

2 ej



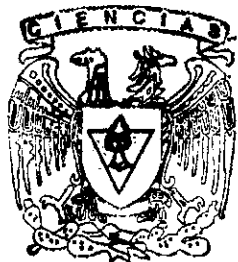
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

**Formalismo unificado de anisotropía
óptica para la descripción de
materiales no-homogéneos**

T E S I S
Que para obtener el título de
F I S I C O
p r e s e n t a

María del Carmen Marín Albino



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Director de tesis: Enrique Geffroy Aguilar

México D. F., 1999

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

27769



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"Formalismo unificado de anisotropía óptica para la descripción
de materiales no homogéneos"

realizado por MARIN ALBINO MARIA DEL CARMEN

con número de cuenta 9355060-0 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de tesis

Propietario

DR. ENRIQUE GEFFROY AGUILAR

Propietario

DR. JAVIER MIRANDA MARTIN DEL CAMPO

Propietario

DRA. MARTHA ROSETE AGUILAR

Suplente

FIS. ANDRES VALENTIN PORTA CONTRERAS

Suplente

DR. GUILLERMO PULOS CARDENAS

Consejo Departamental de Física.

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura

Índice

Introducción	3
1 Cálculo matricial para medios anisotrópicos	6
1.1 Introducción	6
1.2 Interacción de Luz polarizada con materiales anisotrópicos	7
1.2.1 Luz polarizada	8
1.2.2 Esfera de Poincaré	13
1.3 Birrefringencia y Dicroísmo	16
1.4 Anisotropía óptica de medios no homogéneos.....	27
1.4.1 Cálculo diferencial de Mueller	28
1.4.2 Fluctuaciones en medios no homogéneos	33
1.4.3 Esfera de Poincaré para propiedades locales.....	37
2 Medios anisotrópicos no homogéneos	43
2.1 Cálculo de la matriz de Mueller M para un medio arbitrario	44
2.2 Matriz de Mueller para un medio birrefringente	47
2.2.1 Matriz diferencial de un medio birrefringente	47
2.2.2 Birrefringencia lineal homogénea y no-homogénea	50
2.2.3 Birrefringencia elíptica homogénea y no-homogénea	57
3 Anisotropía óptica no homogénea en líquidos poliméricos	67
3.1 Líquidos anisotrópicos no-homogéneos.....	67
3.2 Anisotropía óptica inducida por flujos	70

3.3	Birrefringencia bicolor inducida por flujos	71
3.4	Ecuaciones para los elipsómetros de nulos	75
3.5	Anisotropía inducida por flujos con efectos de borde	80
3.5.1	Anisotropía inducida no homogénea	81
3.5.2	Birrefringencia lineal y elíptica en un fluido polimérico.....	82
4	Conclusiones	99
	Referencias.....	101
A	Apéndice.....	104
A.1	Forma explícita del operador ordenado	104
A.2	Base generadora del grupo de Lorentz	104
A.3	Producto punto	106
A.4	Raíces complejas	106

Introducción

En la actualidad, el uso con fines tecnológicos de las propiedades ópticas de materiales complejos tiene cada día más importancia. Un ejemplo de ello son las propiedades ópticas de cristales líquidos que permiten el diseño de pantallas digitales (para relojes, computadoras, etc.). Las propiedades ópticas que participan son el dicroísmo y la birrefringencia que *actúan* como cuando se aplica un campo de fuerza (en el caso de cristales líquidos es un potencial electrostático). Esto es, algunos medios materiales presentan anisotropías ópticas cuando éstos están sujetos a esfuerzos.

También pueden usarse estos fenómenos físicos para la determinación de esfuerzos cuando se miden las propiedades ópticas de anisotropía. Con frecuencia, estas técnicas de medición son útiles porque permiten evaluar esfuerzos bajo condiciones en las que resulta imposible usar otros instrumentos de medición. Sin embargo, para describir la interacción de la radiación con un medio que además de anisotrópico con frecuencia es no-homogéneo, implica una enorme tarea analítica. Algunos ejemplos son las fibras ópticas sujetas a esfuerzos, o el estudio de la dinámica de un sistema polimérico. En la gran mayoría de los ejemplos, resulta necesario contar con una técnica experimental capaz de medir la anisotropía originada en la muestra y al mismo tiempo contar con una herramienta matemática para evaluar analíticamente la anisotropía.

Para el estudio de la dinámica de sistemas poliméricos se requiere generar deformaciones finitas en el laboratorio, como es el caso de deformaciones originadas en una celda de flujos elongacional. En ella, dos rodillos paralelos giran con la misma velocidad y en la

misma dirección, ocasionando cambios conformacionales en la estructura polimérica que conllevan anisotropías ópticas experimentalmente medibles, ya que los diferentes segmentos de la cadena polimérica tienen una orientación preferencial distinta de cero. Por lo tanto la anisotropía promedio del polímero es distinta de cero. Asimismo, los datos experimentales representan la anisotropía del fluido y están directamente relacionados con la dinámica de los polímeros.

La Técnica de Birrefringencia Bicolor Inducida por Flujos (BBIF), permite evaluar tanto el grado de anisotropía inducida como la orientación de la misma en un fluido polimérico, empleando para ello luz polarizada.

El análisis de la anisotropía óptica generada en la celda de flujos requiere considerar valores de la anisotropía dependientes de la posición sobre el camino óptico recorrido. Los efectos de borde requieren postular la existencia de birrefringencia circular en las zonas cercanas a las paredes de la celda. Dado que los formalismos de Azzam [9], Hernández [10] y Brown y Bak [15], para el Cálculo diferencial de Mueller no permiten una interpretación clara cuando se analiza la existencia de este tipo de efecto, resulta conveniente ampliar sus esquemas propuestos explotando técnicas de teoría de grupos y el concepto de vector birrefringencia¹. De esta forma, es factible definir a la *matriz local* asociada al medio y, para ciertos casos, describir las no homogeneidades de cualquier medio, sea éste un sistema polimérico, una fibra óptica, etc.

En este trabajo, primero se plantea un problema general básico que desarrolla un formalismo adecuado para el estudio y caracterización de medios anisotrópicos no-homogé-

¹ En el análisis de estos medios solo se considera la existencia de efectos refractivos y no efectos depolarizantes en el haz de luz.

neos. Las base para ello se presenta en el Capítulo 1, utilizando el paralelismo existente entre el Cálculo matricial de Mueller para describir la interacción luz materia y la esfera de Poincaré. Este paralelismo ha sido indispensable para resolver la complejidad intrínseca del problema. En el Capítulo 2, se desarrollan las extensiones de los trabajos Azzam [9], Hernández [10] y Brown y Bak [15] y se propone una técnica analítica adecuada para una amplia diversidad de medios anisotrópicos no-homogéneos, que a la fecha aún resultan difíciles de estudiar. Finalmente, en el Capítulo 3 se explica con detalle la técnica BBIF aplicada a un sistema polimérico sujeto a deformaciones en una celda de flujos y la anisotropía no-homogénea originada en ella. Los resultados obtenidos para el experimento de BBIF muestran las bondades de la técnica para el tratamiento analítico de anisotropías, así como la posibilidad de mejorar las herramientas experimentales de manera que un análisis más completo de la anisotropía sea posible en el laboratorio en un futuro cercano.

Capítulo 1

Cálculo matricial para medios anisotrópicos

1.1 Introducción

Desde que G. G. Stokes introdujo la representación vectorial de la luz (1852), a la fecha, la representación de ésta en interacción con la materia ha dado paso a la creación de modelos capaces no solamente de describir al estado de polarización de un haz, sino que también ha dado lugar a la descripción de su evolución al interactuar con la materia. Tales son los casos, por ejemplo de Henri Poincaré que, en 1892, utiliza la proyección estereográfica del plano complejo de polarización a una esfera; en 1941, R. Clark Jones inventa otra representación de la luz polarizada que complementa a la de los parámetros de Stokes. Chandrasekhar (1941) retoma las ideas de la representación de luz polarizada de Stokes al considerar la interacción de la radiación con la materia y expresándola como una operación matricial. En 1948, Hans Mueller presenta un método de matrices completo para trabajar con vectores de Stokes, tal como lo hace Jones. Hasta ese momento, los cálculos propuestos tanto por Jones como por Mueller, permitían únicamente la descripción analítica de sistemas homogéneos. La falta de una técnica matricial capaz de evaluar las no-homogeneidades del medio se vuelve un problema apremiante. Jones, al crear su *Cálculo diferencial para matrices ópticas*, resuelve parcialmente el problema ya que su formalismo sólo era aplicable para ondas completamente polarizadas, dejando de lado los casos de luz parcial o no polarizada. R.M.A. Azzam (1979), Hernández (1996) y Brown y Bak (1995) comienzan con

lo que sería una nueva formulación del Cálculo de Mueller, llamado *Cálculo diferencial de Mueller*, en el que es posible no solamente considerar las no-homogeneidades del medio sino que también se pueden incluir los casos para luz total, parcial y no polarizada.

1.2 Interacción de Luz polarizada con materiales anisotrópicos

El Cálculo de Jones y el Cálculo de Mueller son métodos matriciales que permiten describir cuantitativamente la interacción de la luz con diferentes elementos ópticos.

En ambos formalismos el rayo de luz se representa por un vector (vector de Jones, o vector de Stokes), el elemento óptico por una matriz (matriz de Jones, o matriz de Mueller), y ambos se multiplican para producir un nuevo vector que representa al rayo después de la interacción con el elemento óptico. Ambos formalismos se pueden usar para problemas en los que existen polarizadores y retardadores. El Cálculo de Mueller es también útil cuando se consideran problemas con dispersores y, como aquí se propone, para el estudio de medios no-homogéneos.

Cada método posee ventajas únicas, por lo que el Cálculo de Jones resulta particularmente útil, cuando el análisis requiere conocer la diferencia de fase entre los haces mientras que el Cálculo de Mueller es más ventajoso para medios que presentan efectos de depolarización. Además, el Cálculo de Mueller se basa en elementos (de vectores o matrices) asociados a intensidades luminosas que son medibles en el laboratorio. Estas ideas y otras, necesarias para el trabajo, se plantean a continuación.

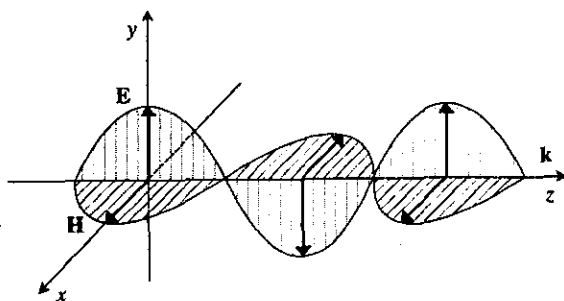


Figura 1.1. Representación de una onda electromagnética que se propaga en dirección del eje z . La onda está constituida por los campos eléctricos y magnéticos, E y H , respectivamente, los cuales oscilan en forma periódica. Los vectores E y H son perpendiculares entre sí, y ambos son normales a la dirección de propagación de la onda, k .

1.2.1 Luz polarizada

En 1863, la Teoría Electromagnética de Maxwell establece un modelo para la luz como una onda plana con componentes vectoriales H y E , siendo éstas un campo magnético y un campo eléctrico, respectivamente, oscilantes en el tiempo y con la misma frecuencia. Dado que *la onda es de tipo transversal*, los componentes del campo de la onda son *perpendiculares a la dirección de propagación*, definiendo con ello un plano de vibración formado por el vector de campo eléctrico (razón que más adelante explicaremos) y el vector de dirección de propagación, como se muestra en la Figura 1.1; esto significa que una onda que se propaga en la dirección del eje z , tiene amplitudes de los componentes descritas por

$$E(z, t) = E_x^0 \sin[\tau + \phi_0] \quad (1.1)$$

y

$$H(z, t) = H_y^0 \sin[\tau + \phi_0], \quad (1.2)$$

donde $\tau = (\omega t - kz)$ es el propagador de onda.

Ambos vectores, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{E}$, se consideran como “vectores de luz”. Sin embargo, cuando se habla de interacción de luz con materia, se considera únicamente al campo eléctrico, ya que éste induce una redistribución de cargas mucho mayor que el campo magnético² [1] sobre las moléculas. Basta entonces considerar una onda eléctrica como la representación de la luz en interacción con la materia, esto es, con un vector asociado

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y \\ &= E_x \hat{i} + E_y \hat{j}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

en donde las amplitudes máximas de los componentes vectoriales, E_x y E_y , de la onda de luz plana están dados por:

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= E_{0x} \sin[\tau + \phi_x] \\ E_y(z, t) &= E_{0y} \sin[\tau + \phi_y]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Los subíndices x y y se refieren a los componentes x y y ; E_{0x} y E_{0y} son las amplitudes y ϕ_x y ϕ_y son las fases, respectivamente. A su vez, este vector describe un lugar geométrico de puntos en el espacio, y la curva generada, a z constante, por esos puntos está dada por la ecuación de una elipse:

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} + 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \phi = \sin^2 \phi, \quad (1.5)$$

donde $\phi = \phi_y - \phi_x$. Ésta es la llamada *elipse de polarización*, y es la representación más general de la luz polarizada [2, 3, 4]. En ella el vector del campo eléctrico resultante, $\mathbf{E}$, rota

² La fuerza ejercida por un campo electromagnético sobre una carga eléctrica es igual a $\mathbf{F} = e \mathbf{E} + (\frac{v}{c}) [\mathbf{v}, \mathbf{H}]$, y la acción del campo magnético a $v/c \ll 1$, resulta despreciable respecto del campo eléctrico.

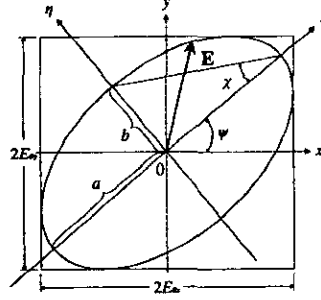


Figura 1.2. Elipse de Polarización generada por el vector de campo eléctrico, E , en el plano normal a la dirección de propagación, cuya orientación, respecto de los ejes xy , está dada por ψ . El ángulo de elipticidad, χ , medido respecto de los ejes $\xi\eta$, es definido por los parámetros de la elipse a y b .

y cambia en magnitud describiendo una elipse en un plano fijo perpendicular a la dirección de propagación de la onda luminosa. La Figura 1.2 muestra la elipse inscrita dentro de un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados y cuyas longitudes son $2E_{0x}$ y $2E_{0y}$. La *orientación de la elipse de polarización* [2] con respecto a estos ejes forma un ángulo ψ , el cual está relacionado con los parámetros de la elipse E_{0x} , E_{0y} y ϕ como

$$\tan(2\psi) = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos[\phi]}{E_{0y}^2 - E_{0x}^2}. \quad (1.6)$$

En general, un haz elípticamente polarizado (estado $\mathcal{E}$), define un estado de polarización total. Degeneraciones en la elipse definen nuevas formas de polarización, determinadas por los diferentes valores de E_{0x} , E_{0y} y ϕ . Por ejemplo, si $\phi = m\pi$, en donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, la elipse degenera en una línea recta con pendiente $\pm (E_{0y}/E_{0x})$; en este caso la onda está *linealmente polarizada* (estado $\mathcal{P}$), con diferentes orientaciones para los signos $\pm$. Cuando $E_{0x} = E_{0y} = E$ y $\phi = m\pi/2$, con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, la elipse degenera

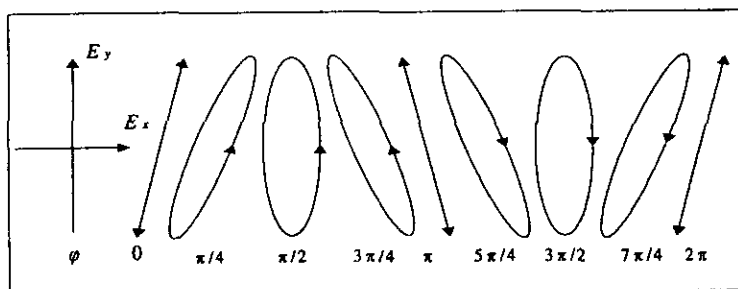


Figura 1.3. Varias configuraciones de polarización que corresponden a valores diferentes de ψ . Aquí E_x aventaja a E_y en ψ y $E_{0x} \neq E_{0y}$. La luz es circular cuando $\psi = \pi/2$ o $3\pi/2$ y $E_{0x} = E_{0y}$.

en un círculo; a este tipo de polarización se le conoce como *polarización circular derecha* (estado $\mathcal{R}$) o *izquierda* (estado $\mathcal{L}$). La Figura 1.3 muestra algunos de los diferentes casos expuestos.

Otro parámetro importante es el *ángulo de elipticidad* χ , el cual está definido por

$$\tan \chi = \frac{\pm b}{a}; \quad -\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}, \quad (1.7)$$

donde a y b son los ejes mayor y menor de la elipse respectivamente (Figura 1.2). La Ecuación 1.7 describe los extremos de la elipticidad de la elipse de polarización. Se distinguen dos casos de polarización de acuerdo al sentido en el cual la punta del vector de campo eléctrico recorre en el tiempo la elipse; es decir, será *polarización derecha* si la punta del vector rota en sentido a las manecillas del reloj, o *polarización izquierda* si gira en dirección opuesta.

En resumen, la representación de luz elípticamente polarizada se caracteriza adecuadamente por los parámetros E_{0x} , E_{0y} , ϕ y χ de la elipse de polarización; sin embargo, la representación moderna de ella, consecuencia del trabajo de George Gabriel Stokes (1819-1903)³, resulta más conveniente: Stokes introdujo cuatro cantidades que son funciones solamente de observables de la onda electromagnética y se conocen ahora como *parámetros de polarización de Stokes* [2, 3], cuya definición operacional está dada por las relaciones

$$\begin{aligned} S_0 &= E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \\ S_1 &= E_{0x}^2 - E_{0y}^2, \\ S_2 &= 2E_{0x}E_{0y}\cos[\phi], \\ S_3 &= 2E_{0x}E_{0y}\sin[\phi]; \end{aligned} \quad (1.8)$$

el arreglo de los parámetros en forma de matriz columna

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

se denomina *vector de Stokes*.

El primer parámetro es simplemente la intensidad total del campo óptico incidente, mientras que los tres restantes especifican el estado de polarización del rayo de luz, siendo S_1 la cantidad de *polarización lineal* horizontal o vertical; S_2 la cantidad de *polarización lineal* a $+45^\circ$ o -45° y S_3 la cantidad de *polarización circular* derecha o izquierda contenida en el rayo [1, 2, 3, 5]. Los tres últimos parámetros son independientes entre sí y están relacionados con la intensidad total del medio por

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (1.10)$$

³ En 1852, Stokes publicó dos artículos de trascendencia en la óptica (Stokes, G.G. Trans. Camb. Phil. Soc. 9, 399, 1852. Reimpreso en *Mathematical and Physical Papers*, Vol. 3, p. 233, Cambridge University Press, London, 1901 y G. G. Stokes, Proc. of the Royal Soc. 6, 195, 1852. Reimpreso en *Mathematical and Physical Papers*, Vol. 3, p. 259, Cambridge University Press, London, 1901), en los cuales proporcionó una formulación matemática para describir cualquier estado de luz polarizada en términos de cantidades observables y lo más importante, estableció los fundamentos matemáticos para la descripción de luz parcialmente polarizada y no polarizada dentro del contexto de la teoría ondulatoria de la luz.

La ventaja de la representación de luz polarizada en términos de los parámetros de Stokes es que son observables medibles (cantidades reales) al expresarse en términos de las intensidades⁴, lo que permite describir cualquier estado de polarización de un haz de luz, ya sea natural, total o parcialmente polarizado.

En el caso de luz parcialmente polarizada los parámetros de Stokes permiten describir el *grado de polarización* p como

$$p = (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2}/S_0, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad (1.11)$$

en donde S_0 es la intensidad total del rayo y $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ es la suma de las componentes de polarización. El grado de polarización p varía desde cero para luz no polarizada hasta la unidad en el caso de luz totalmente polarizada, tomando valores intermedios para luz parcialmente polarizada.

El criterio expresado por la Ecuación 1.11, se conoce como Criterio de Stokes [6, 7], y permite *validar* las formas (o valores) posibles de un vector de Stokes calculado.

1.2.2 Esfera de Poincaré

Alrededor de 1890, Henri Poincaré descubrió que la elipse de polarización podía representarse sobre un plano complejo, el cual a su vez podía proyectarse sobre una esfera de la misma forma que una proyección estereográfica [3]. Actualmente, la esfera empleada en la representación de estados de polarización es conocida como *Esfera de Poincaré* [8].

⁴ A diferencia del Cálculo de Mueller, el Cálculo de Jones involucra cantidades complejas contenidas en matrices columna de 2×1 (vectores de Jones) y matrices de 2×2 (matrices de Jones). Los vectores de Jones contienen información completa acerca de *las amplitudes y fases de las componentes del campo óptico*, es decir, de la polarización de la onda.

Es posible tratar los parámetros de Stokes S_1 , S_2 y S_3 como coordenadas cartesianas de un punto P sobre una esfera de radio S_0 (subespacio de Stokes)⁵. Tomando al origen de un sistema cartesiano como el centro de la esfera, las coordenadas polares esféricas para algún punto P son 2χ y 2ψ , en donde $0 \leq \psi \leq \pi/2$ y $-\pi/2 \leq \chi \leq \pi/2$ (ver Figura 1.4 (a)). El ángulo ψ caracteriza la orientación de la elipse de polarización en el plano xy de la Figura 1.2, mientras que χ denota al ángulo de elipticidad que representa a un estado de polarización. Esto quiere decir que en el subespacio de Stokes (S_1, S_2, S_3) el estado de polarización de una onda monocromática cualquiera está representado por un punto cuyas coordenadas *polares* son $(S_0, 2\chi, 2\psi)$ [1, 2, 8]. Esto es,

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 \cos(2\chi) \cos(2\psi), \\ S_2 &= S_0 \cos(2\chi) \sin(2\psi), \\ S_3 &= S_0 \sin(2\chi), \end{aligned} \quad (1.12)$$

que junto con las Ecuaciones 1.6-1.11, son la base para la ilustración geométrica de la polarización de un rayo de luz con el trivector de Stokes normalizado ($s = (Q, U, V)$, donde $Q = S_1/S_0$, $U = S_2/S_0$, $V = S_3/S_0$), Figura 1.4 (b)).

Cada punto de la esfera corresponde a una única forma de polarización, especificada por el azimuth (ψ), la elipticidad ($\tan[\chi]$) y "giro" (derecha o izquierda), el cual está dado por el signo de 2χ , correspondiendo el signo positivo a formas de polarización derecha (localizadas en el hemisferio superior de la esfera de Poincaré) y el signo negativo a formas de polarización izquierda (localizadas en el hemisferio inferior de la esfera de Poincaré). Cuando $\chi = \pm\pi/2$, se tiene luz circularmente polarizada derecha (localizada en el polo norte) e izquierda (localizada en el polo sur), respectivamente. Cuando $\chi = 0$ (elipticidad

⁵ En el subespacio de Stokes, el vector asociado a P es un *trivector* con coordenadas cartesianas (S_1, S_2, S_3), conocido también como *vector de polarización* $\vec{S}$ por contener toda la información acerca de la polarización del haz de luz. El vector $\vec{S}$ tiene magnitud S_0 .

