UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"Proyecto de Texto para el curso de Matemáticas III en la Escuela Nacional Preparatoria".

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

PEDRO MARIO FLORES CASTILLO

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALEJANDRO LOPEZ YAÑEZ.

1999

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

PROYECTO DE TEXTO PARA EL CURSO DE MATEMATICAS III

EN LA ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

realizado por PEDRO MARIO FLORES CASTILLO

con número de cuenta 7391668 0, pasante de la carrera de ACTUARIO

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. ALEJANDRO RAMIRO LOPEZ YAÑEZ	
Propietario	ACTUARIO HUMBERTO SANTILLANA LOYO	
Propietario	ACTUARIO MARIA AURORA VALDES MICHEL	
Suplente	ACTUARIO LAURA MIRIAM QUEROL GONZALEZ	L. M. Q. G.
Suplente	ACTUARIO JUDITH EUGENIA BARREIRO DIAZ	

Consejo Departamental de MATEMATICAS

PROYECTO DE TEXTO PARA EL CURSO DE

MATEMÁTICAS

III

EN LA ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

PEDRO MARIO FLORES CASTILLO

A MI PADRE:

POR HABERME GUIADO EN EL DIFICIL CAMINO DE LA VIDA

TU ME HAS ENSEÑADO LO QUE DEBO SER

¡ GRACIAS POR TUS CONSEJOS !

A MI MADRE:

POR EL AMOR INFINITO QUE SIEMPRE ME HAS TENIDO

TU ME HAS ENSEÑADO LO QUE SOY

¡ GRACIAS POR LA VIDA !

A MIS HERMANOS:

POR COMPARTIR TANTOS MOMENTOS JUNTOS

¡ GRACIAS POR TODO !

A SARA :

POR TU INCONDICIONAL APOYO EN TODO MOMENTO

¡GRACIAS POR EL AMOR QUE NOS PROFESAMOS !

A MIS HIJOS MARIO ALBERTO Y ELIZABETH:

CON LOS HIJOS BUENOS COMO USTEDES NOS OCURRE IGUAL QUE

CON LAS PUESTAS DE SOL: QUE LOS VEMOS COMO LO MÁS NATURAL

TODAS LAS NOCHES DESAPARECEN.

LA MAYORIA DE LOS PADRES NO TENEMOS IDEA DE CUANTO SE

ESFUERZAN POR AGRADARNOS, NI DE CUANTA TRISTEZA

LOS EMBARGA CUANDO CREEN QUE HAN FALLADO

¡ SIGAN ADELANTE SON MI VIDA !

A MI BEBÉ NAHUM ISAIAS:

POR ESAS GIGANTESCAS LECCIONES DE AMOR A LA VIDA

POR TODO LO QUE ME HAS ENSEÑADO

MIL GRACIAS

¡ DIOS TE BENDIGA !

INDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

A partir de los cambios en los Planes y programas de estudio en el ciclo de Iniciación Universitaria de la Escuela Nacional Preparatoria en el año de 1994 surge la necesidad de crear material adecuado para poder alcanzar los objetivos de estos nuevos programas.

Como una modesta aportación hacia el departamento de Matemáticas de la Escuela Nacional Preparatoria, he desarrollado una serie de información referente al programa de Matemáticas III, dentro de sus contenidos de Geometría Euclidiana, que corresponden a las cinco primeras unidades del programa.

Las discusiones sobre el valor, significado y alcance ideológico de los diversos sistemas de Axiomas en Geometría y Análisis sobre todo, han oscilado y oscilan aún, entre dos posiciones extremas: una interpretación pragmática o positivista –el convencionalismo puro y simple- y una interpretación idealista.

Dado un sistema de axiomas que cumpla las condiciones de no contradicción e independencia pueden al arbitrio construirse tantos modelos de ciencias cuantas sean las combinaciones que se puedan hacer con los axiomas, tomando unos, dejando otros, dando a unos forma negativa, a otros positiva, puesto que la propiedad de "independencia" entre ellos permite o dejar unos o varios sin que se resienta de contradicción alguna el nuevo sistema reducido, o dar a uno o algunos la forma negativa, sin que tal forma en unos traiga consigo, al unirlos con otros, una contradicción del tipo "A y no A", puesto que son independientes entre sí.

Pero las interpretaciones filosóficas que de este hecho científico se han dado por filósofos y por matemáticos se resintieron de la limitación de sus puntos de vista filosóficos, que, por más que se atribuya a la filosofía eso de ser el más universal punto de vista posible al entendimiento humano, con todo la verdad es que la amplitud y horizonte de la mirada filosófica están condicionados, en el mejor de los casos, por el horizonte que el tipo de mentalidad y la época histórica abran al entendimiento. La amplitud del ángulo de visión intelectual es una función del tiempo histórico, del calendario de fechas que fijan la evolución de la vida humana.

La unicidad de las cosas geométricas es tal en la geometría griega y clásica que las cosas geométricas tienen que manifestar o estar haciendo patente lo que son, y además sólo pueden estar en un estado geométrico; su verdad es unitaria, su tipo de manifestación es único.

El modo en que las cosas se hacen patentes o manifiestan al conocimiento, sobre todo al inteligible, es también unitaria; el ser sólo puede ser de una manera lo que es, el ser sólo puede ostentar de una manera lo que es (verdad óntica), y el ser sólo puede mostrar lo que es al entendimiento y mostrárselo de una sola manera (verdad ontológica clásica).

Esta triple unicidad: del ser, de la verdad óntica y de la verdad ontológica caracteriza al tipo mental que construyó la geometría griega.

Y se refuerza esta unicidad por el modo como el griego notaba por dentro el conocer.

Aristóteles, en frase ya clásica, dirá que el entendimiento es cual tablero escolar en el que nada hay naturalmente escrito, en que todo lo escrito se puede borrar, en que lo escrito no transforma realmente el tablero, no es propiedad real de él, sino tan sólo transitoria y superficial afección o pasión. Esta falta de espontaneidad creadora mental, de pasividad receptora pura, - tanta que según el entendimiento activo no era propio de ningún hombre individual, sino algo separado, como la luz que a todo vuelve visible, mas que no es de cosa alguna concreta -, es otro motivo trascedental de que proviene la unicidad de la geometría, el hecho de que el griego no encontrase sino una sola, y fuese vitalmente incapaz de hallar mas de una. Que en efecto, si el entendimiento de cada hombre se siente pasivo frente al ser y a la verdad de las cosas, y éstas no le presentan sino un solo tipo de verdad óntica, es decir: sólo le manifiestan de sí de una sola manera, el entendimiento no podrá ver sino una sola y al formularla, sólo nos dará un sistema de proposiciones básicas.

La enseñanza de la Geometría tiene por objeto, además de comunicar a los alumnos los resultados geométricos, darles a conocer el método con ayuda del cual se obtienen esos resultados. Sabido es que los resultados geométricos (teoremas) son obtenidos por medio de razonamientos lógicos (demostraciones) arrancando de algunos planteamientos de partida.

Estos planteamientos de partida son tipos de proposiciones los cuales por convencionalismos se les dan diferentes denominaciones:

Así el Axioma es una proposición evidente por sí misma, cuya verdad se conoce con sólo oirla enunciar.

La demanda o Postulado es una proposición cuya verdad se admite sin demostración, aunque no tenga el grado de evidencia del axioma.

Los razonamientos lógicos son parte indispensable de todo saber.

La Geometría se distingue por la claridad y la sencillez tanto en el enunciamiento del resultado como en los planteamientos de arranque a partir de los cuales debe obtenerse ese resultado. De ahí que la Geometria nos brinde las mejores oportunidades para desarrollar el pensamiento lógico en la escuela. La experiencia secular en la enseñanza de la Geometría elemental desde los tiempos de Euclídes prueba la eficiencia del sistema tradicional.

Su perfeccionamiento, relacionado con el desarrollo general de la ciencia no debe afectar, a mi entender, sus bases racionales y profundamente meditadas.

Es de esta manera como he elaborado este material de una manera tradicional iniciando el primer capítulo dando una revisión "rápida" a los principales antecedentes históricos de la Geometría, así como una serie de definiciones sobre puntos y rectas, continuando con la localización de puntos en el plano y en el espacio para culminar con una clasificación de las líneas la cual se hace de una manera muy asequible al alumno.

Continuando esta forma tradicional en el segundo capítulo abordo el tema de los ángulos y defino la igualdad de los ángulos tomando como punto de partida sus medidas por otro lado se hace un análisis de las parejas de ángulos tanto por su posición como por su suma.

En el tercer capítulo se hace una serie de reflexiones acerca de dos metodologías de razonamiento y se dan las primeras demostraciones formales de teoremas, también se enuncian las propiedades del campo de los números reales ya que éstas se utilizaran posteriormente en las demostraciones formales de los teoremas, por otro lado se presentan una serie de problemas resueltos en los cuales se hace ver la manera en que utilizando los resultados obtenidos se resuelven éstos.

En el cuarto capítulo se aborda el tema de los triángulos donde se clasifican éstos por sus lados y por sus ángulos, se construyen sus rectas notables y se hace un estudio acerca de la congruencia y semejanza de los mismos.

En el quinto capitulo se definen el círculo y la circunferencia así como sus rectas notables, por otra parte se manejan los distintos tipos de ángulos en un circulo (inscrito, exterior, central), todos estos resultados presentados en forma de teoremas con sus respectivas demostraciones.

CAPITULO I

CONCEPTOS BASICOS DE LA GEOMETRIA EUCLIDIANA.

1.1 ANTECEDENTES HISTORICOS .-

La geometria es un estudio de las propiedades y medidas de las figuras compuestas de puntos y líneas. Es una rama de las matemáticas muy antigua y se originó de las necesidades de la gente. La palabra geometria se deriva de las palabras griegas GEO, que significa "TIERRA", y METRON, que significa "MEDIR". Los antiguos egipcios y babilonios (4000-3000 A.C.) pudieron desarrollar una serie de reglas prácticas para medir figuras geométricas sencillas y para determinar sus propiedades.

Estas reglas se obtuvieron de modo inductivo durante siglos de tanteos. No habia ninguna evidencia de que éstas se apoyaran en demostración lógica, pero las aplicaciones de los principios correspondientes se encontraron en la construcción de las Pirámides y la Gran Esfinge.

Los sistemas de irrigación inventados por los antiguos egipcios indican que poseian el conocimiento adecuado de la geometria tal y como se aplica en topografia. Los babilonios usaban figuras geométricas en las baldosas, paredes y decoraciones de sus templos.

De Egipto y Babilonia, el conocimiento de la Geometria pasó a Grecia. Los griegos nos legaron algunos de los más grandes descubrimientos para el avance de las matemáticas. Los filósofos griegos estudiaron geometria no sólo por sus beneficios prácticos, sino también por los valores estéticos y culturales que ofrece. Los antiguos griegos basaron su economia en un próspero comercio maritimo. Este comercio maritimo les proporcionó no sólo riqueza, sino también los conocimientos de otras tierras. Estos ciudadanos acaudalados de Grecia disponian de suficiente tiempo para debates y estudios refinados sobre diversos temas de interés cultural, debido a que contaban con esclavos que hacian la mayor parte de su trabajo diario. Por lo general, las teorias y conceptos traidos a su regreso por los viajeros de los paises extranjeros eran los que proporcionaban a los griegos el tema para sus debates largos y fogosos.

Asi los griegos se volvieron expertos en el arte del razonamiento lógico y critico. Entre los griegos más prominentes que contribuyeron a este progreso estaban Tales de Mileto (640-546 a.C), Pitágoras, discipulo de Tales (¿580?-500 a.C), Platón (429-348 a.C), Arquimedes (287-212 a.C) y Euclides (alrededor de 300 a.C).

Euclides, que enseñaba matemáticas en Alejandria, escribió el primer tratado de geometria amplio y lo intituló "Elementos". La mayor parte de los principios que se presentan ahora en los libros modernos estaban ya en los "Elementos" de Euclides Su obra ha servido de modelo para la mayor parte de los libros que se escribieron posteriormente sobre geometria.

¿Por qué estudiar Geometria?

El alumno que empieza a estudiar este libro puede preguntar con toda razón: ¿Qué es la Geometria? ¿Qué gano al estudiarla?.

En este curso el estudiante aprenderá bastante acerca de los conceptos geométricos tales como rectas, ángulos, triángulos, circulos, circunferencias, poligonos, diseños y modelos de muchos tipos.

Uno de los beneficios más importantes que se derivan del estudio de la geometría es que el estudiante use más criterio, al escuchar, leer y pensar. Cuando estudia geometria deja de aceptar a ciegas proposiciones e ideas y se le enseña a pensar en forma clara y critica, antes de hacer conclusiones.

Apreciar el orden y la belleza de las formas geométricas, que abundan en las obras del hombre y en las creaciones de la naturaleza, será otra ventaja del estudio de la geometria

El estudiante también debe conocer lo que las ciencias matemáticas y los matemáticos han aportado a nuestra cultura y civilización.

1.2 DEFINICION .--

En geometria una buena definición tiene dos propiedades importantes:

1) Las palabras en la definición deben ser más sencillas que la palabra que se está definiendo y deben ser fáciles de comprender.

2) La definición debe ser una proposición reversible.

Asi por ejemplo, si "ángulo recto" se define como "un ángulo cuya medida es 90° ", se supone que el significado de cada término en la definición es claro y que:

A) Si tenemos un ángulo recto, tenemos un ángulo cuya medida es 90°.

B) Recíprocamente, si tenemos un ángulo cuya medida es 90°, entonces tenemos un ángulo recto.

Por lo tanto, la reciproca de una buena definición siempre es verdadera (aunque los reciprocos de otras proposiciones no son necesariamente verdaderas).

En la actualidad, se usan muchas palabras en matemáticas que son dificiles de definir. Sólo pueden definirse en términos de otros conceptos igualmente indefinibles

Al usar un término indefinido, se supone que la palabra es tan elemental que todos conocen su significado.

A menudo, para "definir" palabras en los diccionarios, se debe recurrir a otras palabras, llamadas "sinónimos" que tienen el mismo (o casi el mismo) significado que la palabra en cuestión o bien a describir la misma.

1 3 PUNTOS Y RECTAS .--

En este texto usaremos 3 términos geométricos indefinidos.

Estos son: PUNTO, RECTA Y PLANO.

¿Qué es un punto?

Todos tenemos alguna idea del término, aunque podemos representar el punto con una minúscula marca en una hoja de papel o pizarrón, evidentemente esto no es un punto. Si fuera posible subdividir la marca y, a continuación, subdividir las marcas más pequeñas y asi sucesiva e indefinidamente, todavia no tendriamos un punto. Sin embargo nos acercariamos a una condición que la mayoria de nosotros le asigna a la de un punto.

Euclides intentó hacer esto, definiendo el punto como lo que tiene posición pero no tiene dimensión.

No obstante, las palabras "posición" y "dimensión" también son conceptos básicos y sólo pueden describirse usando términos indefinidos.

Un punto se denota por medio de una letra mayúscula escrita cerca de él, como el punto "A" de la figura 1.

FIGURA 1

También estamos familiarizados con las rectas, pero nadie ha visto una. Lo mismo que podemos representar el punto, al hacer una marca, podemos representar una recta moviendo la punta de un lápiz afilado sobre un trozo de papel. Así se producirá una aproximación de lo que se quiere dar a entender con la palabra "recta".

Euclides intentó definir la recta como lo que tiene sólo una dimensión. Aquí en su definición usó de nuevo la palabra indefinida "dimensión".

Nosotros en este texto a esa "dimensión" la llamaremos longitud, nótese que una recta es un conjunto de puntos, de lo anterior llegamos a la siguiente definición:

LINEA.- Es el conjunto de puntos que tiene una sola dimensión llamada longitud.

Si la dirección de estos puntos es constante, la línea será una línea recta.

La línea recta de la figura 2 se lee "recta $\overleftrightarrow{AB}$ ó bien la recta L".

En este libro, a menos que se establezca otra cosa, cuando se use el término "recta" se tendrá en mente el concepto de la línea recta.

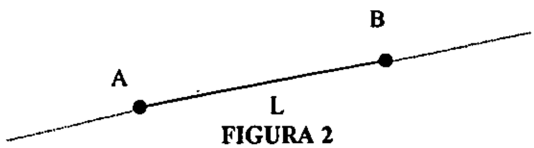


FIGURA 2

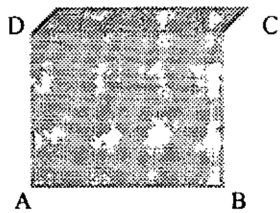
PLANOS.- Un plano puede imaginarse como un conjunto de puntos .

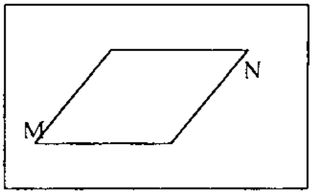
Podemos pensar en el plano constituido de un número infinito de puntos que forman una superficie que no tiene espesor pero que tiene longitud y anchura infinitos. La superficie de un pizarrón o la del tablero de una mesa es un ejemplo de una superficie plana.

Todo plano es indefinido, esto es, ha de suponerse prolongado indefinidamente, lo podemos suponer limitado y lo representamos por una porción rectangular de plano, cuya perspectiva se asemeja a un paralelogramo.

El sólido geométrico que se ve en la figura 3 tiene 6 caras las cuales son planas. Estas caras son subconjuntos de superficies planas o simplemente planos.

Un plano puede denotarse mediante 2 puntos o sólo un punto en el plano.





Plano MN o bien plano M

FIGURA 3

1.4 SISTEMA COORDENADO RECTANGULAR .--

Ahora se desarrollará un método para representar los puntos en un plano. El método es llamado de coordenadas rectangulares y se usan parejas de números. Considérense dos rectas perpendiculares cualesquiera X y Y que se intersectan en el punto O. Sean los puntos U y V sobre las rectas X y Y, respectivamente, tales que OU = OV = 1.

Dado un punto cualquiera en el plano de las rectas X y Y, sean L el pie de la perpendicular desde P a la recta X y M el pie de la perpendicular desde P a la recta Y. La coordenada de L sobre la recta X se llama coordenada X o abcisa del punto P. La coordenada de M sobre la recta Y se llama coordenada Y u ordenada del punto P. La coordenada X y la coordenada Y juntas se llaman coordenadas de P La correspondencia de los puntos con parejas ordenadas de números reales obtenidos en la forma descrita se llama sistema coordenado rectangular (o Cartesiano). La recta X se llama eje X, y la recta Y se llama eje Y del sistema. El punto de intersección O de los ejes se llama origen y el plano determinado por los ejes es el plano XY.

Las coordenadas de un punto en el plano es una pareja ordenada de números reales, en la cual el primer número es la coordenada X y el segundo es la coordenada Y.

Las coordenadas del punto P de la figura 4 son (3,2) las de L son (3,0) y las del M son (0,2).

Debe observarse que (3,2) y (2,3) representan puntos diferentes y que representan el mismo punto si y sólo si se tiene que para cualquier punto (a,b) = (c,d) entonces a = c y b = d.

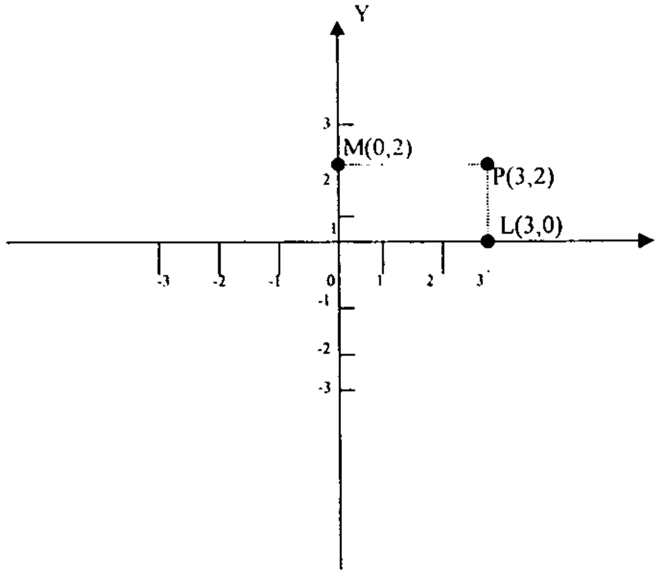


FIGURA 4

CUADRANTES.

Los ejes coordenados rectangulares dividen al plano en cuatro regiones, llamadas cuadrantes. Estos cuadrantes se enumeran I, II, III y IV, como se muestra en la figura 5.

El primer cuadrante o cuadrante I es el conjunto de todos los puntos para los cuales tanto su coordenada X como su coordenada Y son positivas.

El segundo cuadrante o cuadrante II es el conjunto de todos los puntos cuya coordenada X es negativa y la coordenada Y es positiva.

El tercer cuadrante o cuadrante III es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas X y Y son ambas negativas.

El cuarto cuadrante o cuadrante IV es el conjunto de todos los puntos para los cuales su coordenada X es positiva y su coordenada Y es negativa.

PUNTOS EN EL ESPACIO.

Ahora consideraremos la misma idea del sistema de coordenadas rectangulares pero aplicada a puntos en el espacio, esto es, un sistema de coordenadas para puntos en el espacio tridimensional.

Para visualizar una forma de establecer un sistema tridimensional de coordenadas cartesianas, piénsese en una mano derecha orientada en forma tal que el pulgar apunte hacia la derecha, el índice apunte hacia arriba y el anular hacia el corazón del lector, (figura 6).
Si ahora se piensa en un sistema de coordenadas en el espacio en el cual una primera recta dividida en segmentos, el eje X, está en la dirección en que el anular apunta el corazón, una segunda recta dividida en segmentos, el eje Y, apunta en la dirección del pulgar, y una tercera recta dividida en segmentos, el eje Z, apunta en la dirección del índice, se tiene un esquema mental de un sistema de coordenadas tridimensional.

