2cj

# Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

*Distribuciones Series de Potencias*

*Infinitamente Divisibles*

T e s i s

que para obtener el Título de

A c t u a r i a

presenta:

*Mónica López González*

Director de Tesis:

*Dr. Víctor Manuel Pérez-Abreu Carrión*

Diciembre, 1999

México, D.F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

274776

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**
**Tesis Digitales**
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

**MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO**
**Jefa de la División de Estudios Profesionales de la**
**Facultad de Ciencias**
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis
DISTRIBUCIONES NORMALES-SERIES DE POTENCIAS INFINITAMENTE DIVISIBLES

realizado por MONICA LOPEZ GONZALEZ

con número de cuenta 9561448-9 , pasante de la carrera de ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario DR. VICTOR MANUEL PEREZ-ABREU CARRION

Propietario M. en C. BEATRIZ RODRIGUEZ FERNANDEZ

Propietario DRA. MARIA ASUNCION BEGOÑA FERNANDEZ FERNANDEZ

Suplente DR. JAVIER PAEZ CARDENAS

Suplente M. en C. FIDEL CASARRUBIAS SEGURA

**Consejo Departamental de** MATEMATICAS
M. en A.P. MARIA DEL PILAR ALONSO REYES

*Para mis Padres*

*Para mi Abuela*

*Para mis Maestros*

*Para mis Amigos*

# Índice General

# Introducción

Este trabajo tiene como objetivo estudiar las variables aleatorias Normales-Series de *Potencias Infinitamente* Divisibles (NSPID), que pueden ser interpretadas como variables aleatorias normales con media cero y varianza $\sigma^2$, con *sigma* a su vez una variable aleatoria con distribución Serie de Potencias Infinitamente Divisible. Este estudio incluira las semejanzas y diferencias de este tipo de *distribuciones con* la distribucion normal, y en general el estudio se realizara mediante la obtencion y estudio de sus funciones caracteristica, de distribucion y generadora de momentos, asi como tambien de sus momentos.

El Primer Capítulo es sobre conceptos preliminares, su objetivo es establecer *notacion y recordar conceptos* basicos de probabilidad, en este capitulo tambien se hablará de la distribución normal, ya que esta distribucion es la base, junto con las distribuciones infinitamnete divisibles, del presente trabajo. En el Segundo Capítulo se presentan distribuciones sobre los enteros, en *particular distribuciones* Series de Potencias Infinitamente Divisibles y se mostrarán algunos ejemplos, esto con la intencion de tener todas las herramientas necesarias para el desarrollo del objetivo principal de este trabajo. Finalmente relacionaremos todos estos resultados en el Tercer Capítulo, para estudiar esta mezcla de distribuciones normales y *distribuciones* Series de Potencias Infinitamente Divisibles y hacer una comparación de algunos ejemplos de NSPID, con la distribución normal.

# Capítulo 1

# Preliminares

Iniciamos este Capítulo con algunos conceptos preliminares de probabilidad, después se recuerdan aspectos de la distribución normal, dentro de los cuales se encuentran funciones de distribución y densidad, funciones generadora de momentos y característica, así como sus momentos.

Estas herramientas de trabajo se desarrollan con el propósito de utilizarlas en la mezcla de distribuciones normal con Series de Potencias Infinitamente Divisibles, las cuales se tratarán en el Capítulo 3.

## 1.1 Funciones generadora de momentos y característica

La función característica es una de las herramientas principales en la teoria analítica de probabilidad. En esta sección se definirán función característica y función generadora de momentos y se presentarán sus principales propiedades. Primero se haran algunas observaciones generales.

Aunque las variables aleatorias (v.a.) toman valores reales, la teoria de funciones caracteristicas requiere variables aleatorias que tomen valores complejos. Muchas definiciones y propiedades que envuelven variables aleatorias pueden ser extendidas al caso complejo. Por ejemplo, la esperanza de una variable aleatoria compleja $X + iY$ que existe si las esperanza $E[X]$ y $E[Y]$ existen, y en este caso se define $E[X + iY] = E[X] + iE[Y]$

**Definición 1** *La esperanza de la variable aleatoria $e^{itX}$ es la llamada "función característica" de la variable aleatoria $X$. ($t$ es un parametro real. ). Si $F_X(x)$ es* *la función de distribución de la variable $X$, entonces su función característica es:*

$$\varphi_X(t) = \int e^{itx} dF_X(x) \tag{(a)}$$

Del hecho de que $|e^{itx}| = 1$ para todos los valores reales de t, se sigue que la integral (??) existe para todas las funciones de distribución, asi, se puede definir una función caracteristica para cada una de las variables aleatorias.

La función característica tiene dos grandes ventajas sobre la generadora de momentos. Primero $\varphi_X(t)$ es finita para todas las variables aleatorias $X$ y todos los números reales $t$. Segundo, la función de distribución de $X$ y la función de densidad de $X$, si esta existe, se pueden obtener de $\varphi_X(t)$ por medio de una "fórmula de inversión".

**La Formula de Inversion y El Teorema de Unicidad**

Hemos visto que la función caracteristíca de una variable aleatoria $X$ puede obtenerse siempre a partir de su función de distribución; es importente que el teorema reciproco tambien es valido: una función de distribución queda completamente determinada por su función característica. A continuación se muestran algunos resultados que nos relacionan estas dos funciones.

**Teorema 2** *Lema 3 : Sean $\varphi_X(t)$ y $F_X(x)$ la función característica y de distribución de una variable aleatoria $X$ respectivamente. Si $x_1$ y $x_2$ son puntos de continuidad de la función $F_X(x)$, entonces*

$$F_X(x_2) - F_X(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{itx_1} - e^{itx_2}}{it} \varphi_X(t)\, dt.$$

(Demostracion en Gnedenko, Theory of probability pag. 237).

**Teorema 4** *(Teorema de Unicidad) : Una función de distribución esta completamente determinada por su función característica.*

**Dem** Del teorema anterior, se sigue inmediatamente que la fórmula

$$F_X(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y\to-\infty} \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{ity} - e^{itx}}{it} \varphi_X(t)\, dt$$

es aplicable a cada punto de continuidad de $F_X(x)$, donde el limite en $y$ es evaluado en puntos de continuidad de la funcion $F_X(x)$.

**Teorema 5** *: Si la función característica $\varphi_X(t)$ es sumable (Lebesgue integrable) sobre la recta real, entonces la función de distribución $F_X(x)$ correspondiente es continua, su derivada $f_X(x)$ es continua, y*

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \varphi_X(t)\, dt.$$

(Demostracion en Gnedenko, Theory of probability pag. 277).

**Teorema 6** *: Si*

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$

*donde cada término es independiente de la suma de los anteriores, entonces la función característica de la variable $\xi$ es igual al producto de las funciones características de los sumandos.*

Dem :

$$\begin{aligned}
\varphi_\xi(t) &= E\left[e^{it\xi}\right] \\
&= E\left[e^{it(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)}\right] \\
&= E\left[e^{it(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n-1})}e^{it\xi_n}\right] \\
&= E\left[e^{it(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n-1})}\right]E\left[e^{it\xi_n}\right] \\
&\;\;\vdots \\
&= E\left[e^{it\xi_1}\right]E\left[e^{it\xi_2}\right]\ldots E\left[e^{it\xi_n}\right] \\
&= \varphi_{\xi_1}(t)\,\varphi_{\xi_2}(t)\ldots\varphi_{\xi_n}(t).
\end{aligned}$$

**Definición 7** *Sea $X$ una variable aleatoria. Si $k \geq 1$, al número $E\left[X^k\right]$ se le llama el k-ésimo momento de $X$, y a $E\left[(X - E[X])^k\right]$ se le llama el k-ésimo momento central , estos son definidos solo cuando $E[X]$ es finita.*

**Definición 8** *La función generadora de momentos, $M_X(t)$, de una variable aleatoria $X$ ,si esta existe (es decir, si es finita) se define para todos los valores de $t$ como*

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int e^{tx}dF(x).$$

Llamamos a $M_X(t)$ la función generadora de momentos porque todos los momentos de $X$; cuando estos existen, pueden obtenerse a partir de las derivada del orden correspondiente de $M_X(t)$ y evaluando en $t = 0$. La $n$-ésima derivada de $M_X(t)$, si esta existe, está dada por

$$M_X^{(n)}(t) = E\left[X^n e^{tX}\right],\ n \geq 1,$$

esto implica que

$$M_X^{(n)}(0) = E[X^n],\ n \geq 0.$$

Cuando $M_X(t)$ existe en el intervalo $|t| < T$, para algún $T > 0$, entonces $E[X^r]$ es el coeficiente de $t^r/r!$ en el desarrollo de Taylor de $M_X(t)$ :

$$M_X(t) = 1 + \sum_{r \geq 1} \frac{t^r}{r!} E[X^r].$$

La relacion entre $\varphi_X(t)$, la función característica de la variable aleatoria $X$, y

$M_X(t)$, la función generadora de momentos de esta misma variable aleatoria $X$ esta dada por

$$M_X(t) = \varphi_X(-\imath t).$$

Una propiedad importante de la función generadora de momentos es que la función generadora de momentos de una suma de variables aleatorias independientes es igual al producto de sus funciones generadoras de momentos.

## 1.2 La distribución normal

Decimos que $X$ es una variable aleatoria normal, o que tiene una distribución normal, con parametros $\mu$ y $\sigma^2$ si la función de distribución de $X$ está dada por

$$\Phi_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \; -\infty < x < \infty.$$

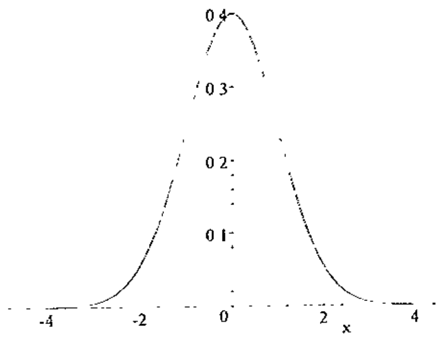
Y lo denotaremos como $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Como esta densidad es absolutamente continua (con respecto a la medida de Lebesgue) existe su función de densidad que es la siguiente

$$\phi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \; -\infty < x < \infty$$

esta función de densidad tiene forma de campana y es simétrica con respecto a $\mu$, como se muestra en la siguiente gráfica de la función de densidad de una distribución $N(0,1)$

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$




Para verificar que $\phi_X(x)$ es una función de densidad, mostraremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1.$$

Haciendo el cambio de variable $y = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$, obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

así,que lo que debemos mostrar es

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}.$$

Para esto, sea $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$, entonces

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(y^2+x^2\right)}{2}} dydx.$$

Ahora evaluaremos esta doble integral haciendo un cambio de variable a coordenadas polares, esto es, haciendo $x = r\cos\theta$, $y = rsen\theta$, y $dydx = rd\theta dr$ se tiene

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} rd\theta dr = 2\pi \int_0^{\infty} re^{-\frac{r^2}{2}} dr \\ &= -2\pi e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{\infty} = 2\pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto $I = \sqrt{2\pi}$.

