otros datos diferentes a aquellos que se usaron en la generación de las hipótesis.

**Patrón 4.** En situaciones en las que no es posible aislar los efectos de variables individuales por análisis de los datos de operación, quizá sea necesario recurrir a la experimentación para determinar qué variables son relevantes y cómo afectan la operación del sistema. El uso de la experimentación es la característica esencial de este patrón.

**Patrón 5.** En esta última y más difícil situación no están disponibles o no se pueden obtener suficientes datos descriptivos sobre la operación del sistema, y la experimentación sobre el mismo se excluye. Esta puede parecer una situación en la que no se puede hacer nada, pero no necesariamente es así.

Los modelos nunca son tan complejos como los fenómenos que representan; están simplificados hasta donde es posible de manera que no pierdan significativamente su precisión. Para simplificar la representación del sistema que se estudia, las variables pueden omitirse, agregarse o simplificarse en su forma; las relaciones también pueden modificarse para facilitar su manejo, y se pueden agregar o restar restricciones.

Los sistemas complejos pueden necesitar una representación por medio de un conjunto de modelos, uno para cada subsistema, que se eslabonan en uno solo.

Un modelo entre más abstracto, es más general; sin embargo, los modelos más abstractos, por estar más alejados de la experiencia directa de los hombres, requieren de un entrenamiento especial de la persona que los debe construir, manipular y aplicar. Esta es la dificultad con que se enfrentan generalmente las personas que resuelven problemas mediante modelos matemáticos. A pesar de esta dificultad y del tiempo de entrenamiento que se requiere para superarla, que en algunos casos puede ser muy grande, las ventajas que ofrecen los modelos hacen que en general valga la pena el esfuerzo y el tiempo empleados en dicho aprendizaje.

¿Qué tipo de modelo se debe utilizar para resolver un problema? La respuesta depende del problema en sí. Desde el punto de vista económico, la resolución mental del problema es la más barata. Pero al llegar a un cierto grado de complejidad, nuestra mente es incapaz de manejar con claridad todos los elementos del problema con la rapidez necesaria, por lo que se realiza un modelo más concreto. Esto no debe interpretarse en el sentido de que hay un límite fijo para la capacidad de la mente humana. Esta capacidad puede aumentar con el entrenamiento y a medida que conozcamos mejor el funcionamiento de nuestro cerebro.

En problemas más complicados puede ser muy difícil incorporar a un modelo simbólico todos los elementos que intervienen de manera esencial en el problema. Y aun en el caso de que logremos hacerlo, la cantidad de cálculos (manipulaciones de los símbolos) que es necesario efectuar sea enorme, aún con la ayuda de las computadoras más rápidas de que se disponga. En

estos casos se hace necesaria la ayuda de modelos más cercanos a la realidad. Por ejemplo, al diseñar las alas de los aviones supersónicos, hay que tomar en cuenta la presión del aire sobre ellas, su calentamiento y flexión, la turbulencia del aire, los efectos de las vibraciones sobre el metal, etc. , etc., así como sus relaciones mutuas. Resulta entonces más barato y eficiente construir modelos de las alas en pequeño y probarlas en túneles de viento, que plantear y resolver el complicadísimo problema abstracto a que esto da lugar.

Naturalmente esta situación puede también cambiar, a medida que construyamos mejores modelos simbólicos o entendamos mejor los que ya tenemos, y a medida que construyamos computadoras cada vez más rápidas y baratas, que bueno como sabemos no estamos lejos de lograrlo.

Finalmente, hay problemas que no sabemos cómo resolver, más que enfrentarnos directamente a ellos en toda su complejidad. Pero aun en estos casos, la información que podemos obtener a través de un modelo, más o menos abstracto, nos permitirá evitar graves errores.

Un aspecto que vale la pena mencionar es la relación que existe entre las teorías y la realidad, la cual es similar a la relación entre modelo y realidad. En la teoría podemos ver que existen varias soluciones igualmente buenas, pero en la práctica una solución de éstas puede ser mejor que las otras. La teoría es una guía muy útil para enfrentarnos a los problemas reales, así estaremos más preparados para comprender cambios en los sistemas que podrían complicar el problema o la situación.

Las teorías representan, pues, un grado mayor de abstracción al olvidarnos de un problema concreto para estudiar la estructura de los diversos problemas. También representan un grado mayor de generalidad, porque nos permite estudiar muchos problemas al mismo tiempo. Todo esto se refleja en un ahorro de tiempo y dinero, pero también en una mayor dificultad teórica.

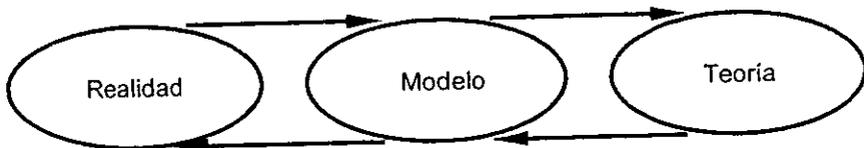


Figura 2.4

### 2.3.3 ¿ Por qué se hace necesario modelar ?

Primeramente, los modelos nos ayudan a comprender mejor la realidad, de esta manera podemos resolver más fácilmente problemas.

Un uso bastante importante de los modelos es como instrumentos para descubrir cursos de acción no considerados previamente. Tal uso a menudo produce soluciones que son tan claramente superiores a las que se consideraron *a priori* que su capacidad difícilmente requiere prueba.

El costo del modelo siempre será menor que experimentar en el problema real, ya que no sólo implica gastos de tipo económico, sino también aspectos que tienen un valor incalculable como satisfacción de los clientes, el entrenamiento de los que prestan el servicio, tiempo tanto de clientes como de empleados, etc.

Lo anterior muestra que modelar resulta realmente indispensable, debido a que cada día las empresas o cualquier sistema en general tienen como objetivo obtener máximas ganancias ( no necesariamente económicas, tal es el caso de aumentar la satisfacción de clientes, mejoras en servicios, etc. ) con un mínimo de recursos.

# **CAPITULO III**

## **TEORIA DE REDES Y MODELO PARA DISEÑO DE TOURS**

# III. TEORÍA DE REDES Y MODELO PARA EL DISEÑO DE TOURS.

En esta sección se presentan conceptos básicos para el análisis de redes, debido a que uno de los propósitos principales de este trabajo es encontrar la ruta más corta entre los juegos propuestos como inicial y final. También se presenta el desarrollo de un Modelo para el Diseño de Tours. Primeramente se habla acerca del reconocimiento del problema el cual será atacado con el modelo presentado. Después se presenta la metodología para el desarrollo del modelo: consideraciones acerca de los tiempos de espera, tiempos de traslado desde todos y cada uno de los juegos, etapas en las cuales se resuelve el modelo, etc. Posteriormente se presenta un análisis de resultados.

Como siguiente parte, presentamos lo referente a la planeación y obtención de una Matriz de Transición de los movimientos de los visitantes dentro del parque.

## 3.1 TEORÍA DE REDES : CONCEPTOS BÁSICOS

Como ya se había mencionado anteriormente, un modelo es una representación simplificada de un sistema real. Por medio de teoría de gráficas es posible representar y analizar las interacciones entre los elementos de un sistema.

Generalmente, cuando escuchamos la palabra gráficas lo primero que viene a nuestra mente es un diagrama, y tal vez podríamos pensar en un ejemplo tal como los mapas de las carreteras, los diagramas de circuitos o de flujos, esto no es de ninguna manera erróneo. En la figura 3.1 mostramos varios tipos de diagramas:

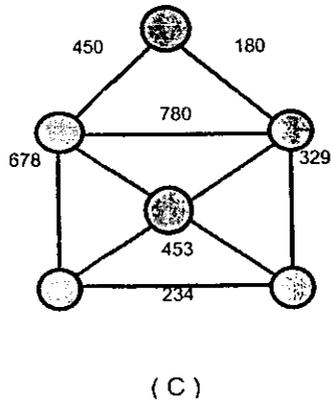
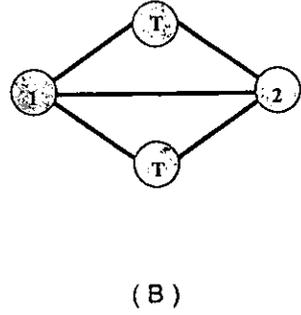
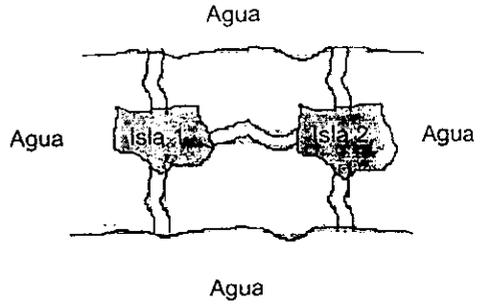
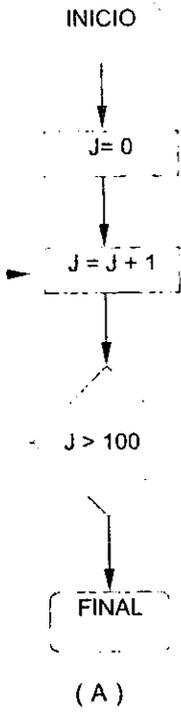


Figura 3.1

La figura (A) representa un sencillo diagrama de flujo. La figura (B) es un dibujo junto con su representación en grafos. La figura (C) podría representar a cinco almacenes de una compañía de transporte y las rutas que las une, con indicaciones de las respectivas distancias.

Lo que podemos observar en común entre estas tres figuras es que cada una de ellas consta de una colección de objetos (rectángulos, círculos o puntos) y líneas que los unen; algunas de éstas son líneas con flechas.

Una gráfica consiste en un conjunto de *puntos* y un conjunto de *líneas* que unen ciertos pares de puntos. Dichos puntos se llaman **nodos** ( o vértices ). Las líneas se llaman **arcos** ( o ligaduras, aristas o ramas ). Los arcos se etiquetan dando nombre a los nodos en sus puntos terminales. Por ejemplo, véase la siguiente gráfica :

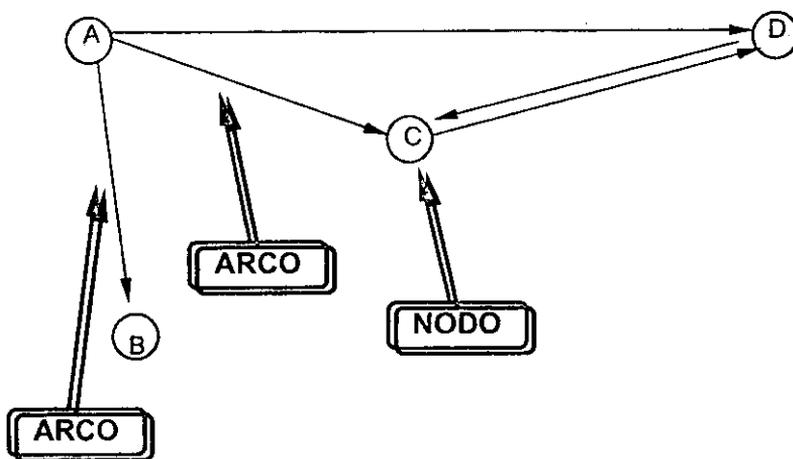


Figura 3.2

Los arcos en una red pueden tener un flujo de algún tipo que pase por ellos (en nuestro caso es el número de minutos de viaje entre cada par de juegos). Si el flujo a través de un arco se permite solo en una dirección, se dice que el arco es un **arco dirigido**. La dirección se indica agregando una cabeza de flecha al final de la línea que representa el arco. Al poner nombre a los arcos se debe poner primero el nombre del nodo de donde sale el arco, seguido del nombre del nodo a donde llega el arco ; es decir, para representar el arco que sale del nodo A al nodo B, es preciso etiquetarlo como AB (o  $A \rightarrow B$ ), y no BA.

Si el flujo a través de un arco se permite en ambas direcciones, se dice que se trata de un **arco no dirigido**.

Una red que sólo presenta arcos *dirigidos* se llama **red dirigida**. De igual manera, si sus arcos son *no dirigidos*, se dice que se trata de una **red no dirigida**. Una red con una mezcla de arcos *dirigidos* y *no dirigidos* (incluso con sólo arcos no dirigidos) puede convertirse en una **red dirigida**, sustituyendo cada arco *no dirigido* por un par de arcos *dirigidos* en direcciones opuestas.<sup>1</sup>

Es importante conocer los arcos o aristas que se unen para formar un camino, para ilustrar esto veamos la figura 3.2, AC - CD. La longitud de un camino es la cantidad de aristas o arcos que contiene, en nuestro ejemplo, la longitud es de 3.

Cuando dos nodos no están unidos por un arco surge la pregunta de que si están conectados por una serie de arcos. Una **trayectoria** entre dos nodos es una *sucesión de arcos distintos* que conectan estos nodos. Cuando algunos o todos los arcos de una red son *arcos dirigidos*, se hace la distinción entre *trayectorias dirigidas* y *trayectorias no dirigidas*. Una **trayectoria dirigida** del nodo *i* al nodo *j* es una sucesión de arcos cuya dirección (si es que la tienen) es *hacia* el nodo *j*, de manera que el flujo del nodo *i* al nodo *j* a través de esta trayectoria es factible. Una **trayectoria no dirigida** del nodo *i* al nodo *j* es una sucesión de arcos cuya dirección (si es que la tienen) puede ser *hacia* o *desde* el nodo *j*. Cabe señalar que una trayectoria *dirigida* también satisface la definición de trayectoria *no dirigida*, pero el inverso no se cumple.

Para ilustrar estas definiciones, recordemos la gráfica de la figura 3.2. Una **trayectoria dirigida** en esta red es la sucesión **AC - CD** (o  $A \rightarrow C \rightarrow D$ ), la cual indica que existe una *trayectoria dirigida* del nodo *A* al nodo *D*, ya que el flujo hacia el nodo *D* a lo largo de esta trayectoria es factible. Por otra parte, la sucesión **AD - DC** (o  $A \rightarrow D \rightarrow C$ ) *no* es una trayectoria dirigida del nodo *A* al nodo *C*, porque no hay una sucesión continua de los nodos.

Un **ciclo** es una trayectoria que comienza y termina en el mismo *nodo*. En una red *dirigida* un ciclo puede ser *dirigido* o *no dirigido*, según si la trayectoria en cuestión es *dirigida* o *no dirigida*. Una vez más es de notar que como una trayectoria *dirigida* también es *no dirigida*, un ciclo *dirigido* es también un ciclo *no dirigido*, pero en general el inverso no es cierto. Por ejemplo, en la figura 3.2, un ciclo *dirigido* es la sucesión **CD - DC**, dado que las direcciones de los arcos así lo permiten. Por el contrario, la sucesión **AC - CD - DA** es un ciclo *no dirigido*, debido a que la dirección del nodo *D* al nodo *A* no existe, es contraria.

Se dice que dos nodos están **conectados** si la red contiene al menos una trayectoria *no dirigida* entre ellos. Nótese que no es necesario que la trayectoria sea dirigida aún cuando la red es dirigida. Una **red conexa** es una red en la que cada par de nodos esta conectado

Consideremos ahora un conjunto de *n* nodos sin arcos. Se puede entonces hacer crecer un árbol agregando un arco o arista a la vez de cierta manera. El primer arco puede ir a donde sea para conectar algún par de nodos. De ahí en adelante, cada arco nuevo debe agregarse entre un nodo que ya ha sido conectado a otros nodos y a un nuevo nodo no conectado. Si se agregan arcos de esta manera, se evita que se forme un ciclo y además se asegura que el número de nodos conexos es uno más que el número de arcos. Cada nuevo arco crea un árbol más grande, que es una red conexa (para algún subconjunto de *n* nodos) que no contiene *ciclos no dirigidos*. Una vez que se ha agregado el (n-1)-ésimo arco, el proceso se detiene porque el árbol resultante se expande (conecta) a todos los *n* nodos. Este árbol se llama **árbol de expansión**, y es una *red conexa* para los *n* nodos que no contiene *ciclos no dirigidos*. Todo árbol de expansión contiene exactamente (n-1) arcos, ya que este es el *mínimo número* de arcos necesarios para tener una red conexa y el *máximo número* posible para que no haya ciclos no dirigidos.

Los *árboles de expansión* son de gran importancia ya que son clave en el análisis de redes; todo árbol de expansión tiene al menos un árbol de mínima expansión, un ejemplo de la aplicación de ello es el Problema del Agente Viajero, en donde el árbol de expansión mínima sería una solución. Otra aplicación sería que cada nodo representen ciudades y que el objetivo

es conectar las ciudades con tuberías de drenaje, utilizando el menor número posible de kilómetros de tubo.

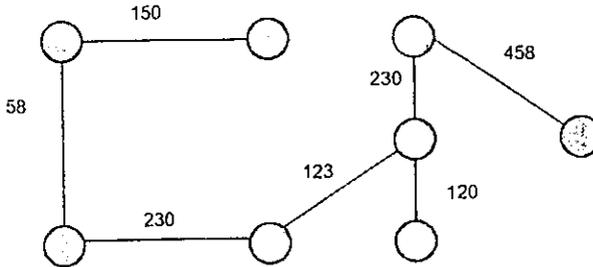


Figura 3.3

Otro ejemplo es que los árboles de expansión (factibles) corresponden a las *soluciones básicas factibles* en el *método simplex de redes*.

Para finalizar, será indispensable introducir terminología adicional sobre los flujos en redes. La cantidad máxima de flujo (quizá infinita) que puede circular en un arco dirigido se conoce como **capacidad del arco**. Entre los nodos, se pueden distinguir aquellos que son generadores de flujo, absorbedores netos o ninguno de los dos. Un **nodo fuente** (o nodo origen) tiene la propiedad de que el flujo que *sale* del nodo excede el flujo que *entra* a él. El caso contrario es un **nodo demanda** (o nodo destino), en el que el flujo que *llega* excede al que *sale* del nodo. Un **nodo de transbordo** (o nodo intermedio) satisface la *conservación del flujo*, así el flujo que entra es igual al que sale.

### 3.2 PROBLEMAS PROTOTIPO EN EL ANÁLISIS DE REDES.

Existen diversos problemas los cuales se han convertido en modelos estándares para analizar redes, así como también sus respectivos métodos de solución. A continuación se describen estos diferentes problemas:

↳ **Problema de la Ruta más corta.** Considérese una red conexa y no dirigida con dos nodos especiales llamados *origen* y *destino*. A cada una de las ligaduras (arcos *no dirigidos*) se asocia una *distancia* (costos, tiempos, etc.) no negativa. El objetivo es encontrar la *ruta más corta* (la trayectoria con la mínima distancia total) que va del origen al destino. Una versión más general de este problema es encontrar la ruta más corta desde *todos* los nodos a todos los demás nodos, es decir, tener varios *orígenes* y varios *destinos*.

↳ **Problema del Árbol de Expansión Mínima.** Este tipo de problema tiene algunas similitudes con la versión principal del problema de la ruta más corta. En ambos casos se considera una red *no dirigida*, en la que la información dada incluye los nodos y las distancias (costos).

tiempos, etc.) entre pares de nodos. Sin embargo, la diferencia crucial para el problema del árbol de expansión mínima es que las ligaduras (arcos no dirigidos) ya no se especifican. Entonces, en lugar de encontrar la ruta más corta a través de una red completamente definida, el problema *elige* las *ligaduras* en la red que tengan la *longitud total más corta* al mismo tiempo que proporciona una trayectoria entre cada par de nodos. Es necesario que las ligaduras se elijan de tal manera que la red resultante forme un *árbol* que se expande (conecta) a todos los nodos dados. En resumen, el objetivo es encontrar el *árbol de expansión* con la longitud total mínima de sus ligaduras.

↳ Problema del Flujo Máximo. Considérese una red dirigida conexa que tiene un solo nodo *fuelle* y un solo nodo *destino*, y el resto son nodos de transbordo. Dada la capacidad en los arcos, el objetivo es determinar el patrón factible que fluye a través de la red que *maximiza el flujo total*, desde el nodo fuente hasta el nodo destino. Este tipo de problema se puede modelar como un *problema de programación lineal*, y por lo tanto se puede resolver con el método simplex, aunque se cuenta con un algoritmo para resolverlo (algoritmo de trayectorias aumentadas) el cual es mucho más eficiente.

↳ Problema del Flujo de Costo Mínimo. Este problema tiene una posición medular entre los modelos de optimización de redes; primero porque abarca una clase muy amplia de aplicaciones y segundo, porque su solución es en extremo eficiente. Al igual que el *problema del flujo máximo*, toma en cuenta un flujo a través de una red con capacidades limitadas en sus arcos. Al igual que el *problema de la ruta más corta*, puede manejar varios orígenes y varios destinos para el flujo, también con costos asociados. La razón por la que el problema del flujo de costo mínimo se puede resolver de manera tan eficiente es que se puede formular como un problema de programación lineal, y por tanto, se puede resolver mediante una versión simplificada del método simplex llamado *método simplex de redes*.

El Algoritmo que se utiliza en este trabajo, es el Algoritmo de Dijkstra:

### 3.3 ALGORITMO DE DIJKSTRA.

Este algoritmo permite calcular la ruta más corta en redes con ciclos no negativos. Un ciclo es negativo si la suma de los pesos de todos sus arcos resulta ser una cantidad negativa. Dicha condición implica que no existe la ruta más corta, pues el costo de ésta disminuiría sin límite viajando repetidamente sobre un ciclo negativo. El algoritmo de Dijkstra trabaja con etiquetas temporales y etiquetas permanentes. Los nodos pueden tener etiquetas temporales, las cuales pueden cambiar si se encuentra una mejor ruta. En cada iteración una etiqueta se hace permanente, lo cual significa que su valor ya no puede cambiar. La etiqueta que se hace permanente es aquella con el menor valor dentro de las etiquetas que no han recibido ya la etiqueta permanente. Esto último garantiza que la etiqueta que se está haciendo permanente no es posible mejorarla. Para enunciar el algoritmo de Dijkstra, se usarán las variables  $u_j$  y  $T(j)$  como la etiqueta y el nodo predecesor del nodo  $j$  respectivamente. Se usará el conjunto  $V$  como el conjunto de nodos candidatos, estos es, el conjunto de nodos susceptibles de recibir etiqueta permanente.

## ALGORITMO DE DIJKSTRA.

**Paso 0.** Hacer  $V = \{ 1 \}$ ,  $u_1 = 0$ ,  $u_i = \infty$  para todo  $i \neq 1$

**Paso 1.** Seleccionar un nodo  $i$  tal que  $u_i = \min_{j \in V} u_j$

Hacer  $V = V \cup \{ i \}$  (remover el nodo  $i$  de  $V$ )

Si  $V$  está vacío terminar.

**Paso 2.** Para cada arco  $(i, j) \in A$ ,  $j \neq 1$  con  $u_j > u_i + c_{ij}$ , hacer:

$$u_j = u_i + c_{ij}$$

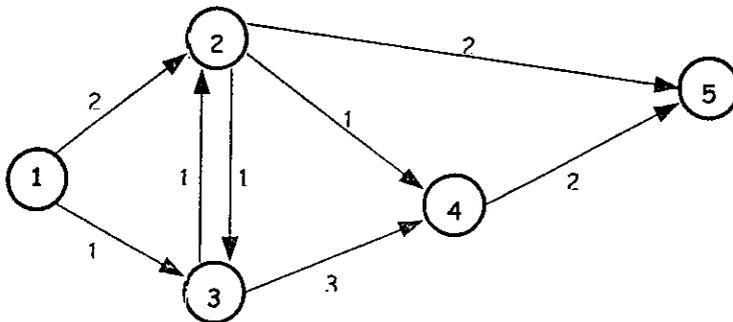
$$V = V \cup \{ j \} \text{ ( unir el nodo } j \text{ a } V \text{ )}$$

$$T(j) = i$$

Ir al paso 1.

### Ejemplo.

En la siguiente red hallaremos la ruta más corta aplicando el algoritmo enunciado.



Con el algoritmo de Dijkstra se tienen los siguientes resultados :

It.	Nodo Seleccionado	Etiqueta					Nodo Predecesor					V
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
0		0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	-	-	-	-	-	{1}
1	1	0	2	1	$\infty$	$\infty$	-	1	1	-	-	{2,3}
2	2	0	2	1	4	$\infty$	-	1	1	3	-	{2,4}
3	3	0	2	1	3	4	-	1	1	2	2	{4,5}
4	4	0	2	1	3	4	-	1	1	2	2	{5}
5	5	0	2	1	3	4	-	1	1	2	2	$\emptyset$

Para el diseño de la aplicación aquí desarrollada, utilizamos este algoritmo, dado que se busca encontrar la ruta más corta entre los juegos seleccionados como óptimos, sin dejar fuera ninguno de éstos.

A continuación presentamos la Red de Juegos de la Feria de Chapultepec completa (figura 3.4) y la Red marcando los juegos incluidos en este estudio (figura 3.5):

Vista superior de la Feria de Chapultepec.

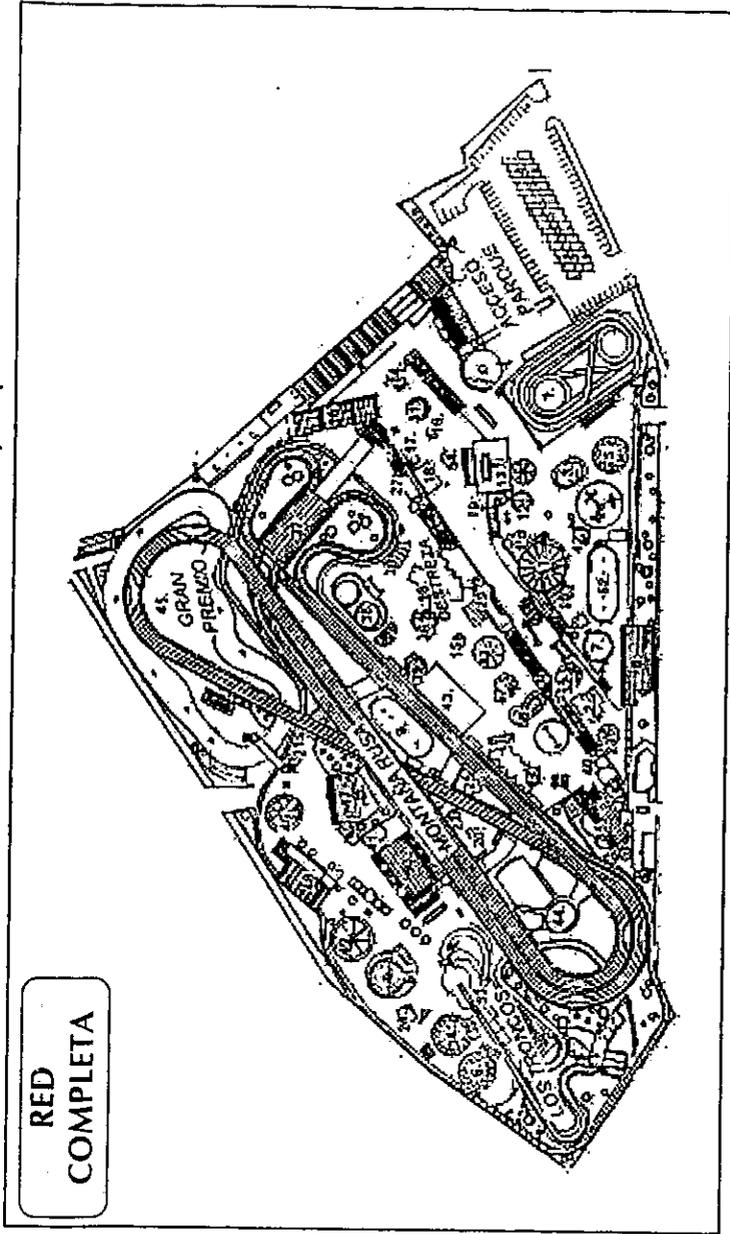


Figura 3.4

Vista superior de la Feria de Chapultepec. (Juegos incluidos en el estudio)

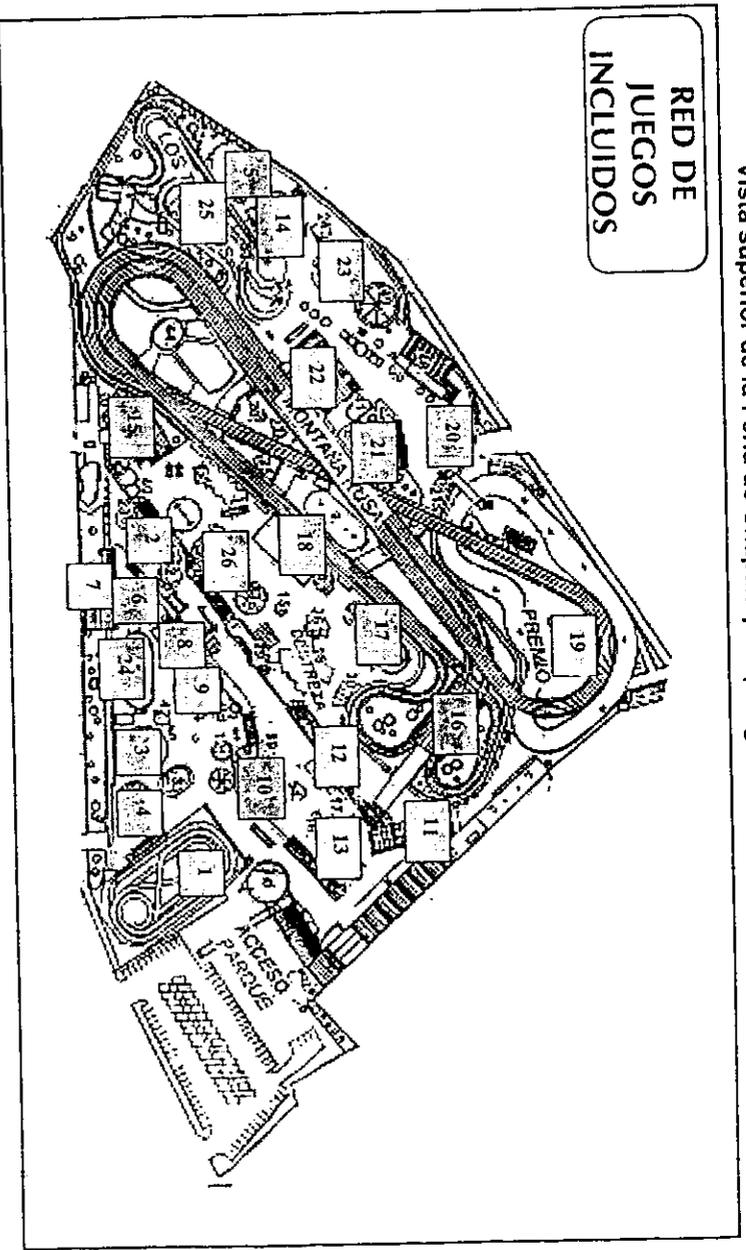


Figura 3.5

## 3.4 MODELO PARA EL DISEÑO DE TOURS.

### 3.4.1 RECONOCIMIENTO DEL PROBLEMA.

Como anteriormente se comentó, la empresa no ha podido o no ha querido reconocer el problema de las largas esperas por parte de los clientes. Uno de nuestros objetivos es lograr que la empresa preste mayor atención a estos puntos, que evidentemente son claves para la mayor aceptación de la gente hacia el parque.

Por nuestra parte, creemos que el problema principal se presenta en los largos tiempos de espera y, por consecuencia, aglomeración de la gente en los juegos de mayor preferencia. También consideramos que tiempos cortos de espera no serían adecuados para la empresa, ya que los costos operativos de la empresa serían demasiado elevados.

Tradicionalmente la espera ha sido vista como una medida negativa, y los estudios que se han hecho de estos tiempos asumen típicamente una relación monótona entre tiempos de espera y satisfacción del cliente. Sin embargo, existe evidencia que sugiere que esto podría no ser universalmente cierto en todas las instancias de las industrias de servicio. Mientras que son pocos los clientes que toleran o desean largas esperas, parece que en algunas situaciones la experiencia del cliente y su percepción del servicio se ve mejorada haciendo que tenga alguna espera, y por consecuencia, no siempre el minimizar el tiempo de espera es el objetivo deseado. Por ejemplo, existen estudios que sugieren que en los servicios de comida rápida, un sistema de una sola cola arroja un índice de mayor satisfacción que un sistema de colas múltiples.

En una encuesta hecha por nosotros para poder obtener información acerca de la transición de la gente en el parque (sección 3.5, fig. 3.14), la gente adulta parecía un poco molesta por el largo tiempo que tenía que invertir para poder acceder a ciertos juegos, y al parecer algunos no lo podían evitar, ya que iban acompañados de personas menores, de edades entre 12 y 19 años, concluyendo así que la gente mayor tiene una menor paciencia para esperar que los jóvenes. Como comentario adicional sobre esto, la gente adulta ya mencionada en ocasiones mejor optaba por sentarse y ya no subirse al juego en el que estuvo esperando. A fin de cuentas, esto justifica lo que anteriormente mencionábamos: ¿no afecta que por los tiempos de espera excesivos se minimice la satisfacción de los visitantes y al mismo tiempo se afecte de alguna manera, tal vez no muy clara, la economía de la Feria de Chapultepec?

### 3.4.2 MODELO PARA EL DISEÑO DE TOURS.

Los tours principalmente se diseñan para evitar congestionamientos en los días en los que se presentan mayores niveles de asistencia en el parque. En los días en los que estos niveles sean bajos, estos tours podrían ahorrar tiempo, pero no tendrían el mismo éxito que en días de mayor demanda.