Más formalmente, para establecer un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional tal, hay que elegir tres rectas naturalmente perpendiculares en el espacio, divididas en segmentos, que se corten en el punto O y numerar los segmentos, que deben ser de la misma longitud en las tres rectas, empezando desde el punto O. El punto O es entonces el origen y las rectas son los ejes de coordenadas. El primero, segundo y tercer ejes se asocian a las coordenadas X, Y ,y Z respectivamente, como se mencionó anteriormente.

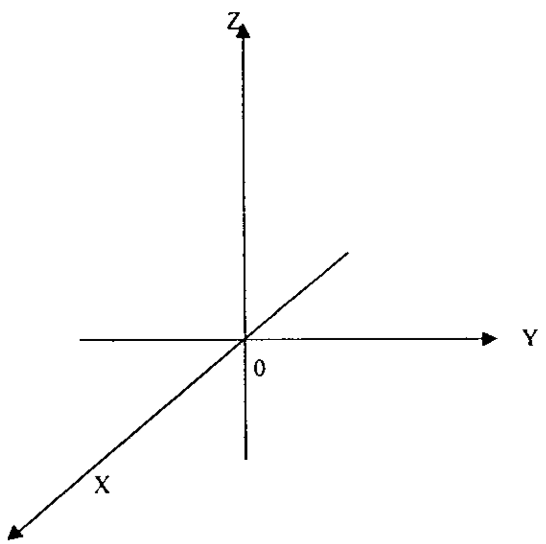


FIGURA 6

Los tres planos definidos por los ejes de coordenadas son los planos cartesianos. Al trazar un esquema de un sistema de coordenadas, se piensa normalmente que el plano que contiene a los ejes X y Y es horizontal (plano XY), se piensa que el plano que contiene a los ejes X y Z (plano XZ) y el plano que contiene a los ejes Y y Z (plano YZ) son verticales. El sistema de coordenadas se dibuja normalmente como si la visual se dirigiera hacia el origen, con la parte positiva del eje X apuntando hacia afuera de la página, la parte positiva del eje Y apuntando hacia la derecha y la parte positiva del eje Z apuntando hacia arriba, de modo que las partes negativas de los tres ejes están detrás de los planos coordenados. Para indicar esto, las partes negativas de los ejes se suelen representar mediante líneas punteadas, (figura 7).

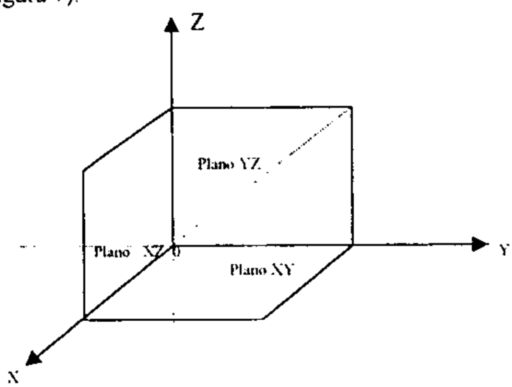


FIGURA 7

En un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional se ubica a un punto especificando las distancias dirigidas que separan al punto de los planos cartesianos, XY,YZ,XZ.

Por ejemplo los puntos G y H que aparecen en la figura 8 tienen las coordenadas (2, 3, 4) y (-1,-2,-3) respectivamente donde (2, 3, 4) y (-1,-2,-3) son las distancias dirigidas a los planos YZ, XZ y XY respectivamente. Se ve en la figura 8 que un punto en el espacio determina en forma única sus propias coordenadas y recíprocamente, que una terna ordenada de números determina en forma única a un punto en el espacio. Por lo tanto dos ternas ordenadas (a, b, c) y (x, y, z) corresponden al mismo punto si y sólo si son iguales, es decir si y sólo si a = x, b = y, c = z.

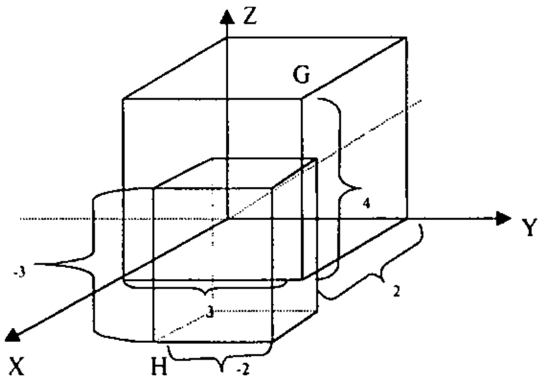


FIGURA 8

DEFINICION.- Un segmento rectilíneo o segmento es la parte de recta comprendida entre 2 puntos (figura 9).

FIGURA 9

$\overline{PQ}$ que se lee el segmento $\overline{PQ}$ comienza en P y termina en Q.

DEFINICION.-

Línea recta.- Es el lugar geométrico de los puntos que siguen la dirección del segmento rectilíneo, es infinita y no tiene extremos.

$\overleftrightarrow{PQ}$ se lee la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ (que pasa por los puntos P y Q y es única), (figura 10)

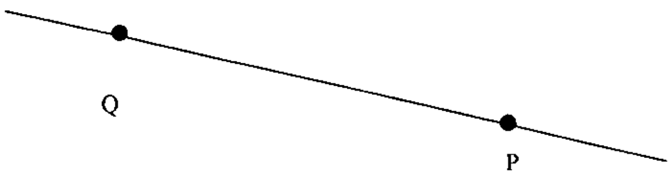


FIGURA 10

DEFINICION.-

Rayo.- Es el lugar geométrico de los puntos que parten de un punto fijo llamado origen en una dirección fija.

El rayo tiene extremo y es infinito hacia el otro lado del origen, (figura 11).

FIGURA 11

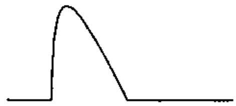
1.5 CLASIFICACION DE LAS LINEAS .--

Las líneas se clasifican en abiertas, cerradas y alabeadas.

ABIERTAS.- Son aquellas que no vuelven a pasar por un punto por donde ya pasaron.

Ejemplos de este tipo de líneas son:

ONDULADAS



MIXTAS

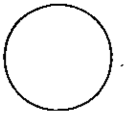
QUEBRADAS

ESPIRAL

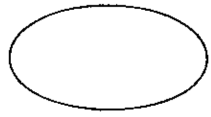
FIGURA 12

CERRADAS.- Es la curva que pasa por lo menos por un punto donde ya pasó. Hay cerradas simples y no simples.

Ejemplos de curvas cerradas simples son:



CIRCUNFERENCIA



ELIPSE

POLIGONOS CONVEXOS POLÍGONOS CONCÁVOS

FIGURA 13

CERRADAS NO SIMPLES

FIGURA 14

ALABEADAS.- Son las que no se pueden colocar completamente en un plano.

Ejemplo

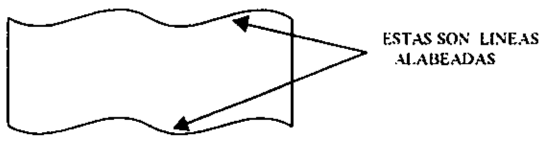


FIGURA 15

DEFINICION.- Axioma es toda proposición evidente que no requiere demostración.

A continuación se ilustraran algunos axiomas:

AXIOMA 1- Por dos puntos cualesquiera puede hacerse pasar una y sólo una recta, (figura 16).

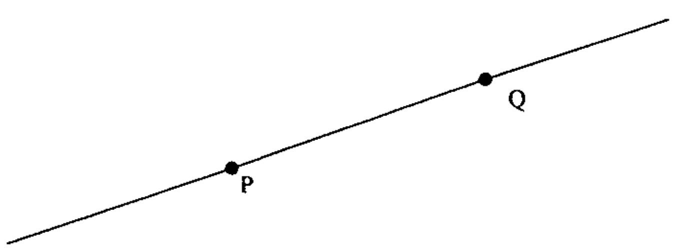


FIGURA 16

AXIOMA 2- Por un punto pueden pasar un número infinito de rectas, (figura 17).

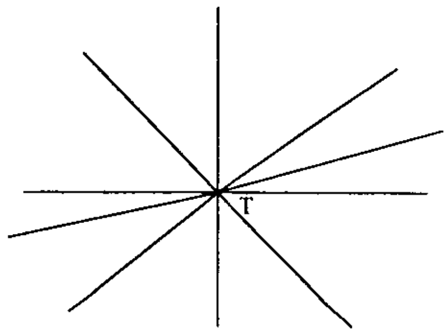


FIGURA 17

AXIOMA 3- De un punto parte una infinidad de rayos (figura 18).

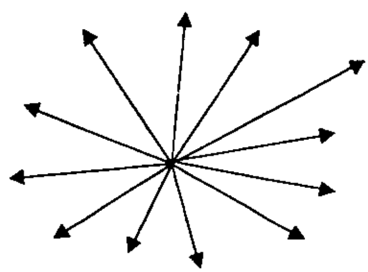


FIGURA 18

AXIOMA 4- Si dos puntos de una recta están sobre otra recta, ambas coinciden en toda su extensión. Esto es claro en base al axioma 1.

DEFINICION.- El lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta se le llama paralela a la primer recta, de otra manera si 2 rectas se encuentran en el mismo plano y su intersección es el vacío se dice que son rectas paralelas.

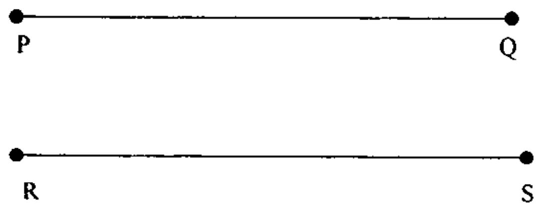
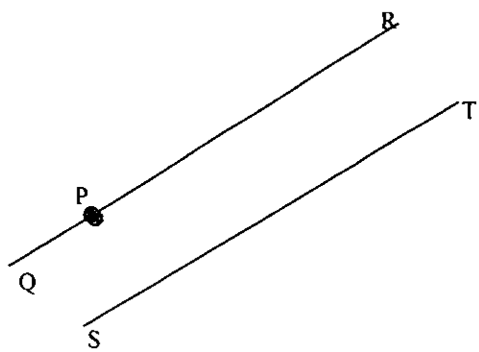


FIGURA 19

Luego entonces tenemos $\overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{RS} = \phi$

$$\therefore \quad \overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$$

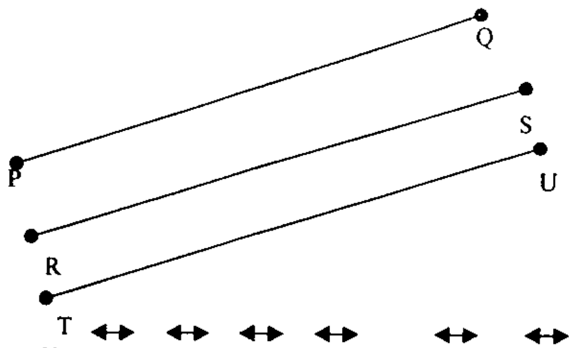
AXIOMA 5- Por un punto cualquiera exterior a una recta dada pasa una y sólo una paralela a ella (figura 20).



$$\overleftrightarrow{PR} \parallel \overleftrightarrow{ST}.$$

FIGURA 20

AXIOMA 6- Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre si (figura 21).



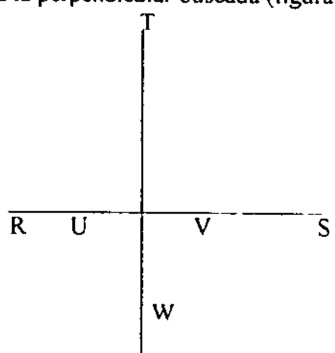
Si $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{TU}$ y $\overleftrightarrow{RS} \parallel \overleftrightarrow{TU}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$.

FIGURA 21

DEFINICION.- El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos fijos de una recta es una perpendicular a ella.

AXIOMA 7- Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una perpendicular a ella.

Sea $\overleftrightarrow{RS}$ la recta y T el punto exterior, tomando T como centro y un radio conveniente descríbanse 2 arcos que corten a la recta RS en U y V, con centro en U y V y con un radio conveniente descríbanse 2 arcos que se cortan en el punto W y trácese con regla una recta que pase por T y W la cual será la perpendicular buscada (figura 22).



$\therefore$ $\overleftrightarrow{RS} \perp \overleftrightarrow{TW}$.

FIGURA 22

AXIOMA 8- Por un punto de una recta se le puede trazar una perpendicular y sólo una.

Sea la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y el punto C dado, haciendo centro en C describanse dos arcos que corten a la recta AB en E y D ahora haciendo centro es en estos dos últimos puntos describanse arcos que se corten en F y G y trácese una recta que pasa por los puntos F, C y G la cual es la perpendicular buscada (figura 23).

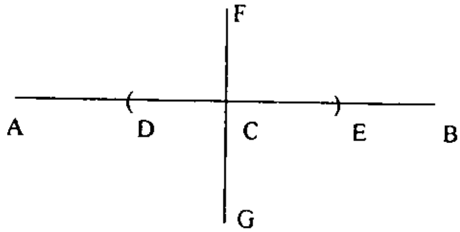


FIGURA 23

DEFINICION.- El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento de recta se llama Mediatriz de un segmento (figura 24).

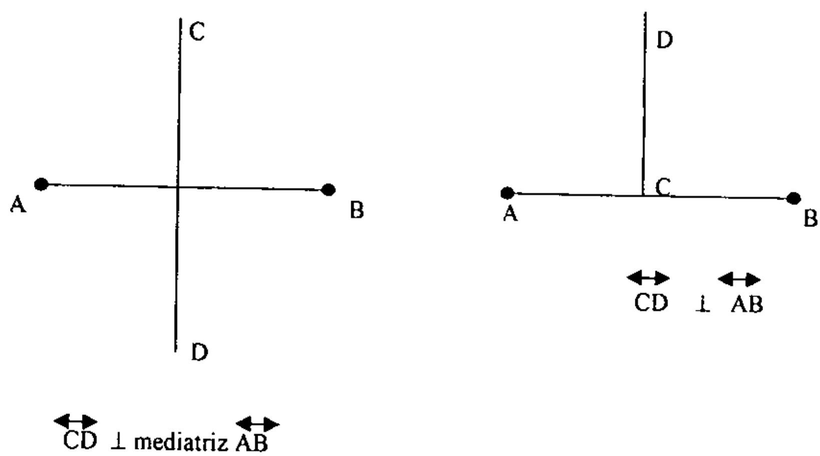
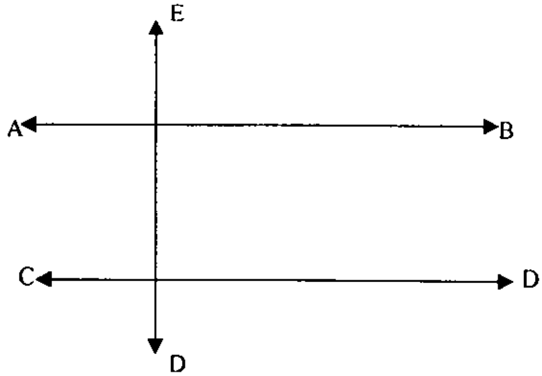


FIGURA 24

AXIOMA 9- Dos rectas situadas en un mismo plano y perpendiculares a una tercera son paralelas (figura 25).



Si $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{EF}$ y $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{EF}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$

FIGURA 25

Nota.- Toda pareja de rectas que no se cortan son paralelas, aquellas que si se cruzan se les llama Oblicuas (figura 26).

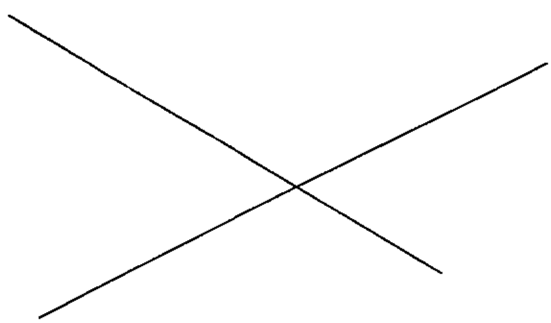


FIGURA 26

CAPITULO II.

ANGULOS.

2.1 Un ángulo es la unión de dos rayos que tienen el mismo punto extremo.

Los rayos se llaman lados del ángulo y su punto extremo común recibe el nombre de vértice del ángulo.

El símbolo para el ángulo es $\angle$; el plural es $\angle$s.

Existen tres formas para nombrar un ángulo:

1- Mediante 3 letras mayúsculas, de modo que la del medio corresponda al vértice y las otras dos, a puntos sobre los lados del ángulo como $\angle$ ABC (figura 27).

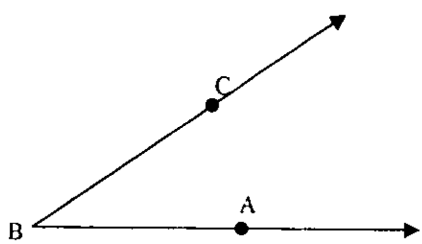


FIGURA 27

2- Mediante una sola letra mayúscula en el vértice si es evidente de que ángulo se trata, como el $\angle$ O (figura 28).

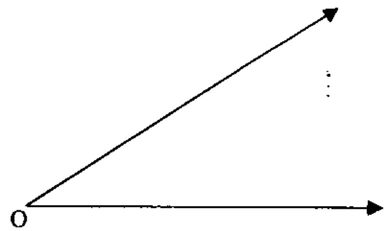


FIGURA 28

3- Por medio de una letra minúscula en el interior del ángulo, normalmente es una letra del alfabeto griego como $\angle \alpha$ (figura 29).

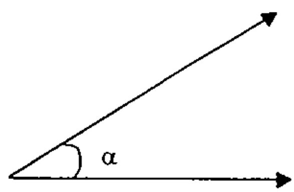


FIGURA 29

2.2 MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS.

Ahora necesitaremos expresar la magnitud de un ángulo en alguna forma.

La magnitud de un ángulo depende únicamente de la magnitud del movimiento necesario para llevar un lado, haciéndolo girar sobre el vértice, a la posición del otro. Este movimiento se llama rotación.

El estudiante debe notar que los lados de un ángulo son indefinidamente largos en dos direcciones. Esto se debe a que los lados de un ángulo son rayos, no segmentos. En la figura 30, $\angle$ AOD, $\angle$ BOE y $\angle$ COF todos se refieren al mismo ángulo $\angle$ O.

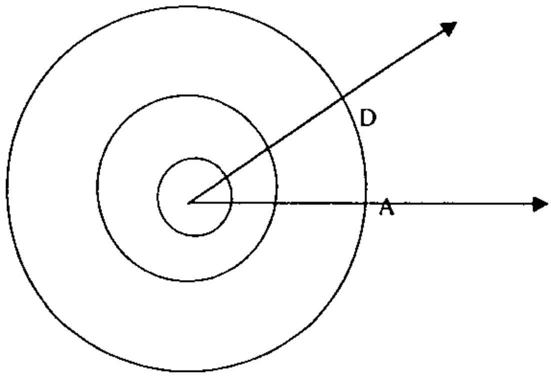


FIGURA 30

Para medir un ángulo existen dos sistemas, el sistema sexagésimal y el sistema ciclico, en el sistema sexagésimal, el ángulo unidad es el ángulo de un grado es decir, el ángulo que es la trescientos sesentava parte del arco de una circunferencia.

Para medir un ángulo en grados se usa el transportador.

En el sistema sexagésimal un grado es igual a 60 minutos, un minuto es igual a 60 segundos.

Para medir un ángulo cualquiera, se coloca el centro del transportador en el vértice del ángulo y el diámetro se hace coincidir con uno de los lados del ángulo.

Por lo tanto en la figura 31 se indican las medidas de ángulos como:

$m\angle AOB=20°$	$m\angle COD=36°$
$m\angle AOD=86°$	$m\angle DOF=64°$
$m\angle AOF=150°$	$m\angle BOE=90°$

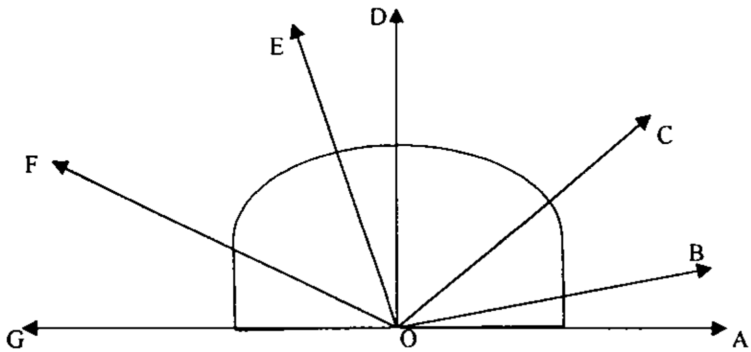


FIGURA 31

En el sistema cíclico el ángulo unidad, llamada unidad cíclica o unidad de medida circular (radián) es el ángulo central de una circunferencia cualquiera cuyos lados intersectan un arco de longitud igual a la del radio de la circunferencia (figura 32).

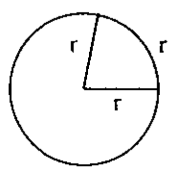


FIGURA 32

Unidad Ciclica expresada en grados.

Un radián es igual a $180° / \Pi \therefore 180° = \Pi$ radianes; la medida de un ángulo en radianes se acostumbra dar en función de Π.

Conversión a medidas cíclicas un ángulo expresado en grados.