Enseguida se mostrará que los parámetros $\mu$ y $\sigma^2$ de una variable aleatoria normal representan su media y su varianza. En efecto,

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Escribiendo $x$ como $(x-\mu)+\mu$ tenemos

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

haciendo $y = x - \mu$ en la primera integral se tiene:

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx,$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de la normal Por simetría, la primera integral es cero, así

$$E[X] = \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \mu.$$

Ahora verificaremos que $\sigma^2$ es la varianza de $X$

$$Var[X] = E\left[(X-\mu)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

substituyendo $y = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$ obtenemos

$$Var[X] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} Var[X] &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[ -y e^{\frac{-y^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right] \\ &= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sigma^2. \end{aligned}$$

## 1.3 Normal Estándar

**Distribución de Y=$\alpha$X+$\beta$**

Un hecho importante acerca de estas variables aleatorias es que si $X$ tiene distribución normal con parámetros $\mu$ y $\sigma^2$, entonces $Y = \alpha X + \beta$ tiene distribución normal con parámetros $\beta + \alpha\mu$ y $\alpha^2\sigma^2$. Para probar esto, supongamos que $\alpha > 0$ (la demostración cuando $\alpha < 0$ es similar). Ahora, $\Phi_Y$, la función de distribución de la variable aleatoria $Y$, está dada por

$$\begin{aligned} \Phi_Y(a) &= P\{Y \leq a\} = P\{\alpha X + \beta \leq a\} \\ &= P\left\{X \leq \frac{a-\beta}{\alpha}\right\} = \Phi_X\left(\frac{a-\beta}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

derivando obtenemos la función de densidad de $Y$

$$\phi_Y(a) = \frac{1}{\alpha}\phi_X\left(\frac{a-\beta}{\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha\sigma}\exp\left\{-\frac{(a-\beta-\alpha\mu)^2}{2(\alpha\sigma)^2}\right\}$$

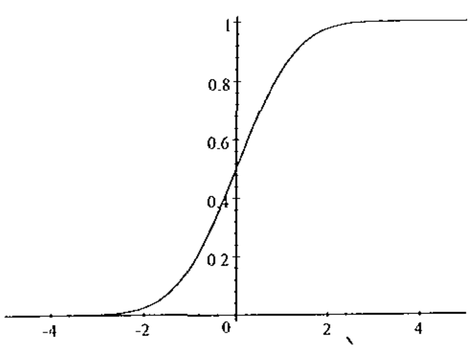
lo que muestra que $Y$ tiene distribución normal con media $\beta + \alpha\mu$ y varianza $\alpha^2\sigma^2$

Normal Estándar

Una aplicación importante del resultado anterior es que si $X$ tiene distribución normal con parámetros $\mu$ y $\sigma^2$, entonces $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ tiene distribución normal con parámetros 0 y 1. A este tipo de variables aleatorias se les llama Normal Estándar. Se acostumbra denotar la función de distribución de las variables aleatorias Normal Estándar simplemente por $\Phi(x)$. Esto es,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

teniendo la siguiente gráfica




$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt$

Valores de la función para $x \geq 0$ se obtienen de tablas y para $x \leq 0$ se tiene la siguiente relación:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \ -\infty < x < \infty, \tag{1.1}$$

esta rpopiedad es debido a la simetría de la función de densidad. Otra propiedad es que la función de distribución de cualquier variable aleatoria $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se puede calcular en términos de la función de distribución de la variable aleatoria normal estándar $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \Phi_X(x) &= P(X \leq x) = P(\mu + \sigma Z \leq x) \\ &= P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

De la misma forma, si $a \leq b$ entonces

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Otra propiedad de la función de densidad de la Normal Estándar es que es simétrica, esto es, una función $f$ de densidad es llamada simétrica si $f(-x) = f(x)\ \forall x$, y una variable aleatoria es llamada simétrica si $X$ y $-X$ tienen la misma función de distribución. Estos dos resultados están estrechamente relacionados por el siguente teorema.

**Teorema 9** *Sea $X$ una variable aleatoria con f.d.d. $f$. Entonces $f$ es simétrica si y solo si $X$ es una variable aleatoria simétrica.*

La ecuación (1.1) se deriva de la simetría de la variable aleatoria normal estándar, ya que, si $Z \sim N(0,1)$ entonces

$$\begin{aligned} P[-Z \leq x] &= P[Z \leq x] \\ \Rightarrow \quad 1 - P[Z < -x] &= P[Z \leq x] \\ \Rightarrow \quad 1 - \Phi(-x) &= \Phi(x). \end{aligned}$$

La función generadora de momentos $M(t)$ de una variable aleatoria $Z$ que tiene distribución normal con parámetros 0 y 1 es

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E\left[e^{tZ}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2-2tx}{2}\right\}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(x-t)^2}{2}+\frac{t^2}{2}\right\}dx \\ &= e^{\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}dx = e^{\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

Para obtener la función generadora de momentos de cualquier variable aleatoria normal usaremos el hecho de que $X = \mu + \sigma Z$ tiene distribución normal con parámetros $\mu$ y $\sigma^2$ , asi esta función está dada por

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] = E\left[e^{t(\mu+\sigma Z)}\right] = E\left[e^{t\mu}e^{t\sigma Z}\right] \\ &= e^{t\mu}E\left[e^{t\sigma Z}\right] = e^{t\mu}M_Z(t\sigma) = e^{t\mu}e^{\frac{(t\sigma)^2}{2}} \\ &= \exp\left\{\frac{\sigma^2t^2}{2}+\mu t\right\}. \end{aligned}$$

En general si $X \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ entonces

$$\begin{aligned} E[X^n] &= 0 \text{ si } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N} \\ E[X^n] &= E\left[X^{2k}\right] = \frac{\sigma^{2k}(2k)!}{2^k k!} \text{ si } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

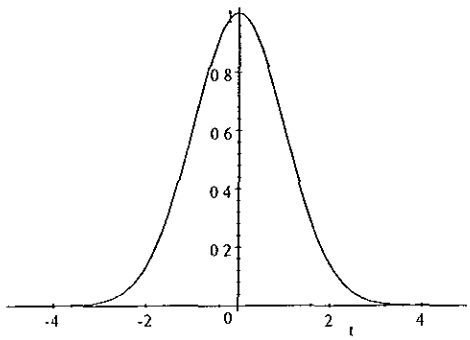
Así, la función característica de $X$, si $X \sim N\left(0,\sigma^2\right)$ es

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E\left[e^{itX}\right] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(itX)^n}{n!}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n E[X^n]t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}E\left[X^{2k}\right]t^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}t^{2k}\sigma^{2k}(2k)!}{(2k)!2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{-\sigma^2t^2}{2}\right)^k}{k!} \\ &= e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}. \end{aligned}$$

Y en general, si $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ entonces $Y = X - \mu \sim N\left(0, \sigma^2\right)$ , y se tiene

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E\left[e^{itX}\right] = E\left[e^{it(Y+\mu)}\right] \\ &= e^{it\mu}\varphi_Y(t) = e^{it\mu}e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \quad -\infty < t < \infty. \end{aligned}$$

A continuación se presenta la gráfica de la función característica de la variable aleatoria Normal Estándar




$$\varphi_X(t) = \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$$

## 1.4 Distribuciones Infinitamente Divisibles

Por mucho tiempo, el problema central en la teoria de probabilidad fue el descubrir bajo que condiciones distribucioens de sumas de variables aleatorias independientes convergian a la distribucion normal.

Al mismo tiempo que la solucion a este problema clasico estaba siendo concluida, fue creada y desarrollada una nueva teoria en distribuciones límite de sumas de variables aleatorias independientes, estrechamnete relacionada con la teoria de procesos estocasticos. la primer pregunta fue que distribuciones, aparte de la distribucion normal, pueden ser limites de sumas de variables aleatorias independientes, las distribuciones infinitamnete divisibles surgen como solucion a esta pregunta.

**Distribuciones infinitamnete divisibles y sus propiedades fundamentales**

**Definición 10** *Una variable aleatoria* $X$*, con función de distribución* $F_X$*, y función característica* $\varphi_X$ *es llamada infinitamnete divisible si, para todo número natural* $n$*,*

*$X$ es la suma de $n$ variables aleatorias independientes $X_1$,$X_2$,...,$X_n$ identicamnete distribuidas (dependiendo esta distribución de $n$), es decir*

$$X =^d X_1 + X_2 + ... + X_n$$

*o equivalentemente* $\varphi_X = \left(\varphi_{X_1}\right)^n$.

(la notación $X =^d Y$ significa que las variables aleatorias $X$ y $Y$ tienen la misma distribución, es decir, $F_X(x) = F_Y(x)$, $x \in \mathbf{R}$)

En el siguiente capítulo se define la convolución de dos variables aleatorias y veremos que la definicion anterior es equivalente a $F_X = F_{X_1} * \cdots * F_{X_n}$.

En los ultímos años se a visto que la distribuciones Infinitamente divisibles juegan un papel muy importante en diversos problemas de la teoria de probabilidad. En particular, la clase de distribuciones límite de sumas de variables aleatorias coincide con la clase de distribuciones Infinitamente divisibles, este resultado se muestra en el siguiente teorema.

**Teorema 11** *Una variable aleatoria $X$ es el límite de sumas $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_{n,k}$ si y solo si $X$ es infinitamnete divisible.*

(Demostracion en Shiryayev, Probability pag. 335).

**Propiedades**

La función caracteristica de una distribución Infinitamente divisible nunca se anula.

La función de distribución de una suma de variables aleatorias independientes Infinitamente divisibles es Infinitamente divisible.

La distribución límite (en el sentido de convergencia debil *) de una sucesión de funciones de distribución Infinitamente divisibles es Infinitamente divisible.

*Una sucesión de funciones no decrecientes

$$F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x), ..$$

convergen debilmente a una función $F(x)$ si cuando $n \to \infty$ converge a $F(x)$ en cada uno de sus puntos de continuidad, y asuminos que $F_n(-\infty) = 0$

Por ejemplo, la función de densidad normal es Infinítamnete Divisible; en efecto

$$\varphi_X(t) = e^{it\mu} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \left(e^{it\frac{\mu}{n}} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2n}}\right)^n = \left(\varphi_{X_n}(t)\right)^n$$

donde $\varphi_{X_n}(t)$ es la función característica de una variable aleatoria normal $\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

# Capítulo 2

# Distribuciones sobre los enteros

Las distribuciones Series de Potencias Infinitamente Divisibles (SPID) se abordan vía funciones generatrices de probabilidad, por lo cual, en la primera parte de este capítulo se trata la función generatríz de probabilidad de distribuciones sobre los enteros en general. Posteriormente se muestran algunos resultados útiles para el estudio de distribuciones SPID, como son El Teorema de la Continuidad y el teorema que relaciona las funciones generatrices de probabilidad Infinitamente Divisible y Poisson Compuesta. Se incluyen secciones sobre la distribución Poisson y Binomial Negativa, ya que, al ser distribuciones SPID se utilizan en los ejemplos de Normales Series de Potencias Infinitamnete Divisibles (NSPID) del capítulo 3. Finalmente se presentan las distribuciones SPID y algunos ejemplos de estas.

## 2.1 Función generatriz de probabilidad

Las variables aleatorias discretas que toman solo los valores $0, 1, 2, \ldots$ son de especial importancia, ya que una gran cantidad de fenómenos presentan este tipo de distribuciones. Una herremienta útil en el estudio de estas variables es la función generatriz de probabilidad. Primero trataremos las funciones generatrices en general y algunas de sus propiedades.

Sea $a_0, a_1, \ldots$ una sucesión de números reales, utilizando estos como coeficientes, podemos formar un polinomio o una serie de potencias en algún intervalo $u$:

$$A(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_n u^n + \cdots$$

si esta serie converge en algún intervalo abierto que contenga a $u$, entonces $A(u)$ es llamada la *función generatriz* de la sucesión $\{a_i\}$.

Propiedades útiles de esta función:

I. *Convergencia.* Si $A(u)$ converge para alguna $u_0 \neq 0$, entonces $A(u)$ converge para toda $|u| \leq |u_0|$. El supremo $R$ de los núemros $r$ tales que $A(u)$ converge para toda $|u| \leq r$ es llamado el radio de convergencia de la serie.

II. *Diferenciación.* Si $A(u)$ converge para $|u| < R$, entonces en cada punto $u$ del interior del radio de convergencia, es decir $|u| < R$, $A(u)$ tiene derivadas de todos los ordenes. Estas derivadas se representan por las series obtenidas al derivar $A(u)$ término por término, y tienen el mismo radio de convergencia $R$.

III. *Unicidad.* Si dos series de potencias convergen a la misma suma

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i u^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i u^i$$

para todo punto en un intervalo $|u| \leq r$, entonces $a_i = b_i$, $\forall\, i \in \{0, 1, 2, ...\}$ ; así si dos sucesiones $\{a_i\}$ , $\{b_i\}$ tienen la misma función generatriz, entonces son idénticas.

IV. *Multiplicación.* Supongamos que $\sum a_i u^i$ y $\sum b_i u^i$ convergen a $A(u)$ y $B(u)$ para toda $|u| \leq r$. Definimos

$$c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \cdots + a_i b_0;\ i = 0, 1, 2, \ldots$$

entonces $\sum c_i u^i$ converge a $A(u) B(u)$ para todo $|u| \leq r$. La sucesión $\{c_i\}$ es llamada la convolución de las sucesiones $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$ . La función generatriz de $\{c_i\}$ es igual al producto de las funciones generatrices de $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$.

Si $X$ es una variable aleatoria discreta que toma valores enteros no negativos y

$$p_x = P(X = x)\,;\ x = 0, 1, 2, ...$$

la función generatriz de la sucesión $\{p_i\}$ es llamada la *función generatriz de probabilidad* de $X$ y se denota por $G$

$$G(s) = \sum_{x=0}^{\infty} p_x s^x = E\left[s^X\right].$$

La serie $G(s)$ es convergente para $s = 1$, ya que $G(1) = \sum_{x=0}^{\infty} p_x = 1$, y esto implica que es convergente para todo $|s| \leq 1$.

