UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROMEDIOS EN CONTINUOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MATEMATICO

P R E S E N T A:

LIKIN CHAC SIMON ROMERO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA

2000

MAT MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Promedios en continuos

realizado por Likin Chac Simón Romero

Con número de cuenta 9350518-1 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de tesis Propietario	Dr. Alejandro Illanes Mejía	
Propietario	Dr. Sergio Macías Álvarez	
Propietario	Dr. Raúl Escobedo Conde	
Suplente	Dra. Isabel Puga Espinosa	
Suplente	Dr. Héctor Méndez Lango	Hécto Méndez L.

Consejo Departamental de Matemáticas

Mat. César Guevara

Agradecimientos

Una tesis es un trabajo el que sin un poco de ayuda anímica no se podría realizar, o por lo menos se tardaría un poco más (¿se puede más?). En realidad éste trabajo se lo quiero dedicar a todas las personas que han sido importantes a lo largo de mi vida y que, cada una a su manera, a puesto un poquito de sí en mi vida y, por tanto, en mi trabajo.

En primer lugar agradezco a mis papás, Gabriel y Cecilia, por todo lo que han hecho por mí y el gran apoyo que me han brindado. Ellos lo saben, pero no está mal decirlo de nuevo, lo orgulloso que estoy de cómo fui educado. A mi Chichina y mi padrino que también me apoyaron para estudiar lo que me gustaba y sé que siempre van a estar aquí junto a mí, no importando la distancia. A toda mi familia tanto en Chile, como en México que les guardo un cariño especial.

A Gabriela Barrera, a la cuál extraño sus quejumbres y sus nerviosísmo, ya que al no estar ella, parece que me transfirió tan personales características. A Rocío, que a pesar de ser tan diferentes nos seguimos llevando muy bien. A Ian y a Jimena, dos personas muy especiales en mi vida y que me enseñaron a ser un poco más maduro. A Soledad, Isabel y Gabriela Caraveo por tantos y tantos años de divertidos recuerdos.

A Tony, que además de ser la primera persona con la que hablé al entrar al Madrid, ha sido uno de los mejores amigos que he tenido, a pesar de ser tan distintos. A Angel, que apañador y transa, igual me cae bien. A Juan Pablo, Chanty, Fritz, Obal, Teo, etc., igual nos deberíamos reunir otra vez.

A la banda de los chafones. A Alambrito que después de un año, todavía no llega a aprender algo. A Marquito, que se pasa de buena persona. Al Yiro que complementa a los otros dos. A Felipe, que de lengua se prepara tres tacos mientras yo, apenas me como uno. A toda la banda del Instituto, no saben cuánto los aprecio. Por supuesto, a mi asesor Alejandro Illanes y a Vero, que gozan de una paciencia casi celestial.

A Tatiana, por todo lo que fué. A Adriana, por todos los buenos ratos que tuvimos, igual los sigo recordando y por la buena amistad que tenemos.

A ti. por ser una mujer tan especial. que tengo muy metida en lo más profundo de mi corazón. Yo sé que cuando lo leas vas a saberlo inmediatamente que eres tú a quien me estoy refiriendo.

Y por supuesto. a todos los que se me olvidan, que no es por ser menos importantes. sino por ser mi memoria menos funcional.

Capítulo 1

Introducción

Un concepto muy natural en matemáticas es el de promedio. Desde las matemáticas elementales se estudia el promedio aritmético de dos números x y y que se define como $\frac{x+y}{2}$. Otro promedio conocido es el promedio geométrico de dos números positivos x y y que se define como $\sqrt{xy}$.

Estas nociones pueden ser extendidas de varias maneras. El promedio aritmético se puede extender a cualquier conjunto donde tenga sentido hablar de suma y de división entre 2, como por ejemplo los espacios vectoriales.

Para un espacio topológico X, la manera natural es definir un *promedio* como una función continua $m : X \times X \to X$ que tenga las siguientes propiedades:

a) $m(x,x) = x$ para toda $x \in X$.

b) $m(x,y) = m(y,x)$ para cualesquiera $x, y \in X$ (*simétrica*).

Esta extensión ha sido particularmente útil para estudiar propiedades de los continuos. Un *continuo* es un espacio métrico compacto y conexo. Un *subcontinuo* de un espacio es un subconjunto no vacío de ese espacio que cumple con ser métrico compacto y conexo.

Los promedios empezaron siendo estudiados en el $[0,1]$ con un enfoque más general por A.N. Kolmogoroff [11], quien describió la forma estructural de estas funciones. Trece años mas tarde. G. Aumann probó que la circunferencia y, más en general, la esfera de dimensión k, con $k \geq 1$, no admite promedios y que toda dendrita admite promedios [1].

K. Borsuk probó que si un continuo localmente conexo no es unicoherente, entonces contiene una curva cerrada simple como retracto del continuo. Como cada retracto de un continuo que admite un promedio, también admite un promedio y por el resultado de Aumann, la curva cerrada simple no admite un promedio, tenemos un resultado de K. Sigmon [13] que dice que si un continuo localmente conexo admite un promedio entonces es unicoherente. Y como los continuos localmente conexos y unicoherentes son justamente las dendritas, y todas las dendritas admiten un promedio, Sigmon muestra también que un continuo localmente conexo de dimensión 1 admite un promedio si y sólo si es una dendrita.

Casi todos los resultados acerca de promedios están relacionados con espacios localmente conexos. Poco se sabe de los que no lo son. P. Bacon [3] generalizó el resultado de Sigmon, probando que un continuo que admite un promedio debe de ser unicoherente. Además mostró que el continuo $sen(\frac{1}{x})$, el cual es un continuo acíclico de dimensión 1, no admite promedios en [2]. J. Franks (sin publicar) define un promedio para el solenoide diádico, siendo éste el primer ejemplo de un continuo indescomponible de dimensión 1 que admite promedios. M. Bell y S. Watson en [4] dieron un criterio para saber si un continuo no admite promedios y dan un dendroide que no admite promedios. Este criterio fue generalizado por Kawamura y Tymchatyn en [14] para clases más generales de continuos. Recientemente J.J. Charatonik, W.J. Charatonik, K. Omiljanowski y J.R. Prajs en [6] dan un ejemplo de un dendroide suave que no admite promedios.

En la literatura se han cambiado las características de los espacios para ver si admiten promedios o no, en esta tesis lo que se hace es anexar distintas características al promedio y mostrar los resultados. Como preámbulo, en el segundo capítulo de esta tesis hablaremos de tres familias de funciones: las funciones monótonas, las funciones abiertas y las funciones confluentes. Veremos también que las funciones monótonas y las funciones abiertas, son funciones confluentes. Luego definiremos lo que es $C(X)$, $F_2(X)$ y volveremos a enunciar lo que es un promedio. Se demostrará que es equivalente que un continuo admita un promedio, a que exista una función continua de $F_2(X)$ a X, tal que a los conjuntos de un sólo punto los envie a su único elemento. Además si el promedio pertenece a alguna de las tres clases antes mencionadas, esta función también. Se mencionará un promedio para el intervalo y una idea del por qué la circunferencia no admite un promedio. Después, se demostrará el criterio de Bell y Watson, además de mostrar algunos ejemplos de continuos que no admiten promedios usando este criterio. Todo esto *nos sirve* para contextualizar el trabajo en esta tesis. Lo que sigue ahora es trabajar con los conceptos de promedio, función monótona, función abierta y función confluente.

En el tercer capítulo nos centraremos en promedios monótonos, tratando de mostrar cuáles continuos admiten promedios monótonos y cuáles no. Veremos que toda dendrita admite un promedio monótono. Después mostraremos que el abanico armónico, que es un dendroide que admite promedios, no admite promedios monótonos. Se verá que las n-celdas y el soleniode diádico sí admiten promedios monótonos y abiertos.

El cuarto capítulo trata de promedios abiertos. Se muestra un criterio para saber si un cono admite un promedio abierto. Como consecuencia de este criterio sale otro criterio más y, después se demuestra que el abanico de Cantor y los n-odos admiten promedios abiertos. Algo natural sería preguntarse si el abanico armónico admite un promedio abierto -dado los resultados anteriores-. La respuesta es que no admite promedios abiertos y se mostrará la razón de la respuesta. El último ejemplo es ver que el continuo con la forma de la letra H mayúscula admite un promedio abierto. Parecería fácil demostrar este hecho, pero la realidad es que en la prueba se utilizan técnicas no tan sencillas y por ello resulta interesante.

Finalmente el último capítulo trata de promedios confluentes, donde se ve que a pesar de que el abanico armónico no admite ni promedios monótonos ni promedios abiertos, sí admite promedios confluentes.

Capítulo 2

Promedios y funciones

Primero veamos tres definiciones de tres clases de funciones. Sean X y Y espacios topológicos.

Definición 1 *Una función suprayectiva $f : X \to Y$ es monótona si para toda $y \in Y$ se tiene que el conjunto $f^{-1}(y)$ es conexo en X.*

Definición 2 *Una función $f : X \to Y$ es abierta si para todo abierto U de X se tiene que $f(U)$ es un conjunto abierto de Y.*

Definición 3 *Una función $f : X \to Y$ es confluente si para todo subcontinuo B de Y y para toda componente K de $f^{-1}(B)$ en X se tiene que $f(K) = B$.*

Teorema 4 *Toda función monótona de un espacio métrico compacto a otro es confluente.*

Demostración. Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \to Y$ una función monótona. Para demostrar que f es confluente, basta con mostrar que para todo subcontinuo B de Y se tiene que $f^{-1}(B)$ es un subcontinuo de X.

Dado que f es continua, el conjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado.

Supongamos que $f^{-1}(B)$ no es conexo, entonces existen dos conjuntos cerrados ajenos y no vacíos H y K tales que $f^{-1}(B) = H \cup K$. Sean L y M definidos como sigue: $L = f(H)$ y $M = f(K)$. Como $H \neq \emptyset$, entonces $L \neq \emptyset$, de la misma manera, como $K \neq \emptyset$, $M \neq \emptyset$. Notemos también que como H y K son cerrados y f es una función continua entre compactos, L y M son cerrados.

Lo que se busca ahora es mostrar que los conjuntos L y M son una separación de B.

Primero notemos que $B = f(f^{-1}(B)) = f(H) \cup f(K) = L \cup M$. Así que $B = L \cup M$.

Sea $x \in L \cap M$, entonces el conjunto $f^{-1}(x)$ intersecta tanto a H como a K y $f^{-1}(x) \subset f^{-1}(B) = H \cup K$. Esto nos da una contradicción porque $H \cap f^{-1}(x)$ y $K \cap f^{-1}(x)$ forman una separación de $f^{-1}(x)$, que es conexo. En conclusión $L \cap M = \emptyset$.

Concluyendo, construimos una separación para B, lo cual es una contradicción. Por tanto $f^{-1}(B)$ es conexo, y entonces continuo.■

Usaremos el siguiente teorema cuya prueba puede ser encontrada en Teorema 5.2, p.72 de [12]

Teorema 5 (del Cable Cortado) *Sean X un espacio métrico compacto, A y B cerrados de X. Si ningún subconjunto conexo de X intersecta simultáneamente a A y a B entonces X se puede escribir de la siguiente forma $X = H \cup K$ donde H y K son subconjuntos cerrados y ajenos de X que cumplen con $A \subset H$ y $B \subset K$.*

Lema 6 *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función abierta. Si Z es un subconjunto de Y, entonces $f|_{f^{-1}(Z)} : f^{-1}(Z) \to Z$ es una función abierta.*

Demostración. Sean $g = f|_{f^{-1}(Z)}$ y V un abierto de $f^{-1}(Z)$. Entonces, existe un abierto U de X tal que $V = U \cap f^{-1}(Z)$ y de esto último se sigue que $g(V) = f(V) = f(U) \cap Z$. En conclusión, como f es una función abierta, $g(V)$ es un abierto de Z.■

Teorema 7 (G. T. Whyburn) *Toda función abierta de un espacio métrico compacto a otro espacio métrico compacto es confluente.*

Demostración. Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \to Y$ una función abierta. Supongamos que f no es confluente. Entonces existen un subcontinuo B de Y y una componente K de $f^{-1}(B)$ tal que $f(K) \neq B$. Como $f(K) \subset B$ entonces existe $p \in B - f(K)$, de donde $f^{-1}(p) \subset f^{-1}(B) - K$. Dado que K es una componente de $f^{-1}(B)$, no existe un subconjunto conexo de $f^{-1}(B)$ que intersecte a K y a $f^{-1}(p)$ -si existiera tal conexo, al unirle K, formaría un conexo de $f^{-1}(B)$ que contendría propiamente a K, que es una componente, esto sería absurdo-. Entonces aplicando el Teorema del Cable Cortado (Teorema 5) tomando como espacio a $f^{-1}(B)$, tenemos que existen dos subconjuntos H y L cerrados y ajenos de $f^{-1}(B)$ y, como $f^{-1}(B)$ es cerrado en X, son cerrados en X que cumplen con que $f^{-1}(B) = H \cup L$, $K \subset H$ y $f^{-1}(b) \subset L$. Dado que X y Y son compactos, $f(H)$ es un subconjunto cerrado y no vacío en Y. Dado que H y L forman una disconexión de $f^{-1}(B)$, H es un abierto de $f^{-1}(B)$ y, por el Lema 6, $f(H)$ es abierto en B. Como $H \cap f^{-1}(p) = \emptyset$, $p \notin f(H)$. Resumiendo, hemos construido un conjunto cerrado, abierto y no vacío $f(H)$ que está contenido propiamente en B, contradiciendo la conexidad de B.■

Sea X un contínuo. A contínuación definiremos dos conjuntos a los cuales nos referiremos después.

Definición 8 *Se denota como $C(X)$ al conjunto de todos los subcontinuos de X. Es decir:*

$$C(X) = \{A \subset X : A \text{ es un subcontinuo de } X\}$$

Definición 9 *Se denota como $F_2(X)$ al conjunto de subconjuntos no vacíos de X que tienen a lo más dos elementos. Es decir:*

$$F_2(X) = \{A \subset X : A \text{ tiene a lo más dos elementos y } A \neq \emptyset\}$$

A estos dos espacios los consideraremos con la métrica de Hausdorff, con la que resultan ser espacios topológicos. Para más información acerca de esta métrica ver el capítulo I, pp. 3-29, en [10].

Definición 10 *Una función $m : X \times X \to X$ es un promedio si cumple con estas condiciones:*

- m es continua.
- $m(x, y) = m(y, x)$.
- $m(x, x) = x$.

El siguiente teorema nos será de utilidad y su demostración se puede encontrar en [7].

Teorema 11 *Sean X, Y y Z espacios topológicos, $f : X \to Y$ una identificación, y $g : X \to Z$ una función continua. Entonces, si g es constante en cada fibra $f^{-1}(z)$ con $z \in Y$ (es decir, cualquier par de puntos $x, y \in f^{-1}(z)$ se tiene que $g(x) = g(y)$), tenemos que existe una función continua $h : Y \to Z$ tal que $h = g \circ f^{-1}$. Además si g es abierta entonces h también lo es.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[dl, "h"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Usualmente a este teorema se le llama el Teorema de la Transgresión.

Sean el espacio topológico $F_2(X)$ como en la Definición 9, con la topología definida por la métrica de Hausdorff y $p : X \times X \to F_2(X)$ la función dada por $p(x, y) = \{x, y\}$.

Lema 12 *La función p es continua y abierta (y por tanto es una identificación).*

Demostración. Sean $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente en $X \times X$ y (x, y) el punto a donde converge. Esto implica que $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Por la forma en que se define la métrica de Hausdorff en $F_2(X)$ se sigue que $p(x_n, y_n) = \{x_n, y_n\} \to \{x, y\} = p(x, y)$, lo que demuestra que p es continua.

Ahora tomemos un abierto básico $U \times V$ de $X \times X$ tal que U y V son abiertos de X. Sea $\mathcal{U} = \{\{x, y\} \in F_2(X) : \{x, y\} \subset U \cup V, \{x, y\} \cap U \neq \emptyset$ y $\{x, y\} \cap V \neq \emptyset\}$. Por el Teorema 1.2, p. 3 en [10] y dado que los elementos de $F_2(X)$ son conjuntos cerrados, el conjunto $\mathcal{U}$ es abierto. Entonces para demostrar que p es abierta bastaría con ver que $p(U \times V) = \mathcal{U}$. Sea $\{x, y\} \in p(U \times V)$, entonces $(x, y) \in U \times V$ o $(y, x) \in U \times V$. Si sucede que $(x, y) \in U \times V$ entonces se cumple con que $x \in U$ y $y \in V$, se sigue que $x, y \in U \cup V$, $x \in \{x, y\} \cap U$ y $y \in \{x, y\} \cap V$ y, en este caso $\{x, y\} \subset \mathcal{U}$. Si $(y, x) \in U \times V$ tenemos que $y \in U$ y $x \in V$, se sigue que $x, y \in U \cup V$, $y \in \{x, y\} \cap U$ y $x \in \{x, y\} \cap V$. En conclusión $\{x, y\} \subset \mathcal{U}$. Por otro lado, si $\{x, y\} \in \mathcal{U}$, entonces por construcción, $\{x, y\} \subset U \cup V$, $\{x, y\} \cap U \neq \emptyset$ y $\{x, y\} \cap V \neq \emptyset$. Para demostrar que $\{x, y\} \in p(U \times V)$, es suficiente mostrar que $x \in U$ y $y \in V$, o que $y \in U$ y $x \in V$. Supongamos que $x \notin U$ y $y \notin V$. Como $\{x, y\} \cap U \neq \emptyset$ tenemos que $y \in U$, y similarmente, como $\{x, y\} \cap V \neq \emptyset$ se obtiene que $x \in V$. Finalmente concluimos que $\mathcal{U} \subset p(U \times V)$. De lo anterior se sigue que $p(U \times V) = \mathcal{U}$ y, por tanto, que p es abierta.■

Dado un subconjunto cerrado D de $X \times X$ denotaremos como $D^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in D\}$ y diremos que D es simétrico si $D = D^{-1}$.

Lema 13 *Sean A un continuo de $F_2(X)$ y $Z = p^{-1}(A)$, entonces Z tiene a lo más 2 componentes y en el caso en que tiene exactamente 2 componentes, cada una de ellas es simétrica a la otra (en $X \times X$).*

Demostración. Supongamos, por el contrario. que Z tiene al menos 3 componentes, entonces existen subconjuntos cerrados y ajenos H, K y L de $X \times X$ tales que $Z = H \cup K \cup L$. Notemos que si a cada pareja ordenada (x, y) le asociamos su simétrico (y, x), esta asociación resulta ser un homeomorfismo. También notemos que $(x, y) \in Z$ si y sólo si $(y, x) \in Z$ pues $p(x, y) = p(y, x)$. De manera que $Z = Z^{-1} = H^{-1} \cup K^{-1} \cup L^{-1}$. Ya que H es abierto y cerrado en Z, H^{-1} también resulta ser abierto y cerrado en Z. Entonces $H \cup H^{-1}$ es cerrado y abierto en Z y, en consecuencia, $Z - (H \cup H^{-1})$ es abierto y cerrado en Z y además es simétrico.

Si $Z - (H \cup H^{-1}) \neq \emptyset$ entonces llamamos $M = p(H \cup H^{-1})$ y $N = p(Z - (H \cup H^{-1}))$. En conclusión M y N son cerrados. abiertos y no vacíos de A -por ser p continua y abierta entre compactos-, lo cual contradice la conexidad de A. Notemos que lo mismo sucedería si hubieramos tomado en vez de H, los conjuntos K y L.