Puesto que el ángulo de un grado es igual a Π / 180° de la unidad ciclica, para reducir a medida ciclica un ángulo expresado en grados, basta multiplicar la cantidad Π / 180° por el número de grados.

Ejemplos.

Dar en unidades ciclicas los siguientes ángulos expresados en grados:

$30° = 30° \times \Pi / 180° = 30° / 180° \Pi = \Pi / 6$ radianes.

$90° = 90° \times \Pi / 180° = 90° / 180° \Pi = \Pi / 2$ radianes.

$270° = 270° \times \Pi / 180° = 270° / 180° \Pi = 3 / 2 \Pi$ radianes.

Para expresar en grados un ángulo dado en medida ciclica bastará multiplicar su valor por 180° / Π.

Ejemplos:

$2 / 3 \Pi = 2 / 3 \Pi \times 180° / \Pi = 360° \Pi / 3 \Pi = 120° \Pi / \Pi = 120°$.

$3 / 4 \Pi = 3 / 4 \Pi \times 180° / \Pi = 540° \Pi / 4 \Pi = 135° \Pi / \Pi = 135°$.

CLASES DE ANGULOS POR SUS MEDIDAS.

Los ángulos por sus medidas reciben diferentes nombres:

Angulo Agudo.- Un ángulo es agudo si y sólo si tiene una medida menor que 90°.

Angulo Recto - Un ángulo es recto si y sólo si tiene una medida de 90°.
Es decir un ángulo es recto está formado por dos rayos perpendiculares y cuatro ángulos rectos son iguales a una vuelta completa a la circunferencia.

Angulo Obtuso.- Un ángulo es obtuso sí y sólo sí tiene una medida mayor de 90° pero menor de 180°.

Angulo Llano o de lados Colineales - Un ángulo es llano o de lados colineales sí y sólo si tiene una medida de 180°.

Angulo Entrante.- Un ángulo es entrante sí y sólo sí, su medida es mayor que 180° pero menor que 360°.

Angulo Perigono.- Un ángulo es perigono sí y sólo sí, su medida es igual a 360°.

En la figura 33 se ve la ubicación de las distintas clases de ángulos en el plano cartesiano.

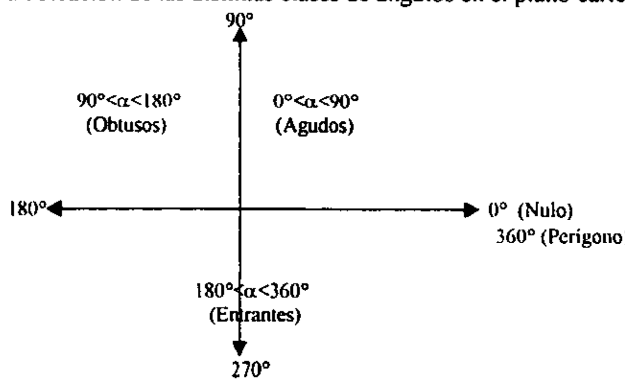


FIGURA 33

Los ángulos también se clasifican en:

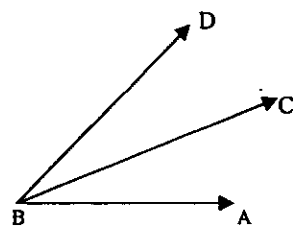
CONVEXOS: Son los ángulos agudos, rectos y obtusos.

CÓNCAVOS: Son los ángulos entrantes.

2.3 PAREJAS DE ANGULOS POR SU POSICION Y POR SU SUMA.

Angulos Coterminales.- Son aquellos que coinciden en su lado inicial y en su lado final.

Angulos Adyacentes.- Se dice que dos ángulos son adyacentes cuando tienen un mismo vértice y un lado común (figura 34).



$\angle$ABC y $\angle$ CBD son $\angle$s adyacentes.

FIGURA 34

Angulos Complementarios.- Son aquellos ángulos cuya suma de sus medidas es igual a un ángulo recto 90°(y en este caso cada uno de ellos es llamado el complemento del otro).

Angulos Suplementarios.- Son aquellos ángulos cuya suma de sus medidas es igual a dos ángulos rectos 180° (y en este caso, cada uno ellos es llamado el suplemento del otro).

En la figura 35 el $\angle$ BAD y $\angle$ BAB' son complementarios, y los suplementarios son el $\angle$BAC y el $\angle$ BAD.

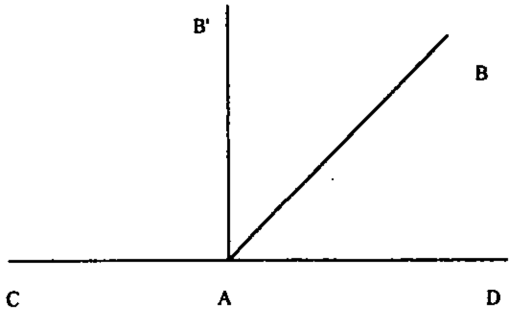


FIGURA 35

Angulos Conjugados.- Son aquellos ángulos cuya suma de sus medidas es igual a cuatro ángulos rectos 360° (y en este caso, cada uno de los ángulos es llamado el conjugado del otro).

Angulos opuestos por el vértice.- Dos ángulos son opuestos por el vértice cuando los lados del uno son las prolongaciones de los lados del otro (figura 36), $\angle$ m y $\angle$n son opuestos por el vértice.

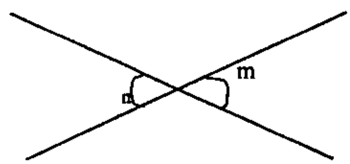


FIGURA 36

2.4 AXIOMA.- Es una proposición evidente por sí misma, cuya verdad se conoce con sólo oírla enunciar.

Por ejemplo:

El todo es igual a la suma de sus partes.

POSTULADO.- Es una proposición que admitimos como cierta.

TEOREMA.- Es una proposición que necesita ser demostrada.

Por ejemplo:

La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.

COROLARIO.- Es la consecuencia que se deduce de una demostración y cuya demostración requiere poco o ninguna deducción lógica.

2.5 PLANTEAMIENTO Y RESOLUCION DE PROBLEMAS.--

I) Nombrar un par de ángulos suplementarios en cada uno de los diagramas siguientes.

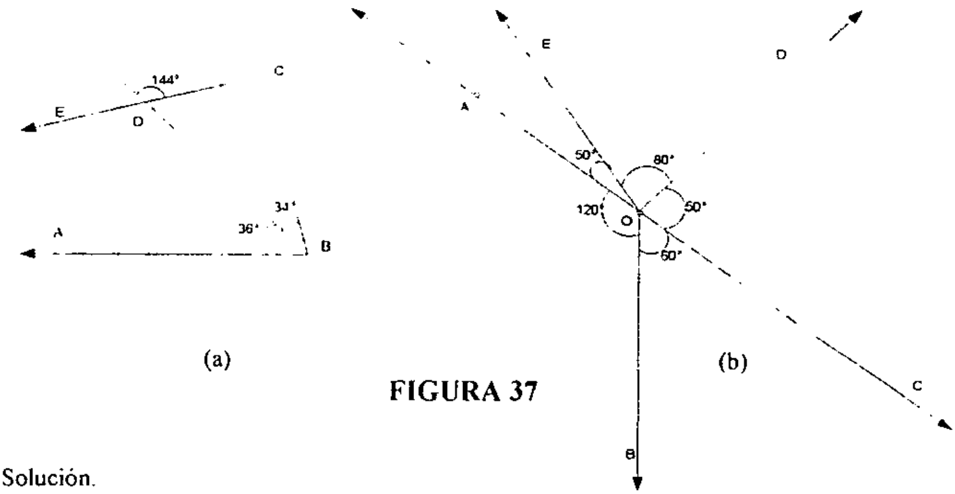


FIGURA 37

Solución.
En la figura 37 (a) debemos recordar que 2 ángulos son suplementarios si su suma es igual a dos ángulos rectos

$\therefore \ \angle CDF + \angle ABD = 144° + 36° = 180° = 2$ ángulos rectos.

$\therefore \ \angle CDF$ y $\angle ABD$ son ángulos suplementarios.
En la figura 37 (b)

$\angle BOC + \angle BOA = 180°$.

$\therefore \ \angle BOC$ y $\angle ABD$ son ángulos suplementarios.

II.- Encuentre la medida del complemento del ángulo cuya medida es:

A) $45°$ B) α

Solución.

A) $45° + X = 90°$

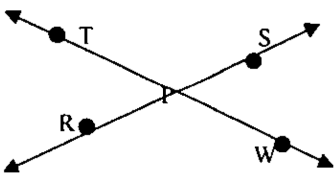
$X = 90° - 45°$

$\therefore\ X = 45°$

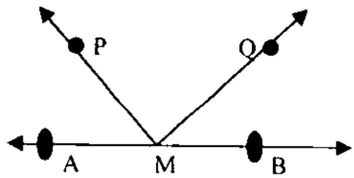
B) $\alpha + X = 90°$

$\therefore\ X = 90° - \alpha$

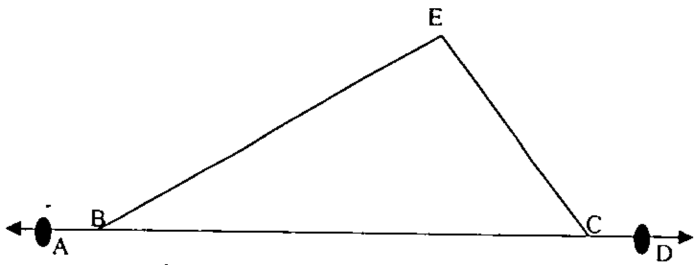
III.- Nombrar dos pares de ángulos adyacentes en cada una de las figuras siguientes



(a)



(b)



(c)

FIGURA 38

Solución:

a) En la figura 38 (a): $\angle$ RPW es adyacente al $\angle$ WPS

$\angle$ SPT es adyacente al $\angle$ TPR.

$\angle$ WPS es adyacente al $\angle$ SPT.

$\angle$ TPR es adyacente al $\angle$ RPW.

b) En la figura 38 (b):

$\angle$ BMQ es adyacente al $\angle$ QMP.

$\angle$ PMA es adyacente al $\angle$ AMB.

$\angle$ QMP es adyacente al $\angle$ PMA.

$\angle$ AMB es adyacente al $\angle$ BMQ.

c) En la figura 38 (c) los ángulos:

$\angle$ DCE es adyacente al $\angle$ ECB.

$\angle$ EBA es adyacente al $\angle$ ABC.

IV.- Encontrar dos ángulos conjugados tal que uno sea 24° mayor que la quinta parte del otro.

Solución:

Sean X e Y los ángulos buscados.

$\Rightarrow X + Y = 360°$

$Y = X / 5 + 24°$ entonces $X + X / 5 + 24° = 360°$

$\therefore\ 5X + X + 120° = 1800°$

$6X = 1800° - 120°$

$6X = 1680° \quad \Rightarrow \quad X = 280°$ (figura 39).

$\Rightarrow Y = 360° - 280° = 80°$.

$\therefore Y = 80°$.

CAPITULO III

TEOREMAS SOBRE ANGULOS.

3.1 CONCLUSIONES BASADAS EN OBSERVACIONES O MEDICIONES.--

Los matemáticos antiguos, con frecuencia, probaban la veracidad o bien la falsedad de una proposición mediante la observación directa o mediciones.

Aunque éste es un método importante para adquirir información, no siempre es digno de confianza.

Intentemos en el ejemplo siguiente, hacer cierta conclusión mediante el método de observación o medición.

Ejemplo-

Trazar dos rectas que se corten como en la figura 40.
Medir $\angle\alpha$ y $\angle\beta$, también medir $\angle\theta$ y $\angle\phi$.
Dar las conclusiones posibles acerca de los ángulos opuestos por el vértice.

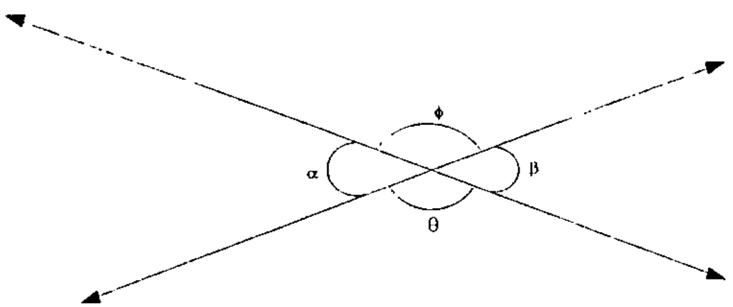


FIGURA 40

Pudiera establecerse que las parejas de ángulos no adyacentes formados cuando se intersectan dos rectas, tienen la misma medida.

Más adelante en este texto se probará que la conclusión anterior, de hecho, es verdad pero, hasta que la demostremos, sólo podemos establecer que parece cierta.

3.2 EL METODO INDUCTIVO DE RAZONAMIENTO -

En el ejemplo anterior el razonamiento que se usó para llegar a la conclusión se conoce como razonamiento inductivo. Se llega a una conclusión general, investigando cierto número de casos particulares. Este es el método de investigación. Con este método, se observa, se mide, se estudian las relaciones, se calcula y se sacan conclusiones. Tales conclusiones provisionales se llaman hipótesis. La hipótesis indica una proposición que posiblemente es cierta, de acuerdo con la observación de cierto número de casos.
Mientras más precisos sean los instrumentos de medición y más cuidadosas las mediciones y las observaciones, mayor es la probabilidad de que la hipótesis sea correcta.

3.3 EL METODO DEDUCTIVO DE RAZONAMIENTO -

El razonamiento inductivo se basa en la observación de una propiedad común específica, en un número limitado de casos y concluye que esta propiedad es general para todos los casos. Por lo tanto se procede de lo específico a lo general.
No obstante, una hipótesis puede cumplirse para varios miles de casos, y, entonces, fracasar en el siguiente. Nunca podemos estar absolutamente seguros de que las conclusiones basadas en el razonamiento inductivo son siempre verdaderas.

Un método más convincente y poderoso de sacar conclusiones es el llamado razonamiento deductivo. Cuando se razona deductivamente, se va de lo general a lo específico. Se empieza con un número limitado de hipótesis básicas generalmente aceptadas, y mediante un proceso de construcción de pasos lógicos se prueban otros hechos. Así, podemos confiar en estas hipótesis aceptadas y deducir hechos en una forma que nos permitirá, eventualmente, probar la conclusión deseada. Estos hechos que se demuestran se denominan teoremas.

Todo el razonamiento deductivo esta relacionado con la aceptación de la veracidad de cierta proposición (o proposiciones), llamada hipótesis. Esta hipótesis no necesita ser obvia para el estudiante, ni necesita ser un hecho generalmente aceptado, pero debe aceptarse para el propósito de probar un argumento particular.

Es necesario, para aspirar a la verdad de las conclusiones, que se considere cuidadosamente la verdad de las premisas básicas en las cuales se basan.

Tanto la inducción como la deducción son métodos valiosos de razonamiento en el estudio de la geometría.

3.4 PROPIEDADES DE LOS NUMEROS REALES -

El estudiante, en su primer curso de álgebra, aprendió algunos hechos básicos acerca del sistema de los números reales. Ya que se estarán utilizando en las demostraciones de los teoremas a lo largo de este texto, se presentan a continuación.

Se recomienda repasarlas completamente.

Al establecer los axiomas siguientes, las letras a, b, c y d, representarán números reales.

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD.

I-1- $a = a$ (propiedad reflexiva)

I-2- $a = b$ entonces $b = a$ (propiedad simétrica)

I-3- $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$ (propiedad transitiva)

I-4- Si $a = b$ y $c = d$ entonces $a + c = b + d$ (propiedad de la adición)

I-5- Si $a = b$ y $c = d$ entonces $a - c = b - d$ (propiedad de la sustracción)

I-6- Si $a = b$ y $c = d$ entonces $ac = bd$ (propiedad de la multiplicación)

I-7- Si $a = b$ y $c = d \neq 0$ entonces $a / c = b / d$ (propiedad de la división)

I-8- Cualquier expresión puede reemplazarse por una expresión equivalente en una ecuación sin cambiar el valor de verdad de la ecuación.

DEFINICION.- Se dice que $a > b$ si y sólo si $a - b > 0$. De modo semejante $a < b$ si y sólo si $b - a > 0$.

$a > b$ se lee a es mayor que b. y,

$a < b$ se lee a es menor que b.

NOTA: (El símbolo $\leq$ y $\geq$ se leen "menor o igual que" y "mayor o igual que" respectivamente).

PROPIEDADES DE ORDEN

O_1- Para todo par de números reales, a y b, es cierta una y sólo una de las proposiciones siguientes:

$a < b$

$a = b$ (PROPIEDAD DE TRICOTOMIA)

$a > b$

O_2- Si $a < b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$; (propiedad de la adición).

O_3- Si $a < b$ entonces $a - c < b - c$; (propiedad de la sustracción).

O_4- Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$; (propiedad de la multiplicación).

Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.

O_5- Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $a / c < b / c$ y $c / a > c / b$; (propiedad de la división).

Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $a / c > b / c$ y $c / a < c / b$.

O_6- Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$; (propiedad transitiva).

O_7- Cualquier expresión puede sustituirse por una expresión equivalente en una desigualdad, sin cambiar el valor de verdad de la desigualdad, (propiedad de sustitución).

O_8- Si $c = a + b$ y $b > 0$ entonces $c > a$; (propiedad de partición).

PROPIEDADES DE UN CAMPO

Las siguientes propiedades adicionales del sistema de los números reales se llaman "propiedades de campo".

Operaciones de Adición.

C_1.- $a + b$ es número real (propiedad de cerradura).

C_2.- $(a + b) + c = a + (b + c)$ (propiedad asociativa).

C_3.- $a + b = b + a$ (propiedad conmutativa).

C_4.- Existe un número real 0, el elemento neutro aditivo tal que
$a + 0 = 0 + a = a$ (propiedad del neutro aditivo).

C_5.- Para todo número real a, existe un número real (-a), el inverso aditivo de a, tal que
$a + (-a) = (-a) + a = 0$ (propiedad del inverso aditivo).

Operaciones de Multiplicación.

C_6.- $a \times b$ es número real (propiedad de cerradura).

C_7.- $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (propiedad asociativa).

C_8.- $(a \times b) = (b \times a)$ (propiedad conmutativa).

C_9.- Existe un número real $1 \neq 0$, el elemento neutro multiplicativo, tal que
$a \times 1 = 1 \times a = a$ (propiedad del neutro multiplicativo).

C_{10}.- Para todo número real a, $(a \neq 0)$ existe un número real $1 / a$, el inverso multiplicativo de a tal que $a\ (1/a) = (1/a) \times a = 1$ (propiedad del inverso multiplicativo).

C_{11}.- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (propiedad distributiva).

3.4 POSTULADOS INICIALES.--

En este curso, estamos interesados en determinar y probar los hechos geométricos. Se han definido con la ayuda de los conceptos geométricos indefinidos, otros conceptos y términos geométricos.

Para esto supondremos ciertas propiedades que pueden asignarse a las figuras geométricas.

Estas propiedades las llamaremos postulados y están definidos como en la sección 2.4.

A continuación enumeraremos una serie de postulados iniciales con los cuales iniciaremos nuestro "tratamiento formal" de la geometría.

POSTULADO 1- Una recta contiene por lo menos dos puntos; un plano contiene por lo menos tres puntos no todos colineales.

POSTULADO 2- Para cada dos puntos distintos, existe una y sólo una recta que los contiene a ambos puntos.

Nótese que este postulado establece 2 cosas, en ocasiones llamadas existencia y unicidad:

a) Existe una recta que contiene a los 2 puntos dados.

b) Esta recta es única; es decir, es la única que contiene a los dos puntos.

POSTULADO 3- Para cada tres puntos distintos no colineales, existe uno y sólo un plano que contiene a los tres.

POSTULADO 4- Si un plano contiene dos puntos de una línea recta, entonces todos los puntos de la recta son puntos del plano.

POSTULADO 5- Si dos planos distintos se intersectan, su intersección es una y sólo una recta.

Con estos postulados podemos empezar a demostrar algunos teoremas. Aunque no daremos una demostración formal, estos primeros teoremas establecerán lo que a la mayoría de nosotros parecerá intuitivamente obvio.

TEOREMA 1- Si dos rectas distintas en un plano se intersectan entonces su intersección es cuando más, un punto.

Argumento de apoyo-

Sean l y m dos rectas distintas que se intersectan en el punto S, (figura 41). Entonces las rectas l y m se intersectan en más de un punto o no se intersectan en más de un punto, (por la ley del tercero excluido la cual afirma que "p o no p" como una proposición lógica). Si se intersectan en más de un punto, tales como R y S, entonces la recta l y la recta m deben ser la misma recta (Postulado 2). Esto contradice las condiciones dadas de que l y m son rectas distintas. Por lo tanto, aplicando la regla para negar la alternativa, las rectas l y m se intersectan en, cuando más un punto.

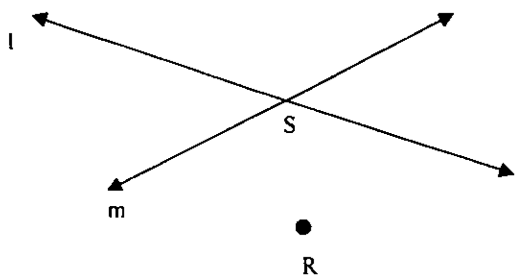


FIGURA 41

TEOREMA 2- Si un punto P se encuentra fuera de una recta l, uno y sólo un plano contiene a la recta y al punto.