También trabajaremos con la función generatriz de la sucesión $\{q_i\}$ donde

$$q_x = P(X > x)\,;\ x = 0, 1, 2, ...$$

así

$$q_k = p_{k+1} + p_{k+2} + p_{k+3} + \cdots,\ k > 0$$

y la función generatriz de la sucesión $\{q_i\}$ se denota por

$$Q(s) = \sum_{x=0}^{\infty} q_x s^x.$$

Los coeficientes de $Q(s)$ son menores que uno; esto implica que $Q(s)$ converge al menos en el intervalo abierto $-1 < s < 1$, es decir

$$Q(s) = \sum_{x=0}^{\infty} q_x s^x \leq \sum_{x=0}^{\infty} |s|^x < \infty \ , \ si \ |s| < 1$$

Un teorema que nos relaciona estas dos funciones generatrices es el siguiente

**Teorema 12** *Para* $-1 < s < 1$

$$Q(s) = \frac{1 - G(s)}{1 - s}.$$

**Dem:** El coeficiente de $s^n$ en $(1-s)Q(s)$ es $q_n - q_{n-1} = (p_{n+1} + p_{n+2} + \cdots) - (p_n + p_{n+1} + \cdot \ \cdot) = -p_n$ cuando $n \geq 1$, y $q_0 = 1 - p_0$ cuando $n = 0$, así

$$(1-s)Q(s) = q_0 - \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n = 1 - p_0 - \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n = 1 - G(s)$$

$$\therefore Q(s) = \frac{1 - G(s)}{1 - s}. \tag{2.1}$$

■

Ahora examinaremos la derivada

$$G'(s) = \sum_{x=1}^{\infty} x p_x s^{x-1} \tag{2.2}$$

la serie converge al menos para $-1 < s < 1$, ya que para $s \in [0,1)$ se tiene

$$
\begin{aligned}
G'(s) &= \sum_{x=1}^{\infty} x p_x s^{x-1} \qquad (2.3)\\
&= p_1 s^0 + \\
&\quad p_2 s^1 + p_2 s^1 + \\
&\quad p_3 s^2 + p_3 s^2 + p_3 s^2 + \\
&\quad p_4 s^3 + p_4 s^3 + p_4 s^3 + p_4 s^3 + \cdots \\
&\quad \vdots \\
&\leq q_0 s^0 + q_1 s^1 + q_2 s^2 + \cdots \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} q_x s^{x-1} = Q(s) < \infty
\end{aligned}
$$

Y si $s \in (-1,0)$ se tiene

$$
\begin{aligned}
-\infty &< -Q(-s) \leq -\sum_{x=1}^{\infty} x p_x |s|^{x-1} \leq \sum_{x=1}^{\infty} x p_x s^{x-1} \qquad (2.4)\\
&\leq \sum_{x=1}^{\infty} x p_x |s|^{x-1} = Q(-s) < \infty
\end{aligned}
$$

Para $s = 1$ el lado derecho de (2.2) se reduce a $\sum_{x=1}^{\infty} x p_x = E[X]$. Cuando esta esperanza exista, la derivada $G'(s)$ será continua en el intervalo $-1 \leq s \leq 1$. Si $\sum_{x=1}^{\infty} x p_x$ diverge, entonces $G'(s) \to \infty$ cuando $s \to 1$. En este caso diremos que $X$ tiene esperanza infinita y lo denotaremos por $G'(1) = E[X] = \infty$. Aplicando el Teorema de valor medio en el numerador de (2.1), podemos ver que $Q(s) = G'(\sigma)$ donde $\sigma$ es un punto entre $s$ y $1$, es decir

$$
Q(s) = \frac{1 - G(s)}{1 - s} = \frac{G(1) - G(s)}{1 - s} = G'(\sigma), \quad \textit{con } \sigma \in (s,1)
$$

si hacemos $s \to 1$ entonces $\sigma \to 1 \Rightarrow G'(\sigma)$ tiene el mismo límite que $Q(s)$.

Por otro lado, por (2.3) se tiene para $s \in (0,1)$

$$
G'(s) \leq \sum_{x=0}^{\infty} q_x s^{x-1} = Q(s)
$$

con igualdad cuando $s = 1$. Por lo tanto, como ambas funciones son monótonas entonces $G'(s)$ y $Q(s)$ tienen el mismo límite finito o infinito que denotaremos por $G'(1)$ o $Q(1)$.

Esto nos conduce al siguiente resultado:

**Teorema 13** *La esperanza $E[X]$ satisface la relación*

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x p_x = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \tag{2.5}$$

*o en términos de funciones generatrices*

$$E[X] = G'(1) = Q(1). \tag{2.6}$$

Derivando la ecuación (2.2) y por la relación $G'(s) = Q(s) - (1-s)Q'(s)$ hallamos de la misma forma

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)p_x = G''(1) = 2Q'(1). \tag{2.7}$$

Para obtener la varianza de $X$ solo tenemos que sumar $E[X]-E^2[X]$ a (2.7) ya que $Var(X) = E[X(X-1)] + E[X] - E^2[X]$, lo que nos conduce al siguiente teorema

**Teorema 14** *La varianza de $X$ satisface la relación*

$$\begin{aligned} Var(X) &= G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 \\ &= 2Q'(1) + Q(1) + Q^2(1) \end{aligned} \tag{2.8}$$

*En caso de varianza infinita $G''(1) \to \infty$ cuando $s \to 1$.*

Las relaciones (2.6) y (2.8) frecuentemente nos proporcionan una forma sencilla de calcular la esperanza y la varianza.

Ahora regresaremos a una de las propiedades antes mencionadas de las funciones generatrices, la convolución, pero con la interpretación en términos de v.a's., el caso de funciones generatrices de probabilidades, este método es útil para el estudio de sumas de variable aleatoria independientes.

Si una variable aleatoria $X$ toma sólo valores enteros no negativos, entonces $s^X$ es una nueva variable aleatoria bien definida, y la función generatriz de probabilidades de $X$ puede ser escrita de forma compacta como $E[s^X]$. Si $X$ y $Y$ son v.a's. independientes entonces también lo son $s^X$ y $s^Y$, así

$$E[s^{X+Y}] = E[s^X]E[s^Y]$$

es decir, la f.g.p. de la variable aleatoria $X+Y$ es el producto de las f.g.p's. de $X$ y $Y$.

Se dará otra prueba de este importante resultado que servirá para generalizarlo.

Si $X$ y $Y$ son variables aleatorias independientes que toman valores enteros no negativos con distribuciones de probabilidades $P\{X=j\} = a_j$ y $P\{Y=j\} = b_j$.

El evento $(X = j, Y = k)$ tiene probabilidad $a_j b_k$. La suma $S = X + Y$ es una nueva variable aleatoria, y el evento $S = r$ es la unión de los eventos mutuamente excluyentes

$$(X = 0, Y = r), (X = 1, Y = r - 1), \ldots, (X = r, Y = 0)$$

así la distribución $c_r = P\{S = r\}$ está dada por

$$c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + a_2 b_{r-2} + \cdots + a_{r-1} b_1 + a_r b_0 \tag{2.9}$$

la operación (2.9), de las sucesiones $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ da como resultado una nueva sucesión $\{c_k\}$, que es llamada la convolución de las sucesiones $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ y se denota

$$\{c_k\} = \{a_k\} * \{b_k\}. \tag{2.10}$$

Estos resultados los podemos resumir en el siguiente teorema

**Teorema 15** *Si $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son sucesiones con funciones generatrices $A(s)$ y $B(s)$, y $\{c_k\}$ es su convolución entonces la función generatriz $C(s) = \sum c_k s^k$ es el producto*

$$C(s) = A(s)\, B(s) \tag{2.11}$$

*Si $X$ y $Y$ son variables aleatorias independientes que toman valores enteros no negativos con funciones generatrices $A(s)$ y $B(s)$, entonces su suma $X + Y$ tiene función generatriz $A(s)\, B(s)$.*

Este teorema tiene una generalización para el caso de una suma de $n$ variables aleatorias independientes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ con funciones generatrices $A_1(s)$, $A_2(s), \ldots, A_n(s)$, la suma $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ tiene función generatriz $A_1(s)\, A_2(s) \cdots A_n(s)$.

En el caso especial en que las $X_i$'s tienen la misma distribución de probabilidad $\{a_k\}$ la notación para la distribución de probabilidad de $S$ es $\{a_k\}^{n*}$, llamada la convolución $n$-ésima de la sucesión $\{a_k\}$. Así

$$\{a_k\}^{2*} = \{a_k\} * \{a_k\}, \{a_k\}^{3*} = \{a_k\}^{2*} * \{a_k\}, \ldots$$

en general

$$\{a_k\}^{n*} = \{a_k\}^{(n-1)*} * \{a_k\} \tag{2.12}$$

en palabras, $\{a_k\}^{n*}$ es la sucesión de números con función generatriz $A^n(s)$. En particular $\{a_k\}^{1*} = \{a_k\}$, y $\{a_k\}^{0*}$ se define como la sucesión cuya función generatriz es $A^0(s) = 1$, esto es, la sucesión $(1, 0, 0, 0, \ldots)$.

Hay que notar que la convolución es una operación conmutativa y asociativa, exáctamente como la suma de variable aleatoria

## 2.2 Función generadora de momentos

Si $X$ es una v.a discreta con rango $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{N}$, función de densidad $f$, y $r$ es un entero no negativo, el *r-ésimo momento* de $X$ se define como

$$m_r = E[X^r] = \sum_{x \in \mathcal{L}} x^r f(x)$$

si la serie converge absolutamente.

Y su función generadora de momentos se define como

$$M_X(u) = E[e^{uX}] = \sum_{x \in \mathcal{L}} e^{uX} f(x).$$

Considerando que la suma converge en algún intervalo $|u| < r$, $r > 0$, la $i$-ésima derivada de $M_X(u)$ con respecto a $u$ es

$$M_X^{(i)}(u) = E[\frac{d^i}{du^i} e^{uX}] = E[X^i e^{uX}].$$

Evaluando en $u = 0$ tenemos

$$M_X^{(i)}(0) = E[X^i] = m_i$$

que es el $i$-ésimo momento de $X$. El desarrollo en serie de Taylor de $M_X(u)$ alrededor de $u = 0$ es

$$M_X(u) = 1 + m_1 u + m_2 \frac{u^2}{2!} + \cdots + m_i \frac{u^i}{i!} + \cdots$$

De esta forma $M_X(u)$ es la función generatriz de la sucesión $\left\{\frac{m_i}{i!}\right\}$, que es la función generatriz exponencial de la sucesión de momentos $\{m_i\}$.

Cuando $X$ toma sólo valores enteros no negativos, sus funciones generadora de momentos y generatriz de probabilidad están relacionadas de la siguiente manera

$$M_X(u) = G_X(e^u); \tag{2.13}$$

$$G_X(u) = M_X(\log u).$$

Así como $G_X$ determina de manera única la distribución de $X$, esto también es cierto para $M_X$.

## 2.3 La distribución Poisson

Una variable aleatoria $X$ que toma los valores de $0, 1, 2, ...$, se dice que es una variable aleatoria Poisson con parámetro $\lambda$ si para alguna $\lambda > 0$, si su función de densidad es

$$f(x) = P\{X = x\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, ...$$

y se denota $X \sim Poisson(\lambda)$.

Por definición su función generatriz de probabilidades está dada por

$$\begin{aligned} G_X(u) &= \sum a_x u^x = \sum_{x=0}^{\infty} u^x e^{-\lambda}\lambda^x/x! \\ &= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}(u\lambda)^x/x! = e^{-\lambda}e^{u\lambda} = e^{\lambda(u-1)}. \end{aligned}$$

Utilizando las relaciones (2.6) y (2.8) obtenemos su esperanza y varianza

$$E[X] = G'_X(1) = \lambda e^{\lambda(u-1)|_{u=1}} = \lambda$$

y

$$\begin{aligned} Var(X) &= G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 \\ &= \left[\lambda^2 e^{\lambda(u-1)} + \lambda e^{\lambda(u-1)} - \left(\lambda e^{\lambda(u-1)}\right)^2\right]|_{u=1} = \lambda. \end{aligned}$$

Su función generadora de momentos, por la relación (2.13) es

$$M_X(t) = G_X\left(e^t\right) = e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$$

y por la definición de función característica se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E\left[e^{itX}\right] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx}e^{-\lambda}\lambda^x/x! \\ &= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\left(e^{it}\lambda\right)^x/x! = e^{-\lambda}e^{e^{it}\lambda} \\ &= \exp\left\{\lambda\left(e^{it}-1\right)\right\} \end{aligned}$$

## 2.4 La distribución binomial negativa

Una variable aleatoria $X$ que toma los valores de $0, 1, 2, ...$, se dice que es una variable aleatoria binomial negativa con parámetros $k$ y $p$, $k \in \mathbb{N}$ y $0 < p < 1$, si su función de densidad es

$$f(x) = P\{X = x\} = \binom{k + x - 1}{x} p^k q^x, \; x = 0, 1, 2, ...$$

donde $q = 1 - p$, y se denota $X \sim BinNeg(k, p)$

El caso particular de la variable aleatoria $W$ con distribución binomial negativa con parámetros 1 y $p$ es conocido como variable aleatoria geométrica con parámetro $p$. y se denota $W \sim Geo(p)$.