### 3.4.2.1 Consideraciones para el Diseño del Modelo.

Para llevar a cabo el desarrollo de este modelo, se deben de tener en cuenta los tiempos de espera para cada juego. El horario en el que se presentó el mayor nivel de demanda osciló entre las 10 :30 hrs. y las 14 :00 hrs. Para este horario se reconocieron tres tiempos distintos de espera para cada juego. Las variabilidades entre estos tiempos para cada juego no fueron tan marcadas, por lo que para el modelo se utilizó el promedio de ellos :

JUEGO	TIEMPOS DE ESPERA (decimales)		
	11:00 - 12:00 hrs.	12:00 - 13:00 hrs.	13:00 - 14:00 hrs.
1. Tornado	6.25	7.17	5.40
2. Avión del Amor	4.50	5.25	3.55
3. Batidora	4.30	5.00	4.10
4. Sombrillas	4.50	5.22	4.15
5. Pulpo	5.00	5.30	4.35
6. Julio Verne	9.50	11.00	8.55
7. Cascabel	8.5	9.32	8.00
8. Martillo	4.45	5.50	4.15
9. Tren del Amor	5.00	5.45	4.40
10. Aladino	5.30	6.50	5.00
11. Cascadas	4.00	5.45	3.45
12. Palacio de Cristal	2.15	3.00	2.00
13. Carrusel Doble	5.00	5.25	4.50
14. Trabat	5.00	5.30	4.40
15. Cabaña Chueca del Sereno	7.00	9.00	6.15
16. Serpiente de Fuego	14.45	16.50	13.30
17. Dragón	3.55	4.25	3.20
18. Carros Chocones	6.00	6.55	5.45
19. Pista de Gran Premio	7.50	8.30	7.00
20. Látigo Volador	4.40	5.17	4.15
21. Nao de China	6.10	7.20	5.30
22. Casona del Terror	10.00	11.25	9.25
23. Ciclón	4.00	4.30	3.45
24. Supernova	5.30	6.50	4.50
25. Troncos	10.15	11.30	9.45
26. Tazas Locas	4.15	4.45	3.55

Tabla 3.6

A continuación se presentan gráficamente estos tiempos :

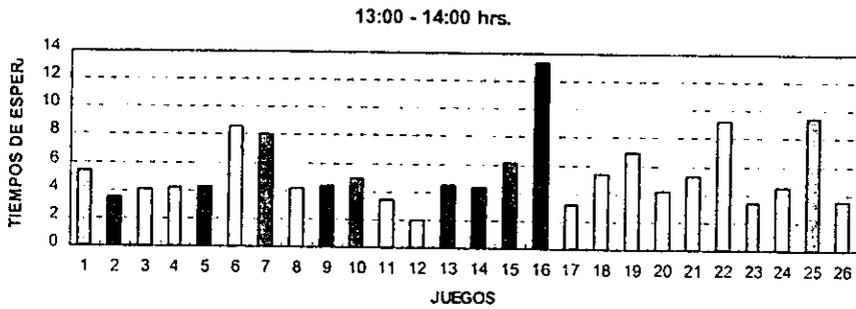
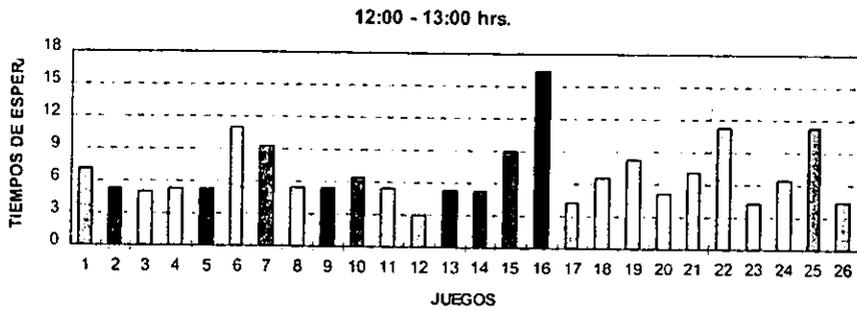
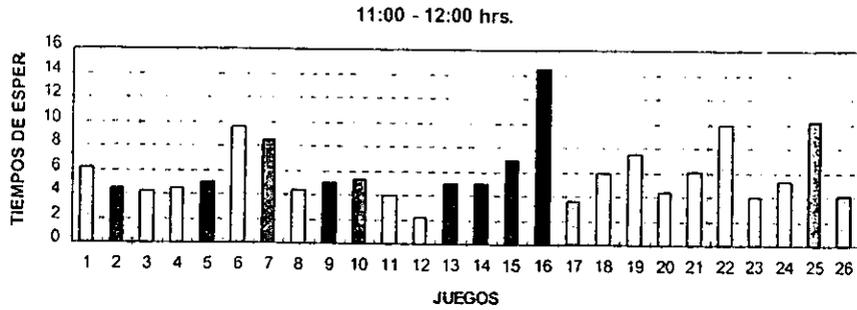


Figura 3.7

La siguiente gráfica compara los tres tiempos :

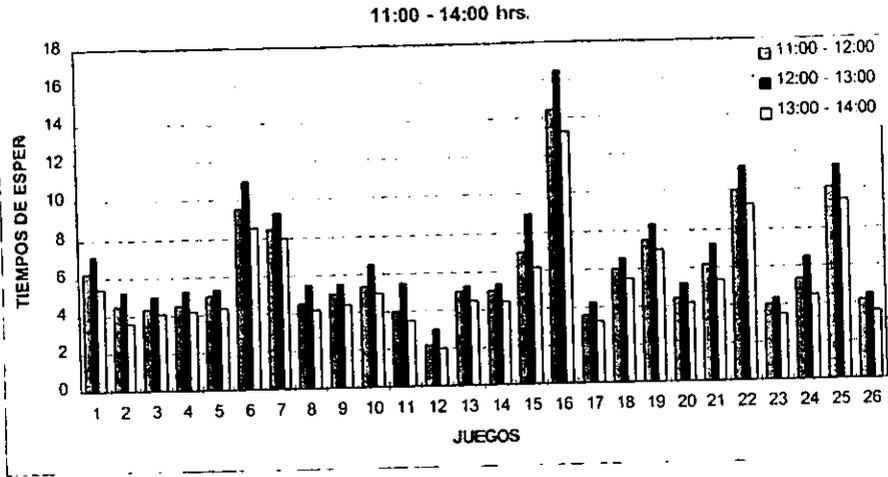


Figura 3.8

Otro factor importante en el diseño del modelo es el considerar las distancias entre los juegos. En un buen tour no se deben incluir de manera consecutiva dos juegos cuya distancia de separación sea demasiada larga. El modelo tiene como propósito el maximizar el número de juegos a visitar en base a las preferencias que tienen éstos, pero debe considerarse que entre mayor sea el tiempo de traslado, menor será el número de juegos visitados.

A continuación presentamos la matriz de tiempos de viaje entre todos y cada uno de los juegos (figura 3.9):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	25	100	50	35	240	95	100	70	70	55	135	110	110	240	150	155	140	170	240	180	180	240	60	240	100	
2	100	25	70	90	180	35	30	70	55	100	170	135	145	180	55	170	140	95	140	180	120	115	170	55	160	60
3	50	70	25	40	220	50	70	50	55	70	150	115	125	200	115	160	130	110	160	230	170	185	225	40	205	90
4	35	90	40	25	230	70	90	65	65	65	150	125	130	240	140	165	150	110	170	240	185	175	240	50	235	90
5	240	180	200	230	25	200	200	215	220	250	270	240	260	35	160	265	210	125	105	105	90	75	60	215	50	160
6	95	35	50	70	200	25	35	50	60	90	170	135	140	200	75	160	150	100	145	195	135	140	185	55	180	70
7	100	30	70	90	200	35	25	75	90	105	180	145	150	195	70	180	180	110	155	205	140	145	185	35	175	85
8	70	70	50	65	215	50	75	25	30	70	120	90	100	195	75	150	110	60	120	180	130	125	185	50	185	70
9	70	65	55	65	220	60	90	30	25	60	110	80	90	200	60	160	120	85	120	195	135	135	190	85	195	60
10	65	100	70	65	250	80	105	70	60	25	85	75	75	235	150	125	105	90	145	180	140	145	190	60	230	100
11	135	170	160	150	270	170	180	120	110	95	25	55	50	235	195	65	90	120	145	190	175	185	200	145	240	140
12	110	135	115	125	240	135	145	90	80	75	55	25	40	205	155	75	70	90	100	155	135	140	180	130	185	95
13	110	145	125	120	280	140	150	100	90	75	50	40	25	235	180	75	95	135	150	100	165	175	215	120	260	120
14	240	160	220	240	35	200	195	195	200	235	235	205	235	25	140	190	150	120	100	95	60	60	25	180	90	150
15	150	55	115	140	160	75	70	75	90	150	105	155	160	140	25	180	160	95	110	180	135	135	180	95	130	70
16	155	170	110	165	205	160	160	170	160	160	125	95	75	190	190	100	100	100	110	100	135	160	175	150	200	150
17	140	140	130	150	210	150	160	110	120	105	90	70	95	150	160	60	25	60	65	100	100	110	150	105	160	100
18	120	95	110	110	125	100	110	80	85	90	120	90	135	120	95	100	80	25	60	100	100	75	140	105	150	60
19	160	140	160	170	105	145	155	120	145	120	145	100	150	100	110	110	105	60	70	25	60	92	95	100	100	100
20	240	160	230	240	105	185	205	100	195	180	180	155	160	95	140	155	100	100	70	25	60	95	60	195	100	160
21	180	120	170	165	80	135	140	130	135	140	175	135	165	60	135	135	100	100	55	60	25	50	70	170	70	130
22	180	115	165	175	75	140	145	125	135	145	165	140	175	60	135	160	110	75	60	95	50	25	70	170	65	130
23	240	170	225	240	60	185	195	185	190	190	200	190	215	35	150	175	150	140	95	60	70	25	200	60	175	70
24	60	55	40	50	215	35	55	50	85	60	145	130	120	180	95	150	105	105	180	195	170	200	25	205	70	205
25	240	160	205	235	50	160	175	185	195	240	240	185	260	50	130	200	180	150	100	100	70	65	60	205	25	155
26	100	60	90	90	180	70	80	70	80	100	140	95	120	150	70	150	100	60	130	160	130	100	175	70	155	25

NOTA : Los tiempos están dados en segundos.

Figura 3.9

Una consideración más es que un juego no puede ser visitado más de una vez durante el tour.

### 3.4.2.2 Etapas de Solución del Modelo.

El modelo se resuelve en dos partes : en la primera parte se determinan los juegos a ser visitados, y en la segunda parte se determina la ruta óptima a seguir para minimizar el tiempo de traslado.

La primera parte se refiere al Problema de Selección de Juegos (PSJ), y la segunda al Problema de Visitas a los Juegos (PVJ).

El PSJ es formulado como sigue :

$$\text{Max } \sum_{i=1}^n W_i Z_i$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^n R_i Z_i \leq T \quad \dots (1)$$

$$Z_\delta + Z_\mu = 1 \quad \delta y \mu \in F \quad \dots (2)$$

$$Z_i \in (0, 1) \quad \forall (i) \quad \dots (3)$$

donde :

$i$  = índice de los juegos

$W_i$  = la preferencia de los clientes por el juego  $i$

$Z_i$  = 1 si el juego  $i$  es visitado en el Tour, 0 en cualquier otro caso

$R_i$  = es la suma del tiempo de espera en el juego  $i$  mas la duración del mismo.

$T$  = es el tiempo de duración deseado para el Tour, sin tomar en cuenta los tiempos de traslado

$F$  = conjunto de pares de juegos que están muy separados entre sí

$\delta, \mu$  = elementos de  $F$ .

La función objetivo maximiza el número de juegos visitados en base a las preferencias. La restricción (1) decide el conjunto de juegos a ser visitados de acuerdo a la limitación de tiempo de duración del Tour. Con la restricción (2) evitamos incluir dos juegos que se encuentran demasiado alejados entre sí, de acuerdo al conjunto  $F$  anteriormente descrito.

Para completar el diseño del tour necesitamos encontrar el orden de los juegos seleccionados por el PSJ que minimice el tiempo de viaje de los visitantes. Este problema puede adaptarse al modelo del Algoritmo de Dijkstra. Este problema se resuelve para los juegos encontrados como factibles durante el Tour.

#### 3.4.2.3 Aplicación del Modelo.

Aplicando el modelo a los datos recolectados, se obtuvieron 16 restricciones divididas de la siguiente manera :

- 1 restricción limitando Tiempos de Espera + Duración del Juego ( $R_i$ )

$$\sum_{i=1}^n R_i Z_i \leq T \quad \dots (1)$$

- 15 restricciones que evitan llevar a cabo largos viajes entre pares de juegos que pudieran ser selectos para el Tour.

$$Z_\delta + Z_\mu = 1 \quad \delta \text{ y } \mu \in F \quad \dots (2)$$

El conjunto F se obtuvo siguiendo el criterio de que los juegos pertenecientes al mismo deberían ser juegos cuya distancia en tiempo de viaje fuera mayor o igual a 4 minutos. El conjunto es el siguiente :

$$F = \{ (1,5) , (1,14) , (1,20) , (1,23) , (1,25) , (4,14) , (4,20) , (4,23) , (5,10) , (5,11) , (5,12) , (5,13) , (5,16) , (11,25) , (13,25) \}$$

El Modelo fue resuelto con ayuda del software LINDO en una computadora con procesador Pentium a 133 Mhz. y 16 MB. en RAM.

A continuación se muestra el modelo tal cual se introduce en el paquete indicado :

### ! PROBLEMA DE SELECCION DE JUEGOS (PS)

MAX

$$5.80x1 + 0.39x2 + 0.08x3 + 0.08x4 + 0.08x5 + 0.08x6 + 11.99x7 + 0.77x8 + 1.75x9 + 3.52x10 + 0.82x11 + 0.08x12 + 0.08x13 + 0.08x14 + 0.42x15 + 40.42x16 + 0.69x17 + 2.00x18 + 0.08x19 + 0.08x20 + 2.44x21 + 3.37x22 + 0.08x23 + 3.09x24 + 8.27x25 + 0.08x26$$

SUBJECT TO

$$616x1 + 464x2 + 466x3 + 475x4 + 533x5 + 851x6 + 781x7 + 480x8 + 555x9 + 594x10 + 396x11 + 341x12 + 553x13 + 552x14 + 1523x15 + 1209x16 + 412x17 + 606x18 + 636x19 + 454x20 + 570x21 + 1570x22 + 433x23 + 584x24 + 858x25 + 441x26 \leq 5400$$

$$x1 + x5 = 1$$

$$x1 + x14 = 1$$

$$x1 + x20 = 1$$

$$x1 + x23 = 1$$

$$x1 + x25 = 1$$

$$x4 + x14 = 1$$

$$x4 + x20 = 1$$

$$x4 + x23 = 1$$

$$x5 + x10 = 1$$

$$x5 + x11 = 1$$

$$x5 + x12 = 1$$

$$x5 + x13 = 1$$

$$x5 + x16 = 1$$

$$x11 + x25 = 1$$

$$x13 + x25 = 1$$

END

INT 26

Analicemos los componentes del modelo :

! PROBLEMA DE SELECCIÓN DE JUEGOS (P5)

Esto solo es un comentario en el paquete. El signo de admiración "!" denota comentarios en el paquete LINDO.

MAX  
5.80x1 + 0.39x2 + 0.08x3 + 0.08x4 + 0.08x5 + 0.08x6 + 11.99x7 + 0.77x8 + 1.75x9 +  
3.52x10 + 0.82x11 + 0.08x12 + 0.08x13 + 0.08x14 + 0.42x15 + 40.42x16 + 0.69x17 +  
2.00x18 + 0.08x19 + 0.08x20 + 2.44x21 + 3.37x22 + 0.08x23 + 3.09x24 + 8.27x25 +  
0.08x26

$$\text{Max } \sum_{i=1}^n W_i Z_i$$

En esta parte se define el tipo de función objetivo a resolver. MAX indica que se trata de un problema de Maximización, MIN indicaría que se trata de un problema de Minimización. Se puede observar que los coeficientes de las variables son las preferencias por cada uno de los juegos. Las variables se definen con una letra primero y después con lo que se desee. Para nuestro caso se definió como x(i), con i = 1, 2, ..., 26 , a cada una de estas.

SUBJECT TO

s.a.

Este es el indicativo de que se dictarán las restricciones para el problema editado.

$$616x_1 + 464x_2 + 466x_3 + 475x_4 + 533x_5 + 851x_6 + 781x_7 + 480x_8 + 555x_9 + 594x_{10} + 396x_{11} + 341x_{12} + 553x_{13} + 552x_{14} + 1523x_{15} + 1209x_{16} + 412x_{17} + 606x_{18} + 636x_{19} + 454x_{20} + 570x_{21} + 1570x_{22} + 433x_{23} + 584x_{24} + 858x_{25} + 441x_{26} \leq 5400$$

$$\sum_{i=1}^n R_i Z_i \leq T \quad \dots (1)$$

Esta es la primer restricción del PSJ, indicando el tiempo límite para la duración del Tour. Los coeficientes que aparecen para las variables se obtienen de sumar el Tiempo de Espera en cada juego mas la Duración del mismo. Decidimos que la duración del Tour debía ser aproximadamente de 1 hora con 30 minutos (sin tomar en cuenta tiempos de traslados), esto en base a la observación de la duración del horario con mayor demanda en el parque. Por lo tanto  $T = 5400$ . Todo está manejado en segundos.

$$\begin{aligned} x_1 + x_5 &= 1 \\ x_1 + x_{14} &= 1 \\ x_1 + x_{20} &= 1 \\ x_1 + x_{23} &= 1 \\ x_1 + x_{25} &= 1 \\ x_4 + x_{14} &= 1 \\ x_4 + x_{20} &= 1 \\ x_4 + x_{23} &= 1 \\ x_5 + x_{10} &= 1 \\ x_5 + x_{11} &= 1 \\ x_5 + x_{12} &= 1 \\ x_5 + x_{13} &= 1 \\ x_5 + x_{16} &= 1 \\ x_{11} + x_{25} &= 1 \\ x_{13} + x_{25} &= 1 \end{aligned}$$

$$Z_\delta + Z_\mu = 1 \quad \delta, \mu \in F \quad \dots (2)$$

Estas son las restricciones aplicadas sobre el conjunto F anteriormente enlistado.

END

Indica que es el fin de la entrada de datos al problema.

$$Z_i \in (0, 1) \quad \forall (i) \quad \dots (3)$$

Con este comando se restringe al problema a un problema de tipo Binario. Las variables sólo pueden tomar valores de 0 o 1.

En seguida se indica mediante un comando que se inicie la solución del problema. Mostramos la hoja de salida del paquete aplicado al Problema de Selección de Juegos :

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP 3
OBJECTIVE VALUE = 65.0916290

FIX ALL VARS.( 9) WITH RC > 0.610000

NEW INTEGER SOLUTION OF 63.4799995 AT BRANCH 0 PIVOT 12
BOUND ON OPTIMUM: 63.48000
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES- 0 PIVOTS- 12
```