Argumento de Apoyo.-

Por el postulado 1, la recta l contiene por lo menos dos puntos diferentes, digamos A y B (figura 42). Supuesto que P es un punto que no se encuentra sobre l, se tienen tres puntos distintos no colineales, A, B y P.
Entonces, el postulado 3 asegura la existencia y la unicidad de un plano M que pasa por la recta l y el punto P.

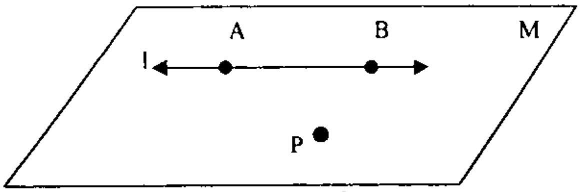


FIGURA 42

TEOREMA 3- Si dos rectas distintas se intersectan, existe uno y sólo un plano que contiene a ambas rectas.

Argumento de Apoyo.-
Sea Q el punto donde se intersectan las rectas l y m.
El postulado 1 garantiza que una recta debe contener por lo menos dos puntos; por lo tanto, debe existir otro punto sobre l y otro punto sobre m. Denominaremos estos puntos por R y P, respectivamente. El postulado 3 nos dice que existe exactamente un plano que contiene a los puntos Q, R y P, (figura 43). También, por el postulado 4, se sabe que tanto la recta l como la recta m deben estar en este plano.

Resumiendo un plano se determina por:

1- Tres puntos no colineales.

2- Una recta y un punto que no esté sobre la recta.

3- Dos rectas que se intersectan.

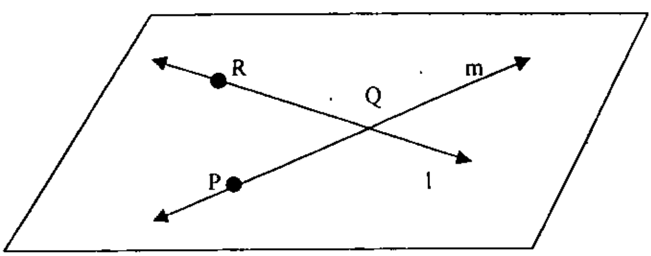


FIGURA 43

A continuación se darán 2 definiciones y varios postulados que nos servirán en nuestras posteriores demostraciones ya formales de nuestros teoremas

DEFINICION- Angulos congruentes. Segmentos congruentes.

Un concepto común en la vida diaria es el de tamaño y tamaños comparativos. Frecuentemente hablamos de dos cosas que tienen el mismo tamaño. En geometría se usa la palabra "congruente" para definir lo que intuitivamente decimos que "tienen la misma forma y mismo tamaño". Se puede pensar en figuras congruentes como si una fuera el duplicado de la otra.

DEFINICION- El rayo bisector o la bisectriz de un ángulo es el rayo cuyo punto extremo es el vértice del ángulo, y el cual divide al ángulo en dos ángulos congruentes.

Por ejemplo.- 2 ángulos son congruentes si tienen la misma medida. 2 segmentos se dice que son congruentes si y sólo si m $\overline{AB}$ = m $\overline{CD}$, (figura 44).

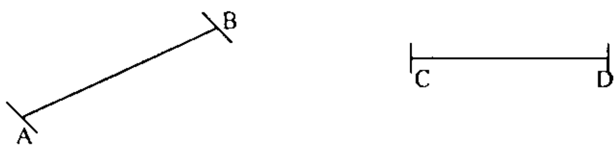


FIGURA 44

Los símbolos que hemos usado hasta ahora para expresar la igualdad de las medidas de segmentos y de ángulos es un tanto cuanto inadecuada. Para superar esto los matemáticos han inventado un símbolo nuevo para la "congruencia". El símbolo para "es congruente a" es $\cong$. Así, las proposiciones siguientes son equivalentes.

m $\overline{AB}$ = m $\overline{CD}$ $\qquad$ AB $\cong$ CD.

m $\angle$ ABC = m $\angle$ RST $\qquad$ $\angle$ ABC $\cong$ $\angle$ RST.

POSTULADO 6- (El postulado de la regla)

Los puntos en una recta pueden ponerse en una correspondencia biunivoca con los números reales en tal forma qué:

a) A cada punto de la recta le corresponde uno y sólo un número real.

b) A cada número real le corresponde uno y sólo un punto de la recta.

c) La distancia entre dos puntos sobre una recta sea el valor absoluto de la diferencia entre los números correspondientes.

POSTULADO 7- A cada par de puntos distintos le corresponde un número positivo el cual se llama distancia entre los puntos.

La correspondencia entre los puntos sobre una recta y los números reales se llama sistema coordenado para la recta. El número correspondiente a un punto dado se llama coordenada del punto. En la figura 45, la coordenada de A es -4, de B es -3, de C es 0, de E es 2 y asi sucesivamente.

FIGURA 45

POSTULADO 8- Para cualesquiera tres puntos colineales, uno y sólo uno está entre los otros dos. Esto es, si A, B y C son puntos colineales (distintos), entonces una y sólo una de las proposiciones siguientes es verdadera:

a) A se encuentra entre B y C;

b) B se encuentra entre A y C;

c) C se encuentra entre A y B.

POSTULADO 9- Si A y B son 2 puntos distintos, existe por lo menos un punto $C \in AB$ Este, en efecto, está afirmando que todo segmento rectilineo tiene por lo menos 3 puntos.

POSTULADO 10- Si A y B son dos puntos distintos, existe por lo menos un punto D tal que $\overline{AB} \subset \overline{AD}$.

POSTULADO 11- Para todo $\overrightarrow{AB}$ y todo número positivo n, existe uno y sólo un punto P de $\overrightarrow{AB}$ tal que m $\overrightarrow{AB}$= n. Este se llama postulado de la situación de los puntos.

POSTULADO 12.- Si $\overrightarrow{AB}$ es un rayo sobre la arista del semiplano h, entonces para todo n entre 0° y 360° existe exactamente un rayo $\overrightarrow{AP}$ con P en h tal que m $\angle$ PAB = n. Este se llama postulado de la construcción de los ángulos.

POSTULADO 13- (Postulado de la Adición de los Segmentos). Un conjunto de puntos que se encuentran entre los puntos extremos de un segmento rectilineo divide al segmento en un conjunto de segmentos consecutivos, la suma de cuyas longitudes es igual a la longitud del segmento dado. Así en la figura 46, si A, B, C, D son colineales, entonces m $\overline{AB}$ + m $\overline{BC}$ + m $\overline{CD}$ = m $\overline{AD}$. Aplicando la propiedad simétrica de la igualdad, también podria escribirse m $\overline{AD}$ = m $\overline{AB}$ + m $\overline{BC}$ + m $\overline{CD}$.

Con frecuencia se establece este postulado diciendo "el todo es igual a la suma de sus partes".

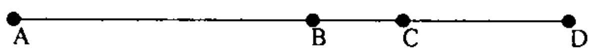


FIGURA 46

POSTULADO 14- (Postulado de la Adición de los Angulos).
En un plano dado, los rayos que parten del vértice de un ángulo y que pasan por un conjunto de puntos en el interior del ángulo, dividen al ángulo en ángulos consecutivos, la suma de cuyas medidas es igual a la medida del ángulo dado. Así en la figura 47 si D y E se encuentran en el interior de $\angle$ ABC entonces m $\angle$ ABD + + m $\angle$ DBE + m $\angle$ EBC = m $\angle$ ABC. Aplicando la propiedad simétrica de la igualdad, también podria escribirse m $\angle$ ABC = m $\angle$ ABD + m $\angle$ DBE + m $\angle$ EBC. Esto también se establece diciendo "la medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes".

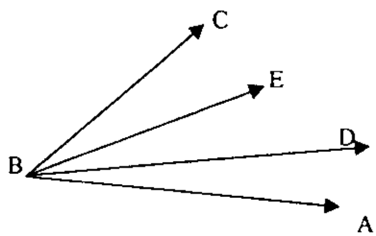


FIGURA 47

POSTULADO 15- Un segmento tiene uno y sólo un punto medio.

POSTULADO 16- Un ángulo tiene una y sólo una bisectriz.

3.5 DEMOSTRACIONES FORMALES DE LOS TEOREMAS.

Un teorema es una proposición o principio que se acepta sólo después de que se ha probado mediante el razonamiento. Todo teorema en geometría consiste en dos partes: una parte que establece lo que se da o se conoce, llamada "dato" o "hipótesis" y una parte que debe probarse, llamada "conclusión" o "tesis".

Los teoremas pueden escribirse de 2 formas:

a) Como una oración compleja.

En esta forma, la hipótesis es una cláusula que empieza con "si" o "cuando", y la conclusión es una cláusula que empieza con "entonces".

Por ejemplo en el teorema, "Si dos ángulos son ángulos rectos, entonces los ángulos son congruentes", "dos ángulos son rectos" es la hipótesis y "los ángulos son congruentes" es la conclusión o tesis.

b) Como una oración declarativa:

En esta forma, la hipótesis y la tesis no son tan evidentes.

Por ejemplo el teorema anterior se podria escribir "dos ángulos rectos son congruentes".

La forma más sencilla para determinar la hipótesis y la tesis es reescribirlo en la forma si-entonces.

La demostración formal de un teorema consta de cinco partes:

1- El enunciado del teorema.

2- Una figura general que ilustre el teorema.

3- Una afirmación de lo que es el dato en términos de la figura.

4- Una afirmación de lo que debe probarse en términos de la figura.

5- Una serie lógica de proposiciones establecidas mediante definiciones y postulados aceptados, y teoremas probados con anterioridad.

Aunque no es necesario presentar las demostraciones en esta forma metódica, ya que éstas se podrian dar en forma concluyente de párrafo, el estudiante que inicia el estudio de la geometria encontrará que poniendo las proposiciones en otra columna adjunta, será más fácil para los demás, asi como para sí mismo, seguir su linea de razonamiento.

PARTES DE UNA DEMOSTRACION:

Antes de empezar a demostrar cualquier teorema conviene fijarse en los siguientes puntos:

a) Conocer lo mejor posible los axiomas, postulados, definiciones y teoremas demostrados con anterioridad.

b) Leer el teorema tantas veces como sea necesario hasta estar seguro de comprender éste.

c) Escribir la hipótesis y la tesis.

Trazar lo mejor posible la figura señalando en ella los elementos del teorema (dibujar trazos auxiliares si los hay).

El método de demostración a seguir depende del teorema por demostrar.

La mayoria de los teoremas en este texto, de aqui en adelante, se probarán formalmente

Ahora probaremos formalmente algunos teoremas.

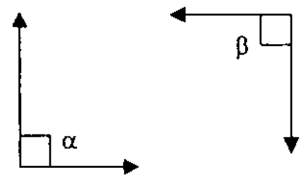
TEOREMA 1- Todos los ángulos rectos son congruentes.

Hipótesis

$\angle \alpha$ y $\angle \beta$ son ángulos rectos.

Tesis

$\angle \alpha \cong \angle \beta$.



TEOREMA 1

Demostración

Proposiciones.	Razones.
1- $\angle$ a es un ángulo recto $\angle$ b es un ángulo recto	1- Hipótesis.
2- m $\angle$ a = 90°; m $\angle$ b = 90°	2- La medida de un ángulo recto es 90°.
3- m $\angle$ a = m$\angle$ b	3- Si a = c, b = c, entonces a = b.
4- $\therefore \angle$ a $\cong \angle$ b	4- $\angle$ a $\cong$ $\angle$b si y sólo si m $\angle$a = m $\angle$ b.

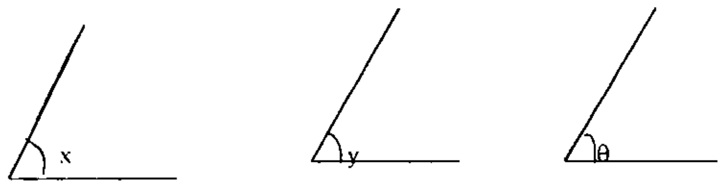
TEOREMA 2- Los ángulos complementarios del mismo ángulo son ángulos congruentes.

Hipótesis

$\angle x$ y $\angle \theta$ son ángulos complementarios.
$\angle y$ y $\angle \theta$ son ángulos complementarios.

Tesis

$\angle x \cong \angle y$.



Demostración

Proposiciones	Razones
1.- $\angle x$ y $\angle \theta$ son ángulos complementarios $\angle y$ y $\angle \theta$ son ángulos complementarios	1.- Hipótesis.
2.- $m \angle x + m \angle \theta = 90°$ $m \angle y + m \angle \theta = 90°$	2- Si dos ángulos son complementarios, la suma de sus medidas es igual a 90°.
3- $m \angle x + m \angle \theta = m \angle y + m \angle \theta$	3- Si $a = c$, $b = c$ entonces $a = b$.
4- $m \angle x = m \angle y$	4- Propiedad substractiva de la igualdad.
5- $\therefore \angle x \cong \angle y$	5- $\angle x \cong \angle y$ sí y sólo si $m \angle x = m \angle y$.

Un corolario de un teorema geométrico es otro teorema que se deducen fácilmente a partir del teorema dado.

COROLARIO AL TEOREMA 2- Los complementos de ángulos congruentes son congruentes.

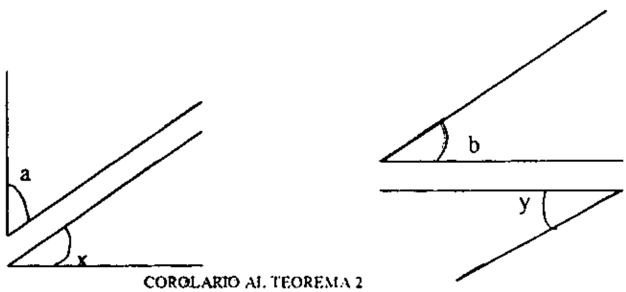
Hipótesis

$\angle$ x es el complemento del $\angle$ a
$\angle$ y es el complemento del $\angle$ b.
$\angle a \cong \angle b$.

Tesis

$\angle x \cong \angle y$.

Demostración:



COROLARIO AL TEOREMA 2

Proposiciones.	Razones.
1- $\angle$ x es el complemento de $\angle$ a $\angle$ y es el complemento de $\angle$ b	1- Hipótesis.
2- $\angle a \cong \angle b$	2- Hipótesis.
3- $m\angle a = m\angle b$	3- $\angle a \cong \angle b$ si $m\angle a = m\angle b$.
4- $m\angle x + m\angle a = 90°$ $m\angle y + m\angle b = 90°$	4- Dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es 90°.
5- $m\angle x + m\angle b = 90°$	5- Una cantidad puede sustituirse

por su igual en una ecuación

6- $\angle x$ es el complemento de $\angle b$ — 6- Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90°, son complementarios.

7- $\angle x \cong \angle y$ — 7- Los complementos del mismo ángulo son congruentes.

El estudiante probará fácilmente los siguientes teoremas:

TEOREMA 3- Todos los ángulos de lados colineales son ángulos congruentes.

TEOREMA 4- Los suplementos del mismo ángulo son ángulos congruentes.

COROLARIO AL TEOREMA 4- Los suplementos de ángulos congruentes son ángulos congruentes.

TEOREMA 5- Los ángulos opuestos por el vértice son ángulos congruentes.

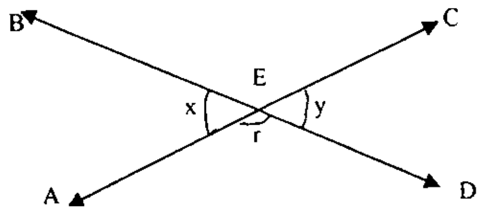
Hipótesis.

$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son líneas que se intersectan en E, formando los ángulos opuestos por el vértice $\angle x$ y $\angle y$.

Tesis

$\angle x \cong \angle y$.

Demostración



Teorema 5

Demostración

Proposiciones.	Razones.
1- $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son líneas rectas	1- Hipótesis.
2- $\angle$ CED y $\angle$ABE son ángulos de lados colineales	2- Definición de ángulo de lados colineales
3- $\angle x$ y $\angle r$ son ángulos suplementarios ya que, $m\angle x + m\angle r = 180°$	3- Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180° los ángulos son suplementarios
4- $m\angle y + m\angle r = 180°$	4- Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180° los ángulos son suplementarios.
5- $m\angle x = m\angle y$	5- Propiedad substractiva de la igualdad.
6- $\angle x \cong \angle y$	6- $\angle x \cong \angle y \Leftrightarrow m\angle x = m\angle y$.

Antes de continuar con las demostraciones formales de los teoremas vamos a analizar los ángulos que se forman con una recta transversal y 2 rectas cualesquiera, (figura 48).

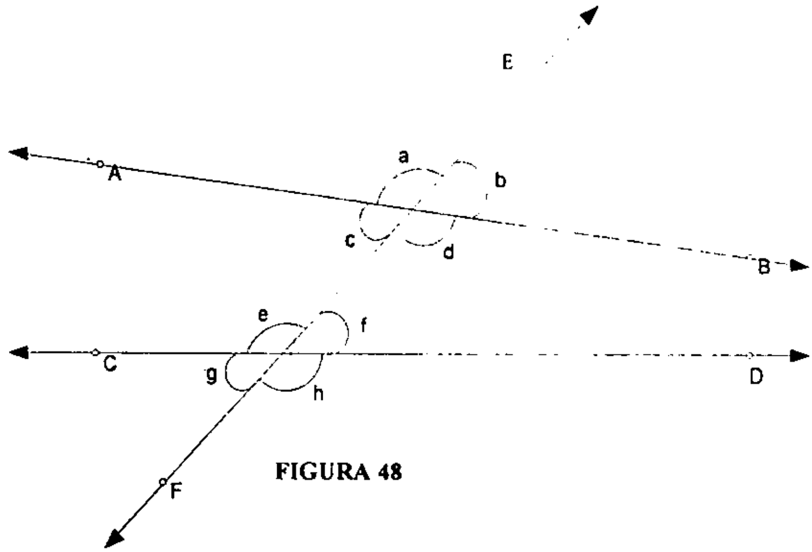


FIGURA 48

Si $\overleftrightarrow{EF}$ corta a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ se formaran los siguientes ángulos:

a, b, g y h los cuales son ángulos externos.

c, d, e y f los cuales son ángulos internos.

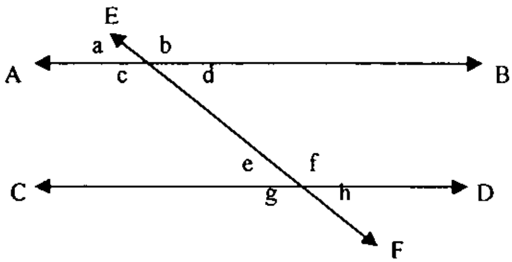
a y h, b y g son ángulos alternos externos (por pares).

c y f, d y e son ángulos alternos internos (por pares).

a y e, c y g, b y f, d y h son ángulos correspondientes (por pares).

a y g , c y e, b y h, d y f son ángulos colaterales (por pares).

Ahora veamos que sucede con los ángulos formados por una recta transversal y 2 rectas paralelas (figura 49).



$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

FIGURA 49

$\angle a = \angle d = \angle e = \angle h$ (obtusos).

$\angle b = \angle c = \angle f = \angle g$ (agudos).

De los 8 ángulos se observa que 4 son ángulos agudos e iguales entre si y 4 son obtusos e iguales entre si, por lo tanto:

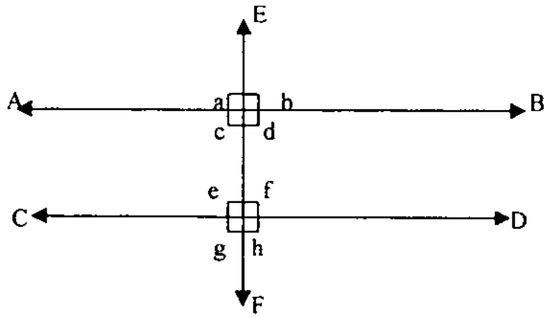
a y h, b y g son ángulos alternos externos y $\angle a = \angle h$ y $\angle b = \angle g$. Por lo tanto los ángulos alternos externos son diferentes.

c y f, d y e son ángulos alternos internos y $\angle c = \angle f$ y $\angle d = \angle e$. Por lo tanto los ángulos alternos internos son diferentes.

$\angle a$ y $\angle e$, $\angle c$ y $\angle g$, $\angle b$ y $\angle f$;y $\angle d$ y $\angle h$ son ángulos correspondientes y $\angle a = \angle e$, $\angle c = \angle g$, $\angle b = \angle f$ y $\angle d = \angle h$. Por lo tanto los ángulos correspondientes son diferentes.

a y g, c y e, b y h,d y f ; $\angle a + \angle g = 180°$, $\angle c + \angle e = 180°$, $\angle b + \angle h = 180°$, $\angle c + \angle e = 180°$, $\angle d + \angle f = 180°$, por lo tanto los ángulos coterminales suplementarios son diferentes.

Nótese que si la transversal es perpendicular a las paralelas entonces los 8 ángulos son iguales (figura 50)



$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

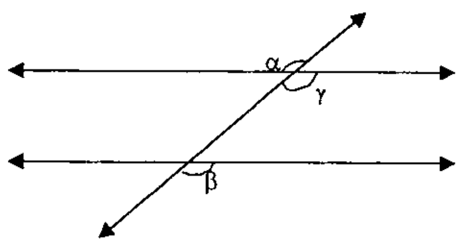
$\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

$\therefore \angle a = \angle b = \angle c = \angle d = \angle e = \angle f = \angle g = \angle h = 90°$.

$\therefore$ los 8 ángulos son iguales.

FIGURA 50

TEOREMA 6- En dos rectas paralelas cortadas por una transversal, los ángulos alternos externos son iguales.



Teorema 6

Hipótesis.