Tenemos entonces que $Z - (H \cup H^{-1}) = \emptyset$, $Z - (K \cup K^{-1}) = \emptyset$ y $Z - (L \cup L^{-1}) = \emptyset$. Entonces $Z = H \cup H^{-1} = K \cup K^{-1} = L \cup L^{-1}$y por esto último $K \cup L \subset H^{-1}$, $H \cup L \subset K^{-1}$ y $H \cup K \subset L^{-1}$. Sea $(x, y) \in L$, por la primera contención $(x, y) \in H^{-1}$, entonces $(y, x) \in H$ y. por ser ajenos H y K, $(y, x) \notin K$ implicando entonces que $(x, y) \notin K^{-1}$, contradiciendo que $H \cup L \subset K^{-1}$. Por tanto Z tiene a lo más 2 componentes.

Supongamos ahora que Z tiene dos componentes P y Q.

Si $P \cap P^{-1} \neq \emptyset$, entonces $P \cup P^{-1}$ es un conexo de Z y se sigue que $P = P^{-1}$. Si tomamos $(x, y) \in Q$, tenemos $(x, y) \notin P$, se sigue que $(y, x) \notin P^{-1}$ y finalmente $(y, x) \in Q$. Así que $P = P^{-1}$ y $Q = Q^{-1}$. Otra vez, al tomar las imágenes de P y Q bajo la función p, $p(P)$ y $p(Q)$ son dos cerrados y abiertos de A, contradiciendo que A es conexo.

Entonces $P \cap P^{-1} = \emptyset$. Por ser Q la otra componente $P^{-1} \subset Q$. Similarmente, $Q^{-1} \subset P$. Así que $Q \subset P^{-1}$. Por tanto $Q = P^{-1}$.■

Teorema 14 *El continuo X admite un promedio si y sólo si existe una función $n : F_2(X) \to X$ tal que n es continua y $n(\{x\}) = x$ para toda $x \in X$. Además el promedio* *es abierto (monótono o confluente) si y sólo si n es una función abierta (monótona o confluente, respectivamente).*

Demostración. Supongamos que X admite un promedio $m : X \times X \to X$. Tomemos la función $p : X \times X \to F_2(X)$ definida como en el Lema 12. Entonces p es continua y abierta. Para continuar, aplicaremos el Teorema de la Transgresión (Teorema 11), entonces faltaría ver que m es constante en las fibras de p.

Sea $\{x, y\} \in F_2(X)$ y fijémonos en su imagen inversa bajo p. Notemos que $p^{-1}(\{x, y\}) = \{(x, y), (y, x)\}$. Dado que m es un promedio $m(x, y) = m(y, x)$. Entonces aplicando el Teorema de la Transgresión $n = m \circ p^{-1} : F_2(X) \to X$ es una función bien definida y continua

Fijémonos en $\{x\} \in F_2(X)$. Por como está definida la p tenemos que $\{(x, x)\} = p^{-1}(\{x\})$ y luego $m(x, x) = x$. Entonces $n(\{x\}) = x$.

Si además m es un promedio abierto, n es una función abierta.

Supongamos que m es un promedio monótono. Sean $x \in X$ y $A = m^{-1}(x)$, entonces A es un subcontinuo de $X \times X$. Tenemos entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & p & \\ X \times X & \rightarrow & F_2(X) \\ \downarrow m & \swarrow & n \\ X & & \end{array}$$

Como el diagrama conmuta, tenemos que $A = p^{-1}(n^{-1}(x))$. Como A es un continuo $p(A) = n^{-1}(x)$ es un conexo, y por tanto n es monótona.

En [5] (propiedad IV, p.214) se demuestra que si la composición de dos funciones es confluente, entonces la segunda es confluente. En este caso tendríamos que si m es confluente entonces, como $m = n \circ p$, n es confluente.

Supongamos ahora que existe una función $n : F_2(X) \to X$ tal que $n(\{x\}) = x$. Construiremos entonces un promedio para X. Otra vez tomemos la función $p : X \times X \to F_2(X)$ definida como en el Lema 12.

Definamos $m : X \times X \to X$ como $m(x,y) = n \circ p(x,y)$. Tenemos nuevamente el mismo diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & p & \\ X \times X & \to & F_2(X) \\ \downarrow m & \swarrow & n \\ X & & \end{array}$$

Sea $(x,y) \in X \times X$. entonces $m(x,y) = n(\{x,y\}) = n(\{y,x\}) = m(y,x)$. Así que m es una función simétrica.

Sea $x \in X$, *entonces* $m(x,x) = n(\{x\}) = x$.

Como la composición de funciones continuas es continua. m lo es. Así que m es un promedio.

Si además n fuera abierta entonces, como p también lo es. m sería abierta. Igualmente si n fuera confluente entonces, como m sería composición de dos funciones confluentes, m también sería confluente. Ver [5] (propiedad III. p.214).

Supongamos que n es monótona pero m no. Entonces existe $q \in X$ tal que si llamamos $\mathcal{Z} = m^{-1}(q)$. $\mathcal{Z}$ es disconexo. Sea $\mathcal{A} = p(\mathcal{Z})$, como $m = n \circ p$ tenemos que $n(\mathcal{A}) = q$ y luego $\mathcal{A} \subset n^{-1}(q)$. Sea $\{x,y\} \in n^{-1}(q)$, tenemos que $n(\{x,y\}) = q$. entonces $m(x,y) = q$, $(x,y) \in \mathcal{Z}$ y $\{x,y\} = p(x,y) \in p(\mathcal{Z}) = \mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A} = n^{-1}(q)$ y. por ser n monótona, $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $F_2(X)$. Usando el Lema 13 tenemos que $\mathcal{Z}$ tiene a lo más 2 componentes y cada una de ellas es simétrica a la otra. Como estamos suponiendo que $\mathcal{Z}$ es disconexo. $\mathcal{Z}$ tiene exactamente dos componentes distintas pero simétricas que denotaremos como $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}^{-1}$. Ahora, por el hecho de que $m(q,q) = q$, $(q,q) \in \mathcal{Z}$. Dado que este punto y su simétrico son el mismo. tenemos que $(q,q) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}^{-1}$ lo cuál es absurdo por que las componentes son ajenas.

Con esto queda demostrado el teorema.■

Ahora veremos algunos ejemplos de continuos que admiten promedios y otros que no.

Ejemplo 15 *El intervalo* $I = [0,1]$ *admite un promedio.*

En el intervalo podemos definir una función $m : I \times I \to I$ dada por $m(s,t) = \frac{s+t}{2}$. Esta función está bien definida ya que m le asigna a cada dos puntos en I, el punto medio entre ellos -que también está en I-.

Es fácil ver que esta función es continua. Como la suma conmuta en I, tenemos que $m(s,t) = m(t,s)$. Si evaluamos $m(s,s)$ tenemos que $m(s,s) = \frac{s+s}{2} = \frac{2s}{2} = s$. Por tanto m es un promedio para I.□

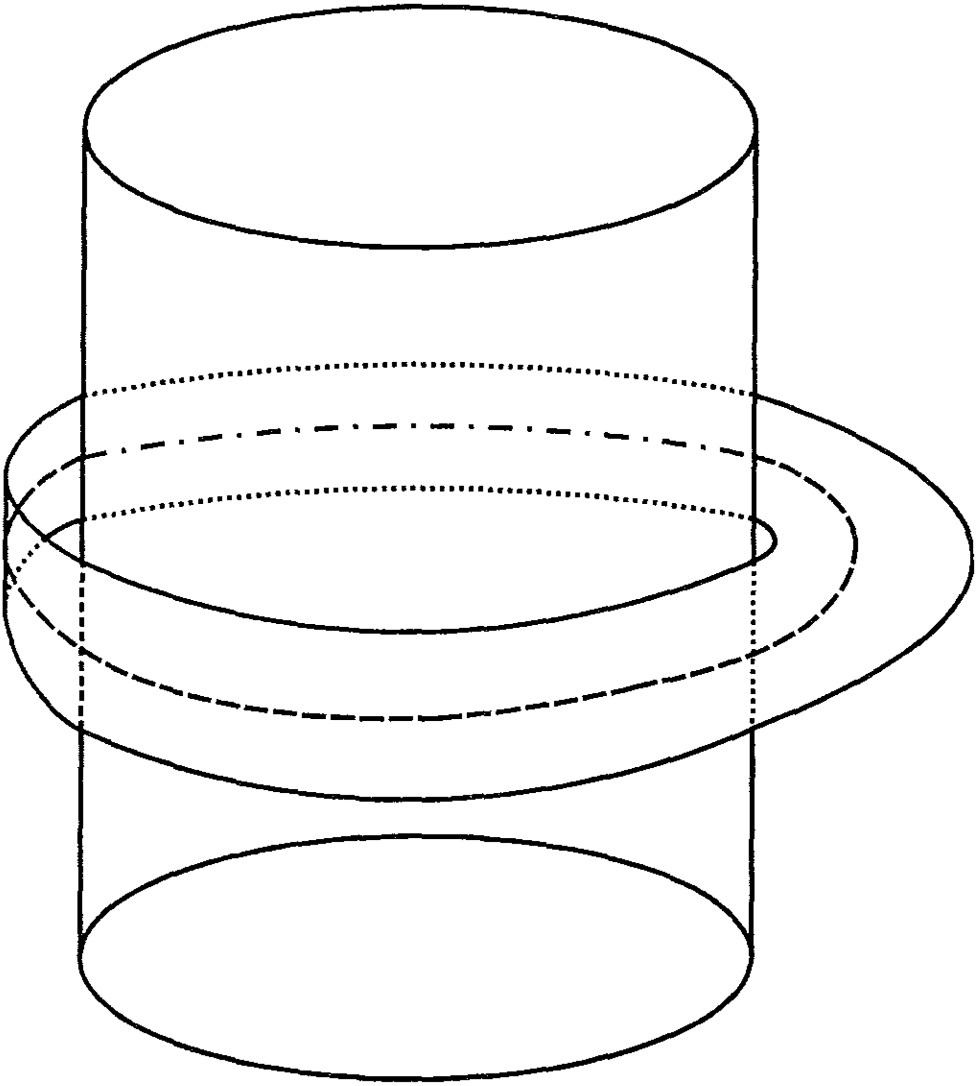
A lo largo de esta tesis mostraremos otros continuos que admiten promedios.

Ejemplo 16 *La circunferencia no admite promedios.*

No vamos a dar una prueba formal de este hecho, tan sólo mostraremos una idea de cómo demostrarlo. Para ello necesitamos un modelo para el hiperespacio $F_2(S^1)$, denotando a la circunferencia unitaria como S^1. El modelo para este hiperespacio es una banda de Moebius (Ejercicio 1.26, p. 9 de [10]) y podemos ver que a $F_1(S^1)$ le corresponde justo la orilla de la banda, la cual forma una circunferencia.

Supongamos que S^1 admitiera un promedio, entonces por el Teorema 14 habría una función continua $n : F_2(S^1) \to S^1$ tal que la imagen bajo n de cualquier conjunto singular es justamente el único elemento de ese conjunto. En términos topológicos, existiría una retracción de la Banda de Moebius a su orilla. Ahora daremos una idea de porqué esto no es posible.

La demostración formal requiere de herramientas como el grupo fundamental. Aquí sólo daremos una idea geométrica. Imaginemos una banda de Moebius y un cilindro que usa esta banda como cinturón (ver Figura 2-1). Notemos que la orilla de la banda le dá dos vueltas al cilindro, mientras que si trazamos una línea longitudinal por el centro de la banda, formando una circunferencia, ésta sólo le daría una vuelta. Ahora si existiera tal función, tendríamos que mandar esa línea longitudinal continuamente a la orilla, siempre respetando que esa línea le dá una vuelta. Pero la circunferencia de la orilla se completa hasta la segunda vuelta, y puesto que no podemos romper la línea longitudinal, no hay forma de lograrlo. Para mas información al respecto consultar [2] y [3].□



Figura~2-1: El cilindro y la banda de Moebius.

Ahora presentaremos un criterio para saber si un continuo no admite promedios. Éste es el criterio de Bell y Watson presentado en [4].

Denotaremos al producto $[0,1] \times [0,1]$ como Γ. La diagonal de Γ la denotaremos por Δ. Para demostrar este criterio necesitaremos algunos resultados previos.

Definición 17 *Un continuo X es unicoherente si para cualesquiera dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo. Un continuo es hereditariamente unicoherente si cualquier subcontinuo es unicoherente.*

Lema 18 *Si Y es un espacio localmente conexo y Z es una componente de un subconjunto W de Y entonces $Fr_Y(Z) \subset Fr_Y(W)$.*

Demostración. Sea $x \in Fr_Y(Z)$ y supongamos que existe un abierto U de Y tal que $x \in U \subset W$. Dado que Y es localmente conexo. existe un abierto conexo V de Y, que cumple con $x \in V$ y $V \subset U$. Así que $V \subset W$. Como Z y V son conexos y dado que $x \in Fr_Y(Z) \cap V$. tenemos que $Z \cup V$ es un conexo contenido en W, que contiene a Z. Como Z es una componente de W, $V \subset Z$. Esto contradice el hecho de que $x \in Fr_Y(Z)$. Por tanto $U \cap (Y - W) \neq \emptyset$. Esto muestra que $x \in \overline{Y - W}$. Por otra parte $x \in Fr_Y(Z) \subset \overline{Z} \subset \overline{W}$. Por tanto $x \in Fr_Y(W)$.■

Lema 19 *Si $m : \Gamma \to [0,1]$ es un promedio, entonces existe un continuo K contenido en $\Gamma - m^{-1}(\{0,1\})$ el cual intersecta a Δ y que intersecta también al conjunto $C = (\{0,1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\})$.*

Demostración. Sean $A = m^{-1}(0)$ y $B = m^{-1}(1)$. Entonces A y B son cerrados, no vacíos y ajenos. Sean U y V abiertos de Γ tales que $\overline{U}^{\Gamma} \cap \overline{V}^{\Gamma} = \emptyset$. $A \subset U$ y $B \subset V$. Sean W la componente de U que contiene a $(0,0)$ y Z la componente de $\Gamma - W$ que contiene a $(1,1)$. Entonces. por el Ejercicio 76.31 en [10]. $\Gamma - Z$ es conexo. El cuadrado admite promedios (Ejemplo 32). por tanto, es unicoherente (por lo demostrado por K.Sigmon en [13]) y, entonces, $Fr_\Gamma(Z) = \overline{\Gamma - Z}^\Gamma \cap Z$ es conexo. Definamos $K = Fr_\Gamma(Z)$. Del Lema 18 concluimos que $Fr_\Gamma(Z) \subset Fr_\Gamma(\Gamma - W) = Fr_\Gamma(W) \subset Fr_\Gamma(U)$. Entonces $K \subset \Gamma - m^{-1}(\{0,1\})$ -porque $A \subset U$, $B \subset V$, $K \cap U = \emptyset$ y $K \cap V = \emptyset$-. Dado que $(0,0) \notin Z$ y $(1,1) \in Z$, cualquier subconjunto conexo de Γ que contenga a $(0,0)$ y a $(1,1)$ intersecta a K. Por tanto Δ y C intersectan a K.■

Definición 20 *Sean X un continuo y d una métrica para X. Una función continua f entre dos subespacios de X se dice que es una función ε-cercana a la identidad si para toda x en el dominio de f, $d(x, f(x)) < \varepsilon$.*

En toda la tesis denotaremos a los arcos por sus puntos extremos, es decir, el arco que tiene como puntos extremos a los puntos a y b lo denotamos como ab. Si se da el caso de que a y b fueran iguales, ab denota al conjunto de un solo punto $\{a\}$. Notemos que dado dos puntos pueden existir muchos arcos que los tengan como extremos.

Definición 21 *Una sucesión de arcos $\{a_nb_n\}_{n=1}^\infty$ se dice que converge fuertemente a un arco ab si para toda $\varepsilon > 0$, existe $N \geq 1$ tal que para cada $n \geq N$, existe una función ε-cercana a la identidad $h : ab \to a_nb_n$ tal que $h(a) = a_n$ y $h(b) = b_n$.*

Lema 22 *Sean X un continuo y $m : X \times X \to X$ un promedio. Supongamos que X contiene un arco $A = ab$ y dos sucesiones de arcos $\{a_nc_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{a_ne_n\}_{n=1}^\infty$ ambas convergiendo fuertemente a ab, y siendo el espacio X tal que cualquier subcontinuo que contenga a c_n y a e_n contiene a a_n. Entonces para cada subcontinuo K de $A \times A$ tal que $K \cap \{(x,x) : x \in A\} \neq \emptyset$ y $K \cap (\{a\} \times A) \neq \emptyset$, se tiene que $K \cap m^{-1}(a) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea d una métrica para X. Consideraremos al espacio $X \times X$ con la siguiente métrica:

$$\rho((u,v),(x,y)) = \max\{d(u,x), d(v,z)\}.$$

Para probar el lema supongamos, por el contrario, que existe un subcontinuo K de $A \times A$ y puntos p y $q \in A$ tales que $\{(p,p),(a,q)\} \subset K$ y K es ajeno a $m^{-1}(a)$. Sea $K^{-1} = \{(y,x) \in A \times A : (x,y) \in K\}$. Así que K^{-1} es un subcontinuo de $A \times A$ y, como m es una función simétrica, $K^{-1} \cap m^{-1}(a) = \emptyset$. Sea $H = K \cup K^{-1}$. Como $(p,p) \in K \cap K^{-1}$ y dado que K y K^{-1} son subcontinuos, H es un subcontinuo simétrico de $X \times X$ y $a \notin m(H)$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_{2\varepsilon}(a) \cap m(H) = \emptyset$. Por la continuidad uniforme de m, existe $\delta < \varepsilon$ tal que $\rho((u,v),(x,y)) < 2\delta$, implica que $d(m(u,v), m(x,y)) < \varepsilon$. Escojamos $n \geq 1$ y dos funciones δ-cercanas a la identidad $h : ab \to a_n c_n$ y $k : ab \to a_n b_n$, tales que $h(a) = a_n = k(a)$, $h(b) = c_n$ y $k(b) = e_n$.

Sea $B = \{(h(x), h(y)) : (x,y) \in H\} \cup \{(k(x), h(y)) : (x,y) \in H\} \cup \{(k(x), k(y)) : (x,y) \in H\}$.

Notemos que cada uno de los elementos de la unión son continuos -ya que son imágenes continuas de H-. El primero y el segundo tienen a $(h(a), h(q)) = (a_n, h(q)) = (k(a), h(q))$, el segundo y el tercero tienen al punto $(k(q), h(a)) = (k(q), a_n) = (k(q), k(a))$. Así que B es un subcontinuo de $X \times X$.

Como m es un promedio, $h(p) = m(h(p), h(p)) \in m(B)$ y $k(p) = m(k(p), k(p)) \in m(B)$. Sea $C = m(B) \cup h(p)c_n \cup k(p)e_n$, donde $h(p)c_n$ (respectivamente, $k(p)e_n$) es el subarco de $a_n c_n$ (respectivamente, de $a_n e_n$) que une a $h(p)$ con c_n (respectivamente, a $k(p)$ con e_n). Entonces C es un subcontinuo de X conteniendo a c_n y e_n. Por hipótesis, $a_n \in C$. Esto implica que $a_n \in m(B)$.

Sea $z \in B$ tal que $a_n = m(z)$. Veremos el caso cuando z es de la forma $z = (k(x), h(y))$, con $(x,y) \in H$, siendo los otros casos similares a éste.

