11

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ACATLAN

EL PROCESO ESTOCASTICO ITO EN EL MERCADO DE DERIVADOS DE OPCIONES: EL MODELO BLACK-SCHOLES

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

P R E S E N T A :

MARIA IMELDA GERVASIO ELIAS

ASESORA: ING. ELVIRA BEATRIZ CLAVEL DIAZ

UNAM
CAMPUS ACATLÁN

SANTA CRUZ ACATLAN, EDO. DE MEXICO, ABRIL DEL 2000

277799

DEDICATORIAS Y AGRADECIMIENTOS

Quiero dedicar este trabajo a mi familia y especialmente a todos aquellos profesores que se enseñaron y alimentaron mi interés por el conocimiento. A los cuales admiro por su amor a la enseñanza, por su interés y preocupación por una buena educación, que tan importante es para el desarrollo y progreso de nuestro país.

Dedico también este trabajo a mi otra mitad, Gun, por su amor, paciencia, comprensión, amistad y apoyo.

Quiero expresar mis más sinceros agradecimientos a los seres que amo y respeto.

Quiero agradecer especialmente a mi asesora la Profra. Ing. Elvira Beatriz Clavel Díaz por sus sugerencias y comentarios a versiones previas de este trabajo, que me fueron de gran ayuda para la realización y terminación del mismo.

A mis compañeros de trabajo que a lo largo de mi carrera profesional he tenido la oportunidad de conocer, por el apoyo y ayuda que me brindaron para continuar estudiando.

Finalmente, quiero agradecer a todas las personas y amigos que tuve la oportunidad de conocer en la ENEP ACANTLAN y que me han brindado su cariño, amistad y apoyo.

Imelda
abril 2000

INDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

En los últimos años los productos derivados han cobrado una importancia creciente en los mercados financieros internacionales. En nuestro país el 15 de diciembre de 1998 inició operaciones un mercado específico para productos derivados, el **Mercado Mexicano de Derivados (MexDer)**. De ahí la importancia e interés personal por conocer los modelos matemáticos que se aplican en esta área.

En octubre de 1997, el **Premio Nobel de Economía** fue otorgado a Robert C. **Merton** y Myron S. **Scholes**. A principios de los años setenta, estos economistas estadounidenses habían desarrollado, de manera conjunta con Fischer **Black**, un nuevo e innovativo modelo matemático para determinar el valor de los llamados productos financieros **derivados**.[1] Su modelo está basado en los procesos estocásticos de Markov de tiempo continuo, mejor conocidos como procesos de difusión, entre los cuales se encuentra el proceso de Ito.

Los productos derivados son contratos que establecen las condiciones de compra-venta de algún bien subyacente, tal como una acción, una divisa o una materia prima, en una fecha futura predeterminada. La principal función de los derivados es permitir a los agentes económicos cubrir o limitar el riesgo producto de las fluctuaciones en el precio del bien subyacente entre el momento en que se negocia el contrato y el momento futuro en que se realiza la compra-venta del mismo. Hay diversos tipos de productos derivados: **futuros**, **opciones**, ***forwards***, ***warrants***, etc.. El trabajo de Black, Merton y Scholes se refirió a uno de los tipos de productos derivados más importantes, a saber, las opciones.

Los productos derivados existen desde hace mucho tiempo, pero hasta los años setenta nunca se había desarrollado un método o modelo adecuado para su valoración. Los principales estudios y modelos que existían se basaban en supuestos no muy realistas y no alcanzaban tomar en cuenta el costo del

[1] Fischer Black no recibió el Premio Nobel debido a que había fallecido en 1995.

riesgo.[2] En 1973, Black y Scholes publicaron su modelo para determinar el precio de las opciones, mismo que ahora se conoce como el **modelo Black–Scholes**.[3]

El modelo Black–Scholes no sólo resolvió el problema de la valoración de derivados que habia existido durante mucho tiempo, sino que también tuvo un impacto importante en la teoría y en la práctica de la economía y de las finanzas. En cuanto a su impacto en la práctica, hay que señalar que los trabajos de Black, Merton y Scholes contribuyeron de manera sustancial al crecimiento rápido de los mercados de derivados a partir de principios de los años setenta. En cuanto a la teoría, después de 1973 ha habido un desarrollo muy importante en la teoría de la valoración de derivados, basado en el modelo Black–Scholes. Así mismo, se abrió una nueva área de aplicación y desarrollo para los procesos estocásticos.[4]

El primer mercado organizado de opciones, el ***Chicago Board Options Exchange*** (CBOE), inició sus operaciones en 1973, año en que se publicó el modelo Black–Scholes. Para 1975 los corredores del CBOE ya aplicaban ese modelo para valorar y proteger sus posiciones de opciones. Hoy en día, miles de corredores e inversionistas utilizan el modelo Black–Scholes para calcular el valor de las opciones en los mercados financieros alrededor del mundo. El modelo tiene ciertas limitaciones importantes[5], pero es muy fácil de utilizar, requiere información que se obtiene directamente del mercado, y proporciona información en forma instantánea. En México se emplea el modelo Black–Scholes, por ejemplo, para la valuación de títulos opcionales o *warrants* de tipo europeo.[6]

Para la ciencia económica el modelo Black–Scholes fue algo totalmente nuevo, en dos sentidos. Primero, las matemáticas usadas para llegar al modelo no formaban parte de las herramientas

[2] Por ejemplo, los estudios de Louis Bachelier de 1900 y James Boness de 1964. Para mayores detalles véase Royal Swedish Academy of Sciences, 1997.
[3] Véase Black y Scholes, 1973. En ese tiempo colaboraban muy de cerca con Merton, quien también publicó varios trabajos y quien, según Black, habia tenido algunas ideas cruciales para llegar al modelo. Para más detalles véase Black, 1989, y Royal Swedish Academy of Sciences, 1997.
[4] Las ideas de Black, Merton y Scholes también se han aplicado en otros campos de la teoría y práctica económica y de finanzas, tales como la valoración de acciones, la evaluación de inversiones, los contratos de seguros y fianzas, y la teoría dinámica de mercados financieros.
[5] Véase, por ejemplo, Rodríguez de Castro, 1995.
[6] Véase Bolsa Mexicana de Valores, 1998.

matemáticas que utilizaban comúnmente los economistas en ese tiempo. El modelo es una combinación de **procesos estocásticos y cálculo diferencial**. Segundo, la ciencia económica nunca había visto una aplicación tan rápida y difundida de un resultado teórico. De hecho, algunos comentaristas han alegado que con el modelo Black-Scholes la ciencia matemática/económica por fin produjo algo que sirve en la práctica.[7]

En los últimos años, los productos derivados no sólo han llamado la atención de los medios gracias a los ganadores del Premio Nobel, sino también debido a algunos escándalos financieros de gran escala. En 1994 se declaró en bancarrota el **condado de Orange**, California, después de algunas operaciones financieras falladas relacionadas a productos derivados, en las que se perdieron cerca de US$1.7 mil millones. En 1995 el famoso banco inglés **Barings** quebró porque uno de sus empleados, Nick Leeson, había perdido US$1.4 mil millones especulando con derivados sin que nadie se diera cuenta de lo que estaba haciendo.

Esta tesina tiene como objetivo realizar un estudio documental del modelo Black-Scholes y su utilización en el mercado de derivados de opciones. El modelo Black-Scholes es un ejemplo de una aplicación del proceso estocástico Ito en la teoría y práctica de las finanzas. El modelo Black-Scholes requiere conocimientos matemáticos básicos, como de los procesos estocásticos, la estadística, la probabilidad, el cálculo diferencial y el cálculo integral. Esto lo hace un tema relevante de investigación aplicada para la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación de la UNAM.

La tesina está organizada de la siguiente manera. El primer capítulo "***El mercado de derivados***" hace una introducción básica a los productos derivados. Se explica la función del mercado de derivados, y se examina cuáles son sus ventajas y riesgos. Además se describen los productos derivados más comunes, como los futuros, *forwards*, opciones, *warrants*. Se pone especial enfásis en las opciones, que son los derivados más relevantes para efectos del modelo Black-Scholes y de este trabajo. El primer capítulo también describe las catástrofes financieras que estuvieron asociadas con la utilización

[7] *The Economist*, 18 de octubre de 1997.

de productos derivados, particularmente los casos de Orange y de Barings mencionados arriba. Finalmente se describe la creación del MexDer en México.

En el segundo capítulo "***Procesos estocásticos y valoración de bienes financieros***" se exponen los principios generales en materia de procesos estocásticos de tiempo continuo —proceso de Wiener, movimiento Browniano y proceso de Ito— el lema de Ito, la distribución lognormal, distribución normal, y su aplicación en la determinación del precio de un bien financiero. Estos principios son importantes ya que establecen las bases sobre las que descansa la explicación teórica-matemática del modelo Black–Scholes.

El tercer capítulo "***La valoración de opciones y el modelo Black–Scholes***" analiza más a fondo el modelo Black–Scholes. Primero se presentan los antecedentes históricos en la teoria de valoración de opciones. Luego se examinan los diferentes factores que afectan el precio de las opciones —el precio del bien subyacente, la volatilidad de dicho precio, la tasa de interés, etc.— y de qué manera y con cuáles hipótesis dichos factores se toman en cuenta en el modelo de Black, Merton y Scholes. Para ilustrar el modelo Black–Scholes el capítulo concluye con un ejemplo de aplicación utilizando datos reales para los productos derivados llamados opciones *call*[8] de tipo de europeo.

Al final de la tesina se presentan las conclusiones del trabajo. Así mismo, se incluyen un glosario, un Anexo A "Probabilidad y estadística" y un Anexo B "Conceptos básicos de procesos estocásticos".

[8] En la literatura en español las opciones *call* también se llaman opciones de compra. En este trabajo se manejarán como opciones *call*.

CAPÍTULO I

EL MERCADO DE DERIVADOS

En este capítulo introductorio se precisa el contenido y significado del **mercado de derivados**. En seguida se explica la función del mercado de derivados. Se examina cuáles son las ventajas y riesgos del mercado, cómo opera **la cámara de compensación** y qué son los márgenes.[1] En la segunda parte de este capítulo se describen los productos derivados más comunes: futuros, *forwards*[2], opciones y *warrants*. El énfasis se centra en las **opciones**, en vista de que se trata del derivado objeto de estudio. Para ejemplificar los alcances de los riesgos en que se puede incurrir con una utilización inadecuada de los derivados, la tercera parte examina dos catástrofes financieras recientes que estuvieron asociadas con la utilización de productos derivados.[3] Finalmente se describe el proceso de creación del mercado de derivados en México.

[1] Los márgenes también se conocen como aportaciones o garantías. En este trabajo se hace referencia como márgenes.
[2] En lo sucesivo los términos en inglés para los cuales no se encontró una traducción adecuada en español se ponen en letras cursivas.
[3] En habla inglesa son conocidos como *derivative products, financial derivatives, derivative securities, contingent claims* or *derivatives*.

I.1 ¿QUÉ ES EL MERCADO DE DERIVADOS?

I.1.1 CONTEXTO

El mercado de valores es un mercado organizado de intermediarios que representan los intereses de particulares, sociedades mercantiles y gobiernos, donde se realiza el libre intercambio de valores financieros, de acuerdo a las reglas establecidas por las bolsas, por las autoridades financieras, asi como por los propios intermediarios. El mercado de valores es el medio a través del cual las empresas y gobiernos pueden acceder al financiamiento y los particulares e instituciones a la inversión de sus ahorros. En la tabla 1.1 se presenta una clasificación del mercado de valores; podemos observar que el **mercado de derivados** se caracteriza por su liquidación a futuro.

En el mercado de derivados se comercian los productos derivados, los cuales implican compromisos futuros para comprar o vender bienes, los llamados bienes subyacentes[4], a un precio fijo. Los bienes subyacentes que se pueden comprar o vender en el mercado de derivados generalmente son bienes básicos (materias primas, productos agrícolas, metales preciosos) o bienes financieros (acciones, divisas). También, hay subyacentes que en realidad no son propiamente bienes, sino índices financieros, por ejemplo, las tasas de interés o los índices bursátiles.

La razón por la cual son llamados **productos "derivados"** es porque son contratos financieros cuyo valor depende del valor del bien subyacente. En otras palabras, el valor del producto derivado "**se deriva**" del valor del bien subyacente. La definición más común que se maneja en finanzas sobre un producto derivado es la siguiente: **Un producto derivado es un contrato financiero cuyo valor depende de otro bien subyacente.**

[4] En lo sucesivo se hará referencia a ellos como bien, bien subyacente o subyacente.

Tipos de Clasificación	Características
Por vencimiento de obligación	
Mercado de dinero	Este se refiere a la transferencia de recursos a corto plazo, generalmente a un año. Tiene reducido riesgo y alta liquidez.
Mercado de capitales	Este se refiere al intercambio de valores, por ejemplo acciones, cuyo objeto es satisfacer las necesidades de financiamiento a largo plazo, tanto propios como ajenos, generalmente mayor a un año.
Por la fase de la negociación	
Mercado primario	Este se constituye por las operaciones en que empresas o gobiernos reciben dinero fresco como pago de nuevas acciones u otros valores que ofrecen a sus accionistas o al público en general a través de la bolsa, es decir, por la colocación de una nueva emisión de valores.
Mercado secundario	Este se refiere al mercado de instrumentos financieros que ya fueron emitidos al mercado anteriormente por el emisor original. La transferencia es únicamente entre el comprador y el vendedor, y la empresa emisora cuyas acciones son objeto de la compra-venta usualmente no tiene nada que ver en estas operaciones.
Por entrega inmediata o futura	
Mercado *spot* o en efectivo	En este mercado se comercia un instrumento financiero para su entrega inmediata (o en un plazo de tipo corto de uno o dos días).
Mercado de derivados	**Este es el mercado en que el plazo prefijado de liquidación de la operación es a futuro, es decir, entre 3 meses y 3 años después de la negociación de la transacción.**
Por estructura organizacional	
Mercado de subasta	Este mercado tiene un sistema centralizado para la publicación de las órdenes de compra y venta, donde el vendedor junta a todos los compradores potenciales (siendo por lo tanto una estructura menos fragmentada) y se asegura una formación de precios más uniforme.
Mercado de mostrador	El mercado de mostrador es para las acciones no listadas en la bolsa. Hay negociación directa entre comprador y vendedor, generalmente fuera de la bolsa.
Mercado de intermediado	No hay trato directo entre comprador y vendedor sino se hace a través de un agente intermediario que opera en la bolsa.

Clasificación del mercado de valores
Tabla 1.1

El mercado de derivados permite a un agente comerciar algún bien, sin que ese agente en ese momento tenga disponibles los recursos para cubrir el valor total de dicho bien. Lo que hace es pactar el contrato y fijar el precio al cual se realizará la compra-venta del bien en un plazo futuro. Cumplido el plazo se lleva a cabo el contrato, se realiza el pago y la entrega del bien.[5]

[5] La entrega física o no del bien, depende del tipo de bien que se esté comercializando. Por ejemplo, en el caso de índices financieros, los cuales no existen físicamente, se realiza el pago en efectivo.

En los años setenta, la introducción en muchos paises del régimen de libre flotación de los tipos de cambio de divisas, los déficits públicos crecientes de muchos gobiernos, así como las altas tasas de inflación, ocasionaron una volatilidad muy grande en los precios de los mercados de valores a nivel mundial. Los productos derivados surgieron como instrumentos de cobertura ante la necesidad de gestionar adecuadamente los riesgos asociados a esta inestabilidad. A partir de entonces el mercado de derivados ha crecido de manera importante y sin precedentes.[6]

I.1.2 FUNCIONES Y RIESGOS DEL MERCADO DE DERIVADOS

El mercado de derivados tiene tres funciones importantes:

- Es un mecanismo eficiente para la distribución del riesgo[7]
- Sirve para especular sobre las fluctuaciones en los precios[8]
- Permite pronosticar el precio del bien subyacente y su probable desarrollo en el futuro[9]

En la actualidad existen diversos tipos de riesgos (véase tabla 1.2). La sofisticación, complejidad y globalización de los mercados financieros, así como los avances tecnológicos en computación y comunicaciones, y la competencia internacional han ayudado a la aparición de riesgos financieros más complejos y diversos. Así que la necesidad de protegerse y anticiparse a los cambios futuros del entorno es una parte integral de cualquier actividad económica que involucre incertidumbre.

[6] Hoy en día, tan solo los bancos de Estados Unidos tienen contratos de productos derivados que involucran a un monto de 25 millones de millones de dólares (US$25,000,000,000,000); Baumohl, 1998. Este monto es superior al tamaño de las economías de Estados Unidos, Europa y Japón combinadas, mientras que a principios de los años setenta era casi cero. Actualmente, los cinco mercados de derivados más grandes del mundo, medidos por número de contratos, son el *Chicago Board of Trade* (CBOT), *London International Financial Futures and Options Exchange* (LIFFE), *Chicago Mercantile Exchange* (CME), el mercado de Frankfurt, Alemania (DTB) y el de París (MATIF); Edwards, 1998.

[7] Es decir, se distribuye el riesgo entre aquellos agentes que desean eliminar o reducir el riesgo, por un lado, y aquellos que están interesados en asumir ese riesgo, por el otro.

[8] Esto implica tomar una posición riesgosa con la finalidad de obtener una ganancia.

[9] Esta función ayuda en la predicción del futuro y en la toma de decisiones de consumo e inversión. Por ejemplo, el 18 de enero de 1999 se informó en el periódico *Reforma* que los futuros sobre el peso a marzo de 1999 se ubicaron en 10.7354 pesos por dólar, a junio en 11.4286, a septiembre en 12.1359, y a diciembre de este mismo año en 12.8866 pesos por dólar. Esto sirve como información acerca del probable desarrollo del tipo de cambio peso/dólar de enero a diciembre de 1999.

Tipo de riesgo	Descripción	Ejemplos
Riesgo de mercado	El riesgo de pérdida debido a cambios adversos en las condiciones y precios de los mercados financieros	Riesgo de tipo de cambio Tasa de interés Riesgo de liquidez
Riesgo de crédito	El riesgo de pérdida debido al incumplimiento de una contraparte en una transacción financiera.	Riesgo de liquidación Riesgo de entrega Riesgo de país
Riesgo tecnológico y operacional	El riesgo de pérdida debido a sistemas inadecuados, errores humanos o de la administración.	Riesgo de proceso Riesgo de valuación Riesgo de revaluación
Riesgo legal	El riesgo de pérdida debido a aspectos legales o regulatorios de las transacciones.	Riesgo de adecuación Riesgo de incumplimiento
Riesgo general del negocio	Otros riesgos financieros que no se contemplan en las categorías anteriores.	Riesgo de reputación Riesgo de eventos

Fuente: Medina, 1996.

Tipos de riesgo
Tabla 1.2

En el caso de los productos derivados el tipo de riesgo que le concierne es el riesgo de mercado. Dentro del cual, el riesgo de tipo de cambio es tal vez el más conocido y visible de los riesgos. Este riesgo afecta a los agentes que mantienen operaciones comerciales en divisas, por ejemplo, en dólares, como es el caso de empresas exportadoras e importadoras, riesgo que a su vez desencadena otros tipos de riesgo, como fluctuaciones en tasas de interés. Los productos derivados proporcionan la oportunidad para protegerse contra estos riesgos.

Con respecto a la protección que ofrecen, varios autores comentan que no siempre es posible lograr dicha protección en la proporción requerida. En la mayoria de los casos los resultados obtenidos en dichas operaciones distan mucho de los espectaculares rendimientos que en teoria, de salir todo bien, podrian alcanzarse. Sobre todo cuando se está actuando en forma apalancada.[10] Es importante subrayar que el uso de los productos derivados debe de estar dentro de un entorno efectivo de control y administración de riesgos.[11] Ya que el mercado de derivados muchas veces se considera muy

[10] El concepto de apalancamiento se refiere a que con un porcentaje relativamente pequeño del valor total de una operación se puede acceder al compromiso correspondiente. Véase más adelante.
[11] Para mayores detalles véase Franco, 1996.

especulativo y de alto riesgo[12]. Sin embargo, si se mantiene un balance adecuado entre el apalancamiento y la propia capacidad de pago, hay menos posibilidades de meterse en problemas.[13]

Cuando se empezaron a negociar los primeros productos derivados sobre bienes agrícolas en el *Chicago Board of Trade* (CBOT) a mediados del siglo XIX, el primer problema que se enfrentó fue que si los precios subían durante la etapa de la cosecha, los agricultores decidían no cumplir su contrato, buscando vender más caro su producto en el mercado *spot*. Si había una plaga o sequía, entonces los productores no podían cumplir la entrega de la mercancía ya que no contaban con ésta; en tanto que si los precios de los bienes caían, entonces los compradores no cumplían, ya que preferían adquirir la mercancía a precios más bajos en el mercado *spot*. Este riesgo de incumplimiento por la contraparte cae en la categoría de riesgo de crédito identificado en la tabla 1.2.

Con todos estos hechos, alrededor de 1860 las bolsas de Chicago decidieron crear una institución que hiciera cumplir estos contratos. De esta manera, se estableció la primera **cámara de compensación** (*clearing house*) en forma organizada.[14]

I.1.3 LA CÁMARA DE COMPENSACIÓN Y LOS MÁRGENES

La cámara de compensación es una institución que realiza la contabilidad central de los depósitos de todos y cada uno de los participantes del mercado de derivados. Actualmente, en todos los mercados de de rados existe una cámara de compensación. Otra de sus funciones es garantizar que las dos partes de una transacción cumplan con sus obligaciones. Al vencimiento del contrato, en caso de incumplimiento de alguna de las partes, la cámara tendrá que realizar la entrega que estipula el contrato a la parte indicada a cambio del pago correspondiente, y luego procederá legalmente contra la otra parte por incumplimiento de contrato.

---

[12] El riesgo en el mercado de productos derivados se vuelve "mortal" cuando los participantes toman posiciones desproporcionadas con su capacidad de pago y de inversión.

[13] Por desgracia, la avaricia ha llevado a la ruina a diversos inversionistas que han tratado de obtener jugosas ganancias en el mercado de derivados. Al final de este capítulo se describen dos de los casos más polémicos asociados con la utilización de derivados.

[14] Véase Parnell, 1996.

La cámara nunca toma una posición abierta sino que espera a que existan ofertas y demandas para cubrir cada una de ellas convirtiéndose así en comprador para el vendedor y vendedor para el comprador. En un contrato de este tipo, el comprador y el vendedor no necesariamente se conocen. El intercambio se realiza a través de la intermediación de una cámara de compensación.

Otra función de la cámara de compensación es administrar los **márgenes** que depositan las contrapartes de un contrato. Los márgenes tienen como propósito:

- Garantizar el cumplimiento del contrato por parte de cada uno de los participantes o por lo menos minimizar el incumplimiento
- Crear un fondo de garantía
- Permitir la realización del ajuste diario que resultará de los movimientos en los precios que se traducen en pérdidas o ganancias para los inversionistas

Al momento en que se pacta un contrato de derivados, las contrapartes (o, en algunos casos, una de las contrapartes) depositan en una cuenta una cantidad de dinero y/o valores, conocida como **margen inicial**, a favor de la cámara de compensación. Esta aportación representa un porcentaje del contrato y varía en función de la volatilidad del bien subyacente, de tal manera que mientras más volatilidad exista, mayor es el margen demandado y viceversa. Este margen generalmente comprende entre el 2 y el 10 por ciento del valor de la posición.

El **margen de mantenimiento** es el límite mínimo aceptado, al disminuir la cuenta de márgenes de un inversionista como resultado de un movimiento desfavorable de precios. Cuando la cuenta se coloca por abajo del margen de mantenimiento, el inversionista es requerido para depositar un margen adicional, para reconstituir el margen inicial, lo cual se hace mediante un **"aviso de margen"**. El margen de mantenimiento se encuentra entre el 70 y el 75 por ciento del margen inicial. Este margen asegura que el valor de la cuenta nunca será negativo.

Un comprador o vendedor recibe un "aviso de margen" cuando el mercado se mueve en su contra y el valor neto depositado en la cuenta de margen o fondo de compensación cae por abajo del margen inicial y excede el margen de mantenimiento. Si el agente no hace frente al "aviso de margen" y no realiza las aportaciones solicitadas, el contrato queda automáticamente cancelado, y pierde todos los márgenes depositados hasta ese momento. En cambio, si el mercado se mueve a favor de un inversionista y el valor neto de cuenta de margen supera el margen inicial, resulta **"un margen de variación"**, que es el excedente en la cuenta de márgenes. El agente puede retirar el efectivo excedente si lo desea.[15]

I.2. PRODUCTOS NEGOCIADOS EN EL MERCADO DE DERIVADOS

El tipo y el número de combinaciones de productos derivados que se pueden diseñar e implementar en la práctica es muy extenso.[16] Sin embargo, existen varias características genéricas que distinguen los derivados de otros valores financieros tales como acciones y títulos de deuda:

- Requieren la entrega de algún bien en una fecha futura predeterminada a un **precio fijo**.
- La persona que adquiere el derivado se denomina el **comprador** del derivado
- La persona que emite un derivado se llama el **vendedor**, emisor o escritor (*writer*) del derivado
- Siempre existen **fechas límite** para liquidar la operación[17]
- Su uso implica **apalancamiento**
- Su función es proporcionar una oportunidad a los participantes del mercado para **protegerse contra los riesgos** financieros o de otra naturaleza

Dentro de los productos derivados existen dos productos básicos: los **futuros** y las **opciones**, y a partir de ellos se construyen diferentes tipos de productos derivados. A continuación se describen algunos de los productos derivados más comunes: futuros, *forwards*, opciones y *warrants*.

---

[15] Para mayores detalles sobre márgenes véase Parnell, 1996.

[16] En la actualidad existen gran diversidad de productos derivados: opciones, futuros, *swaps*, *forwards*, *warrants*, opciones de prima cero, los *collars* o opciones participativas, etc. En este trabajo sólo se verán algunos en forma general.

[17] Es decir, en contraste con una inversión, por ejemplo, en acciones, la cual nunca amortiza y en el extremo se podría mantener por tiempo indefinido, en el caso de productos derivados existe una fecha de vencimiento o de ejercicio, raramente superior a dos o tres años.

I.2.1 FUTUROS Y *FORWARDS*

- **Futuros**

Los **futuros** son uno de los tipos de productos derivados más simples, mediante los cuales las dos partes participantes se **obligan** a comprar o vender un bien subyacente en una fecha futura a un precio fijo.

Una parte acuerda comprar el bien y la otra se compromete a venderlo. Ambas partes están obligadas a cumplir. Ninguna de ellas carga una prima a la otra. El contrato está totalmente **estandarizado**, es decir, en él están establecidas las características del bien subyacente (cantidad, calidad, etc.), el lugar y la fecha de entrega, y la forma de liquidación. Los únicos factores que se negocian (o sea, que no están estandarizados) son el precio de ejercicio y el número de contratos.

Las características fundamentales de los futuros son:[18]

- El comprador del futuro tiene la obligación de comprar el bien subyacente al precio especificado en la fecha especificada; el vendedor la obligación de venderlo
- Se comercializan en casas de bolsa
- Están estandarizados
- Están disponibles para inversionistas pequeños, aunque inversionistas grandes también los utilizan
- Tienen una liquidez considerable, esto significa que son instrumentos relativamente fáciles de comprar y vender
- Conllevan poco riesgo de incumplimiento
- La entrega del subyacente raramente ocurre en la práctica, debido a que muchas veces los agentes toman posiciones de compensación[19] o pagan sólo la diferencia

---

[18] Véase Etling, 1997.

[19] Se ha observado que en el 98 por ciento de los casos se cancela la operación global al efectuar la operación contraria, es decir, comprar lo que previamente se vendió; o vender lo que previamente se compró. Esto se llama tomar una posición de compensación. Sólo por excepción se llega deliberadamente al vencimiento del plazo con posiciones abiertas. En este sentido el futuro es equivalente a un seguro.