Los $\angle a$ y $\angle b$ son ángulos alternos externos.

$\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son paralelas.

Tesis.

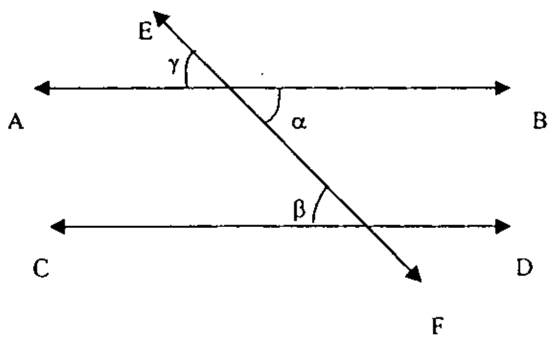
$\angle \alpha = \angle \beta$.

Demostración

Proposiciones.	Razones.
1- $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	1- Hipótesis.
2- $\angle \alpha = \angle \gamma$	2- Por teorema 5 (opuestos por el vértice).
3- $\angle \gamma = \angle \beta$	3- Por ser ángulos correspondientes.
4- $\angle \alpha = \angle \beta$	4- Si $a = c$ y $b = c \Rightarrow a = b$. Propiedad transitiva de la igualdad.

$\therefore \angle \alpha = \angle \beta$.

TEOREMA 7- En dos rectas paralelas cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son iguales.



Teorema 7

Hipótesis.

$\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son paralelas.

$\angle \alpha$ y $\angle \beta$ son ángulos alternos internos.

Tesis

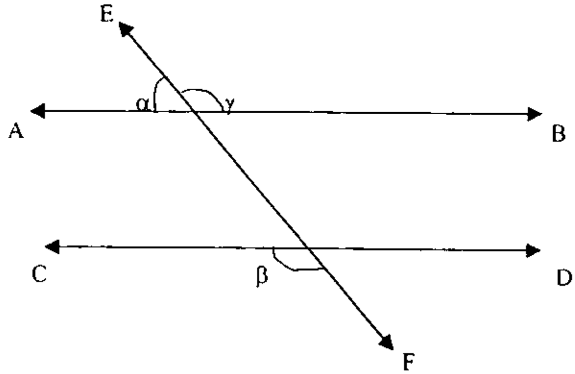
$\angle \alpha = \angle \beta$.

Demostración

Proposiciones.	Razones
1- $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son ángulos alternos internos	1- Hipótesis
2- $\angle \alpha = \angle\gamma$	2- Por teorema 5 (opuestos por el vértice).
3- $\angle\gamma = \angle \beta$	3- Por ser ángulos correspondientes.
4- $\angle \alpha = \angle\beta$	4- Propiedad transitiva de la igualdad.

$\therefore \angle \alpha = \angle \beta$.

TEOREMA 8- En dos rectas paralelas cortadas por una transversal, los ángulos colaterales externos son suplementarios.



Teorema 8

Hipótesis.

$\angle \alpha$ y $\angle \beta$ son $\angle$s colaterales.

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

Tesis.

$\angle \alpha + \angle \beta = 180°$.

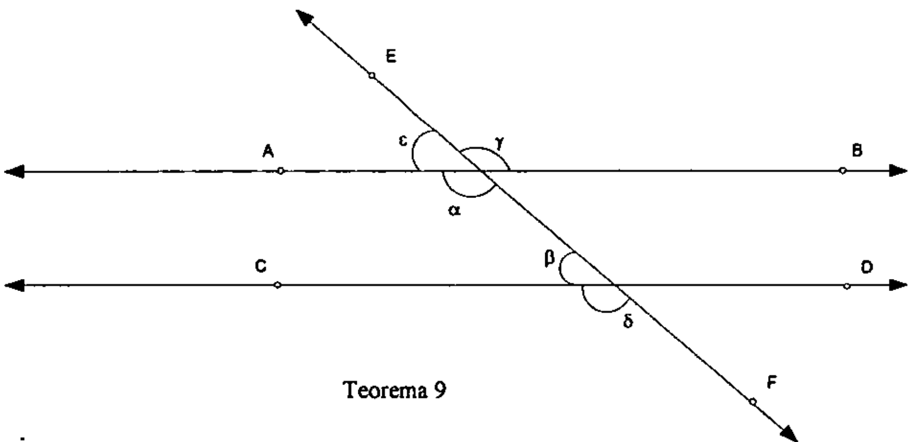
Demostración.

Proposiciones.	Razones
1.- AB // CD $\angle \alpha$ y $\angle \beta$ son $\angle$s colaterales	1- Hipótesis.
2- $\angle \gamma = \angle \beta$	2- Por teorema 6 (son alternos externos).
3- $\angle \alpha + \angle \gamma = 180°$	3- Propiedad de ángulos suplementarios.
4- $\angle \alpha + \angle \gamma = \angle \alpha + \angle \beta = 180°$	4- Toda cantidad se puede sustituir por si misma

5- $\angle\alpha + \angle\beta = 180°$ 5-Por proposición 4.

6- $\therefore \angle\alpha$ y $\angle\beta$ son ángulos suplementarios.

TEOREMA 9- En dos rectas paralelas cortadas por una transversal, los ángulos colaterales internos son suplementarios.



Teorema 9

Hipótesis.

$\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son ángulos colaterales internos.

$\overleftrightarrow{AB}$ es paralela a $\overleftrightarrow{CD}$.

Tesis.

$\angle\alpha + \angle\beta = 180°$.

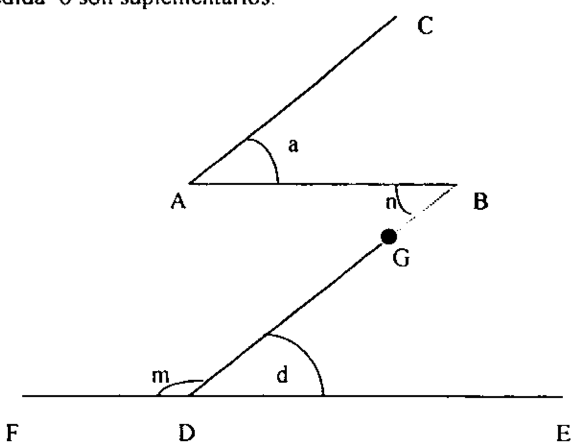
Demostración.

Proposiciones.	Razones.
1- $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son ángulos colaterales internos	1- Hipótesis.

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

2- $\angle\alpha + \angle\varepsilon = 180°$	2- Por ser ángulos suplementarios.
3- $\angle\alpha = \angle\gamma$	3- Por teorema 5 (opuestos por el vértice).
4- $\angle\gamma = \angle\delta$	4- Por teorema 6 (por ser alternos externos).
5- $\angle\alpha = \angle\delta$	5- Propiedad transitiva de la igualdad.
6- $\angle\beta + \angle\delta = \angle\alpha + \angle\varepsilon = 180°$	6- Por ser ángulos suplementarios.
7- $\angle\beta + \angle\delta = \angle\delta + \angle\varepsilon = 180°$	7- Por ser ángulos suplementarios.
8- $\therefore\ \angle\alpha + \angle\beta = 180°$	8- Ya que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (hipótesis).

TEOREMA 10- Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos tienen la misma medida o son suplementarios.



Teorema 10

1ra Hipótesis.

Sean los ángulos a y d que tienen los lados respectivamente paralelos y dirigidos en un mismo sentido: el lado $\overrightarrow{AC}$ paralelo a $\overrightarrow{DG}$, y $\overrightarrow{AB}$ paralelo a $\overrightarrow{DE}$.

Tesis.

$\angle a = \angle d$.

Demostración.

Proposiciones.	Razones.
1- Si prolongamos $\overrightarrow{DG}$ hasta que se encuentre con B $\overrightarrow{DB} \parallel \overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{AB}$	1- Hipótesis.
2- $\angle d = \angle n$	2- Por teorema 7 (alternos internos).
3- $\angle n = \angle a$	3- Por teorema 7 (alternos internos).
4- $\angle a = \angle d$	4- Propiedad transitiva de la igualdad.

2da Hipótesis.

Sean los ángulos a y m que tienen el lado $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{DG}$ y $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DF}$.

Tesis.

$\angle a + \angle m = 180°$.

Demostración

Proposiciones.	Razones
1- $\angle d + \angle m = 180°$	1- Por ser suplementarios

2- $\angle d = \angle a$	2- Primera parte de Teorema 10
3- $\angle a + \angle m = \angle d + \angle m = 180°$	3- Toda cantidad puede ser sustituida por si misma.
4- $\therefore \angle a + \angle m = 180°$	4- Propiedad transitiva de la igualdad.

3.6 SOLUCION DE PROBLEMAS

En esta sección resolveremos algunos problemas en los cuales calcularemos el valor de los ángulos.

a) En la siguiente figura calcule el valor de los ángulos $\angle\alpha$, $\angle\beta$, y $\angle\gamma$ (figura 51).

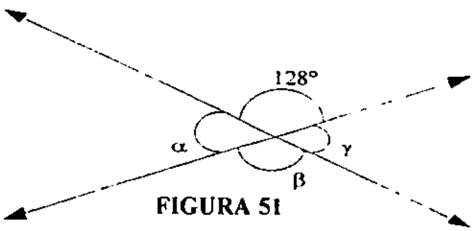


FIGURA 51

Solución.

$\angle\alpha = \angle\gamma$ por ser opuestos por el vértice.

$\angle\beta = 128°$ por ser opuestos por el vértice.

$\angle\alpha + 128° = 180°$
$\angle\alpha = 180° - 128°$

$$\boxed{\therefore \angle\alpha = 52° = \angle\gamma.}$$

b) En la figura 52 calcule el valor de x, $\angle\alpha$ y $\angle\beta$.

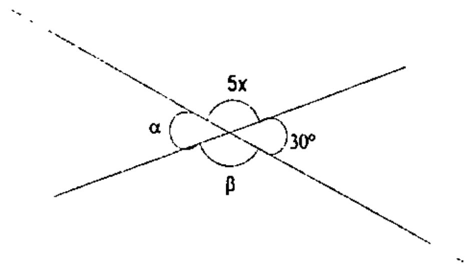


FIGURA 52

Solución.

$\angle\alpha = 30°$ por ser opuestos por el vértice.

$\angle\beta = 5x$ por ser opuestos por el vértice.

$\angle\alpha + \angle\beta = 180°$ por ser opuestos por el vértice.

$30° + \angle\beta = 180°$

$\angle\beta = 180° - 30°$

$$\boxed{\therefore\ \angle\beta = 150°}$$

$150° = 5x$

$x = 150° / 5$

$$\boxed{x = 30°}$$

c) En la figura 53 calcule los ángulos que se piden sabiendo que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

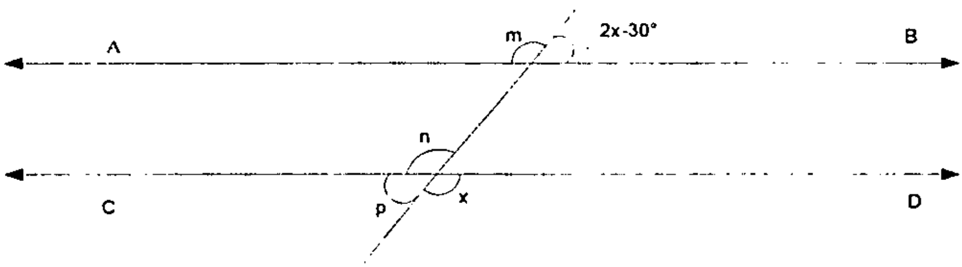


FIGURA 53

Solución.

$2x - 30° + x = 180°$ por ser colaterales externos.
$3x - 30° = 180°$
$3x = 210°$

$$\boxed{x = 70°}$$

$\angle n = \angle x = 70°$ por ser opuestos por el vértice.

$\angle p + 70° = 180°$ por ser suplementarios.
$\angle p = 180° - 70°$
$\angle p = 110°$

$2x - 30° + \angle m = 180°$ por ser suplementarios.
$2(70°) - 30° + \angle m = 180°$
$140° - 30° + \angle m = 180°$
$110° + \angle m = 180°$
$\angle m = 180° - 110°$

$$\therefore \boxed{\angle m = 70°}$$

$2x - 30° + \angle m = 180°$ por ser ángulos suplementarios.

$\Rightarrow 2x-30° = 180° - 70°$

$\therefore \boxed{2x - 30° = 110°}$

d) En la figura 54 calcule los ángulos que se piden:

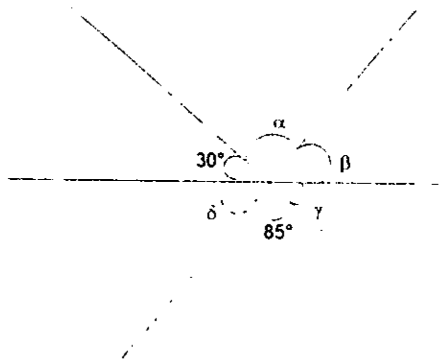


FIGURA 54

Solución.

$\boxed{\begin{array}{l} \angle \alpha = 85° \\ \angle \gamma = 30° \end{array}}$

$\angle \alpha = 85°$ por ser opuesto por el vértice.

$\angle \gamma = 30°$ por ser opuesto por el vértice.

$\angle\beta + \angle\gamma + 85° = 180°$ por formar ángulo llano.

$\angle\beta + 30° + 85° = 180°$

$\angle\beta = 180° - 85° - 30°$

$\angle\beta = 180° - 115°$

$\therefore \quad \boxed{\angle \beta = 65°}$

$\angle \beta = \angle \delta$ por ser opuestos por el vértice.

$\therefore \quad \boxed{\angle \delta = 65°}$

CAPITULO IV

TRIANGULOS.

DEFINICION.- Triángulo es el espacio (interior) limitado por tres rectas que se cortan (figura 55).

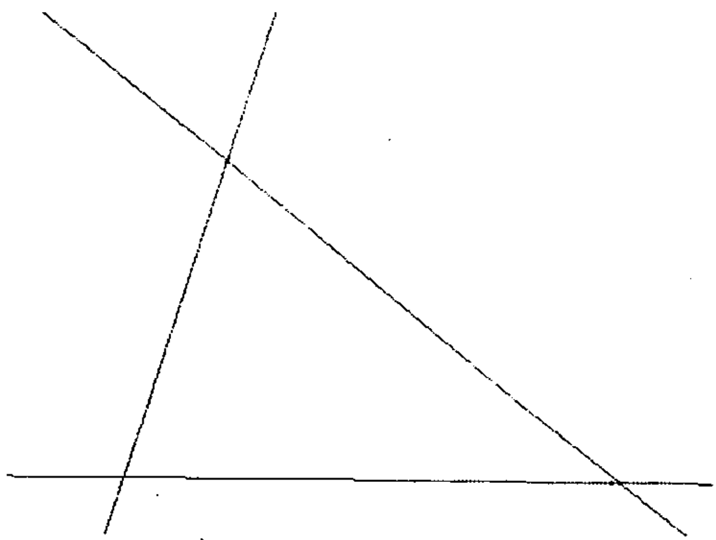


FIGURA 55

Los puntos donde se cortan las líneas se llaman vértices, los segmentos que unen los vértices se llaman lados y los ángulos que forman los lados son los ángulos interiores del triángulo o simplemente ángulos del mismo (figura 56).

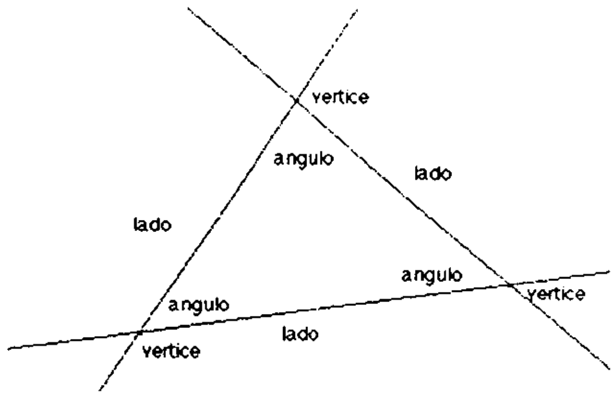


FIGURA 56

ANGULOS EXTERIORES DE UN TRIANGULO

Son los ángulos formados por un lado y la prolongación de otro, (figura 57)

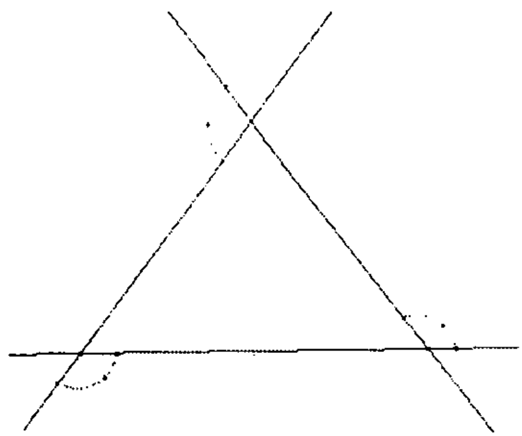


FIGURA 57

BASE.- Es un lado cualquiera del triángulo, en general se llama base al lado sobre el cual se supone que descansa el triángulo (figura 58).

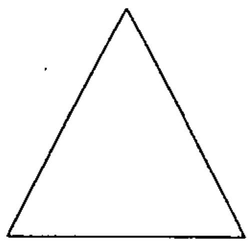


FIGURA 58

4.1 CLASIFICACION DE LOS TRIANGULOS.--

Los triángulos en general se clasifican de dos maneras

a) Por la longitud de sus lados.

b) Por la medida de sus ángulos.

a) Por la longitud de sus lados se clasifican en:

Equilátero.- Es el triángulo que tiene sus 3 lados de la misma longitud, (figura 59).

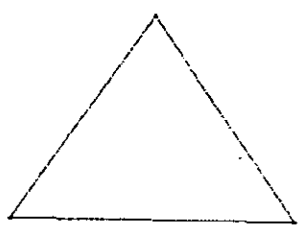


FIGURA 59

Isósceles.- Es el triángulo que tiene dos lados de la misma longitud y el tercer lado desigual a los otros dos, (figura 60)

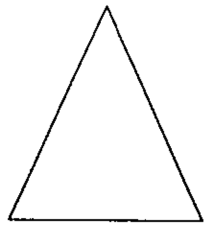


FIGURA 60

Escaleno.- Es el triángulo en el cual la longitud de sus tres lados es distinta entre si, (figura 61).

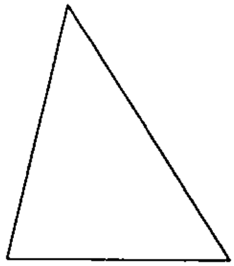


FIGURA 61

b) Por la medida de sus ángulos.
Acutángulo.- Es aquel triángulo que sus tres ángulos interiores son agudos, (figura 62).

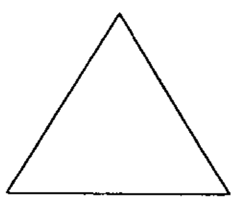


FIGURA 62

Rectángulo.- Es aquel triángulo que tiene un ángulo cuya medida es 90° es decir que tiene un ángulo recto, (figura 63).

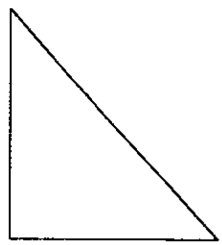


FIGURA 63

Obtusángulo.- Es aquel triángulo que tiene un ángulo cuya medida es mayor de 90° es decir que tiene un ángulo obtuso, (figura 64)

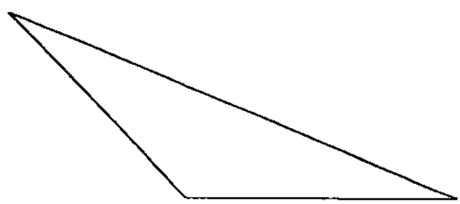


FIGURA 64

4.2 RECTAS NOTABLES DE UN TRIANGULO.--

Altura.- Es el segmento de perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto, (figura 65).

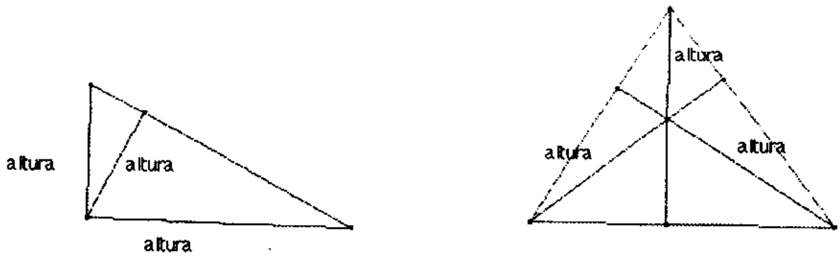


FIGURA 65

Mediana.- Es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto, (figura 66).

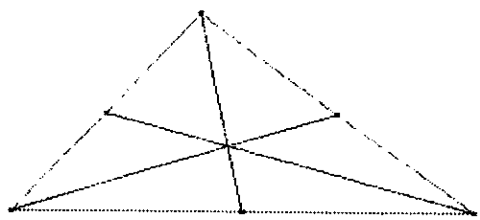


FIGURA 66

Mediatriz.- Es el segmento de recta perpendicular a un lado en su punto medio, (figura 67).

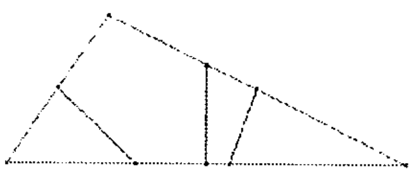


FIGURA 67

Bisectriz.- La bisectriz de un ángulo es el rayo que divide en dos ángulos de la misma medida a un ángulo del triángulo (sea interior o exterior), (figura 68).