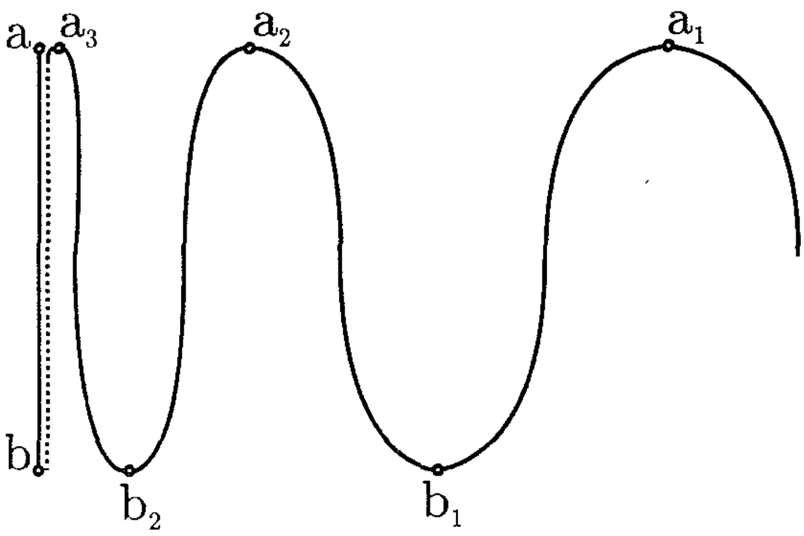
Como $d(x, k(x)) < \delta$ y $d(y, h(y)) < \delta$, por como se eligió la δ, $d(m(x,y), a_n) = d(m(x,y), m(z)) < \varepsilon$. Dado que $d(a, a_n) = d(a, k(a)) < \delta < \varepsilon$, $d(a, m(x,y)) \leq d(a, a_n) + d(a_n, m(x,y)) < 2\varepsilon$. Así que $m(x,y) \in m(H) \cap B_{2\varepsilon}(a)$. Esto contradice la elección de ε.■

Teorema 23 (M. Bell y S. Watson) *Sea X un continuo. Supongamos que X contiene un arco $A = ab$ y cuatro sucesiones de arcos $\{a_nc_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_ne_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{f_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ cada una convergiendo fuertemente a A, y X es tal que para cada n, cada subcontinuo que contenga a c_n y a e_n contiene a a_n y cada subcontinuo que contenga a f_n y a g_n contiene a b_n. Entonces X no admite promedios.*

Demostración. Supongamos que existe un promedio $m : X \times X \to X$. Como A es un retracto absoluto (es decir que para cualquier continuo que contenga a A existe una retracción del continuo en A), sea $r : X \to A$ una retracción. Llamemos $M = (rom)|_{A\times A}$. Entonces $M : A \times A \to A$ es un promedio en A. Por el Lema 19 existe un subcontinuo K de $A \times A$ tal que $K \cap M^{-1}(\{a,b\}) = \emptyset$. $K \cap \{(x,x) : x \in X\} \neq \emptyset$ y cumple con una de las siguientes condiciones $K \cap (\{a,b\} \times A) \neq \emptyset$ o $K \cap (A \times \{a,b\}) \neq \emptyset$. No importando cuál de éstas se cumpla, el continuo K satisface las condiciones del lema anterior, ya sea tomando la pareja de sucesiones $\{a_nc_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{a_ne_n\}_{n=1}^{\infty}$, o la pareja $\{f_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$, según sea el caso, y entonces $K \cap M^{-1}(a) \neq \emptyset$ o $K \cap M^{-1}(b) \neq \emptyset$ llegando así a una contradicción, ya que partimos de que $K \cap M^{-1}(\{a,b\}) = \emptyset$. Esto termina la demostración del teorema.■

Veamos algunos ejemplos que ilustran cómo se puede determinar, mediante éste teorema, si un continuo no admite promedios.

Fijémonos primero en la Figura 2-2. Este continuo se construye tomando la cerradura de la curva $sen(\frac{1}{x})$. En la figura tenemos algunos puntos importantes. Los puntos a y b son los extremos del arco límite, al cual denotamos por A, es decir $A = ab$. Otros puntos ahí marcados son las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ que convergen a a y a b, repectivamente. Ahora notemos que $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_nb_{n-1}\}_{n=2}^{\infty}$, $\{b_na_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_na_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ son cuatro sucesiones de arcos que convergen fuertemente a A. También se cumple que cualquier subcontinuo que contenga a b_{n-1} y b_n contiene a a_n para toda $n \geq 2$ y si un



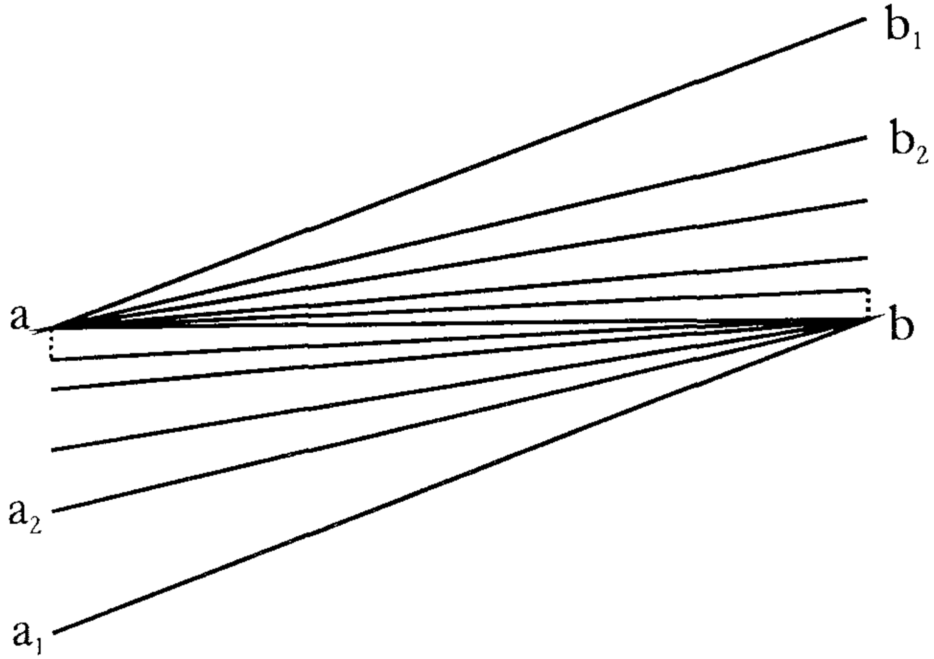
Figura~2-2: La curva $sen(\frac{1}{x})$.

subcontinuo contiene a a_n y a_{n+1} contiene a b_n para toda n. Entonces, por el Teorema 23, este continuo no admite promedios.

Este ejemplo fue el primer continuo que no contiene curvas cerradas simples, de dimensión uno para cual se mostró que no había promedios [2].

Otro continuo que no admite promedios es el doble abanico (conocido también como la doble escoba) mostrado en la Figura 2-3. Otra vez tenemos un arco A, donde sus puntos extremos son a y b. Las cuatro sucesiones de arcos que convergen fuertemente a A son $\{ab_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{ab_{2n}\}_{n=2}^{\infty}$, $\{ba_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{ba_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$. Cualquier subcontinuo que contenga a b_{2n-1} y a b_{2n} debe de contener a a, y cualquier subcontinuo que contenga a a_{2n-1} y a_{2n} contiene a b. Entonces, por el Teorema 23, éste continuo no admite promedios.

Este es un ejemplo de un dendrioide (ver la Definición 24) que no admite promedios.



Figura~2-3: El doble abanico.

Capítulo 3

Promedios Monótonos

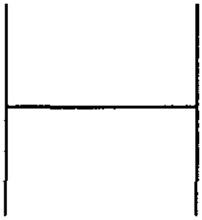
Definición 24 *Un continuo se dice que es un dendroide si es hereditariamente unicoherente (ver Definición 17) y arco-conexo.*

En la Figura 3-1 se muestran algunos ejemplos de dendroides, los cuales serán usados más tarde. El primero (A) es el más sencillo, un arco. El segundo (B) es un continuo que es homeomorfo a la letra "H" mayúscula. El continuo con la letra (C) es llamado $F_{\perp}$. El abanico armónico (D) es otro ejemplo y por último, el abanico de Cantor (E). Una circunferencia es un continuo que no es un dendroide, es más, se puede ver fácilmente que un continuo que contenga una curva cerrada simple no es un dendroide, ya que no cumpliría con la unicoherencia hereditaria, pues una curva cerrada simple no es unicoherente.

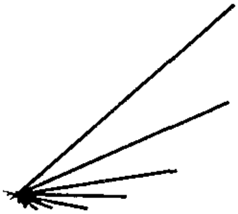
Lema 25 *Todo dendroide es únicamente arco-conexo. (Es decir, para cualesquiera dos puntos del dendroide, existe un único arco que los une).*

Demostración. Supongamos que existen dos puntos distintos a y b para los cuales hay dos arcos α y β que unen a estos dos puntos. Se tiene que a y b están en $\alpha \cap \beta$. Estos dos arcos son subcontinuos del dendroide y, por la unicoherencia del mismo, $\alpha \cap \beta$ es un

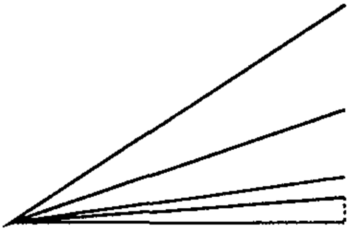
(A). El arco



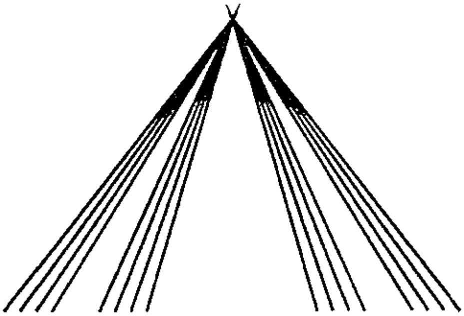
(B). La "H" mayúscula



(C). El continuo F_ω



(D). El abanico armónico



(E). El abanico de Cantor

Figura~3-1: Algunos dendroides

subcontinuo tanto del espacio, como de los arcos α y β. Como todos los subcontinuos no degenerados de un arco son arcos y, $\alpha \cap \beta$ es un subcontinuo de α y de β, que contiene a a y a b. tenemos entonces que $\alpha \cap \beta$ es un arco contenido tanto en α como en β, que tiene a ambos puntos a y b. Entonces $\alpha = \alpha \cap \beta = \beta$.■

Definición 26 *Si a y b son puntos de un dendroide X, entonces denotaremos como ab al único arco que tiene como extremos a los puntos a y b.*

Definición 27 *Una dendrita es un dendroide localmente conexo.*

De la Figura 3 el arco (A), el continuo homeomorfo a la letra "H" (B), y el F_ω (C) son dendritas. porque los tres son localmente conexos. El abanico armónico (D) y el de Cantor (E) son dendroides que no son dendritas.

Recordemos que denotamos como $C(X)$ al conjunto de todos los subcontinuos del espacio X (Definición 8) y considerando una métrica particular (métrica de Hausdorff) resulta ser un espacio topológico.

Lema 28 *Si X es una dendrita y si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones en X tales que $a \to a$ y $b_n \to b$, se tiene que $a_nb_n \to ab$ en $C(X)$.*

Demostración. Supongamos que $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge al arco ab, entonces existe una $\varepsilon > 0$ y existe una subsucesión de $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que todos sus elementos distan de ab (con respecto a la métrica de Hausdorff) en por lo menos ε. De esa sucesión podemos extraer una subsucesión convergente a un elemento $A \in C(X)$. Entonces la distancia de A a ab es por lo menos ε. En particular $A \neq ab$. Para no manejar subíndices, supongamos directamente que $a_nb_n \to A$.

Obtendremos una contradicción mostrando que $A = ab$.

Como $a_n \to a$ y $b_n \to b$ tenemos que $a, b \in A$ y por ser X un hereditariamente unicoherente tenemos que $ab \subset A$. Estas dos últimas afirmaciones se demuestran en [9].

Sea $N_\varepsilon(ab) = \{x \in X : d(x,y) < \varepsilon \text{ para alguna } y \in ab\}$.

Lo que falta es ver que para toda $\varepsilon > 0$, se cumple que $A \subset N_\varepsilon(ab)$. Esto es suficiente para demostrar que $A \subset ab$. Tomamos las vecindades de radio ε con centro en a y otra con centro en b. Como el espacio X es localmente conexo, tenemos que existen vecindades U y V de a y b, respectivamente, tales que $\overline{U}$ y $\overline{V}$ son conexos, $U \subset \overline{U} \subset B_\varepsilon(a)$ y $V \subset \overline{V} \subset B_\varepsilon(b)$. Denotemos por $B = \overline{U} \cup ab \cup \overline{V}$. B es un continuo y, por construcción, $B \subset N_\varepsilon(ab)$. Dado que $a_n \to a$ y $b_n \to b$, existe un entero positivo N que cumple con que para toda $n \geq N$, a_n pertenece a U y b_n a V. Como los puntos a_n y b_n están en B para $n \geq N$, están en $a_nb_n \cap B$, que por la unicoherencia hereditaria del espacio X, es un arco, dado que es un subcontinuo del arco a_nb_n, y que une a los extremos a_n y b_n, pero entonces tenemos que $a_nb_n = a_nb_n \cap B$, es decir $a_nb_n \subset B$, entonces como a_nb_n converge a A y B es cerrado, se concluye que $A \subset B \subset N_\varepsilon(ab)$. Por tanto $A = ab$. Como dijimos antes, esta contradicción prueba el lema.■

Notemos que si consideramos una de las sucesiones como constante, por ejemplo $a_n = a$ para toda n, el lema nos dice que la función $\alpha : X \to C(X)$ definida por $\alpha(p) = ap$ es una función continua.

Definición 29 *Dado un continuo X, una función de Whitney para $C(X)$ es una función $\mu : C(X) \to [0,1]$ tal que:*

- μ es continua
- $\mu(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$.
- $\mu(A) < \mu(B)$, si A es un subcontinuo propio de B, y $A, B \in C(X)$.
- $\mu(X) = 1$.

Un ejemplo de una función de Whitney para $C([0,1])$, tomando al $[0,1]$ con la métrica usual, es la función longitud -a cada subcontinuo del arco se le asocia su longitud-. Claramente la función es continua, los conjuntos de un sólo punto (intervalos cerrados degenerados) tienen longitud cero, si un arco está contenido en otro su longitud será menor y la longitud del espacio $[0,1]$ es 1.

No en todos los espacios, la función diámetro resulta ser de Whitney para $C(X)$. Sin embargo, se sabe que, dado un espacio compacto, existe una función de Whitney para $C(X)$ (Teorema 13.4, p. 107 [10]).

Teorema 30 *Si X es una dendrita entonces X admite promedios monótonos.*

Demostración. Sea μ una función de Whitney para $C(X)$.

Sean a y $b \in X$. Consideremos la función $g : ab \to \mathbb{R}$ dada por $g(p) = \mu(ap) - \mu(bp)$. Para demostrar que g es continua, tomemos una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en ab tal que $p_n \to p$. Por el Lema 28 tenemos que $ap_n \to ap$ y $bp_n \to bp$ y, entonces, por la continuidad de la μ,

$$g(p_n) = \mu(ap_n) - \mu(bp_n) \to \mu(ap) - \mu(bp) = g(p).$$

Por tanto g es continua.

Notemos que $g(a) = \mu(aa) - \mu(ab) = -\mu(ab)$, luego $g(a) \leq 0$. De la misma manera resulta que $g(b) \geq 0$. Veamos que g es estrictamente creciente, con respecto al orden natural del arco ab. Sean p y p' puntos en ab tales que el arco ap está contenido propiamente en ap', entonces $\mu(ap) < \mu(ap')$ y como de la suposición se obtiene también que $-\mu(bp) < -\mu(bp')$, tenemos que $g(p) < g(p')$. Por ser g una función continua, existe un punto $q \in ab$ tal que $g(q) = 0$ y, dado que g es estrictamente creciente, este punto q es único. Definamos $m(a, b) = q$. Por lo dicho anteriormente, m está bien definida.

Sea $a \in X$ y supongamos que $m(a, a) = q$. Sabemos por la definición de m que q es un punto del conjunto aa, pero éste es justamente $\{a\}$ y de aquí que $m(a, a) = a$.

Sean a y $b \in X$, $m(a, b) = p$ y $m(b, a) = q$. El punto p es el único en el arco ab tal que $\mu(ap) - \mu(bp) = 0$ y, por consecuencia, $\mu(ap) = \mu(bp)$. Por otro lado q cumple con que $\mu(bq) - \mu(aq) = 0$ y, de eso, se obtiene que $\mu(bq) = \mu(aq)$, por tanto $p = q$.

Para demostrar que m es un promedio falta ver que m es una función continua.

Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en X tales que $a_n \to a$ y que $b_n \to b$. Entonces $(a_n, b_n) \to (a, b)$. Necesitamos probar que $m(a_n, b_n) \to m(a, b)$.

Supongamos que $m(a_n, b_n) \to q$ para alguna $q \in X$. Tenemos entonces que, por el Lema 28. $a_n m(a_n, b_n) \to aq$, $b_n m(a_n, b_n) \to bq$ y dado que $m(a_n, b_n) \in a_n b_n$ y $a_n b_n \to ab$. resulta que $q \in ab$ [9]. Por la definición de m, obtenemos que $\mu(a_n m(a_n, b_n)) = \mu(b_n m(a_n, b_n))$ para toda $n \geq 1$. Esto implica que $\mu(aq) = \mu(bq)$ y, otra vez por la definición de m. se tiene que $m(a, b) = q$.

Por tanto m es continua y. entonces. un promedio.

Finalmente demostraremos que m es monótona.

Sean $p \in X$ y $a, b \in X$ tales que $m(a, b) = p$. Para demostrar que $m^{-1}(p)$ es conexo, es suficiente mostrar que existe un subconjunto conexo de $m^{-1}(p)$ que contiene a (a, b) y a (p, p). porque si cualesquiera dos elementos de $m^{-1}(p)$ se pueden conectar mediante un conexo dentro de $m^{-1}(p)$ a (p, p) entonces. también se pueden conectar esos dos puntos entre sí. impicando así. la conexidad de $m^{-1}(p)$.

Por definición $p \in ab$ y $\mu(ap) = \mu(bp)$. Definamos $\sigma : ap \to [0, \mu(ap)]$ por $\sigma(x) = \mu(px)$

Ahora demostraremos que $\sigma(p) = 0$. $\sigma(a) = \mu(ap)$. σ es inyectiva y es continua. Lo primero es porque $\sigma(p) = \mu(pp) = \mu(\{p\}) = 0$. Claramente. $\sigma(a) = \mu(ap)$. La función σ es inyectiva. ya que si $\sigma(x) = \sigma(y)$. como p es punto extremo de los arcos ap. px. py y $x, y \in ap$. entonces $px \subset py$ o $py \subset px$. Pero. como $\sigma(x) = \sigma(y)$. sale que $\mu(px) = \mu(py)$ y de esto se deduce que $px = py$. Por tanto $x = y$. Notemos que σ es continua, ya que es la composición de la función α definida después de la demostración del Lema 28, que es continua. seguida de la función de Whitney μ que también lo es.

Definamos $\gamma : bp \to [0, \mu(bp)]$ por $\gamma(x) = \mu(px)$. Entonces. por un procedimiento similar al anterior γ es inyectiva. $\gamma(p) = 0$, $\gamma(b) = \mu(bp)$ y, es continua. Como $\mu(ap) = \mu(bp)$ porque $m(a, b) = p$, podemos suponer que γ está definida en el arco $[0, \mu(ap)]$.

Sea $\phi : [0, \mu(ap)] \to X \times X$, dada por la regla $\phi(t) = (\sigma^{-1}(t), \gamma^{-1}(t))$. La función ϕ está bien definida. porque tanto σ como γ son biyecciones. Veremos que $\phi(0) = (p, p)$, $\phi(\mu(ap)) = (a, b)$ y que es continua. Con esto tendremos que $\phi([0, \mu(ap)])$ es un conexo que une a (p, p) con (a, b).

La primera afirmación resulta como consecuencia de la definición,

$$\phi(0) = (\sigma^{-1}(0), \gamma^{-1}(0)) = (p, p), \text{ ya que } \sigma(p) = 0 \text{ y } \gamma(p) = 0.$$

Similarmente,

$$\phi(\mu(ap)) = (\sigma^{-1}(\mu(ap)), \gamma^{-1}(\mu(ap))) = (a, b), \text{ porque } \sigma(a) = \mu(ap) \text{ y } \gamma(b) = \mu(bp) = \mu(ap).$$

Ya que σ y γ son biyecciones continuas con dominio compacto, tenemos que son homeomorfismos. De manera que σ^{-1} y γ^{-1} son continuas y, por tanto, ϕ es continua.

