

00165



**Sistemas de Trazo
de Curvas y
Superficies Curvas
en Arquitectura**

277690

Investigación y docencia Arq. Luis Espinosa Cerón

División de Estudios de Posgrado,
Facultad de Arquitectura,
Universidad Nacional Autónoma
de México

1998



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Arq. Luis Espinosa Cerón
 Bosque de Ciruelos 130 piso 6
 Bosque de las Lomas,
 México DF 11700
 fax (525) 251 6064
 pacnavme@iservenet.net.mx

Espinosa Cerón, Luis.

Sistemas de Trazo de Curvas y Superficies Curvas en Arquitectura.— UNAM, Facultad de Arquitectura, División de Estudios de Posgrado e Investigación, Departamento de Arquitectura, Investigación y Docencia, México, Publicación del Autor, 1998

1. Geometría, Trazo
2. Arquitectura.
3. Construcción, Trazo

Este libro fue preparado usando *Page Maker 6.5* de Adobe Systems Inc., *Mathematica* de Wolfram Research Inc., *Femap* de Enterprise Software Products, y *mTab/Sap IV* de Structural Analysis Inc. Cada uno de los cuales son nombres registrados de las empresas correspondientes

Derechos de Autor, Derechos Reservados /
 Copyright 1998 Luis Espinosa Cerón.

Todos los derechos reservados. Ninguna parte de esta publicación puede ser reproducida, almacenada en un sistema de información, o transmitida en ninguna forma o por ningún medio, electrónico, mecánico, fotocopia, grabación, o de otra forma, sin el previo consentimiento escrito del que guarda los derechos de autor. Impreso en México.

El autor no se hace responsable expresa o implícitamente con respecto a la documentación, fórmulas o programas que describe, incluyendo, sin limitaciones, ninguna garantía implícita de que pueda utilizarse para algún propósito particular, todos los cuales son expresamente desconocidos.

Derechos de Patente. Patente en trámite. 1998
 Luis Espinosa Cerón.

Poleógenas y Elipzógenas son sistemas de trazo de curvas y superficies curvas propietarios del Autor, para los cuales todos los derechos estan reservados, salvo los autorizados a Profesionales de la Arquitecturas de la Universidad Nacional Autónoma de México para aplicarse en obras arquitectónicas dentro del territorio de la República Mexicana, siempre y cuando se cumpla con el Acuerdo de Licencia de Uso para tal efecto que se anexa en la siguiente contra página.

Publicado por el Autor, México, 1998

Sistemas de Trazo
de Curvas y
Superficies Curvas
en Arquitectura

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Arquitectura,
presenta:

Arq. Luis Espinosa Cerón

Maestría en Arquitectura Investigación y Docencia.

División de Estudios de Posgrado,

Facultad de Arquitectura,

Universidad Nacional Autónoma de México

1998



Director de Tesis:

M. en Arq. Carlos González Lobo

Sinodales:

Dr. en Arq. José Ángel Campos Salgado

Dr. en Arq. Juan Gerardo Oliva Salinas

M. en Arq. Gemma Verduzco Chirino

Arq. Jesús Barba Erdmann



Acuerdo de Licencia de uso para Poleógenas y Elipzógenas para Profesionales de la Arquitectura de la UNAM.

Definiciones:

Sistema de trazo: Es aquel mecanismo por el cual se puede obtener el lugar geométrico de una curva o superficie curva.

Propietario: es al autor y propietario de la propiedad intelectual amparada con las patentes correspondientes, en este caso el Arq. Luis Espinosa Cerón. **Propiedad** se refiere a la propiedad intelectual otorgada en las patentes correspondientes.

Poleógena, Elipzógena y sus plurales: Son nombres que el Propietario ha asignado a las curvas correspondientes y que en esta investigación se describen.

Profesional de la Arquitectura de la UNAM: Es aquella persona que tiene un título emitido por la Universidad Nacional Autónoma de México de Licenciatura, Maestría o Doctoradrelacionado a la Arquitectura o el Urbanismo, aun cuando corresponda a una escuela incorporada.

Edificación: Comprende cualquier tipo de construcción habitable

Propiedad:

Luis Espinosa Cerón es el autor y propietario intelectual de los nombres y sistemas de trazo de las curvas y superficies curvas llamadas Poleógenas, Plomoides y Elipzógenas, tal como se describen en esta investigación. El uso de los sistemas de trazo de dichas curvas a menos que sea otorgado conforme los términos de una licencia otorgada por el Propietario, o de otra forma autorizado por la ley, es una infracción a los derechos de autor.

Personas Permitidas:

Las personas a las que se les otorga bajo esta licencia los Usos Permitidos de la Propiedad, son aquellos profesionales de la Arquitectura egresados de la UNAM, de acuerdo a las limitaciones de Usos Permitidos y a las Condiciones que a continuación se describen. Cualquier otra persona requiere forzosamente de una licencia específica del Propietario para su uso y del pago de regalías correspondientes.

Usos Permitidos:

Provisto que el Profesional de la Arquitectura UNAM acepte las condiciones de este acuerdo, Luis Espinosa Cerón otorga licencia (sin ningún

costo o regalía) en forma no exclusiva para usar los sistemas de trazo de las curvas y superficies curvas llamadas Poleógenas y Elipzógenas, para ser aplicadas a cualquier elemento arquitectónico de un edificación, además de las siguientes condiciones.

Condiciones:

- El Profesional de la Arquitectura de la UNAM suscriba la aceptación de este acuerdo y dicho documento sea entregado y firmado por el Propietario, acompañado con planos donde se indique su aplicación. Será este momento y fecha en el que se considera que este acuerdo toma efecto para dicha edificación.
- El Profesional de la Arquitectura egresado de la UNAM sea al autor o tenga créditos en la autoría del proyecto de la edificación.
- La edificación sea realizada dentro del territorio de la República Mexicana.
- El Profesional de la Arquitectura de la UNAM de crédito al Propietario en cualquier tipo publicación escrita, electrónica o de cualquier otro medio, que en su conocimiento se haga de la edificación, dichos créditos deben referirse al Propietario y señalar que el sistema es resultado de una investigación realizada en el Departamento de Arquitectura, Investigación y Docencia, División de Posgrado, de la Facultad de Arquitectura de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Usos Prohibidos:

- Uso de la Propiedad intelectual para otras aplicaciones que no sean edificaciones o fuera de los límites del territorio de la República Mexicana.
- Otorgar, ceder, licenciar, rentar o vender por completo o en parte el uso de la Propiedad intelectual.
- Usar la Propiedad en una manera que viole las condiciones de este Acuerdo.

Garantía y Responsabilidad:

No existe ninguna garantía implícita o explícita sobre el uso, eficacia, comportamiento o cualquier otra característica del sistema de trazo de las curvas o superficies curvas referidas como Propiedad. Así también el Propietario no es responsable por los beneficios, consecuencias, directas o indirectas, especiales o punitivas, daños, gastos, etc. que sean resultado del uso de los sistemas de trazo de esta Propiedad.

Datos del Propietario:

Arq Luis Espinosa Cerón,
Bosque de Ciruelos 130-6
Bosque de las Lomas,
México DF, 11700,
tel 251 0900, fax 251 6064.
pacnavme@iservme.net.mx

Contenido

Introducción a Mathematica	1
Introducción	5
La necesidad de las curvas	6
La enseñanza de la Geometría	9
El trazo geométrico, una forma de entender la Arquitectura del pasado. ...	10
.....	10
Antecedentes	12
Curvas algebraicas	13
Curvas trazables	14
Curvas y superficies curvas	15
Curvas Radiales con una constante	17
Limasón de Pascal	17
Cardioide	19
Cisoide de Diocles	19
Concoide de Nicómedes	22
Estropoide	23
Curvas Gravitacionales	25
Parábola	25
Catenaria	27
Plomoides	28
Mecanismos	31
Hipérbola	33
Lemniscato de Bernoulli	33
Clasificación de los mecanismos	34
Focos e Hilos	35
Círculo	35
Arco circular	37
Elipse	39
Poleógenas	41
Elipzógenas	45
Funciones de Caja	49
Parábola	49
Arco Circular	49
Cisoide	50
Superficies Regladas	53

Paraboloide hiperbólico	53
Hiperboloide elíptico	54
Helicoide	55
Tira de Möbius	55
Conoide a recta	56
Superficies de Revolución	57
Toroide	57
Paraboloide	58
Conoide	58
Superficies de Transición	59
Bóvedas parabólicas apoyadas en un plano	59
Dovela	60
Bóveda con perímetros curvos	61
Superficies focales	63
Elipsoide	63
Plomoide 3D	63
Poleógena 3D	64
Análisis Estructural de Placas	67
Traducción de la geometría	67
Introducción a la Teoría de placas	71
Análisis Estructural	73
Conclusiones	75
Bibliografía	77
Bibliografía sobre Mathematica	79
Sitios en la Red relacionados a la geometría y matemática	79
Índice	81

Introducción a Mathematica

Mathematica es un programa computacional concebido con la idea de proporcionar una poderosa herramienta para el desarrollo matemático, numérico, simbólico y gráfico, pudiéndose usar como calculadora, sistema de visualización, lenguaje de programación de alto nivel, como sistema de representación de conocimiento o bien para crear documentos interactivos. Por estas razones seleccioné a este programa para desarrollar algunas áreas de esta investigación, y encuentro conveniente hacer una muy pequeña introducción al lenguaje de *Mathematica* con el objeto de facilitar la comprensión de los desarrollos que se plantean. Si el lector encuentra conveniente puede abordar estos conocimientos en este momento o bien puede regresar aquí cuando guste o le sea necesario. Para mayor profundidad sobre el tema se puede consultar a la referencia fundamental Wolfram, Stephen. *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*, y a una gran variedad de libros que sobre el tema existen, algunos de los cuales se mencionan en la bibliografía.

Mathematica es un
programa de Wolfram
Research Inc.
<http://www.wolfram.com>

Mathematica es un sistema interactivo que opera por frases de entrada (lo que uno teclea), cada frase de entrada es acompañado por *In[x]:=*, dicha frase se evalúa y el programa responde con una respuesta acompañada por *Out[x]:=* donde x representa un número secuencial de operaciones. En los siguientes capítulos de este documento he omitido los *In[x]* y *Out[x]* con el objeto de hacer mas simple el documento, sin embargo las respuestas están dadas en letra negrita.

Al ser introducida una frase de entrada como una suma, el programa regresa el resultado. *Mathematica* opera con números enteros y de punto flotante:

```
In[1]:= 45 + 12.4 - 15.3 / 2.1
Out[1]:= 50.781
```

La multiplicación se entiende cuando números o símbolos están separados por un espacio. *Sqrt* es un ejemplo de muchas funciones internas de *Mathematica*. Los parámetros de las funciones se encierran entre corchetes. Los ángulos se dan en radianes.

```
In[2]:= Sqrt[2 2]
Out[2]:= 2

In[3]:= ArcSin[23.2]
Out[3]:= 1.5708 - 3.83683 I
```

Nota como *Mathematica* tiene interconstruida aritmética compleja, y los números complejos pueden mezclarse con otros tipos. El operando % significa el resultado anterior

```
In[4]:= % 4 + 9.5
Out[4]:= 15.7832 - 15.3473 I
```

Las expresiones simbólicas son muy útiles ya que éstas pueden contener valores. El valor de un símbolo puede ser cualquier otra expresión en *Mathematica*. Los símbolos son expresiones atómicas es decir evalúan a

```
In[5]:= x = 52
Out[5]:= 52

In[6]:= x
Out[6]:= 52
```

sí mismos. En el ejemplo creamos el símbolo x y le asignamos el valor de 52.

```
In[7]:= x^3
Out[7]:= 140608
```

y no tiene valor, por lo tanto se evalúa a sí misma.

```
In[8]:= y^3
Out[8]:= y^3
```

Ahora asignamos un valor a y

```
In[9]:= y = 5
Out[9]:= 5
```

ahora y tiene un valor, de esta manera se tiene un resultado distinto

```
In[10]:= y^3
Out[10]:= 125
```

Las expresiones de cadenas contienen texto simple. Ellas son también expresiones atómicas. Una expresión de cadena se hace al colocar texto entre comillas. En este ejemplo estas comillas son desechadas cuando se evalúa la expresión.

```
In[11]:= "Esto es texto"
Out[11]:= Esto es texto
```

Las expresiones normales son una forma de coleccionar expresiones atómicas en grupos. Cada parte de el grupo es en sí misma una expresión en *Mathematica*.

Aquí tenemos una lista de cuatro números guardada en el símbolo `lista1`. Las listas se definen por elementos contenidos entre llaves `{ }`

```
In[12]:= lista1 = {1,2,3,4}
Out[12]:= {1,2,3,4}
```

`First` regresa el primer elemento de una lista.

```
In[13]:= First[lista1]
Out[13]:= 1
```

Podemos acceder cualquier elemento de la lista por el doble corchete `[[x]]`, donde x es el número del elemento.

```
In[14]:= lista1[[3]]
Out[14]:= 3
```

Las listas de dos y tres elementos van a ser usadas con frecuencia para contener coordenadas en dos y tres dimensiones.

```
In[15]:= punto1 = {2,3.1,-5.6}
Out[15]:= {2,3.1,-5.6}
```

Mathematica tiene capacidad para realizar operaciones simbólicas, que son aquellas que involucran la manipulación de fórmulas algebraicas, tales como expansión y simplificación de polinomios, expresiones racionales, sistemas de ecuaciones, integración, derivación, etc. Aquí vemos como se factoriza un polinomio. Nota como x , y conservan el valor de asignación anterior. Usamos `Clear` para limpiar su valor anterior.

```
In[16]:= Factor[x^6 - y^6]
Out[16]:= 19770594039
```

```
In[17]:= Clear[x,y]
```

```
In[18]:= Factor[x^6 - y^6]
Out[18]:= (-x + y) (x + y)
(-x^2 + x y - y^2)
(x^2 + x y + y^2)
```

Mathematica produce gráficas en dos y tres dimensiones, así como gráficas de densidad y contorno. También puede producir gráficas animadas. `Plot` permite graficar una función matemática en este caso para un rango de x entre -3 y 3 , dado por $\{x, -3, 3\}$. Nota que la escala horizontal y vertical no están proporcionadas, sin embargo esto se puede solucionar como veremos más adelante.

Favor de notar que todas las funciones internas de *Mathematica* empiezan con mayúscula, y para las nuevas funciones y símbolos usamos minúsculas.

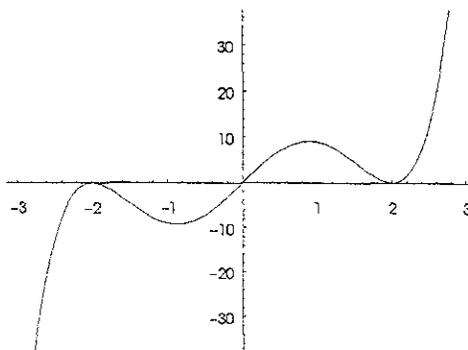
Vamos hacer una gráfica tridimensional de $\text{Cos}[x y]$ usando la función `Plot3D`, en este caso es necesario proporcionar dos rangos $\{x, 0, \text{Pi}\}$, $\{y, 0, \text{Pi}\}$. Observa que utilizo `ColorOutput->GrayLevel`, lo cual sirve para indicar que quiero la gráfica monocromática. *Mathematica* utiliza reglas por medio del operador `->`, `ColorOutput` es una variable interna de `Plot3D` y `GrayLevel` es una constante.

Mathematica es un lenguaje de programación, lo que nos permite crear programas y nuevas funciones.

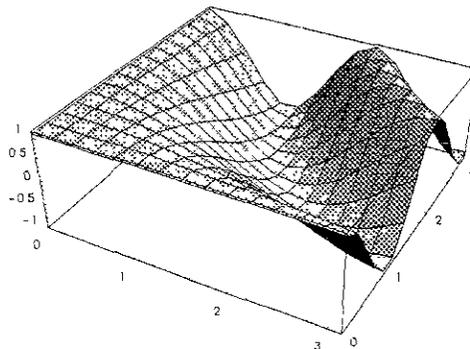
Esta es una definición en *Mathematica* de una función, específica que $f[n]$ va siempre a ser transformada en n^2 . La definición de f va a ser automáticamente usada cuando aplique.

La función `circulo` regresa una lista que contiene las coordenadas x,y de un lugar geométrico del círculo. Donde $r_$ es el radio y $u_$ el ángulo. `:=` hace que el valor del símbolo `circulo` sea retardado para

```
In[19]:= Plot[x (x+2)^2 (x-2)^2,
{x, -3, 3}]
```



```
In[20]:= Plot3D[Cos[x y], {x,0,Pi},
{y,0,Pi},
ColorOutput->GrayLevel];
```



```
In[21]:= f[n_]:= n^2
```

```
In[22]:= f[4]+f[a+b]
Out[22]:= 16 + (a + b)^2
```

```
In[23]:= circulo[r_][u_]:=
{r Cos[u], r Sin[u]}
```

permitir que se revalúe cada vez que sea llamado con nuevos parámetros.

Ahora podemos graficar la función círculo que acabamos de crear utilizando `ParametricPlot`. En este caso el rango definido corresponde a un medio círculo. Se define que la proporción de x,y sean iguales por medio de `AspectRatio->Automatic`

A diferencia de `Plot` y `Plot3D`, la función `ParametricPlot` requiere como primer parámetro una lista de dos variables, correspondientes a las coordenadas x,y

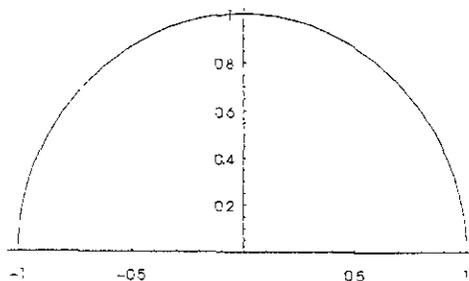
Es tiempo de crear una función para generar una superficie. La nueva función esfera regresa una lista que contiene las correspondientes coordenadas x,y,z .

Utilizo la función `ParametricPlot3D` para graficar una esfera. En este caso por los parámetros dados corresponde a un segmento de esfera. He aplicado la regla que define a `Ticks` como falsa, con el objeto de quitar las rayitas y la escala del cajón envolvente.

En el texto utilizaremos a menudo la función `Solve` para resolver ecuaciones. Los resultados se dan en forma de reglas. `NSolve` da su resultado en forma numérica.

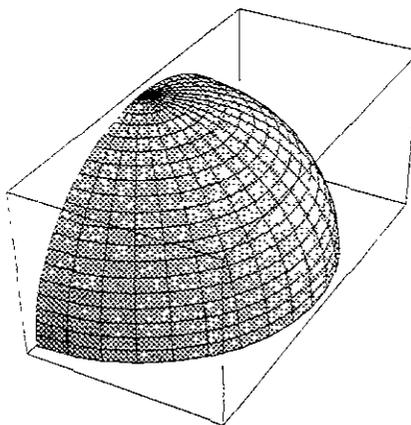
El lector podrá referirse a alguno de los libros señalados en la bibliografía para profundizar en el conocimiento de *Mathematica*.

```
In[23]:=
ParametricPlot[círculo[1][u]
//Evaluate, {u,0,Pi},
AspectRatio->Automatic];
```



```
In[24]:= esfera[r_][u_,v_]:=
r{Cos[v]Cos[u], Cos[v]Sin[u],
Sin[v]};
```

```
In[25]:= ParametricPlot3D[
esfera[1][u,v]//Evaluate,
{u, -Pi/2, Pi/2},
{v, 0, Pi/2}, Ticks->False];
```



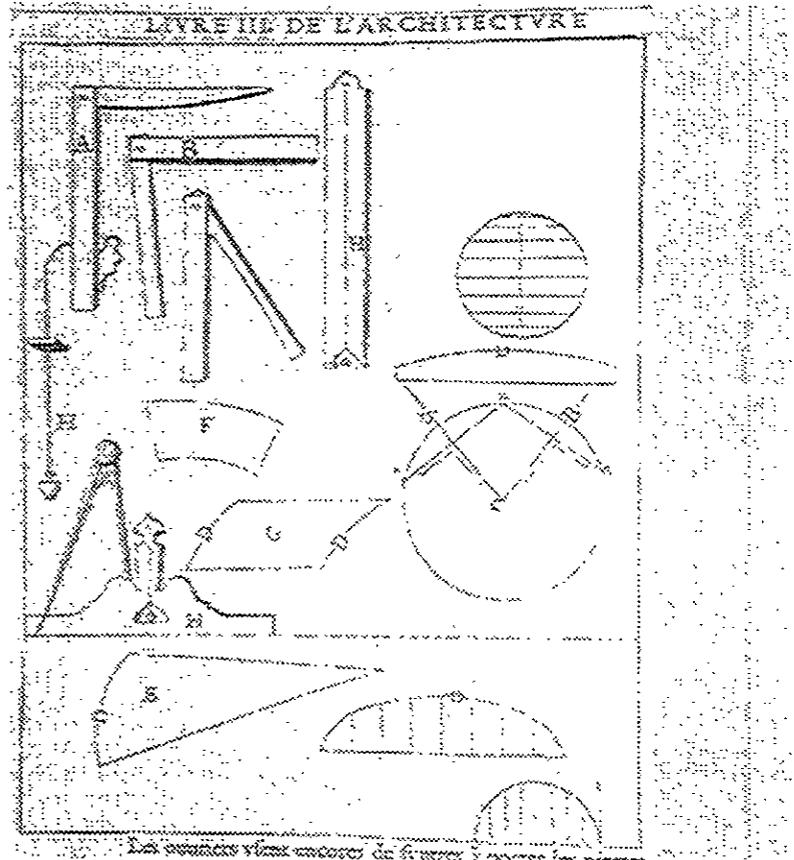
```
In[26]:= Solve[{a x + 2 b == c, x}]
Out[26]:= {{x-> -(2 b - c / a)}}
```

Introducción

El objetivo del texto es exponer algunos sistemas de trazo de curvas y superficies curvas aplicables en arquitectura, buscando expandir el conocimiento del estudiante, el arquitecto, y del personal de la construcción.

Al decir aplicables nos referimos a que los trazos sean comprensibles por un albañil utilizando herramientas tradicionales tales como hilo, plomada, nivel, compás, cinta métrica u otros mecanismos de fácil fabricación, considerando que, dichas formas puedan ser realizables empleando materiales constructivos tradicionales tabique, piedra, adobe, concreto, ferrocemento, madera etc

En adición a que las formas tengan un trazo comprensible, el quehacer arquitectónico demanda que tengan una geometría definible, para ser representadas en dibujos o modelos tridimensionales necesarios para consolidar el proceso de su diseño, pero además, su geometría se hace necesaria para someter las formas a los análisis estructurales, térmicos, o aquellos que se requieren por el lado científico del diseño. Bajo este entendimiento se encuentran las curvas y superficies curvas que aquí se tratan.



Leone Battista Alberti, (izquierda) es uno de los primeros arquitectos en proveer una fachada regularmente planeada: Palazzo Rucellai 1455. Alberti señala las leyes de la perspectiva en su tratado *Della Pictura* (1435) en el que dice. *"Nada me place mas que las investigaciones y demostraciones matemáticas, especialmente cuando puedo transformarlas en algo práctico..."* [MacTutor]. Se puede intuir en ello la importancia que tomó la matemática y la geometría en algunos arquitectos del Renacimiento.

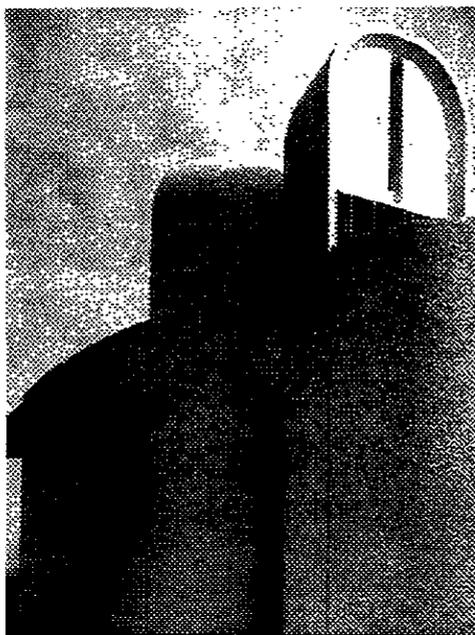
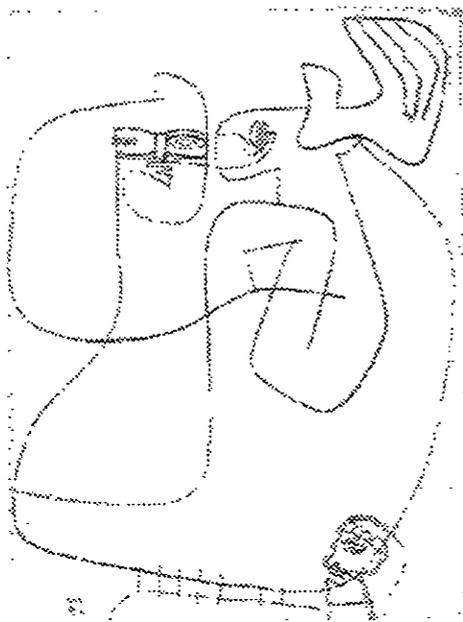
Philibert de l'Orme (1500/1570) fué como Palladio hijo de un constructor, con esa herencia del oficio, Philibert muestra en esta lámina procedente de su tratado *La Architecture* (1567) algunos instrumentos y métodos de trazo de aquel momento. Se puede observar del lado derecho, la manera de trazar un círculo partiendo de tres puntos, así también, el uso de plomadas para medir niveles verticales, horizontales o en su caso pendientes.