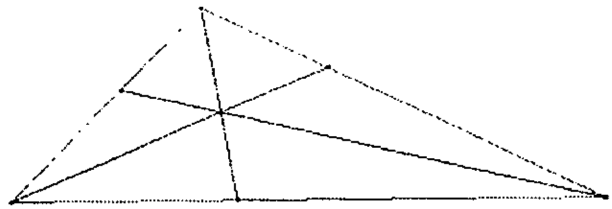


FIGURA 68

Todo triángulo tiene 3 alturas, 3 medianas, 3 mediatrices y 3 bisectrices de los ángulos interiores.

Las tres alturas de un triángulo concurren en un punto que recibe el nombre de ortocentro, (figura 69).

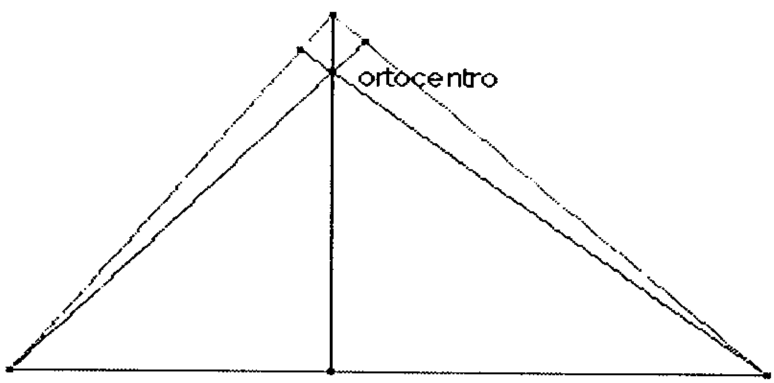


FIGURA 69

Las tres medianas de un triángulo concurren en punto que recibe el nombre de baricentro o gravicentro que es el centro de gravedad del triángulo, (figura 70).

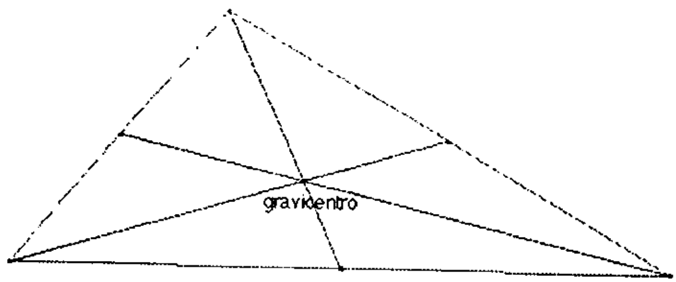


FIGURA 70

Las tres mediatrices de los lados de un triángulo concurren en un punto que es el centro de una circunferencia que pasa por los tres vértices. Este punto se llama circuncentro y tiene la propiedad de equidistar de los 3 vértices del triángulo, (figura 71).

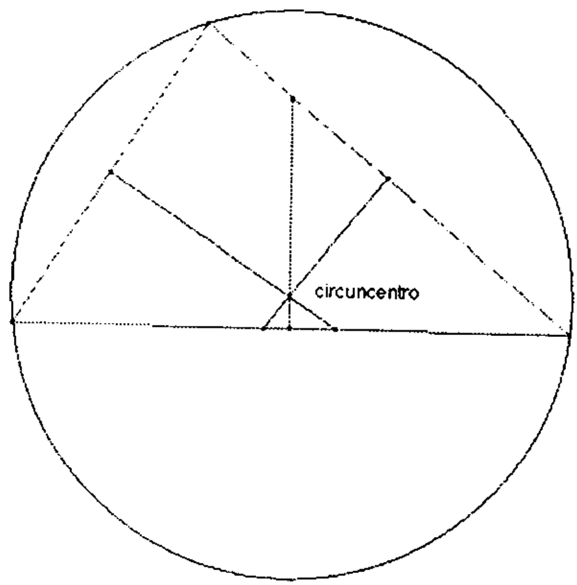


FIGURA 71

Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo concurren en un punto, este punto notable de la figura equidista de los tres lados del triángulo y se llama incentro, por ser centro de una circunferencia interior al triángulo y tangente a los lados del mismo, dicha circunferencia se dice que esta inscrita al triángulo, (figura 72).

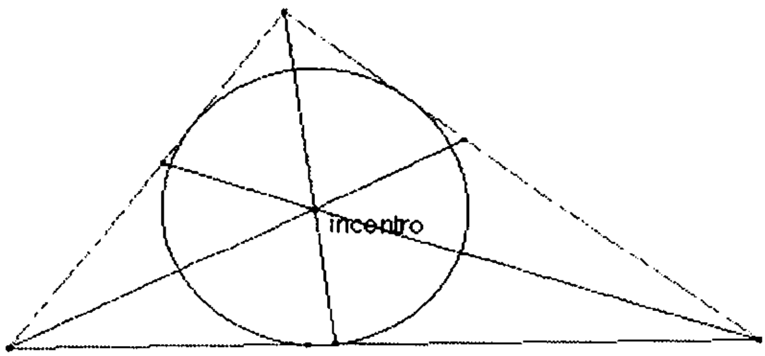


FIGURA 72

Cada dos bisectrices de los ángulos exteriores se cortan en un punto, a estos puntos se les llama exincentros y son centros de circunferencias llamadas exinscritas al triángulo, cada una de ellas es tangente a un lado y a la prolongación de los otros dos, (figura 73).

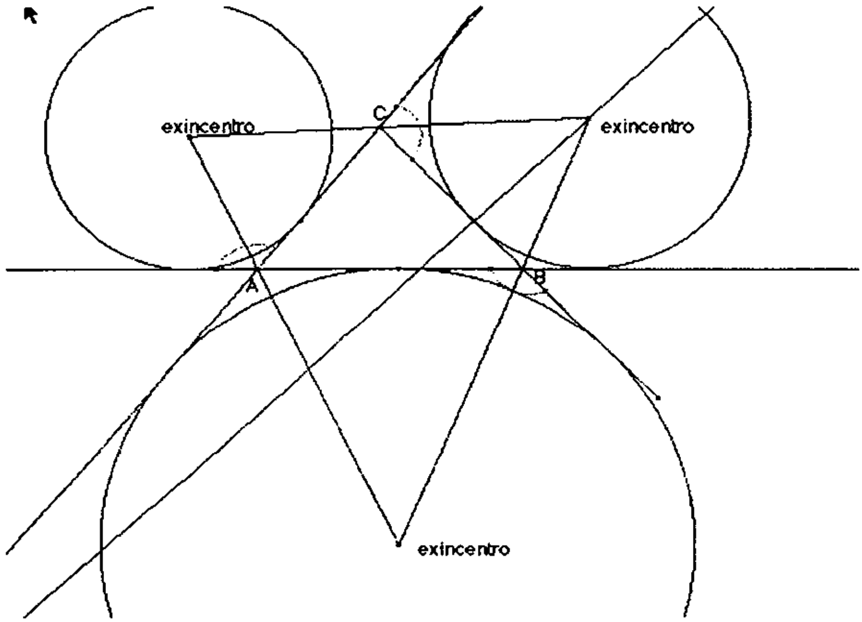


FIGURA 73

En todo triángulo el baricentro, circuncentro y el ortocentro estan alineados es decir estos puntos son colineales formando la llamada recta de Euler, (figura 74).

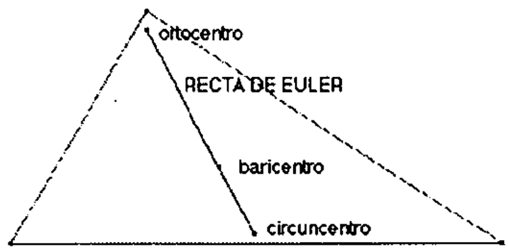


FIGURA 74

POSTULADO 17- Por un punto dado, que no esté en una recta dada, se puede hacer pasar cuando más una paralela a la recta dada.

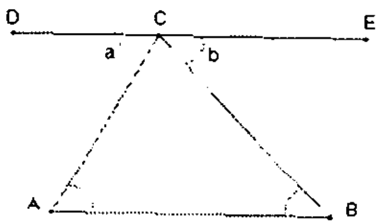
TEOREMA 11- La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es 180°.

Hipótesis.

ABC es un triángulo cualquiera.

Tesis.

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$.



Teorema 11

Demostración
Teorema 11

Proposiciones.	Razones
1- ABC es un triángulo cualquiera	1- Hipótesis.
2- Por C trazar DE // AB	2- Por Postulado 17.
3- $m\angle a = m\angle A$; $m\angle b = m\angle B$	3- Por Teorema 7.
4- $m\angle DCE = m\angle a + m\angle ACE$	4- Por Postulado 14.
5- $m\angle ACE = m\angle ACB + m\angle b$	5- Por Postulado 14.
6- $m\angle DCE = m\angle a + m\angle ACB + m\angle b$	6- Propiedad de sustitución de la igualdad.
7- $m\angle DCE = m\angle A + m\angle ACB + m\angle B$	7- Propiedad de sustitución de la igualdad.
8- $m\angle DCE = 180°$	8- Definición de ángulo

de lados colineales.

9- $\therefore$ m $\angle$ A + m $\angle$ ACB + m $\angle$ B = 180°	9- Propiedad transitiva de la igualdad

COROLARIO A: La medida de cualquiera de los ángulos externos de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los 2 ángulos internos no adyacentes (fig. 75).

Hipótesis.

$\angle$ CBE es un ángulo externo de ΔABC.

Tesis.

m $\angle$ CBE = m $\angle$ C + m $\angle$ A.

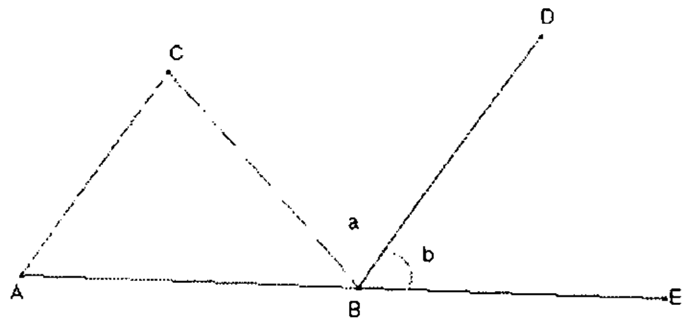


FIGURA 75

Demostración

Proposiciones.	Razones.
1- Trazar BD // AC	1- Por Postulado 17
2- m $\angle$ a = m $\angle$ C	2- Por Teorema 7
3- m $\angle$ b = m $\angle$ A	3- Por ser ángulos correspondientes
4- m $\angle$ CBE = m $\angle$ a + m $\angle$ b	4- Por Postulado 14.
5- $\therefore$ m $\angle$ CBE = m $\angle$ C + m $\angle$ A	5- Propiedad de sustitución de la igualdad.

COROLARIO B.- Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, (figura 76).

Hipótesis.

Sea ΔABC un triángulo rectángulo cualquiera y sea m $\angle$ A = 90°.

Tesis.

m $\angle$ B + m $\angle$ C = 90°.

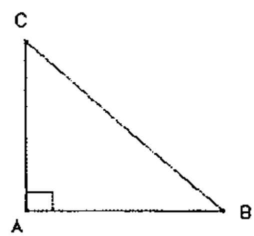


FIGURA 76

Demostración

Proposiciones.	Razones
1- $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$	1- Por Teorema 11.
2- $m\angle A = 90°$	2- Hipótesis.
3- $90° + m\angle B + m\angle C = 180°$	3- Toda cantidad se puede sustituir por si misma.
4- $m\angle B + m\angle C = 180° - 90°$	4- Propiedad sustractiva de la igualdad.
5- $m\angle B + m\angle C = 90°$.	

COROLARIO C.- La medida de los ángulos exteriores de un triángulo suman 360°, (figura 77).

Hipótesis.

Sea ΔABC un triángulo cualquiera y sean $\angle a$, $\angle b$, $\angle g$ ángulos exteriores del mismo triángulo.

Tesis.

$m\angle a + m\angle b + m\angle g = 360°$.

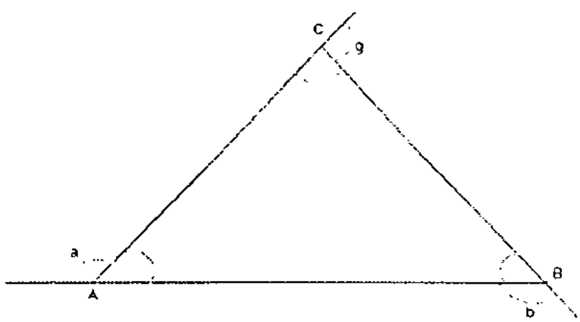


FIGURA 77

Demostración

Proposiciones.	Razones
1- $m\angle a = m\angle B + m\angle C$ $m\angle b = m\angle C + m\angle A$ $m\angle g = m\angle A + m\angle B$	1-Por corolario A del Teorema 11.
2- $m\angle a + m\angle b + m\angle g = 2m\angle A + 2m\angle B + 2m\angle C$	2- Propiedad de la adición.
3- $m\angle a+m\angle b+m\angle g=2m\angle A+2m\angle B+2m\angle C$	3- POSTULADO 14.
4- $m\angle a+m\angle b+m\angle g=2(m\angle A+m\angle B+m\angle C)$	4- Propiedad distributiva.
5- $m\angle A+m\angle B+m\angle C=180°$	5- Por Teorema 11.
6- $m\angle a+m\angle b+m\angle g=2(180°)$	6-Toda cantidad se puede sustituir por sí misma
7- $\therefore$ $m\angle a+m\angle b+m\angle g=360°$	L.C.Q.D.

4.3 CONGRUENCIA

En la sección 3.4 hablamos acerca de la congruencia de ángulos y de segmentos.

En esta sección hablaremos de la congruencia de figuras geométricas.

Definición – Dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma y tamaño.

Las figuras congruentes pueden hacerse coincidir parte por parte. Las partes coincidentes se llaman partes correspondientes.Como habíamos mencionado en la sección 3.4 el símbolo para denotar congruencia es $\cong$.
Así, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ significa que Δ ABC es congruente a ΔDEF

Gran parte de nuestro estudio de la congruencia de figuras geométricas se refiere a los triángulos.

Aunque definimos dos triángulos como congruentes si tres pares de lados y tres pares de ángulos son congruentes, puede probarse que los triángulos son congruentes si se sabe que son congruentes unos cuantos pares de partes correspondientes. Primero debemos aceptar un nuevo Postulado.

Postulado 18- (El postulado L.A.L.). Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo que forman en uno son, respectivamente congruentes a los dos lados y el ángulo que forman en el otro.

Este postulado establece que, como en la figura 78, si $\overline{DE} \cong \overline{D'E'}$, $\overline{CE} \cong \overline{C'E'}$ y $\angle E \cong \angle E'$, entonces $\Delta CDE \cong \Delta C'D'E'$.

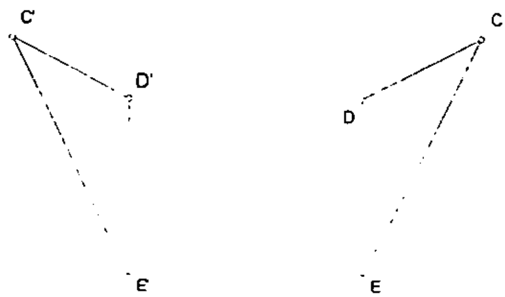


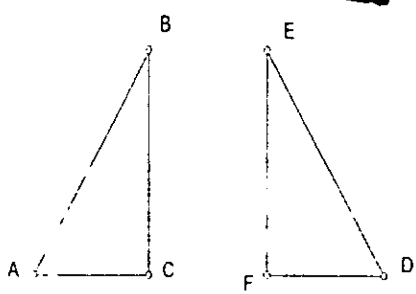
FIGURA 78

El estudiante encontrará muy conveniente, para hacer una selección rápida de los lados y los ángulos congruentes en los triángulos, designar mediante marcas semejantes las parejas congruentes de lados y ángulos congruentes.

TEOREMA 12- Si los dos catetos de un triángulo rectángulo son respectivamente congruentes a los dos catetos de otro triángulo rectángulo, los triángulos son congruentes.

Hipótesis: ΔABC y ΔDEF con $\overline{AC} \cong \overline{DF}$,

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$; $\angle C$ y $\angle F$ son ángulos rectos.



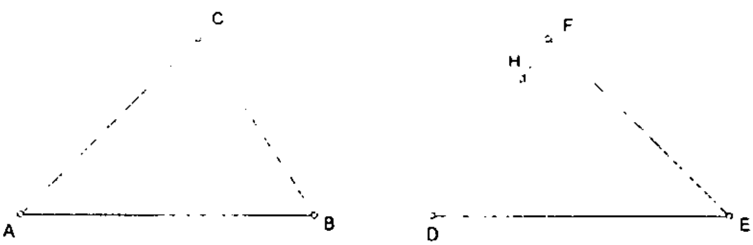
Teorema 12

Tesis : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Demostración

Proposiciones	Razones
1- $\overline{AC} \cong \overline{DF}$; $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.	1- Hipótesis
2- $\angle C$ y $\angle F$ son ángulos rectos.	2-Hipótesis
3-$\angle C \cong \angle F$	3- Teorema 1
4- $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	4- L.A.L. (Postulado 18).

TEOREMA 13-Si dos triángulos tienen dos ángulos y el lado incluido de uno congruentes a los dos ángulos y el lado incluido correspondientes del otro, los triángulos son congruentes.



Teorema 13

Hipótesis ΔABC y ΔDEF con $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.

Tesis $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Demostración

Proposiciones	Razones
1-$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$	1- Hipótesis
2-Sobre $\overline{DF}$ existe un punto H tal que $m\overline{DH}=m\overline{AC}$	2- Postulado de la situación de los puntos.

3-Trazar $\overline{HE}$	3- Dos puntos determinan una recta.
4-Δ ABC $\cong$ ΔDEF	4- Postulado 18 (L.A.L.).
5- $\angle$DEH $\cong$ $\angle$ B	5- Los ángulos congruentes de los triángulos congruentes son mutuamente congruentes.
6- $\angle$ B $\cong$ $\angle$ E	6- Hipótesis.
7- $\angle$ DEH $\cong$ $\angle$ E	7-La congruencia de los ángulos es transitiva.
8- EH y EF son el mismo rayo.	8-Postulado 12.
9- H = F	9- Axioma 1.
10-ΔABC $\cong$ ΔDEF	10- Reemplazando H de la proposición 4 por F (de la proposición 9).

Nota: La abreviatura para la proposición de este teorema es A.L.A..

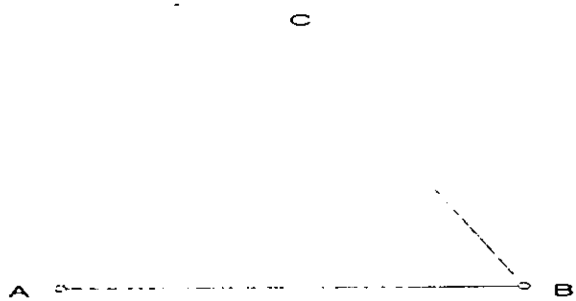
El valor principal de probar la congruencia de los triángulos descansa en el hecho de que cuando dos triángulos son congruentes se sabe que los lados y los ángulos correspondientes de los triángulos son congruentes. En dos triángulos congruentes, una pareja de lados correspondientes se encuentra opuesta a una pareja de ángulos correspondientes. Recíprocamente, los ángulos correspondientes se forman opuestos a los lados correspondientes.

Hasta aqui hemos venido aplicando hipótesis, definiciones, postulados y teoremas para probar la congruencia de los segmentos rectilíneos y de los ángulos. Ahora, si podemos probar que dos figuras son congruentes, tenemos todavia otro medio de determinar las rectas y los ángulos congruentes.

TEOREMA 14- Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes

Hipótesis : El triángulo isósceles ABC con $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

Tesis: $\angle$A $\cong$ $\angle$ B.



TEOREMA 14

Demostración

Proposiciones | Razones

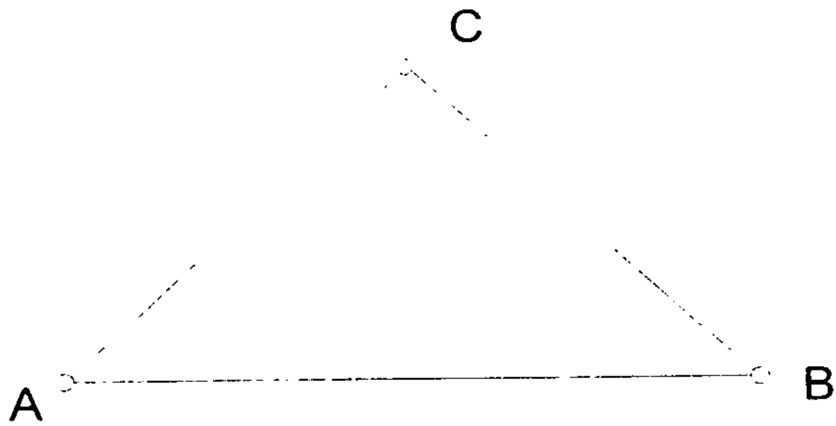
Consideremos la correspondencia de ABC con BAC.

Proposiciones	Razones
1- $\overline{AC} \cong \overline{BC}$	1-Hipótesis.
2- $\overline{BC} \cong \overline{AC}$	2- Propiedad simétrica de la congruencia.
3-$\angle C \cong \angle C$	3- Propiedad reflexiva de la congruencia.
4-$\Delta ABC \cong \Delta BAC$	4- Postulado 18 (L.A.L.).
5-$\angle A \cong \angle B$	5- Las Partes correspondientes de las figuras congruentes son congruentes.