Por último falta ver que el conexo $\phi([0, \mu(ap)])$ está contenido en $m^{-1}(p)$. Sea $t \in [0, \mu(ap)]$. resultan las siguientes igualdades $\mu(p\sigma^{-1}(t)) = \sigma(\sigma^{-1}(t)) = t = \gamma(\gamma^{-1}(t)) = \mu(p\gamma^{-1}(t))$. Por como definimos el promedio $m(\phi(t)) = m(\sigma^{-1}(t), \gamma^{-1}(t)) = p$ y entonces para toda $t \in [0, \mu(ap)]$ se obtiene que $\phi(t) \in m^{-1}(p)$.

Por tanto m es un promedio monótono.■

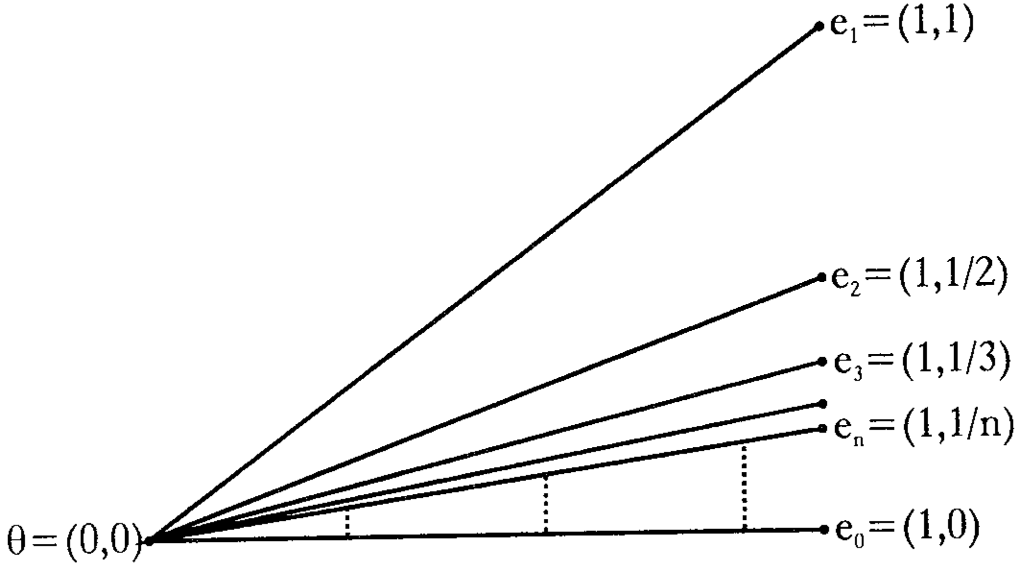
Recordemos uno de los continuos ya mencionados antes, el *abanico armónico* (Figura 3-2). Este continuo se construye de la siguente manera. dada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea P_n el conjunto $\{te_n \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1]\}$. donde $e_0 = (1,0)$ y $e_n = (1, \frac{1}{n})$ si $n \geq 1$. El *abanico armónico* que lo denotaremos como A, es el siguiente conjunto $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} P_i$. El origen en $\mathbb{R}^2$ lo denotaremos como θ.

Este continuo sí admite promedios, como veremos en el Capítulo 5.

Ejemplo 31 *El abanico armónico no admite promedios monótonos.*

Supongamos que existe un promedio monótono $m : A \times A \to A$.

Como m es una función continua, existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{1}{2}$ y si $\|p - x\|, \|q - y\| < \delta$, entonces $\|m(p,q) - m(x,y)\| < \frac{1}{2}$. Escojamos un entero positivo N tal que $\|e_N - e_0\| < \delta$. Entonces $\delta > \frac{1}{N}$.



Figura~3-2: El abanico armónico.

Sea $p_0 = m(e_N, e_0)$. Como $e_0 = m(e_0, e_0)$, por la forma en que escogimos a δ, $\|p_0 - e_0\| < \frac{1}{2}$.

Definamos $\phi : A \to P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_N$ dada por:

$$\phi(p) = \begin{cases} p, & \text{si } p \in P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_{N-1}, \\ te_N, & \text{si } p = te_n \text{ para alguna } n \in \{0, N, N+1, ...\}. \end{cases}$$

También sea $\psi : A \to P_0 \cup P_1 \cup ... \cup P_{N-1}$ definida según la siguiente regla:

$$\psi(p) = \begin{cases} p, & \text{si } p \in P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_{N-1}, \\ te_0, & \text{si } p = te_n \text{ para alguna } n \in \{0, N, N+1, ...\}. \end{cases}$$

Lo siguiente es demostrar que ϕ y ψ son retracciones y que $\|p - \phi(p)\|, \|p - \psi(p)\| < \delta$ para toda $p \in A$.

Mencionaré por qué ϕ es una retracción y por qué $\|p - \phi(p)\| < \delta$ para toda $p \in A$. Para ψ sirve un argumento similar.

Notemos primero que ϕ está definida en dos cerrados cuya intersección es justo el conjunto $\{\theta\}$. La función es continua ya que en el primer cerrado es la identidad, en el segundo se puede ver como la composición de la proyección natural al eje x de $\mathbb{R}^2$ y la parametrización natural del arco P_N, y en θ las dos definiciones coinciden. Entonces ϕ es una retracción, ya que ϕ restringida al conjunto $P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_N$ es la identidad.

Sea $p \in P_1 \cup P_2 \cup .. \cup P_N$, como en ese conjunto ϕ es la identidad, se cumple que $\|p - \phi(p)\| < \delta$.

Si $p = te_n \in P_n$ con $n \in \{0, N, N+1, ...\}$. Entonces si $\phi(p) = te_N$, tenemos que $\|p - \phi(p)\| = \frac{t}{N} - \frac{t}{n} \leq \frac{1}{N} - \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta$.

Sea $\mathcal{C} = m^{-1}(p_0)$. Por hipótesis, $\mathcal{C}$ es un subcontinuo de $A \times A$ tal que (e_N, e_0) y $(p_0, p_0) \in \mathcal{C}$.

Definamos:

$$\mathcal{D} = \{m(\phi(p), \phi(q)) \in A : (p, q) \in \mathcal{C}\} \cup \{m(\phi(p), \psi(q)) \in A : (p, q) \in \mathcal{C}\} \cup$$
$$\{m(\psi(p), \psi(q)) \in A : (p, q) \in \mathcal{C}\}$$

Probaremos que $\mathcal{D}$ es conexo. Para hacerlo, necesitaremos mostrar que C contiene un punto de la forma (θ, q) o uno de la forma (q, θ) para alguna $q \in A$. Supongamos que no hay puntos de la forma (θ, q) en C. Sea C_1 la proyección de C en la primera coordenada. Entonces e_N y $p_0 \in C_1$. $\theta \notin C_1$ y C_1 es conexo. Ya que $\theta \notin C_1$, el conjunto C_1 debe de estar contenido en $P_N - \{\theta\}$. En particular, $p_0 \in P_N - \{\theta\}$. Sea C_2 la proyección de C en la segunda coordenada. Entonces C_2 es un conjunto conexo de A que contiene a e_0 y a p_0. Como $p_0 \in P_N - \{\theta\}$. debe ocurrir que $\theta \in C_2$. Esto completa la prueba de que C contiene un punto tal que una de sus coordenadas es θ. Supongamos que C contiene un punto de la forma (θ, q), entonces $m(\theta, q) = p_0 = m(q, \theta)$, así que (q, θ) está también contenido en C. Notemos que $\mathcal{D}$ es unión de tres conjuntos conexos. Como $m(\phi(q), \phi(\theta)) = m(\phi(q), \theta) = m(\phi(q), \psi(\theta))$, el primer conjunto intersecta al segundo. Igual, $m(\phi(\theta), \psi(q)) = m(\theta, \psi(q)) = m(\psi(\theta), \psi(q))$, el segundo intersecta al tercero. Con esto se demuestra que $\mathcal{D}$ es un conjunto conexo de A.

Dado un punto $(p, y) \in C$, $\|p - \phi(p)\|$ y $\|y - \phi(y)\| < \delta$, entonces

$$\|p_0 - m(\phi(p), \phi(y))\| = \|m(p, y) - m(\phi(p), \phi(y))\| < \tfrac{1}{2}.$$

Como $\|p_0 - e_0\| < \frac{1}{2}$, concluimos que $\|m(\phi(p), \phi(y)) - e_0\| < 1$.

Luego $m(\phi(p), \phi(y)) \neq \theta$ para cada $(p, y) \in C$. Siguiendo el mismo argumento se muestra que $\theta \notin \mathcal{D}$.

Notemos que

$$e_N = m(e_N, e_N) = m(\phi(e_N), \phi(e_0)) \in \mathcal{D} \text{ y } e_0 = m(e_0, e_0) = m(\psi(e_N), \psi(e_0)) \in \mathcal{D}.$$

Entonces, por la conexidad de $\mathcal{D}$, se sigue que $\theta \in \mathcal{D}$, siendo esto una contradicción, que viene del hecho de suponer de que A admite un promedio monótono.□

Dado que el *abanico armónico* no admite promedios monótonos siendo un ejemplo de dendroide que no es una dendrita y, como todas las dendritas admiten promedios monótonos, cabe entonces hacerse la siguiente pregunta.

Pregunta ¿Si X es un dendroide que admite promedios monótonos entonces, es X una dendrita?

Ejemplo 32 *Toda n-celda admite un promedio monótono y abierto.*

Sea $X = [0,1]^n$.

Definamos $m : X \times X \to X$ por

$$m(x,y) = (\min\{x_1, y_1\}, \min\{x_2, y_2\}, ..., \min\{x_n, y_n\})$$

Donde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. De la definición de la función es claro que m es un promedio.

Primero veremos que m es monótona. Para lograrlo, tomamos un punto $z \in X$ y un punto $(x,y) \in m^{-1}(z)$. Basta con encontrar un conexo en $m^{-1}(z)$ tal que contenga a (x,y) y a (z,z). Sean $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, notemos que $z_i = \min\{x_i, y_i\}$ para toda i. Definamos los siguientes conjuntos en X:

$A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, donde $A_i = \{x_i\}$ si $x_i \leq y_i$, o $A_i = [z_i, x_i]$ si $y_i < x_i$.

$B = B_1 \times B_2 \times . . \times B_n$, donde $B_i = \{y_i\}$ si $y_i \leq x_i$, o $B_i = [z_i, y_i]$ si $x_i < y_i$.

Los conjuntos A_i y B_i son no vacíos ya que contienen a x_i y y_i, respectivamente.

Sean $(u,v) \in A \times B$, u_i la i-ésima coordenada de u y v_i la i-ésima coordenada de v. Para toda i se cumple que $u_i, v_i \geq z_i$. Notemos que si $u_i > z_i$ entonces tenemos que $x_i \neq z_i$. Como $z_i = \min\{x_i, y_i\}$ se tiene que $y_i = z_i$ y, de esto, $v_i = z_i$. De la misma manera si $v_i > z_i$ entonces $u_i = z_i$. Por estas últimas dos observaciones:

$m(u,v) = (\min\{u_1, v_1\}, \min\{u_2, v_2\}, ..., \min\{u_n, v_n\}) = (z_1, z_2, ..., z_n)$

Esto implica que $A \times B \subset m^{-1}(z)$.

Como tanto A como B son conexos en X, $x \in A$, $y \in B$ y $z \in A \cap B$ entonces $A \times B$ es un conexo de $m^{-1}(z)$, $(x,y), (z,z) \in A \times B$. Esto termina con la prueba de que m es monótona.

Finalmente mostraremos que m es abierta. Sean U y V abiertos de X, dado que $U \times V$ forma un básico de $X \times X$ basta con mostrar que $m(U \times V)$ es abierto en X.

Sea $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ tal que $z \in m(U \times V)$. Existen puntos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de X que cumplen con $z = m(x, y)$. Sean $\{U_i\}_{i=1}^n$ y $\{V_i\}_{i=1}^n$ dos colecciones de conjuntos abiertos en el $[0,1]$ tales que, si $U' = U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ y $V' = V_1 \times V_2 \times ... \times V_n$ entonces, $x \in U'$, $y \in V'$, $U' \subset U$ y $V' \subset V$.

Tomemos un entero positivo $k \leq n$.

- si $z_k = x_k$ y $x_k < y_k$. Entonces existe un abierto W_k de $[0,1]$ tal que $z_k \in W_k$ y $W_k \subset U_k \cap (-\infty, y_k)$. El abierto $U_k \cap (-\infty, y_k)$ no es vacío ya que x_k está en él.

- si sucede que $z_k = x_k = y_k$, definimos $W_k = U_k \cap V_k$.

- si $z_k = y_k$ y $y_k < x_k$. Entonces existe un abierto W_k de $[0,1]$ tal que $z_k \in W_k$ y $W_k \subset V_k \cap (-\infty, x_k)$. El abierto $V_k \cap (-\infty, x_k)$ no es vacío ya que y_k está en él.

Definimos $W = W_1 \times W_2 \times ... \times W_n$. Dado que para toda $k \leq n$, W_k es un abierto de $[0,1]$ que contiene a z_k, entonces W es abierto de X tal que $z \in W$. Sólo nos faltaría demostrar que $W \subset m(U \times V)$ para concluir que m es abierta.

Sea $w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in W$. Lo siguiente es construir dos puntos u y v que pertenezcan a X y tales que $(u, v) \in U \times V$ y que $m(u, v) = w$.

Sea un entero positivo k tal que $k \leq n$.

- si $z_k = x_k$ y $x_k < y_k$ entonces definimos $u_k = w_k$ y $v_k = y_k$. Entonces $v_k \in V_k$, como $u_k \in W_k$ se tiene que $u_k \in U_k$ y dado que en este caso $W_k \subset U_k \cap (-\infty, y_k)$, $\min\{u_k, v_k\} = u_k = w_k$.

- si $z_k = x_k = y_k$ entonces definimos $u_k = v_k = w_k$. Tenemos que $u_k, v_k \in W_k$, se sigue de esto último que $u_k, v_k \in U_k \cap V_k$ y además $\min\{u_k, v_k\} = u_k = v_k = w_k$.

- si $z_k = y_k$ y $y_k < x_k$ entonces definimos $u_k = x_k$ y $v_k = w_k$. Entonces $u_k \in U_k$, como $v_k \in W_k$ se tiene que $v_k \in V_k$ y dado que en este caso $W_k \subset V_k \cap (-\infty, x_k)$, $\min\{u_k, v_k\} = v_k = w_k$.

Sean $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ y $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$. Por lo demostrado en el párrafo anterior, para todo entero positivo $k \leq n$ tenemos que $u_k \in U_k$, $v_k \in V_k$ y $\min\{u_k, v_k\} = w_k$.

Entonces $u \in U$, $v \in V$ y $m(u,v) = w$. Por tanto m es una función abierta y con esto terminamos la construcción de un promedio monótono y abierto para una n-celda.□

El primer ejemplo de un continuo que no es arco-conexo y que admite un promedio fue dado por John Franks. El ejemplo es el solenoide diádico.

Recordemos que el *solenoide diádico* está definido como un límite inverso de la circunferencia unitaria en los complejos, usando solamente como función de ligadura, la función que a cada complejo lo envía a su cuadrado. Es decir, $S = \varprojlim\{X_n, f_n\}$, donde cada $X_n = S^1$ (S^1 es la circunferencia unitaria en el plano complejo), para cada $n \geq 1$ y cada $z \in S^1$, $f_n(z) = z^2$ y considerando a este espacio metido en $S^1 \times S^1 \times ...$ con la siguente métrica $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$. Para más información acerca de qué es un límite inverso y cosas relacionadas con este tema, ver el Capítulo II de [12].

Ejemplo 33 *El solenoide diádico admite un promedio monótono y abierto.*

El promedio definido por J. Franks sirve para esto. Definimos $m(x,y) = (x_2y_2, x_3y_3, ...)$, donde $x = (x_1, x_2, ...)$, $y = (y_1, y_2, ...)$ y x_iy_i es el producto en los complejos de x_i y y_i.

Para ver que m está bien definida tomemos $m(x,y) = (x_2y_2, x_3y_3, ...)$. Como x_i y y_i están en S^1, el producto x_iy_i está también. Para ver que $m(x,y) \in S$, faltaría ver que para toda n, $f_n(x_{n+2}y_{n+2}) = x_{n+1}y_{n+1}$. Sea n un entero positivo, entonces $f_n(x_{n+2}y_{n+2}) = (x_{n+2}y_{n+2})^2 = (x_{n+2})^2(y_{n+2})^2 = f_n(x_{n+2})f_n(y_{n+2}) = x_{n+1}y_{n+1}$ dado que $x, y \in S$.

Veremos ahora que esta función m es un promedio.

Dado que S es un grupo topológico (en particular el multiplicar las coordenadas y recorrerlas un espacio es una función continua), es claro que m es continua. El producto de complejos es conmutativo entonces

$$m(x,y) = (x_2y_2, x_3y_3, ...) = (y_2x_2, y_3x_3, ...) = m(y,x).$$

Por último,

$$m(x,x) = (x_2x_2, x_3x_3, ...) = \left((x_2)^2, (x_3)^2, ...\right) = (f_1(x_2), f_2(x_3), ...) = (x_1, x_2, ...) = x.$$

Ahora mostraremos que m es monótona. Sean x y $y \in S$, $p = m(x,y)$ y C la componente de $m^{-1}(p)$ que contiene a (x,y). Para probar que $m^{-1}(p)$ es un conjunto conexo, es suficiente mostrar que $(p,p) \in C$, dando como resultado que $C = m^{-1}(p)$ por ser (x,y) un punto cualquiera en $m^{-1}(p)$. Para llegar a eso, demostraremos que $(p,p) \in \overline{C}^{S\times S}$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $N \geq 1$ tales que $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$. Supongamos $x = (x_1, x_2, ...)$, $y = (y_1, y_2, ...)$ y $p = (p_1, p_2, ...)$. Para cada $n \geq 1$, parametrizamos $x_n = e(t_n)$ y $y_n = e(s_n)$, donde $e : \mathbb{R}^1 \to S^1$ es la función exponencial dada por $e(t) = \cos(t) + isen(t)$. Entonces, por como se define m, $p_n = e(t_{n+1} + s_{n+1})$.

Dado que $(x_{N+1}y_{N+1})^2 = (x_{N+1})^2 (y_{N+1})^2 = x_Ny_N$ y por las propiedades de la función exponencial, se tiene que

$$e(2(t_{N+1} + s_{N+1})) = (e(t_{N+1} + s_{N+1}))^2 = (p_N)^2 =$$
$$(x_{N+1}y_{N+1})^2 = x_Ny_N = p_{N-1} = e(t_N + s_N).$$

Esto implica que existe un entero k tal que $2(t_{N+1} + s_{N+1}) = t_N + s_N + 2\pi k$.

Llamemos $r = \frac{s_N - t_N}{2} + \pi k$.

Definamos $\sigma : [0,1] \to S \times S$, por $\sigma(u) = (\sigma_1(u), \sigma_2(u))$, donde

$$\sigma_1(u) =$$
$$\left(e\left(2^{N-1}(t_N + ur)\right), e\left(2^{N-2}(t_N + ur)\right), ..., e(t_N + ur), e(t_{N+1} + u\tfrac{r}{2}), e(t_{N+2} + u\tfrac{r}{2^2}), ...\right)$$

y

$$\sigma_2(u) =$$
$$\left(e\left(2^{N-1}(s_N - ur)\right), e\left(2^{N-2}(s_N - ur)\right), ..., e(s_N - ur), e(s_{N+1} - u\tfrac{r}{2}), e(s_{N+2} - u\tfrac{r}{2^2}), ...\right).$$

Lo que sigue es mostrar algunas propiedades.