La necesidad de las curvas

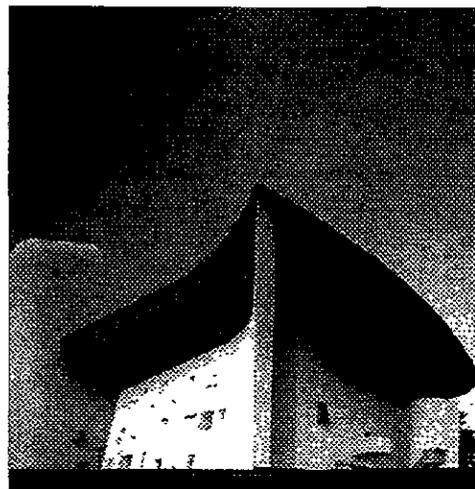
Le Corbusier. Cinco Mujeres No.5 "Possibilité de survie", 1. [Hochelbert] Fine Art.

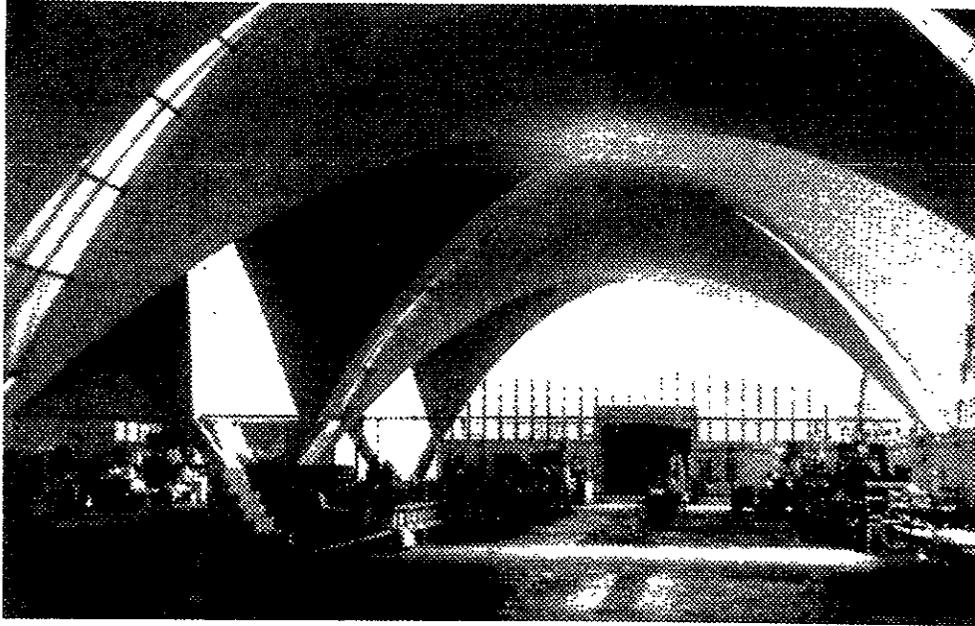
Abajo, 2. Le Corbusiers, Notre Dame-du-Aute, Rochamp(1950).

Es posible intuir que una expresión formal como este grabado y como la capilla de Rochamp del mismo autor aparecen como una tendencia a un nuevo expresionismo, que posiblemente encuentre cauces en nuestro tiempo presente bajo otros matices. Su viabilidad depende de que las curvas o superficies sean construibles.



¿Cual es la necesidad de las Curvas? En el pasado una curva como el arco surgió como una búsqueda de la humanidad por sustituir el dintel de un muro o la bóveda por encontrar la forma de cubrir un espacio con materiales pétreos. De estas ideas podemos entender que las curvas aparecen entre otras causas, como una respuesta formal a una necesidad estructural y espacial, o bien como un instrumento de composición. Hoy en día, el uso del acero, la popularidad de los métodos constructivos y la búsqueda racional del uso de los espacios ha hecho que las formas planas tengan un dominio del escenario formal, en parte por su sencillez de trazo y por su facilidad constructiva. Sin embargo, cuando aparece la necesidad de optimizar las formas que hoy en día usamos en busca de una mejor respuesta estructural, o una mayor racionalización de los materiales empleados, o quizás, por la búsqueda de formas que tengan buenas características para su prefabricación, o bien, por la aventura de expresiones formales más ricas, posiblemente se puede justificar la necesidad de tener herramientas que den mayor dominio en el campo de curvas y superficies curvas, donde el trazo es un factor determinante.



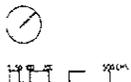
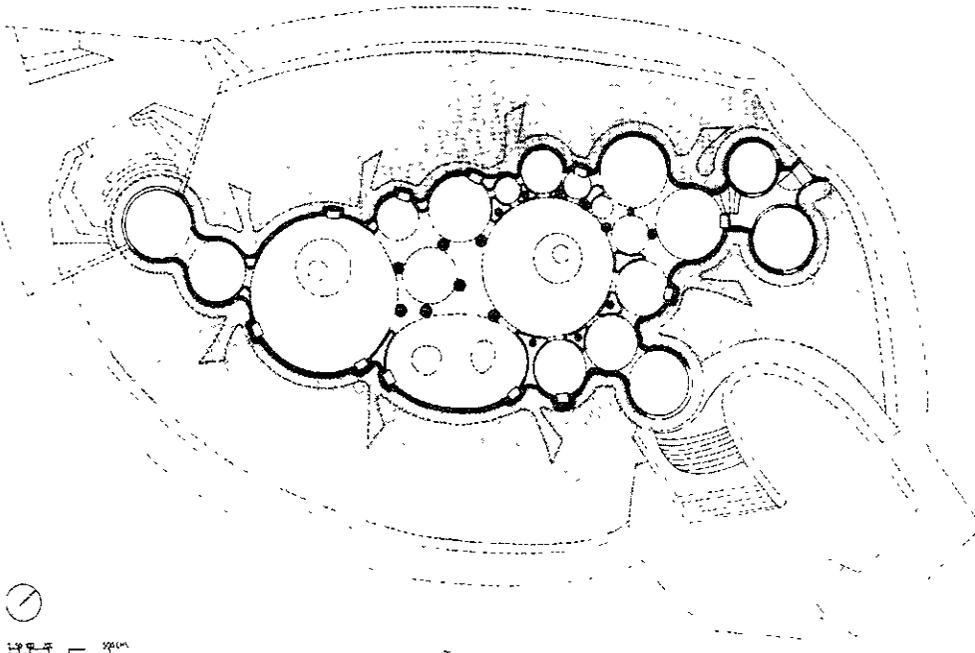


Felix Candela, izquierda, Fábrica Bacardí, planta embotelladora, Diseño, Sáenz, Cancio, Marín, Alvarez y Gutierrez, Cuautitlán Edo. de México, 1960 Bóvedas parabólicas de concreto armado con un claro de 30 m.

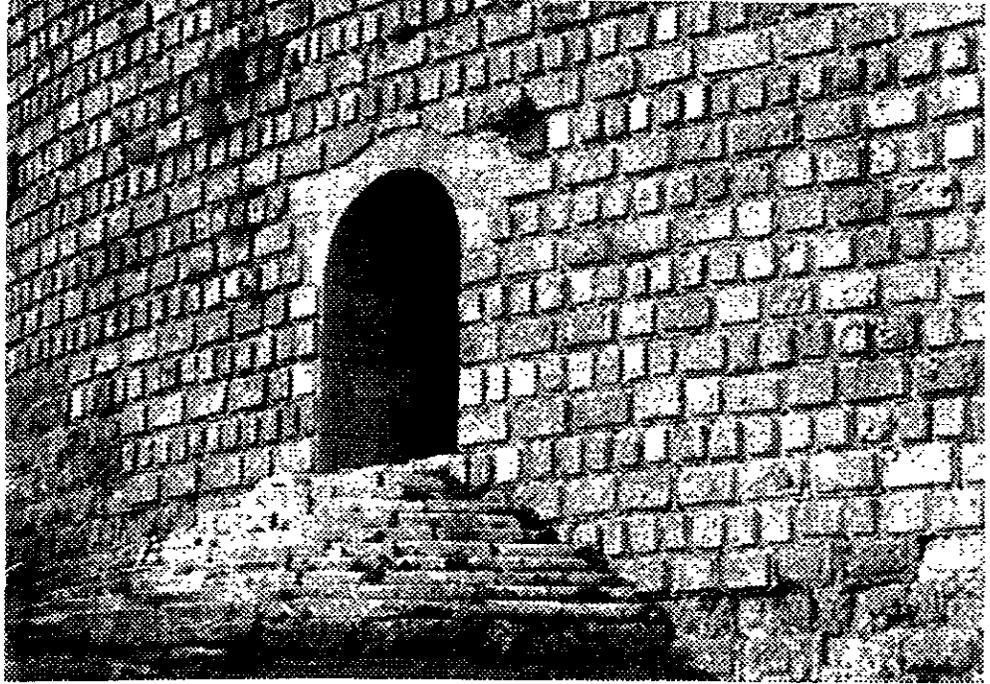
Balkrishna Doshi - Hussain, Gufa (1993) Campus del Centro de Planeación Ambiental y Tecnología, Ahmedabad India. (Foto cortesía B. Doshi.)

Este edificio es una galería de arte compuesta de bóvedas de ferrocemento circulares y elípticas produciendo una reminiscencia de cuevas. El conjunto aparece semi-enterrado por una pequeña colina que las rodea. Doshi es un prominente arquitecto Indú con una amplia trayectoria arquitectónica a lo largo de las últimas décadas, en su tiempo amplio colaborador de Le Corbusier y Louis Kahn en su quehacer arquitectónico de éstos en India.

Observo, la evidencia de una búsqueda formal por lograr una expresión abundante en superficies cóncavas con variedades de curvaturas en una composición con amplias libertades.

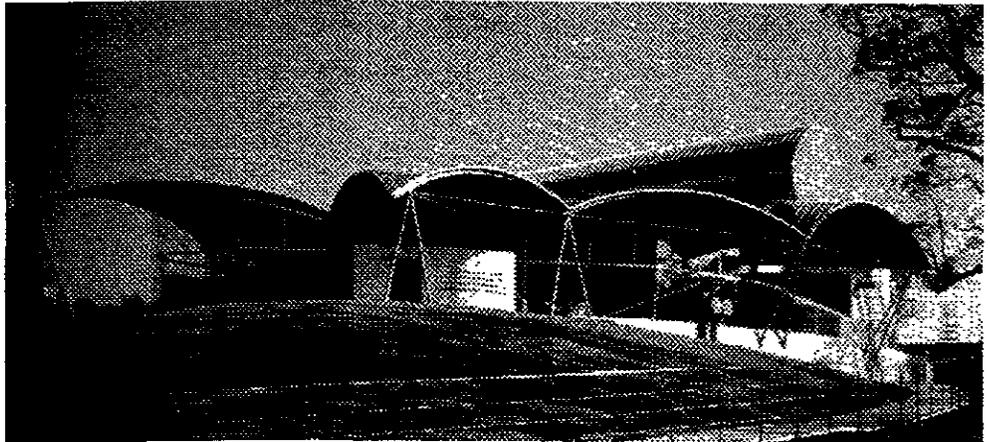


Entrada al Teatro de Perge.
El arco fué un elemento poco usado entre los griegos, sin embargo, en este ejemplo demuestran un uso refinado y el entendimiento expresivo de curvas circulares.



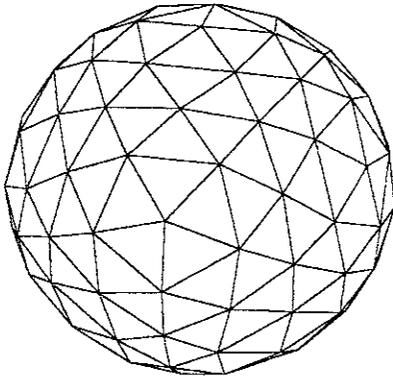
Toyo Ito. Museo municipal de Yutshiro. 1991.
fotografía Tomo Ohashi.
[2G, No.2,1997]

Los empujes horizontales de las cubiertas cilíndricas son tomados por tensores inferiores y los esfuerzos sísmicos horizontales son tomados por tensores diagonales que se muestran en la envolvente externa del edificio.



La enseñanza de la Geometría

La necesidad de una capacidad geométrica, en el marco de la enseñanza de la arquitectura ha sido limitada a la Geometría Descriptiva, pues el manejo de proyecciones, seguirá siendo una herramienta gráfica indiscutible en el quehacer arquitectónico, y por tanto, irrefutable en la formación profesional, sin embargo, se ha descuidado una formación matemática, que permita resolver



problemas geométricos más sofisticados, cuya solución es limitada o imposible utilizando las herramientas de la Geometría Descriptiva y para los cuales el estudiante y el arquitecto no tienen más soporte que el recibido por los cursos de Cálculo y Geometría Analítica del nivel medio o bien algo de esto, que plausiblemente se ha incorporado en algunos planes de estudios. Parece que la enseñanza de la Matemática y Geometría se considera aplicable a la Ingeniería, principalmente en el análisis estructural, pero no, como herramienta necesaria para la solución geométrica de las formas, es por ello, que la dosis matemática de los planes de estudios, está limitada a la visión que se ha tenido de su posible aplicación, pero ante este nuevo

panorama, la formación matemática del Arquitecto pareciera insuficiente. Es difícil entender que una formación geométrica más sofisticada pueda repercutir en un enriquecimiento de la capacidad formal en el marco del Diseño, pero seguramente esta visión tendrá una perspectiva más amplia después de este texto.

Dentro del marco de la enseñanza de la arquitectura, que en una medida es resultado del Bauhaus y del movimiento racionalista, matizado por adaptaciones y cambios naturales en nuestro tiempo, se concibe al Arquitecto como un director de orquesta, en la que no es necesario un dominio de ciertos campos del conocimiento, entre ellos la Matemática y la Geometría, sin entender precisamente que las sobresalientes excepciones como Nervi, Candela, B. Fuller y hoy en día Calatrava, han demostrado por supuesto tener un dominio de este campo. Sería difícil admitir que el desarrollo formal dentro del diseño arquitectónico tuviera que depender de consultores matemáticos, por tanto, debe buscarse que sea una herramienta propia del Arquitecto.

La Geometría Descriptiva está enmarcada en la solución gráfica de los problemas geométricos, y por tanto desligada del quehacer constructivo de dichas formas. En esta relación de la Geometría a la Construcción, aparece el trazo geométrico, que requiere una implementación a la obra, a veces simple y obvio, pero en muchas otras se requieren sofisticados mecanismos. Este es un campo que abre un panorama para el estudio y que en este texto toma ciertos cauces.



Dürer 1471-1528, es famoso por sus grabados, pero además, es quien establece los fundamentos de la Geometría Descriptiva en su tratado *De Symetria Partium in Rectis Formis Humanorum Corporum Libri.* publicada en Nuremberg después de su muerte. [MacTutor]

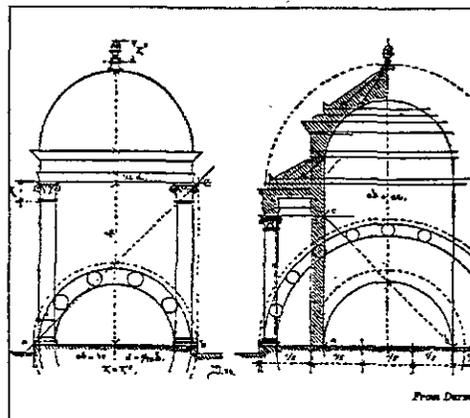
Geodésica derivada de un dodecahedro (izquierda)

Templos circulares de acuerdo a [Durum]

El trazo geométrico, una forma de entender la Arquitectura del pasado.

Una manera de entender la arquitectura del pasado es encontrar los sistemas de trazo que se emplearon, resultado natural del desarrollo geométrico de aquellos tiempos.

Algunas de las curvas que trataremos fueron inventadas por los griegos, Nicómedes y Diocles entre otros, para las cuales existían mecanismos de trazo claramente establecidos, hoy en día, poco conocidos, y que según mi teoría, fueron aplicados en las formas de la Arquitectura

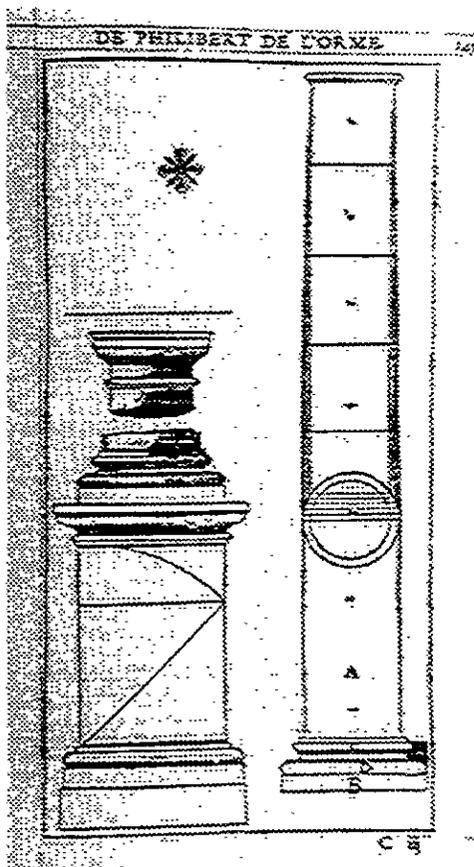


Griega Clásica, mecanismos que posiblemente encierran algunos eslabones del entendimiento hacia esa Arquitectura, y en otro sentido poseen un gran potencial de aplicación a la Arquitectura del presente, pero no necesariamente, en mi esperanza, para producir las mismas formas del pasado.

Para los griegos las formas tienen un origen matemático, para el Renacimiento un modelo a imitar. Los griegos poseían sistemas de trazo, en muchos casos desconocidos por los renacentistas, pero que, en su tiempo pudieron suplantar con su propio ingenio. Son conocidos por ejemplo los métodos de [Serlio] y [Vignola] entre otros, para el trazo del éntasis de las columnas, aunque el método de trazo es posiblemente distinto al que utilizaron los griegos, en muchos casos se aproxima a las mediciones comparadas de los elementos arquitectónicos en cuestión.

La arquitectura Gótica encierra el profundo conocimiento de los gremios, y en ello sus trazos geométricos, algunas luces de este conocimiento oculto empiezan a ser reveladas. Ver a [Chanfón] en su libro sobre Wilars de Honecort. Existe la teoría que la localización de las grandes catedrales góticas corresponde a un trazo geométrico, ¿Cómo es que aquellos

Philibert de l'Orme. *La Architecture*. (1567)
Descripción del trazo del éntasis de una columna Dórica.



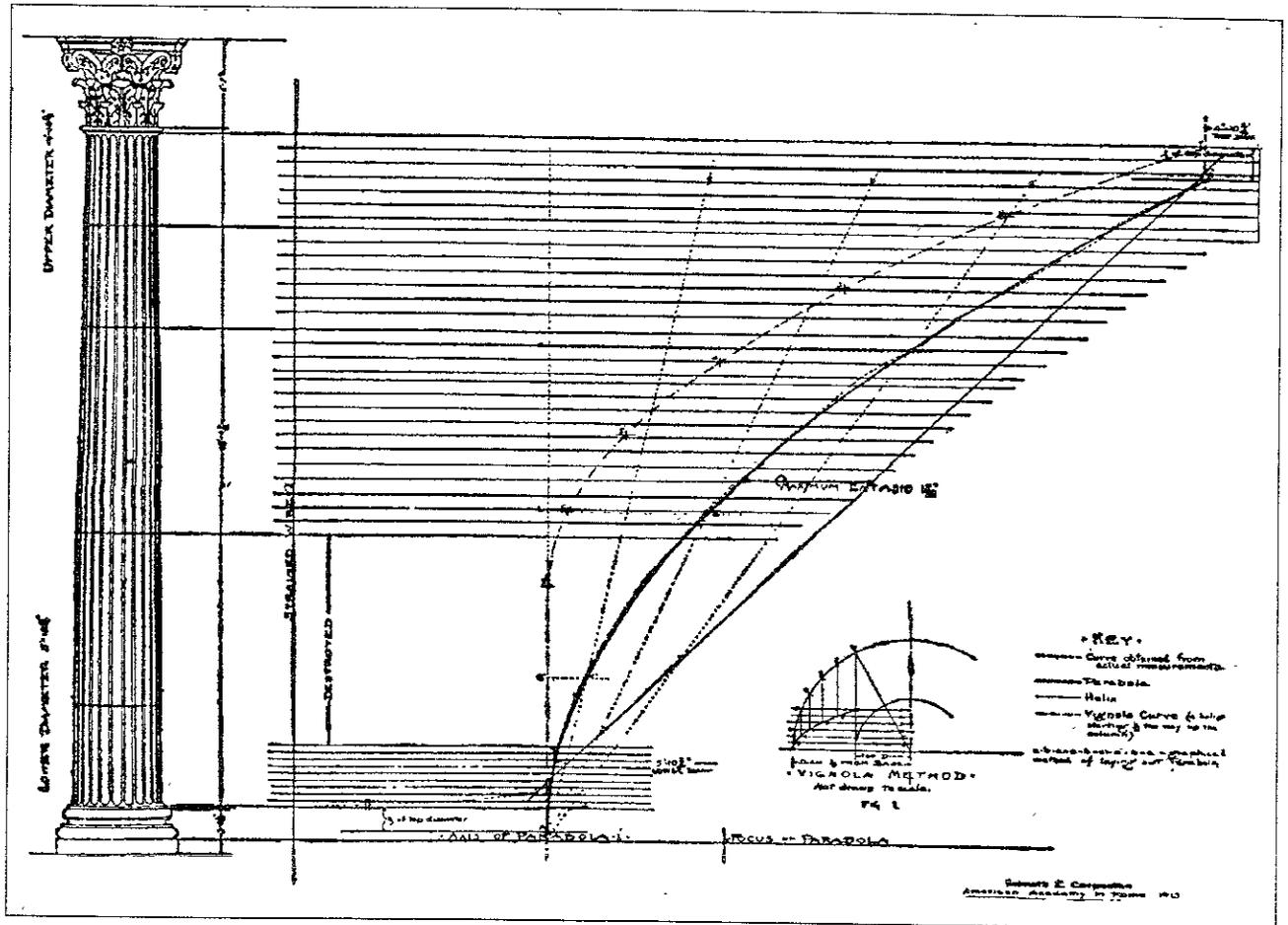
topógrafos pudieron hacer medidas de cientos de kilómetros a través de las planicies y montañas francesas? [Felicien] *La Rose de Nostre Dame*.

Por su interés histórico y su necesidad presente, el dominio del trazo y la geometría de las curvas parece tomar relevancia como un soporte a la evolución de la Arquitectura, con esta intuición y esperanza, el presente texto pretende contribuir a la difusión de este conocimiento.

Vitruvio, en su tratado *Los Diez Libros en Arquitectura*, que es el único manuscrito sobre Arquitectura que se conserva de los Romanos, originalmente no era ilustrado, pero, en sus variadas traducciones del latín, ha sido ilustrado según la interpretación de los autores. Hicky [Morgan] publica una traducción en Inglés de este tratado en 1914, en la que muestra el método de trazo del éntasis según Vignola comparándolo con el éntasis de las columnas del templo de Mars Ultor en Roma y también comparándolo con la curvatura de una parábola. La conclusión de esta placa señala que el método de Vignola, la curva de una parábola y las mediciones físicas son coincidentes



Vignola, retrato procedente de su tratado: *Regola delle cinque ordini* (1562)



Hiparcus matemático griego, es el posible fundador de la Trigonometría, al conocerse que publicó 12 libros con tablas de arcos alrededor del año 140 a.C. Ptolomeo bajo la misma influencia babilónica que Hiparcus, es el primero en dividir el círculo en 360 grados. El concepto trigonométrico de Seno aparece en los trabajos de Aryabhata (500 d.C.), Brahmagupta (628) y Bahaskara en (1150) define la forma de calcular el Seno de cualquier ángulo
[MacTutor]



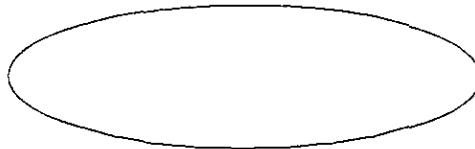
Sir Isaac Newton 1643-1727. Establece las bases del Cálculo Diferencial, varios años antes que en forma independiente lo hiciera Leibniz.

