UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATRICES EN EL CCH"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

DANIEL FLORES IBARRA

DIRECTORA DE TESIS:

ACT. DULCE MA. PERALTA GONZÁLEZ RUBIO

MÉXICO, D.F. 2000

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNOMA DE MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATRICES EN EL C C H "

realizado por DANIEL FLORES IBARRA

con número de cuenta 7711826-4 , pasante de la carrera de Matemático

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario	Act. Dulce Ma. Peralta González Rubio	Dulce Ma. Peralta G.R.
Propietario	M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz	
Propietario	Mat. Armando Carlos Meza Romero	
Suplente	Mat. Julieta del Carmen Verdugo Díaz	
Suplente	M. en C. Francisco Struck Chávez	

Consejo Departamental de Matemáticas

Mat. Julio César Guevara Bravo

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

DEDICATORIA

Para mis padres que me dieron mucho y me enseñaron muchas cosas.

A mis hermanos por que han compartido sus momentos buenos y malos conmigo, yo también quiero compartir este logro con ustedes.

Para ti Bety, mi compañera, por todo el apoyo, paciencia y sobre todo por tu amor.

Para Dany, Pablo y el nuevo bebé que cambiaron mi vida dándole otro sentido y nuevas dimensiones.

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento que tiende a infinito para mi directora, por todos los apoyos y facilidades que me ofreció para poder realizar este trabajo.

Gracias a los sinodales por todos los comentarios, sugerencias y por todo el tiempo que dedicaron a la revisión del trabajo, lo que hizo posible mejorarlo y enriquecerlo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.................................... iii

1. Las Matrices en los Programas del CCH

1.1 Objetivos y Contenidos a enseñar en el Plan de Estudios Actualizado (PEA)............... 1

1.2 Comentarios y observaciones................. 4

2. Marco Teórico

2.1. Corrientes Pedagógicas que orientan el trabajo................................ 6

2.1.1. El Constructivismo...................... 8

2.1.2. Aprendizaje por descubrimiento.......... 12

2.1.3. Resolución de Problemas 15

2.2. Elementos didácticos para el desarrollo del Material.............................. 18

2.3. Diseño del Material Didáctico............... 20

3. Aspectos epistemológicos sobre matrices y determinantes.

3.1. Aspectos Históricos....................... 24

3.2. Otros conocimientos sobre el tema que pueden abordarse

3.2.1 Cómo escalonar matrices................ 28

3.2.2 Cantidad de operaciones que se hacen en el método de Gauss y en Determinantes... 29

3.2.3 Equivalencia entre la representación de sistemas de ecuaciones y matrices....... 30

3.2.4 Interpretación geométrica.

3.2.4.1 Ecuaciones equivalentes y funciones lineales.......................... 31

3.2.4.2 Representación en 3 dimensiones.... 33

4 Diseño Didáctico.

4.1 Consideraciones del Material................. 36
4.2 Características y Propiedades del Material.. 38
4.3 Problemas en el aprendizaje que atiende el Material.................................. 40

5. Material Didáctico.

5.1. Presentación del Material................... 42
5.1.1. Cómo usar el Material.................. 44

5.2 MÉTODO DE ELIMINACIÓN
5.2.1 Ecuaciones Equivalentes............... 45
5.2.2 Interpretación Geométrica............. 53
5.2.3 Resumen del Método.................... 57
5.2.4 Como obtener sistemas de ecuaciones equivalentes.......................... 62

5.3 Matrices.................................... 65

5.4 MÉTODO DE GAUSS
5.4.1 Cómo deducirlo........................ 71
5.4.2 En que consiste el método 74
5.4.3 Reglas para obtener una matriz escalonada............................ 87

5.5 MÉTODO DE GAUSS-JORDAN
5.5.1 Aplicación del Método................. 89
5.5.2 Casos especiales...................... 92

5.6 MÉTODO DE DETERMINANTES
5.6.1 Deducción del Método.................. 99
5.6.2 Desarrollo por Menores................ 108

RESULTADOS DE LOS EJERCICIOS 114
CONCLUSIONES...................................... 117
BIBLIOGRAFIA...................................... 120

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo es aportar un material didáctico de doble propósito, por un lado, se trata de presentar, en forma más accesible para el estudiante, el primer tema del tercer curso semestral del CCH, ***"Solución numérica de Sistemas de ecuaciones lineales"*** y, por otro, hacer del conocimiento del profesor que puede apoyar su curso con un material hecho ex profeso. El objetivo de dicha unidad temática es que el alumno aprenda diversos métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, por lo que en su contenido se encuentran los métodos de eliminación, matrices y el de determinantes, temas estos últimos muy nuevos para el alumno.

Para obtener un mejor trabajo cuyo diseño didáctico apoye a la enseñanza y aprendizaje de las matrices, tomamos en cuenta lo siguientes:

- Programa de la materia.
- Corrientes Pedagógicas.
- Conocimientos extacurriculares.
- Diseño Didáctico y experiencia docente

Cada uno de estos aspectos conforman un capítulo y permiten darle forma y sentido a todo el material didáctico. De ello hablaremos a continuación

El capítulo 1 se refiere a los contenidos y los objetivos del tema planteados en el Plan de Estudios Actualizado (PEA) del CCH. En este espacio hay comentarios sobre la contradicción de estos dos elementos con respecto al poco tiempo establecido en los programas del PEA.

El segundo capítulo señala las orientaciones pedagógicas y se refiere **al cómo** abordar el tema desde la perspectiva del constructivismo o, desde el punto de vista de las orientaciones del aprendizaje por descubrimiento; o también, la manera cómo se pueden aprovechar los principios pedagógicos expuestos por la corriente de la resolución de problemas. Asimismo, contempla cuestiones de tipo práctico para el diseño didáctico y señala la estructura del presente material instructivo para que realmente se puedan conseguir aprendizajes significativos.

En el capítulo 3, comentamos varios de los conocimientos que están relacionados con el tema, sin que estos estén necesariamente desarrollados en el material instructivo dirigido a los estudiantes —pues no están contenidos en el programa—; su mención aquí obedece a la intención de ayudar al profesor a ampliar su visión sobre el tema y contribuir a su vez, a que el estudiante también obtenga una mejor panorámica de la unidad que estudia. Entre estos conocimientos relacionados, comentamos, por ejemplo, algunos aspectos históricos, así como variantes de los métodos tratados y cuestiones relacionadas con la interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones lineales.

El capítulo cuarto señala, por una parte, los problemas que puede tener el estudiante con este tema al abordarlo por primera vez y, por otra, muestra las características que tiene el material didáctico para propiciar que el alumno logre un buen aprendizaje.

Todos los elementos anteriores son el soporte teórico y técnico del material didáctico que proponemos. Explican al profesor la orientación y los principios de composición didáctico-pedagógica de la parte que va dirigida expresamente al estudiantado, dando al maestro una orientación más completa del nivel de enseñanza que aborda. Creemos que estos primeros cuatro capítulos son suficientes para que el profesor comprenda cómo se logra la comunicación entre el material y el alumno.

El capítulo 5 es nuestra propuesta didáctica para el aprendizaje de la Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales con los métodos de Eliminación, Gauss, Gauss-Jordan y el de Determinantes. Cabe hacer notar que el formato cambia, pues ahora nos estamos dirigiendo al alumno, se plantean preguntas, fichas de trabajo y otras actividades para que pueda adquirir nuevos conocimientos al irlas realizando. Este capítulo es la parte sustantiva de la tesis y nuestra aportación al trabajo en el aula con respecto a este tema

Listamos aquí los elementos más destacables del material:

- La mayoría de los conocimientos están contextualizados.
- Las fichas de trabajo permiten que el trabajo sea la mayor fuente de conocimiento para el estudiante.
- Con problemas cotidianos nos acercamos a conocimientos y métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.
- Tiene invitaciones al alumno para que obtenga y redacte sus propias conclusiones.

Es esta última parte, un segundo trabajo que no termina aquí, pues con su uso en el aula, será un material que año con año se transforme en una mejor guía para ayudar a las nuevas generaciones de jóvenes a comenzar el aprendizaje del tema que antaño sólo se abordaba en el nivel superior de enseñanza.

1. LAS MATRICES EN LOS PROGRAMAS DEL CCH

El estudio de las matrices en los nuevos programas, aparece en el programa de Matemáticas III Álgebra y Geometría Analítica como primer tema, señalando que es un tema avanzado de álgebra y por ello no se dará mucha profundidad a éste, se utiliza para dar una nueva dimensión al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

1.1 Objetivos y Contenidos a enseñar en el Plan de Estudios Actualizado (PEA)

Los objetivos generales referidos a este tema señalan:

> "- Avanzar hacia la apropiación permanente de los procedimientos para operar con operaciones algebraicas y sus aplicaciones en la solución de ecuaciones y problemas.
>
> - Continuar con el aprendizaje del álgebra mediante el estudio de las soluciones numéricas de los sistemas de ecuaciones lineales..."[1]

La unidad 1 titulada, Soluciones Numéricas de los Sistemas de Ecuaciones Lineales de este programa nos da el siguiente contenido:

- El método de eliminaciones sucesivas: solución de sistemas escalonados, sistemas equivalentes y reducción de un sistema a otro escalonado equivalente.
- Matriz de coeficientes y matriz aumentada de un sistema, operaciones elementales con los renglones de

[1] Programas del CCH de Matemáticas III y IV, p. 4.

una matriz y el método de Gauss- Jordán.

- Regla de Cramer y determinantes, comparación del método de Gauss-Jordán y la regla de Cramer.

El propósito de este trabajo es desarrollar de forma didáctica esta unidad.

El objetivo particular " la introducción de sistemas de **nxn** y su solución..."[2] por los métodos ya señalados y como objetivos específicos.

" Al finalizar esta unidad, los alumnos:

- Sabrán plantear y resolver problemas que conduzcan a sistemas de ecuaciones lineales.
- Utilizarán los métodos de eliminaciones sucesivas y Gauss Jordán para resolver y decidir según el caso, si el sistema de ecuaciones tiene una, infinitas o ninguna solución.
- Compararán el método de Gauss-Jordan con la regla de Cramer contando el número de multiplicaciones necesarias para aplicar cada método."[3]

Conviene hacer la observación, que en este primer acercamiento no se trata el álgebra de las matrices, pues solamente se utiliza como herramienta.

No es sino hasta pasado un semestre que se vuelve a tocar el tema de las matrices pero ahora desde un punto de vista mas teórico, pues en Matemáticas IV en la unidad 1, Matrices y modelos Matemáticos, como su nombre lo indica la intención es:

---

[2] Programas p.5.
[3] Programas p.5.

"...el uso de las matrices como instrumentos útiles para modelar diversas situaciones donde interviene el concepto de sistema, y como generalización de algunos tópicos relativos a la solución de sistemas de ecuaciones lineales ..."[4]

Por ello es comprensible, que se planteen como objetivos generales:

"- La apropiación permanente de los procedimientos para operar con expresiones algebraicas y sus aplicaciones en la solución de ecuaciones y problemas...

- Enriquecer las ideas de modelo matemático ... a partir de la introducción de las matrices como una forma de describir ciertas situaciones y operar con ellas,.."[5]

Los contenidos de esta unidad son:

- Los arreglos rectangulares de números (matrices) como modelos de algunas situaciones: La matriz de Insumo-Producción, etc.
- Introducción a las operaciones con matrices. suma y resta; multiplicación por un escalar y producto de dos matrices.
- La matriz identidad y la inversa de una matriz; el método de Gauss-Jordan para invertir una matriz.

Cabe hacer notar que en los dos programas ambos temas tienen un carácter introductorio, pues sólo asignan 10 horas para cada unidad y por ejemplo en el programa de matemáticas IV incluye oraciones como estas: "...La práctica de los procedimientos para operar con matrices permanecerá ligada al

---

[4] Programas p.p.13-14.

tratamiento de ejemplos, sin que su adquisición permanente sea un objetivo exigible."[6] o lo que nos plantean los objetivos específicos:

"- Conocerán numerosas aplicaciones de las matrices.

- Practicarán las operaciones de suma, resta, multiplicación por un escalar y producto de matrices.

- Estará en contacto con la idea de inversa de una matriz y utilizará el método de Gauss-Jordan para calcularla."[7]

1.2 Comentarios y observaciones

El haber incluido el tema de las matrices en los nuevos programas es un acierto, pues además de plantear una nueva visión de las matemáticas nos permite hablar de una forma de agrupar y trabajar con datos para organizar información, tan importante en estos tiempos. Sin embargo el tiempo asignado a este tema es muy poco (10 hrs. en cada semestre) para todo lo que se pretende enseñar. Por ejemplo en el tercer semestre se pretende que el alumno utilice los métodos ya señalados en sistemas de **nxn**, así como plantear y resolver problemas y comparar los métodos. Siendo que como es un tema totalmente nuevo para el alumno requiere de un mayor tiempo de asimilación, además de que entre más grande sea el sistema más operaciones tienen lo aumenta las posibilidades de equivocarse aún más.

[5] Programas p. p. 13-14.
[6] Programas p. 15.
[7] Programas p. 15.

Alguien podría decir que se le dé más tiempo, pues el número de horas por semestre es de 80, pero basta echar un vistazo a los temas que se tienen que cubrir, para darse cuenta de la insuficiencia de tiempo, por ejemplo, en el tercer semestre que estamos hablando:

1. Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales.
2. Álgebra de los números complejos.
3. Ecuaciones de grado superior a dos.
4. Graficación de funciones.
5. Ecuación cartesiana de la recta.
6. Ecuación cartesiana de la circunferencia y la parábola.
7. Sistemas de coordenadas no rectangulares.

Son temas que por sí mismos requieren un tratamiento especial y también una buena cantidad de tiempo.

Y si se pretenden alcanzar los objetivos también se necesita tiempo, además de materiales didácticos adecuados que no existen. Es por ello que nos impusimos la tarea de elaborar un material adecuado al desarrollo del tema "Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales", para poder hacer más eficientes los tiempos disponibles sin perder de vista ni al alumno ni a los objetivos.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 CORRIENTES PEDAGÓGICAS QUE ORIENTAN ESTE TRABAJO

Como el proceso de enseñanza-aprendizaje es muy complejo y existen varias formas de abordar los temas a enseñar, no es posible comprometernos con una sola corriente pedagógica, ya que las orientaciones de este trabajo coinciden con varias de ellas. Nos sucede lo que dicen Gutiérrez y otros con respecto al diseño didáctico y la planeación pedagógica, lo citamos aquí:

> "Burkhardt considera que el conductismo, constructivismo y teorías de desarrollo que aunque proponen estructuras para comprender los fenómenos, no son completos en su dominio limitado, y por tanto, deben ser usados a sabiendas de que se presentan sin mecanismos establecidos para su integración fiable en modo predictivo"[8].

Hay que tener claro que en este proceso intervienen el alumno, los contenidos y el profesor. Los medios que se emplean para que el primero logre apropiarse de los contenidos deben considerar o asumir diferentes papeles, según la modalidad que el profesor haya planeado con base en las orientaciones de la pedagogía, la psicología, la didáctica y las teorías del aprendizaje en las que fundamenta su trabajo de enseñanza, buscando optimizar contenidos, objetivos y tiempo.

---

[8] Gutiérrez *et al*, 1991, p. 111.

Dada la variedad de corrientes para el aprendizaje, trataremos de centrar nuestra atención en las que consideramos las más importantes y las que utilizamos para la elaboración del material didáctico que proponemos. No obstante esta variedad, hay convergencias[9] como las que siguen:

- Un estudiante motivado aprende mejor que el que no lo está.
- Aprender motivado por el éxito es preferible a aprender motivado por el fracaso.
- La participación activa es preferible a la recepción pasiva.
- Se aprende con más disponibilidad cuando el material y las tareas son significativas...

En el material propuesto atendemos estas recomendaciones de la siguiente manera:

- Usando problemas cercanos a su realidad.
- Introduciendo fichas de trabajo y preguntas en el desarrollo del material, lo que permite una interacción y un compromiso más fuerte de parte del alumno.
- Las actividades tienen un grado de dificultad adecuado para evitar el fracaso.

Son puntos en los que también estamos de acuerdo así como en otros que señalaremos con detalle más adelante.

---

[9] Gutiérrez, *et al*, Op. Cit, p 76, (en Lankford, 1969, 24° *Yearbook NCTM* , p.406).

2.1.1. El Constructivismo

Se dice que la enseñanza impartida con esta orientación logra aprendizajes más duraderos, pues los alumnos construyen su propio conocimiento. Sin embargo, el término puede prestarse a diversas interpretaciones, como ocurrió en un seminario en España, del cual comenta Gómez-Granell y Coll (1994) que tanto se hablaba de constructivismo, inclusive se daba como marco de referencia de todo, que varios de los participantes terminaron por confundirse y no tener claro cuáles son las ideas principales que están presentes en un aprendizaje constuctivista; señalaron, además, que "No hay que hablar tanto de constructivismo, sino de propuestas concretas para mejorar la práctica en el aula..."[10].

Dejemos claro, que la concepción constructivista se organiza en torno a tres ideas fundamentales:

1. El alumno es el responsable último de su propio proceso de aprendizaje. Él es quien construye (o se construye) los conocimientos de su grupo cultural. Es realmente activo incluso cuando escucha o lee la exposición de los otros.
2. La actividad mental constructiva del alumno se aplica a contenidos que ya poseen un grado diverso de elaboración. Esto significa que el estudiante no tiene que descubrir o inventar el conocimiento; en buena medida, encontrará cierta parte de los contenidos curriculares ya elaborados y definidos en su mente y su tarea consistirá en reestructurarlos para hacerlos significativos, es decir, para apropiárselos.

3. La función del docente es conectar los procesos de construcción del alumno con el saber colectivo culturalmente organizado... no se limitará a crear las condiciones óptimas para que el alumno despliegue una actividad constructivista, sino que además su labor debe extenderse a orientar y guiar, explícita y deliberadamente, dicha actividad.[11]

El constructivismo dicen Díaz Barriga y colaboradores, "...postula la existencia y prevalencia de procesos activos en la construcción del conocimiento: habla de un sujeto cognitivo aportante, que claramente rebasa a través de su labor constructiva lo que le ofrece su entorno"[12].

Esta construcción se hace a partir de *conocimientos previos*, que el profesor o el material deben tener presentes, para lograr que el alumno establezca esa conexión y pueda involucrarse mejor con la situación presentada, para la construcción propia de su conocimiento.