- *Forwards*

Los ***forwards***[20] no son otra cosa que futuros, pero negociados en el mostrador, es decir, directamente entre comprador y vendedor, no en la bolsa. Los contratos *forwards* se elaboran de acuerdo con las necesidades de los participantes, los cuales acuerdan y detallan cuidadosamente la cantidad y calidad del bien, el plazo, el lugar de entrega y la forma de liquidación.

Este tipo de instrumento derivado es más **"a la medida"**. La realización del contrato es privada y no a través de la cámara de compensación como en el caso de los futuros. La relación entre las partes y su calidad crediticia determinan la cantidad del depósito de los márgenes. Las pérdidas y ganancias se realizan al vencimiento del contrato y no existen los avisos de margen.

En resumen, las características fundamentales de los *forwards* son:[21]

- Se comercializan en el mostrador
- Están personalizados, es decir, no estandarizados
- Están disponibles para inversionistas grandes y con capacidad de crédito
- Tienen baja liquidez; debido a que son personalizados es difícil venderlos
- Existe riesgo de incumplimiento, ya que no interviene la cámara de compensación
- La entrega usualmente se realiza (a diferencia de los futuros)

I.2.2 OPCIONES

Las **opciones** son productos derivados que dan al poseedor el **derecho, mas no la obligación**, de comprar (vender) una cierta cantidad de un bien a un precio específico en o antes de una fecha preestablecida. Después de esta fecha la opción deja de existir. El vendedor de la opción está, en cambio, **obligado** a vender (comprar) esa cantidad al (del) comprador de la opción. El comprador del contrato (el que adquiere la opción) debe pagar al vendedor (el que asume la obligación) una cuota, a la cual se le llama **precio o prima de la opción, siendo éste el valor que buscaban calcular Black,**

[20] También son conocidos como contratos adelantados o contratos a plazo.

Merton y Scholes.

Hay que enfatizar que el contrato de opción da al propietario sólo la opción de comprar o vender, esto es, no tiene la obligación. Esta es una característica que distingue a las opciones de los futuros, los cuales son obligatorios para las dos contrapartes. Por consiguiente, el costo de los futuros es prácticamente nulo, mientras que las opciones tienen un precio, la prima de la opción.

Debido al auge que han adquirido los mercados de derivados en las últimas décadas, pareceria que los derivados en general y las opciones en particular son instrumentos financieros de creación reciente. Sin embargo, los derivados no son un invento reciente sino tienen una historia larga y variada.[22]

I.2.2.1 HISTORIA DE LAS OPCIONES

La Biblia (Génesis, 29) contiene la primera referencia a una opción de mercado. El incidente sucedió cuando Jacob deseaba casarse con Raquel, la hija pequeña de Labán. Éste aceptó siempre que Jacob le pagara primero con siete años de trabajo. Se puede ver que las opciones ya tuvieron un mal comienzo ya que Labán no cumplió el contrato y entregó a Jacob su hija mayor Lea.

Los fenicios, griegos y romanos ya negociaban contratos con cláusulas de opción sobre las mercancias que transportaban en sus naves. Existe una anécdota de la ganancia que obtuvo el filósofo, matemático y astrónomo griego Tales. Un invierno Tales previó que la cosecha de aceitunas del otoño siguiente seria abundante. Tomó el poco dinero que tenia y visitó a todos los propietarios de prensas de aceitunas de la zona, colocó pequeños depósitos en cada una para tener una opción sobre el uso de las prensas cuando llegara el otoño. Cuando llegó el tiempo de la cosecha, y hubo mucha demanda de prensas debido a la cosecha abundante, Tales las dejó a precios altos e hizo mucho dinero (Burton, 1997).

[21] Véase Etling, 1997.
[22] Véase, por ejemplo, Lamothe, 1997.

Los primeros antecedentes de los mercados modernos de opciones se sitúan en Holanda en el siglo XVII, utilizados para comerciar tulipanes. Las opciones sobre tulipanes crecieron tanto que se provocó la quiebra de muchos especuladores, lo cual extendió la idea en Europa de que los mercados de opciones eran muy peligrosos y excesivamente especulativos. En Inglaterra fueron declarados ilegales en 1733, prohibición que duró hasta 1860.

Aunque las opciones se habían venido negociando con más frecuencia de manera informal en diferentes países desde mediados del siglo pasado, no fue sino hasta el 26 de abril de 1973 cuando el *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) empezó a operar opciones en forma organizada.[23]

A continuación se explican algunos conceptos básicos, con la finalidad de familiarizarse con el lenguaje de las opciones y su funcionamiento.

I.2.2.2 CONCEPTOS BÁSICOS Y FUNCIONAMIENTO

- **Precio del bien subyacente**

Dentro de las opciones se manejan tres diferentes precios y es muy importante no confundirlos. Este primer precio es el precio de cotización del bien subyacente en el mercado, al cual dicho bien puede ser vendido o comprado.

- **Precio de ejercicio**

El segundo precio es el precio de ejercicio (*strike price*), el cual es el precio establecido en el contrato de la opción al cual se puede vender o comprar el bien subyacente (más no en el mercado) al momento del vencimiento del contrato.

[23] Es decir, opciones estandarizadas, listadas en bolsa y reguladas por el gobierno. Las primeras opciones negociadas fueron opciones *call*. Así es como nace el primer mercado organizado de opciones. El 3 de junio de 1977, el mismo CBOE inició también las negociaciones de opciones *put*. Más adelante se explicará qué son las opciones *call* y *put*.

- **Prima o precio de la opción**

Este último es el precio que el emisor cobra al comprador por un contrato de opción en el mercado. De acuerdo a la teoría de valoración de opciones, la prima de una opción es determinada en dos formas diferentes. Primero, si existe un mercado para una opción particular, la prima es fijada por el mercado (la ley de la oferta y la demanda). Segundo, Si la opción se vende en el mostrador, la prima se acuerda entre comprador o vendedor. En la práctica la prima de una opción incluye tanto el "valor teórico" de la opción como costos de transacción. El valor teórico de una opción, es aquel valor que no incluye costos de transacción sino sólo el valor al cual se puede vender un contrato de tal manera que no se obtenga una ganancia ni se incurra en una pérdida en la transacción.

En este trabajo, no se hace distinción entre los términos prima o valor de una opción. Sin embargo, es importante enfatizar que en este trabajo lo que se busca encontrar o determinar es el llamado valor teórico de una opción. **El modelo Black-Scholes permite calcular el valor de una opción.**

De acuerdo al derecho que otorga la opción se dividen en opciones ***call*** y opciones ***put***. Se ha encontrado que en algunos casos se traduce al español como opciones de compra y opciones de venta, respectivamente. Sin embargo, en este trabajo se manejan por su denominación en inglés.

- **Opciones *call***

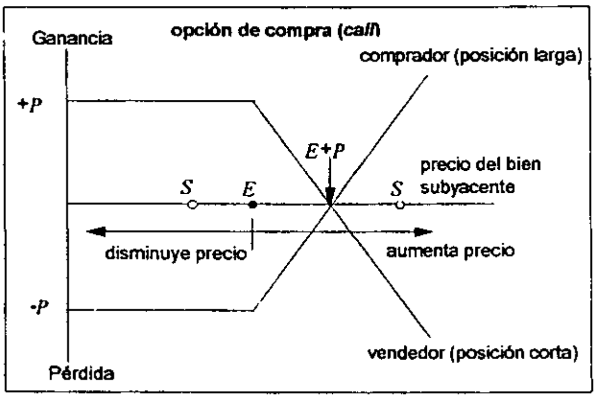
Una opción *call* da al poseedor el derecho de **comprar** una cierta cantidad de un bien subyacente a un precio específico en una fecha futura predeterminada.

Características fundamentales de las opciones *call*:[24]

- El comprador de la opción *call* **tiene el derecho**, más no la obligación, de comprar el bien subyacente al precio fijado antes o en la fecha de vencimiento
- El vendedor de la opción *call* **se obliga** a vender el bien subyacente al precio especificado si la opción es ejercida
- Generalmente vale más la opción "viva" que "muerta", es decir, en cualquier momento se

puede vender la opción a una prima mayor que la ganancia que se podría obtener en caso de ejercerla

Para ejemplificar una opción *call* supóngase que un exportador mexicano emite una opción *call* sobre maíz y un fabricante de cereales en Alemania la compra. El fabricante quiere asegurarse de un buen precio para el maíz que utiliza como insumo. El exportador se obliga mediante la opción *call* a vender una tonelada de maíz a un precio de ejercicio de $1,000 pesos.[25] La opción expirará en seis meses y tiene una prima de $50 pesos. El fabricante adquiere el derecho de comprar el maíz al precio de ejercicio. Si en la fecha de vencimiento el precio actual del maíz supera a los $1,000 pesos, por decir $1,080 pesos, el fabricante decidirá ejercer su derecho y comprar el bien al precio de ejercicio. Así obtendrá una utilidad neta de $30 pesos ($80 pesos por el aumento en el precio menos $50 pesos de la prima). Por su parte, el exportador incurre en una pérdida de $30 pesos.



Perfil de ganancia de una opción *call*
Gráfica 1.1

La gráfica 1.1 muestra el **perfil de riesgo**, también conocido como **perfil de ganancias**, para el comprador y el vendedor de una opción *call*. El eje de las ordenadas muestra las utilidades o pérdidas netas derivadas de un cierto movimiento en el precio del bien subyacente una vez que se ha comprado

[24] Véase Etling, 1997.

la opción; el eje de las abscisas indica el precio del bien subyacente en cualquier momento (S), el precio de ejercicio (E) y la prima de la opción (P).

El comprador de la opción paga una prima, la cual representa una pérdida neta, indicada como P en la gráfica. Si el precio del bien subyacente permanece por debajo del precio de ejercicio, el comprador no ejercerá la opción y ésta expira sin tener ningún valor. Por lo tanto, bajo dicho escenario el comprador únicamente pierde la prima. Por otra parte, si el precio del bien subyacente supera el E, el tenedor de la opción *call* la ejercerá. Mientras más alto sea el precio de mercado con relación al precio de ejercicio, mayor será la utilidad neta del comprador. Así lo muestra la línea con pendiente positiva. Dicha línea no corta el eje de las ordenadas en E; pues aunque el comprador de la opción *call* puede ejercerla en este punto, sus utilidades netas no son positivas sino hasta que recupere la prima, P. Por consiguiente, el comprador de una opción *call* tiene un riesgo conocido y limitado de pérdida, pero una posibilidad desconocida e ilimitada de ganancias.

La misma gráfica 1.1 muestra el perfil de ganancia del vendedor de la opción *call*. Se trata de la imagen invertida del perfil del comprador de la misma. El vendedor recibe la prima P. En la medida en que el precio del bien subyacente permanezca por debajo de E, la opción no se ejerce y el vendedor obtiene como utilidad la prima P. Pero si se ejerce, el vendedor está obligado a entregar o vender el bien subyacente al precio de ejercicio, E, que será menor al del mercado. Mientras mayor sea el precio en el mercado con respecto al precio de ejercicio, mayores serán las pérdidas netas del vendedor de la opción. Esto se representa por medio de la línea con pendiente negativa. Dicha línea no corta el eje de las abscisas en E, ya que aun cuando la opción se ejerza, el vendedor no registrará una pérdida neta, sino hasta que el precio del mercado sea tan alto en relación con el precio de ejercicio de manera que éste sobrepase al valor de la prima, P. Por consiguiente, el vendedor de la opción *call* tiene un potencial de ganancia conocido y limitado, pero un potencial de pérdida desconocido e ilimitado.

[25] Estos precios son inventados para construir el ejemplo.

- **Opciones *put***

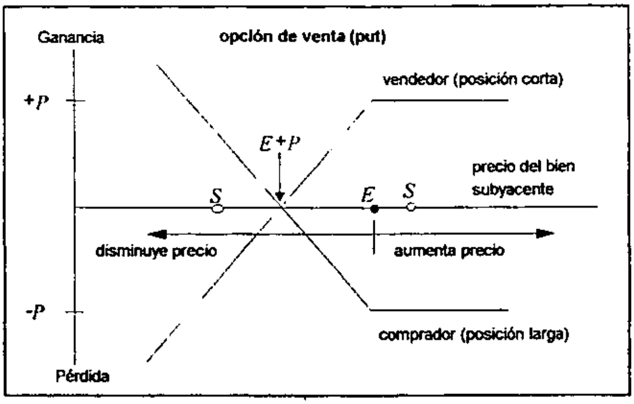
Una opción *put* da al propietario el derecho de vender un bien a la otra parte, de acuerdo a las características especificadas.

Características fundamentales de las opciones *put*:[26]

- El comprador de la opción **tiene el derecho** de vender el bien subyacente al precio especificado antes o en la fecha fijada
- El vendedor de la opción **se obliga** a comprar el bien subyacente al precio especificado si la opción es ejercida

Para ejemplificar una opción *put* imagínese que un exportador mexicano emite una opción *put* sobre maíz, la cual es comprada por un productor de maíz que quiere asegurar un buen precio para su cultivo. La opción establece un precio de ejercicio de $1100 pesos por tonelada de maíz, y expira en tres meses. El precio de la opción es de $60 pesos. El productor adquiere el derecho, más no la obligación, de vender su maíz a $1,100 pesos por tonelada el 31 de septiembre. Si el precio del bien en el mercado se sitúa por debajo de los $1,100 pesos, por decir en $1,020 pesos, el productor ejercerá la opción. Así obtendría una utilidad de $20 pesos ($80 pesos por la disminución en el precio menos $60 por la prima). El exportador está incurriendo en una pérdida de $20 pesos. Por el contrario, si el precio del maíz en el mercado es superior a los $1,100 pesos por tonelada, por ejemplo $1,180 pesos, el productor decidirá vender su producto en el mercado y perderá la prima de $60 pesos que pagó por la opción.

[26] Véase Etling, 1997.



Perfil de ganancia de una opción *put*
Gráfica 1.2

La gráfica 1.2 muestra el perfil de ganancia del comprador de una opción *put*. El comprador de la opción *put* paga una prima de P. Si el precio del bien se mantiene por encima del precio de ejercicio, la opción expira sin ningún valor. Por lo tanto, el comprador de la opción *put* podría perder la prima, pero nada más. En cambio, si el precio del bien cae hasta por debajo de E, el comprador de la opción *put* tiene el derecho de ejercerla y vender el bien subyacente al precio de ejercicio. Mientras más bajo sea el precio de mercado en relación al precio de ejercicio, mayores serán las ganancias para el comprador. Esto se muestra con la línea de pendiente negativa. Dicha línea no corta el eje de las abscisas en E, puesto que aun si el tenedor ejerce su opción de venta, sus utilidades netas no serán positivas en cuanto no recupere la prima, P. Por consiguiente, el comprador de la opción *put* tiene un riesgo conocido y limitado de pérdida, pero una posibilidad ilimitada de ganancias.

La misma gráfica 1.2 muestra el perfil de ganancias del vendedor de la opción *put*. Se trata de la imagen invertida a la del perfil de ganancias del comprador de la opción *put*: el vendedor de la opción *put* recibe la prima, P. En la medida que el precio del bien subyacente permanezca más alto que el precio de ejercicio E, éste se queda con la prima. Sin embargo, una vez que se ejerce la opción, el vendedor de la misma está obligado a comprar el bien subyacente al precio de ejercicio. Mientras menor sea el precio de mercado respecto al precio de ejercicio, mayores serán las pérdidas netas del vendedor de la opción *put*. Esto se representa por medio de la línea con pendiente positiva, la cual no corta el eje de las abscisas en E, ya que incluso cuando se ejerce la opción el vendedor no registrará una pérdida neta, sino hasta que el precio del mercado sea más bajo que el precio de ejercicio, generando una pérdida que supere a la ganancia neta obtenida de la prima. De esta manera, el vendedor de la opción *put* tiene una ganancia conocida y limitada, pero una pérdida desconocida e ilimitada.

- **Opciones americanas y europeas**

Las opciones también se clasifican de acuerdo al momento de ejercicio:

- **opciones americanas**: este tipo de opciones pueden ser ejercidas en cualquier momento desde la firma del contrato hasta la fecha de expiración, es decir, durante la vida de la opción
- **opciones europeas**: este tipo de opciones pueden ser ejercidas solamente en la fecha de vencimiento

Esta terminología no es muy precisa, ya que actualmente ambos estilos se comercian tanto en EE.UU. como en Europa. Sin embargo, en EE.UU. las opciones sobre acciones tradicionalmente se han podido ejercer en cualquier día desde la fecha de adquisición hasta su vencimiento. En cambio, cuando surgió el primer mercado organizado de Europa, el *European Option Exchange* de Amsterdam, en 1977, decidieron que los contratos negociados en dicho mercado tendrían una única y exclusiva fecha de ejercicio.

I.2.2.3. OPCIONES FINANCIERAS

- **Opciones sobre índices bursátiles**

Muchas bolsas del mundo cotizan opciones sobre índices bursátiles. Hay que señalar que estas opciones aparentemente no satisfacen ninguna necesidad de limitar riesgos (como, por ejemplo, las opciones sobre tipos de cambio que reducen los riesgos para los importadores y exportadores). Más bien parece que las opciones sobre índices bursátiles sólo sirven para especular. Por ejemplo, se cotizan opciones sobre el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de México, el Indice Nikkei 255 de Japón, los indices *Standard & Poor's* (S&P) 100 y S&P 500 de EE.UU., entre otros. A cada punto del indice de que se trata se le asigna cierto valor monetario, toda vez que el propio índice no tiene precio.

Supóngase que el IPC se encuentra en 4,400 puntos el dia de hoy y que un agente compra una opción *call* sobre el indice con un precio de ejercicio de 4,425 puntos. Además supóngase que cada punto del indice se le asigna un valor de $10 pesos. Si el indice aumenta a 4,500 puntos, la opción tiene una ganancia bruta de 75 puntos (igual a $750 pesos), y por lo tanto puede ser ejercida.

La liquidación de este tipo de instrumentos es sólo en efectivo, a diferencia de las opciones sobre otros bienes que pueden ser liquidadas en especie o efectivo. La cantidad de dinero depende del prospecto de colocación y del indice. Muchas veces el indice se cotiza en US$10 por punto. Otro caso es el indice S&P100, que se cotiza en US$100 por punto.

- **Opciones sobre tipo de cambio**

Para un importador o exportador que desea cubrirse del riesgo cambiario, las opciones sobre divisas son una alternativa a las fluctuaciones futuras. Por ejemplo, una empresa exportadora que vaya a recibir un pago en colones costarricenses a una fecha dada y conocida puede cubrirse del riesgo cambiario si compra una opción *put* sobre colones que venza en esa fecha. Esto garantiza que el valor de los colones no será menor que el precio de ejercicio, pero además le permite a la compañía beneficiarse en caso de que existan movimientos favorables en el tipo de cambio.

Una opción sobre divisas proporciona una especie de seguro cambiario opcional, mientras que un futuro sobre divisas es obligatorio y cierra la operación futura a un tipo de cambio fijado el dia de la adquisición del contrato. Por supuesto, el seguro no es gratuito y se tiene que pagar una prima.

- **Opciones sobre tasas de interés**

Una opción sobre tasas de interés es un contrato que da derecho a su comprador de obtener u otorgar un préstamo a una tasa determinada durante una fecha o período prefijado.

El activo subyacente de las opciones en tipos de interés puede ser un título de deuda pública o un interés bancario. En el caso de las opciones sobre títulos de deuda pública, la compra de un *put* protege de una subida de las tasas de interés y la compra de un *call* de un descenso.

- **Opciones sobre futuros**

Las opciones sobre los futuros tienen los siguientes beneficios sobre los propios contratos de futuros:

- Las opciones le ponen un límite a la pérdida mientras que los futuros no lo hacen
- Las opciones sobre los futuros le permiten a los productores de mercancías cubrir tanto el riesgo de precio como el riesgo de cantidad, mientras que los futuros permiten sólo la cobertura del riesgo precio

- **Warrants o títulos opcionales**

Una de las opciones financieras más populares es el llamado ***warrant***, o título opcional, que no es otra cosa que una opción *call* a largo plazo (más de un año) y de mostrador. Un *warrant* proporciona al comprador el derecho de adquirir un número fijo de acciones ordinarias de una compañía (misma que generalmente es el propio vendedor del *warrant*). Aunque menos común, también existe el *warrant* que da el derecho a *vender* una acción ordinaria a un precio prefijado.

Existen algunas diferencias sútiles entre el *warrant* y la opción *call*.[27] En primer lugar, las opciones *call*, en su forma más conocida, son negociadas en un mercado secundario de productos derivados. Los *warrants*, por el contrario, son negociados directamente entre vendedor y el comprador.[28] En segundo lugar, el plazo de los *warrants* suele ser mayor a un año, mientras que el plazo de las opciones *call* generalmente no llega al año. En tercer lugar, cuando se emite un *warrant*, la empresa emisora deberá aprobar la ampliación de capital correspondiente por si los compradores de la opción deciden ejercerlo. Esto no ocurre con las opciones *call*, que en general no son más que apuestas sobre el valor de una

[27] Véase Mascareñas, 1998

acción, es decir, el propietario de la opción en la gran mayoría de las veces querrá el dinero que refleje su ganancia y no la acción en concreto.

I.2.2.4 COMPARACIÓN ENTRE UNA INVERSIÓN EN OPCIONES Y OTRA EN ACCIONES

A continuación se presenta un ejemplo de comparación entre una inversión en acciones y otra en opciones, con la finalidad de comprender las ventajas y desventajas que ofrecen las opciones como una alternativa de inversión.

Supóngase que un inversionista quiere invertir $10,000 pesos en este momento y eventualmente una cantidad mayor después. El inversionista está interesado en las acciones de ALFA. El precio actual de la acción de ALFA es de $40 pesos[29] y la opción de compra sobre ALFA con fecha de vencimiento a 30 días tiene un precio de ejercicio de $41. La opción se está vendiendo por $2. Por lo anterior, el inversionista tiene dos alternativas para invertir:

1.- Comprar 250 acciones a $40.

2.- Comprar 5,000 opciones a $2.

Para efectos de este ejemplo existen dos escenarios posibles que pueden pasar dentro de 30 días:

a) que el precio de la acción ALFA se incremente a $46

b) que el precio de la acción ALFA baje a $36.

Los resultados posibles en cada uno de los dos escenarios son los siguientes:

Alternativa 1.- El inversionista compra las 250 acciones a $40 pesos el día de hoy. Si el precio de la acción sube a $46, obtendrá una ganancia de $1,500 en total: 250 X ($40 - 46) = $1,500. Si la acción baja a $36 pesos obtendrá una pérdida de $1,000 en total: 250 X ($36 - 40) = -$1,000.

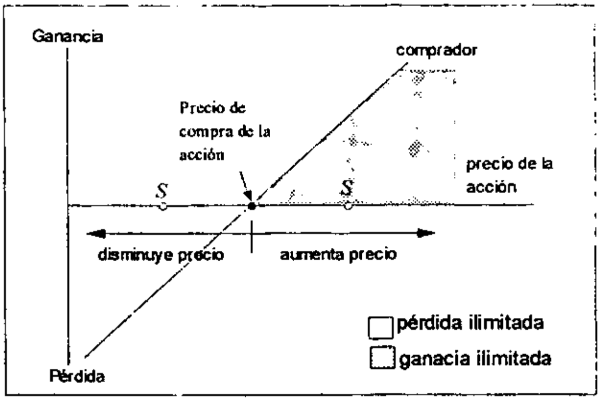
[28] Con la venta de *warrants* la empresa emisora recibe la prima del *warrant*, lo cual incrementa su activo, mientras que no recibe la prima de las opciones *call* sobre sus acciones negociadas en el mercado secundario.

[29] Los precios son inventados para efectos del ejemplo.

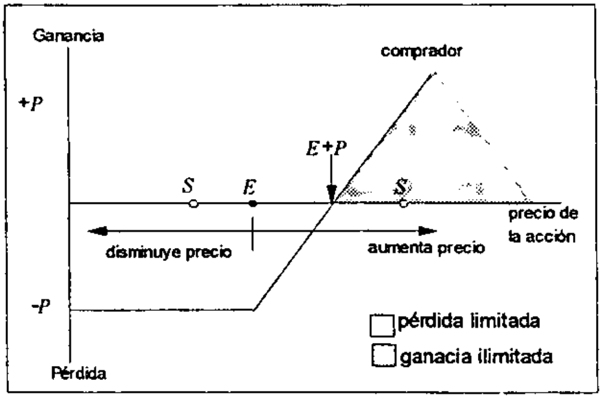
Alternativa 2.- El inversionista compra 5,000 opciones que le dan el derecho, pero no la obligación, de comprar las acciones de ALFA a $41. Si la acción sube a $46 entonces él puede ejercer su opción y puede comprar la acción a $41. Suponiendo que consigue más capital para invertir en ese momento, el inversionista podrá obtener una ganancia total de $15,000. Primero ejerce su opción y compra las 5,000 opciones ALFA a $41 cada uno (para eso necesita nuevos fondos por 205,000 pesos). Inmediatamente después vende esas acciones en el mercado a $46 cada uno, así obteniendo $230,000, y un beneficio bruto de $25,000. Restando el costo de las opciones de 5,000 X 2= 10,000, resulta una ganancia neta de $15,000.

Si la acción baja a $36, el inversionista no va a ejercer su opción ya que él tiene el derecho de comprar la acción a $41, pero en el mercado la puede encontrar más barata. Por lo tanto su pérdida es de $10,000 que fue el costo de las opciones.

En las gráficas 1.3 y 1.4 (esta última es similar a la gráfica 1.2) se demuestra cómo se mueven las utilidades en la compra de una acción y en la de una opción, respectivamente. La principal diferencia es que en la compra de una acción el riesgo de fluctuaciones en el precio es ilimitado tanto a la baja como al alza. En la compra de una opción el riesgo es ilimitado hacia un lado, pero limitado hacia el otro (en este caso para el comprador el riesgo a la baja es limitado).



Pérdidas y ganancias en la compra de una acción
Gráfica 1.3



Pérdidas y ganancias en la compra de una opción
Gráfica 1.4

Regresando a nuestro ejemplo, se puede observar que al comparar los resultados la alternativa de comprar 5,000 opciones es más lucrativa que comprar directamente las acciones si el precio de las acciones sube (ganancia de $1,500 versus $15,000, respectivamente). Sin embargo, si el precio de la acción baja, el precio de la opción de compra seria cero, por lo que la pérdida de la inversión en esa opción de compra seria total. En este caso es más lucrativo comprar la inversión directamente (pérdidas de $1,000 versus $10,000). Sin embargo, es importante mencionar que si la reducción en el precio de la acción es muy profunda, la opción siempre limita la pérdida máxima al costo de la prima, mientras que la caida en el precio de la acción en principio podría ser ilimitada. Por este motivo los especuladores muchas veces prefieren más el uso de las opciones.

Los derivados ofrecen un elevado efecto de apalancamiento, dando la posibilidad de una rentabilidad mayor que en otros instrumentos financieros. Este efecto se da gracias a que la inversión inicial que se requiere es baja, especialmente si se compara con lo que costaría invertir directamente en el bien subyacente. La rentabilidad obtenida sobre la inversión inicial con las opciones es 15,000/10,000=150 por ciento, porcentaje muy superior al que se hubiera obtenido comprando directamente la acción subyacente, que es de 1,000/10,000=10 por ciento.

I.3 CASOS POLÉMICOS RELACIONADOS A LA UTILIZACIÓN DE DERIVADOS

El protagonismo de los productos derivados en los mercados internacionales y su importante crecimiento ha venido aparejado en los últimos años con una preocupación notable por el control de los riesgos inherentes a su utilización.

Ciertos casos de pérdidas millonarias en los mercados de productos financieros derivados por parte de empresas prestigiosas han atraído la atención del público, de diversos grupos de estudio y de las propias autoridades supervisoras de estos mercados. Pero también han provocado mucho temor.