Leibniz por su parte desarrolla la actual notación para el Cálculo Diferencial e Integral, sin embargo nunca pensó en las Derivadas como un límite.

Antecedentes

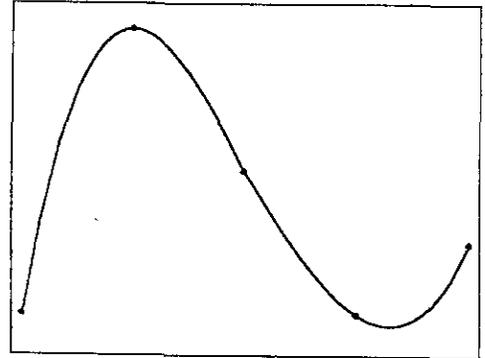
Ciertamente los egipcios y posteriormente los griegos contribuyeron en gran medida al desarrollo de la geometría. Los hindúes contribuyeron al desarrollo de la Trigonometría. El Renacimiento con Galileo, Kepler, Newton, Pascal, abrió senderos enormes al desarrollo de la Geometría, la Matemática y la invención del Cálculo, estableciendo con ello las bases de estas herramientas científicas que invade nuestro tiempo, y que en cierta medida recibimos como conocimientos básicos en la educación media.

Algunas curvas que trataremos fueron desarrolladas en el Renacimiento, en donde además de su mecanismo de trazo aparece su formulación geométrica con avances sustanciales. Consecuentemente la aparición de estas curvas en la arquitectura acontece como resultado del desarrollo geométrico. Por ejemplo la elipse, que fue estudiada por los griegos entre ellos Menaechmus, Euclid y Apolonio, toma relevancia hasta que Kepler (1602) descubre que la órbita de Marte es elíptica y es entonces que se abre el camino para que tiempo después, esta curva pretendiera tener su lugar expresivo en la arquitectura barroca.



En nuestros tiempos el desarrollo de la Matemática, y la Geometría, ha tenido una gran evolución, enfocando su aplicación al servicio de la Física, la Biología, la Ingeniería, pero muy escasamente hacia la Arquitectura, la causa, materia amplia por discutir. A pesar de ello, este desarrollo nos brinda la oportunidad de utilizar sus avances para lograr las curvas y superficies

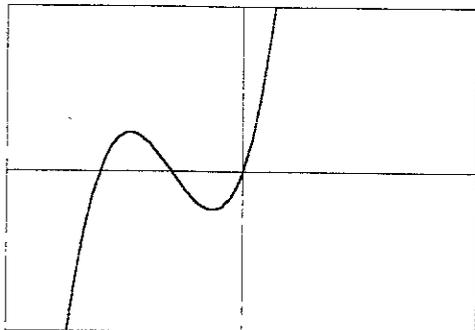
que buscamos. Por ejemplo, en los años sesentas, ante una necesidad derivada del diseño aeronáutico y espacial, surge el desarrollo matemático de "ajustamiento de curvas y superficies" que busca que una curvatura pase suavemente a través de un número de puntos dados, en donde el nivel de continuidad no manifieste cambios



abruptos de pendiente, ni depresiones visuales. En este sentido destaca los trabajos de Ferguson y Bezier los cuales se extienden a curvaturas tridimensionales. Estas bases han permitido el desarrollo de programas de modelado de superficies con los que se hace posible diseñar superficies complejas con gran facilidad, como el fuselaje de un avión o la carrocería de un automóvil. Su aplicación en arquitectura implicaría un sofisticado sistema de trazo y medición para poder lograr una definición física, haciéndolo impráctico y posiblemente más costoso que otros sistemas de uso común.

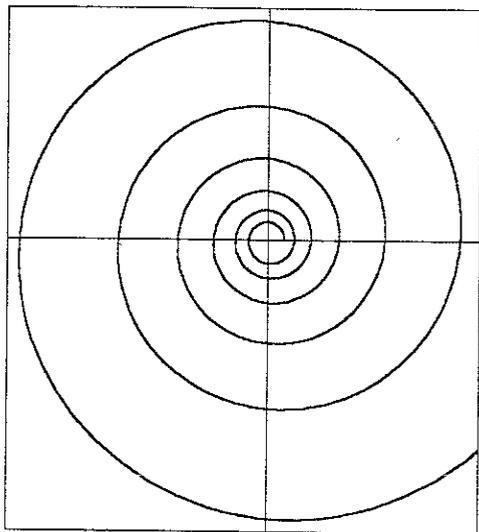
Entendemos que uno de los problemas para complementar geometría de curvaturas complejas está en el trazo, y que solamente con sistemas técnicamente sencillos es posible una aplicación competitiva en Arquitectura.

Curvas algebraicas

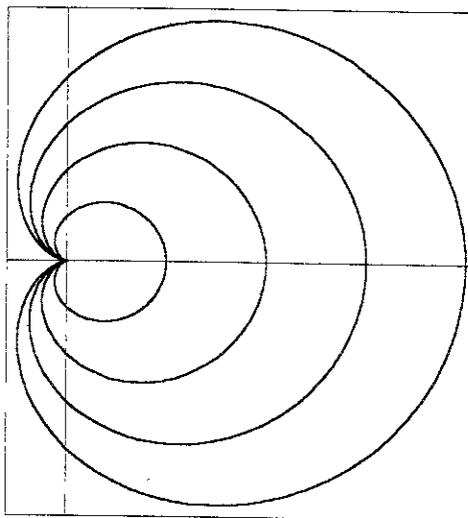


Las curvas algebraicas son aquellas a las cuales se les puede dar una forma implícita de función $f(x,y) = 0$, donde f es un polinomio, en otras palabras, las curvas algebraicas tienen una función matemática. El grado de f es llamado el orden de la curvatura. Por ejemplo las cónicas (círculo, elipse, parábola, hipérbola) son curvas algebraicas de grado dos, el círculo tiene la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$. La parábola cúbica con la ecuación, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en la que a es diferente de 0, es de grado tres.

Entonces entendemos que a las curvas algebraicas se le pueden computar su



geometría por medio de la función correspondiente, y pudiéramos desear que para todas las curvas algebraicas exista un mecanismo de trazo específico como un cordel o un compás en el caso del círculo, o algún otro mecanismo, sin embargo, debemos señalar que no es así, y que existen una gran cantidad de curvas algebraicas para las cuales hasta hoy, se desconoce un sistema o mecanismo de trazo, y cuya aplicación en Arquitectura se ve limitada al tener que transportar el

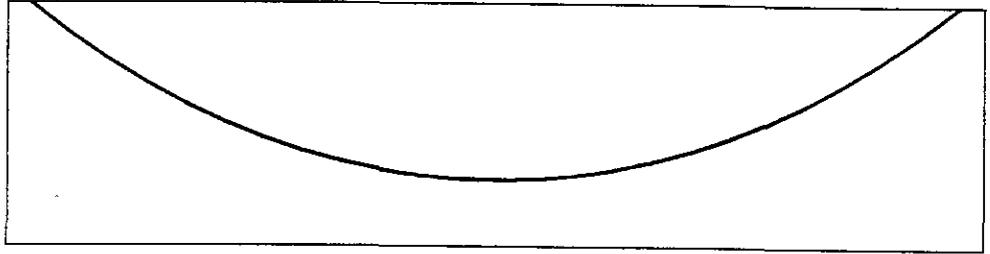


Cardioide
 $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$
 Mecanismo de trazo conocido

cálculo de la geometría a un sistema coordenado, empleando constantes mediciones, volviéndolo poco práctico. Si para el trazo de un círculo tuviéramos que partir de mediciones a unos ejes cartesianos x, y , teniendo que aumentar el número de acciones para lograr una mayor precisión, todo esto comparado con la sencillez de un hilo o un compás.

Espiral logarítmica
 $a(e^{kt} \cos t, e^{kt} \sin t)$
 Mecanismo de trazo desconocido

Curva Catenaria, que corresponde a la curva de una cadena o cable originada por su peso gravitacional, y por tanto, trazable por medio de cadenas



Curvas trazables

Maqueta fonicular de la Iglesia de la Colonia Guell, 1:10, Barcelona. 1898-1915, Antonio Gaudí. Observa que los pesos gravitacionales también están a escala y por lo tanto el esfuerzo de los elementos

Si bien no todas las curvas algebraicas son trazables, de la misma forma no todas las curvas para las cuales existe un mecanismo o sistema de trazo poseen una correspondiente función algebraica. Si pudieras imaginar una curva, definible por un sistema de trazo, para la cual tuviéramos que recurrir al modelo

generado para medir su geometría, en todo caso estaríamos limitados a la precisión del modelo y de los instrumentos de medición. El eminente Arquitecto Catalán Antonio Gaudí, utilizaba modelos gravitatorios, con pesos y elementos a escala, de ello, obtenía la geometría y el esfuerzo de los elementos. Frei Otto recuperó estas ideas para emplearlas en modelos de redes de cadenas, y de ellos poder definir la geometría de sus formas. Un ejemplo de ello es el Pabellón de usos múltiples de Mannheim, Alemania, que cubre una superficie de 4700 m², y su origen geométrico es un modelo de cadenas.

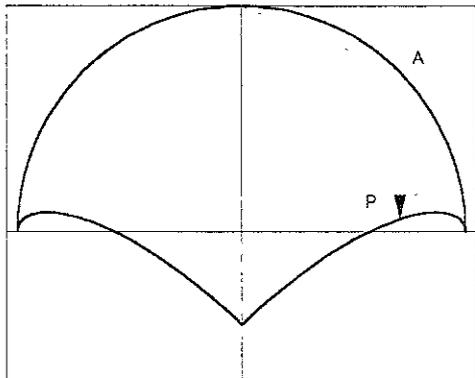


Existen ciertas curvas trazables, que no tienen una función algebraica como antes se ha descrito, pero tienen la posibilidad de ser definibles por una ecuación, en estos casos es necesario resolver la ecuación para cada parámetro específico. Las *Poleógenas* que veremos más adelante son curvas de este caso.

El principal interés del texto se puede centrar en aquellas curvaturas y superficies que tienen una definición matemática y también un sistema de trazo. Aunque para algunos casos del quehacer arquitectónico pudiera bastar con que las curvas sean trazables, entiendo la importancia trascendental de la definición matemática para poderse dibujar o representar las formas y con ello darle dinámica al proceso de diseño, pero además, por la necesidad de poder analizar su comportamiento estructural

Curvas y superficies curvas

Podemos entender que el trazo de una curvatura es un mecanismo singular que le da precisamente a esa curva su singularidad. Podemos aceptar por otro lado, que puede haber ciertos rasgos similares en los mecanismos de trazo en



que, varias curvas compartan esa similitud, pero además, por esa similitud podamos fácilmente concebirlas al pertenecer a esa agrupación de curvas similares. Uno de los objetivos de este documento es producir en el lector esa imagen de curvas que tienen sistemas de trazo similares, con el objeto de conservar una memoria de ellas más fuerte, por esta razón vamos a exponer grupos de curvas, para facilitar la estructura de su conocimiento. La parte inicial de este texto está enfocado al trazo de curvas simples.

Se puede aceptar que el trazo de superficies curvas tridimensionales está apoyado en curvas simples, por ello, buscaremos, luego de comprender los trazos de curvaturas, poder introducirnos al trazo de superficies curvas teniendo el conocimiento precedente. Las superficies curvas pueden sobresalir entre otras características por su posible enfoque o aplicación, sin embargo he decidido agrupar las diferentes curvas y superficies

curvas según ciertas características de trazo común que facilite su entendimiento.

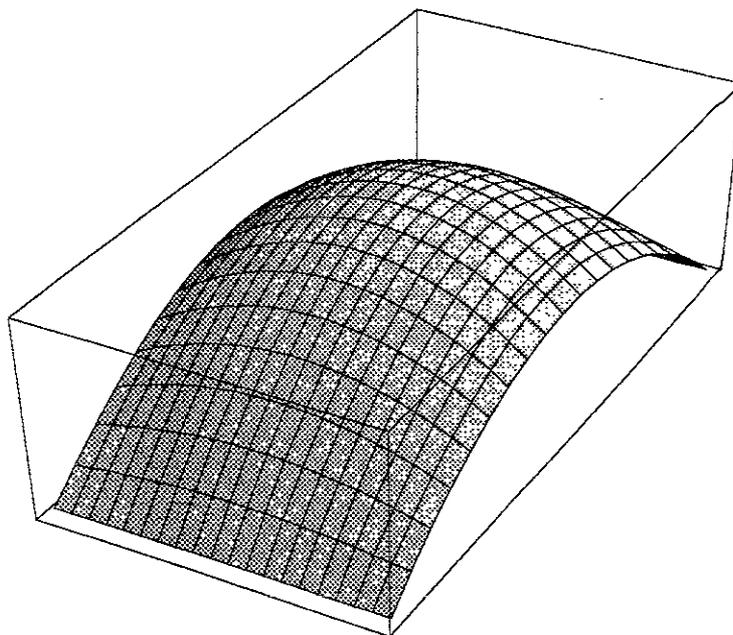
En los capítulos siguientes estudiaremos varios grupos de curvas: Las *Radiales* parten de un foco y la medición de una constante; Las *Gravitacionales* usan elementos suspendidos o plomadas para su trazo; Los *Mecanismos* que son artefactos o mecanismos que generan ciertas curvas; El grupo de *Focos e Hilos* utiliza puntos fijos en el espacio y que ligados por uno o varios hilos generan diferentes geometrías.

Las superficies curvas estarán dadas también bajo grupos característicos: *Regladas*; *de Revolución*; *de Transición*; *Focales*. Probablemente el lector pueda intuir en este momento las características que corresponden a cada uno de estos grupos.

El espíritu de este texto ha buscado ofrecer cierta referencia histórica o cultural de las curvas que referimos, su evolución

Las *Plomoides*, son curvas que se generan por la proyección vertical de una curva mediante un hilo de longitud constante y una plomada en uno de los extremos, al igual que la catenaria de la página anterior, pertenecen a una familia o grupo que podemos concebir como trazables por medio de mecanismos gravitacionales

Bóveda anticatenaria, superficie trazable por medio de cadenas o redes de cadenas



matemática, así como al tratar curvas de relativa antigüedad, la forma en que estas han evolucionado en su aplicación en la arquitectura. De esta manera pretendo mostrar que el trazo, la geometría, y la arquitectura conforman un entendimiento y una reflexión.

Puedo señalar que algunas curvas o superficies curvas no presentan esta característica de reflexión histórica y cultural por ser algo reciente, o en tres casos (poleógenas, plomoides y elipzógenas) curvas nuevas que son una aportación de conocimiento de esta investigación. En todos los casos he procurado que las curvas o superficies elegidas en este texto, posean un buen potencial de aplicación en arquitectura.

Algunas curvas y superficies curvas poseen una formulación matemática ampliamente estudiada, en la que me limito simplemente a exponerla, mas sin embargo, otras curvas presentan el reto de dicha formulación matemática, es en este punto donde se ha requerido cierta profundidad matemática y de programación para su desarrollo, quizás algunos de mis lectores con una preparación arquitectónica tradicional, generalmente deficiente en estos campos, encuentren cierta aparente dificultad, sin embargo, puedo advertirles que la superación de ello resultará en recompensa.

El texto busca despertar la motivación en el estudiante y el arquitecto hacia el campo curvas y superficies curvas que posean sistemas de trazo en obra, pero, a partir de él o bien como un documento de referencia, implica el reto de poder implementar las ecuaciones de las curvas o superficies curvas, y los programas para calcular algunas geometrías dentro de los programas de dibujo o análisis estructural, para así, convertirlo en herramienta de diseño. Por otro lado, se puede señalar

también que los mecanismos de trazo que se esbozan, requieren de una implementación física en obra para convertirlos en herramienta constructiva. Superada la tarea de estas dos implementaciones, se fortalecerá la esperanza de una contribución a la evolución positiva de la Arquitectura.

Curvas Radiales con una constante

Esta es la primera de varias secciones dedicadas al estudio de curvas simples; en éstas se exponen diferentes sistemas de trazo para ciertas curvaturas, que posiblemente tienen un potencial de aplicación en arquitectura.

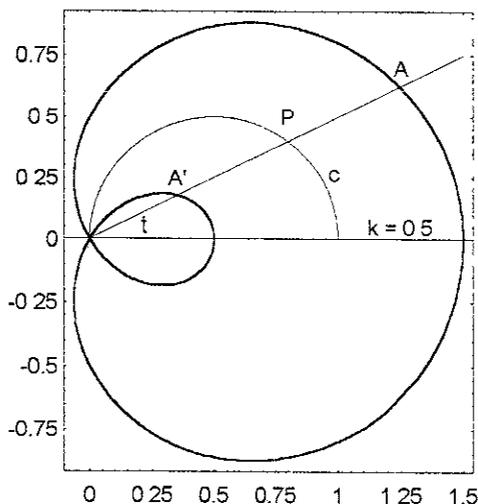
Las curvas radiales con una constante, es una clasificación arbitraria que atiende a cierta particularidad de su forma de trazo.

La característica fundamental de estas curvas es que existe un *punto* al que está sujeto un cordel o bien de donde parten unas radiales sobre las cuales se hacen ciertas mediciones, y donde hay una dimensión constante k que toma lugar en esas mediciones.

Limasón de Pascal
Cardioide
Cisoide de Diocles
Concoide de Nicómedes
Estropoide

Esta concepción de trazo en donde existen centros o puntos fijos, así como el manejo de constantes, posiblemente tiene su manifestación más clara en las curvas griegas que analizo. Es posible intuir que el manejo del compás para el trazo de arcos, así como, del instrumento para conservar la medida de las constantes, era en aquellos tiempos un procedimiento común.

Limasón de Pascal



Limasón para $k = 0.5$ y diámetro $a = 1$, observece la ojiva que se forma en el interior.

Se traza un círculo C de diámetro a . A partir del punto fijo O localizado en algún lugar del círculo, se trazan una serie de líneas radiales que interceptan al círculo en el punto P , a partir de P y en ambas direcciones sobre la línea de trazo se mide una magnitud constante k que determina el lugar geométrico de la curva en A y A' .

Si C tiene un diámetro a , y centro en $(0.5a, 0)$, el limasón tiene la ecuación polar

$$r = a \cos t + k$$

Siendo la ecuación cartesiana

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = k^2 (x^2 + y^2)$$

Si $k >= 2a$ entonces el área del limasón es

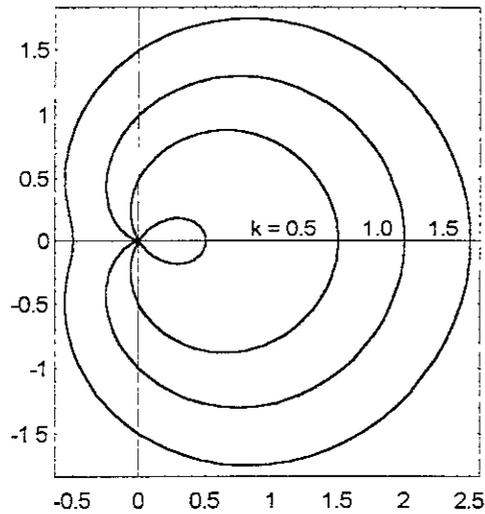
$$(2a^2 + k^2) \pi$$

Si $k = a$ entonces el área de la vuelta interior es

$$a^2(\pi - 3.67423)$$

y el área entre las vueltas es

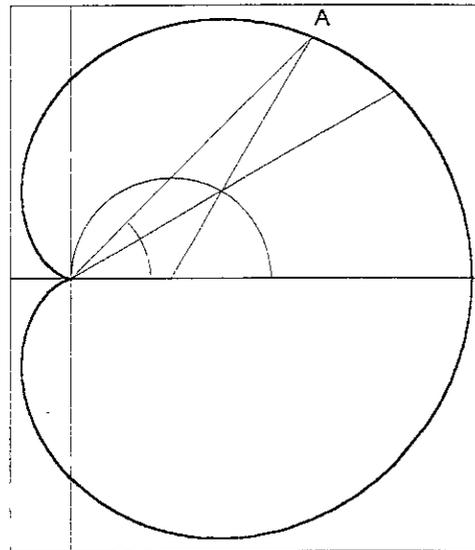
$$a^2(\pi + 5.19615)$$



Bivalvo (derecha)

El valor de k/a controla la forma, y existen dos casos interesantes. Para $k = a$ obtenemos el **cardioide** (ver cardioide en esta misma sección), la cual es una curva que puede ser usada para trisectar un ángulo arbitrario alfa: Se define por una línea de A al centro del círculo en la intersección con C . La trisección del ángulo

Método para trisectar un ángulo usando el cardioide, $k = a$



fue uno de los grandes problemas que ocuparon a los griegos.

El limasón de Pascal fue descubierto por Étienne Pascal (padre de Blaise Pascal) y nombrada por otro francés Gilles-Personne Roberval en 1650, cuando la usaba como ejemplo de sus métodos para dibujar tangentes p.e diferenciación.

El nombre 'limasón (limaçon)' viene del latín *limax* que significa "caracol" (clase bivalvos).



A Dürer en realidad se le debería haber dado el crédito del descubrimiento de la curva, ya que él dio el método de dibujo que aquí describimos, sin embargo no le llamó limasón, en *Underweysung der Messung* publicado en 1525.

Cardioide

El cardioide o curva en forma de corazón, es un caso del limasón de Pascal, referirse a esta curva para su trazo.

[Gasson] comenta que el cardioide fue primeramente desarrollado por Roemer (1674) señalando que es un ejemplo de un epicicloide, que es una forma de ruleta o curva espirógrafa.

[O'Connor] señala que el nombre cardioide fue primeramente usado por Catillón en un artículo en *Philosophical Transactions of the Royal Society* en 1741, su largo fue obtenido por La Hire en 1708:

$$s = 16 a$$

Por lo tanto él reclamaba su descubrimiento, sin embargo al ser un caso del limasón de Pascal, debemos atribuirlo a Pascal.

Ecuación cartesiana

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4 a^2 (x^2 + y^2)$$

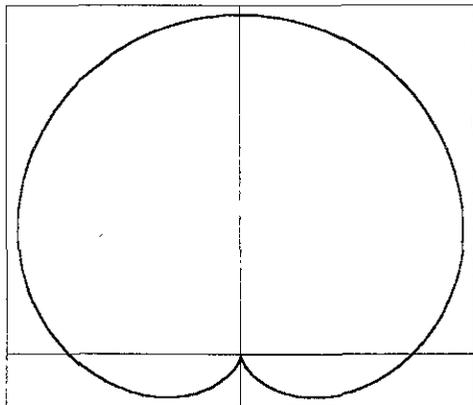
Ecuación polar

$$r = 2 a (1 + \text{Cos } t)$$

Ecuaciones paramétricas

$$x = a (2 \text{Cos } t - \text{Cos}(2 t))$$

$$y = a (2 \text{Sin } t - \text{Sin}(2 t))$$



El Cardioide dispuesto en forma vertical, pudiera ser utilizado para el trazo de arcos, cañones y cúpulas.

Cisoide de Diocles

Esta curva fue inventada por Diocles alrededor de 180 a.c. en conexión con la duplicación del cubo por medio de métodos geométricos. En los comentarios de Arquímedes sobre la esfera y el cilindro es que aparece la cisoide y es atribuida a Diocles.

El nombre aparece también en los trabajos de Geminus cerca de 100 años después, Huygens y Wallis encontraron en 1658 el área entre la curva con su asíntota.

$$3 \pi a^2$$

Si tenemos dos rectas paralelas L, L' separadas por un círculo C de diámetro a , el punto O es la intersección de C con L . De O se traza una recta que intersecta al círculo en A y a L' en B , sobre esta recta, la distancia OA es la misma de BP , siendo P el lugar geométrico de la curva.

Newton desarrolló otro método para el trazo de la cisoide: usando dos segmentos de líneas de igual longitud dispuestas en ángulo recto (una escuadra). Si éstas se mueven de tal manera que una de las líneas siempre pasa por un punto fijo y el final del otro segmento de línea se desliza sobre una línea recta, entonces el punto medio del segmento de línea que se desliza traza una cisoide de Diocles.

En mi opinión el primer método tiene una aplicación mas evidente y se tiene mayor control geométrico de la forma que se busca.

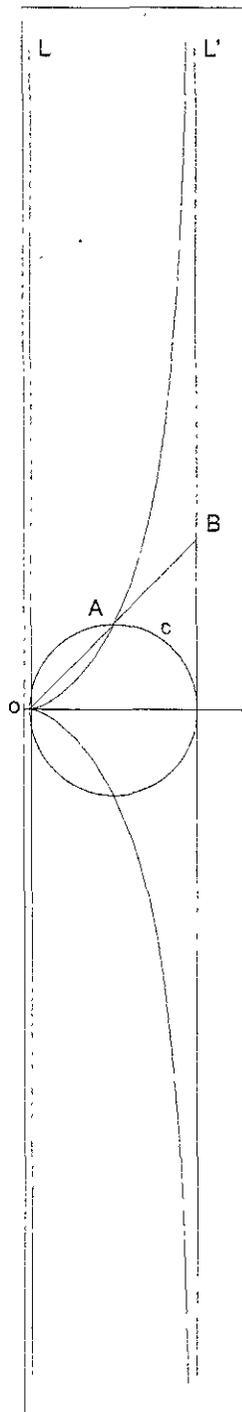
Ecuación cartesiana

$$y^2 = x^3 / (2 a - x)$$

Ecuación polar

$$r = 2 a \text{Tan } t \text{Sin } t$$

Si se toma a O como centro de inversión, la cisoide se invierte en una parábola. Por



esta cualidad podemos entender que ambas curvas están relacionadas.