Así si $W \backsim Geo(p)$ se tiene

$$P[W = w] = pq^w, \; w = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $q = 1 - p$.

Observamos que

$$\begin{aligned} E[W] &= \sum_{i=0}^{\infty} ipq^i = pq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dq} q^i \\ &= pq \frac{d}{dq} \sum_{i=0}^{\infty} q^i = pq \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{1-q} \right) = q/p. \end{aligned}$$

Para calcular la varianza de $W$ primero se calcula la esperanza de $W(W-1)$ utilizando el mismo método que en el primer momento

$$\begin{aligned} E[W(W-1)] &= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) pq^i = pq^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^2}{dq^2} q^i \\ &= pq^2 \frac{d^2}{dq^2} \sum_{i=0}^{\infty} q^i = pq \frac{d^2}{dq^2} \left( \frac{1}{1-q} \right) = \frac{2q}{p^2}. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} Var[W] &= E[W(W-1)] + E[W] - E^2[W] \\ &= \frac{2q}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}. \end{aligned}$$

Su función generatriz de probabilidad es

$$G_W(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p(qs)^i = \frac{p}{1 - qs} = \frac{1-q}{1-qs}, \; |s| \leq 1.$$

Para calcular su función generadora de momentos utilizamos la relación (2.13)

$$M_W(t) = G_W\left(e^t\right) = \frac{1-q}{1-qe^t}$$

y por la definición se calcula su función característica

$$\varphi_W(t) = E\left[e^{itW}\right] = \sum_{w=0}^{\infty} e^{itw} pq^w = G_W\left(e^{it}\right) = \frac{1-q}{1-qe^{it}}.$$

Si $Y \backsim BinNeg\,(k,p)$, entonces $Y$ se puede escribir como $Y = \sum_{i=1}^{k} W_i$ donde las $W_i$ son v.a's. independientes y $W_i \backsim Geo\,(p)$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Así, utilizando propiedades de la esperanza y de la varianza de una suma de v.a's. independientes, se tiene:

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{k} E[W_i] = \frac{kq}{p}$$

y

$$Var[Y] = \sum_{i=1}^{k} Var[W_i] = \frac{kq}{p^2}.$$

Utilizando las propiedades de la convolución se puede calcular fácilmente la función generatriz de $Y$ como el producto de las funciones generatrices de las $W_i$ (por ser las $W_i$'s v.a's. independientes):

$$G_Y(s) = \prod_{i=1}^{k} G_{W_i}(s) = \left(\frac{1-q}{1-qs}\right)^k.$$

Por la relación (2.13), su función generadora de momentos está dada por

$$M_Y(s) = G_Y(e^s) = \left(\frac{1-q}{1-qe^s}\right)^k$$

y su función característica por

$$\varphi_Y(t) = G_Y\left(e^{it}\right) = \left(\frac{1-q}{1-qe^{it}}\right)^k.$$

## 2.5 Distribuciones Series de Potencias

Una distribución es llamada distribución Serie de Potencias (SP) si su función de densidad puede ser escrita de la forma

$$P[X=x]=\frac{a_x\theta^x}{\eta(\theta)},\ x=0,1,\ldots,\ \theta>0$$

donde $a_j>0$ y $\eta(\theta)=\sum_{x=0}^{\infty}a_x\theta^x$. Al parámetro $\theta$ se le llama el *parámetro potencia* de la distribución y $\eta(\cdot)$ es la *función de series*.

Las distribuciones Series de Potencias incluye muchas de las distribuciones discretas más conocidas. Entre las más comunes están. binomial, Poisson, binomial negativa y logarítmica, así como sus correspondientes distribuciones multivariadas. También la suma de $n$ v.a's. mutuamente independientes cada una con distribución SP, tiene una distribución de la misma clase con *función de series* $[\eta(\theta)]^n$. La función generatriz de probabilidades de una distribución SP es

$$G(s)=\frac{\eta(\theta s)}{\eta(\theta)}.$$

Algunos ejemplos de distribuciones SP y sus *funciones de series*:

| | |
|---|---|
| Binomial | $\eta(\theta)=(1+\theta)^n, n\in\mathbb{N}$ |
| Poisson | $\eta(\theta)=e^\theta$ |
| Binomial Negativa | $\eta(\theta)=(1-\theta)^{-k}, k>0$ |
| Logarítmica | $\eta(\theta)=-\ln(1-\theta)$. |

Un teorema de gran utilidad para demostrar posteriormente relaciones entre la distribución Poisson Compuesta y las distribuciones Infinitamente Divisibles es el siguiente.

**Teorema 16** *(TEOREMA DE LA CONTINUIDAD). Supongamos que, para todo $n$ fijo. la sucesión $a_{0,n}, a_{1,n},\ldots$ es una distribución de probabilidades, es decir*

$$a_{k,n}\geq 0,\ \sum_{k=0}^{\infty}a_{k,n}=1$$

*Para que exista el límite*

$$a_k=\lim_{n\to\infty}a_{k,n}$$

*para toda $k\geq 0$, es necesario y suficiente que exista el límite*

$$A(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} s^k$$

*para cada $s$ en el intervalo abierto $(0,1)$. En ambos casos, se cumple que*

$$A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k.$$

**Dem:** Sea $A_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} s^k$

i)Supongamos $a_k = \lim_{n\to\infty} a_{k,n}$ y definamos $A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$. Puesto que $|a_{k,n} - a_k| \leq 1$, tenemos que para toda $0 < s < 1$

$$\begin{aligned} |A_n(s) - A(s)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} (a_{k,n} - a_k) s^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k,n} - a_k| s^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{r-1} |a_{k,n} - a_k| + \frac{s^r}{1-s}. \end{aligned}$$

si escogemos $r$ tan grande que $s^r < \epsilon(1-s)$, el miembro derecho será menor que $2\epsilon$ para toda $n$ suficientemente grande, ya que $a_k = \lim_{n\to\infty} a_{k,n}$ . Por consiguiente, el miembro de la izquierda puede hacerse tan pequeño como se quiera y, de esta manera se cumple

$$A(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} s^k.$$

ii)Supongamos $A(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} s^k$. Es claro que $A(s)$ varía monótonamente con $s$ y, así, existe $A(0)$ como límite de $A(s)$ cuando $s \to 0$. Luego

$$A_n(0) = a_{0,n} \leq A_n(s) \leq a_{0,n} + \frac{s}{1-s}$$

para toda $0 < s < 1$, ya que $A_n(s) = a_{0,n} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} s^k$ y $a_{s,k} \leq 1$.Esto implica que cuando $n \to \infty$ todos los valores límites de $a_{0,n}$ están entre $A(s)$ y $A(s) - \frac{s}{1-s}$. Si hacemos $s \to 0$, vemos que $a_{0,n} \to A(0)$ y, por lo tanto, $a_k = \lim_{n\to\infty} a_{k,n}$ se cumple cuando $k = 0$. Esta argumentación se extiende para toda $k$. En realidad, para $0 < s < 1$,

$$\frac{A_n(s) - a_{0,n}}{s} \to \frac{A(s) - A(0)}{s}, \quad n \to \infty$$

A la izquierda tenemos una serie de potencias con coeficientes no negativos, y esta expresión es análoga a $A(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} s^k$. Si argumentamos como antes, encontramos primero, que existe la derivada $A'(0)$ y, a continuación, que $a_{1,n} \to A'(0)$. Por inducción, obtenemos $a_k = \lim_{n\to\infty} a_{k,n}$ para toda $k$.

■

Desafortunadamente, este teorema es de aplicación limitada, puesto que las formas límite de las distribuciones discretas son en general distribuciones continuas (por ejemplo, la distribución normal aparece como forma límite de la distribución binomial).

## 2.6 Distribuciones Series de Potencias Infinitamente Divisibles

En esta sección, para tratar las distribuciones Series de Potencias que son Infinitamente Divisibles se intoducirá primero la distribución Poisson Compuesta, que como se verá mas adelante, están estrechamente ligadas.

Una parte importante de la Teoría de Probabilidad esta relacionada con sumas de variables aleatorias independientes, y en algunas ocasiones el número de términos es en si una variable aleatoria Consideraremos aquí tal situación para el caso especial de variables aleatorias sobre enteros no negativos como preparación para el estudio de variables aleatorias Infinitamente Divisibles.

Sea $\{X_k\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución común $P\{X_k = j\} = f_j$ y función generatriz $f(s) = \sum f_j s^j$. Sea $S_N$ la suma

$$S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

donde el número $N$ de términos es una variable aleatoria independiente de las $X_k$ Sea $P\{N = n\} = g_n$ la distribución de $N$ y $g(s) = \sum g_n s^n$ su función generatriz. La distribución $h_j$ de $S_n$ se obtiene de la fórmula fundamental de probabilidad condicional

$$h_j = P\{S_N = j\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{N = n\} P\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n = j\}. \qquad (2.14)$$

Si $N$ toma solo un número finito de valores, la variable aleatoria $S_N$ esta definida en un espacio muestral de finitas $X_k$. En otro caso, la definición probabilística de $S_N$ como suma involucra un espacio muestral de una sucesión infinita de $\{X_k\}$, pero para nuestros propósitos tomaremos la distribución (2.14) como definición de la variable $S_N$ en el espacio muestral con puntos $0, 1, 2, \ldots$

Para un $n$ fijo la distribución $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ está dada por la convolución $n$-ésima de $\{f_j\}$ consigo misma, y así (2.14) puede ser escrita de forma compacta como

$$\{h_j\} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \{f_j\}^{n*}. \tag{2.15}$$

Esta fórmula se puede simplificar usando funciones generatrices. La función generatriz de $\{f_j\}^{n*}$ es $(f(s))^n$, utilizando la relación (2.15) obtenemos la función generatriz de probabilidades de $S_N$:

$$h(s) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j s^j = \sum_{n=0}^{\infty} g_n f^n(s). \tag{2.16}$$

El lado derecho es la serie de potencias de $g(s)$ evaluada en $f(s)$; que es $g(f(s))$; esto nos conduce al siguiente teorema·

**Teorema 17** *La función generatriz de la suma $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ es la composición de funciones $g(f(s))$*

**Dem:** Por definición se tiene

$$E\left[s^{S_N} | N = n\right] = f^n(s)$$

así

$$E[s] = E\left[E\left[s^{S_N} | N = n\right]\right] = \sum_{n=0}^{\infty} g_n f^n(s) = g(f(s)).$$

■

Entre las sumas aleatorias $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, una de las de mayor importancia es aquella en la cual $N$ tiene una distribución de Poisson. Denotaremos la esperanza de $N$ por $\lambda t$. Si las $X_j$ tienen la misma distribución $\{f_i\}$, entonces $S_N$ tiene la distribución Poisson compuesta

$$\{h_i\}_t = e^{-\lambda t} \sum_{n=0} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \{f_i\}^{n*}. \tag{2.17}$$

Recordemos que $\{f_i\}^{n*}$ es la convolución $n$-ésima de la sucesión $\{f_i\}$ (ec 2.12), con función generatriz

$$h_t(s) = e^{-\lambda t + \lambda t f(s)}. \tag{2.18}$$

Como $N$ tiene una distribución Poisson, al particionar el intervalo sobre el cual está definida la distribución en dos intervalos ajenos, sus contribuciones a $S_N$ son estocásticamente independientes. En términos de funciones generatrices (ec 2.18) significa:

$$h_{t+u}(s) = h_t(s)\, h_u(s)\,. \tag{2.19}$$

Cada función generatriz Poisson Compuesta (2.18) satisface (ec 2.19). Una familia de funciones generatrices de probabilidad $h_t$ que satisfacen (ec 2.19) es necesariamente de la forma (2.18).

La definición y el teorema siguiente se refieren realmente a las distribuciones de probabilidad sobre los enteros 0,1,... , pero, por sencillez, se formulan en términos de las funciones generatrices de probabilidades correspondientes.

**Definición 18** **Teorema 19** *Sea $X$ una variable aleatoria discreta con función generatriz de probabilidad $h$, entonces $X$ es Infinitamente divisible si y solo si para todo entero positivo $n$, la $n$-ésima raíz $\sqrt[n]{h}$ es también una función generatriz de probabilidades. A este tipo de función generatriz de probabilidad $h$, se le llama Infinitamente Divisible.*

Dem Sea $X$ una variable aleatoria discreta, y supongamos que $X$ es Infinitamente divisible, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $X =^d X_1 + \cdots + X_n$ donde las $X_i$'s son variables aleatorias independientes identicamente distribuidas (i.i.d.), si $h_n$ es la función generatriz de probabilidades de las $X_i$'s, por el Teorema (2.11) se tiene

$$h(s) = (h_n(s))^n$$

Ahora, supongamos que para todo entero positivo $n$, la $n$-ésima raíz $\sqrt[n]{h}$ es también una función generatriz de probabilidades. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. con función generatriz de probabilidades $\sqrt[n]{h}$, entonces por el Teorema (2.11) la función generatriz de la suma $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ es $h$ y esto implica que $X =^d X_1 + \cdots + X_n$.