-$\sigma_1(u), \sigma_2(u) \in S$ para cada $u \in [0,1]$.

Sólo mostraré que $\sigma_1(u) \in S$, la otra demostración es igual. Todas las coordenadas son elementos del círculo unitario en el plano complejo, ya que así se define la función exponencial. Sea $1 < i \leq N$ y fijémonos en la i-ésima coordenada, ésta es de la siguiente forma: $e(2^{N-i}(t_N + ur))$. Ahora veremos que al aplicar la función $f(z) = z^2$ nos da la $(i-1)$-ésima coordenada.

$f(e(2^{N-i}(t_N+ur))) = (e(2^{N-i}(t_N+ur)))^2 = e(2^{N+1-i}(t_N+ur)) = e(2^{N-(i-1)}(t_N+ur))$.

Ahora tomemos $i > N$. Notemos que ahora la i-ésima coordenada es de la forma $e(t_i + u\frac{r}{2^{i-N}})$, que al aplicar la función nos da:

$f(e(t_i + u\frac{r}{2^{i-N}})) = (e(t_i + u\frac{r}{2^{i-N}}))^2 = e(2t_i)e(u\frac{r}{2^{(i-1)-N}}) = (e(t_i))^2 e(u\frac{r}{2^{(i-1)-N}}) = (x_i)^2 e(u\frac{r}{2^{(i-1)-N}}) = x_{i-1}e(u\frac{r}{2^{(i-1)-N}}) = e(t_{i-1})e(u\frac{r}{2^{(i-1)-N}}) = e(t_{i-1} + u\frac{r}{2^{(i-1)-N}})$.

Con esto terminamos de demostrar que $\sigma_1(u) \in S$ para toda $u \in [0,1]$.

-σ_1 y σ_2 son continuas y, por tanto, σ también.

Es claro, ya que cada entrada es una composición de funciones continuas de u.

-$\sigma(0) = (x, y)$.

Evaluamos σ_1 y σ_2 en 0.

$$\begin{aligned}
\sigma_1(0) &= \left(e\left(2^{N-1}(t_N)\right), e\left(2^{N-2}(t_N)\right), ..., e(t_N), e(t_{N+1}), e(t_{N+2}), ...\right) \\
&= \left(e(t_1), e(t_2), ..., e(t_N), e(t_{N+1}), e(t_{N+2}), ...\right) \\
&= (x_1, x_2, ..., x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, ...) = x \\
\sigma_2(0) &= \left(e\left(2^{N-1}(s_N)\right), e\left(2^{N-2}(s_N)\right), ..., e(s_N), e(s_{N+1}), e(s_{N+2}), ...\right) \\
&= \left(e(s_1), e(s_2), ..., e(s_N), e(s_{N+1}), e(s_{N+2}), ...\right) \\
&= (y_1, y_2, ..., y_N, y_{N+1}, y_{N+2}, ...) = y.
\end{aligned}$$

Entonces $\sigma(0) = (\sigma_1(0), \sigma_2(0)) = (x, y)$.

-$\sigma(u) \in m^{-1}(p)$ para cada $u \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
&m(\sigma(u)) = m(\sigma_1(u), \sigma_2(u)) \\
&= \left(e\left(2^{N-2}(t_N + s_N)\right), ..., e(t_N + s_N), e(t_{N+1} + s_{N+1}), e(t_{N+2} + s_{N+2}), ...\right) \\
&= \left(e(t_2 + s_2), ..., e(t_N + s_N), e(t_{N+1} + s_{N+1}), e(t_{N+2} + s_{N+2}), ...\right)
\end{aligned}$$

$$= (p_1, ..., p_{N-1}, p_N, p_{N+1}, ...) = p.$$

-$\sigma(1) \in \mathcal{C}$.

Claramente, ya que la imagen del $[0,1]$ bajo σ describe un trayectoria y como (x,y) es uno de los extremos, tenemos que $\sigma([0,1]) \subset \mathcal{C}$.

Ahora. dado que tomamos una ε cualquiera, si vemos que $d(\sigma_1(1), p), d(\sigma_2(1), p) < \varepsilon$ habremos terminado.

Notemos que $t_N + r = t_N + \frac{s_N - t_N}{2} + \pi k = \frac{t_N + s_N}{2} + \pi k = t_{N+1} + s_{N+1}$. Entonces

$$e(t_N + r) = e\left(t_{N+1} + s_{N+1}\right) = p_N \text{ y}$$
$$e(2\left(t_N + r\right)) = e\left(2\left(t_{N+1} + s_{N+1}\right)\right) = p_{N-1}, ..., e(2^{N-1}\left(t_N + r\right)) =$$
$$e\left(2^{N-1}\left(t_{N+1} + s_{N+1}\right)\right) = p_1.$$

Esto implica que $d(\sigma_1(1), p) < \varepsilon$.

Ahora. veamos que $s_N - r = s_N - \frac{s_N - t_N}{2} - \pi k = \frac{t_N + s_N}{2} - \pi k = t_{N+1} + s_{N+1} - 2\pi k$. Entonces

$$e(s_N - r) = e\left(t_{N+1} + s_{N+1} - 2\pi k\right) = e(t_{N+1} + s_{N+1}) = p_N \text{ y}$$
$$e(2\left(s_N - r\right)) = e\left(2\left(t_{N+1} + s_{N+1}\right)\right) = p_{N-1}, ...,$$
$$e(2^{N-1}\left(s_N - r\right)) = e\left(2^{N-1}\left(t_{N+1} + s_{N+1}\right)\right) = p_1.$$

Esto implica que $d(\sigma_2(1), p) < \varepsilon$.

Con esto completamos la demostración de que $(p,p) \in \overline{\mathcal{C}}^{S \times S}$. Por tanto, m es monótona.

Ahora veremos que m es una función abierta.

Consideremos el homeomorfismo de corrimiento; $h : S \to S$ definido por

$$h(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, ...).$$

Entonces la función $h \times h : S \times S \to S \times S$ dada por $(h \times h)(x,y) = (h(x), h(y))$ es un homeomorfismo. Por otro lado, consideremos el producto $(x,y) \to (x_1 y_1, x_2 y_2, ...)$

como una función de $S \times S$ en S, donde $x = (x_1, x_2, ...)$ y $y = (y_1, y_2, ...)$. Dado que S es un grupo topológico (ver [12] Ejercicio 2..16 p.25) este producto es una función abierta.. Con grupo topológico me refiero a un grupo al que se le define una topología, resultando la función que a cada elemento le asigna su inverso y la operación del grupo funciones continuas. Como m es la composición de $h \times h$ con el producto descrito anteriormente, concluimos que m es una función abierta.$\square$

Capítulo 4

Promedios Abiertos

Teorema 34 *Sea Y un espacio compacto métrico (no necesariamente conexo)que admite un promedio abierto $M : Y \times Y \to Y$ tal que, para cada $y \in Y$, la función parcial $M(\_, y) : Y \to Y$ es suprayectiva. Denotemos como X al cono sobre Y y sea v el vértice de X. Entonces X admite un promedio abierto m tal que $m(x, y) = v$ si y sólo si $x = v$ o $y = v$.*

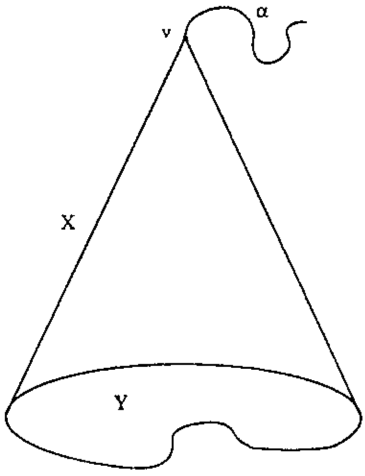
Demostración. Definiremos $m : X \times X \to X$ como

$$m((x, s), (y, t)) = (M(x, y), \max\{s, t\}).$$

Claramente m es una función continua, ya que las dos coordenadas son funciones continuas. Entonces veremos que m es un promedio.

Como M es simétrica y sacar el máximo de dos números reales también lo es, m es simétrica. Notemos que $m((x, s), (x, s)) = (M(x, x), \max\{s, s\}) = (x, s)$. Por tanto. m es un promedio.

Ahora. demostraremos que m es abierta. Sea W un abierto básico no vacío de $X \times X$. En el caso de que $W = (U \times (a, b)) \times (V \times (c, e))$ donde U y V son abiertos de Y, $0 < a < b < 1$ y $0 < c < d < 1$, tenemos que $m(W) = (M(U \times V) \times (\max\{a, c\}, \max\{b, e\}))$. que es un abierto de X (por ser $M(U \times V)$ un abierto de Y. y $(\max\{a, c\}, \max\{b, e\})$



Figura~4-1: El continuo Z.

un intervalo abierto de $[0,1]$). Los casos en los cuales W es de alguna de las siguientes formas $W = (U \times [0,b)) \times (V \times (c,e))$, $W = (U \times (a,b)) \times (V \times [0,e))$ o $W = (U \times [0,b)) \times (V \times [0,e))$ son similares. Finalmente. en el caso que W es de la forma $W = (Y \times (a,1]) \times (V \times (c,e))$, mostraremos que $m(W) = Y \times (\max\{a,c\},1)$. Tomemos un elemento $(x,s) \in Y \times (\max\{a,c\},1]$. Escojamos un número $t \in (c,s)$ tal que $t < e$ y fijemos un elemento $v_0 \in V$. Por hipótesis, existe $y \in Y$ tal que $M(y,v_0) = x$. Entonces $(x,s) = m((y,s),(v_0,t)) \in m(W)$. Esto prueba que $Y \times (\max\{a,c\},1] \subset m(W)$. La otra inclusión es clara. Por tanto m es un promedio abierto.■

Notemos que si $m((x,s),(y,t)) = v$, tenemos que $s = 1$ o $t = 1$ y eso implica que $(x,s) = v$ o $(y,t) = v$.

Corolario 35 *Sean Y y X como el teorema anterior. Sea Z un continuo (ver Figura 4-1) tal que $Z = X \cup \alpha$, donde α es un arco, $\alpha \cap X = \{v\}$ y v es un punto extremo de α. Entonces Z admite un promedio abierto.*

Demostración. Sean $\sigma : [0,1] \to \alpha$ un homeomorfismo tal que $\sigma(0) = v$ y $m : X \times X \to X$ un promedio abierto con las propiedades mencionadas en el teorema anterior.

Definamos $n : Z \times Z \to Z$ por:

$$n(z,w) = \begin{cases} m(z,w) & \text{si } (z,w) \in X \times X. \\ w & \text{si } z \in X \text{ y } w \in \alpha. \\ z & \text{si } z \in \alpha \text{ y } w \in X. \\ \sigma(\max\{s,t\}) & \text{si } z = \sigma(s) \text{ y } w = \sigma(t) \text{ para algunas } s,t \in [0,1]. \end{cases}$$

Demostraremos que n es un promedio abierto.

Para demostrar que n es continua veremos que, dado que la función está definida en cuatro conjuntos, la función coincide en las intersecciones de ellos. Si $z \in X$ y $w = v$ entonces $m(z,w) = w$. Entonces tenemos que las primeras tres definiciones coinciden. Si $z = v$ y $w \in \alpha$, $m(z,w) = w$, ya que w está más alejado de v que z. Esto demuestra que las últimas tres definiciones coinciden.

Ahora veremos que n es un promedio. Es muy fácil ver que n es simétrica, ya que la primera y la cuarta partes son simétricas, mientras que la segunda es la simétrica de la tercera. Para ver que dado $z \in Z$, $n(z,z) = z$ nos fijaremos en dos casos: si $z \in X$ entonces $n(z,z) = m(z,z) = z$ y si $z \in \alpha$, $n(z,z) = \sigma(\max\{s,s\}) = z$ con $z = \sigma(s)$. Por tanto n es un promedio.

Finalmente mostraremos que n es una función abierta. Tomemos U y V abiertos básicos de Z. En el caso de que $U, V \subset X$, $n(U \times V) = m(U \times V)$ es un abierto. Si $U, V \subset \alpha$ entonces estos abiertos se pueden ver como $U = \sigma((a,b))$ y $V = \sigma((c,e))$. En este caso $n(U \times V) = \sigma((\max\{a,c\}, \max\{b,e\}))$ y éste es un abierto de Z. En los casos en que uno esté totalmente contenido en α y otro no, por ejemplo $U \subset \alpha$ y $V \cap X \neq \emptyset$, podemos ver a U como $\sigma((a,b))$ y fijarnos en la intersección de V con α. Si es vacía entonces $n(U \times V) = U$. Si no lo es entonces $V \cap \alpha = \sigma([0,e))$, y $n(U \times V) = \sigma((a, \max\{b,e\}))$. Sólo falta ver cuando $v \in U, V$. En éste caso, $n(U \times V) = m((U \cap X) \times (V \cap X)) \cup (U \cap \alpha) \cup (V \cap \alpha)$. El primer conjunto de esta unión resulta de tomar todos los posibles promedios de puntos que están tanto en los abiertos como en X. el segundo y el tercero resultan cuando se toma todos los posibles promedios con un punto en α. Esto es un abierto en Z ya que consta de un abierto en X que contiene a v. unido con un abierto en α que también contiene a v. Por tanto m es un promedio abierto para Z.■

Corolario 36 *El cono sobre el conjunto de Cantor admite un promedio abierto.*

Demostración. Sea C el conjunto de Cantor. Recordemos que C puede ser visto como el producto topológico $\{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times ....$ donde cada espacio $\{0,1,2\}$ tiene la topología discreta. consideremos la operación de grupo en C dada por:

$(x_1, x_2, ...) \odot (y_1, y_2, ...) = (x_1 \oplus_3 y_1, x_2 \oplus_3 y_2, ...)$, donde $\oplus_3$ es la suma módulo 3.

El conjunto C con esta operación y con la topología producto, es un grupo topológico. En C. definimos $M(x,y) = x^{-1} \odot y^{-1}$. Notemos que si $x = (x_1, x_2, ...)$ entonces tenemos que

$$x^{-1} = (-x_1(\text{mod}\, 3), -x_2(\text{mod}\, 3), ...).$$

Ahora veremos que M cumple con las hipótesis del Teorema 34.

Para mostrar que M es simétrica. sólo hay que notar que el conjunto $\{0,1,2\}$ con la operación $\ominus_3$ es un grupo abeliano. Ahora demostraremos que $M(x,x) = x$ para toda $x \in C$. Sea $x = (x_1, x_2, ...)$, entonces es suficiente con demostar que para cualquier índice i. $(x_i)^{-1} \oplus_3 (x_i)^{-1} = x_i$. Haremos todos los casos posibles.

- si $x_i = 0$. entonces $(x_i)^{-1} \oplus_3 (x_i)^{-1} = 0 \oplus_3 0 = 0 = x_i$.
- si $x_i = 1$. entonces $(x_i)^{-1} \oplus_3 (x_i)^{-1} = 2 \oplus_3 2 = 1 = x_i$.
- si $x_i = 2$, entonces $(x_i)^{-1} \oplus_3 (x_i)^{-1} = 1 \oplus_3 1 = 2 = x_i$.

En conclusión. $M(x,x) = x$.

Para aplicar el Teorema 34 sólo falta ver que la función parcial $M(\_,y) : Y \to Y$ es suprayectiva para toda $y \in Y$. Sean $x = (x_1, x_2, ...)$ y $y = (y_1, y_2, ...)$ puntos de Y

entonces lo que necesitamos demostrar es que existe un punto z en Y tal que $M(z,y)=x$. Definamos $z = x^{-1} \odot y^{-1}$. Entonces

$$M(z,y) = (x^{-1}\odot y^{-1})^{-1}\odot y^{-1} = (x^{-1})^{-1}\odot(y^{-1})^{-1}\odot y^{-1} = x\odot y\odot y^{-1} = x\odot(y\odot y^{-1}) = x.$$

Èsto demuestra que función parcial $M(\_,y) : Y \to Y$ es suprayectiva. Por tanto podemos aplicar en Teorema 34 y definir un promedio abierto para el cono sobre el cojunto de Cantor.■

Corolario 37 *Sea $A_n = \{1,2,...,n\}$, con la topología discreta. Entonces el cono sobre A_n (conocido también como n-odo simple) admite un promedio abierto.*

Demostración. Por el Corolario 35, es suficiente probar este resultado para cuando n es impar. Supongamos, entonces, que n es impar. Definamos $M : A_n \times A_n \to A_n$ por:

$$M(r,s) = \begin{cases} \frac{r+s}{2}, & \text{si } r+s \text{ es par.} \\ (\frac{n+r+s}{2})_n & \text{si } r+s \text{ es impar.} \end{cases}$$

Donde, para un número positivo k, el símbolo $(k)_n$ representa el único elemento en $\{1,2,...,n\}$ que es congruente a k módulo n.

Como A_n tiene la topología discreta, $A_n \times A_n$ también la tiene. así que M es una función continua.

Ahora veremos que la función parcial $M(\_,s) : A_n \to A_n$ es inyectiva, y como estamos enviando un conjunto finito en sí mismo, tendremos una función suprayectiva. Sean $r, r' \in A_n$ tales que $r \neq r'$. Revisemos todos los casos posibles.

- si $r+s$ y $r'+s$ son pares, entonces $\frac{r+s}{2} \neq \frac{r'+s}{2}$ y, en conclusión. $M(r,s) \neq M(r',s)$.

- si $r+s$ y $r'+s$ son impares, entonces $\frac{n+r+s}{2} \neq \frac{n+r'+s}{2}$ y, como $\left|\frac{n+r+s}{2} - \frac{n+r'+s}{2}\right| = \frac{|r-r'|}{2} < n$, $\frac{n+r+s}{2}$ y $\frac{n+r'+s}{2}$ no podrían ser congruentes módulo n salvo que fueran iguales, como esto no ocurre. $M(r,s) \neq M(r',s)$.

- si $r+s$ es par y $r'+s$ es impar entonces $r \neq r'$ y $r' = (n+r')_n$ y de esto $\frac{r+s}{2} \neq \left(\frac{n+r'+s}{2}\right)_n$. Entonces $M(r,s) \neq M(r',s)$.

- si $r+s$ es impar y $r'+s$ es par entonces $r \neq r'$ y $r = (n+r)_n$ y de esto $\left(\frac{n+r+s}{2}\right)_n \neq \frac{r'+s}{2}$. Entonces $M(r,s) \neq M(r',s)$.

Por tanto M es inyectiva y, en consecuencia, suprayectiva.

Ahora demostraremos que M cumple con las condiciones de un promedio.

Dado que r y s juegan papeles simétricos en la definición de M, entonces M lo es.

Ahora, sea $r \in A_n$. Como $r+r$ siempre es par, entonces tenemos que $M(r,r) = \frac{r+r}{2} = r$. Entonces se cumplen las hipótesis del Teorema 34, y por tanto, el n-odo admite un promedio abierto.■

OBSERVACIÓN. Sea A_n como en el Corolario 37. Mostraremos que si n es par, entonces es imposible definir una función continua $M : A_n \times A_n \to A_n$ con las propiedades del Teorema 34. Supongamos, por el contrario, que existe tal función M. Consideremos el conjunto $B = \{(r,s) \in A_n \times A_n : M(r,s) = 1\} = M^{-1}(1)$. Por suposición, para cada $r \in A_n$, la función parcial $M(r,\_) : A_n \to A_n$ es suprayectiva (y por lo anterior inyectiva). Existe entonces un único elemento $s_r \in A_n$ tal que $M(r,s_r) = 1$. Además, si $r \neq 1$, se tiene que $r \neq s_r$. Se puede entonces agrupar a los elementos de $B - \{(1,1)\}$ en pares, $(2,r_2)$, $(r_2,2)$, etc. Esto implica que el número de elementos de B es impar. Por otro lado $B = \{(1,1),(2,r_2), ..,(n,r_n)\}$. Entonces B tiene un número par de elementos. Esta contradicción prueba la afirmación.