Recordando la gráfica de Hicky [Morgan], expuesta en la Introducción. (*El trazo una forma de entender la Arquitectura del Pasado*), página 11, sabemos que las mediciones físicas de las columnas de Mars Ultor coinciden con la curva de una parábola, y ahora encontramos aquí que la parábola es la inversión de la cisoide.

En base a esta relación y en la intuición que estas formas de trazo eran comúnmente entendidas en el oficio constructivo de los griegos, busco probar que la cisoide fue utilizada por ellos para el trazo del éntasis de las columnas, para tales efectos debo encontrar si existe algún parámetro de proporcionalidad.

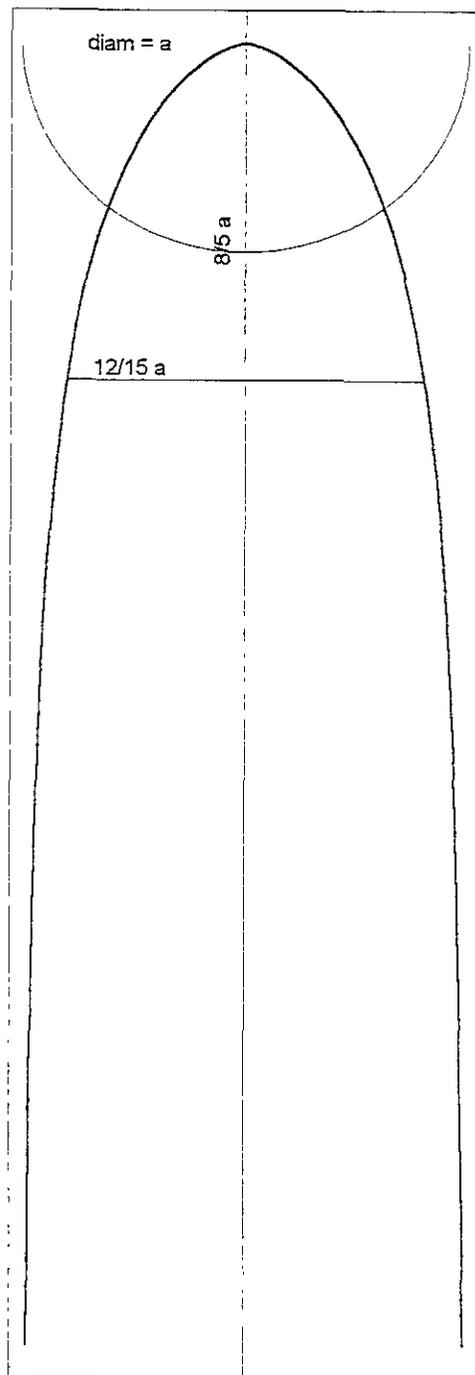
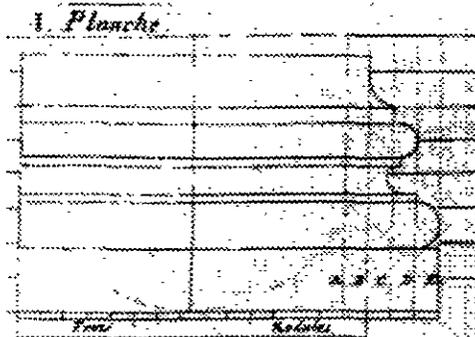
La ecuación cartesiana nos puede servir para tal efecto

$$y := \text{Sqrt}[x^3/(a-x)]$$

Vamos a suponer que el diámetro de la base de la columna corresponde a el radio del círculo del trazo de la cisoide (a). Sabemos que en algunos tratados se menciona que el diámetro de la corona es $3/4$ de la base, sin embargo es hasta Claude Perrault en 1676 cuando se señala que el diámetro de la base de la columna se divide en quinceavos y por lo tanto la cifra de $3/4$ parece ilógica, pues no corresponde a la nueva

Trazo del éntasis de una columna (derecha) basada en una cisoide, cuya cúspide corresponde a $12/15$ del diámetro a y se encuentra a $8/5$ del origen de la cisoide, de esta manera corresponde a proporciones basada en quinceavos.

Segmento de la lámina 1 de Claude Perrault, 1676, en la que se muestra la base de una columna Dórica dividida en 15 partes.



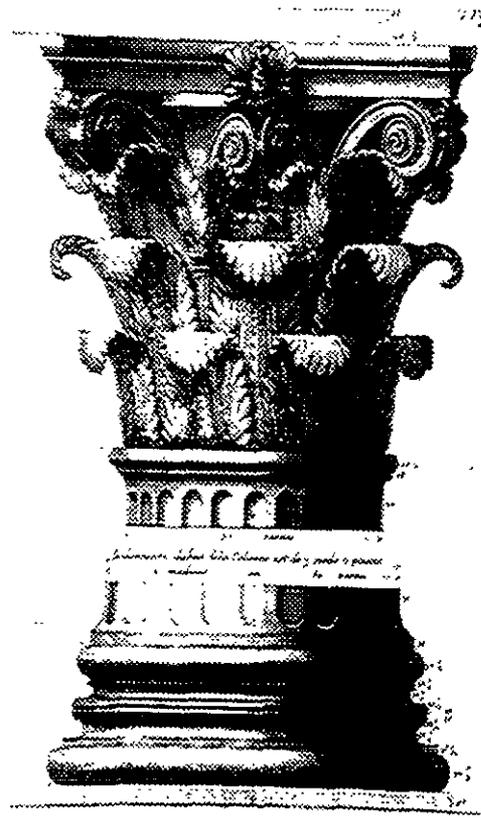
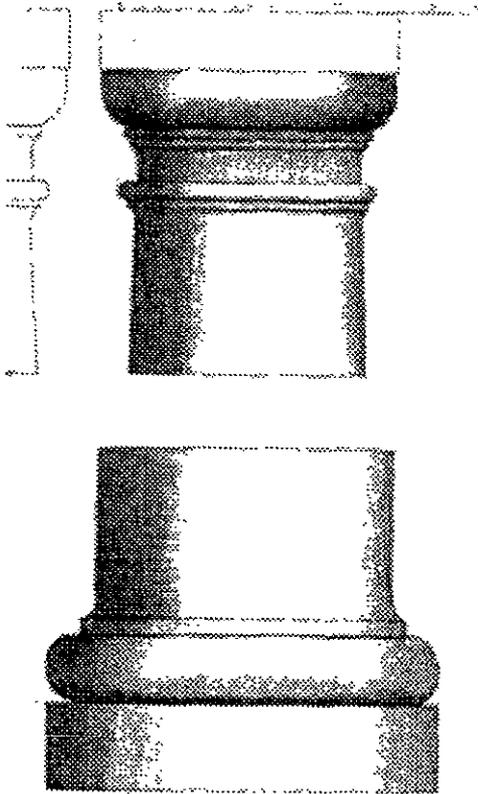
modulación de quinceavos, es entonces que siguiendo esa teoría podríamos suponer que el diámetro de la corona es $12/15$ partes de la base. En esta consideración se pueden buscar las coordenadas de y que corresponden a $12/15$:

$$\text{cissoidey}[12/15,1] = 8/5$$

Lo cual resulta en $8/5$ de a , que es una magnitud modular, y por lo tanto se puede corroborar la lógica del sistema de trazo.

En cuanto a la base, como hemos considerado que el diámetro de la columna es igual a a y como la cisoide cuando $x = a$ se vuelve infinita, entonces en alguna coordenada inferior a a , por ejemplo $0.99 a$ se encuentra la coordenada de la base.

Todo esto quiere decir que la cisoide, por su facilidad de trazo, pudo haberse utilizado para el trazo de las columnas en sus diferentes modalidades, aunque la aparición de esta curva se da alrededor de 180 a.c., por los comentarios de Arquímedes, y en el entendimiento de una arquitectura griega que data de tiempos anteriores, podríamos plantear dos teorías, la posible existencia de esta curva con anterioridad, o la existencia de otros métodos de trazo anteriores, quizá parecidos a éste.



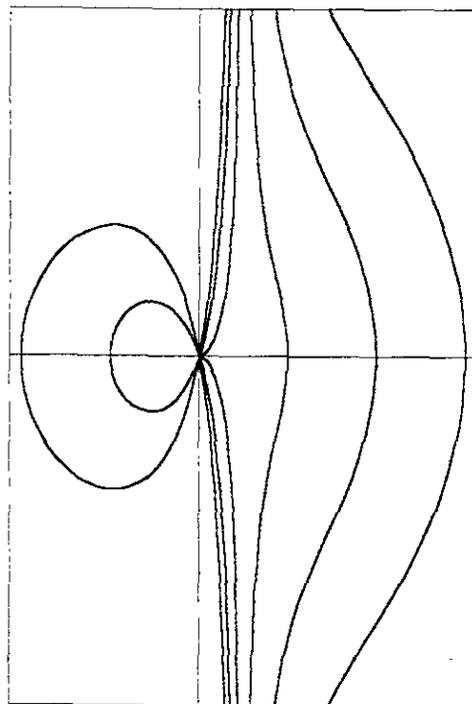
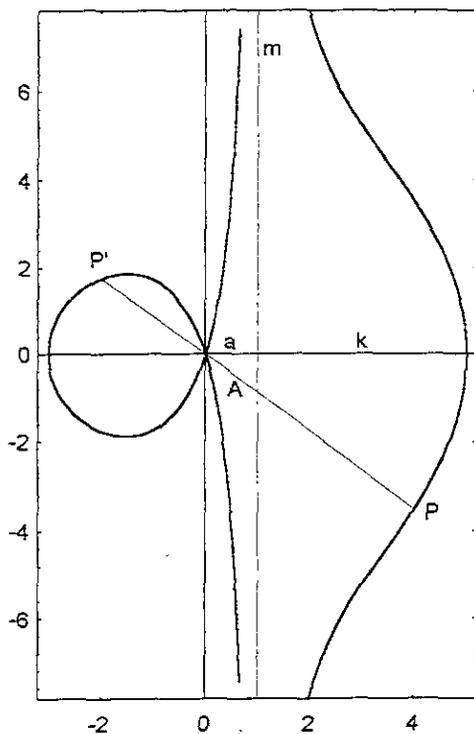
Izquierda. Columna Toscana de acuerdo a Serlio.
Derecha, columna Corintia interior, Panteón, Desgodets, *Les Édifices Antiques de Rome*

Concoide de Nicómedes

Nicómedes fue un matemático griego que vivió alrededor del año 180 a.c. contemporáneo a Diocles. Al igual que Diocles trató de encontrar un método

[O'Connor] comenta que la concoide fue usada en la construcción de la Arquitectura griega y señala que la sección de las columnas estaba hecha en la forma de la curva de la ojiva de la concoide.

Concoide con $k = 4$ y $a = 1$, a la extrema derecha,
Concoide con constante $k = 1,3$ y 5



geométrico para la duplicación del volumen del cubo.

La concoide significa "forma de concha", siendo ésta la principal invención de Nicómedes. Fue una curva favorita de los matemáticos del siglo 17. Newton decía que debería ser una curva estándar. La curva puede ser usada como fue su intención para resolver el problema de la duplicación del cubo y la trisección de un ángulo.

Siendo la concoide y la cisoide de Diocles curvas contemporáneas y relativamente similares, se puede aceptar la teoría que ambas curvas se usaron en las construcciones griegas de esa época, abriéndose un nicho para futuras investigaciones en este sentido.

Pero de confirmarse lo anterior, se podrá entonces señalar su importancia, ya que desde el Renacimiento y todas sus etapas académicas posteriores, la enseñanza de los órdenes siempre estuvo basado en modelos, y jamás se mencionó que las



Almeja

formas correspondían a una formulación matemática, con un método de trazo perfectamente definido.

Partiendo de dos rectas perpendiculares, en este caso el eje (x) y la recta m , cuya intersección es el punto $C(a,0)$, se trazan rectas radiales partiendo del Origen $O(0,0)$, que cruzan a la recta m en A , a partir de A y en ambas direcciones de la radial se miden una constante k que definen el lugar geométrico de la curvatura en $P(x,y)$ y en P' opuesto a la recta m .

Como se puede observar en la figura, se generan dos curvas una en forma de loma y otra con una ojiva, ambas curvaturas tienden a unirse a la recta m , que es su asíntota.

Observa en la figura izquierda, que cuando $k = a$, la ojiva desaparece. Es precisamente este caso en el que es fácil imaginar el trazo del fuste de las columnas. Si consideramos que a es la diferencia entre los radios de la base y el fuste, y considerando que $k = a$, el trazo del fuste esta dado con el método de trazo de esta curva.

La curva de loma se puede utilizar para el trazo de arcos y bóvedas, con relativa facilidad ya que su implementación en obra implica únicamente la definición de un eje vertical, y una línea o plano horizontal, al que se mide la constante, en dirección de la radial específica.

Ecuación cartesiana

$$(x - b)^2 (x^2 + y^2) - a^2 x^2 = 0$$

Ecuación polar de la loma

$$r = k + a \operatorname{Sec} t$$

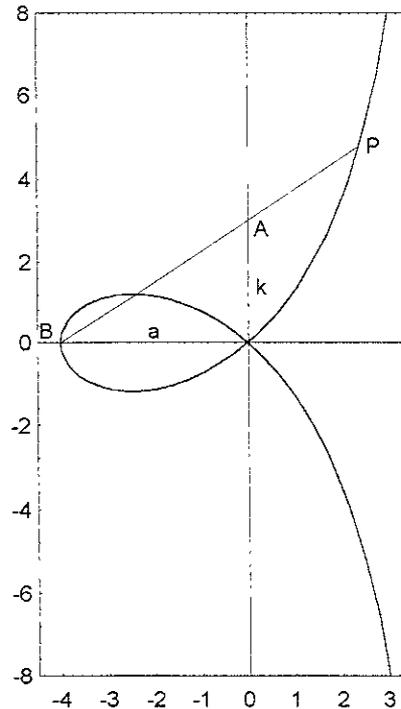
Ecuación polar de la ojiva

$$r' = k - a \operatorname{Sec} t$$

Cuando t se aproxima 90 grados, el resultado se vuelve infinito, es pues necesario tener precaución con el parámetro t .

Estropoide

El estropoide o estropoide derecho aparece por primera vez en los trabajos de Isaac Barrow en 1670. Sin embargo Torricelli describe la curva en su carta alrededor de 1645.

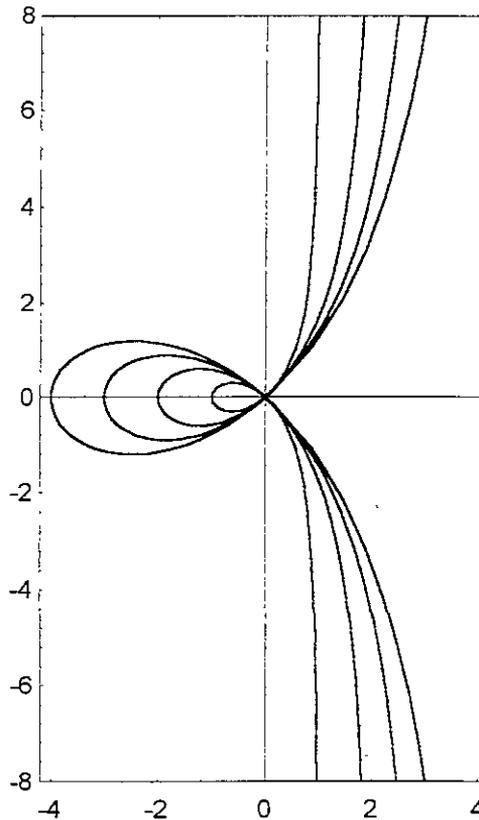


Partiendo de dos rectas perpendiculares, en este caso los ejes coordenados x,y , se localiza un punto fijo B sobre el eje x cuyas coordenadas son $(-a,0)$, a partir de B se trazan rectas radiales que cruzan al eje y en A , sobre esta recta radial se mide una magnitud igual a la distancia de A al origen $(0,0)$ en ambos lados de la radial, definiendo así el lugar geométrico P y P' de la curva.

Si el origen O es $(0,0)$ la estropoide satisface la propiedad $AP = AP' = OA$

Si trazamos una recta paralela al eje y en $(a,0)$, se podrá observar que las ramas de la curva tienden a unirse a esta recta en el infinito (asíntota). Fenómeno que igualmente se observa en la cisoide y en la concoide. Estas tres curvas en este sentido son similares.

Serie de Estropoides
donde el parámetro a es
1,2,3,4



El estropoide tiene la ecuación

$$(x-a)y^2 = -x^2(x+a) \text{ con } a < 0$$

o bien $y^2 = x^2(a-x)/(a+x)$

Ecuación polar

$$r = -a \cos 2t \sec t$$

Ecuación paramétrica en

$$x = a(t^2 - 1)/(t^2 + 1)$$

$$y = at(t^2 - 1)/(t^2 + 1),$$

tal que $t = y/x$

El área de la vuelta es

$$a^2(4 - \pi)/2$$

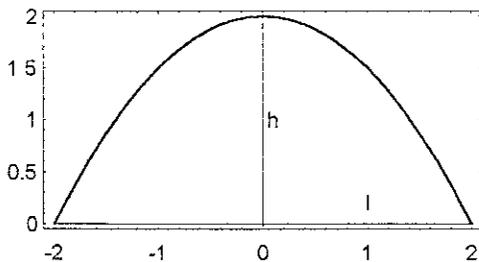
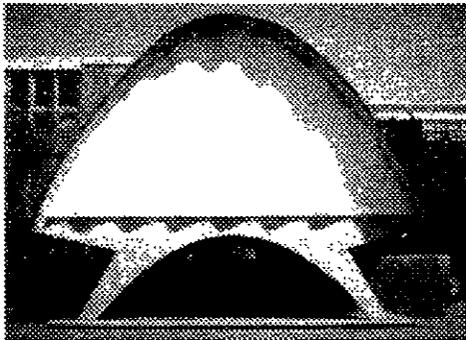
y el área entre la curva y su asíntota es

$$a^2(4 - \pi)/2$$

Esta curva presenta posibilidades de aplicación en cubiertas, y envoltentes usando un segmento de su lado derecho en simetría.

Curvas Gravitacionales

He denominado Curvas Gravitacionales a aquellas que dependen de la fuerza gravitacional para realizar su trazo, ya sea que se usen plomadas, cadenas suspendidas o cordeles sometidos a cargas gravitacionales.



Parábola

Se llama parábola a un lugar geométrico de todos aquellos puntos tales que su distancia desde un punto fijo (foco) y desde una recta fija (directriz) sean iguales

La parábola fue estudiada por Menaechmus que era discípulo de Platón y Eudoxus. En un intento por duplicar un cubo, dado uno de sus lados, en otras palabras trataba de resolver $x^3 = 2$ por métodos geométricos, de hecho Menaechmus no sabía que por métodos geométricos de regla y compás no se podía resolver esto Menaechmus lo resolvió al encontrar la intersección de dos parábolas $x^2 = y$ y $y^2 = 2x$

Euclides escribió acerca de la parábola y su nombre actual se debe a Apolonio. El foco y la directriz fueron consideradas por Pappus Pascal consideró a la parábola como una proyección de un círculo y Galileo mostró que los proyectiles seguían la trayectoria de una parábola.

Gregory y Newton consideraron las propiedades de una parábola tal que reflejaban rayos paralelos de luz hacia el foco

Ecuación cartesiana

$$y = ax^2 + bx + c$$

En el ejercicio cotidiano se buscarán parábolas para un determinado ancho $2l$ y un alto h , entonces el parámetro

$$a = l^2/h$$

donde c es el desplazamiento vertical de la curva sobre el eje y el término bx se puede descartar, quedando la ecuación paramétrica así

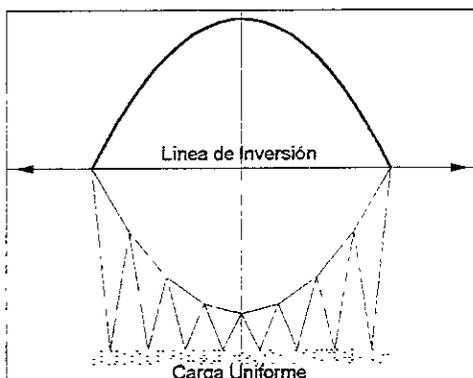
$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= ax^2 + c \end{aligned}$$

Peabellón de Rayos

Cósmicos,
Ciudad Universitaria, 1951,
Diseño Arquitectónico,
Jorge González Reyna,
Estructura, Félix Candela.
La cubierta y los arcos de apoyo son parábolas

Parábola con parámetros:
 $a = -0.5$, y $l = 2$

Es importante señalar que la carga uniforme sobre un cable como lo es un puente colgante, da como resultado una **parábola**. El diagrama de momentos de una viga con carga uniforme es una parábola. Cuando la carga significativa es un peso uniformemente repartido, el funicular de esfuerzos es una parábola, y por ello es la forma que responde a este tipo de carga.



de cargas uniformes gravitacionales, condición bastante común en las edificaciones, se preve que su utilización será extensa para resolver arcos y bóvedas cuando tratemos superficies parabólicas.

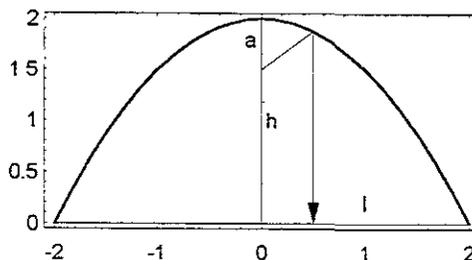
Donde la inversión de la curva del trazo anterior se vuelva impráctico, se puede utilizar otro método de trazo, posiblemente aplicable a arcos parabólicos de gran magnitud que consiste en utilizar una recta horizontal (cuando el eje de la parábola es vertical) que es el ancho de la base de la parábola. Se utiliza un cordel de magnitud constante que en un extremo está sujeto al foco de la parábola y en el otro se tiene una plomada que al desplazarse debe tocar la recta base, el lugar geométrico donde la inflexión del cordel de trazo toma este equilibrio se localiza la curva. Cuando en este sistema en vez de una recta base utiliza una curva circular, ya sea cóncava o convexa la curva que se genera es una hipérbola.

Para hacer el trazo anterior se debe calcular la posición del foco de la parábola, la cual corresponde a la magnitud a mencionada en la ecuación principal, y la cual es medida en el centro desde el lomo de la parábola :

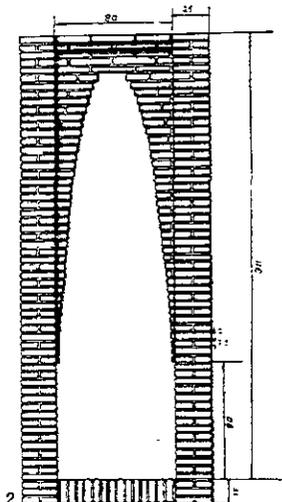
$$a = l^2 / 4h$$

donde l es la mitad de la base y h la altura de la parábola. El largo del cable incluyendo plomada se obtiene de:

$$k = h + a$$



Sección arco del pasillo,
Convento Teresiano,
Antonio Gaudí, Barcelona,
1890, Dibujo del Gaudí



Uno de los métodos de trazo más simples para una parábola es colgar a todo el largo de un cordel que llamamos colgante un peso uniforme, a manera de tabla o algo similar. La unión de la tabla con el cable colgante se realiza por medio de otro cable a manera de zigzag en la que las uniones son poleas o articulaciones que permiten a este cable correr libremente. Con este método si se desea modificar la altura de la parábola basta con jalar los extremos, y el ajuste de la curva se da en consecuencia.

Como seguramente estaremos usando el trazo de la parábola para construir un arco o una bóveda y el sentido del elemento es inverso al trazo que nos da la colgante es necesario transponer el trazo verticalmente sobre alguna recta horizontal o inclinada.

Dado que la parábola corresponde efectivamente al funicular de esfuerzos

Catenaria

Es la forma que toma una cadena perfectamente flexible suspendida de sus extremos en la que la gravedad actúa sobre el peso de sus elementos. Para trazar una catenaria lo que se necesita es una cadena o cable perfectamente flexible.