Entre los cinco escándalos financieros más grandes del mundo de los últimos años se tienen tres casos de transacciones en derivados. Véase la tabla 1.3. A continuación se describen más a detalle los dos casos que han recibido más atención en la prensa, a saber, los casos de Barings y del condado de Orange.[30]

[30] Para una descripción más amplia de esos casos, véase, entre muchos otros, Asiaweek Online, 1995, Boyce y Hewitt, 1998, Etling, 1997, Murphy, 1995, y Stern Business, 1995.

	Empresa	Fecha	Tipo de transacciones	Pérdidas
1.	Sumimoto Corp. (Japón)	junio 1996	Transacciones sospechosas en cobre	US$ 2.6 mil millones
2.	Orange County, California (EE.UU.)	diciembre 1994	derivados sobre tasas de interés	US$ 1.7 mil millones
3.	Metallgesellschaft AG (Alemania)	enero 1994	futuros sobre petróleo	US$ 1.5 mil millones
4.	Barings Plc. (Inglaterra)	febrero 1995	futuros sobre índices accionarios	US$ 1.4 mil millones
5.	Daiwa Bank Ltd. (Japón)	septiembre 1995	Transacciones en *T-bonds*	US$ 1.1 mil millones

Fuente: Bloomberg L.P., 1996.

Los mayores escándalos financieros
Tabla 1.3

- **El caso del banco británico Barings**

Uno de los hechos más dramáticos para los mercados financieros internacionales fue la quiebra del banco inglés Barings, en febrero de 1995.

El banco de Barings tenía en el mercado Oriental (Singapur y Japón), a uno de sus corredores de bolsa más inteligentes, Nicholas William Leeson, que estaba comerciando con derivados. Leeson "llevó" a la quiebra a uno de los bancos más famosos de Inglaterra con 233 años de antigüedad y que tenía como cliente a la reina Elizabeth. Leeson había obtenido inicialmente jugosas ganancias en los años 1992 y 1993 en futuros. De repente, debido a la caída de la bolsa de Japón, empezó a perder.

Leeson apostó fuertemente a futuros sobre el índice japonés Nikkei 255, esperando que el índice no siguiera cayendo, y que el mercado Japonés se recuperaría después de la caída por el sismo de Kobe. Sin embargo, por el contrario el índice continuó su caída. Leeson recibió varios llamados de margen, y empezó a vender opciones *put* y *call* sobre el índice Nikkei para juntar dinero y hacer frente a los llamados de margen. Sus posiciones de opciones se hubieran mantenido lucrativas si el Nikkei permanecía dentro de un rango estrecho. Pero el mercado siguió cayendo. Leeson logró convencer a sus superiores de Barings que le mandaran más dinero para hacer frente a los llamados de margen adicionales. Finalmente, el día 25 de febrero de 1995, cuando Leeson ya había acumulado pérdidas de

US$1.4 mil millones sobre los US$27 mil millones que apostó, Barings se declaró en quiebra. Finalmente el banco de Barings fue comprado por el banco holandés ING, asumiendo todas las deudas, al precio simbólico de una libra esterlina.

- **El caso del Condado de Orange**

El condado de Orange, California, fue forzado a la bancarrota como resultado de una pérdida de US$1.7 mil millones de inversiones que incluían derivados. El valor total del monto invertido antes de las pérdidas era de US$7.8 mil millones, sin embargo, el monto invertido fue apalancado casi de tres veces su valor.[31]

En 1994, el condado de Orange tenia fondos de inversión por US$7.8 mil millones. Sus dirigentes llevaron a cabo diversos acuerdos de recompra reversa (*reverse repurchase agreements*) que incrementaron los fondos disponibles para la inversión a US$19.5 mil millones. Mediante esos acuerdos de recompra reversa se venden valores para recomprarlos a un precio más alto en el futuro. Son equivalentes a préstamos de muy corto plazo, usualmente al día siguiente.

Posteriormente invirtieron US$ 11.5 mil millones en *T-bonds* (tesobonos del gobierno federal de EE.UU.) y obligaciones de diversas agencias gubernamentales. Muchos de estos últimos instrumentos eran altamente ilíquidos, es decir, difícilmente vendibles en el mercado. Además, el condado de Orange compró casi todos los papeles de una sola empresa, Fannie Mae, que fueron emitidos a través del banco de inversión Merrill Lynch durante el verano de 1993. Merrill Lynch también funcionaba como asesor al condado en ese tiempo. El condado mantuvo todos esos valores como colateral por los préstamos a corto plazo. El condado invirtió los US$ 8 mil millones restantes en notas estructuradas, primordialmente flotadores inversos.

En suma, el Condado asumió préstamos de corto plazo, e invirtió esos préstamos a largo plazo, así

[31] Cualquier apalancamiento incrementa la exposición al riesgo de mercado por la cantidad del apalancamiento, y tanto las ganancias como las pérdidas, si incurren, serán más grandes que si tales valores no fueran apalancados.

aprovechándose de la curva de rendimientos (*yield curve*). Dicha curva normalmente tiene una pendiente positiva, o sea que los rendimientos o tasas de interés son mayores para los préstamos e inversiones a largo plazo que para los de corto plazo.

Por mala fortuna, las tasas de interés de corto plazo subieron proporcionalmente más que las tasas de largo plazo (o sea que la pendiente de la curva de rendimientos disminuyó, aunque siguió siendo positiva) y la propia curva de rendimientos se movió hacia arriba. El valor de las inversiones de largo plazo del condado disminuyó cuando las tasas de largo plazo subieron (esto siempre es el caso con las obligaciones de renta fija). El condado no pudo cumplir con el pago de su acuerdo de recompra. Los tesobonos y obligaciones que tenía fueron liquidados a valores muy bajos. También perdió su inversión en los flotadores inversos, que son fuertemente influenciados por los cambios en las tasas de interés.

Estos casos han sido estudiados a fondo.[32] En el caso de Barings, como entidad financiera, los principales errores identificados fueron:

- Falta de controles internos de la empresa a nivel de alta gerencia
- Integración de las funciones de operación y control de riesgo de la empresa
- Inadecuada segmentación en posiciones propias y de clientes
- Insuficiente supervisión de posiciones, procedimientos y manejo de cuentas por parte del mercado y las autoridades financieras
- Equivocada evaluación del grado de cobertura en posiciones en Osaka a los riesgos de Singapur. Inexistencia de acuerdos de neteo entre bolsas. Falta real de capacidad de ejecución cruzada de posiciones
- Intentos de manipular el mercado con posiciones extremas
- Falta de determinación de las autoridades financieras y de los funcionarios del mercado para interrogar a la empresa con respecto de sus posiciones de riesgos
- Falta de simulaciones de riesgo ante movimientos extremos de mercado por parte de la cámara de compensación
- Inadecuado nivel de márgenes dadas las variaciones extremas del mercado

Los principales errores cometidos por entidades no financieras, particularmente en condado de Orange, fueron la falta de: (i) limites al riesgo claramente establecidos; (ii) comprensión de los mecanismos de ganancia; (iii) supervisión continua; y (iv) separación de funciones. Algunos de estos errores del condado fueron compartidos por Barings.

I.4 CREACIÓN DEL MERCADO DE DERIVADOS EN MÉXICO

La creación de un mercado mexicano de derivados es un proyecto que tiene una larga historia. El proyecto ha estado sujeto a distintas circunstancias que han ocasionado falsos inicios y suspenciones operativas. El 15 de diciembre de 1998, el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) finalmente inició operaciones.[33]

En México, la importancia de los instrumentos financieros derivados se hizo evidente a finales de la década de los setenta, con la negociación de los Petrobonos. En 1985 dejaron de cotizarse temporalmente los futuros sobre peso en Chicago, debido a que el gobierno mexicano restringió las liquidaciones del peso fuera de México.[34] Fue entonces que se inició la negociación de coberturas cambiarias, que ofrecía una protección contra los movimientos del tipo de cambio. Sin embargo, el mercado de coberturas ha mostrado algunas deficiencias, como el riesgo de convertibilidad a dólares después del vencimiento de la operación (las coberturas se liquidan en pesos), los impuestos, la poca liquidez y los riesgos de crédito de la contraparte. A principios de la década de los años noventa se inició la operación de títulos opcionales, mejor conocidos como *warrants*.

El éxito del mercado de *warrants* motivó al Consejo de Administración de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) a autorizar en 1994 un presupuesto para desarrollar el mercado de futuros y opciones financieras. A partir de ese año se trabajó en el diseño del mercado de derivados. El diseño contempla

[32] Véase, por ejemplo, Sabau García y Roa Béjar, 1997, y Hamilton, 1997.
[33] Negocios/Reforma, 15 de diciembre de 1998.
[34] Véase Parnell, 1996.

la creación de una nueva bolsa, el **Mercado Mexicano de Derivados (MexDer)** y una **Cámara de Compensación y Liquidación (Asigna)**.

El 23 de julio de 1996 se acordó proceder a la constitución del MexDer, con que se echa a andar una bolsa especifica para estos instrumentos. Lo que se busca es que las empresas reduzcan sus riesgos y tengan más certidumbre en cuanto a su planeación financiera, y también es un paso importante para que México se convierta en un centro financiero internacional.

El MexDer es una asociación anónima de capital variable con 192 acciones, y tiene entre sus accionistas casas de bolsa, bancos, personas morales y personas fisicas. Está regulado por el Banco de México, la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNVB) y la Secretaria de Hacienda y Crédito Público (SHCP). Para entrar al mercado se necesita un socio operador, ya sea un banco o un intermediario financiero.[35]

A partir del 14 agosto de 1996, se acordó proceder a la constitución de una Cámara de Compensación y Liquidación, Asigna, que es un fideicomiso de pago autónomo formado por 16 socios operadores del MexDer. Asigna es una institución de crédito, donde los socios liquidadores aportan recursos para construir el patrimonio de dicho fideicomiso. Las transacciones se realizarán en la bolsa de derivados, pero la cámara actuará poniéndose de parte tanto del comprador como del vendedor en cada operación, pidiendo márgenes a cada uno. El objetivo de Asigna es proveer la infraestructura y los mecanismos necesarios para asegurar el registro, compensación y liquidación de las operaciones que realicen los miembros del MexDer.

El programa de lanzamiento progresivo de contratos en MexDer es:[36]

- Futuros sobre el IPC de la BMV
- Futuros sobre dólar
- Futuros sobre bonos

[35] La BMV realiza cursos de certificación de profesionales: responsable de la operación con derivados, promotor de productos derivados, operador de productos derivados, y administrador de riesgos.

- Opciones sobre el IPC
- Primer paquete de opciones sobre acciones individuales
- Segundo paquete de opciones sobre acciones individuales
- Opciones sobre dólar
- Opciones sobre bonos

Aunque el MexDer arrancó con futuros sobre el dólar, la intención que se tiene para 1999, es agregarle otras alternativas, como puede ser el Indice de Precios y Cotizaciones(IPC) y más adelante, las acciones y tasas de interés. En el transcurso del año 1999 se tiene la intención de arrancar ya también con las opciones.[37]

En el Diario Oficial del 31 de diciembre de 1996 la SHCP emitió las "Reglas generales" a las que habrán de sujetarse las sociedades y fideicomisos que intervengan en el establecimiento y operación de un mercado de derivados. Cinco meses después, en el Diario Oficial del 26 de mayo de 1997, la CNBV emitió las "Disposiciones de carácter prudencial" a las que se sujetarán en sus operaciones los participantes en el mercado de futuros y opciones cotizados en bolsa.

Asigna utiliza la tecnología del sistema Intracs/400, el cual fue licenciado por la *Options Clearing Corporation* (OCC), con el fin de brindar la máxima seguridad a las operaciones y los más altos estándares internacionales en materia de liquidación, vigilancia de volatilidades, márgenes y control de riesgos. La OCC es la cámara de compensación más grande del mundo y realiza la compensación de los cinco mercados de opciones de Estados Unidos. A través de su filial *Intermarket Clearing Corporation* (ICC) realiza también la compensación de futuros financieros. La adopción de los estándares de la OCC permite unificar a todos los mercados norteamericanos en materia de compensación y liquidación de derivados estandarizados, ya que también el *Trans Canada Options Inc.*, el mercado de opciones de Canadá, se sujeta a estos estándares.

[36] Véase Nacional Financiera, 1997 (julio).
[37] Negocios/Reforma, 29 de marzo de 1999.

I.5 CONCLUSIÓN

El mercado de derivados es una herramienta indispensable para las ramas industrial y empresarial, así como para las instituciones financieras y los gobiernos para cubrirse contra diferentes tipos de riesgos de mercado: riesgo de tipo de cambio, tasa de interés, etc. Ante la inminente apertura de la Bolsa de Derivados en nuestro país, resulta de suma importancia detenernos a reflexionar sobre los riesgos inherentes al uso de estos productos y la necesidad de establecer ambientes apropiados de administración de riesgos en un entorno integral. El uso responsable de instrumentos derivados puede resultar enormemente útil si se toma en cuenta las ventajas que nos ofrecen para cubrir las exposiciones a los diversos riesgos producto de la incertidumbre que existe en la actividad financiera.

Los productos financieros derivados en general y las opciones en particular son una buena alternativa de inversión ya que se puede limitar el riesgo de pérdida. Sin embargo, calcular la prima de una opción había sido un problema sin resolver por mucho tiempo. El primer modelo que permitió calcular dicha prima y que tuvo una aceptación inmediata fue el modelo desarrollado por Black, Merton y Scholes. Este modelo tiene sus raíces en los procesos estocásticos. A fin de conocer las bases matemáticas sobre los que descansa el modelo Black–Scholes, el siguiente capítulo está dedicado a los procesos estocásticos y su relación con la valoración de bienes financieros.

CAPÍTULO II

PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y VALORACIÓN DE BIENES FINANCIEROS

En el capítulo anterior se ha visto que un producto derivado está asociado a un bien subyacente. En consecuencia, para los modelos de valoración de productos derivados se necesita hacer suposiciones concernientes a los movimientos futuros del precio del bien subyacente. En el presente capítulo se mencionan algunos procesos estocásticos de variable continua y tiempo continuo, tales como el movimiento Browniano, el movimiento Browniano geométrico, el proceso de Wiener y el proceso de Ito. Estos procesos son procesos de Markov[1] que se utilizan para modelar el comportamiento de bienes financieros.

[1] En un proceso de Markov los incrementos de la variable aleatoria son independientes del tiempo. En otras palabras, dada la probabilidad del estado presente, la probabilidad de los estados pasados no tiene influencia en la probabilidad de los estados futuros. Véase Anexo B.

II.1 LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y EL PRECIO DE BIENES FINANCIEROS

En la fluctuación de los precios de bienes financieros se distingue entre dos dimensiones, a saber, la dimensión de la propia variable y la dimensión del tiempo. En cuanto a la variable, en la economia **las fluctuaciones de los precios generalmente son tratadas como variables continuas.**[2] En cuanto al tiempo, hay que señalar que debido a la globalización de los mercados financieros, muchos precios cambian durante las veinticuatro horas del día aun cuando un mercado particular está cerrado. En consecuencia, es común modelar las sucesiones de precio de acciones y tasas de interés como variables aleatorias que siguen **procesos estocásticos de tiempo continuo** (Boyle, 1992).

En seguida se señalan algunas características importantes de los precios de bienes financieros:

- **El precio de una acción o de una divisa no puede ser negativo**, por lo que el proceso que describa su evolución ha de ser tal que impida la aparición de valores negativos
- Si bien puede haber movimientos importantes en el precio de una acción, **en la práctica estos movimientos casi nunca son exageradamente dramáticos**. Es decir, los precios de las acciones pueden variar en un 10 por ciento en un mismo día, pero no mucho más[3]

Dentro de los procesos estocásticos de Markov de tiempo continuo existen dos procesos fundamentales: (i) el **proceso de difusión** (Wiener, Browniano, Ito); y (ii) **el proceso de Poisson**. En el presente trabajo se estudian algunos procesos de difusión.

Un proceso de difusión es un proceso de Markov $\{ Z_t : t \in T \}$ que tiene espacios parametrales de tiempo continuo y estados de espacios continuos, para los cuales un pequeño cambio en t conduce sólo a un pequeño cambio en Z_t. Un ejemplo típico de un proceso de difusión, perteneciente a la física, es

[2] Muchos bienes financieros en la práctica siguen un proceso de variable discreta, es decir, los precios están limitados a valores enteros. Por ejemplo, el valor de un futuro en eurodólares sólo puede variar en múltiplos de un punto base, como podría ser 9,305 ó 9,306, pero nunca 9,305.5. No obstante, los movimientos mínimos son tan pequeños que muchas veces los precios son considerados como procesos continuos (véase Anexo B).

[3] Excepto en crisis financieras donde los precios pueden caer dramáticamente.

el movimiento Browniano (Figlewski, 1990).

II.2 EL MOVIMIENTO BROWNIANO Y SUS VARIACIONES

II.2.1 EL MOVIMIENTO BROWNIANO

Se denomina **movimiento Browniano** (*Brownian motion*)[4] a cierto movimiento de una micropartícula sumergida en un liquido o gas que cambia de posición continuamente en forma aleatoria.

La primera explicación del fenómeno Browniano fue dada en 1905 por Einstein y Smoluchowski, quienes demostraron que una partícula está en movimiento perpetuo a causa de los impactos continuos que recibe de las moléculas del medio que la rodea. Sin embargo, una definición rigurosamente matemática fue dada por Norbert Wiener en 1923 (Ross, 1997a).

El proceso del movimiento Browniano y sus variaciones ocurren en numerosas y diversas áreas de la ciencia pura y aplicada, tales como la fisica, economia, finanzas, teoría de la comunicación, biología, administración y estadística matemática (Taylor, 1998). Este modelo es una parte clave del modelo Black-Scholes.

El movimiento Browniano es un proceso de Markov que tiene la propiedad de que si el proceso se encuentra en el estado Z_t en el periodo t, éste permanece en Z_t o se traslada a algunos de los estados inmediatamente adyacentes en el periodo (t + 1). Ross (1997a) lo define de la siguiente manera:

Definición. Un proceso estocástico $\{ Z_t : t \geq 0 \}$ es un proceso de **movimiento Browniano** si:

(i) $Z_t = 0$ para $t = 0$;

(ii) $\{ Z_t : t \geq 0 \}$ tiene incrementos estacionarios e independientes; y

---

[4] Se llamó así en honor al botánico inglés Robert Brown, quien en 1827 observó por primera vez dicho fenómeno en el movimiento de las partículas de polen.

(iii) para cada $t > 0$, Z_t está normalmente distribuida con media 0 y varianza $\sigma^2 t$

Si σ es igual a 1 el movimiento browniano es llamado **movimiento Browniano estándar** (*standard Brownian motion*), también conocido como **proceso de Wiener**. En este caso Z_t está normalmente distribuida con media 0 y varianza t.

II.2.2 EL PROCESO DE WIENER

El proceso de Wiener desempeña un papel fundamental en la teoria de los procesos estocásticos de tiempo continuo. En finanzas juega un papel importante en el desarrollo teórico de los modelos de valoración de productos derivados (Boyle,1992).

Definición. Una variable z sigue **un proceso de Wiener** si cumple con las condiciones siguientes:

Condición 1.

$$dz = \varepsilon \sqrt{dt} \tag{2.1}$$

donde ε es una variable aleatoria con una distribución normal estándar[5] que representa la perturbación o error.

Condición 2.

Los valores de dz para cualesquiera dos intervalos diferentes en un tiempo pequeño son independientes.

De la primera condición se concluye que dz **tiene una distribución normal con media 0, varianza igual a dt y una desviación estándar $\sqrt{dt}$**. La segunda condición implica que z cumple con la propiedad de Markov, lo que significa que sigue un proceso de Markov.

[5] Es decir, una distribución normal con media cero y desviación estándar de uno.

Considérese el incremento en el valor de z durante un periodo de tiempo $(0, t)$. Este intervalo puede descomponerse en n subintervalos pequeños de tiempo Δt

$$t = \sum_{i=1}^{n} \Delta t$$

de manera que un cambio pequeño en z sobre uno de estos intervalos puede ser escrito como

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

De esta forma, sumando cada uno de estos incrementos se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} = z(t) - z(0) \tag{2.2}$$

donde ε_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ son valores aleatorios con una distribución normal estándar. De la condición 2, los ε_i 's son independientes entre sí, por lo que se concluye que $z(t) - z(0)$ está normalmente distribuida con media $\mu = n0 = 0$, varianza $\sigma^2 = n\Delta t = t$, y desviación estándar $\sigma = \sqrt{t}$. La media cero significa que el valor esperado de z en cualquier tiempo futuro es igual a su valor actual. La varianza t significa que la varianza del cambio en z en un intervalo de tiempo de longitud t es igual a t (Ross, 1997a). Este resultado está basado en el **teorema del límite central** de la distribución normal.[6] Por consiguiente, en cualquier intervalo de tiempo de longitud t el incremento en el valor de una variable que sigue un proceso de Wiener está distribuido normalmente.

En cálculo ordinario es usual proceder de pequeños cambios al límite cuando los cambios pequeños se

[6] Según este teorema, si una variable *Y* es igual a la suma de n variables independientes distribuidas normalmente, entonces *Y* también está distribuida normalmente. Por lo tanto, la media de *Y* es igual a la suma de las medias y la varianza de *Y* es igual a la suma de las varianzas.

acercan a cero, así como $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ llega a ser $\frac{dy}{dx}$ en el límite. A continuación se procede similarmente cuando se trata de procesos estocásticos de tiempo continuo. Un proceso de Wiener es el límite de convergencia cuando $\Delta t \to 0$ del proceso descrito anteriormente para z.

$$dz = z(t) - z(0) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} = \varepsilon \sqrt{dt} \tag{2.3}$$

donde las variables dz y $\sqrt{dt}$ representan el cambio infinitesimal en el valor de z y del tiempo, respectivamente (Hull, 1993). Existen algunas reglas de multiplicación para el proceso de Wiener que se utilizan comúnmente para hacer operaciones:

$$\begin{gathered}(dt)^2 = 0 \\ (dt)(dz) = 0 \\ (dz)^2 = dt\end{gathered} \tag{2.4}$$

II.2.3 EL PROCESO GENERALIZADO DE WIENER

Un **proceso generalizado de Wiener** para una variable x es definido en términos de dz como

$$dx = a dt + b dz \tag{2.5}$$

donde a es el coeficiente *drift*[7], b es el coeficiente de difusión, son constantes, y dz es un proceso de Wiener. El coeficiente de difusión b representa la variabilidad del *drift*. Este proceso se conoce también como **movimiento Browniano aritmético**. Se observa que el cambio en x puede ser expresado como

[7] No se hizo una traducción al español del término "*drift*" ya que no se encontró ningún término que lo tradujera en forma adecuada.

la suma de dos componentes: el **elemento determinístico** (el término dt) y el **elemento aleatorio** (el término dz)[8], dx hereda las propiedades de probabilidad de dz, por lo tanto está normalmente distribuido.

- **El elemento determinístico**

Para entender la ecuación (2.5) considérese los dos componentes del lado derecho en forma separada. El término adt representa la parte deterministica de la ecuación e implica que x tiene una tendencia esperada de a por unidad de tiempo. El término deterministico es generado por a. Sin el término bdz, la ecuación es

$$dx = adt$$

lo cual implica que

$$\frac{dx}{dt} = a$$

Integrando se obtiene

$$x = at + x_o$$

donde x_o es el valor de x en el tiempo cero. Por lo tanto, en un intervalo de tiempo de longitud t, x se incrementa por una cantidad $a\,t$.

- **El elemento aleatorio**

El término bdz de la ecuación (2.5) representa la parte estocástica y depende de b. Puede ser considerado como un ruido o perturbación agregada a la ruta que sigue x. La variabilidad de este ruido es b veces un proceso de Wiener y $b\sqrt{dt}$ representa la desviación estándar del término aleatorio.

[8] Véase Boyle, 1992.

La variable aleatoria dx es una transformación lineal de una variable normal. Así que el proceso generalizado de Wiener, dx, tiene una tasa de tendencia esperada por unidad de tiempo de adt y una varianza por unidad de tiempo de $b^2 dt$. En un intervalo de tiempo $(0, T)$, $x(T) - x(0)$ está distribuido normalmente con media at y varianza $b^2 t$. El proceso puede ser utilizado para modelar variables que crecen a una tasa lineal y muestra incrementos aleatorios a través del tiempo (Ross, 1997b).

Se puede pensar que un precio de una acción sigue un proceso generalizado de Wiener, es decir, que tiene una media constante y una varianza constante. Sin embargo, el proceso generalizado de Wiener no es totalmente adecuado para la valorar acciones o divisas ya que:

- Admite valores negativos de x, si se empieza con x ligeramente positivo y con unos cuantos dz negativos pronto se tendrá x negativo
- La varianza es independiente de x, por lo que seguirá teniendo el mismo valor cuando x es casi igual a cero que cuando x es muy grande
- Claramente, la suposición de que la tasa de flotación esperada es constante es inapropiada y será necesario remplazarla por la suposición de que la flotación esperada está expresada como una proporción del precio de la acción

Supóngase que μ es la tasa de rendimiento por unidad de tiempo y que σ^2 es la varianza de la tasa de rendimiento por unidad de tiempo. En consecuencia, se puede definir otra variación del movimiento Browniano que también se utiliza en la valoración de bienes financieros y que se conoce como movimiento Browniano con coeficiente *drift* μ y varianza σ^2.

Definición. Un proceso estocástico $\{ Z_t : t \geq 0 \}$ es un **proceso de movimiento Browniano con un coeficiente *drift*** μ **y varianza** σ^2 si:

(i) $Z_t = 0$ para $t = 0$;

(ii) $\{ Z_t : t \geq 0 \}$ tiene incrementos estacionarios e independientes; y

(iii) Z_t está normalmente distribuida con media μt y varianza $\sigma^2 t$

Este proceso se puede representar como

$$Z_t = \mu t + \sigma B(t)$$

donde $B(t)$ es un movimiento Browniano estándar equivalente (Ross, 1997a). A partir de este proceso se define el siguiente proceso, el movimiento Browniano geométrico. Es importante señalar que las teorías basadas en porcentajes y no en cambios absolutos son llamados "geométricos", por su parte las teorías basadas en cambios absolutos son llamados aritméticos (Chriss, 1997).

II.2.4 EL MOVIMIENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO

Definición. Si $\{Y(t),\ t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano con coeficiente *drift* μ y varianza σ^2, entonces el proceso $\{X(t),\ t \geq 0\}$ definido por

$$X(t) = e^{Y(t)} \tag{2.6}$$

es un **movimiento Browniano geométrico** (Ross, 1997a).

El movimiento Browniano geométrico es utilizado para modelar el precio de bienes financieros cuando las proporciones de los cambios del bien están distribuidos idénticamente y de forma independiente.

Sea S el precio de un bien financiero. **Si S sigue un movimiento Browniano geométrico, entonces sus rendimientos en un intervalo (0, T) siguen una distribución normal.**

Si se observa el valor de S en un intervalo (0, T) y se divide en n subintervalos donde i= 1, 2,..., n —por ejemplo, si $S_{t_{i-1}}$ es el precio del bien en el tiempo i - 1 y S_{t_i} el precio en el tiempo i— entonces la tasa de rendimiento de S en el intervalo *i-ésimo* de tiempo se define como (Clewlow, 1998):

$$d_{t_i} = \ln S_{t_i} - \ln S_{t_{i-1}} = \ln \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}$$

Si d_{t_n} denota la tasa de rendimiento del último subintervalo de tiempo entonces S en el tiempo n será igual a

$$S_{t_n} = S_{t_{n-1}} e^{d_{t_n}}$$

Para S en el tiempo n - 1

$$S_{t_{n-1}} = S_{t_{n-2}} e^{d_{t_{n-1}}}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación anterior

$$S_{t_n} = S_{t_{n-2}} e^{(d_{t_{n-1}} + d_{t_n})}$$

Repitiendo esto sucesivamente, se obtiene

$$S_{t_n} = S_{t_0} e^{(d_{t_0} + d_{t_1} + \dots + d_{t_{n-1}} + d_{t_n})}$$

Si d_T denota el logaritmo natural de S_T / S_0, el cual representa el rendimiento de S en el intervalo de tiempo (0, T), entonces

$$d_T = \ln\frac{S_T}{S_0} = \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} = \sum_{i=1}^{n} d_{t_i}$$

donde d_T es la suma de los rendimientos de los n subintervalos. Esto nos lleva a las siguientes suposiciones.