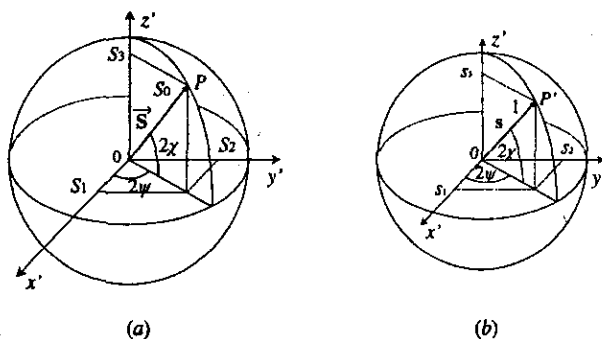


Figura 1.4. (a) Representación de luz polarizada por el punto P en el subespacio de Stokes S_1, S_2, S_3 , por medio del trivector de Stokes de norma S_0 . (b) Esfera unitaria de Poincaré para luz polarizada. En la figura se observa la proyección, P' , del estado de polarización sobre la esfera unitaria y su representación por medio del trivector de Stokes unitario, s .

cero), se tiene luz linealmente polarizada. Así, todos los puntos sobre el ecuador representan polarizaciones lineales con orientaciones dadas por ψ . Cualquier otro punto sobre la esfera corresponde a un estado de polarización elíptica la cual será derecha o izquierda dependiendo del signo de 2χ . Todos los puntos con la misma latitud en la esfera representan formas de polarización con igual elipticidad y giro, pero de diferentes orientaciones y todos los puntos ubicados a la misma longitud tienen formas de orientación iguales pero con diferentes elipticidades. Las formas ortogonales de polarización corresponden a puntos diagonalmente opuestos en la esfera de Poincaré. En particular, $p = 0$ representa a un estado no polarizado y, excluyendo al origen, cada punto en el interior de la esfera, $0 < p \leq 1$, representa a una onda polarizada parcialmente. Puntos fuera de la esfera, $p > 1$, no corresponden a un estado de polarización físico [2].

1.3 Birrefringencia y Dicroísmo

En la Sección 1.2.1 se introdujo el concepto de luz polarizada y su representación en términos de los vectores de Stokes. Ahora se presenta la descripción de los elementos (o materiales) que pueden cambiar el estado de polarización del rayo de luz, cuando éste interactúa con ellos. Para ello, la representación matricial de los parámetros de Stokes resulta ser una herramienta poderosa.

La Figura 1.5 muestra un rayo de luz polarizado descrito por el vector de Stokes incidente, S , el cual interactúa con un medio polarizante de grosor d y el rayo emergente es caracterizado por un nuevo vector de Stokes, S' [9, 10]. Si S y S' se expresan en términos de sus parámetros respectivos, se puede deducir que el nuevo vector, S' , es el resultado de

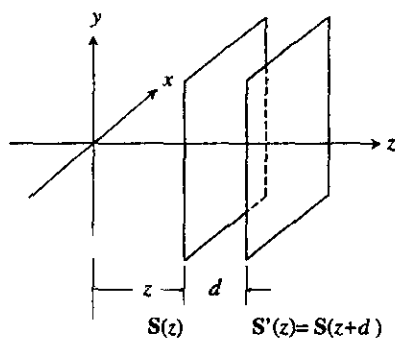


Figura 1.5. Sección plano-paralela de grosor d de un medio anisotrópico en la que un rayo de luz polarizada incidente, $S(z)$, se propaga en dirección del eje z (de un sistema cartesiano xyz) y emerge con un nuevo estado de polarización $S'(z)$.

una combinación lineal de los parámetros de S^6 ; esta relación se escribe en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} S_0' \\ S_1' \\ S_2' \\ S_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

o equivalentemente

$$S' = M \cdot S, \quad (1.14)$$

en donde M es la matriz de 4×4 , conocida como Matriz de Mueller. La ecuación anterior se denomina Cálculo de Mueller [2, 9]; en él, la interacción luz-materia se representa por un vector y una operación matricial sobre éste, que corresponde a las propiedades ópticas del medio. Como resultado se produce un vector resultante que describe al rayo después de la interacción de la luz con el medio óptico.

Lo anterior significa que cuando un rayo de luz interactúa con la materia, su estado de polarización puede alterarse cambiando ya sea las amplitudes, las fases o la dirección de los componentes orto-gonales del campo. Un elemento óptico que cambia las amplitudes ortogonales desigualmente se conoce como *polarizador* o *diatenuador* [2, 3]. Similarmente, un instrumento óptico que introduce un corrimiento de fase entre los componentes ortogonales del campo se conoce como *retardador* y finalmente, si el elemento óptico rota los componentes ortogonales del rayo por un ángulo θ , cuando se propaga a través de él, se llama *rotador*. Cualesquiera de los tres elementos polarizantes mencionados cambian al estado de polarización de un rayo óptico que los atraviese.

Como se menciona, los retardadores permiten variar la diferencia de fase entre los dos componentes ortogonales de la luz; el efecto de éstos se mide generalmente en términos de la retardancia entre las ondas de los componentes de campo eléctrico, la cual es un efecto del índice de refracción. Un cuerpo que retarda todos los estados de polarización por un mismo valor, independientemente de la dirección de propagación, se dice que es isotrópico. Es anisotrópico cuando el índice de refracción depende de la forma de polarización y de la dirección de propagación. Esto significa que para un rayo de luz incidente normal a la superficie de un cuerpo anisotrópico, el componente de polarización con el índice de refracción mayor (o eje lento) se retrasa respecto al otro componente (eje rápido), y cuando el rayo emerge la cantidad del retardo depende del grosor del medio. Esto es, una onda de luz linealmente polarizada y paralela al eje óptico del material, experimenta un índice de refracción específico n_e ; si por el contrario está polarizada ortogonalmente al eje óptico, la onda viajará con diferente índice de refracción n_o y en este caso el efecto de retardo, en la

propagación de la onda a través de una distancia d , está dado por

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda}(n_e - n_o), \quad (1.15)$$

en donde δ es la retardancia relativa entre los componentes ortogonales del campo eléctrico. La cantidad $(n_e - n_o)$ es la *birrefringencia del medio*, definiéndose negativa cuando $n_e < n_o$; el eje con índice n_e es el eje rápido y n_o el eje lento del retardador lineal. Si la birrefringencia es positiva, el eje con índice n_e se convierte en lento y n_o en rápido. Esta nomenclatura se sigue del hecho de que la onda viaja rápida o lentamente si está polarizada a lo largo de la dirección del índice de refracción menor o mayor, respectivamente. Para rayos con incidencia oblicua el índice de refracción determina no solamente la velocidad de la luz sino también el ángulo al cual un rayo se desvía cuando atraviesa el medio. Por tanto, en este tipo de rayos el componente de polarización que experimenta mayor índice de refracción deberá ser desviado en mayor grado que otro que experimente un índice de refracción menor, dando lugar al efecto de dos rayos emergentes. Este es el fenómeno de la *doble refracción*. En general, un medio anisotrópico se caracteriza completamente por tres índices refractivos, y se dice birrefringente cuando se tienen diferentes valores para éstos.

El efecto dicroico se refiere a la absorción selectiva de uno de los dos componentes ortogonales del estado de polarización $\mathcal{P}$ de un haz incidente. El polarizador dicroico es físicamente anisotrópico, produciendo una fuerte asimetría o absorción preferencial de un componente del campo mientras que es esencialmente transparente al otro. En los materiales dicroicos las moléculas están orientadas por los momentos dipolares a lo largo de un eje particular; en consecuencia, la luz se atenúa en esta dirección del eje mientras que la luz polarizada perpendicularmente no sufre absorción. Generalmente los polarizadores

dicroicos, conocidos también como láminas polarizadoras, funcionan explotando el fenómeno de dicroísmo lineal.

Determinar la matriz de Mueller asociada a un elemento generalmente no resulta sencillo debido a la gran cantidad de elementos de la matriz. Sin embargo, para ello se puede usar un método empírico como el descrito en la referencia [3] que consiste en determinar “intuitivamente” el efecto que un elemento óptico tiene sobre los vectores de Stokes para luz natural, luz polarizada parcial, horizontal, lineal a $+45^\circ$ y circularmente derecha, y con esta información se tiene un problema algebraico simple. Sin embargo, el desarrollo de este método intuitivo no resulta ventajoso cuando se emplean elementos ópticos más complejos como son los polarizadores elípticos, retardadores, etc., ya que el problema algebraico es también más complejo. Es posible determinar algunas de las matrices representativas de elementos ópticos utilizando el Cálculo de Jones, aunque el formalismo solamente se aplica a luz completamente polarizada. Sin embargo, el homomorfismo $SU(2)-O^3(3)$ permite transformar al grupo unitario $SU(2)$ a su “equivalente” real $O^3(3)$ [11, 12, 14], y entonces es posible transformar las matrices de Jones obtenidas a sus respectivas matrices de Mueller, y vice versa.

En las siguientes Tablas se muestran algunas de las matrices de Mueller para elementos retardadores calculadas a partir de matrices de Jones conocidas, ya que son de interés para el estudio de medios birrefringentes (incluyendo los casos elípticos). En ellas, δ es la retardancia, ρ la orientación y ω el ángulo de elipticidad del medio.

Tabla 1. Retardadores lineales homogéneos

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\delta = 90^\circ, \rho = 0^\circ$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\delta = 90^\circ, \rho = 90^\circ$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\delta = 90^\circ, \rho = -45^\circ$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\delta = 90^\circ, \rho = +45^\circ$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\rho) & \sin(2\rho)\cos(2\rho) & -\sin(2\rho) \\ 0 & \sin(2\rho)\cos(2\rho) & \sin^2(2\rho) & \cos(2\rho) \\ 0 & \sin(2\rho) & -\cos(2\rho) & 0 \end{pmatrix}$ $\delta = 90^\circ, \rho \text{ cualquiera}$	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\delta = 180^\circ, \rho = 0^\circ$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\delta = 180^\circ, \rho = 90^\circ$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\delta = 180^\circ, \rho = -45^\circ$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\delta = 180^\circ, \rho = +45^\circ$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(4\rho) & \sin(4\rho) & 0 \\ 0 & \sin(4\rho) & -\cos(4\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\delta = 180^\circ, \rho \text{ cualquiera}$	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_4 \sin^2(\frac{\delta}{2}) + \cos^2(\frac{\delta}{2}) & S_4 \sin^2(\frac{\delta}{2}) & -S_2 \sin(\delta) \\ 0 & S_4 \sin^2(\frac{\delta}{2}) & -C_4 \sin^2(\frac{\delta}{2}) + \cos^2(\frac{\delta}{2}) - C_2 \sin(\delta) & C_2 \sin(\delta) \\ 0 & S_2 \sin(\delta) & -C_2 \sin(\delta) & \cos(\delta) \end{pmatrix}$ $\text{Retardador lineal general } (\delta \text{ y } \rho \text{ cualesquiera})$	

en donde $C_2 = \cos(2\rho)$, $C_4 = \cos(4\rho)$, $S_2 = \sin(2\rho)$, $S_4 = \sin(4\rho)$.

Tabla 2. Retardadores elípticos homogéneos

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
circular derecha, $\delta = 180^\circ$	circular derecha, $\delta = 90^\circ$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
circular izquierda, $\delta = 180^\circ$	circular izquierda, $\delta = 90^\circ$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta) & \sin(\delta) & 0 \\ 0 & -\sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta) & -\sin(\delta) & 0 \\ 0 & \sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
circular derecha, δ cualquiera	circular izquierda, δ cualquiera
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\omega) & \sin(2\omega) & -\cos(2\omega)\sin(2\omega) \\ 0 & -\sin(2\omega) & 0 & \cos(2\omega) \\ 0 & -\cos(2\omega)\sin(2\omega) & -\cos(2\omega) & \sin^2(2\omega) \end{pmatrix}$	
rep o lep, $\delta = 90^\circ$, $\rho = 0^\circ$	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2\sin^2(2\omega)\sin^2(\frac{\delta}{2}) & \sin(2\omega)\sin(\delta) & \sin(4\omega)\sin^2(\frac{\delta}{2}) \\ 0 & -\sin(2\omega)\sin(\delta) & \cos(\delta) & -\cos(2\omega)\sin(\delta) \\ 0 & \sin(4\omega)\sin^2(\frac{\delta}{2}) & \cos(2\omega)\sin(\delta) & 1 - 2\cos^2(2\omega)\sin^2(\frac{\delta}{2}) \end{pmatrix}$	
rep o lep, δ cualquiera y $\rho = 90^\circ$	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^2 - E^2 - F^2 + G^2 & 2(DE + FG) & 2(DF - EG) \\ 0 & 2(DE - FG) & -D^2 + E^2 - F^2 + G^2 & 2(EF + DG) \\ 0 & 2(DF + EG) & 2(EF - DG) & -D^2 - E^2 + F^2 + G^2 \end{pmatrix}$	
Retardador elíptico general (δ y ρ cualesquiera)	

donde $D = \cos(2\omega) \cos(2\rho) \sin(\frac{\delta}{2})$, $E = \cos(2\omega) \sin(2\rho) \sin(\frac{\delta}{2})$, $F = \sin(2\omega) \sin(\frac{\delta}{2})$ y $G = \cos(\frac{\delta}{2})$.

De la misma manera que en el caso de luz polarizada, se puede representar a un medio birrefringente o dicroico por medio de sus *vectores de birrefringencia o dicroísmo* [11, 13, 15, 16, 17, 18], los cuales describen las propiedades ópticas del medio material. Esto se deduce del hecho de que un medio birrefringente y/o dicroico está localizado sobre la esfera de Poincaré como un punto R y/o D , respectivamente. Como los medios birrefringentes son los que ocupan nuestra atención, se establecen las relaciones para los vectores de birrefringencia. El medio birrefringente se caracteriza por el vector birrefringencia

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3). \quad (1.18)$$

Obsérvese que el vector está definido por las coordenadas cartesianas β_1 , β_2 y β_3 (Figura 1.6 (a)), en donde β_1 corresponde a contribuciones de birrefringencia lineal sobre los ejes, β_2 a birrefringencia lineal a $\pm 45^\circ$ y β_3 a birrefringencia circular derecha o izquierda. Las coordenadas cartesianas del punto R dadas en términos de las coordenadas angulares 2ρ y 2ω , quedan como

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta \cos(2\omega) \cos(2\rho), \\ \beta_2 &= \beta \cos(2\omega) \sin(2\rho), \\ \beta_3 &= \beta \sin(2\omega), \end{aligned} \quad (1.19)$$

en donde ρ y ω son los *ángulos de orientación y elipticidad de la birrefringencia* y β es la *magnitud del vector birrefringencia o birrefringencia neta del medio* respectivamente.

La representación de β por su magnitud y un vector unitario, dirigido en la misma dirección que β , está dada por

$$\beta = \beta (e_{\beta_1}, e_{\beta_2}, e_{\beta_3}) = \beta e_\beta, \quad (1.20)$$

en donde

$$\beta = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} \quad (1.21)$$

representa la magnitud de la birrefringencia del medio y $\mathbf{e}_\beta$ al vector unitario cuyo extremo se encuentra sobre la esfera unitaria de Poincaré (Figura 1.6 (b))⁷. Esta representación del vector birrefringencia permite describir a un medio birrefringente en el subespacio de Stokes (como en la Ecuación 1.20). Con ello, el efecto de un retardador sobre el estado de polarización de un rayo de luz, resulta menos complicado de describir [16, 17, 18].

Al igual que la descripción de los estados de polarización de un haz sobre la esfera de Poincaré, es también posible identificar las diferentes formas de birrefringencia (o dicroísmo) sobre dicha esfera. En particular, puntos sobre el ecuador corresponden a medios con birrefringencia de tipo lineal, puntos en los polos a birrefringencia circular derecha (polo norte) e izquierda (polo sur) y cualquier otro punto a medios con birrefringencia elíptica, ya sea derecha (hemisferio superior) o izquierda (hemisferio inferior). Esto quiere decir que la birrefringencia elíptica representa la forma más general de birrefringencia del medio, ya que sus coordenadas angulares -azimut y elipticidad- toman valores cualesquiera y entonces β_1 , β_2 y β_3 son arbitrarias. Lo anterior tiene significado físico amplio puesto que asignar valores, por ejemplo al retardador, para su azimut ρ y ángulo de elipticidad ω significa representarlo en términos de su eigenvector rápido. Para un rayo de luz que tenga la misma dirección de polarización que el eigenvector del medio no cambiará su estado de polarización, por lo que ese estado se define como *eigenpolarización del medio* y

⁷ Si el medio presenta dicroísmo, el vector asociado a éste efecto está dado por $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) = d (\mathbf{e}_{d_1}, \mathbf{e}_{d_2}, \mathbf{e}_{d_3}) = d \mathbf{e}_d$ en donde $d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$ es la magnitud del dicroísmo y $\mathbf{e}_d$ es el vector unitario dirigido en la misma dirección que $\mathbf{d}$.

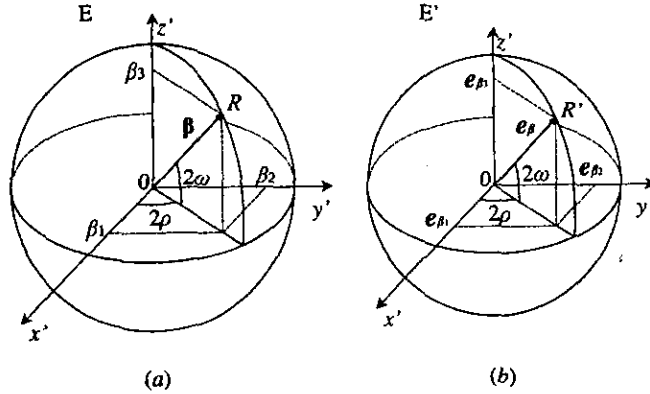


Figura 1.6. (a) Representación de un medio retardador a través del punto R sobre la esfera de Poincaré, E . El vector birrefringencia asociado, β , tiene coordenadas cartesianas β_1 , β_2 y β_3 en el sistema coordenado $x'y'z'$. (b) La punta del vector unitario, e_β , del vector β , representa la proyección R' del retardador R sobre la esfera unitaria de Poincaré E' . Las coordenadas angulares 2ρ y 2ω representan a los ángulos de orientación y elipticidad del medio, respectivamente.

cuenta con dos polarizaciones elípticas ortogonales, las cuales poseen el mismo ángulo de orientación ψ y ángulos de elipticidad $\pm\chi$.

Entonces, es posible visualizar geoméricamente, sobre la esfera de Poincaré, el efecto que el material birrefringente (retardador) tiene sobre el estado de polarización del rayo de luz que lo atraviesa. Dado un estado de polarización, el efecto que tiene una matriz de Mueller birrefringente sobre éste, es rotar a dicho estado por una cantidad β alrededor del vector birrefringencia β que describe las propiedades del medio⁸. Puede decirse que el punto P_1 que representa al estado de polarización sobre la esfera gira sobre β siguiendo un

⁸ Cuando el medio es dicroico, el efecto de la matriz de Mueller respectiva es el de "reducir" o "alargar" al vector d que representa al estado de polarización del rayo.

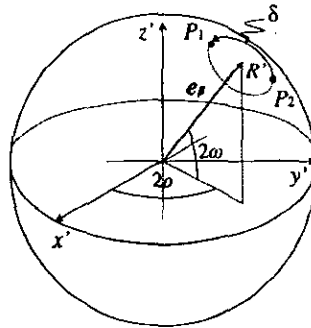


Figura 1.7. Uso de la esfera de Poincaré unitaria para representar el efecto de un retardador sobre luz polarizada. El estado de polarización inicial P_1 cambia a P_2 por el efecto de la retardancia del medio, δ . Geométricamente, P_1 se rota un ángulo igual a δ alrededor de la punta, R' , del vector unitario e_β . El nuevo estado de polarización corresponde el punto P_2 sobre la esfera.

arco (que inicia en P_1) y con velocidad de giro (angular) igual a β , por efecto del medio birrefringente. Esto en sí ya es importante puesto que la interpretación de la anisotropía se refleja justamente en β . Una vez dada la forma inicial de polarización y del medio birrefringente (tipo de retardador), el efecto neto de éste está determinado como a continuación se describe y se ilustra en la Figura 1.7 [3, 13, 18].

- Se localiza sobre la esfera el punto P_1 correspondiente a la polarización inicial de la luz.
- Se localiza sobre la esfera al punto R correspondiente al retardador.
- Se gira a la esfera por una cantidad igual a la retardancia δ en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del eje extendido del centro de la esfera al punto R .

El sentido indicado se refiere a un observador que se encuentra fuera de la esfera mirando hacia ella.

- Se localiza el nuevo punto sobre la esfera, ahora llamado P_2 .
- La nueva forma de polarización corresponde a aquella representada por P_2 en la esfera original o no rotada.

Se observa que cuando P_1 gira un ángulo igual a la retardancia δ alrededor de R' , P_1 se mueve sobre la esfera a una *velocidad angular en z igual a δ* alrededor de R' . La evolución de un estado de polarización se representa, por tanto, como una trayectoria (curva) descrita por la punta del trivector de polarización s sobre la *esfera unitaria de Poincaré* cuando los vectores de birrefringencia y/o dicroísmo son distintos de cero.

1.4 Anisotropía óptica de medios no homogéneos

Partiendo de la base geométrica que ofrece la esfera de Poincaré, se presentan las herramientas analíticas del Cálculo de Mueller para el estudio de medios anisotrópicos no homogéneos.

Para un *medio seccionalmente homogéneo*, el cambio de polarización del haz emergente está dado por

$$S'(z) = (M_n \cdot M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdot \dots \cdot M_1) \cdot S(0), \quad (1.22)$$

donde M_i es la matriz que representa las propiedades ópticas para la i -ésima porción del medio. M_1 y M_n son la primera y última sección, respectivamente del material que atraviesa el haz. Es ahora claro que la no conmutatividad de la multiplicación de matri-

ces establece una enorme limitación para la descripción de medios no-homogéneos, pues el orden de las matrices es ahora crítico y entonces requiere de una descripción diferencial (local) para las propiedades del medio.

1.4.1 Cálculo diferencial de Mueller

Azzam [9] y Hernández [10] establecen el Cálculo Diferencial Matricial de Mueller, semejante al Cálculo Diferencial de Jones, para analizar sistemas con propiedades ópticas que varían a lo largo de la trayectoria recorrida por un haz de luz. Jones (1948-1951) propuso herramientas matriciales que permiten conocer no sólo las propiedades de polarización del haz de salida, sino que además permiten calcular las propiedades del haz para cualquier punto en su trayectoria dentro del material. Jones tituló a esta herramienta “Cálculo diferencial de matrices ópticas” pues le permitían conocer las propiedades del haz al pasar por una rebanada infinitesimal de material con propiedades conocidas.

En el Cálculo diferencial de Mueller propuesto por Azzam [9] y Hernández [10], la ecuación que describe la evolución del estado de polarización del haz cuando se propaga en un medio en una dirección dada, se representa por una ecuación diferencial de primer orden que contiene matrices de Mueller *locales* y vectores de Stokes⁹.

La ecuación diferencial que representa el cambio infinitesimal es

$$\frac{dS(z)}{dz} = \mathbf{m} \cdot S(z), \quad (1.23)$$

⁹ Es Chandrasekhar quien en la década de los 40s [2] propone operaciones matriciales para describir la interacción de radiación con la materia.

donde $S(z)$ representa al vector de Stokes, y m a la *matriz local del medio*. La condición inicial (o de frontera) para esta ecuación diferencial requiere que la física del sistema luz-medio se exprese cabalmente en forma global o sobre el recorrido *total* dentro del material; es decir,

$$S(z) = M_z \cdot S(0), \quad (1.24)$$

en donde M_z es la *matriz global del medio*. Ambas ecuaciones definen la solución para M , ya que dada S de entrada y de salida puede entonces inferirse cuales son la propiedades del medio. De modo equivalente, dada la expresión para la evolución del estado de polarización y su condición inicial, es posible conocer la ecuación que relaciona las propiedades extensivas del medio global e intensivas del medio debido a sus propiedades locales. Esta relación es

$$m = \left(\frac{dM_z}{dz} \right) \cdot M_z^{-1}, \quad (1.25)$$

ecuación que involucra información acerca de la anisotropía local y global del medio.