Galileo Galilei (1599) fue el primero en hablar de esta curva, sin embargo Galileo tuvo una confusión al considerar que la curva de una cadena era igual que una parábola, lo cual fue desmentido en 1691 cuando se obtuvo su ecuación por Leibnitz, Huygens y Johann Bernoulli, en respuesta al reto que les puso Jacob Bernoulli para encontrar la ecuación de curva de la cadena.

$$y = a \operatorname{Cosh}(x/a)$$

Huygens fue el primero en usar el término 'catenaria' en una carta a Leibnitz en 1690 y David Gregory escribió un tratado sobre la catenaria en ese mismo año.

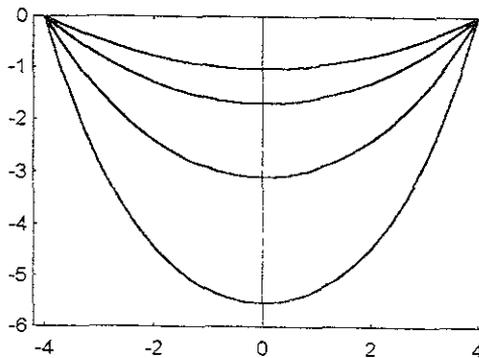
Al entender que la forma catenaria es resultado de la acción de la gravedad, podemos aceptar que las formas anti-catenarias responden favorablemente a la gravedad, cuando el peso de la forma es la única carga significativa, como, por ejemplo un arco o una cubierta que tiene como carga a su propio peso solamente.

Señalamos en la sección anterior que la carga uniforme sobre un cable como lo es un puente colgante, da como resultado una parábola a diferencia de una carga unitaria del objeto a lo largo de su propia curva.

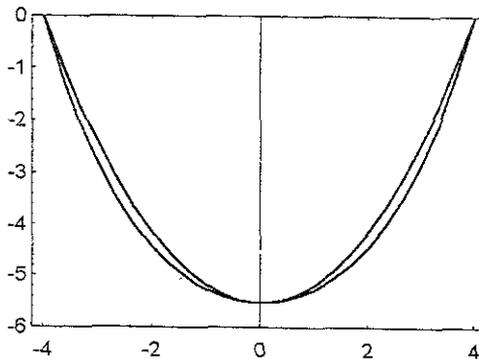
La parábola es una sola curva, y estaremos generalmente ante una sección relativa de dicha curva. A diferencia, la catenaria es una curva que tiene un comportamiento evolutivo en sus diferentes proporciones, pudiéndose observar que en cierto

segmento de esas proporciones es muy parecida a la parábola.

Cuando el esfuerzo significativo es el propio peso, la catenaria es aplicable en Arquitectura, para generar arcos, cañones, y bóvedas anti-catenarias, teniendo la gran ventaja de un trazo muy sencillo, solamente la inversión vertical de la curva de una cadena flexible.



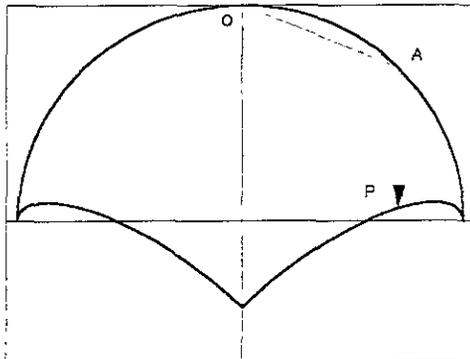
Serie de Catenarias con parámetro $a = 2,3,5,8$, esta última la de menor altura



La curva interior es una parábola, la exterior una catenaria, ambas con las mismas proporciones en sus extremos. Esta diferencia se acentúa en relación a la altura de la curva

Plomoides

Plomoide que utiliza un segmento de círculo como curva de apoyo, teniendo como foco $(0,r)$ siendo la longitud del cordel la raíz cuadrada de $2r^2$



Los plomoides son mecanismos de trazo que se apoyan en una curva para su trazo. Se utiliza un cordel de dimensión constante y uno de sus extremos se sujeta a un punto fijo o , que puede ser un lugar de la curva de apoyo o no. Se restira el cordel hacia algún punto de la **curva de apoyo**, y en el otro extremo del cordel que tiene una **plomada** al caer verticalmente, define el lugar geométrico de la plomoide. Deberá existir una proporción más o menos lógica entre la dimensión del cordel y la curva de apoyo para lograr geometrías interesantes. Las posibilidades formales que genera este concepto de trazo son muy amplias, y quedan abiertas a la exploración del lector, aquí muestro algunos ejemplos.

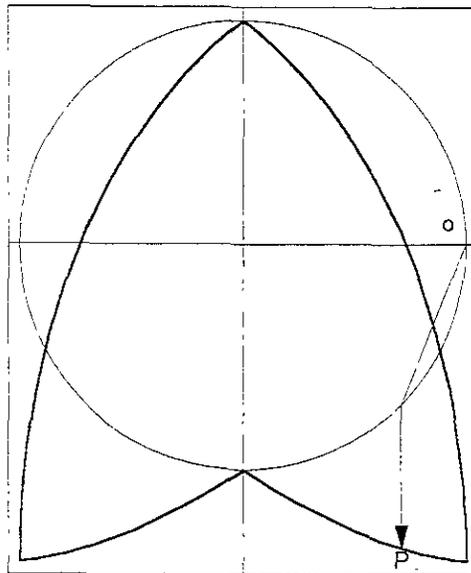
Un caso específico es cuando la curva de apoyo es una recta, en cuyo caso la geometría generada es de otra recta siempre que el foco esté dentro de la recta de apoyo. Otro caso muy particular es cuando la curva de apoyo es una parábola dispuesta verticalmente, y además el punto fijo de la plomoide coincide con el foco de la parábola en cuyo caso por definición geométrica, la curva generada es una recta paralela a la directriz de la parábola, es decir una recta horizontal. Posiblemente existan muchos casos particulares en que la plomización de una curva genera otra curva del repertorio

conocido, pero en general se generan curvaturas muy variadas.

Vamos a ver un ejemplo: si consideramos un medio círculo correspondiente a la mitad superior de un círculo, en donde definimos al punto fijo como la parte central superior, y definimos el largo del cordel como la diagonal del punto fijo al extremo del semicírculo, es decir $\text{Sqrt}[2r^2]$. La plomoide generada es una especie de paraguas invertido como se ve en la gráfica.

Para computar la geometría de la plomoide es necesario calcular la distancia del punto fijo al punto de la curva de apoyo, de ahí, verticalmente calcular las coordenadas del lugar geométrico del plomoide considerando la magnitud del cable restante.

La implementación de una función genérica para obtener la geometría de plomoides en Matemática, se puede proponer de la siguiente forma, en la que se considera a $\{cx, cy\}$ como una lista de las coordenadas de la curva de apoyo



Plomoide generada por un círculo como curva de apoyo, teniendo como focos $(r,0)$ y $(-r,0)$ y siendo el longitud del cable $\text{Sqrt}[2r^2]$

(generalmente obtenidas de la función de dicha curva), $\{fx, fy\}$ las coordenadas del punto fijo, y l el largo del cable.

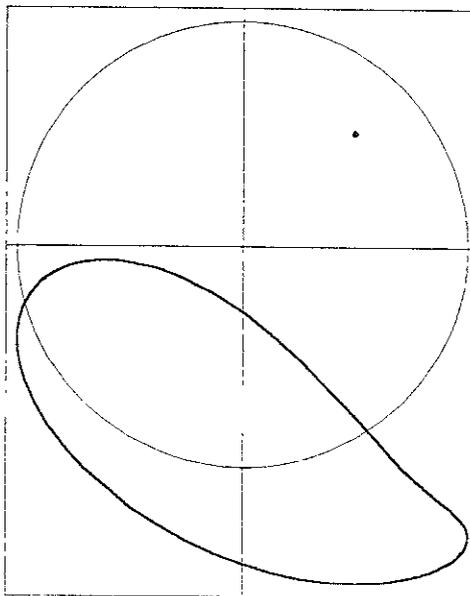
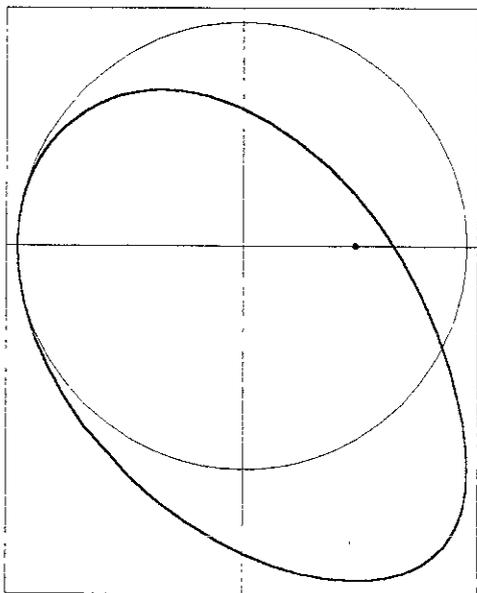
```
plomoide[{cx_,cy_},{fx_,fy_},l_]:=
Module[{c,d},
c=Sqrt[(cx-fx)^2+(cy-fy)^2];
d=l-c;
{cx,cy-d}]
```

Por otro lado tenemos la implementación de la función del círculo como sigue:

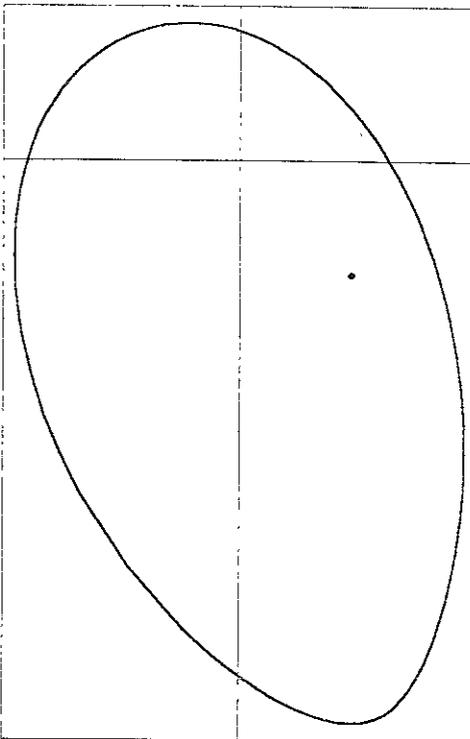
```
circle[a_] [t_]:= {a Cos[t], a Sin[t]}
```

Con estas dos funciones podemos calcular una plomoide que tiene como apoyo un círculo de radio = 1, teniendo como punto fijo $\{0.5,0\}$ y como largo del cable = 1.5 (figura inferior)

```
plomoide[circle[1][t],{0.5,0},1.5]//
Evaluate, {t,-Pi,Pi}
```



Debo confesar mi predilección por los mangos, sobre todo los de «manila», esta belleza corresponde a un plomoide con punto fijo en $\{0.5,0.5\}$ y un cordel = 2. Se puede observar que la aparición de secciones concavas y convexas.



Punto fijo en $\{0.5,-0.5\}$ y largo de cordel = 2

Serie de Plomoides

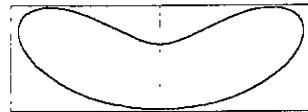
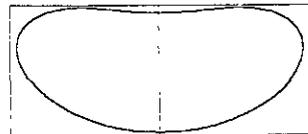
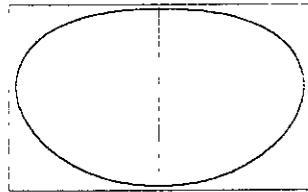
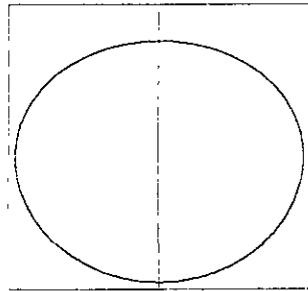
Estás invitado a hacer tus propias exploraciones con este método de trazo, donde podrás encontrar un amplio universo, posiblemente aplicable en la medida de tu particular experimentación.

Serie Plátano:

Curva apoyo, círculo $r = 1$

Fijo $\{0, 0.2 \dots 0.8\}$

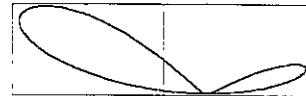
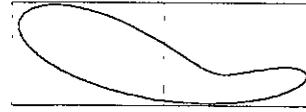
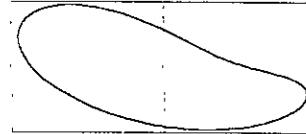
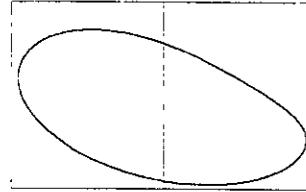
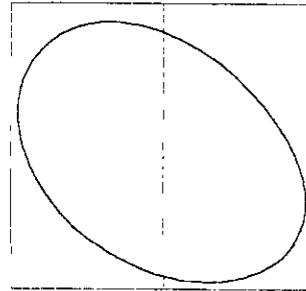
Largo cordel = 2

**Serie Mango:**

Curva apoyo, círculo $r = 1$

Fijo $\{0.3, 0.2 \dots 1.0\}$

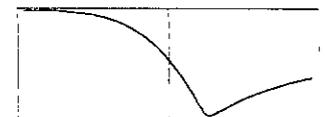
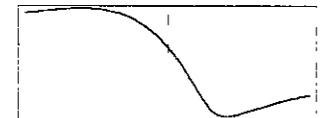
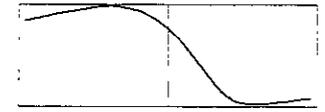
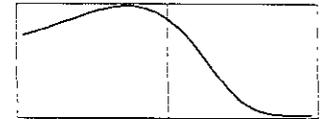
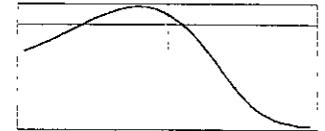
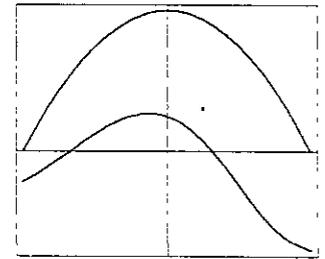
Largo cordel = 2

**Serie Olas:**

Curva apoyo, parábola $a = 0.5, h = 2, l = 2$

Fijo $\{0.5, 0.6 \dots 1.8\}$

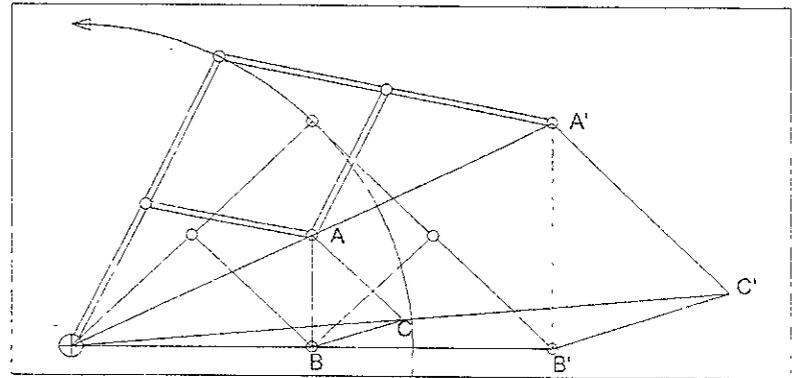
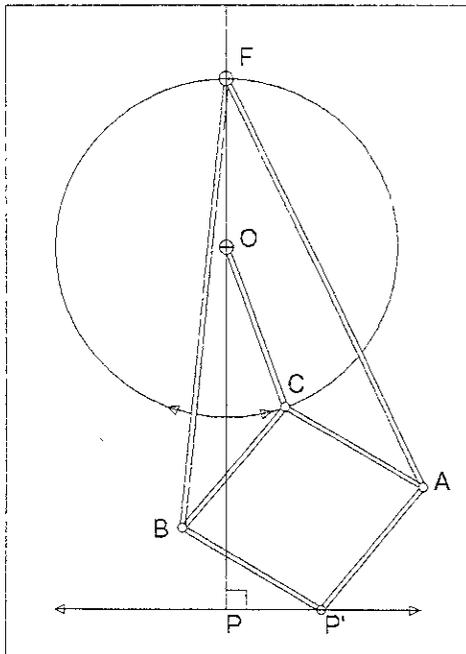
Largo cordel = 3



Mecanismos

A veces también llamados cinemáticos, son instrumentos que en base a un movimiento pueden generar la geometría de una curva. La cinemática estudia los movimientos con independencia de las fuerzas que los producen. Estos instrumentos consisten fundamentalmente de barras rígidas, que están unidas por articulaciones, el caso más elemental es un compás que nos permite trazar círculos y arcos circulares. Las articulaciones, pueden ser en un plano, consideradas con un grado de libertad, en dos planos, consideradas con 2 grados de libertad, o en 3 planos a manera de rótulas con 3 grados de libertad.

A manera de anécdota podemos señalar la existencia de un mecanismo llamado el **inversor de Peaucellier** (1864), conformado por 7 barras, en la que una de las barras



gira en su extremo alrededor de un eje haciendo un movimiento circular, y otra de sus articulaciones siempre describe un movimiento rectilíneo, este mecanismo permite trazar un segmento de recta a partir de un círculo

Pantógrafo

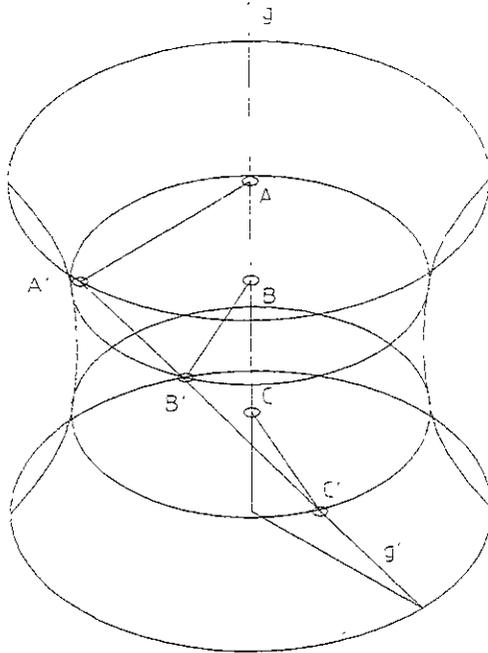
Un mecanismo bien conocido es el **pantógrafo**, que sirve para escalar figuras u objetos, generalmente se usaba para hacer reducciones de dibujos o grabados. Hoy en día parece perder utilidad por el uso de máquinas copiatoras reductoras, computadoras y máquinas de control numérico, sin embargo en algunos trabajos artesanales todavía es aplicable. Existen varios modelos de pantógrafos. Su aplicación en arquitectura puede darse para trazar curvas partiendo de un plano graficado

Inversor de Peaucellier, que describe un movimiento rectilíneo basado en un movimiento circular

El bisector es un mecanismo formado por 4 barras articuladas formando un rombo y por dos articulaciones extremas donde corre libremente una quinta barra cuando el rombo se abre o se cierra. Este mecanismo sirve para bisecar ángulos en dos partes iguales marcado por la quinta barra, dentro de un rango aproximado de 10 a 170°. Cuando las barras opuestas del rombo tienen una dimensión distinta entre los pares de barras, entonces se estaría dividiendo el ángulo en esa proporción. De

esta forma se pueden construir bisectores para proporciones específicas de ángulos, por ejemplo terceras o quintas partes. Suponiendo que queremos hacer un bisector para dividir un ángulo en 3 partes, se puede calcular la dimensión de los lados del rombo si el par mayor es l , los menores son $l \times \tan 30^\circ$.

Existe un mecanismo que permite el trazo de hipérbolas y parábolas alrededor de un eje central, se llaman mecanismos colapsables porque al tener uniones en forma de rótula, parece que se tuercen y deforman por la acción de la gravedad

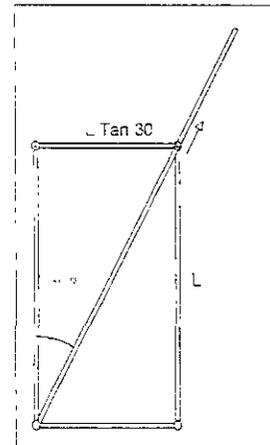


según su posición. El jugueteo es como sigue.

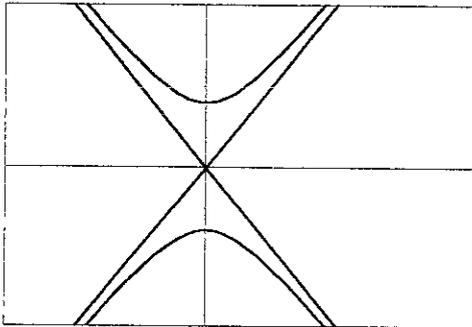
Consideremos dos barras g y g' que están unidas por tres barras a, b, c conformando tres articulaciones en $g: A, B, C$ y en $g': A', B' y C'$. Si consideramos que un extremo de la barra g se apoya sobre un plano a manera de punta inferior y que la barra g gira más o menos perpendicularmente sobre el plano, teniendo una de las puntas de la barra g' apoyadas también sobre el plano a manera como de la otra punta de un compás, se obtiene en la longitud de la barra g' el trazo de la superficie de un hiperboloide. Cuando la distancia que guardan entre sí las barras a, b o c es igual en sus extremos sobre las barras g y g' , la superficie curva es un hiperboloide parabólico.

Como podrás imaginar este mecanismo se equipara a una superficie reglada basada en dos círculos, pero en este caso sólo se tiene una regla en movimiento.

Hemos hablado de dos sistemas de trazo de la hipérbola, el primero al discutir el sistema de plomada del trazo de la parábola y ahora con este mecanismo articulado, por ello, resulta conveniente hablar un poco de la hipérbola



Hipérbola



Es el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Un caso específico de la hipérbola fue estudiado por Menaechmus. Este caso era cuando $x y = a b$ donde las asíntotas están en ángulos rectos, esta particular forma de hipérbola es llamada la hipérbola rectangular.

Euclid y Aristaeus escribieron acerca de la hipérbola pero estudiaron solamente una de sus ramas, mientras que su nombre presente se debe a Apolonio quién fue el primero en estudiar sus dos ramas.

La ecuación cartesiana

$$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$$

con centro en (h,k)

$$(x - h)^2 / a^2 - (y - k)^2 / b^2 = 1$$

Ecuación paramétrica

$$x = a \operatorname{Sec} t$$

$$y = b \operatorname{Tan} t$$

Lemniscato de Bernoulli

En 1694 Jacob Bernoulli publicó un artículo en *Acta Eruditorum* sobre una curva formada como la figura de un 8, o un nudo, la cual llamo en latín *lemniscus* ("cordón oscilante"). Jacob Bernoulli no estaba consciente que la curva que describía era un caso especial del Ovalo de Cassini, el cual había sido descrito por Cassini en 1680. Las propiedades generales del lemniscato fueron descubiertas por Giovanni Fagnano en 1750.

Ecuación cartesiana

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

Polar

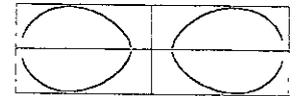
$$r^2 = a^2 \operatorname{Cos}(2t)$$

Paramétrica

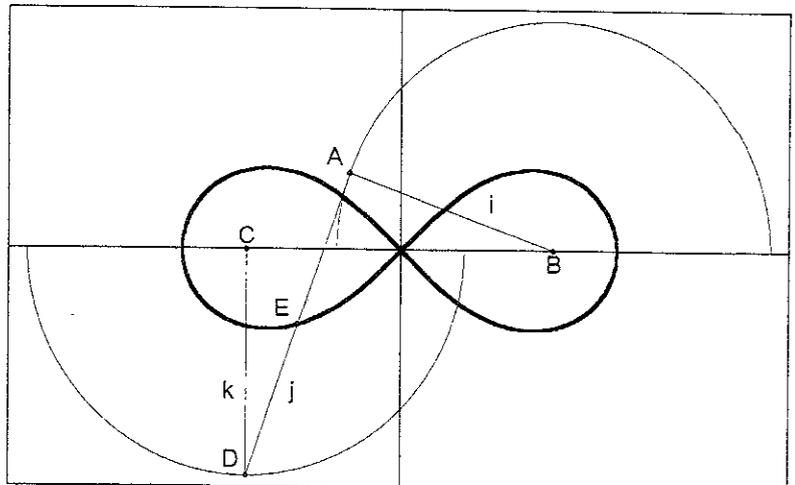
$$x = a \operatorname{Cos}(t) / (1 + \operatorname{Sin}(t)^2)$$

$$y = a \operatorname{Sin}(t) \operatorname{Cos}(t) / (1 + \operatorname{Sin}(t)^2)$$

El lemniscato se puede trazar por un mecanismo de tres barras articuladas i, j, k , la barra i se une a la j en A y la j a la k en D . Los extremos son las articulaciones C y B . La barra central tiene una longitud = $a \operatorname{Sqrt}[2]$, y las barras externas corresponden a la magnitud a de la ecuación. Al girar, el punto medio de la barra central E define el lugar geométrico de la curva.



Ovalos de Cassini



La magnitud de $AD = BC = a \sqrt{2}$, la magnitud de $AB = CD = a$

En otras palabras podemos decir que el mecanismo de trazo consiste en tres barras con cuatro articulaciones, siendo las extremas articulaciones fijas.