Suposición A1. Los rendimientos (d_i) están distribuidos independientemente

Suposición A2. Los rendimientos (d_i) están distribuidos idénticamente

Estas suposiciones implican que el proceso del precio del bien financiero sigue una caminata aleatoria.[9] Esta característica en un proceso de un bien financiero está frecuentemente asociada con la teoría del mercado eficiente.[10]

En seguida se describe cómo los rendimientos cambian cuando el tamaño del intervalo disminuye. Para ello se agregan dos suposiciones más:

Suposición A3: El rendimiento esperado puede ser escrito como

$$E[d_i] = \mu h$$

donde μ es la tasa de rendimiento por unidad de tiempo, la cual es independiente de la longitud del subintervalo h.

[9] Se dice que el proceso de los precios sigue una caminata aleatoria si los rendimientos son independientes e idénticamente distribuidos en el tiempo; Jarrow, 1996.

[10] Cuando se dice que un mercado es eficiente, quiere decir que la historia pasada está reflejada totalmente en el precio presente, hasta que no se obtiene nueva información; y los mercados responden inmediatamente a cualquiera nueva información sobre el bien financiero; Wilmott, 1995.

Suposición A4: La varianza del rendimiento puede ser escrito como

$$Var[d_i] = \sigma^2 h$$

donde σ^2 es la varianza de la tasa de rendimiento por unidad de tiempo, la cual es independiente de la longitud del subintervalo h.

Por lo tanto, por el teorema del límite central se tiene que para subintervalos de tiempo infinitesimales, los rendimientos d_i tienen una distribución normal con media μh y varianza $\sigma^2 h$.[11]

Con estas cuatro suposiciones se puede concluir que el rendimiento de S en el intervalo (0, T) está normalmente distribuido, donde el valor esperado del rendimiento es igual a $E[d_T] = \mu T$, es decir, μ veces la cantidad de tiempo y la varianza $Var[d_T] = \sigma^2 T$, es decir, σ^2 veces la cantidad de tiempo.

Por lo tanto, $\ln \frac{S_T}{S_o}$ está distribuido normalmente, con una media y varianza que depende sólo de la cantidad de tiempo que ha pasado, y los $\ln \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}$ son independientes. Esto implica que podemos medir la media μ y la varianza σ^2 para un periodo de tiempo y este resultado se puede utilizar para periodos más grandes de tiempo. Si los rendimientos de un bien financiero S son independientes a través del tiempo y son generados por una distribución normal, entonces los $\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}$ son independientes y tienen una distribución lognormal. Esto es equivalente a declarar que el precio del bien financiero S tiene una distribución lognormal.[12] Si los precios se distribuyen según una distribución lognormal los rendimientos serán calculados según la expresión $\ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$, que es el rendimiento de S en el tiempo i (Jarrow, 1996).

[11] Para una demostración consúltese Cox y Miller, 1990.
[12] Para mayores detalles sobre la distribución lognormal véase el Anexo A.

Si los rendimientos están distribuidos normalmente se puede determinar la probabilidad de que el precio del bien en el futuro quede dentro de ciertos rangos. Utilizando la notación anterior se tiene que si

$$X=\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}$$

tiene una distribución normal con media μ y desviación estándar σ, entonces transformándola dentro de una variable normal estándar, se puede usar el siguiente resultado

$$\text{Prob}\left[a<\frac{X-\mu}{\sigma}<b\right]=N(b)-N(a)$$

para calcular las probabilidades de que el precio del bien después de un periodo t_i quede dentro de ciertos límites, donde $N(z)$ es la distribución acumulativa de probabilidad normal estándar (Boyle, 1992).

Una conclusión importante del movimiento browniano geométrico dice que:

Definición

Si S es un bien financiero con un precio actual S_0 y S sigue un movimiento browniano geométrico con una media instantánea μ y una desviación estándar instantánea σ, entonces los rendimientos de S entre ahora (tiempo 0) y un tiempo futuro T está normalmente distribuido con:

1.- Una media igual a $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$

2. Una desviación estándar igual a $\sigma\sqrt{T}$

En seguida se describe un proceso de difusión más complicado, el proceso de Ito, y el lema de Ito, que sirve para probar la definición antes dada.

II.3 EL PROCESO DE ITO Y EL LEMA DE ITO

II.3.1 EL PROCESO DE ITO

Un **proceso de Ito** es básicamente un proceso generalizado de Wiener con coeficientes no constantes. Si se asume que tanto el término *drift* a como el término de variabilidad b pueden ser funciones de la variable aleatoria y del tiempo, entonces x sigue un proceso de Ito. Matemáticamente, la ecuación diferencial estocástica SDE (*Stochastic Differential Equation*, por su nombre en inglés) para x será

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{2.7}$$

donde dz es un proceso de Wiener (Hull, 1993). Los procesos de Ito son utilizados frecuentemente para modelar precios de bienes financieros (Ross, 1997b).

El modelo más popular para representar el precio de un bien financiero S que no paga dividendos, y que cambia a través del tiempo es el proceso de Ito, el cual es un tipo de ecuación diferencial estocástica. Por lo tanto, el cambio en el nivel de precio del bien financiero dS, en un intervalo dt, está gobernado por

$$dS = \mu(S,t)dt + \sigma(S,t)dz$$

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{2.8}$$

donde $a(x, t) = \mu(S,t) = \mu S$ y $b(x, t) = \sigma(S,t) = \sigma S$, μ es el rendimiento esperado de S y σ es la desviación estándar de estos rendimientos. Si consideramos un intervalo de tiempo dt, durante el cual S cambia a $S + dS$, vemos que el siguiente valor ($S + dS$) sólo depende del precio actual S y es independiente del pasado. El rendimiento esperado de dS es

$$E[dS]= E[\mu Sdt + \sigma Sdz]= \mu Sdt$$

Como $E[dz]= 0$ el siguiente valor para S será más grande que el anterior por una cantidad μSdt. La varianza de dS es

$$\text{Var}[dS]=E[dS^2]-[E[dS]]^2= E[\sigma^2 S^2 dz^2]= \sigma^2 S^2 dt$$

Como la media y la desviación estándar instantánea de los cambios del precio son proporcionales al precio actual, entonces el valor esperado instantáneo de S es μS y la desviación estándar instantánea es σS (Hull, 1993a).

Si S tiene un proceso estocástico de tiempo continuo (S; $t \geq 0$), S puede ser escrito como

$$S + dS = S_0 + \mu\int_0^t Sdt + \sigma\int_0^t Sdz$$

Si se divide la ecuación (2.8) entre S

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \tag{2.9}$$

$\frac{dS}{S}$ representa el rendimiento de S. Los procesos (2.8) y (2.9) son ejemplos de un proceso de Ito. El proceso (2.8) también es conocido como la ecuación diferencial estocástica de movimiento Browniano geométrico (Neftci, 1996). El trato matemático del proceso de Ito es muy amplio, de hecho existe el cálculo de Ito.[13] La parte más interesante de esta teoria, desde del punto de vista de los productos financieros derivados, es el **lema de Ito**. El lema de Ito fue desarrollado en 1951 por el matemático japonés K. Ito. Este lema es una herramienta básica para manipular procesos de difusión, que permite determinar la ecuación diferencial estocástica para una función que depende de variables que siguen un

[13] En este trabajo el cálculo Ito se aborda de forma muy general. Si se desea profundizar en el tema se puede consultar la bibliografía aquí presentada.

proceso de difusión.[14]

II.3.2 EL LEMA DE ITO

Supóngase que x sigue un proceso estocástico de tiempo continuo, el cual depende del proceso de Wiener dz. Supóngase además que G es una función de x y t, y que se desea calcular el cambio en $G(x, t)$ cuando pasa un tiempo dt. Este tiempo influye en $G(x, t)$ en dos formas diferentes: primero, hay una influencia directa a través de la variable t en $G(x, t)$, y segundo, conforme el tiempo pasa, se obtiene nueva información sobre el proceso de Wiener dz y se observa un nuevo incremento en dx, lo cual también afecta a $G(x, t)$. La suma de estos dos efectos es representado por la ecuación diferencial estocástica $dG(x, t)$:

$$dG(x,t)=G(x+dx,t+dt)-G(x,t)$$

Ésta es una ecuación diferencial parcial de dos variables independientes x y t (Neftci, 1996).

El lema de Ito, conocido también como el **teorema fundamental del cálculo estocástico**, afirma que la ecuación diferencial de segundo grado $G(x,\ t)$ —que es función de t y del proceso x que sigue un proceso de Ito— sigue el siguiente proceso[15]

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(dx)^2 + \dots \qquad (2.10)$$

donde $dx = adx + bdz$ es la ecuación diferencial estocástica de x, y dz es el proceso de Wiener, por lo tanto G también sigue un proceso de Ito (Figlewski, 1990). Después de sustituir dx en (2.10) se obtiene el siguiente proceso (Hull, 1993):

[14] Un segundo uso del lema de Ito es para evaluar integrales de Ito; Neftci, 1996.
[15] Esto se puede obtener a través una serie de Taylor; Figlewski, 1990.

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b \, dz \tag{2.11}$$

con un *drift* igual a

$$\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2$$

y una varianza

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2$$

Una prueba rigurosa del lema de Ito va más allá del alcance de este trabajo. Sin embargo, el lema puede ser presentado como una extensión natural de resultados bien conocidos del cálculo diferencial.[16]

II.4 APLICACIÓN DEL PROCESO DE ITO EN LOS PRECIOS DE BIENES FINANCIEROS

II.4.1 EL PROCESO PARA BIENES FINANCIEROS

La mayoria de los modelos para representar el comportamiento de un bien financiero, S, que evoluciona como un proceso estocástico de tiempo continuo, asumen que una ecuación diferencial estocástica describe el comportamiento de S (Clewlow, 1998).[17] Por lo tanto, si se afirma que S evoluciona de acuerdo a un proceso de Ito, su SDE será

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{2.12}$$

donde

dS representa un cambio infinitesimal en el precio del bien

dt representa un periodo de tiempo infinitesimal en el tiempo

[16] Una demostración completa está incluida en Hull, 1993, Apéndice 10A.

[17] Este SDE es muy adecuada para acciones o índices, sin embargo es menos eficiente en el caso de divisas. Sin embargo, hay algunas discrepancias ya que los datos reales parecen tener una probabilidad más grande en el caso de grandes caídas o crecimientos en comparación con la que el modelo pronostica. Pero puede ser el punto de partida de

dz (el proceso de Wiener) es una variable aleatoria con media $0\,dt$ y varianza $1\,dt$

σ es la volatilidad anual de S, es decir, la desviación estándar de sus rendimientos, misma que se considera constante

μ es el rendimiento esperado anual de S que también se considera constante

La ecuación contiene varias propiedades importantes acerca del comportamiento del precio del bien:

- El precio es continuo en el tiempo, es decir, el mercado siempre está abierto
- La parte aleatoria del cambio en el precio está contenida en el término dz (proceso de Wiener)
- La desviación estándar de los rendimientos (la volatilidad) es tomada en cuenta en el modelo

Sustituyendo la ecuación (2.12) en la ecuación (2.11) donde $a=\mu S$ y $b=\sigma S$, y $x=S$, se obtiene un importante resultado para el caso de los productos financieros derivados:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz \tag{2.13}$$

Este proceso para G tiene dos componentes, mismos que pueden ser interpretados como los términos *drift* y de difusión. El término *drift* es determinístico, e involucra el *drift* y la volatilidad del proceso del precio del bien y las derivadas parciales de G con respecto a S y t. Es importante hacer notar que la ecuación (2.13) tiene la fuente de aleatoriedad, dz, que es exactamente la misma que la del proceso del precio del bien.

---

modelo más sofisticados; Wilmott, 1995.

II.4.2 EL LEMA DE ITO Y LA DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

Supóngase que S sigue el siguiente proceso de Ito:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Con ayuda del lema de Ito se puede obtener una función de densidad de probabilidad para el precio del bien S. Para obtener la volatilidad de los rendimientos de S puede demostrarse que el proceso

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

se puede escribir como

$$d(\ln S) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz \qquad (2.14)$$

donde $\frac{dS}{S}$ representa el cambio de los rendimientos de S. $\frac{dS}{S}$ es justamente otra forma de expresar $d(\ln S)$ (aplicando cálculo diferencial básico). Si se define $G = \ln S$, y sabiendo que el proceso seguido por S es $dS = \mu Sdt + \sigma Sdz$, y utilizando el lema de Ito para G, se tiene que

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S} \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

Sustituyendo en la ecuación (2.13)

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma Sdz$$

$$dG=\left(\frac{1}{S}\,\mu S+0-\frac{1}{2}\frac{1}{S^2}\,\sigma^2 S^2\right)dt+\frac{1}{S}\,\sigma\, Sdz$$

$$dG=\left(\mu-\frac{1}{2}\,\sigma^2\right)dt+\sigma\, dz$$

$$d\,(\ln S)=dG=\left(\mu-\frac{1}{2}\,\sigma^2\right)dt+\sigma\, dz \qquad (2.15)$$

Se obtiene una ecuación diferencial estocástica con coeficientes constantes, es decir, un proceso generalizado de Wiener. Por lo tanto, sumando todos estos cambios infinitesimales sobre un intervalo de precio (S_0, S_T), correspondiente al intervalo de tiempo (0, T), nos da una función de probabilidad para $\ln S_T$ - $\ln S_0$. La distribución de probabilidad resultante será por supuesto normal, con una media igual a $(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T$ y una desviación estándar igual a $\sigma\sqrt{T}$. Observamos que la media está afectada por el termino $\frac{\sigma^2}{2}$, es decir, la volatilidad tiende a afectar la media esperada. Este fenómeno es una consecuencia del modelo Browniano geométrico, es decir, tiene una tasa de crecimiento de $(\mu-\frac{\sigma^2}{2})$ en lugar de μ (Chriss, 1997). Si nuestro intervalo de tiempo es igual a 1, entonces la media y desviación estándar del rendimiento dentro de un año son $(\mu-\frac{\sigma^2}{2})$ y σ, respectivamente. Se tiene que la función de probabilidad para $\ln S_T$ - $\ln S_0$ será

$$\ln S_T-\ln S_0\approx\ \phi\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T,\ \sigma\sqrt{T}\,\right]$$

donde $\phi(m,s)$ denota una distribución normal con media m y desviación estándar s. Como $\ln S_T$ - $\ln S_0=\ln\frac{S_T}{S_0}$, se reafirma que **los rendimientos de S tienen una distribución normal.** La variación de

$\ln S$ durante el intervalo de tiempo $(0, T)$, que es igual al rendimiento de S en dicho intervalo, está dado por

$$d(\ln S)= \ln\frac{S_T}{S_0} \approx \phi\ \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T,\ \sigma\ \sqrt{T}\ \right] \tag{2.16}$$

De las propiedades de la distribución normal se tiene que $\ln S_T$ en el tiempo T está normalmente distribuido con las siguientes características:

$$\ln S_T \approx \phi\ \left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T,\ \sigma\ \sqrt{T}\ \right] \tag{2.17}$$

donde

$$E[\ln(S_T)]=\ln(S_0)+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T$$

y

$$Var[\ln(S_T)]=\sigma^2 T$$

Por lo tanto, la función de densidad de probabilidad de $\ln S$ está dada por

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-(\ln S-\ln S_0-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t)^2/2\sigma^2 t}$$

Véase (Ross, 1997b, y Figlewski, 1990).

Si S tiene una distribución lognormal, el precio del bien financiero, debe tener una función de densidad de probabilidad lognormal[18] igual a

$$\frac{1}{\sigma S\sqrt{2\pi t}}e^{-(\ln(\frac{S}{S_0})-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t)^2/2\sigma^2 t} \qquad \text{para} \quad 0 < S < \infty$$

Así mismo, el rendimiento esperado del bien S_T será

$$E[S_T] = S_0\, e^{\mu T}$$

y

$$Var[S_T] = S_0{}^2 e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1)$$

Por ejemplo, considérese una acción con un precio inicial de \$45, un rendimiento esperado anual del 22 por ciento y una volatilidad del 26 por ciento por año.

De la ecuación (2.17) la distribución de probabilidad del precio de la acción S_T en seis meses está dada por

$$\ln S_T \approx \phi\ [\ln 45 + (0.22 - \frac{0.067}{2})\, 0.5\, ,\, 0.26\sqrt{0.5}\,]$$

$$\ln S_T = \phi\ (3.899, 0.183)$$

Hay un 95 por ciento de probabilidad que una variable de distribución normal tenga un valor entre dos desviaciones estándar y su media, es decir,

$$\mu - 2\sigma < \ln S_T < \mu - 2\sigma$$

$$3.899 - 2(0.183) < \ln S_T < 3.899 + 2(0.183)$$

18 Para mayores detalles se puede consultar Wilmott, 1995; Boyle, 1992 y el Anexo A.

$$3.532 < \ln S_T < 4.267$$

De acuerdo a las propiedades de los logaritmos se tiene que

$$e^{3.532} < S_T < e^{4.267}$$

$$34.192 < S_T < 71.307$$

De manera que hay un 95 por ciento de probabilidad que un precio de acción en seis meses esté entre 34.192 y 71.307. El rendimiento esperado de S_T está dado por

$$E[S_T] = S_0 e^{rT} = 45\ e^{0.22X0.5} = 50.232$$

y

$$Var[S_T] = S_0{}^2 e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1) = 45^2 e^{(2)(0.22)(0.5)}(e^{(0.26)(0.26)(0.5)} - 1) = 86.745$$

La desviación estándar de la acción en un año será $\sqrt{86.745} = 9.313$.

Supóngase que X_n es el precio de un bien financiero en el tiempo n, y las proporciones $\frac{X_n}{X_{n-1}}$ para $n \geq 1$, son independientes y están idénticamente distribuidos en forma lognormal. Si $Y_n = \frac{X_n}{X_{n-1}}$ entonces

$$X_n = Y_n X_{n-1}$$

En forma iterativa esto equivale a

$$X_n = Y_n Y_{n-1} X_{n-2}$$

$$X_n = Y_n Y_{n-1} Y_{n-2} X_{n-3}$$

$$X_n = Y_n Y_{n-1} \ldots X_0$$

Aplicando el logaritmo natural

$$\ln(X_n) = \ln(Y_n Y_{n-1} \ldots X_0),$$

$$\ln(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i) + \ln(X_0)$$

Cuando los valores de $\ln(\frac{X_i}{X_{i-1}})$ para $i \geq 0$ son independientes y distribuidos idénticamente, $\ln(X_n)$ será un movimiento Browniano aritmético, y X_n será aproximadamente un movimiento Browniano geométrico, conocido como caminata aleatoria lognormal (Ross, 1997a). Igualando

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i) = d_n$$

y sustituyendo

$$\ln(X_n) = d_n + \ln(X_0)$$

y aplicando la exponencial, se obtiene

$$X_n = X_0 e^{d_n}$$

Si el valor presente de una acción es X_0 y X_t es el precio en el tiempo t, entonces el valor de X_t será $X_t = X_0\, e^{Y(t)}$ donde $\{ Y(t), t \geq 0 \}$ es un movimiento Browniano con coeficiente *drift* μ y varianza σ^2, y el proceso $\{ X_t, t \geq 0 \}$ será un movimiento Browniano geométrico, dado por la ecuación (2.8).[19]

[19] Véase Taylor, 1998.

II.5 CONCLUSIÓN

En este segundo capítulo se expusieron conceptos generales de algunos procesos estocásticos de difusión —el movimiento Browniano, el proceso de Wiener, el proceso generalizado de Wiener, el movimiento Browniano geométrico y el proceso de Ito— y el lema de Ito mismos que son utilizados para representar el comportamiento y desarrollo de los precios de bienes financieros. Estos procesos están muy relacionados con el proceso de Wiener ya que a través de éste se representa la aleatoriedad asociada a un proceso aleatorio, en este caso la asociada al bien financiero. Se mencionaron las propiedades y características de estos procesos estocásticos y la relación que guardan con las distribuciones normal y lognormal de acuerdo a la teoría de la valoración de bienes financieros.

En finanzas se supone que los bienes financieros siguen una caminata aleatoria lognormal, más específicamente siguen un movimiento Browniano geométrico. Por lo tanto, la distribución de probabilidad del bien financiero S en un periodo de tiempo T será una distribución lognormal. Este modelo es representado como una ecuación diferencial estocástica, conocido como el proceso de Ito. Debido a los anteriores supuestos, se afirmó que un bien financiero S que no paga dividendos está caracterizado por un proceso de Ito, cuya ecuación diferencial estocástica es la siguiente:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

donde μ es el rendimiento esperado de S y σ es la volatilidad de S, es decir, la desviación estándar de sus rendimientos. Así mismo, haciendo uso del lema de Ito, el proceso transformado $d(\ln S)$ es decir, los rendimientos de S, está también distribuido normalmente y sigue un proceso generalizado de Wiener, con un *drift* $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ y una varianza σ^2. Las propiedades y características de los procesos vistos en este capítulo son importantes ya que fueron utilizadas por Black, Merton y Scholes para desarrollar su modelo de valoración de opciones. El modelo Black–Scholes se examina en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO III

LA VALORACIÓN DE OPCIONES Y EL MODELO BLACK-SCHOLES

En este tercer capítulo se presentan los antecedentes históricos de la valoración de opciones y se da un panorama completo sobre el modelo Black-Scholes y su uso. Se explican los principios teóricos sobre los que está basado el modelo Black-Scholes, así como los diferentes factores que afectan el valor de las opciones según el modelo, y bajo qué condiciones los resultados del modelo son ciertos. Tomando como base lo visto en el capítulo II, se examinan algunos de los principios probabilísticos sobre los que se sustenta el modelo de Black-Scholes. Así mismo, se profundiza sobre la volatilidad y se explica cómo ésta puede ser calculada. Finalmente, se da un ejemplo de aplicación para el caso de los productos derivados llamados opciones *call* de tipo de europeo, haciendo hincapié en que el modelo se puede utilizar para evaluar diferentes productos derivados.[1]

[1] Para mayores detalles véase Clewlow, 1998.

III.1 ANTECEDENTES EN LA VALORACIÓN DE OPCIONES

Como se explicó en el capitulo I, los compradores de opciones pagan una **prima** por tener el derecho de comprar o vender un bien subyacente en el futuro.[2] El problema al cual se enfrentan los inversionistas se denomina la "valoración de opciones", y consiste en saber cuál ha de ser la prima que se debe pagar por una opción por el hecho de asumir, a lo largo de un periodo de tiempo, el riesgo de variación de precios al que está sujeto el bien subyacente.

Los intentos por determinar la prima de una opción y otros derivados tienen una larga historia. Las técnicas modernas para valorar opciones tienen sus raices en el **cálculo estocástico**. En 1877, Charles Castelli escribió un libro "The Theory of Options in Stock and Shares", en el que dio una introducción a la cobertura y la especulación que ofrecen las opciones. En 1900, el francés Louis Bachelier hizo uno de los primeros intentos para determinar el valor de las opciones en su tesis doctoral "Theory of the Speculation". El modelo que propuso, basado en el **movimiento Browniano**, tenia una suposición irreal, a saber, una tasa de interés igual a cero. Además, su modelo permitia precios negativos[3] y el valor de la opción podia exceder el precio del bien subyacente (Taylor, 1998).

Varias décadas después, en 1955, el trabajo de Bachelier llamó la atención del economista Paul Samuelson, quien escribió un documento titulado "Brownian Motion in the Stock Market". Ese mismo año Richard Kruizenga, un estudiante de Samuelson, citó el trabajo de Bachelier en su tesis doctoral "Put and Call Options: A Theorical and Market Analysis". Samuelson y Kruizenga asumieron que los precios de las acciones seguian una **distribución lognormal**, lo cual garantizaba que los precios eran positivos y permitia tasas de interés diferentes de cero. En 1962, James Boness en su tesis doctoral "A Theory and Measurement of Stock Option Value" mejoró el modelo de Bachelier para valorar opciones,

[2] En la teoria de valoración de opciones, la prima de una opción es el precio al cual se compra un contrato de opción en el mercado, la prima incluye tanto el valor teórico de la opción como costos de transacción. En este trabajo se estudia el valor teórico de una opción, es decir, aquel valor que no incluye costos de transacción, sino sólo el valor teórico al cual se puede vender un contrato de tal manera que no se obtiene una ganancia ni se incurre en una pérdida en la transacción. En este trabajo se manejan ambos términos sin hacer distinción.

[3] En la teoria económica se asume que el precio de un bien no puede ser negativo.

el cual se parecía bastante al modelo que años después desarrollaron Fischer **Black**, Myron S. **Scholes** y Robert C. **Merton.**

Black, Merton y Scholes desarrollaron el primer modelo de aceptabilidad general para valorar opciones, el **modelo Black-Scholes**. El modelo se convirtió en poco tiempo en uno de los modelos financieros más ampliamente aceptados. Su trabajo presentado en los años 70 resolvió un problema ya viejo en la economía financiera, y asimismo creó una forma nueva de negociación del riesgo financiero, tanto en teoría como en la práctica. Su método ha contribuido sustancialmente al rápido crecimiento del mercado de derivados en las últimas dos décadas. Actualmente, miles de inversionistas usan el modelo diariamente para valorar derivados en todo el mundo.[4]

Black y Scholes publicaron su trabajo bajo el título "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" en el *Journal of Political Economy* en mayo/junio de 1973, año en que las opciones sobre acciones se negociaron por vez primera en EE.UU. Este trabajo consistió fundamentalmente en un modelo para determinar la prima de una opción *call* europea. El modelo tiene la ventaja de requerir poca información, proporciona enorme rapidez y su utilización es muy sencilla.[5]

III.2 FACTORES QUE AFECTAN LA PRIMA DE UNA OPCION *CALL*

Los factores que intervienen en el precio de una opción *call* son seis y se clasifican en dos factores **endógenos** y cuatro factores **exógenos**.[6] Los primeros: (i) el precio de ejercicio y (ii) la fecha de vencimiento, son establecidos según los términos del contrato de opción. Los segundos: (iii) el precio del bien subyacente en el mercado, (iv) el pago de dividendos, (v) la tasa de interés sin riesgo y (vi) la volatilidad del bien subyacente, están determinados por el mercado. A continuación se explica el efecto

[4] *The Economist*, 18 de octubre de 1997.

[5] Existe otro modelo básico, el Capital Asset Pricing Model (CAPM), para evaluar precios de instrumentos financieros, modelo que requiere calcular los precios de equilibrio y matriz de covarianzas de los posibles instrumentos disponibles en el mercado; Rodríguez de Castro, 1995. Por otra parte, el modelo Black-Scholes se puede programar en una hoja de cálculo de Excel en forma muy sencilla.

[6] Según el modelo Black-Scholes.

de cada uno de estos factores sobre la prima de una opción.

- **El precio de ejercicio**

El **precio de ejercicio** es el precio al cual se puede comprar o vender el bien subyacente al momento ejercer la opción. Una opción *call* que permite comprar un bien a $100 en el futuro que tiene un valor actual de $95 valdrá menos que una opción que permita comprar el mismo activo a $90, por ejemplo. El precio de ejercicio se representa como E.