El material didáctico que proponemos hace del alumno el actor principal, pues es él quien desarrolla las actividades, partiendo de cosas conocidas, por ejemplo en el capítulo 1, Método de Eliminación (pero manejado de diferente forma), con preguntas y fichas de trabajo para lograr que el estudiante use las ecuaciones equivalentes y las combinaciones lineales(sin que sepa que lo está haciendo) para resolver un sistema contextualizado. Posteriormente llegar a usar los métodos matriciales.

---

[10] C. Gómez-Granell y C. Coll, (1994), pp 8-10.
[11] D. Peralta, (1998), p, 69 .

Se pretende que el alumno use y "construya" operaciones en los sistemas y después los formalice, dándole los nombres que se usan en la literatura (matriz, combinación lineal, etc.).

Este camino debe propiciar en el alumno aprendizajes significativos, entendidos éstos, como la existencia de vínculos no arbitrarios y substanciales entre el material a aprender y los conocimientos previos. Si el estudiante consigue hacer esto, según Coll "...si lo integra en su estructura cognoscitiva, será capaz de atribuirle unos significados, de *construirse* una representación o modelo mental del mismo"[13].

Las condiciones que debe de cumplir el aprendizaje, para que sea significativo según lo señala Coll son: a) Que en primer lugar el contenido debe ser potencialmente significativo, tanto desde el punto de vista de su estructura interna, llamada *significatividad lógica,* lo cual exige que el material de aprendizaje sea relevante y tenga una organización clara; y b) Que tenga la posibilidad de asimilarlo, lo que se conoce como *significatividad psicológica,* que requiere la existencia, en la estructura cognoscitiva del alumno, de elementos pertinentes y relacionables con el material de aprendizaje. En segundo lugar, el alumno debe tener una *disposición favorable* para aprender *significativamente;* es decir, debe estar motivado para relacionar el nuevo material de *aprendizaje* con lo que ya sabe[14].

---

[12] **Diáz Barriga *et al* 1998, p. 14.**
[13] **C Coll, (1990) p. 443.**
[14] **Coll, Op. Cit, p. 444.**

Esa motivación la manejamos a partir de problemas cotidianos, que involucren por ejemplo, fotocopias, tortas, boletos para el cine etc. planteando situaciones en las que se podría involucrar el estudiante.

Estas condiciones son necesarias para construir nuevos significados, no sólo por motivación, sino porque el alumno lo necesita para lograr un cambio en los esquemas de conocimiento a partir de la introducción de nuevos elementos y una reestructuración de su saber actual. El estudiante obtiene, dentro de este proceso de aprendizaje, ventajas como el poder relacionar los conocimientos y recordarlos con mayor facilidad, modificaciones en su actitud frente al aprendizaje y sus momentos difíciles, capacidad para visualizar sus perspectivas y mejorar sus expectativas.

Respecto de la planeación de una enseñanza orientada al logro de aprendizajes significativos, Solé señala como una ventaja más, la posibilidad de entender y comprender, más profundamente, una situación de enseñanza, él afirma que:

> "La perspectiva del aprendizaje significativo contribuye, más que a precisar la etiología de los desajustes, a comprender lo que ocurre en la situación de enseñanza, y puede por tanto ofrecer pistas para modificarla en el sentido de dar respuesta a las necesidades que presenta un alumno en particular"[15].

---

[15] I. Solé, (1990), p. 67.

De modo que, si un profesor identifica dificultades de aprendizaje en un alumno, puede proponer alternativas para subsanarlas. Y el material puede ayudar a hacer más eficiente el trabajo en el aula, ya que permite atender a los alumnos que tengan más dificultades mientras los demás están trabajando.

2.1.2 Aprendizaje por descubrimiento

Puede haber diferentes puntos de vista de cómo entender un aprendizaje y cuál de ellos pueda ser el mejor, los enfoques modernos al respecto concuerdan en que los estudiantes pueden mejorar si tienen la posibilidad de manipular, trabajar y hacer cosas nuevas, diferentes o conocidas, con eso que el profesor quiere que aprenda. "En este enfoque no se presentan de entrada los conceptos y principios esenciales, sino que se estimula al estudiante para que los busque y encuentre por sí mismo, es la actividad intelectual y física humana el método"[16]. El alumno descubrirá el conocimiento a partir de preguntas y actividades que le permitan conformar su aprendizaje. El papel entonces, del profesor o del material didáctico será el de dirigir y apoyar estas actividades y en caso de desvíos, señalar alternativas para volver al camino correcto.

---

[16] M. Fregoso, siguiendo a Bruner, 1995, p. 23.

Por ejemplo, el alumno descubre que los sistemas de ecuaciones se pueden resolver usando los coeficientes, llegando a descubrir las matrices. Y lo que se puede hacer con las ecuaciones del sistema es muy parecido al manejo con los renglones de la matriz.

Katona realizó una investigación para evaluar estos procedimientos y Logroño menciona algunas de las conclusiones obtenidas en el trabajo de Katona:

> " a) Los aprendizajes significativos perduraban más tiempo en la memoria (cuantitativo) y son(*sic*) más fácilmente transferibles a nuevas situaciones (cualitativo), que los memorísticos.
>
> b) Los alumnos y alumnas que habían descubierto por sí mismos las reglas y las habían expresado en sus propios términos, tenían mayor facilidad para reconstruir las soluciones después de un espacio amplio de tiempo"[17].

El material didáctico, aquí propuesto, pretende contextualizar algunas situaciones, procedimientos y conceptos, para que el alumno logre un aprendizaje significativo de la resolución de sistemas de ecuaciones a partir de una situación resuelta por los diferentes métodos (de matrices y determinantes). Con una adecuada interpretación de los resultados obtenidos. Además para facilitar ese descubrimiento en el material se plantean preguntas como: ¿Qué fue lo que hiciste con los renglones de la matriz, para obtener matrices equivalentes? o ¿Cómo obtener sistemas de ecuaciones equivalentes?

---

[17] Logroño, (1995), p. 13.

Si hablamos de aprendizaje por descubrimiento, tenemos que referirnos a la teoría ausbeliana, señalando primero sobre lo que significa aprender dentro de esta corriente. Díaz Barriga lo explica así: "Ausubel como otros cognitivistas, postula que el aprendizaje implica una reestructuración activa de las percepciones, ideas, conceptos y esquemas que el aprendiz posee en su estructura cognitiva"[18]. De esta manera, la actividad es la piedra angular del aprendizaje y el ser pensante requiere procesar, organizar, analizar y aplicar información a conceptos o procedimientos nuevos, mediante un proceso de transferencia. Para aplicar la transferencia de conocimientos en la elaboración del material, tomamos la sugerencia de Gutiérrez R. y colaboradores: "... se diseña la secuencia de instrucciones descomponiendo lo que se vislumbra como una destreza compleja en partes subordinadas para jerarquizar la presentación, para graduarla en orden de dificultad"[19].

De modo que, por ejemplo, prestamos mucha atención a la notación de matrices, las operaciones, la dimensión, el significado de una matriz triangular. Cada una con su tratado especial, su ficha de trabajo y sus preguntas que permitan entender y utilizar cabalmente de lo que se trata.

[18] Díaz Barriga, (1998), p.18.
[19] Gutiérrez, *Op. Cit.* P. 67.

2.1.3 Resolución de Problemás.

Para darle un contexto a los nuevos conocimientos matemáticos, los introducimos a partir de problemas, empleando los principios que plantea Polya[20] (1965), de las cuatro fases que permiten resolver un problema:

1. Comprender el problema. Saber cuál es la incógnita, los datos y si son suficientes y no contradictorios.
2. Concebir un plan. Pensar por analogía en problemas similares que tengan la misma incógnita, que sean más sencillos o más generales y que ya se hayan resuelto. Es decir basarse en la experiencia y en conocimientos previos para elaborar un plan.
3. Ejecución del Plan. Saber a grosso modo lo que se tiene que hacer, ejecutar cada uno de los pasos y sobre todo verificar que sean correctos.
4. Visión Retrospectiva. No consiste solamente en la sustitución de los valores de las incógnitas, sino además si estas cumplen las condiciones del problema y si el método empleado se puede usar en otros problemas y sobre todo convencer al alumno de que ha hecho las cosas bien.

Cabe aclarar que en el material estos pasos no están señalados, pero en mucho se conserva el espíritu que nos muestra Polya, que es cuestionar lo más que se pueda, para que el alumno construya o descubra su propio conocimiento y esté capacitado para emplearlo en otras situaciones.

---

[20] Polya (1965).

Por ejemplo, en el problema 6 del capitulo 1, se plantean observaciones y preguntas que le permiten entenderlo. Como el problema es el balanceo de una dieta, se pide que suponga la cantidad de alimento A (50 gr) y que obtenga el porcentaje (20%), y así, con casos particulares para el alimento A y para el alimento B y la suma, que le permitan establecer la ecuación respectiva.

Dado que Polya sólo se refirió a las incógnitas *in abstracto*, hemos considerado el manejo de las unidades de medida como un elemento adicional que incluimos en el material, la unidad de medida es atributo, tanto de las incógnitas como de los datos. Pietzcsh se refiere a estos elementos como referentes que pueden ayudar a comprender mejor el problema y dice al respecto: "La mayoría de los datos presentados en el problema son cantidades de magnitud, que pueden representarse en forma de *números y unidades de medida....* Por ello debe hacerse un análisis adicional sobre las unidades de medida correspondientes de las cantidades"[21].

En el problema 1 "x" y "y" es el precio unitario de cada fotocopia y cada amplificación ($) respectivamente, identificación que permite una mejor comprensión de las incógnitas y la relación que tienen con los datos y demás cuestiones que se plantean.

---

[21] Pietzsch, et al. 1982, p. 73.

Si el alumno tiene claro en qué unidades se mide la incógnita, podrá relacionarlo mejor con los datos y las condiciones del problema y, además, la solución tendrá más sentido para él si sabe lo se que busca.

No hay que perder de vista que lo que pretendemos enseñar son los métodos de matrices y determinantes para resolver sistemas de ecuaciones, y por ello damos prioridad al procedimiento algorítmico sin descuidar los demás aspectos.

Varios problemas que planteamos en el material se resuelven conjuntamente con el estudiante. Para evitar diversas interpretaciones, tanto del problema como del procedimiento, hemos hecho caso a Campos, quien expone:

"Al realizar diversos estudios sobre estrategias de resolución de problemas de estudiantes de bachillerato he notado que no todos los alumnos interpretan el enunciado de un problema propuesto de la misma manera....El problema es que cada interpretación genera una estrategia de resolución"[22].

Al resolver los problemas de manera conjunta, no sólo evitamos las interpretaciones erróneas, sino además propiciamos que el alumno logre adquirir los conocimientos que se pretenden enseñar.

---

[22] H. Campos, 1999, p.51.

2.2. Elementos Didácticos para el desarrollo del Material

Con base en las consideraciones anteriores de las diferentes orientaciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje y dando prioridad al lógro de aprendizajes significativos, proponemos este material, que considera además algunas ideas adicionales de diversos autores para poder conseguir este tipo de apropiación del conocimiento matemático. Por ejemplo, Aebli sugiere orientar al estudiante como sigue:

"- Señalar lo esencial mediante suscíntos comentarios.
- Dividir en partes las totalidades complejas y denominarlas.
- Que vaya diciéndose a sí mismo aquello que ha de ir haciendo cuando realice la secuencia"[23].

Al hacer esta división, en el material se utilizan más de 7 páginas para desarrollar y dar contexto al método de Gauss. También los elementos importantes los enmarcamos y son el resultado de varias actividades previas.

La pretensión es involucrar al alumno, para que logre asimilar o construir su conocimiento. Sabiendo de antemano que él es el único que puede hacerlo, "nadie puede aprender por otro". Para propiciar que el estudiante trabaje en ello, es necesario dotar

---

[23] H. Aebli, 1995, p.6.

al contenido a estudiar de un significado adecuado para quien lo trabaja, como lo señala Bruer: "La única forma de hacer que las matemáticas tengan significado es relacionando en la enseñanza los conocimientos conceptuales con las habilidades procesuales"[24].

Para dar confianza al alumno partimos de procedimientos conocidos, por ejemplo, el método de suma o resta para obtener otros procedimientos (el de matrices) y al mismo tiempo explicarlos a partir de deducciones e introducir la simbología adecuada (con base en fichas de trabajo). Además pretendemos que el alumno interiorice estos procedimientos, para lograrlo, consideramos las etapas que señala Aebli:

> " Primera etapa al terminar la actividad se realiza una consideración retrospectiva de la tarea.
>
> 2 ª El alumno imagina el curso de la acción.
>
> 3ª él debe ser capaz de reproducir las acciones"[25].

El manejo de la codificación simbólica mostrará que el alumno interioriza y por tanto también automatiza el proceso.

La acción y la práctica harán que el alumno aprenda resolviendo preguntas, llenando espacios en blanco y tratando de escribir con sus palabras el procedimiento que él ya ha hecho, propicia además que el estudiante se formule preguntas.

---

[24] J. Bruer, 1995, p.100.
[25] H. Aebli, p.175.

Usamos la motivación con preguntas para buscar que el estudiante recuerde conocimientos útiles, despertar en él, intenciones correctas que le permitan reorganizar sus conocimientos y dar cabida a los nuevos para poderlos aplicar en los momentos adecuados.

2.3 Diseño del Material Didáctico

La intención de realizar un material que enseñe cómo resolver sistemas de ecuaciones con matrices y determinantes, surgió de la necesidad de cubrir este tema de forma adecuada para que el alumno lo pueda asimilar, tomando en consideración dos cosas: una es la completa novedad del tema para él y la otra proviene de los datos que la UNESCO aporta acerca de las formas más frecuentes que los humanos utilizamos para aprender:

> " Las personas asimilan el 80% de todos los conocimientos sobre material impreso. Además, el 70% de las personas pertenecen al tipo del aprendizaje visual —otros tipos son el auditivo y el motor—, ya que estas asimilan mejor el saber <<a través de la vista>> que <<a través del oído>> o mediante la escritura al dictar"[26].

---

[26] Ver Pietzsch *et al* 1982, p.237.

Con la ayuda del material el alumno podrá construir, explicar, deducir y ejercitar, en este nivel escolar, lo referente a matrices y determinantes para resolver sistemas de ecuaciones.

Para la introducción de algunos contenidos matemáticos en el material, se plantean algunas situaciones o problemas que permiten contextualizarlos y acercarlos a los estudiantes. Se da énfasis a los conocimientos claves que permiten una mejor comprensión de los temas, por ejemplo, las ecuaciones equivalentes que en la escuela cubana están contenidas en el 9° grado[27], estas ecuaciones se enseñan explícitamente después de haber revisado algunos métodos de resolución (sin haberlas comentado en principio), más adelante se señalan actividades que reafirman la existencia y aplicación de las ecuaciones equivalentes. La escuela española también las utiliza para desarrollar los conceptos de matrices y determinantes[28]. Una vez que logramos hacer que el estudiante sepa qué es un ecuación equivalente, pretendemos que haga conciencia de que las ecuaciones representan las condiciones del problema tratado.

El alumno puede identificar las ecuaciones como condiciones del problema y de entre varias de ellas, elegir cuáles permiten encontrar la solución. El método de eliminación por suma o resta lleva al estudiante, a partir de deducciones, al método de matrices (Gauss y Gauss-Jordan) con la aplicación de una transferencia de la obtención de sistemas equivalentes, a la obtención de matrices equivalentes, deduciendo así, las reglas para operar con los renglones de una matriz.

---

[27] **Pietzsch, p p. 65-68**
[28] **Ver Lobreña *et. al.* 1995, cap. 3.**

Con respecto a los determinantes, la línea que se sigue en el material, es la de responder a dos cuestiones, la primera responde a la posibilidad de resolver un sistema de ecuaciones usando sólo los coeficientes (como el método de Gauss)y la segunda cuestión atiende al procedimiento para trabajar con dichos coeficientes del sistema, mediante la aplicación del método de Gauss, y deducir el procedimiento para encontrar la solución general en cualquier sistema de ecuaciones.

La estructura que dimos al material es dinámica, pues se mezcla información, con ejercicios conducidos y conectados con preguntas que el alumno tiene que responder. Los procedimientos se adquieren sobre la marcha, pues está dosificado entre preguntas, ejercicios y comentarios. En diversas ocasiones, con la intención de llegar al nivel de análisis y síntesis de lo aprendido, pedimos al alumno que describa con sus propias palabras los procedimientos, pues creemos importante esta actividad para un mejor aprendizaje, como lo señala el Grupo Azarquiel: "Hablar y decir lo que se ve es un esfuerzo siempre productivo, dentro y fuera de las matemáticas y obliga a una cierta organización de ideas"[29].

El material contesta y detalla los procedimientos después de haberle preguntado al estudiante su versión al respecto, esto es así para lograr dos cosas, una es la lectura activa del estudiante y la otra, es que el propio alumno pueda contrastar sus respuestas con las que se dan, todo esto hace que se obtengan las siguientes ventajas:

[29] Grupo Azarquiel, 1993, p. 37.

1. El estudiante puede verificar sus respuestas.
2. El material deja completamente explicados los procedimientos que pregunta.
3. El profesor en su clase podrá atender mejor los ejercicios de abstracción y síntesis tan importantes en la construcción y apropiación del conocimiento.
4. Brindar una atención personalizada a los alumnos con dificultades o deficiencias.

Las posibles contradicciones matemáticas que pudieran presentarse (cuando el sistema no tiene solución o tiene una infinidad) también son abordados con preguntas que permiten un análisis de parte del estudiante, a estos sistemas de ecuaciones que llamamos *casos especiales*.

Para atender la fase de automatización, que ayuda al estudiante a utilizar la memoria en otras habilidades, al final de cada sección damos ejercicios y algunos problemas.

Finalmente, nos referimos a los métodos de resolución indicando los problemas que se pueden resolver con ellos, la magnitud que pueden llegar a tener las matrices y los determinantes que modelen las situaciones que representan y hacemos mención, de los recursos computacionales que facilitan el trabajo de cálculo con estos arreglos algebraicos.

3. ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS SOBRE MATRICES Y DETERMINANTES

3.1 Aspectos Históricos

No cabe duda que la historia de los determinantes y de las matrices tienen mucho en común y podemos decir que virtualmente una dio origen a la otra. Aunque los orígenes de las matrices se encuentran en China, en documentos que se conocen como " El arte matemático en nueve secciones (Zhui Suan Shu, s III a. C.)[30], donde se resuelve un sistema de ecuaciones con un método matricial por ejemplo:

$$\begin{aligned} 3x+2y+z&=39 \\ 2x+3y+z&=34 \\ x+2y+3z&=26 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ \end{array}$$

Al transformarla se obtiene una matriz triangular que se puede resolver fácilmente, sin embargo su desarrollo tuvo que esperar mucho tiempo. En 1693, retomando la resolución de los sistemas de ecuaciones, Leibniz describe en una carta una notación que ayudaría mucho al desarrollo de los determinantes usando números para indicar las filas y las columnas[31] de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 10+11x+12y&=0 \\ 20+21x+22y&=0 \\ 30+31x+32y&=0 \end{aligned} \qquad \text{O bien} \qquad \begin{aligned} 1_0+1_1x+1_2y&=0 \\ 2_0+2_1x+2_2y&=0 \\ 3_0+3_1x+3_2y&=0 \end{aligned}$$

[30] Cita de Lobraña et. Al. (1995) p. 25.
[31] Ver Boyer, Ch. p p. 508, 509.

Que hoy en día lo escribimos:

$$a_{11} + b_{12}x + c_{13}y = 0$$

$$a_{21} + b_{22}x + c_{23}y = 0$$

$$a_{31} + b_{32}x + c_{33}y = 0$$

Interesado en el análisis infinitesimal, no continuó desarrollando estas ideas y fue Maclaurin[32] (1729), quien redescubrió el método de determinantes para resolver sistemas lineales de 2, 3 y 4 incógnitas y, posteriormente, fue Bézout (1779) en su tratado titulado Théoríe générale des équations algébriques[33] quien aportó un sistema de reglas para resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas, muy parecido a la Regla de Cramer y que usó en la búsqueda de una condición necesaria para que dos ecuaciones polinómicas de grado n tengan solución. No cabe duda que éste y muchos más problemas pudieron resolverse con los determinantes, por ejemplo Maclaurin intentaba determinar la ecuación de una cónica que pasa por 5 puntos; Cayley[34] los utiliza para escribir las ecuaciones de la recta y el plano como se muestra enseguida:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Que si desarrollamos, por ejemplo el primer determinante:

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

---

[32] Ver Lobraña *et. al. p. 33*
[33] Boyer *p. 583.*
[34] Lobraña *p. 40*

O bien ya despejada *"y"*

$$y=\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)x+\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}$$

Tenemos la ecuación de la recta en su forma más usual.

La teoría de los determinantes se simplificó y se estableció definitivamente con los trabajos de Cauchy en 1812[35], él forma el producto de n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ por todas las diferencias posibles entre 2 de ellos, es decir:

$$a_1\cdot a_2\cdots a_n(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})$$

Define el determinante correspondiente, como la expresión que se obtiene al cambiar el exponente por un segundo subíndice *(a_r^s se convierte en a_{rs})*, en el resultado anterior tendremos una expresión como la siguiente:

$S(\pm a_{11}\, a_{12} \cdots a_{nn})$, donde S se refiere al conjunto de permutaciones en los subíndices y $\pm$ significa si es par o impar la permutación correspondiente, los ordena en un determinante con una disposición cuadrada.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}$$

---

[35] Boyer p.p.. 641 y 642.

Con una notación más moderna se tiene que el determinante se denota y se puede obtener, como:

$$|A| = \sum_{\sigma \in s_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

en donde la misma notación señala s_n como el conjunto de todas las permutaciones de {1, 2,...,n} y $\varepsilon(\sigma)=1$ *si* σ es par y $\varepsilon(\sigma)=-1$ *si* σ es impar.

Con todos estos trabajos realizados con determinantes, fue Cayley quien trabajó las matrices y les dió forma para poder usarlas y comentaba al respecto[36]:

> " Desde luego que no llegué al concepto de matriz a través de los cuaternios: fue directamente a partir de los determinantes; o bien como un modo conveniente de expresar las ecuaciones,
>
> $$x' = ax + by$$
>
> $$y' = cx + dy"$$

Con una estructura algebraica las matrices, por así decirlo, tuvieron vida propia y hoy en día, esta teoría tiene diversas aplicaciones en estadística, la teoría de juegos, los modelos de desarrollo, entre otros.

[36] En BELL (1949) p.215.

3.2 Otros conocimientos sobre el tema que pueden abordarse

3.2.1 Cómo escalonar matrices.

Dada la vastedad de los temas, creemos conveniente establecer los conocimientos mínimos necesarios para poder dar adecuadamente la resolución de sistemas de ecuaciones por los métodos de matrices y determinantes. Si consideramos el tiempo que se le asigna al tema, este es corto (sólo 10 horas), entonces lo utilizaremos para plantar la semilla del conocimiento con el material que proponemos el cual tendrá que ser abonado con otros saberes matemáticos que ayudarán a tener mejores frutos.

En el material se habla del Método de Gauss para escalonar matrices con peldaños de tamaño 1, pero en general, el método consiste en escalonar la matriz (con peldaños no necesariamente de tamaño 1). En la obra de Swokowski[37], se señala como primer paso localizar la primera columna que tenga elementos distintos de cero y más adelante localizar la siguiente columna que contenga elementos distintos de cero; consideraciones que en el material para enseñar el tema no aparecen como ejercicios a desarrollar (sólo mencionado en los casos especiales), pero dependiendo del grupo, cabría mencionarse e inclusive mostrar algunos ejemplos donde los escalones sean más grandes.

Para escalonar una matriz es necesario usar los llamados multiplicadores gaussianos[38], que son los números por los que hay que multiplicar al renglón para después obtener los ceros en la columna respectiva, por ejemplo, para la primera columna:

$$1_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}, \qquad 1_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}, \qquad etc.$$

[37] SWOKOWSKI p. 545.

[38] ALMEIDA,P. y FRANCO, J p. 77.

Que nos daría una matriz escalonada donde las entradas de la diagonal no necesariamente son unos. En general l_{ij} representa la cantidad por la que multiplicamos la ecuación j para sustraerla de la ecuación i y así producir un cero en la entrada (i, j), en el material transformamos $a_{ij} = 1$ y luego el renglón j (R_j) lo cambiamos por $-a_{ij}(R_i) - R_j$, que simplifica la explicación. Se le llama pivote, al número empleado para transformar en cero las entradas que están en la misma columna; los términos multiplicadores gaussianos y pivote no se usa en el material con objeto de no saturar al alumno con demasiados nombres.

3.2.2 Cantidad de operaciones que se hacen en el Método de Gauss y en Determinantes.

Para poder comparar la eficiencia de los métodos, es necesario revisar la cantidad de operaciones que se tienen que hacer, tanto en el método de determinantes como en el de matrices. Un buen ejercicio sería que el alumno contara la cantidad de operaciones para sistemas de 2x2 y 3x3. En general, la cantidad de operaciones usando los determinantes[39] en un sistema de **nxn** es:

$(n+1)n!(n-1)$ multiplicaciones

n divisiones

$(n^2-1)\, n! + n$ total.

Por ejemplo:

Si $n = 3$ las operaciones son 51.

Si $n = 4$ las operaciones son 360.

Si $n = 10$ las operaciones son 358 657 210.

[39] **ALMEIDA y FANCO, p. 75-79.**

Y con el método de Gauss sería:

$$\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{4n}{3} \qquad \textit{productos}$$

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \qquad \textit{divisiones}$$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} - \frac{5n}{6} \qquad \textit{total}$$

Para $n = 3$ son 20 operaciones, para $n = 4$ son 42 operaciones y para $n=10$ son 348 250 operaciones.

Conociendo esto podemos elegir el método óptimo sobre todo para n grande. Esto es bueno que lo sepa el profesor, pero no considero pertinente el discutirlo con el grupo, si acaso plantear como ejercicio que los alumnos cuenten las operaciones que se tienen que realizar en un sistema de 3x3, con el método de Gauss y con el de Determinantes y compararlos.

3.2.3. Equivalencia entre la representación de sistemas de ecuaciones y matrices

Una cuestión que puede surgir es: ¿la representación con matrices es equivalente al sistema de ecuaciones?, pregunta que se puede dejar para el 4 semestre o bien adelantarse y comentar un poco la multiplicación de matrices y el uso de vectores .

Sea A una matriz de 2x2, X y C como:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones se puede obtener de la siguiente manera:

$$AX = C$$

Y explicar paso a paso el proceso de la multiplicación de matrices, para que observen lo que se obtiene:

$$\begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Señalando que para que 2 matrices sean iguales, tienen que ser iguales la entrada *ij* de una de las matrices con la entrada *ij* de la otra matriz, es decir, lo que ellos conocen como un sistema de ecuaciones:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

Esta construcción puede ser más productiva en el cuarto semestre.

3.2.4. Interpretación Geométrica.

3.2.4.1. Ecuaciones equivalentes y funciones lineales

En el primer semestre ya se trabajó la interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones de 2x2 y también se usaron funciones lineales, por ello en el material se plantean preguntas de interpretación geométrica, sin haberlo trabajado aún.

Cuando se pregunta la interpretación geométrica de las ecuaciones equivalentes, se espera que el alumno piense en rectas o en una recta que representa a las 2 ecuaciones y además se plantea la ficha 1.4, para que lo pueda descubrir. Como ellos ya han visto funciones lineales cabría preguntarse, la relación entre $f(x)$ con $2f(x)$ ó $3f(x)$, y si representan la misma recta, como en el caso de las ecuaciones equivalentes.

Discusión que se puede dar después de resuelta la ficha del material y si el grupo muestra interés. Puede plantearse una actividad parecida a la ficha 1.4, pero ahora referida a graficar en el mismo plano cartesiano *f(x), 2f(x), (-1)f(x), ó 3f(x)*

Por ejemplo, se plantean las siguientes funciones para tabular y graficar:

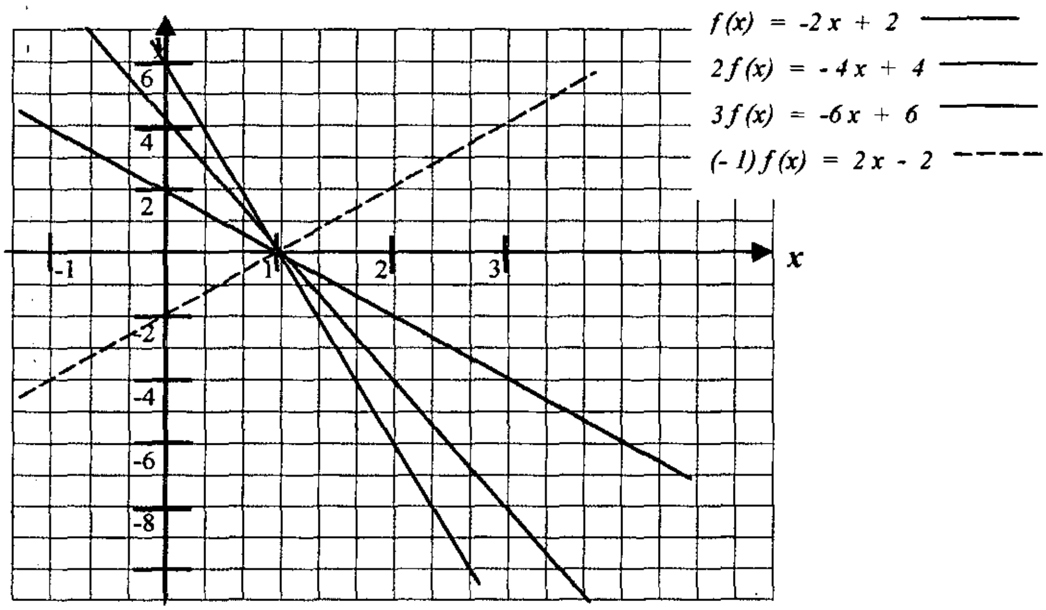
$$f(x) = -2x + 2$$

$$2f(x) = -4x + 4$$

$$3f(x) = -6x + 6$$

$$(-1)f(x) = 2x - 2$$

x	*f(x)*	*2f(x)*	*3f(x)*	*(-1)f(x)*
0	*2*	*4*	*6*	*-2*
1	*0*	*0*	*0*	*0*
2	*-2*	*-4*	*-6*	*2*
3	*-4*	*-8*	*-12*	*4*



La grafica, las tablas y las reglas de correspondencia para cada función ayudaran para que se descubran relaciones como:

a) son rectas que pasan por el mismo punto en el eje x (raíz de las funciones)

b) Tienen diferente inclinación.

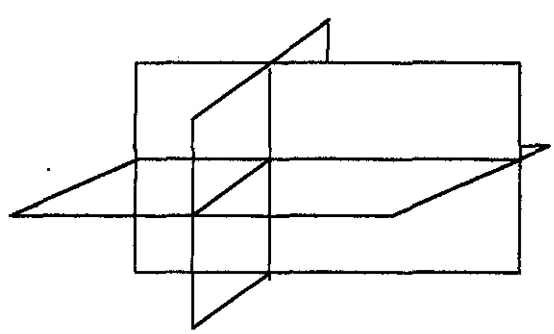
c) La inclinación de la recta cambia de izquierda a derecha o viceversa, si se multiplica por un valor negativo.

d) La relación de las ecuaciones con sus equivalentes es muy diferente a la de estas funciones debido a que $2f(x)$ es otra función que podemos llamar $h(x) = 2f(x)$.

Este análisis permite revisar algunas de las diferencias entre una ecuación y una función.

3.2.4.2 Representación en 3 dimensiones

Es bueno estar preparados para contestar preguntas sobre la representación de sistemas de 3x3 con sus casos posibles (los casos especiales del material). Cuando la solución es única, tenemos la intersección de 3 planos en un solo punto.



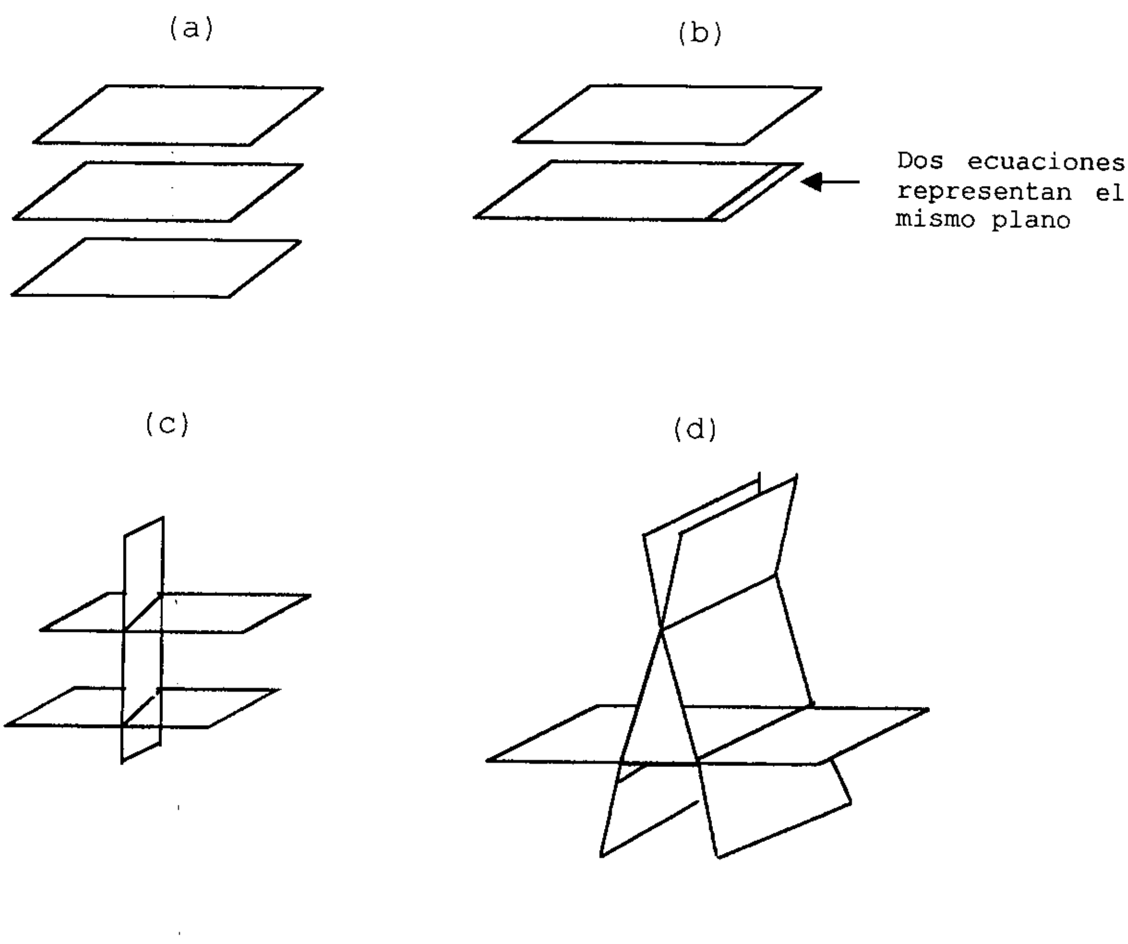
Las que no tienen solución[40] donde las posibilidades son:

a) Los 3 planos son paralelos (no hay intersección posible).

b) Dos ecuaciones representan el mismo plano y el tercero es paralelo.

c) Dos planos paralelos y la intersección con el tercero es una recta, formando rectas paralelas.

d) No hay planos paralelos, pero dos de ellos, se cortan en una recta paralela el tercero.



[40] En Leithold, p. 319.

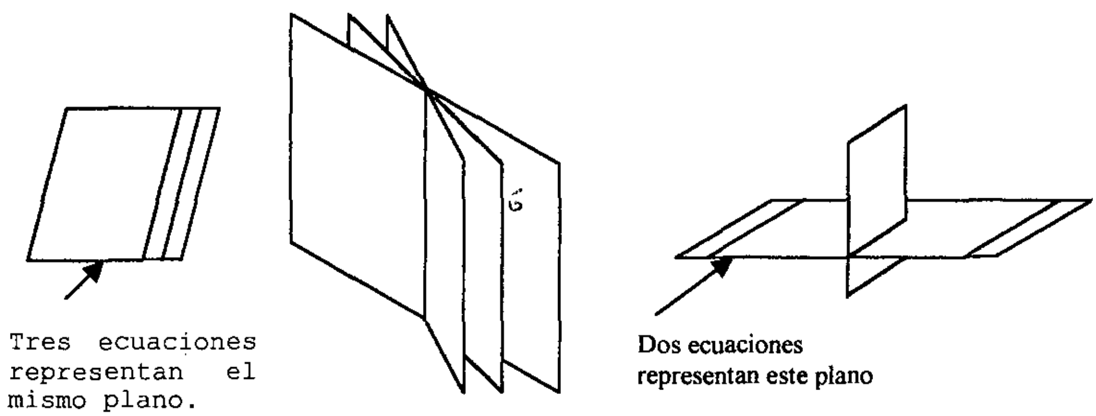
O bien las que tienen una infinidad de soluciones, que pueden ser:

e) Las tres ecuaciones son equivalentes, en cuyo caso representan el mismo plano.

f) La intersección de los tres planos es una recta, que son ecuaciones linealmente dependientes.

g) Dos rectas representan el mismo plano, y la intersección con el tercero es también una recta.