```
LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...
```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 63.48000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	1.000000	-5.800000
X2	0.000000	-0.390000
X3	0.000000	-0.080000
X4	1.000000	-0.080000
X5	0.000000	-0.080000
X6	0.000000	-0.080000
X7	1.000000	-11.990000
X8	0.000000	-0.770000
X9	0.000000	-1.750000
X10	1.000000	-3.520000
X11	1.000000	-0.820000
X12	1.000000	-0.080000
X13	1.000000	-0.080000
X14	0.000000	-0.080000
X15	0.000000	-0.420000
X16	1.000000	-0.419998
X17	1.000000	-0.690000
X18	0.000000	-2.000000
X19	0.000000	-0.080000
X20	0.000000	-0.080000
X21	0.000000	-2.440000
X22	0.000000	-3.370000
X23	0.000000	-0.080000
X24	0.000000	-3.090000
X25	0.000000	-8.270000
X26	0.000000	-0.080000

Figura 3.10

El conjunto de variables que arrojó el Modelo como factible corresponde a los siguientes juegos :

JUEGO	PREFERENCIA
GRAN PREMIO	5.80
GRAN PREMIO	0.08
GRAN PREMIO	11.99
GRAN PREMIO	3.52
GRAN PREMIO	0.82
GRAN PREMIO	0.08
GRAN PREMIO	0.08
GRAN PREMIO	40.42
GRAN PREMIO	0.69
<b>TOTAL</b>	<b>63.48</b>

Tabla 3.11

Fisicamente, los juegos anteriores se encuentran ubicados de la siguiente manera :

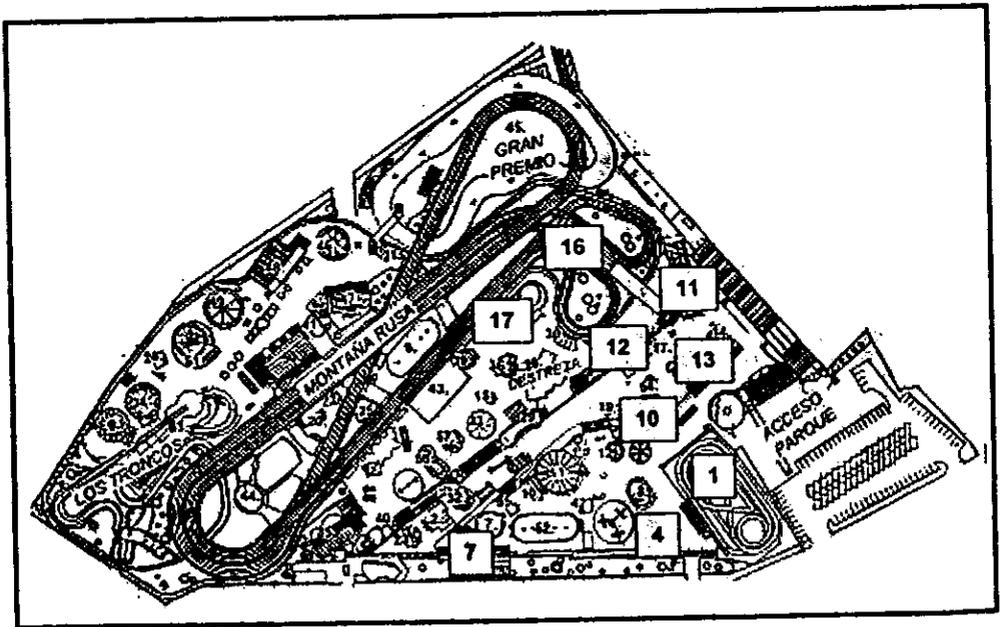


Figura 3.12

Continuando con la segunda etapa de solución del Modelo, ahora se aplica el Algoritmo de Dijkstra a los juegos factibles :

Paso 1.

$$\begin{array}{lll} L'_{s4} = 35 & L'_{s11} = 135 & L'_{s16} = 155 \\ L'_{s7} = 100 & L'_{s12} = 110 & L'_{s17} = 140 \\ L'_{s10} = 55 & L'_{s13} = 110 & \end{array}$$

Paso 2.  $L'_{sr} = \text{Min} ( 35,100,55,135,110,110,155,140 )$   
 $L'_{sr} = 35$ , donde  $r = 4$

Paso 3.  $A_{14}$  donde  $(35,1)$

Paso 4.  $n = 9$ ,  $n' = 1$

Paso 5. Vecinos  $(7,10,11,12,13,16,17)$

$$\begin{array}{ll} L'_{s7} = 35+90=125 & L'_{s13} = 35+120=155 \\ L'_{s10} = 35+65=100 & L'_{s16} = 35+165=200 \\ L'_{s11} = 35+150=185 & L'_{s17} = 35+150=185 \\ L'_{s12} = 35+125=160 & \end{array}$$


---

Paso 2.  $L'_{sr} = \text{Min} ( 125,100,185,160,155,200,185 )$   
 $L'_{sr} = 100$ , donde  $r = 10$

Paso 3.  $A_{410}$  donde  $(100,4)$

Paso 4.  $n = 9$ ,  $n' = 2$

Paso 5. Vecinos  $(7,11,12,13,16,17)$

$$\begin{array}{ll} L'_{s7} = 100+105=205 & L'_{s13} = 100+75=175 \\ L'_{s11} = 100+95=195 & L'_{s16} = 100+125=225 \\ L'_{s12} = 100+75=175 & L'_{s17} = 100+105=205 \end{array}$$


---

Paso 2.  $L'_{sr} = \text{Min} ( 205,195,175,175,225,205 )$   
 $L'_{sr} = 175$ , donde  $r = 12$

Paso 5. Vecinos  $(7,11,13,16,17)$

---

$$L'_{s7} = 175+145=320$$

$$L'_{s16} = 175+75=250$$

$$L'_{s11} = 175+55=230$$

$$L'_{s17} = 175+70=245$$

$$L'_{s13} = 175+40=215$$

---

Paso 2.  $L'_{sr} = \text{Min} ( 320,230,215,250,245 )$

$$L'_{sr} = 215, \text{ donde } r = 13$$

Paso 5. Vecinos (7,11,16,17)

$$L'_{s7} = 215+150=365$$

$$L'_{s16} = 215+75=290$$

$$L'_{s11} = 215+50=265$$

$$L'_{s17} = 215+95=310$$

---

Paso 2.  $L'_{sr} = \text{Min} ( 365,265,290,310 )$

$$L'_{sr} = 265, \text{ donde } r = 11$$

Paso 5. Vecinos (7,16,17)

$$L'_{s7} = 265+180=445$$

$$L'_{s17} = 265+90=355$$

$$L'_{s16} = 265+65=330$$

---

Paso 2.  $L'_{sr} = \text{Min} ( 445,330,355 )$

$$L'_{sr} = 330, \text{ donde } r = 16$$

Paso 5. Vecinos (7,17)

$$L'_{s7} = 330+190=520$$

$$L'_{s17} = 330+60=390$$

---

Paso 2.  $L'_{sr} = \text{Min} ( 520,390 )$

$$L'_{sr} = 390, \text{ donde } r = 17$$

Paso 5. Vecinos (7)

$$L'_{s17} = 390+160=550$$

---

Termina el algoritmo con : 1 - 4 - 10 - 12 - 13 - 11 - 16 - 17 - 7

---

Tomando los resultados anteriores, la secuencia óptima para los juegos propuestos es la siguiente :

- ⊗ Tornado
- ⊗ Sombrillas
- ⊗ Aladino
- ⊗ Palacio de Cristal
- ⊗ Carrusel Doble
- ⊗ Cascadas
- ⊗ Montaña Rusa
- ⊗ Dragón
- ⊗ Cascabel

Físicamente, la ruta es la siguiente :

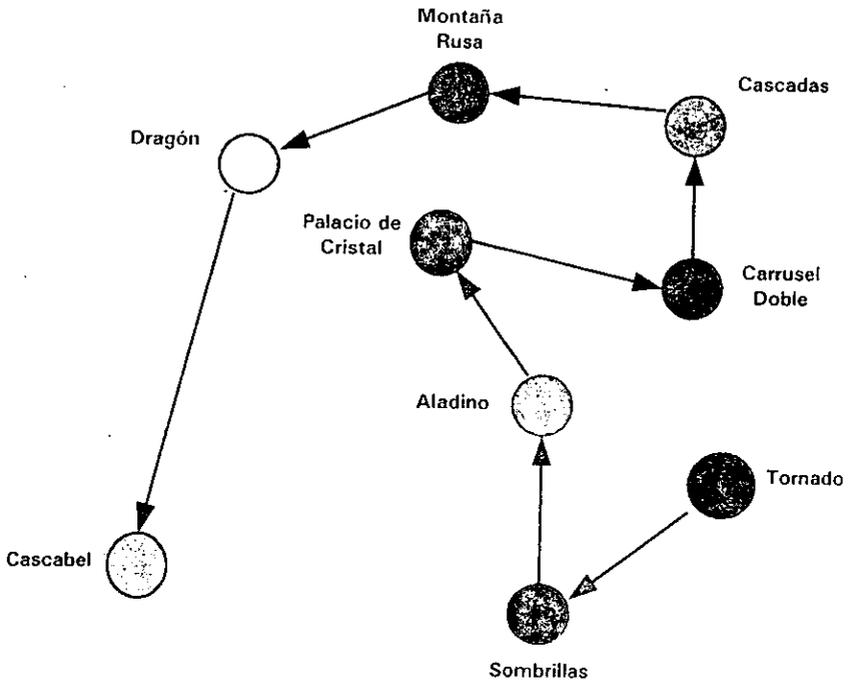


Figura 3.13

El tiempo total de traslado resultó en 550 segundos (9 minutos y 10 segundos).

Conjuntando duraciones de juegos, tiempos de espera y tiempos de viajes entre juegos, el tiempo total de duración para el tour es de 5927 segundos, es decir, el tour se extenderá por espacio de **1 hora, 38 minutos y 47 segundos**.

### 3.4.2.3 Conclusiones

Uno de los objetivos principales del presente estudio es que la mayoría de los asistentes a la Feria de Chapultepec adquieran el nuevo paquete, obviamente con mercadotecnia de la propia empresa, para así lograr una mejor distribución de la gente en todo el parque y de esta manera atacar directamente el problema de la acumulación en áreas y juegos específicos.

Como se puede apreciar, el tour está compuesto en su mayoría por juegos que presentan una mayor aceptación por parte del público, además de que son de los juegos que generan mayores utilidades a la empresa. Si observamos la ubicación de los 9 juegos incluidos, 3 de ellos pertenecen al Area 1, 1 pertenece al Area 2 y 5 pertenecen al Area 3. Como se mencionó en el Capítulo 1, en el Area 3 se encuentran juegos en donde la gente que los utiliza es de cualquier tipo, en cuestión de la clasificación que se hizo de los clientes. Esto puede augurar una aceptación más segura por parte de la gente hacia el paquete.

Por otra parte, se presentó el proyecto a la empresa, solicitando permiso para hacer "pruebas" con grupos de 10 personas. Estas se llevaron a cabo durante un Viernes, un Sábado y un Domingo. Los grupos de personas tenían un intervalo de salida aproximadamente de 15 minutos. La forma en que se trató de controlar el orden propuesto de las visitas a los juegos fue de la siguiente manera: se colocó una pequeña pulsera que contenía la ruta a seguir en la que se iban marcando los juegos que los clientes ya habían visitado, si el operador del juego en el que se encontraba el cliente observaba que se había "saltado" algún juego, se le indicaba cuál era, y que debía seguir la ruta; en la primer visita, se anotó la hora de entrada al primer juego, y en la última visita, se anotó la hora de finalización del tour; el tiempo total máximo de recorrido llegó a ser de 2 hrs. con 3 mins.

Al final del recorrido, se le preguntó a la gente acerca del precio propuesto que se pagaría por el paquete, y un 87% del total de encuestados estuvo de acuerdo.

Otra observación interesante fue que al terminar el recorrido cerca de un 40% de la gente que se utilizó para las pruebas, se volvió a subir a la mayoría de los juegos propuestos, y casi con la misma ruta, por lo que, si en un futuro se llegara a aplicar realmente el paquete, podría acarrear mayores utilidades a la empresa.

Consideramos que lo más relevante y satisfactorio del presente estudio es que, por medio del mismo, la administración de la Feria ha aceptado reconocer los problemas de largos de filas excesivos, así como el de la acumulación de gente en las áreas, además de comprender que es necesario encontrar un equilibrio en el número de juegos que han de ser visitados por los asistentes, esto con el fin de cumplir con las expectativas de la gente que espera encontrar un máximo de diversión en su vista al parque.

### 3.5 MATRIZ DE TRANSICIÓN.

Un punto crucial para poder entender las preferencias de la gente, es tener una idea de como se mueve dentro del parque. Los objetivos y beneficios de tener esta información, son innumerables, ya que pueden obtenerse panoramas fundamentales para la óptima Administración del Parque.

#### 3.5.1 Metodología para la recolección de datos.

Para poder obtener esta matriz fue necesario llevar a cabo un muestreo de la gente que visita el parque. El total de encuestas que se realizó fue de 7800, teniendo así un 95% de nivel de confianza y un error del 1.1096%. Las encuestas se llevaron a cabo de la siguiente manera :

1. A todos los juegos incluidos en este estudio se les dio la misma importancia.
2. El muestreo se llevó a cabo con la ayuda de los operadores de los juegos ; esto con el fin de realizarlo en los 26 juegos analizados a la misma hora.
3. El horario en que se realizó fue en las ya mencionadas horas pico (11:00 hrs. - 14:00 hrs. ).
4. Se realizaron 300 encuestas en cada juego.
5. Se llevaron a cabo durante un Viernes, un Sábado y un Domingo (100, 100 y 100 encuestas respectivamente), puesto que son los días en que se presenta mayor demanda en el parque.
6. Para realizar las encuestas, se evitó preguntar a personas que pertenecían a un mismo grupo de visitantes. Es decir, se intentó encuestar a personas "independientes".
7. El formato de la encuesta fue el siguiente :

Acaba de llegar al parque ?	Si _____	No _____
De qué juego viene ? (juego anterior)	_____	Edad _____

Figura 3.14

La información obtenida de este muestreo fue valiosísima. Pudimos obtener una Matriz de Transición acerca de los movimientos de la gente dentro del parque. Además obtuvimos un vector acerca de la gente que, acabando de llegar al parque, prefiere ciertos juegos. Estos son utilizados más adelante para el desarrollo de otras aplicaciones.

### 3.5.2 Obtención de la Matriz de transición y Vector de llegadas.

De acuerdo a las contabilizaciones, la matriz obtenida y el vector ya mencionado tienen la siguiente forma. Es importante hacer notar que la matriz **no es estocástica**, es decir, no suma 1 por renglones, esto debido a que cierta cantidad de gente que se encuestó provenía de juegos que no fueron considerados para este trabajo :

Probabilidades de pasar de un juego a otro  
(Matriz de Transición)

1	0.2801	0.0008	0.0028	0.0039	0.0065	0.0067	0.0185	0.0307	0.0289	0.0308	0.0284	0.0012	0.0005	0.0029	0.1341	0.1028	0.0207	0.0005	0.0006	0.0006	0.0146	0.0132	0.0007	0.0129	0.0222	0.0015	
2	0.0701	0.0273	0.0020	0.0015	0.0007	0.0018	0.0185	0.0335	0.0439	0.0086	0.0020	0.0009	0.0007	0.0006	0.0079	0.1225	0.0108	0.0261	0.0054	0.0068	0.0068	0.0247	0.0218	0.0010	0.0795	0.0378	0.0015
3	0.4001	0.0097	0.0066	0.0034	0.0006	0.0013	0.1525	0.0259	0.0518	0.0688	0.0097	0.0021	0.0010	0.0006	0.0038	0.1301	0.0108	0.0238	0.0025	0.0065	0.0065	0.0175	0.0158	0.0007	0.0963	0.0295	0.0016
4	0.2002	0.0078	0.0035	0.0054	0.0006	0.0009	0.1186	0.0199	0.0438	0.0752	0.0031	0.0011	0.0005	0.0031	0.1362	0.0101	0.0235	0.0025	0.0068	0.0068	0.0160	0.0142	0.0007	0.0937	0.0297	0.0016	
5	0.0392	0.0078	0.0068	0.0006	0.0053	0.0003	0.0534	0.0060	0.0130	0.0195	0.0054	0.0011	0.0005	0.0037	0.0027	0.1345	0.0072	0.0198	0.0008	0.0008	0.0007	0.0220	0.0331	0.0008	0.0203	0.0209	0.0016
6	0.0738	0.0195	0.0028	0.0019	0.0007	0.0025	0.3090	0.0269	0.0475	0.0543	0.0068	0.0020	0.0006	0.0007	0.0048	0.1157	0.0101	0.0248	0.0008	0.0007	0.0007	0.0220	0.0331	0.0009	0.0203	0.0209	0.0016
7	0.0701	0.0227	0.0020	0.0015	0.0007	0.0018	0.4276	0.0173	0.0317	0.0445	0.0081	0.0018	0.0009	0.0007	0.0048	0.1157	0.0101	0.0248	0.0008	0.0007	0.0007	0.0220	0.0331	0.0009	0.0203	0.0209	0.0016
8	0.1001	0.0097	0.0020	0.0021	0.0006	0.0011	0.1423	0.0519	0.0850	0.0608	0.0122	0.0030	0.0031	0.0007	0.0048	0.1157	0.0101	0.0248	0.0008	0.0007	0.0007	0.0220	0.0331	0.0009	0.0203	0.0209	0.0016
9	0.1001	0.0097	0.0020	0.0021	0.0006	0.0011	0.1423	0.0519	0.0850	0.0608	0.0122	0.0030	0.0031	0.0007	0.0048	0.1157	0.0101	0.0248	0.0008	0.0007	0.0007	0.0220	0.0331	0.0009	0.0203	0.0209	0.0016
10	0.2714	0.0063	0.0020	0.0021	0.0006	0.0011	0.1423	0.0519	0.0850	0.0608	0.0122	0.0030	0.0031	0.0007	0.0048	0.1157	0.0101	0.0248	0.0008	0.0007	0.0007	0.0220	0.0331	0.0009	0.0203	0.0209	0.0016
11	0.2714	0.0063	0.0020	0.0021	0.0006	0.0011	0.1423	0.0519	0.0850	0.0608	0.0122	0.0030	0.0031	0.0007	0.0048	0.1157	0.0101	0.0248	0.0008	0.0007	0.0007	0.0220	0.0331	0.0009	0.0203	0.0209	0.0016
12	0.2714	0.0063	0.0020	0.0021	0.0006	0.0011	0.1423	0.0519	0.0850	0.0608	0.0122	0.0030	0.0031	0.0007	0.0048	0.1157	0.0101	0.0248	0.0008	0.0007	0.0007	0.0220	0.0331	0.0009	0.0203	0.0209	0.0016
13	0.2714	0.0063	0.0020	0.0021	0.0006	0.0011	0.1423	0.0519	0.0850	0.0608	0.0122	0.0030	0.0031	0.0007	0.0048	0.1157	0.0101	0.0248	0.0008	0.0007	0.0007	0.0220	0.0331	0.0009	0.0203	0.0209	0.0016
14	0.2714	0.0063	0.0020	0.0021	0.0006	0.0011	0.1423	0.0519	0.0850	0.0608	0.0122	0.0030	0.0031	0.0007	0.0048	0.1157	0.0101	0.0248	0.0008	0.0007	0.0007	0.0220	0.0331	0.0009	0.0203	0.0209	0.0016
15	0.4667	0.0124	0.0025	0.0027	0.0006	0.0018	0.1941	0.0258	0.0439	0.0815	0.0101	0.0007	0.0011	0.0006	0.0031	0.1301	0.0108	0.0238	0.0025	0.0065	0.0065	0.0175	0.0158	0.0007	0.0963	0.0295	0.0016
16	0.4667	0.0124	0.0025	0.0027	0.0006	0.0018	0.1941	0.0258	0.0439	0.0815	0.0101	0.0007	0.0011	0.0006	0.0031	0.1301	0.0108	0.0238	0.0025	0.0065	0.0065	0.0175	0.0158	0.0007	0.0963	0.0295	0.0016
17	0.4667	0.0124	0.0025	0.0027	0.0006	0.0018	0.1941	0.0258	0.0439	0.0815	0.0101	0.0007	0.0011	0.0006	0.0031	0.1301	0.0108	0.0238	0.0025	0.0065	0.0065	0.0175	0.0158	0.0007	0.0963	0.0295	0.0016
18	0.4667	0.0124	0.0025	0.0027	0.0006	0.0018	0.1941	0.0258	0.0439	0.0815	0.0101	0.0007	0.0011	0.0006	0.0031	0.1301	0.0108	0.0238	0.0025	0.0065	0.0065	0.0175	0.0158	0.0007	0.0963	0.0295	0.0016
19	0.4667	0.0124	0.0025	0.0027	0.0006	0.0018	0.1941	0.0258	0.0439	0.0815	0.0101	0.0007	0.0011	0.0006	0.0031	0.1301	0.0108	0.0238	0.0025	0.0065	0.0065	0.0175	0.0158	0.0007	0.0963	0.0295	0.0016
20	0.4667	0.0124	0.0025	0.0027	0.0006	0.0018	0.1941	0.0258	0.0439	0.0815	0.0101	0.0007	0.0011	0.0006	0.0031	0.1301	0.0108	0.0238	0.0025	0.0065	0.0065	0.0175	0.0158	0.0007	0.0963	0.0295	0.0016
21	0.4667	0.0124	0.0025	0.0027	0.0006	0.0018	0.1941	0.0258	0.0439	0.0815	0.0101	0.0007	0.0011	0.0006	0.0031	0.1301	0.0108	0.0238	0.0025	0.0065	0.0065	0.0175	0.0158	0.0007	0.0963	0.0295	0.0016
22	0.4667	0.0124	0.0025	0.0027	0.0006	0.0018	0.1941	0.0258	0.0439	0.0815	0.0101	0.0007	0.0011	0.0006	0.0031	0.1301	0.0108	0.0238	0.0025	0.0065	0.0065	0.0175	0.0158	0.0007	0.0963	0.0295	0.0016
23	0.4667	0.0124	0.0025	0.0027	0.0006	0.0018	0.1941	0.0258	0.0439	0.0815	0.0101	0.0007	0.0011	0.0006	0.0031	0.1301	0.0108	0.0238	0.0025	0.0065	0.0065	0.0175	0.0158	0.0007	0.0963	0.0295	0.0016
24	0.4667	0.0124	0.0025	0.0027	0.0006	0.0018	0.1941	0.0258	0.0439	0.0815	0.0101	0.0007	0.0011	0.0006	0.0031	0.1301	0.0108	0.0238	0.0025	0.0065	0.0065	0.0175	0.0158	0.0007	0.0963	0.0295	0.0016
25	0.4667	0.0124	0.0025	0.0027	0.0006	0.0018	0.1941	0.0258	0.0439	0.0815	0.0101	0.0007	0.0011	0.0006	0.0031	0.1301	0.0108	0.0238	0.0025	0.0065	0.0065	0.0175	0.0158	0.0007	0.0963	0.0295	0.0016
26	0.4667	0.0124	0.0025	0.0027	0.0006	0.0018	0.1941	0.0258	0.0439	0.0815	0.0101	0.0007	0.0011	0.0006	0.0031	0.1301	0.0108	0.0238	0.0025	0.0065	0.0065	0.0175	0.0158	0.0007	0.0963	0.0295	0.0016

Figura 3.15

JUEGO	PROBABILIDAD
1	0.1628
2	0.0041
3	0.0014
4	0.0018
5	0.0004
6	0.0009
7	0.1262
8	0.0108
9	0.0246
10	0.0593
11	0.0067
12	0.0008
13	0.0008
14	0.0004
15	0.0031
16	0.2917
17	0.0054
18	0.0180
19	0.0005
20	0.0004
21	0.0147
22	0.0213
23	0.0004
24	0.0488
25	0.0402
26	0.0008

Figura 3 16

# **CAPITULO IV**

## **APLICACION DE TEORIA DE JUEGOS**

# IV. APLICACION DE TEORIA DE JUEGOS

En este capítulo se presenta material de optimización que se conoce en la Investigación de Operaciones como Teoría de Juegos y, el cual se basa en el trabajo de Von Neumann.

En realidad la Teoría de Juegos ha mostrado efectividad en conflictos bélicos, pero no en época de paz, por lo que han sido poco los marcos de referencia donde se conoce su uso práctico.

La Teoría de Juegos sirvió para desarrollar la teoría estadística de decisión y la programación lineal (esta última 5 años después de haberse publicado la obra clásica de Von Neumann y O. Morgenstern sobre Teoría de Juegos). El desarrollo posterior de la teoría dio origen a otros conceptos matemáticos de competitividad, explícitamente los metajuegos y los debates.

## 4.1 INTRODUCCION

La Teoría de Juegos trata de las decisiones con incertidumbre comprendiendo dos o más oponentes *inteligentes* donde cada oponente aspira a optimizar su propia decisión, pero a costa de los otros.

Dos o más individuos se encuentran en una situación de *competitividad* si el logro de los objetivos de uno de ellos implica la reducción de las probabilidades de los demás para alcanzar los suyos. Existe una teoría matemática que describe el comportamiento de los participantes ; sin embargo la serie de suposiciones que requiere le dan escasas aplicaciones prácticas.

El complemento a la competitividad es la *cooperación* ; se define como una situación que envuelve a dos o más personas, tal que si una de ellas logra acercarse a sus objetivos, simultáneamente se incrementa la probabilidad de que los demás alcancen los suyos.

La competitividad puede verse desde tres puntos diferentes :

- a) *Peleeas* (la situación de competitividad donde el objetivo es eliminar al oponente).
- b) *Juegos* (la situación de competitividad donde el objetivo es ser más astuto que el oponente, pero sin eliminarlo).
- c) *Debates* (la situación de competitividad donde el objetivo es convencer al oponente).

La teoría clásica de Von Neumann y Morgenstern, aparecida en 1944, se ocupó de los juegos ; los trabajos posteriores de Rapoport se ocuparon de otras formas de competitividad.

Una de las principales aportaciones que tuvo la Teoría de Juegos fue el empuje que dio para el desarrollo de la Teoría Estadística de Decisión y la Programación Lineal.

La Teoría de Juegos considera la existencia de  $n$  decisores donde  $n \geq 2$ . Cuando  $n = 2$  el juego se llama de **dos personas**; cuando  $n > 2$ , se llama de  **$n$  personas**. Se supone que existen una serie de políticas (reglas de juegos) *conocidas* por los jugadores. Existe también una serie de condiciones que terminan la competitividad (por ejemplo: ganar, perder, empatar). Se conoce una *serie de consecuencias* asociadas con una decisión  $i$  de un jugador y una  $j$  de otro. Estas consecuencias se expresan por lo general en valores monetarios y se presentan en la forma de **matrices de consecuencias o matrices de pagos**. Precisamente estas suposiciones son las que limitan la utilidad práctica de la Teoría de Juegos. Por lo general un tomador de decisiones puede intuir, mas no necesariamente conocer con certeza lo que otro decisor hará bajo ciertas circunstancias. La construcción de una matriz de pagos no sólo es un proceso difícil, sino por lo general, imposible de realizar en la práctica.

En la Teoría de Juegos, un oponente se designa como **jugador**. Cada jugador tiene un número de elecciones finito o infinito, llamadas **estrategias**.

La solución óptima a un juego puede necesitar que cada jugador emplee una **estrategia pura**, o una mezcla de estrategias puras, llamada **estrategia mixta**.

La Teoría de Juegos define estrategias que maximizan o minimizan una función objetivo (por lo general una función de utilidad construida con la matriz de pagos para cada jugador).

La Teoría de Juegos se divide en cuanto a :

a) *Jugadores.*

⇒ juegos de 2 personas

⇒ juegos de  $n$  personas

b) *Número de estrategias disponibles a cada decisor.*

⇒ juegos finitos

⇒ juegos infinitos

c) *Objetivos del juego.*

⇒ juegos suma - cero

⇒ juegos suma diferente de cero o meta - juegos

La Teoría de Juegos se ha desarrollado básicamente de acuerdo con el juego de suma - cero para 2 participantes. Existen algunos resultados muy limitados para juegos con suma diferente de cero (para 2 o más participantes).

En cuanto a los métodos que utiliza la Teoría de Juegos para alcanzar el objetivo propuesto por los jugadores se tienen :

- ➡ Técnicas de puntos de silla
- ➡ Conceptos de dominación
- ➡ Métodos algebraicos o matriciales
- ➡ Métodos gráficos
- ➡ Programación lineal

#### 4.2 JUEGOS SUMA - CERO PARA 2 Oponentes.

En un juego de *suma - cero* de 2 oponentes, el interés de cada jugador es opuesto, en el sentido de que la suma de las ganancias de uno es igual a la suma de las pérdidas del otro.

Suponga el caso de 2 competidores  $X$  y  $Y$ , ambos igual de capaces y conocedores de la **matriz de pagos** que se muestra a continuación :

		Estrategias de jugador $Y$		
		3	4	
Estrategias de jugador $X$	1	+5	+7	5
	2	+4	+6	4
Máximo de la columna		5	7	

Suponga que el jugador  $X$  gana, mientras que el otro pierde. El jugador  $X$  puede utilizar las estrategias 1 y 2, mientras que el  $Y$  las estrategias 3 y 4. Obviamente el jugador  $X$  utilizará la estrategia 1, que es la que le maximiza sus ganancias. Como  $Y$  conoce la matriz de pagos e infiere que  $X$  jugará 1, entonces él querrá minimizar sus pérdidas y, por lo tanto, elegirá la estrategia 3. El valor del juego es 5 porque  $X$  gana 5 y  $Y$  pierde 5.

Este proceso ejemplifica lo que se llama el criterio **minimax** para la solución de juegos, el cual es un criterio muy conservador, y que sólo sirve para juegos de suma - cero para dos personas.

Este juego ilustra la idea de **suma - cero**.

Se entiende por **valor del juego** el promedio de ganancias (o pérdidas) a lo largo de las múltiples jugadas.

Los juegos anteriores se llaman **finitos** porque para un jugador existen  $n$  estrategias y para el otro  $m$ , pero tanto  $n$  como  $m$  son enteros finitos. Para cada combinación de estrategias de uno y otro jugador se tiene una consecuencia. El arreglo de todas las consecuencias es la matriz de pagos.

Por ejemplo :

$$X \begin{matrix} & Y \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

significa

		Jugador Y	
		Estrategia 3	Estrategia 4
Jugador X	Estrategia 1	X gana 2 Y pierde 2	X gana 4 Y pierde 4
	Estrategia 2	X gana 1 Y pierde 1	X pierde 3 Y gana 3

La matriz de pagos no necesariamente debe ser cuadrada, o sea, el número de estrategias disponibles para cada jugador es, por lo general, diferente.

Matemáticamente, esto se expresa de la siguiente manera. El jugador **A** debe escoger una estrategia entre  $m$  que tiene disponibles (1, 2, ...,  $m$ ), mientras que **B** debe escoger una entre  $n$  (1, 2, ...,  $n$ ). Existe una matriz de pagos conocida por ambos jugadores; sin embargo, las decisiones se realizan *independientemente* una de la otra. Si **A** escoge  $i$  y **B** escoge  $j$ , se genera una consecuencia  $\alpha_{ij}$ , donde **A** gana  $\alpha_{ij}$  y **B** pierde  $\alpha_{ij}$  (gana  $-\alpha_{ij}$ ).

Sea  $p_i$  la probabilidad de que **A** escoja  $i$  y  $q_j$  la probabilidad de que **B** seleccione  $j$ . La consecuencia esperada, denotada por **E** es :

$$E = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j \alpha_{ij}$$

La Teoría de Juegos supone que  $A$  seleccionará  $p_1, p_2, \dots, p_m$  tal que

- a) Independientemente de que  $B$  escoja  $q_1, q_2, \dots, q_n$  la ganancia para  $A$  será *por lo menos*  $V$ .
- b) La cantidad  $V$  será la máxima posible.

Lo anterior implica

$$E = \sum_{j=1}^n q_j \sum_{i=1}^m p_i \alpha_{ij} = \sum_{j=1}^n q_j V_j$$

Se divide a  $V_j = \sum_{i=1}^m p_i \alpha_{ij}$  en los subconjuntos  $S$  y  $\overline{S}$ ; en el conjunto  $S$  se colocan todos los valores  $V$  tal que

- a) Todos los  $V_j \in \overline{S}$  son iguales.
- b) Todos los  $V_j \in S$  son menores a cualquier  $V_j \in \overline{S}$ .
- c) Cualquier  $V_j$  está en  $S$  o en  $\overline{S}$ .

Como  $B$  desea minimizar las ganancias de  $A$ , es obvio que la probabilidad  $q_j = 0$  siempre que  $V_j \in S$ . Por lo tanto,  $A$  debe seleccionar sus probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_m$  tal que

$$V_j = \sum_{i=1}^m p_i \alpha_{ij} \geq V$$

y  $V$  es el máximo posible. Las probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_m$  cumplen con

$$\sum p_i = 1$$

$$p_i \geq 0 \quad \text{para toda } i.$$

El problema de  $A$  se formula como encontrar los valores de  $p_1, p_2, \dots, p_m$  que:

**Max V**

sujeto a

$$V - \sum_{i=1}^m p_i \alpha_{ij} \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1$$

$$p_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Se nota que lo anterior es un Problema Lineal. Siguiendo una deducción análoga, se formula para **B** el problema de encontrar probabilidades  $q_1, q_2, \dots, q_n$  tales que:

**Min U**

sujeto a

$$U - \sum_{j=1}^n q_j \alpha_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1$$

$$q_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Se puede observar que el problema para **B** es el dual del problema para el jugador **A**, y que por lo tanto:

$$\text{Min U} = \text{Max V} \quad (1)$$

razón por la que este tipo de juegos se denominan de *suma - cero*. La expresión (1) se conoce como el **Teorema Minimax** de la Teoría de Juegos, formulado por Von Neumann muchos años antes que Dantzig y otros estructuraran la Programación Lineal.

Resolver los problemas de programación lineal anteriormente planteados, significa resolver el juego de "suma - cero de dos personas". A continuación se analizan algunas técnicas que resuelven estos problemas.

#### 4.2.1 Puntos de silla.

Se define como punto de silla a un elemento  $\alpha_{ij}$  de la matriz de pagos tal que:

- a)  $\alpha_{ij}$  sea el mínimo de la fila  $i$  y
- b) el máximo de la columna  $j$ .

Si un juego tiene un punto de silla, por ejemplo la entrada  $(h, k)$ , entonces el jugador **A** debe seleccionar la estrategia  $h$  y el jugador **B** la estrategia  $k$ . El valor del juego será  $\alpha_{hk}$ . Si existen dos o más puntos de silla, estos deben ser idénticos.

Por ejemplo, considérese el juego "suma - cero de dos participantes", en el que **A** cuenta con tres estrategias (  $A_1, A_2, A_3$  ) y el **B** con cuatro (  $B_1, B_2, B_3, B_4$  ), cuya matriz de pagos se muestra a continuación :

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	40	34	30	33
$A_2$	38	35	36	37
$A_3$	28	33	37	38

Como cada jugador hará su selección independiente del otro y la matriz es conocida por ambos, éstos definirán las estrategias que garanticen mayor seguridad, es decir maximicen sus utilidades.

Si **A** selecciona la estrategia :

- $A_1$  , el mínimo que puede obtener es 30
- $A_2$  , el mínimo que puede obtener es 35
- $A_3$  , el mínimo que puede obtener es 28

Por lo tanto **A**, que quiere *maximizar las mínimas ganancias*, se decidirá por la estrategia  $A_2$ .

En contrapartida, si **B** selecciona la estrategia :

- $B_1$  , el máximo que puede perder es 40
- $B_2$  , el máximo que puede perder es 35
- $B_3$  , el máximo que puede perder es 37
- $B_4$  , el máximo que puede perder es 38

por lo que **B**, que quiere *minimizar las máximas pérdidas*, seleccionará la estrategia  $B_2$ .

Como la entrada  $\alpha_{ij} = \alpha_{2,2} = \{ A_2 , B_2 \} = 35$  es al mismo tiempo el mínimo de la fila 2 y el máximo de la columna 2, se dice que es un **punto de silla**, y el valor del juego es 35. Se puede ver que lo que gana **A** es lo que pierde **B**, razón por la cual se trata de un juego de suma - cero.

No todos los juegos tiene punto de silla, por lo que el método de solución varía. En seguida se examinan otros métodos que trabajan cuando no existe un punto de silla.

#### 4.2.2 Estrategias Mixtas

En la sección anterior se muestra que la existencia de un punto de silla proporciona inmediatamente las estrategias puras óptimas para el juego. Sin embargo, como se mencionó,

algunos juegos no tienen punto de silla. Esto sucede cuando cada jugador puede mejorar su pago escogiendo una estrategia diferente. En este caso, se dice que el juego es **inestable**.

El fracaso de las estrategias minimax - maximin (puras), en general, para dar una solución óptima al juego ha llevado a la idea de usar estrategias mixtas. Cada jugador, en lugar de seleccionar una estrategia pura solamente, puede jugar todas sus estrategias de acuerdo con un conjunto predeterminado de probabilidades. Sean  $x_1, x_2, \dots, x_m$  y  $y_1, y_2, \dots, y_n$  las probabilidades del renglón y la columna por las cuales **A** y **B**, respectivamente, seleccionarán sus estrategias puras. Entonces :

$$\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{j=1}^n y_j = 1$$

$$x_i, y_j \geq 0, \text{ para toda } i \text{ y } j$$

Por consiguiente, si  $a_{ij}$  representa el  $(i,j)$  -ésimo elemento de la matriz del juego,  $x_i$  y  $y_j$  aparecerán como en la matriz siguiente :

		<b>B</b>			
		$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_n$
<b>A</b>	$x_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1n}$
	$x_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2n}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$x_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mn}$

La solución de problema de estrategias mixtas está basada también en el **criterio minimax**. La única diferencia es que **A** elige  $x_i$ , la cual maximiza el pago **esperado** más pequeño en una columna, en tanto que **B** selecciona  $y_j$ , la cual minimiza el mayor pago **esperado** en un renglón. Matemáticamente el criterio minimax para una estrategia mixta está dado como sigue. El jugador **A** elige  $x_i$  ( $x_i \geq 0, \sum x_i = 1$ ) lo cual proporcionará :

$$\max_{x_i} \left\{ \min \left( \sum_{i=1}^m a_{i1} x_i, \sum_{i=1}^m a_{i2} x_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{in} x_i \right) \right\}$$

y el jugador **B** selecciona  $y_j$  ( $y_j \geq 0, \sum y_j = 1$ ) lo cual proporcionará :

$$\min_{y_j} \left\{ \max \left( \sum_{j=1}^n a_{1j} y_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} y_j \right) \right\}$$

Estos valores se denominan pagos maximin y minimax esperados, respectivamente.

Como en el caso de estrategias puras, se verifica la relación

$$\text{pago esperado minimax} \geq \text{pago esperado maximin}$$

Cuando  $x_i$  y  $y_j$  corresponden a la solución óptima, se cumple la igualdad y los valores resultantes llegan a ser iguales al valor esperado (óptimo) del juego. Este resultado se deduce del teorema minimax. Por consiguiente, el valor esperado del juego es

$$v^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i^* y_j^*$$

#### 4.2.3 Dominación.

Un jugador  $A$  nunca escogerá una estrategia  $k$  cuando  $\alpha_{ij} \geq \alpha_{kj}$  para una  $i$  cualquiera,  $i = 1, 2, \dots, m, i \neq k$  y toda  $j, j = 1, 2, \dots, n$ . Esto equivale a decir que si se cumple para  $i$  cualquiera y una  $k$  dada,  $i \neq k$

$$\alpha_{ij} \geq \alpha_{kj} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

entonces

$$p_k = 0$$

En este caso se dice que cualquier estrategia  $i$  *domina* a la estrategia  $k$  y por lo tanto, se puede eliminar a esta última del proceso de decisión.

En forma análoga, es decir, examinando  $-\alpha_{ij}$  en vez de  $\alpha_{ij}$ , se pueden analizar las estrategias del jugador  $B$ , observando si existe dominación de una columna a otra. En este último caso se puede eliminar del proceso de decisión del jugador  $B$  la columna dominada.

Supóngase la siguiente matriz de pagos :

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
A <sub>1</sub>	40	34	30	33
A <sub>2</sub>	38	35	37	39
A <sub>3</sub>	28	33	37	38

Para el jugador **B**, que busca minimizar la máxima pérdida, la estrategia  $B_3$  domina a la  $B_2$ , ya que  $\alpha_{i3} < \alpha_{i2}$ , para  $i = 1, 2, 3$ . En este caso se puede eliminar  $B_2$  como una estrategia para **B**. La matriz de pagos quedaría de la siguiente forma:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	40	34	30
$A_2$	38	35	37
$A_3$	28	33	37

Para el jugador **A**, que busca maximizar la mínima ganancia, la estrategia  $A_2$  domina a la  $A_3$ , ya que  $\alpha_{2j} > \alpha_{3j}$ , para  $j = 1, 2, 3$ , y por lo tanto, se elimina esta última fila. La matriz de pagos queda como:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	40	34	30
$A_2$	38	35	36

A continuación se puede eliminar la estrategia  $B_1$  ya que la dominan  $B_2$  y  $B_3$ , es decir  $\alpha_{i2} > \alpha_{i1}$  y  $\alpha_{i3} > \alpha_{i1}$ , respectivamente, para  $i = 1, 2$ . La matriz queda:

	$B_2$	$B_3$
$A_1$	34	30
$A_2$	35	36

Esta matriz, ya reducida, muestra un punto de silla. Si el jugador **A** selecciona la estrategia  $A_1$ , el mínimo que obtiene es 30 y si selecciona la  $A_2$ , el mínimo que obtiene es 35 por lo que el máximo de esos mínimos es 35. Por su parte, si el jugador **B** selecciona la estrategia

$B_2$ , el máximo que puede perder es 35

y si selecciona la

$B_3$ , el máximo que puede perder es 36

por lo que el mínimo de esos máximos es 35. El valor del juego lo proporciona el punto de silla

$$\alpha_{22} = \{A_2, B_2\} = 35$$

Lo que se trata de mostrar con este ejemplo, es que en juegos donde aparentemente no hay un punto de silla, el principio de dominación reduce la matriz de pagos a un punto en que es posible aplicar el criterio de punto de silla.

#### 4.2.4 Soluciones algebraicas o matriciales.

Se ilustra esta técnica para el caso de dos jugadores, con 2 estrategias de juego para cada uno e inexistencia de un punto de silla.

Para explicar esta técnica, suponga la siguiente matriz de pagos :

		<b>B</b>		
		$B_1$	$B_2$	
<b>A</b>	$A_1$	5	35	$p_1$
	$A_2$	20	10	$p_2$
<i>Probabilidades</i>		$q_1$	$q_2$	

Si el jugador **A** selecciona la estrategia  $A_1$ , su pago esperado será

$$5q_1 + 35q_2$$

mientras que si selecciona la  $A_2$ , éste será

$$20q_1 + 10q_2$$

Como ambos valores esperados deben ser los mismos, se tiene que

$$5q_1 + 35q_2 = 20q_1 + 10q_2$$

Dado que  $q_i, i = 1, 2$  son probabilidades, se debe cumplir adicionalmente :

$$q_1 + q_2 = 1$$

Las dos ecuaciones anteriores con 2 incógnitas generan los valores

$$q_1 = 0.625$$

$$q_2 = 0.375$$

Análogamente, si el jugador **B** selecciona la estrategia  $B_1$ , su pago esperado será