- **La fecha de vencimiento**

La diferencia entre la **fecha de vencimiento** de la opción y la fecha de inicio del contrato determina el periodo de vida de la opción. Generalmente, mientras mayor sea el periodo de tiempo, mayor es la prima de la opción, puesto que hay más tiempo para que el bien subyacente pueda variar de precio; de manera que coloque la opción en una buena posición. El tamaño del intervalo de tiempo al vencimiento se representa como t y se expresa en fracciones de año.[7]

Si una acción está a $100 el día de hoy, es evidente que el precio de una opción *call* con un precio de ejercicio de $125 que venza mañana será muy bajo porque el precio difícilmente podría estar por arriba de $125 en un solo día. En cambio, si el vencimiento es dentro de seis meses la prima de la opción es mayor.

La prima de una opción va variando a lo largo de la vida del contrato de manera que, si sólo se tiene en cuenta el factor tiempo, a medida que se acerca a la fecha de vencimiento la opción irá disminuyendo su valor. Las opciones son lo que se llaman "*wasting assets*", o sea, son instrumentos financieros que se deprecian por su vida limitada.

- **El precio del bien subyacente en el mercado**

El **precio del bien subyacente** en el mercado es el precio al que se cotiza en ese momento el bien. La

[7] Por ejemplo, si la opción tiene 25 días de vida, entonces t = 25/365 = 0.0849. Una mejor forma de calcular t es dividiendo t entre el número exacto de días laborales que podrían ser 250, 252, 253 ó 260.

prima de una opción depende fuertemente del valor del bien subyacente. Las alzas en el precio del bien subyacente provocan subidas en las primas de las opciones *call*, y las caidas del precio ocasionan su disminución. El precio del bien subyacente en el mercado se suele representar como S.

- **El pago de dividendos**

Los **dividendos** son parte de las ganancias de una empresa que se pagan a los accionistas de una acción.[8] Son como una especie de rendimientos. Los dividendos en efectivo afectan las primas de las opciones. El pago de dividendos implica una reducción en la cotización del bien subyacente y por tanto menores primas de una opción *call*. El pago del dividendo se representa como d.

- **La tasa de interés libre de riesgo**

En un contrato de opción se realiza el pago total del bien subyacente hasta que se ejerce dicho contrato. Es decir, cuando se establece el contrato sólo se paga la prima, por lo que las opciones requieren una inversión menor que si se comprara directamente el bien subyacente. Por ello, la inversión en opciones permite disponer de liquidez para invertir en otra cosa, por ejemplo, al **tipo de interés libre de riesgo** durante la vida de la opción.[9] En consecuencia, el valor de la opción *call* aumentará si las tasas de interés suben, y viceversa. El modelo Black-Scholes utiliza una tasa de interés libre de riesgo, normalmente es la tasa de interés de un título de deuda pública para un plazo igual al de la opción.[10] Supóngase que la tasa de interés a plazo es conocida y constante durante la duración de la opción, además de que se puede pedir prestado o prestar a la misma tasa. La tasa libre de riesgo se representa como r. La tasa de interés refleja el rendimiento mínimo esperado del bien subyacente.

- **La volatilidad del bien subyacente**

La **volatilidad** es un estimador crucial en los mercados de opciones. La volatilidad es la medida de nuestra incertidumbre sobre los movimientos futuros del precio del bien subyacente (véase la gráfica

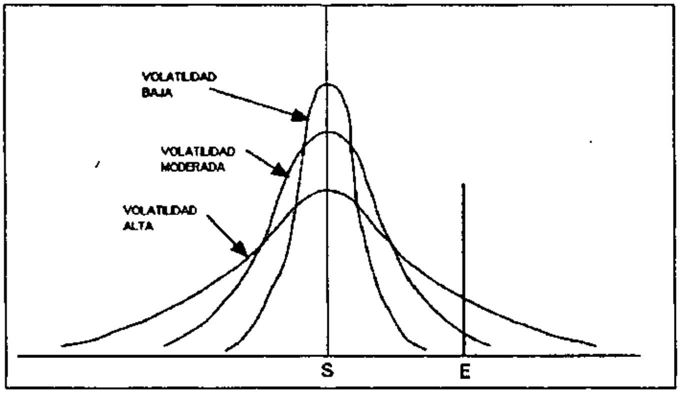
[8] El concepto de dividendos sólo se aplica a las acciones y los indices bursátiles. No obstante, para otros bienes subyacentes existen pagos equivalentes. Ejemplo de esto son los pagos de cupones de intereses en el caso de los bonos gubernamentales.

[9] Por tanto, una opción representa como un préstamo sin intereses. Cuanto mayor sea el tipo de interés, mayor será el valor de este préstamo sin intereses.

[10] Por ejemplo, en Estados Unidos se utiliza la tasa *T-bill* (*Treasury Bill*) del tesoro a 31 dias.

3.1). Está intimamente ligada a la variabilidad de los rendimientos.

Mientras más inestable sea el precio de un bien, mayor será su volatilidad, la prima y la probabilidad de que se ejerza la opción. Por esto, los operadores de opciones hablan de comprar y vender volatilidad. En el mercado se dice que si la volatilidad se reduce es momento de vender opciones. Cuando la volatilidad aumenta, es el momento de comprar opciones.



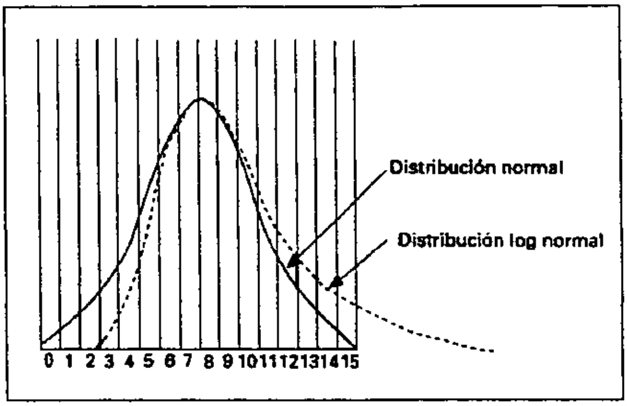
Gráfica de la volatilidad baja, moderada y alta
Gráfica 3.1

Debido al hecho de que cualquier opción tiene por delante un periodo de vida parece que debiera utilizarse una estimación de la volatilidad futura. La volatilidad reflejada en la prima de una opción es la volatilidad esperada por el mercado de opciones, y los teóricos no siempre logran llegar a un acuerdo sobre la forma de medirla.

La volatilidad para efecto de los productos derivados es estimada básicamente por dos métodos diferentes: la volatilidad histórica y la volatilidad implícita.[11] Generalmente, los inversionistas del mercado de opciones utilizan una estimación de la varianza haciendo uso de datos históricos. La volatilidad se representa como σ. El indicador de la volatilidad histórica está asociado con la desviación estándar. La volatilidad histórica indica cuánto ha fluctuado un bien subyacente durante cierto periodo de tiempo pasado y puede servir de indicador para prever cuál puede ser la volatilidad futura.

- **Estimación de la volatilidad a través de datos históricos**

Desde hace bastante tiempo se han realizado diferentes estudios empíricos sobre distintos subyacentes, los cuales reflejan que aunque el logaritmo de las variaciones o rendimientos diarios de diferentes subyacentes no se comportan exactamente como una distribución normal, su distribución se aproxima bastante a las características de una distribución normal, como se vio en el capítulo II.



Gráfica de la distribución lognormal y normal
Gráfica 3.2

El modelo Black–Scholes parte de la hipótesis de que el bien subyacente se comporta según una distribución lognormal (véase la gráfica 3.2). La propiedad lognormal[12] del bien subyacente puede ser usada para proporcionar información sobre la distribución de la tasa de rentabilidad que gana un bien subyacente en un intervalo de tiempo (0, *T*). En consecuencia, el logaritmo de las variaciones o rendimientos sigue una distribución normal. Se puede entonces calcular la volatilidad histórica sacando

[11] Para estimar la volatilidad implícita puede consultarse Hull, 1993.

[12] La propiedad lognormal dice que una variable con una distribución normal tiene la propiedad de que su logaritmo natural está normalmente distribuido. Para mayores detalles consulte el Anexo A.

la desviación estándar de estos logaritmos. Si η es la tasa de rendimiento compuesta continuamente[13] en el periodo (0, T), entonces

$$S_T = S_o e^{\eta T}$$

y

$$\eta = \frac{1}{T} \ln \frac{S_T}{S_0} \tag{3.1}$$

Según la ecuación (2.16), vista en el capítulo II

$$\ln \frac{S_T}{S_0} \approx \phi \left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{T} \right] \tag{3.2}$$

Aplicando las propiedades de la distribución normal, de las ecuaciones (3.1) y (3.2) se obtiene

$$\eta \approx \phi \left[\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \right]$$

Así que la tasa de rendimiento compuesta continuamente está normalmente distribuida con una media $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ y una desviación estándar o volatilidad igual a $\frac{\sigma}{\sqrt{T}}$ (Hull, 1993a). Supóngase que:

$n+1$: número de observaciones

S_i: precio del bien al final del intervalo i ($i = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$)

u_i: $u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$, donde $\frac{S_i}{S_{i-1}}$ es el rendimiento del subyacente del periodo i - 1 al i

[13] El término "tasa de rendimiento compuesta continuamente" es una traducción literal del término inglés "*continuously compounded rate of return*". No se encontró traducción más apropiada.

$\overline{u}$: es la media de los u_i's $\overline{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{n}$

τ: longitud del intervalo de tiempo del contrato en años

Entonces una estimación de la volatilidad de los rendimientos u_i está dada por[14]

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2} \qquad \hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2} \quad (3.3)$$

Nótese que en el cálculo de la desviación estándar se divide por $(n - 1)$ y no por n para corregir la estimación por el número de grados de libertad.[15] De la ecuación (3.2), la desviación estándar de los rendimientos u_i's es σ, esto cuando el intervalo de tiempo T= 1. La variable $\hat{s}$ será por lo tanto un estimador de $\sigma\sqrt{T}$, es decir,

$$\hat{s} = \sigma\sqrt{T}$$

de aquí concluimos que σ puede ser estimado como

$$\sigma = \frac{\hat{s}}{\sqrt{T}}$$

que es el estimador de la desviación estándar de los rendimientos del bien subyacente durante un tiempo T. El error estándar de este estimador será aproximadamente $\frac{\hat{s}}{\sqrt{2n}}$.

[14] Se utiliza esta fórmula porque cuando se calcula el valor de la desviación estándar, ya sea a mano o mediante el uso de una calculadora de baja capacidad, y el valor de la media o los valores de las observaciones no son números enteros, el uso la ecuación (3.3) de la izquierda puede producir errores grandes por redondeo; Canavos, 1991.

[15] Está corrección se denomina "buscar una estimación insesgada de la desviación estándar". Una estadística $\hat{\theta}$ es un estimador del parámetro θ si y sólo si $E[\hat{\theta}] = \theta$. Es decir, el valor esperado de un estimador debe ser igual al parámetro que se supone que estima; Canavos, 1991.

Para el cálculo de la volatilidad histórica se recomienda tomar en cuenta los siguientes puntos: utilizar los precios de "cierre" del bien subyacente, un tamaño de muestra que sea de 90 a 180 datos, y que los datos sean diarios y de los últimos días ya que son más representativos (Hull, 1993a).

A manera de ejemplo, a continuación se calcula la volatilidad histórica para la acción de Televisa con datos diarios del 4 de mayo al 1° de junio de 1998, con una muestra de tamaño $n = 20$ (véase la tabla 3.1).

Día	Precio de cierre de la acción	Precio relativo S_i / S_{i-1}	Rendimiento diario $u_i = \ln(S_i / S_{i-1})$	u_i^2
0	182.20000			
1	175.90000	0.96542	-0.03519	0.00124
2	175.20000	0.99602	-0.00399	0.00002
3	174.80000	0.99772	-0.00229	0.00001
4	170.20000	0.97368	-0.02667	0.00071
5	170.20000	1.00000	0.00000	0.00000
6	168.00000	0.98707	-0.01301	0.00017
7	168.50000	1.00298	0.00297	0.00001
8	168.50000	1.00000	0.00000	0.00000
9	163.00000	0.96736	-0.03319	0.00110
10	166.50000	1.02147	0.02125	0.00045
11	168.00000	1.00901	0.00897	0.00008
12	175.10000	1.04226	0.04139	0.00171
13	174.80000	0.99829	-0.00171	0.00000
14	174.50000	0.99828	-0.00172	0.00000
15	172.50000	0.98854	-0.01153	0.00013
16	171.50000	0.99420	-0.00581	0.00003
17	171.00000	0.99708	-0.00292	0.00001
18	173.20000	1.01287	0.01278	0.00016
19	173.20000	1.00000	0.00000	0.00000
20	170.70000	0.98557	-0.01454	0.00021
suma	3607.50000	19.93782	-0.06520	0.00605

Fuente: Bolsa Mexicana de Valores.

Tabla 3.1

Utilizando la ecuación (3.3) se obtiene un estimador de la desviación estándar del rendimiento diario esperado igual a

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{0.00605}{19} - \frac{(-0.06520)^2}{380}} = 0.0175$$

Puesto que nuestros datos son diarios y hay aproximadamente 252 días hábiles del mercado, $T = \frac{1}{252}$,

$$\hat{\sigma} = \frac{0.0175}{\sqrt{\frac{1}{252}}} = 0.0175\sqrt{252} = 0.2782$$

Es decir, la volatilidad anual será del 27.8 por ciento con un error estándar de $\frac{0.2782}{\sqrt{2(20)}} = 0.0439$, es decir, 4.4 por ciento anual.

Si los rendimientos se han obtenido con datos diarios entonces la volatilidad histórica anual será $\hat{\sigma}_{anual} = \sqrt{252}\hat{\sigma}_{diario}$. Con datos semanales será $\hat{\sigma}_{anual} = \sqrt{52}\hat{\sigma}_{semanal}$ y con datos mensuales será $\hat{\sigma}_{anual} = \sqrt{12}\hat{\sigma}_{mensual}$.

Calcular la volatilidad histórica no es un problema. El problema critico radica en si el estimador de la volatilidad basada en los precios pasados refleja la volatilidad actual. La principal ventaja de este estimador es su simplicidad. El pasado puede ser un buen indicador del futuro, pero por otro lado el pasado puede dar una indicación errónea sobre el futuro. Por ejemplo, antes del terremoto de Kobe en Japón la volatilidad del índice de bolsa Nikkei era muy baja. Después del temblor la volatilidad súbitamente se disparó. En los dias siguientes al temblor, si se hubiera usado la volatilidad histórica con datos de los días anteriores, se hubiera obtenido obviamente una volatilidad baja y habría sido un mal indicador de la volatilidad futura. La volatilidad histórica ciertamente no toma en consideración la expectativa a futuro de la volatilidad futura.

Hoy en día existen varios métodos para medir la volatilidad además de la volatilidad histórica, tales como la desviación estándar implícita, los modelos econométricos y los conos de volatilidad. Así mismo, en los últimos años la investigación financiera está obteniendo buenos resultados en la predicción de la volatilidad mediante series de tiempo con los modelos GARCH y ARCH.[16]

Partiendo de las características señaladas sobre los factores que influyen la prima de una opción *call* se pueden obtener ciertas propiedades importantes sobre la prima de una opción.

III.3 PROPIEDADES DE LA PRIMA DE UNA OPCIÓN *CALL*

Las siguientes propiedades que describen el comportamiento de la prima de una opción *call* establecen importantes límites sobre su valor (Bookstaber, 1991).

PROPIEDAD 1. El valor de una opción no puede ser menor que cero, así que la prima es mayor o igual a cero.

$$C \geq 0$$

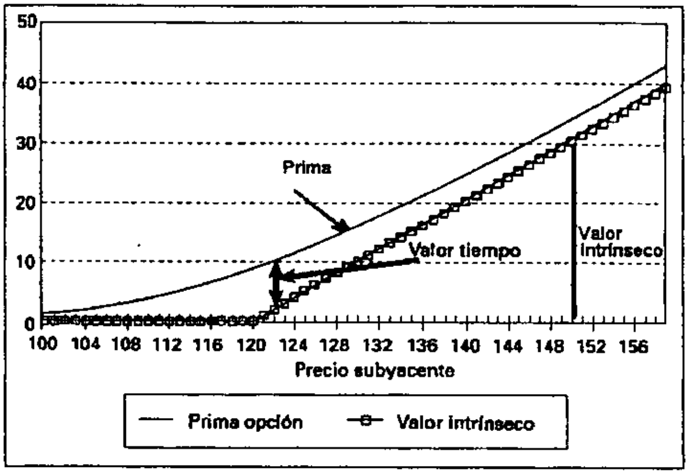
Antes del vencimiento, una opción tiene una prima que puede descomponerse siempre en su valor intrínseco y el valor tiempo:[17]

$$\text{prima} = \text{valor intrínseco} + \text{valor tiempo}$$

[16] La explicación de estos modelos se sale del propósito de este trabajo pero resulta un trabajo bastante interesante de investigación y como tema de tesis. El lector interesado puede consultar al respecto el libro "Applied Econometric Time Series", de Walter Enders, John Wiley & Sons, Inc, 1995.

[17] El valor tiempo también se conoce como valor temporal, valor especulativo, valor potencial o valor extrínseco; en lo sucesivo se manejará como valor tiempo.

En la gráfica 3.3 se presenta el valor de una opción *call* en función del precio del bien subyacente. La línea continua es la prima de la opción, resultado del valor intrínseco y del valor tiempo. Se observa que el valor intrínseco sólo toma valores a partir de precios superiores al precio de ejercicio (120), y su función es una recta. El valor tiempo viene determinado por la diferencia entre la curva de la prima y la recta del valor intrínseco. Como se esperaba, el valor tiempo va disminuyendo a medida que se acerca a la fecha de vencimiento.



El valor tiempo y valor intrínseco
Gráfica 3.3

- **El valor intrínseco y el valor tiempo**

1. **El valor intrínseco** se calcula como la diferencia entre el precio de mercado del bien subyacente y el precio de ejercicio. El valor intrínseco es el valor que tendría una opción en un momento determinado si se ejerciese inmediatamente.

$$\text{valor intrínseco} = \text{precio de mercado}(S) - \text{precio de ejercicio } (E) = S - E$$

2. **El valor tiempo** se calcula como la diferencia entre la prima y el valor intrínseco. Se define como la cantidad que excede al valor intrínseco para obtener la prima debido a que el valor de la prima debe

ser un valor superior al valor intrinseco. El valor tiempo va disminuyendo a medida que nos acercamos al vencimiento de la opción, y será mayor cuanto mayor sea el periodo de tiempo antes del vencimiento, ya que mientras la opción no expire, existe la posibilidad de obtener algún beneficio en el futuro, que seria este valor tiempo.

$$\text{valor tiempo} = \text{prima} - \text{valor intrínseco}$$

PROPIEDAD 2. En la fecha de vencimiento, una opción *call* tendrá un valor igual a su valor intrinseco ($S - E$) ó 0, cualquiera que sea más grande.

$$C = Max\,(0, S - E) \qquad \text{para } t = 0$$

Dado que lo peor que puede suceder es que una opción *call* expire sin valor alguno, esto significaría que $C = 0$.

Supóngase que se tiene una opción *call* sobre una acción con un precio de ejercicio de \$40 con una prima de \$3.5. Si el precio de la acción al vencimiento es de \$42, entonces el valor de la opción será

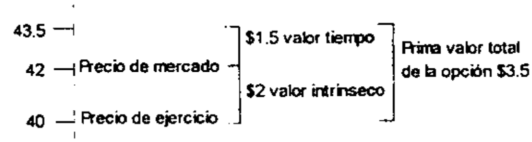
$$Max\,(0, S - E) = Max\,(0, 42 - 40) = Max\,(0, 2) = 2$$

Si el precio del bien fuera de \$38 entonces el valor de la opción al vencimiento será

$$Max\,(0, S - E) = Max\,(0, 38 - 40) = Max\,(0, -2) = 0$$

Para nuestro ejemplo donde la prima tiene un valor de \$3.5 y el valor intrinseco = \$2 el valor tiempo será

$$\text{valor tiempo} = 3.5 - 2 = 1.5$$



En la tabla 3.2 se muestra un resumen de los factores que influyen en la prima de la opción *call*, tanto en su valor intrínseco como en su valor tiempo, y cómo varia cuando se incrementa alguno de estos factores.

VARIABLES	SI VARIABLE AUMENTA	VALOR DEL *CALL*
Valor intrínseco		
1 Precio del bien subyacente	Aumenta	Aumenta
2. Precio de ejercicio	Aumenta	Disminuye
3 Tasa de libre riesgo	Aumenta	Aumenta
4. Dividendos	Aumenta	Disminuye
Valor tiempo		
5.Tiempo hasta el vencimiento	Aumenta	Aumenta
6 Volatilidad esperada de la acción	Aumenta	Aumenta

Fuente: Martínez Abascal, 1993.

Efecto de un incremento de los factores de la prima de una opción *call*
Tabla 3.2

PROPIEDAD 3. El valor intrínseco de la opción es el valor mínimo que la prima de la opción puede adquirir.

$$C \geq Max\,(0, S - E) \tag{3.4}$$

Si una opción se vende por menos que (S - E) en cualquier tiempo antes de que expire, entonces existen oportunidades de arbitraje, es decir, si un inversionista puede comprar opciones e inmediatamente venderlas a su valor intrínseco entonces podrá obtener ganancias.

PROPIEDAD 4. Una opción con un periodo de tiempo más grande de vencimiento será valuada por lo menos al valor de otra opción con el mismo precio de ejercicio, pero con un periodo más corto de tiempo.

$$C_{t_1} \leq C_{t_2} \qquad \text{para } t_1 < t_2$$

PROPIEDAD 5. Si dos opciones *call* difieren únicamente en su precio de ejercicio, la opción *call* con el precio de ejercicio más bajo será valuada por lo menos al valor de la opción con el precio de ejercicio más alto.

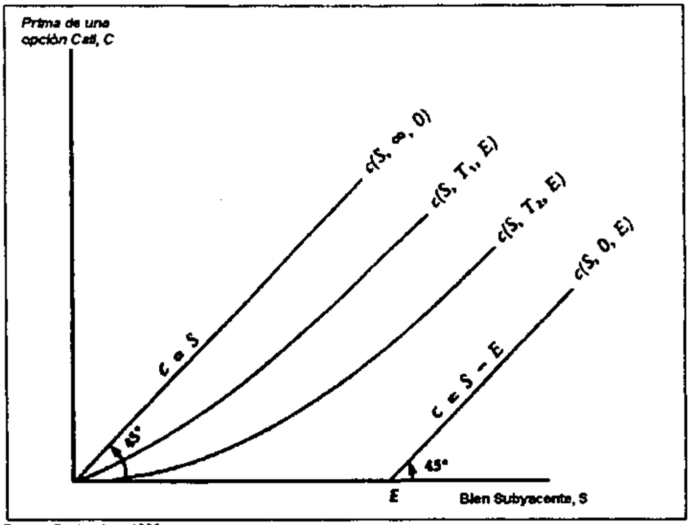
$$C_{E_1} \geq C_{E_2} \qquad \text{para } E_1 < E_2$$

PROPIEDAD 6. Definiendo los límites de la prima de una opción *call*, que tiene un precio de ejercicio mayor que cero y una fecha de vencimiento límite, se tiene que la prima nunca puede tener un valor mayor que el del bien subyacente. Por ello, una opción *call* se venderá siempre por abajo del precio del bien subyacente. De aquí que el precio del bien subyacente sea el límite máximo para el precio de la opción.

$$C < S \qquad \text{para } t < \infty;\ E > 0$$

Si estas relaciones no fueran correctas, un inversionista o especulador podría fácilmente obtener un beneficio sin riesgo comprando el bien subyacente y vendiendo la opción de compra. Como la opción es siempre valuada por un valor menor que el del bien subyacente, la opción siempre está por abajo de la línea que parte del origen 45° ($C = S$). Véase la gráfica 3.4.

PROPIEDAD 7. En términos de porcentaje, el precio de una opción cambiará por lo menos tanto como los cambios en el precio del bien subyacente.



Fuente: Bookstaber, 1996

Prima de una opción *call* en función del bien subyacente, el tiempo y precio de ejercicio.
Gráfica 3.4

Estas primeras siete propiedades nos permiten definir los límites básicos de la prima de una opción *call* como muestra la gráfica 3.4, en la cual se observa la prima como una función del bien subyacente, el tiempo y precio de ejercicio.

Para una opción *call* se tiene que:

- Si $S > E$ entonces se dice que la opción *call* está **dentro del dinero** (*in the money, ITM*), por lo tanto tiene un valor positivo o intrínseco, es decir, si se quiere ejercer, se obtiene una ganancia
- Si $S < E$ entonces la opción *call* está **fuera del dinero** (*out of the money, OTM*). Si se ejerce obviamente se produce una pérdida, por lo tanto nadie querrá comprarla o bien ejercerla. Estas opciones no tienen valor intrínseco, sólo valor temporal
- Si $S = E$ entonces la opción *call* está **exactamente en el dinero** (*at the money, ATM*). Si se ejerce no produce ni beneficio ni pérdida. La opción *at the money* no tiene valor intrínseco, pero si tiene valor temporal

Dentro de la teoria de valoración de opciones uno de los conceptos más importantes concerniente a la tasa de interés es el valor presente, mismo que se explica en seguida.

- **Descuento al valor actual o valor presente**

Supóngase que se desea adquirir un bono de ahorro, por el cual se espera un precio de $25 en 10 años. Lo más lógico sería preguntarse cuánto se está dispuesto a pagar ahora por dicho bono (Borten, 1990). Para ello hay que calcular el valor presente. Para ello se usa la siguiente fórmula financiera, en la cual un capital P acumulado anualmente a una tasa de interés r durante cierta cantidad de años t, tendrá un capital más intereses igual a V_n

$$V_n = P(1+r)^t$$

P = capital inicial

V_n = el valor del capital al transcurrir t años

r = tasa de interés

t = número de años

Si m es el número de veces que se capitaliza el interés durante t años, entonces

$$V_n = P(1+\frac{r}{m})^{mt}$$

dará el crecimiento discreto del capital. La tasa de interés continua se puede obtener a partir de la fórmula anterior en el límite cuando m tiende a infinito.

$$V_n = \lim_{m\to\infty} P(1+\frac{r}{m})^{mt} = Pe^{rt} \qquad (3.5)$$

Por lo tanto, el dinero crecerá exponencialmente. Por otra parte, **el valor presente** será igual a la tasa de interés de la oportunidad pérdida r

$$\text{valor presente} = Pe^{-rt} \tag{3.6}$$

donde la expresión e^{-rt} es el factor de descuento para el tiempo t y la tasa de interés r (e es igual a 2.718). El proceso de descuento para obtener el valor actual de un valor futuro es bien conocido como técnica financiera y no es otra cosa que el valor presente (Dowling, 1982).

Con la propiedad 2 se vio que el valor mínimo de una opción es su valor intrínseco (S - E) ó 0. Sin embargo, este valor tiene que ser descontado para obtener el valor presente. Entonces la ecuación (3.4) puede ser presentada como

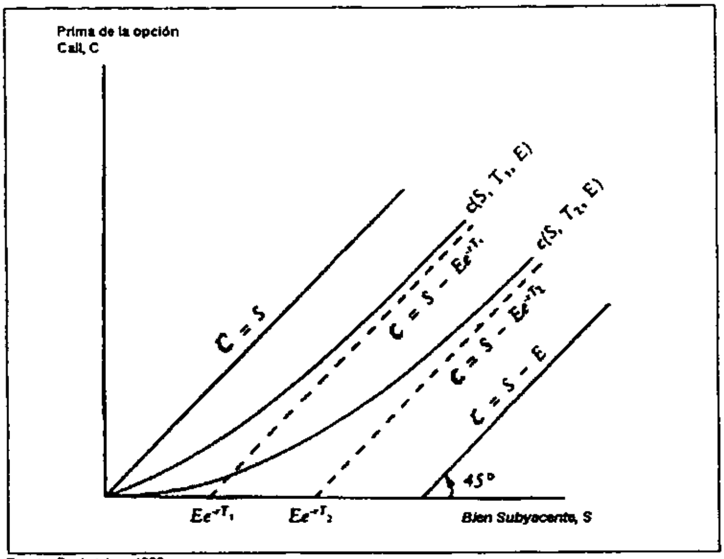
$$C \geq Max\,(S - Ee^{-rT}, 0) \tag{3.7}$$

El término Ee^{-rT} es el valor presente del precio de ejercicio E. Esto produce una condición más fuerte para el rango del precio una opción, como se ilustra en la gráfica 3.5.