Ejemplo 38 *El abanico armónico no admite promedios abiertos.*

Recordemos que el abanico armónico es el conjunto en $\mathbb{R}^2$ que denotamos como A y tal que $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} P_i$, donde cada P_n es el conjunto $\{te_n \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1]\}$, $e_n = (1, \frac{1}{n})$ si $n \geq 1$ y $e_0 = (1,0)$. Al origen le seguiremos llamando θ.

Supongamos que existe un promedio abierto $m : A \times A \to A$. Obtendremos una contradicción demostrando una serie de afirmaciones.

Afirmación 1. Si $p, q \notin P_0$ entonces $m(p,q) \neq \theta$.

Para demostrar la Afirmación 1, supongamos que existen $p, q \notin P_0$ y tales que $m(p,q) = \theta$. Como $p, q \notin P_0$, existen vecindades cerradas localmente conexas U y V

de p y q respectivamente. Entonces $m(U \times V)$ es una vecindad cerrada, localmente conexa de θ en A. Esto es imposible ya que ninguna vecindad de θ en A es localmente conexa en todos sus puntos. Esto prueba la Afirmación 1.■

Afirmación 2. Si existen $n \geq 1$ y un punto $p \in P_n - \{\theta\}$ tal que $m(p, \theta) \neq \theta$ entonces $m(P_n \times A) \subset P_n$.

Por la continuidad de m, existen dos vecindades abiertas y arco-conexas U y V, de p y θ, respectivamente, tales que $\theta \notin m(U \times V)$. Entonces $m(U \times V)$ es una vecindad abierta y conexa de $m(p, \theta)$. Esto implica que $m(p, \theta) \notin P_0$. Sea $k \geq 1$ tal que $m(p, \theta) \in P_k$. Entonces $m(U \times V) \subset P_k$. Para cada $r \geq 1$, fijemos un punto $q \in P_r \cap V - \{\theta\}$, y luego, $m(p, q) \in P_k - \{\theta\}$. Por la Afirmación 1, $m((P_n - \{\theta\}) \times (P_r - \{\theta\}))$ es un subconjunto conexo de $A - \{\theta\}$ que intersecta a $P_k - \{\theta\}$. Por consecuencia $m((P_n - \{\theta\}) \times (P_r - \{\theta\})) \subset P_k - \{\theta\}$ para cada $r \geq 1$. Se sigue por continuidad que $m(P_n \times A) \subset P_k$. Dado que $e_n = m(e_n, e_n) \in m(P_n \times A) \cap (P_n - \{\theta\})$ concluimos que $k = n$ y $m(P_n \times A) \subset P_n$.■

Afirmación 3. Existe a lo más un entero positivo N para el cual existe un punto $p \in P_N - \{\theta\}$ tal que $m(p, \theta) \neq \theta$.

Supongamos que no, que hay dos enteros positivos diferentes N y M para los cuales existen dos puntos $p \in P_N - \{\theta\}$ y $q \in P_M - \{\theta\}$ tales que $m(p, \theta) \neq \theta \neq m(q, \theta)$. Por la Afirmación 2, $m(P_N \times A) \subset P_N$ y $m(P_M \times A) \subset P_M$. Entonces $m(e_N, e_M) \in P_N \cap P_M = \{\theta\}$. Esto contradice la Afirmación 1 y completa la prueba de la Afirmación 3.■

Definamos $K = \{n \geq 1 : \text{existe un punto } p \in P_n - \{\theta\} \text{ tal que } m(p, \theta) \neq \theta\}$. Por la Afirmación 3, K consta a lo más de un elemento. Denotemos como $\mathbb{N}$ al conjunto de todos los enteros positivos. Definamos $J = \mathbb{N} - K$.

Sea $A_0 = P_0 \cup \left(\bigcup \{P_n : n \in J\} \right)$.

Afirmación 4. Si $n \in J$ entonces $A_0 \subset m(A_0 \times P_n)$.

Para probar la Afirmación 4 es suficiente probar que si $r \in J \cup \{0\}$, entonces $P_r \subset m(A_0 \times P_n)$, dado que $A_0 = \bigcup \{P_n : n \in J \cup \{0\}\}$.

Empecemos suponiendo que $r \in J$. Como $n \in J$, $\theta = m(\theta, e_n) \in m(A \times (P_n - \{\theta\}))$.Ya que m es abierta, existe un punto $q \in (P_r - \{\theta\}) \cap m(A \times (P_n - \{\theta\}))$. Supongamos que $q = m(u,p)$, donde $p \in P_n - \{\theta\}$. Si $u \notin A_0$ entonces existe un entero positivo N como en la Afirmación 3 (con $N \notin J$) y $u \in P_N$. Por la Afirmación 2, $m(P_N \times A) \subset P_N$. Entonces $q = m(u,p) \in P_N \cap (P_r - \{\theta\}) = \emptyset$, que es una contradicción. Esto prueba que $u \in P_s$, para alguna $s \in J \cup \{0\}$. Dado que $n \in J$, $m(p,\theta) = \theta \neq q$. Además tenemos que $u \neq \theta$.

- si $s = 0$ entonces existen vecindades abiertas U y V de los puntos u y p, respectivamente, tales que $m(U \times V) \subset P_r - \{\theta\} \cap m(A \times (P_n - \{\theta\}))$ y $U \subset A_0$. Tomemos un punto $u' \in U - P_0$ y sea $q' = m(u',p) \in P_r - \{\theta\} \cap m(A \times (P_n - \{\theta\}))$. Si $u' \notin A_0$ entonces existe un entero positivo N como en la Afirmación 3 (con $N \notin J$) y $u' \in P_N$. Por la Afirmación 2, $m(P_N \times A) \subset P_N$. Entonces $q' = m(u',p) \in P_N \cap (P_r - \{\theta\}) = \emptyset$, que es una contradicción. Esto prueba que $u' \in P_{s'}$, para alguna $s' \in J$.

-en el caso en que $s > 0$, definimos $u' = u$, $q' = q$ y $s = s'$.

En cualquier caso, $s' \in J$, $u' \in P_{s'} - \{\theta\}$ y $q' = m(u',p) \in P_r - \{\theta\}$.

Supongamos que $P_r \not\subseteq m(P_n \times P_{s'})$. Notemos que $m(P_n \times P_{s'}) \cap P_r$ es un subcontinuo de P_r que contiene a q' y a $\theta = m(p,\theta)$. Sea $t_0 = \max\{t \in [0,1] : te_r \in m(P_n \times P_{s'})\}$. Entonces $0 < t_0 < 1$. Sean $x \in P_n$ y $y \in P_{s'}$ tales que $m(x,y) = t_0 e_r \neq \theta$. Dado que $n, s' \in J$, $x \neq \theta \neq y$. Tenemos entonces que $m((P_n - \{\theta\}) \times (P_{s'} - \{\theta\}))$ es una vecindad de $t_0 e_r$. De lo último sale que existe $t > t_0$ tal que $te_r \in m((P_n - \{\theta\}) \times (P_{s'} - \{\theta\}))$. Esto es una contradicción por la forma como escogimos t_0 y prueba que $P_r \subset m(P_n \times P_{s'}) \subset m(A_0 \times P_n)$ si $r \in J$.

Sólo falta ver que $P_0 \subset m(A_0 \times P_n)$. Sea $p \in P_0$. Existe una sucesión $\{p_k\}_{k \in J}$ en A_0 tal que $p_k \in A_k$ y $p_k \to p$. Por lo que acabamos de demostrar $p_k \in m(A_0 \times P_n)$. Como $m(A_0 \times P_n)$ es un compacto -A_0 y P_n lo son y m es continua-, tenemos que $p \in m(A_0 \times P_n)$. Por tanto $P_0 \subset m(A_0 \times P_n)$.

Esto completa la demostración de la Afirmación 4.■

Afirmación 5. Si $p \in A_0 - P_0$ y $q \in P_0$ entonces $m(p,q) \in P_0$.

Supongamos que la Afirmación 5 no es cierta, es decir, que existen $p \in A_0 - P_0$ y $q \in P_0$ tales que $m(p,q) \notin P_0$. Existe, entonces, $n \in \mathbb{N}$ tal que $m(p,q) \in P_n - \{\theta\}$. Sea $s \in J$ tal que $p \in P_s - \{\theta\}$. Sea V una vecindad abierta de q tal que $m(\{p\} \times V) \subset P_n - \{\theta\}$. Sea $M \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $k \geq M$, existe un punto $q_k \in P_k \cap V - \{\theta\}$.

Sea $k \geq N$, por la Afirmación 1, el conjunto $m((P_s - \{\theta\}) \times (P_k - \{\theta\}))$ es un subconjunto conexo de $A - \{\theta\}$ que contiene a $m(p, q_k) \in P_n - \{\theta\}$. Esto implica que este conjunto está contenido en $P_n - \{\theta\}$. Por la continuidad de m podemos concluir que $m(P_s \times (P_0 \cup P_M \cup P_{M+1} \cup \ldots)) \subset P_n$.

Dado $k < N$, por la Afirmación 1. $m(p, e_k) \neq \theta$. Entonces existe $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $m(p, e_k) \in P_{n_k} - \{\theta\}$. El conjunto $m((P_s - \{\theta\}) \times (P_k - \{\theta\}))$ es un subconjunto conexo de $A - \{\theta\}$ y contiene a $m(p, e_k) \in P_{n_k} - \{\theta\}$. Esto implica que este conjunto está contenido en $P_{n_k} - \{\theta\}$. Por ser m continua, se tiene que $m(P_s \times P_k) \subset P_{n_k}$.

Por la Afirmación 4, $A_0 \subset m(P_s \times A) \subset P_{n_1} \cup \ldots \cup P_{n_{(M-1)}} \cup P_n$. Esto es una contradicción que finaliza con la prueba de la Afirmación 5.■

Afirmación 6. Si $p \in A_0$ y $q \in P_0$ entonces $m(p,q) \in P_0$.

Por la Afirmación 5, faltaría solamente probarlo para el caso en que $p \in P_0$. Si $p \in A_0$ entonces existe una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $p_n \to p$ y $p_n \in A_n$. Por la Afirmación 5, $m(p_n, q) \in P_0$, dado que P_0 es compacto y m es continua $m(p,q) \in P_0$.■

Ahora sí, estamos listos para obtener la contradicción final.

Sea $n_0 \in J$ tal que $n \in J$ para toda $n \geq n_0$.

Dado $n \geq n_0$, por la Afirmación 4, existen puntos $p_n \in A_0$ y $q_n \in P_n$ tales que $e_{n_0} = m(p_n, q_n)$. Sean $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dos subsucesiones de $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a un punto p y $\{q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a un punto q, entonces $p \in A_0$ y $q \in P_0$.

Notemos que $m(p,q) = e_{n_0}$. Sin embargo, por la Afirmación 6, $m(p,q) \in P_0$. Esta contradicción completa la demostración de que el abanico armónico no admite promedios abiertos.□

Lema 39 *Sean $f : X \to Y$ una función entre continuos y $E_1, E_2, ..., E_n$ subconjuntos cerrados de X tales que $f|_{E_i} : E_i \to Y$ es suprayectiva y abierta para todo E_i, y $f|_{X-(\bigcup E_i)} : X - (\bigcup E_i) \to Y$ es abierta. Entonces f es abierta.*

Demostración. Sea U un abierto de X. Entonces $U = (U \cap E_1) \cup (U \cap E_2) \cup ... \cup (U \cap E_n) \cup (U - (\bigcup E_i))$. Fijémonos ahora en que $f(U) = f(U \cap E_1) \cup f(U \cap E_2) \cup ... \cup f(U \cap E_n) \cup f(U - (\bigcup E_i))$. Notemos que para todo E_i, el conjunto $f(U \cap E_i)$ es un abierto de Y, dado que f restringida a E_i es suprayectiva y abierta, y $U \cap E_i$ es un abierto relativo a E_i. Ahora, el conjunto $U - (\bigcup E_i)$ es un abierto tanto de X como de $X - (\bigcup E_i)$, dado que este último conjunto es abierto en X y, como la función restringida a $X - (\bigcup E_i)$ es abierta, el conjunto $f(U - (\bigcup E_i))$ es abierto de Y. Concluimos, entonces, que $f(U)$ es abierto en Y, ya que se puede escribir como una unión finita de abiertos en Y. Por tanto f es abierta.■

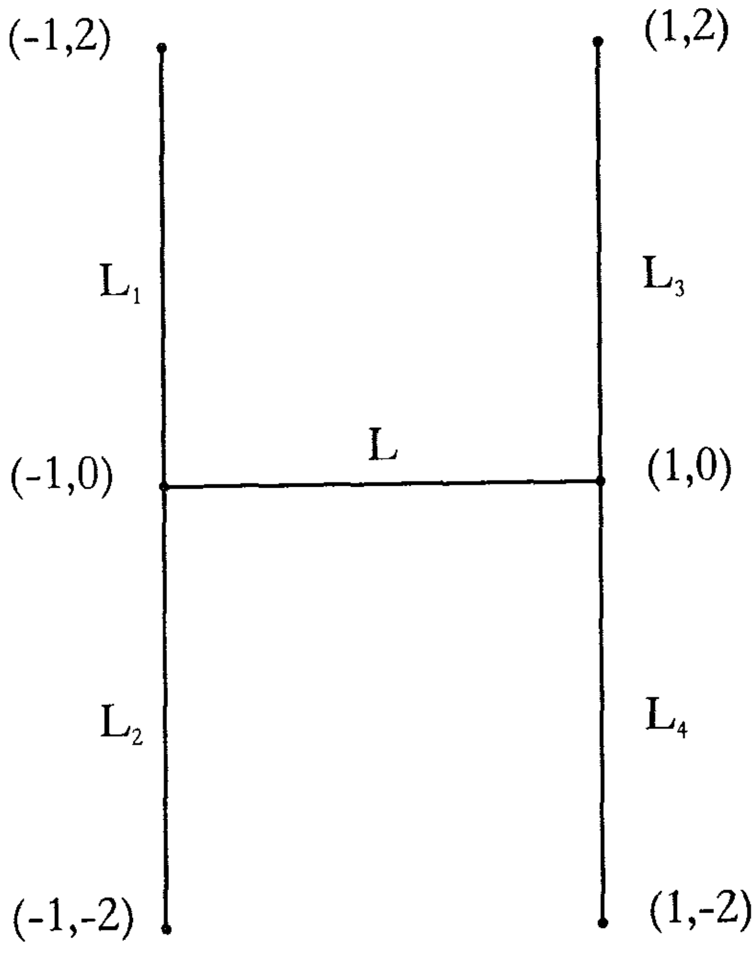
Dados puntos $p_1, p_2, ..., p_n$ de $\mathbb{R}^2$ denotamos por $p_1 p_2 ... p_n$ a la poligonal $p_1p_2 \cup p_2p_3 \cup ... \cup p_{n-1}p_n$, donde cada p_ip_{i+1} representa el segmento de recta que tiene como extremos a p_i y a p_{i+1}.

Ejemplo 40 *El continuo Z, con la forma de la letra "H" mayúscula, cuyo dibujo aparece en la Figura 4-2, admite un promedio abierto.*

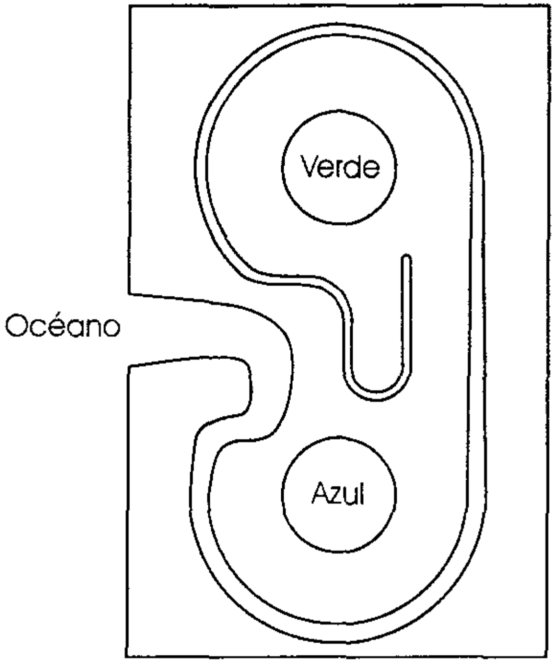
La descripción analítica de Z es la siguiente: $Z = L \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$, donde $L = (-1,0)(1,0)$, $L_1 = (-1,0)(-1,2)$, $L_2 = (-1,0)(-1,-2)$, $L_3 = (1,0)(1,2)$ y $L_4 = (1,0)(1,-2)$.

Para demostrar que Z admite un promedio abierto, vamos a utilizar el continuo llamado *Lagos de Wada*. Para hacer más poética y sencilla a la descripción de este continuo empecemos tomando una isla cuadrada con 2 lagos redondos en su interior, uno tiene el agua azul y el otro agua verde.

Entre los tiempos $t = 0$ y $t = \frac{1}{2}$, excavamos un canal desde el océano que distribuya agua hacia el interior de la isla, de tal manera que cualquier punto de la isla quede a una



Figura~4-2: El continuo Z. con la forma de la letra "H" mayúscula.



Figura~4-3: La isla en el tiempo $t = \frac{1}{2}$.

distancia de a lo más una unidad del agua salada (Figura 4-3). Vamos a suponer que a medida que el canal avanza, éste se hace cada vez más angosto.

Entre los tiempos $t = \frac{1}{2}$ y $t = \frac{3}{4}$ excavamos un canal empezando en el lago de agua azul y de manera que todo punto de la isla se encuentre a distancia de a lo más $\frac{1}{2}$ del agua azul y, como siempre, cuidando que a medida que avanzamos el canal se hace más angosto.

Entre $t = \frac{3}{4}$ y $t = \frac{7}{8}$ excavamos otro canal, empezando ahora desde el lago verde y de tal manera que todo punto de lo que sobre de la isla diste del agua verde menos de $\frac{1}{4}$.

Esto completa un ciclo de canales excavados, pues ya hicimos un canal de agua salada, otro de agua azul y otro de agua verde.

Lo que se trata es de hacer una sucesión infinita de estos ciclos. En cada ciclo se prolonga primero el canal ya hecho de agua salada. después el de agua azul y al último el de agua verde. siempre cuidando que los canales se hagan cada vez más angostos y que los puntos de lo que sobra de isla estén cada vez más cercanos de los tres tipos de agua. Así. por ejemplo. en el periodo de tiempo $t = \frac{7}{8}$ y $t = \frac{15}{16}$ se prolonga el canal de agua salada hasta que todo punto del restante de la isla esté a distancia a lo más $\frac{1}{8}$ del agua salada.

Para ser más precisos pensemos que el cuadrado en el que se hicieron canales es el $[0,1]\times[0,1]$. Denotemos al conjunto de puntos que ocupa el agua salada (respectivamente, agua azul y agua verde). sin su frontera. por U_1 (respectivamente, U_2 y U_3). Entonces los conjuntos U_1, U_2 y U_3 son abiertos del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

Al continuo $Y = ([0,1] \times [0,1]) - (U_1 \cup U_2 \cup U_3)$ se le llama *Lagos de Wada* (p. 143 en [8]).

Es fácil convencerse de que. efectivamente. Y es un continuo pues. por su construcción, es una intersección anidada de los continuos que representan a lo que va quedando de isla después de cada excavación. Antes de construir un promedio abierto para Z. veremos cómo se usa Y para definir una función abierta y continua del $[0,1] \times [0,1]$ en un triodo (o 3-odo) simple T (recordemos que en el Corolario 37 hablamos de n-odos simples).

Notemos que por la forma como fueron construidos U_1, U_2 y U_3 tenemos que $[0,1] \times [0,1] = \overline{(U_1 \cup U_2 \cup U_3)}$.