COROLARIO A del Teorema 14- Cada uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles mide 45°.

Hipótesis: El triángulo rectángulo isósceles ABC con $AC \cong BC$ y $\angle C = 90°$.

Tesis: $\angle A \cong \angle B = 45°$.



COROLARIO A del Teorema 14

Demostración

Proposiciones	Razones
1- $AC \cong BC$	1- Hipótesis
2- $\angle C \cong \angle C$	2- Propiedad reflexiva de la congruencia.
3- $\Delta\ ABC \cong \Delta\ BAC$	3-Postulado 18 (L.A.L.).
4- $\angle A \cong \angle B$	4-Teorema 14.
5- $m\angle C = 90°$	5- Hipótesis.
6- $m\angle C + m\angle A + m\angle B = 180°$	6- Teorema 11.
7- $m\angle A = m\angle B$	7- Por la proposición 4.
8- $90° + m\angle A + m\angle B = 180°$ $90° + m\angle A + m\angle A = 180°$	8-Toda cantidad se puede sustituir por si misma.
9- $90° + m\angle A + m\angle A - 90° = 180° - 90°$	9- Propiedad substractiva de la igualdad.
10- $2m\angle A = 90°$	10- Propiedad distributiva.

11 - $\frac{2m\angle A}{2} = \frac{90°}{2}$ 11 - *Propiedad de la división*

12 - $\therefore m\angle A = 45°$

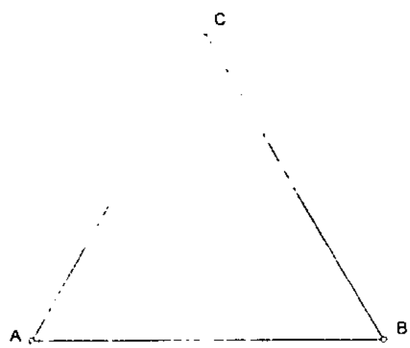
13- Pero $\angle A = \angle B$ 13- Proposición 4.

14- $\therefore$ $\angle A = \angle B = 45°$.

COROLARIO B DEL TEOREMA 14- Cada uno de los ángulos interiores de un triángulo equilátero mide 60°.

Hipótesis : El Δ ABC es un triángulo equilátero.

Tesis: $\angle A \cong \angle B \cong \angle C = 60°$.



Corolario B del Teorema 14

Demostración

Proposiciones	Razones
1- AB $\cong$ BC $\cong$ AC	1- Definición de segmentos congruentes.
2-BC $\cong$ AC	2- Proposición 1.
3- $\angle C \cong \angle C$	3- Propiedad reflexiva de la congruencia

4- $\Delta ABC \cong \Delta BAC$	4- POSTULADO18 (L.A.L.)
5- $\angle A \cong \angle B$	5- Teorema 14.
6-$AB \cong AC$	6- Propiedad transitiva de la congruencia.
7- $\angle A \cong \angle A$	7- Propiedad reflexiva de la congruencia.
8- $\Delta ABC \cong \Delta ACB$	8- Postulado 18 (L.A.L).
9- $\angle B \cong \angle C$	9- Teorema 14.
10- $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$	10- Proposiciones 5 y 9.
11- $\angle A \cong \angle A \cong \angle A$	11- Toda cantidad puede sustituirse por si misma.
12-$\angle A + \angle A + \angle A = 180°$	12-Propiedad de adición de ángulos y Teorema 11.
13- $3\angle A = 180°$	13- Propiedad distributiva de la igualdad.
14 – $\frac{3\angle A}{3} = \frac{180°}{3}$	14 – Propiedad de la división.
15-$\angle A = 60°$	
16- $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$	16- Proposiciones 5 y 9.
17-$\angle A \cong \angle B \cong \angle C = 60°$	17- Proposiciones 10 y 15.

4.4- RAZONES Y PROPORCIONES.

Definición – Razón es la relación que se establece entre dos cantidades de la misma especie, considerando, al compararlas, qué múltiplo, parte o partes, es una cantidad de la otra.

La razón de A a B se expresa usualmente A:B. Las cantidades A y B se llaman términos de la razón. Al primer término se le llama antecedente y al segundo consecuente.

Para encontrar que parte o múltiplo es A de B, dividimos A entre B, por consiguiente, la razón A:B puede ser medida por la fracción A/B, notación que es mas conveniente usar en la mayoria de los casos.

Nota: Una razón expresa el número de veces que una cantidad contiene a otra, en consecuencia toda razón es una cantidad abstracta.

Definición – Cuando dos razones son iguales, se dice que las cuatro cantidades que las componen son proporcionales.

Así, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces a, b, c, d, son proporcionales.

Esto se expresa diciendo que a es a b como c es a d, y la proporción se escribe asi :

$a : b :: c : d$;

o también $a : b = c : d$.

Los términos a y d se llaman extremos, y los b y c, medios.

Si cuatro cantidades forman proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Sean a, b, c, d las cantidades proporcionales.

Por definición

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \qquad \text{de donde } ad = bc.$$

Por consiguiente, si se conocen tres términos cualesquiera de una proporción puede encontrarse el cuarto. Asi, si se conoce a, c, d el cuarto término será

$$b = \frac{ad}{c}.$$

Recíprocamente, si se tienen cuatro cantidades a, b, c, d, tales que ad = bc, entonces a, b, c, d, son proporcionales; siendo a y d los extremos y b y c los medios, o viceversa.

Si las cuatro cantidades son distintas y forman proporción reciben el nombre de cuarta proporcional.

Definición – Se dice que varias cantidades están en proporción continua cuando la primera es a la segunda, como la segunda es a la tercera, como la tercera es a la cuarta etcétera. Asi a, b, c, d, ... , están en proporción continua cuando:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \ldots.$$

Si tres cantidades a, b, c, forman una proporción continua, se tiene:

$a : b :: b : c$;

De donde según lo dicho anteriormente:
$ac = b^2$

En este caso se dice que b es media proporcional entre a y c, y que c es la tercera proporcional a a y b.

4.5- Trazo de la cuarta y la media proporcional de segmentos:

a) Trazo de la cuarta proporcional a tres segmentos dados a, b, c.

Procedimiento – Tómese en los lados de un ángulo cualquiera $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$;
Trácese AB y luego CX paralela a AB.
La recta OX será la cuarta proporcional pedida (figura 79), porque tenemos que :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OX}} \quad \text{ó sea } \frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

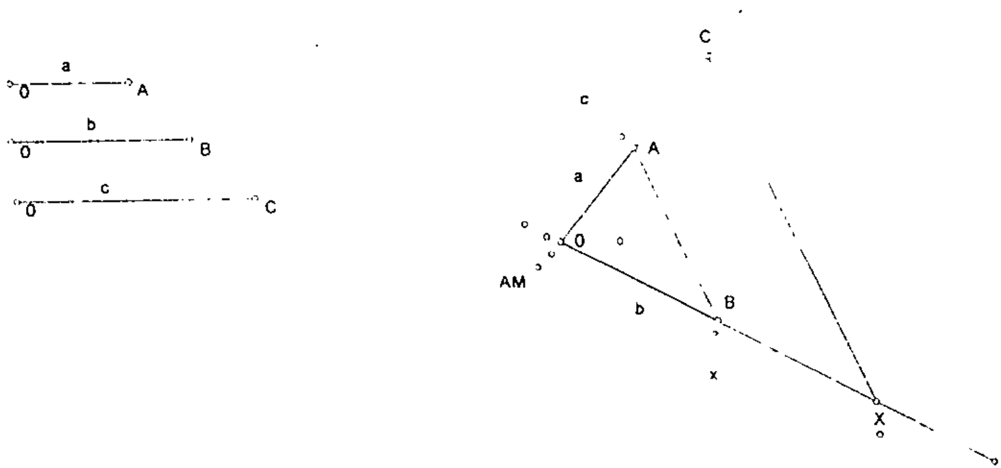


FIGURA 79

b) Trazo de la media proporcional a dos segmentos dados *a* y b.

Procedimiento Tómese sobre una recta AB, OA=*a*, y OB = b, sobre AB descríbase una semicircunferencia, y trácese la perpendicular OX que será la línea pedida.

En efecto, tenemos $\frac{\overline{OA}}{OX} = \frac{OX}{OB}$ o sea $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ (figura 80)

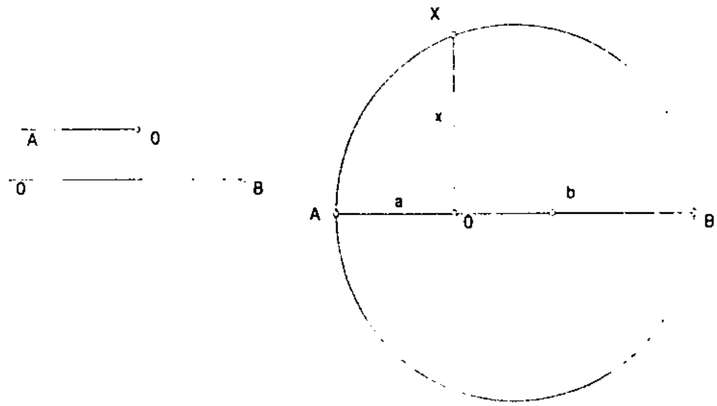


FIGURA 80

4 6 TRIÁNGULOS SEMEJANTES

Definiciones- Polígonos semejantes son los que tienen sus ángulos respectivamenete iguales y los lados homólogos proporcionales.

En las figuras semejantes, se llaman lados homólogos a los adyacentes a ángulos respectivamente iguales; de donde resulta que en los triángulos semejantes los lados homólogos se oponen a los ángulos iguales.

Llámase razón de semejanza a la razón constante de dos líneas homólogas

En la sección 4.3 se habló de congruencia y se concluyó que las figuras congruentes son iguales en todos los sentidos; tienen la misma forma y tamaño.

Es importante observar que la definición de polígono semejante tiene dos partes:

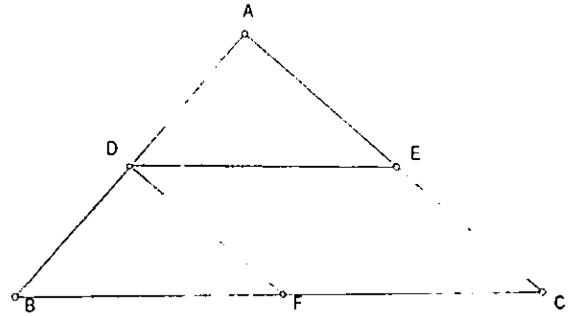
1- Los ángulos correspondientes deben ser congruentes y
2- Los lados correspondientes deben ser proporcionales.

Para indicar que dos figuras son semejantes se usa el símbolo ~.
Ahora probaremos que en el caso de los triángulos, los ángulos de uno de los triángulos no pueden ser congruentes a los ángulos de un segundo triángulo sin que los lados correspondientes no estén en proporción. Inversamente se probará que dos triángulos no pueden tener sus lados correspondientes proporcionales sin que los ángulos correspondientes sean congruentes.

TEOREMA 15- Toda recta trazada paralelamente a un lado de un triángulo determina otro triángulo semejante al propuesto.

Hipótesis : Δ ABC un triángulo cualquiera DE // BC.

Tesis: Δ ADE ~ Δ ABC.



TEOREMA 15

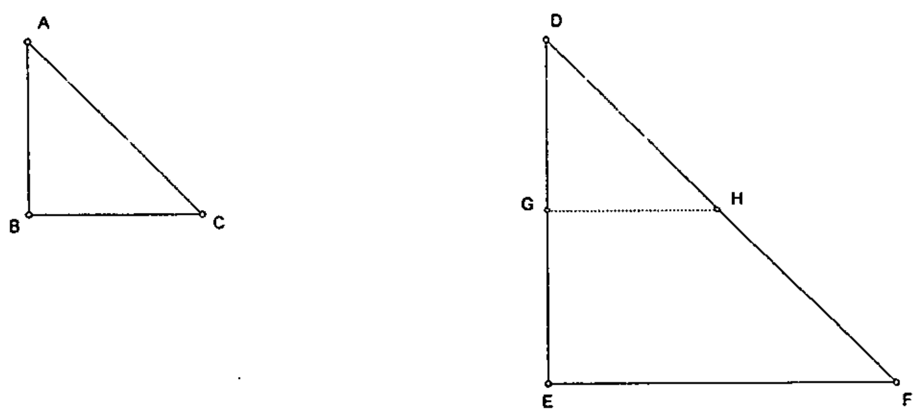
Demostración

Proposiciones	Razones
1- Tracemos DF//AC	1- Postulado 17.
2- $\angle A \cong \angle A$	2-Propiedad reflexiva de la congruencia.
3- $\angle D \cong \angle B$ y $\angle E \cong \angle C$	3-Por ser correspondientes.
4- DE // BC	4-Hipótesis.
5-AD : AB : : AE : AC	5-Párrafo 4.5 a).
6-Como AC // DF	6-Proposición.
7- AD : AB : : DE : BC	7-Misma razón que 5.
$8 - \therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$	8 - Por 5 y 8.
9- ΔADE ~ Δ ABC.	

TEOREMA 16- Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.

Hipótesis : Δ ABC y Δ DEF, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$.

Tesis: Δ ABC ~ Δ DEF.



TEOREMA 16

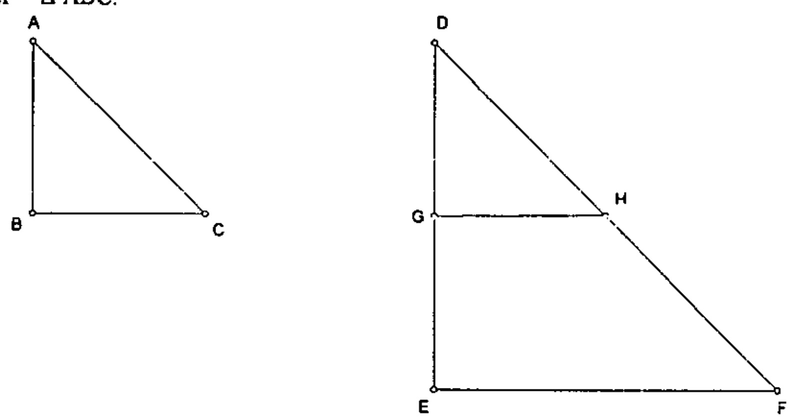
Demostración

Proposiciones	Razones
1- $\angle A \cong \angle D$ $\angle B \cong \angle E$	1- Hipótesis
2-Tomemos G sobre DE tal que DG $\cong$ AB	2-Construcción.
3- Tracemos GH // EF	3-Postulado 17.
4- $\angle E \cong \angle G$	4-Por ser ángulos correspondientes.
5- $\angle B \cong \angle G$	5- Por transitividad de la congruencia.
6- $\therefore \Delta ABC \cong \Delta DGH$	6- Ya que AB $\cong$ DG (Razón 2).
7- $\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$	7- Teorema 15.

TEOREMA 17- Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual comprendido por lados proporcionales.

Hipótesis : Δ ABC y Δ DEF, AB: DE : : AC : DF.

Tesis: Δ DEF ~ Δ ABC.



TEOREMA 17

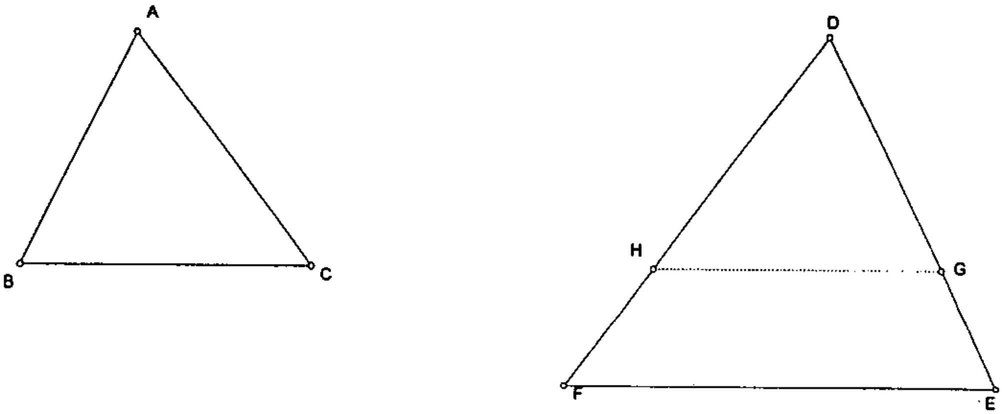
Demostración

Proposición	Razón
1- En el lado DE localizamos $DG \cong AB$	1- Trazo auxiliar
2- Tracemos $GH \parallel EF$	2-Postulado 17
3- $\Delta\, DGH \sim \Delta\, DEF$	3-Teorema 15.
4- $DG : DE :: DH : DF$ $AB : DE :: DH : DF$	4- Por la proposición 3.
5- $DG : DE :: AB : DE$	5- Por las proposiciones 1 y 3.
6 - $\frac{AB}{DE} = \frac{DG}{DE}$ $\therefore AB(DE) = DG(DE)$	6 - Definición de proporción.
7 - $AB = DG$	7 - Definición de proporción.
8 - $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$	8 - Hipótesis.
9 - $\frac{AC}{DF} = \frac{DH}{DF}$	9 - La proposición 8 y las hipótesis tienen iguales las primeras razones $\therefore$ las segundas razones también deben serlo.
10- $AC(DF) = DH(DF)$	10- Definición de proporción.
11- $AC = DH$	11- Definición de proporción.
12- $\therefore \Delta\, ABC \cong \Delta\, DGH$	
13- $\Delta\, DEF \sim \Delta\, ABC$	13- Proposiciones 3 y 12.

TEOREMA 18- Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados homólogos proporcionales.

Hipótesis : Δ ABC , Δ DEF , AB : DE : : BC : EF.

Tesis : Δ ABC ~ DEF.



Teorema 18

Demostración

Proposiciones	Razones
1- Sobre DE tomemos DG ≅ AB y Tracemos GH // EF.	1- Trazo auxiliar, Postulado 17.
2- Δ DGH ~ Δ DEF Por demostrar que Δ DGH ≅ Δ ABC.	2- Teorema 15.
3- $\frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{DE}} = \frac{GH}{EF} = \frac{DH}{DF}$	3 - Proposición 2.
4- DG ≅ AB	4- Proposición1.

5 - $\frac{\text{AB}}{\text{DE}} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ 5 - Hipótesis.

6 - Pero $\frac{\text{DG}}{\text{DE}} = \frac{AB}{DE} \therefore DG = AB$ 6 - Propiedad de las proporciones.

$$\therefore \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{DH}{DF} = \frac{GH}{EF} \Rightarrow AC = DH \quad y \quad BC = GH$$

7- $\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ 7- L.L.L.

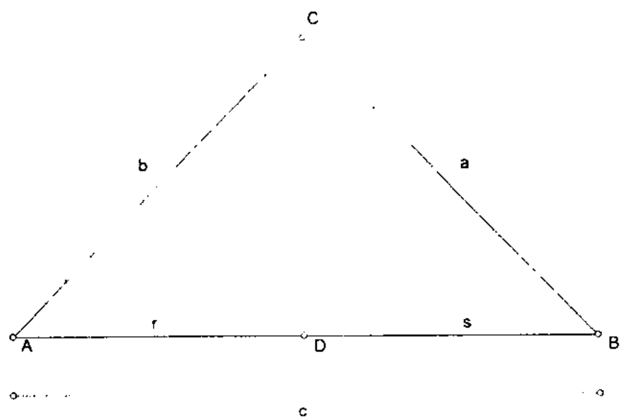
8- $\therefore \Delta$ ABC ~ Δ DEF.

TEOREMA DE PITÁGORAS

Teorema 19- El cuadrado de la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Hipótesis : Δ ABC con $\angle$ C =90°

Tesis : $c^2 = a^2 + b^2$.



TEOREMA 19

Demostración

Proposiciones	Razones
1 – Trazar $\overline{CD} \perp \overline{AB}$	1 - Axioma 8.
2 - $c:a::a:s$ y $c:b::b:r$	
3 – $a^2 = cs$ y $b^2 = cr$	3 - Propiedad fundamental de las proporciones.
4 - $a^2 + b^2 = cs + cr$	4 – I – 4
5 – $a^2 + b^2 = c(s+r)$	5 – Propiedad distributiva.
6 - $s + r = c$	6 - Postulado 13
7 - $a^2 + b^2 = c^2$	7 - I - 8
8 - $c^2 = a^2 + b^2$	8 - 1 - 2.

CAPITULO V

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

5 1 Definición- Circunferencia es una curva cerrada y plana cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro (figura 81 (a)).

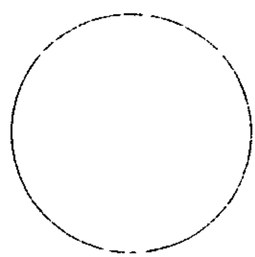
Círculo : Es la superficie limitada por una circunferencia (figura 81 (b)).

(a) (b)

FIGURA 81

Un círculo abierto es la superficie limitada por una circunferencia pero los puntos de la circunferencia no pertenecen a la superficie (figura 82 (a)), se representa por una circunferencia punteada.

Un círculo cerrado es la superficie limitada por una circunferencia y que incluye los puntos de ésta, (figura 82 (b)) se representa por una circunferencia normal.



(a) (b)

FIGURA 82

La mitad de una circunferencia se le llama semicircunferencia (figura 83), a la cuarta parte de una circunferencia se le llama sector (figura 84).

FIGURA 83

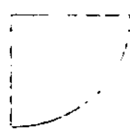


FIGURA 84

A la mitad de un círculo se le llama semicírculo y a la cuarta parte cuadrante (figura 85).