Azzam [9] presenta ocho *matrices locales* referentes a fenómenos ópticos básicos (birrefringencia y dicroísmo) locales

$$\begin{aligned} m_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, m_2 = \begin{pmatrix} d_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_0 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & -\eta & 0 \end{pmatrix} \\ m_4 &= \begin{pmatrix} 0 & d_1 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, m_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 & 0 \end{pmatrix}, m_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ m_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, m_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Para un medio arbitrario (con birrefringencia y dicroísmo), la matriz “general” local se puede escribir como la suma de dos matrices: una matriz simétrica $\mathbf{m}_s$ que representa las propiedades de absorción isotrópicas y anisotrópicas del medio, y una matriz antisimétrica $\mathbf{m}_{as}$ (skew-symmetric), asociada a las propiedades de refracción anisotrópicas del mismo medio, esto es

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_s + \mathbf{m}_{as}, \quad (1.27)$$

donde

$$\mathbf{m}_s = \begin{pmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ d_1 & d_0 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & d_0 & 0 \\ d_3 & 0 & 0 & d_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m}_{as} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \nu \\ 0 & -\mu & 0 & \eta \\ 0 & -\nu & -\eta & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

En 1979, Azzam [9] y más recientemente Hernández [10] resuelven el sistema de ecuaciones diferenciales estableciendo un problema de eigenvalores. Azzam [9], por su parte, lo hace “sólo” para medios homogéneos, ya que es la única forma en que los eigenvectores calculados para la solución no dependen de la posición. Para medios no-homogéneos, Azzam [9] plantea la solución del sistema acoplando las ecuaciones diferenciales para obtener una de tercer orden. Hernández [10] resuelve el sistema de ecuaciones para un medio no homogéneo en el que atribuye factores de peso constantes a las propiedades locales del medio, mismos que le permiten establecer la solución utilizando el problema de eigenvalores sin dificultad.

Para *medios homogéneos*, Azzam [9] encuentra que la matriz de Mueller del medio global, en términos de la matriz diferencial $\mathbf{m}$, está dada por

$$\mathbf{M} = \exp(\mathbf{m}z) \quad (1.29)$$

$$= \mathbf{I} + \mathbf{m}z + \mathbf{m}^2 \left(\frac{z^2}{2!} \right) + \mathbf{m}^3 \left(\frac{z^3}{3!} \right) + \mathbf{m}^4 \left(\frac{z^4}{4!} \right) + \dots, \quad (1.30)$$

en donde las potencias de $\mathbf{m}$ se calculan como

$$\mathbf{m} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{m}_D \cdot \mathbf{T}^{-1}, \quad (1.31)$$

siendo $\mathbf{T}$ la matriz que transforma a $\mathbf{m}$ en una matriz diagonal cuyos elementos son sus eigenvalores, esto es,

$$\det(\mathbf{m} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (1.32)$$

y $\mathbf{T}$ es la *matriz modal* de $\mathbf{m}$ cuyas columnas son los *eigenvectores* $\mathbf{T}_i$ asociados a los eigenvalores λ_i , esto es

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \mathbf{T}_4]. \quad (1.33)$$

La ventaja de ello, es que permite escribir las potencias de $\mathbf{m}$ como

$$\mathbf{m}^n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{m}_D^n \cdot \mathbf{T}^{-1}. \quad (1.34)$$

De lo contrario, los elementos fuera de la diagonal de la matriz $\mathbf{m}$ dificultan el cálculo de la potencia n -ésima de $\mathbf{m}$. De esta manera, la matriz de Mueller del medio global resulta ser

$$\mathbf{M} = \mathbf{T} \cdot \left[\mathbf{I} + \mathbf{m}_D z + \mathbf{m}_D^2 \left(\frac{z^2}{2!} \right) + \mathbf{m}_D^3 \left(\frac{z^3}{3!} \right) + \dots \right] \cdot \mathbf{T}^{-1} \quad (1.35)$$

$$= \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_D \cdot \mathbf{T}^{-1}, \quad (1.36)$$

en donde

$$\mathbf{M}_D = \exp(\mathbf{m}_D z) \quad (1.37)$$

$$= \mathbf{I} + \mathbf{m}_D z + \mathbf{m}_D^2 \left(\frac{z^2}{2!} \right) + \mathbf{m}_D^3 \left(\frac{z^3}{3!} \right) + \dots \quad (1.38)$$

Hernández [10] desarrolla el análisis de matrices diferenciales para un *medio anisotrópico no homogéneo* con base también en el Cálculo diferencial de Mueller. Así, propone

una ecuación diferencial semejante a la Ecuación 1.23, pero ahora las propiedades del medio varían a lo largo de la trayectoria óptica recorrida, esto es,

$$\frac{dS(z)}{dz} = m(z) \cdot S(z). \quad (1.39)$$

Obsérvese que $m(z)$ es función (matricial) de la posición (sus coeficientes dependen de z). Con la condición $S(z) = M_z \cdot S(0)$, la Ecuación 1.39 se reduce nuevamente a una ecuación que relaciona las propiedades intensivas y extensivas del medio, es decir,

$$m(z) = \left(\frac{dM_z}{dz} \right) \cdot M_z^{-1}. \quad (1.40)$$

La solución de la Ecuación 1.40 no es más que la matriz de Mueller del medio *global*. Esto es

$$M_z = \exp \left[\int_0^z dz' m(z') \right]. \quad (1.41)$$

De la misma manera que Azzam [9], Hernández [10] diagonaliza las matrices $m(z)$ para simplificar el cálculo de sus potencias. Esto la conduce a obtener la matriz de Mueller para un medio no homogéneo

$$M_z = T \cdot \left\{ I + \left[\int_0^z dz' m_D(z') \right] + \frac{1}{2!} \left[\int_0^z dz' m_D(z') \right]^2 + \frac{1}{3!} \left[\int_0^z dz' m_D(z') \right]^3 + \dots \right\} \cdot T^{-1}. \quad (1.42)$$

Existe una gran diferencia entre ambos resultados (ecuaciones 1.35 y 1.42), la más importante de ellas es que Hernández [10] calcula la matriz global para un medio *anisotrópico no homogéneo* en el que *las propiedades multiplicativas se pierden para las matrices locales* (Ecuación 1.22). Esto quiere decir que las limitaciones de no conmutatividad de la multiplicación de matrices globales se transforma en una algebra matricial simple de suma de matrices locales que operativamente es fácil y poderosa. Azzam [9], al hacer el análisis

sis para medios homogéneos con contribuciones lineales y/o circulares encuentra que la matriz modal (o de eigenvectores) *es dependiente de las propiedades del medio*, situación que no facilita el cómputo de propiedades globales a partir de las propiedades locales. En contraste, el análisis de Hernández para casos de contribuciones lineales plantea una descripción de la *matriz modal independiente de las propiedades del medio*, lo cual es una gran ventaja pues representa un formalismo más general que el que Azzam [9] propone. Está claro que el resultado de Hernández [10] es operativamente más convincente. Sin embargo, no se ha dado una interpretación física más clara y geométrica de la evolución de un rayo de luz que atraviesa un medio ópticamente anisotrópico, así como tampoco se ha planteado una interpretación de los eigenvectores calculados en relación a una dirección geométrica ni de su significado físico. Es por ello que explorar estos puntos ofrece oportunidades de gran utilidad por el contenido físico del problema, motivo por el cual es importante ampliar la visión de los trabajos de Azzam [9] y Hernández [10].

1.4.2 Fluctuaciones en medios no homogéneos

Es claro que el estudio de medios no-homogéneos requiere del análisis de propiedades ópticas cuyos valores promedio dependen de la posición en el material. Ahora, si bien el formalismo de Hernández [10] resulta poderoso para medios anisotrópicos no-homogéneos, en la práctica las propiedades locales tienen además una complicación extra: presentan características estocásticas debido a las fluctuaciones térmicas del material. Esto es, la naturaleza del fenómeno luz-materia requiere de un tratamiento capaz de considerar detalladamente las fluctuaciones térmicas intrínsecas de un medio anisotrópico no-homogéneo, pues

con frecuencia la no homogeneidad se debe principalmente a variaciones pequeñas en las propiedades del material.

En el formalismo unificado de Brown y Bak [15] se tiene un medio óptico anisotrópico, como una fibra óptica, en el que las perturbaciones dieléctricas a lo largo de la fibra afectan el comportamiento o evolución del campo electromagnético. Estas perturbaciones son frecuentemente resultado del proceso de manufactura y pueden también resultar de los esfuerzos aplicados a cada punto sobre ella; tales esfuerzos pueden ser dependientes del tiempo en un gran número de aplicaciones. El análisis de este formalismo comienza con el establecimiento de ecuaciones para las amplitudes del campo electromagnético, las cuales forman un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{da(z)}{dz} = i\mathbf{P}(z) \cdot \mathbf{a}(z), \quad (1.43)$$

llamado *ecuaciones de Modo Acoplado* [13], y en donde $\mathbf{P}(z)$ es un operador matricial de 2×2 que representa el acoplamiento ocasionado por las perturbaciones en los modos ideales. Esta representación es muy semejante a la ecuación diferencial del Cálculo de Jones, pues en ella se plantea el problema con base en las amplitudes complejas del campo eléctrico. La Ecuación 1.43 resuelta formalmente por el Método de Operadores Exponenciales Ordenados [19], tiene una solución de la forma

$$\mathbf{a}(z) = \left\{ \overleftarrow{\mathbf{Z}} \exp \left[i \int_0^z dz' \mathbf{P}(z') \right] \right\}. \quad (1.44)$$

La forma explícita del operador exponencial ordenado $\overleftarrow{\mathbf{Z}}$ se presenta en la Ecuación A.1 del Apéndice A.

La Ecuación 1.44 es una versión de la matriz de transferencia en el formalismo de Jones [15], por lo que la matriz del medio se expresa como

$$\mathbf{J}(d_0, \beta_0, \mathbf{d}, \beta, z) = \left\{ \overleftarrow{\mathbf{Z}} \exp \left[i \int_0^z dz' \mathbf{P}(z') \right] \right\}, \quad (1.45)$$

en donde d_0 , β_0 , $\mathbf{d}$ y β representan a la pérdida arbitraria, la fase, al vector dicroísmo y al vector birrefringencia (en el subespacio de Stokes tridimensional) del medio, respectivamente [15, 18].

Dado que en el formalismo de Jones las cantidades no son directamente medibles, conviene por consiguiente transformar el problema del espacio complejo a uno del espacio real. Ello se logra vía la Matriz de Coherencia, MC, cuyos elementos son directamente medibles [11]. Resulta conveniente representar a MC en forma paramétrica usando la representación 4-vectorial de Stokes (espacio de Stokes cuatridimensional). La forma equivalente real o Forma de Stokes [17] queda en términos de dos ecuaciones [15, 17]

$$\frac{dS_0(z)}{dz} = -S_0(z) d_0(z) - \vec{\mathbf{S}}(z) \cdot \mathbf{d}(z) \quad (1.46)$$

y

$$\frac{d\vec{\mathbf{S}}(z)}{dz} = -\vec{\mathbf{S}}(z) \times \beta(z) - S_0(z) \mathbf{d}(z) - d_0(z) \vec{\mathbf{S}}(z), \quad (1.47)$$

en donde $\vec{\mathbf{S}}(z)$ es el vector de polarización (trivector de Stokes) (S_1, S_2, S_3) localizado en el subespacio tridimensional de Stokes y $S_0(z)$ es la intensidad total del haz de luz dependiente de z . La Ecuación 1.46 describe los efectos de pérdida isotrópica o diatenuación de la intensidad total y la Ecuación 1.47 da no solamente la evolución del vector de polarización de Stokes debido a la birrefringencia, sino que también incluye efectos por pérdida isotrópica y diatenuación sobre la evolución del estado de polarización [17].

El sistema formado por las Ecuaciones 1.46 y 1.47 equivale a

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} S_0(z) \\ S_1(z) \\ S_2(z) \\ S_3(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_0(z) & -d_1(z) & -d_2(z) & -d_3(z) \\ -d_1(z) & -d_0(z) & -\beta_3(z) & +\beta_2(z) \\ -d_2(z) & +\beta_3(z) & -d_0(z) & -\beta_1(z) \\ -d_3(z) & -\beta_2(z) & +\beta_1(z) & -d_0(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0(z) \\ S_1(z) \\ S_2(z) \\ S_3(z) \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

en donde $(S_0(z), S_1(z), S_2(z), S_3(z))'$ es el cuádrivector de Stokes S . Esta ecuación revela una simetría semejante a la del grupo de Lorentz de 4×4 [20, 21]. Dado esto, la matriz de “evolución” de Stokes en la Ecuación 1.48, se expande por el conjunto de generadores del grupo de Lorentz apropiado $\hat{D}$ y $\hat{B}$ (ver Ecuación A.5, Apéndice A) [21], por lo que la Ecuación 1.48, en términos de esa base generadora, queda como

$$\frac{dS(z)}{dz} = \left\{ -d_0(z)I + (\mathbf{d}(z) \cdot \hat{D}) + (\boldsymbol{\beta}(z) \cdot \hat{B}) \right\} \cdot S(z), \quad (1.49)$$

en donde I es la matriz unitaria de 4×4 . El *producto punto* expresado en la Ecuación 1.49 se define en la Ecuación A.8 del Apéndice A. La solución para esta ecuación se plantea como en la Ecuación 1.44, esto es, empleando el método de operadores exponenciales ordenados, por lo que

$$S(d_0, \mathbf{d}, \boldsymbol{\beta}, z) = M(d_0, \mathbf{d}, \boldsymbol{\beta}, z) \cdot S(0), \quad (1.50)$$

en donde

$$M(d_0, \mathbf{d}, \boldsymbol{\beta}, z) = \overleftarrow{Z} \exp \left\{ - \int_0^z dz' [d_0(z')I] + \int_0^z dz' [\mathbf{d}(z') \cdot \hat{D}] + \int_0^z dz' [\boldsymbol{\beta}(z') \cdot \hat{B}] \right\}, \quad (1.51)$$

que corresponde a la matriz de Mueller para un medio arbitrario.

La simetría entre el grupo de Lorentz y el formalismo de Mueller, permite también expresar la física de medios anisotrópicos en forma geométrica, ya que existe una analogía entre los elementos de birrefringencia y dicroísmo de la matriz de Mueller de polarización óptica y los generadores de “rotación” y “boosts” (que son dos tipos fundamentales de

transformaciones vectoriales de Lorentz), respectivamente, de las transformaciones de Lorentz de la relatividad especial [15, 21].

Es importante señalar que el formalismo del Cálculo de Jones y el de Mueller tienen su fundamento matemático en el grupo de Lorentz [21]. En el primero, se trabaja con una representación espinorial del grupo de Lorentz, el segundo utiliza la representación vectorial del grupo de Lorentz.

1.4.3 Esfera de Poincaré para propiedades locales

Azzam calcula las matrices de Mueller *globales* para medios homogéneos birrefringentes y dicroicos [9], respectivamente

$$\mathbf{M}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos[\beta z] + \frac{\beta_1^2}{\beta^2} \gamma & \frac{\beta_2}{\beta} \sin[\beta z] + \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta^2} \gamma & -\frac{\beta_2}{\beta} \sin[\beta z] + \frac{\beta_1 \beta_3}{\beta^2} \gamma \\ 0 & -\frac{\beta_2}{\beta} \sin[\beta z] + \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta^2} \gamma & \cos[\beta z] + \frac{\beta_2^2}{\beta^2} \gamma & \frac{\beta_1}{\beta} \sin[\beta z] + \frac{\beta_2 \beta_3}{\beta^2} \gamma \\ 0 & \frac{\beta_2}{\beta} \sin[\beta z] + \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta^2} \gamma & -\frac{\beta_1}{\beta} \sin[\beta z] + \frac{\beta_2 \beta_3}{\beta^2} \gamma & \cos[\beta z] + \frac{\beta_3^2}{\beta^2} \gamma \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

y

$$\mathbf{M}_d = \begin{pmatrix} \cosh[dz] & -\frac{d_1}{d} \sinh[dz] & -\frac{d_2}{d} \sinh[dz] & -\frac{d_3}{d} \sinh[dz] \\ -\frac{d_1}{d} \sinh[dz] & 1 + \frac{d_1^2}{d^2} \kappa & \frac{d_1 d_2}{d^2} \kappa & \frac{d_1 d_3}{d^2} \kappa \\ -\frac{d_2}{d} \sinh[dz] & \frac{d_1 d_2}{d^2} \kappa & 1 + \frac{d_2^2}{d^2} \kappa & \frac{d_2 d_3}{d^2} \kappa \\ -\frac{d_3}{d} \sinh[dz] & \frac{d_1 d_3}{d^2} \kappa & \frac{d_2 d_3}{d^2} \kappa & 1 + \frac{d_3^2}{d^2} \kappa \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

(en donde $\gamma = (1 - \cos[\beta z])$ y $\kappa = (\cosh[dz] - 1)$).

Con su formalismo es posible demostrar la dependencia de la matriz modal, $\mathbf{T}$, con las propiedades físicas del medio, que como se hizo notar antes, es una desventaja ya que para medios no homogéneos aumenta la complejidad del problema puesto que los eigenvectores dependen explícitamente de las propiedades ópticas del medio. Otra desventaja más de su formalismo es que las matrices $\mathbf{M}_\beta$ y $\mathbf{M}_d$ no manifiestan explícitamente infor-

mación acerca de los ángulos de orientación y elipticidad del medio. Esto es, para obtener información acerca de dichos ángulos es necesario recurrir al concepto de *vector de birrefringencia*, mismo que no se considera en este esquema. Por ello es deseable plantear adecuadamente a la matriz diferencial $m(z)$, de tal manera que se definan en ella todas las características que describan al medio.

Como se ha mencionado ya, Hernández [10] resuelve parcialmente este problema al considerar una forma funcional para calcular la matriz de un medio no-homogéneo cuya birrefringencia es lineal y de orientación arbitraria pero conocida. La forma de evaluación de la matriz del medio *local*, $m(z)$, a partir de la matriz *global* de un medio con birrefringencia lineal, proporciona información no sólo del ángulo de orientación sino también del ángulo de elipticidad (aparecen términos asociados a birrefringencia circular), lo cual presenta aún dificultades en su interpretación. Finalmente, Brown y Bak [15], establecen un formalismo en el que se consideran las fluctuaciones del medio. Sin embargo, la estructura matemática propuesta no permite resolver analíticamente la matriz de Mueller para un medio no-homogéneo, ni tampoco, al igual que los demás esquemas, permite deducir con claridad la matriz de Mueller local del medio.

Para poder solucionar las dificultades anteriores del formalismo de Azzam [9], Hernández [10] y Brown y Bak [15] conviene analizar la forma funcional para la matriz *local* del medio $m(z)$ y su representación en términos del vector birrefringencia. La forma funcional más general para $m(z)$ se obtiene sumando todas las matrices m que corresponden a las diferentes propiedades ópticas definidas por Azzam [9] (Ecuación 1.26), con la particular-

idad de que éstas tienen ahora una dependencia en z :

$$\mathbf{m}(z) = \begin{pmatrix} -d_0(z) & -d_1(z) & -d_2(z) & -d_3(z) \\ -d_1(z) & -d_0(z) & -\beta_3(z) & +\beta_2(z) \\ -d_2(z) & +\beta_3(z) & -d_0(z) & -\beta_1(z) \\ -d_3(z) & -\beta_2(z) & +\beta_1(z) & -d_0(z) \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

Esta ecuación equivale a la suma de la matriz simétrica $\mathbf{m}_s(z)$, que representa las propiedades de absorción isotrópicas y anisotrópicas del medio no-homogéneo y la matriz anti-simétrica $\mathbf{m}_{as}(z)$, correspondiente a las propiedades de refracción anisotrópica del mismo medio. La información acerca de las propiedades ópticas que se encuentra contenida en éstas matrices se representa en los vectores de birrefringencia y dicroísmo *locales*

$$\beta(z) = (\beta_1(z), \beta_2(z), \beta_3(z)) \quad (1.55)$$

$$\mathbf{d}(z) = (d_1(z), d_2(z), d_3(z)), \quad (1.56)$$

respectivamente. Expresando a las Ecuaciones 1.55 y 1.56 en términos de vectores unitarios $((a_i, b_i, c_i), i = 1, 2)$ y de sus magnitudes respectivas $(\beta(z) \text{ y } d(z))$ se tiene

$$\beta(z) = \beta(z) (a_1, b_1, c_1) \quad (1.57)$$

y

$$\mathbf{d}(z) = d(z) (a_2, b_2, c_2). \quad (1.58)$$

En particular, el vector unitario birrefringente, $(a_1, b_1, c_1) = \mathbf{e}_\beta$, contiene toda la información acerca de los ángulos de orientación y elipticidad y $\beta(z)$ la información de la *magnitud local* de la birrefringencia del medio en el subespacio s de Stokes. $(a_2, b_2, c_2) = \mathbf{e}_d$ es el vector unitario asociado al vector dicroísmo $\mathbf{d}(z)$.

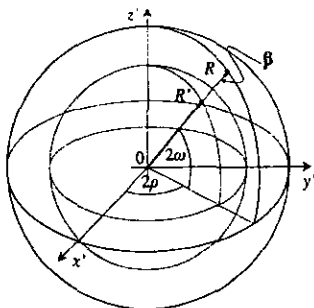


Figura 1.8. Movimiento del extremo R del vector birrefringencia, β , sobre la esfera de Poincaré de radio $\beta(z)$ y su proyección R' sobre una esfera de radio unitario.

Empleando la base generadora de Lorentz [15, 20, 21], y los vectores de birrefringencia y dicroísmo, las características locales del medio se expresan como

$$\beta(z) \cdot \hat{\mathbf{B}} = \beta_1(z) \mathbf{B}_1 + \beta_2(z) \mathbf{B}_2 + \beta_3(z) \mathbf{B}_3 \quad (1.59)$$

$$\mathbf{d}(z) \cdot \hat{\mathbf{D}} = d_1(z) \mathbf{D}_1 + d_2(z) \mathbf{D}_2 + d_3(z) \mathbf{D}_3 \quad (1.60)$$

en donde $\hat{\mathbf{B}}$ y $\hat{\mathbf{D}}$ son los conjuntos de las matrices generadoras de Lorentz de rotaciones y boosts, respectivamente [15, 20, 21]. Las Ecuaciones 1.59 y 1.60 no son más que las expresiones vectoriales de las matrices de *refracción* y *absorción anisotrópicas*, respectivamente. Es decir,

$$\mathbf{m}_{as}(z) = \beta(z) \cdot \hat{\mathbf{B}} = \beta(z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & b_1 \\ 0 & c_1 & 0 & -a_1 \\ 0 & -b_1 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

$$\mathbf{m}_s(z) = -d_0(z) \cdot \mathbf{I} + \mathbf{d}(z) \cdot \hat{\mathbf{D}} = -d_0(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - d(z) \begin{pmatrix} 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

Por tanto, la matriz local del medio $\mathbf{m}(z)$, Ecuación 1.54, se expresa como

$$\mathbf{m}(z) = -d_0(z) \cdot \mathbf{I} + \mathbf{d}(z) \cdot \hat{\mathbf{D}} + \beta(z) \cdot \hat{\mathbf{B}}. \quad (1.63)$$

De esta manera y bajo una transformación a la esfera de Poincaré, las propiedades de birrefringencia (y dicroísmo) del medio se proponen como un punto sobre una esfera de radio $\beta(z)$ (y/o $d(z)$). En la Figura 1.8, la esfera de radio $\beta(z)$, (en caso de medios birrefringentes) se sustituye por una esfera unitaria y el efecto del medio birrefringente es equivalente al localizado sobre la esfera unitaria. Así, el movimiento instantáneo de un punto R , que representa a una *forma de birrefringencia* sobre la esfera de Poincaré no unitaria, corresponde a otro punto R' localizado sobre la esfera unitaria, siendo R' la intersección de la línea OR con la esfera unitaria¹⁰ [18]. Por consiguiente, si 2ω , 2ρ y 2ϖ , 2ϑ son las coordenadas angulares para los vectores birrefringencia y dicroísmo, respectivamente, entonces los vectores unitarios $\mathbf{e}_\beta$ y $\mathbf{e}_d$ expresados en términos de éstas quedan como

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos[2\omega] \cos[2\rho], \\ b_1 &= \cos[2\omega] \sin[2\rho], \\ c_1 &= \sin[2\omega] \end{aligned} \quad (1.64)$$

y

$$\begin{aligned} a_2 &= \cos[2\varpi] \cos[2\vartheta], \\ b_2 &= \cos[2\varpi] \sin[2\vartheta], \\ c_2 &= \sin[2\varpi]. \end{aligned} \quad (1.65)$$

¹⁰ En medios con efectos de dicroísmo, el comportamiento de un punto D (extremo del vector dicroísmo $\mathbf{d}(z)$) sobre una esfera de radio $d(z)$, es equivalente al movimiento de D' , siendo éste la intersección de la recta OD con la esfera unitaria de Poincaré.