(e) (f) (g)



Todos estos elementos y la posibilidad de señalar algunas aplicaciones, permitirán atender al estudiante y darle una visión de lo que son y como usar las matrices en algunos problemas sin perder de vista que en el siguiente semestre se tratará el álgebra de matrices y modelos matemáticos.

4. DISEÑO DIDÁCTICO

4.1. Consideraciones del Material

Para la realización del material que proponemos aquí, contamos con la experiencia de haber dado este tema en las primeras dos ocasiones desde que se implantaron los nuevos programas en el CCH lo cual nos permitió identificar diversos problemas que los alumnos presentaban, entre los más significativos están:

- Las traducciones del lenguaje común al lenguaje algebraico.
- Habilidades para seguir y entender un procedimiento.
- Operaciones aritméticas elementales y manejo de algunas propiedades como los inversos.
- Establecer conexiones entre los sistemas de ecuaciones y las matrices o los determinantes.
- Entender y manejar la estructura simbólica.

Además de los problemas que están relacionados explícitamente con los sistemas de ecuaciones como son[41]:

- Interpretar la solución como el valor de una incógnita.
- Identificar la dependencia o independencia de la información.
- Saber lo que significa resolver un sistema.

[41] Referencias de este tipo de problemas en diversos artículos y libros que pueden ser consultados en la obra de ALONSO *et. al.* 1993 op. cit..

Un segundo elemento a considerar, fue el preguntar a los alumnos que ya habían revisado el tema, qué dudas tenían sobre las matrices y qué deseaban conocer sobre ellas, las demandas que más se repitieron son:

¿ Cómo las podríamos utilizar?

¿ Cuál es el método más eficiente?

¿ Para qué sirven en el futuro?

¿Por qué son tan laboriosas?

Con respecto a los determinantes:

¿Qué son?

En ambos temas (matrices y determinantes) un comentario repetido fue el que se debería dedicar más tiempo a su estudio y entendimiento.

Un tercer elemento a considerar, obviamente son los programas y lo que se pretende enseñar junto con sus objetivos, los cuales ya tratamos en el primer capítulo, mencionando que el tercer objetivo específico no se trabaja mucho en este material♦ y consiste en comparar el método de Gauss-Jordan con la Regla de Cramer.

♦ **Por falta de tiempo para cubrirlo en el aula.**

4.2 Características y Propiedades del Material.

Consideramos que las principales características del material de enseñanza para los estudiantes del bachillerato que se inician con este tema son:

a) Presenta el contenido matemático de manera contextualizada utilizando situaciones de lo cotidiano. El material pretende llenar de significado lo que es una ecuación o un sistema de ecuaciones, dentro de un contexto cercano a los estudiantes.

b) Presenta en forma gradual la simbolización con las situaciones propuestas, de manera que las x's y las y's no sean sólo letras, sino elementos que están relacionados con otros y que pueden tener diferentes valores y unidades de medida. Las estructuras simbólicas complejas, como lo son las matrices y los determinantes, se introducen paulatinamente a través de cuestionamientos y actividades de traducción e interpretación para que el alumno logre integrarlos en su estructura cognitiva.

c) Propone actividades para que el estudiante aprenda con base en su trabajo y esfuerzo, además evita sobrecargar la memoria con cosas que no usará frecuentemente[42].

d) Promueve, mediante sugerencias de trabajo, la interacción estudiante-estudiante y estudiante-profesor.

e) Está orientado a lograr la independencia en el estudio, ya que los ejemplos están completamente desarrollados y contiene las respuestas a los ejercicios.

---

[42] La saturación de elementos no prioritarios es uno de los problemas señalado por Kline p. 80.

f) Promueve el trabajo individualizado y de grupo a través de actividades propuestas para tales fines.

g) El diseño didáctico de la obra tiene varios momentos donde invita a los estudiantes a que elaboren sus propias conclusiones sobre el tema, aun cuando el material, por ser una obra completa, ya las contiene.

Los procedimientos se establecen con base en una deducción, con elementos o procesos que los alumnos ya manejan, por ejemplo, el método de Gauss lo obtenemos con el método de eliminación de suma o resta.

El diseño didáctico-pedagógico de la obra atiende a las sugerencias de Kemp, quien señala que es importante proponer actividades que ayuden a los estudiantes a estructurar sus experiencias de aprendizaje[43], por lo que el material de enseñanza contempla los detalles necesarios para lograr una cabal comprensión del tema, lo que contribuye a una mejor autoestima, pues el alumno está aprendiendo casi de manera independiente y él puede valorar sus aprendizajes.

Una característica muy importante es considerar al estudiante como el actor principal de su aprendizaje. Al estudiar el material ejecutando acciones como contestar preguntas, resolver fichas, llenar espacios y ejercicios, el alumno puede ir aprendiendo los diferentes métodos, nomenclatura y aplicaciones de los temas tratados.

[43] Cfr. KEMP p.79

Con el empleo de este material se puede (dependiendo del uso que se le dé) establecer una interacción entre estudiantes y también entre estudiantes y profesor; pues, puede haber preguntas que le cuesten trabajo al alumno y comentarlas con sus compañeros o su maestro; incluso se plantean actividades para desarrollar en pareja y para comparar resultados. El profesor puede intervenir para profundizar o comentar cuestiones que no están en el material (como ya señalamos), brindando así un conocimiento más general o profundo sobre el tema.

La invitación al alumno a elaborar sus conclusiones o a describir el procedimiento que él ya usó, le permitirá atender un proceso de síntesis, donde podrá describir o escribir sus conclusiones con palabras o de forma simbólica. Si el profesor da énfasis a esta actividad el estudiante podrá obtener una mejor formación.

4.3. Problemas en el aprendizaje que atiende el Material.

La contextualización ayuda mucho a que el alumno pueda entender la <u>traducción</u> de un problema al lenguaje algebraico y saber <u>interpretar</u> la solución e identificar, sí ésta es coherente con los planteamientos.

La <u>simbología</u> va surgiendo, en general, de manera natural y por ello es más fácil de aprender, pues también se diseñaron actividades encaminadas a este logro.

Si el alumno hace conciencia hasta dónde quiere llegar, de los pasos que puede dar y de cómo proceder, puede entonces asimilar mejor los métodos que se desarrollan en el texto.

Para <u>evitar o disminuir los errores aritméticos</u> de los alumnos, se plantean actividades como:

a) Completar y llenar espacios, donde se tienen que hacer operaciones, mostrando los resultados un poco más adelante, para que puedan compararlos.

b) Se plantea un trabajo en equipo (por parejas) donde planteen las operaciones a realizar, las efectúen de manera individual y entre ellos las comparen.

Para entender el porqué de las operaciones con los renglones de una matriz, se hacen explícitas las conexiones entre sistemas de ecuaciones y .matrices y toca al alumno, con base en sus conocimientos previos sobre el tema, ir deduciendo las operaciones que se pueden hacer con los renglones; de esta manera se pretende lograr el consiguiente aprendizaje significativo.

5. MATERIAL DIDÁTICO

Para emplearse en el curso de Álgebra y Geometría en la primera unidad cuyo titulo es:

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

La forma del discurso cambia completamente en esta parte, pues ahora nos dirigimos al alumno para que él trabaje y aprenda con base en las actividades, preguntas y ejercicios que se le proponen en el material didáctico. Este capítulo abarca la propuesta didáctica en su totalidad.

5.1 PRESENTACIÓN DEL MATERIAL

La finalidad de este material es que trabajes con él para aprender procedimientos que resuelven sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas. Aprenderás:

a) El Método de Eliminación.

b) El Método de Gauss.

c) El de Gauss-Jordan.

d) El método de Determinantes.

Con objeto de mostrarte un mayor significado sobre estos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, te mostramos aquí al menos una aplicación para resolver algunos problemas.

Este escrito pretende entablar un diálogo contigo involucrándote con preguntas y actividades que te permitan aprender la notación, los conceptos y los procedimientos. La parte del diálogo que te corresponde la escribirás en el texto.

Tiene un formato para la interacción alumno-texto, pues se entremezclan preguntas, actividades y desarrollo de problemas que te dan la oportunidad de aprender con base en la acción, ¡hacer para aprender!

Las preguntas y las fichas de trabajo te dan la oportunidad de descubrir como funciona un método, cómo usar una notación o como comprender un concepto y los ejercicios te sirven para reafirmar el método que aprendiste.

Para que puedas sacar el mayor provecho, atiende convenientemente a las instrucciones de uso.

5.1.1 Cómo usar el Material

Algo que te puede permitir aprender muchas cosas es que siempre te hagas preguntas y con base en ellas tengas actividades que te permitan contestarlas, para que, con la acción, logres mejores aprendizajes. Instrucciones para hacer más efectivo este material:

- Ten a la mano papel y lápiz, para usarlos en cualquier momento.
- Lee el material en secuencia, contesta las preguntas en el orden que se presentan, resuelve las fichas y los ejercicios junto con un compañero, para que puedan comentar y comparar. ¡Resuelve todo!
- Muchas de las respuestas están en el propio texto para que tengas la oportunidad de comparar.
- Los conceptos y métodos están entremezclados con preguntas y fichas de trabajo, es importante que hagas un resumen de cada parte.
- Contesta todo lo que se te pide y si no lo tienes claro, consulta con tu profesor.
- Trata de resolver toda una sección, sin que pase mucho tiempo, para que conectes los conceptos y procedimientos involucrados.

5.2. MÉTODO DE ELIMINACIÓN

5.2.1 Ecuaciones equivalentes

Veamos como una situación cotidiana proporciona elementos para transformarla en un planteamiento cuyas condiciones dan las ecuaciones de un sistema y para resolverlo usamos el concepto de ecuaciones equivalentes.

Problema

Karla sacó 10 fotocopias y 4 amplificaciones de un libro que necesitaba para exponer en Historia, si pagó $9.80. ¿Cuánto pagaría por las siguientes combinaciones?

i.	20 fotocopias y 8 amplificaciones	$ 19.60.	El doble de la compra
ii.	40 fotocopias y 16 amplificaciones	$________	El cuádruplo de la compra
iii.	100 fotocopias y 40 amplificaciones	$________	
iv.	5 fotocopias y 2 amplificaciones	$________	
v.	15 fotocopias y 6 amplificaciones	$________	

Estas diferentes compras puedes representarlas como ecuaciones si tomas en cuenta lo que compró Karla.
Por ejemplo:

$x \rightarrow$ es el precio de cada fotocopia en pesos ($)

$y \rightarrow$ es el precio de cada amplificación ($).

Ficha 1.1

a) Escribe en tu cuaderno las expresiones anteriores en forma de ecuación, toma en cuenta que lo que pagó Karla está dado así:

10 por el costo de cada fotocopia **más** 4 por el costo de cada ampl. = **pago total**

$$10x + 4y = 9.80 \quad \ldots\text{(A)}$$

b) Cómo son las ecuaciones que obtuviste en las 5 preguntas con respecto a la ecuación (A)?

c) ¿Cómo obtienes esas ecuaciones a partir de (A)?

d) ¿Cómo interpretas la ecuación (A) geométricamente?

Este tipo de ecuaciones se llaman **ecuaciones equivalentes**, pues todas tienen las mismas soluciones. Por ejemplo, si cada uno de los términos de la ecuación (A) se multiplica por 5 se obtiene:

$$5(10x) + 5(4y) = 5(9.80)$$
$$50x + 20y = 49.00$$

En el contexto quiere decir que si tú sacas 50 copias y 20 amplificaciones pagarás $_____.

¿Podría saber el precio de 10 fotocopias y 6 amplificaciones? __________ ¿Por qué?_____________

¿Qué ocurre si tomas dos de estas ecuaciones y pretendes

¿Qué ocurre si tomas dos de estas ecuaciones y pretendes resolver el sistema? ____

____.

Intenta resolver ese sistema y comenta lo que obtienes con tu compañero y con tu profesor.

Si concluyes que no es posible obtener el precio de las fotocopias y de las amplificaciones, es correcto, falta información, afortunadamente, Juan el amigo de Karla compró en el mismo establecimiento 5 copias y 3 amplificaciones que le costaron $ 6.10.

Ficha 1.2

a) Utiliza los datos de Juan, para obtener lo que se pagó por:

10 fotocopias y 6 amplificaciones $________.

El doble de la segunda compra.

15 fotocopias y 9 amplificaciones $________.

El __________ de la compra.

50 fotocopias y 30 amplificaciones $________.

El __________ de la compra.

35 fotocopias y 21 amplificaciones $________.

El __________ de la compra.

b) Escribe las expresiones anteriores como ecuaciones.

____

____

____

____

Estarás de acuerdo que cada una de ellas es una ecuación equivalente a la ecuación que surge de la compra de Juan, y que ésta es:

$$5x + 3y = 6.10 \ldots. (B)$$

y con la otra ecuación, generada por la compra de Karla:

$$10x + 4y = 9.80 \ldots. (A)$$

generamos un sistema de ecuaciones lineales, donde una no es un múltiplo de la otra, que tienen una solución en común, la cual representa el costo de una copia y una amplificación, en este caso. **Sin resolverlo contesta el siguiente inciso.**

c) Llena los espacios vacíos utilizando los datos de ambas ecuaciones.

	precio	ecuación
15 copias y 7 ampl.	\$_____	___x + ___y = _______
5 copias y 1 ampl.	\$_____	___x + ___y = _______
20 copias y 10 ampl.	\$_____	___x + ___y = _______
25 copias y 11 ampl.	\$_____	___x + ___y = _______.

Habrás notado, que para obtener las ecuaciones, has tenido que sumar (A) con (B) o realizado alguna otra combinación con sus ecuaciones equivalentes. Por ejemplo, la última pregunta se resuelve haciendo la combinación:

2(A) + (B) (El doble de la ecuación (A) más la ecuación (B)).

$$\begin{array}{rcl} 20x + 8y & = & 19.60 \;....(2(A)) \\ 5x + 3y & = & 6.10 \;....(B) \\ \hline 25x + 11y & = & 25.70 \;....(2(A) + (B)) \end{array}$$

A esto se le llama una **combinación lineal de (A) y (B)**, obteniendo **otra ecuación** que tiene la misma solución que las ecuaciones (A) y (B).

Con otro ejemplo te quedará más claro:

2(A) + (3)(B), multiplicar por 2 cada uno de los términos de la ecuación (A) y sumarlo término a término con el triple de cada uno de los términos de la ecuación (B).

$$
\begin{array}{rl}
20x + 8y = 19.60 & \ldots.(2(A)) \\
15x + 9y = 18.30 & \ldots.(3(B)) \\
\hline
35x + 17y = 37.90 & \ldots.(2(A) + 3(B))
\end{array}
$$

Podemos plantear que cualquier combinación lineal de (A) y (B) se obtiene así:

k_1(A) + k_2(B) con k_1 y k_2 números reales.

Si **$k_1 = 0$** ó **$k_2 = 0$ (sólo una se hace cero)** entonces podemos decir que (B) y (A) son una combinación lineal y, lo es también cualquier otra ecuación equivalente de(B) o de (A).

NOTA: Sí tienes dudas sobre ésto, pregunta a tu profesor.

Un tercer ejemplo es la combinación lineal:

$$\left(\frac{1}{4}\right)(A) + (-2)(B)$$

multiplicamos la ecuación (A) por $\left(\frac{1}{4}\right)$ y multiplicamos por -2 la ecuación (B) y las sumamos término a término, como se escribe a continuación:

$$
\begin{array}{rl}
2.5x + y = 2.45 & \ldots\ldots.(\left(\frac{1}{4}\right)(A)) \\
-10x - 6y = -12.20 & \ldots\ldots(-2(B)) \\
\hline
\mathbf{-7.50x - 5y = -9.75} & \ldots.(\left(\frac{1}{4}\right)(A) - 2(B))
\end{array}
$$

Revisa los 3 ejemplos de combinaciones lineales y contesta la siguiente pregunta:

¿Qué se obtiene cuando se hace una combinación lineal de 2 ecuaciones? ______________________________.

Ficha 1.3

Realiza lo que se te pide. Para las interpretaciones geométricas no es necesario que hagas la gráfica, sólo piensa en lo que la expresión algebraica puede representar.

a) ¿Cómo interpretarías geométricamente a la ecuación (B) $5x+3y=6.10$?

b) ¿Cómo interpretarías geométricamente a las ecuaciones equivalentes de(B)?

c) Cómo interpretarías geométricamente a la ecuación 2(A) + (B)? ¿Es de nuevo una ecuación equivalente? ¿por qué?

d) Obtener las siguientes combinaciones lineales.

i) (A) + 3(B)
ii) (A) - (B)
iii) 2(A) + 3(B)
iv) (1/2)(A) + 2(B)
v) (A) - 2(B)

¿Cuál de ellas te sirve para obtener lo que vale cada fotocopia y cada amplificación? Si hiciste bien las operaciones notarás que en el inciso (v) se obtiene.

$$-2y = -2.40$$

al despejar "y" tenemos:

$$y = \frac{-2.40}{-2} \qquad \boxed{y = \$1.20}$$

Esto es lo que cuesta cada amplificación. ¿Cuánto cuesta cada fotocopia?

La manera de obtenerlo es sustituir el valor de "y" que aparece en la ecuación (A) o en la (B) o inclusive en cualquier combinación lineal de ella, aquí lo hacemos en (A).

$$10x + 4y = 9.80$$

$$10x + 4(1.20) = 9.80$$

$$10x = 9.80 - 4.80$$

$$x = \frac{5}{10}$$

$$\boxed{x = \$0.50}$$

Verifica que el costo de cada fotocopia es de \$0.50 y de cada amplificación \$1.20 puedes revisar por ejemplo en la ecuación (B) y en la (A) + 2(B), pues se tiene que cumplir en cualquier ecuación equivalente o combinación lineal.