$$5p_1 + 20p_2$$

mientras que si selecciona la  $B_2$ , éste será

$$35p_1 + 10p_2$$

y como ambos deben ser iguales, se tiene que

$$5p_1 + 20p_2 = 35p_1 + 10p_2$$

Dado que  $p_i, i = 1, 2$  son probabilidades, se debe cumplir adicionalmente :

$$p_1 + p_2 = 1$$

Las dos ecuaciones anteriores con 2 incógnitas generan los valores

$$p_1 = 0.25$$

$$p_2 = 0.75$$

El valor del juego será entonces :

$$\begin{aligned} V &= 5 (0.25) + 20 (0.75) \\ &= 35 (0.25) + 10 (0.75) \\ &= 5 (0.625) + 35 (0.375) \\ &= 20 (0.625) + 10 (0.375) \\ &= \mathbf{16.25} \end{aligned}$$

Los resultados anteriores se interpretan diciendo que las estrategias mixtas para el jugador **A** son ( 0.25 , 0.75 ) y para el **B** son ( 0.625 , 0.375 ). El pago esperado es que **A** gane **16.25** y **B** pierda la misma cantidad.

La técnica anterior se complica cuando cada jugador tiene más de dos estrategias disponibles. La solución para un caso más general se proporciona con técnicas de Programación Lineal.

Para el caso en que un jugador tiene 2 estrategias y el otro  $m ( m > 2 )$ , entonces los métodos gráficos trabajan adecuadamente.

#### 4.2.5 Solución gráfica de juegos de (2 x N) y (M x 2)

Las soluciones gráficas son únicamente aplicables a juegos en los cuales, por lo menos uno de los jugadores, tiene solamente dos estrategias. Considere el siguiente juego (2 x n) :

		<b>B</b>			
		$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_n$
<b>A</b>	$x_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1n}$
	$x_2 = 1 - x_1$	$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2n}$

Se supone que este juego no tiene punto silla.

Puesto que **A** tiene dos estrategias, se deduce que  $x_2 = 1 - x_1$ ;  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ . Los pagos esperados correspondientes a las estrategias puras de **B** se muestran en la siguiente tabla :

Estrategia pura de <b>B</b>	Pago esperado de <b>A</b>
1	$(a_{11} - a_{21}) x_1 + a_{21}$
2	$(a_{12} - a_{22}) x_1 + a_{22}$
.	.
.	.
.	.
n	$(a_{1n} - a_{2n}) x_1 + a_{2n}$

Esto muestra que el pago promedio de **A** varía linealmente con  $x_1$ .

Según el criterio minimax de juegos de estrategias mixtas, el jugador **A** debe seleccionar el valor de  $x_1$  que maximice sus pagos mínimos esperados. Esto se puede lograr trazando las líneas rectas como funciones de  $x_1$ . El ejemplo que sigue ilustra el procedimiento :

considérese el juego (2 x 4)

		<b>B</b>			
		1	2	3	4
<b>A</b>	1	2	2	3	-1
	2	4	3	2	6

Este juego no tiene punto silla. Por consiguiente, los pagos esperados de *A* correspondientes a las estrategias puras de *B* están dados como sigue :

Estrategias puras de <i>B</i>	Pago esperado de <i>A</i>
1	$-2x_1 + 4$
2	$-x_1 + 3$
3	$x_1 + 2$
4	$-7x_1 + 6$

Estas cuatro rectas se trazan entonces como funciones de  $x_1$ , como se muestra en la figura 1. El maximin ocurre en  $x_1^* = 1/2$ . Este es el punto de intersección de dos de las rectas 2, 3 y 4, cualesquiera. Consecuentemente, la estrategia óptima de *A* es  $(x_1^* = 1/2, x_2^* = 1/2)$ , y el valor del juego se obtiene sustituyendo  $x_1$  en la ecuación de cualquiera de las líneas que pasan por el punto maximin. Esto da :

$$v^* = \begin{cases} -1/2 + 3 = 5/2 \\ 1/2 + 2 = 5/2 \\ -7(1/2) + 6 = 5/2 \end{cases}$$

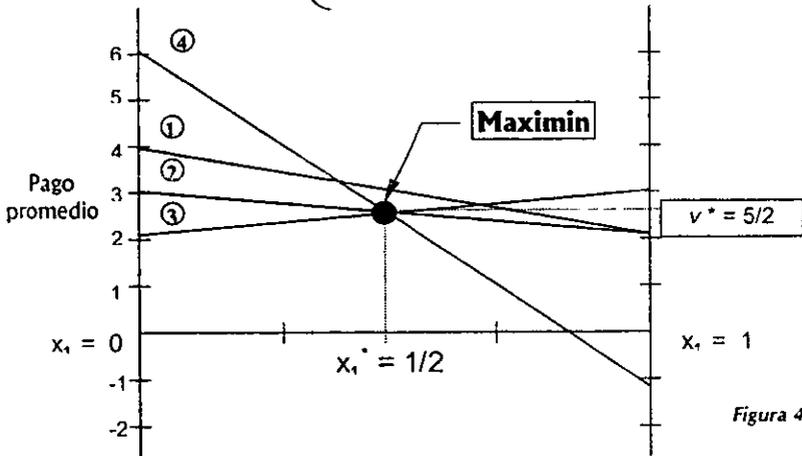


Figura 4.1

A fin de determinar las estrategias óptimas de *B* deberá observarse que 3 rectas pasan por el punto maximin. esto es una indicación de que *B* puede mezclar las 3 estrategias. Dos rectas cualesquiera que tengan signos opuestos en sus pendientes definen una solución óptima alternativa. Por consiguiente, de las tres combinaciones (2,3), (2,4) y (3,4), la combinación (2,4) debe excluirse como no óptima.

La primera combinación (2,3) implica que  $y_1^* = y_4^* = 0$ . Consecuentemente,  $y_3 = 1 - y_2$  y los pagos promedios de  $B$  correspondientes a las estrategias puras de  $A$  están dados como sigue :

Estrategias puras de $A$	Pago esperado de $B$
1	$-y_2 + 3$
2	$y_2 + 2$

Por consiguiente,  $y_2^*$  (correspondiente al punto minimax) puede determinarse de

$$-y_2^* + 3 = y_2^* + 2$$

Esto da  $y_2^* = 1/2$ . Obsérvese que sustituyendo  $y_2^* = 1/2$  en los pagos esperados de  $B$  dados anteriormente, el valor minimax es  $5/2$ , el que es igual al valor del juego  $v^*$  como debería esperarse.

La combinación (3,4) implica  $y_1^* = y_2^* = 0$ . Entonces  $y_4 = 1 - y_3$  y los pagos promedios de  $B$  correspondientes a las estrategias puras de  $A$  están dados como sigue :

Estrategias puras de $A$	Pago esperado de $B$
1	$y_3 + 2$
2	$-7y_3 + 6$

Por consiguiente,  $y_3^*$  (correspondiente al punto minimax) puede determinarse de

$$y_3^* + 2 = -7y_3^* + 6$$

Esto da  $y_3^* = 1/2$  que, sustituyendo en los pagos esperados de  $B$  dados anteriormente, arroja como valor de  $v^* = 5/2$ , el cual es el valor minimax obtenido anteriormente.

Cualquier promedio ponderado de las combinaciones (2,3) y (3,4) proporcionará también una nueva solución óptima que mezcle las tres estrategias 2, 3 y 4.

#### 4.3 JUEGOS DE SUMA DIFERENTE DE CERO O METAJUEGOS.

En los juegos cuya suma es diferente de cero, la ganancia de un jugador no necesariamente implica pérdida para el otro; por el contrario, puede implicar ganancia.

Análogamente se tendría el caso para las pérdidas. Por ejemplo, a un grupo de empresarios le conviene ceder en su negociación con el sindicato, porque entienden que a una alza de sueldos, puede seguir un incremento en la motivación de los obreros y, en consecuencia un aumento en la productividad. Otro ejemplo sería el caso de dos empresas oligopólicas que, en vez de competir, acuerdan incrementar simultáneamente el precio de su producto, manteniendo su posición de mercado constante. Las situaciones en que la ganancia de uno no necesariamente implica la pérdida de otro, se denominan *juegos con suma diferente de cero*.

Estos juegos han sido estudiados matemáticamente bajo el nombre de *metajuegos* y su solución generalmente presenta un *dilema*. El caso clásico lo ilustra Rapoport con su ejemplo del *dilema del prisionero* :

“Dos prisioneros han sido acusados de cometer un robo juntos. El juez les da una oportunidad : Si ambos confiesan, los sentenciará a 5 años de prisión a cada uno ; si uno confiesa y el otro no, al primero le dará un año y al segundo 10 ; finalmente, si ninguno de los dos confiesa, el juez a falta de pruebas, sólo los puede sentenciar a 2 años a cada uno por posesión ilegal de armas.”

La matriz de pagos en este caso es :

		<b>Prisionero B</b>	
		<i>Confiesa</i> $B_1$	<i>No confiesa</i> $B_2$
<b>Prisionero A</b>	<i>Confiesa</i> $A_1$	5 años a cada uno	10 años a B 1 año a A
	<i>No confiesa</i> $A_2$	10 años a A 1 año a B	2 años a cada uno

Aparentemente lo menos riesgoso para ambos es jugar  $(A_1, B_1)$  ; sin embargo, **A** puede pensar que si no confiesa, siempre que **B** tampoco lo haga, ganará 3 años de libertad ; **B** piensa lo mismo. El dilema aparece si alguno de los dos prisioneros decide confesar, mientras el otro decide no confesar, en cuyo caso la ganancia es de 4 años de libertad para el que confiesa.

El dilema del prisionero es exactamente igual a la situación que se presenta en el caso de agricultores organizados, comerciantes e industriales que han pactado mantener un precio elevado de sus productos. Si todos aceptan en principio el pacto, es altamente productivo para cualquiera no respetarlo en la práctica y bajar sus precios, ya que esta situación le favorecería económicamente (por aumento de ventas). Lo anterior es válido siempre que todos mantengan precios altos. Pero así pueden pensar los demás y bajar sus precios simultáneamente, situación que haría perder a todos (de ahí el dilema). Este caso se ilustra en la siguiente figura :

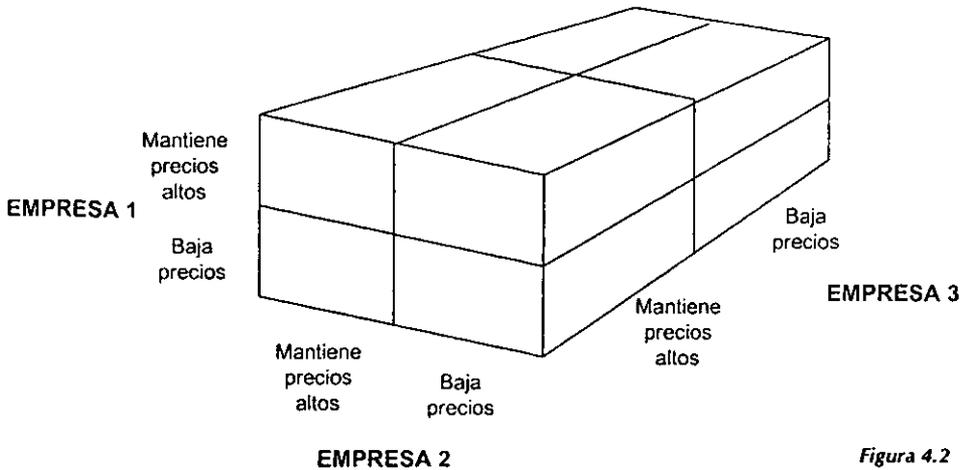


Figura 4.2

Para el caso de dos jugadores, el contenido de la matriz de pagos en un juego cuya suma es diferente de cero podría ser la siguiente :

		EMPRESA 2	
		Mantiene precios	Baja precios
EMPRESA 1	Mantiene precios	Status quo	<b>B</b> gana más clientela y utilidades
	Baja precios	<b>A</b> gana más clientela y utilidades	Mantienen misma clientela, pero pierden utilidades

En realidad, estos son modelos de poca aplicabilidad práctica, y las técnicas de solución para este tipo de metajuegos se encuentran en un estado muy primitivo.

## 4.4 UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE JUEGOS.

En la presente sección se lleva a cabo una aplicación de la Teoría de Juegos al Parque de Diversiones "La Feria de Chapultepec". Dado el problema planteado, creemos que la solución a éste puede llevarse a cabo por medio de esta herramienta.

Primero se trata de explicar el planteamiento del problema a atacar. Después se presentan tanto la metodología como los modelos matemáticos para resolver el problema. En seguida se describe la manera en que se obtiene la Forma Normal del Juego, y su solución. Como última instancia se explican y analizan los resultados.

### 4.4.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Tal vez el planteamiento del problema por parte del cliente resulte un poco fuera de lo común. Es decir, creemos que cuando vamos a un parque de diversiones ( y en general a cualquier lugar en el que uno pueda divertirse ) lo que menos hacemos, al menos de forma consciente o planeada, es pensar en maximizar algo por periodos de tiempo. Es más, creemos que ni siquiera en dividir el tiempo pensamos. Se tiene, por lo general, un límite de tiempo a gastar en el lugar al que se haya escogido, pero creemos que no se tiene un "plan" a seguir. Es decir, no pensamos en cosas como : "A las 8:30 llegamos, a las 9:40 desayunamos, a las 11:30 jugamos,...".

La situación a tratar es la siguiente :

A -> El objetivo principal de los visitantes es, de manera inconsciente tal vez, maximizar la cantidad de juegos a visitar en un periodo de tiempo dado (el tiempo que se piense gastar en el parque) y, por consecuencia, tratar de que su nivel de diversión sea máximo. Durante nuestra estancia en el parque para poder obtener los datos necesarios para el presente trabajo, nos dimos cuenta de que la gente se veía más satisfecha cuando la duración del juego era mayor, entre otras cosas. El alargamiento en la duración del juego puede darse por dos situaciones :

- 1.- la velocidad del juego es lenta, y
- 2.- la cantidad de vueltas ofrecidas es máxima.

De las dos situaciones anteriores, la primera no produce la satisfacción deseada en los clientes, y menos en los juegos que se incluyeron en este estudio. La segunda parecía satisfacer más a los clientes.

B -> El objetivo principal de la empresa es el tratar de minimizar costos de operación, y esto se logra, en cierta forma, minimizando la cantidad de vueltas ofrecidas.

De aquí que el problema se puede plantear de la siguiente manera :

- 1=> Por parte de los visitantes, encontrar una estrategia que asegure poder visitar la mayor cantidad de juegos, obteniendo sus pagos en cantidad de vueltas dadas en los juegos seleccionados

2=> Por parte de la empresa, encontrar una estrategia que asegure la minimización de vueltas ofrecidas, al menos en los juegos de mayores preferencias, logrando a la vez una mejor distribución de la gente.

#### 4.4.2 ESTRATEGIAS

Por parte de los visitantes (Jugador I), las estrategias están dadas dependiendo del primer juego que visiten. Para esto existe una probabilidad. Estas están definidas por el vector ya mencionado en el capítulo 3. Dicho vector es utilizado más adelante para poder obtener la forma Normal del Juego. Dependiendo del juego que preferan como primera opción, se generará un modelo matemático que tendrá como objetivo maximizar las probabilidades de transición entre los juegos. La justificación de esto es que por el estudio hecho para desarrollar la Matriz de Transición presentada, nos dimos cuenta de que las probabilidades representan implícitamente tanto preferencias como tendencia a buscar largos de colas mínimos y minimización de tiempos de traslado.

Los resultados que arrojen cada uno de los 26 modelos, serán un conjunto de juegos que logren una ruta "óptima" a seguir por parte de los visitantes, dependiendo el juego donde se comience. Para encontrar los pagos a favor de los visitantes, las probabilidades de los juegos encontradas serán multiplicadas por el número de vueltas que ofrece cada uno de los juegos pertenecientes al conjunto hallado. Esta cantidad deberá ser multiplicada por la probabilidad de que, llegando al parque, prefiera un juego en cuestión.

Por parte de la empresa (Jugador II), las estrategias están en función del primer juego que decida visitar el Jugador I. Dependiendo de cuál sea éste, la empresa deberá motivar a dicho jugador a que siga una ruta la cual tendrá como objetivo el minimizar probabilidades de transición. Lo que se logra con esto es que, en cierta forma, la gente se distribuya en el parque de una manera más uniforme, ya que los juegos de mayores preferencias estarán un poco más "despejados" evitando así los tan comentados largos excesivos de colas.

#### 4.4.3 MODELOS MATEMÁTICOS

El modelo para lograr la selección de juegos por parte del Jugador I queda planteado de la siguiente manera :

$$\text{Max. } \sum P_i X_i$$

s.a.

$$\sum (E_i + V_i + D_i) X_i \leq T \quad \dots(1)$$

donde :

$P_i$  = probabilidad de pasar al juego  $i$ .

$X_i$  = 1 si el juego  $i$  es visitado, 0 en cualquier otro caso.

$E_i$  = tiempo de espera en el juego  $i$ .

$V_i$  = tiempo de traslado hacia el juego  $i$ .

$D_i$  = tiempo de duración del juego  $i$ .

$T$  = tiempo límite establecido para la duración del paseo.

La función objetivo maximiza las probabilidades de transición entre el juego en donde se comienza el paseo y los 25 juegos restantes. La restricción (1) determina los juegos a ser visitados.

Para el **Jugador II**, el modelo queda de la siguiente manera :

$$\text{Min. } \sum P_i X_i$$

s.a.

$$\sum (E_i + V_i + D_i) X_i \geq T \quad \dots(2)$$

donde :

$P_i$  = probabilidad de pasar al juego  $i$  .

$X_i$  = 1 si el juego  $i$  es visitado, 0 en cualquier otro caso.

$E_i$  = tiempo de espera en el juego  $i$  .

$V_i$  = tiempo de traslado hacia el juego  $i$  .

$D_i$  = tiempo de duración del juego  $i$  .

$T$  = tiempo límite establecido para la duración del paseo.

La función objetivo minimiza las probabilidades de transición entre el juego en donde se comienza el paseo y los 25 juegos restantes. La restricción (2) determina los juegos que deben ser incluidos para lograr la menor cantidad de visitas.

Ambos modelos fueron aplicados para cada uno de los 26 juegos analizados en este trabajo. Es decir, se simuló haber comenzado las visitas al parque desde cada uno de los 26 juegos (esto por parte del Jugador I). Por parte de la empresa, se simularon las 26 diferentes situaciones que podrían darse en cuanto a llegadas de los clientes. El tiempo límite para la duración del paseo ( $T$ ) se estableció de 1 hora en ambos casos. Este tiempo puede irse variando dependiendo de las situaciones que se requieran analizar.

A continuación se presentan los juegos que resultaron factibles para cada uno de los Jugadores :

## JUGADOR I

Comenzando del juego :

Ir a los juegos :

1	1, 7, 10, 16
2	1, 7, 16, 24
3	1, 7, 16, 24
4	1, 7, 16, 24
5	7, 16, 25
6	1, 7, 16, 24
7	1, 7, 16, 24
8	1, 7, 9, 10, 24
9	7, 9, 10, 16
10	1, 7, 10, 16
11	1, 7, 11, 16
12	7, 9, 10, 16
13	7, 10, 16, 24
14	16, 17, 21, 25
15	7, 9, 16, 24
16	1, 7, 16, 17
17	1, 7, 16, 17
18	1, 7, 16, 18
19	7, 16, 18, 21
20	16, 17, 21, 25
21	16, 18, 21, 25
22	16, 18, 21, 25
23	7, 16, 25
24	1, 7, 16, 24
25	7, 16, 25
26	1, 7, 16, 24

## JUGADOR II

Comenzando del juego :

Ir a los juegos :

1	5, 6, 14, 19, 20
2	5, 6, 14, 19, 20
3	5, 14, 19, 20, 23
4	5, 14, 19, 20, 23
5	3, 4, 6, 13, 19
6	5, 13, 14, 19, 20
7	5, 13, 14, 19, 20
8	5, 6, 14, 19, 20
9	5, 6, 14, 19, 20
10	5, 6, 14, 19, 20
11	5, 6, 14, 19, 20
12	5, 14, 15, 20
13	5, 6, 14, 19
14	3, 4, 6, 13
15	5, 6, 13, 14, 19
16	4, 5, 6, 14, 19
17	4, 5, 6, 14
18	4, 5, 6, 13, 14, 19
19	3, 4, 6, 13, 14
20	3, 4, 6, 13, 26
21	3, 4, 6, 13, 19
22	3, 4, 6, 13, 19
23	3, 4, 6, 13, 26
24	5, 6, 14, 19, 20
25	3, 4, 6, 13, 19
26	5, 6, 14, 19, 20

Ahora, para el Jugador I se necesita encontrar la ruta óptima que minimice el tiempo de viaje entre los juegos seleccionados, dependiendo del juego inicial.

Por otra parte, para el Jugador II se necesita hacer una variante del Algoritmo de Dijkstra, es decir, ahora en lugar de tratar de encontrar la ruta que minimice los costos (tiempos), se necesita encontrar aquella que los maximice.

Esto se llevará a cabo dependiendo las estrategias óptimas que se encuentren para cada uno de los jugadores.

#### 4.4.4 FORMA NORMAL DEL JUEGO

Ahora bien, para poder encontrar la **Forma Normal Del Juego** procedemos de la siguiente manera :

1. Consideremos el número de vueltas promedio que ofrece el parque en cada uno de los juegos analizados, durante los periodos de tiempo en donde se presenta la mayor demanda por parte de los clientes. Se muestran en la tabla siguiente :

JUEGO	NUMERO DE VUELTAS
Tornado	1
Avión del Amor	15
Batidora	15
Sombrillas	16
Pulpo	12
Julio Verne	1
Cascabel	1
Martillo	15
Tren del Amor	10
Aladino	15
Cascadas	1
Palacio de Cristal	1
Carrusel Doble	20
Trabat	20
Cabaña	1
Montaña Rusa	1
Dragón	3
Carros Chocones	1
Pista Gran Premio	1
Látigo Volador	15
Nao de China	10
Casona del Terror	1
Ciclón	12
Supernova	15
Troncos	1
Tazas Locas	15

Tabla 4.3

2. Considérense las probabilidades de pasar desde el juego  $i$  a los juegos obtenidos como resultado de la aplicación de los modelos
3. Tomemos como estrategias para el **Jugador I** el llegar al parque e ir directamente al juego  $i$ , y seguir la ruta adecuada.
4. Tomemos como estrategias para el **Jugador II** el intentar motivar al Jugador I a seguir las rutas obtenidas para la maximización de tiempos de traslado.
5. Los pagos para ambos jugadores estarán dados por el número de vueltas esperado a recibir y dar (Jugador I y Jugador II, respectivamente), esto obtenido a partir de multiplicar la probabilidad de pasar desde el juego  $i$  a cada uno de los juegos de su resultado respectivo obtenido con cada uno de los modelos, por el número de vueltas ofrecidas por el parque.
6. Este resultado se multiplica por la probabilidad de que, llegando al parque, el visitante se dirija directamente al juego  $i$ .
7. Para obtener la consecuencia de cada estrategia, realizamos la siguiente operación :

$$\text{PAGO} = \text{pago al jugador I} * \text{pago al jugador II}$$

A continuación se muestran los pagos para cada jugador :

Estrategia	Jugador I	Jugador II
1	0.20360	0.00832
2	0.00297	0.00022
3	0.00114	0.00021
4	0.00157	0.00027
5	0.00008	0.00003
6	0.00064	0.00005
7	0.09121	0.00772
8	0.03068	0.00057
9	0.04480	0.00128
10	0.06508	0.00303
11	0.00325	0.00034
12	0.00049	0.00007
13	0.00107	0.00002
14	0.00022	0.00003
15	0.00323	0.00013
16	0.09832	0.01024
17	0.00186	0.00020
18	0.00540	0.00104
19	0.00027	0.00005
20	0.00023	0.00004
21	0.00825	0.00126
22	0.01145	0.00183
23	0.00008	0.00004
24	0.03754	0.00255
25	0.00806	0.00339
26	0.00061	0.00005

Tabla 4.4

Siguiendo el procedimiento anterior, la Forma Normal del Juego queda de la siguiente manera :

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**



Para resolver el juego, primero buscamos el **Punto de Silla** de la matriz obtenida, como a continuación se muestra :

# SOLUCION DEL JUEGO

This figure shows a detailed solution to a game, likely a sequential game with perfect information. The table represents the game tree, with columns corresponding to different nodes or stages of the game. The text within the cells describes the actions available at each node and the resulting payoffs or game states. The table is highly structured, with many columns and rows, indicating a complex game with many possible paths.

Figura 4.6

El juego si presenta un punto de silla, el cual se encontrará en la intersección de las estrategias I - 1 y II - 13. Esto significa que el Visitante (jugador I) debe seguir su estrategia número 1, mientras que la Empresa (jugador II) debe de tratar de aplicar su estrategia número 13. Es decir, la estrategia óptima para el visitante es seguir la ruta siguiente :

JUEGO	VUELTAS
1. Tornado	1
2. Tornado	1
3. Aladino	15
4. Cascabel	1
5. Montaña Rusa	1

Tabla 4.7

que físicamente se encuentran de la siguiente forma :

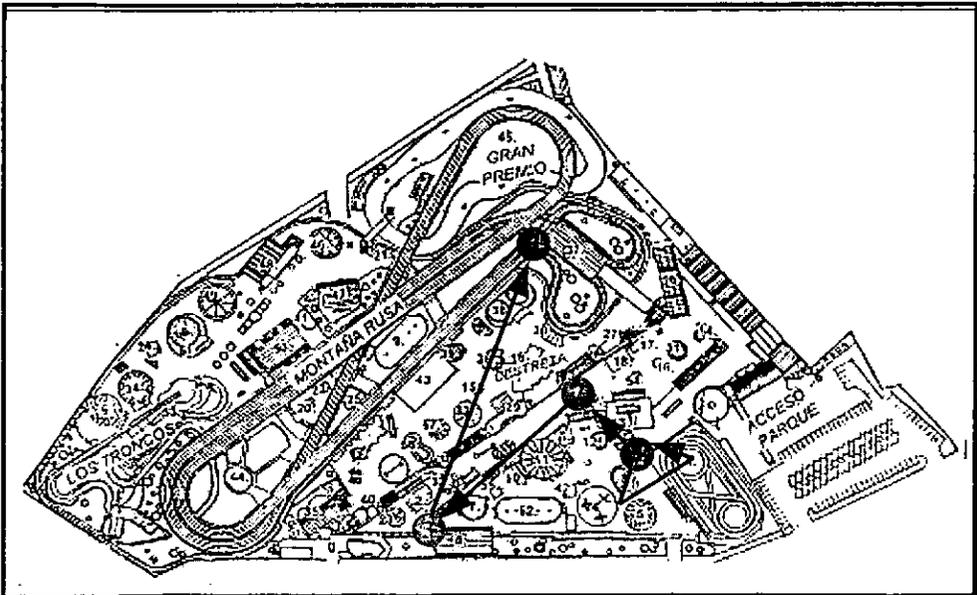


Figura 4.8

mientras que lo más conveniente para la empresa es tratar de motivar al cliente a seguir la ruta :

JUEGO	VUELTAS
1. Carrusel Doble	20
2. Pulpo	12
3. Julio Verne	1
4. Trabat	20
5. Gran Premio	1

Tabla 4.9

que físicamente se localizan :

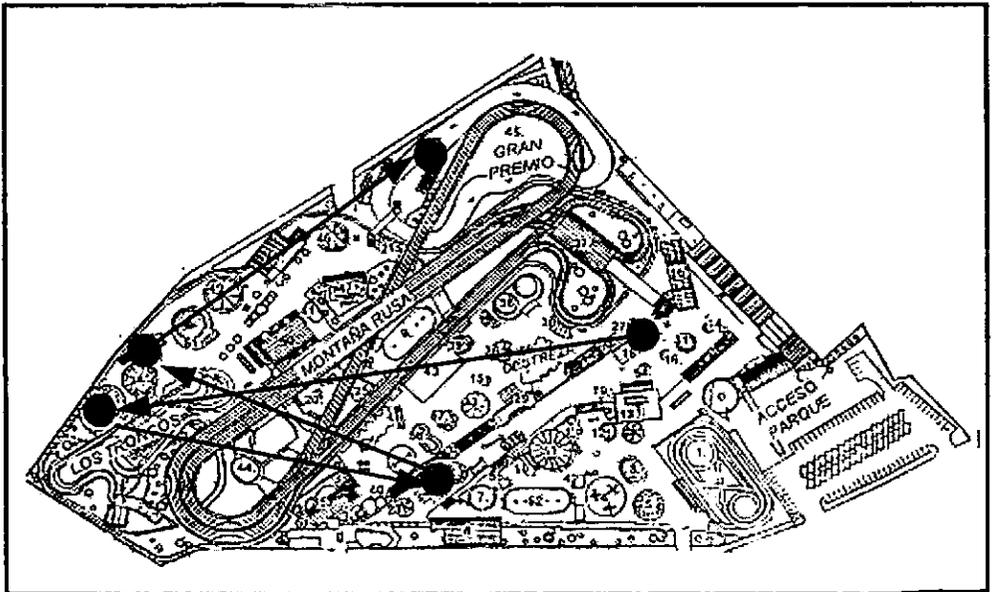


Figura 4.10

#### 4.4.5 CONCLUSIONES

Lo más satisfactorio de este capítulo fue el podido haber aplicado la Teoría de Juegos. En mucha de la literatura existente sobre este tema, se menciona que han sido pocas las áreas en donde se ha hecho uso de esta herramienta.

Creemos que esta aplicación puede verse como una forma alternativa para el diseño de tours. Una de las ventajas es la utilización de probabilidades. Es una forma dinámica de llevar a cabo el diseño de las visitas.

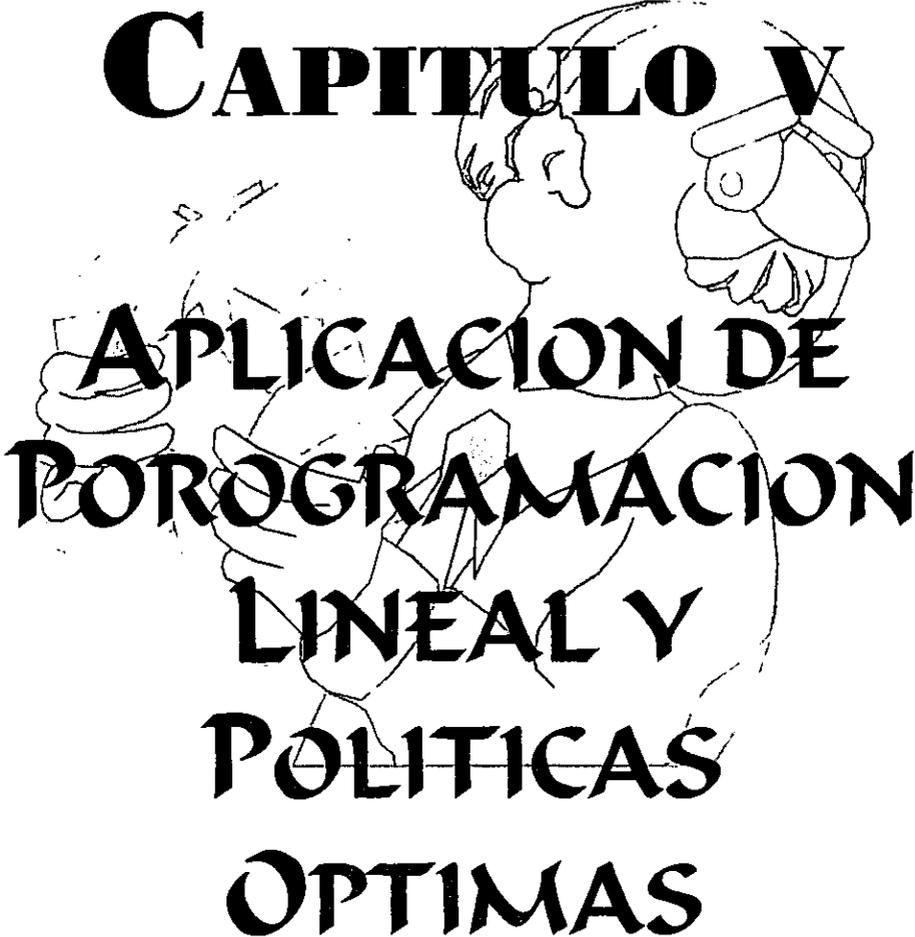
Los juegos encontrados como factibles para la estrategia del visitante, concuerdan con parte de los juegos que tienen mayor aceptación por parte del público :

JUEGO	PREFERENCIA (%)
Cascabel	11.99
Aladino	3.52
Tornado	5.80
Montaña Rusa	40.42

*Tabla 4.11*

Esto en cierta manera apoya la reflexión hecha acerca de que las probabilidades representan tanto preferencias como la búsqueda de juegos cuyo tiempo de espera sea mínimo.

# **CAPITULO V**



## **APLICACION DE PROGRAMACION LINEAL Y POLITICAS OPTIMAS**

# V. APLICACIÓN DE PROGRAMACIÓN LINEAL Y POLÍTICAS ÓPTIMAS

## INTRODUCCIÓN

La Administración de la Feria de Chapultepec desea brindar el mejor servicio posible a los visitantes con el propósito principal de maximizar sus utilidades; sabemos que esto se puede lograr aumentando el número de visitantes a la Feria, siendo para ello necesario entender tanto en forma global como muy particular todos los posibles factores que afectan la satisfacción de los visitantes. Tal es el caso de entender las preferencias de los clientes hacia algunos juegos, así como también evitar en lo posible el congestionamiento en los juegos de mayor afluencia que precisamente jugarán un papel muy importante en el presente estudio, ya que no sólo son los más concurridos sino que también son los que obviamente proporcionan mayores utilidades.

Como hemos venido observando desde los capítulos anteriores, se hace necesario que la Administración de la Feria de Chapultepec tome algún curso de acción o estrategia para dar solución a sus problemas. Así, lo que se pretende en el presente capítulo es demostrar a la empresa que el introducir un nuevo paquete propuesto por el Modelo de Diseño de Tours formado por un grupo de juegos de gran aceptación por parte de los visitantes, aumentaría considerablemente sus utilidades. Este análisis se logrará por medio de Programación Lineal y Políticas Óptimas, así demostraremos por medio de un Modelo de Decisión si es conveniente o no tomar otras alternativas de solución que puedan cumplir con el objetivo de la empresa. Dichas alternativas son: 1. Hacer nada ( Trabajar sólo con Paquete Ecolín ) y 2. Introducir el Nuevo Tour.

Primeramente, analizaremos por medio de la Matriz de Transición de  $n$ -pasos las probabilidades de pasar de un juego a otro en  $n$  unidades de tiempo, así como también analizar las propiedades a largo plazo de las Cadenas de Markov que nos ayudarán a saber en dónde los visitantes tienden a estar más tiempo, por ejemplo conocer en qué lugar se aglomera más los visitantes a las 10:00a.m. o a las 16:00 p.m.

Posteriormente se hará el planteamiento del problema como un modelo de decisión, en donde se usará el Software llamado Lindo enfocado a resolver problemas de Programación Lineal, así, por medio de los resultados arrojados por este paquete, sugeriremos a la empresa el lanzamiento del nuevo paquete o permanecer con los paquetes existentes.

## 5.1 PROCESOS DE MARKOV

Desde una edad temprana, quizás hasta intuitivamente, los seres humanos nos vemos en la necesidad de resolver ciertos problemas en los que generalmente hay variedad de soluciones, esto independientemente de que sean buenas o malas, el caso es que debemos elegir la que mejor nos convenga, ya que de alguna forma u otra sabemos que todo acto o decisión trae alguna consecuencia.

Si bien es cierto, en los problemas de toma de decisiones, con frecuencia surge la necesidad de tomar decisiones basadas en fenómenos que tienen incertidumbre asociado a ellos. Esta incertidumbre proviene de la inconsistencia de los fenómenos naturales. En lugar de manejar esta variabilidad como cualitativa, podemos incorporarla a un modelo matemático y manejarse en forma cuantitativa. Por lo general, esto se puede lograr si el fenómeno de interés muestra un cierto grado de regularidad, de manera que sea posible describir la variación mediante un modelo probabilístico. Así, daremos a continuación el planteamiento de un proceso de decisión estocástico que se puede describir a través de un número finito de estados.

Iniciemos el presente capítulo con algo general : ¿ **Qué es un proceso?**

**Proceso:** Es el conjunto de las fases de un fenómeno en evolución, un ejemplo de ello podría ser el proceso de alguna enfermedad, desarrollo del cuerpo humano, fabricación de productos, etc.

Cabe mencionar que los procesos se pueden clasificar de la siguiente manera:

**Proceso Transitorio:** Es aquel que una vez ocurrido un suceso jamás se volverá a repetir; por ejemplo el proceso de la vida humana, una vez pasado a la adolescencia jamás volveremos a estar en la niñez.

**Proceso Absorbente:** Una vez ocurrido un suceso jamás podremos salir de ese estado, por ejemplo la muerte.

**Proceso Recurrente:** Es aquel que tiene una probabilidad de volver a ocurrir, por ejemplo, visitar un determinado lugar que nos agrada como la Feria de Chapultepec, etc.

**Proceso Periódico:** Es aquel en que tiene cierta frecuencia, un ejemplo de ello son las estaciones del año.

**Proceso Estable o Estacionario :** Es aquel que se encuentra dentro de ciertos límites, por ejemplo el ritmo de nuestro corazón.

**Proceso Estocástico:** Es una colección de variables aleatorias  $X_t$ , en donde  $t$  toma valores de un conjunto  $T$  dado. Con frecuencia  $T$  se toma como el conjunto de enteros no negativos y  $X_t$  representa una característica de interés medible en el tiempo. Por ejemplo  $X_1, X_2, X_3, \dots$  podrían representar el número de visitantes a la Feria de Chapultepec cada semana.

Un estudio del comportamiento de un sistema en operación durante algún periodo suele llevar al análisis de un proceso estocástico con la siguiente estructura:

- 1.- Puntos específicos del tiempo  $t$  que los etiquetaremos como  $0, 1, \dots$ ,
- 2.- El sistema se encuentra exactamente en una de un número finito de categorías o estados mutuamente excluyentes, etiquetados  $0, 1, \dots, M$ .

Es importante mencionar que los estados pueden constituir una caracterización tanto cualitativa como cuantitativa de un sistema. Una representación cuantitativa podría ser el número de visitantes de la Feria de Chapultepec por semana; mientras que la cualitativa, podría ser el grado de tolerancia de espera de algunos visitantes, es decir, el estado 0 sería la indiferencia a esperar, el estado 1 podría representar la molestia de los visitantes al esperar abordar un juego y el estado 2 la desesperación por parte del cliente ante la espera y decidir ya no subirse.

Así, la representación matemática del sistema físico es la de un proceso estocástico  $X_t$ , en donde las variables aleatorias se observan en  $t = 0, 1, 2, \dots$ , y en donde cada variable aleatoria puede tomar el valor de cualquiera de los  $(M + 1)$  enteros  $0, 1, \dots, M$ . Estos enteros son una caracterización de los  $(M + 1)$  estados del proceso. Debe hacerse notar que a cada estado que alcanza el proceso estocástico se le da una etiqueta que denota el estado físico del sistema.

Cabe mencionar que al conjunto de estados posibles se le llama Espacio de Estados y se denota por  $S$ , mientras que al conjunto de valores que puede tomar el tiempo " $t$ " se le llama Espacio Paramétrico y su notación es  $\mathcal{T}$ .

Se dice que un proceso estocástico  $X_t$  tiene la propiedad markoviana si:

$$P(X_{t+1} = j \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i) = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$$

para  $t = 0, 1, \dots$  y toda sucesión  $i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$ .

Esta propiedad es equivalente a establecer que la probabilidad condicional de cualquier "evento" futuro dados cualquier "evento" pasado y el estado actual  $X_t = i$ , es independiente del evento pasado y sólo depende del estado actual del proceso. Es decir,  $X_t$  es un proceso sin memoria, en el cual no interesa la historia del sistema, simplemente se calcula la probabilidad de encontrarse en un estado en el momento siguiente, a partir del estado actual. Las probabilidades condicionales  $P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$  se llaman probabilidades de transición. Si para cada  $i$  y  $j$ ,

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) \text{ para toda } t = 0, 1, \dots,$$

entonces se dice que las probabilidades de transición (de un paso) son estacionarias y se denotan por  $p_{ij}$ .

Así, tener probabilidades de transición estacionarias implica que las probabilidades de transición no cambian con el tiempo. La existencia de probabilidades de transición estacionarias (de un paso) implican que, cada  $i, j$  y  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),

$$P(X_{t+n} = j \mid X_t = i) = P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

para toda  $t = 0, 1, \dots$ . Estas probabilidades condicionales casi siempre se denotan por  $p_{ij}^n$  y se llaman probabilidades de transición de  $n$  pasos. Así  $p_{ij}^n$  es simplemente la probabilidad condicional de que la variable aleatoria  $X_t$ , comenzando en el estado  $i$ , se encuentre en el estado  $j$  después de  $n$  pasos (unidades de tiempo).

Las  $p_i^n$  deben tener las siguientes características:

a)  $0 \leq p_i^n \leq 1$  para toda  $i$  y  $j$ , y  $n = 0, 1, 2, \dots$

b)  $\sum_{j=0}^M p_{ij}^n = 1$  para toda  $i$  y  $j$ , y  $n = 0, 1, 2, \dots$

A continuación mostraremos la representación de la Matriz de Transición, llamada también Matriz Estocástica :

	Estado	0	1	...	M	
$p_i^n =$	0	$p_{00}^n$			$p_{0M}^n$	
	1					
	.					
	.					
	.					
	M	$p_{M0}^n$			$p_{Mn}^n$	

para  $n = 0, 1, 2, \dots$

Es importante mencionar que cuando  $n = 0$ ,  $p_{ij}^0$  es  $P \{ X_0 = j \mid X_0 = i \}$  es igual a 1 siempre que  $i=j$  y 0 cuando  $i \neq j$ .

Así, decimos que un proceso estocástico  $X_t$  ( $t = 0, 1, \dots$ ) es una cadena de Markov si tiene las siguientes características :

1. Un número finito de estados
2. La propiedad markoviana
3. Probabilidades de transición estacionarias
4. Un conjunto de probabilidades iniciales  $P \{ X_0 = i \}$  para toda  $i$ .

A continuación veremos un ejemplo evidente del planteamiento de Cadenas de Markov en la Feria de Chapultepec:

Estaremos de acuerdo que la forma en que los visitantes se trasladan nos refleja dos aspectos importantes: las preferencias de los clientes hacia algunos juegos y los juegos donde se acumula más la gente. Para ello se hizo necesario usar la matriz de transición mostrada en el Capítulo 3 que se realizó por medio de una encuesta y en horas de mayor demanda, (10:30 hrs a 14:00 hrs), ya que en estas horas es cuando se debe tomar algún curso de acción para evitar congestión, además de tomar en cuenta que es la hora en que el parque está más lleno y por lo tanto son las horas en las que la empresa obtiene la mayor parte de sus ganancias.

De esta manera se identifica:

1. **Estados:** Los estados estarán representados por los 26 juegos que se seleccionaron para el Modelo del Diseño de Tour y uno más que representa los 30 juegos restantes, así obtenemos una matriz estocástica.
2. **Probabilidades de Transición:** Estas probabilidades de obtuvieron por medio de la encuesta.
3. **Tiempo:** El tiempo esta contemplado cada 15 min., es decir,  $t = 0$  representa el inicio del proceso,  $t = 1$  representa los primeros 15 min,  $t = 2$  la primera  $\frac{1}{2}$  hora ,etc.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
1	0.2803	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
2	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000	0.0000
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000	0.0000
26	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2711	0.0000

Figura 5.1

Analizando la matriz de Transición encontramos que existen 3 factores que posiblemente determinan la probabilidad de pasar de un juego a otro:

- ✦ La preferencia de los juegos por parte de los visitantes de la Feria