Con estas relaciones para las componentes de los vectores unitarios, la matriz local del medio general (con propiedades de birrefringencia y dicroísmo) queda como

$$\mathbf{m}(z) = \beta(z) \mathbf{m}_{\omega\rho} + d(z) \mathbf{m}_{\varpi\vartheta} - d_0(z) \mathbf{I}. \quad (1.66)$$

en donde $\mathbf{m}_{\omega\rho}$ y $\mathbf{m}_{\varpi\vartheta}$ son las matrices constantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin[2\omega] & \cos[2\omega] \sin[2\rho] \\ 0 & \sin[2\omega] & 0 & -\cos[2\omega] \cos[2\rho] \\ 0 & -\cos[2\omega] \sin[2\rho] & \cos[2\omega] \cos[2\rho] & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.67)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cos[2\varpi] \cos[2\vartheta] & \cos[2\varpi] \sin[2\vartheta] & \sin[2\varpi] \\ \cos[2\varpi] \cos[2\vartheta] & 0 & 0 & 0 \\ \cos[2\varpi] \sin[2\vartheta] & 0 & 0 & 0 \\ \sin[2\varpi] & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

respectivamente, e $\mathbf{I}$ es la matriz idéntica.

Dado el interés por desarrollar una metodología para medios birrefringentes, bastará con tomar a $\mathbf{m}(z) = \beta(z) \mathbf{m}_{\omega\rho}$.

Capítulo 2

Medios anisotrópicos no homogéneos

La interacción de la luz con diversos tipos de elementos ópticos es, sin lugar a duda, un problema de enorme interés dada la información que se puede obtener acerca del material con el cual la luz interactúa. La interacción, sin embargo, será tan complicada de describir como lo sea el medio¹¹.

En el presente Capítulo se introduce una herramienta matemática con base en el cálculo de Mueller, que permite *evaluar cuantitativamente las propiedades locales y globales* que caracterizan al medio óptico y que afectan al estado de polarización de un haz de luz que se propaga por él. El método matricial propuesto se basa primordialmente en el empleo de operadores y técnicas de teoría de grupos. Para ello se explota la analogía existente entre los elementos de la matriz de Mueller de dicroísmo y birrefringencia y los generadores de rotaciones y boosts, respectivamente, de las transformaciones de Lorentz definidas en la teoría de la relatividad especial. A continuación se desarrolla el método para el análisis de un medio no-homogéneo que integra las técnicas presentadas en el Capítulo 1. La solución para la matriz de Mueller asociada al medio no-homogéneo utiliza un problema de eigenvalores que permite calcular la matriz *global* de Mueller para tales medios. Esta nueva formulación refleja una gran claridad tanto matemática como física. Finalmente, se utiliza la esfera de Poincaré para interpretar geoméricamente las ideas desarrolladas en las siguientes Secciones.

¹¹ En el fenómeno de interacción luz-materia, considérese equivalente elemento material o medio óptico.

2.1 Cálculo de la matriz de Mueller M para un medio arbitrario

La Ecuación 1.39 describe la evolución del estado de polarización de un rayo de luz que se propaga a lo largo de una trayectoria dentro del material (para propósitos prácticos, dicha trayectoria es el eje z del sistema coordenado real del medio). En esta ecuación, las propiedades locales del medio se encuentran contenidas en la matriz $\mathbf{m}(z)$. Dada la relación existente entre el Cálculo de Mueller y el grupo de Lorentz, la Ecuación 1.39 se puede reescribir empleando los generadores de la transformación, $\hat{\mathbf{D}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$, del grupo de Lorentz [21] (Ecuación A.5, Apéndice A), de los vectores de birrefringencia y dicroísmo y del producto definido entre ellos (Ecuación A.8, Apéndice A). Esto es, de la Ecuación 1.63 para $\mathbf{m}(z)$, se tiene que

$$\frac{d\mathbf{S}(z)}{dz} = \left\{ -d_0(z)\mathbf{I} + \left(\mathbf{d}(z) \cdot \hat{\mathbf{D}} \right) + \left(\beta(z) \cdot \hat{\mathbf{B}} \right) \right\} \cdot \mathbf{S}(z) \quad (2.1a)$$

$$= \left\{ -d_0(z)\mathbf{I} + d(z) \left(\mathbf{e}_d(z) \cdot \hat{\mathbf{D}} \right) + \beta(z) \left(\mathbf{e}_\beta(z) \cdot \hat{\mathbf{B}} \right) \right\} \cdot \mathbf{S}(z), \quad (2.1b)$$

en donde $\mathbf{S}$ es el *cuadrivector* de Stokes y los vectores $\beta(z) = \beta(z)\mathbf{e}_\beta$ y $\mathbf{d}(z) = d(z)\mathbf{e}_d$ son *vectores tridimensionales*, como puede comprobarse en la última Sección del Capítulo anterior. Nótese que éstos son los vectores *locales* del medio. Empleando el método de operadores exponenciales ordenados [19], la Ecuación 2.1a se reduce a la Ecuación de Stokes-Mueller

$$\mathbf{S}(d_0, \mathbf{d}, \beta, z) = \mathbf{M}(d_0, \mathbf{d}, \beta, z) \cdot \mathbf{S}(0), \quad (2.2)$$

que no es más que la solución formal a la Ecuación 2.1a. En la Ecuación 2.2, $\mathbf{M}(d_0, \mathbf{d}, \beta, z)$ está dada por

$$\mathbf{M}(d_0, \mathbf{d}, \beta, z) = \overleftarrow{\mathbf{Z}} \exp \left\{ - \int_0^z dz' [d_0(z') \mathbf{I}] + \int_0^z dz' [\mathbf{d}(z') \cdot \hat{\mathbf{D}}] + \int_0^z dz' [\beta(z') \cdot \hat{\mathbf{B}}] \right\} \quad (2.3)$$

o equivalentemente

$$\mathbf{M}(d_0, \mathbf{d}, \beta, z) = \overleftarrow{\mathbf{Z}} \exp \left\{ \left[- \int_0^z dz' d_0(z') \right] \mathbf{I} + \left[\int_0^z dz' d(z') \right] (\mathbf{e}_d \cdot \hat{\mathbf{D}}) + \left[\int_0^z dz' \beta(z') \right] (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}}) \right\}, \quad (2.4)$$

en donde $\overleftarrow{\mathbf{Z}}$ es el operador exponencial ordenado [19]. La Ecuación 2.4 representa a la matriz de Mueller *global* del medio con propiedades ópticas de birrefringencia y dicroísmo. La definición del operador $\overleftarrow{\mathbf{Z}}$ en la Ecuación 2.4 implica una expansión en términos de una serie infinita en la que es necesario calcular las potencias del argumento. Para simplificar el cálculo de las potencias, considérese la relación

$$\mathbf{m} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{m}_D \cdot \mathbf{T}^{-1}, \quad (2.5)$$

en donde $\mathbf{T}$ es la matriz modal que transforma a $\mathbf{m}$ en una matriz diagonal, $\mathbf{m}_D$. Los elementos de esta última, son los eigenvalores de $\mathbf{m}$. Por lo tanto, la matriz modal o de transformación está compuesta por los vectores columna, o eigenvectores $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \mathbf{T}_4\}$ asociados a los eigenvalores respectivos, $\lambda_i (i = 1, \dots, 4)^{12}$. La ventaja de ésta representación para $\mathbf{m}$ es obvia cuando se requiere conocer su n -ésima potencia, pues está dada por

$$\mathbf{m}^n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{m}_D^n \cdot \mathbf{T}^{-1}. \quad (2.6)$$

¹² Obtener tal conjunto de eigenvectores (conjunto con cuatro elementos) con sus respectivos eigenvalores, significa resolver un conjunto de ecuaciones lineales algebraicas homogéneas (también de cuatro) equivalente a la ecuación de eigenvalores matricial $\mathbf{m} \cdot \mathbf{T}_i = \lambda_i \mathbf{T}_i$.

La sustitución de las ecuaciones 2.5 y 2.6 en la Ecuación 2.4 expresada en términos de $\mathbf{m}(z)$, implica

$$\mathbf{M}(d_0, \mathbf{d}, \beta, z) = \overleftarrow{Z} \exp \left\{ \int_0^z dz' \mathbf{m}(z') \right\} \quad (2.7a)$$

$$= \overleftarrow{Z} \exp \left\{ \int_0^z dz' \mathbf{T} \cdot \mathbf{m}_D(z') \cdot \mathbf{T}^{-1} \right\} \quad (2.7b)$$

$$= \overleftarrow{Z} \exp \left\{ \mathbf{T} \cdot \left[\int_0^z dz' \mathbf{m}_D(z') \right] \cdot \mathbf{T}^{-1} \right\}. \quad (2.7c)$$

El cambio de variable $\mathbf{m}'_D = \int_0^z dz' \mathbf{m}_D(z')$, permite expresar a $\mathbf{M}(d_0, \mathbf{d}, \beta, z)$ como

$$\mathbf{M}(d_0, \mathbf{d}, \beta, z) = \overleftarrow{Z} \exp \{ \mathbf{T} \cdot \mathbf{m}'_D \cdot \mathbf{T}^{-1} \} \quad (2.8a)$$

$$= \overleftarrow{Z} \left\{ \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{m}'_D \cdot \mathbf{T}^{-1})^n \right\} \quad (2.8b)$$

$$= \overleftarrow{Z} \left\{ \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{T} \cdot (\mathbf{m}'_D)^n \cdot \mathbf{T}^{-1} \right\} \quad (2.8c)$$

$$= \left\{ \mathbf{I} + \mathbf{T} \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \overleftarrow{Z} (\mathbf{m}'_D)^n \right] \cdot \mathbf{T}^{-1} \right\}, \quad (2.8d)$$

por lo tanto

$$\mathbf{M}(d_0, \mathbf{d}, \beta, z) = \left\{ \mathbf{I} + \mathbf{T} \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \overleftarrow{Z} \left(\int_0^z dz' \mathbf{m}_D(z') \right)^n \right] \cdot \mathbf{T}^{-1} \right\}, \quad (2.9)$$

misma que significa

$$\mathbf{I} + \mathbf{T} \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \dots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \mathbf{m}_D(z_1) \cdot \mathbf{m}_D(z_2) \cdot \mathbf{m}_D(z_3) \dots \mathbf{m}_D(z_n) \right) \right] \cdot \mathbf{T}^{-1}. \quad (2.10)$$

Para medios anisotrópicos *homogéneos*, la Ecuación 2.10 implica que las matrices diagonales, $\mathbf{m}_D(z)$, son *independientes* de z , por lo tanto, la matriz de Mueller queda

como

$$\mathbf{M}(d_0, \mathbf{d}, \beta, z) = \mathbf{I} + \mathbf{T} \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \dots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \mathbf{m}_D \cdot \mathbf{m}_D \cdot \mathbf{m}_D \dots \mathbf{m}_D \right) \right] \cdot \mathbf{T}^{-1}, \quad (2.11)$$

cuya forma simplificada es

$$\mathbf{M}(d_0, \mathbf{d}, \beta, z) = \mathbf{I} + \mathbf{T} \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \mathbf{m}_D^n \right] \cdot \mathbf{T}^{-1} \quad (2.12a)$$

$$= \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_D \cdot \mathbf{T}^{-1}, \quad (2.12b)$$

ecuación en la que $\mathbf{M}_D$ es la matriz de Mueller *global* diagonalizada de la forma

$$\mathbf{M}_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp[-i\delta_i] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp[i\delta_j] \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

y $\delta_{i,j} = \int dz \lambda_{i,j}$. La Ecuación 2.12b no es más que la expresión *vectorial* de la matriz de Mueller para medios homogéneos.

2.2 Matriz de Mueller para un medio birrefringente

2.2.1 Matriz diferencial de un medio birrefringente

En la última sección del Capítulo anterior, se plantea la matriz diferencial general para un medio *birrefringente* y *dicroico*, empleando para ello la base generadora del grupo de Lorentz y los vectores birrefringencia y dicroísmo¹³. De ello se deduce que un medio puramente birrefringente, o dicroico, se expresa con su vector asociado y su base generadora respectiva.

¹³ Estos vectores se encuentran en el subespacio, S_3 , del espacio de Stokes. Este último *no* es idéntico al espacio-tiempo cuatridimensional. Sin embargo, los dos están íntimamente relacionados [21].

Para medios puramente birrefringentes, el primer componente del vector asociado, β_1 , corresponde a una contribución de birrefringencia *lineal* sobre los ejes coordenadas xy^{14} ; el segundo, β_2 , a birrefringencia *lineal* a $\pm 45^\circ$ de los ejes coordenados y el tercero, β_3 , a birrefringencia *circular derecha o izquierda* [15]. Este vector, a su vez, es descrito por el vector unitario (a_1, b_1, c_1) , e indica la dirección del vector birrefringencia, mientras que el escalar $\beta(z)$ representa la magnitud de la birrefringencia local del medio.

Haciendo uso de los generadores del grupo de Lorentz para rotaciones [21]

$$\hat{\mathbf{B}} = \left\{ \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (2.14)$$

y del vector birrefringencia

$$\beta(z) = \beta(z) (a_1, b_1, c_1), \quad (2.15)$$

la matriz local refractiva es

$$\mathbf{m}(z) = \beta(z) \cdot \hat{\mathbf{B}}, \quad (2.16)$$

con el producto punto ya definido. En forma de matrices cuadradas, se tiene que

$$\mathbf{m}(z) = \beta(z) \left\{ a_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (2.17)$$

Sin pérdida de generalidad, los componentes del vector unitario (a_1, b_1, c_1) son $a = a_1, b = b_1$ y $c = c_1$. De la definición de las coordenadas esféricas $(\beta(z), 2\rho, 2\omega)$, en donde ρ y ω son los ángulos de orientación y elipticidad de la birrefringencia, respectivamente, de

¹⁴ El sistema coordenado del que se hace mención, corresponde al sistema *real* del medio.

(a, b, c), se tiene que

$$\mathbf{m}(z) = \beta(z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -b \\ 0 & -c & 0 & a \\ 0 & b & -a & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18a)$$

$$= \beta(z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin[2\omega] & -\cos[2\omega] \sin[2\rho] \\ 0 & -\sin[2\omega] & 0 & \cos[2\omega] \cos[2\rho] \\ 0 & \cos[2\omega] \sin[2\rho] & -\cos[2\omega] \cos[2\rho] & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18b)$$

$$= \beta(z) \mathbf{m}_{\omega\rho}. \quad (2.18c)$$

La Ecuación 2.18c significa que la información acerca de los ángulos de orientación y elipticidad se encuentra contenida en la matriz $\mathbf{m}_{\omega\rho}$.

Dado lo anterior, la ecuación para la propagación del estado de polarización es

$$\frac{d\mathbf{S}(z)}{dz} = (\beta(z) \cdot \hat{\mathbf{B}}) \cdot \mathbf{S}(z) \quad (2.19a)$$

$$= \beta(z) [\mathbf{m}_{\omega\rho} \cdot \mathbf{S}(z)] \quad (2.19b)$$

$$= \mathbf{m}_{\omega\rho} \cdot [\beta(z) \mathbf{S}(z)]. \quad (2.19c)$$

Esta ecuación es semejante a la obtenida por Brown y Bak [15] para medios birrefringentes, salvo que ahora la información acerca de los ángulos de orientación y elipticidad, arbitrarios pero fijos, está contenida en la matriz $\mathbf{m}_{\omega\rho}$. Por lo tanto, la matriz local birrefringente $\mathbf{m}(z)$, Ecuación 2.18c, facilita la solución de 2.10 (o 2.9) utilizando el método de ordenadores exponenciales y el problema de eigenvalores, como veremos en la siguiente Sección.

Cabe señalar que la descripción de la matriz local es un caso particular; en realidad, el caso general corresponde a aquél con una dependencia en z de ρ y ω , sujeta a la condición de que éstas estén descritas por funciones acotadas y bien definidas.

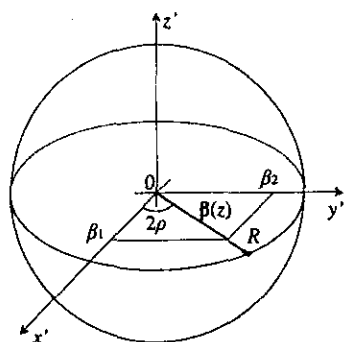


Figura 2.1. Representación de un medio birrefringente por un punto R en la esfera de Poincaré E . Se muestra a β como un vector asociado a la birrefringencia, anclado en el origen (centro de la esfera) de un sistema coordenado $x'y'z'$, siendo β_1 y β_2 sus coordenadas en el plano ecuatorial.

2.2.2 Birrefringencia lineal homogénea y no-homogénea

Son comúnmente conocidos los materiales que exhiben birrefringencia lineal sobre los ejes o sobre los bisectores del sistema coordenado real. Sabemos que éstos tienen una representación matricial no muy compleja y que se determinan con métodos simples, como ya se ha mencionado. Cuando se trata de medios con birrefringencia lineal cuya orientación es diferente a las anteriormente citadas, el cálculo de la matriz de Mueller asociada al medio es algebraicamente más complejo, mas gráficamente es obvia la descripción del medio sobre la esfera de Poincaré.

Sea R un punto cualquiera sobre el ecuador en la esfera de Poincaré E . Si tal punto representa la birrefringencia local (o global) del medio, es claro que su comportamiento será lineal. Tomando como origen de un sistema de coordenadas cartesiano, $x'y'z'$, al centro de la esfera, encontramos que un vector anclado en él y dirigido hacia el punto R ,

tiene como coordenadas a β_1 en el eje x' y a β_2 en el eje y' , es decir, $\beta(z) = (\beta_1, \beta_2, 0)$ (Figura 2.1); o en términos de su vector normalizado (unitario) $e_\beta = (a, b, 0)$ y de su magnitud $\beta(z)$, se tiene que $\beta(z) = \beta(z)e_\beta$. Como puede observarse en la Figura 2.2 a, la punta del vector unitario e_β se encuentra sobre el ecuador de la esfera de Poincaré E' ; por consiguiente

$$a^2 + b^2 = 1. \quad (2.20)$$

Esto implica que se puede representar a la birrefringencia lineal, con orientación arbitraria pero fija, como contribuciones de birrefringencia lineal sobre los ejes y sobre los bisectores del sistema coordenado real del medio. Es decir,

$$\beta(z) = (\beta_1, \beta_2, 0) \quad (2.21a)$$

$$= \beta(z) (a, b, 0) \quad (2.21b)$$

$$= \beta(z) e_\beta. \quad (2.21c)$$

Las coordenadas esféricas de R , $(\beta(z), 2\rho, 2\omega)$ (Figura 2.2 b), indican que el vector $\beta(z)$ tiene un azimuth de 2ρ , tal que $0 \leq 2\rho < 360^\circ$ y una latitud de 2ω nula, en donde ρ y ω son los ángulos de orientación y elipticidad de la birrefringencia en el sistema coordenado real del medio xyz (aquí $0 \leq \rho < 180^\circ$ y $0 \leq \omega < 90^\circ$)¹⁵. Por consiguiente $a = \cos(2\rho)$ y $b = \sin(2\rho)$. De la Ecuación 2.16, la matriz local del medio está dada por

$$m(z) = \beta(z) \cdot \hat{B} \quad (2.22a)$$

$$= \beta(z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & b & -a & 0 \end{pmatrix} \quad (2.22b)$$

¹⁵ La transformación del sistema real al espacio de Stokes significa que una rotación alrededor del eje e_x por un ángulo ϕ implica una rotación alrededor del eje e_3 por un ángulo de rotación de 2ϕ [21].

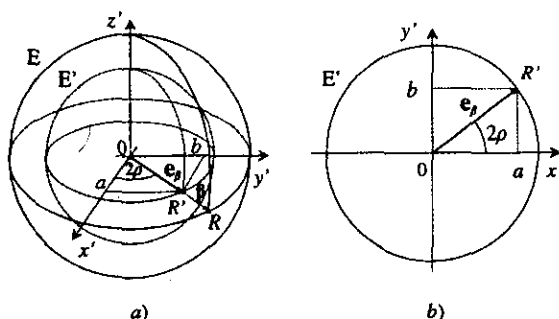


Figura 2.2. (a) Representación del vector birrefringencia β en la esfera de Poincaré, E, y su proyección R' en la esfera unitaria de Poincaré, E', especificada por su vector normalizado (unitario) e_β . (b) Coordenadas (a, b) del vector e_β , asociado al punto R' , localizadas en el plano ecuatorial de la esfera unitaria de Poincaré, E'.

$$= \beta(z) m_\rho. \quad (2.22c)$$

Nuevamente, la matriz $m(z)$ se expresa como la multiplicación del escalar $\beta(z)$ por la matriz m_ρ , en donde el subíndice ρ indica que la matriz sólo contiene información acerca de la orientación de la birrefringencia. En consecuencia, la ecuación de evolución para el estado de polarización de un rayo de luz que atraviesa un medio ópticamente anisotrópico no-homogéneo, $\frac{dS}{dz} = m(z) \cdot S(z)$, se convierte en

$$\frac{dS}{dz} = [\beta(z) \cdot \hat{B}] \cdot S(z) \quad (2.23a)$$

$$= [\beta(z) e_\beta \cdot \hat{B}] \cdot S(z) \quad (2.23b)$$

$$= [\beta(z) (a, b, 0) \cdot \{B_1, B_2, B_3\}] \cdot S(z). \quad (2.23c)$$

Recuérdese que la solución de la Ecuación 2.23a proporciona la matriz de Mueller global del medio, esto es

$$\mathbf{M}(0, 0, \beta, z) = \overleftarrow{\mathbf{Z}} \exp \left\{ \int_0^z dz' \mathbf{m}(z') \right\} \quad (2.24a)$$

$$= \overleftarrow{\mathbf{Z}} \exp \left\{ \int_0^z dz' \beta(z') \mathbf{m}_\rho \right\} \quad (2.24b)$$

$$= \overleftarrow{\mathbf{Z}} \exp \left\{ \int_0^z dz' \left[\beta(z') (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}}) \right] \right\}, \quad (2.24c)$$

en donde la expansión del operador exponencial se define como en la Ecuación A.1. Obsérvese como la matriz de Mueller sólo depende de la birrefringencia y de la posición: $\mathbf{M}(0, 0, \beta, z)$. A continuación, se muestra el cálculo de la matriz de Mueller para medios con birrefringencia lineal homogénea y no homogénea.

Caso I: Birrefringencia lineal homogénea.