**Teorema 20** *Las únicas funciones generatrices de probabilidad ID son aquellas que tienen la forma:*

$$h(s) = e^{-\lambda + \lambda f(s)}$$

*siendo $\{f_i\}$ distribución de probabilidades sobre $0, 1, 2, \ldots$ y $f(s)$ su correspondiente función generatriz de probabilidad.*

En adelante a $f(s)$ le llamaremos *la función exponente de $h(s)$*.

**Dem:** Sea $h(s) = \sum h_k s^k$, y supongamos que $\sqrt[n]{h}$ es una función generatriz de probabilidades para toda $n \geqslant 1$. Entonces, $h_0 > 0$, pues de no ser así, el término absoluto (coeficiente de $s^0$) de la serie de potencias en $\sqrt[n]{h}$ sería nulo, lo cual implicaría que $h_0 = h_1 = \cdot \cdot = h_{n-1} = 0$. Por lo tanto resulta que $\sqrt[n]{h(s)} \to 1$ cuando $n \to \infty$, para toda $0 \le s \le 1$, de este modo

$$\log \sqrt[n]{h(s)/h_0} = \log \left[1 + \left(\sqrt[n]{h(s)/h_0} - 1\right)\right] \sim \sqrt[n]{h(s)/h_0} - 1 \qquad (2.20)$$

donde el signo $\sim$ indica que la razón de los dos miembros tiende a la unidad.

Combinando esta relación con su caso particular en que $s = 1$, obtenemos (como $h(1) = 1$)

$$\frac{\log h(s) - \log h_0}{-\log h_0} = \frac{\log \sqrt[n]{h(s)/h_0}}{\log \sqrt[n]{1/h_0}} \sim \frac{\sqrt[n]{h(s)} - \sqrt[n]{h_0}}{1 - \sqrt[n]{h_0}} \qquad (2.21)$$

El miembro derecho de (2.21) es una serie de potencias con coeficientes positivos:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[n]{h(s)} - \sqrt[n]{h_0}}{1 - \sqrt[n]{h_0}} &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k - \sqrt[n]{h_0}}{1 - \sqrt[n]{h_0}} \\
&= \frac{a_0 - \sqrt[n]{h_0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k s^k}{1 - \sqrt[n]{h_0}}, \text{ como } h_0 = a_0^n \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1 - \sqrt[n]{h_0}} s^k,
\end{aligned}$$

y para $s = 1$ vemos que esos coeficientes suman la unidad:

$$\frac{\sqrt[n]{h(1)} - \sqrt[n]{h_0}}{1 - \sqrt[n]{h_0}} = \frac{\sqrt[n]{1} - \sqrt[n]{h_0}}{1 - \sqrt[n]{h_0}} = 1$$

De este modo el miembro derecho de (2.21) representa una función generatriz de probabilidades para toda $n$, y el miembro izquierdo es el límite de una sucesión de funciones generatrices de probabilidades. Por el teorema 16, esto implica que el miembro izquierdo de (2.21) es la función generatriz de una sucesión no negativa $\{f_i\}$. Al tomar $s = 1$, vemos que $\sum f_i = 1$. Esto quiere decir que $h$ es de la forma $e^{-\lambda + \lambda f(s)}$, con $\lambda = -\log h_0$.■

Así, si una variable aleatoria $X$ es SPID con f.g.p. $h(s) = e^{-\lambda + \lambda f(s)}$ se puede expresar como la suma de $n$ variables aleatorias independientes identicamente distribuidas SPID, $\forall n \in \mathbb{N}$ $X = \sum_{i=1}^{n} X_{i,n}$, donde cada $X_{i,n}$ tiene f.g.p. dada por $(h(s))^{\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} f(s)}$ y también como la suma aleatoria $N$ de variables aleatorias independientes identicamente distribuidas $X = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$, donde $N$ tiene una distribución Poisson con parámetro $\lambda$, y $\xi_i$ tiene f.g.p. $f(s)$, es decir, v.a.

$$X_{i,n} = \sum_{j=1}^{N'} \xi_j$$

donde $N'$ tiene una distribución Poisson con parámetro $\frac{\lambda}{n}$, y $\xi_i$ tiene f.g.p. $f(s)$.

Notemos que la única diferencia entre las v.a's $X_{i,n}$ y la variable aleatoria $X$ es el parámetro.

Una observación importante es que, si $X$ es una variable aleatoria SPID entonces $P[X=0]=h_0>0$, ya que su función generatriz de probabilidades es de la forma $h(s)=e^{-\lambda+\lambda f(s)}$, y $h_0=h(0)=e^{-\lambda+\lambda f(0)}=e^{-\lambda+\lambda f_0}$, como $\lambda>0$ se tiene $0<e^{-\lambda}\leq e^{-\lambda+\lambda f_0}\leq 1$.

A partir del teorema 20 obtenemos el siguiente criterio:

**Proposición 21** *Una función $h$ es una función generatriz de probabilidades Infinitamente Divisible si, y solo si, $h(1)=1$ y*

$$\log\frac{h(s)}{h(0)}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k s^k,\ \textit{donde}\ a_k\geq 0,\ \sum a_k=\lambda<\infty.$$

*Si se cumple esto, en realidad es suficiente hacer $f_k=a_k/\lambda$ para reducir $h$ a la forma canónica $h(s)=e^{-\lambda+\lambda f(s)}$, y esto se convierte en la función generatriz de la distribución Poisson Compuesta, con $t=1$.*

Es importante notar que al aplicar este criterio obtenemos una f.g.p. $f(s)$ de una variable aleatoria $Y$ tal que $P[Y=0]=0$. Esta función no es única, podemos encontrar una f.g.p. $f_1(s)$ y $\lambda_1>0$ tal que

$$h(s)=e^{-\lambda_1+\lambda_1 f_1(s)}.$$

La relación que existe entre la variable aleatoria $Y_1$ la cual tiene f.g.p. $f_1(s)$ y la variable aleatoria $Y$ con f.g.p. $f(s)$ es la siguiente:

$$P[Y_1=y\,|Y_1\neq 0]=P[Y=y],\ y=0,1,2,\ldots$$

La función $f(s)$ que obtenemos de aplicar el criterio es de la forma $f(s)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k s^k$, ahora hagamos

$$f_1(s)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k s^k$$

donde

$$a_0\in(0,1),\ \lambda_1=\frac{\lambda}{1-a_0},\ a_k=b_k(1-a_0),\ k\in\mathbb{N}.$$

De esta forma se obtiene

$$\begin{aligned} -\lambda_1 + \lambda_1 f_1(s) &= -\lambda_1 + \lambda_1 a_0 + \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} a_k s^k \\ &= -\lambda + \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} b_k (1 - a_0) s^k \\ &= -\lambda + \lambda_1 (1 - a_0) \sum_{k=1}^{\infty} b_k s^k \\ &= -\lambda + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} b_k s^k = -\lambda + \lambda f(s), \end{aligned}$$

es decir,

$$h(s) = e^{-\lambda + \lambda f(s)} = e^{-\lambda_1 + \lambda_1 f_1(s)}.$$

Por esta razón, como veremos más adelante, la *función exponente* de la f.g.p. de una variable aleatoria Poisson, que es ID, puede ser tanto una f.g.p. correspondiente a una variable aleatoria degenerada en 1 o a una variable aleatoria Bernoulli.

Estos resultados los podemos resumir en el siguiente teorema

**Teorema 22** *Sea $h(s)$ una función generatriz de probabilidad Infinitamente Divisible. Si existen funciones generatrices de probabilidad $f(s)$ y $g(s)$ tales que $h(s) = e^{-\lambda + \lambda f(s)} = e^{-\alpha + \alpha g(s)}$ con $\alpha$ y $\lambda$ positivas, entonces*

$$P[Y = y \,|Y \neq 0] = P[W = y \,|W \neq 0], \ \forall y \in \mathbb{N}$$

*donde $f(s)$ y $g(s)$ son las f.g.p. de las v.a.'s $Y$ y $W$ respectivamente.*

**Dem:** Sea $f_y = P[Y = y]$ y $g_w = P[W = w]$, entonces como $h(s) = e^{-\lambda + \lambda f(s)} = e^{-\alpha + \alpha g(s)}$ se tiene

$$\begin{aligned} & -\lambda + \lambda f(s) = -\alpha + \alpha g(s) \\ \Rightarrow \quad & -\tfrac{\lambda}{\alpha} + \tfrac{\lambda}{\alpha} f(s) = -1 + g(s) \\ \Rightarrow \quad & -\gamma + \gamma f(s) = -1 + g(s) \\ \Rightarrow \quad & g(s) = \gamma f(s) + 1 - \gamma \\ \Rightarrow \quad & \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} g_i s^i = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma f_k s^k + 1 - \gamma. \end{aligned}$$

Por la propiedad de unicidad de las funciones generatrices se tiene

$$g_0 = \gamma f_0 + 1 - \gamma$$

y

$$g_y = \gamma f_y, \; \forall y \in \mathbb{N},$$

así

$$\begin{aligned} P\left[W = y \,|W \neq 0\right] &= \frac{P\left[W = y\right]}{P\left[W \neq 0\right]} = \frac{g_y}{1 - g_0} \\ &= \frac{g_y}{\gamma\left(1 - f_0\right)} = \frac{f_y}{1 - f_0} = \frac{P\left[Y = y\right]}{P\left[Y \neq 0\right]} \\ &= P\left[Y = y \,|Y \neq 0\right], \; \forall y \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

■

Ejemplos

A continuación analizaremos las funciones generatrices de probabilidades $g(s)$ de algunas distribuciones comunes, con el fin de ver si son o no Infinitamente Divisibles.

**Ejemplo 1** Sea $Y$ una variable aleatoria con distribución binomial con parámetros $n$ y $p$ ($Y \sim Bin(n, p)$), entonces su función generatriz de probabilidades es

$$G_Y(s) = (ps + 1 - p)^n$$

o

$$G_Y(s) = \frac{\eta(\theta s)}{\eta(\theta)} = \frac{(1+\theta s)^n}{(1+\theta)^n} = \left(\frac{1+\theta s}{1+\theta}\right)^n, \text{ donde } p = \frac{\theta}{1-\theta}.$$

Por la proposición 21, $G_Y(s)$ es una f.g.p. Infinitamente Divisible (ID) si y solo si

$$\log \frac{G_Y(s)}{G_Y(0)} = \lambda f(s)$$

donde $f(s)$ es una f.g.p. y $\lambda > 0$. Pero

$$\begin{aligned} \log \frac{G_Y(s)}{G_Y(0)} &= \log \frac{\eta(\theta s)}{\eta(0)} = \log(1+\theta s)^n \\ &= n \log(1+\theta s) = n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\theta^k}{k} s^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a^k s^k \text{ con } a_k < 0 \text{ si } k \text{ par}. \end{aligned}$$

Así $\left(\log \frac{G_Y(s)}{G_Y(0)}\right)/\lambda$ no puede representar una f.g.p. Por lo tanto una variable aleatoria binomial no es Infinitamente Divisible.

**Ejemplo 2** En el caso en que $Y$ sea una variable aleatoria con distribución Poisson con parámetro $\theta$ ($Y \sim Poisson(\theta)$), por el teorema 20 claramente se ve que $Y$ es ID

$$G_Y(s) = e^{-\theta+\theta s}.$$

**Ejemplo 3** La función generatriz de probabilidades de una variable aleatoria $Y$ con distribución Binomial negativa con parámetros $k$ y $p$ ($Y \sim BinNeg(k,p)$), es:

$$G_Y(s) = \left(\frac{p}{1-qs}\right)^k = \left(\frac{1-qs}{1-q}\right)^{-k}, \; k>0, \; q=1-p \tag{2.22}$$

Utilizando nuevamente la proposición 21:

$$\lambda f(s) = \log \frac{G_Y(s)}{G_Y(0)}$$

y desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned}
\log \frac{G_Y(s)}{G_Y(0)} &= \log \frac{\eta(qs)}{\eta(0)} = \log(1-qs)^{-k} = -k\log(1-qs) \\
&= -k\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-qs)^i(-1)^{i+1}}{i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{kq^i}{i}s^i \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} a_i s^i
\end{aligned}$$

con

$$\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{kq^i}{i} = -k\ln(1-q) \text{ y } a_i = \frac{q^i}{-i\ln(1-q)},$$

Así, $\left(\log \frac{G_Y(s)}{G_Y(0)}\right)/\lambda$ representa una f.g.p. correspondiente a la distribución logarítmica. Por lo tanto, las v a's. binomial negativa son Infinitamente Divisibles.