Dado que la curva es interior al mecanismo de trazo, se percibe la dificultad de trazo en la construcción de cubiertas o membranas, limitando sus posibles aplicaciones.

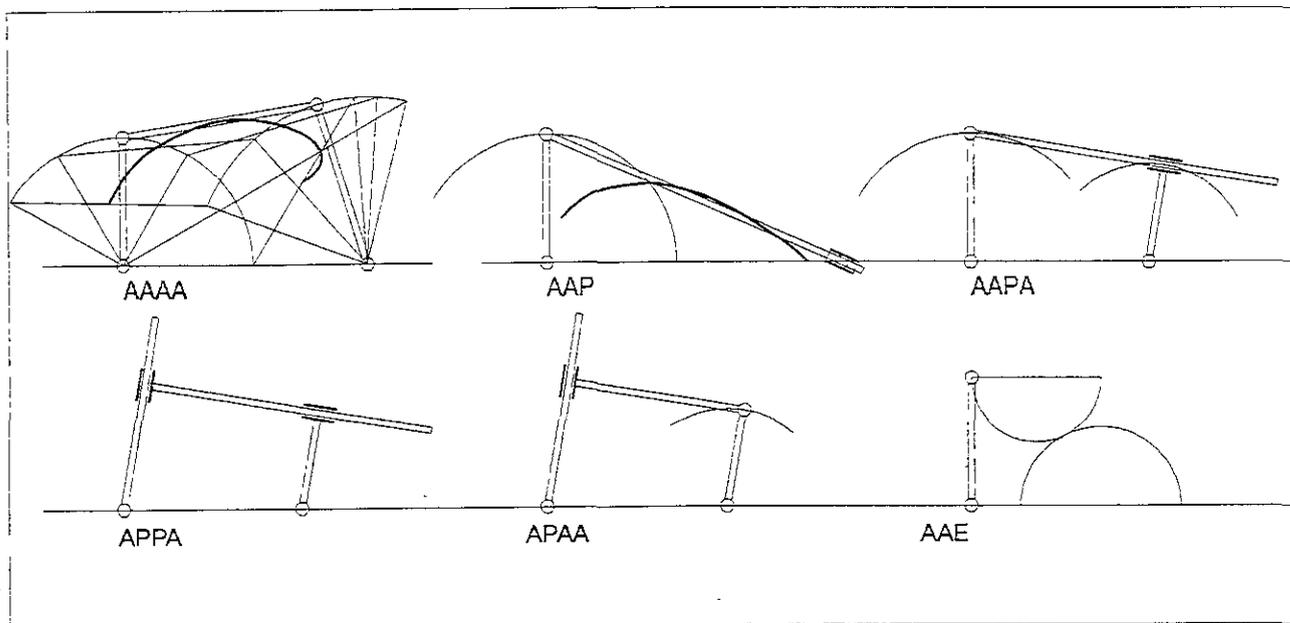
Clasificación de los mecanismos

Un sistema de clasificación usado para definir tipos de mecanismo fue descrito por [Gasson] aplicable cuando se utilizan diferentes formas de uniones, siendo la nomenclatura de estas uniones como sigue: **A** denota una *articulación*, **P** es un *pistón* deslizante, **E** es el contacto de un *engrane*.

El mecanismo para trazar el lemniscato de Bernoulli es **AAAA**, que al girar, el punto medio de la barra central define la curvatura.

Aquí se muestran algunos ejemplos de estos mecanismos. En la primera figura de abajo, la curva resulta del punto medio de la barra central.

La utilización de estos mecanismos, requiere experimentación para acercarnos a un entendimiento de las curvas que se generan. Las soluciones matemáticas quedan al desarrollo del lector.



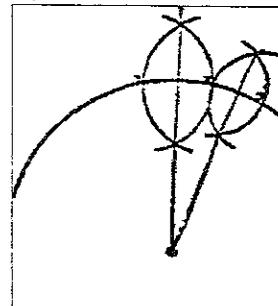
Focos e Hilos

Círculo

El círculo son una serie de puntos equidistantes desde un punto dado llamado **centro**. A la distancia del centro a los puntos se le llama radio, y a dos veces el radio se le llama diámetro. El círculo y la circunferencia son sinónimos¹.

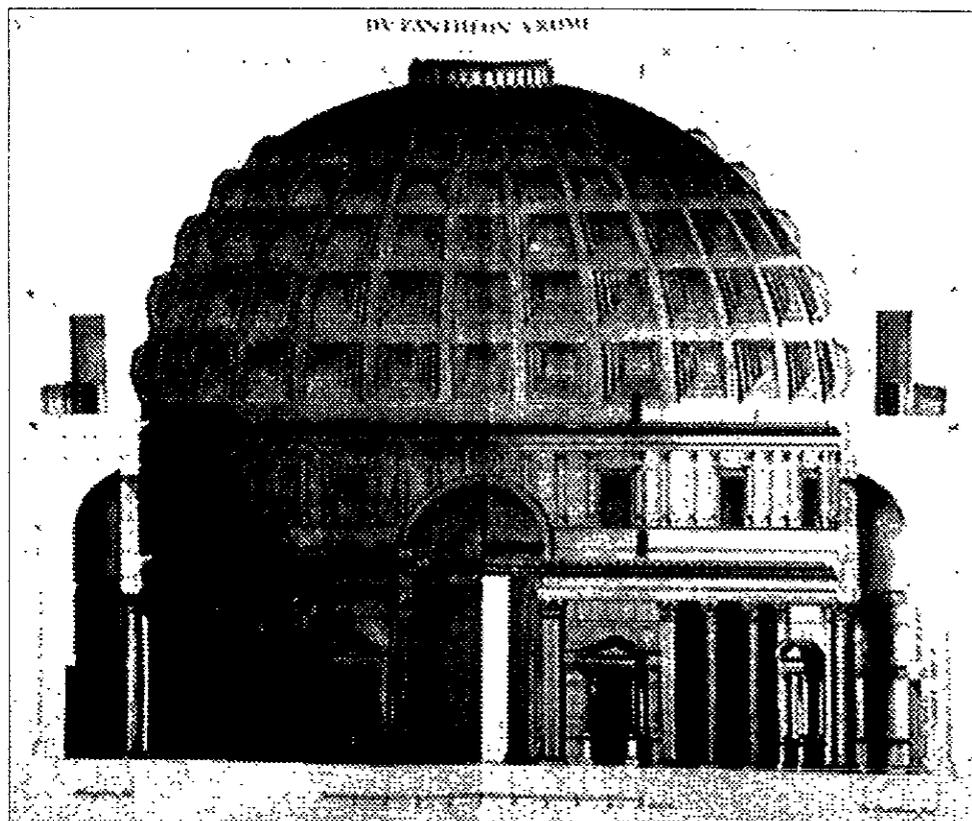
Las formas circulares están presentes en la naturaleza, el hombre y el universo visible conformando una relación ineludible, en la que el hombre mismo ha interpretado y mostrado inclinaciones a estas formas desde tiempos remotos, desde la época de la canica, yo diría, sin embargo, el círculo se aparta de la generalidad de las formas circulares al concebir su equidistancia hacia el centro, teniendo su manifestación mas evidente en el invento de la rueda.

Método para encontrar el centro de un arco circular, Serlio, *Arquitectura*, (1537-51)



Sección del domo, Panteón de Roma, dibujo de Desgodetz, *Les Edifices Antiques de Rome*.

¹ Círculo y Circunferencia corresponden a la misma curva y así lo entiendo en este texto, aunque se puede advertir que algunos autores se refieren al círculo como el perímetro de la circunferencia y otros a circunferencia como el perímetro del círculo, lo cual es una confusión que prevengo.



Templo de Vesta, Roma,
Planta y Alzado,
Desgodetz, Les Edifices
Antiques de Rome. El
templo estaba cubierto con
un domo esférico

El escribano Ahmes, autor de papiro Rhind, da una regla para determinar el área del círculo que corresponde a $\pi = 256/81$ o aproximadamente 3.160493. Ahmes asienta que no es el autor del trabajo sino simplemente el escribano, y

señala que el trabajo data de alrededor de 2000 años a.c. El papiro lleva el nombre Rhind en honor al egiptólogo escocés Alexander Henry Rhind quien compró en Tebas dicho papiro en 1858. Esta es una evidencia que soporta la opinión de que los egipcios fueron los inventores de la geometría.

Aunque las fórmulas del círculo han sido ampliamente expuestas, se muestran las más importantes del recetario. Para información sobre fórmulas de secciones circulares consultar a [Zwill] y [MMonterrey]

Ecuación general

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Para centro en (g,f)

$$(x - g)^2 + (y - f)^2 = a^2 \text{ o bien}$$

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + a = 0$$

Polar

$$r = a$$

Paramétrica

$$x = a \cos[t]$$

$$y = a \sin[t]$$

Area πa^2

Arco $2 \pi a$

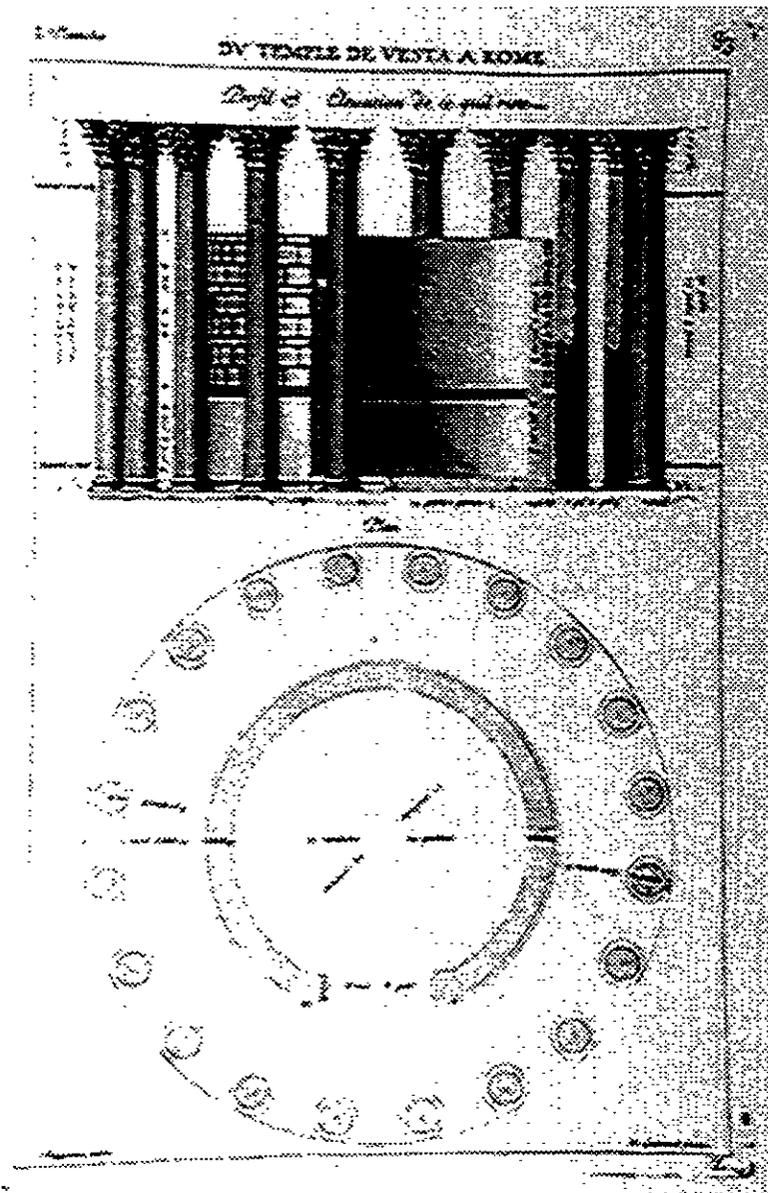
Tangente a un círculo que pasa por x_1, y_1

$$y - y_1 = -(x + g / (y_1 + f)) (x - x_1)$$

Normal

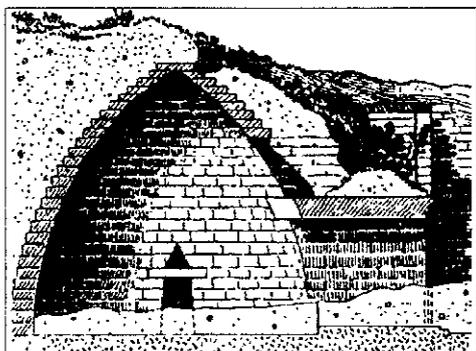
$$x - x_1 / (x_1 + g) = y - y_1 / (y_1 + f)$$

Si bien en esta forma geométrica no hablamos de trazo, es porque asumimos que su conocimiento es obvio, sin embargo se puede señalar que su sencillez de trazo ha permitido su aplicación en arquitectura a lo largo del tiempo.

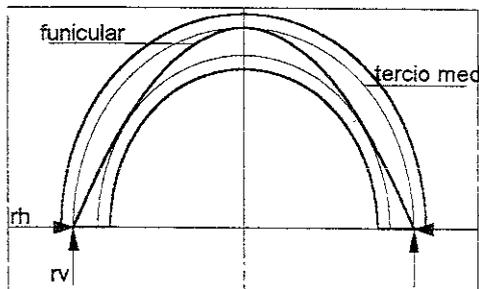


Arco circular

El hombre dió un profundo paso cuando fue capaz de reemplazar el dintel de una apertura que soportaba carga, por el arco. En sus diferentes manifestaciones culturales los arcos han tomado diferentes curvaturas, encontrando una gran popularidad en la forma circular. Los arcos corridos o bóvedas de cañón, son una manifestación del mismo principio formal y estructural.



El arco circular obedece a una búsqueda estructural en materiales resistentes a compresión, donde cabe señalar que su respuesta estructural no es óptima, pues generalmente responden a una carga vertical gravitacional, en donde, el funicular de esfuerzos asume formas parabólicas o cercanas a la parábola. Si recordamos el diagrama de momentos de un arco circular con carga uniformemente, se puede observar un momento negativo al centro y otros positivos en los hombros. Si las cosas son así, ¿cómo es que no se doblaban los arcos circulares? Más bien, se dice *fallaban*, y en realidad se rompían, bueno, la razón es que el funicular de esfuerzos producto de una carga gravitacional uniforme, aunque no correspondía a la forma circular, debiera pasar por lo que llamaban el tercio medio, lo que es la mitad interior de la sección, de tal forma que nunca existieran tracciones en el material, solo compresiones,



(acuérdate que usaban piedra tabique, etc) y por este manejo, las secciones estructurales resultaban robustas. En zonas sísmicas además del funicular gravitacional, había que agregar o restar un segundo funicular de esfuerzos debido a este ocasional esfuerzo, por lo que ese tercio medio o medio debía ser mas amplio, y la sección aún más robusta.

El otro gran problema de los arcos fue el coceo, que es el componente horizontal de las reacciones en el lugar de los apoyos, esfuerzo que, generalmente se tenía que resolverse aumentando el componente vertical, es decir la masa en los apoyos, para así evitar el desplazamiento horizontal de los apoyos, lo que repercutió en mayor peso en las construcciones.

Este entendimiento estructural alcanzó su manifestación más trascendente en la época Romana, según [Gideon], la arquitectura romana y especialmente el arco constituyen el segundo fenómeno de transición más importante de la historia de la Arquitectura, ya que los grandes espacios interiores que alcanzaron los romanos no tenían precedente y no fueron superados hasta la aparición de las estructuras de acero.

Los griegos ciertamente conocían el arco y las bóvedas de cañón, su uso fue prácticamente nulo, ¿Por qué no los usaron?, ¿Por qué prefirieron el dintel y los techos inclinados?

Tesoro de Atreus, en Mycenas, es uno de los primeros edificios arqueados que se conoce, 1325 a.C



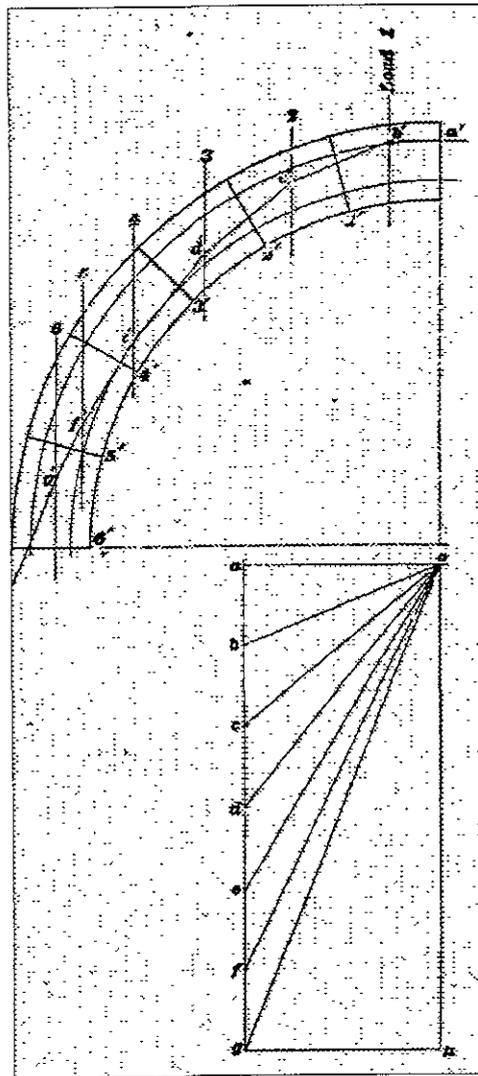
Detalle entrada al teatro de Perge, hoy Turquía, ver imagen Pag.6

El coceo o reacción horizontal para un arco de cualquier curva, con peralte p , para una carga uniformemente repartida w , se puede fácilmente obtener de:

$$Rh = w l^2 / (8 p)$$

Los métodos gráficos de análisis estático, como el que aquí ilustramos nos permiten

Método gráfico para obtener el funicular de un arco circular. Para tal efecto es necesario escalar la suma de cargas verticales para que sean igual a la altura del arco hasta la parte superior del tercio medio. En este caso la recta $a-o$ corresponde a la reacción horizontal. Dibujo de [Scranton, 1904]



obtener por la trayectoria del funicular la curva adecuada a dichos esfuerzos, permitiéndonos proponer geometrías más adecuadas a su función estructural. Como puedes observar, en la gráfica, si las cargas aumentaran de magnitud, el funicular saldría del tercio medio y entonces se producirían tracciones o momentos, que tendrían que resolverse por una sección más ancha o por un refuerzo que tome las tracciones. Si por otro lado la geometría del arco correspondiera al funicular, el aumento de magnitud de las cargas no sería tan grave.

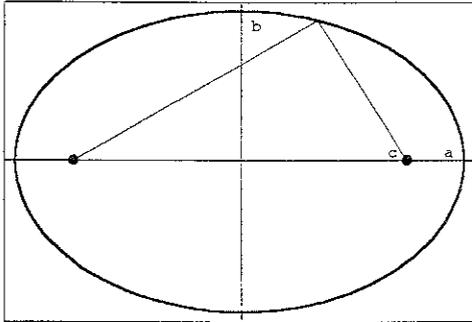
La imprecisión del dibujo mecánico de tiempos anteriores, actualmente es superada por los programas de CAD, es entonces donde se puede revalorar el uso de métodos gráficos para análisis estáticos, pero sobre todo se puede considerar como una herramienta de diseño.

La ingeniería ha caminado en busca de una mayor exactitud del análisis estructural, tanto como por la necesidad de resolver problemas hiper-estáticos, encontrando en la teoría elástica, caminos más acordes a esa búsqueda científica. Este desarrollo nos ha proporcionado instrumentos para analizar momentos, cortantes, fuerzas axiales y torsiones donde los métodos estáticos gráficos están limitados. Actualmente el desarrollo de la teoría de elemento finito, aplicable a elementos lineales tanto como a sólidos, nos permite alcanzar análisis estructurales antes inimaginables. Por ejemplo se puede conocer las fuerzas axiales, cortantes, momentos y torsiones en relación a ejes coordenados o ejes propios del elemento, con el detalle y precisión requerida.

Este cuento termina diciendo: Los métodos de análisis gráfico son aplicables al diseño de curvas, sobre todo arcos. Para mayor información se puede consultar a [Wolf] y [Parker].

Elipse

La elipse es el conjunto de puntos de un plano cuyas distancias a dos puntos fijos llamados focos c suman una magnitud constante denotada por $2a$, mayor que la distancia entre ambos focos.



El sistema comúnmente conocido para el trazo de la elipse es colocar un cordel fijo a los focos, y manteniendo un lápiz en el vértice que conforma este cordel, se hace girar alrededor. En concordancia con las fórmulas que se dan adelante. No existe información precisa de quién inventó el sistema de trazo, pero algunos autores lo atribuyen a Newton.

La elipse fue primeramente estudiada por Menaechmus. Euclid estudió la elipse y su nombre actual fue dado por Apolonio. El foco y la directriz fueron considerados por Pappus.

Kepler, en 1602, dijo que creía que la órbita de Marte era oval, más tarde señaló que era elíptica con el Sol en uno de los focos, de hecho Kepler introdujo el término "foco" y publicó sus descubrimientos en 1609

Halley en 1705 mostró que el cometa que lleva su nombre se movía en una órbita elíptica alrededor del Sol, la excentricidad del cometa de Halley es 0.9675, así que es muy cercana a una parábola (excentricidad 1).

Ecuación cartesiana con centro origen

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

con centro en (h,k)

$$(x-h)^2/a^2 + (y-k)^2/b^2 = 1$$

Ecuación paramétrica

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

con centro en (h,k)

$$x = h + a \cos t$$

$$y = k + b \sin t$$

Focos

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

El área definida por un ángulo t

$$ab t / 2$$

El largo de un arco definido por un ángulo t

$$a E(\pi/2 - t e)$$

donde e es la excentricidad

Si $t = 2\pi$

$$\text{Area} = \pi a b$$

Ecuación polar

$$r = a b / (\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t})$$

Si la elipse es parábola, se intercambia a y b

La pendiente de la tangente es

$$-b^2 x_1 / a^2 y_1$$

Entonces, la tangente de la elipse en (x_1, y_1) es

$$y - y_1 = -b^2 x_1 (x - x_1) / a^2 y_1$$

La pendiente de la normal es

$$-a^2 y_1 / b^2 x_1$$

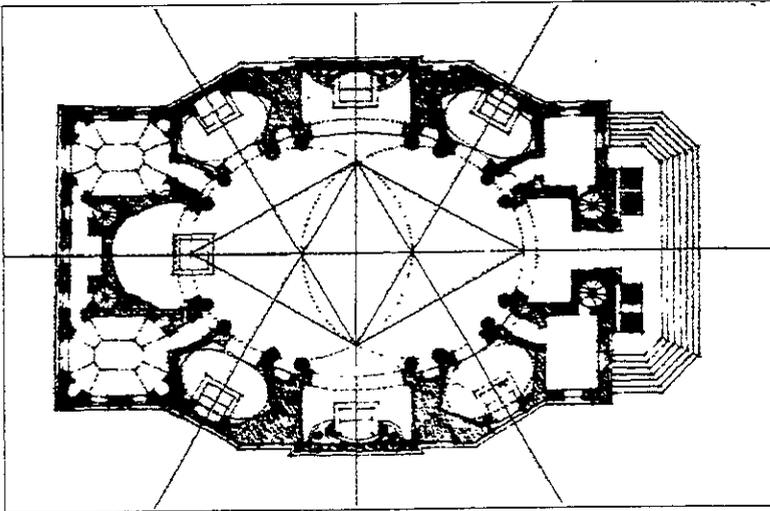
Entonces, la normal de la elipse en (x_1, y_1) es

$$y - y_1 = a^2 y_1 (x - x_1) / b^2 x_1$$

Cuando Kepler señala que los planetas se mueven alrededor del sol en órbitas elípticas, y que el sol se localiza en uno de los focos, pone en cuestión la perfección del círculo, hasta ese momento atribuible a



Kepler 27 Diciembre 1571,
Leonberg. hoy Alemania.



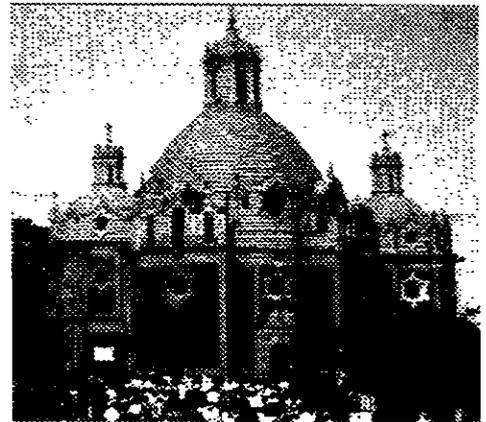
San Andrea al Quirinale,
Roma, 1658-70, Gionnavi
Lorenzo Bernini/ Imagen
de [...]]