- ✦ La distancia que existe entre un juego y otro
- ✦ El largo de la fila de los juegos ( Tiempo de Espera )

La preferencia de los visitantes hacia ciertos juegos es quizá el elemento de mayor importancia, ya que por ejemplo, si tomamos el tiempo de viaje promedio de cualquier juego a Montaña Rusa podemos observar que es considerable ( más de 2.39 minutos ), además generalmente hay una larga fila para poder abordar este juego, de esta manera suena lógico que por preferencia los visitantes deseen abordar dicho juego. Esto queda confirmado debido a que La Montaña tiene de entre todos los juegos la mayor preferencia, 40.42%, ello explica porqué las probabilidades de transición para pasar de cualquier juego a Montaña son altas.

Observemos que los juegos que presentan mayores probabilidades para ser abordados son:

Montaña Rusa, Cascabel, Tornado, Supernova, Troncos, Aladino, Nao de China, Carros Chocones, Tren del Amor y Casona de Terror, ya que son precisamente los favoritos de los visitantes. Es importante mencionar que aún cuando el estado de otros presenta en ocasiones una probabilidad considerable, no es de gran transcendencia para este estudio por la gran cantidad de juegos que representa dicho estado; además de que la probabilidad de pasar de otros juegos a otros juegos en un sólo paso, resulta ser cero.

En cuanto a la distancia podemos afirmar que las probabilidades de abordar un juego, aumentan si un juego esta cerca de otro. Por ejemplo si nos situamos en el juego 4 Sombrillas, la probabilidad de irse al juego 1 Tornado, es la más representativa, esto porque la distancia de Tornado a Sombrillas es mínima, 35 segundos.

Por último, tiempos de espera largos disminuyen la probabilidad de pasar de un juego a otro. Por un lado sabemos que largos tiempos de espera no son agradables a los visitantes, por lo que si ven un juego con demasiada cola, ellos posiblemente no estarán dispuestos a formarse, esto involucraría qué tan deseosos están de abordar el juego; como ejemplo, tenemos que los Troncos tienen en preferencia el tercer lugar y es el segundo con mayor tiempo de espera, y si observamos la matriz de transición podemos ver que las probabilidades de pasar de cualquier juego a éste están alrededor del 0.05, por lo que tenemos evidencia de que el tiempo de espera tan largo puede ser un factor negativo para abordar dicho juego.

Supongamos ahora que deseamos conocer la probabilidad de que alguien que está en la Montaña Rusa pase a Cascabel (en 2 unidades de tiempo o en 2 pasos), los cuales son los de mayor preferencia y por lo tanto creemos que se acumula mucho la gente alrededor de estos juegos.

La probabilidad que se desea conocer estaría representada por:

$$P(X_{1+2} = \text{Cascabel} \mid X_1 = \text{Montaña Rusa}) = \sum_{x \in S} P(\text{Montaña Rusa}, x) P(x, \text{Cascabel})$$

Donde S es el conjunto de juegos de la Feria de Chapultepec.

Si observamos la parte derecha de la expresión anterior, podremos notar que estamos iniciando en Montaña Rusa y pasamos a otro juego  $x$  y de  $x$  pasamos a Cascabel, así concluimos los 2 pasos.

Usando la notación matricial podemos encontrar esta probabilidad sumando los productos de cada elemento del renglón de Montaña Rusa por el elemento correspondiente de la columna de Cascabel, es decir:

$$P_{16,7} = [ 0.045, 0.004, 0.001, 0.001, 0, 0, 0.056, \dots, 0.029, 0.030, 0.001, 0.125 ] \begin{bmatrix} 0.107 \\ 0.356 \\ 0.152 \\ 0.119 \\ 0.053 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0.194 \\ 0.061 \\ 0.133 \\ 0.090 \end{bmatrix}$$

$P_{16,7} = 0.095$ , es decir, la probabilidad de pasar de Montaña a Cascabel. Observemos que tal probabilidad es representativa aún cuando la distancia que existe entre un juego y otro es de 3:10 minutos la cual puede considerarse como una distancia larga; respecto a tiempos de espera podemos ver que Montaña Rusa y Cascabel ocupan el 1er y 2do lugar, así una vez más queda confirmado que la preferencia por estos juegos es el factor más importante para ser abordados.

Si generalizamos lo anterior :

$$P(X_{1+2} = j \mid X_1 = i) = \sum_{\forall x \in S} P(i, x) P(x, j)$$

Recordando la multiplicación de matrices tenemos que  $AB = \sum a_{ik} b_{kj}$

Entonces  $P^2_{ij} = \sum_{\forall x \in S} P_{ix} P_{xj}$

así

$$P^2_{ij} = P(X_{1+2} = j \mid X_1 = i)$$

Es decir, la matriz  $P$  elevada al cuadrado contiene la probabilidad de ir de un estado a otro en 2 periodos de tiempo (30 min.) ; esto es la matriz de transición en 2 pasos.

Puede observarse que para  $n=3$  tenemos:

$$\begin{aligned}
P(X_{t+3} = j \mid X_t = i) &= \sum_{x \in S} \sum_{y \in S} P(i, x) P(x, y) P(y, j) \\
&= \sum_{x \in S} P(i, x) \sum_{y \in S} P(x, y) P(y, j) \\
&= \sum_{x \in S} P(i, x) P^2_{xy} \\
&= P^3_{ij}
\end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que:

$$P(X_{t+m} = j \mid X_t = i) = P^m_{ij}$$

Donde  $P^m_{ij}$  corresponde al elemento  $(i, j)$  de  $P^m$ .

Las probabilidades anteriores son de suma importancia, ya que representan la probabilidad de que el proceso se encuentre en el estado  $j$  después de  $n$  periodos.

Así las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov proporcionan un método para calcular las probabilidades de transición de  $n$  pasos:

$$P^n_{ij} = \sum_{k=0}^M p^{(v)}_{ik} p^{(n-v)}_{kj} \quad \text{para toda } i, j, n \text{ y } 0 \leq v < n$$

Estas ecuaciones señalan que al ir del estado  $i$  al estado  $j$  en  $n$  pasos, el proceso estará en algún estado  $k$  después de exactamente  $v$  (menor que  $n$ ) pasos. Así  $p^{(v)}_{ik} p^{(n-v)}_{kj}$  es sólo la probabilidad condicional de que, si se comienza en el estado  $i$ , el proceso vaya al estado  $k$  después de  $v$  pasos y después al estado  $j$  en  $n - v$  pasos.

Del planteamiento anterior podríamos obtener información que nos sería de mucha utilidad, ya que podríamos conocer la probabilidad de que los visitantes de la Feria se encuentren en un juego de interés después de  $n$  tiempos (cada uno de 15 min.)

A continuación presentamos las matrices de 2, 3, 4, 5, 6 y 7 pasos, las cuales son de suma importancia ya que representan probabilidades de transición en horas pico.

En las siguientes tablas mostraremos los juegos que presentan mayor probabilidad promedio de ser abordados desde cualquier juego al juego de interés - es importante notar que se tomo en cuenta la probabilidad promedio ya que debido al gran número de estados, sería muy engorroso analizar una por una para este estudio - así como la preferencia, tiempo de espera, área a la que pertenece el juego, además de observar si el juego esta o no incluido en el nuevo Tour presentado en el Cap. III. De esta manera conoceremos en qué áreas se aglomera la gente.

Matriz de Transición de un juego a otro:

Juego	Preferencia (%)	Tiempo de Espera	Zona a la que pertenece	Prob. promedio de pasar de x juego a:	Si esta incluido en el Tour
Tomado	5.80	6.16 min.	3	0.075	√
Cascabel	11.99	8.36 min.	2	0.123	√
Tren del Amor	0.39	4.26 min.	3	0.034	
Aladino	3.52	5.36 min.	3	0.054	√
Montaña Rusa	40.42	14.45 min.	1	0.169	√
Carros Chocones	2.00	6.00 min.	2	0.032	
Nao de China	2.44	6.12 min.	1	0.032	
Casona del Terror	3.37	10.10 min.	1	0.026	
Supernova	3.09	5.26 min.	2	0.057	
Troncos	8.27	10.18 min.	1	0.054	

Matriz de transición de un juego a otro de 2 pasos:

Juego	Preferencia (%)	Tiempo de Espera	Zona a la que pertenece	Prob. promedio de pasar de x juego a:	Si esta incluido en el Tour
Tomado	5.80	6.16 min.	3	0.076	√
Julio Verne	0.08	9.41 min.	2	0.026	
Cascabel	11.99	8.36 min.	2	0.136	√
Martillo	0.77	4.42 min.	2	0.030	
Tren del Amor	0.39	4.26 min.	3	0.026	
Aladino	3.52	5.36 min.	3	0.052	√
Cascadas	0.82	4.18 min.	3	0.030	√
Cabaña Chueca	0.42	7.23 min.	2	0.028	
Montaña Rusa	40.42	14.45 min.	1	0.178	√
Carros Chocones	2.00	6.00 min.	2	0.048	
Nao de China	2.44	6.12 min.	1	0.031	
Supernova	3.09	5.26 min.	2	0.061	
Troncos	8.27	10.18 min.	1	0.039	

Matriz de Transición de un juego a otro de 7 pasos:

Juego	Preferencia (%)	Tiempo de Espera	Zona a la que pertenece	Prob. promedio de pasar de x juego a:	Si esta incluido en el Tour
Tomado	5.80	6.16 min.	3	0.081	√
Cascabel	11.99	8.36 min.	2	0.150	√
Martillo	0.77	4.42 min.	2	0.024	
Tren del Amor	0.39	4.26 min.	3	0.030	
Aladino	3.52	5.36 min.	3	0.056	√
Cascadas	0.82	4.18 min.	3	0.024	√
Montaña Rusa	40.42	14.45 min.	1	0.209	√
Carros Chocones	2.00	6.00 min.	2	0.040	
Nao de China	2.44	6.12 min.	1	0.029	
Casona del Terror	3.37	10.10 min.	1	0.019	
Supernova	3.09	5.26 min.	2	0.062	
Troncos	8.27	10.18 min.	1	0.039	

Tabla 5.2

La siguiente tabla nos mostrará cómo fueron cambiando las probabilidades promedio de transición, es decir las probabilidades de que pasemos de un juego x al juego de interés. Se consideraron únicamente los juegos que resultaron con probabilidades más considerables en las matrices de n pasos, tales como Tornado, Julio Verne, Cascabel, Martillo, Tren del Amor, Aladino, Cascadas, Cabaña Chueca, Montaña Rusa, Carros Chocones, Nao de China, Casona, Supernova, y Troncos:

	1	6	7	8	9	10	11	15	16	18	21	22	24	25
MATRIZ	TORNADO	JULIO V.	CASCABEL	MARTILLO	TREN DEL AMOR	ALADINO	CASCADAS	CABANA CHUECA	MONTAÑA	CHOCORON	NAO DE CHINA	CASQUA	SUPERNOVA	TRONCOS
1	0.075		0.123		0.034	0.054			0.169	0.032	0.032	0.026	0.057	0.054
2	0.076	0.026	0.136	0.030	0.026	0.052	0.030	0.028	0.178	0.048	0.031		0.061	0.039
3	0.080		0.149	0.024	0.031	0.055	0.023		0.201	0.039	0.029	0.019	0.062	0.040
4	0.081		0.149	0.025	0.030	0.055	0.024	0.019	0.204	0.041	0.029		0.062	0.039
5	0.081		0.150	0.024	0.030	0.056	0.023		0.207	0.040	0.029	0.019	0.062	0.039
6	0.081		0.149	0.024	0.030	0.056	0.024		0.208	0.040	0.029	0.019	0.062	0.039
7	0.081		0.150	0.024	0.030	0.056	0.024		0.209	0.040	0.029	0.019	0.062	0.039
FREC.	7	1	7	6	7	7	6	2	7	7	7	5	7	7

Tabla 5.3

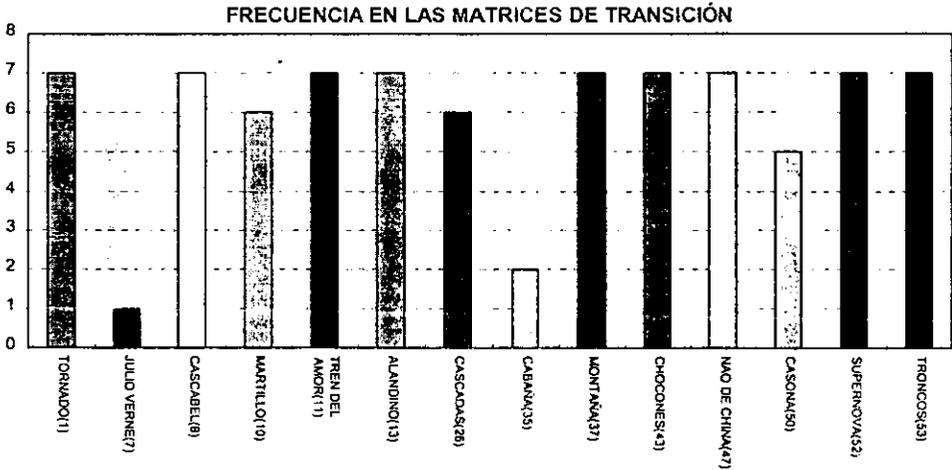


Figura 5.4

Analizando las probabilidades anteriores, vemos que la probabilidad de Tornado va aumentando conforme transcurre el tiempo y a partir de la primera hora (Tiempo en horas pico) esta probabilidad se estabiliza, lo que significa que la probabilidad de pasar de cualquier juego a Tornado oscila entre el 0.08, Julio Verne aparece solo en los primeros 15 minutos (Matriz 2 pasos) con una probabilidad que oscila en 0.02, Cascabel tiene gran afluencia ya que se mantiene con una probabilidad significativa en horas pico, la cual oscila de 0.12 a 0.15, Martillo comienza a tener mayor afluencia después de los primeros 15 minutos de las horas pico con 0.02, Tren del Amor con 0.03, Aladino con 0.05, Cascadas de 0.02 a 0.03, Cabaña Chueca con 0.02 y sólo presenta mayor afluencia en los primeros 15 y 45 minutos de las horas pico, Montaña Rusa como es de esperarse

presenta gran afluencia con 0.20 de probabilidad de ser visitado desde cualquier juego, Chocones 0.04 y permanece constante, Nao de China 0.03, Casona del Terror con 0.01 y se estabiliza a partir de la primera hora, Supernova con 0.06 que permanece constante durante toda la hora y media, Troncos presenta 0.05 de probabilidad que permanece constante también.

Es interesante notar que de los 14 juegos que presentaron mayor probabilidad de ser abordados, 5 si son incluidos en el nuevo Tour, tales como: Tornado, Cascabel, Aladino, Cascadas, Montaña Rusa, esto nos da alguna evidencia de que el nuevo Tour tendrá gran aceptación por parte de los visitantes. Además, de los 14 juegos mencionados, 4 pertenecen a la zona 1 ( Montaña Rusa, Nao de China, Troncos y Casona del Terror ), 6 a la zona 2 ( Julio Verne, Cascabel, Martillo, Cabaña Chueca, Carros Chocones, y Supernova ) y 4 a la zona 3 ( Tornado, Tren del Amor, Aladino y Cascadas). Aún cuando la zona 2 contenga más juegos con probabilidades considerables a ser abordados, observemos que las preferencias de estos juegos no son las más importantes, con excepción de Cascabel, Supernova y Carros Chocones en comparación con los 8 juegos restantes. En cuanto a la zona 1 y zona 3 podemos decir que ambas contienen juegos de gran preferencia por lo que ambas presentan el problema de acumulación de gente en juegos específicos como son Montaña Rusa, Tornado, Troncos, y Aladino. Cabe mencionar que de los 5 juegos que se incluyen en el nuevo Tour, 3 pertenecen a la zona 3 ( Tornado, Aladino y Cascadas), 1 a la zona 1 ( Montaña Rusa ) y 1 a la zona 2 (Cascabel).

En cuanto a los tiempos promedio de espera, observamos que los juegos que contienen mayor probabilidad de ser abordados, son obviamente los que tienen mayor espera. Por ejemplo, Montaña Rusa con probabilidad de ser abordado de alrededor 0.20 y un tiempo de espera de 14.45 min.

## 5.2 CLASIFICACIÓN DE LOS ESTADOS DE LAS CADENAS DE MARKOV

El propósito de la presente sección es hacer un análisis más profundo de las Cadenas de Markov, ya que consideramos importante estudiar el comportamiento del sistema en un periodo corto; aunque un estudio más importante tendría que ver con el comportamiento a largo plazo, es decir, cuando el número de transiciones tiende a infinito, lo cual se verá más adelante.

A continuación veremos algunos conceptos importantes que nos describirán con más detalle las características de una Cadena de Markov.

**Accesibilidad:** Un estado  $j$  es accesible desde el estado  $i$  si  $p^n_{ij} > 0$  para alguna  $n \geq 0$ ; es decir, el estado  $j$  es accesible desde el estado  $i$ , si y sólo si es posible que el sistema llegue al estado  $j$  comenzando en el estado  $i$ .

Si observamos las matrices de transición que hemos estado usando en el presente estudio, veremos que desde la matriz de 2 pasos  $p^2_{ij} > 0$  para toda  $i, j$  de manera que todo juego es accesible desde cualquier otro juego.

**Comunicación:** Si el estado  $j$  es accesible desde el estado  $i$ , y además, el estado  $i$  es accesible desde el estado  $j$ , entonces existe comunicación entre el estado  $i$  y el estado  $j$ , de manera que en el ejemplo de la Feria todos los estados se comunican.

De la definición anterior tenemos que:

1. Cualquier estado se comunica consigo mismo porque  $p_{ii}^0 = P(X_0 = i | X_0 = i) = 1$
2. Si el estado  $i$  se comunica con el estado  $j$ , entonces el estado  $j$  se comunica con el estado  $i$
3. Si el estado  $i$  se comunica con el estado  $j$  y el estado  $j$  se comunica con el estado  $k$ , entonces el estado  $i$  se comunica con el estado  $k$ .

Debido a estas propiedades de transición, podemos clasificar el espacio de estados en clases ajenas, en donde obviamente dos o más estados que se comunican pertenecen al mismo conjunto o clase.

Se dice que un conjunto de estados "C" no vacío es cerrado si no es posible pasar de un estado  $x \in C$  a un estado  $y \notin C$ , es decir no hay accesibilidad de  $i$  a  $j$ . Así:

$$P_{xy} = \begin{cases} =0 & \text{si } x \in C, y \notin C \\ >0 & \text{si } x \in C, y \in C \end{cases}$$

Un conjunto se llama **irreducible**, si todos los estados se comunican después de un número finito de pasos o transiciones. Observando las matrices de transición podemos darnos cuenta que como todos los estados se comunican, nuestra cadena de Markov es irreducible.

Un ejemplo especial de un conjunto cerrado es un estado particular  $j$  que tenga una probabilidad de transición  $p_{jj} = 1$ . En este caso,  $j$  se denomina **estado absorbente**.

Con frecuencia es de suma importancia saber si un proceso que comienza en el estado  $i$  regresará alguna vez a este estado. Sea  $f_{ii}$  la probabilidad de que el proceso regrese al estado  $i$  dado que comienza en el estado  $i$ .

El estado  $i$  se llama **estado recurrente** si  $f_{ii} = 1$  y es **transitorio** si  $f_{ii} < 1$ . Un caso especial de un estado recurrente es un estado absorbente. Un estado absorbente se da cuando la probabilidad de transición  $p_{ii}$  es igual a 1 (lo que significa que aparecerá un 1 como un elemento de la diagonal de la matriz de transición).

Si un proceso de Markov se encuentra en el estado  $i$  y este estado es recurrente, la probabilidad de que el regrese al estado  $i$  es 1. Dado que el proceso es una Cadena de Markov entonces el proceso comienza una vez más en el estado  $i$  y que con probabilidad de 1, regrese una vez más a ese estado. La repetición de este argumento lleva a la conclusión de que llegará al estado  $i$  con frecuencia infinita. De esta manera, un estado recurrente tiene la propiedad de que el número esperado de periodos que el proceso esté en el estado  $i$  es infinito.

En una Cadena de Markov no todos los estados pueden ser transitorios, de lo contrario, después de que ha transcurrido el tiempo finito, nunca se volverá a entrar a cada uno de estos estados, lo que es imposible pues el proceso se debe encontrar en un estado después de este tiempo finito. Así podemos concluir que todos los estados de una Cadena de Markov de estado finito irreducible son recurrentes. Se había mencionado con anterioridad que para que todos los estados sean accesibles es necesario que exista un valor de  $n$ , no dependiente de  $i$  y  $j$ , para el cual  $p^n_{ij}$  es positivo. Así todos los juegos de la Feria de Chapultepec son recurrentes, dado que  $p^2_{ij} > 0$  para toda  $i$  y  $j$ .

### 5.3 PROPIEDADES A LARGO PLAZO DE LAS CADENAS DE MARKOV

Para presentar la propuesta a la Administración de la Feria de Chapultepec consideramos necesario saber la transición de los visitantes después de varias horas. Es por ello que en esta sección veremos lo que ocurre con las matrices estocásticas presentadas anteriormente para varios pasos.

Como podemos observar en la matriz de 7 pasos todos los renglones tienen elementos casi iguales, es decir, pareciera que existe una probabilidad límite de que el sistema se encuentre en el estado  $j$  después de un número grande de transiciones y esta probabilidad es independiente del estado inicial.

Una Cadena de Markov es estacionaria si sus distribuciones marginales de probabilidad  $\pi_n$  tienden a mantenerse constantes a largo plazo independiente del estado inicial y del valor del tiempo  $n$ . Es decir,  $X_t$  es una cadena estacionaria si existe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^n = \pi_j$$

en donde  $\pi_j$  satisface de manera única el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 < \pi_j < 1$$

$$\sum_{j \in S} \pi_j = 1$$

$$\pi_N = \pi_0 P^N \text{ o } \pi_N = \pi_{N-1} P$$

Cabe mencionar que  $\pi_j$  se llaman probabilidades de estado estable de la cadena de Markov, de esta manera, si una cadena es estacionaria entonces:

$$\pi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n$$

así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{n-1} P$$

entonces una cadena es estacionaria si

$$\pi = \pi P$$

Lo anterior significa que el vector de distribución estacionario (o límite) ya no cambia al ser multiplicado por  $P_i$ .

Cabe mencionar que  $\pi_j$  es igual al inverso del tiempo esperado de recurrencia, el cual representa el número de transacciones para que el proceso regrese al estado inicial  $i$ , es decir:

$$\pi_j = 1/\mu_j \quad \text{para } j=0,1,\dots,M$$

Podemos concluir que el termino de estado estable significa que la probabilidad de encontrar el proceso en un cierto estado, por ejemplo  $j$  después de un número grande de transiciones, tiende al valor  $\pi_j$ , y es independiente de la distribución inicial para los estados. Cabe hacer la aclaración de que la probabilidad de estado estable no significa que el proceso se establezca en un estado; más bien es que el proceso continúa haciendo transiciones de un estado a otro y en cualquier paso  $n$  la probabilidad de transición de  $i$  a  $j$  es todavía  $p_{ij}$ .

Debe observarse que las ecuaciones de estado estable consisten en  $(M + 2)$  ecuaciones con  $(M + 1)$  incógnitas. Como el sistema tiene una solución única, al menos una de las ecuaciones debe ser redundante, por lo que se puede eliminar, desde luego no será

$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1$$

ya que si  $\pi_j = 0$  para toda  $j$  satisficaría las otras  $(M + 1)$  ecuaciones.

Así para nuestro estudio en la Feria de Chapultepec, las ecuaciones de estado estable son

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} + \pi_2 P_{20} + \pi_3 P_{30} + \dots + \pi_{26} P_{260} \\ \pi_1 &= \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} + \pi_3 P_{31} + \dots + \pi_{26} P_{261} \\ \pi_2 &= \pi_0 P_{02} + \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} + \pi_3 P_{32} + \dots + \pi_{26} P_{262} \\ &\vdots \\ \pi_{26} &= \pi_0 P_{026} + \pi_1 P_{126} + \pi_2 P_{226} + \pi_3 P_{326} + \dots + \pi_{26} P_{2626} \end{aligned}$$

Sustituyendo probabilidades de transición:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0.280 \pi_0 + 0.070 \pi_1 + 0.140 \pi_2 + 0.200 \pi_3 + \dots + 0.040 \pi_{26} \\ \pi_1 &= 0.007 \pi_0 + 0.027 \pi_1 + 0.010 \pi_2 + 0.008 \pi_3 + \dots + 0.040 \pi_{26} \\ \pi_2 &= 0.003 \pi_0 + 0.002 \pi_1 + 0.006 \pi_2 + .0030 \pi_3 + \dots + 0.020 \pi_{26} \\ &\vdots \\ \pi_{26} &= 0.136 \pi_0 + 0.092 \pi_1 + .1830 \pi_2 + 0.202 \pi_3 + \dots + 0.00 \pi_{26} \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

- $\pi_0 = 0.082$  ( Tornado )
- $\pi_1 = 0.014$  ( Avión del Amor )
- $\pi_2 = 0.004$  ( Batidora )
- $\pi_3 = 0.004$  ( Sombrillas )
- $\pi_4 = 0.004$  ( Pulpo )
- $\pi_5 = 0.015$  ( Julio Verne )
- $\pi_6 = 0.150$  ( Cascabel )
- $\pi_7 = 0.024$  ( Martillo )
- $\pi_8 = 0.030$  ( Tren del Amor )
- $\pi_9 = 0.056$  ( Aladino )
- $\pi_{10} = 0.024$  ( Cascadas )
- $\pi_{11} = 0.007$  ( Palacio de Cristal )
- $\pi_{12} = 0.004$  ( Carrusel Doble )
- $\pi_{13} = 0.004$  ( Trabat )
- $\pi_{14} = 0.018$  ( Cabaña Chueca )
- $\pi_{15} = 0.210$  ( Montaña Rusa )
- $\pi_{16} = 0.017$  ( Dragón )
- $\pi_{17} = 0.040$  ( Carros Chocones )
- $\pi_{18} = 0.006$  ( Pista Gran Premio )
- $\pi_{19} = 0.004$  ( Látigo Volador )
- $\pi_{20} = 0.029$  ( Nao de China )
- $\pi_{21} = 0.019$  ( Casona del Terror )
- $\pi_{22} = 0.001$  ( Ciclón )
- $\pi_{23} = 0.062$  ( Supernova )
- $\pi_{24} = 0.039$  ( Troncos )
- $\pi_{25} = 0.004$  ( Tazas Locas )
- $\pi_{26} = 0.140$  ( Otros )

Así, estas probabilidades representan la probabilidad de encontrarse en cada uno de los juegos de la Feria de Chapultepec. Observamos que la probabilidad de estar en el Montaña Rusa y Cascabel son las más representativas. Es de notar que estas probabilidades resultan ser iguales a las que aparecen en la matriz de 9 pasos.

Un resultado importante que nos arroja el presente estudio es conocer si los visitantes regresará o no a algunos juegos que aportan gran utilidad tales como Tornado, Cascabel, Aladino, Cascadas, Palacio de Cristal, Carrusel Doble, Montaña Rusa y Dragón; así es necesario calcular los tiempos esperados de recurrencia, que son:

JUEGO	NUMERO DE UNIDADES O TRANSACCIONES PARA LA RECURRENCIA DE PROCESO C/15 MIN.	TIEMPO ESPERADO PARA LA RECURRENCIA
Tornado	$\mu_{00} = 1 / \pi_0 = 12.195$	3.04 Horas
Cascabel	$\mu_{66} = 1 / \pi_6 = 6.666$	1.67 Horas
Aladino	$\mu_{99} = 1 / \pi_9 = 17.857$	4.46 Horas
Cascadas	$\mu_{1010} = 1 / \pi_{10} = 41.666$	10.41 Horas
Palacio de Cristal	$\mu_{1111} = 1 / \pi_{11} = 142.857$	35.71 Horas
Carrusel Doble	$\mu_{1212} = 1 / \pi_{12} = 250$	62.50 Horas
Montaña Rusa	$\mu_{1515} = 1 / \pi_{15} = 4.761$	1.19 Horas
Dragón	$\mu_{1616} = 1 / \pi_{16} = 58.823$	14.70 Horas

Tabla 5.5

Es importante notar que los juegos en los que es factible regresar son Tornado, Cascabel, Aladino y Montaña Rusa debido a que es imposible que alguien regrese a algún juego después de 7 u 8 horas ya que el parque esta abierto de 10:00 a.m a 6:00 p.m. Observemos ahora que el tiempo de recurrencia de Montaña Rusa es muy corto debido a que es el juego más preferido, al igual que Cascabel, así, por medio de estos resultados, podemos tener evidencia que la gente visita más de una vez estos juegos, lo que aumenta las utilidades de la empresa.

## 5.4 SOLUCIÓN CON PROGRAMACIÓN LINEAL DEL PROBLEMA DE DECISIÓN DE MARKOV

Como habíamos mencionado anteriormente, una política es un conjunto de decisiones asociadas al conjunto de estados, así se pueden tomar  $k$  decisiones distintas; entonces pueden formarse:

$$\text{Políticas distintas} = K^{M+1}$$

Esto independientemente de cuales son de interés y cuales no .

Por ejemplo, si tenemos 5 estados y 4 posibles decisiones  $\Rightarrow 4^5 = 1024$  posibles soluciones.

Estados

0	{4 Decisiones
1	{4 Decisiones
2	{4 Decisiones
3	{4 Decisiones
4	{4 Decisiones

La política  $R$  es una regla de decisión que prescribe la decisión  $d_i(R)$  cuando el sistema se encuentra en el estado  $i$ . Así,  $R$  se caracteriza por los valores:

$$\{ d_0(R), d_1(R), d_2(R), \dots, d_M(R) \}$$

De otra manera,  $R$  se puede caracterizar asignando valores  $D_{ik} = 0$  ó  $1$  en la matriz:

		Decisión, $k$			
		1	2	...	$K$
Estados	0	$D_{01}$	$D_{02}$	...	$D_{0k}$
	1	$D_{11}$	$D_{12}$	...	$D_{1k}$
	.				
	.				
	$M$	$D_{M1}$	$D_{M2}$	...	$D_{Mk}$

en donde cada renglón debe contener un solo 1 y el resto de los elementos debe ser cero ( cada renglón suma 1). Cuando un elemento  $D_{ik} = 1$ , significa que se pide la decisión  $k$  cuando el sistema está en el estado  $i$

Esta interpretación de  $D_{ik}$  da pauta para formular un modelo de Programación Lineal. Se piensa que el costo esperado de una política se puede expresar como una función lineal de la  $D_{ik}$  o de alguna variable relacionada, sujeta a restricciones lineales. Sin embargo las  $D_{ik}$  como habíamos mencionado son únicamente 0 ó 1, y se requiere variables continuas para la formulación de Programación Lineal. Este requisito se puede manejar si se extiende la interpretación de una política. La definición previa dice que se tome la misma decisión cada vez que el sistema se encuentre en el estado  $i$ . La nueva interpretación de una política pedirá la determinación de una distribución de probabilidad para tomar la decisión cuando el sistema se encuentre en el estado  $i$ . Entonces, las  $D_{ik}$  se pueden ver como:

$$D_{ik} = P(\text{Decisión} = k \mid \text{estado } i), \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, K \\ i = 0, 1, \dots, M \end{array}$$

Esta se llama una política aleatorizada, mientras que la política que dice que  $D_{ik} = 0$  ó  $1$  puede recibir el nombre de política determinística. Las políticas aleatorizadas se pueden caracterizar de nuevo por la matriz anteriormente expuesta, sólo que  $D_{ik}$  cumple con las siguientes características:

$$a) 0 \leq D_{ik} \leq 1$$

$$b) \sum_{k=1}^K D_{ik} = 1$$

La formulación de Programación Lineal se puede expresar mejor en términos de una variable  $y_k$  cuya relación con  $D_{ik}$  es la siguiente:

Sea  $y_k$  la probabilidad incondicional de estado estable de que el sistema se encuentre en el estado  $i$  y se tome la decisión  $k$ , es decir:

$$y_k = P(\text{estado} = i \cap \text{la decisión } k)$$

Recordar que la probabilidad condicional esta definida como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\text{Así, } P(A \cap B) = P(A/B) P(B)$$

De esta manera:

$$y_{ik} = P(k/i) P(i)$$

$$\text{Sustituyendo, } y_{ik} = D_{ik} \prod(i)$$

$$\text{De aquí que: } \sum_{k=1}^K y_{ik} = \sum_{k=1}^K D_{ik} \prod(i)$$

y recordando la característica b de las  $D_{ik}$  llegamos a que:



Es evidente que ésta es una formulación de un Problema de Programación Lineal cuya solución se puede obtener por el método simplex. Una vez obtenidas las  $y_k$  es sencillo encontrar  $D_k$  empleando:

$$D_k = \frac{y_k}{\sum y_k}$$

En total se tienen  $M + 1$  restricciones, por lo tanto se tendrán  $M+ 1$  variables básicas en la solución del problema, esto implica que la solución óptima estará formada por Decisiones Determinísticas.

## 5.5 APLICACIÓN DE POLÍTICAS ÓPTIMAS EN LA FERIA DE CHAPULTEPEC

Como hemos mencionado anteriormente, la Administración de la Feria de Chapultepec desea brindar un mejor servicio para incrementar sus utilidades; en el capítulo III presentamos un Tour que básicamente toma en cuenta las preferencias de los clientes hacia los juegos, minimiza el tiempo de viaje de un juego a otro y por último, minimiza el tiempo de espera para abordar los juegos, así, el Tour estaría formado por el siguiente conjunto de juegos que cumplen con las restricciones antes mencionadas: Tornado, Sombrillas, Cascabel, Aladino, Cascadas, Palacio de Cristal, Carrusel Doble, Montaña Rusa y Dragón. Es importante mencionar que dicho Tour tendría las siguientes restricciones

- Si la persona que adquirió dicho paquete desea abordar otra vez algún juego deberá hacerlo cuando el Tour ya haya terminado y deberá pagar el costo respectivo del juego; dichos costos fueron mostrados en el capítulo I.
- El nuevo paquete incluye los mismos juegos que ofrece el paquete Mágico, tales como Batidora, Avión del Amor, Martillo, etc.
- Los visitantes deberán guardar un identificador, tal vez una pulsera para poder controlar la ruta de los mismos, esto al menos en la duración del Tour ya que terminando éste, el visitante podrá abordar los juegos como se desee.

Tomando en consideración los factores que más influyen en la satisfacción de los clientes, nosotros creemos que las utilidades de la Feria aumentarán considerablemente, por lo que presentamos como una alternativa el ofrecer un nuevo paquete a los visitantes de la Feria, ya que lograremos que la gente aborde un mayor número de juegos sin permanecer mucho tiempo formados en las filas evitando así congestión en zonas de gran afluencia, de esta manera se incrementará la satisfacción de los clientes quienes seguramente desearán regresar otro día al parque, con lo que los clientes de la Feria aumentarán; además si tomamos en cuenta las probabilidades de transición de un juego a otro podemos observar que las probabilidades de regresar a un juego de gran preferencia son muy altas, lo cual nos asegura que la gente que adquirió el nuevo paquete deseará seguir abordando más juegos y así pagar el respectivo costo, además de considerar que los juegos en los que aparentemente la Empresa no gana porque pueden ser abordados las veces que se desee sin costo alguno aumentarán la satisfacción de los clientes, ya que podrán ser abordados sin esperar mucho tiempo, lo cual da como resultado una ganancia que será tomada en cuenta por la Empresa para definir el costo del nuevo paquete.

En el presente capítulo se tratará de demostrar a la empresa si le es factible o no ofrecer el nuevo paquete; para ello se elaboró un modelo de decisión markoviano, el cual será resuelto con programación lineal.

### 5.5.1 Construcción del modelo y solución

En la presente sección construiremos un modelo matemático que represente la esencia de nuestro problema, el cual es un problema de decisión, ya que se tienen dos alternativas excluyentes:

1. **Hacer nada** : lo cual sí representa un curso de acción, seguir con el mismo paquete Ecolín.

2. **Ofrecer un nuevo paquete** : el cual consistirá en 9 juegos con una trayectoria a seguir de los juegos más excitantes para los visitantes de la Feria que también podrán abordar otros juegos en la forma en que se desee una vez terminado el Tour.

Además de contar con 2 matrices de transición de  $10 \times 10$  . La primera, fue resultado de la matriz de transición de la que hablamos anteriormente; la cual representa la probabilidad de transición de un juego a otro; es importante mencionar que esta matriz estaba constituida por 26 estados ( 26 juegos de interés y 1 estado más, que representa la transición a otros juegos) y fue reducida a 9 estados que son precisamente los juegos que arrojó el Modelo del Diseño del Nuevo Tour y 1 estado más que representa el de otros juegos que serán los 47 juegos restantes; la segunda matriz de transición resulta de la trayectoria del Tour que fue obtenida por el Algoritmo de Dijkstra y por el vector  $\pi_n$  , el cual revela la probabilidad de permanecer en un juego determinado una vez estabilizado el proceso.

Así podemos construir un modelo de decisión markoviano con 2 posibles alternativas, cada una con su matriz de transición respectiva:

#### K= 1 HACER NADA

	1	4	7	10	11	12	13	16	17	OTROS
1	0.280	0.004	0.107	0.089	0.011	0.002	0.001	0.134	0.011	0.361
4	0.200	0.005	0.119	0.075	0.010	0.002	0.001	0.126	0.010	0.452
7	0.070	0.002	0.427	0.047	0.008	0.002	0.001	0.110	0.009	0.324
10	0.127	0.002	0.102	0.195	0.015	0.004	0.002	0.167	0.014	0.372
11	0.052	0.001	0.059	0.051	0.058	0.005	0.003	0.320	0.017	0.434
12	0.064	0.001	0.074	0.065	0.027	0.011	0.003	0.278	0.022	0.455
13	0.064	0.001	0.071	0.065	0.029	0.007	0.005	0.278	0.016	0.464
16	0.045	0.001	0.056	0.039	0.022	0.004	0.002	0.520	0.025	0.286
17	0.050	0.001	0.067	0.047	0.016	0.004	0.001	0.347	0.060	0.407
OTRO	0.060	0.002	0.124	0.043	0.013	0.004	0.002	0.127	0.014	0.611

Tabla 5.6

### K=2 OFRECER UN NUEVO PAQUETE

	1	4	7	10	11	12	13	16	17	OTRO
1	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
13	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
16	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000
17	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
OTRO	0.040	0.020	0.090	0.020	0.080	0.030	0.020	0.020	0.080	0.000

Tabla 5.7