Otra forma de estudiar las distribuciones Series de Potencias Infinitamente Divisibles es por medio de la *función exponente* $f(s)$. Tenemos que $e^{-\lambda+\lambda f(s)}$ representa una función generatriz de probabilidades Infinitamente Divisible si y solo si $f(s)$ es una f.g.p. y $\lambda > 0$.

Así, para una f.g.p. $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k$ y para una $\lambda > 0$, si hacemos $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k s^k = e^{-\lambda+\lambda f(s)}$, entonces $G(s)$ es una f.g.p. ID. Podemos obtener los valores $g_k$ en término de los $f_k$ de la siguiente manera:

$$G(s) = e^{-\lambda+\lambda f(s)} = e^{-\lambda+\lambda\sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k} = e^{-\lambda+\lambda f_0} e^{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda f_k s^k}.$$

Por otra parte

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} d_k s^k &= e^{\sum_{k=1}^{\infty} c_k s^k} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k s^k\right)^t}{t!} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k s^k + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} s^n \\
&\quad + \frac{1}{3!} \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=1}^{n-j-1} c_k c_j c_{n-j-k} s^n + \cdots
\end{aligned}
$$

implica que

$$
d_k = \begin{cases} 1, \; k = 0 \\ c_k + \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{k-1} c_i c_{i-k} + \frac{1}{3!} \sum\limits_{i=1}^{k-2} \sum\limits_{j=1}^{k-i-1} c_i c_j c_{k-i-j} + \cdots + \frac{1}{k!} c_1^k \,, \; k = 1, 2, \ldots \end{cases}
$$

Así

$$
g_0 = e^{-\lambda + \lambda f_0},
$$

y

$$
g_k = e^{-\lambda + \lambda f_0} \left( \lambda f_k + \frac{\lambda^2}{2} \sum_{i=1}^{k-1} f_i f_{i-k} + \frac{\lambda^3}{3!} \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=1}^{k-i-1} f_i f_j f_{k-i-j} + \cdots + \frac{\lambda^k}{k!} f_1^k \right)
$$

para $k = 1, 2, \ldots$

Otra forma de obtener esta relación es la siguiente, al ser $Y$ una variable aleatoria SPID con f.g.p. $e^{-\lambda + \lambda f(s)}$ , se puede expresar como la suma aleatoria $N$ de variables aleatorias independientes identicamente distribuidas $Y = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$, donde $N$ tiene una distribución Poisson con media $\lambda$ y $\xi_i$ tiene f.g.p. $f(s)$. Así, utilizando la relación (2.12), la distribución $g_y$ de $Y$ es:

$$
g_y = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \{f_y\}^{n*} . \tag{2.23}
$$

**Ejemplos**

Utilizando lo anterior, tomaremos como *función exponente* $f(s)$ algunas de las f.g.p. más comúnes y deduciremos cual es la distribución de la variable aleatoria cuya f.g.p. es $G(s) = e^{-\lambda + \lambda f(s)}$. Este método nos provee de una forma de obtener distribuciones Series de Potencias Infinitamente Divisibles, y nos da una idea de la infinidad de distribuciones de este tipo.

**Ejemplo 4** Sea $f(s)$ la f.g.p. de una variable aleatoria degenerada en $n$ $(n \in \mathbb{N})$, si hacemos $G_Y(s) = e^{-\lambda+\lambda f(s)}$, obtenemos:

$$g_k = \begin{cases} e^{-\lambda},\ k = 0 \\ e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^c}{c!}\right),\ \ k = cn,\ \text{con } c \in \mathbb{N} \end{cases}$$

que es la función de densidad de una variable aleatoria $nY$ donde $Y$ se distribuye Poisson con media $\lambda$.

**Ejemplo 5** Tomemos como $f(s)$ la f.g.p. de una variable aleatoria hipergeométrica con parámetros $(m+n, n, t)$, esto es

$$f_k = \begin{cases} \frac{\binom{n}{k}\binom{m}{t-k}}{\binom{n+m}{t}} \text{ si } k = 0, 1, \ldots t \\ 0, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Si hacemos $G_Y(s) = e^{-\lambda+\lambda f(s)}$, entonces,

$$g_0 = e^{-\lambda+\lambda\binom{m}{t}/\binom{n+m}{t}}$$

y

$$g_k = e^{-\lambda+\lambda\frac{\binom{m}{t}}{\binom{n+m}{t}}}\left(\lambda\frac{\binom{n}{k}\binom{m}{t-k}}{\binom{n+m}{t}} + \frac{\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\binom{n}{i}\binom{m}{t-i}\binom{n}{k-i}\binom{m}{t-k+i}}{\binom{n+m}{t}^2} + \cdots + \frac{\lambda^k}{k!}\frac{\binom{n}{1}^k\binom{m}{t-1}^k}{\binom{n+m}{t}^k}\right) \text{ para}$$

$k \in \mathbb{N}$ (nota: $\binom{m}{n} = 0$ si $n \in \mathbb{Z}^-$).

**Ejemplo 6** Sea $f(s)$ la f.g.p. de una variable aleatoria Bernoulli con media $p$, es decir,

$$f(s) = (1-p) + ps.$$

Hagamos

$$G_Y(s) = e^{-\lambda+\lambda f(s)} = e^{-\lambda+\lambda(1-p+ps)} = e^{-\lambda p+\lambda ps}$$

es decir, $G_Y(s)$ es la f.g.p. de una variable aleatoria Poisson con media $\lambda p$.

**Ejemplo 7** Si $f(s)$ es la f.g.p. de una variable aleatoria binomial con parametros $(n, p)$ y hacemos $G_Y(s) = e^{-\lambda+\lambda f(s)}$, entonces $G_Y(s)$ es la f.g.p. de una variable aleatoria $Y$ tal que

$$P(Y = y) = g_y = \sum_{j=m}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\binom{nj}{y}p^y q^{nj-y},\ y = 0, 1, \ldots$$

donde $m = \min\{k \in \mathbb{N} : nk \geq y\}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
G_Y(s) &= e^{-\lambda+\lambda f(s)} = e^{-\lambda+\lambda(q+ps)^n} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda(q+ps)^n\right)^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k(q+ps)^{nk}}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\sum_{i=0}^{nk}\binom{nk}{i}(ps)^i q^{nk-i} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{nk}\frac{\lambda^k}{k!}\binom{nk}{i}p^i q^{nk-i}s^i
\end{aligned}$$

**Ejemplo 8** Sea $f(s)$ la f.g.p. de una variable aleatoria $U_{\{1,2,\ ,n\}}$ esto es

$$f(s) = \frac{1-s^{n+1}}{n(1-s)},\ -1 < s < 1$$

si hacemos $G_Y(s) = e^{-\lambda+\lambda f(s)}$, desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned}
G_Y(s) &= e^{-\lambda+\lambda f(s)} = e^{-\lambda+\lambda\frac{1-s^{n+1}}{n(1-s)}} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda\frac{1-s^{n+1}}{n(1-s)}\right)^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k\left(\frac{1-s^{n+1}}{n(1-s)}\right)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda/n)^k}{k!}\left(1+s+\ldots+s^n\right)^k
\end{aligned}$$

de modo que $g_y$ es el coeficiente de $s^y$

**Ejemplo 9** Cuando $f(s)$ es la f.g.p. de una variable aleatoria Poisson con media $\mu$, y hacemos $G_Y(s) = e^{-\lambda+\lambda f(s)}$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
G_Y(s) &= e^{-\lambda+\lambda f(s)} = e^{-\lambda+\lambda e^{-\mu+\mu s}} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^{-\mu+\mu s}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-(\lambda+\mu k)}}{k!}e^{\mu k s} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-(\lambda+\mu k)}}{k!}\frac{(\mu k s)^i}{i!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-(\lambda+\mu k)}(\mu k)^i}{k!i!}s^i,
\end{aligned}$$

es decir, $G_Y(s)$ es la f.g.p. de una variable aleatoria $Y$ tal que $g_y = \frac{\mu^y e^{-\lambda}}{y!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{-\mu}\right)^k k^y}{k!}$
.

**Ejemplo 10** Sea $f(s)$ la f.g.p. de una variable aleatoria Binomial Negativa con parámetros $r$ y $p$, esto es

$$f(s) = \left(\frac{p}{1-qs}\right)^r, \quad -\infty < s < \infty.$$

Ahora si hacemos $G_Y(s) = e^{-\lambda+\lambda f(s)}$ desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned} G_{Y_r}(s) &= e^{-\lambda+\lambda f(s)} = e^{-\lambda+\lambda\left(\frac{p}{1-qs}\right)^r} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda\left(\frac{p}{1-qs}\right)^r\right)^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{p}{1-qs}\right)^{rk} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{y=rk}^{\infty} \binom{y}{rk-1} p^{rk} q^{y-rk} s^y \end{aligned}$$

de modo que $g_y$ es el coeficiente de $s^y$.

En el caso particular en que $r = 1$ (i.e., $f(s)$ es la f.g.p. de una variable aleatoria Geométrica con parámetro $p$, la función tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} G_{Y_1}(s) &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{y=k}^{\infty} \binom{y}{k-1} p^k q^{y-k} s^y \\ &= e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{y} \frac{\lambda^k}{k!} \binom{y}{k-1} p^k q^{y-k} s^y \end{aligned}$$

entonces

$$g_y = e^{-\lambda} q^y \sum_{k=0}^{y} \frac{\lambda^k}{k!} \binom{y}{k-1} p^k q^{-k}$$

# Capítulo 3

# Distribuciones Normal-Series de Potencias Infinitamente Divisibles

En este capítulo se estudian las distribuciones Normales-Series de Potencias Infinitamente Divisibles (NSPID), que se pueden interpretar como distribuciones normales con media cero y varianza $Y^2$, donde $Y$ es una variable aleatoria que tiene una distribución Serie de Potencias Infinitamente Divisible (SPID), es decir, como distribuciones normales con varianza aleatoria.

En las primeras secciones se calculan las funciones característica, de distribución y generadora de momentos de las distribuciones NSPID, utilizando los resultados obtenidos en los capítulos 1 y 2.

Posteriormente se presentan algunos ejemplos de distribuciones NSPID, gráficas de sus funciones de distribución y característica, comparándolas con las correspondientes a la distribución Normal Estándar.

Otra interpretación de estas distribuciones es la siguiente: Sea $Y$ una variable aleatoria SPID, y sea $Z$ una variable aleatoria independiente de $Y$ que se distribuye $N(0,1)$. Si hacemos $X = \sqrt{Y}Z$, entonces $X$ es una variable aleatoria Normal-Serie de Potencias Infinitamente Divisible.

Observemos que la distribución de $X$ dado $Y = y$ es $N(0, y)$

Al ser $Y$ una variable aleatoria SPID su f.g.p. la podemos escribir como $G_Y(s) = e^{-\lambda+\lambda f(s)}$ con $\lambda > 0$ y $f(s)$ una f.g.p. Se denotará como $W$ a la variable aleatoria con f.g.p. $f(s)$.

## 3.1 Función característica

Para calcular la función característica de $X$ utilizaremos esperanza condicional:

$$\varphi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = E\left[E\left[e^{itX}|Y\right]\right],$$

y como la distribución de $X$ dado $Y = y$ es $N(0, y)$ se tiene

$$E\left[e^{itX}|Y = y\right] = e^{\frac{-t^2 y}{2}},\ y = 0, 1, 2, ...$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= E\left[E\left[e^{itX}|Y\right]\right] = E\left[e^{\frac{-t^2 Y}{2}}\right] = E\left[\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)^Y\right] \\ &= G_Y\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right) = e^{-\lambda+\lambda f\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)}.\end{aligned}$$

Esto nos conduce al siguiente resultado

**Proposición 23** *Si $X = \sqrt{Y}Z$, donde $Y$ es una variable aleatoria SPID con f.g.p. $e^{-\lambda+\lambda f(s)}$ y $Z$ una variable aleatoria normal estándar, entonces la función característica de $X$ está dada por*

$$\varphi_X(t) = e^{-\lambda+\lambda f\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)}.$$

Observemos que este tipo de funciones características son Infinitamente divisibles, esto implica que $X$ se puede expresar como la suma de $n$ variables aleatorias independientes identicamente distribuidas $X_{i,n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, la raíz $n$-ésima de la f.g.p. de $X$ $\left(\varphi_X^{\frac{1}{n}}(t)\right)$, se puede interpretar como la función característica de una variable aleatoria normal con media 0 y varianza $Y_n^2$, donde $Y_n$ es una variable aleatoria con una distribución igual a la que tienen las $n$ v.a.i.i. $Y_{i,n}$ tales que $Y = \sum_{i=1}^n Y_{i,n}$. Es decir, si descomponemos a $Y$ en la suma de $n$ variables aleatorias independientes identicamente distribuidas, tomamos una variable aleatoria cualquiera de estas y la multiplicamos por una variable aleatoria Normal Estándar obtenemos una variable aleatoria con la misma distribución que si primero multiplicamos la variable aleatoria $Y$ con una Normal Estándar, esta nueva variable aleatoria la descomponemos en la suma de $n$ variables aleatorias independientes identicamente distribuidas y tomamos una variable aleatoria cualquiera de estas.