Capilla del Pocito
Guadalupe, México, 1771-
91, Arq. Guerrero y Torres,
(abajo y derecha) Dibujo
de la planta [Stierlin].

la naturaleza y el universo. Este nuevo planteamiento tiene una repercusión directa en la arquitectura barroca, se observa la pretensión por salirse de las formas circulares en busca de formas ovales, o quizás elípticas. Sin embargo las formas que se alcanzaron en este movimiento y con esta pretensión no fueron elipses sino en su mayoría óvalos formados por cuatro segmentos circulares, como se podrá observar en el trazo de la Capilla del Pocito Guadalupe de Guerrero

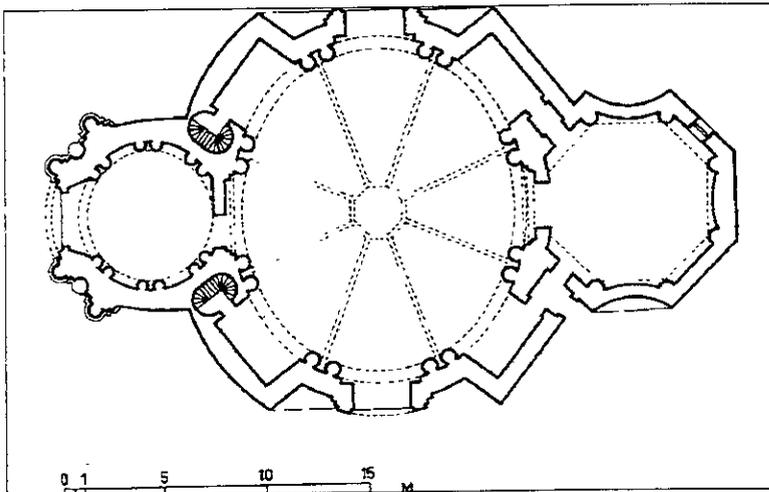
y Torres y en San Andrea al Quirinale de Bernini que aquí mostramos. [Fletcher], [Stierling] y [Pevsner], entre otros, equivocadamente afirman que estas plantas son elípticas

Posiblemente existan expresiones barrocas que efectivamente hallan logrado el dominio matemático de la elipse, pero ello solamente podrá comprobarse con la medición física de las obras, mientras tanto, queda en duda la aplicación de la elipse en las obras clásicas del barroco alemán como La Iglesia del Peregrinaje en Steihausen, Swabia, 1728-35 de Zimmermann, y La Iglesia del Peregrinaje



en Vierzeheiligen, Franconia, 1743-72 de Baltazar Neuman.

De comprobarse que las famosas plantas ovales del barroco no son elípticas, sería posible preguntar entonces, ¿Cuándo aparece la elipse en arquitectura? Posiblemente tendríamos que enfocarnos al siglo 20 en cuyo caso podríamos decir que pasaron más de 2200 años desde su descubrimiento a su aparición en arquitectura.

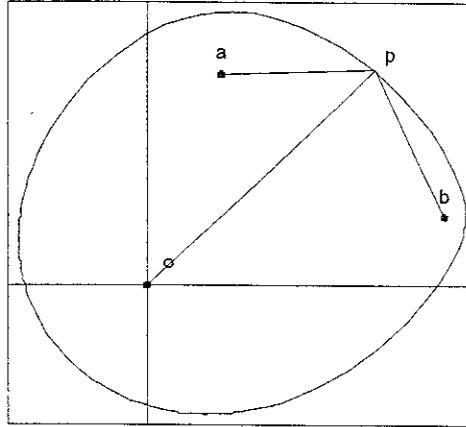


Poleógenas

Recordarás que la elipse se define como el conjunto de puntos de un plano cuyas distancias a dos puntos fijos llamados focos suman una magnitud constante denotada por $2a$, y que es mayor que la distancia entre ambos focos, siendo uno de los métodos más fáciles de trazo el amarrar una cuerda de magnitud constante a los dos focos y manteniendo la cuerda restirada y girándola alrededor de los focos se obtiene el lugar geométrico, en base a ello, se le ocurrió a un joven estudiante de 16 años de Estambul, Turquía, Bilge Demirkoz, la idea de que pudieran existir tres o cuatro focos, haciendo siempre que la suma de las distancias hacia los focos sean una magnitud constante. De estas ideas surgen la **Trisoide** y la **Cuatrisoide** bautizadas por él. Estas curvas matemáticamente posibles presentan el inconveniente como podrás imaginarte, de carecer de un mecanismo de trazo tal como lo tiene la elipse por medio del cordel amarrado a los focos. Las Poleógenas que ahora discuto son una manera de superar esta dificultad, aunque señalo que son curvas distintas a las de Bilge.

Si considero que se pueden tener dos o más focos y un cordel de dimensión constante como concepto básico del trazo, surgen dos familias de curvas que estudio en este texto: las curvas elipzables y las poleógenas.

Las poleógenas surgen de la idea de utilizar poleas, cuyo centro o eje corresponde a un foco fijo. Cada uno de los focos está unido a una polea dinámica p por medio de uno o varios segmentos pertenecientes a un solo cordel de longitud constante, es decir, el cordel adquiere continuidad al unir cada uno de los focos con la polea dinámica p . Cuando la polea dinámica se mueve alrededor de los focos y el cordel está tensado, se genera en el centro de p el lugar geométrico de la curva.



Poleógena con tres focos fijos a, o, b , donde a y b son focos simples y están ligados a p por un segmento del cordel. El foco o es un foco polea y está ligado a p por dos segmentos de cordel. Una punta del cordel está fija en a , de ahí va a p , de p va a o y regresa a p , para finalmente ir a terminar en b .

Las poleas comunes pueden contar con una o varias ruedas que giran independientemente una de la otra, de la misma forma, para este caso considero que hacia un foco dado, pueden llegar varios segmentos del cordel que se corren en ruedas independientes. Entiendo por cordel *lineal* cuando sus extremos tienen su origen en un foco fijo, o en una polea y por cordel *continuo* cuando sus extremos se encuentren unidos uno al otro y que además, en toda su longitud no hay sujeciones. Un foco es *simple* cuando es el extremo de un cordel. Un foco es *polea* cuando llegan a él dos o más segmentos de cordel. Los focos se definen como una lista $\{fa, fb, fc, \dots, fz\}$. Cuando el cordel es continuo, los segmentos del cordel siempre son dobles, esto significa que para tener un cordel continuo todos los segmentos deben ser *pares*, por lo tanto, cuando el cordel es *lineal*, deberán existir segmentos, o por lo menos un segmento que sea *non*, generalmente localizados en el primero o en el último foco. Sabiendo que el cordel es lineal por la anterior característica, podemos saber en donde termina al cordel, si el segmento es *non* termina en el foco, si es *par* termina en p .

En este momento, podrás imaginar que no existe limitación conceptual al número de

focos, ni a las vueltas que tome el cordel para unir un foco con la polea dinámica, en la práctica, su complejidad esta limitada a no hacerse bolas ni enmarañarse.

En la aplicación constructiva, se busca que el cordel no sea deformable a la tensión. Las poleas son muy pequeñas o bien son pequeños anillos, cuyo diámetro es insignificante. Los focos se definen utilizando anillos en la punta de postes, y si estos anillos pueden rotar, mejor aún. Después de construir el aparejo se estira desde la polea o anillo dinámico y ahí encuentras la curva o la superficie.

La ecuación de las poleógenas se formula al considerar que la suma de todos los segmentos del cordel son igual al largo total del cordel, así de simple. Para ello, establezco que todos los focos son vectores (centro en el origen), como también a todos los segmentos que unen a los focos con p , de estos últimos me interesa conocer su longitud.

norma es la función que nos permite obtener la longitud de un vector. Espero que recuerdes lo que es un producto punto de vectores (si no, búscalo y luego regresa aquí).

```
norma[u_?VectorQ]:=Sqrt[u.u]
```

por ejemplo la norma del vector {3,4} (famosa escuadra de los constructores)

```
norma[3,4] --> 5
```

esta función también funciona para 3 dimensiones, la usaremos mas adelante.

Sabemos que la resta de dos vectores nos da el vector que une a sus puntas y de igual manera puedo obtener su longitud, p.e.

```
norma[{1,1}-{1,0}] --> 1
```

En busca de la función que me permita obtener las ecuaciones de las poleógenas, voy a definir los parámetros que se requieren: una lista correspondiente a cada uno de los focos, a su vez, cada elemento de la lista tiene una sub lista con las coordenadas del foco y el número de segmentos que parten de ese foco a p . Finalmente tendríamos como parámetro la longitud del cordel.

Por ejemplo una lista de 3 focos donde el primero tiene las coordenadas {1,3} y esta ligados a p por un segmento de cordel y los siguientes focos están por dos y un segmento respectivamente:

```
lf = {{{1,3},1},
      {{0,1},2},
      {{3,1},1}};
```

Listo para crear la función para obtener la ecuación de cualquier poleógena, que es la suma de todos los segmentos del cable igual a la longitud total del cable.

```
ecuapoleogena[focos_,lcable_]:=
Module[{p, eqn = 0},
  p={x,y};
  Do[eqn+=norma[p-focos[[i,1]]],
    focos [[i,2]],
    {1, Length[focos]}];
  eqn = eqn == cable ]
```

Module permite que p y eqn sean variables locales a la función. Esta función va recorriendo la lista de focos dentro del Do, en cada foco hace una resta vectorial con el vector abstracto $p=\{x,y\}$, obtiene su longitud por medio de la función norma y la multiplica por el número de segmentos que llegan a ese foco, el resultado de cada interacción se va sumando en la variable eqn. Finalmente muestra y regresa la variable eqn igualada al largo del cordel.

Voy a checar la función con la lista lf que definimos anteriormente, para un cordel de longitud 9.

```
pel = ecuapoleogena[ lf, 9]
Sqrt[ (-1+x)^2+(-3+y)^2]+
Sqrt[ (-3+x)^2+(-1+y)^2]+
2 Sqrt[x^2+(-1+y)^2 == 9
```

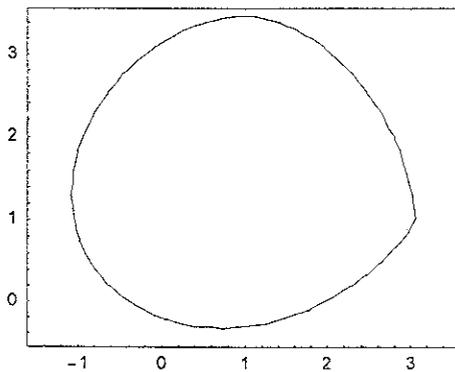
¿Cual sería la ecuación de la siguiente poleógena?

```
ecuapetaloide[ {{{-1,0},1},
                {{ 1,0},1}},3]
```

Adivinaste, es una elipse.

Cada poleógena es una ecuación distinta, que en contados casos puede despejarse en términos simples para obtener una ecuación paramétrica como se ha dado en otras curvas. Con esta consideración, y buscando que sea aplicable a cualquier ecuación que resulte, utilizo la función interna de *mathematica* `ImplicitPlot` para generar las gráficas sin la necesidad de tener una ecuación paramétrica.

```
pegraf = ImplicitPlot[ pel,
{x-1.5,3.5}, {y,-0.5,3.5},
FrameTicks->Automatic,
Axes->True,
Tick->None ]
```



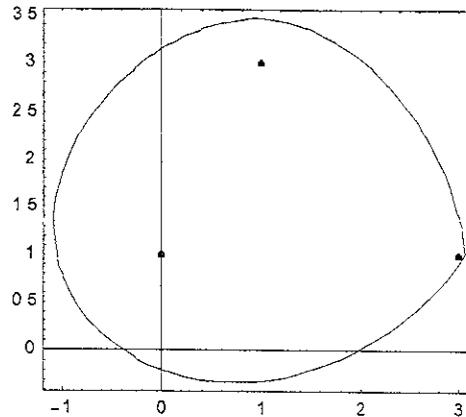
Voy a ponerle a la gráfica anterior los focos para mejor referencia

```
grafofocos[focos_, ptsize_]:=
Graphics[PointSize[ptsize],
Map[Point,Map[First,focos]]]
```

```
pelpoints = grafofocos[lf,0.02]
```

y ahora la muestro

```
Show[peलगrag, pelpoints]
```



Cuando la curva pasa cerca de un foco, se acentúa la curvatura, como si ese foco tuviera una influencia gravitacional. Esto significa que para buscar un efecto tal, la definición del largo del cordel, toma su papel en el juego del diseño en la búsqueda de esa proximidad o lejanía entre la curva y los focos.

Voy a formar una tabla de gráficas correspondientes a los focos `lf` que usamos anteriormente. Utilizo `Table[ecuapoleogena[lf,i], {i,6,10,1}]` para generar las ecuaciones correspondientes a cordeles cuya longitud va de 6 a 10 brincando de uno en uno

La gráfica se produce de la siguiente manera:

Los parámetros de las poleógenas de la extrema derecha (focos y cordel) están definidos como sigue:

```
{{{-2,1},3},
 {{ 0,0},2},
 {{ 3,0},2},
 {{ 6,1},3}},43
```

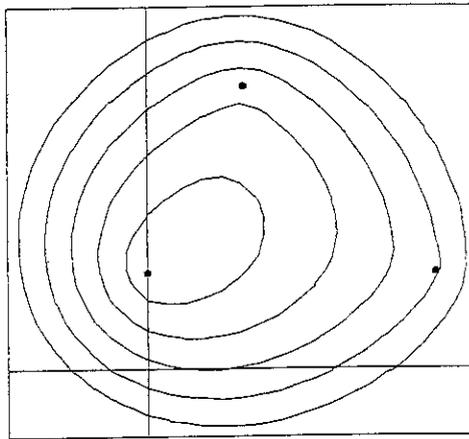
```
{{{-2,0},3},
 {{ 0,2},2},
 {{ 2,0},2},
 {{ 4,1},3}},32
```

```
{{{-2,0},1},
 {{ 2,0},2}},9
```

```
tpegraf = ImplicitPlot[
  Table[ecuapoleogena[lf,il],
    {i,6,10,1}],
  {x,-2.5,5},{y,-2,5},
  PlotPoints->40,
  Frame->True, FrameTicks->None,
  Axes->True, Ticks->None];
```

Coloco los focos en la gráfica como hice anteriormente,

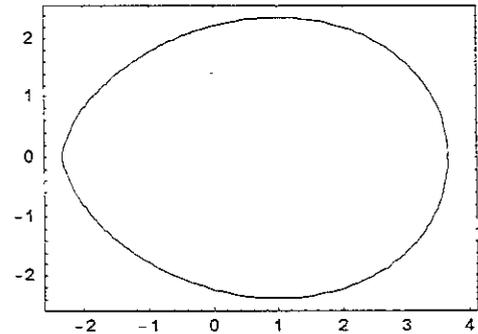
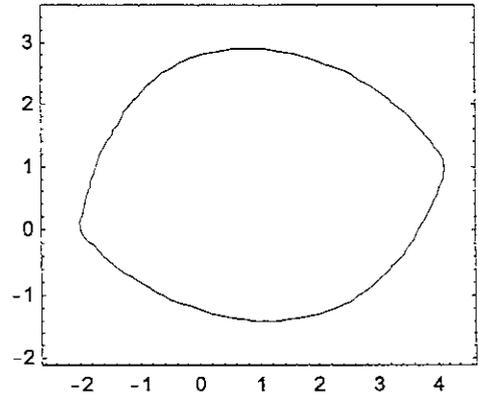
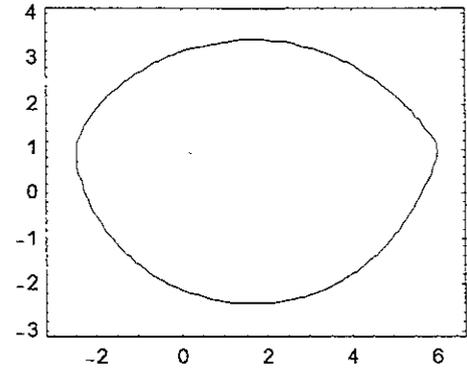
```
Show[tpegraf, pelpoints]
```



Puedes confirmar el efecto gravitacional que anteriormente comenté de los focos sobre la curva. Es muy importante señalarte que las curvas se generan indistintamente si los focos están en el interior o el exterior de la curva.

Cuando el proceso de diseño pretenda usar poleógenas, será necesario hacer tablas gráficas como la de arriba, para encontrar la curva adecuada a la intensidad formal, lo cual implica un ejercicio matemático y gráfico como aquí te expongo.

Del lado derecho exploro algunas poleógenas con otra disposición y número de focos para mostrarte posibilidades.



Elipzógenas

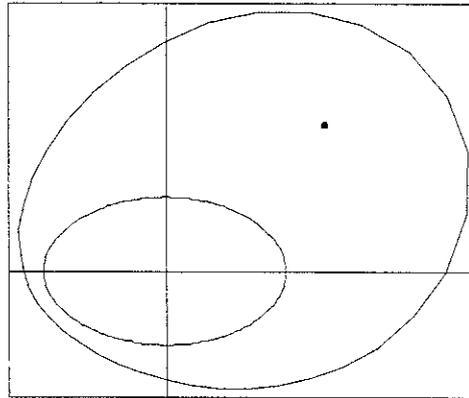
En una elipse, se tiene una constante, que es el largo del cordel de trazo y que corresponde por definición a los lugares geométricos cuya distancia a los focos suman esa constante. Puedo señalar entonces que los dos focos en el caso de la elipse, se **elipzan** respecto a una constante.

Te podrás imaginar lo que sucedería si en lugar de uno de los focos tenemos una curva como punto focal, la que llamo **curva focal**. Empezaré por describir el caso más simple, cuando la curva focal es un círculo. El cordel de trazo está sujeto a un foco y por el otro tiende a girar alrededor del círculo, como sujeto a un anillo que se desliza a lo largo del círculo en dirección al movimiento del trazo, dicha dirección lógicamente corresponde a la normal del círculo, y el lugar en el círculo donde se localiza corresponde al más cercano a la dirección del trazo. No sería difícil comprobar que la curva que se genera corresponde en este caso a una elipse, ya que, el radio del círculo, es una extensión de la constante o dimensión del cordel. Aunque este caso es infructuoso puedes observar que para estos trazos, se considera que el punto de la curva focal es aquel cuya normal corresponde a la dirección del trazo.

El ejemplo anterior nos permite postular que **una curva puede elipzarse respecto a un foco**, en donde la curva generada se puede definir como el lugar geométrico cuya distancia al foco y a las normales de la curva focal suma una constante en el sentido de cierta dirección. A este procedimiento lo denomino **elipzación**, y a la curvas **elipzógenas**.

Las elipzaciones pueden darse con respecto a una gran variedad de curvas, incluyendo muchas de las que en este texto mencionamos, posiblemente una de las más atractivas desde el punto de vista del

trazo es la **elipse**, es decir elipzaciones donde la curva focal es una elipse. La razón fundamental de esta atracción está apoyada en el trazo simple de la elipse, que recordarás se basa en el cordel atado a los dos focos y estirado en la dirección que se busca, éstos generan un ángulo respecto a los dos focos cuya bisectriz en todos los casos es la normal de la elipse, por lo tanto, si colocamos un anillo en el cordel de la elipse y sobre ésta atamos el cordel de la elipzación, de forma automática, los



Elipzógena de un foco y una elipse como curva focal

cordeles de la elipse adoptan la posición al restirarse en la dirección que se busca. Resumiendo, para el trazo de una elipzación de un foco respecto a una elipse es necesario definir tres puntos: dos de ellos corresponden a los focos de la elipse focal, y el tercero al foco de la elipzación.

Al estirar el cordel de la elipzación en la dirección que se busca éste a su vez, estira el cordel de la elipse, y de esta forma se coordinan los dos cordeles para obtener el punto de la curva en esa dirección. Al hacer girar el cordel de la elipzación se genera una elipzógena.

Un caso particular es la elipzación de un punto con una recta. La curva que se genera es una parábola, y el foco de la parábola es el mismo foco de la elipzación.

Sería interesante que mis lectores experimentaran con este postulado. Fácilmente podrán comprobar que el segundo sistema de trazo de la parábola que he mencionado se basa en el principio de la elipzación.

Posiblemente a los matemáticos les pueda resultar interesante el conocer que las cónicas se pueden definir por medio del concepto de elipzación, y con ello expandir los conceptos fundamentales de la geometría. Como el texto está enfocado hacia arquitectos y constructores, voy a dejar esta reflexión a los matemáticos.

He discutido cómo una curva puede elipzarse respecto a un foco, y también he dicho que esta curva es **una curva focal**, que esta propiedad de focalidad puede aplicarse a cualquier curva, claro está, que las más interesantes son aquellas que son trazables, y hemos expresado nuestra natural atracción a la elipse en este sentido. Si el foco fijo que he utilizado en las elipzaciones anteriores se convierte en una curva, entonces tengo que las **elipzaciones se pueden dar entre dos curvas**, con lo que el universo de estas curvas se expande gloriosamente.

Bajo este principio puedo formular la elipzación de dos elipses, cuyo principio básico de trazo es atar al cordel de trazo de cada elipse focal un anillo a donde se sujeta el cordel de la elipzación, de esta forma y con el mismo principio de estirar el cordel de la elipzación en una dirección, se hacen coincidir los tres cordeles de trazo. ¡Pocas tuercas y puros hilos!

Es importante observar que estas curvas muestran cambios de curvatura más o menos acentuados en la dirección en que se encuentran los focos, de tal forma, que si los focos no están dispuestos en simetría, la elipzógena no es simétrica, presentando curvaturas más intensas con relación a la dirección de sus focos. Cuando se hace

posible generar curvaturas que pierden la simetría pero que conservan clara continuidad, se generan posibilidades expresivas muy amplias que discutiremos más adelante, el aviso cauteloso se hace para evitar lectores derretidos a destiempo.

Si bien hemos discutido la elipzación de una curva respecto a un foco y de dos curvaturas entre sí, es posible comprender que las elipzógenas generadas a su vez pueden ser curvas focales de una elipzación más compleja, de esta manera podríamos imaginar por ejemplo la elipzación de una elipse respecto a un foco y a su vez la elipzación de la elipzógena generada respecto a un cuarto foco. Otro ejemplo podría ser la elipzación de una elipzógena con una elipse. Todo ello te permite percibir que las elipzaciones pueden expandirse en su complejidad, posiblemente hasta el punto donde el tendedero de hilos no se convierta en la práctica en un enredo. Bienvenido al club de las arañas!

Seguramente recordarás que un principio fundamental en la definición de la elipse nos dice que el cordel debe ser mayor a la distancia de los focos, si es igual a la distancia de los focos, se genera una recta. Cuando estás manejando elipzaciones se pueden dar casos en que el largo del cordel de la elipzación (que siempre es una constante) quede corto para seguir la continuidad del trazo de la elipzógena, este fenómeno hace que la curva generada no sea continua y quede truncada, generalmente en el sentido o dirección de alguno de los focos. En términos geométricos se dice que la curva tiene una o varias aperturas. Se puede entender entonces que las elipzaciones generan **curvas cerradas o con aberturas**, y que éstas últimas pueden ser un defecto del diseño en el largo de los cordeles o pueden buscarse con toda intención para generar ese efecto precisamente.

Para definir matemáticamente la geometría de las elipzógenas, es necesario recordar que al derivar la ecuación de una curva se obtiene su tangente y de ahí la ecuación de la normal para un punto dado. Se puede señalar entonces que para obtener la geometría es necesario que las curvas focales que se utilicen en elipzaciones sean derivables. En cuyo caso se podrá obtener la ecuación de la normal para un punto de la curva focal. Se utiliza dicha información para generar vectores que tienen su origen en el punto de la curva, de esta manera, se formula una ecuación que diga que la suma de los segmentos vectoriales de las normales de las dos curvas focales es igual a la constante o dimensión del cordel de elipzación, y así, se obtienen las coordenadas del lugar geométrico de la elipzógena. El procedimiento es complejo

Vamos a implementar la matemática correspondiente al caso mas sencillo que sería una elipzógena de una elipse respecto a un foco f . Dado que el trazo de una elipse se obtiene fácilmente por el famoso trazo del cordel atado a los focos, y conociendo que la dirección en que se estira este cordel es la normal de la elipse, es fácil concebir que podemos atar un anillo al trazo de la elipse y de ahí atar el cordel que se elipsa con respecto al foco de la elipzógena.

Debo conocer la pendiente de la normal en un punto dado de la elipse base e , que voy a interpretar como un vector unitario ve , siendo la interrogante el factor de escala q de dicho vector deba satisfacer para que, la suma de la longitud de ese vector con el otro segmento de p (lugar geométrico de la elipzógena) al foco f , sumen la longitud de la constante.