La empresa proporcionó la matriz de costos en donde nos aclararon que por razones de protección los costos reales no nos serían revelados, por lo que nos proporcionaron valores que fueran representativos para ellos y que además ya contemplan un costo adicional negativo que representa la ganancia de la Feria de Chapultepec por obtener mayor satisfacción de los clientes que muy probablemente regresarán con más frecuencia a la Feria y el número de visitantes aumentará.

	k=1	k=2
1	-3.927	-4.140
4	1.052	0.475
7	-4.488	-4.860
10	-3.366	-3.620
11	-2.244	-2.580
12	-2.244	-2.580
13	-2.805	-3.100
16	-5.610	-6.200
17	-2.244	-2.580
OTROS	7.363	2.608

Tabla 5.8

Observemos que en el juego 4, Sombrillas, y en OTROS existe un costo positivo. La empresa nos explicó que como este estado representa en su mayor parte a los juegos que son gratis, tendría que ser un gasto para la empresa, y como podemos observar, si se toma la política 2, este costo es reducido porque se contempló que la satisfacción del cliente se incrementará ya que por el descongestionamiento que el nuevo Tour ocasionará, se podrán abordar más juegos, aunque es importante aclarar que este costo aparentemente tendría que ser mayor porque se gastarán más recursos por la gran demanda que se espera tengan estos juegos; sin embargo el factor usado que representa el costo negativo por la satisfacción del cliente lo disminuye considerablemente.

Si analizamos los elementos necesarios para construir nuestro modelo, podemos notar que dados 10 estados, que representan los 9 juegos de interés y el de otros juegos, y 2 alternativas excluyentes tenemos:

$$\text{Políticas distintas: } K^{M+1} = 2^{10} = 1024$$

Así, una vez teniendo los elementos necesarios, nuestro modelo de decisión queda de la siguiente manera:

PROBLEMA DE MEJORAMIENTO DE POLÍTICAS PARA LA FERIA DE CHAPULTEPEC

POSIBLES POLÍTICAS: 1. HACER NADA (PAQUETE ECOLÍN)  
2. NUEVO PAQUETE (INCLUYE UN TOUR)

MIN

$$\begin{aligned} & -3.927X1-4.140X2+1.052X3+0.475X4-4.488X5-4.860X6 \\ & -3.366X7-3.620X8-2.244X9-2.580X10-2.244X11-2.580X12 \\ & -2.805X13-3.100X14-5.610X15-6.200X16-2.244X17-2.580X18 \\ & +7.363X19+2.608X20 \end{aligned}$$

SUBJECT TO

$$X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7+X8+X9+X10+X11+X12+X13+X14+X15+X16 \\ +X17+X18+X19+X20 = 1$$

$$0.720X1+X2-0.200X3-0.070X5-0.127X7-0.052X9-0.064X11-0.064X13 \\ -0.045X15-0.050X17-0.040X19-0.090X20 = 0$$

$$-0.107X1-0.119X3+0.573X5+X6-0.102X7-0.059X9-0.074X11-0.071X13 \\ -0.056X15-0.067X17-X18-0.090X19-0.150X20 = 0$$

$$-0.089X1-0.075X3-X4-0.047X5+0.805X7+X8-0.005X9-0.065X11-0.065X13 \\ -0.039X15-0.047X17-0.020X19-0.056X20 = 0$$

$$-0.011X1-0.010X3-0.008X5-0.015X7+0.942X9+X10-0.027X11-0.029X13 - X14 \\ -0.022X15-0.016X17-0.080X19-0.024X20 = 0$$

$$-0.002X1-0.002X3-0.002X5-0.004X7-X8-0.005X9+0.989X11+ X12-0.007X13 \\ -0.004X15-0.004X17-0.030X19-0.007X20 = 0$$

$$-0.001X1-0.001X3-0.001X5-0.002X7-0.003X9-0.003X11-X12+0.995X13 + X14 \\ -0.002X15-0.001X17-0.002X19-0.004X20 = 0$$

$$-0.134X1-0.126X3-0.110X5-0.167X7-0.320X9-X10-0.278X11-0.278X13 \\ +0.480X15+X16-0.347X17-0.020X19-0.210X20 = 0$$

$$-0.011X1-0.010X3-0.009X5-0.014X7-0.017X9-0.022X11-0.016X13 \\ -0.025X15-X16+0.940X17+X18-0.020X19-0.017X20 = 0$$

$$-0.361X1-0.452X3-0.324X5-X6-0.372X7-0.434X9-0.455X11-0.464X13 \\ -0.286X15-0.407X17+X19+0.562X20 = 0$$

Figura 5.9

A continuación analizaremos cada uno de los componentes del modelo anterior:

- Se tienen  $(M + 1)k = (10)2 = 20$  variables, las cuales nos mostrarán qué decisión debe tomarse en cada estado: si hacer nada, es decir no incluir el juego en el Tour, o lo contrario.

Por ejemplo: Si  $y_{01} = 0$  significa que nos encontramos en el estado 0 que representa a Tornado y el 1 representa la política 1, es decir, no incluir el juego en el Tour y como es igual a cero, la decisión para ese estado sería no incluir Tornado en el Tour.

- El objetivo de este modelo es minimizar los costos de operación por mantener los juegos funcionando, así

<p>MIN</p> <p><math>-3.927X1 - 4.140X2 + 1.052X3 + 0.475X4 - 4.488X5 - 4.860X6</math>  <math>-3.366X7 - 3.620X8 - 2.244X9 - 2.580X10 - 2.244X11 - 2.580X12</math>  <math>2.805X13 - 3.100X14 - 5.610X15 - 6.200X16 - 2.244X17 - 2.580X18</math>  <math>7.363X19 + 2.608X20</math></p>
---

Observemos que se incluyen los costos de ambas alternativas en los 10 estados, por ello tenemos 20 variables.

- Se tienen 10 restricciones, la primera, como ya se explicó anteriormente, debe cumplir:

$X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7 + X8 + X9 + X10 + X11 + X12 + X13 + X14 + X15 + X16 + X17 + X18 + X19 + X20 = 1$
--

debido a que

$$\sum_{i=0}^M \sum_{k=1}^K y_{ik} = \sum_{i=0}^M \prod (i) = 1$$

y las otras 9 restricciones :

$$0.720X1 + X2 - 0.200X3 - 0.070X5 - 0.127X7 - 0.052X9 - 0.064X11 - 0.064X13 - 0.045X15 - 0.050X17 - 0.040X19 - 0.090X20 = 0$$

$$-0.107X1 - 0.119X3 + 0.573X5 + X6 - 0.102X7 - 0.059X9 - 0.074X11 - 0.071X13 - 0.056X15 - 0.067X17 - X18 - 0.090X19 - 0.150X20 = 0$$

$$-0.089X1 - 0.075X3 - X4 - 0.047X5 + 0.805X7 + X8 - 0.005X9 - 0.065X11 - 0.065X13 - 0.039X15 - 0.047X17 - 0.020X19 - 0.056X20 = 0$$

$$-0.011X1-0.010X3-0.008X5-0.015X7+0.942X9+X10-0.027X11-0.029X13 - X14 - 0.022X15-0.016X17-0.080X19-0.024X20 = 0$$

$$-0.002X1-0.002X3-0.002X5-0.004X7-X8-0.005X9+0.989X11+ X12-0.007X13 - 0.034X15-0.004X17-0.030X19-0.007X20 = 0$$

$$-0.001X1-0.001X3-0.001X5-0.002X7-0.003X9-0.003X11-X12+0.995X13 + X14 - 0.002X15-0.001X17-0.002X19-0.004X20 = 0$$

$$-0.134X1-0.126X3-0.110X5-0.167X7-0.320X9-X10-0.278X11-0.278X13 + 0.480X15+X16-0.347X17-0.020X19-0.210X20 = 0$$

$$-0.011X1-0.010X3-0.009X5-0.014X7-0.017X9-0.022X11-0.016X13 - 0.025X15-X16+0.940X17+X18-0.020X19-0.017X20 = 0$$

$$-0.361X1-0.452X3-0.324X5-X6-0.372X7-0.434X9-0.455X11-0.464X13 - 0.286X15-0.407X17+X19+0.562X20 = 0$$

que son el resultado de

$$\sum_{k=1}^K y_k - \sum_{i=0}^M \sum_{k=0}^K y_{ik} p_{ij}(k) = 0 \text{ para } j = 0, 1, \dots, M$$

Para la solución de el presente modelo se utilizó el Software Lindo, el cual nos dio el siguiente resultado:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 18  
 OBJECTIVE FUNCTION VALUE = -2.782954

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	2.212517
X2	0.033418	0.000000
X3	0.000000	6.763025
X4	0.034599	0.000000
X5	0.274175	0.000000
X6	0.000000	5.399398
X7	0.000000	4.526384
X8	0.056337	0.000000
X9	0.000000	5.409447
X10	0.064885	0.000000
X11	0.000000	5.661070
X12	0.057992	0.000000
X13	0.000000	5.368917
X14	0.058898	0.000000
X15	0.000000	0.525658
X16	0.128238	0.000000
X17	0.000000	1.921794
X18	0.133393	0.000000
X19	0.000000	1.567439
X20	0.158066	0.000000

Figura 5.10

### 5.5.2 Conclusiones

En la presente sección, analizaremos los resultados que nos dio el Modelo de Decisión Markoviano para poder recomendar o no a Administración de la Feria de Chapultepec el Nuevo Tour.

Observemos la siguiente tabla de resultados:

VARIABLE	VALOR	DECISIÓN
X1	0.000000	
X2	0.033418	Incluir Tornado en el Nuevo Tour
X3	0.000000	
X4	0.034599	Incluir Sombrillas en el Nuevo Tour
X5	0.274175	No incluir Cascabel
X6	0.000000	
X7	0.000000	
X8	0.056337	Incluir Aladino en el Nuevo Tour
X9	0.000000	
X10	0.064885	Incluir Cascadas en el Nuevo Tour
X11	0.000000	
X12	0.057992	Incluir Palacio de Cristal en el Nuevo Tour
X13	0.000000	
X14	0.058898	Incluir Carrusel Doble en nuevo Tour
X15	0.000000	
X16	0.128238	Incluir Montaña Rusa en el Nuevo Tour
X17	0.000000	
X18	0.133393	Incluir Dragón en el Nuevo Tour
X19	0.000000	
X20	0.158066	Incluirlo en el Nuevo Tour

Tabla 5.11

Como podemos ver, el único juego que el Modelo recomienda no ser incluido en el Tour es Cascabel, esto se explica si analizamos las matrices de probabilidad y la matriz de costos. En la matriz 1 ( Hacer Nada ) las probabilidades de visitar Cascabel son considerables, mientras que en la matriz 2 las probabilidades de visitar Cascabel es únicamente habiendo visitado Dragón, esto sólo en lo que dura el Tour, y posteriormente si puede ser visitado con una probabilidad del 0.15. La matriz de costos muestra una diferencia de sólo 0.372 , lo que justifica el porqué a la empresa no le conviene incluirlo en el Tour; sin embargo no es factible incluir otro juego que pueda sustituir Cascabel ya que no cumpliría con las restricciones que exige el Modelo del Diseño de Tour, ya que éste contempla un factor importante como lo es la preferencia de los visitantes por algunos juegos.

Nosotros recomendamos que si se incluyan los 9 juegos antes mencionados en el Tour aún cuando en Cascabel se tenga alguna perdida que seguramente será insignificante ya que las ganancias que aportarán los demás juegos y las ganancias que se esperan porque los visitantes vuelvan a abordar los juegos y disfruten de los demás juegos será mucho mayor.

Es importante mencionar que al mismo tiempo que la empresa nos proporcionó la matriz de costos, nos dio un costo provisional del Tour, el cual sería de \$33 . Si hacemos una comparación entre lo que ofrece el Paquete Ecolín y el Nuevo Tour , en cuanto a juegos, el nuevo Tour ofrece la mitad de los juegos ofrecidos por el Paquete Ecolín, en cuanto a precio es ligeramente menos de la mitad que el Paquete Ecolín, con la ventaja de que los visitantes que adquieran dicho paquete no perderán tanto tiempo en las filas, podrán subirse a los juegos de mayor preferencia evitando el congestionamiento y una vez terminado el Tour podrán abordar algunos juegos gratuitamente y otros en los que deberá pagar el costo de los mismos.

# **CAPITULO VI**

## **APLICACION DE SIMULACION Y METODOLOGIA DE BOX- JENKINS**

# VI. APLICACION DE SIMULACION Y METODOLOGIA DE BOX- JENKINS

## 6.1 ¿ QUE ES LA SIMULACION ?

Usar la simulación, es jugar con las cosas, podemos crear muchas situaciones inexistentes y manejarlas a nuestra arbitrariedad. Los efectos de nuestras ideas y las más fantásticas ocurrencias las podemos observar a distancia y sin riesgo.

Desde hace mucho tiempo, la técnica de simulación ha sido una herramienta importante para el diseñador. Un ejemplo, es la simulación de un vuelo de un nuevo diseño de un avión en un túnel de viento. En teoría, se podría hacer un análisis matemático pero en la práctica, el análisis sería muy complicado. Otra forma, sería construir aviones reales para cada uno de los diseños y probarlos en vuelos reales, pero esto sería demasiado costoso. Por ello, se utiliza la simulación, una vez que se tiene un análisis teórico preliminar para desarrollar un diseño básico.

La simulación desde el punto de vista de investigación de operaciones es: una técnica de muestreo estadístico para estimar el desempeño de sistemas estocásticos complejos cuando los modelos analíticos no son suficientes. El sistema se divide en elementos cuyo comportamiento se puede predecir, al menos en términos de distribuciones de probabilidad para cada uno de los diferentes estados posibles del sistema y sus insumos.

La simulación proporciona un medio de dividir el trabajo, de construir un modelo en componentes que es más sencillo formular y después combinar estas componentes en su orden natural. Una vez construido el modelo se activa usando números aleatorios para generar los eventos simulados a través del tiempo, de acuerdo a las distribuciones de probabilidad apropiadas. Debido al error estadístico, es imposible garantizar que la configuración que produzca el mejor comportamiento simulado sea la óptima, pero al menos debe ser cercana a ésta si el experimento de simulación estuvo bien diseñado.

La simulación es una técnica de investigación, enseñanza, etc. que reproduce en forma semejante o aproximada los eventos reales y los procesa bajo ciertas condiciones de prueba.

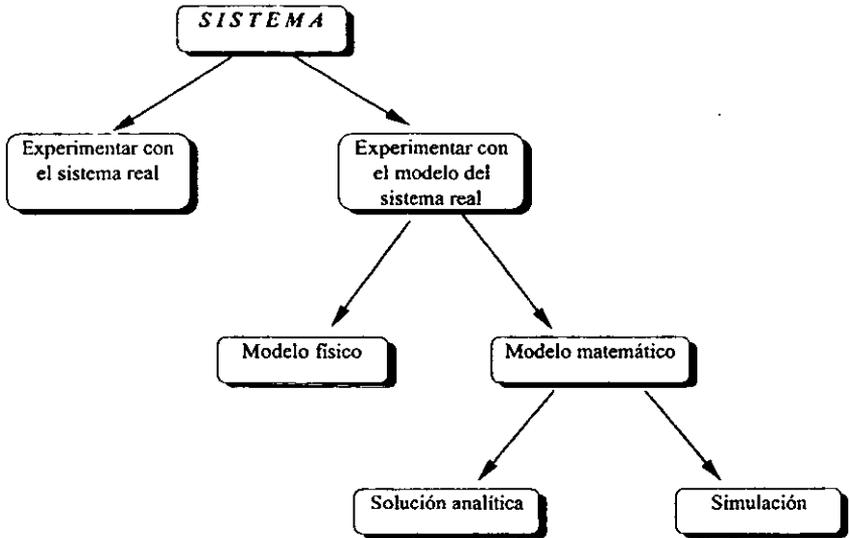
### 6.1.1 Cuándo usar la simulación ?

La simulación es una técnica para estimar las medidas de desempeño del sistema modelado.

Para analizar las razones del uso de la simulación, es interesante explorar las alternativas existentes a ésta, es decir, los diferentes métodos que pueden usarse para resolver un mismo problema:

1. Uso de algún otro tipo de modelo matemático, de tipo analítico.
2. Experimentación directa con el sistema real o con un prototipo de éste.
3. Uso de la experiencia y la intuición.

De lo anterior, podemos hacer un diagrama de decisión



*Figura 6.1*

En la mayoría de los casos, la simulación se usa cuando las alternativas matemáticas son pobres, es decir, es el último recurso. En realidad, si la solución analítica es relativamente sencilla, siempre será preferible a la simulación, ya que contempla el modelo general. Sin embargo, el problema es que existen muchos sistemas que no generan modelos sencillos de resolver, en este caso, se recurre a la simulación.

Otra ventaja de la simulación es que es posible experimentar sin exponer a la organización a los perjuicios de los errores en el mundo real.

Por otro lado, es más sencillo controlar condiciones experimentales en un modelo de simulación que en un sistema real.

En un modelo de simulación es posible comprimir largos periodos de tiempo y analizar el comportamiento en forma inmediata. Podemos visualizar cómo será la población dentro de 30 años y si los bienes y servicios serán suficientes para satisfacerla.

Existen casos en los cuales el sistema que se quiere analizar ni siquiera existe, aquí definitivamente lo ideal será usar la simulación o algún método de tipo cualitativo. La simulación no reemplaza otras formas de experimentación ni algún juicio subjetivo, pero es una solución alternativa conveniente.

La experiencia y la intuición, así como el profundo conocimiento de los fenómenos, deberán ser ingredientes constantes para el éxito de los modelos de simulación.

### 6.1.2 Conceptos básicos de simulación.

Los modelos de simulación son un subconjunto de los modelos matemáticos, con características particulares, como la aleatoriedad y el dinamismo. A continuación se definirán algunos conceptos:

#### ***Ecuaciones.***

Los modelos de simulación requieren de ecuaciones, que son el lenguaje matemático por excelencia. Las ecuaciones están formadas por variables, que representan las distintas partes del sistema, y por operadores, que indican la relación que existe entre los elementos.

#### ***Variables.***

Las variables pueden clasificarse como determinísticas, si se puede predecir su valor con certeza, o estocásticas, si no se puede predecir su valor con certeza. Si el modelo contiene al menos una variable estocástica, el modelo será estocástico.

Las variables pueden ser discretas o continuas. Además las variables pueden ser endógenas o dependientes, si sus valores estimados, son determinados por las soluciones particulares del modelo. También las variables pueden ser predeterminadas, exógenas o independientes, si sus valores se obtienen de forma independiente a la solución del modelo. Estas variables ayudan a explicar el comportamiento de las variables endógenas. Las variables pueden ser endógenas con retardo, cuando se usa la misma variable como explicativa o exógena, pero en intervalos anteriores del tiempo.

Las variables aleatorias o estocásticas son variables no observables directamente antes de su ocurrencia, y cumplen con la misión de recoger el conjunto de causas que no se encuentran explícitamente incorporadas en un modelo.

#### ***Estado del sistema***

El estado del sistema es la totalidad de las características relevantes del sistema. Por lo general, un sistema puede caracterizarse por un conjunto de interés, y el estado del sistema en un momento dado será el valor particular de cada uno de ellos.

#### ***Variables de estado***

Si cada uno de los atributos que caracteriza al sistema puede ser medido o cuantificado, entonces puede usarse una variable única que lo represente. Estas variables son las variables de estado.

#### ***Variables de decisión***

El analista en algunas situaciones puede dar valores a las variables, y es a estas variables que se les llama variables de decisión. Estas variables normalmente afectan el estado del sistema y son independientes de él. Una política de operación está formada por un conjunto de variables de decisión asociado a un conjunto de variables de estado.

### ***Relaciones de causa-efecto.***

Todos los sistemas cuentan con una relación de las variables de estado, las variables de decisión y los parámetros del sistema. Las relaciones causa-efecto se expresan a través de sistemas de ecuaciones, las cuales no son fáciles de plantear ni de resolver. Es aquí donde entra la simulación para poder establecer estas relaciones a nivel conceptual y utilizar lenguajes apropiados que permitan modelarlos con un esfuerzo mínimo.

### ***Criterio de medición para la ejecución del sistema.***

Se requiere algún criterio específico para medir que tan conveniente es la ejecución del sistema. Esta función dependerá de las variables de estado y de decisión. Física o económicamente, el criterio de ejecución representa ganancia, costo, nivel de producción, calidad, tiempo de espera, etc.

Es muy importante la forma en que se define este criterio (performance) del sistema, ya que a través de él será posible comparar diversas alternativas. En algunos casos es imposible asignar valores numéricos a las variables en cuestión. Sin embargo, deben medirse de forma tal que se tome en cuenta su valor real.

## **6.2. METODOLOGIA DE BOX-JENKINS**

### **6.2.1. Series de tiempo.**

Una serie de tiempo es una recolección de datos observados generados en forma secuencial a través del tiempo. Los datos sucesivos son generalmente dependientes entre sí.

La serie de tiempo observada es toda una secuencia de observaciones de un cierto proceso. Se dice de esta forma, por que si se pudiera realizar el proceso de nuevo, se obtendrían resultados diferentes.

El objetivo de realizar un análisis de series de tiempo esta basado en cuatro objetivos:

- a) Descripción. En la descripción se menciona el comportamiento de un proceso, permitiendo un panorama claro de este.
- b) Explicación. Es realizar una análisis de tipo causa-efecto, al relacionar un fenómeno con el medio circundante.
- c) Pronóstico. En el caso que se desee estimar valores futuros con el fin de tomar decisiones o prever comportamientos.
- d) Control. Si el objetivo no es solo observar sino modificar el comportamiento del proceso para obtener algún beneficio.

Una serie de tiempo es una descripción del pasado, un procedimiento lógico para pronosticar el futuro es usar estos datos históricos. Si los datos pasados indican lo que puede esperar en el futuro, es posible proponer un modelo matemático que sea representativo del proceso.

Los componentes de una serie de tiempo son:

1.- **Tendencia:** El patrón de tendencia existe cuando una serie de tiempo tiende a aumentar, disminuir o permanecer constante en sus valores medios con el tiempo, es decir, la media de una serie de tiempo puede permanecer constante o puede variar en forma lineal creciente etc.

Para eliminar la tendencia de tipo exponencial o lineal se utilizan diferencias sucesivas (Diferencias Ordinarias). Por ejemplo.

1a. diferencia  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$

2a. diferencia  $\Delta^2 Y_t = \Delta (Y_t - Y_{t-1})$   
 $= \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}$   
 $= Y_t - Y_{t-1} - (Y_{t-1} - Y_{t-2})$   
 $= Y_t - 2 Y_{t-1} + Y_{t-2}$

3a. diferencia  $\Delta^3 Y_t = \Delta (Y_t - 2 Y_{t-1} + Y_{t-2})$   
 $= \Delta Y_t - 2 \Delta Y_{t-1} + \Delta Y_{t-2}$   
 $= Y_t - Y_{t-1} - 2(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + (Y_{t-2} - Y_{t-3})$   
 $= Y_t - 3 Y_{t-1} + 3 Y_{t-2} - Y_{t-3}$

Por cada diferencia ordinaria se pierde un dato.

El objetivo de eliminar la tendencia, es para obtener una nueva serie de tiempo que pueda analizarse fácilmente. Hay que tener presente que eliminar la tendencia no es olvidar que existe una tendencia en la serie de tiempo.

2.- **Estacionalidad o variación estacional:** Movimiento recurrente o cambios en el comportamiento de la serie de tiempo, este proceso puede repetirse en periodos menores o iguales a un año.

Si en una serie de tiempo existe una variación estacional, es decir, cuando hay patrones sistemáticos que se repitan en cada cierto periodo de tiempo, lo que se realiza para eliminar esto, es usar las diferencias estacionales. Por ejemplo, si el periodo es de longitud S, se tiene:

1a. diferencia estacional  $\Delta_s Y_t = Y_t - Y_{t-s}$

2a. diferencia estacional  $\Delta (\Delta_s Y_t) = \Delta (Y_t - Y_{t-s})$   
 $= \Delta Y_t - \Delta Y_{t-s}$   
 $= Y_t - Y_{t-s} - (Y_{t-s} - Y_{t-2s})$   
 $= Y_t - Y_{t-s} - Y_{t-s} + Y_{t-2s}$   
 $= Y_t - 2 Y_{t-s} + Y_{t-2s}$

3a. diferencia estacional  $\Delta_{3s} Y_t = \Delta (Y_t - 2Y_{t-s} + Y_{t-2s})$   
 $= \Delta Y_t - 2\Delta Y_{t-s} + \Delta Y_{t-2s}$   
 $= Y_t - Y_{t-s} - 2(Y_{t-s} - Y_{t-2s}) + (Y_{t-2s} - Y_{t-3s})$   
 $= Y_t - 3Y_{t-s} + 3Y_{t-2s} - Y_{t-3s}$

Se debe tener presente que por cada diferencia estacional S que se aplique a la serie de tiempo, se pierden S datos.

3.- **Ciclo:** Son movimientos recurrentes que se dan en la serie de tiempo, este proceso puede repetirse en periodos mayores a un año.

4.- **Fluctuación aleatoria o irregulares:** En una serie de tiempo la fluctuación aleatoria se da por variables no observables, cuestiones imprevistas, error de cálculo, etc. También se conoce como ruido blanco.

El objetivo de la metodología de Box-Jenkins consiste en extraer los movimientos predecibles de los datos observados. La serie de tiempo se descompone en varios componentes, algunas veces llamados filtros, precisamente porque la filosofía del método consiste en detectar los distintos componentes usando los filtros correspondientes, hasta obtener residuales no predecibles cuyo comportamiento tiene poca influencia en el resultado final. El enfoque de Box-Jenkins hace principalmente uso de tres filtros lineales: el auto regresivo, el de integración y el de medias móviles.

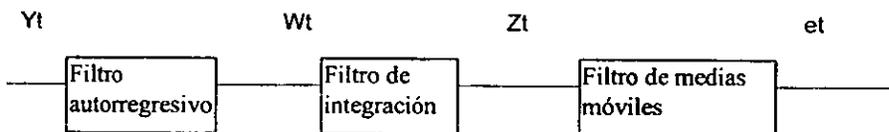


Figura 6.2

El proceso iterativo de Box-Jenkins para construir modelos lineales de series de tiempo consiste de 4 pasos:

- a) Identificación de las especificaciones preliminares del modelo.
- b) Estimación de los parámetros.
- c) Diagnóstico de la educación del modelo.
- d) Pronóstico de realizaciones futuras.

A continuación se presenta un diagrama funcional del método de Box-Jenkins:

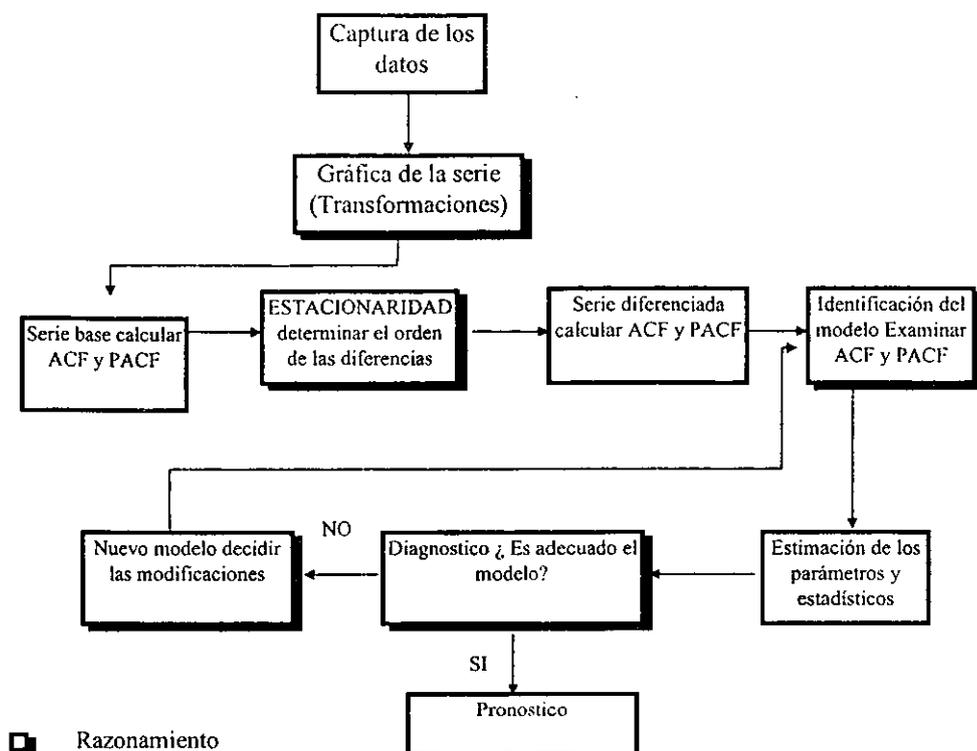


Figura 6.3

Los procedimientos usados en la identificación del modelo son inexactos y requieren demasiada experiencia y razonamiento, además de un conocimiento del fenómeno en cuestión.

En la práctica, los procedimientos y los modelos no siempre están coordinados. Lo importante del método de Box-Jenkins, es que el modelo y procedimiento están coordinados. Existe un enfoque sistemático para identificar un modelo apropiado, elegido de una abundante variedad de modelos. Los datos históricos se usan para probar la validez del modelo.

El método de Box-Jenkins es iterativo por naturaleza. Primero se elige un modelo. Para hacerlo es necesario calcular autocorrelaciones y autocorrelaciones parciales y examinar sus patrones. Una autocorrelación mide la correlación entre los valores de la serie de tiempo, separado por un número fijo de periodos que se llama espacio. Entonces, la autocorrelación para un espacio de dos periodos mide la correlación en cada tercer observación, o sea, es la correlación entre la serie de tiempo original y la misma serie de tiempo desplazada dos periodos hacia adelante. La autocorrelación parcial es una autocorrelación condicional entre la serie de tiempo original y la misma serie de tiempo trasladada hacia adelante un número fijo de periodos, manteniendo fijo el efecto de los otros espacios de tiempo.

### 6.2.2 Identificación del modelo.

Esta es la parte más importante de una serie de tiempo, ya que si no se escoge el modelo correcto o adecuado, se puede tener problemas posteriores. Utilizar la metodología de Box-Jenkins, nos permitirá escoger el mejor modelo de entre varios.

Se trata de ajustar la serie de tiempo a un modelo del tipo ARIMA (p,d,q), donde p es el orden de la parte AR, q es el orden de la parte MA y d es el número de diferencias necesarias para hacer la media constante. El modelo ARIMA en su forma general es:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \dots + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q}$$

Los  $e_t$  se les conoce como ruido blanco y son variables aleatorias distribuidas como una normal con media cero y varianza constante, y  $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$  son parámetros que indican la contribución de cada variable.

#### *Modelos autorregresivos de primer orden*

Denotaremos a la serie de tiempo como  $Y_t$ . El modelo autorregresivo de primer orden esta forma de la siguiente manera:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + e_t$$

Y es reconocido como ARIMA(1, 0, 0) o AR(1), para ser estacionaria debe cumplir con media constante, varianza constante (en esta parte se encuentra la condición de estacionariedad, donde  $-1 < \phi < 1$ ), y la función de autocorrelación depende únicamente de k, dada la condición de estacionariedad, sus valores serán decrecientes infinitos.

#### *Modelos autorregresivos de orden mayor.*

A este tipo de modelos se les llama así cuando  $p > 1$ , o sea, cuando el valor actual de  $Y_t$  depende de 2 o más valores anteriores, el modelo será un AR(p), y se define de la siguiente forma:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + e_t$$

Se tiene condiciones de estacionariedad para los parámetros  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_p$  y la función de autocorrelación será decreciente infinita.

#### *Modelos de medias móviles de primer orden.*

Este tipo de modelo se identifica como:

$$MA(1) = Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1}$$

Esta formado por choques aleatorios ponderados en el tiempo y acumulados. Debe ser estacionario, por lo que debe cumplir con media constante, varianza constante (no tiene condiciones de estacionariedad) y la función de autocorrelación depende únicamente de k.

El modelo de medias móviles es muy importante, ya que reduce el número de parámetros, y como estos hay que estimarlos, pues que mejor que sean menos ( Principio de Parsimonia ). Por lo anterior se puede llegar a la forma invertida de los modelos de medias móviles y llegar a los modelos autorregresivos. Este tipo de modelos se trunca en q.

*Modelos de medias móviles de orden superior*

A estos modelos se le identifica como:

$$MA(q) = Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q}$$

En general, para un modelo MA(q) o ARIMA(0,0,1) no existen condiciones de estacionariedad, pero si de invertibilidad, y su función de autocorrelación se trunca en q.

*Modelos mezclados*

Los modelos mezclados se representan por ARIMA(p,0,q), el modelo mas sencillo es el ARIMA(1,0,1):

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + e_t - \theta e_{t-1}$$

Además tiene media constante, varianza constante y la función de autocorrelación depende de k y no del tiempo.

*Modelo con término constante*

Cuando la media de la serie de tiempo no es cero, se requiere de un termino constante, el modelo general se expresará como:

$$\phi(B) Y_t = \delta + \theta(B) e_t$$

donde

$$\begin{aligned} \phi(B) &= 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \\ \theta(B) &= 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \\ Y_t &= \Delta^d Z_t \end{aligned}$$

En este caso la media de la serie será:

$$E\{Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \dots - \phi_p Y_{t-p}\} = E\{e_t - \theta_1 e_{t-1} - \dots - \theta_q e_{t-q} + \delta\}$$

Si hay estacionaridad

$$E(Y_t) = E(Y_{t-1}) = \dots = E(Y_{t-p})$$

entonces

$$E(Y_t) (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p) = \delta$$

$$E(Y_t) = \delta / (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p) \text{ es la media de la serie}$$

*Función de autocorrelación parcial (PACF).*

Al construir un modelo es conveniente averiguar si la inclusión de una nueva variable es o no significativa, es decir, si la variable realmente contribuye a mejorar el modelo.

La función de autocorrelación parcial, se utiliza para ver que tan cierto es el modelo, y para averiguar se introduce otra variable, y si genera un cero implicaría que es insignificante y el modelo esta bien, pero si es diferente de cero implicaría que al modelo le faltan variables.

Para los modelos autorregresivos, la función de autocorrelación parcial se trunca en k.

Como el modelo de medias móviles de orden q es equivalente a un modelo AR( $\infty$ ), entonces se espera que la función de autocorrelación parcial (PACF) sea decreciente infinita.

Características de los modelos no estacionales:

Modelo	Condición de estacionaridad	Condición de invertibilidad	ACF	PACF
AR(p)	Si	No	Decreciente infinita	Se trunca en p
MA(q)	No	Si	Se trunca en q	Decreciente infinita
ARMA(p,q)	Si	Si	Decreciente infinita	Decreciente infinita

*Tabla 6.3*

**6.2.3 Estimación del Modelo**

Una vez que se ha elegido el modelo, es decir, que se han elegido correctamente los valores de p,q y d para el modelo ARIMA:

$$\phi(B) Y_t = \theta(B) e_t \quad \dots \dots \dots (a)$$

Deben obtenerse estimadores de los p parámetros autorregresivos AR y de los q parámetros MA, se eligen los parámetros que minimicen la suma de cuadrados de las diferencias entre la serie real observada  $Y_t$  y la estimada  $\hat{Y}_t$ , de (a) se obtiene.

$$e_t = \phi(B) Y_t - \theta^{-1}(B) \dots \dots \dots (b)$$

Lo que se pretende es encontrar un vector de parámetros

$$AR \quad \phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$$

y uno de los parámetros

$$MA \quad \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$$

que minimicen la suma de los errores al cuadrado:

$$S(\phi, \theta) = \sum_t e_t^2 \dots \dots \dots (c)$$

Los valores que minimizan la sumatoria anterior se denotan como:

$$\bar{\phi} = (\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_p)$$

y

$$\bar{\theta} = (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_q)$$

Y los residuales asociados se definen como  $\bar{e}_t$ , de modo que:

$$\bar{e}_t = \bar{\theta}^{-1}(B) \bar{\phi}(B) Y_t$$

entonces:

$$S(\bar{\phi}, \bar{\theta}) = \sum_t \bar{e}_t^2$$

La estimación puede resultar muy compleja, si existen términos de medias móviles, ya que la ecuación ( b ) será no lineal. Por esta razón debe usarse un método iterativo de estimación no lineal para minimizar ( c ). Además, el primer error de la serie de tiempo,  $e_1$ , depende de valores pasados no observados  $Y_0, Y_{-1}, \dots, Y_{-p+1}$  y  $e_0, e_{-1}, \dots, e_{-q+1}$ . De modo que debe usarse algún método para iniciar la serie (es decir elegir números para estos valores no observados). Antes de aplicar el proceso de estimación no lineal.

Una vez estimados los parámetros del modelo, se usará un procedimiento de "diagnóstico" para probar si la especificación inicial del modelo fue correcta. El chequeo de diagnóstico se usará para probar si estos residuales en realidad no están correlacionados. Si lo están, se deberá re-especificar el modelo ( es decir elegir nuevos valores para p,d y q ).

Si se asume que un total de  $T + d$  observaciones están disponibles para una serie de tiempo homogénea no estacionaria de orden d (es decir, que requiere de d diferencias ordinarias para ser estacionaria),  $Z_t$ , y se denotan estas observaciones como  $Z_{-d+1}, \dots, Z_0, Z_1, \dots, Z_T$ ; después de diferenciar esta serie "d" veces, se obtiene una serie estacionaria con T observaciones  $Y_1, \dots, Y_T$ . El problema es estimar los vectores de parámetros  $\phi$  y  $\theta$  para el modelo ARMA(p,q) especificado para la serie  $Y_t$ . Para hacer esto se utiliza el hecho de que (por suposición) los términos de los errores  $e_t$  son distribuidos normalmente e independientes, con media cero y varianza  $\sigma^2$ . Entonces la función de verosimilitud condicional asociada con los parámetros  $(\phi, \theta, \sigma)$  está dada por:

$$F(\phi, \theta, \sigma) = [ (2\pi\sigma^2)^{-T/2} ] \exp (- S(\phi, \theta) / 2\sigma^2) \\ = (2\pi\sigma^2)^{-T/2} \exp (- S(\phi, \theta) / 2\sigma^2)$$

Obteniendo el logaritmo, para simplificar cálculos:

$$L(\phi, \theta, \sigma) = \frac{T (\log 2\pi\sigma^2)}{2} - \frac{S(\phi, \theta)}{2\sigma^2} \dots \dots \dots ( d )$$

Se dice que  $L(\phi, \theta, \sigma)$  es la función de verosimilitud logarítmica "condicional" porque la suma de errores cuadrados  $S(\phi, \theta)$  depende de los valores pasados no observables  $Y_0, Y_{-1}, \dots, Y_{-p+1}, e_0, e_{-1}, \dots, e_{-q+1}$ .

Esto puede verse escribiendo la ecuación para el primer error observable  $e_1$  en la forma expandida del modelo ARMA.

$$e_1 = Y_1 - \phi_1 Y_0 - \phi_2 Y_{-1} - \dots - \phi_p Y_{-p+1} + \theta_1 e_0 + \dots + \theta_q e_{-q+1} \dots (e)$$

Los estimadores de máxima verosimilitud de  $\phi$  y  $\theta$  estarán dados por la minimización de la suma de residuales al cuadrado  $S(\phi, \theta)$ . Entonces, bajo la suposición de normalidad, el estimador de máxima verosimilitud es igual al de mínimos cuadrados.