Haz un resumen de el método y los conceptos que descubriste.

5.2.2 Interpretación Geométrica

Para entender mejor esta interpretación resuelve la ficha 1.4 donde se te plantean preguntas y actividades para que verifiques gráficamente tu respuesta.

Ficha 1.4

Contesta la pregunta y realiza la actividad siguiente que te permitirá corroborar un respuesta. Con la finalidad de facilitarte el trabajo te proponemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x + 2y = 2 \ldots \text{(L)} \\ 2x - \ y = 5 \ldots \text{(M)} \end{cases}$$

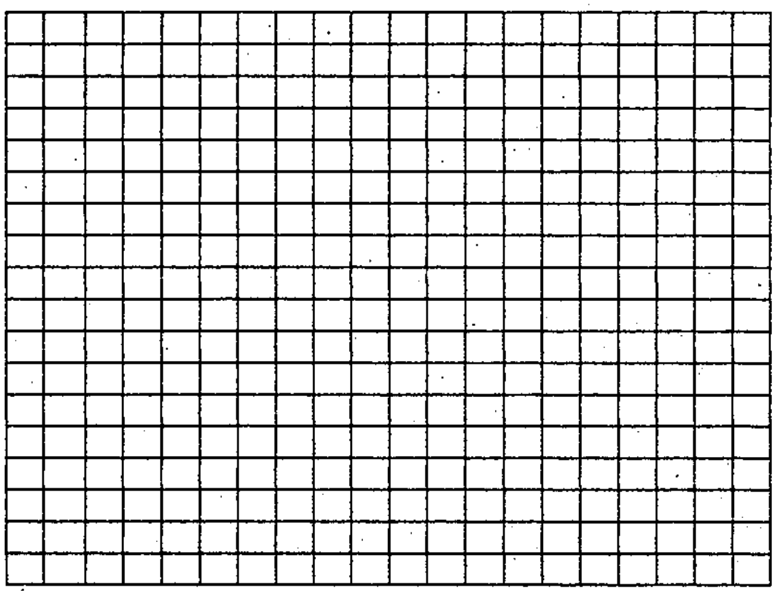
a) ¿Qué representa geométricamente en el plano coordenado cada una de las ecuaciones (L) y (M)?. Escoge la opción que consideres correcta.

i) un punto (x, y) ii) una parábola iii) una recta

iv) una curva v) ninguna de las anteriores

- Obtén los valores de y en la ecuación (L) y (M), para los valores de $x = 0, 1, 2$ y 3 en la tabla que sigue. Grafica con distintos colores la gráfica de (L) y de (M), señala claramente cada una de ellas y compara tu respuesta.

x	0	1	2	3
(L) y				
(M) y				



b) Con respecto a la ecuación (L), ¿cómo es la gráfica de ecuaciones equivalentes, por ejemplo, 2(L) y 3(L)?. Escoge una opción.

i) rectas que se intersectan ii) la misma recta

iii) rectas paralelas iv) rectas perpendiculares

v) ninguna de las anteriores

- En el mismo plano, grafica la ecuación $-2x+4y=4$ 2(L), que es equivalente a la ecuación (L), traza con un color diferente y verifica tu respuesta en la pregunta anterior.

X	-2	0	2	4
y				

c) La combinación lineal 3(L) + (M), ¿cómo es, gráficamente, con respecto a las otras dos rectas (L) y (M)?:

i) Resulta ser paralela ii) Resulta ser perpendicular

iii) Pasan por un mismo punto iv) Resulta ser la misma recta

v) Ninguna de las anteriores

- Traza (con otro color) la gráfica de la combinación lineal 3(L) + (M), es decir, $-x + 5y = 11$ en el mismo plano. Verifica la respuesta que emitiste en la pregunta anterior.

x				
y				

d) Escribe tus conclusiones sobre lo que observaste en las tres preguntas anteriores:

5.2.3 Resumen del Método

Trabajamos un sistema de ecuaciones, con el **Método de Suma o resta, también conocido como de Eliminación,** que consiste en obtener varios sistemas equivalentes del primero, de manera que en el último sistema el valor de una de las incógnitas esté explícito, en esta ocasión fue la "y". Usando como conocimiento clave las ecuaciones equivalentes.

El sistema del que partimos fue:

$$\begin{cases} 10x + 4y = 9.80 \ldots\text{(A)} \\ 5x + 3y = 6.10 \ldots\text{(B)} \end{cases}$$

Lo primero que hicimos fue obtener sistemas equivalentes donde una de las incógnitas quedara con coeficientes simétricos:

$$\begin{cases} 10x + 4y = 9.80 \ldots\text{(A)} \\ -10x - 6y = -12.20 \ldots(-2\text{(B)}) \end{cases}$$

Luego, **sumamos las dos ecuaciones (combinación lineal) en el sistema equivalente y la sustituimos por la 2ª ecuación en el sistema original**, para tener una ecuación con una incógnita, con lo que obtuvimos:

$$\begin{cases} 10x + 4y = 9.80 \ldots \quad \text{(A)} \\ \quad -2y = -2.40 \ldots(\text{(A)} + [-2]\text{(B)}) \end{cases}$$

Con lo que **obtuvimos un sistema equivalente más sencillo, pues en una de las ecuaciones aparece sólo una incógnita***.

---

* Si el sistema tuviera más incógnitas, éstas se irían eliminando de algunas ecuaciones mediante el mismo procedimiento de utilizar combinaciones lineales, hasta obtener una sistema equivalente que tuviera una ecuación con una incógnita.

Con el valor de "*y*" conocido, es fácil encontrar el de "*x*", sustituyendo el dato en alguna de las ecuaciones del sistema. Conviene señalar que la solución *x* = \$0.50; *y* = \$1.20 es solución de cualquier sistema equivalente, compruébalo algebraicamente en tu cuaderno, por ejemplo, con el sistema (A) y -2(B).

$$\begin{cases} 10x + 4y = 9.80 & \text{(A)} \\ -10x - 6y = -12.20 & -2\text{(B)} \end{cases}$$

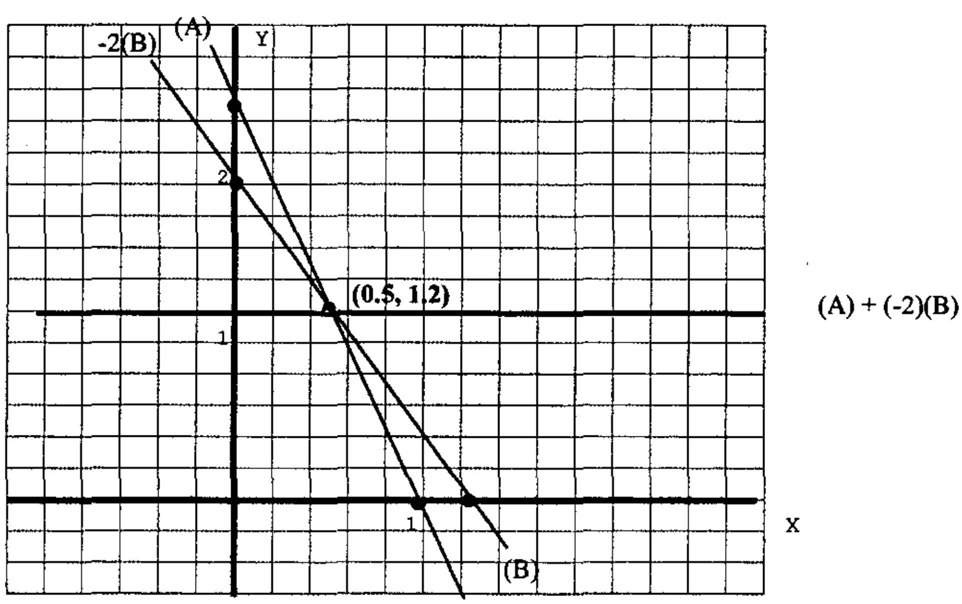
Gráficamente se ve así:

$10x + 4y = 9.80$ (A)

x	0	0.98
y	2.45	0

$-10x - 6y = -12.20$ -2(B)
$-2y = -2.40$.......(A) + (-2)(B)

	x	0	1	1.22
(B)	*y*	2.03	0.37	0
-2(B)	*y*	2.03	0.37	0
(A) + (-2)(B)	*y*	1.2	1.2	1.2



Conclusiones:

- Cada una de las ecuaciones lineales en el sistema representa una recta.
- La solución es el punto de intersección de las rectas, cuando el sistema es consistente.
- La representación gráfica de ecuaciones equivalentes corresponde a la misma recta.
- Cuando las ecuaciones del sistema resultan equivalentes, hay infinidad de soluciones porque son la misma recta.
- Una combinación lineal de ambas ecuaciones, nos da una recta que pasa por el punto solución.

Problema 2

Varios estudiantes del CCH fueron a hacer la tarea de Matemáticas a casa de Pedro y de pasada compraron 3 refrescos y 4 tortas, pagando en total \$72. A las 5 de la tarde todavía no terminaban y se compraron otro refresco y 2 tortas más en el mismo lugar, pagando \$32. ¿Cuánto dinero necesitan para comprar una torta y un refresco más?

Como este es un problema parecido al anterior, esperamos que lo intentes en tu cuaderno, antes de ver cómo lo resolvemos.

Asigna "x" y "y" a las incógnitas del problema y señala en que unidades se miden.

x es precio de cada refresco ($).

Escribe tú lo que representa "y"

y ________________________ (   ).

Plantea un ecuación con la primera compra y otra con la segunda compra.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 72 \quad \text{....(C)} \\ x + 2y = 32 \quad \text{....(D)} \end{cases}$$

Recuerda cuál es la pregunta.

$x + y =$ ____.

Nuestro sistema es el (C) y (D), si escribimos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 32 \quad \text{....(D)} \\ 3x + 4y = 72 \quad \text{....(C)} \end{cases}$$

¿ El sistema es equivalente al anterior? ______. ¿Por qué?

____

____.

Entonces, un sistema de ecuaciones es equivalente a otro, si se intercambian las ecuaciones.

Recuerda que otra forma de obtener sistemas equivalentes es cambiar las ecuaciones por sus equivalentes, revisa cómo, pues lo emplearemos ahora.

$$\begin{cases} -2x - 4y = -64 \;\ldots.(-2(D)) \\ 3x + 4y = 72 \;\ldots..(C) \end{cases}$$

O también cambiando una ecuación por la combinación lineal -2(D) + (C).

$$\begin{cases} x + 2y = 32 \;\ldots.(D) \\ x \qquad = 8 \;\ldots.(-2(D) + (C)) \end{cases}$$

Es un buen ejercicio describir la regla que se usó en cada caso.

En el último sistema ya tenemos el valor de uno de los productos. ¿Cuál es? _____ y ¿cuánto cuesta? ____________.

Obtén ahora el precio de cada torta, sustituyendo el valor de "x" en la ecuación (D).

Comprueba que el precio unitario de los refrescos es de $8 y el de las tortas es de $12, sustituyendo en (C) y contesta la pregunta del problema.

$$x + y = \_\_\_\_\_.$$

Haz un resumen de la forma de obtener sistemas de ecuaciones equivalentes y señala la diferencia entre estos y las ecuaciones equivalentes.

5.2.4 Como obtener sistemas de ecuaciones equivalentes.

1. **Se intercambian las ecuaciones.**
2. **Se cambia una ecuación por la ecuación multiplicada por un número distinto de cero.***

¿Por qué tiene que ser distinto de cero?__________

¿Puede ser un número racional?____

3. **Se cambia una ecuación por una de sus combinaciones lineales.**

Ejercicios 1.1

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un grupo de estudiantes fue al cine que está en el Centro Cultural Universitario, 5 de ellos se quedaron de ver a la entrada poniendo como condición que el último en llegar, pagaría las entradas de los demás. Juan llegó al final y tuvo que pagar $76, tomando en cuenta que 3 de sus amigos llevaban credencial y les hicieron descuento. Para desquitarse los retó a regresar la semana siguiente, con la misma condición. A la semana siguiente a Toño le tocó pagar $68 pues uno de ellos olvidó su credencial y sólo a 4 les hicieron descuento.

a) Si todos hubieran llevado la credencial, ¿cuánto pagaría el último en llegar?

b) ¿De cuánto es el descuento con credencial?

---

* Multiplicar una ecuación por un número, implica multiplicar cada uno de los términos por ese número.

2. Mario invitó a su novia al cine y compró una bolsa de palomitas para cada uno, pagando por los boletos y las bolsas de palomitas en total \$100. En otra ocasión como es muy "disparador", le dijo a su novia que invitara a una amiga, pero la amiga llevó un amigo y, pensando en que no le iba a alcanzar, sólo compró 3 bolsas de palomitas y todos los boletos pagando en total \$185. Contesta :

a) Si hubiera ido sólo ¿cuánto hubiera pagado?

b) ¿Cuánto hubiera gastado si compra palomitas para cada uno?

c) ¿Cuánto cuesta la entrada al cine?

3. María compró en el correo 18 timbres postales de \$1.20 y de \$2.50. Si pagó \$29.40 ¿cuántos timbres compró de cada denominación?

4. Unos alumnos de bachillerato montaron una obra de teatro, a los 150 asistentes se les pidió una cuota de recuperación de \$15, si eran estudiantes y de \$20 al público en general. Si recaudaron \$2 675, ¿cuántos estudiantes asistieron?

5. Inventa un problema cercano a tu realidad que se resuelva como los anteriores. Sugerencia:

- Piensa en una situación problemática.
- Asigna el valor que quieres que tengan tus incógnitas .
- Plantea dos condiciones que serán las ecuaciones con tus dos incógnitas.

6. En un experimento se van a mantener algunos animales bajo una dieta estricta. Cada animal va a recibir, entre otras cosas, 20 gramos de proteínas y 3 gr. de grasas. Los técnicos del laboratorio pueden comprar dos tipos de alimento el A y el B cuyas composiciones se muestran en la tabla.

Alimentos	A	B
Proteínas (%)	20	10
Grasas (%)	1	2

¿Cuántos gramos de cada alimento deben mezclarse para obtener la dieta correcta de un sólo animal?*

* **Problema modificado del BARNET p.525.**

5.3. MATRICES

Como te habrás dado cuenta, el problema 6 es diferente a los anteriores, el resolverlo aquí servirá de pretexto para aprender otra forma de resolver los sistemas de ecuaciones. Atiende a las observaciones que te hacemos, ellas te darán la pauta para entender el cómo y el por qué del método. **La intención es que aprendas otro procedimiento.**

Si resolviste el problema, varias de las cosas que mencionamos te servirán para comprobar que lo hiciste bien.

Las incógnitas son:

x es la cantidad de alimento A (gr.)

y es la cantidad de alimento B (gr.).

En base a la tabla:

Alimentos	A	B
Proteínas(%)	20	10
Grasas(%)	1	3

Observación 1 La tabla señala el porcentaje de proteínas y de grasas que contiene cada porción de alimentos, por ejemplo, si tenemos 50 gr. del alimento A, ¿cuántas proteínas contiene? Las proteínas que contiene son 20% de 50 gr. y se calcula así:

$$\frac{20}{100}(50 \text{ gr.}) = 10 \text{ gr.}$$

Ficha 1.5

Calcula:

a) Para 80 gr. de alimento A, se tienen ______gr. de proteínas.

b) Con la misma cantidad se tienen ______gr. de grasas, y con 50 gr. se tienen ________gr. de grasas.

c) Con 40 gr. **del alimento B,** se obtienen ____gr. de proteínas y ______ gr. de grasas.

d) Si usamos 80 gr. del alimento A y 40 gr. de B la cantidad de proteínas en los 120 gr. es de:

$$\frac{20}{100}(80)+\frac{10}{100}(40) \quad = \quad 20gr.$$

$$\underset{\text{del alimento A}}{\text{gr. de proteínas}} + \underset{\text{del alimento B}}{\text{gr. de proteínas}} = \underset{\text{alimentos}}{\text{gr. de proteínas de ambos}}$$

e) Para la misma cantidad usada de los dos tipos de alimento, la cantidad de gramos de grasas es $\underset{\textbf{(mayor/menor)}}{\underline{\hspace{3cm}}}$ a la de gramos de proteínas

y se obtiene así:

$$\frac{}{100}(80)+\frac{}{100}(40)=\underline{\hspace{2cm}}gr.$$

Por tanto, si queremos 20 gr. de proteínas de una mezcla de los 2 alimentos, lo planteamos así:

$$\frac{20}{100}x+\frac{10}{100}y=20\,(gr.)............(F)$$

Análogamente si se requieren sólo 6 gr. de grasas.

$$\frac{1}{100}x+\frac{3}{100}y=6(gr.)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(G)$$

Observación 2. Los coeficiente de "x" y de "y" son los valores que ya se tenían organizados en una tabla,(salvo que están divididos entre 100 por ser porcentajes) que podríamos llamar matriz de información y la podemos escribir como:

$$\begin{pmatrix} \frac{20}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{1}{100} & \frac{3}{100} \end{pmatrix}$$

Obtengamos un sistema equivalente más sencillo, multiplicando la ecuación F por 10 (10F) y la G por 100, hazlo y veamos si coincidimos.

$$\begin{cases} 2x+\ \ y = 200 \ldots (10F) \\ \ \ x+3y = 300 \ldots (100G) \end{cases}$$

La matriz de información ahora es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Donde la primera columna son los coeficientes de "x" y la segunda columna son los coeficientes de "y".

Pues bien a ésta se le llama la **matriz del sistema**, para tener todos los elementos del sistema, se le agrega a la derecha la columna de términos independientes.

Esta matriz es la **Matriz aumentada del sistema.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 200 \\ 1 & 3 & 300 \end{pmatrix}$$

Dejaremos hasta aquí, la resolución de este problema el cual retomaremos en el siguiente apartado. Por ahora, es necesario que te familiarices con la notación matricial, para ello daremos algunas observaciones, ejemplos y ejercicios que te ayudarán a entender el procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones por el método de matrices.

Observación 3 Para escribir la matriz aumentada a partir del sistema, se necesita que esté ordenado de esta forma. Del lado izquierdo del signo "=" estén sólo los términos con literal y del lado derecho los términos independientes y los términos semejantes estén uno abajo del otro. Por ejemplo traduzcamos sistemas de ecuaciones a matrices aumentadas.