PROPIEDAD 8. Como se puede deducir de la propiedad anterior, el precio de una opción *call* se incrementa cuando la tasa de interés se incrementa.

$$C_{r_1} < C_{r_2} \qquad \text{para } r_1 < r_2$$

Como se mencionó anteriormente, la inversión en opciones permite disponer de liquidez para invertir, por ejemplo, en valores a tasas de interés libre de riesgo. En consecuencia, la prima de la opción *call* aumentará si las tasas de interés suben y viceversa.



Fuente: Bookstaber, 1996

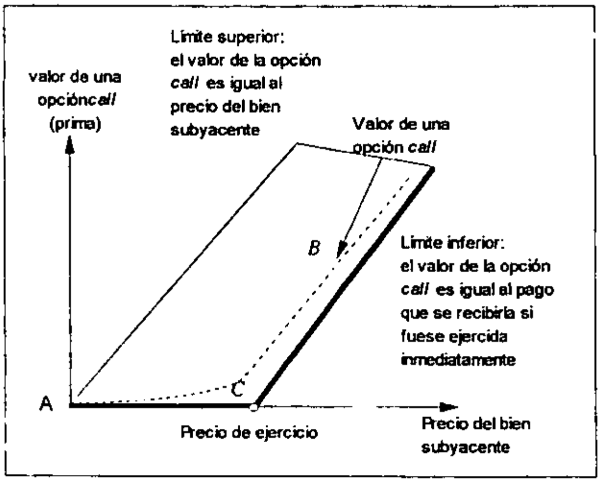
El valor intrínseco descontado de la prima de una opción *call*
Gráfica 3.5

PROPIEDAD 9. El precio de una opción es una función creciente de la volatilidad del bien subyacente.

Si se tiene dos opciones *call*, una sobre la acción *X* y otra sobre la acción *Y*; siendo *Y* más volátil que *X*, la prima de la opción sobre *Y* tendrá un valor mayor que el de la opción sobre *X*.

Hasta ahora no se ha dicho nada respecto a cómo determinar la prima de una opción. Sin embargo, con las propiedades presentadas, se sabe que una opción tiene un valor cuando vence y tiene ciertos límites. En la gráfica 3.6 se presenta el diagrama de Bachelier, donde la prima de una opción *call* debe estar dentro de la región sombreada.

La prima de la opción antes de su fecha de expiración en realidad se encontrará sobre una línea curva, con pendiente creciente[18], como la línea discontinua representada en la gráfica 3.6. Esta línea inicia su trayectoria donde los límites superior e inferior se encuentran en cero. Luego sube, y gradualmente se hace paralela al tramo con pendiente ascendente del límite inferior. Esta línea revela un hecho importante respecto a los valores de las opciones: el valor de una opción aumenta a medida que lo hace el precio del bien, si las otras variables se mantienen constantes. Incluso con anterioridad al vencimiento, el precio de la opción nunca puede estar por debajo del límite inferior. Para las opciones que todavía les queda tiempo para el vencimiento, la línea gruesa es el límite inferior para el precio de la opción. La prima de la opción es siempre superior a su valor mínimo (excepto cuando el precio del bien es cero).



Valor de una opción *call* antes de su fecha de expiración
Gráfica 3.6

En la misma gráfica se han señalado tres puntos. El punto *A*: cuando el bien subyacente vale cero, la opción no tiene valor; el punto *B*: cuando el precio del bien subyacente aumenta, la prima de la opción se acerca al precio del bien menos el precio de ejercicio (véase gráfica 3.5); y para el punto *C*: la línea discontinua y gruesa coinciden cuando el precio del bien es cero (punto A), pero en cualquier otro punto

[18] Esto se debe a la propiedad 7 mencionada arriba.

las lineas divergen, es decir, el precio de la opción debe ser superior al valor mínimo dado por la linea gruesa. En el punto C el precio del bien coincide exactamente con el precio de ejercicio (véase gráfica 3.5), la opción no tendría ningún valor si fuese ejercida en ese momento. La prima de la opción en el punto C es superior al límite inferior, que en este caso es cero. Supóngase que la opción expirará hasta dentro de tres meses, durante este tiempo el precio puede ser mayor o menor. En general, la prima de la opción será superior a su límite inferior, mientras tenga que transcurrir un cierto plazo de tiempo hasta que expire.

III.4 EL MODELO BLACK-SCHOLES

III.4.1 EL PROCESO ITO Y LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BLACK-SCHOLES

El modelo Black-Scholes hace depender la prima de una opción de cinco de los seis factores económicos vistos en la sección III.2, ya que se supone que el bien subyacente no paga dividendos durante la vida de la opción. El modelo parte de unos supuestos[19] más o menos restrictivos mediante los que, de forma simplificada, intenta describir la compleja realidad del mundo financiero:

1.-El proceso seguido por el bien subyacente es un proceso de Ito

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Esto implica que el comportamiento del bien subyacente corresponde al modelo lognormal

2.-La opción *call* es de tipo europea, con precio de ejercicio $= E$ y tiempo $= t$

3.-No hay costos de transacción o impuestos; todos los activos financieros son perfectamente divisibles

4.-No hay dividendos o pagos equivalentes sobre los bienes subyacentes durante la vida de la opción

[19] No se debe olvidar que en ciertas condiciones estas restricciones o limitaciones proporcionan resultados no válidos; Boyle, 1992.

5.-No hay oportunidades de arbitraje libres de riesgo

6.-La negociación de valores es continua

7.-Los inversionistas pueden pedir prestado o prestar a la misma tasa de interés libre de riesgo

8.-La tasa de interés libre de riesgo a corto plazo r, es constante durante la vida de la opción

9.-La volatilidad de los rendimientos es constante durante la vida de la opción

A pesar de estas restricciones el modelo Black-Scholes ha mostrado ser bastante robusto. Los principios matemáticos sobre los que se basa le han permitido evolucionar y adaptarse a diferentes formas para relajar estas limitaciones.[20]

La ecuación $dS = \mu S dt + \sigma S dz$ da información importante e interesante concerniente al comportamiento de S en un sentido de probabilidad (Wilmott, 1995). Si el comportamiento que ha tenido el bien subyacente se puede modelar, entonces es posible extrapolar su comportamiento en el futuro y estimar una determinada probabilidad de ocurrencia de cada suceso. Esta mayor o menor probabilidad de que el precio del bien subyacente adopte un posible valor es determinante para el cálculo de la cotización de una opción, y más concretamente de su valor temporal (Adell, 1996). En seguida se explica uno de los temas más importantes utilizados en el modelo de Black-Scholes, la valoración neutral al riesgo.

- **La valoración neutral al riesgo**

Se ha encontrado que el rendimiento histórico de las acciones ha sido superior al mercado de dinero en Estados Unidos por un margen del 2 al 14 por ciento anual aproximadamente. La inversión en acciones presenta un riesgo que no presenta la inversión en dinero a la tasa libre de riesgo, porque además de subir el precio de las acciones puede perfectamente bajar, cosa que no sucede con el dinero a corto plazo. Un inversionista que tenga aversión al riesgo exigirá, por lo tanto, un rendimiento superior antes de invertir en acciones o en otros instrumentos similares. Este rendimiento extra del 2 al 14 por ciento es "**la prima al riesgo**" (*risk premium*) o el costo del riesgo, y es precisamente este rendimiento extra exigido por el inversionista por asumir el riesgo de las variaciones del precio de una acción (Rodriguez de Castro, 1995).

Por lo tanto, la prima de una opción requiere una prima de seguro o una prima al riesgo. Si denotamos por I la prima al riesgo, entonces el valor inicial de la opción será el valor presente ($S - Ee^{-rT}$) más I el costo de la prima al riesgo

$$C = S - Ee^{-rT} + I$$

donde el valor de la opción puede ser considerado como una combinación de una posición apalancada más una prima de seguro que protege al inversionista contra pérdidas si el valor del bien disminuye. No es necesariamente cierto suponer *a priori* que la prima al riesgo sea siempre positiva. En principio puede existir un inversionista a quien el riesgo le resulta indiferente (*risk-neutral*), o incluso un inversionista amante de las emociones fuertes que esté dispuesto a pagar una prima por el privilegio de poseer un instrumento con riesgo que le pueda dar un gran rendimiento, pero que en general perderá casi siempre dinero. A diferentes preferencias al riesgo se obtienen valores diferentes para la prima.

Determinar la prima al riesgo no es nada fácil, así que para solucionar el problema de conocer el valor de la "prima al riesgo", **Black, Merton y Scholes hicieron uso de la valoración neutral al riesgo, es decir, considerar que es cero y que se es indiferente al riesgo.** La valoración neutral del riesgo establece que cualquier instrumento financiero dependiente de otros instrumentos financieros puede valorarse sobre el supuesto de que los inversionistas son neutrales al riesgo. Este resultado es importante, ya que es mucho más cómodo suponer que el precio del riesgo es cero porque el tratamiento matemático se vuelve mucho más sencillo. Lo que propusieron fue construir un portafolio que neutralizara su propio riesgo, y por lo tanto se podría ser perfectamente indiferente al riesgo (Rodríguez de Castro, 1995).

[20] Merton (1973) extendió el modelo para incorporar dividendos. Recientemente la suposición de volatilidad constante ha sido suavizado por varios autores, incluyendo Wiggins (1987), Hull and White (1987) y Scott (1987). Para mayores detalles

La razón por la que puede establecerse un portafolio libre de riesgo es que el precio del bien subyacente y el precio de la opción están afectados por la misma fuente de incertidumbre: los movimientos del precio del bien.[21] Esto significa que en cualquier periodo de tiempo, el precio de la opción *call* está correlacionado en forma positiva con el precio del bien subyacente.

Otro problema que se enfrenta para calcular la prima de una opción es el de calcular el rendimiento esperado μ del bien subyacente S. Esto porque el valor de μ depende de las preferencias al riesgo.

Para eliminar el riesgo (o el costo del riesgo) lo que propusieron Black y Scholes fue construir un portafolio con algunas acciones de S y unos derivados sobre S. De está forma se neutraliza su propio riesgo y se obtiene un portafolio sin riesgo. Esto permite obtener una ecuación diferencial parcial gobernada por el precio del bien subyacente, la cual no depende de las preferencias al riesgo. Black y Scholes buscaban principalmente que la ecuación diferencial no involucrara ninguna variable que estuviera afectada por las preferencias al riesgo de los inversionistas. La ecuación diferencial podría no ser independiente de las preferencias al riego si involucrara μ. En consecuencia, en un mundo neutral al riesgo se puede valorar instrumentos derivados con cualquier preferencia al riesgo y el valor será el mismo.

Black y Scholes obtuvieron una ecuación diferencial que debe ser satisfecha por el precio de cualquier valor derivado. La ecuación diferencial de Black-Scholes empieza con el resultado obtenido al aplicar el lema de Ito, o sea la ecuación (2.13) del Capítulo II:

$$\boxed{df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz}$$

consultar Boyle, 1992.

[21] La posición se establece libre de riesgo sólo para un periodo de tiempo muy corto (teóricamente, permanece libre de riesgo sólo por un instante). Para permanecer libre de riesgo debe ajustarse frecuentemente o reequilibrarse. Esto se trata en el reequilibrio de portafolios. Para mayor detalles consultar Hull, 1993.

La parte problemática de la expresión anterior es la presencia del término dz, del cual df hereda una aleatoriedad, y por lo tanto es considerado un término de riesgo. La clave es de alguna forma desaparecer el término dz. Para ello considérese la construcción de un portafolio de inversiones que en principio está construido por opciones y el bien subyacente

$$portafolio = \text{valor del portafolio en el tiempo } t$$

El portafolio específico que se considerará consiste de comprar una opción sobre un bien subyacente cuyo valor es S y simultáneamente vender un número n de unidades de este bien subyacente

$$portafolio = f - nS \tag{3.8}$$

Dicho portafolio es sencillo, pero al escoger adecuadamente el valor n se puede eliminar el riesgo del portafolio, es decir, el término, dz. Considérese $d(portafolio)$ como el cambio del valor del portafolio durante el tiempo t al tiempo $(t + dt)$. Durante este intervalo de tiempo se puede considerar el valor n como constante. Por lo tanto

$$d(portafolio) = df - ndS \tag{3.9}$$

Sustituyendo dS y df (ecuación 2.13; producto del lema de Ito) se obtiene

$$d(portafolio) = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz\right] - n(\mu S dt + \sigma S dz)$$

y agrupando

$$d(portafolio) = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - n\mu S\right)dt + \sigma S\left(\frac{\partial f}{\partial S} - n\right)dz\Big]$$

Para eliminar el riesgo, el término dz, se debe suponer que $n = \frac{\partial f}{\partial S}$. Por lo tanto, en este caso

$$d(portafolio) = [\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2]\,dt \tag{3.10}$$

Nótese que la combinación de alguna posición en corto en el derivado f y una posición larga en el subyacente S elimina algunas variables. Primero dz ya no aparece, lo cual significa que la naturaleza estocástica del bien subyacente ha sido eliminada y que no hay aleatoriedad asociada con el valor del portafolio. Segundo, se elimina la rentabilidad esperada del bien subyacente μ. Sin el término μ, el portafolio no depende de ninguna variable que esté influenciada por las preferencias al riesgo.

Así mismo, sustituyendo en la ecuación (3.9) se obtiene

$$d(portafolio) = df - \frac{\partial f}{\partial S}dS \tag{3.11}$$

Por lo tanto, el valor del portafolio consiste de una posición corta en un derivado f y una posición larga de $\frac{\partial f}{\partial S}$ unidades del bien subyacente. Como resultado el portafolio es sin riesgo al haber claramente eliminado todos los riesgos del portafolio en el intervalo $(t,\ t + dt)$.

En un mundo neutral al riesgo se mantienen dos resultados particularmente sencillos: todos los instrumentos financieros tienen una rentabilidad esperada igual a la tasa de interés libre de riesgo y el valor presente de cualquier pago futuro puede ser obtenido por el factor de descuento utilizando la tasa de interés libre de riesgo (Hull, 1993b). Por lo tanto, el portafolio debe ganar la tasa de interés libre de riesgo r

$$portafolio\ rdt$$

Igualando este rendimiento libre de riesgo del portafolio con la expresión antes obtenida, tenemos

$$d(portafolio) = portafolio\ rdt$$

sustituyendo las ecuaciones (3.8) y (3.10)

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right] dt = \left[f - \frac{\partial f}{\partial S} S\right] rdt$$

y dividiendo ambos lados por dt, se obtiene

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + S r \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = f r} \qquad (3.12)$$

Este resultado es conocido como la **ecuación diferencial de Black-Scholes**. Ésta tiene muchas soluciones que corresponden a todos las diferentes productos financieros derivados que se pueden definir teniendo a S como bien subyacente. El tipo de producto derivado que se obtiene cuando la ecuación (3.12) es resuelta, depende de los límites que la derivada satisfaga. Estos límites especifican los valores del producto derivado en los límites de los posibles valores de S y t. Por ejemplo, como se ha visto, en el caso de una opción *call* la condición límite es $Max\ (S - E,\ 0)$ al vencimiento de la opción (Hull, 1993b).

III.4.2 EL MODELO BLACK-SCHOLES PARA UNA OPCIÓN *CALL*

Al vencimiento del contrato el valor de la opción *call* europea está dado por su valor intrínseco

$$C = Max\,[0, S - E]$$

Para resolver el problema de valorar una opción antes de su vencimiento se utiliza una fórmula ligeramente diferente

$$\hat{C} = \hat{E}\ (Max[S - E, 0])$$

donde $\hat{E}$ es el estimador del operador del valor esperado. El valor intrínseco (S - E) es un valor futuro, que debe ser descontado para obtener su valor presente. Esto no es problema porque utilizando la valoración neutral al riesgo se sabe que el pago futuro puede ser descontado a la tasa de interés libre de riesgo, r. Así que la ecuación puede definirse como

$$\hat{C} = e^{-rt}\ \hat{E}\ (Max[S - E, 0]) \tag{3.13}$$

La ecuación (3.13) es poco realista, ya que se ignora el precio de S al vencimiento. No obstante, se puede estimar la probabilidad de los posibles valores intrínsecos. Cabe señalar que puede haber un número importante de posibles precios del bien subyacente al día de vencimiento. Por ello es importante describir el comportamiento del precio del bien subyacente (Tinoco, 1998). De acuerdo a lo visto en el capítulo II, el proceso seguido por S a través del tiempo será un proceso de Ito cuya ecuación diferencial es $dS = \mu S dt + \sigma S dz$. Aplicando el lema de Ito se obtuvo que ln (S) tiene distribución normal con las siguientes caracteristicas:

$$\ln S_T \approx \phi\ \left[\ln S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T,\ \sigma\sqrt{T}\,\right]$$

Por lo tanto, la distribución que se supone para el precio del bien subyacente es la distribución lognormal. Si $g(S)$ es la función de densidad de probabilidad lognormal de S en un mundo neutral al riesgo, entonces el valor esperado de la opción al vencimiento puede ser transformado en con la integral valuada de E a infinito y simplificando

$$\hat{C} = e^{-rt}\int_E^{\infty}[S_t - E]g(S_t)dS_t$$

donde $$g(S)=\frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln S-\ln S_0-(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}\right]^2}$$

Resolver esta integral requiere matemática compleja, misma que se sale del objetivo de este trabajo.[22] Resolviendo la integral anterior, se tiene que el valor de una opción *call* europea sobre un bien subyacente S que no paga dividendos está dado por

$$\hat{C}=S\,N(d_1)-E\,e^{-rt}\,N(d_2) \tag{3.14}$$

donde

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

$$d_1=\frac{\ln(\frac{S}{E})+(r+\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{t}$$

Desarrollando d_2

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{t}=\frac{\ln(\frac{S}{E})+(r+\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}-\sigma\sqrt{t}=\frac{\ln(\frac{S}{E})+(r-\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

22 Puede consultarse Rodriguez de Castro, 1995.

La ecuación (3.14) se conoce como el **modelo Black-Scholes.** El significado de los factores de la ecuación (3.14) es, como se explicó anteriormente:

S = precio en el mercado del bien subyacente

E = precio de ejercicio del bien subyacente

t = plazo a vencimiento (como porcentaje de año)

r = tasa de interés actual libre de riesgo

σ = volatilidad (desviación estándar anual de los rendimientos)

ln = logaritmo natural

$N(z)$ = función de densidad acumulada normal estándar, es decir, la probabilidad de que una variable distribuida normalmente sea menor a z.

El modelo de Black-Scholes pondera la probabilidad de que una opción call, cuyo bien subyacente sigue un movimiento Browniano geométrico, expire dentro del dinero ($S > E$). El punto clave para explicar la complejidad de la fórmula es interpretar el significado de $N(d)$, la cual da la probabilidad de que se pueda ejercer la opción (Martínez, 1993). Si se elimina este elemento se puede ver que el modelo Black-Scholes es exactamente igual que la ecuación $S - Ee^{-rT}$ que se obtiene de la ecuación (3.7), cuando la opción termina dentro del dinero.

Si se analizan los valores extremos de algunos factores del modelo de Black-Scholes se ve que ésta tiene en general las propiedades que establecen el modelo. Si se considera el caso en que el precio del bien subyacente S se vuelve muy grande, entonces es muy probable que la opción *call* sea ejercida. Esto es, si d_1 y d_2 se hacen muy grandes, los valores de $N(d_1)$ y $N(d_2)$ se acercan a uno. Si d tiende a ∞, entonces el valor $N(d)$ es igual a 1. Esto quiere decir que hay certeza absoluta que se ejercerá la opción *call* y por lo tanto su precio será $S - Ee^{-rT}$.

$$\text{Si } S \rightarrow \infty \text{ entonces } N(d_1) \text{ y } N(d_2) \rightarrow 1 \therefore\ C = S - Ee^{-rt}$$

La primera parte, $S\ N(d_1)$, es el beneficio esperado de adquirir un bien subyacente. d_1 es la proporción de cambio del valor de la opción con respecto a su bien subyacente. Nos dice relativamente cuanto cambiará el valor de una opción cuando el bien subyacente cambia por cierta cantidad. Entonces cuando el valor del bien subyacente cambia el valor de la opción también cambiará. El beneficio esperado se calcula multiplicando el precio del bien S por $N(d_1)$. El término $N(d_1)$ representa la probabilidad condicional de S, dado que la opción *call* termine dentro del dinero al vencimiento (Wilmott, 1995).

La segunda parte del modelo, $E\ e^{-rt}\ N(d_2)$, da el valor presente del pago del precio de ejercicio en la fecha de vencimiento. El término $N(d_2)$ representa la probabilidad de que el precio del bien subyacente S exceda el precio del ejercicio E al vencimiento ($S > E$), o la probabilidad de que la opción termine dentro del dinero.

De acuerdo a lo visto en el capítulo II $\ln(\frac{S_T}{S_t})$ está normalmente distribuida con media $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$ y una desviación estándar $\sigma\sqrt{T}$. Por lo tanto, después de estandarizar, tenemos que $S > E$, se puede expresar como

$$\frac{\ln(\frac{S_T}{S_t}) - (T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}} \geq \frac{\ln(\frac{E}{S_t}) - (T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Multiplicando por menos uno se obtiene

$$\frac{\ln(\frac{S_t}{S_T}) + (T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}} \leq \frac{\ln(\frac{S_t}{E}) - (T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Podemos ver que la parte izquierda de esta ecuación es una variable aleatoria distribuida normalmente con media cero y desviación estándar 1. Esto quiere decir, que para que $S > E$ se cumpla entonces la variable aleatoria del lado izquierdo de la ecuación debe ser menor o igual al valor de la derecha. La probabilidad de esta desigualdad está dada $N(d_2)$ (Chriss,1995).

Esto tiene sentido porque d_2 está denotado por $\ln(\frac{S}{E})$ más el rendimiento denotado por $(r - \frac{\sigma^2}{2})t$, dividido por la desviación estándar denotado por $\sigma\sqrt{t}$ (Hinkes, 1998).)

Por otra parte, si la volatilidad σ se acerca a cero, entonces el valor de d_1 se aproxima a infinito ya que $\frac{x}{0} = \infty$. Esto ocasiona que $N(d_1)$ se aproxime a uno y también $N(d_2)$ se aproxime a uno. En este caso el modelo se convierte en el valor intrínseco descontado.

A continuación se presenta un ejemplo que calcula el valor de una opción utilizando el modelo Black-Scholes.

III.5 EJEMPLO PRÁCTICO

En este apartado se calcula la prima de una opción *call* europea con la finalidad de ejemplificar el modelo Black–Scholes. Para este fin se utilizan datos reales, teniendo como bien subyacente la acción Telmex L.[23] Para efectos del ejemplo se supondrá que la acción no paga dividendos durante la duración de la opción.

El uso del modelo de Black–Scholes es sencillo siempre que se tengan los datos correctos. Al momento de utilizar el modelo es muy importante tener en cuenta los factores que involucra: el precio del bien

[23] Las acciones de Telmex son las más importantes de la Bolsa Mexicana de Valores. Se comercializan dos tipos de acciones: Telmex A y Telmex L. Las acciones Telmex A son las preferenciales que dan ciertos derechos de control a sus tenedores. Las acciones L se comercializan mucho más que las acciones A, pero no dan esos derechos.

subyacente, el precio de ejercicio, la tasa de interés, la volatilidad y el tiempo antes del vencimiento. Estas últimas tres variables se deben expresar bajo la misma unidad de tiempo.

Para el ejemplo se supondrá que se va a firmar un contrato de opción con las siguientes características:

EL PRECIO DE EJERCICIO (*E*): $28.00

EL PRECIO ACTUAL DE LA ACCIÓN (*S*): $26.00[24]

TIEMPO DE LA OPCIÓN (*t*): 3 meses ó 0.25 años

Lo convencional es expresar el tiempo en años. Por ejemplo, tres meses es igual a 0.25. Si T = 91 días, convirtiéndolos a años se obtiene

$$t = 91/365 = 0.25$$

TASA DE INTERÉS LIBRE DE RIESGO (*r*):

Para determinar la tasa de interés relevante se tiene que buscar algún instrumento libre de riesgo. Para el caso de México lo más conveniente es utilizar la tasa de Cetes a 91 días, para que sea consistente con el tiempo de duración de la opción. La tasa de interés debe ser expresada en decimales.[25] Para nuestro ejemplo, el 12 de noviembre de 1998 la tasa de Cetes a 91 días estaba en 34.13 por ciento[26], es decir,

$$r = 34.13/100 = 0.3413$$

[24] Éste fue el precio de la acción publicado en el *Reforma* del 12 de noviembre de 1998.
[25] Es decir, una tasa del 20 por ciento debe ser expresada como 0.20.
[26] *Reforma*, 12 de noviembre de 1998.

LA VOLATILIDAD (σ):

La volatilidad del precio de la acción es el único valor que hay que estimar. Anteriormente se explicó un método para obtenerla, basado en la volatilidad histórica. Para calcular la volatilidad se utilizan los precios de cierre diarios para la acción de Telmex L del 1° de julio al 11 de noviembre de 1998, teniendo en total 93 datos.[27] Dichos precios, asi como los cálculos relevantes, se presentan en la tabla 3.3.

No.	Precio de cierre de la acción Telmex L	Precio relativo S_i / S_{i-1}	Rendimiento diario $u_i = \ln(S_i / S_{i-1})$	u_i^2
0	21.800			
1	21.600	0.990826	-0.009217	0.000085
2	21.900	1.013889	0.013793	0.000190
3	21.250	0.970320	-0.030130	0.000908
4	21.900	1.030588	0.030130	0.000908
5	22.100	1.009132	0.009091	0.000083
6	21.850	0.988688	-0.011377	0.000129
7	22.050	1.009153	0.009112	0.000083
8	22.850	1.036281	0.035639	0.001270
9	23.050	1.008753	0.008715	0.000076
10	23.350	1.013015	0.012931	0.000167
11	23.250	0.995717	-0.004292	0.000018
12	23.350	1.004301	0.004292	0.000018
13	23.100	0.989293	-0.010764	0.000116
14	23.200	1.004329	0.004320	0.000019
15	23.350	1.006466	0.006445	0.000042
16	22.800	0.976445	-0.023836	0.000568
17	22.550	0.989035	-0.011025	0.000122
18	22.750	1.008869	0.008830	0.000078
19	22.300	0.980220	-0.019978	0.000399
20	22.800	1.022422	0.022174	0.000492
21	23.000	1.008772	0.008734	0.000076
22	22.000	0.956522	-0.044452	0.001976
23	22.050	1.002273	0.002270	0.000005
24	21.300	0.965986	-0.034606	0.001198
25	21.200	0.995305	-0.004706	0.000022
26	20.850	0.983491	-0.016647	0.000277
27	20.150	0.966427	-0.034150	0.001166
28	19.800	0.982630	-0.017522	0.000307
29	19.900	1.005051	0.005038	0.000025
30	19.520	0.980905	-0.019280	0.000372

[27] Como se mencionó anteriormente, en la práctica se considera que se debe contar con al menos 90 datos para estimar la volatilidad.