En un medio con birrefringencia lineal homogénea, el vector birrefringencia asociado tiene magnitud constante β . Esta condición simplifica el cálculo de la Matriz de Mueller global del medio $\mathbf{M}(0, 0, \beta, z)$. Para determinarla basta con sustituir a $\beta(z) = \beta$ en la Ecuación 2.24b, por lo que $\mathbf{M}(0, 0, \beta, z)$ queda como

$$\mathbf{M}(0, 0, \beta, z) = \exp(\beta z \mathbf{m}_\rho), \quad (2.25a)$$

$$= \exp \left\{ \beta z [\mathbf{T} \cdot (\mathbf{m}_\rho)_D \cdot \mathbf{T}^{-1}] \right\}, \quad (2.25b)$$

$$= \mathbf{T} \cdot \exp \left[\beta z (\mathbf{m}_\rho)_D \right] \cdot \mathbf{T}^{-1}, \quad (2.25c)$$

$$= \mathbf{T} \cdot \exp \left[\beta z (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D \right] \cdot \mathbf{T}^{-1}; \quad (2.25d)$$

en donde $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^{-1}$ y $(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D$, respectivamente, están dadas por

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -ib & ib \\ 0 & b & ia & -ia \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}ib & -\frac{1}{2}ia & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2}ib & \frac{1}{2}ia & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

$$(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Expandiendo la exponencial se tiene

$$\mathbf{M}(0, 0, \beta, z) = \mathbf{T} \cdot \left\{ \mathbf{I} + \left[\beta z (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D \right] + \frac{1}{2!} \left[\beta z (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D \right]^2 + \frac{1}{3!} \left[\beta z (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D \right]^3 + \dots \right\} \cdot \mathbf{T}^{-1}. \quad (2.27)$$

Al calcular las potencias de $(\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})$ se obtienen las siguientes relaciones

$$(\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})^{2(n+1)} = (-1)^n \beta^{2n} (\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})^2, \quad (2.28a)$$

$$(\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})^{2n+1} = (-1)^n \beta^{2n} (\beta \cdot \hat{\mathbf{B}}). \quad (2.28b)$$

En particular estas relaciones son válidas tanto para $(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})$ como para $(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D$, es decir,

$$(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})^{2(n+1)} = (-1)^n (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})^2, \quad (2.29)$$

$$(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})^{2n+1} = (-1)^n (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})$$

y

$$(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D^{2(n+1)} = (-1)^n (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D^2, \quad (2.30)$$

$$(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D^{2n+1} = (-1)^n (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D.$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.30 en la Ecuación 2.27, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(0, 0, \beta, z) = \mathbf{T} \cdot \left\{ \mathbf{I} + \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D \left[\beta z - \frac{1}{3!}(\beta z)^3 + \frac{1}{5!}(\beta z)^5 - \dots \right] + \right. \\ \left. + \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D^2 \left[-1 + \frac{1}{2!}(\beta z)^2 - \frac{1}{4!}(\beta z)^4 + \dots \right] + \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D^2 \right\} \cdot \mathbf{T}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Nótese que las expansiones indicadas entre paréntesis cuadrados corresponden a las funciones seno y coseno de βz , respectivamente. Así, simplificando la matriz global del medio se tiene que

$$\mathbf{M}(0, 0, \beta, z) = \mathbf{T} \cdot \left\{ \mathbf{I} + \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D^2 + \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D \sin[\beta z] - \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D^2 \cos[\beta z] \right\} \cdot \mathbf{T}^{-1}, \quad (2.32)$$

donde β es la anisotropía diferencial (retardancia) del medio y z la trayectoria recorrida dentro del material. Obsérvese que la retardancia global del medio δ está dada por βz . En forma de matriz, la Ecuación 2.32 queda como

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \cos(\beta z) & 2ab \sin^2(\frac{\beta z}{2}) & -b \sin(\beta z) \\ 0 & 2ab \sin^2(\frac{\beta z}{2}) & b^2 + a^2 \cos(\beta z) & a \sin(\beta z) \\ 0 & b \sin(\beta z) & -a \sin(\beta z) & \cos(\beta z) \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

matriz en la que se expresa la orientación de la birrefringencia del medio ρ , a través de $a = \cos[2\rho]$ y $b = \sin[2\rho]$, y la retardancia global del medio δ , la cual es igual al producto βz . De la Tabla 1 del Capítulo anterior, la matriz obtenida corresponde a la de un retardador lineal con orientación y retardancia ρ y δ , respectivamente.

Caso II: Birrefringencia lineal no homogénea.

Para el caso en el que la birrefringencia del medio es función de la posición, la Ecuación 2.24b proporciona una solución en la que el vector birrefringencia es dependiente de z , es decir, $\beta(z) = \beta(z)\mathbf{e}_\beta$, en donde $\beta(z)$ es la magnitud local de la anisotropía

o retardancia del medio; por consiguiente, de la Ecuación 2.24b, se tiene que

$$\mathbf{M}(0, 0, \beta, z) = \overleftarrow{Z} \exp \left\{ \left[\int_0^z dz' \beta(z') \right] (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}}) \right\} \quad (2.34a)$$

$$= \overleftarrow{Z} \exp \left\{ \left[\int_0^z dz' \beta(z') \right] \mathbf{T} \cdot (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D \cdot \mathbf{T}^{-1} \right\} \quad (2.34b)$$

$$= \mathbf{T} \cdot \left\{ \overleftarrow{Z} \exp \left[\left(\int_0^z dz' \beta(z') \right) (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D \right] \right\} \cdot \mathbf{T}^{-1}, \quad (2.34c)$$

en donde $(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D$, $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}^{-1}$ están definidas como en el caso homogéneo (Ecuaciones 2.26). Utilizando la Ecuación 2.10 y factorizando $(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D$, la ecuación anterior se reduce

a

$$\mathbf{M}(0, 0, \beta, z) = \mathbf{T} \cdot \left[\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D^n \left(\int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \int_0^{z_2} dz_3 \dots \right. \right. \quad (2.35a)$$

$$\left. \dots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \beta(z_1) \beta(z_2) \beta(z_3) \dots \beta(z_n) \right] \cdot \mathbf{T}^{-1} \\ = \mathbf{T} \cdot \left[\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overleftarrow{Z}}{n!} \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D^n \left(\int_0^z dz' \beta(z') \right)^n \right] \cdot \mathbf{T}^{-1}. \quad (2.35b)$$

Haciendo el cambio de variable para la retardancia del medio de $\delta = \int_0^z dz' \beta(z')$, se tiene que

$$\mathbf{M}(0, 0, \beta, z) = \mathbf{T} \cdot \left[\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D^n \overleftarrow{Z} (\delta^n) \right] \cdot \mathbf{T}^{-1}. \quad (2.36)$$

De la definición del operador exponencial y de las ecuaciones 2.30, se obtiene

$$\mathbf{M}(0, 0, \beta, z) = \mathbf{T} \cdot \left\{ \mathbf{I} + \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D \left[\delta - \frac{1}{3!} \delta^3 + \frac{1}{5!} \delta^5 - \dots \right] + \right. \\ \left. \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D^2 \left[-1 + \frac{1}{2!} \delta^2 - \frac{1}{4!} \delta^4 + \dots \right] + \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D^2 \right\} \cdot \mathbf{T}^{-1}; \quad (2.37)$$

nuevamente observamos que las expansiones entre paréntesis cuadrados corresponden a las funciones seno y coseno de δ ; por tanto, la ecuación anterior puede reescribirse de la siguiente manera

$$\mathbf{M}(0, 0, \beta, z) = \mathbf{I} + \mathbf{T} \cdot \left\{ \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D^2 + \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D \sin(\delta) + \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D^2 \cos(\delta) \right\} \cdot \mathbf{T}^{-1}. \quad (2.38)$$

Sustituyendo el valor de la retardancia global δ , la matriz de Mueller global para birrefringencia lineal no homogénea en forma vectorial es

$$\mathbf{M}(0, 0, \beta, z) = \mathbf{I} + \mathbf{T} \cdot \left\{ \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D^2 + \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D \sin \left[\int_0^z dz' \beta(z') \right] + \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D^2 \cos \left[\int_0^z dz' \beta(z') \right] \right\} \cdot \mathbf{T}^{-1}, \quad (2.39)$$

cuya forma matricial está dada por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \cos \left(\int_0^z dz' \beta(z') \right) & 2ab \sin^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^z dz' \beta(z') \right) & -b \sin \left(\int_0^z dz' \beta(z') \right) \\ 0 & 2ab \sin^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^z dz' \beta(z') \right) & b^2 + a^2 \cos \left(\int_0^z dz' \beta(z') \right) & a \sin \left(\int_0^z dz' \beta(z') \right) \\ 0 & b \sin \left(\int_0^z dz' \beta(z') \right) & -a \sin \left(\int_0^z dz' \beta(z') \right) & \cos \left(\int_0^z dz' \beta(z') \right) \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

que al igual que en el caso homogéneo, la orientación del medio ρ está dado por a y b y la retardancia global del medio δ por $\int_0^z dz' \beta(z')$. Sin embargo, ésta expresión es ahora válida cuando las propiedades de la birrefringencia lineal tienen fluctuaciones estocásticas alrededor de un valor promedio dado por ρ y δ .

2.2.3 Birrefringencia elíptica homogénea y no-homogénea

Sin lugar a dudas, un retardador elíptico es la representación más general de un retardador. Su descripción vectorial queda completamente establecida con sus tres componentes distintos de cero, o lo que es lo mismo, por la contribución de los tres tipos de birrefringencia conocidos: birrefringencia lineal sobre los ejes del sistema coordenado real, sobre sus bisectores y la birrefringencia circular.

Siguiendo el mismo esquema que en el caso de birrefringencia lineal, sea R un punto cualquiera sobre la esfera de Poincaré, E' , la representación de un medio birrefringente. Su vector asociado, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^{16}$, expresa tanto la magnitud, $\beta = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}$, como

¹⁶ β_1, β_2 y β_3 son las magnitudes de los vectores β_1, β_2 y β_3 , respectivamente.

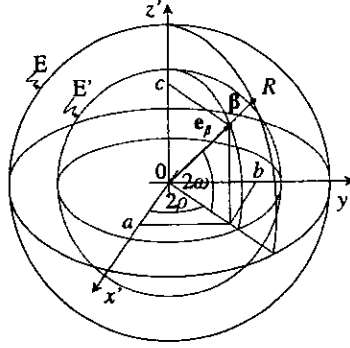


Figura 2.4. Representación del retardador R en la esfera unitaria de Poincaré E' por medio del vector unitario $\mathbf{e}_\beta$, con coordenadas cartesianas (a, b, c) y polares $(1, 2\rho, 2\omega)$.

$$= \beta(z) \mathbf{e}_\beta, \quad (2.42c)$$

y una transformación de las coordenadas cartesianas, a, b y c , a esféricas (con radio unitario) implica

$$(a, b, c) = (\cos[2\omega] \cos[2\rho], \cos[2\omega] \sin[2\rho], \sin[2\omega]), \quad (2.43)$$

donde ρ y ω son los ángulos de orientación y elipticidad del medio, respectivamente. Por

lo tanto, la expresión para la matriz local del medio

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(z) &= \beta(z) \cdot \hat{\mathbf{B}} \\ &= \beta(z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -b \\ 0 & -c & 0 & a \\ 0 & b & -a & 0 \end{pmatrix} \\ &= \beta(z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin[2\omega] & -\cos[2\omega] \sin[2\rho] \\ 0 & -\sin[2\omega] & 0 & \cos[2\omega] \cos[2\rho] \\ 0 & \cos[2\omega] \sin[2\rho] & -\cos[2\omega] \cos[2\rho] & 0 \end{pmatrix} \\ &= \beta(z) \mathbf{m}_{\rho\omega}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

siendo $\beta(z) \cdot \hat{\mathbf{B}}$ el producto punto del vector birrefringencia con la base generadora del GL para rotaciones. Nótese que $\mathbf{m}(z)$ es la multiplicación del escalar $\beta(z)$ por la matriz $\mathbf{m}_{\rho\omega}$ (el subíndice $\rho\omega$ indica que la matriz contiene información acerca de los ángulos de orientación y elipticidad de la birrefringencia). De la ecuación de evolución para el estado de polarización se tiene

$$\frac{d\mathbf{S}}{dz} = \left[\beta(z) \mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right] \cdot \mathbf{S}(z) \quad (2.45a)$$

$$= [\beta(z) (a, b, c) \cdot \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3\}] \cdot \mathbf{S}(z) \quad (2.45b)$$

$$= \mathbf{m}(z) \cdot \mathbf{S}(z), \quad (2.45c)$$

cuya solución para $\mathbf{m}(z)$ esta dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(0, 0, \beta, z) &= \overleftarrow{\mathbf{Z}} \exp \left\{ \int_0^z dz' \mathbf{m}(z') \right\} \\ &= \overleftarrow{\mathbf{Z}} \exp \left\{ \int_0^z dz' [\beta(z') \mathbf{m}_{\rho\omega}] \right\} \\ &= \overleftarrow{\mathbf{Z}} \exp \left\{ \int_0^z dz' \left[\beta(z') \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

A continuación se resolverán los casos respectivos en los que la birrefringencia elíptica del medio es homogénea y no-homogénea.

Caso III. Birrefringencia elíptica homogénea.

Para el caso de un medio con birrefringencia arbitraria, pero uniforme, las integrales en la Ecuación 2.46 son simples de resolver. La expresión resultante para la matriz de Mueller, después de expandir y sumar adecuadamente como se hizo en el caso para medios con birrefringencia lineal, es

$$\mathbf{M}(0, 0, \beta, z) = \mathbf{T} \cdot \exp \left[\beta z \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D \right] \cdot \mathbf{T}^{-1}, \quad (2.47)$$

con la diferencia de que la matriz modal T y T^{-1} son diferentes. Sin embargo, la matriz diagonalizada, $(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D$ resulta ser la misma, es decir

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -c - iab & -c + iab \\ 0 & b & i(a^2 + c^2) & -i(a^2 + c^2) \\ 0 & c & a - ibc & a + ibc \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ac & bc & c^2 \\ 0 & -\frac{1}{2}(ac - ib) & -\frac{1}{2}(bc + ia) & \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \\ 0 & -\frac{1}{2}(ac + ib) & -\frac{1}{2}(bc - ia) & \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix},$$

Expandiendo la exponencial como en el caso anterior y utilizando la Ecuación 2.30, la matriz global del medio queda como

$$M(0, 0, \beta, z) = T \cdot \left\{ I + (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D^2 + (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D \sin[\beta z] - (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D^2 \cos[\beta z] \right\} \cdot T^{-1}, \quad (2.49)$$

ecuación semejante a la de birrefringencia lineal, salvo que *difieren en la estructura de las matrices modales*, como puede verse de las Ecuaciones 2.26 y 2.48.

Caso IV. Birrefringencia elíptica no homogénea.

La Ecuación 2.46, implica ahora que $\beta(z) = \beta(z) \mathbf{e}_\beta$, en donde $\beta(z)$ es la magnitud de la birrefringencia *local* del medio, por lo tanto, la solución en términos del operador exponencial ordenado, está dada por

$$M(d_0, 0, \beta, z) = T \cdot \left\{ \overline{Z} \exp \left[\left(\int_0^z dz' \beta(z') \right) (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D \right] \right\} \cdot T^{-1}, \quad (2.50)$$

en donde $(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D$, $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}^{-1}$ se definen como en el caso elíptico homogéneo (Ecuación 2.48). Siguiendo la misma metodología desarrollada para el caso de birrefringencia lineal no homogénea, la ecuación anterior se reduce a

$$\mathbf{M}(0, 0, \beta, z) = \mathbf{T} \cdot \left[\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D^n \left(\int_0^z dz' \beta(z') \right)^n \right] \cdot \mathbf{T}^{-1}. \quad (2.51)$$

Expandiendo la serie y utilizando nuevamente las relaciones 2.30, la Ecuación 2.51 queda como

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \mathbf{T} \cdot \{ (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D^2 + (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D \sin \left[\int_0^z dz' \beta(z') \right] + (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D^2 \cos \left[\int_0^z dz' \beta(z') \right] \} \cdot \mathbf{T}^{-1}. \quad (2.52)$$

Los resultados para ambos medios, homogéneo y no homogéneo (ecuaciones 2.49 y 2.52), son expresados en forma de matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + (b^2 + c^2) \cos(\delta) & 2ab \sin^2(\frac{\delta}{2}) + c \sin(\delta) & 2ac \sin^2(\frac{\delta}{2}) - b \sin(\delta) \\ 0 & 2ab \sin^2(\frac{\delta}{2}) - c \sin(\delta) & b^2 + (a^2 + c^2) \cos(\delta) & 2bc \sin^2(\frac{\delta}{2}) + a \sin(\delta) \\ 0 & 2ac \sin^2(\frac{\delta}{2}) + b \sin(\delta) & 2bc \sin^2(\frac{\delta}{2}) - a \sin(\delta) & c^2 + (a^2 + b^2) \cos(\delta) \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

en donde δ (la retardancia global del medio) es igual a βz cuando el medio es homogéneo y a $\int_0^z dz' \beta(z')$ cuando el medio es no homogéneo; a , b y c están dados de modo equivalente a la Ecuación 2.43. Obsérvese que cuando el medio carece de birrefringencia circular ($c = 0$), la ecuación anterior se reduce al caso de la matriz de Mueller de un medio con birrefringencia lineal.

En los casos analizados de birrefringencia lineal o elíptica (homogénea y no homogénea), la solución para la Matriz de Mueller es una expresión vectorial particularmente bien estructurada, es decir

$$\mathbf{M}(0, 0, \beta, z) = \mathbf{T} \cdot \left\{ \mathbf{I} + (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D^2 + (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D \sin [\beta z] - (\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D^2 \cos [\beta z] \right\} \cdot \mathbf{T}^{-1} \quad (2.54)$$

y

$$M(0, 0, \beta, z) = I + T \cdot \left\{ \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D^2 + \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D \sin \left[\int_0^z dz' \beta(z') \right] + \left(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}} \right)_D^2 \cos \left[\int_0^z dz' \beta(z') \right] \right\} \cdot T^{-1}, \quad (2.55)$$

respectivamente, en donde la diferencia radica en las matrices modales, T , que para ambos casos, ya sean homogéneos o no homogéneos, están dadas por

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -ib & ib \\ 0 & b & ia & -ia \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

y

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -c - iab & -c + iab \\ 0 & b & i(a^2 + c^2) & -i(a^2 + c^2) \\ 0 & c & a - ibc & a + ibc \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

respectivamente. Recuérdese que estas matrices contienen toda la información física acerca de los ángulos de orientación y elipticidad de la birrefringencia del medio, en tanto que la retardancia δ está dada por el argumento de las funciones seno o coseno en las Ecuaciones 2.54 y 2.55, siendo δ igual a βz o $\int_0^z dz' \beta(z')$ según sea el caso. Por consiguiente, sólo basta con saber la matriz modal asociada al medio de interés y conocer la forma funcional de $\beta(z)$, para poder evaluar la matriz de Mueller global.

Una consecuencia importante de las Ecuaciones 2.54 y 2.55, es que las matrices modales definen tres direcciones propias (aunque en realidad sean cuatro, pero una de ellas, $T_1 = (1, 0, 0, 0)$, no resulta relevante en la interpretación física). Se sabe de la ecuación de eigenvalores matricial

$$\mathbf{m} \cdot T_i = \lambda_i T_i, \quad (2.58)$$

que la aplicación de $\mathbf{m}$ sobre cualquiera de los vectores propios, no alterará su dirección, si acaso el único cambio que experimente sea en su magnitud (proporcionado por λ_i).

Esto quiere decir que un rayo de luz polarizado, cuyo vector de Stokes, S , tenga la misma dirección que alguno de los vectores propios de la matriz del medio, m , no experimentará cambio en el estado de polarización [22]. Estas observaciones resultan de gran relevancia puesto que se sabe que la dirección de los eigenvectores está relacionada con las direcciones del eje rápido y el eje lento (índices de refracción menor y mayor, respectivamente) [3] que caracterizan al medio anisotrópico, en donde ambos eigenvectores tienen la misma elipticidad, pero sentidos opuestos¹⁷ [3, 13].

Nótese que en todas las matrices modales de los medios analizados, Ecuaciones 2.56 y 2.57, uno de los vectores propios (T_2 en ambas), tiene como componentes a las coordenadas cartesianas del vector unitario del medio dado por $(a, b, 0)$ o (a, b, c) , según el caso¹⁸. Esto significa que el vector T_2 es una *dirección de eigenpolarización* particular.

De la estructura de los eigenvectores T_3 y T_4 , ya sea para medios homogéneos o no homogéneos, se observa que *uno es el conjugado del otro*. Cuando las soluciones de una ecuación diferencial son complejas, se puede proporcionar dos soluciones dadas por la parte real y la parte imaginaria de la solución compleja [23]. Esto quiere decir que, en el caso de los eigenvectores T_3 y T_4 , la solución se expresa como la Ecuación A.13a del Apéndice A

$$T' = \exp[i\beta(z)] T_4, \quad (2.59)$$

¹⁷ La retardancia δ del retardador se refiere solamente a la retardancia relativa impartida entre los eigenvectores mayor y menor del mismo, no a la retardancia relativa entre alguna otra forma de polarización [3].

¹⁸ Geométricamente podemos observar que si el trivector de Stokes, para un rayo de luz polarizado, tiene una dirección idéntica a aquella que caracteriza a un retardador, no cambiará de posición sobre la esfera de Poincaré ya que no se le podrá rotar alrededor del punto que describa al retardador, por lo tanto, el efecto sobre el estado de polarización es nulo.

en donde $T_4 = T_r + i T_i = T_3^{19}$. Entonces

$$T' = \exp[i\beta(z)] (T_r + i T_i) \quad (2.60)$$

$$= (T_r \cos[\delta] - T_i \sin[\delta]) + i(T_r \sin[\delta] + T_i \cos[\delta]) \quad (2.61)$$

por lo tanto, de las Ecuaciones A.14 y A.15, del Apéndice A, las soluciones están dadas por

$$T'_3 = T_r \cos[\delta] - T_i \sin[\delta] \quad (2.62)$$

y

$$T'_4 = t_r \sin[\delta] + t_i \cos[\delta] \quad (2.63)$$

en donde T_r y T_i son vectores cuatrimensionales.

Para medios con birrefringencia lineal homogénea y no-homogénea, los cuatrivectores T_r y T_i están dados por

$$T_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

$$T_i = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Para medios con birrefringencia elíptica homogénea y no-homogénea T_r y T_i están dados por

$$T_r = \begin{pmatrix} 0 \\ -c/a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

$$T_i = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -(a^2 + c^2)/a \\ (bc)/a \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

¹⁹ * es el símbolo de complejo conjugado

Nótese que cuando $c \rightarrow 0$ se obtiene el caso de birrefringencia lineal (Ecuaciones 2.64 y 2.65). La retardancia del medio δ es igual a βz o $\int_0^z dz' \beta(z')$ si el medio es homogéneo o no-homogéneo, respectivamente.

Lo anterior permite concluir que los eigenvectores $\mathbf{T}'_3$ y $\mathbf{T}'_4$, con eigenvalores respectivos $\pm i$ o $\pm i \delta$ si la matriz de la ecuación de eigenvalores es $\beta(z) \mathbf{m}_{\rho\omega}$ (según la forma estructural de la matriz $(\mathbf{e}_\beta \cdot \hat{\mathbf{B}})_D$), están relacionados con los ejes rápido y lento, por lo que la anisotropía del medio estará totalmente descrita ya que se conocen las direcciones de los índices de refracción n_2 y n_3 . Además, $\mathbf{T}'_3$ y $\mathbf{T}'_4$ resultan ser *direcciones de eigenpolarizaciones* del medio.

Capítulo 3

Anisotropía óptica no homogénea en líquidos poliméricos

Con las herramientas desarrolladas en el Capítulo 2, ahora se propone el análisis de un experimento para la caracterización de la anisotropía óptica inducida en un líquido polimérico. Este análisis es conceptual, resultado de la falta de información experimental, así como de la gran complejidad algebraica para el problema planteado. Sin embargo, éste análisis permite proponer un escenario físico que explica lo que hasta ahora se consideraba como anomalías experimentales.

3.1 Líquidos anisotrópicos no-homogéneos

Una forma de estudiar la dinámica no lineal de sistemas poliméricos es a través de experimentos de relajación cuando a éstos se les aplican deformaciones finitas. Por esta premisa se debe entender un sistema polimérico como aquél constituido por moléculas de gran peso molecular, cuya unidad (monómero) se repite muchísimas veces conformando una cadena de gran flexibilidad, resultado del enorme número de grados de libertad. Esta configuración conlleva una dinámica muy rica que se caracteriza por un amplio espectro de tiempos característicos. Por *dinámica no-lineal* debemos entender los mecanismos de relajamiento que se observan cuando el sistema se perturba de manera notable como resultado, por ejemplo, de una deformación finita. La *dinámica lineal* se tiene cuando las deformaciones son esencialmente infinitesimales y el espectro de tiempos de relajación

da énfasis a tiempos lentos. En el mundo de las aplicaciones rara vez se aplican deformaciones pequeñas y resulta entonces crítico estudiar y conocer la dinámica no-lineal del sistema polimérico.

En el laboratorio, deformaciones finitas pueden lograrse mediante *flujos “fuertes” no homogéneos*, considerando como flujos fuertes a aquéllos que son fundamentalmente elongacionales, aunque pueden presentar cierto grado de vorticidad. Este tipo de flujos puede generarse en una celda de flujos de dos rodillos, en la cual, la rotación de éstos genera flujos bidimensionales en un líquido polimérico.

Los cambios conformacionales en la sustancia polimérica se observan porque conllevan anisotropías ópticas que experimentalmente es posible medir. Esto es debido a que la anisotropía está directamente relacionada con la orientación promedio de los segmentos de la cadena polimérica que gira y se orienta debido a la acción del flujo.