Si usted lector cree que estamos dando muchas vueltas nada más para definir una función abierta y continua $\phi : [0,1] \times [0,1] \to T$. haga, para empezar, sus propios intentos. Observe que si dibuja $\phi^{-1}(p)$, donde p es el punto de ramificación del triodo T. en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ y si también dibuja $\phi^{-1}(P_1)$. $\phi^{-1}(P_2)$ y $\phi^{-1}(P_3)$, donde P_1. P_2 y P_3 son los segmentos que componen a T pero sin el punto p. entonces $\phi^{-1}(P_1)$, $\phi^{-1}(P_2)$ y $\phi^{-1}(P_3)$ son abiertos de $[0,1] \times [0,1]$ y $\phi^{-1}(p)$ es un compacto. Dado un punto $z \in \phi^{-1}(p)$ y un abierto cualquiera U de $[0,1] \times [0,1]$ que contenga a z, $\phi(U)$ debe ser un abierto que contiene a p. De manera que $\phi(U)$ intersecta tanto a P_1, P_2 y a P_3. Esto implica que U debe de intersectar a $\phi^{-1}(P_1)$, $\phi^{-1}(P_2)$ y a $\phi^{-1}(P_3)$. Como U es un abierto cualquiera que contiene a z, y z es un punto cualquiera de $\phi^{-1}(p)$, obtenemos que todo punto de $\phi^{-1}(p)$, debe de estar en la cerradura de cada uno de los tres abiertos $\phi^{-1}(P_1)$, $\phi^{-1}(P_2)$ y $\phi^{-1}(P_3)$. Por esta razón en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$, $\phi^{-1}(p)$ debe ser un conjunto "flaco", en el sentido de que no contiene totalmente a ninguna vecindad de ninguno de sus puntos, y está rodeado por todas partes de puntos de cada uno de los abiertos $\phi^{-1}(P_1)$, $\phi^{-1}(P_2)$ y $\phi^{-1}(P_3)$. Notemos que el continuo Lagos de Wada, que llamamos Y, cumple con las condiciones que debe tener $\phi^{-1}(p)$, siendo $U_i = \phi^{-1}(P_i)$ para cada $i = 1, 2, 3$.

A continuación definiremos la función abierta y continua $\phi : [0,1] \times [0,1] \to T$, ya antes mencionada.

Para ayudarnos a entender la función, supondremos que T es el siguiente triodo en $\mathbb{R}^3$.

$$T = \{te_i : 0 \leq t \leq 1 \text{ e } i = 1, 2, 3\}$$

Donde $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$.

Definimos $\phi : [0,1] \times [0,1] \to T$ por:

$$\phi(p) = \begin{cases} (0,0,0). & \text{si } p \in Y. \\ d(p,Y)e_i, & \text{si } p \in U_i. \end{cases}$$

Donde $d(p,Y) = \min\{\|p - y\| : y \in Y\}$. Esto tiene sentido ya que Y es compacto y entonces se alcanza el mínimo. De ahí que ϕ está bien definida.

Para demostrar que ϕ es continua, tomemos una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ tal que converja a p.

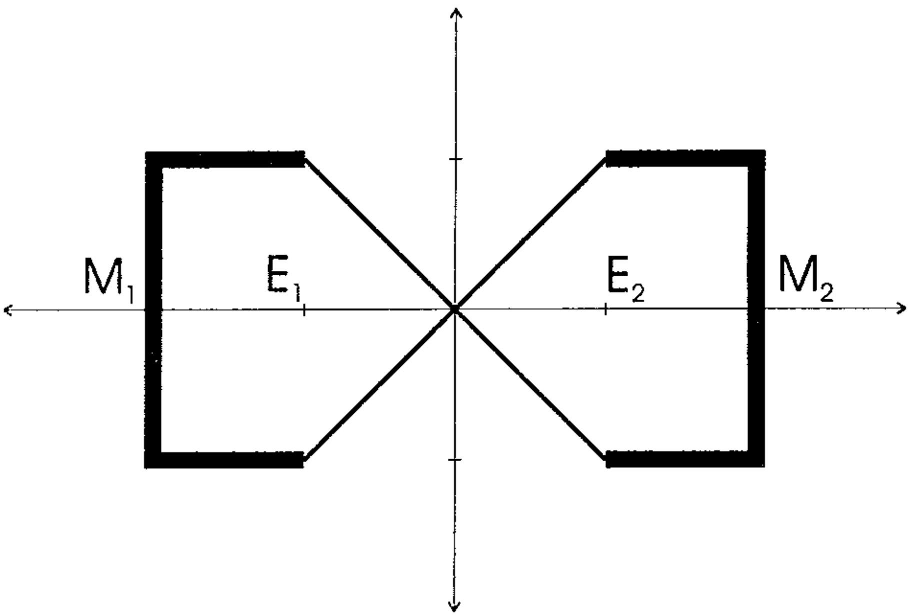
Si p estuviera en algún U_i entonces, a partir de algún número natural N, los puntos p_n pertenecen al abierto U_i. Al fijarnos en sus imágenes $\phi(p_n) = d(p_n, Y)e_i$ convergen a $d(p, Y)e_i = \phi(p)$, por ser la función $g(p) = d(p, Y)$ una función continua.

En el caso de que p pertenezca a Y, entonces p es un punto de la frontera de cada una de los abiertos U_i. Ahora veamos la sucesión, si hay una subsucesión convergente de puntos en alguna U_i, entonces su distancia a Y, tiende a ser cero -ya que converge a p- y, por consecuencia, las imágenes de esta subsucesión convergen a $(0,0,0)$. Si no hay una subsucesión convergente de puntos en alguna U_i, existe una en Y y, como allí la función es constante, las imágenes también convergen a $(0,0,0)$. Entonces en cualquiera de los dos casos, hay una subsucesión que converge a $\phi(p) = (0,0,0)$. Por tanto ϕ es continua.

Sólo falta mostrar que la función ϕ es abierta en su imagen. Sean V un abierto de $[0,1] \times [0,1]$ y $p \in \phi(V)$. Sea también $P_i = \{te_i : 0 < t \leq 1\}$.

Supongamos que $p \in P_i$, para alguna i. De esto último tenemos que $p \in \phi(U_i)$, es decir, existe $q \in U_i$ tal que $\phi(q) = p$. En los términos que usamos en la construcción de los canales, q está en uno de ellos. Sea $0 < \varepsilon < \frac{d(q,Y)}{2}$ tal que, si W es la bola abierta de radio ε con centro en q, $W \subset V \cap U_i$. Como W es conexo en $[0,1] \times [0,1]$, su imagen es un conexo que no contiene a $(0,0,0)$ y los únicos conexos que cumplen eso son los segmentos, de donde $\phi(W)$ es un segmento que contiene a p. Dado que el canal abierto U_i va haciéndose cada vez más angosto, no existe ni un mínimo, ni un máximo locales, que sean absolutos, para la función $g(x) = d(x, Y)$. Por tanto $\phi(W)$ es un intervalo abierto contenido en P_i y en consecuencia es un abierto en T, además cumple con $\phi(W) \subset \phi(V)$. En realidad demostramos que $\phi|_{U_i}$ es una función abierta, no importando cual U_i.

En el caso de que $p = (0,0,0)$, tenemos que existe $q \in Y$ tal que $\phi(q) = p$. Sea ahora $\varepsilon > 0$, donde si W es la bola abierta de radio ε con centro en q, $W \subset V$. De la densidad de los abiertos U_i, podemos elegir tres puntos $w_1 \in U_1 \cap W$, $w_2 \in U_2 \cap W$ y $w_1 \in U_3 \cap W$. Entonces $\phi(w_i) \neq (0,0,0)$ para $i = 1, 2$ y 3. Para cada $i \in \{1,2,3\}$, el segmento qw_i está contenido en W, así que $\phi(qw_i)$ es un conexo que tiene a $\theta = (0,0,0)$ y a un punto en el conjunto $te_i - \{\theta\}$. De manera que $\phi(W)$ contiene a una subintervalo abierto no degenerado de te_i. Entonces, $p = \phi(q)$ esta en el interior de $\phi(W) \subset \phi(V)$. Y por tanto, ϕ es una función abierta.



Figura~4-4: Los pentágonos E_1 y E_2.

Observemos que si llamamos Y_0 a la parte de la frontera de $[0,1] \times [0,1]$ en $\mathbb{R}^2$ que no pertenece a U_1 (que es el canal de agua salada). es decir:

$$Y_0 = Fr_{\mathbb{R}^2}([0,1] \times [0,1]) - U_1$$

Se tiene que $Y_0 \subset Y$ y por tanto $\phi(Y_0) = \{(0,0,0)\}$.

Fijémonos en el conjunto $[-2,2] \times [-1,1]$ en $\mathbb{R}^2$. Definimos en él los conjuntos $M_1 = (-1,-1)(-2,-1)(-2,1)(-1,1)$ y $M_2 = (1,-1)(2,-1)(2,1)(1,1)$. Sean E_1 (respectivamente. E_2) el pentágono que resulta de tomar la envolvente convexa de $M_1 \cup \{(0,0)\}$ (respectivamente, $M_2 \cup \{(0,0)\}$).

Observemos a E_1. notemos que este conjunto es homeomorfo a $[0,1] \times [0,1]$, que a su vez es homeomorfo a $[-2,-1] \times [-1,1]$. En este último conjunto podemos construir los

Lagos de Wada de manera que el canal de agua salada empiece en el segmento $\{-1\} \times [-1, -1]$. También lo podemos construir de manera que el punto $(-1, 0)$ sea el punto de U_1 donde la función $f(q) = d(q, Y)$ alcanza su máximo. Además podemos pedir que a medida que q viaja de $(-1, 1)$ a $(-1, 0)$ en el segmento $(-1, 1)(-1, 0)$, f sea estrictamente creciente y que cuando viaja de $(-1, 0)$ al $(-1, -1)$ en el segmento $(-1, 0)(-1, -1)$. f sea estrictamente decreciente.

Con esto podemos definir una función suprayectiva y abierta $\phi^* : [-2, -1] \times [-1, 1] \to T_1 \subset Z$, donde $T_1 = L_1 \cup L_2 \cup (-1, 0)(0, 0)$. Esta función se construye de manera similar a la función abierta y continua que dimos de $[0, 1] \times [0, 1]$ a T. Podemos pedir que $\phi^*(M_1) = \{(-1, 0)\}$.

Observemos que, con la definición de ϕ, nuestra función ϕ^* no tendría como imagen a T_1, si no a un subtriodo de él, sin embargo, componiendo con un alargamiento del subtriodo, ya podemos suponer que la imagen de ϕ^* sí es igual a T_1. Notemos también que pedimos que $\phi^*(M_1) = \{(-1, 0)\}$ y que ϕ^* *se comporta como* f *en el segmento* $(-1, 1)(-1, -1)$, es decir, podemos pedir que $\phi^*((-1, 1)(-1, -1)) = (-1, 0)(0, 0)$ y que a medida que viajamos de $(-1, 1)$ a $(-1, 0)$ en el segmento $(-1, 1)(-1, 0)$, la primera coordenada de ϕ^* crece estrictamente y, a medida que viajamos de $(-1, 0)$ a $(-1, -1)$ en el segmento $(-1, 0)(-1, -1)$, la primera coordenada de ϕ^* decrece estrictamente. De manera que $\phi^* |_{(-1, 1)(-1, 0)}$ y $\phi^* |_{(-1, 0)(-1, -1)}$ son homeomorfismos.

Sea $h : E_1 \to [-2, -1] \times [-1, 1]$ un homeomorfismo tal que $h|_{M_1} : M_1 \to M_1$ es la identidad y dada $p \in (-1, 1)(0, 0)$ se tiene que $h(p) = \left(\phi^* |_{(-1, 1)(-1, 0)}\right)^{-1} ((\pi_1(p), 0))$ donde $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la proyección en la primera coordenada.

Dada $p \in (-1, -1)(0, 0)$ pediremos que $h(p) = \left(\phi^* |_{(-1, 0)(-1, -1)}\right)^{-1} ((\pi_1(p), 0))$.

Definimos $\phi_1 : E_1 \to T_1$ dada por $\phi_1 = \phi^* \circ h$. Como ϕ_1 es composición de funciones abiertas y continuas, tenemos que ϕ_1 es también abierta y continua.

Ahora veremos algunas propiedades de la ϕ_1. La imagen de M_1 bajo ϕ_1 es el punto $\{(-1, 0)\}$, ya que, en M_1, la función h es un homeomorfismo, y $\phi^*(M_1) = \{(-1, 0)\}$.

Tomemos un punto $p \in (-1,-1)(0,0)$, entonces tenemos que

$$\phi_1(p) = \phi^*(h(p)) = \phi^*\left(\phi^* \left|_{(-1,0)(-1,-1)}\right.\right)^{-1}((\pi_1(p),0)).$$

Por ser ϕ^* en el conjunto $(-1,0)(-1,-1)$ un homeomorfismo, obtenemos

$$\phi_1(p) = ((\pi_1(p),0)).$$

Es decir, ϕ_1 coincide en este conjunto con la proyección natural.

De igual manera, si $p \in (0,0)(-1,1)$ entonces

$$\phi_1(p) = \phi^*(h(p)) = \phi^*\left(\left(\phi^* \left|_{(-1,1)(-1,0)}\right.\right)^{-1}((\pi_1(p),0))\right) = ((\pi_1(p),0)).$$

Similarmente se puede construir una función abierta $\phi_2 : E_2 \to T_2$ donde $T_2 = L_3 \cup L_4 \cup (0,0)(1,0)$ con las propiedades de que $\phi_2(M_2) = \{(1,0)\}$ y $\phi_2 \left|_{(1,-1)(0,0)(1,1)}\right. : (1,-1)(0,0)(1,1) \to (0,0)(1,0)$ es la proyección natural.

Sea E el rectángulo $[-2,2] \times [-1,1]$.

Definimos $\phi_0 : E \to Z$ por:

$$\phi_0(x,y) = \begin{cases} \phi_1(x,y) & \text{si } (x,y) \in E_1. \\ \phi_2(x,y) & \text{si } (x,y) \in E_2. \\ (x,0) & \text{si } (x,y) \notin E_1 \cup E_2. \end{cases}$$

Comprobaremos algunas propiedades de ϕ_0.

- ϕ_0 es continua.

Supongamos que $(x,y) \in \overline{E - (E_1 \cup E_2)} \cap (E_1 \cup E_2)$. Entonces (x,y) pertenece a alguna de las poligonales $(-1,1)(0,0)(-1,-1)$ o $(1,-1)(0,0)(1,1)$. Por la forma en que se escogieron ϕ_1 y ϕ_2, $\phi_i(x,y)$ (dependiendo en cuál poligonal se encuentra (x,y)) es la proyección natural al segmento $(-1,0)(1,0)$ es decir $\phi_i(x,y) = (x,0)$. Por lo anterior $\phi_0 \left|_{\overline{E-(E_1 \cup E_2)}}\right.$ es la función que a un punto (x,y) le asigna el punto $(x,0)$. Por tanto ϕ_0 es una función continua en cada uno de los cerrados $E_1 \cup E_2$ y $\overline{E - (E_1 \cup E_2)}$ y, entonces, ϕ_0 es continua.

-ϕ_0 es suprayectiva.

Recordemos que $\phi_1 : E_1 \to T_1$ es una función abierta, de manera que $\phi_1(E_1)$ es un abierto, compacto y no vacío en el conexo T_1, así que $\phi_1(E_1) = T_1$. Similarmente $\phi_2(E_2) = T_2$. Y como $Z = T_1 \cup T_2$ concluimos que ϕ_0 es sobre.

-ϕ_0 es abierta.

Notemos que $\phi_0 \left|_{E_1 \cup E_2}\right.$ es abierta y $\phi_0 \left|_{E-(E_1 \cup E_2)}\right. : E - (E_1 \cup E_2) \to (-1,1) \times \{0\}$ es la restricción de una función abierta (que es la proyección natural) a un abierto, así que $\phi_0 \left|_{E-(E_1 \cup E_2)}\right.$ es abierta. Aplicando el Lema 39, concluimos que ϕ_0 es abierta.

-$\phi_0(M_1) = \phi_1(M_1) = \{(-1,0)\}$.

-$\phi_0(M_2) = \phi_2(M_2) = \{(1,0)\}$.

-$\phi_0 \left|_{[-1,1] \times \{-1,1\}}\right. : [-1,1] \times \{-1,1\} \to (-1,0)(1,0)$ es la proyección natural.

Esto último es consecuencia de que $[-1,1] \times \{-1,1\} \subset \overline{E - (E_1 \cup E_2)}$.

Estamos listos para dar un promedio abierto para Z. Vamos a definir $m : Z \times Z \to Z$ considerando 12 casos.

(1) si $p, q \in L$ entonces definimos $m(p,q) = \frac{p+q}{2}$.

(2) si $p, q \in L_i$, para alguna $i \in \{1,2,3,4\}$, entonces definimos $m(p,q)$ como el punto de $\{p, q\}$ que esté más cercano al eje X.

(3) si $p \in L_1$ y $q \in L_2$ entonces definimos un homeomorfismo $h_1 : L_1 \times L_2 \to E$ con las siguientes propiedades:

- $h_1((-1,0),(-1,0)) = (-2,0)$.
- $h_1(L_1 \times \{(-1,0)\}) = (-2,0)(-2,1)(-1,1)$.
- $h_1(\{(-1,2)\} \times (-1,0)(-1,-1)) = (-1,1)(1,1)$.
- $h_1(\{(-1,2)\} \times (-1,-1)(-1,-2)) = (1,1)(2,1)(2,0)$.
- $h_1((-1,2)(-1,1) \times \{(-1,-2)\}) = (2,0)(2,-1)(1,-1)$.
- $h_1((-1,1)(-1,0) \times \{(-1,-2)\}) = (1,-1)(-1,-1)$.
- $h_1(\{(-1,0)\} \times L_2) = (-1,-1)(-2,-1)(-2,0)$.

Donde todos los arcos son enviados en forma proporcional usando la longitud de arco.

Ahora definimos $m(p,q) = \phi_0\,(h_1(p,q))$.

(4) si $p \in L_3$ y $q \in L_4$ entonces definimos $m(p,q) = \phi_0\,(-h_1(-q,-p))$.

(5) si $p \in L$ y $q \in L_1$ entonces definimos un homeomorfismo $h_2 : L \times L_1 \to E_1$ con las siguientes propiedades:

- $h_2\,((-1,0),(-1,0)) = (-1,-1)$.
- $h_2\,(\{(-1,0)\} \times L_1) = (-1,-1)(-2,-1)(-2,0)$.
- $h_2\,(L \times \{(-1,2)\}) = (-2,0)(-2,1)(-1,1)$.
- $h_2\,(\{(1,0)\} \times L_1)) = (-1,1)(0,0)$.
- $h_2\,(L \times \{(-1,0)\}) = (-1,-1)(0,0)$.

Donde todos los arcos son enviados en forma proporcional usando la longitud de arco.

Ahora definimos $m(p,q) = \phi_1\,(h_2(p,q))$.

(6) si $p \in L$ y $q = (q_1,q_2) \in L_2$ entonces definimos $m(p,q) = \phi_1\,(h_2(p,(q_1,-q_2)))$.

(7) si $p \in L$ y $q = (q_1,q_2) \in L_3$ entonces definimos $m(p,q) = -\phi_1\,(h_2(p,(-q_1,q_2)))$.

(8) si $p \in L$ y $q \in L_4$ entonces definimos $m(p,q) = -\phi_1\,(h_2(p,-q))$.

(9) si $p \in L_1$ y $q \in L_3$ entonces definimos un homeomorfismo $h_3 : L_1 \times L_3 \to E$ con las siguientes propiedades:

- $h_3\,((-1,0),(1,0)) = (0,-1)$.
- $h_3\,(\{(-1,0)\} \times L_3) = (0,-1)(1,-1)$.
- $h_3\,((-1,0)(-1,1) \times \{(1,2)\}) = (1,-1)(2,-1)(2,1)(1,1)$.
- $h_3\,((-1,1)(-1,2) \times \{(1,2)\}) = (1,1)(0,1)$.
- $h_3\,(\{(-1,2)\} \times (1,2)(1,1)) = (0,1)(-1,1)$.
- $h_3\,(\{(-1,2)\} \times (1,1)(1,0)) = (-1,1)(-2,1)(-2,-1)(-1,-1)$.
- $h_2\,(L_1 \times \{(1,0)\}) = (-1,-1)(0,-1)$.