No.	Precio de cierre de la acción Telmex L	Precio relativo S_i / S_{i-1}	Rendimiento diario $u_i = \ln(S_i / S_{i-1})$	u_i^2
31	19.700	1.009221	0.009179	0.000084
32	20.050	1.017766	0.017611	0.000310
33	20.100	1.002494	0.002491	0.000006
34	20.400	1.014925	0.014815	0.000219
35	19.980	0.979412	-0.020803	0.000433
36	19.000	0.950951	-0.050293	0.002529
37	18.760	0.987368	-0.012712	0.000162
38	19.300	1.028785	0.028378	0.000805
39	18.780	0.973057	-0.027313	0.000746
40	18.560	0.988285	-0.011784	0.000139
41	17.900	0.964440	-0.036208	0.001311
42	18.900	1.055866	0.054361	0.002955
43	17.900	0.947090	-0.054361	0.002955
44	19.720	1.101676	0.096833	0.009377
45	18.900	0.958418	-0.042471	0.001804
46	18.820	0.995767	-0.004242	0.000018
47	20.300	1.078640	0.075701	0.005731
48	20.200	0.995074	-0.004938	0.000024
49	19.520	0.966337	-0.034243	0.001173
50	17.760	0.909836	-0.094491	0.008929
51	18.780	1.057432	0.055844	0.003119
52	19.040	1.013845	0.013750	0.000189
53	21.700	1.139706	0.130770	0.017101
54	21.950	1.011521	0.011455	0.000131
55	22.200	1.011390	0.011325	0.000128
56	22.100	0.995495	-0.004515	0.000020
57	22.100	1.000000	0.000000	0.000000
58	24.000	1.085973	0.082476	0.006802
59	23.150	0.964583	-0.036059	0.001300
60	22.850	0.987041	-0.013044	0.000170
61	23.200	1.015317	0.015201	0.000231
62	23.300	1.004310	0.004301	0.000018
63	22.900	0.982833	-0.017316	0.000300
64	21.900	0.956332	-0.044650	0.001994
65	22.900	1.045662	0.044650	0.001994
66	22.400	0.978166	-0.022076	0.000487
67	22.450	1.002232	0.002230	0.000005
68	22.000	0.979955	-0.020248	0.000410
69	22.500	1.022727	0.022473	0.000505
70	23.000	1.022222	0.021979	0.000483
71	23.700	1.030435	0.029981	0.000899
72	24.200	1.021097	0.020878	0.000436

No.	Precio de cierre de la acción Telmex L	Precio relativo S_i / S_{i-1}	Rendimiento diario $u_i = \ln(S_i / S_{i-1})$	u_i^2
73	23.850	0.985537	-0.014568	0.000212
74	25.550	1.071279	0.068853	0.004741
75	24.900	0.974560	-0.025770	0.000664
76	24.700	0.991968	-0.008065	0.000065
77	24.500	0.991903	-0.008130	0.000066
78	24.500	1.000000	0.000000	0.000000
79	25.150	1.026531	0.026185	0.000686
80	25.650	1.019881	0.019686	0.000388
81	25.550	0.996101	-0.003906	0.000015
82	25.450	0.996086	-0.003922	0.000015
83	25.000	0.982318	-0.017840	0.000318
84	25.900	1.036000	0.035367	0.001251
85	26.400	1.019305	0.019121	0.000366
86	26.500	1.003788	0.003781	0.000014
87	27.300	1.030189	0.029742	0.000885
88	27.000	0.989011	-0.011050	0.000122
89	26.700	0.988889	-0.011173	0.000125
90	26.500	0.992509	-0.007519	0.000057
91	26.300	0.992453	-0.007576	0.000057
92	26.000	0.988593	-0.011472	0.000132
suma			0.12915	0.09415

Fuente: Bolsa Mexicana de Valores

Precios de Telmex L del 1° de julio al 11 de noviembre de 1998
Tabla 3.3

Utilizando la fórmula de desviación estándar

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2}$$

y considerando que

$$n = 92$$

$$\sum u_i = 0.176187$$

$$\sum u_i^2 = 0.097806$$

se llega a un estimado de la desviación estándar del rendimiento diario de

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{0.097806}{91} - \frac{(0.176187)^2}{8372}} = 0.032727$$

Para anualizar la volatilidad, y dado que nuestros datos son diarios, hay que ajustarla por el número de días hábiles, que son aproximadamente 252

$$\hat{\sigma} = \frac{0.032727}{\sqrt{\frac{1}{252}}} = 0.032727\sqrt{252} = 0.519531$$

La volatilidad anual será del 51.95 por ciento con un error estándar $\frac{0.5195}{\sqrt{2(92)}} = 0.038300$, es decir, el 3.83 por ciento anual.

Con los valores puntuales como estimadores de S y E se puede calcular finalmente el precio de la opción con los siguientes valores:

S = precio en el mercado del bien subyacente = 26.00
E = precio de ejercicio del bien subyacente = 28.00
t= plazo a vencimiento 3 meses = 0.25
r = tasa de interés actual libre de riesgo = 0.3413
σ = volatilidad = 0.5195

Utilizando el modelo Black-Scholes para determinar el precio de una opción *call* europea

$$\hat{C} = S\,N(d_1) - E\,e^{-rt}\,N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

sustituyendo valores

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{26.00}{28.00}) + (0.3413 + \frac{0.5195^2}{2})(0.25)}{(0.5195)\sqrt{0.25}} = 0.173058938$$

$$d_2 = 0.173058938 - 0.5195 * \sqrt{0.25} = -0.086691062$$

$$N(d_1) = 0.568697449 \qquad N(d_2) = 0.465458475$$

$$C = S\,N(d_1) - E\,e^{-rt}\,N(d_2)$$

$$\hat{C} = (26.00)(0.568697449) - (28.00)(e^{-(0.3413*0.25)})(0.465458475) = 2.8192$$

se tiene que el precio de una opción *call* europea sobre una acción Telmex L que no paga dividendos con duración de tres meses y con un precio de ejercicio de $28.00 tendrá un costo de $2.82.

En la tabla 3.4 se presenta la hoja de cálculo en Excel en la cual se ha computarizado la fórmula de Black–Scholes.

VALORACIÓN DE OPCIONES
FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES

DATOS DE ENTRADA

Precio de la acción (S):	26.00
Precio de ejercicio (E):	28.00
Interés libre de riesgo -%	34.13
Tiempo hasta vcto. (años):	0.25
Desviación típica (%)	51.95

PRIMA DE LA OPCION *CALL*= **2.8192**

ESTANDARIZANDO EL TIEMPO EN AÑOS

Interés libre de riesgo (r)	0.3413
Tiempo (t) hasta vcto. (años) :	0.2500
Desviación típica (s)	0.5195

CALCULOS INTERMEDIOS

d1	0.173058938	d1=(LN(S/E)+(r+(σ^2/2))*t)/(σ*RAIZ(t))
d2	-0.086691062	d2=d1 - σ*RAIZ(t)
N(d1)	0.568697449	=DISTR.NORM.ESTAND(d1)
N(d2)	0.465458475	=DISTR.NORM.ESTAND(d2)
C	2.819202385	C=S*N(d1) - (E*EXP(-r*t))*N(d2)

Resultados de la hoja de calculo de Excel
Tabla 3.4

Para fines de comparación, a continuación se analizan las primas que se obtienen para diferentes valores del precio de ejercicio, conservando los demás parámetros constantes. Los resultados se presentan en la tabla 3.5. De esta tabla se desprende la relación inversa entre el precio de ejercicio y la prima de la opción: mientras menor el primero mayor el segundo.

Precio de Ejercicio	Prima	Comentario
$31.00	$1.7500	Esta prima es menor a $2.8192, lo cual es lógico ya que el precio de ejercicio se encuentra más alejado del precio actual y es menos probable que alcance ese valor o sea superior a éste.
$27.00	$3.2720	En este caso la prima es mayor a $2.9182 ya que el precio de ejercicio se encuentra más cercano al precio de la acción.
$28.00	$2.8192	
$24.00	$4.9459	Se observa que la prima es mucho mayor que la anterior debido a que la opción permite comprar la acción muy por debajo de su precio actual.

Resultados con diferentes precios de ejercicio
Tabla 3.5

III.6 CONCLUSIÓN

En este capítulo se explicó la forma en que Black, Merton y Scholes utilizaron los procesos estocásticos para modelar la compleja realidad de los productos derivados, en especial para estimar la prima de una opción *call* europea. Estos investigadores llegaron a importantes afirmaciones financieras, por ejemplo, que en un mundo neutral al riesgo, el rendimiento esperado de un bien será igual a la tasa de interés libre de riesgo. Aunque el modelo Black–Scholes que parte de principios matemáticos sofisticados y complejos, como son los procesos estocásticos de tiempo continuo, se puedo observar que en la práctica el modelo es muy fácil de utilizar. Partiendo de las propiedades del proceso de Ito, como el proceso que sigue un bien financiero, y utilizando el lema de Ito, se obtuvo la ecuación diferencial de Black–Scholes. Se observó que los datos que requiere el modelo se obtienen directamente del mercado excepto la volatilidad, el precio de ejercicio y fecha de ejercicio. Los dos últimos son acordados entre las dos partes involucradas en el contrato. En el caso de la volatilidad, se utilizó como un estimador de la volatilidad futura la volatilidad histórica.

En parte final del capítulo se presentó un ejemplo práctico para explicar la forma en que se utiliza el modelo Black–Scholes. Se puede concluir que el modelo Black–Scholes representa una buena alternativa para estimar el valor de una opción *call* europea. Sin embargo, faltaría comprobar en trabajos posteriores si el estimador puntual del parámetro $\hat{C}$ es un estimador insesgado, de varianza mínima, consistente, eficiente y suficiente, lo cual no se comprobó en este trabajo ya que se saldría del objetivo de estudio.

CONCLUSIONES

El auge de los productos derivados a nivel internacional y la apertura del MexDer en México implican la necesidad de conocer, manejar y desarrollar métodos matemáticos aplicables en esta área financiera.

Como se explicó en el primer capítulo de este trabajo, los productos derivados en general y las opciones en particular constituyen una buena alternativa de inversión al limitar el riesgo producto de las fluctuaciones en el precio de los bienes subyacentes. También se mencionó que otra función importante de los derivados es facilitar el pronóstico de cambios futuros en el precio de los bienes subyacentes. El uso de los derivados evidentemente tiene sus propios riesgos, sobre todo porque dichos instrumentos se prestan al apalancamiento y a la especulación. Las catástrofes financieras del banco Barings y del condado de Orange, ambas tratadas en el primer capítulo, muestran el alcance de alguno de los riesgos que involucraría el mal uso de los derivados, por ejemplo, la especulación. Lo anterior enfatiza la necesidad de poseer un buen conocimiento del mercado de derivados y de sus teorías de control de riesgos antes de utilizarlos.

El comprador de una opción paga al emisor una prima, debido a que el último asume la obligación de realizar la transacción futura pactada en la opción, mientras que el primero sólo adquiere la opción de realizar dicha transacción. En la teoría de finanzas la determinación de lar prima de una opción había sido un problema sin resolver hasta que a principios de los años setenta, Fischer Black, Myron S. Scholes y Robert C. Merton y desarrollaron su modelo. En un principio, el modelo Black–Scholes se centró en la valoración de las opciones *call* europeas, pero se ha visto que el modelo se puede adaptar y generalizar a cualquier producto derivado, e inclusive a otras ramas de la ciencia (tales como seguros, inversiones, etc.). El modelo tuvo una aceptación inmediata y ha sido calificado por algunos especialistas como la aportación más importante en el campo de la teoría y la práctica financiera en los últimos años.

El modelo Black–Scholes tiene sus raíces en los procesos estocásticos de Markov de tiempo continuo, procesos que son llamados procesos de difusión. Un proceso de Markov es un proceso donde una observación en el tiempo t depende únicamente de la observación anterior. Black, Merton y Scholes consideraron que uno de dichos procesos, a saber, el proceso estocástico de Ito, es un modelo matemático adecuado para representar los precios de bienes financieros que cambian aleatoriamente. Por ello, en el segundo capítulo se expusieron diversos conceptos generales de algunos procesos de difusión –el movimiento Browniano, el movimiento Browniano geométrico, el proceso de Wiener y el proceso de Ito– y el lema de Ito. La suposición del modelo Black-Scholes es que el precio del bien subyacente sigue una caminata aleatoria lognormal. Por lo tanto, se explicó que la distribución de probabilidad del precio de un bien financiero en un período de tiempo sigue una distribución lognormal. Se vio que Si S sigue un movimiento Browniano geométrico, entonces sus rendimientos en un intervalo (0, T) siguen una distribución normal. En consecuencia, los rendimientos de los instrumentos financieros pueden ser descritos por una distribución normal.

Se encontró que los procesos estocásticos de tiempo continuo, tales como el proceso de Wiener, el proceso generalizado de Wiener y el proceso de Ito son comúnmente empleados para la valoración de opciones financieras europeas. El proceso de Wiener es el más simple y es utilizado para representar la aleatoriedad asociada a un bien financiero. El proceso de Wiener es generado aleatoriamente de una distribución normal estándar, donde la aleatoriedad crece de acuerdo a la raíz cuadrada del tiempo. Dicho proceso es utilizado como una parte clave de los otros dos procesos mencionados anteriomente. El proceso generalizado de Wiener es un caso particular de un proceso de Wiener. El proceso de Ito es un proceso generalizado de Wiener cuyos coeficientes no son constantes. De la teoría del cálculo de Ito, la parte más importante, desde el punto de visto de los productos derivados, es el lema de Ito, el cual permite determinar la ecuación diferencial estocástica para una función que depende de variables que siguen un proceso de Ito.

En el tercer capítulo se examinó cómo Black, Merton y Scholes utilizaron los procesos estocásticos para modelar la compleja realidad de las opciones, en especial para estimar la prima de una opción *call* europea. A partir del proceso de Ito, como el proceso que sigue un bien financiero, y del lema de Ito se obtuvo la ecuación diferencial de Black-Scholes. Estos autores lograron identificar los factores que intervienen en la prima de una opción: el precio del bien subyacente, el precio de ejercicio, la tasa de interés, la volatilidad, la fecha de vencimiento y el pago de dividendos. Pudieron plasmar los efectos de cada uno de estos factores en su modelo. Black, Merton y Scholes llegaron a importantes afirmaciones como la de que en un mundo neutral al riesgo, el rendimiento esperado de un bien será igual a la tasa de interés libre de riesgo. Además, el modelo Black–Scholes logró tomar en cuenta el costo del riesgo, al construir un portafolio libre de riesgo.

El modelo Black-Scholes parte de ciertas suposiciones restrictivas acerca de las características del medio ambiente que rodea al bien subyacente y por lo tanto no funciona correctamente en la práctica cuando éstas dejan de cumplirse. Sin embargo, se ha comprobado que se sustenta en bases sólidas y ha desencadenado desde su aparición una serie de nuevos modelos. Se observó que el modelo básico de Black–Scholes ha sido extendido a diferentes formas para relajar las suposiciones originales. Merton [1973] extendió el modelo para incorporar dividendos. La suposición de una volatilidad constante ha sido superada por varios autores incluyendo a Wiggins [1987], Hull and White [1987] y Scott [1987]. Así mismo para derivados más complejos se utiliza el modelo binomial y el método de Monte Carlo. Se puede decir que todos los modelos para valorar opciones, aun los más complejos, tienen mucho en común con los principios matemáticos del modelo original de Black, Merton y Scholes.

Aunque la utilización del modelo Black-Scholes es muy sencilla, esté parte de principios matemáticos muy sofisticados y complejos. En el tercer capítulo se programó una hoja de cálculo de Excel para obtener el precio de una opción *call* tipo europea de una duración de tres meses. El modelo se probó utilizando datos reales de la acción Telmex L, una de las más importantes de la Bolsa Mexicana de Valores, a finales de 1998. Así mismo se obtuvo el precio del bien subyacente, la tasa de interés libre de riesgo y la volatilidad de la acción. Para efectos del modelo se supuso un pago de dividendo de cero. Para un estimador de la volatilidad futura fue se utilizó la volatilidad histórica observada en el pasado. La volatilidad histórica, la desviación estándar del promedio de las variaciones de los precios de la acción Telmex L ocurridos del 1° de julio al 11 de noviembre de 1998, tomando una distribución de probabilidad lognormal. Dado que la volatilidad es proporcional a la raiz cuadrada del tiempo, para hallar la volatilidad anual se multiplicó la volatilidad diaria por la raiz cuadrada de 252, el número de dias hábiles. El modelo se utilizó para diferentes valores del precio de ejercicio y se comprobó que la prima obtenida cumple con los valores esperados por Black, Merton y Scholes cuando se varia el precio de ejercicio.

Por otra parte, es necesario comprender las limitaciones del modelo de Black-Scholes antes de utilizarlo. La primera limitación es que supone una tasa de interés libre de riesgo constante, lo cual es poco realista. La segunda limitación se refiere a la dificultad de medir la volatilidad. El modelo Black-Scholes utiliza la volatilidad histórica. Sin embargo, en realidad es la volatilidad esperada (en el futuro) la que afecta el valor de las opciones. La última limitación es que el modelo hace uso de la distribución lognormal, la cual no necesariamente corresponde a la distribución empirica de los precios del bien subyacente. No obstante, para periodos cortos de tiempo el modelo Black-Scholes representa una buena alternativa de valoración.

Se puede afirmar que el modelo Black-Scholes es muy útil para estimar el valor de una opción, para evaluar si una opción está sobrevalorada o no en determinado momento. Sin embargo, en trabajos futuros seria recomendable tratar de analizar con más detalle si el estimador de la prima de la opción *call* es un estimador insesgado, de varianza mínima, consistente, eficiente y suficiente, tema que sale del objetivo del presente trabajo.

En términos generales, es altamente recomendable el uso de los modelos estocásticos para efectuar análisis financieros y fundamentar la toma de decisiones de inversión. El papel de la estadística matemática y de los procesos estocásticos en el análisis de riesgo y de las estrategias de los instrumentos financieros se ha desarrollado ampliamente las últimas décadas.

Por otra parte, la utilización de los productos derivados involucra ciertos riesgos. Los problemas que se puedan presentar con su utilización no necesariamente radican en los productos derivados en si, sino en la falta de entendimiento de sus caracteristicas y del alcance de los riesgos que conlleva su utilización, aunado por un desconocimiento de estos instrumentos dentro del mercado. No se debe de olvidar que los derivados ofrecen un elevado efecto de apalancamiento. Este efecto se da gracias a que la inversión inicial que se requiere es baja, especialmente si se compara con lo que costaria invertir directamente en el bien subyacente. Si esta caracteristica de los derivados es aprovechada correctamente y se utiliza en forma adecuada y profesional, puede resultar de gran utilidad, para protegerse contra los riesgos de mercado. Debido al auge que existe del mercado de derivados a nivel mundial el mercado de derivados es una herramienta financiera indispensable para el funcionamiento eficiente de los mercados financieros, y de la economía de un pais en general.

GLOSARIO

Acción.- Titulo–valor que representa una de las partes en que se divide el capital social de una empresa. La acción es también la unidad monetaria que representa el valor de una sociedad. El valor de una acción puede ser enfocado desde tres ángulos: valor nominal, valor en libros y valor de mercado.

Agentes.- A las personas que celebran contratos de futuros o contratos de opciones en la Bolsa a través de un socio liquidador, o de un socio operador que actúe como comisionista de un socio liquidador, y cuya contraparte sea la cámara de compensación.

Apalancamiento.- Se refiere a poder manejar grandes posiciones con una base de capital relativamente pequeña. Es decir, es la utilización de una pequeña cantidad de dinero para controlar una cantidad de dinero mayor. Técnicamente es la proporción que guardan las deudas en relación con el capital propio de una empresa.

Arbitraje.- Es el proceso de comprar y vender simultáneamente el mismo titulo o un titulo equivalente en mercados distintos, con el fin de beneficiarse de las diferenciales de precio de cotización entre los dos mercados. Cabe destacar que mientras más entes participen en el proceso de arbitraje, los diferenciales tienden a desaparecer.

Bonos.- Titulos de deuda emitidos por una empresa o por el Estado. En ellos se especifica el monto a reembolsar en un determinado plazo, las amortizaciones totales o parciales, los intereses periódicos y otras obligaciones del emisor.

Call.- Sinónimo de opción de compra.

Cámara de compensación.- Es la institución encargada de realizar los cargos y abonos en las cuentas de los compradores y vendedores de Opciones y Futuros.

Cetes.- Certificados de la Tesoreria de la Federación. Titulos de crédito al portador emitidos y liquidados por el Gobierno Federal a su vencimiento.

Cierre de posición.- Consiste en efectuar una transacción la cual, en algún punto previo a la expiración, el comprador de la opción hace una venta de una opción idéntica, o el vendedor hace una compra de una opción idéntica a la vendida. Este tipo de transacción cancela la posición del inversionista.

Clases de opciones.- Todos los contratos de opciones que son del mismo tipo y estilo y cubren el mismo bien subyacente son referidos como opciones de la misma clase. Son todas las opciones con el mismo subyacente.

Commodity.- Es un bien tangible básico, como por ejemplo granos, metales y minerales, negociado en los diferentes mercados internacionales.

Contrato de opción.- Un contrato de opción se define por los siguientes elementos: tipo (*put* o *call*), estilo (americano, europeo o capado), bien subyacente, unidad de intercambio (número de unidades del subyacente por contrato), precio de ejercicio y fecha de expiración. Si a una persona le interesa una serie en particular de opción como su tenedor neto (o sea que, si el número de contratos comprados excede el número de contratos vendidos), entonces se dice que esa persona tiene una posición larga en esa serie. Por el contrario, si el interés de una persona en una serie particular de opciones es como el que las escribe (si el número de contratos vendidos excede el número de contratos comprados), se dice que tiene una posición corta en la serie.

Especulación.- Acto consistente en aprovechar las alzas y las bajas de cotización de los bienes sujetos a contratación en el mercado con vistas a obtener lucro. Conjunto de operaciones bursátiles que realizan los especuladores, con la esperanza de que la cotización se incremente en un plazo de tiempo.

Forward.- Contrato no estandarizado (contrato negociado no intercambiable), vendido a una entrega futura de un bien subyacente, a una fecha especificada.

Índice.- Un índice es un valor, cuyo objetivo es señalar o indicar la evolución de las cotizaciones de las acciones que lo conforman. Los índices solamente nos indican la evolución de los precios de las acciones que lo conforman, no señalan, en ninguna situación, la rentabilidad de las mismas de forma individual.

IPC.- Es el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), es el principal indicador del mercado accionario y esta compuesta por empresas seleccionadas de acuerdo a su nivel de bursatilidad y su valor de capitalización, generalmente esta compuesto de entre 30 y 50 empresas listadas en la Bolsa de acuerdo al sector productivo al que pertenezcan (servicios, comercio, construcción, etc.)

Liquidez.- Calidad de un valor para ser negociado en el mercado con mayor o menor facilidad.

Mercado de valores.- Es el área o espacio en que confluyen las fuerzas de la oferta y la demanda para realizar las transacciones de bienes y servicios a precios determinados.

Mercado eficiente.- Cuando se dice que un mercado es eficiente, quiere decir la historia pasada está reflejada **totalmente en el precio presente, hasta que no se obtiene nueva información; y los mercados responden** inmediatamente a cualquiera nueva información sobre el bien subyacente

Obligaciones.- Bonos de desarrollo del Gobierno Federal. Titulos de deuda emitidos por el Gobierno Federal con el propósito de financiar proyectos de maduración prolongada.

Opciones.- Es un contrato por medio del cual su titular (o comprador) adquiere el derecho a comprar o vender un bien, dentro de un plazo predefinido (periodo del contrato), a un precio (de ejercicio) fijado de antemano. Para obtener este derecho se debe pagar un precio (una prima).

Piso de remates.- Lugar donde se lleva a cabo, todos los dias y en horas hábiles del año, la compraventa de los valores registrados para tal fin. La Bolsa Mexicana de Valores dotada este espacio, administra y controla.

Put.- Sinónimo de opción de venta.

Precio de ejercicio (*strike price*).- Es el precio al cual el bien subyacente de un contrato de derivados puede ser comprado o vendido.

Precio de mercado.- Es el valor definido por la ley de la oferta y la demanda por un bien en un cierto momento y con un cierto volumen de operaciones. Es el valor que cada dia se cotiza en los mercados, ya que en la medida en que el tiempo transcurre, los precios de mercado varian, por lo que el valor de mercado de un instrumento variará constantemente respecto a su valor nominal.

Prima.- Es el precio que el emisor cobra al comprador por un contrato de opción.

Rendimientos.- Ganancia de capital. Beneficio que produce una inversión. El rendimiento anualizado y expresado porcentualmente respecto a la inversión se denomina tasa de rendimiento. Es una medida fundamental de evaluación de operaciones de una operación. Para poder calcularla, es indispensable que la empresa considerada haya ganado utilidades en el periodo de que se trate. Cuando una empresa, durante cierto periodo, no ha sido capaz de generar utilidades, se dice de ella que no es rentable. Se comparan las utilidades del periodo contra la inversión propia.

Series.- Todas las opciones de la misma clase que tienen también la misma unidad de intercambio, el mismo precio de ejercicio y fecha de vencimiento.

Subyacente.- Es aquel título, bien o valor empleado como referencia de un contrato de futuro de opción. Pueden ser valores subyacentes las acciones, divisas, indices financieros, bienes físicos (trigo, oro, etc.) o un contrato de futuro. El bien puede ser cualquier bien siempre y cuando se le pueda asignar un valor.

Swaps.- Es un contrato mediante el cual un intermediario adquiere el riesgo de una operación, bajo determinadas características y le otorga al comprador elementos que disminuyen el riesgo.

Tasa de interés libre de riesgo.- Tasa de interés en la cual una inversión puede ganar intereses sin incurrir en ningún riesgo.

Títulos.- Documentos que representan el derecho que tiene su poseedor sobre un capital o crédito. Estos documentos son objeto de comercio y su cesión o endoso transfiere la propiedad o derechos implícitos.

Títulos de deuda.- Instrumento que representa un compromiso por parte del emisor, quien se obliga a restituir el capital en una cierta fecha de vencimiento. El título es emitido a valor nominal, debe especificar los intereses y amortizaciones si los hubiera.

Valor Nominal.- El valor nominal se refiere al monto o valor original del un instrumento financiero cuando se emitió por primera vez. Resulta de dividir el capital social entre el número de acciones de la empresa en un determinado momento. - Es el precio de referencia, expresado en moneda nacional, que aparece en los títulos en el momento de su emisión, como expresión de parte del capital contable que represente y como antecedente para definir el precio de su suscripción. En los títulos de deuda, el valor nominal es el valor del título a vencimiento.

Volatilidad implícita.- Un estimador de la volatilidad basado en los precios de la opción.

Warrant.- Títulos opcionales de compra o de venta emitidos por intermediarios bursátiles o empresas. A cambio del pago de una prima, el tenedor adquiere el derecho opcional de comprar o vender al emisor un determinado número de valores a los que se encuentran referidos, a un precio de ejercicio y dentro de un plazo estipulado en el documento.

ANEXO A

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Una función con valores $f(x)$, definida con respecto al conjunto de todos los números reales, se denomina función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua x si y sólo si

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

para cualquier constante real a y b con $a \leq b$.

Si x es una variable aleatoria continua, y a y b son dos constantes reales con $a \leq b$, entonces

$$P(a \leq x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b) = P(a < x < b)$$

DISTRIBUCIÓN ACUMULATIVA O FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Si X es una variable aleatoria continua, la función dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad \text{para } -\infty < x < \infty$$

donde $f(t)$ es el valor de la función de densidad de probabilidad de X en t, se denomina función de distribución o distribución acumulativa de X.

Si $f(t)$ y $F(x)$ son, respectivamente, valores de la función de probabilidad y la función de distribución de X en x, entonces

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

para dos constantes reales cualquiera a y b con $a \leq b$ y

$$f(t) = \frac{dF(x)}{dx}$$

donde existe la derivada.

EL VALOR ESPERADO

En la teoría y en la práctica de la probabilidad quizá el parámetro más importante es el valor esperado o media de una variable aleatoria **x** que comúnmente se representa como $E(\mathbf{x})$.

Si **x** es una variable aleatoria continua y $f(x)$ es el valor de su función de densidad en x integral, el valor esperado de esta variable aleatoria es

$$E(\mathbf{x})=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

donde $f(x)$ es la función de densidad en x (Véase Popoulis, 1965).