En este Capítulo se analiza la anisotropía óptica de un fluido polimérico que se ha inducido mediante las deformaciones producidas por un flujo fuerte. Este problema es un buen ejemplo para evaluar la capacidad analítica y predictiva de las herramientas desarrolladas en el Capítulo 2, pues la anisotropía inducida en el fluido polimérico es además no-homogénea. Es decir, las deformaciones que inducen la anisotropía no son las mismas para toda la trayectoria del haz polarizado y entonces cada punto a lo largo del camino óptico presenta diferentes tipos y valores de la polarización.

A la fecha se ha ignorado esta condición de heterogeneidad y en cambio se supone, a priori, que las anisotropías observadas son esencialmente homogéneas. En el análisis que hace Geffroy [24] para la anisotropía inducida en un sistema de dos rodillos considera un

medio con birrefringencia puramente lineal y de orientación promedio, que resulta adecuado para flujos en los que la velocidad de los rodillos es relativamente lenta. La Técnica de Birrefringencia Bicolor Inducida por Flujos, BBIF (del inglés *Two-Color Flow Birefringence*), permite evaluar precisamente, la anisotropía óptica y su orientación respecto de los ejes principales del campo del flujo. Sin embargo, cuando la velocidad de los rodillos se incrementa, las deformaciones generadas establecen una heterogeneidad que se puede caracterizar, pues es resultado de la hidrodinámica del problema. Como resultado de los cálculos planteados, se puede demostrar que las pérdidas de la intensidad luminosa observadas a altas velocidades del flujo pueden explicarse con base en un medio anisotrópico no-homogéneo, como el modelo que se discute en este Capítulo.

Hernández [10], propone una dependencia para la retardancia con la posición y una orientación promedio para la anisotropía inducida, los cuales le permiten evaluar correcciones por los efectos de frontera debido a las paredes de la celda de flujos. Sin embargo, sus resultados presentan aún limitaciones cuando se requiere definir con precisión la orientación de la anisotropía. Esto hace suponer la presencia de contribuciones de birrefringencia no sólo lineal sino también de birrefringencia circular en la zonas de transición, como efectos de frontera aunados a la consideración de la dependencia local de la retardancia. El hecho de que se supongan contribuciones de birrefringencia circular en líquidos poliméricos es relevante, ya que no se ha publicado la existencia de tales efectos en fluidos poliméricos y sin embargo pueden ser consecuencia natural de un flujo con contribuciones de frontera. Lo antes mencionado podría explicar la pérdida del 3% en la intensidad del haz emergente reportado por Geffroy [24], ya que el arreglo óptico empleado en el experi-

mento sólo se configuró para detectar contribuciones de birrefringencia lineal. Por lo tanto, es de sumo interés establecer las ecuaciones para la birrefringencia y la orientación en un sistema en el que se consideren los efectos de borde más realistas y completos y comparar los resultados con aquéllos en los que los efectos de frontera no involucran birrefringencia circular.

3.2 Anisotropía óptica inducida por flujos

En general, en todo material isotrópico es posible inducir anisotropías cuando se aplica un campo externo que genera asimetrías estructurales. Tal es el caso de la aplicación de un campo eléctrico a un material dieléctrico o la aplicación de esfuerzos mecánicos a un sólido. De manera equivalente, una solución polimérica se vuelve anisotrópica cuando está sujeta a condiciones de flujo, ya que existe un campo de esfuerzos en cada punto del fluido.

En los líquidos poliméricos, las anisotropías ópticas inducidas son resultado de un valor para la polarizabilidad molecular a lo largo de la estructura principal de la cadena ligeramente diferente del valor observado en la dirección perpendicular a la estructura principal. Es por ello que la anisotropía óptica inducida por flujos se define como un índice de refracción de forma tensorial con elementos complejos, cuyos valores principales son diferentes. La parte real del tensor está asociada a la velocidad de propagación de la onda electromagnética en el medio y la parte imaginaria a las medidas de la atenuación de la onda, por absorción o dispersión²⁰. En particular, las soluciones poliméricas tienden a

²⁰ Cuando los valores principales de la parte real del tensor son diferentes entre sí, se dice que el medio es birrefringente. Si lo mismo ocurre para los valores principales de la parte imaginaria, el medio resulta ser dicroico.

ser altamente birrefringentes (la parte real del tensor de refracción) y poco dicroicas (parte imaginaria) para ondas electromagnéticas en la región del visible.

Cuando el polímero se somete a una deformación, las contribuciones a la anisotropía de los distintos elementos de la cadena polimérica (monómeros) producen una anisotropía promedio distinta de cero, ya que la conformación posee una orientación promedio de los monómeros; el estado isotrópico corresponde a un sistema en reposo que no está sometido a ninguna deformación. Por lo tanto, medidas simultáneas de la birrefringencia y de su orientación proporcionan información acerca del grado y orientación microestructural inducido, respecto del sistema de referencia óptico.

3.3 Birrefringencia bicolor inducida por flujos

Existen un gran número de técnicas ópticas que se usan en la evaluación de la anisotropía óptica de una muestra. En particular, cuando se emplea luz polarizada se habla de técnicas dentro del campo de la *elipsometría* o *polarimetría*. Cuando la anisotropía óptica se genera por un campo de flujos, entonces la técnica empleada se conoce como *birrefringencia de flujos*. Con ésta se determina tanto el grado de la anisotropía óptica como la orientación de los ejes principales del tensor del índice de refracción respecto a los ejes principales del campo de flujo. La técnica de birrefringencia bicolor inducida por flujos (BBIF), evalúa instantáneamente la birrefringencia y la correspondiente orientación tomando dos medidas simultáneas, empleando para ello dos rayos de luz de diferente color. Esta técnica es esencialmente equivalente a dos elipsómetros de nulos acoplados.

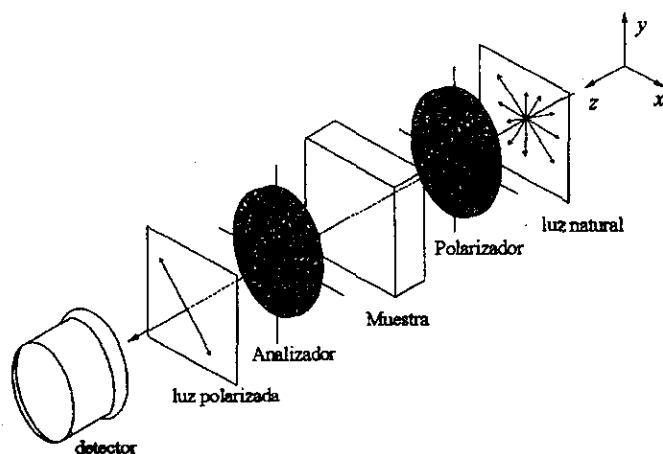


Figura 3.1. Arreglo óptico correspondiente a un Elipsómetro de Nulos. En él se identifican un polarizador, la muestra, un analizador y un detector. El polarizador se encuentra rotado un ángulo θ respecto de un sistema de referencia. El analizador se encuentra rotado $\frac{\pi}{2}$ respecto del polarizador.

Cada elipsómetro de nulos consiste de un polarizador lineal, la muestra, un analizador (polarizador colocado a un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ con respecto al polarizador de entrada) y un detector de luz (Figura 3.1).

Cuando la anisotropía en la muestra es cero, entonces la intensidad de la luz polarizada que alcanza el detector es cero, puesto que el polarizador y el analizador están cruzados. En caso contrario, la muestra anisotrópica altera al estado de polarización del haz por lo que *sólo se logra una extinción parcial de la luz polarizada* cuando pasa por el analizador, lo cual proporciona información acerca de la anisotropía de la muestra.

Un punto de interés en éste trabajo, es precisamente el análisis de un líquido polimérico sujeto a deformaciones inducidas en una celda de flujos de dos rodillos, con ejes pa-

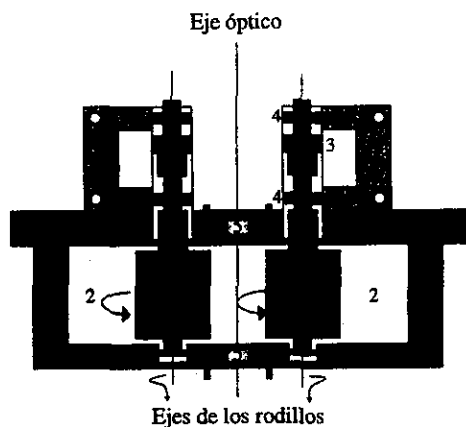


Figura 3.2. Dispositivo experimental de la celda de flujos. Los rodillos (1) se localizan en el interior de la cavidad de la celda (2), en donde se encuentra el fluido polimérico, poseen ejes paralelos y giran en la misma dirección, a una misma velocidad. En la figura se observan los engranes de movimiento (3), los rodamientos (4) y las ventanas (5) de la celda de flujos. La anisotropía óptica está sobre planos normales al eje óptico.

ralélos y con rotación en la misma dirección, a una cierta velocidad dentro del fluido (ver Figura 3.2). La rotación de los rodillos establece en el fluido un campo no-homogéneo de deformaciones, por lo que la retardancia, δ (o birrefringencia), es función de la posición dentro del líquido polimérico. Esto es, las cantidades ópticas varían espacialmente y en consecuencia las mediciones experimentales dependen del camino óptico recorrido. En particular, la anisotropía inducida en el líquido polimérico, en el experimento de dos rodillos, se afecta por las paredes de la cavidad ocasionando con ello efectos de borde y es ahí (zona de transición) en donde la anisotropía es aún más compleja de describir (Figura 3.3).

La aplicación de la técnica de birrefringencia bicolor inducida por flujos en un sistema como el descrito, se ha empleada por un grupo de investigadores encabezados por los

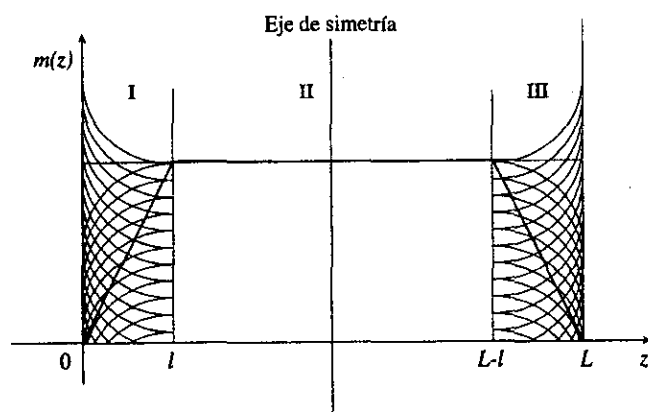


Figura 3.3. Los efectos de borde se observan en las Secciones I y III. En la primera los valores de la anisotropía van desde cero hasta un valor determinado; en la segunda, desaparecen los efectos de borde, en donde la anisotropía depende de un flujo esencialmente constante y en la tercera Sección, la anisotropía vuelve a disminuir hasta cero en las paredes de la cavidad de la celda de flujos.

Profesores Gary Leal (en Caltech y UCSB) y G.G. Fuller (Stanford) en California, USA, para analizar las anisotropías generadas en soluciones poliméricas diluidas y concentradas. La Técnica BBIF aplicada al experimento de dos rodillos, se reporta en la referencia [24]. La Figura 3.4²¹ muestra el arreglo óptico del dispositivo experimental empleado.

3.4 Ecuaciones para los elipsómetros de nulos

En el Capítulo 2 se ha señalado la importancia del Cálculo de Mueller, para representar mediante operadores matriciales de 4x4 (matrices de Mueller, M) a los elementos ópticos que actuando sobre cuadvectores de 4x1 (vectores de Stokes, S) representan la interacción luz-materia. En el arreglo experimental para BBIF, los operadores matriciales están dados por la matriz de Mueller del polarizador orientado a un ángulo α_p respecto del eje $0x$, $M_p(\alpha_p)$; la matriz de Mueller asociada al medio birrefringente con orientación ρ y retardancia δ , $M_B(\rho, \delta)$, y la matriz de Mueller del analizador con orientación α_A , medido respecto del mismo sistema de referencia del polarizador, $M_A(\alpha_A)$. La ecuación para el elipsómetro de nulos, en donde los componentes ópticos se encuentra en el orden como el indicado en la Figura 3.1, está dada por

$$S_f = M_A(\alpha_A) \cdot M_B(\rho, \delta) \cdot M_p(\alpha_p) \cdot S_i, \quad (3.1)$$

en donde S_i y S_f son los vectores de Stokes para el haz de luz polarizado incidente y final, respectivamente. Ya que BBIF, diseñada por Chow [25], requiere de dos elipsómetros de

²¹ Figura cortesía de Juan Pablo Jiménez de la Rosa, Tesis de Ingeniero Mecánico, Facultad de Ingeniería, UNAM.

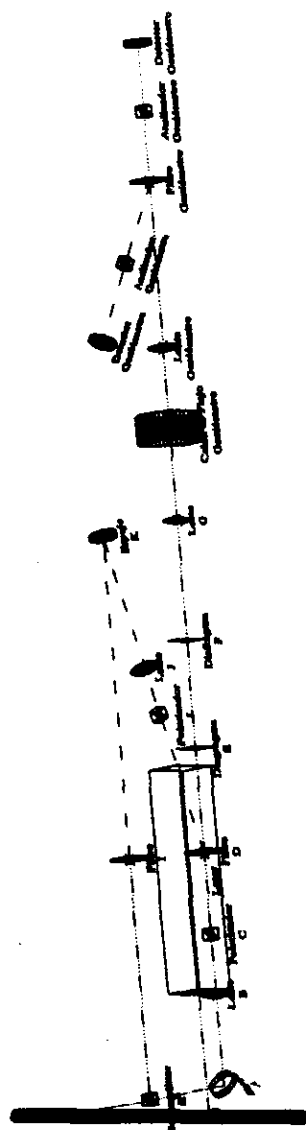


Figura 3.4. Diagrama del arreglo experimental para el estudio de fluidos complejos sujetos a deformaciones de flujos fuertes. El experimento de BBIF consiste en dos haces de luz (azul, 488 nm, y verde, 514.5 nm), los cuales recorren distintos caminos ópticos asociados a los subíndices a y v (respectivamente). Al final, los detectores miden la intensidad luminosa para determinar la anisotropía óptica del líquido complejo inducida por el flujo.

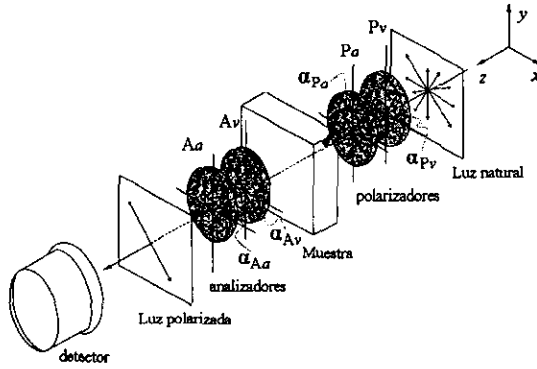


Figura 3.5. Se muestra la ubicación relativa de los polarizadores, P_v y P_a , y sus respectivos analizadores, A_v y A_a . La orientación de los polarizadores, α_{Pa} y α_{Pv} , respecto del eje x , se miden en la dirección matemática estándar. Los analizadores se encuentran girados $\frac{\pi}{2}$ radianes respecto de los polarizadores (orientados a α_{Aa} y α_{Av} , del eje x , respectivamente).

nulos (uno para cada color), las ecuaciones respectivas están dadas por

$$S_{f_v} = M_{Av}(-\pi/8) \cdot M_B \cdot M_{Pv}(3\pi/8) \cdot S_{i_v} \quad (3.2)$$

y

$$S_{f_a} = M_{Aa}(\pi/8) \cdot M_B \cdot M_{Pa}(5\pi/8) \cdot S_{i_a}, \quad (3.3)$$

en donde $S_{f_v, a}$ y $S_{i_v, a}$ son los vectores de Stokes de luz emergente e incidente ; M_{Av} y M_{Aa} son las matrices para los analizadores y M_{Pv} y M_{Pa} corresponden a las matrices para los polarizadores -etiquetando con subíndices v y a a los elementos ópticos y a los vectores de Stokes para los colores verde y azul, respectivamente-. La matriz M_B , es la matriz que representa a la muestra birrefringente. El arreglo experimental demanda una orientación

azimutal para los polarizadores verde y azul de $3\pi/8$ y $5\pi/8$, respectivamente²², con los analizadores rotados $\frac{\pi}{2}$ respecto del polarizador correspondiente (ver Figura 3.5).

Por el momento considérese una matriz de Mueller general para un medio birrefringente, en la que no importa el tipo de birrefringencia y orientación que posea. Ahora se trata de mostrar las limitaciones del arreglo óptico experimental de la Figura 3.4 (Ecuaciones 3.2 y 3.3), en particular cuando se requiere caracterizar un medio anisotrópico elipsoidal. Para ello suponemos un medio birrefringente arbitrario, en donde las orientaciones de los polarizadores y analizadores es la propuesta en las Ecuaciones 3.2 y 3.3. Además, ambos haces de luz incidentes poseen una polarización vertical, $S_{i_v} = S_{i_a} = \{1, -1, 0, 0\}$. En la siguiente sección se analiza un medio birrefringente con un perfil para la retardancia aproximado al que debe existir en las zonas de transición del experimento de dos rodillos.

Con base en las Ecuaciones 3.2 y 3.3, se tiene que las matrices para los polarizadores y analizadores son

$$\begin{aligned}
 M_{Av}\left(\frac{-\pi}{8}\right) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & M_{Pv}\left(\frac{3\pi}{8}\right) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 M_{Aa}\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & M_{Pa}\left(\frac{5\pi}{8}\right) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

²² Los polarizadores colocados con tales orientaciones atenúan la intensidad de la luz incidente, verticalmente polarizada, con igual grado para ambos polarizadores.

y la matriz de Mueller del medio es

$$\mathbf{M}_B = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

En general, para una matriz birrefringente arbitraria (sin efectos dicroicos), $M_{11} = 1$,

$$M_{12} = M_{21} = M_{13} = M_{31} = M_{14} = M_{41} = 0.$$

De lo anterior, la ecuación analítica para cada haz de luz emergente queda como

$$S_{f_e} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -(2 + \sqrt{2})(-2 + M_{22} - M_{23} - M_{32} + M_{33}) \\ -(1 + \sqrt{2})(-2 + M_{22} - M_{23} - M_{32} + M_{33}) \\ (1 + \sqrt{2})(-2 + M_{22} - M_{23} - M_{32} + M_{33}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

y

$$S_{f_a} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -(2 + \sqrt{2})(-2 + M_{22} + M_{23} + M_{32} + M_{33}) \\ -(1 + \sqrt{2})(-2 + M_{22} + M_{23} + M_{32} + M_{33}) \\ -(1 + \sqrt{2})(-2 + M_{22} + M_{23} + M_{32} + M_{33}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

en donde el coeficiente $\frac{1}{16}(2 + \sqrt{2})$, es consecuencia de suponer una intensidad de magnitud unitaria para los haces incidentes, $S_{i_e,1} = S_{i_a,1} = 1$ (primeros parámetros de Stokes).

Las Ecuaciones 3.6 y 3.7 tienen un significado de gran trascendencia, ya que si el medio sólo posee birrefringencia de tipo lineal, el detector registrará la intensidad total del haz sin pérdida alguna en ella. En cambio, si el medio posee contribuciones de birrefringencia circular, el detector no podrá registrarlas. Esto se deduce de la forma analítica que poseen ambos vectores de salida. Nótese que los vectores de Stokes de salida dependen de los cuatro elementos centrales de la matriz birrefringente arbitraria (Ecuación 3.5)²³. En la siguiente Sección se analiza con mayor detalle este hecho, estableciendo para ello dos

²³ Si se rearregla el tren óptico con los analizadores orientados ahora en dirección azimutal igual a los polarizadores, entonces se tienen vectores de Stokes que permiten conocer M_{22} , M_{23} , M_{32} y M_{33} sin que tampoco se tenga información sobre los componentes de birrefringencia circular.

formas distintas de caracterizar al fluido polimérico sujeto a una historia de deformaciones generada en la celda de flujos.

3.5 Anisotropía inducida por flujos con efectos de borde

Dado que el flujo generado en la celda de flujos exhibe marcados efectos de borde, es posible proponer un modelo matemático para la anisotropía inducida en función de la posición sobre el eje óptico, lo que permite obtener una solución analítica cerrada del problema. Sin embargo, el modelo para la anisotropía es sólo aproximado, pues en general, los efectos de borde dependen de la reología del fluido polimérico. Aun así, para todo fluido, tanto el campo de velocidades como el gradiente del mismo se anulan sobre las fronteras y entonces es razonable suponer que la anisotropía óptica también se anula en la frontera. Ello es consecuencia de un tensor de la velocidad de deformación con componente nulo sobre el plano del flujo y por lo tanto no puede generar una anisotropía de la microestructura del fluido que sea observable en el plano normal al eje óptico. Como resultado de las propiedades cinemáticas no-homogéneas del flujo se establecen valores diferentes para las propiedades ópticas entre las regiones cercanas y aquéllas lejanas a las paredes. Por lo tanto, un análisis óptico detallado debe considerar valores distintos de la retardancia (suponiendo "*un perfil*" que describa las no homogeneidades sobre la trayectoria), así como valores distintos para la orientación y *elipticidad* del medio (planteando "*perfiles*" para ambos), dependientes de la posición.

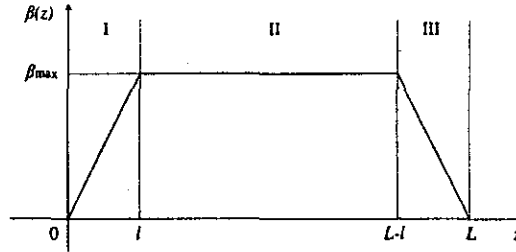


Figura 3.6. Función para la retardancia, $\beta(z)$, de tipo trapezoidal. En el intervalo $[0, l]$, Sección I, el comportamiento es lineal creciente; en el intervalo $[l, L - l]$, Sección II, la retardancia es constante (valor máximo, $\beta_{\max}$) y en el intervalo $[L - l, L]$, Sección III, el comportamiento de la retardancia vuelve a ser lineal, pero decreciente.

3.5.1 Anisotropía inducida no homogénea

Con base en las características de deformación del polímero propuestas por Hernández [10], las anisotropías se desvanecen en las paredes del contenedor y alcanzan un valor constante en la región central. Considerando a la retardancia como función de la posición (retardancia local), $\beta(z)$, la anisotropía generada en la celda de flujos es semejante a una función trapezoidal

$$\beta(z) = \begin{cases} (\beta_{\max} z)/l & 0 \leq z \leq l \\ \beta_{\max} & l \leq z \leq L-l \\ (\beta_{\max}(L-z))/l & L-l \leq z \leq L \end{cases}, \quad (3.8)$$

cuya gráfica se presenta en la Figura 3.6. Siendo la retardancia global la suma de todas las contribuciones locales, es decir, para contribuciones diferenciales de la retardancia local, la global, δ_g , se define como

$$\delta_g = \int_0^L dz \beta(z). \quad (3.9)$$

Para analizar los casos de interés, considérese al medio dividido en tres Secciones (I, II y III), correspondientes a los intervalos $[0, l]$, $[l, L - l]$ y $[L - l, L]$. Para ambos casos, en cada Sección se establecen condiciones de acuerdo a la física que se le quiera asignar al medio birrefringente.

Respecto de la *orientación de la birrefringencia*, Hernández [10], supone que el ángulo de orientación de la anisotropía cercano a las paredes debe ser de 45° respecto al eje de laboratorio, pues si bien la magnitud del gradiente de velocidades, $|\gamma|$, tiene un valor pequeño, la orientación del eigenvector del mismo está definido a $\pi/4$. A medida que se interna en el flujo, la orientación del eigenvector cae a valores menores pero siempre mayores que cero. Consecuentemente, Hernández [10] considera la posibilidad que en las Secciones I y III exista birrefringencia circular; esta suposición no fué completamente analizada por las dificultades algebraicas de su representación matricial.