**6.2.3.1 Inicialización de la serie.**

Ya que la función suma de cuadrados  $S(\phi, \theta)$  y por tanto la función de verosimilitud  $L(\phi, \theta, \sigma)$  son ambas condicionantes con respecto a valores pasados no observables de  $Y_1$  y  $e_1$ , los estimadores de mínimos cuadrados que se obtengan dependen de la elección de los valores  $Y_0, Y_{-1}, \dots$ , etc.

Una posible solución es tomar  $Y_0, \dots, Y_{-p+1}$  y  $e_0, \dots, e_{-q+1}$  iguales a sus valores esperados incondicionales. los valores esperados incondicionales de  $e_0, \dots, e_{-q+1}$  son todos cero, y si  $\delta = 0$  (suponiendo que se manejan las desviaciones con respecto a la media), los valores esperados incondicionales de  $Y_0, \dots, Y_{-p+1}$  también serán ceros.

Esta solución da una aproximación razonablemente buena al procedimiento correcto, si los valores reales de  $\phi_1, \dots, \phi_p$  no son muy cercanos a uno (a la no estacionaridad) y si el número de observaciones  $T$  es grande en relación con  $p$  y  $q$ . esto último generalmente ocurre, ya que se tendrán por lo menos 50 observaciones originales y los valores de  $p$  y  $q$  rara vez son mayores a 2.

También existe un procedimiento para encontrar los valores esperados condicionales para  $Y_0, \dots, Y_{-p+1}$ ; esto es, valores que son condicionales con respecto a los valores observados de  $Y_0, \dots, Y_T$  y los valores estimados de  $e_1, \dots, e_T$ . Esencialmente pueden inicializarse  $Y_0, \dots, Y_{-p+1}$  y  $e_0, \dots, e_{-q+1}$  con cero; estimando el modelo ARMA minimizando  $S(\phi, \theta)$  condicionados a estos valores cero, y entonces pronosticar hacia atrás (backforecasting) el modelo para generar nuevos valores para  $Y_0, \dots, Y_{-p+1}$ . Como la serie diferenciada  $Y_t$  es estacionaria, el proceso ARMA puede regresarse en el tiempo; es decir es equivalente (estadísticamente en una muestra grande) al proceso:

$$\phi(F) Y_t = \theta(F) e_t \dots \dots \dots (f)$$

donde  $F$  es el "operador de salto hacia adelante" (forward shift operator):

$$F Y_t = Y_{t+1}$$

$$F^2 Y_t = Y_{t+2}$$

$$\Rightarrow Y_t = \phi_{-1}(F) \theta(F) e_t \dots \dots \dots (g)$$

y puede usarse para encontrar los valores de  $Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1}$  en términos de los valores estimados de  $e_1, \dots, e_T$ . Estos valores estimados son los residuales formados al restar la serie de  $Y_t$  de los valores generados por el modelo ARIMA inicialmente estimados. Los valores de  $e_t$  no observados, no podrán ser estimados, ya que se carece de las observaciones de la serie en esos períodos.

Pueden obtenerse "nuevos" estimadores de mínimos cuadrados para  $\phi$  y  $\theta$  minimizados  $S(\phi, \theta, \sigma)$ , condicionada a  $Y_0 = Y_0, Y_1 = Y_1$ , etc.

Un nuevo conjunto de estimadores  $Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1}$  puede calcularse con (g), y se repite el proceso hasta que los estimadores sean convergentes, es decir, hasta que  $\phi$  y  $\theta$  dejen de cambiar en forma significativa. desafortunadamente no hay garantía de que el proceso sea convergente. Si no lo es, nos veremos forzados a fijar  $Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1}$  con sus estimadores iniciales.

La determinación de los valores condicionales esperados de la serie  $Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1}$  es difícil, y usualmente involucra demasiados cálculos, de modo que es razonable preguntarse si los estimadores de  $\phi$  y  $\theta$  serán o no muy sensibles a la inicialización de la serie. La respuesta depende de la longitud de la serie de tiempo, y en particular, de la longitud relativa de los valores de  $p$  y  $q$ . Si la serie es grande a comparación de  $p$  y  $q$ , la función de suma de cuadrados condicional será prácticamente igual a la suma incondicional, y los estimadores de  $\phi$  y  $\theta$  serán insensibles al proceso de inicialización. En este caso, simplemente se inicializan todos los valores como cero. Si la serie es pequeña (a comparación de  $p$  y  $q$ ), se ganará alguna eficiencia si se usan los valores esperados condicionales, pero no es posible determinar esta ganancia. Nuestro conocimiento de las propiedades estadísticas de los estimadores se basa en resultados asintóticos, es decir, en muestras grandes. Desafortunadamente se desconocen las propiedades de los estimadores de muestras pequeñas.

Por lo general no se desea modelar una serie de tiempo como ARMA a menos que se tenga un número suficientemente grande de observaciones (mas de 50). De otro modo es poco probable que pueda obtener un ajuste adecuado. Además, la mayor parte de los modelos ARMA en aplicaciones económicas y financieras son de orden bajo ( $p$  y  $q \leq 3$ ). En estos casos la inicialización no será problema

**6.2.3.2 Estimación no lineal de los parámetros del modelo.**

El problema es encontrar valores de  $\phi$  y  $\theta$  que minimicen la suma de errores cuadrados:

$$S(\phi, \theta) = \sum_t e_t^2 = \sum_t [e_t / \phi, \theta, Y]^2 \dots \dots \dots (h)$$

donde  $Y$  es el vector de las observaciones  $Y_t$  y los errores  $e_t$  están condicionados a  $\phi, \theta, Y$ . Suponiendo que la inicialización de la serie se basa, como se sugirió, en los valores esperados incondicionales (que son cero) de  $Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1}$  y  $e_0, \dots, e_{-q+1}$ , los límites de la suma en (h) son  $t = 1$  hasta  $T$ . El problema es minimizar:

$$S(\phi, \theta) = \sum_{t=1}^T [e_t / \phi, \theta, Y]^2 \dots \dots \dots (i)$$

Ahora, suponga que el modelo es puramente autorregresivo, es decir, de la forma:

$$\phi(B) Y_t = e_t \quad \dots\dots\dots(j)$$

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + e_t \quad \dots\dots\dots(k)$$

Observe que (k) es de la forma general:

$$Z_t = B_0 + B_1 X_{1t} + B_2 X_{2t} + \dots + e_t \quad \dots\dots\dots(l)$$

que puede estimarse como regresión lineal múltiple:

$$\phi = (X^T X)^{-1} X^T Z$$

donde

$$X = \begin{bmatrix} Y_p & Y_{p-1} & \dots & Y_1 \\ Y_{p+1} & Y_p & \dots & Y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{T-1} & Y_{T-2} & \dots & Y_{T-p} \end{bmatrix}$$

y

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{p+1} \\ Y_{p+2} \\ \vdots \\ Y_T \end{bmatrix}$$

Aunque para un modelo puramente autorregresivo el proceso de estimación es esencialmente una regresión lineal, el problema es más difícil si el modelo contiene un componente de medias móviles. En este caso puede representarse como:

$$\theta^{-1}(B) \phi(B) Y_t = e_t \quad \dots\dots\dots(m)$$

Esta "ecuación de regresión" es no lineal en los parámetros y no puede estimarse por una sencilla aplicación de mínimos cuadrados. Sin embargo, puede estimarse por una rutina general iterativa no lineal.

El proceso usa los dos primeros términos de la expansión en series de Taylor (**nota**) para linealizar (m) alrededor de un valor inicial de  $\phi, \theta$ . Se realiza un regresión lineal en esa nueva ecuación linealizada, se obtienen estimadores de mínimos cuadrados para  $\phi$  y  $\theta$ , y se hace una nueva linealización alrededor de ellos. el proceso se repite en forma iterativa hasta que ocurre la convergencia.

Los errores estándares y los estadísticos t de nuestros estimadores se calculan a partir de la última linealización, de la misma forma que en cualquier procedimiento de estimación lineal. De modo que los estadísticos "t" tienen poca relevancia, indicando sólo la significancia de los

estimadores de mínimos cuadrados obtenidos para la linealización final de la ecuación no lineal. De la misma forma puede calcularse  $R^2$  (el coeficiente de determinación), que tendrá una importancia similar. por esta razón no necesariamente deberá rechazarse una ecuación como una  $R^2$  pequeña:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum Y_i^2} = \frac{\sum Y_i^2 - \sum e_i^2}{\sum Y_i^2}$$

Aunque se obtenga un valor pequeño para  $R^2$  en la última iteración, es posible que el modelo no lineal tenga considerable valor predictivo.

Es importante señalar que no hay garantía de que el proceso de estimación descrito arriba converja siempre a un estimador final de los parámetros. Es muy posible que el proceso diverja, es decir, que los estimadores sucesivos  $B_1, B_2, \dots, B_k$  se alejen cada vez más. Aún más también es posible que existan soluciones múltiples; en este caso, ocurre la convergencia pero diferentes valores iniciales llevan a diferentes estimadores finales de uno o más de los parámetros. El hecho de que exista divergencia o soluciones múltiples depende tanto de la especificación del modelo ARIMA como de los datos.

Si ocurre divergencia el modelo puede reestimarse una o más veces usando diferentes valores iniciales. Un nuevo valor inicial puede obtener la convergencia, aunque no siempre es éste el caso. Si resulta imposible encontrar una solución convergente, tendrá que buscarse una nueva especificación del modelo.

Aún si la convergencia ocurre al primer intento, es conveniente analizar si hay múltiples soluciones reestimando el modelo con diferentes valores iniciales. Si ocurren múltiples soluciones el estimador final será aquel que minimice la suma de errores al cuadrado. (No todos los paquetes permiten al usuario elegir los valores iniciales, de modo que esto no es siempre posible.)

### 6.2.3.3 Obtención de un valor inicial para los parámetros.

Antes de poder realizar la estimación no lineal, debe hacerse la inicialización tentativa de los valores de los parámetros  $B_0 = (\phi_0, \theta_0)$ . La convergencia es el proceso de estimación será más rápido si los valores iniciales son buenos, es decir, si  $B_0$  es cercano a los valores verdaderos de los parámetros. Por otro lado, si el valor inicial es muy pobre, es posible que el proceso iterativo nunca converja.

La función de autocorrelación muestral puede usarse para ayudar a obtener aproximaciones iniciales. Como sería de esperarse, esto funciona para modelos sencillos, pero es inútil en modelos muy complejos. Por ejemplo, si la serie  $Y_t$  se modelo como  $AR(1)$ , basta con tomar el valor de  $\rho_1$ . Por ejemplo, si  $\rho_1 = .9$ , una aproximación inicial para  $\phi_1$ , es  $\phi_{1,0} = .9$ . Si el modelo es más complejo, este método de inspección no producirá buena información.

Aunque no se pueda determinar la aproximación inicial por simple inspección del correlograma, sus valores pueden usarse. Como se demostró, la función de autocorrelación puede relacionarse con los parámetros, a través de una serie de ecuaciones. Si se invierten estas ecuaciones, puede usarse para encontrar los valores de los parámetros.

Por ejemplo, considere el proceso AR(p) cuya función de autocorrelación está dada por:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad \dots \dots \dots (S)$$

Usando el hecho de que  $\rho_k = \rho_{-k}$ , puede reescribirse esta ecuación como un conjunto de p ecuaciones lineales simultáneas:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ &\vdots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p \end{aligned}$$

Llamadas ecuaciones de Yule-Walker. Puede usarse para encontrar  $\phi_1, \dots, \phi_p$  en términos de los valores de la función de autocorrelación estimados, obteniendo los estimadores de Yule-Walker de los parámetros. Estos estimadores pueden usarse como aproximaciones iniciales. Esto no es muy útil si se recuerda que el modelo AR(p) puede estimarse por mínimos cuadrados ordinarios.

Si el modelo contiene una parte de medias móviles, las ecuaciones que relacionan los parámetros y la función de autocorrelación no son lineales. Por ejemplo, para MA(1):

$$\rho_k = \begin{cases} -\theta_1 & k = 1 \\ \frac{-\theta_1^2}{1 + \theta_1^2} & k = 2 \\ 0 & k > 2 \end{cases}$$

Supongamos que  $\rho_1 = .4$  en la función de autocorrelación muestral. Entonces:

$$\theta_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \rho_1^2}}{2 \rho_1} = \frac{-1 \pm 0.6}{0.8} = \begin{cases} -2 \\ -0.5 \end{cases}$$

Como la condición de invertibilidad es  $|\theta_1| < 1$ , se elegirá  $\theta_1 = -0.5$ . Desafortunadamente, la solución de  $\theta$  en términos de  $\rho$  se hace más complicada a medida que q se incrementa. De hecho, para obtener aproximaciones iniciales para el modelo MA (q), es necesario resolver q ecuaciones simultáneas no lineales.

Podríamos preguntarnos por qué esta aproximación inicial no es suficiente para propósitos prácticos. Una razón es que la función de autocorrelación muestral es sólo un estimador de la función de autocorrelación real y está por lo tanto sujeta a error. De hecho, para muestras pequeñas (menos de 50), la función de autocorrelación muestral será sesgada (hacia abajo) de la función real. Otra razón es que la función de autocorrelación muestral no contiene tanta información como la serie original.

Existen tablas (Box y Jenkins, op. cit. pp. 517-520) para obtener aproximaciones iniciales de los parámetros, pero algunos autores (Bowerman y O'Connell **Nota**) consideran que puede

utilizarse el valor .1 para cualquier parámetro desconocido (excepto  $\mu$ ), sin que esto afecte mayormente los resultados finales. Otros (Pindyck & Rubinfeld **Nota**) toman cero como valor inicial, con buenos resultados.

#### 6.2.4 Examen del modelo

Una vez que el modelo se ha identificado plenamente y sus parámetros se han estimado, es necesario verificar que tan adecuado es el y analizar si es posible mejorarse.

Para el estimador de un coeficiente (parámetro) puede calcularse varios estadísticos.

- Estadístico t
- Valor del parámetro
- Intervalo de confianza

Y para los residuales tenemos

ACF (Todas las  $\zeta_k$  son ceros ó aproximadamente igual a cero )

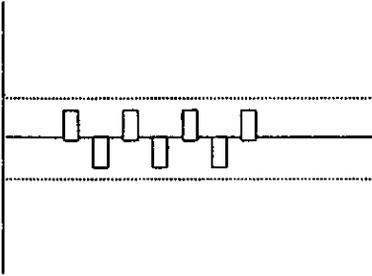


Figura 6.4

PACF (Todas las  $\zeta_{kk}$  son ceros ó aproximadamente igual a cero )

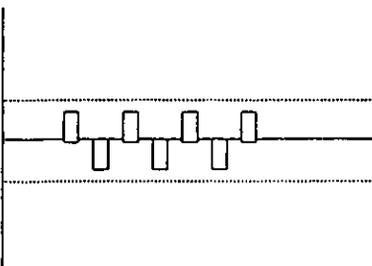


Figura 6.5

Además de esto se realizan 4 pruebas de diagnóstico y con base en ellas se tomará la decisión de modificar o no el modelo inicial:

- Análisis de estacionaridad
- Análisis de residuales
- Modelo sub - especificado ( agregar parámetros )
- modelo sobre - especificado ( eliminar parámetros )

#### Análisis de estacionaridad.

Se debe tener cuidado de no sobrediferenciar el modelo ya que caeríamos en un modelo mas complicado y esto es lo que no se quiere ( por principio de parsimonia ).

Se toma la serie de residuales como una nueva serie de tiempo para analizar su estacionaridad. Si se detectan problemas deberá analizarse de nuevo la estacionaridad del modelo.

#### Análisis de residuales.

Los residuales se analizaran bajo los siguientes aspectos :

Gráfica de residuales, se notan posibles datos discrepantes y pueden aparecer variación estacional.

ACF y PACF de residuales, teóricamente ambos deben contener únicamente ceros, esto puede determinarse en forma visual por el hecho de que todos los valores queden dentro del intervalo de confianza..

En forma de prueba de hipótesis se realiza la prueba de Pormanteau para probar:

Ho : Las k primeras autocorrelaciones son ceros, es decir,

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \dots = \zeta_k = 0$$

Ha : Al menos una distinta de cero

Se usa el estadístico

$$Q(k) = n(n+2) \sum_{i=1}^k (1/(n-i)) r_k^2( e^-)$$

donde  $r_k( e^- )$  es la  $k$ -ésima autocorrelación de los residuales.

$Q(k)$  se distribuye aproximadamente como una  $\chi^2$  con  $k - (p+q)$  grados de libertad con regla de decisión:

$$\text{rechazar Ho si } Q(k) > \chi^{2(1-\alpha)}_{k-(p+q)} \text{ grados de libertad.}$$

Es muy importante aprovechar toda la información de los residuales. Por ejemplo, se decide estimar un modelo MA( 1 ) y se encuentra evidencia que los residuales siguen también un proceso MA( 1 )

$$Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} \dots \dots \dots (serie\ original)$$

donde

$$Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

implica

$$a_t = e_t - \lambda_1 e_{t-1} \dots \dots \dots (residuales)$$

sustituyendo

$$Y_t = e_t - \lambda_1 e_{t-1} - \theta_1 (e_{t-1} - \lambda_1 e_{t-2})$$

$$Y_t = e_t - \lambda_1 e_{t-1} - \theta_1 e_{t-1} + \theta_1 \lambda_1 e_{t-2}$$

$$Y_t = e_t - e_{t-1} (\lambda_1 + \theta_1) + \theta_1 \lambda_1 e_{t-2}$$

como se puede observar, el siguiente modelo a analizar seria un MA(2).

Finalmente lo que se desea es no observar ningún comportamiento (MA, AR, ARMA, etc) en los residuales y tener únicamente "ruido blanco"

Si calculamos una diferencia a los residuales, y estos ya son "ruido blanco", se observaría lo siguiente:

$$\Delta e_t = e_t - e_{t-1}$$

donde

$$MA(1) = e_t - e_{t-1}$$

con

$\theta_1$ , muy cercano a 1

Se prueba el ajuste de residuales a la normal. Se compara la gráfica de frecuencias relativas acumuladas contra la de una distribución normal.

El periodograma integral se utiliza para detectar posibles variaciones estacionales. Si los residuales son "ruido blanco" su periodograma se aproxima a la diagonal. En cambio, si hay periodicidad de orden s se encontrarán escalones o saltos en los periodos s, 2s, 3s, . . . etc, en las frecuencias 1/s, 2/s, 3/s, . . .etc. Aquí se realiza el ultimo análisis de los residuales

*Modelos sub-especificados (agregar parámetros).*

Para verificar que el modelo es adecuado puede incluirse un nuevo parámetro para ver si mejora el modelo. Al agregar parámetros al modelo existe el riesgo de redundancia, entonces por regla general no deberá agregarse mas de un parámetro a la vez.

*Modelo sobre-especificado (omitir parámetros).*

Los parámetros redundantes pueden localizarse utilizando el estadístico "t" de cada estimador y la matriz de correlación entre estimadores.

Se pueden presentar algunas situaciones:

⇒ Si el parámetro insignificativo no es el de mayor orden, entonces examinar las correlaciones entre los estimadores ayudará a saber cuál parámetro eliminar. Una correlación alta entre dos estimadores indica que hay la posibilidad de que uno de los dos parámetros se omita sin cambiar el ajuste del modelo. El parámetro que si se incluya será capaz de reflejar la contribución del otro.

⇒ Si el parámetro insignificativo, no es el de mayor orden pero está fuertemente correlacionado con el de mayor orden, se deberá evaluar el modelo sin el parámetro de orden mayor. Si esta correlación no existe, se reestimaré el modelo ARIMA suprimiendo el parámetro insignificante.

### 6.2.5 MODELOS ESTACIONALES

En alguna serie de tiempo existen similitudes en ciertos periodos, por ejemplo: cada 12 meses, cada 7 días, etc.

Parece lógico aprovechar la correlación que existe entre estos intervalos y se usaran modelos estacionales.

*Modelos autorregresivos estacionales.*

Estos modelos se aplican si el valor actual de la serie  $Y_t$ , puede expresarse como una función lineal del valor de la serie  $s$  periodos atrás,  $2s$  periodos atrás etc, donde  $s$  representa el orden de la variación estacional y además un error aleatorio.

Por ejemplo: el modelo autorregresivo estacional de orden 1, será: SAR(1) o AR(1)<sub>s</sub> :

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-s} + e_t$$

Si un periodo se completa cada 12 meses, entonces

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-12} + e_t$$

El modelo SAR(2) o AR(2)<sub>s</sub> será:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-12} + \Phi_2 Y_{t-24} + e_t$$

En general, para un modelo SAR(p) o AR(p)<sub>s</sub> será:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-s} + \Phi_2 Y_{t-2s} + \dots + \Phi_p Y_{t-ps} + e_t$$

o

$$\Phi B^s (Y_t) = e_t \Rightarrow e_t = Y_t - \Phi_1 Y_{t-s} - \Phi_2 Y_{t-2s} - \dots - \Phi_p Y_{t-ps}$$

∴

$$\Phi B^s (Y_t) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_p B^{ps}$$

Además, si hubo diferencias estacionales:

$$Y_t = \Delta_s^d \Delta^d w_t$$

La función de autocorrelación del modelo estacional autorregresivo es similar en características generales a uno ordinario autorregresivo excepto que los valores de las autocorrelaciones aparecen en múltiplos de "s". Por ejemplo:

Gráficamente tendremos:

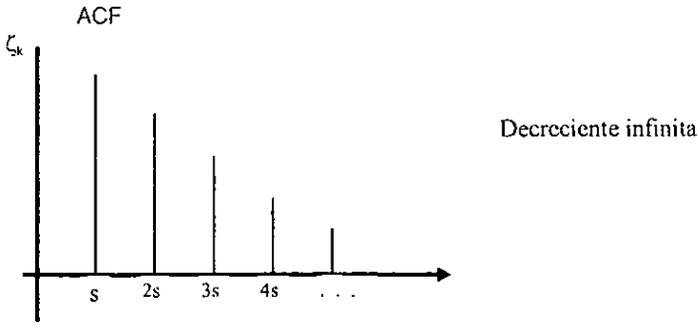


Figura 6.6

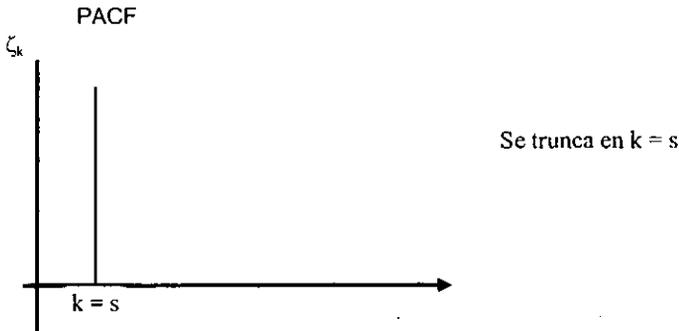


Figura 6.7

Modelos de medias móviles estacionales.

Se usan si el valor actual de  $Y_t$  representa una función lineal del error actual  $e_t$ , del error s periodos atrás  $e_{t-s}$ , el de 2s periodos atrás  $e_{t-2s}$ , etc.

La forma general de un modelo SMA(Q) o MA(Q)<sub>s</sub> es:

$$Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-s} - \dots - \theta_q e_{t-qs}$$

Por ejemplo un modelo SMA(1) sería:

$$Y_t = e_t - \Theta_1 e_{t-s}$$

$$Y_t = (1 - \Theta_1 B^s) e_t$$

La función de autocorrelación es semejante a la de medias móviles, excepto que los valores de las autocorrelaciones aparecen en los intervalos múltiplos de "s". Por ejemplo para un SMA(1) la ACF y PACF quedan:

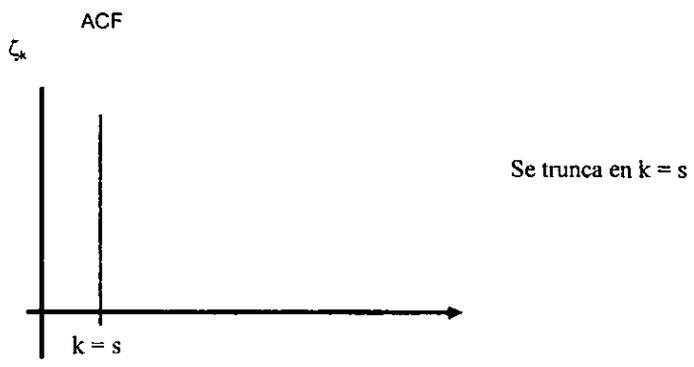


Figura 6.8

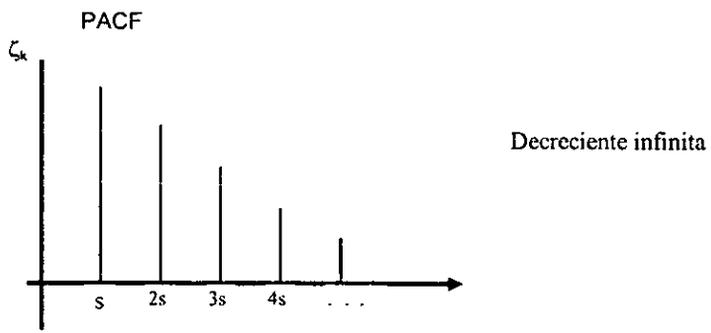


Figura 6.9

**Modelos mezclados estacionales.**

Se identifica con SARIMA(P,D,Q) o ARIMA(P,D,Q)s y la serie de tiempo es:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-s} + \Phi_2 Y_{t-2s} + \dots + \Phi_P Y_{t-Ps} + e_t - \Theta_1 e_{t-s} - \Theta_2 e_{t-2s} - \dots - \Theta_Q e_{t-Qs}$$

Si el modelo tiene media constante y varianza constante, entonces su función de autocorrelación (ACF) será:

$$\zeta_k = \gamma_k / \gamma_0$$

*Modelos multiplicativos estacionales*

Finalmente pueden combinarse los modelos en una clase general, que para la mayoría de la series de tiempo proporciona un buen ajuste y pronósticos adecuados. Esta clase general se llama modelos ARIMA multiplicativos y se expresa como:

$$\phi(B)\Phi(B)^s W_t = \theta(B)\Theta(B)^s e_t$$

es decir

$$\text{ARIMA}(p,d,q) \times (P,D,Q)$$

Para identificar un modelo de este tipo es necesario y recomendable realizar un proceso de identificación por etapas, modelando la parte más notable y analizando el comportamiento de los residuales

## 6.3 ANÁLISIS DE LA ASISTENCIA AL PARQUE “LA FERIA DE CHAPULTEPEC”(SERIE DE TIEMPO) CON LA INTRODUCCIÓN DE UN NUEVO PAQUETE.

### 6.3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

El tiempo juega un papel muy importante en los cambios, esto es, hace 10 años tanto el software como el hardware no se comparan con lo que hoy existe de ambos, los boletos de acceso al metro también han cambiado, el surgimiento de las planillas de acceso al metro, los modelos de autos, etc. Estos cambios también traen consigo la extinción o permanencia de las cosas. Unos ejemplos de extinción serían, el bono de acceso al metro, la construcción de algunos autos como el Dart k entre otros. Por otro lado la permanencia del Volkswagen, entre otras cosas.

Las cosas siempre cambian con el tiempo y por que no decir que los paquetes que existen en “La Feria de Chapultepec” (Paquete Ecolín y Pase Mágico) lo requieren, Este cambio que se propone sería la introducción de un nuevo paquete llamado “Tour” (analizado en el capítulo 3). Cabe mencionar que la administración tomará la decisión de incluir el nuevo paquete, dejando los ya existentes o quitando algún paquete de los mismos.

En este punto se analizará las entradas al parque “La Feria de Chapultepec” por medio del Paquete Ecolín y Pase Mágico. Se realizarán dos series de tiempo para enfrentarlas contra la simulación del “Tour”. Cada serie de tiempo representará la entrada por cada paquete a la Feria de Chapultepec, para esto se tomará en cuenta las entradas desde las 11:00 hrs hasta las 14:00 hrs, ya que éste es el intervalo de las horas de mayor demanda.

### 6.3.2 CONSTRUCCIÓN DEL MODELO (SERIES DE TIEMPO)

Primero analizaremos las entradas al parque a través del Paquete Ecolín.

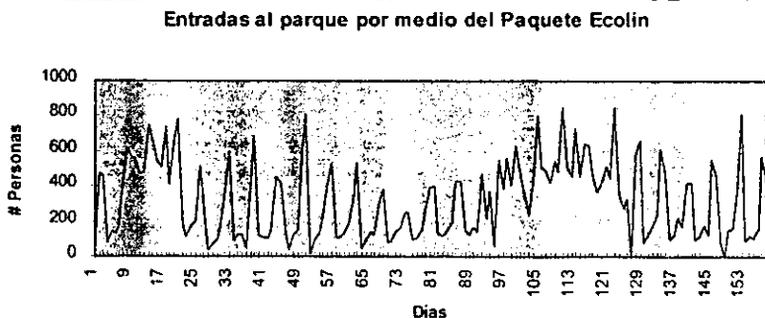


Figura 6.10

Como se puede observar la gráfica presenta:

- ☺ Varianza constante
- ☺ Media constante
- ☺ No contiene Fluctuación estacional a simple vista (Semanal)
- ☺ Tendencia no tiene

Analizando las siguientes gráficas se puede observar con claridad el fenómeno de variación estacional que presenta esta serie de tiempo, además del periodo de la misma.

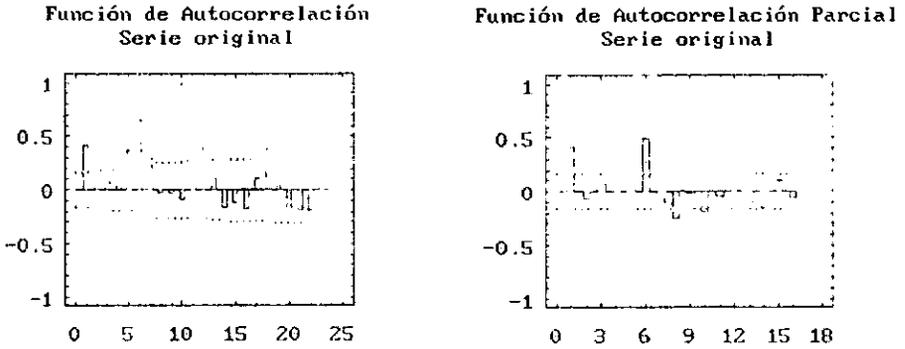


Figura 6.11

El periodo que muestra la estacionalidad es de 6. Por lo anterior se aplicará una diferencia estacional.

Modelo ARIMA(0,0,0) X SARIMA(0,1,0)<sub>6</sub>

### 1. Diferencia Estacional

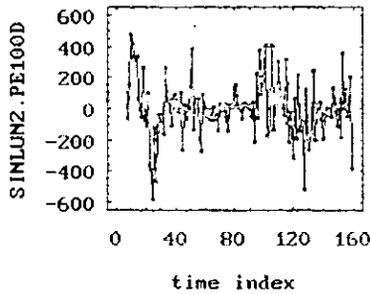


Figura 6.12

Observando la gráfica anterior cumple con lo mencionado anteriormente.

Primero propondremos un modelo tentativo para estimar la parte estacional  
ARIMA(0,0,0) X SARIMA(2,1,0)<sub>6</sub>.

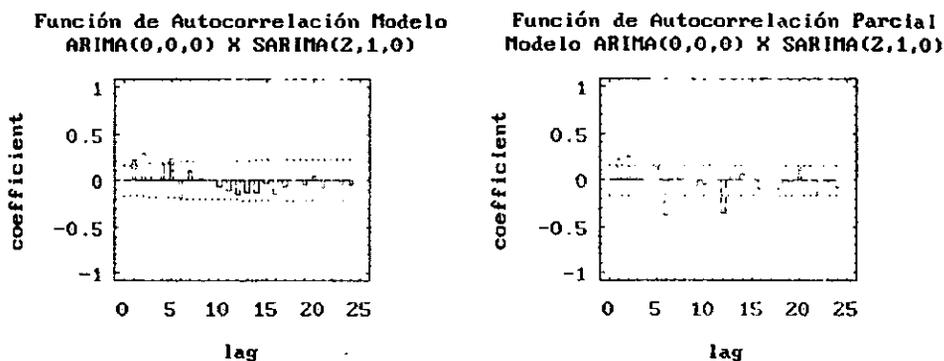


Figura 6.13

En las gráficas anteriores se observa que la estacionalidad desapareció, ahora estimaremos la parte ordinaria.

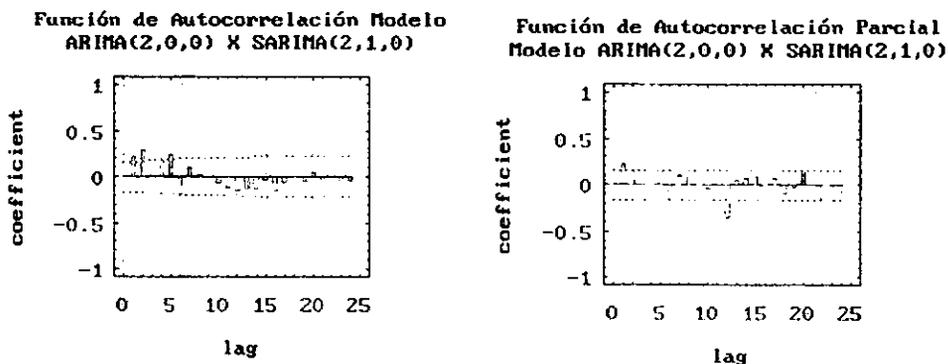


Figura 6.14

Se aplicó el modelo ARIMA(2,0,0) X SARIMA(2,1,0) ya que fue el que arrojó mejores resultados que otros.

Para demostrar que el modelo es el adecuado, en las siguientes gráficas se mostrarán la ACF Y PACF de los residuales.

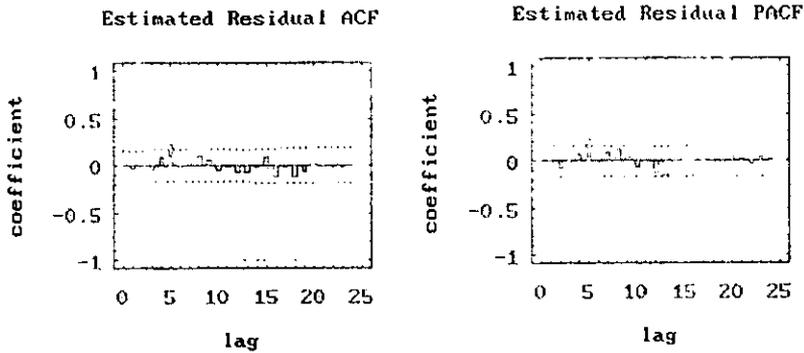


Figura 6.15

En las gráficas anteriores se puede visualizar que tanto en la ACF como la PACF los residuales caen dentro de intervalo de aceptación, lo cual indica que el modelo estimado es el adecuado.

Otra forma de demostrar que el modelo es el adecuado, es analizando el periodograma de los residuales, que como se sabe debe seguir la forma de una distribución normal.

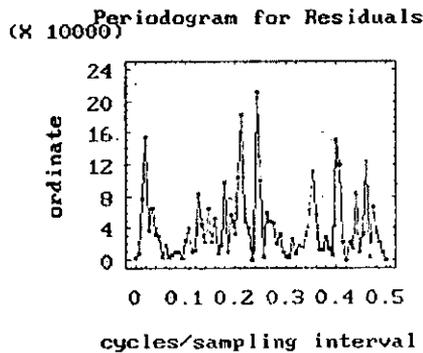


Figura 6.16

De lo anterior se puede concluir que los errores siguen una distribución normal con varianza constante.

La siguiente gráfica muestra el periodograma integral de residuales, que es otra forma de comprobar que el modelo es el adecuado.

Integrated periodogram for Residuals

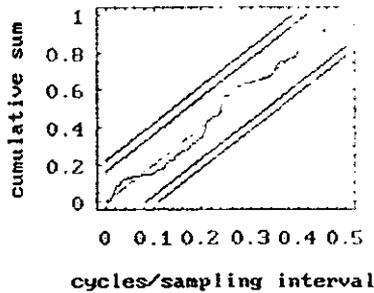


Figura 6.17

Analizando la gráfica anterior se observa que la línea cae dentro de los límites permitidos, por lo cual, el modelo seleccionado es el adecuado.

A continuación se muestra la estimación del modelo ARIMA(2,0,0) X SARIMA(2,1,0)

Parameter	Estimate	Std.error	T-value	P-value
AR ( 1)	.31974	.07918	4.03811	.00009
AR ( 2)	.35670	.07842	4.54861	.00001
SAR( 6)	-.58580	.08298	-7.05941	.00000
SAR( 12)	-.32347	.08365	-3.86675	.00016
MEAN	-3.69054	18.90206	-.19525	.84547
CONSTANT	-2.27986			

Model fitted to seasonal differences of order 1 with seasonal length = 6  
 Estimated white noise variance = 21501.5 with 148 degrees of freedom.  
 Estimated white noise standard deviation (std err) = 146.634  
 Chi-square test statistic on first 20 residual autocorrelations = 21.1202  
 with probability of a larger value given white noise = 0.133033  
 Backforecasting: no                      Number of iterations performed: 4

Figura 6.18

La siguiente gráfica muestra el pronóstico:

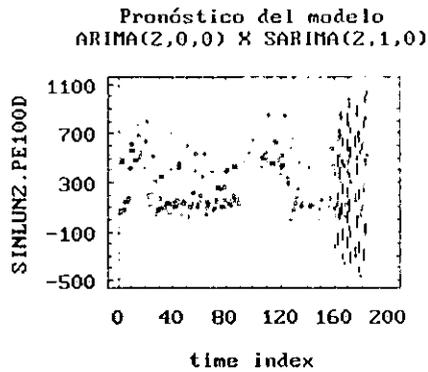


Figura 6.19

El pronóstico (número de personas que entran al parque a través del Paquete Ecolin) que resulta del análisis es el siguiente:

Días	Pronostico
Martes	86
Miércoles	25
Jueves	122
Viernes	119
Sábado	494
Domingo	522

Tabla 6.20

### ANÁLISIS DE ENTRADAS AL PARQUE A TRAVÉS DEL PASE MÁGICO

Gráfica de la serie de tiempo original (Pase Mágico)

Entradas al parque por medio del Pase Mágico

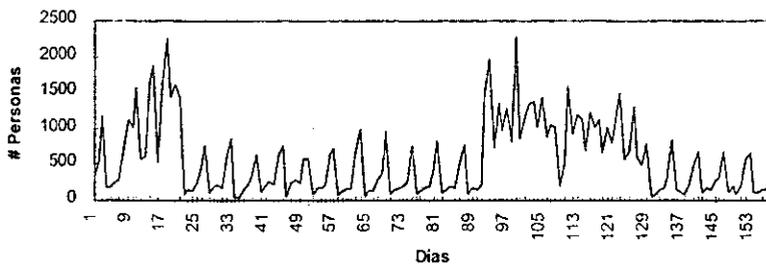


Figura 6.21

Se observa que la gráfica contiene:

- ☺ Varianza constante.
- ☺ Media constante.
- ☺ No contiene Fluctuación estacional a simple vista (Semanal).
- ☺ No tiene Tendencia.

Analizando las siguientes gráficas se puede observar con claridad el fenómeno de variación estacional que presenta esta serie de tiempo, además del periodo de la misma.

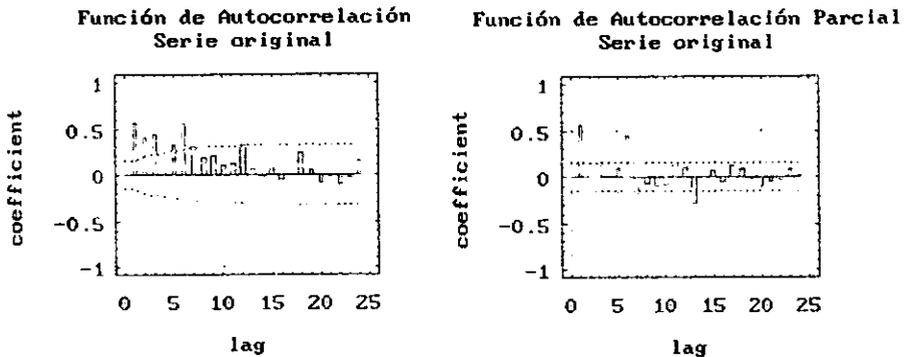


Figura 6.22

Si observamos de nuevo la serie original, nos podremos dar cuenta efectivamente que la serie no tiene estacionalidad.

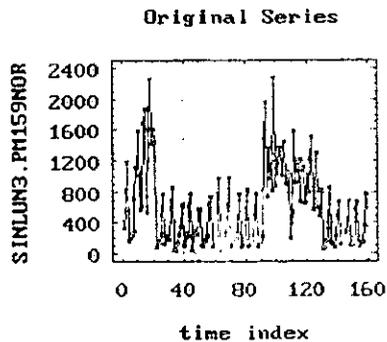


Figura 6.23

Observando la gráfica anterior cumple con lo mencionado anteriormente.

Primero propondremos un modelo tentativo para estimar la parte estacional  $ARIMA(0,0,0)$  X  $SARIMA(1,0,0)$ .

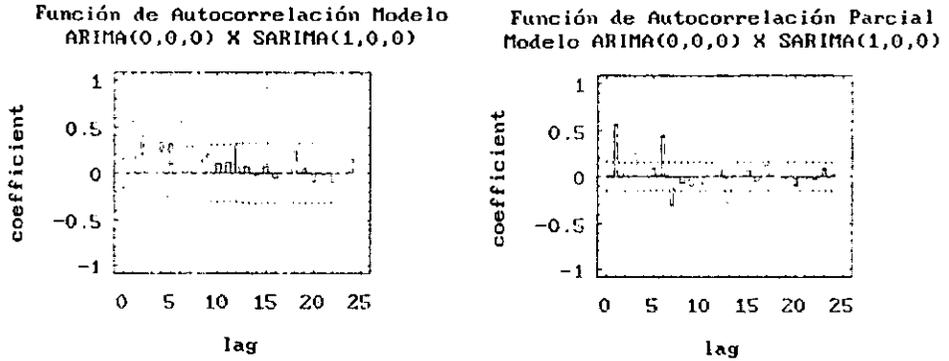


Figura 6.24

En las gráficas anteriores se observa que con el modelo propuesto, la serie de tiempo no contiene estacionalidad.

Ahora estimaremos la parte ordinaria. Se propone el modelo  $(ARIMA(1,0,0)$  X  $SARIMA(1,0,0)$ ).

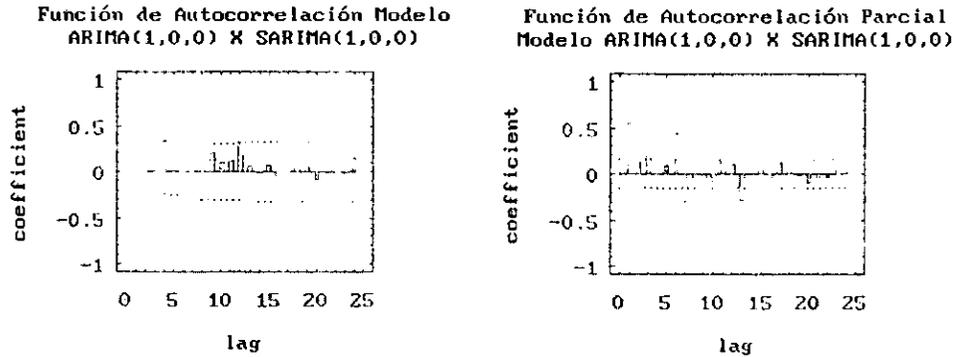


Figura 6.25

Como se puede observar en las gráficas anteriores, el modelo propuesto es el adecuado ya que la ACF no tiene estacionalidad, además este modelo fue el que arrojó mejores resultados que otros.

En las siguientes gráficas se mostrarán la ACF Y PACF de los residuales

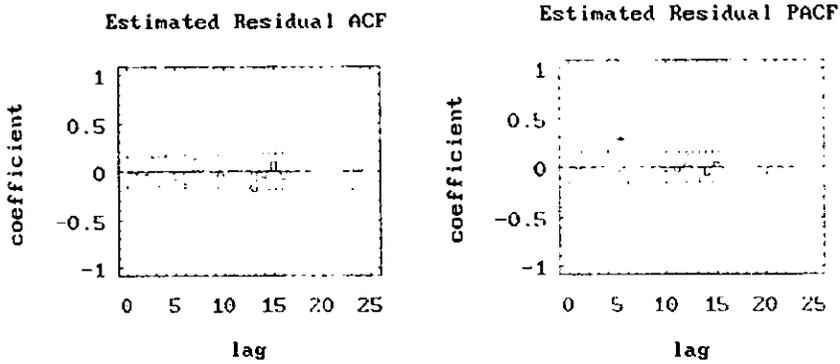


Figura 6.26

En las gráficas anteriores se puede visualizar que tanto en la ACF como la PACF de los residuales caen dentro de intervalo de aceptación, lo cual indica que el modelo estimado es el adecuado.

Otra forma de demostrar que el modelo es el adecuado, es analizando el periodograma de los residuales, que como se sabe debe seguir la forma de una distribución normal.

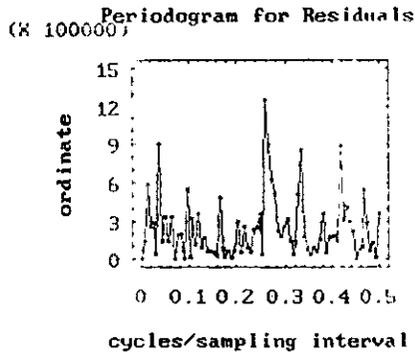


Figura 6.27

De lo anterior se puede concluir que los errores siguen una distribución normal con varianza constante

La siguiente gráfica muestra el periodograma integral de residuales, que es otra forma de comprobar que el modelo es el adecuado.

Integrated periodogram for Residuals

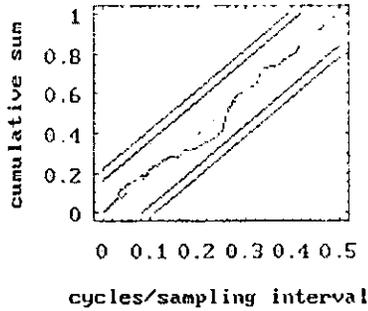


Figura 6.28

Analizando la gráfica anterior se observa que la línea cae dentro de los límites permitidos, por lo cual, el modelo seleccionado es el adecuado.

A continuación se muestra la estimación del modelo ARIMA(1,0,0) X SARIMA(1,0,0)

Parameter	Estimate	Std.error	T-value	P-value
AR ( 1)	.54801	.06704	8.17385	.00000
SAR( 6)	.57047	.06664	8.56065	.00000
MEAN	534.26835	124.98188	4.27477	.00003
CONSTANT	103.72433			

Estimated white noise variance = 122586 with 156 degrees of freedom.  
 Estimated white noise standard deviation (std err) = 350.123  
 Chi-square test statistic on first 20 residual autocorrelations = 36.4104  
 with probability of a larger value given white noise = 4.04152E-3  
 Backforecasting: no                      Number of iterations performed: 4

Figura 6.29

La siguiente gráfica muestra el pronóstico:

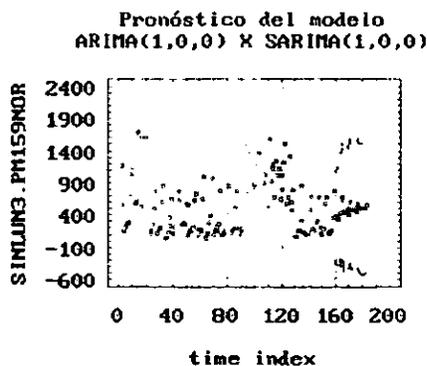


Figura 6.30

El pronóstico (número de personas que entran al parque a través del Pase Mágico) que resulta del análisis es el siguiente:

Días	Pronostico
<b>Martes</b>	385
<b>Miércoles</b>	348
<b>jueves</b>	342
<b>Viernes</b>	332
<b>Sábado</b>	443
<b>Domingo</b>	667

Tabla 6.31

### 6.3.3 Análisis de resultados

En la siguiente se muestran los pronósticos, tanto para el Pase Mágico como para el Paquete Ecolín:

Días	Pronostico P. Mágico	Pronostico P. Ecolín	Total
<b>Martes</b>	385	86	471
<b>Miércoles</b>	348	25	373
<b>Jueves</b>	342	122	464
<b>Viernes</b>	332	119	451
<b>Sábado</b>	443	494	937
<b>Domingo</b>	667	522	1189
<b>Total</b>	2,517	1,368	3,885

Tabla 6.32

De los dos pronósticos anteriores (tanto del Pase Mágico como del Paquete Ecolin) se calcula el precio de entrada (Paquete Ecolin cuesta \$75, Pase Mágico cuesta \$15 individual), se muestra en la siguiente tabla:

Días	Pase Mágico	Paquete Ecolin	Total
Martes	\$ 5,775	\$ 6,450	\$ 12,225
Miércoles	\$ 5,220	\$ 1,875	\$ 7,095
Jueves	\$ 5,130	\$ 9,150	\$ 14,280
Viernes	\$ 4,980	\$ 8,925	\$ 13,905
Sábado	\$ 6,645	\$ 37,050	\$ 43,695
Domingo	\$ 10,005	\$ 39,150	\$ 49,155
Total	\$ 37,755	\$ 102,600	\$ 140,355

Tabla 6.33

De acuerdo a los pronósticos, la entrada para la siguiente semana al parque a través del Paquete Ecolin es de 1368 visitantes, mientras que por Pase Mágico son 2517 visitantes. En total son 3885 visitantes al parque generando una ganancia de \$140,355.

#### 6.3.4 Recolección de los datos para la simulación del nuevo paquete.

Se realizaron encuestas las cuales consistían en solo una pregunta. El formato fue el siguiente :

¿ Estaría de acuerdo en pagar \$33.00 por visitar los siguientes juegos:

- Tornado
- Sombrillas
- Cascabel
- Aladino
- Cascadas
- Palacio de cristal
- Carrusel doble
- Montaña Rusa
- Dragón

Figura 6.34

Cabe mencionar que también se les explicó que podrían subirse posteriormente a cualquier juego que contempla el Pase Mágico a excepción de los contemplados por el Tour, ya que a estos tendrían acceso si pagaban su boleto.

Las encuestas se realizaron en cada taquilla durante una semana, de las 10:55 AM a las 14:00 PM. Aquellas personas que aceptaban el Tour se les indicaba que la entrada la realizaran por el torniquete número 1. De lo anterior se observó que las llegadas seguían una distribución exponencial con un tiempo promedio entre llegadas de 90 segundos.

### 6.3.5 Simulación de un nuevo paquete.

A continuación se presenta el programa (realizado en GPSS) con el cual se generó la simulación.

**\*PROGRAMA QUE SIMULA LAS ENTRADAS AL PARQUE DE DIVERSIONES**

**\*LA FERIA DE CHAPULTEPEC DE 11:00 A 14:00 HORAS.**

**SIMULATE**

**\*SE MANEJA UN TORNIQUETE**

**\*SEGMENTO 1**

**\***

**\*CREACION Y DESTRUCCION DE CLIENTES**

**\*COLA1 ES LA FILA PARA ENTRAR AL PARQUE**

**\*TOR1 ES LA PERSONA QUE ATIENDE EL TORNIQUETE**