El valor esperado de la variable aleatoria g(x) está dado por

$$E[g(\mathbf{x})]=\int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x})f(x)dx$$

VARIANZA

$$\mathrm{Var}[\mathbf{x}]=E(\mathbf{x}^2) - [E(\mathbf{x})]^2$$

COVARIANZA

Dadas dos variables aleatorias x, y se define a la covarianza de x y y como

$$\text{COV}\,(x, y) = E([x - E(x)]\,[y - E(y)])$$

Se puede demostrar que

$$\text{COV}\,(x, y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

Si x y y son independientes, su covarianza es cero. Lo contrario no es siempre cierto: el conocimiento de que la covarianza de dos variables aleatorias es cero, no es suficiente para afirmar que ambas variables son independientes.

CORRELACIÓN

Se llama coeficiente de correlación de dos variables aleatorias x y y a

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}}$$

Este coeficiente se ubica entre 1 y –1. Este coeficiente es cero cuando x y y $\sigma_x^2\sigma_y^2$ no están relacionadas; cuando la correlación es positiva significa que las variables se mueven en el mismo sentido, es decir, si el coeficiente es 1 existe una relación directa. Si la correlación es negativa significa que las variables se mueven en sentidos opuestos, es decir, si el coeficiente es -1 la relación es inversa, por ejemplo, si x aumenta y y disminuye.

Obsérvese que si hay una alta probabilidad de que los valores de x grandes vayan con valores de y grandes y que valores de x chicos vayan con valores de y chicos, la covarianza será positiva. En cambio, si hay una alta probabilidad de que valores de x grandes vayan con valores de y pequeños y viceversa, la covarianza será negativa (Freund, 1993).

TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

Definición. Supóngase, $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_N$, como variables aleatorias con un valor esperado de $E(X_i) = \mu = \theta$ y una varianza $Var(X_i) = \sigma^2$. Y seguirá una distribución normal si

$$Y = X_1 + X_2 +, \ldots, + X_N$$

$$E(Y_i) = E(\sum_{i=1}^{N} X_i) = \theta + \theta + \ldots + \theta = N\theta$$

$$Var(Y_i) = Var(\sum_{i=1}^{N} X_i) = \sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2 = N\sigma^2$$

LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR

La desviación estándar mide el nivel de dispersión de una variable. Ésta es igual a la raíz cuadrada de la varianza, entonces a partir de la definición de la varianza obtenemos la desviación estándar σ.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2$$

σ^2 = varianza

$\overline{u}$ = valor promedio de todas las variables u_i

u_i = valores observados

n = número de valores observados

σ = desviación estándar

LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

La distribución normal o gaussiana es la más importante y la de mayor uso de las todas las distribuciones continuas de probabilidad. Los científicos del siglo XVIII encontraron que los errores de medición seguían un patrón de comportamiento que se podía aproximar con bastante exactitud a través de las curvas continuas que denominaron "curvas normales de errores". Las propiedades matemáticas de estas curvas normales fueron establecidas por Abraham de Moivre (1667-1745), Pierre Laplace (1749-1827) y Karl Gauss (1777-1855).

Definición. Una variable aleatoria x tiene una distribución normal, y se conoce como variable aleatoria normal, si y sólo si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \text{para } -\infty < x < \infty$$

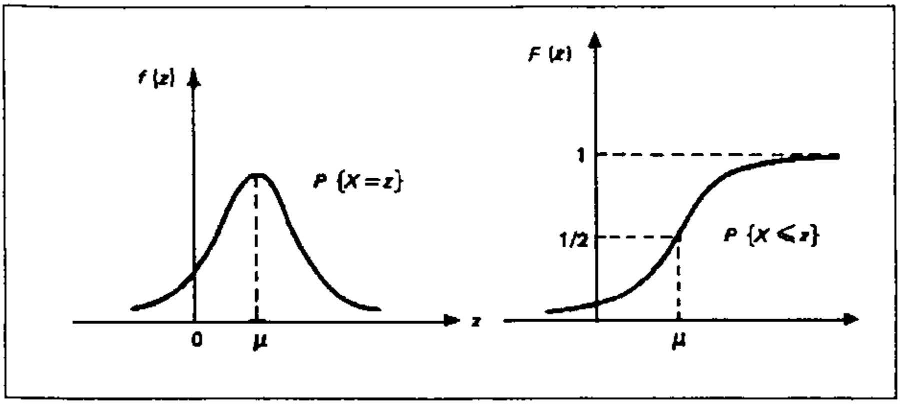
$$-\infty < \mu < \infty$$

$$\sigma > 0$$

y la función de distribución normal o distribución acumulativa esta dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy \qquad \text{para } -\infty < x < \infty$$

que representa la probabilidad de que una variable aleatoria normalmente distribuida x sea menor o igual a un valor especifico. En la gráfica A.1 se ilustra la función de densidad de probabilidad y la distribución acumulativa normal



La función de densidad de probabilidad y la distribución acumulativa normal
Gráfica A.1

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

La distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ se conoce como distribución normal estándar.

La función de densidad y la función de distribución de la normal estándar están dadas por

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

respectivamente.

Definición. Si x es una variable aleatoria que tiene una distribución de probabilidad normal con la media μ y desviación estándar σ, entonces la variable aleatoria z definida como

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

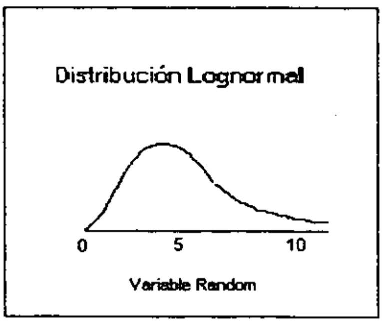
tiene una distribución normal estándar, es decir

$$f(z) = P(Z = z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Nótese que el dominio de la distribución normal corre de menos infinito a más infinito ($-\infty,+\infty$). En algunas ocasiones se utiliza la distribución normal para modelos donde las variables no pueden tomar valores negativos. Esto frecuentemente es posible si la media de la distribución es relativamente grande comparada con su desviación estándar. Los precios de las acciones o bienes financieros nunca pueden tomar valores negativos. Por ello, para precios de acciones es conveniente tener una distribución la cual tome únicamente valores positivos. A continuación veremos una distribución la cual está cercanamente relacionada con la distribución normal y que cumple con esta propiedad.

LA DISTRIBUCÍÓN LOGNORMAL

Las bases de la distribución lognormal fueron desarrolladas a fines del siglo XIX. En la gráfica A.2 se presenta la forma de la distribución lognormal.



La distribución lognormal
Gráfica A.2

Definición. Sea x una variable definida en $0 < x < \infty$, sea entonces y otra variable, definida por $y = \ln(x)$, se dice que si y tiene una distribución normal con μ y σ^2, es decir, $N(\mu,\sigma^2)$ entonces x está distribuida lognormalmente, es decir, $L(x,\mu,\sigma^2)$.

$$L(x,\mu,\sigma^2) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right]^2} \qquad x > 0.$$

Esta expresión se conoce como la función de densidad de probabilidad lognormal con dos parámetros, es decir, μ y σ^2, estos parámetros son la media y varianza de la correspondiente variable aleatoria normal. Como se observa, el rango de sus valores son estrictamente mayores que cero (Boyle, 1992).

La función generatriz de momentos de la variable aleatoria $x = e^y$ es

$$M_y(t) = e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Si $\ln x$ está distribuida normalmente se puede encontrar la media y la varianza de x. Si $x = e^y$ entonces $y \approx N(\mu,\sigma^2)$, por lo que $E(x) = E(e^y)$. Tomando los dos primeros momentos de x

Si t=1

$$M_y(1) = E(x) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$$

Si t =2

$$M_y(2) = E(x^2) = e^{2\mu+2\sigma^2}$$

Por lo tanto, se obtiene

$$E(x) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$Var\,(x)=E(x^2) - [E(x)]^2 = [E(x)]^2\,(e^{\sigma^2} - 1)$$

que son la media y varianza de x, respectivamente. La mediana es igual a

$$e^{\mu}$$

La moda es igual a

$$e^{\mu-\sigma^2}$$

La media y la desviación estándar del $\ln(x)$ son

$$\ln(x)+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)T$$

y

$$\sigma\sqrt{T}$$

respectivamente (Figlewski,1990). Mientras una variable con distribución normal puede tomar valores positivos y negativos, una variable con distribución lognormal va de cero a mas infinito $(0, +\infty)$. Una distribución normal es simétrica; una distribución lognormal es asimétrica con respecto a la media, con la mediana y la moda.

ANEXO B

CONCEPTOS BÁSICOS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS

PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Los procesos estocásticos son modelos matemáticos que estudian los fenómenos aleatorios que evolucionan en el tiempo. Una variable cuyos valores cambian aleatoriamente a través del tiempo se dice que sigue un proceso estocástico (Clewlow, 1998).

Un proceso estocástico se define como una familia de variables aleatorias $\{Z_t\}$, donde t es un punto en un espacio T, llamado espacio parametral, y donde para cada $t \in T$, Z_t es un punto en un espacio S, llamado espacio de estados (Ross, 1997b).

La palabra "estocástico" es sinónimo de aleatorio. Un proceso estocástico es un sistema que se desarrolla en el tiempo mientras que pasa por fluctuaciones al azar. La teoría de los procesos estocásticos se desarrolló al principio en el área de la Física, pero actualmente se ha extendido a diferentes disciplinas, tales como Ingeniería, Genética, Estadística, Bio-Matemática, Economía Matemática, Telecomunicaciones y Finanzas. Los procesos estocásticos abundan tanto en la naturaleza como en la sociedad humana. Cualquier variable cuyos valores cambian en el tiempo de una forma no definida sigue un proceso estocástico o aleatorio. Por ejemplo, la variable puede ser el resultado de un juego de azar, el precio de una acción, la temperatura diurna, una señal de radio muy débil o con interferencia, el recorrido de una partícula en un movimiento Browniano, el crecimiento de la población de una colonia de bacterias, niveles de inventario, etc. (Véase Popoulis, 1965).

La variable Z_t mide en el instante t el aspecto del sistema bajo consideración. En cualquier instante t, Z_t toma uno de sus valores posibles, t puede ser cualquier valor en un subconjunto de $(-\infty, \infty)$, el pasado infinito hasta el futuro infinito. Los cambios en el valor de Z_t, reciben el nombre de transacciones entre estados. En los últimos años se ha incrementado el uso de los modelos probabilísticos ya que una de sus ventajas es que son más realistas que los modelos determinísticos; en los modelos probabilísticos intervienen variables aleatorias. A pesar de lo sencillo que son estos modelos, al incluir un poco de aleatoriedad del mundo real, proporcionan una imagen mucho mejor de este mundo que la que se logra con modelos en los que se desprecia ese comportamiento aleatorio.

La incertidumbre asociada a la costumbre humana obliga a los investigadores de la ciencia a analizar las matemáticas basadas en la teoría de la probabilidad y los procesos estocásticos. Se consideran de interés las relaciones entre las Z_t's para los diferentes valores fijos de t. Para determinar estas relaciones se aplica la teoría de la probabilidad. La distribución del proceso da información sobre la probabilidad que en cierto instante del tiempo el proceso se encuentra en un cierto estado.

PROCESO CON INCREMENTOS INDEPENDIENTES

Un proceso estocástico de tiempo continuo $\{Z_t : t \in T \subseteq (-\infty, \infty)\}$ tiene **incrementos independientes** si para cualquier $\{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n\} \in T$, donde $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$, las variables

$$Z_{t_2} - Z_{t_1},\ Z_{t_3} - Z_{t_2}, \ldots,\ Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}}$$

son independientes. Además se dice que un proceso tiene **incrementos independientes y estacionarios** si $Z(t_2 + h) - Z(t_1 + h)$ tiene la misma distribución normal que $Z(t_2) - Z(t_1)$ para todo t_1, t_2 que pertenecen $t \in T$ y $h > 0$ (Ross, 1997b).

Observamos que los incrementos aleatorios de Z son independientes a través del tiempo, es decir, la probabilidad de ir de un estado Z_{t_1} en el tiempo t_1 a otro estado Z_{t_2} en el tiempo t_2 es independiente del estado en que estaba el sistema antes del tiempo t_1 (Figlewski, 1990).

PROCESOS CONTINUOS Y DISCRETOS

Los procesos estocásticos pueden ser clasificados como un proceso **"de variable continua"** o **"de variable discreta"**, en el primer caso la variable puede tomar cualquier valor dentro de un cierto rango de números reales. Por ejemplo, la temperatura diurna al mediodía, puede registrar 20.134°C, mientras que en un proceso de variable discreta únicamente ciertos valores enteros son posibles. Por ejemplo, al lanzar un dado los valores posibles son sólo enteros del uno al seis, nunca saldrá un 4.2 (Rodríguez de Castro, 1995).

Los procesos estocásticos también pueden ser clasificados como un proceso **"de tiempo discreto"** o **"de tiempo continuo"**. En un proceso estocástico **"de tiempo discreto"** el valor de la variable puede únicamente cambiar en ciertos puntos fijos en el tiempo. Un ejemplo podría ser un dado, donde un valor de puntuación no cambia hasta que volvamos a lanzar el dado. Por el contrario, en un proceso estocástico **"de tiempo continuo"** los cambios pueden ser en cualquier tiempo, por ejemplo, la temperatura fluctúa durante todo el día.

PROCESO DE MARKOV

Andrei Andreivich Markov fue un matemático ruso (1856-1922) que postuló el principio de un proceso de Markov (1906-1907), en los estudios sobre las secuencias de los experimentos conectados en cadena y en los intentos para describir matemáticamente los fenómenos físicos conocidos como movimiento Browniano, como un tipo particular de procesos estocásticos donde únicamente el presente del proceso es relevante para pronosticar el futuro y es independiente de su pasado. La historia pasada del proceso y la forma en la cual el presente ha surgido son irrelevantes. El análisis de Markov es una forma de analizar el movimiento actual de una variable a fin de pronosticar el movimiento futuro de la misma variable.

PROPIEDAD DE MARKOV

Un proceso de Markov es un proceso estocástico $\{Z_t : t \in T \subseteq (-\infty, \infty)\}$ para el cual, dado el valor de Z_t, la distribución o la probabilidad de Z_s $(s > t)$ es independiente del un conocimiento de Z_u $(u < t)$. El comportamiento futuro, cuando se conoce el estado presente del proceso, no se altera por el conocimiento adicional acerca de su comportamiento pasado. Entonces el proceso $\{Z_t : t \in T \subseteq (-\infty, \infty)\}$ constituye un proceso de Markov si las distribuciones conjuntas de

$$P\{Z_t \leq z \mid Z_{t_1} = z_1,\ Z_{t_2} = z_2, \ldots,\ Z_{t_n} = z_n\}$$
$$= P\{Z_t \leq z \mid Z_{t_n} = z_n\}$$

para cualesquiera $t_1 < t_2 <, \ldots < t_n < t$ son las mismas.

Esta propiedad establece que la probabilidad condicional de encontrarse en el periodo t_{n+1}, en el estado $z_{t_{n+1}}$, depende únicamente del valor del estado en el periodo t_n y es independiente del pasado. Esta probabilidad condicional se conoce como probabilidad de transición

$$P(Z_{t_{n+1}} = Z_{t_{n+a}} \mid Z_{t_n} = Z_{t_n})$$

Los procesos de Markov son la clase más importante de procesos estocásticos. Todo proceso estocástico con incrementos independientes, es decir, que satisface la propiedad de Markov, constituye un proceso de Markov.

Por ejemplo, supóngase que el precio de la acción de IBM es \$100 pesos el día de hoy. Si el precio sigue un proceso de Markov, nuestra predicción para el futuro no debe ser afectada por el precio de hace una semana, de hace un mes, o de hace un año. El valor actual es la única variable que cuenta. Los parámetros estadísticos que se pueden obtener a partir de la historia de los precios de las acciones pueden ser útiles para determinar las características del proceso del precio de la acción, como puede ser su volatilidad. El punto importante aquí es que el camino exacto seguido por la acción no importa. Las predicciones para el futuro son inciertas y deben ser expresadas en términos de distribuciones probabilísticas. La propiedad de Markov implica que la distribución de probabilidad del precio en cualquier tiempo futuro en particular depende únicamente del precio actual, en este caso de \$100 pesos.

BIBLIOGRAFÍA

REFERENCIAS DE TEXTOS

ABELLÓ Riera, Javier; Oller Macia, Jordi y Vila Santandreu (1992): "*Introducción a las opciones financieras*", Barcelona: Eada Gestión.

ADELL Ramón, Ramón (1996): "*Opciones y futuros financieros*", Madrid: Pirámide.

BAXTER, Martin, y Andrew Rennic (1997): "*Financial calculus; an introduction to derivative pricing*", Cambridge: Cambridge University Press.

BOOKSTABER, Richard (1991): "*Option pricing and investment strategies*", 3ª edición, Chicago: Probus Publishing.

BORTEN, Steven E. (1990): "*Administración financiera*", 2ª edición, México: Limusa.

BOSQ, Denis y Nguyen Hung T. (1996): "*A course in stochastic processes; Stochastic Models and Statical Inference*", Netherland: Klumer Academic Publisher.

BOYLE, Phelim P. (1992): "*Options and the management of financial risk*".

BREADLEY, Richard y Myers, Stewart C. (1993): "*Principios de finanzas corporativas*", 4ª. edición, Madrid: McGraw-Hill/Interamericana de España.

BURTON, G. Markiel (1997); "*Un paseo aleatorio por Wall Street*", Madrid: Alianza.

CANAVOS, George C. (1991): "*Probabilidad y estadística; aplicaciones y métodos*", México: McGraw-Hill.

CLEWLOW, Les, y Chris Strickland (1998): "*Implementing derivatives models*", New York: John Wiley & Sons.

COLEMAN, Rodney (19??): "*Procesos estocásticos: selección de problemas resueltos*", Volumen 14, México: Limusa.

COX, D.R. and H.D. Miller (1990): "*The theory of Stochatic Processes*", London: Chapman and Hall.

CHRISS, NEIL A.(1997): "*Black-Scholes and Beyond" Option Pricing Models*", EU: McGraw-Hill.

DÍAZ Tinoco, Jaime y Fausto Hernández Trillo (1998): "*Futuros y opciones financieras; una introducción*", 2ª edición, México: Limusa.

DÍEZ de Castro, Luis (1994): "Ingeniería financiera, la gestión de los mercados financieros internacionales", 2ª edición, España: McGraw-Hill/Interamericana.

DOWLING, Edward (1982): "Teoría y problemas de Matemáticas para economistas", México: McGraw-Hill.

DUBOFSKY, David A. (1992): "Options and financial futures valuation and uses", McGraw-Hill.

FABOZZI, J.,Frank, Franco Modigliani, y Michael G. Ferri. (1996): "Mercados e instituciones financieras", New Jersey: Prentice-Hall International.

FIGLEWSKI, Stephen; William L. Silber; y Morti G. Subrahmanyam (1990): "Financial options from theory to practice", Homewood: Business One Irwin.

FREUND, John E., y Ronald E. Walpole (1993): "Estadística matemática con aplicaciones", México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

FREIXAS, Xavier (1990): "Futuros financieros", Madrid: Alianza.

FULLER, J. RUSELL, y James L. Farrell, Jr. (1987): "Modern Investments and Security Analysis", Singapore: Mc-GrawHill International.

HULL, John C. (1993a): "Options, futures and other derivative securities", 2ª edición, New Jersey: Prentice-Hall International.

HULL, John C. (1993b): "Introduction to futures & options markets", 2ª edición, New Jersey: Prentice-Hall International.

JARROW, Robert, y Stuart Turnbull (1996): "Derivative securities", Cincinatti: South-Western College.

LAMOTHE Fernández, Prosper (1993): "Opciones financieras; un enfoque fundamental", Madrid: McGraw-Hill.

MANSSEL Carslens, Catherine (1992): "Las nuevas finanzas en México", México: Milenio.

MARMOLEJO González., Martín (1995): "Inversiones: práctica, metodología, estrategia y filosofía", 8ª edición, México: Publicaciones IMEF.

MARTÍN Marín, José Luis (1991): "El inversor y los mercados financieros", Barcelona: Ariel.

MARTÍNEZ, Abascal Eduardo (1993): "Futuros y opciones en la gestión de carteras", España: McGraw-Hill /Inter Americana de España.

NEFTCI, Salih N. (1996): "*An introduction to the mathematics of financial derivatives*", USA: Academic Press.

PAPOULIS, Athanasios (1965): "*Probability, random variables and stochastic processes*", New York: McGraw-Hill.

PARZEN, Emanuel (1972): "*Procesos estocásticos*", Madrid: Porainfo.

PRAWDA Witenberg, Juan (1989): "*Métodos y modelos de investigación de operaciones; Vol. 2 modelos estocásticos*", 5ª edición, México: Limusa Noriega.

RODRÍGUEZ de Castro, J.(1995): "*Introducción al análisis de productos financieros derivados; futuros, opciones, forwards, swaps*", México: Limusa.

ROSS, Sheldon M. (1997a): "*Introduction to probability models*", 6ª edición, California: Academic Press.

ROSS, Sheldon M. (1997b): "*Applied probability models with optimization applications*", 6ª edición, California: Academic Press.

SABAU García, Hernán, y Gloria Roa Béjar (1997): "*Derivados financieros; teoría y práctica*", México: Grupo Financiero Serfin.

TAYLOR, Stephen (1995): "*Modelling financial time series*", 5ª edición, New York: John Wiley & Sons.

WILMOTT, Paul; Sam Howison y Jeff Dewynne (1995): "*The mathematics of financial derivatives; a student introduction*", Cambridge: Cambridge University Press.

REFERENCIAS HEMEROGRÁFICAS

AGUILAR, Alberto: "*Nombres, nombres y... nombres*", Negocios/Reforma, 29 de marzo de 1999.

BAUMOHL, Bernard: "*The banks' nuclear secrets*", Time, 25 de mayo de 1998.

BLACK, Fischer: "*How we came up with the option formula*", The Journal of Portfolio Management, invierno, 1989.

BLACK, Fischer, y M. Scholes: "*The pricing of options and corporate liabilities*", Journal of Political Economy, Vol. 81, 1973.

BOLSA Mexicana de Valores: "*Boletín bursátil, sección de análisis y valuación de instrumentos del mercado de capitales*", Año V, No. 1029, 7 de julio de 1998.

CARRICK, Bob: "*Options can raise your bet on NorTel*", The Globe and Mail, 25 de ocutubre de

CHAMORRO Gómez, José Manuel: "*Volatilidad en las acciones y garantía de los depósitos*", Análisis Financiero, No. 63, 2°. cuatrimestre, 1994.

ECONOMIST, The: "*The Nobel prize for economics; the right option*", The Economist, 18 de octubre de 1997.

EDWARDS, Ben: "*Capitals of capital; a survey of financial centres*", The Economist, 9 de mayo de 1998.

FERNANDEZ, Pablo: "*Valoración de opciones por simulación*", Análisis Financiero, No. 69, 2°. cuatrimestre, 1996.

FRANCO, Roberto: "*Estrategias con derivados*", Ejecutivos de Finanzas, Año XXV. No. 11, noviembre, 1996.

GOMEZ Calvet, Ana-Rosa: "*La eficiencia del mercado español de futuros financieros sobre MIBOR '90*", Análisis Financiero, No. 62, 1er cuatrimestre, 1994.

GONZALEZ, Luis Martín: "*¿Planeación y control de riesgos; cómo sacarle jugo a los derivados*", Expansión., Vol. XXVIII, No. 703, noviembre 6, 1996a.

GONZALEZ, Luis Martín: "*Mercado de derivados; ¿libre de riesgos?*", Expansión, Vol. XXVIII, No. 704, noviembre 20, 1996b.

HAMILTON, Stewart: "*¿Qué tan segura está su compañía?*", Expansión, Vol. XXIX, No. 728, noviembre 5, 1997.

LARA Haro, Alfonso de: "*Proyectos de inversión ante la incertidumbre*", Ejecutivos de Finanzas, Año XXV. No. 3, marzo, 1996.

MARTÍNEZ, Joel: "*Mercado de derivados; cómo protegerse en 1997*", Expansión Vol XXVIII, No. 705, diciembre 4, 1996.

MEDINA M., Jorge: "*Uso de productos derivados en un marco efectivo de administración de riesgos*", Ejecutivos de finanzas, Año XXV. No. 11, noviembre, 1996.

NACIONAL Financiera: "*Mercado mexicano de derivados (MexDer)*", El Mercado de Valores, Año LVII, No. 7/97, julio, 1997.

NACIONAL Financiera: "*Octava convención del mercado de valores*", El Mercado de Valores, Año LVII, No. 12/97, diciembre, 1997.

OSTERROTH, Maria; Gallardo Idalia: "*Inicia Operaciones MexDer*", Negocios/Reforma, 15 de diciembre de 1998.

PARNELL, William: "*El mercado de futuros*", Ejecutivos de Finanzas, Año XXV. No. 11, noviembre, 1996.

PARRO Cuesta, Elena: "*Cobertura de una cartera de renta fija con opciones*", Análisis Financiero, No. 62, 1er cuatrimestre, 1994.

PEDROSA Rodríguez, Mónica: "*La transferencia de información entre los mercados de opciones y la bolsa de valores*", Análisis Financiero, No. 69, 2° cuatrimestre, 1996.

REYES, Sandra Adriana: "*Aguardan por un nuevo mercado de derivados para México*", Negocios/Reforma, 28 de septiembre de 1998.

SECRETARÍA de Hacienda y Crédito Público: "*Reglas a las que habrán de sujetarse las sociedades y fideicomisos que intervengan en el establecimiento y operación de un mercado de futuros y opciones cotizados en la bolsa*", Diario Oficial de la Federación, 31 de diciembre de 1996.

SECRETARÍA de Hacienda y Crédito Público: "*Disposiciones de carácter prudencial a las que se sujetarán en sus operaciones los participantes en el mercado de futuros y opciones cotizados en bolsa*", Diario Oficial de la Federación, 26 de mayo de 1997.

REFERENCIAS ELECTRÓNICAS

ASIAWEEK Online: "*Billion-dollar man*", http://www.pathfinder.com/ asiaweek/95/1229/feat5.html, 1995.

BANCO de México: "*Circulares telefax 2019/95, 26/97, 56/97, 71/96, 48/97,49/97*", http://www.banxico.com.mx ,1995-a la fecha.

BLOOMBERG L.P.: "*Top derivatives scandals*", http://www.kc.frb.org/bs&s/ Capmkts/0996files/099604.htm, 1996.

BOYCE, Gerard R., y Sarah Hewitt: "*Derivatives; from Wall Street to Main Street*", http://www.brownraysman.com/doclib/corplj198.html, 1998.

BOLSA Mexicana de valores: "*Mercado de derivados*"
Http://www.bmv.com, 1999.

CARSON & BRASCH: "*Mercado de Derivados*", http://www.carson-brasch.com

ETLING, Cheri: "*Derivatives: are they domino's waiting to fall?*", Wichita State University, http://www.twsu.edu/etling/default/auditors/auditors /sld001.htm), 1997.

MURPHY, Phil: *"It's him"*, Living Marxism, No. 78, abril, 1995 (http://www.junius.co.uk/LM/LM78/LM78_Barings.html).

OUC MATH 414 (1998): *"Talk the Talk"*, Okanagan University College, Math Department (http://www.mathserv.okanagan.bc.ca/math/math414/home.html).

ROYAL Swedish Academy of Sciences: *"Additional background material on the Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in memory of Alfred Nobel, 1997"*, http://www.nobel.se/announcement-97/ecoback97.html y http://www.nobel.se/announcement-97/economy97.html, 1997.

STERN Business: *"Orange County: don't blame derivatives"*, http://equity.stern.nyu.edu/Webzine/Sternbusiness/Spring95/orange.html, 1995.