Donde todos los arcos son enviados en forma proporcional usando la longitud de arco.

Ahora definimos $m(p,q) = \phi_0\,(h_3(p,q))$.

(10) si $p \in L_1$ y $q = (q_1,q_2) \in L_4$ entonces definimos $m(p,q) = \phi_0\,(h_3(p,(q_1,-q_2)))$.

(11) si $p = (p_1,p_2) \in L_2$ y $q \in L_3$ entonces definimos $m(p,q) = \phi_0\,(h_3((p_1,-p_2),q))$.

(12) si $p = (p_1, p_2) \in L_2$ y $q = (q_1, q_2) \in L_4$ entonces definimos $m(p,q) = \phi_0\,(h_3((p_1, -p_2), (q_1, -q_2$

Por simetría, m puede ser extendida a todo $Z \times Z$.

Ahora verificaremos que m cumple con las propiedades que deseamos:

- m está bien definida y es continua.

En realidad lo que hay que comprobar aquí, es que la función m coincide en las intersecciónes de los cerrados en los que se define (ya que en todos ellos m es continua). Voy a mostrar unos casos típicos, los restantes se pueden demostrar de manera análoga.

Empecemos con el caso (1), este es cuando $p, q \in L$. Puede coincidir con los casos (5) y (6), cuando $p \in L$ y $q = (-1, 0)$ (de aquí en adelante voy a suponer un orden, ya que por simetría el otro es igual). En el (1) el promedio corre desde $(-1, 0)$ (cuando $q = (-1, 0)$) hasta $(0, 0)$ (cuando $q = (1, 0)$). En los casos (5) y (6) se define la función h_2 y la imagen bajo esta función, del conjunto $L \times \{(-1, 0)\}$ es el segmento $(-1, -1)(0, 0)$; que a su vez, al aplicar la función ϕ_2 (que en ese segmento es la proyección natural al eje X), va a dar proporcionalmente a $(-1, 0)(0, 0)$. En (7) y (8) la intersección es cuando $p \in L$ y $q = (1, 0)$. En (1) el promedio recorre de $(0, 0)$ a $(1, 0)$. En los otros dos, tomamos $h_2(L \times \{(-1, 0)\}) = (-1, -1)(0, 0)$ (recordemos que hay que cambiarle el signo a la primera coordenada) y luego hay que aplicarle ϕ_1, dando como resultado el recorrido proporcional del segmento $(0, 0)(1, 0)$. El demostrar que coinciden (1) con (2) es trivial, por como están definidas. Siguiendo con el caso (1), coincide con (3) sólo cuando $p = q = (-1, 0)$, en (1), $m(p, q) = (-1, 0)$ y, en (3), $m(p, q) = \phi_0\,(h_1\,((-1, 0), (-1, 0))) = \phi_0((-2, 0)) = (-1, 0)$. Para el (4) se hace de manera similar. Los casos (9), (10), (11) y (12) tienen intersección con el (1) sólo cuando $p = (-1, 0)$ y $q = (1, 0)$, en (1), vale $m(p, q) = (0, 0)$, mientras que en los otros casos $m(p, q) = \phi_0(0, -1)$, que es justamente el punto $(0, 0)$.

Para el caso (2), cuando $p, q \in L_1$, la intersección con el caso (3) es cuando $p \in L_1$ y $q = (-1, 0)$. En el primero tenemos que $m\,(L_1 \times \{(-1, 0)\}) = \{(-1, 0)\}$, y en el (3), $h_1(L_1 \times \{(-1, 0)\}) = (-2, 0)(-2, 1)(-1, 1)$ y como éstos son puntos de M_1, la función

ϕ_0 los manda al punto $(-1,0)$. Es decir, $m(L_1 \times \{(-1,0)\}) = \{(-1,0)\}$. El caso (4) es igual. Para el caso (5), su intersección es la misma que tiene con el (1), como (1) y (5) coinciden y, también (1) y (2), la función coincide en los casos (2) y (5). Para los casos (6), (7) y (8) el procedimiento es el mismo.

El caso (3) es cuando $p \in L_1$ y $q \in L_2$. Con el caso (5) la intersección es $p \in L_1$ y $q = (-1,0)$. Como acabamos de ver anteriormente, en el caso (3) $m(L_1 \times \{(-1,0)\}) = \{(-1,0)\}$, y en el (5) $h_2(L_1 \times \{(-1,0)\}) = h_2(\{(-1,0)\} \times L_1) = (-1,1)(-2,1)(-2,0)$, como también son puntos de M_1, ϕ_1 los manda al $(-1,0)$. Con el caso (6) es casi la misma demostración.

Cuando $p \in L$ y $q \in L_1$ se aplica el caso (5). Dado que la intersección con (6), es la misma que con (1) y ya se demostró que coinciden, (5) y (6) también lo hacen. Con los casos (7) y (8), la intersección es cuando $p = (1,0)$ y $q = (-1,0)$. En el caso (5), como $h_1(p,q) = (0,0)$ y $\phi_1(0,0) = (0,0)$, $m(p,q) = (0,0)$. En los otros dos hay que tener un poco de cuidado por el orden en que elegimos p y q. Como $p \in L_3$ y $q \in L$, entonces no aplicamos exactamente los casos (7) y (8), sino sus simétricos. Entonces $m(p,q) = m(q,p) = \phi_1(h_2((-1,0),(-(1),0))) = -\phi_1(-1,0) = -(-1,0) = (1,0)$. Con los casos (9) y (10), la intersección es $p = (1,0)$ y $q \in L_1$. Para el (5), $h_2(\{(1,0)\} \times L_1) = (-1,1)(0,0)$ que bajo ϕ_1 va a dar a $(-1,0)(0,0)$, entonces $m(\{(1,0)\} \times L_1) = (-1,0)(0,0)$. Para el (9) y el (10), hay que fijarnos en que el que se encuentra en L_3 es $p = (1,0)$, entonces $h_3(L_1 \times \{(1,0)\}) = (-1,-1)(0,-1)$ y, bajo ϕ_0, va a dar al segmento $(-1,0)(0,0)$.

Finalmente veremos el caso (9), que es cuando $p \in L_1$ y $q \in L_3$. La intersección con (10) es cuando $p \in L_1$ y $q = (1,0)$. Como habrá notado, ya usamos en el párrafo anterior que (9) y (10) coinciden, y es cierto, ya que la única diferencia entre estos dos casos es que al punto que está en L_4, que en este momento es $q = (1,0)$, se le cambia de signo a la segunda coordenada antes de aplicarle h_3; como ésta es cero, las imágenes coinciden. Con (11) la demostración es igual, sólo que ahora $p = (-1,0)$ y $q \in L_3$. Con (12) la intersección es cuando $p = (-1,0)$ y $q = (1,0)$ y, como los casos sólo difieren en que en (12), primero se le cambia de signo a las segundas coordenadas de los puntos y, en la intersección las dos son cero, entonces coinciden también.

Es fácil -si se tienen las hojas suficientes- analizar el resto de los casos, ya que no difieren mucho de los aquí vistos. Nos permitiremos entonces concluir con que m es continua.■

- m es simétrica.

Por construcción, lo es.

- $m(p,p) = p$.

Primero supongamos que $p \in L$. Dado que los casos coinciden tomaré el caso (1), entonces $m(p,p) = \frac{2p}{2} = p$.

Si sucede que $p \in L_i$ para alguna $i \in \{1,2,3,4\}$, usaremos el caso (2), $m(p,p)$ es justamente p, ya que no hay otro punto para ver cuál está más cerca del eje X.■

- m es abierta.

Para demostrar que m es abierta, usaremos el Lema 39. Los conjuntos $L_i \times L_j$ con $i, j \in \{1,2,3,4\}$ son cerrados de $Z \times Z$. La función m restringida a ellos es suprayectiva y abierta, por ser una composición de un homeomorfismo, ya sea h_1 o h_3, y una función suprayectiva y abierta ϕ_0.

A continuación mostraremos que m restringida a $(L - \{(-1,0),(1,0)\}) \times L_i$ (y su simétrico) es abierta.

Primero supongamos $i = 1$, los demás casos son muy parecidos. Entonces aplicaremos la *definición* (5) del *promedio*. Sean $p \in L - \{(-1,0),(1,0)\}$ y $q \in L_1$. Sean U y V vecindades pequeñas en esos conjuntos de p y q respectivamente. Entonces bajo h_2, $U \times V$ va a dar a un abierto del pentágono E_1 que no contiene a $(0,0)$, ya que el único par de puntos que van a dar bajo h_2 al $(0,0)$ son $(-1,0)$ y $(1,0)$. Notemos que ϕ_1 restringida a $E_1 - \{(0,0)\}$ es abierta, ya que la imagen de cualquier básico en este conjunto nos va a dar a un intervalo abierto en alguna L_i con $i = 1,2$ (si es que está totalmente contenido en los canales de agua azul o verde), o a una vecindad abierta del $(-1,0)$ (si es que intersecta a los tres canales) o intervalo abierto en el segmento $(-1,0)(0,0)$ (si es que está totalmente contenido en el agua salada). Entonces $m(U \times V)$ es un abierto de Z.■

Por tanto m es un promedio abierto para el continuo Z.□

Pregunta ¿Es posible definir un promedio abierto más simple para el continuo Z del Ejemplo 40?

Por ejemplo, ¿es posible definir un promedio abierto m para Z, tal que cada fibra $m^{-1}(z)$ sea localmente conexa (o descomponible)?

Pregunta ¿Cada árbol admite un promedio abierto?

Pregunta ¿Existe una dendrita X que no sea un árbol y que admita un promedio abierto?

Capítulo 5

Promedios Confluentes

Ejemplo 41 *El abanico armónico admite un promedio confluente.*

Recordemos el continuo al cual llamamos el abanico armónico. Es el subconjunto de $\mathbb{R}^2$, al cual denotamos como A, tal que $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} P_i$, donde cada P_n es el conjunto $\{te_n \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1]\}$, $e_n = (1, \frac{1}{n})$ si $n \geq 1$ y $e_0 = (1,0)$.

Definamos $M : (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\}) \to (\mathbb{N} \cup \{0\})$ por:

$$M(n,k) = \begin{cases} \max\{n,k\} & \text{si } n,k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n = 0 \text{ o } k = 0 \end{cases}$$

Entonces definimos ahora $m : A \times A \to A$ como $m(te_n, se_k) = \min\{t,s\}e_{M(n,k)}$.

Veremos que, efectivamente, m es un promedio confluente.

Primero probaremos que m es continua.

Sean $\varepsilon > 0$ y $x = t_0 e_{n_0}$, $y = s_0 e_{k_0}$ puntos de A. Dividiremos la demostración en tres casos:

- supongamos que $n_0 = 0$. Definimos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Sean $z = te_n$ y $w = se_k$ tales que $\|z - x\| < \delta$ y $\|w - y\| < \delta$, $r_0 = \min\{t_0, s_0\}$, $r = \min\{t, s\}$, $j = M(n,k)$. Notemos que $te_n - te_0$ es la proyección en eje Y del vector $z - x$. Por tanto $\|z - x\| \geq \|te_n - te_0\|$. En consecuencia,

$$\|e_n - e_0\| = \tfrac{1}{t}\|te_n - te_0\| \leq \tfrac{1}{t}\|z - x\| < \tfrac{1}{t}\delta \leq \delta.$$

Como $\|e_n - e_0\| \geq \|e_j - e_0\|$ entonces $\|e_j - e_0\| < \delta$.

Dado que $te_0 - t_0e_0$ es la proyeccón del vector $z - x$ en el eje X, tenemos también que $|t - t_0| = |t - t_0|\,\|e_0\| = \|te_0 - t_0e_0\| \leq \|z - x\| < \delta$. De igual manera se puede demostrar que $|s - s_0| < \delta$.

Si $r_0 = t_0$ y $r = t$, se tendría que $|r - r_0| = |t - t_0| < \delta$. De igual manera si $r_0 = s_0$ y $r = s$, tendríamos que $|r - r_0| = |s - s_0| < \delta$.

Supongamos que $r_0 = s_0$ y $r = t$. Por como definimos r y r_0, tenemos que pueden suceder dos cosas: que s este entre s_0 y t, en cuyo caso $|r_0 - r| \leq |s_0 - s| < \delta$, o que t_0 este entre s_0 y t y tendríamos que $|r_0 - r| \leq |t_0 - t| < \delta$.

Notemos que si $r_0 = t_0$ y $r = s$, por un argumento como el anterior, $|r_0 - r| < \delta$. Demostramos entonces que, no importando los valores de r_0 y r, se cumple que $|r_0 - r| < \delta$. Para probar esto, no usamos el hecho de que $n_0 = 0$, que es algo importante ya que lo vamos a utilizar después.

Entonces $m(x, y) = r_0e_0$ y $m(z, w) = re_j$.

$$\|m(x,y) - m(z,w)\| = \|r_0e_0 - re_j\| \leq \|r_0e_0 - re_0\| + \|re_0 - re_j\| =$$
$$|r_0 - r|\,\|e_0\| + |r|\,\|e_0 - e_j\| \leq |r_0 - r| + \|e_0 - e_j\| < \delta + \delta = \varepsilon.$$

- si tenemos que $k_0 = 0$, como m es simétrica -más abajo decimos cuál es la razón-, el caso es muy similar al anterior.

- supongamos que $n_0, k_0 \neq 0$. Usaremos la misma notación que el primer caso. Entonces, como $P_{n_0} - P_0$ y $P_{k_0} - P_0$ son abiertos de A, existe $\delta_0 > 0$ tal que para cada par de puntos $z, w \in A$ que cumplan que $\|z - x\| < \delta_0$ y $\|w - y\| < \delta_0$, se tiene por conclusión que los puntos z y w son de la forma $z = te_{n_0}$ y $w = se_{k_0}$, con $t, s \in [0, 1]$. En particular, esto significa que $x, .z \in P_{n_0}$ y que $y, w \in P_{k_0}$. Sea $j_0 = M(n_0, k_0)$.

Sean $\delta = \min\{\varepsilon, \delta_0\}$ y $z, w \in A$ tales que $\|z - x\| < \delta$ y $\|w - y\| < \delta$. Entonces $x, z \in P_n$ y $y, w \in P_k$. Por como se construyó la función m, $m(x, y), m(z, w) \in P_{M(n,k)}$. En el primer caso se demostró que $|r_0 - r| < \delta$, no importando los valores de n_0 y k_0, lo único que se usó es que z y w distan de x y y, respectivamente, en menos de δ. Entonces la siguiente desigualdad se cumple.

$$\|m(x,y)-m(z,w)\| = \|r_0 e_{M(n,k)} - r e_{M(n,k)}\| \leq |r_0 - r| \, \|e_{M(n,k)}\| < |r_0 - r| < \delta \leq \varepsilon.$$

Por tanto la función m es continua.

Lo que sigue es ver que m es un promedio.

Es claro que m es simétrica ya que las funciones involucradas con ella lo son. Sea $te_n \in A$. Calculando, $m(te_n, te_n) = \min\{t,t\}e_{M(n,n)} = te_n$. Por tanto m es un promedio.

Para finalizar demostraremos que m es confluente.

Sea K un subcontinuo de A y consideremos los siguientes casos:

- Supongamos primero que $\theta \notin K$. Existe un entero positivo L tal que $K \subset P_L - \{\theta\}$. Entonces existen $t_0, t_1 \in (0,1]$ tales que $K = \{te_N : t_0 \leq t \leq t_1\}$. Sean $p, q \in A$ tales que $m(p,q) \in K$. Notemos que $p \neq \theta \neq q$. Existen enteros positivos J y J' tales que $p \in P_J$ y $q \in P_{J'}$. Dado que $m(p,q) \in K$. tenemos que si $p = te_J$ y $q = t'e_{J'}$ entonces se cumple que $N = M(J,J')$ y que $t, t' \in [t_0, t_1]$. Fijémonos en los siguientes continuos $F = \{te_J : t_0 \leq t \leq t_1\}$ y $F' = \{te_{J'} : t_0 \leq t \leq t_1\}$.

Para terminar la demostración de este caso faltaría ver que $m(F \times F') = K$.

Sea $a \in m(F \times F')$. entonces $a = se_{M(J,J')} = se_N$, donde $t_0 \leq s \leq t_1$ y, por tanto, $m(F \times F') \subset K$.

Sea $a \in K$. entonces $a = se_N$ donde $t_0 \leq s \leq t_1$. Sean $b = se_J$ y $b' = se_{J'}$, entonces $b \in F$ y $b' \in F'$. Tenemos que $m(b,b') = \min\{s,s\}e_{M(J,J')} = se_N = a$, y por tanto $m(F \times F') = K$.

-Supongamos ahora que $\theta \in K$. Demostraremos que para cada par de puntos $p, q \in A$ tales que $m(p,q) \in K$, existen dos conexos Z y Z' tales que $p, \theta \in Z$, $q, \theta \in Z'$ y $m(Z \times Z') \subset K$. Sabemos que existen enteros n y k tales que $n, k \geq 0$, $p \in P_n$ y $q \in P_k$. Entonces podemos escribir $p = te_n$ y $q = t'e_k$ con $t, t' \in [0,1]$. Sean $Z = \{se_n : 0 \leq s \leq t\}$ y $Z' = \{se_k : 0 \leq s \leq t'\}$. Por construcción $p, \theta \in Z$ y $q, \theta \in Z'$.

Sean $w \in Z$ y $z \in Z'$. Entonces estos puntos son de la forma $w = se_n$ y $z = s'e_k$ con $0 \leq s \leq t$ y $0 \leq s' \leq t'$. Definamos $u = \min\{t,t'\}$ y $v = \min\{s,s'\}$. Entonces

$v \leq u$ y, en consecuencia, $m(w, z)$ está en $P_{M(n,k)}$ entre θ y $m(p, q)$. Dado que la única forma de conectar θ y $m(p, q)$ en A es pasando por todos los puntos intermedios entre ellos dos, tenemos que $m(w, z) \in K$. Por tanto $m(Z \times Z') \subset K$. Y con esto termina la demostración de que m es confluente.$\square$

Pregunta ¿Existe un continuo que admita un promedio, pero que no admita promedios confluentes?

Capítulo 6

Bibliografía

1. G. Aumann. *Über Räume mit Mittelbildungen,* Math. Ann. 119 (1943), 210-215.

2. P. Bacon. *An acyclic continuum that admits no mean*, Fund. Math. 67 (1970), 11-13.

3. P. Bacon. *Unicoherence in means*, Colloq. Math. 21 (1970), 211-215.

4. M. Bell y S. Watson, *Not all dendroids have means*, Houston J. Math. 22 (1996), 39-50.

5. J.J. Charatonik. *Confluent mapping and unicoherence of continua*, Fund. Math. 56 (1964). 213-220.

6. J.J. Charatonik, W.J. Charatonik, K. Omiljanowski y J.R. Prajs, *Hyperspace retractions for curves*. Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 370 (1997), 1-34.

7. J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass., 1967.

8. J. Hocking y G.Young, *Topology,* Dover Publications Inc., New York, N.Y., 1988.

9. A. Illanes. *Notas de hiperespacios*, (sin publicar).

10. A. Illanes y S.B. Nadler Jr., *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker Inc., New York. N.Y., 1999.

11. A.N. Kolmogoroff, *Sur la notion de la moyenne*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (6). 12 (1930). 388-391.

12. S.B. Nadler Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker Inc., New York. N.Y., 1992.

13. K. Sigmon. *A note on means in Peano continua*, Aequationes Math. 1 (1968), 85-86.

14. K. Kawamura y E.D. Tymchatyn. *Continua which admit no mean*, Colloq. Math. 71 (1996). 97-105.