```

        GENERATE  ,,6
        TRANSFER  ,PRIM
        GENERATE  RVEXPO(6,1.30)
PRIM    QUEUE    COLA1
        SEIZE     TOR1
        DEPART    COLA1
        ADVANCE   .15,.05
        RELEASE   TOR1
        TERMINATE
        TRANSFER  ,TIEM1
*
*  SEGMENTO 2
*  COMANDOS DE CONTROL
*
TIEM1  GENERATE  180  ;SE CORRE PARA 3 HORAS
        TERMINATE  1
        START      1
        END
```

El programa anterior contiene un GENERATE con en el número 6 en el campo D, el cual indica que hay 6 personas esperando antes de las 11:00 a.m.. El número 6 surgió de sacar el promedio de espera de toda la semana.

La siguiente Tabla muestra las llegadas simuladas de una semana a la "Feria de Chapultepec". (ver anexo 1)

Días	Número de personas	Ingresos
Martes	320	\$ 10,560
Miércoles	356	\$ 11,748
Jueves	363	\$ 11,979
Viernes	365	\$ 12,045
Sábado	370	\$ 12,210
Domingo	386	\$ 12,738
<b>Total</b>	<b>2160</b>	<b>\$ 71,280</b>

Tabla 6.35

El total de personas que asistieron a la "Feria de Chapultepec" (por medio de la simulación), son 2160, si las multiplicamos por \$33 que es lo que cuesta el Tour, la empresa genera utilidades de \$71,280 de las 11:00 a.m. a 14:00 p.m.

### 6.3.6 Conclusiones

Comparación de la asistencia al parque (serie de tiempo), y la simulación del nuevo paquete.

Las ganancias que arrojó el Paquete Ecolín son de \$ 102,600 pesos, con 1368 personas que entraron al parque, mientras que las ganancias a través del Pase Mágico son de \$37,755 pesos, con 2517 personas que entraron al parque.

Las ganancias que arroja el nuevo paquete " Tour " son de \$71,280 pesos, con 2160 personas que entran a la "Feria de Chapultepec".

Comparando las utilidades obtenidas por el Nuevo Paquete contra las de los paquetes existentes, podríamos tener evidencia de que este nuevo paquete puede funcionar.

El análisis se entregó a la empresa para que decidiera si acepta el nuevo paquete, con las opciones de cambiar alguno de los ya existentes o que los tres trabajaran.

## ANEXOS ( 1 )

**Resultados arrojados por el programa realizado en GPSS.**

### Simulación del día Martes

FACILITY	TOTAL TIME	AVAIL TIME	UNAVL TIME	ENTRIES	AVERAGE TIME/XACT	CURRENT STATUS	PERCENT AVAIL	
TAR1	0.268			320	0.151	AVAIL		
QUEUE CURRENT	MAXIMUM CONTENTS	AVERAGE CONTENTS	TOTAL ENTRIES	ZERO ENTRIES	PERCENT ZEROS	AVERAGE TIME/UNIT	SAVERAGE TIME/UNIT	QTABLE NUMBER
CONTENTS COLAI	5	0.061	320	241	75.3	0.034	0.140	
0								

El tiempo promedio del servidor fue de 0.151 unidades de tiempo, entraron en la cola un total de 320 personas, el promedio de la cola fue de 0.061 unidades de tiempo, hubo 241 personas que no necesitaron esperar para ser atendidos, las personas que tuvieron que esperar fue en promedio 0.140 unidades de tiempo, el porcentaje de las personas que no tuvieron que esperar fue de 75.3%.

### Simulación del día Miercoles

FACILITY	TOTAL TIME	AVAIL TIME	UNAVL TIME	ENTRIES	AVERAGE TIME/XACT	CURRENT STATUS	PERCENT AVAIL	
TAR1	0.297			356	0.150	AVAIL	357	
QUEUE CURRENT	MAXIMUM CONTENTS	AVERAGE CONTENTS	TOTAL ENTRIES	ZERO ENTRIES	PERCENT ZEROS	AVERAGE TIME/UNIT	SAVERAGE TIME/UNIT	QTABLE NUMBER
CONTENTS COLAI	6	0.075	356	251	70.5	0.038	0.128	
0								

El tiempo promedio del servidor fue de 0.150 unidades de tiempo, entraron en la cola un total de 356 personas, el promedio de la cola fue de 0.075 unidades de tiempo, hubo 251 personas que no necesitaron esperar para ser atendidos, las personas que tuvieron que esperar fue en promedio 0.128 unidades de tiempo, el porcentaje de las personas que no tuvieron que esperar fue de 70.5%.

### Simulación del día Jueves

FACILITY	TOTAL TIME	AVAIL TIME	UNAVL TIME	ENTRIES	AVERAGE TIME/XACT	CURRENT STATUS	PERCENT AVAIL		
TARI	0.303			363	0.150	AVAIL	364		
QUEUE CURRENT	MAXIMUM CONTENTS	AVERAGE CONTENTS	TOTAL ENTRIES	ZERO ENTRIES	PERCENT ZEROS	AVERAGE TIME/UNIT	SAVERAGE TIME/UNIT	QTABLE NUMBER	
COLAI	5	0.079	364	241	66.2	0.039	0.115		

El tiempo promedio del servidor fue de 0.150 unidades de tiempo, entraron en la cola un total de 364 personas, el promedio de la cola fue de 0.079 unidades de tiempo, hubo 241 personas que no necesitaron esperar para ser atendidos, las personas que tuvieron que esperar fue en promedio 0.115 unidades de tiempo, el porcentaje de las personas que no tuvieron que esperar fue de 66.2%.

### Simulación del día Viernes

FACILITY	TOTAL TIME	AVAIL TIME	UNAVL TIME	ENTRIES	AVERAGE TIME/XACT	CURRENT STATUS	PERCENT AVAIL		
TARI	0.304			365	0.150	AVAIL			
QUEUE CURRENT	MAXIMUM CONTENTS	AVERAGE CONTENTS	TOTAL ENTRIES	ZERO ENTRIES	PERCENT ZEROS	AVERAGE TIME/UNIT	SAVERAGE TIME/UNIT	QTABLE NUMBER	
COLAI	5	0.082	365	246	67.4	0.041	0.125		

El tiempo promedio del servidor fue de 0.150 unidades de tiempo, entraron en la cola un total de 365 personas, el promedio de la cola fue de 0.082 unidades de tiempo, hubo 246 personas que no necesitaron esperar para ser atendidos, las personas que tuvieron que esperar fue en promedio 0.125 unidades de tiempo, el porcentaje de las personas que no tuvieron que esperar fue de 67.4%.

### Simulación del día Sabado

FACILITY	TOTAL TIME	AVAIL TIME	UNAVL TIME	ENTRIES	AVERAGE TIME/XACT	CURRENT STATUS	PERCENT AVAIL		
TARI	0.309			370	0.150	AVAIL			
QUEUE CURRENT	MAXIMUM CONTENTS	AVERAGE CONTENTS	TOTAL ENTRIES	ZERO ENTRIES	PERCENT ZEROS	AVERAGE TIME/UNIT	SAVERAGE TIME UNIT	QTABLE NUMBER	
COLAI	6	0.093	370	241	65.1		0.045	0.130	
0									

El tiempo promedio del servidor fue de 0.150 unidades de tiempo, entraron en la cola un total de 370 personas, el promedio de la cola fue de 0.093 unidades de tiempo, hubo 241 personas que no necesitaron esperar para ser atendidos, las personas que tuvieron que esperar fue en promedio 0.130 unidades de tiempo, el porcentaje de las personas que no tuvieron que esperar fue de 65.1%.

### Simulación del día Domingo

FACILITY	TOTAL TIME	AVAIL TIME	UNAVL TIME	ENTRIES	AVERAGE TIME/XACT	CURRENT STATUS	PERCENT AVAIL		
TARI	0.322			386	0.150	AVAIL	387		
QUEUE CURRENT	MAXIMUM CONTENTS	AVERAGE CONTENTS	TOTAL ENTRIES	ZERO ENTRIES	PERCENT ZEROS	AVERAGE TIME/UNIT	SAVERAGE TIME UNIT	QTABLE NUMBER	
COLAI	5	0.090	386	256	66.3		0.042	0.125	
0									

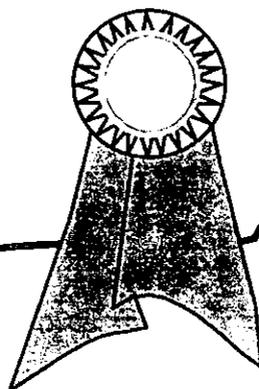
El tiempo promedio del servidor fue de 0.150 unidades de tiempo, entraron en la cola un total de 386 personas, el promedio de la cola fue de 0.090 unidades de tiempo, hubo 256 personas que no necesitaron esperar para ser atendidos, las personas que tuvieron que esperar fue en promedio 0.125 unidades de tiempo, el porcentaje de las personas que no tuvieron que esperar fue de 66.3%.

# CONCLUSIONES

Esto son los miembros que controla el Rey David, a los miembros. Señales de los cantones en

Orquesta del gran desfilado, más que ya amonesta, ya los papillos. Contar, lo hará ya se mere

Que brida esta la muestra a un que venga a volarlos, también todos son Quebr y pajarit a febrero.



# CONCLUSIONES

Podemos concluir que el presente trabajo puede ser de gran utilidad tanto para la empresa como para las personas interesadas en este tipo de literatura. Creemos que aún existe mucho campo por explotar en ese tipo de organizaciones.

Una consecuencia importante de este trabajo fue el entender la importancia de aprender a trabajar en equipo, no sólo los autores del presente, sino también colaborando con personal de la empresa.

Además aprendimos a trabajar en campo: orden de actividades, búsqueda y obtención de información, metodología para la misma, ordenación de datos, etc.

En cierto sentido esta investigación estableció en nuestras vidas de egresados las bases para comenzar a entender la palabra "profesionalismo", ya que lo que se pretendió fue presentar una obra seria, profunda y práctica, y esto sólo se logra tomando muy en serio los roles que representamos en el desarrollo de la misma.

Uno de los sentimientos que representa este trabajo es el de demostrar el amplio campo de aplicación que posee la pre-especialidad de Simulación y Análisis de decisiones, y que como se mencionó anteriormente, existen cientos de situaciones que se pueden atacar con este perfil dentro de las organizaciones.

Consideramos, por otra parte, que uno de los propósitos esenciales del presente trabajo es el proponer sugerencias y/o soluciones a la empresa para que esta ofrezca un mejor servicio, para beneficio tanto de la misma como de clientes.

Una de las propuestas principales planteadas por el Modelo para Diseño de Tours es que la mayoría de los asistentes a la Feria de Chapultepec adquieran el nuevo paquete, obviamente con mercadotecnia de la propia empresa, para así lograr una mejor distribución de la gente en todo el parque y de esta manera atacar directamente el problema de la acumulación en áreas y juegos específicos. De acuerdo a las pruebas que llevamos a cabo, podemos concluir que el objetivo que perseguíamos se logró alcanzar.

De la aplicación de la Teoría de Juegos, lo más interesante es hacer una comparación con el desarrollo hecho en el capítulo anterior. Es decir, podemos ver esta aplicación como una forma alternativa para diseñar tours. Lo más destacado en esta propuesta es la forma dinámica que toma la aplicación.

En cuanto al desarrollo de Políticas Óptimas, gracias a los resultados obtenidos por esta aplicación, podemos recomendar a la empresa que sí se incluyan los 9 juegos que se mencionan en el Tour desarrollado en el capítulo 3.

Gracias a las simulaciones que se llevaron a cabo y a los análisis de las mismas, podemos estimar que las ganancias que arroja el nuevo paquete (Tour) recomiendan llevar a cabo el ofrecimiento del mismo. De nuevo, hacemos el llamado de que con el nuevo paquete lograremos una mejor distribución de la gente dentro del parque.

## BIBLIOGRAFIA

- ➔ FORT, J.C. Solving a Combinatorial Problem  
Via Self-Organizing Process  
1998
- ➔ GONZALEZ VIDEGARAY Modelos y Simulación  
UNAM  
México, 1996  
Varios capítulos
- ➔ GONZALEZ VIDEGARAY Modelos de Decisión con Procesos  
Estocásticos II  
UNAM  
México, 1990  
Varios capítulos
- ➔ HILLIER, FREDERICK S. Introducción a la Investigación de  
Operaciones  
Ed. McGraw Hill  
México, 1993  
Varios capítulos
- ➔ LINDO Optimization Modeling Language  
Sistema LINDO  
Chicago, 1992
- ➔ LOPEZ DE MEDRANO, Modelos Matemáticos  
SANTIAGO Ed. Trillas  
México, 1991  
Varios capítulos
- ➔ PRAWDA, JUAN Métodos y Modelos de Investigación de  
Operaciones  
Ed. Trillas  
México, 1991  
Varios capítulos

- 1.300 ➔ ROSS, KENNETH A, Y  
WRIGHT, CHARLES      Matemáticas Discretas  
Ed. Prentice Hall  
México, 1990  
Capítulo 1 y 8
- 11100 ➔ TAHA, HAMDY A.      Investigación de Operaciones  
Ed. Alfaomega  
México, 1994  
Varios capítulos
- 11100 ➔ WAYNE, W DANIEL      Estadística con Aplicaciones  
Ed. McGraw Hill  
México, 1988  
Varios Capítulos
- 11100 ➔ DAVIS, MCKEOWN      Modelos Cuantitativos para Administración  
Ed. Iberoamérica  
México, 1996  
Varios capítulos
- 11100 ➔ GORDON, G.      Simulación de Sistemas  
Ed. Diana  
México, 1980  
Varios capítulos