SEMICÍRCULO CUADRANTE

FIGURA 85

5.2 Rectas notables en plano del circulo

Radio – Es la línea recta que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia (figura 86), como la recta OL.

Arco - Es una porción cualquiera de la circunferencia considerada aisladamente; como por ejemplo CFD (figura 86); se denota por una semicircunferencia sobre los puntos que limitan el arco por ejemplo CD.

Cuerda – Es la recta que une dos puntos de la circunferencia; por ejemplo, CD.

La cuerda subtiende al arco que tiene los mismos extremos. Luego la cuerda CD subtiende a los arcos CFD y CED

Flecha o Sagita- Llámase flecha o sagita a la perpendicular levantada en medio de una cuerda y que termina en el arco subtendido, por ejemplo en la figura 86 el segmento PF.

Diámetro – Es una cuerda que pasa por el centro; en la figura 86 es la recta GH.

Secante - Es una recta que corta a la circunferencia en dos puntos ; en la figura 86 es la recta GH.

Tangente – Se le llama tangente a la recta ilimitada que sólo tiene un punto en común con la circunferencia. Este punto se llama punto de contacto o de tangencia; en la figura 86 la recta tangente a la circunferencia es la recta k.
Cuando una recta es tangente a una circunferencia, la circunferencia lo es también a la recta.

Recta Exterior- Es la que no tiene ningún punto común con la circunferencia; en la figura 86 la recta M es una recta exterior.

Sector Circular – es la parte de círculo comprendida entre dos radios (figura 87).

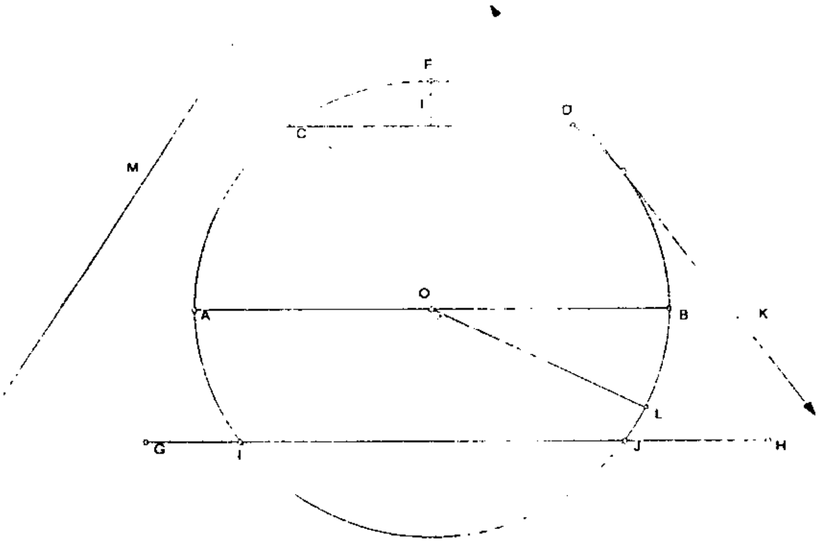


FIGURA 86

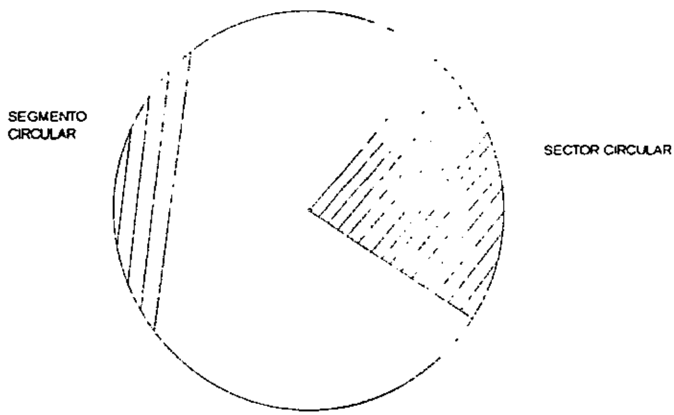


FIGURA 87

Segmento Circular – Es la porción de círculo comprendida entre un arco y la cuerda que une sus extremos (figura 87).

Circunferencias Concéntricas – Son circunferencias que se encuentran en el mismo plano (coplanares) y que tienen el mismo centro y las medidas de sus radios son distintas (figura 88).

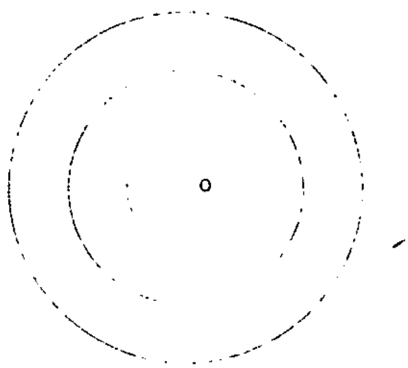


FIGURA 88

Corona Circular – Porción de plano limitada por dos circunferencias concéntricas (figura 89).

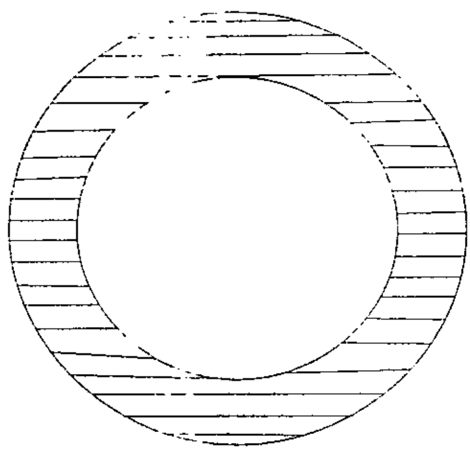


FIGURA 89

Trapecio Circular – Porción de plano limitado por dos circunferencias concéntricas y dos radios (figura 90).

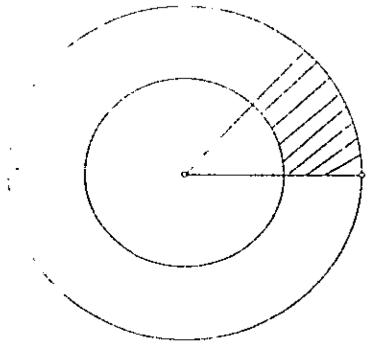
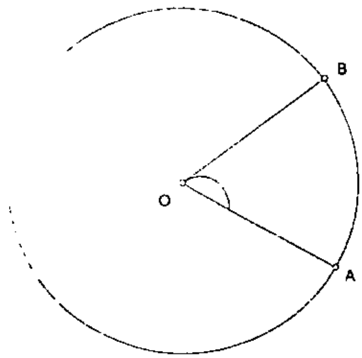


FIGURA 90

5.3 – Definición – Llámase ángulo en el centro o ángulo central al ángulo formado por dos radios (figura 91), por ejemplo $\angle AOB$. Su medida es igual a la del arco comprendido entre sus lados.



$\therefore m\angle AOB = AB$

FIGURA 91

Definición – Ángulo inscrito es el que, formado por dos cuerdas, tiene el vértice en la circunferencia (figura 92), por ejemplo $\angle CDE$.

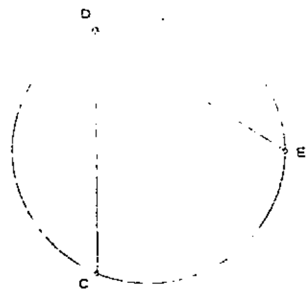


FIGURA 92

Ángulo Semi-inscrito - Es el que tiene su vértice en la circunferencia, y por lados una cuerda y una tangente como por ejemplo (GFH figura 93).

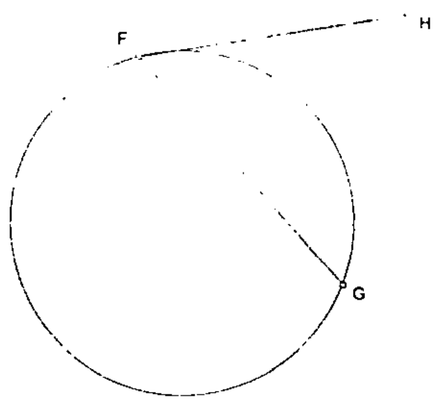


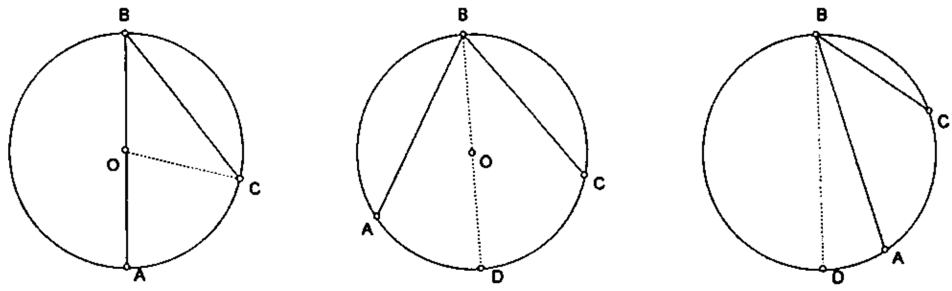
FIGURA 93

5.4

TEOREMA 20 –Un ángulo inscrito tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Hipótesis : Sea B un ángulo inscrito en un circulo de centro O y sea AC el arco comprendido entre los lados del ángulo

$$\text{Tesis}: \angle B = \frac{AC}{2}$$



(a) (b) (c)

Teorema 20

Caso 1 – Cuando O se halla sobre uno de sus lados (fig. a).

Demostración

Trácese OC

Proposiciones	Razones
1- $\angle B = \angle C$	1- Teorema 14
2- $\angle B + \angle C = \angle AOC$	2- Corolario a Teorema 11.
3- $\angle B + \angle B = \angle AOC$	3- Toda cantidad puede sustituirse por sí misma I-8.
4- $2\angle B = \angle AOC$	

$\angle B = \angle \frac{AOC}{2}$ 4 - I - 7

5 - $\angle AOC = AC$ 5 - Def. de medida de ángulo central.

$\therefore \angle B = \frac{AC}{2}$

Caso 2 –Cuando O se halla dentro del ángulo B (figura (b)).

Demostración

Trácese el diámetro BD.

Proposiciones	Razones
1 – $\angle ABD = \frac{AD}{2}$ $\angle DBC = \frac{DC}{2}$	1 -1er. Caso del teorema 20.
2 – $\therefore \angle ABD + \angle DBC = \frac{AD}{2} + \frac{DC}{2}$	2 - I - 8.
3 - $\therefore \angle ABC = \frac{AD + DC}{2}$	3 - Postulado 14.
4 - $\therefore \angle ABC = \frac{AC}{2}$.	

Caso 3 –Cuando O se halla fuera del ángulo B (figura (c)).

Demostración

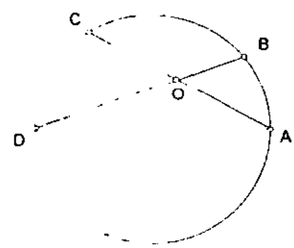
Trácese el diámetro BD

Proposiciones Razones

1 - $\angle DBC = \dfrac{DC}{2}$	1 - 1er Caso del teorema 20.
$\angle DBA = \dfrac{DA}{2}$	

2 - $\therefore \angle DBC - DBA = \dfrac{DC - DA}{2}$ entonces $\angle ABC = \dfrac{AC}{2}$.

Teorema 21 – El ángulo formado por dos cuerdas que se cortan dentro de un círculo tiene por medida la semi-suma de los arcos comprendidos entre sus lados.



Teorema 21

Hipótesis – Sea AOB un ángulo por las cuerdas AC, BD.

Tesis - $\angle AOB = \dfrac{AB + CD}{2}$

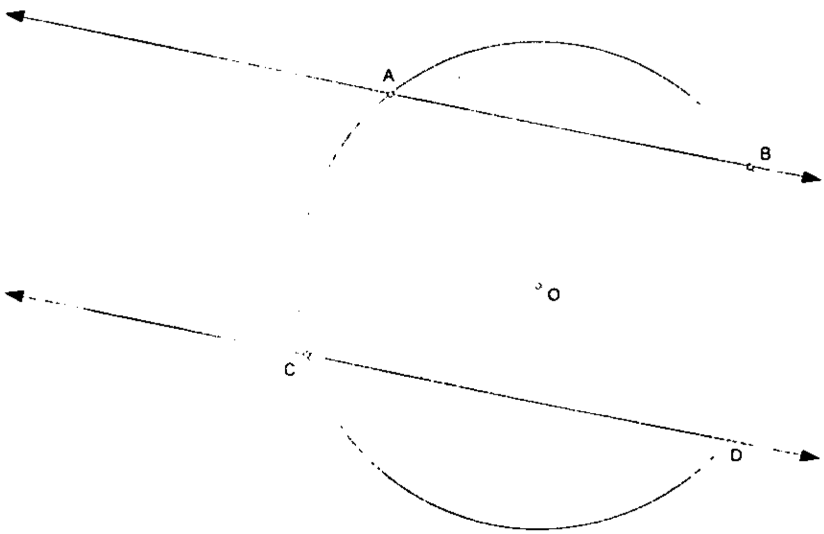
Demostración

Trácese AD

Proposiciones	Razones
1 - $\angle AOB = \angle A + \angle D$	1 - Corolario a del Teorema 11.
2 - $\angle A = \dfrac{CD}{2}$	2 - Teorema 20.
$\angle D = \dfrac{AB}{2}$	

$$3 - \angle AOB = \frac{CD + AB}{2} \qquad 3 - 1 - 8.$$

Corolario 5.1 – Rectas paralelas interceptan arcos congruentes sobre un circulo.



Corolario 5.1

Hipótesis – AB // CD

Tesis – AC ≅ BD

Trácese $\overline{BC}$

Demostración

Proposiciones	Razones
1- $\angle ABC \cong \angle BCD$	1- Teorema 7

2 - $m \angle ABC = \frac{1}{2} AC$ 2 - Teorema 20

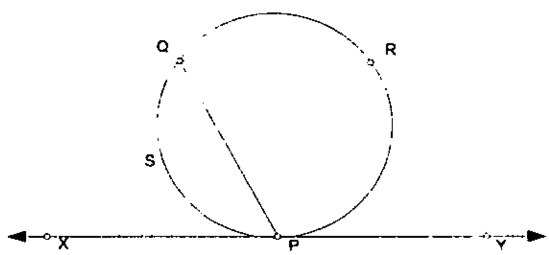
$m \angle BCD = \frac{1}{2} BD$

3 - Entonces $\frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} BD$ 3 - Toda cantidad se puede sustituir por si misma

4 - $\therefore m\ AC = m\ BD$ 4 - I - 7

5 - $AC \cong BD$

Teorema 22 – El ángulo formado por una tangente y una cuerda tiene por medida la mitad del arco subtendido por la cuerda.



TEOREMA 22

Hipótesis – Sean XY la tangente y PQ la cuerda.

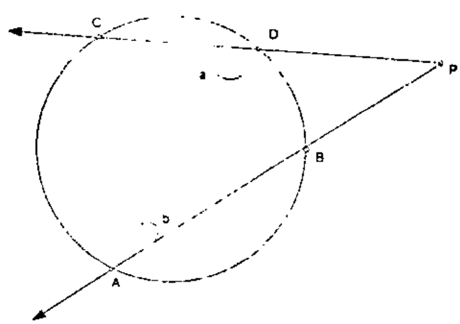
Tesis - $\angle QPX = \frac{QSP}{2}$

Demostración

Trácese la cuerda QR // XY.

Proposiciones	Razones
1 - PR = QSP	1 - Corolario 5.1
2 - $\angle QPX = \angle PQR$	2 - Por ser alternos internos.
3 – $\angle PQR = \frac{PR}{2}$	3 - Teorema 20.
4 - $\therefore\ \angle QPX = \frac{QSP}{2}$.	

Teorema 23 – La medida del ángulo formado por dos secantes que se intersectan en el exterior de un circulo es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.



TEOREMA 23

Hipótesis – Las secantes ABP y CDP interceptándose en P exterior al circulo.

Tesis - $m \angle P = \frac{1}{2}[m\, AC - mBD]$

Demostración

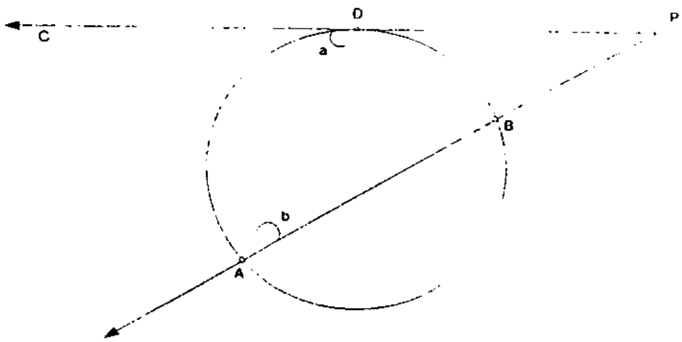
Proposiciones	Razones
1- Las secantes ABP y CDP que se intersectan en P exterior al circulo.	1- Hipótesis
2- Trazar DA	2- Postulado 2.
3- $m\angle a = m \angle P + m\angle b$	3- Corolario a Teorema 11
4- $m\angle P = m\angle a - m\angle b$	4- Propiedad de Simetria Propiedad de substracción.
5 – $m \angle a = \frac{1}{2} m\, AC$ $m\angle b = \frac{1}{2} m\, BD$	5 - Teorema 20.
6 - $m\angle a - m\angle b = \frac{1}{2}(m\, AC - m\, BD)$	6 - Propiedad de Substracción.
7 - $\therefore\ m\angle P = \frac{1}{2}[m\, AC - m\, BD]$	7 - Propiedad de Sustitución

Corolario 5.2

La medida del ángulo formado por una secante y una tangente que se intersectan en el exterior de un circulo es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.

Hipótesis – La tangente CP y la secante PA se intersectan en el punto P exterior al circulo.

Tesis - $m \angle P = \frac{1}{2}[m\, AD - m\, BD]$



COROLARIO 5.2

Demostración

Proposiciones	Razones
1- La tangente CP y la secante PA se intersectan en el punto P exterior al círculo.	1- Hipótesis
2- Trazar DA	2- Postulado 2.
3- $m \angle a = m \angle b + m \angle P$	3- Corolario a Teorema 11.
4- $m \angle P = m \angle a - m \angle b$	4- Propiedad substractiva de la igualdad.
5- $m\angle a = \frac{1}{2} m\ AD$ $m\angle b = \frac{1}{2} m\ BD$	5 - Teorema 20.
6- $m\angle a - m \angle b = \frac{1}{2}[m\ AD - m\ BD]$	6 - Propiedad de substración.
7 - $m \angle P = \frac{1}{2}[m\ AD - m\ BD]$	7 - Propiedad de sustitución.

CONCLUSIONES

Dentro de mi experiencia como docente impartiendo esta asignatura (la cual es de dos años frente a grupo), siento que me ha funcionado adecuadamente, ya que a partir de que desarrollé este material, el índice de reprobación en mis grupos (dos) disminuyó de una forma significativa.

A partir de que instrumenté este material he obtenido una mejoría significativa en el aprovechamiento de mis grupos.

Además, durante el segundo periodo lectivo, varios de mis alumnos participaron en el concurso de Matemáticas con escuelas incorporadas a la UNAM, en el cual dos de ellos participaron en la etapa final obteniendo uno de ellos el tercer lugar en el mismo.

De la manera en que se abordan estos contenidos, se ha pretendido implementar una metodología de enseñanza-aprendizaje a partir del razonamiento lógico que vaya desarrollando el alumno para llegar a la formalización de las matemáticas.

Debe notarse que este material se complementaría con series de problemas inherentes a cada tema de tal manera que el alumno pueda reafirmar el conocimiento adquirido hasta ese momento; éstos deben de ser escogidos de una manera adecuada por el profesor.

BIBLIOGRAFÍA

1. GARCÍA BACCA JUAN DAVID. EUCLÍDES ELEMENTOS DE GEOMETRÍA I-II. SEGUNDA EDICIÓN. MEXICO D.F. UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.1992. 178 pp..

2. GARCÍA BACCA JUAN DAVID. EUCLÍDES ELEMENTOS DE GEOMETRÍA III-V. SEGUNDA EDICIÓN. MEXICO D.F. UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO.1992. 239 pp..

3. GELTNER PETER B., PETERSON DARREL J.. GEOMETRÍA..TERCERA EDICIÓN. MEXICO D.F.. INTERNATIONAL THOMSON EDITORES, S.A. DE C.V.

4. HEMMERLING EDWIN M.. GEOMETRÍA ELEMENTAL. MÉXICO. SÉPTIMA REIMPRESIÓN DE LA PRIMERA EDICIÓN.EDITORIAL LIMUSA. 1986.498 pp..

5. POGORÉLOV A.V..GEOMETRÍA ELEMENTAL. URSS. 1974.EDITORIAL MIR. 223 p.p..

6. TREJO SÁNCHEZ MARÍA DE LOS ANGELES. PRIMER Y SEGUNDO CUADERNO DE TRABAJO PARA MATEMÁTICAS III. ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA (2).97-98. MÉXICO.102 pp..

7. VALETTE P. GEOMETRÍA (ANTIGUO CURSO SUPERIOR).CUARTA EDICIÓN. MÉXICO D.F. COLECCIÓN G. M. BRUÑO. EDITORIAL ENSEÑANZA.1959.396 pp..

8. WENTWORTH JORGE, SMITH DAVID EUGENIO. GEOMETRÍA PLANA Y DEL ESPACIO. DÉCIMOQUINTA EDICIÓN. EDITORIAL PORRÚA. MÉXICO. 1986. 469 pp..