1) $$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 2y = 3 + 4x \end{cases}$$

primero ordenemos para luego traducir

1) $$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 2y = 3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{cases} 2x - 4y + z = -1 \\ 2y = 6 + 4x \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Primero ordenamos para luego traducir

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = -1 \\ -4x + 2y = 6 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ficha 1.6

1.Escribe la matriz aumentada de los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 3 \\ x + 2y - z = -4 \\ 3x + 3z = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + y - 2z = 3 \\ -y + 2z = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 2y - 3z + w = 10 \\ 2x + 3z - w = 6 \\ y + 7z = 11 \\ -3y + w = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 5 \end{cases}$

2.¿ De cuáles sistemas es más fácil obtener la solución?

Notarás que la matriz aumentada del sistema (**c**) es:

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & I \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La solución la podemos obtener a partir de $z = 3$, aplicando una **sustitución en reversa o regresiva,** es decir, sustituir valores conocidos de regreso en ecuaciones anteriores.

Esto gracias a que la **matriz está escalonada**, es decir tiene ceros abajo de la **diagonal principal** (diagonal que comienza en el elemento ubicado en la esquina superior izquierda), formando escalones con estos ceros de esta forma:

$$\begin{matrix} 0 & \\ 0' & 0 \end{matrix}$$

Siempre es mucho más fácil dar la solución si la matriz aumentada está escrita como la **(e)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

pues la solución se lee directamente:

$$\boxed{x = 3, \quad y = -2, \quad z = 5.}$$

A esa sele llama una **matriz diagonal**, pues tiene unos en la diagonal y ceros arriba y bajo de la diagonal.

Observación 4. Para resolver un sistema de ecuaciones usando las matrices, nuestro **objetivo será obtener una matriz equivalente a una escalonada o una diagonal.** Si es una escalonada es el Método de Gauss y si es diagonal es el Método de Gauss-Jordan.

Observación 5. Si el sistema de ecuaciones tiene muchas incógnitas, utilizando la notación de matrices la escritura se simplifica y veremos que también el trabajo.

Volviendo al problema, con el método de eliminación que ya conoces junto y con la traducción a matrices de los sistemas equivalentes, descubrirás lo que se puede hacer con los renglones de una matriz.

5.4. MÉTODO DE GAUSS

5.4.1 Como deducirlo.

Recordemos lo que teníamos del problema de la dieta de los animales que dejamos pendiente. La dieta debe contener 20 gr. de proteínas y 3 gr. de grasas entre otras cosas. Hay dos tipos de alimentos con las siguientes composiciones:

Alimentos	**A**	**B**
Proteínas (%)	20	10
Grasas (%)	1	2

Se trata de hallar la mezcla de alimentos que contenga 20 gr. de proteínas y 3 gr. de grasas.

Habíamos llegado hasta representarlo con un sistema de ecuaciones y su matriz aumentada.

$$\begin{cases} 2x + y = 200 \\ x + 3y = 300 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 200 \\ 1 & 3 & 300 \end{pmatrix}$$

Necesitamos transformar la matriz aumentada en una matriz escalonada para hallar las soluciones. Revisa con mucho cuidado la siguiente tabla y trata de resolverlo, antes de revisar la siguiente columna, así descubrirás la forma de obtener matrices equivalentes.

Aquí te mostramos paso por paso las operaciones que se hicieron con los sistemas de ecuaciones equivalentes para obtener matrices equivalentes. Lee las dos primeras columnas y relaciónalas con las otras dos columnas.

Sistemas equivalentes	Operaciones con renglones	Matrices equivalentes	Operaciones con renglones
$\begin{aligned} 2x + y &= 200 \quad (F) \\ x + 3y &= 300 \quad (G) \end{aligned}$		$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 200 \\ 1 & 3 & 300 \end{pmatrix}$	
$\begin{cases} x + 3y = 300 \quad (G) \\ 2x + y = 200 \quad (F) \end{cases}$	Intercambio de ecuaciones	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 300 \\ 2 & 1 & 200 \end{pmatrix}$	**Intercambio de renglones**
$\begin{cases} -2x - 6y = -600 \\ 2x + y = 200 \end{cases}$	Cambiamos (G) por (-2)(G).	$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -600 \\ 2 & 1 & 200 \end{pmatrix}$	***Cambiamos el anterior R_1 por $(-2)R_1$***
$\begin{cases} x + 3y = 300 \\ -5y = -400 \end{cases}$	Usamos (G) y la 2ª ecuación la cambiamos por -2(G) + (F)	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 300 \\ 0 & -5 & -400 \end{pmatrix}$	***Cambio de*** R_1 **por $(-1/2)R_1$ y cambio de R_2 por $-2R_1 + R_2$** ***(siempre nos referimos a los renglones de la matriz anterior)***
$\begin{cases} x + 3y = 300 \\ y = 80 \end{cases}$	La 2ª ecuación la cambiamos por (-1/5)por esa ecuación	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 300 \\ 0 & 1 & 80 \end{pmatrix}$	***Cambio de anterior R_2 por $(-1/5)R_2$***

La última matriz está escalonada y ya está explícito el valor de $y = 80$, si usamos una sustitución regresiva tenemos:

$$x + 3(80) = 300$$
$$x = 300 - 240$$
$$\boxed{x = 60 \text{ gr.}}$$

La solución es entonces:

60 gr. del alimento ___ y
80 gr. ______________________.

Comprueba que si $x = 60$ gr y $y = 80$ gr entonces son la solución del sistema:

Sustituye los valores en (F)

$$\begin{cases} 2x + y = 200 & (F) \\ x + 3y = 300 & (G) \end{cases}$$

Sustituye los valores en (G)

En ambas debes obtener identidades.

¿Qué fue lo que hicimos con los renglones de la matriz, para obtener matrices equivalentes?

Antes de continuar leyendo discute la pregunta con tu compañero y contesten.

5.4.2 En qué consiste el método

El método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones emplea la matriz aumentada del sistema, y va obteniendo matrices equivalentes, hasta conseguir una matriz escalonada. Ya con el valor de una incógnita se aplica una sustitución regresiva para obtener los valores de las otras incógnitas.

Para obtener matrices equivalentes se puede:

1. **Intercambiar renglones,** $R_i \leftrightarrow R_j$ $i \neq j$.

Donde la doble flecha ($\leftrightarrow$) significa, que el renglón ***i*_ésimo** se cambia por el **renglón *j*-ésimo y viceversa.**

2. **Cambiar un renglón por el renglón multiplicado por un número distinto de cero, es decir:**

   $$R_i \leftarrow kR_i \quad \text{con } k \neq 0.$$

La punta de la flecha indica en donde se pone el renglón modificado. En este caso en el renglón *i*_ésimo se cambia por ese renglón multiplicado por "k".

3. **Cambiar un renglón por una combinación lineal de ese renglón con otro,** es decir la suma del renglón con otro multiplicado por un número diferente de cero, denotado como:

   $$R_i \leftarrow R_i + kR_j \;, \quad k \neq 0.$$

   En el renglón *i*-ésimo se pone la combinación lineal.

Aplica el método de Gauss para resolver el sistema de ecuaciones de la siguiente ficha.

Ficha 2.1

a) Te dejamos algunos espacios para que los llenes con base en la operación que sugerimos:

Nota: Cuando nos referimos a R_1 o a R_2 o a cualquier R_i nos estamos refiriendo al renglón de la matriz inmediata anterior.

$$\begin{cases} 3x + 4y = -8 \\ x + 2y = -3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 & -8 \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} \qquad R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\begin{pmatrix} -3 & \_\_ & \_\_ \\ 3 & 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \leftarrow (-3)R_1^{*} \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \_\_ \\ \_\_ & -2 & \_\_ \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \leftarrow (-1/3)R_1 \\ \leftarrow (-3)R_1 + R_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ \leftarrow (-1/2)R_2 \end{matrix}$$

---

*El R_1 es de la matriz inmediata anterior, es decir 1 2 -3.

El sistema equivalente resultante es:

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ \quad\;\; y = -1/2. \end{cases}$$

b) Aplica la sustitución regresiva y obtén el valor de x.

$x =$ _____

c) Comprueba en el sistema original y en cualquier otro equivalente de las matrices obtenidas que la solución del sistema es $\boldsymbol{x = -2}$, $\boldsymbol{y = -1/2}$.

Ficha 2.2

Aquí te daremos los pasos para resolver un sistema, tú junto con otro compañero irán obteniendo las matrices solicitadas e irán comparando sus resultados, los cuales deben coincidir inclusive con los valores que ya están. Revisa tus operaciones en caso contrario.

a) Obtén la matriz aumentada.

SISTEMA

$$\begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases}$$

Matriz aumentada

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \end{array} \end{array}$$

Queremos obtener al final.

$$\begin{pmatrix} 1 & c & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

a, b y c números reales

Obtén las matrices equivalentes, para conseguir a una matriz equivalente y escalonada.

b) Completa las matrices, en Base a las operaciones:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 16 \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow (1/2)R_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & 16 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \leftrightarrow R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ 4 & 2 & 16 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow (-4)R_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \left(-\frac{1}{4}\right)R_1 \\ \leftarrow (-4)R_1 + R_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Obtenemos 1 en el 2° renglón 2ª columna.} \\ \leftarrow (1/10)R_2 \end{array}$$

c) ¿Cuánto valen:

$a =$ _____ $b =$ _____ $c =$ _____

d) Usando la sustitución regresiva, obtén los valores:

$x =$ _____ $y =$ _____.

e) Comprueba la solución en el sistema.

Ejercicio 2.1.

Resuelve los siguientes sistemas, trabajando como antes, con un compañero y propongan, entre ustedes, las operaciones por hacer con los renglones.

1)

$$\begin{cases} 2x + 3y = -8 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} 4x + 8y = -4 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -3x + 4y = -20 \end{cases}$$

5)

$$\begin{cases} 4x - 2y = 4 \\ 3x = 3 + y \end{cases}$$

Sugerencia: escríbela primero en orden.

El método de Gauss lo usaremos para resolver sistemas de ecuaciones con más de 2 incógnitas, por ejemplo, un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas y le llamaremos de 3x3 (3 por 3), con su matriz aumentada de 3 renglones y 4 columnas.

Para que te familiarices con esta notación te proponemos la siguiente ficha.

Ficha 2.3

a) Completa la información acerca de un sistema de ecuaciones:

1) Uno de 4x4 tiene __ ecuaciones y ___ incógnitas.
(con 4 renglones y 5 columnas en la matriz aumentada)

2) Uno de 3x5 tiene __ ecuaciones y ___ incógnitas.
(con 3 renglones y 6 columnas en la matriz aumentada)

3) Uno de 6x5 tiene __ ecuaciones y ___ incógnitas.
(con __ renglones y __ columnas en la _________ ___________)

Con relación a las matrices, si el sistema es de 2x2, la matriz aumentada tiene __ renglones y __ columnas. En el caso de las columnas se aumenta una más, pues es la columna que contiene a los términos independientes en el sistema de ecuaciones.

b) Sí tenemos ahora, los renglones y las columnas de una matriz aumentada, di la dimensión del sistema de ecuaciones:

1) 2 renglones y 3 columnas el sistema es de ___x___.

2) 5 renglones y 6 columnas el sistema es de ___x___.

3) 6 renglones y 7 columnas el sistema es de ___x___.

Problema 3

María, Pedro y Luis fueron al establecimiento de "Copias y Copias". María pidió 10 copias, 4 amplificaciones y 3 acetatos; Pedro pidió 5 copias, 2 amplificaciones y 1 acetato; Luis 1 copia y 3 acetatos; pagaron $19, $8 y $9.60 respectivamente. Desafortunadamente a Pedro olvidó sacar 2 copias y 3 acetatos:

a) ¿Cuánto dinero necesita Pedro, para las copias y los acetatos?
b))¿Cuánto cuesta cada amplificación?

NOTA: Usaremos aquí el método de Gauss para resolver el problema. Con el objeto de que aprendas más, plantearemos preguntas en las que tú, —antes de avanzar en la lectura del texto—, intentarás encontrar la respuesta por ti mismo.

¿Cuáles son las incógnitas?

x es el precio de cada copia ($)
y es el precio de cada amplificación ($)
z es el precio de cada acetato ($)

¿Qué ecuaciones representan la compra de María, Pedro y Luis?

$$\begin{cases} 10x + 4y + 3z = 19 & \text{(compra de María)} \\ 5x + 2y + z = 8 & \text{(compra de Pedro)} \\ x + 3z = 9.60 & \text{(compra de Luis)} \end{cases}$$

Resolveremos ahora un sistema de 3x3, es decir 3 ecuaciones y 3 incógnitas y la matriz aumentada es de 3 renglones con 4 columnas.

Matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 3 & 19 \\ 5 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 9.60 \end{pmatrix}$$

El objetivo es obtener un matriz escalonada como esta:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \end{pmatrix}$$

En eso precisamente consiste el método de Gauss, en ir obteniendo matrices equivalentes hasta conseguir una matriz escalonada. Si bien las operaciones son con los renglones las transformaciones van a ser sobre las columnas. Por ello, trabajaremos por columnas, comenzando por la primera (de izquierda a derecha).

Queremos 1 en el elemento del primer renglón primera columna. ¿Tú que harías?, haz las operaciones en tu cuaderno para ver si coincidimos.

- Intercambiamos renglones:

$$R_1 \leftrightarrow R_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 9.60 \\ 5 & 2 & 1 & 8 \\ 10 & 4 & 3 & 19 \end{pmatrix}$$

Ahora queremos la primera columna así

$$\begin{pmatrix} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Es decir, queremos ceros abajo de ese 1. Plantea tus operaciones para ello y observa cómo queda la matriz completa.

Cambiamos el R_2 por $(-5)R_1 + R_2$ y R_3 por $(-10)R_1 + R_3$.

Lo hacemos por separado para no confundirnos.

$$\begin{array}{rrrrl} -5 & 0 & -15 & -48 & (-5)R_1 \\ 5 & 2 & 1 & 8 & R_2 \\ \hline \underbrace{0 \quad 2 \quad -14 \quad -40}_{\text{Este es el nuevo renglón 2.}} & & & & (-5)R_1 + R_2 \end{array}$$

Ahora obtengamos el nuevo R_3, con:

$$\begin{array}{rrrrl} -10 & 0 & -30 & -96 & (-10)R_1 \\ 10 & 4 & 3 & 19 & R_3 \\ \hline \underbrace{0 \quad 4 \quad -27 \quad -77}_{R_3} & & & & (-10)R_1 + R_3 \end{array}$$

La matriz equivalente que resulta es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 9.60 \\ 0 & 2 & -14 & -40 \\ 0 & 4 & -27 & -77 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow (-5)R_1 + R_2 \\ \leftarrow (-10)R_1 + R_3 \end{array}$$

Transformemos ahora la segunda columna para tenerla como en la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{a} & \_ & \_ \\ 0 & \boxed{1} & \_ & \_ \\ 0 & \boxed{0} & \_ & \_ \end{pmatrix}$$

Así deseamos que quede la columna

Primero transformemos en 1 al elemento del segundo renglón segunda columna multiplicando el R_2 por ½ que es el inverso multiplicativo de 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 9.60 \\ 0 & 2 & -14 & -40 \\ 0 & 4 & -27 & -77 \end{pmatrix}$$

El inverso multiplicativo de 2 es ½ por ese número se multiplica R_2 para tener un 1 aquí.

De modo que obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 9.60 \\ 0 & 1 & -7 & -20 \\ 0 & 4 & -27 & -77 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow (1/2)R_2 \\ \\ \end{array}$$

¿Qué harías para que quede un cero en el 3^er^ renglón, 2ª columna?. Veamos el número que está en esa entrada (4), su simétrico (-4) lo usamos para multiplicar a R_2, para hacer el siguiente cambio $R_3 \leftarrow (-4)R_2 + R_3$

$$\begin{array}{rrrrl} 0 & -4 & 28 & 80.. & (-4)R_2 \\ 0 & 4 & -27 & -77.... & R_3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 & (-4)R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 9.60 \\ 0 & 1 & -7 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (-4)R_2 + R_3 \end{array}$$

Finalmente como ya tenemos un 1 en el tercer renglón tercera columna, hemos conseguimos una matriz escalonada equivalente.

Con base en esta matriz escribe el sistema resultante.
Revisa si coincidimos:

$$\begin{cases} x + 0y + 3z = 9.60 \\ \quad\;\; y - 7z = -20 \\ \qquad\quad\;\; z = 3 \end{cases}$$

Sustituye "z" en la ecuación 2, luego sustituye a "y" y "z" en la ecuación 1 (sustitución regresiva). Se obtiene:

$$\boxed{x = 0.60, \quad y = 1 \quad \text{y} \quad z = 3}$$

Comprobamos en la ecuación 1 original:

$$10(0.60) + 4(1) + 3(3) = 19$$
$$6 + 4 + 9 = 19$$

Comprueba que también nos da una identidad en la ecuación 2 y en la 3.

Ya resolvimos el sistema de ecuaciones, pero todavía no terminamos el problema, revisa las preguntas que se plantean en el problema.

Las respuestas a las 2 preguntas son:

a) Pedro necesita $10.20 para sacar las copias que le faltan.

b) Cada amplificación cuesta $1.00.

Antes de escribir el resumen del método, conviene revisar cuál es la notación de los elementos de una matriz en general, para una matriz de nxm ("***n por m***"). Es decir n renglones y m columnas. A cada una de las entradas o elementos de la matriz (celdas) se les denota por:

$$(a_{ij}) \qquad \text{con } i = 1, 2, \ldots, n; \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Donde i indica el renglón y j la columna. En todos los casos (a_{ij}) es un número real.

En términos generales, la representación de una matriz de $n \times m$ se denota como sigue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si hablamos de la entrada a_{25} nos estamos refiriendo a el elemento que está en el 2° renglón, 5ª columna.

Ficha 2.4

Usa la información anterior y contesta lo que se te pide.

a). Llena los espacios en blanco.

1. a_{32} está en ____ renglón y ____ columna.

2. a_{15} está en ____ renglón y ____ columna.

3. a_{22} está en ____ renglón y ____ columna.

4. a_{43} está en ____ renglón y ____ columna.

5. El elemento del 4° renglón, 2ª columna es _____.

6. El elemento del 5° renglón, 6ª columna es _____.

7. El elemento del 1er renglón, 2ª columna es ____.

8. El elemento del 3er renglón, 3ª columna es ____.

c) Cuando resolvimos el sistema de ecuaciones con la matriz aumentada equivalente de 3x4, los elementos de la diagonal donde quedaron unos son precisamente de la forma a_{ii}, es decir está en el i-ésimo renglón y la ______ ______________, y cada uno de estos elementos pertenecen a la diagonal principal. La matriz equivalente que da la solución en los sistemas de ecuaciones, tiene 1's en la diagonal principal, es decir que $a_{ii} = 1$ para cualquier valor de i.

d) Indicar el tamaño de las siguientes matrices.