## 3.2 Función de distribución

Como la f.g.p. de $Y$ es $G_Y(s) = e^{-\lambda+\lambda f(s)} = \sum_{y=0}^{\infty} g_y s^y$, y

$$g_y = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \{f_y\}^{n*}$$

como se vio en (34), donde $\{f_y\}^{n*}$ es la convolución $n$-ésima de la sucesión $\{f_y\}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \sum_{y=0}^{\infty} P(X \leq x | Y = y) P(Y = y) \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} P(X \leq x | Y = y) g_Y \\
&= P(X \leq x | Y = 0) g_0 + \sum_{y=1}^{\infty} P(X \leq x | Y = y) g_Y \\
&= \begin{cases} g_0 + \sum_{y=1}^{\infty} P(X \leq x | Y = y) g_Y, & si\ x \geq 0 \\ \sum_{y=1}^{\infty} P(X \leq x | Y = y) g_Y, & si\ x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} g_0 + \sum_{y=1}^{\infty} g_Y \Phi_y(x), & si\ x \geq 0 \\ \sum_{y=1}^{\infty} g_Y \Phi_y(x), & si\ x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

donde $\Phi_y(x)$ es la función de distribución de una variable aleatoria $N(0, y)$.

Ahora observemos que $F(x)$ se puede expresar como la suma de dos medidas, una que es absolutamente continua con respecto a $\lambda$ y otra que es mutuamente singular con respecto a $\lambda$, donde $\lambda$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. (Teorema de descomposición de Lebesgue).

$$F_X(x) = \sum_{y=1}^{\infty} g_y \Phi_y(x) + g_0 \Phi_0(x),$$

donde

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0 \\ 1, & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

con $g_0 > 0$.

Observemos que estamos hablando, entonces, de distribuciones que tienen una discontinuidad en cero y son continuas en otros lados, y el "tamaño" de la discontinuidad de $F_X(x)$ depende de $g_0$. El "tamaño" de la discontinuidad tiende a cero cuando $g_0 \to 0$, y como $g_0 = e^{-\lambda+\lambda f_0}$, entonces $g_0 \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$ y $f_0 < 1$.

De lo anterior se tiene el siguiente resultado

**Proposición 24** *Si $X = \sqrt{Y}Z$, donde $Y$ es una variable aleatoria SPID con f.g.p. $e^{-\lambda+\lambda f(s)}$ y $Z$ una variable aleatoria normal estándar, entonces la función de distribución de $X$ puede ser expresada como la suma de una parte que es absolutamente continua y otra que es discreta. De hecho se tiene que*

$$F_X(x) = \sum_{y=1}^{\infty} g_y \Phi_y(x) + g_0 \Phi_0(x),$$

*donde*

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0 \\ 1, & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

*y $\Phi_y(x)$ es la función de distribución de una variable aleatoria $N(0, y)$ ($g_0 > 0$, ya que $Y$ es variable aleatoria ID).*

La expresión final obtenida a continuación es útil para graficar la función de distribución de $X$

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \begin{cases} g_0 + \sum\limits_{y=1}^{\infty} g_Y \Phi_y(x), & \text{si } x \geq 0 \\ \sum\limits_{y=1}^{\infty} g_Y \Phi_y(x), & \text{si } x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} g_0 + \sum\limits_{y=1}^{\infty} g_Y \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-t^2/2y} dt, & \text{si } x \geq 0 \\ \sum\limits_{y=1}^{\infty} g_Y \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-t^2/2y} dt, & \text{si } x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} e^{-\lambda+\lambda f_0} + \sum\limits_{y=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{\frac{-t^2}{2y}} dt\, e^{-\lambda} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \{f_y\}^{n*}, & \text{si } x \geq 0 \\ \sum\limits_{y=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{\frac{-t^2}{2y}} dt\, e^{-\lambda} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \{f_y\}^{n*}, & \text{si } x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} e^{-\lambda+\lambda f_0} + \int\limits_{-\infty}^{x} \sum\limits_{y=1}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{\frac{-t^2}{2y}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \{f_y\}^{n*} dt, & \text{si } x \geq 0 \\ \int\limits_{-\infty}^{x} \sum\limits_{y=1}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{\frac{-t^2}{2y}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \{f_y\}^{n*} dt, & \text{si } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

## 3.3 Función generadora de momentos

Calcularemos la función generadora de momentos de $X$ utilizando también esperanza condicional

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = E\left[E\left[e^{tX}\,|Y\right]\right].$$

Como

$$E\left[e^{tX}\,|Y = y\right] = e^{\frac{yt^2}{2}},\ y = 0, 1, 2, ...$$

y

$$g_y = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \{f_y\}^{n*},$$

entonces

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[E\left[e^{tX}\,|Y\right]\right] = \sum_{y=0}^{\infty} E\left[e^{tX}\,|Y = y\right] g_y \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} e^{\frac{yt^2}{2}} e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \{f_y\}^{n*} = \sum_{y=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \{f_y\}^{n*} \left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)^y. \end{aligned}$$

Si definimos $h(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} s^n = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{-\lambda+\lambda s}$, entonces por las relaciones (2.15) y (2.16) se tiene

$$\sum_{y=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \{f_y\}^{n*} s^y = \sum_{y=0}^{\infty} h_n f^n(s) = h(f(s)) = e^{-\lambda+\lambda f(s)}$$

Por lo tanto la función generadora de momentos de $X$ tiene la siguiente expresión

$$M_X(t) = \sum_{y=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \{f_y\}^{n*} \left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)^y = e^{-\lambda+\lambda f\left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)}.$$

Estos resultados los podemos resumir en la siguiente proposición

**Proposición 25** *Si $X = \sqrt{Y}Z$, donde $Y$ es una variable aleatoria SPID con f.g.p. $e^{-\lambda+\lambda f(s)}$ y $Z$ una variable aleatoria normal estándar, entonces la función generadora de momentos de $X$ está dada por*

$$M_X(t) = e^{-\lambda+\lambda f\left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)}.$$

## 3.4 Momentos

En esta sección se analizan los momentos de la variable aleatoria $X$. La esperanza está dada por

$$E[X] = E\left[\sqrt{Y}Z\right] = E\left[\sqrt{Y}\right]E[Z] = 0$$

ya que la esperanza de $Z$ es cero.

Calcularemos el segundo momento para encontrar la varianza de $X$

$$E\left[X^2\right] = E\left[\left(\sqrt{Y}Z\right)^2\right] = E[Y]\,E\left[Z^2\right] = E[Y],$$

luego

$$Var[X] = E\left[X^2\right] = E[Y]$$

En general se tiene lo siguiente

**Proposición 26** *Los momentos de una variable aleatoria $X = \sqrt{Y}Z$, donde $Y$ es una variable aleatoria SPID con f.g.p. $e^{-\lambda+\lambda f(s)}$ y $Z$ una variable aleatoria normal estándar, están dados por*

$$E\left[X^{2n-1}\right] = 0, \; si\, n \in N$$

$$E\left[X^{2n}\right] = \frac{(2n)!}{2^n n!}E\left[Y^n\right], \; si\, n \in N$$

En efecto, al ser $X$ una variable aleatoria simétrica, sus momentos impares son cero

$$E\left[X^{2n-1}\right] = E\left[\left(\sqrt{Y}Z\right)^{2n-1}\right] = E\left[\frac{Y^n}{\sqrt{Y}}\right]E\left[Z^{2n-1}\right] = 0, \text{ con } n \in N$$

y sus momentos pares se pueden expresar como

$$E\left[X^{2n}\right] = E\left[\left(\sqrt{Y}Z\right)^{2n}\right] = E\left[Y^n\right]E\left[Z^{2n}\right] = \frac{(2n)!}{2^n n!}E\left[Y^n\right], \text{ con } n \in N$$

debido a la ec (1.2) del Capítulo 1.

Interpretación

Como $Z \backsim N(0,1)$, $Z$ y $Y$ son variable aleatoria independientes y $X = \sqrt{Y}Z$, entonces la distribución de $X$ dado $Y = y$, $(Z_y)$, es normal con parámetros $(0, y)$. Así $Z_y$ se distribuye $N(0, y)$ con varianza cercana a $E[Y]$, de ahí que la varianza de $X$ es $E[Y]$.

Por otro lado, $Z_y$, independientemente del valor de $y$, tiene media cero y es simétrica, por esto $X$ tiene media cero y es simétrica.

Una pregunta de interés es saber que tan parecidas son las distribuciones normal y las Normal-Series de Potencias Infinitamente Divisibles. Enseguida analizaremos si una variable aleatoria $X$ que tiene una distribución NSPID, puede tener sus cuatro primeros momentos iguales a los de la distribución $N(0,1)$. Si así fuera entonces

$$E[X] = 0,\ E\left[X^2\right] = E[Y]\, E\left[Z^2\right] = E[Y] = 1$$

$$E\left[X^3\right] = 0,\ E\left[X^4\right] = E\left[Y^2\right] E\left[Z^4\right] = 3E\left[Y^2\right] = 3$$

esto se cumple si y solo si $E[Y] = 1$ y $Var(Y) = 0$, donde $Y$ es la variable aleatoria SPID asociada a la distribución de la desviación estándar de $X$, i.e. $Y$ seria una variable aleatoria degenerada en 1, y este tipo de variables aleatorias no son SPID.

Observamos que, una variable aleatoria NSPID a lo más tiene sus tres primeros momentos iguales a los de la variable aleatoria $N(0,1)$, y para esto es suficiente que $E[Y] = 1$.

## 3.5 Ejemplos

### Normal-Poisson

Sean $Z \backsim N(0,1)$ y $Y \backsim Poisson(\lambda)$ variables aleatorias independientes, a la variable aleatoria $X = \sqrt{Y}Z$ se le llama Normal-Poisson.

Como $Y \sim Poisson(\lambda)$ su función generatriz de probabilidad es

$$G_Y(s) = e^{-\lambda+\lambda s}$$

es decir $f(s) = s$.

Utilizando las proposiciones 23 y 25 obtenidas en la Sección anterior, se tiene que las funciones característica y generadora de momentos de la variable aleatoria $X$ son

$$\varphi_X(t) = \exp\left[\lambda(e^{-\frac{t^2}{2}} - 1)\right],\ -\infty < t < \infty$$

y

$$M_X(t) = \exp\left[\lambda(e^{\frac{t^2}{2}} - 1)\right],\ -\infty < t < \infty.$$

La esperanza y la varianza de $X$ están dadas por

$$E[X] = 0$$

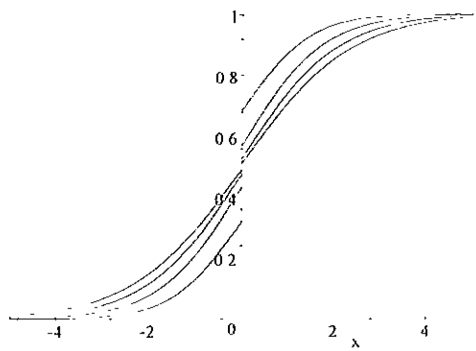
y

$$Var\,[X] = \lambda f'(1) = E\,[Y] = \lambda.$$

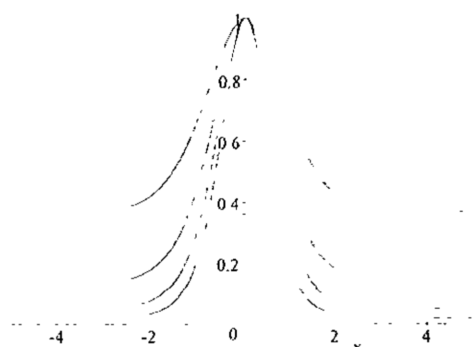
Por la proposición 24, la función de distribución de $X$ es

$$F_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \sum_{v=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(\frac{-t^2}{2v}\right) dt \frac{\lambda^v}{v!}, & \text{si } x < 0 \\ e^{-\lambda} \sum_{v=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(\frac{-t^2}{2v}\right) dt \frac{\lambda^v}{v!} + e^{-\lambda}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

A continuación se hace una comparación de gráficas de funciones de distribución Normal-Poisson cuando $\lambda \to \infty$; esto con el fin de ver gráficamente como la función de distribución de una Normal-Poisson tiende a una función de distribución continua cuando $\lambda \to \infty$ y $f_0 < 1$. Los parámetros usados son $\lambda = 1, 2, 3$ y $4$.