3.5.2 Birrefringencia lineal y elíptica en un fluido polimérico

Con el propósito de probar el formalismo propuesto en el Capítulo 2, en esta Sección se analizan dos casos. En el primero se supone que los efectos de frontera quedan descritos sólo por no homogeneidades en la retardancia, con orientación promedio arbitraria²⁴ y elipticidad nula (cero birrefringencia circular); es decir, el medio es únicamente linealmente birrefringente. En el segundo, las no homogeneidades quedan descritas por tres

²⁴ Esta misma suposición la hace Hernández [10] al analizar la anisotropía del medio en cuestión. Tal suposición es una primera aproximación para corregir las mediciones de anisotropía por la existencia de efectos de borde.

propiedades ópticas: la retardancia, la orientación y elipticidad del medio distintas de cero, suponiendo que las regiones cercanas a las paredes de la celda contienen cantidades apreciables de birrefringencia elíptica (consecuencia de contribuciones de birrefringencia lineal y circular simultáneas). En ambos casos consideraremos el mismo perfil para la retardancia (Figura 3.6).

La comparación de los dos casos busca:

- establecer la aplicabilidad del método aquí propuesto como una generalización al de Hernández [10] y Azzam [9], incluyendo medios no homogéneos.
- conocer las diferencias que los distintos modelos de la anisotropía de medios poliméricos predicen para las mediciones del experimento de Geffroy [24].
- establecer las bondades, limitaciones y sugerencias pertinentes para el experimento propuesto, pues la información acerca de la anisotropía polimérica es de gran importancia para los estudios de BBIF que actualmente se realizan en diferentes laboratorios en el mundo.

Caso I: Birrefringencia lineal con orientación promedio arbitraria

En este caso se considera un medio con contribuciones de retardancia a la frontera que se anulan, manteniendo constante la orientación, por lo tanto, se tiene birrefringencia lineal y no existen contribuciones de birrefringencia circular en el medio. Así, el perfil para la orientación a lo largo del camino óptico está dado por

$$\rho(z) = \rho, \quad (3.10)$$

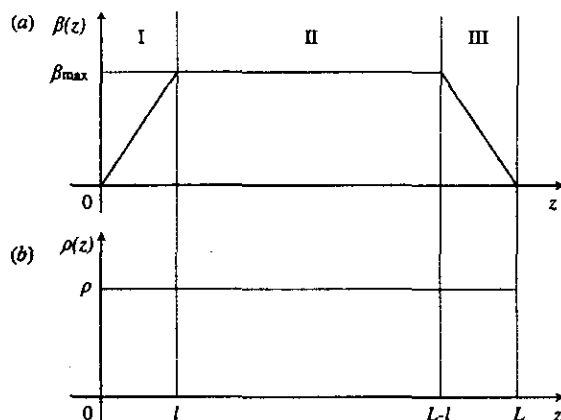


Figura 3.7. Perfiles para los valores de la anisotropía y su orientación correspondiente al perfil propuesto por Hernández [10]. (a) La variación de la retardancia (anisotropía) en las tres Secciones es trapezoidal. (b) La orientación promedio, ρ , no es afectada por los efectos de borde, observándose la misma orientación en las tres Secciones.

en donde ρ es un valor constante (Figura 3.7 (b)). Esta situación física corresponde, en la esfera de Poincaré, a un vector de birrefringencia local, $\beta(z) = (a \beta(z), b \beta(z), 0) = (a, b, 0) \beta(z) = e_{\beta} \beta(z)$ (con $a = \cos(2\rho)$ y $b = \sin(2\rho)$), que representa a un retardador local (matriz de Mueller diferencial) a través del punto R (ver Figura 3.8). La matriz de Mueller local respectiva, corresponde a un punto R' sobre una esfera de radio unitario²⁵ [18]. Como puede observarse, la situación física descrita no es más que el Caso II analizado en el Capítulo 2, por lo que la matriz de Mueller global del medio, M_B , estará dada por la Ecuación 2.40, es decir,

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \cos[\delta] & 2ab \sin^2[\delta/2] & -b \sin[\delta] \\ 0 & 2ab \sin^2[\delta/2] & b^2 + a^2 \cos[\delta] & a \sin[\delta] \\ 0 & b \sin[\delta] & -a \sin[\delta] & \cos[\delta] \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

²⁵ El radio de la esfera unitaria de Poincaré se define como $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$.

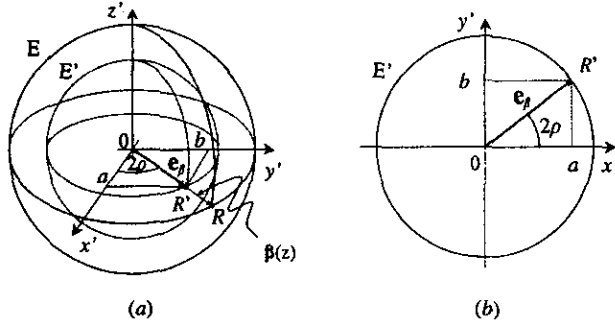


Figura 3.8. (a) Coordenadas del vector birrefringencia local, $\beta(z)$, correspondiente a un medio con birrefringencia lineal en un sistema coordenado (x', y', z') . Se muestra dicho punto sobre la esfera de Poincaré de radio $\beta(z)$ y en la de magnitud unitaria, E y E', respectivamente. (b) Coordenadas del vector birrefringencia unitario, en el plano ecuatorial.

en donde $\delta_g = \int_0^L dz' \beta(z')$. Por consiguiente, de las ecuaciones 3.7 y 3.6, los vectores de Stokes de salida para el verde y azul, representando la física descrita arriba, quedan como

$$\mathbf{S}_{f_v} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} (2 + \sqrt{2})(2 \sin^2[\delta/2] (1 + \sin[4\rho])) \\ (1 + \sqrt{2})(2 \sin^2[\delta/2] (1 + \sin[4\rho])) \\ -(1 + \sqrt{2})(2 \sin^2[\delta/2] (1 + \sin[4\rho])) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

y

$$\mathbf{S}_{f_a} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} (2 + \sqrt{2})(2 \sin^2[\delta/2] (1 - \sin[4\rho])) \\ (1 + \sqrt{2})(2 \sin^2[\delta/2] (1 - \sin[4\rho])) \\ (1 + \sqrt{2})(2 \sin^2[\delta/2] (1 - \sin[4\rho])) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

respectivamente. En las Ecuaciones 3.12 y 3.13 se han sustituido ya los valores de a y b .

Las lecturas en ambos detectores proporcionan la intensidad de los rayos emergentes i_v e i_a (términos $S_{f_v,1}$ y $S_{f_a,1}$, respectivamente). Es claro que los términos $S_{f_v,1}$ y $S_{f_a,1}$ no aportan información sobre birrefringencia circular. Con estos términos se calcula tanto a δ

como a ρ ; de la suma y resta de las intensidades se tiene que

$$\delta = 2 \operatorname{sen}^{-1} \left[2 \sqrt{\frac{i_v + i_a}{2 + \sqrt{2}}} \right] \quad (3.14)$$

y

$$\rho = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{i_v - i_a}{i_v + i_a} \right). \quad (3.15)$$

Estas ecuaciones muestran que tanto la retardancia como la orientación se determinan a partir de cantidades físicas medibles. Estas mismas ecuaciones las presenta Hernández [10] en términos de la longitud de onda, la intensidad total y la permitividad del medio.

A continuación se analiza el caso en donde los efectos de borde están caracterizados por la existencia de birrefringencia circular, siguiendo de referencia el problema arriba analizado.

Caso II: Birrefringencia con valores a la frontera.

En este caso, las condiciones a la frontera establecen la existencia de birrefringencia circular en las zonas de transición. Entonces, para un mismo perfil de la retardancia, se supone un mismo valor para la orientación del medio, $\rho(z)$, pero ahora se incluirá un perfil para la elipticidad, $\omega(z)$. De la misma forma que el caso anterior, la física de esta situación se puede describir usando la esfera de Poincaré (con su respectiva descripción matemática).

Para las zonas de transición (Figura 3.3) con birrefringencia circular, se supone una orientación promedio ρ a lo largo del camino óptico recorrido (físicamente el haz se encuentra inicialmente a una orientación de $\pi/4$, que decrece hasta tener un valor igual al de la Sección II - $\rho(\text{II}) < \pi/4$ - y aumenta en la Sección III hasta alcanzar el valor $\pi/4$ nuevamente). Para el ángulo de elipticidad, en la Sección I se tiene una elipticidad de signo

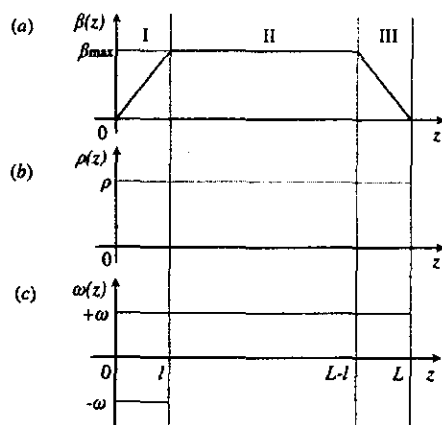


Figura 3.9. Los tres parámetros que caracterizan a la anisotropía del medio: (a) perfil para la retardancia; (b) perfil para la orientación; (c) función de la elipticidad respecto del camino óptico recorrido. En la Sección I, se observa una contribución de birrefringencia circular negativa. En la Sección II, la elipticidad es nula, por lo que no existe birrefringencia circular y en la Sección III, nuevamente se tiene elipticidad distinta de cero, de igual magnitud que en el primer sector, pero positiva; ello debido a la simetría de las deformaciones generadas por el campo de flujos.

opuesto al de la Sección III. Además, la simetría del flujo permite sugerir que las elipticidades tienen la misma magnitud. Por consiguiente podemos proponer una función para la elipticidad respecto del camino óptico recorrido. Las características de la zona de transición permiten sugerir una función de tipo escalonado, es decir una función

$$\omega(z) = \begin{cases} -\omega & 0 \leq z \leq l \\ 0 & l \leq z \leq L-l \\ \omega & L-l \leq z \leq L \end{cases}, \quad (3.16)$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 3.9 (c).

Dada la forma funcional para la elipticidad, la retardancia global del medio no es más que la suma de las retardancias de cada sector. Es decir, ya que se está suponiendo el mismo perfil para la retardancia que en el caso anterior, entonces la retardancia global del

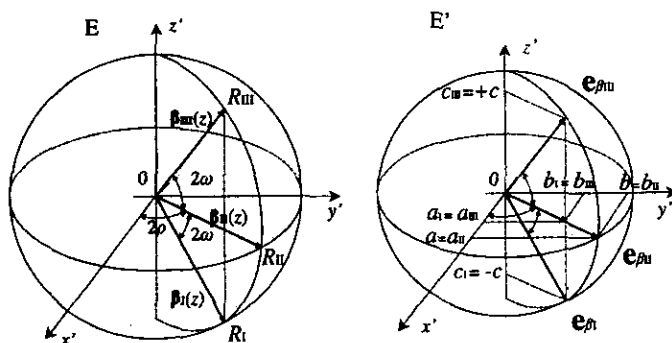


Figura 3.10. Esferas de Poincaré, E y E'. En E, se ilustran las situaciones físicas correspondientes a las Secciones I, II y III que describen las no-homogeneidades causadas por los efectos de borde en el medio birrefringente. Cada Sección se representa por un vector birrefringencia, $\beta(z)$, con orientación y elipticidad, 2ρ y 2ω , respectivamente. En E' se muestran las coordenadas cartesianas de los vectores unitarios, e_β , correspondientes a cada vector birrefringencia.

medio, δ , es la suma de las retardancias de los sectores I (δ_I), II (δ_{II}) y III (δ_{III})

$$\delta = \delta_I + \delta_{II} + \delta_{III}, \quad (3.17)$$

en donde

$$\begin{aligned} \delta_I &= \int_0^l dz' \beta(z') \\ \delta_{II} &= \int_l^{L-l} dz' \beta(z') \\ \delta_{III} &= \int_{L-l}^L dz' \beta(z'). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dada la simetría de $\beta(z)$, $\delta_I = \delta_{III}$.

En cada Sección se define un diferente tipo de birrefringencia. En la Sección I, se tiene birrefringencia elíptica; en el II, birrefringencia lineal y en el III nuevamente birrefringencia elíptica, aunque en el hemisferio opuesto sobre la esfera de Poincaré.

Para la Sección I, el vector de birrefringencia local, asociado en la esfera de Poincaré, está dado como

$$\beta_1(z) = (a_1 \beta_1(z), b_1 \beta_1(z), c_1 \beta_1(z)) = (a_1, b_1, c_1) \beta_1(z) = \mathbf{e}_{\beta_1} \beta_1(z), \quad (3.19)$$

con $a_1 = \cos[2\omega] \cos(2\rho) = \cos[2\omega] a$, $b_1 = \cos[2\omega] \sin(2\rho) = \cos[2\omega] b$ y $c_1 = c = \sin[-2\omega]$. Se han expresado las coordenadas cartesianas, a_1 , b_1 y c_1 , del vector unitario en términos de las coordenadas angulares 2ρ y 2ω , y radio 1. El valor negativo de c ($\omega < \frac{\pi}{2}$) indica que la birrefringencia circular es izquierda. En la Figura 3.10, se podrán observar las coordenadas de dicho vector. Nótese también que se emplea un vector birrefringencia con magnitud $\beta_1(z)$, con el fin de señalar que la retardancia local en el Sector I tiene una forma funcional dada por $\beta_1(z)$, lo cual es equivalente a decir que la retardancia en ese Sector estará dada por $\beta(z)$ en el intervalo para z $[0, l]$. Al igual que en el Caso I, el vector birrefringencia representa a un retardador local (matriz de Mueller diferencial) a través del punto R_1 , tal como se aprecia en la Figura 3.10. Obsérvese que ahora la tercera coordenada del vector birrefringencia es distinta de cero, ya que en ella se encuentra precisamente la información acerca de la birrefringencia circular.

Para la segunda Sección, el vector birrefringencia correspondiente es igual al del Caso I, salvo que su magnitud está dada por la birrefringencia local en la Sección II, $\beta_{II}(z)$, es decir, por $\beta(z)$ en el intervalo $[l, L - l]$. Por lo que la retardancia global en esa Sección será δ_{II} . Entonces

$$\beta_{II}(z) = (a_{II} \beta_{II}(z), b_{II} \beta_{II}(z), 0) = (a_{II}, b_{II}, 0) \beta_{II}(z) = \mathbf{e}_{\beta_{II}} \beta_{II}(z), \quad (3.20)$$

con $a_{II} = a = \cos(2\rho)$ y $b_{II} = b = \sin(2\rho)$. En la Figura 3.10 el medio birrefringente lineal corresponde a R_{II} .

En la Sección III, dada la simetría de las deformaciones en el fluido, se tendrá una situación similar al de la Sección I, salvo que la elipticidad del medio cambia de signo, es decir, se tienen contribuciones de birrefringencia circular derecha. Por lo tanto el vector asociado es

$$\beta_{III}(z) = (a_{III} \beta_{III}(z), b_{III} \beta_{III}(z), c_{III} \beta_{III}(z)) = (a_{III}, b_{III}, c_{III}) \beta_{III}(z) = e_{\beta_{III}} \beta_{III}(z), \quad (3.21)$$

en donde $a_{III} = a_1 = \cos[2\omega] \cos(2\rho) = \cos[2\omega] a$, $b_{III} = b_1 = \cos[2\omega] \sin(2\rho) = \cos[2\omega] b$ y $c_{III} = -c_1 = +c = +\sin[2\omega]$ (ver Figura 3.10). La magnitud de la birrefringencia local en esta Sección, $\beta_{III}(z)$, es de igual manera, la birrefringencia local $\beta(z)$ en el intervalo $[L-l, L]$. Ésta proporciona una birrefringencia global en la Sección III igual al de la Sección I, es decir, $\delta_I = \delta_{III}$.

Para obtener la matriz de Mueller global del medio birrefringente, multiplicamos las matrices "globales" representativas de cada Sección en el orden adecuado, es decir, si las matrices de Mueller globales de las Secciones I, II y III son M_I , M_{II} y M_{III} , respectivamente, entonces la matriz global del medio está dada por

$$M_B = M_{III} \cdot M_{II} \cdot M_I. \quad (3.22)$$

Para obtener las matrices de cada Sección, basta con observar que las situaciones físicas son similares a los Casos II y IV analizados en el Capítulo II (Ecuaciones 2.40 y 2.53); sólo hay que tomar en cuenta que en el Sector III se tiene una birrefringencia circular izquierda y que las retardancias en las tres Secciones están dadas por la Ecuación 3.18. Así, las

matrices $\mathbf{M}_I$, $\mathbf{M}_{II}$ y $\mathbf{M}_{III}$ están dadas por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 \cos^2[2\omega] + (b^2 \cos^2[2\omega] + c^2) \cos[\delta_I] & 2ab \cos^2[2\omega] \sin^2\left[\frac{\delta_I}{2}\right] - c \sin[\delta_I] & \cos[2\omega](-2ac \sin^2\left[\frac{\delta_I}{2}\right] - b \sin[\delta_I]) \\ 0 & 2ab \cos^2[2\omega] \sin^2\left[\frac{\delta_I}{2}\right] + c \sin[\delta_I] & b^2 \cos^2[2\omega] + (a^2 \cos^2[2\omega] + c^2) \cos[\delta_I] & \cos[2\omega](-2bc \sin^2\left[\frac{\delta_I}{2}\right] + a \sin[\delta_I]) \\ 0 & \cos[2\omega](-2ac \sin^2\left[\frac{\delta_I}{2}\right] + b \sin[\delta_I]) & \cos[2\omega](-2bc \sin^2\left[\frac{\delta_I}{2}\right] - a \sin[\delta_I]) & c^2 + (a^2 + b^2) \cos^2[2\omega] \cos[\delta_I] \end{pmatrix} \\
 \mathbf{M}_{II} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \cos[\delta_{II}] & 2ab \sin^2\left[\frac{\delta_{II}}{2}\right] - b \sin[\delta_{II}] & -b \sin[\delta_{II}] \\ 0 & 2ab \sin^2\left[\frac{\delta_{II}}{2}\right] - b^2 + a^2 \cos[\delta_{II}] & b^2 + a^2 \cos[\delta_{II}] & a \sin[\delta_{II}] \\ 0 & b \sin[\delta_{II}] & -a \sin[\delta_{II}] & \cos[\delta_{II}] \end{pmatrix} \\
 \mathbf{M}_{III} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 \cos^2[2\omega] + (b^2 \cos^2[2\omega] + c^2) \cos[\delta_I] & 2ab \cos^2[2\omega] \sin^2\left[\frac{\delta_I}{2}\right] + c \sin[\delta_I] & \cos[2\omega](2ac \sin^2\left[\frac{\delta_I}{2}\right] - b \sin[\delta_I]) \\ 0 & 2ab \cos^2[2\omega] \sin^2\left[\frac{\delta_I}{2}\right] - c \sin[\delta_I] & b^2 \cos^2[2\omega] + (a^2 \cos^2[2\omega] + c^2) \cos[\delta_I] & \cos[2\omega](2bc \sin^2\left[\frac{\delta_I}{2}\right] + a \sin[\delta_I]) \\ 0 & \cos[2\omega](2ac \sin^2\left[\frac{\delta_I}{2}\right] + b \sin[\delta_I]) & \cos[2\omega](2bc \sin^2\left[\frac{\delta_I}{2}\right] - a \sin[\delta_I]) & c^2 + (a^2 + b^2) \cos^2[2\omega] \cos[\delta_I] \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Recuérdese que $a = \cos[2\rho]$, $b = \sin[2\rho]$ y $c = \sin[2\omega]$ ²⁶.

De las ecuaciones 3.7 y 3.6, los vectores de Stokes de salida para el verde y azul, en los que se están incluyendo los efectos de la frontera, quedan como

$$S_{f_v} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -(2 + \sqrt{2}) (-2 + g_1(\delta_I, \delta_{II}, \rho, \omega)) \\ -(1 + \sqrt{2}) (-2 + g_1(\delta_I, \delta_{II}, \rho, \omega)) \\ (1 + \sqrt{2}) (-2 + g_1(\delta_I, \delta_{II}, \rho, \omega)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

y

$$S_{f_a} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -(2 + \sqrt{2}) (-2 + g_2(\delta_I, \delta_{II}, \rho, \omega)) \\ -(1 + \sqrt{2}) (-2 + g_2(\delta_I, \delta_{II}, \rho, \omega)) \\ -(1 + \sqrt{2}) (-2 + g_2(\delta_I, \delta_{II}, \rho, \omega)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

siendo

$$\begin{aligned} g_1(\delta_I, \delta_{II}, \rho, \omega) = & \\ & -2 + \{ -((a + b) \sin[\delta_I] + 2c(b - a) \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) (f_1 - f_2) + \\ & (-a^2 \cos^2[2\omega] - \cos \delta_I (c^2 + b^2 \cos^2[2\omega]) - c \sin \delta_I + 2ab \cos^2[2\omega] \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) (f_3 - f_6) + \\ & (-b^2 \cos^2[2\omega] - \cos \delta_I (c^2 + a^2 \cos^2[2\omega]) + c \sin \delta_I + 2ab \cos^2[2\omega] \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) (f_4 - f_5) \} \end{aligned} \quad (3.26)$$

y

$$\begin{aligned} g_2(\delta_I, \delta_{II}, \rho, \omega) = & \\ & -2 + \{ ((b - a) \sin[\delta_I] - 2c(a + b) \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) (f_1 + f_2) + \\ & (a^2 \cos^2[2\omega] + \cos \delta_I (c^2 + b^2 \cos^2[2\omega]) - c \sin \delta_I + 2ab \cos^2[2\omega] \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) (f_3 + f_6) + \\ & (b^2 \cos^2[2\omega] + \cos \delta_I (c^2 + a^2 \cos^2[2\omega]) + c \sin \delta_I + 2ab \cos^2[2\omega] \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) (f_4 + f_5) \}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

en donde a su vez f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 y f_6 están dadas por

²⁶ En estas ecuaciones ya se han substituido los parámetros $a_{III} = a_I = \cos[2\omega] \cos(2\rho) = \cos[2\omega] a$, $b_{III} = b_I = \cos[2\omega] \sin(2\rho) = \cos[2\omega] b$ y $c_{III} = -c_I = c = \sin[2\omega]$.

$$f_1 = \cos[2\omega] \{ a(b^2 \cos^2[2\omega] + \cos[\delta_I](c^2 + a^2 \cos^2[2\omega])) \sin \delta_{II} + \\ \cos[2\omega] \cos[\delta_{II}](a \sin \delta_I + 2bc \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) - \\ b \sin \delta_{II}(-c \sin \delta_I + 2ab \cos^2[2\omega] \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) \},$$

$$f_2 = \cos[2\omega] \{ -b(a^2 \cos^2[2\omega] + \cos[\delta_I](c^2 + b^2 \cos^2[2\omega])) \sin \delta_{II} + \\ \cos[2\omega] \cos[\delta_{II}](-b \sin \delta_I + 2ac \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) + \\ a \sin \delta_{II}(c \sin \delta_I + 2ab \cos^2[2\omega] \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) \},$$

$$f_3 = \{ b \cos[2\omega] \sin \delta_{II}(a \sin \delta_I + 2bc \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) + \\ (a^2 + b^2 \cos[\delta_{II}])(-c \sin \delta_I + 2ab \cos^2[2\omega] \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) + \\ 2ab(b^2 \cos^2[2\omega] + \cos[\delta_I](c^2 + a^2 \cos^2[2\omega])) \sin^2[\frac{\delta_{II}}{2}] \},$$

$$f_4 = \{ -a \cos[2\omega] \sin \delta_{II}(-b \sin \delta_I + 2ac \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) + \\ (b^2 + a^2 \cos[\delta_{II}])(c \sin \delta_I + 2ab \cos^2[2\omega] \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) + \\ 2ab(a^2 \cos^2[2\omega] + \cos[\delta_I](c^2 + b^2 \cos^2[2\omega])) \sin^2[\frac{\delta_{II}}{2}] \},$$

$$f_5 = \{ (b^2 + a^2 \cos[\delta_{II}])(b^2 \cos^2[2\omega] + \cos[\delta_I](c^2 + a^2 \cos^2[2\omega])) - \\ a \cos[2\omega] \sin \delta_{II}(a \sin \delta_I + 2bc \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) + \\ 2ab(-c \sin \delta_I + 2ab \cos^2[2\omega] \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) \sin^2[\frac{\delta_{II}}{2}] \},$$

$$f_6 = \{ (a^2 + b^2 \cos[\delta_{II}])(a^2 \cos^2[2\omega] + \cos[\delta_I](c^2 + b^2 \cos^2[2\omega])) + \\ b \cos[2\omega] \sin \delta_{II}(-b \sin \delta_I + 2ac \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) + \\ 2ab(c \sin \delta_I + 2ab \cos^2[2\omega] \sin^2[\frac{\delta_I}{2}]) \sin^2[\frac{\delta_{II}}{2}] \}.$$

Aplicando el Criterio de Stokes (Ecuación 1.10) a las Ecuaciones 3.24 y 3.25²⁷, puede corroborarse que

$$S_{f_{v0}}^2 = S_{f_{v1}}^2 + S_{f_{v2}}^2 + S_{f_{v3}}^2 \quad (3.28)$$

y

$$S_{f_{a0}}^2 = S_{f_{a1}}^2 + S_{f_{a2}}^2 + S_{f_{a3}}^2, \quad (3.29)$$

en donde $S_{f_{vi}}$ y $S_{f_{ai}}$, $i = 0, 1, 2, 3$, son los elementos de los vectores de Stokes para los haces verde y azul, respectivamente. La igualdad en las relaciones 3.28 y 3.29, demuestran que la matriz dada en la Ecuación 3.22, es una matriz de Mueller (birrefringente), que expresa correctamente la física del fenómeno anisotrópico.