1) ________

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & 3 \\ -4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

2) ________

$$\begin{pmatrix} 18 & 45 \\ 60 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3) ________

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

4) ________

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

e) Escribe el camino a seguir para obtener una matriz escalonada.

5.4.3 Reglas para obtener una matriz escalonada.
(En resumen)

Escribiremos las reglas para la matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

1. Se trabaja con la primera columna a la izquierda y se usan las operaciones por renglón adecuadas, para que en la celda a_{11} quede un 1, esto es $a_{11} = 1$

2. Para obtener ceros debajo de ese 1, se multiplica R_1 por cada simétrico de los elementos de esa columna, es decir $(-a_{i1})$, con $i = 2, 3, \ldots$ $(-a_{21}, -a_{31}, -a_{41}$, *etc.*$)$ de manera que al sumarlos con el renglón correspondiente (R_i) se obtengan ceros abajo del 1.

$$(R_i) \leftarrow (-a_{i1})(R_1) + (R_i)$$

3. No tomar en cuenta el primer renglón y se trabaja con la segunda columna, haciendo las transformaciones para que $a_{22} = 1$.

4. Se hace lo análogo que en el paso 2, pero ahora con R_2 y $(-a_{i2})$ con $i = 3, 4, \ldots$ es decir:

$$(R_i) \leftarrow (-a_{i2})(R_2) + (R_i)$$

5. No considerar ni el primero, ni el segundo renglón. Hacer con la tercera columna lo análogo que en el paso 2 y así sucesivamente, de manera que los escalones quedan de la siguiente forma:

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ya que se obtuvo la matriz escalonada, se usa la sustitución regresiva para encontrar la solución al sistema de ecuaciones.

> **Nota importante: En la mayoría de las matrices que se escalonen en este material, se obtendrán escalones de tamaño uno.**

Ejercicios 2.2

Resuelve junto con un compañero los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss. Primero propongan las operaciones, luego resuelvan por separado y después comparen.

1)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -4 \\ 3x - 3y + 6z = -3 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 3 \\ x + 3y + 2z = 3 \\ 3y - 2z = 10 \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 7 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + 6z = -21 \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 6 \\ -3y + 2z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = -6 \end{cases}$$

Las soluciones a estos ejercicios se encuentran al final.

5.5. MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

5.5.1 Aplicación del Método

Si la siguiente matriz representa un sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La solución al sistema es:.

$x = 3$, $y = 2$ y $z = -1$.

A esta matriz le podemos llamar **matriz diagonalizada**, pues tiene unos en la diagonal principal ceros abajo y arriba de ésta.

Nuestro objetivo al resolver un sistema de ecuaciones será, **obtener la matriz diagonalizada.**

Ejemplo:

Nuestro sistema

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 4 \\ 3x - 4y + 2z = 19 \\ x - 2y + 3z = 10 \end{cases}$$

Matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & 19 \\ 1 & -2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Los pasos son muy parecidos a los anteriores, de hecho los pasos 1 y 2 son idénticos. Para el paso 1 hacemos: $R_1 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 3 & 4 & 2 & 19 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Queremos ceros en esas entradas

Al R_1 se multiplica por los simétricos de donde señalan las flechas:
-3 6 -9 -30 $(-3R_1)$
-2 4 -6 -20 $(-2R_1)$
Esto nos servirá para obtener los ceros.

Haz las operaciones por separado y compara tus resultados.

Con cada renglón resultante de $-3R_1$ y $-2R_1$, que ya se escribieron arriba, se utilizan para sumarlo con el renglón correspondiente, como sigue:

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 2 & -7 & -11 \\ 0 & 8 & 0 & -16 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow (-3)R_1 + R_2 \\ \leftarrow (-2)R_1 + R_3 \end{array} \end{array}$$

Para transformamos en un 1 en 2° renglón, 2ª columna multiplicamos R_2 por el inverso multiplicativo de esa entrada, y lo ponemos en es mismo renglón, es decir:

$R_2 \leftarrow (1/2)R_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 8 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

El renglón 2 lo usamos para poner ceros arriba y debajo de ese $a_{22} = 1$. Es la diferencia con el Método de Gauss pues se quieren ceros también arriba del 1.

Escribiremos sólo el renglón resultante de la multiplicación de el simétrico de a_{12} y de a_{32}, a ti te sugerimos verificar las operaciones de la suma del renglón correspondiente.

0 2 -7 -11 es $(2R_2)$ y

0 -8 28 44 es $(-8R_2)$

En este caso en $R_1 \leftarrow 2R_2 + R_1$ y en $R_3 \leftarrow -8R_2 + R_3$

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 28 & 28 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 2R_2 + R_1 \\ \\ \leftarrow -8R_2 + R_3 \end{array} \end{array}$$

Necesitamos un 1 aquí

Para ello se hace $R_3 \leftarrow \frac{1}{28} R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Necesitamos:

0 0 4 4 $(4R_3)$

0 0 7/2 7/2 $(7/2)R_3$

Obtenemos ceros arriba del 1 con $R_2 \leftarrow (7/2)R_3 + R_2$ y $R_1 \leftarrow 4R_3 + R_1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (7/2)R_3 + R_1 \\ \leftarrow 4R_3 + R_2 \\ \end{matrix}$$

La solución es:

$$\boxed{x = 3, \quad y = -2 \quad \text{y} \quad z = 1.}$$

Comprueba en el sistema original.

Ejercicio 3.1

Resuelve los ejercicios de la ficha anterior con el método de Gauss-Jordan y estos otros también.

(1)

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 \\ x + y - z = 2 \\ 3x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -1 \\ 6x - 3y + 3z = 9 \\ 4x - y + 2z = 8 \end{cases}$$

5.5.2. CASOS ESPECIALES

Al resolver un sistema de ecuaciones usando el método de matrices, podemos llegar a obtener una matriz diagonalizada que represente el sistema de ecuaciones como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x + 0y + 0z &= 3 \\ 0x + \ \ y + 0z &= 4 \\ 0x + 0y + 0z &= -2 \end{aligned}$$

De forma simplificada tenemos las siguientes identidades,

$$x = 3, \ y = 4 \ \ \mathbf{0 = -2}$$

Esto última no puede ser posible, al llegar a esta contradicción se dice que **el sistema es inconsistente y no tiene solución.**

Existen otras posibilidades que te encontrarás en la siguiente ficha.

Ficha 3.1

a) Escribe para cada matriz el sistema de ecuaciones correspondiente, analízalas y anota cómo sería la solución.

	Matriz	Sistema de ecuaciones	Observaciones sobre la "solución del sistema"
A)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$		
B)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$		

	Matriz	**Sistema de ecuaciones**	**Observaciones sobre la "solución del sistema"**
C)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		
D)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		
E)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		
F)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		

b) **i)** ¿Puedes decir cuáles sistemas tienen solución?

____

ii) ¿Qué puedes decir de los sistemas (C) y (D)?

iii) ¿Tienen Solución? ________
(si/no)

En los incisos (C) por ejemplo, te encuentras con una expresión renglón así:

$$0x + 0y + 0z = 0$$

iv) Para que valores de "x", "y" y "z" tiene solución

_____________________________________.

Cuando se obtengan expresiones donde no hay ninguna contradicción se dice que el sistema es **consistente y en este caso tiene una infinidad de soluciones**, pues cualquier par o terna de valores en una de las ecuaciones resuelve también a las otras.

A este tipo de matrices (o sistemas) puedes llegar si el sistema tiene ecuaciones equivalentes entre sí, por ejemplo del ejercicio de las fotocopias tomemos como sistema:

$$\begin{cases} 10x + 4y = \$9.80 \\ 20x + 8y = \$19.60 \end{cases}$$

10 fotocopias y 4 ampliaciones
20 fotocopias y 8 ampliaciones

Si lo consideramos un sistema, tiene una infinidad de soluciones, algunas de ellas son:

$x = \$0.18$, $y = \$2$; $x = \$0.40$, $y = \$1.45$ ó inclusive

$x = \$0.98$, $y = 0$ (que no tiene que ver con la realidad).

c) Compruébalo en las 2 ecuaciones.

d) ¿Cuál es la solución del inciso (E).

____________________________________.

Este último es un sistema **consistente y tiene solución única.**

e) El sistema (F) es consistente ______ (Si/no), por lo tanto ______ (Si/no) tiene solución.

Ficha 3.2

a) Traducir a un sistema de ecuaciones las siguientes matrices aumentadas e indicar si tienen solución.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & -8 \\ 0 & 3 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

b) De los sistemas anteriores, dar una solución en los sistemas consistentes.

c) Decir si tienen solución los siguientes sistemas de ecuaciones y cuáles son:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$ *2)* $\begin{cases} x - 4y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 4y + z = -1 \\ 0y + 0z = 3 \\ 2y - 4z = 6 \end{cases}$ *4)* $\begin{cases} 4x - 6y = 12 \\ 4x - 6y = -6 \end{cases}$

d) Inventar algunos ejemplos de sistemas con una infinidad de soluciones o de sistemas inconsistentes.

Los sistemas de ecuaciones permiten resolver problemas que pueden presentarse, principalmente cuando tenemos que decidir lo más adecuado respecto a ciertas condiciones dadas. Por ejemplo, problemas para una dieta balanceada, la cantidad de incógnitas dependerá de los nutrientes que se quieran controlar(proteínas, azúcares, calcio, hierro ,etc.) y la cantidad de ecuaciones dependerá de las condiciones que pongamos o que se necesite poner a las relaciones entre ellas.

Problema 4.*

Se tienen 3 soluciones de cierto ácido. La primera contiene ácido al 10%, la segunda al 30% y la tercera al 50%. Un químico desea emplear las 3 para obtener 50 litros de una solución que contenga 32% de ácido. Si desea usar el doble de la solución al 50% que de la de 30%, ¿cuántos litros debe usar de cada solución?

¿Cuáles son las incógnitas y en qué unidades se miden?

Si x es la cantidad de solución al 10% (litros),
y es la cantidad de solución al 30% (ℓ) y
z es la cantidad de solución al 50% (ℓ).

1ª condición, desea 50 ℓ con las 3 soluciones. Revisa las unidades en cada caso.

$$x+y+z=50$$

2ª condición, que esos 50 ℓ estén al 32% (litros por %).

$$0.10x+0.30y+0.50z=50(0.32)$$

3ª condición, usará el doble de la solución al 50% (z) que la de30% (y).

$$z=2y$$

El sistema es:

$$\begin{cases} x+y+z=50 \\ 0.1x+0.3y+0.5z=16 \\ -2y+z=0 \end{cases}$$

Nota: Acomodamos las incógnitas.

Escribimos la matriz aumentada y usamos el método de Gauss-Jordan para resolver el sistema. Sólo indicamos las operaciones, como ejercicio anota las operaciones a la izquierda.

---

* Swokowski p. 552.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 16 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow (10)R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 1 & 3 & 5 & 160 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 2 & 4 & 90 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow (-1)R_1 + R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 2 & 45 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow (1/2)R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 45 \\ 0 & 0 & 5 & 90 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow (-1)R_2 + R_1 \\ \\ \leftarrow 2R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 45 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (1/5)R_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow R_3 + R_1 \\ \leftarrow (-2)R_3 + R_2 \\ \\ \end{array}$$

Es decir que se necesitan 23 ℓ de la solución al 10%, 9 ℓ de la solución al 30% y 18 ℓ de la del 50%. comprueba en las 3 ecuaciones del principio.

Ejercicio 3.2

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un proveedor de jardinería tiene 3 tipos de fertilizantes para pasto: F_1, F_2 y F_3 cuyos contenidos de nitrógeno son 40%, 30% y 10% respectivamente. Le hacen un pedido de 300 Kg. de fertilizante con un contenido de nitrógeno al 20%. La mezcla debe contener 60 Kg. más del tipo F_3 que del tipo F_2. ¿Cuántos kilogramos debe usar de cada tipo?

2. Un platero tiene 2 aleaciones, una con 35% de plata y la otra con 60%. ¿Cuánto de cada una debe fundir y combinar para obtener 100gr. de aleación que contenga 40% de plata?

3. Una nutrióloga ordena una dieta especial usando 3 alimentos básicos. La dieta incluirá precisamente 340 unidades de calcio, 180 de hierro y 220 de vitamina A. El número de unidades por onza de cada ingrediente en especial y para cada uno de los alimentos se indica en la tabla.

Unidades por onza

	ALIMENTO A	ALIMENTO B	ALIMENTO C
CALCIO	30	10	20
HIERRO	10	10	20
VITAMINA A	10	30	20

¿Cuántas onzas de cada alimento se deben usar para satisfacer los requisitos dietéticos?

5.6. MÉTODO DE DETERMINANTES

5.6.1 Deducción del Método.

Dado un sistema de ecuaciones de 2x2 escrito en forma general:

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_1x + b_2y = c_2$ Con a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 números reales.

> ¿Habrá alguna fórmula para saber la solución, también de manera general?

Usemos el método de Gauss para resolverlo.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Obtengamos 1 en la entrada a_{11} cambiando R_1 por $(1/a_1)R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{c_1}{a_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

Queremos cero aquí, con $R_2 \leftarrow -a_2R_1 + R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{c_1}{a_1} \\ 0 & \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1} & \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1} \end{pmatrix}$$

Ponemos 1 en a_{22} con $\left(\frac{a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{c_1}{a_1} \\ 0 & 1 & \frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{pmatrix}$$

Observa que ordenamos alfabéticamente las expresiones para mejor identificación. La matriz escalonada nos da el sistema:

$$x+\frac{b_1}{a_1}y=\frac{c_1}{a_2}$$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

Para obtener el valor de x sustituimos a "y" y despejamos:

$$x=-\frac{b_1}{a_1}\left(\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right)+\frac{c_1}{a_1}$$

Elegimos el común divisor y hacemos las operaciones.

$$x=\frac{-a_1b_1c_2+\cancel{a_2b_1c_1}+a_1b_2c_1-\cancel{a_2b_1c_1}}{a_1\left(a_1b_2-a_2b_1\right)}$$

Simplificamos y factorizamos a_1 en el numerador, tenemos:

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$$

Y con $$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

Observa que las solución está en términos de los coeficientes de "x" y de "y", además de los términos independientes

Ficha 4.1

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué tienen en común estas expresiones?

2. ¿Ya te fijaste en los denominadores?

3. Efectivamente los denominadores son iguales, y además aparece a_1 y a_2 que son los coeficientes de ___, y b_1 y b_2 que son los coeficientes de ____.

4. ¿ Puede ser cero $a_1b_2 - a_2b_1$? _______. ¿Por qué? ___________
(si/no)
____

Quiere decir entonces que los coeficientes de las incógnitas determinan los valores de éstas.

Observa la matriz del sistema

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Es una matriz con 2 renglones y 2 columnas (2x2) y cuando coincide el número de renglones con el número de columnas se le llama **matriz cuadrada.**

5. A partir de esta matriz cuadrada de 2x2, ¿cómo obtienes esta expresión $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$?

A esta expresión que representa el denominador del valor de las incógnitas se le llama el **determinante del sistema,** y se encuentra a partir de la matriz del sistema (matriz cuadrada), se denota entre barras y se opera así. El producto de la diagonal principal **menos** el producto de la otra diagonal.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

6. Observa las expresiones $b_2c_1 - b_1c_2$ y $a_1c_2 - a_2c_1$ de los numeradores que aparecen en los despejes de "x" y "y". ¿Podrías encontrar un determinante que te de cada una de las expresiones?

Al primero se le conoce como determinante con respecto de "x" y se denota como Δx y el segundo es el determinante de "y" Δy.

En este caso, es más fácil encontrar el determinante de "y" Δy.

Veamos si coincidimos, el Δy se encuentra cambiando en el determinante del sistema la columna de coeficientes de "y" por los términos independientes y haciendo las operaciones correspondientes.

$$\begin{array}{cc} \textbf{coeficientes de las x´s} & \textbf{términos independientes} \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

El Δx se encuentra cambiando en el Δ la columna de coeficientes de "x" por los términos independientes.

Nota: El orden en el que se escriban las columnas es importante.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = b_2c_1 - b_1c_2$$

Por lo tanto la solución al sistema de ecuaciones es :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \qquad\qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

Esta es la **Regla de Cramer para 2 ecuaciones con 2 incógnitas.**

Ejemplo 1

$$\begin{aligned} 2x + \quad y &= 4 \\ -\ 2y &= 3x - 5 \end{aligned}$$

Primero ordenamos el sistema y después calculamos los determinantes.

$$\begin{aligned} 2x + \quad y &= 4 \\ -3x - \ 2y &= -5 \end{aligned}$$

Los determinantes son:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - (-3)(1) = -4 + 3 = -1$$

columna términos independientes

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 4(-2) - (-5)(1) = -8 + 5 = -3$$

columna términos independientes

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 2 & \_\_ \\ -3 & \_\_ \end{vmatrix}=2(-5)-(-3)(4)=-10+12=2$$

La solución la encontramos al dividir con cada uno de los determinantes relativos a las incógnitas entre el determinante del sistema, esto es:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-3}{-1}=3 \qquad \boxed{x=3}$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{2}{-1}=-2 \qquad \boxed{y=-2}$$

Es la solución del sistema, compruébalo.

Ficha 4.2

a) Llena los espacios en los determinantes del siguiente sistema.

$$\begin{aligned} 3x+2y &= 2 \\ 2x-4y &= -20 \end{aligned}$$

Por comodidad denotaremos ***c. de x*** a los coeficientes de "x"; ***c de y*** a los de "y"; ***c de z*** a los de "z" y ***t. i.*** a los términos independientes.

Coeficientes de x **Coeficientes de y**

$$\Delta=\begin{vmatrix} \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{vmatrix}=3(-4)-(2)(\_\_)=\_\_\_\_$$

Términos independientes   Coeficientes de ____

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \_\_ & 2 \\ \_\_ & -4 \end{vmatrix} = 2(\_\_) - (\_\_)(2) = \_\_\_\_\_$$

Coeficientes de ____   Términos independientes

$$\Delta y = \begin{vmatrix} \_\_ & 2 \\ \_\_ & -20 \end{vmatrix} = 3(\_\_) - (2)(\_\_) = \_\_\_\_\_$$

Si hiciste bien las operaciones, obtuviste:

$\Delta = -16$; $\Delta x = 32$; $\Delta y = -64$

b) Usa la Regla de Cramer para obtener la solución del sistema.

c) Comprueba en las 2 ecuaciones que la solución es:

$$\boxed{x = -2 \qquad y = 4}$$

Ejercicios 4.1

Resuelve los siguientes sistemas por el método de determinantes.