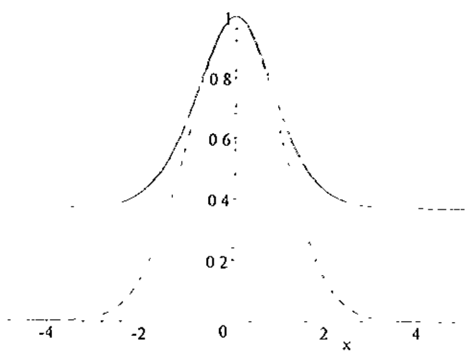



Si se hace lo mismo pero ahora graficando las funciones característica, utilizando los mismos parámetros, se obtiene



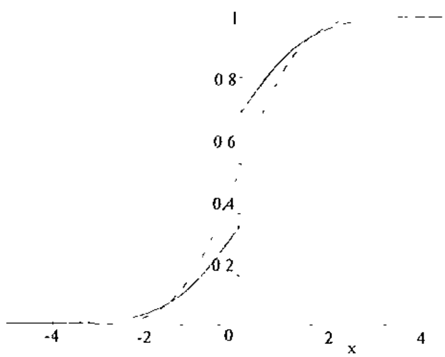
Ahora se hace una comparación de las gráficas de las funciones de distribución y característica de una variable aleatoria NSPID y una Normal Estándar, en el caso particular en que $Z \backsim N(0,1)$, $Y \sim Poisson(1)$ son variables aleatorias independientes y $X = \sqrt{Y}Z$.

Funciones características




$$\varphi_X(t) = \exp\left[1(e^{-\frac{t^2}{2}} - 1)\right]$$

Funciones de distribución




$F_X(x) = e^{-1}\sum_{v=1}^{50}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(\frac{-t^2}{2v}\right)dt\frac{1}{v!} + \frac{|x|}{2x}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1}$.

Observemos que la asíntota horizontal de la función característica de la Normal-Poisson es la recta horizontal $y = e^{-1}$ y el tamaño de la discontinuidad de la función de distribución de la Normal-Poisson es $e^{-1}$, o sea que dependen solo de la probabilidad de que la variable aleatoria $Y$ tome el valor de cero.

### Normal-Binomial Negativa

Sean $Z$ y $Y$ v.a independientes $Z \backsim N(0,1)$, $Y \backsim BinNeg(k,p)$ , y sea $X = \sqrt{Y}Z$. A la variable aleatoria $X$ se le llama Normal-Binomial Negativa.

Utilizando resultados obtenidos anteriormente calculamos la función característica de la variable aleatoria X:

$$\varphi_X(t) = G_Y\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right) = \left(\frac{1-q}{1-qe^{-\frac{t^2}{2}}}\right)^k \quad , \ -\infty < t < \infty,$$

sus primeros momentos y su varianza

$$E[X] = 0, \ E[X^2] = E[Y] = q/p, \ E[X^3] = 0$$

$$E[X^4] = E\left[Z^4\right]E\left[Y^2\right] = 3\left(Var[Y] + E^2[Y]\right) = 3\left(\frac{kq(1+kq)}{p^2}\right)$$

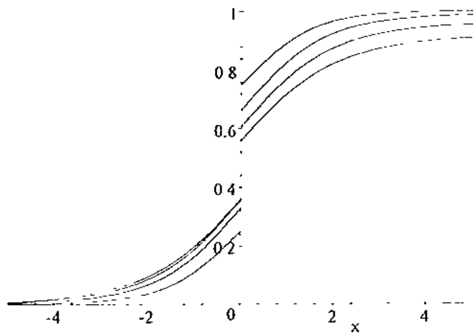
$$Var[X] = E[Y] = q/p,$$

y por último su función de distribución:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \sum_{y=0}^{\infty} P(X \leq x \,|Y=y)\, P(Y=y) \\ &= \sum_{y=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-t^2/2y}dt \binom{k+y-1}{y} p^k q^y + \frac{|x|}{2x}p^k + \frac{1}{2}p^k \\ &= \int_{-\infty}^{x}\sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-t^2/2y}\binom{k+y-1}{y} p^k q^y dt + \frac{|x|}{2x}p^k + \frac{1}{2}p^k. \end{aligned}$$

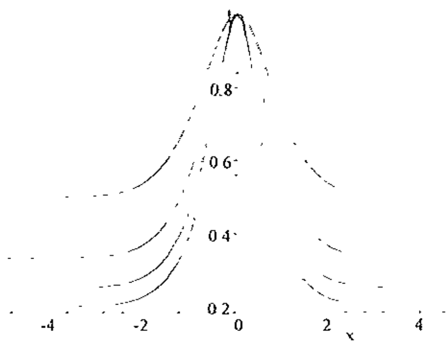
A continuación se grafican funciones de distribución de variables aleatorias Normal-Binomial Negativas haciendolas tender a una función continua. Como el tamaño de la discontinuidad de la función $F_X(x)$ tiende a cero cuando $\lambda \to \infty$ y $f_0 < 1$, y como $\lambda = -k\ln(1-q)$; $\lambda \to \infty$ cuando $k \to \infty$ ó $p \to 0$, primero haremos $k=1$ y variaremos $p$:

.

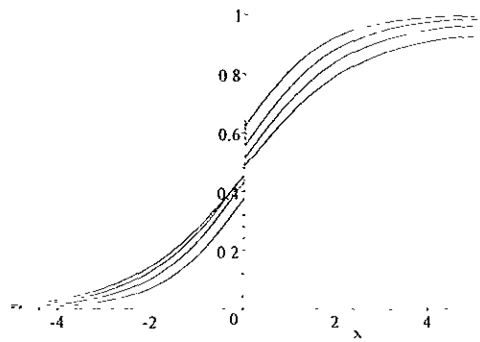



Si se hace lo mismo pero ahora graficando las funciones características se obtiene

.

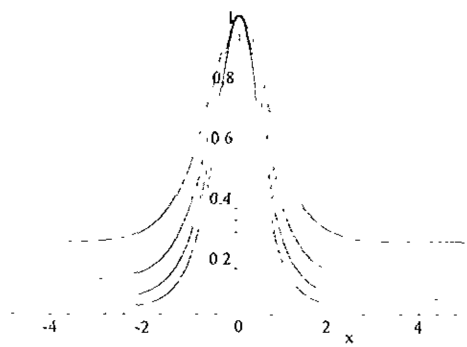



Si ahora fijamos $p = \frac{1}{2}$ y variamos $k$ obtenemos las siguientes gráficas de las funciones de distribución




ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

y de las funciones características

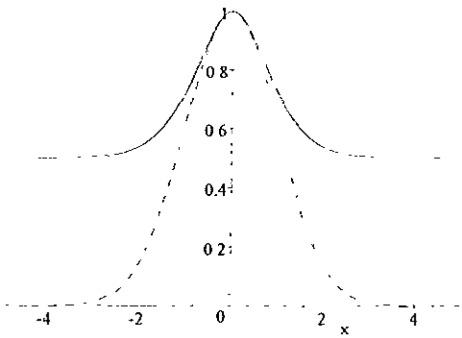



Observemos que son muy distintas las gráficas tanto de las funciones de distribución como de las características si hacemos tender la discontinuidad de $F_X(x)$ a cero haciendo $p \to 0$ ó $k \to \infty$

Al igual que en el caso de la Normal-Poisson, daremos dos casos particulares de Normal-Binomial Negativas para comparar las gráficas de sus funciones característica y de distribución con las correspondientes a las de la distribución Normal Estándar.

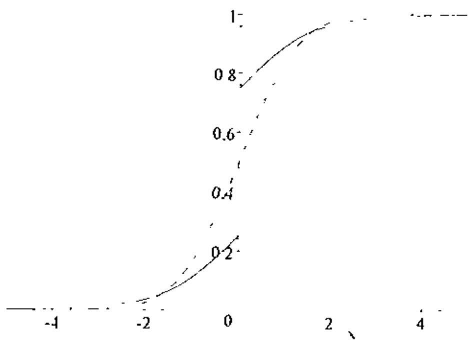
Para el caso en el que $X$ es Normal-Geométrica, es decir, $Z \backsim N(0,1)$ , $Y \backsim Geo(1/2)$ , $Z$ y $Y$ v.a independientes y $X = \sqrt{Y}Z$, las gráficas son las siguientes:

funciones características




$$\varphi_X(t) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{2}}}.$$

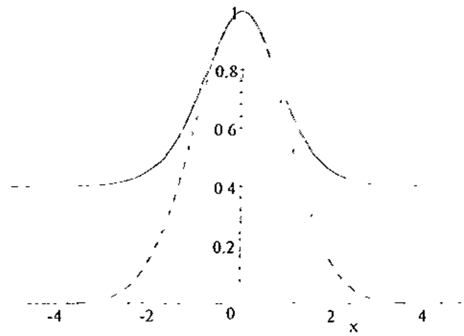
Y funciones de distribución




$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \sum_{y=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-t^2/2y} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^y dt + \frac{|x|}{4x} + \frac{1}{4}.$

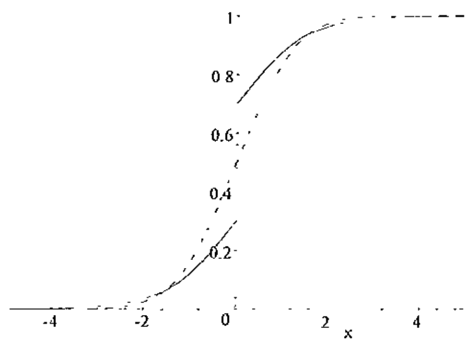
Y el caso en el que $Z \backsim N(0,1)$ , $Y \backsim BinNeg(5, 5/6)$, $Z$ y $Y$ v.a independientes y $X = \sqrt{Y}Z$, las gráficas correspondientes son las siguientes:

funciones características




$\varphi_X(t) = \left(\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}e^{-\frac{t^2}{2}}}\right)^5$

Y funciones de distribución




$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \sum_{y=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-t^2/2y} \binom{y+4}{y} \left(\frac{5}{6}\right)^5 \left(\frac{1}{6}\right)^y dt + \frac{|x|}{2x}\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

# Comentarios Finales

En base a los resultados del Capítulo 3 se tienen las siguientes observaciones que muestran las similitudes y contrastes entre la distribución normal y las distribuciones Normales-Series de Potencias Infinitamente Divisibles.

**Similitudes**

Ambas distribuciones son simétricas, esto implica que tienen media cero, son Infinitamente Divisibles y asignan probabilidad pequeña a las colas.

Tambien es posible que coincidan en sus tres primeros momentos.

**Diferencias**

La medida de distrubución de las variables aleatorias NSPID no es absolutamente continua con respecto a al medida de Lebesgue, por lo tanto no tienen densidad: su función de distribución es discontinua en cero.

Debido a esta discontinuidad, la medida de distribución de una variable aleatoria NSPID sobre intervalos pequeños alreredor del cero toma valores mayores que la medida de distribución de una variable aleatoria normal con media cero e igual varianza.

Una variable aleatoria normal y una variable aleatoria NSPID a lo mas coinciden en sus tres primeros momentos.

Si $X$ es una variable aleatoria NSPID, ésta puede ser interpretada como $X = \sqrt{Y}Z$, donde $Y$ es una variable aleatoria SPID, con función generatriz de probabilidad $G_Y(s) = e^{-\lambda+\lambda f(s)}$, y $Z$ es una variable aleatoria normal estándar.

Debido a que la función de distribución $F_X(x)$ de la variable aleatoria $X$ (NSPID) tiende a una función continua cuando $P[Y = 0] = g_0 \to 0$, y a que presenta similitudes con las variables aleatorias normal, estas pueden ser útiles en estudios de potencia de pruebas de bondad de ajuste y robusticidad.

# Bibliografía


W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Aplications.* Wiley and Sons, New York, 1968.

N.L. Johnson. S. Kotz, A.W. Kemp. *Univariate Discrete Distributions.* Wiley Interscience, New York, 1992.

B.V. Gnedenko. *The Theory of Probability.* Chelsea Publishing Company, New York, 1968

K.L. Chung. *A Course in Probability Theory.* Academic Press, Orlando, 1974.

R B. Ash. *Real Analysis and Probability.* Academic Press, New York, 1972.

A.N. Shiryayev. *Probability.* Springer-Verlag, New York, 1984.

S. Ross. *A First Course in Probability.* Prentice Hall, New Jersey, 1998.

K.L Chung *Elementary Probability Theory with Stochastic Processes.* Springer-Verlag, New York, 1979.