Como puede observarse de las Ecuaciones 3.24 y 3.25, los vectores de Stokes para los haces emergentes, verde y azul poseen información no sólo de la retardancia y orientación, sino *también de la elipticidad*. Por consiguiente, en un experimento como el utilizado por Geffroy [24], resulta imposible detectar esta última contribución, ya que es resultado de la birrefringencia circular en las zonas de transición. Se necesita de una medida adicional para poder determinar cuál es la elipticidad del medio. Los resultados obtenidos hasta el momento conducen a afirmar que la asimetría de la anisotropía en las Secciones I y III no garantiza la nulidad de los efectos de frontera. Esta conclusión es de gran importancia, ya que como es sabido, la birrefringencia circular (actividad óptica) también rota al plano de polarización, por consiguiente, un detector con características como el empleado en el experimento de dos rodillos no puede detectar la rotación del plano de polarización debido

²⁷ El Criterio de Stokes establece que si $S_f = M \cdot S_i$, donde S_f y S_i son los vectores de Stokes de los haces emergente e incidente, respectivamente, y M es la matriz de Mueller del medio, entonces $S_{f0}^2 \geq S_{f1}^2 + S_{f2}^2 + S_{f3}^2$. [6, 7]

a esa birrefringencia. Obsérvese que todas las conclusiones se basan en la forma funcional de los vectores de Stokes.

Desafortunadamente y como resultado de la complejidad algebraica de las ecuaciones involucradas, no se pueden proporcionar expresiones matemáticas para la retardancia, orientación y elipticidad, ya que sólo se cuenta con dos ecuaciones y son tres las incógnitas. Una tercera medida implica una modificación en el arreglo óptico del doble elipsómetro de nulos, de tal manera que se cuente con información acerca de la elipticidad del medio birrefringente. Los datos experimentales existentes no son suficientes y no permiten demostrar la efectividad del formalismo, aunque se puede observar que éste se reduce al caso expuesto por Hernández [10].

Sin embargo, pueden suponerse valores para la retardancia, orientación y elipticidad en el medio como un ejemplo numérico, de tal manera que se observen los valores para la intensidad registradas por los detectores cuando se considera una óptica como la descrita en el Caso I y una por el Caso II. Si se supone un medio linealmente birrefringente (elipticidad nula, $\omega = 0$), con una anisotropía como la descrita en el Caso I, con una retardancia global $\delta_g = \pi$ y orientación promedio $\rho = \pi/8$, la intensidad luminosa relativa de los haces emergentes, para los colores verde ($S_{f_v,1} = i_v$) y azul ($S_{f_a,1} = i_a$), resulta $i_v = 0.853553$ e $i_a = 0$, respectivamente. Esto quiere decir que la intensidad total es $i_t = 0.853553$ ²⁸. Suponiendo ahora un medio elípticamente birrefringente, con anisotropía semejante al Caso II, en donde la retardancia global del medio y la orientación tienen los

²⁸ El valor de la intensidad no corresponde a uno puesto que en el experimento de dos rodillos, el plano de polarización del haz incidente no se encuentra en la misma dirección que los polarizadores verde y azul, originando con ello un valor menor en la intensidad del haz.

mismos valores que en el caso del medio linealmente birrefringente, pero con elipticidad $\omega(z) = -\pi/8, 0, \pi/8$ para las Secciones I, II y III, respectivamente, se tienen valores para las intensidades de los haces emergentes verde y azul de $i_v = 0.621859$ e $i_a = 0.178347$, dando un total en la intensidad de $i_t = 0.800206$. Esto es, existe una pérdida del 6.25% en la intensidad total cuando se consideran los efectos de frontera en la celda de flujos. Es de esperarse que cuando los efectos de frontera tiendan a cero, el valor de la intensidad total deba tender a aquella obtenida en donde el medio posee sólo birrefringencia lineal. Esto se comprueba suponiendo los valores para δ_g y ρ antes señalados y valores para $|\omega|$ de $\pi/8, \pi/16, \pi/32, \pi/64, \pi/128, \pi/256, \pi/512, \pi/1024, \pi/2048, \pi/4096$ y $\pi/8192$. Para este último, el valor de la intensidad total debe tender a 0.853553.

En la Figura 3.11, se observan las gráficas para las intensidades de los haces verde (a) y azul (b) como función de la elipticidad. Obsérvese que la mayor cantidad de la intensidad está en el verde, en tanto que en el haz azul, la intensidad es menor. Esto se explica debido a los valores que se han elegido para la orientación y retardancia globales del medio (la elección de la orientación se encuentra en la misma dirección de uno de los polarizadores). Es importante aclarar que si no existiera birrefringencia circular en las zonas de transición, la intensidad para el color azul sería nula, como puede corroborarse del valor obtenido cuando el medio es linealmente birrefringente. Significa entonces que la presencia de birrefringencia circular “rota” al plano de polarización del haz azul, de la misma manera que ocurre con el plano de polarización del haz verde.

En la Figura 3.11 (c) se observa la gráfica para la intensidad total ($i_v + i_a$) del haz emergente en función de la elipticidad. En ella se aprecia claramente la disminución de

la intensidad para valores relativamente “grandes” de ω ; el punto correspondiente a $\pi/8$ muestra un valor para la intensidad relativamente menor que el resto. Este punto corresponde a una pérdida en la intensidad del 6.25%. El siguiente, con $\omega = \pi/16$, muestra una pérdida en la intensidad del 0.5%. Para valores relativamente “pequeños” de ω , el porcentaje en la pérdida de la intensidad disminuye notablemente. Ello demuestra que cuando los efectos de frontera son despreciables, la birrefringencia circular se anula ($\omega \rightarrow 0$), obteniendo así un medio caracterizado exclusivamente por birrefringencia lineal. Este ejemplo, aunque muy particular, demuestra la validez del formalismo empleado y la no nulidad de los efectos de frontera causados por las paredes en la celda de flujos, en las que se han supuesto perfiles para la birrefringencia.

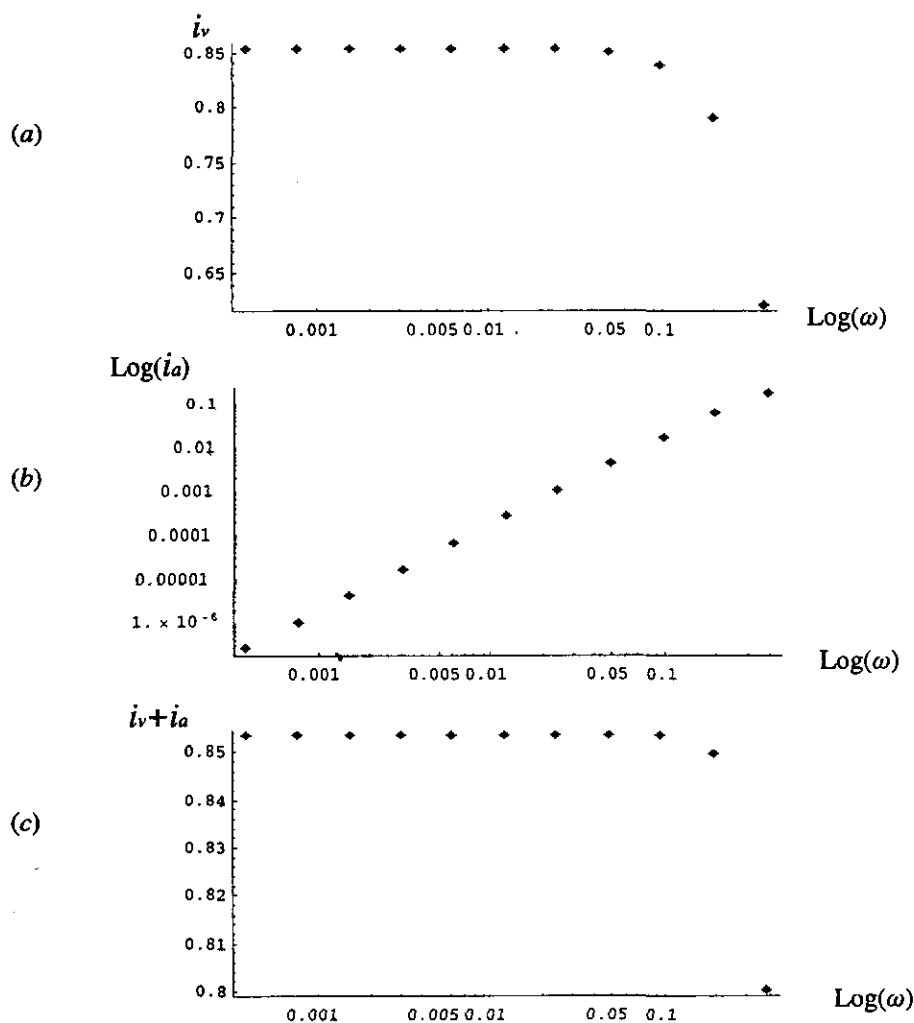


Figura 3.11. (a) Gráfica intensidad luminosa relativa vs. logaritmo de elipticidad (i_v vs $\log(\omega)$), para el color verde. Se observa una variación en i_v desde 0.621859 unidades para $\omega = \pi/8$, hasta 0.853553 para $\omega = \pi/8192$. (b) Gráfica logaritmo de intensidad vs. logaritmo de elipticidad ($\log(i_a)$ vs $\log(\omega)$), para el color azul. Se observa una variación en i_a desde 0.178347 para $\omega = \pi/8$, hasta 2.51062×10^{-7} para $\omega = \pi/8192$. (c) Gráfica de intensidad total vs. logaritmo de elipticidad ($(i_v + i_a)$ vs $\log(\omega)$). La intensidad total del haz emergente va desde 0.800206 para $\omega = \pi/8$, hasta 0.853553 para $\omega = \pi/8192$.

Capítulo 4

Conclusiones

Este trabajo analiza un formalismo matemático adecuado para describir la interacción luz-materia en medios ópticos anisotrópicos no-homogéneos.

El formalismo presentado en el Capítulo 2 proporciona una definición y un método para determinar la matriz de Mueller global de medios no-homogéneos aplicando el operador exponencial ordenado $\overline{Z}$ para la representación de una matriz de Mueller de un medio con birrefringencia y dicroísmo no uniformes. Para definir a la matriz local del medio (matriz asociada a una rebanada infinitesimal), se emplea la base generadora del GL de la teoría de grupos de la relatividad especial y el concepto de vector birrefringencia y dicroísmo. Con ello es posible proponer formas funcionales para la retardancia y los ángulos de orientación y elipticidad para una gran diversidad de medios ópticos complejos en los cuales existen no homogeneidades en la anisotropía a lo largo del camino óptico.

Analíticamente se comprueba la validez del formalismo desarrollado al calcular casos especiales para las matrices de Mueller (medios con birrefringencia lineal y medios con birrefringencia elíptica, homogéneas); se calculan también las matrices de Mueller para medios con birrefringencia lineal o elíptica no-homogéneas, comprobándose que las matrices para medios homogéneos son casos particulares de los no-homogéneos. La expresión general para las matrices de Mueller, posee una forma bien estructurada, en la que las matrices modales contienen toda la información del fenómeno físico presente en el problema y éstas no dependen de los valores de las propiedades ópticas del medio.

Una interpretación física y geométrica de los eigenvectores T_3 y T_4 (uno es complejo conjugado del otro) para cualquier medio, es que están relacionados con las direcciones del eje rápido (índice de refracción menor) y el eje lento (índice de refracción mayor), ya que sus eigenvalores (complejos) así lo indican. La solución para la ecuación de evolución del estado de polarización, sugiere que cualquiera de los eigenvectores con su eigenvalor se puede escribir como una solución en forma compleja, en donde la parte real y la parte imaginaria son soluciones de la ecuación de evolución del estado de polarización, postulando con ello que las direcciones del eje rápido y el eje lento están en realidad relacionados con los vectores T_3' y T_4' , los cuales están definidos en el Capítulo 2.

Al aplicar el formalismo desarrollado a un sistema polimérico sujeto a deformaciones en una celda de flujos de dos rodillos, se efectúa un análisis detallado de las mediciones experimentales realizadas en el experimento de BBIF. Para ello se proponen perfiles para la retardancia y para los ángulos de orientación y elipticidad del medio, en los cuales se describen los efectos de borde en las paredes de la celda, ya que la existencia de birrefringencia circular en la zona de transición es distinta de cero. Así, se demuestra que los efectos de borde no se anulan. Al mismo tiempo se analiza el problema experimental estudiado por Hernández [10] (medio con birrefringencia puramente lineal no-homogénea), demostrando que el formalismo propuesto en este trabajo describe el caso analizado por ella, encontrando expresiones para la birrefringencia y la orientación idénticas a las obtenidas por Hernández [10]. En el caso en el que los efectos de birrefringencia circular en la zona de transición son distintos de cero, se encuentra un sistema de ecuaciones (ecuaciones para S_u y S_v) con tres incógnitas (ω , ρ y δ), a la cual no puede dársele solución.

Se analiza detalladamente el arreglo experimental comúnmente utilizado para caracterizar anisotropías en líquidos, demostrando con ello que los datos experimentales no contiene información suficiente para una completa caracterización del medio. En particular, se demuestra que es posible determinar las anisotropías no-homogéneas del sistema polimérico sujeto a deformaciones. Asimismo, es factible demostrar que la birrefringencia circular explica las discrepancias observadas por Geffroy [24] en la intensidad total del haz. Como una consecuencia general, es factible proponer arreglos ópticos capaces de proveer las anisotropías de líquidos con mayor resolución para una numerosa colección de arreglos experimentales en los que existan efectos de luz polarizada.

Referencias

- [1] Akhmanov, S. A. and Nikitin, S. Yu., *Physical Optics*. Clarendon Press, Oxford, UK, 1997.
- [2] Collett, E., *Polarized light. Fundamentals and applications*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1993.
- [3] Kliger, D. S., Lewis, J. W. and Randall, C. E., *Polarized light in optics and spectroscopy*. Academic Press, Inc., San Diego, CA., 1990.
- [4] Hecht and Zajac., *Óptica*. Fondo Educativo Interamericano, S. A., México, 1977.
- [5] Born, M. and Wolf, E., *Principles of Optics*, 3ra ed., Pergamon Press, New York, 1965.
- [6] C.V. M. van der Mee., An eigenvalue criterion for matrices transforming Stokes parameters., *J. Math. Phys.* **34** (11), (1993), 5072-5088.
- [7] C.V. M. van der Mee and Hoveiner, J. W., Structure of matrices transforming Stokes parameters., *J. Math. Phys.* **33** (10), (1992), 3574-3584.
- [8] Azzam, R. M. A. and Bashara, N. M. *Ellipsometry and polarized light*. 3ra. ed., Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1996.
- [9] Azzam, R. M. A. Propagation of partially polarized light through anisotropic media with or without depolarization: a differential (4x4)matrix calculus. *J. Opt. Soc. Am.* **68**, (1978), 1756-1776.
- [10] Hernández, M. P., *Análisis de un medio anisotrópico inhomogéneo mediante técnicas de óptica matricial*. Tesis de Física. Facultad de Ciencias, UNAM, México D. F., 1996.

- [11] Cloude, S. R., Group theory and polarization algebra. *Optik* **75** (1), (1986), 26-36.
- [12] Cloude, S. R., Conditions for the physical realizability of matrix operators in polarimetry. in Polarization Considerations for Optical Systems II. *Proc. SPIE* **1166**, (1989), 177-185.
- [13] Ulrich, R. and Simon, A., Polarization optics of twisted single-mode fibers. *Appl. Opt.* **18**, (1979), 2241-2251.
- [14] K. Kim, L. Mandel and E. Wolf., Relationship between Jones and Mueller matrices for random media. *J. Opt. Soc. Am. A* **4** (3), (1987), 433-437.
- [15] Brown, C. S. and Em Bak, A., Unified formalism for polarization optics with application to polarimetry on twisted optical fiber. *Optical Engineering*, **34** (6), (1995), 1625-1635.
- [16] Kubo, H. and Nagata, R., Vector representation of behavior of polarized light in a weakly inhomogeneous medium with birefringence and dichroism. *J. Opt. Soc. Am.* **73**, (1983), 1719-1724.
- [17] Kubo, H. and Nagata, R., Vector representation of behavior of polarized light in a weakly inhomogeneous medium with birefringence and dichroism. II. Evolution of polarization states. *J. Opt. Soc. Am. A* **2**, (1985), 30-34.
- [18] Kubo, H., Evolution of optical behavior of partially polarized light through a medium with birefringence and dichroism. *Optik* **97** (2), (1994), 53-61.
- [19] Fox, R. F., Gaussian stochastic processes in physics. *Phys. Rep.* **48**, (1978), 179-283.
- [20] Cloude, S. R. Special Unitary Groups in polarimetry theory. in Polarization analysis and measurement II. *Proc. SPIE* **2265**, (1994), 292-303.

- [21] Muhammad, F. and Brown, C. S., Lorentz group underpinnings for the Jones and Mueller Calculi. In Polarization analysis and measurement II. *Proc. SPIE* **2265**, (1994), 337-347.
- [22] Fowles, Grant R., *Introduction to modern optics*. 2a. ed., Holt-Rinehart-Winsten, USA, 1975.
- [23] Braun, M., *Differential equations and their applications. An introduction to applied mathematics*. in Applied Mathematical Science, **15**, 3a. ed., Springer-Verlag, New York, Inc., 1986.
- [24] Geffroy, E., *Birrefringence of polymer solutions in time dependent flows.*, Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, Ca., 1989.
- [25] Chow, A. W. and Fuller, G. G., *J. Rheol.*, **28** (1), (1984), 23-43.

Apéndice A

A.1 Forma explícita del operador ordenado

R.F. Fox [19] define un operador exponencial ordenado, $\overleftarrow{Z} \exp[\dots]$, en forma explícita como

$$\overleftarrow{Z} \exp \left[\int_0^z dz' P(z') \right] = I + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^z dz_1' \int_0^{z_1} dz_2' \dots \int_0^{z_{n-1}} dz_n' [P(z_1') P(z_2') \dots P(z_n')] \right\}. \quad (\text{A.1})$$

El orden de los factores es crucial, ya que en general los elementos no conmutan para $z_1 \neq z_2$. La flecha del operador apuntando hacia la izquierda, en la Ecuación A.1, indica que los operadores para distancias grandes son ordenados hacia la derecha.

El operador exponencial ordenado satisface la propiedad común a una exponencial ordinaria

$$\frac{d}{dz} \overleftarrow{Z} \exp \left[\int_0^z dz' P(z') \right] = P(z) \overleftarrow{Z} \exp \left[\int_0^z dz' P(z') \right]. \quad (\text{A.2})$$

A.2 Base generadora del grupo de Lorentz

Una *Transformación de Lorentz* Λ es una matriz que puede ser expresada como

$$\Lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \exp(\mathbf{u} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{K}), \quad (\text{A.3})$$

donde u y v son trivectores reales y J y K son los generadores de la transformación. Las denotaciones J y K son expresiones cortas para el conjunto de tres matrices respectivas

$$J^i, K^i : i = 1, 2, 3. \quad (A.4)$$

Existen tres grupos de matrices que satisfacen relaciones de conmutatividad. Cada conjunto produce una colección de transformaciones de Lorentz vía la Ecuación A.3. Cada colección de transformaciones se llama *representación del grupo de Lorentz*. Las representaciones irreducibles (irreps) son aquellas representaciones en las cuales todas las representaciones se pueden descomponer. Los irreps del grupo de Lorentz se etiquetan por los números (m, n) , los cuales toman valores de 0, 1/2, 1, 3/2, ..., etc. Los generadores de irrep (m, n) se denotan por $J_{(m,n)}$ y $K_{(m,n)}$, y una transformación de Lorentz pertenece al irrep denotado por $\Lambda_{(m,n)}(u, v)$. La dimensión de todas las matrices asociadas con irrep (m, n) es $(2m + 1)(2n + 1)$

El vector irrep $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es una representación cuatridimensional real con generadores

$$\begin{aligned} B_1 = J_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & D_1 = K_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B_2 = J_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & D_2 = K_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B_3 = J_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & D_3 = K_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (A.5)$$

Los objetos matemáticos sobre los cuales las transformaciones de Lorentz $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ operan son llamados *cúdrivectores de Lorentz*, los cuales se transforman de acuerdo a la relación

$$|p'\rangle = \Lambda_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} |p\rangle, \quad (\text{A.6})$$

donde

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

A.3 Producto punto

Sea $\hat{\sigma}$ una base generadora y $\mathbf{a}$ un trivector real. Se define el producto punto entre $\mathbf{a}$ y σ como

$$(\mathbf{a} \cdot \hat{\sigma}) = a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3, \quad (\text{A.8})$$

en donde

$$\hat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \quad (\text{A.9})$$

y

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3). \quad (\text{A.10})$$

A.4 Raíces complejas

Si $\lambda = \alpha + i\beta$ es un eigenvalor de la matriz $\mathbf{A}$ con eigenvector $\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + i\mathbf{V}_I$, entonces

$$\mathbf{X}(t) = \exp[\lambda t] \mathbf{V} \quad (\text{A.11})$$

es una solución complejo-valuada de la ecuación diferencial

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{X}(t). \quad (\text{A.12})$$

La solución complejo-valuada de la Ecuación A.12 da lugar a dos soluciones reales.

Sea $\mathbf{X}(t) = \mathbf{Y}(t) + i \mathbf{Z}(t)$ una solución complejo-valuada de A.12. Entonces, tanto $\mathbf{Y}(t)$ como $\mathbf{Z}(t)$ son soluciones reales de la Ecuación A.12. Esto es, si $\mathbf{V} = \mathbf{V}_R + i \mathbf{V}_I$ es un eigenvector de $\mathbf{A}$ con eigenvalor $\lambda = \alpha + i\beta$, entonces

$$\mathbf{X}(t) = \exp[\lambda t] \mathbf{V} \quad (\text{A.13a})$$

$$= \exp[\alpha + i\beta] (\mathbf{V}_R + i \mathbf{V}_I) \quad (\text{A.13b})$$

$$= \exp[\alpha] \{ (\mathbf{V}_R \cos[\beta t] - \mathbf{V}_I \sin[\beta t]) + i (\mathbf{V}_R \sin[\beta t] + \mathbf{V}_I \cos[\beta t]) \} \quad (\text{A.13c})$$

por lo tanto

$$\mathbf{Y}(t) = \exp[\alpha] (\mathbf{V}_R \cos[\beta t] - \mathbf{V}_I \sin[\beta t]) \quad (\text{A.14})$$

y

$$\mathbf{Z}(t) = \exp[\alpha] (\mathbf{V}_R \sin[\beta t] + \mathbf{V}_I \cos[\beta t]) \quad (\text{A.15})$$

son dos soluciones reales de la Ecuación A.12. Ambas son linealmente independientes.