1)

$$\begin{cases} 3x - 4y = -10 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} 2x - 4y = -14 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 9x = 5 - 4y \end{cases}$$

Los determinantes que utilizaste tienen 2 renglones y 2 columnas son de 2x2, o mejor conocido como **determinantes de orden 2.**

Cuando tenemos un sistema de ecuaciones de 3x3, el determinante del sistema se obtiene, por ejemplo:

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = -4 \\ -x + 2y - 2z = 3 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{c. de } x & \text{c. de } y & \text{c. de z.} \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

Es un determinante de orden 3, que proviene de una matriz cuadrada de 3x3.

En este caso, a parte de el determinante del sistema, tenemos que obtener otros tres determinantes correspondientes a cada una de las incógnitas y se procede en la misma forma que los anteriores. Cambiando la columna de coeficientes de la incógnita (del determinante buscado) por la columna de términos independientes.

Por ejemplo.

$$
\begin{array}{cccc}
 & \text{t. i.} & \text{c. de y} & \text{c. de z} \\
\Delta x = & \multicolumn{3}{c}{\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & 0 \end{vmatrix}}
\end{array}
$$

Ayuda a llenar los espacios.

$$
\begin{array}{cccc}
 & \text{c. de x} & \text{t. i.} & \text{c. de z} \\
\Delta y = & \multicolumn{3}{c}{\begin{vmatrix} \underline{\quad\quad} & -4 & \underline{\quad\quad} \\ \underline{\quad\quad} & 3 & \underline{\quad\quad} \\ \underline{\quad\quad} & 5 & \underline{\quad\quad} \end{vmatrix}}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
 & \text{c. de } x & \underline{\quad\quad\quad\quad} & \underline{\quad\quad\quad\quad} \\
\Delta z = & \multicolumn{3}{c}{\begin{vmatrix} \underline{\quad\quad} & 3 & \underline{\quad\quad} \\ \underline{\quad\quad} & 2 & \underline{\quad\quad} \\ \underline{\quad\quad} & -4 & \underline{\quad\quad} \end{vmatrix}}
\end{array}
$$

Estarás de acuerdo que ahora nuestro problema es encontrar el valor de un determinante de orden 3. Existen varias maneras de calcularlo, mostraremos aquí una de ellas en la que se calcula el valor del determinante mediante el "*Desarrollo por Menores*", forma que revisaremos en la siguiente sección.

5.6.2 Desarrollo por Menores

Cada una de las entradas de un determinante tiene asociado un *menor*, es decir, un determinante con un renglón y una columna menos, en el ejemplo tenemos un determinante de orden 3 (3 renglones y 3 columnas) un menor será de orden 2.

Si tenemos un determinante 4x4, un menor será de orden ___.

En un determinante de orden 5, un menor será de orden ____.

Para desarrollar un determinante por *menores* se puede hacer respecto a cualquier renglón,* pero para evitar confusiones lo haremos respecto al primer renglón, tomando en cuenta el determinante escrito en su forma general.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

El *determinante menor* asociado a la entrada a_{11} , se obtiene quitando el renglón 1 y la columna 1, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

El *determinante menor* asociado a a_{12} se obtienen quitando el renglón 1 y la columna ___. Escribe cuál es el *determinante menor* que resulta.

*El menor*** asociado a a_{13} se obtiene quitando el renglón __ y la columna ___. Escribe cuál es.

---

* También los podemos desarrollar respecto a cualquier columna.

** Para abreviar, en ocasiones se llama simplemente *"el menor"* al *determinante menor*.

En general, el *menor* asociado a la entrada a_{ij}, se obtiene al quitar el renglón i-ésimo y la columna ____________.

Veamos@ cómo es el desarrollo:

Cada entrada del primer renglón va a multiplicarse por su menor asociado y estas multiplicaciones se relacionan con suma o resta de manera alternada, **comenzando por la suma.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

¡Cuidado con el signo!

Reducimos nuestro problema de calcular un determinante de orden 3 involucrando los sencillos cálculos de tres determinantes de orden 2.

Evaluemos el determinante del sistema anterior por menores.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -1[0-8] - 3[0-(-6)] + 2[4-6]$$

$$= 8-18-4$$

$$\Delta = \mathbf{-14}$$

@ El profesor puede mencionar después, el patrón del tablero de ajedrez o los cofactores si lo considera pertinente.

Ficha 4.3

a) En el cálculo de Δx completa lo que falta.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 2 & \_\_\_ \\ -4 & \_\_\_ \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} 3 & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \_\_\_ & 2 \\ \_\_\_ & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -4[0 - \_\_\_] - 3[\_\_\_ - (-10)] + 2[-12 - \_\_\_]$$

$$= 32 - \_\_\_\_ - 44$$

$$\Delta x = \mathbf{-42}$$

b) En el cálculo de Δy completa lo que falta.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ \end{vmatrix}$$

$$= -1[\_\_\_ - (-10)] + 4[\_\_\_ - (-6)] + 2[\_\_\_ - \_\_\_]$$

$$= -10 + \_\_\_ - 28$$

$$\Delta y = \mathbf{-14}$$

c) Hazlo ahora para el determinante de z.

$$\Delta z = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = (\_\_\_)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} - (\_\_\_)\begin{vmatrix} -1 & \_\_\_ \\ 3 & \_\_\_ \end{vmatrix} + (\_\_\_)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)[\qquad] - 3[\qquad] - 4[\qquad]$$

$$= -22 + 42 + 8$$

$$\Delta z = \mathbf{28}$$

Apliquemos la Regla de Cramer para encontrar los valores de las incógnitas, realicemos los siguientes cocientes:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-42}{-14} = \_\_\_\_$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-14}{\_\_\_} = \_\_\_\_$$

$$z = \frac{\Delta z}{\_\_\_} = \frac{\_\_\_}{-14} = -2$$

Es decir:

$$\boxed{x = 3,\ y = 1,\ z = -2}$$

Comprueba en el sistema que dichos valores son la solución.

Ejercicios 4.2

I. Calcula el valor de los siguientes determinantes:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ **2)** $\begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ **3)** $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

II. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

1)

$$\begin{cases} 3x - 4y - 3z = 1 \\ -2x + 3y + 2z = -1 \\ x - 2y - 2z = -2 \end{cases}$$

Ojo: Revisa los determinantes del inciso I, y compara con los de este sistema, úsalos para hallar la solución.

2) $$\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ x - 2y = 9 \\ \end{cases}$$

$-2x \quad + 4z = -2$

III. Resuelve el primer sistema de ecuaciones del inciso II por el método de Gauss y cuenta las multiplicaciones que tienes que hacer con este método y compara con la cantidad de multiplicaciones que se hacen con el número de operaciones que se realizan por el método de determinantes. ¿En cuál de los métodos se hacen menos operaciones? ______________________

________________________________.

IV. Escribe los elementos que faltan y el desarrollo por menores del determinante de orden 4. Recuerda que se van alternando las operaciones (+ - + - ...).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & \_\_ & \_\_ & a_{34} \\ a_{41} & \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{vmatrix} =$$

V. Si tienes el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} x - 2y + z - w &= 2 \\ -2x + 3y + z + 2w &= 3 \\ 2y - 3z + w &= 1 \\ x + z + w &= 3 \end{aligned}$$

1) ¿Por cuál método lo resolverías? ____________________

2) ¿Por qué? ____

____

____

Este tipo de ecuaciones se pueden presentar en problemas de química, economía, negocios, sociología, en prescripciones de dieta, etc., inclusive en muchas ocasiones el signo de = se cambia por alguno de desigualdad. Son problemas de toma **de decisiones** donde aparecen ciertas variables (cantidad de alimento, precio de artículo, cantidad de soluble, etc.) que se necesitan combinar y que también necesitan cumplir ciertas **condiciones**, variables y condiciones forman cada una de éstas ecuaciones (o inecuaciones), obteniendo el sistema cuya solución permitirá tomar la mejor decisión. Entre más incógnitas y condiciones se tengan, más grande es el sistema. Obviamente que viviendo en un mundo lleno de tecnología, las computadoras o calculadoras graficadoras pueden hacer el trabajo de resolver sistemas de ecuaciones o inecuaciones muy grandes de manera más rápida y eficiente.

Puedes ayudarte de la tecnología para resolver los sistemas de ecuaciones, de hecho *tu tarea más importante, cuando te enfrentes a un problema, es identificar las variables y las condiciones para traducirlas al lenguaje algebraico, plantear un sistema que modele la situación, obtener los resultados por un método eficiente e* **interpretarlos y elegir la mejor decisión.**

RESULTADOS A LOS EJERCICIOS

Ejercicio 1.1

1. **a)** $60 pagaría con 5 alumnos con credencial.

b) 40% de descuento.

2. **a)** $50 con todo y palomitas

b) $200.

c) $35

3. 12 timbres de $1.20 y 6 de $2.50.

4. 65 estudiantes asistieron.

Ejercicio 2.1

1. $x = 2$, $y = -4$.

2. $x = -2$, $y = 5$.

3. $x = 3$, $y = -2$.

4. $x = 4$, $y = -2$.

5. $x = 1$, $y = 0$.

Ejercicio 3.1

1. $x = 2$, $y = -2$, $z = -2$.

2. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Ejercicio 3.2

1. **30 Kg** del fertilizante F_1, **105 Kg** del fertilizante F_2 y **165 Kg.** del F_3.

2. **80 gr** de la aleación con 35% y **20 gr** de la aleación con 60%.

3. **8 onzas** del alimento A, **2 onzas** del B y **4 onzas** del C.

Ejercicio 4.1

1. $x = -2$, $y = 1$.

2. $x = 37$, $y = 22$.

3. $x = 1/3$, $y = 1/2$.

Ejercicio 4.2

I.

1. $\Delta = -1$.

2. $\Delta x = -2$.

3. $\Delta y = -3$.

II. **1.** $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$.

2. $x = \frac{9}{5}$, $y = \frac{-18}{5}$, $z = \frac{2}{5}$.

III. Con el método de Gauss se hacen 22 operaciones, con la regla de Cramer (método por determinantes), se hacen 27 operaciones.

IV. Los elementos que faltan son:

$a_{32}, a_{33}, a_{42}, a_{43}, a_{44}$ *en este orden.*

V.1 Por matrices con el método de Gauss y la solución es:

$x = 2$, $y = 2$, $z = 1$, $w = 0$.

V.2 Es más eficiente.

CONCLUSIONES

Desarrollar un Material Didáctico que cumpliera con las expectativas del programa de Matemáticas del CCH del tercer semestre, fue un trabajo difícil, ya que la pretensión fue cumplir con los elementos que se plantean en el siguiente párrafo del programa:*

> " Las actividades en clase deberán propiciar la solución de problemas, buscando que los conocimientos matemáticos adquieran sentido para los alumnos, y se desarrolle la capacidad de trabajo personal, lo mismo que sus aptitudes para la investigación, la búsqueda de conjeturas, y la comunicación de su pensamiento, tanto en forma oral como escrita."

Atendiendo esta visión, tuvimos que dejar de lado el tiempo que propone el programa, pues 10 horas son insuficientes para un aprendizaje con estos objetivos, sobre todo cuando el tema es nuevo para el alumno.

El material logra, en distintos momentos, que el alumno construya su propio conocimiento gracias a tener un contexto que le permite explicar conceptos como "ecuaciones equivalentes" o "combinaciones lineales" o también, descubrir las operaciones que se pueden realizar con los renglones de una matriz para obtener matrices equivalentes. En otro momento el estudiante logra la mecanización y toma conciencia de los errores que se pueden cometer en este tema asimismo, consigue comprender la interpretación de situaciones, pues el foco de

* Programas p. 4.

atención está en la representación matemática de fenómenos y situaciones.

Si bien el material es un esfuerzo importante para que el alumno logre aprendizajes independientes, el trabajo del profesor es orientar y cuestionar al estudiante para que avance lo más rápido que pueda, el mentor, sobre todo, ha de poner énfasis en los resúmenes y conclusiones que vayan obteniendo sus pupilos con la finalidad de que se logren conocimientos más sólidos y puedan usarse dichos conocimientos más adelante, por ejemplo, en el cuarto semestre.

Se necesita enfatizar, sobre todo al principio, el papel del estudiante y el del profesor, el primero va a lograr, con base en su trabajo, apropiarse de varios conocimientos y algoritmos y el segundo, debe orientar, dar preguntas y actividades para facilitar esa apropiación. Por ejemplo, el maestro ha de planear discusiones grupales para analizar los resúmenes y proponer actividades que permitan pensamientos más profundos que extiendan los conceptos que se estén tratando.

Sobre la interpretación geométrica queda mucho por decir, pues en el programa de la materia no está contemplada la apreciación visual-gráfica, en este punto se puede profundizar sólo si hay tiempo y disposición del grupo.

Con respecto a la implementación del material, en la aplicación de la primera versión del material didáctico**, se detectaron varias fallas, tanto de la misma instrumentación práctica en el aula como de contenido, por ejemplo:

** De hecho, se trataba del borrador de este trabajo de apoyo a la docencia.

- Los "saltos" que el alumno tenía que dar para obtener el conocimiento, en ocasiones eran muy grandes.
- Las actividades no eran del todo explícitas.
- Se plantearon preguntas de interpretación geométrica sin que se hubiera tratado antes o se hubiera dado al menos un ejemplo.

Con las observaciones, correcciones y opiniones de sinodales y compañeros que aplicaron la obra en su clase, ésta creció y se enriqueció, esperando que en esta última versión se reflejen todas estas cosas y hayan devenido en una obra renovada que esté más llena de virtudes y ventajas, para que el alumno logre el mayor provecho, pues es este el propósito para el que fue hecha.

El material consigue que, con base en el trabajo del alumno, éste discuta, conjeture y concluya aspectos matemáticos que debe aprender. Además los problemas de aprendizaje señalados en el capítulo 4 (de traducción, de interpretación, aritméticos o inclusive de visualizar la conexión entre conceptos) se reducen o desaparecen en función del trabajo realizado por los propios estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

ALMEIDA, P. FRANCO, J., 1998. "Eliminación gaussiana para sistemas de ecuaciones lineales" en *Educación Matemática*. Vol. 10 No. 1 abril p. P. 74-88., Grupo Editorial Iberoamericana México D. F.

GRUPO AZARQUIEL, (ALONSO, F. BARBERO, C. *et al*), 1993. *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*, Ed. Síntesis, Madrid.

AEBLI, H. 1995. *12 Formas básicas de Enseñar una Didáctica* Basada en la Psicología. 2ª edición, Ed. NARCEA, Madrid.

BANETT, R. 1992 *Precálculo*. Álgebra, Geometría y Trigonometría. Ed. LIMUSA, México D. F.

BELL, E. T. 1949. *Historia de las Matemáticas.* Ed. FCE, E.U.

BOYER, C. 1968 *Historia de las Matemáticas.* Alianza Editorial

BRUER, J. 1995. *Escuelas para pensar*. Una ciencia del aprendizaje en el aula. Ed. Paídos Barcelona.

CAMPOS, H. MIGUEL, A. 1999 "Dificultades en la resolución de problemas matemáticos" en Revista *Desde el Sur* Humanismo y Ciencia, Año 5 No. 15, Ed. CCH Sur-UNAM, pp 51-55.

CARDENAS, H. LLUIS, E. *et. al.* 1978. *Álgebra Superior.* Ed. Trillas México D. F.

COLL, C. 1990. Un marco de referencia psicológico para la educación escolar: La concepción constructivista del aprendizaje y de la enseñanza. En COLL, C. Marchesi, A y Palacios, J. (compiladores). *Desarrollo psicológico y Educación II. Psicología de la Educación*. Madrid; Alianza, p. P. 435-453.

COLL, C. 1987. "Diseño curricular Base y proyectos Curriculares". En *Cuadernos de Pedagogía,* 168 p. p. 8-14. Barcelona.

DÍAZ BARRIGA, F. HERNÁNDEZ, G. 1998. *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constuctivista*. Ed. Mc Graw-Hill México D. F.

FREGOSO, E. 1995. *Guía de Autoenseñanza. Para elaborar materiales didácticos impresos en sistema abierto y a distancia*. Editado por S.E.P. México D. F.

GÓMEZ-GRANELL, C. COLL, C. 1994 "De qué hablamos cuando hablamos de constructivismo". En *Cuadernos de Pedagogía* # 221 p. P. 8-10.

GUTIÉRREZ, A. DÍAZ, J. et. al. 1991. Área de Conocimiento . Didáctica de las Matemáticas. Ed. Síntesis Madrid España.

KEMP, J. 1972. *Planteamiento Didáctico. Plan de desarrollo para unidades y curso*. Ed. Diana México D. F.

KLINE, M. 1976. *El fracaso de la Matemática Moderna. Por qué Juanito no sabe sumar.* Ed. Siglo veintiuno México D. F.

LEITHOLD, L. 1995. *Álgebra.*
Ed. Harla México D. F.

LOBRAÑA, A. PLATA, A. *ET. AL.* 1995. *Álgebra Lineal. Resolución de Sistemas lineales.* Ed. Síntesis, Madrid.

PERALTA, D. 1998. *Didáctica de las Matemáticas.*
Ed. CONALEP. México D. F.

PIETZSCH, G. et. *al.* 1982. *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de las Matemáticas 3.* Ed. Pueblo y Educación. La Habana Cuba.

POLYA, G. 1957. *Como plantear y resolver problemas.* Ed. Trillas, México D. F.

Programas de estudio para las asignaturas Matemáticas III y IV Álgebra y Geometría Analítica (tercero y cuarto semestre). Ed. C.C.H. Unidad Académica del Ciclo de Bachillerato, julio de 1996.

RESS, P. SPARKS, F. *ET. AL.* 1991. *Álgebra.* Ed. Mc Graw-Hill/Interamericana de México D. F.

SOLÉ, I. 1990. Bases psicopedagógicas de la práctica educativa. En T. Mauri, Solé, L., *et. àl. El curriculum en el centro educativo.* Barcelona I. C. E. /Horsori, p. p.51-90.

SWOKOWSKI, E. COLE, J. 1992. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamericana México D.F.