Recordamos que la norma o longitud de un vector se obtiene de:

```
norm[u_?VectorQ]:=Sqrt[u.u]
```

Entonces la ecuación básica de esta elipzógena sería la suma del segmento que va del foco f a p , es decir: $\text{norm}[f-p]$, mas el vector unitario que se origina en la elipse ve multiplicado por un factor q es decir $\text{norm}[ve \cdot q]$ cuya suma debe ser la longitud del cable que es una constante, por tanto la ecuación queda así:

```
norm[f-p]+norm[q ve] - cable == 0
```

vunormelipse sirve para obtener un vector unitario de la normal de la elipse, de acuerdo al parámetro t .

```
vnormelipse[a_,b_][t_]:=Module[{v},
v={b^2 a Cos[t], a^2 b Sin[t]};
v/norm[v] ]
```

```
upe = vunormelipse[1.5,1][-Pi/2]
{0, -1}
```

Existe la posibilidad de que el cable no sea lo suficiente largo para llegar al punto de la elipse en una dirección específica, lo cual compruebo al utilizar la variable fe para guardar la distancia que hay del foco a la elipse y pruebo que el cable sea mayor o igual a esa magnitud $\text{cable} \geq fe$.

```
Clear[egena]
egena[f_,e_,ve_,cable_]:=
Module[{p,q,sols,fe},
fe = norm[f - e];
If[cable >= fe,
p = e + q ve;
sols = Solve[norm[f-p]+
norm[q ve]-cable ==0,q];
If[sols=={},{}, p={e,e},
p=p /.sols];,
p = {e,f + ve cable}];
p]
```

Observa que la función Solve hace todo el trabajo pesado al buscar la solución a la ecuación

```
norm[f-p]+norm[q ve] - cable == 0
```

Vamos a probar egena considerando:

```
f{0,2};
```

```
pe = ellipse[1.5,1][-Pi/2];
egena[f,pe,upe,3.5]
{{0,2.25},{0,-1.25}}
```

Se observa que ésta regresa dos pares, el primero corresponde a una curva hacia el interior de la elipse y la segunda hacia el exterior, que es precisamente la que nos interesa. Sin embargo, cuando ambas curvas coinciden en un mismo punto tendremos que la solución corresponde solamente a un par (un punto), y es por tanto, una singularidad que debemos considerar en nuestra segunda implementación como sigue:

```
Clear[elipzogena]
elipzogena[a_,b_,f_,cable_][t_]:=
Module[{p,q,e,ve,sols,fe},
e = ellipse[a,b][t];
ve = vnormellipse[a,b][t];
fe = norm[f - e];
If[cable >= fe,
p = e + q ve
sols = Solve[norm[f-p] +
norm[q ve]-cable ==0,q];
If[sols ==({}),p = {e,e},
p = p/.sols];,
p=({},{})];
p]
```

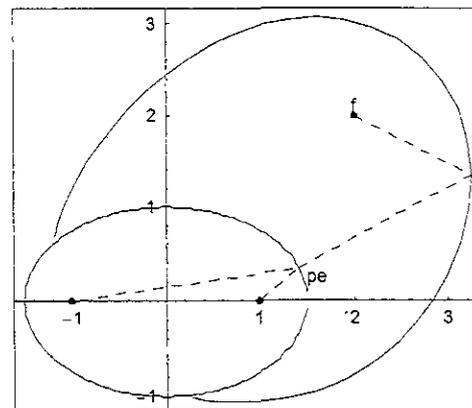
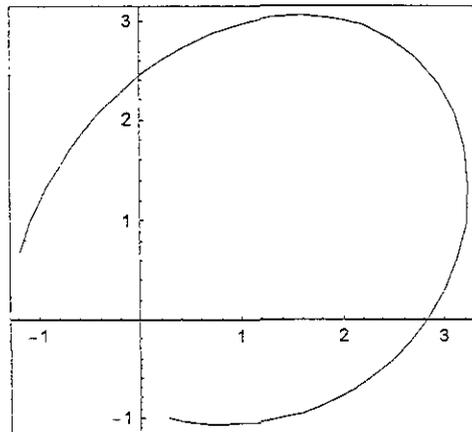
Vamos a probar la función

```
pts = Table[elipzogena[1.5,1,{2,2},
3.5][t][{2}],{t,0,2Pi, Pi/18};
{{2.83333,0}, {3.12974,0.610727},
... {},{},{}, ...}
```

En la tabla de coordenadas de la curva nos encontramos casos donde el cable no tiene la longitud suficiente (listas vacías{}), en cuyo caso la curva debería quedar abierta. Para efectos prácticos vamos a quitarlos de la tabla y a graficarla.

```
If[MemberQ[pts,{}],
pts = DeleteCases[RotateLeft
[pts,Position[pts,{}][[1,1]]
-1]{}],;
```

ListPlot[pts]



Para una mejor referencia, se muestra la elipse base del trazo.

Voy a dejar la implementación de elipzógenas generadas a partir de dos curvas para un desarrollo posterior, dada la complejidad matemática que ello implica. Sin embargo, hago resaltar su sencillez de trazo y su facilidad de aplicación en obra.

Funciones de Caja

Hemos visto en los capítulos anteriores la forma de implementar funciones paramétricas en *Mathematica*, partiendo de la ecuación paramétrica de la curva, en donde la función regresa una lista $\{x,y\}$ correspondiente a las coordenadas de la curva. En muchos casos vistos se utiliza como parámetro un ángulo que va de $\{-\pi, \pi\}$. La razón de utilizar una lista como retorno de la función, radica en la manera en que dicha lista es utilizada en concordancia con las funciones de graficación que existen en *Mathematica*.

En algunas ocasiones nos podemos enfrentar a la necesidad de crear funciones para curvas, en donde los criterios de los parámetros tienen diferentes características a la funciones paramétricas genéricas que se ha visto, esto es el caso de las funciones de caja, que aplico para generar ciertas superficies que veremos en los capítulos siguientes, en donde, buscamos obtener curvas que queden comprendidas dentro de un marco rectangular (caja), donde la base es $2a$ y la altura en el centro es b , para un parámetro t que va de $\{-a,a\}$

A continuación vamos a desarrollar las funciones de cajón de algunas curvas.

Parábola

El lector podrá encontrar que la ecuación de la parábola para un caso de caja se puede deducir fácilmente de la ecuación del momento de una viga $y = w l^2 / 8$, que corresponde precisamente a la forma de una parábola. Correspondiendo a nuestros parámetros a,b la ecuación sería $b = wa^2/8$, incorporando a t como parámetro y con un poco de álgebra se obtiene

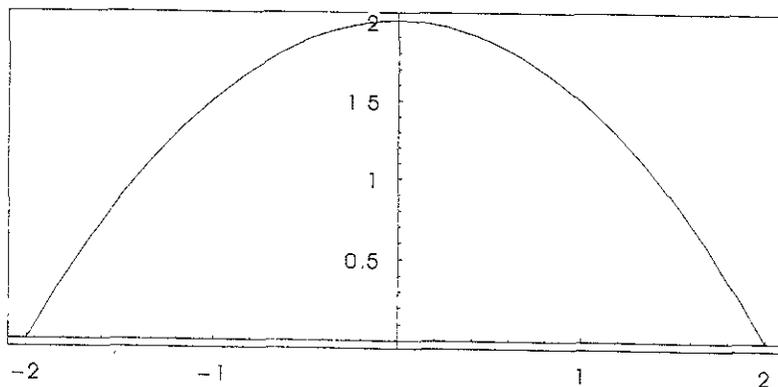
$$y = b t (1-t) / a^2$$

Tendríamos entonces que la ecuación de caja como sigue:

```
parabbox[a_,b_][t_]:=
  {t, b - (b t^2)/ a^2}
```

Una parábola cuya base sea 4 y altura 2 se obtiene como sigue:

```
ParametricPlot[parabbox[2,2][t]
//Evaluate, {t,-2,2},
Axes->True,Ticks->True,
Frame->True];
```



Arco Circular

Defino que los parámetros de un arco circular deben ser tales que $b \leq a$ y donde t transcurre de $\{-a,a\}$. Me interesa conocer el radio del círculo, que es deducible por trigonometría. Si a y b son dados, y es el lado opuesto del ángulo B y a es el lado opuesto de A , con triángulo rectángulo en un tercer punto $\{0,0\}$, tenemos:

$$a = 90 - \text{ArcTan}[b/a],$$

También sabemos que la hipotenusa es

$$n = \text{Sqrt}[a^2 + b^2].$$

Sabemos que el triángulo que forma el centro del círculo c con A y B es un

triángulo equilátero, por lo tanto el ángulo ArB es $180 - 2a$ y por ley de los senos tenemos entonces:

$$r / \sin[a] = h / \sin[ArB]$$

Substituyendo el valor de h tenemos:

$$r = \{\text{Sqrt}[a^2 + b^2] \sin[\pi/2 - \text{ArcTan}[b/a]]\} / \sin[\pi - 2(\pi/2 - \text{ArcTan}[b/a])]$$

Lo cual puede simplificarse como

$$r = \{\text{Sqrt}[a^2 + b^2] / \text{Csc}[2 \text{ArcTan}[b/a]]\} / \text{Sqrt}[1 + b^2/a^2]$$

En la implementación de la función ry es la distancia de la base de la caja al centro del círculo, y q es el ángulo que tiene el radio apuntando a a .

```
arcocirbox[a_,b_][t_]:=
{t,0} /; b = 0;
```

```
arcocirbox[a_,b_][t_]:=
Module[{r, ry, q},
r = (Sqrt[a^2 + b^2]
Csc[2 ArcTan[b/a]]
/Sqrt[1 + b^2/a^2]);
ry = b-r;
q = ArcCos[t/r];
{t, r Sin[q]+ry}
```

```
ParametricPlot[arcocirbox[2,1][t]
//Evaluate, {t,-2,2},
Axes->True, Ticks->True];
```

Es muy importante asegurarse que la función se comporte adecuadamente para cuando b tienda a 0, ya que el radio tiende

a infinito. La primera definición de `arcocirbox` regrese $\{t,0\}$ cuando $b=0$, lo cual se implementa por el signo condicional `[/;]`.

En *Mathematica* cuando se definen dos funciones simultáneamente, como es este caso, el programa tratará de utilizar la primera definición primero, y si no es aplicable entonces usa la siguiente, y así sucesivamente.

Cisoide

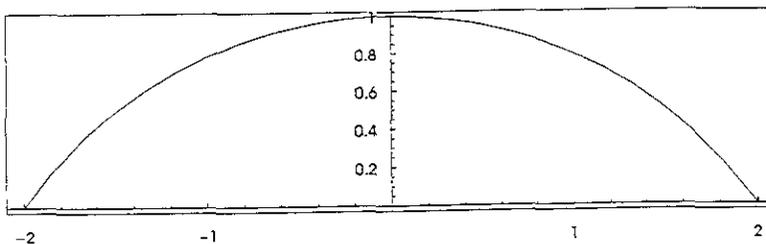
Para obtener la función de caja de la cisoide es necesario partir de la ecuación no paramétrica $y^3 + y^2 - 2r^2 = 0$, donde r corresponde al radio del círculo del trazo, y t corresponde a la coordenada sobre el eje de las x , de esta ecuación se puede despejar y como sigue:

```
Solve[y^3 + y^2
- 2 r^2 == 0, y]
{{y -> -(t^(4/3))/(3^(1/3)*
(9*r + Sqrt[3]*
Sqrt[27*r^2 + t^2])^(1/3)) +
(t^(2/3)*(9*r + Sqrt[3]*
Sqrt[27*r^2 + t^2])^(1/3))/
3^(2/3)},
```

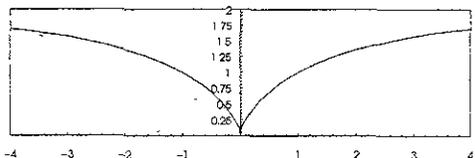
Mathematica aporta una lista de soluciones de las cuales solamente he puesto la primera que es la que uso para definir la función del cisoide genérico como sigue:

```
cisoide[r_][t_]:=
{t, -(Abs[t]^(4/3)/
(3^(1/3)*(9*r + Sqrt[3]*
Sqrt[27*r^2 + t^2])^(1/3)) +
(Abs[t]^(2/3)*(9*r + Sqrt[3]*
Sqrt[27*r^2 + t^2])^(1/3))/
3^(2/3))};
```

Vamos a graficar una cisoide para comprobar la función



```
ParametricPlot[cisoide[1][t]
//Evaluate, {t,-4,4},
PlotRange->{{-4,4},{0,2}},
AspectRatio->Automatic,
Frame->True, Axes->True,
Ticks->True];
```



El lector podrá observar que la cúspide de la cisoide coincide con $\{0,0\}$, sin embargo para su aplicación sería necesario que la cisoide estuviera invertida teniendo a la punta de la cúspide correspondiendo al parámetro b que hemos estado utilizando como alto de la caja.

Se hace necesario encontrar el radio de la cisoide que corresponde a los parámetros a y b como medio ancho y alto de la caja, así, podemos substituir a y b en la ecuación no paramétrica de la cisoide y despejar r como sigue:

```
Solve{b^3 + b a^2 -
(2 r a^2) == 0, r}
```

```
{{r -> -((-a^2*b) - b^3)/
(2*a^2)}}
```

```
cisoide[r][a_][t_]:=
-(-b^3 - (b a^2))/(2 a^2)
```

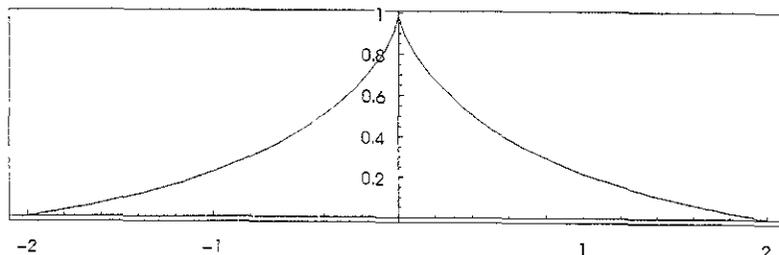
```
cisoide[2, 1]
5/8
```

De la función cisoide podemos obtener el valor de y correspondiente a nuestro parámetro a , valor que será usado al voltear y desplazar verticalmente la curva, de tal forma que, aparezca con la cúspide en la parte superior y que las alas de la cisoide coincidan con el eje x .

Estamos entonces listos para generar la función de caja de la cisoide como sigue:

```
cisoidebox[a_,b_][t_]:=
Module[{r, upy},
r = -(-b^3 - (b a^2))/(2 a^2);
upy = cisoide[r][a][t];
{t, upy+(Abs[t]^(4/3)/
(3^(1/3)*(9*r - Sqrt[3]*
Sqrt[27*r^2 + t^2])^(1/3));
- (Abs[t]^(2/3)*(9*r -
Sqrt[3]* Sqrt[27*r^2 +
t^2])^(1/3))/3^(2/3)}
];
```

```
ParametricPlot[cisoidebox[2,1][t]
//Evaluate, {t,-2,2},
AspectRatio->Automatic,
Axes->True, Ticks->True,
Frame->True];
```



Nos podemos percatar que algunas soluciones para funciones específicas no son tan simples, pero se hacen necesarias en ciertas aplicaciones de superficies como veremos más adelante. Favor de notar que estas funciones de caja han sido desarrolladas en relación a mi particular forma de resolver la geometría de ciertas superficies, quizás, el lector se encuentre ante la necesidad de funciones que tengan parámetros, comportamiento y respuestas distintas en la medida del desarrollo de su propia investigación.

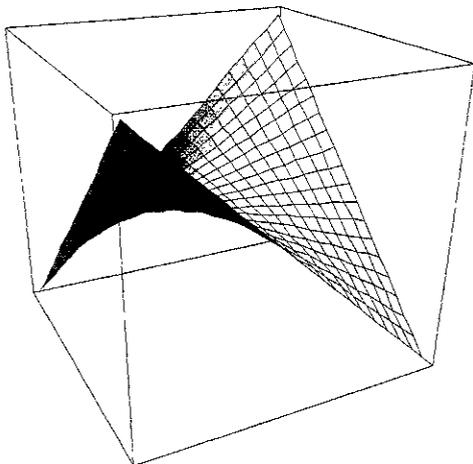
Superficies Regladas

Las superficies regladas son una clase de superficie que contiene líneas rectas. Una superficie reglada es una superficie generada por líneas rectas que se mueven a lo largo de una curva. El cono y el cilindro pueden ser consideradas como superficies regladas simples que pueden generarse de cualquier curva plana. El paraboloides hiperbólico, conoide, y helicoides son ejemplos de superficies regladas que son bien conocidas y ampliamente usados. Veamos algunas de ellas.

Paraboloides hiperbólico

El paraboloides hiperbólico es una curva que por su facilidad de trazo ha sido utilizada ampliamente en arquitectura, pudiendo encontrar en Antonio Gaudí, Félix Candela, y en varios arquitectos mexicanos de los años 50-70, ejemplos sobresalientes.

En su forma más simple puede computarse como la parametrización de dos variables

$$\text{parahyp}[u, v] := \{u, v, u \cdot v\}$$


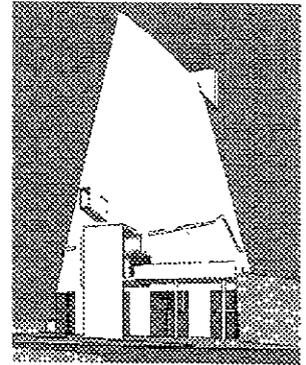
Es común buscar la generación de un paraboloides hiperbólico a partir de dos rectas, por lo que vamos a desarrollar la ecuación que se base en esta consideración.

Se entiende que las rectas no están en un mismo plano y éstas se definen como ab y cd por un par de puntos a, b y c, d . Vamos a considerar un par de vectores unitarios uab y ucd aplicables en a y c multiplicables por un escalar u y por la longitud de cada recta respectivamente, para encontrar en cada una de las rectas, los puntos i, j que definen la generatriz ij que va de la recta ab a la cd correspondientes a ese escalar u . Un segundo parámetro v es un escalar aplicable al vector unitario uij que permite obtener el lugar geométrico de la superficie correspondiente a los parámetros u, v . Si estos parámetros van de 0 a 1, la superficie generada queda comprendida entre ambas rectas, pero ello no es una limitación y puede uno explorar otras magnitudes.

```
parahip2r[a_, b_, c_, d_] :=
Module[{nab, ncd, nij, uab,
  ucd, uij, i, j},
  nab=norm[b-a];
  ncd=norm[d-c];
  uab= (b-a)/nab;
  ucd = (d-c)/ncd;
  i = a + uab u nab;
  j = c + ucd u ncd;
  nij = norm[j - i];
  uij = (j-i) / nij;
  i + uij v nij ]
```

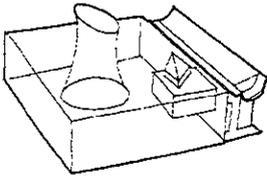
Ahora podemos probar la función para generar un paraboloides hiperbólico comprendido entre la recta ab determinada por $\{0, 0, 1\}$, $\{2, 0, 0\}$ y la otra por $\{0, 2, 0\}$, $\{3, 2, 1\}$.

```
ParametricPlot3D[parahip2r[
{0,0,1}, {2,0,0}, {0,2,0}, {3,2,1}][u,v]
//Evaluate, {u,0,1}, {v,0,1},
Axes->True ];
```

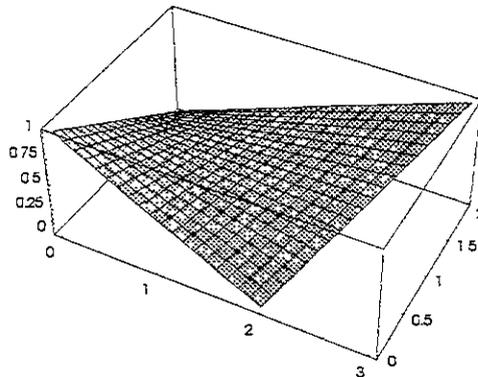
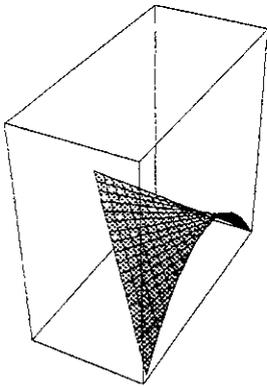


Le Corbusier, proyecto de la Iglesia de Saint Pierre, Firminy-Vert, 1960. El volumen principal es un cono circular truncado Imagen [Quondam].

Favor de observar que en esta ilustración, la planta de este paraboloides hiperbólico es un trapecio



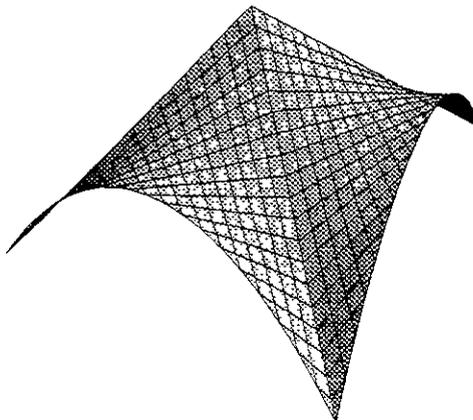
Le Corbusier, Palacio de la Asamblea, Chandigarh, 1961. La sala del Parlamento es un hiperboloide.



El paraboloides hiperbólico es una superficie doblemente reglada, esto significa que pudiéramos usar las otras rectas extremas para definir la curva, comparativamente podemos entender esta diferencia con un cilindro, que es una superficie reglada simple.

En arquitectura, estas superficies son utilizadas en algunos casos, modificando el contorno del trazo, o bien utilizando secciones de paraboloides hiperbólico como en la siguiente ilustración:

Secciones como ésta, se unen para formar conjuntos mas complejos, la ilustración que sigue, muestra una semejanza de la geometría de las cubiertas de la Planta



Bacardí (Ver fotografía del interior en el capítulo de Introducción).

Hiperboloide elíptico

Es una superficie doblemente reglada cuya función paramétrica es como sigue:

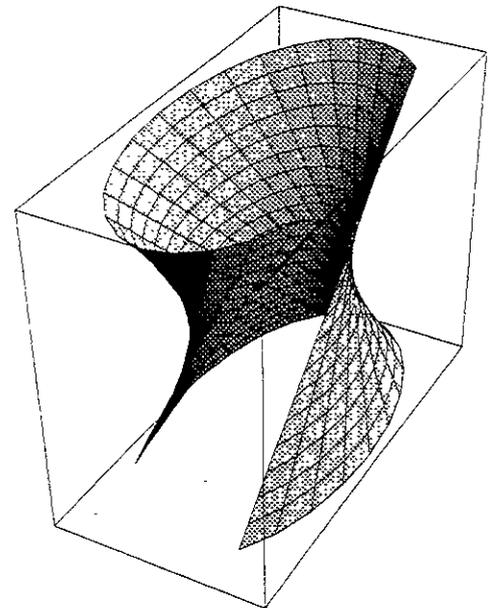
```
hiperboelipticomax[a_,b_,c_][u_,v_]:=
{a Cos[u] - a v Sin[u],
 b v Cos[u] + b Sin[u],c v}
```

```
hiperboelipticomax[a_,b_,c_][u_,v_]:=
{a Cos[u] * a v Sin[u],
 -b v Cos[u] - b Sin[u],c v}
```

La diferencia entre estas dos funciones es el sentido del trazo de las líneas generatrices.

Dado la ecuación anterior, seguramente mis lectores podrán deducir la función de un hiperboloide normal (circular).

```
ParametricPlot3D[
 hiperboelipticomax[1,2,2][u,v]
 //Evaluate, {u,0, 3Pi/2},
 {v,-1.5,1.5}];
```

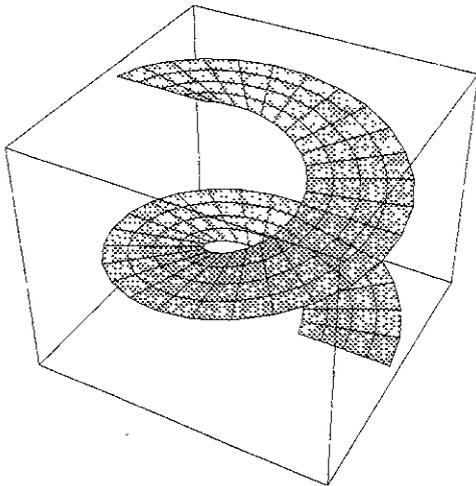
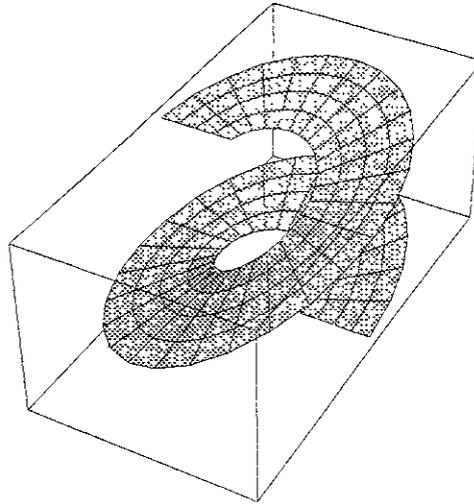


Helicoide

El helicoide es una superficie ampliamente usada en arquitectura, principalmente en escaleras. Su ecuación es indispensable para analizar su estructura sobre todo cuando carecen de un apoyo central, tal como muestro en el ejemplo.

```
helicoide[a_,b_][u_,v_]:=
  {a v (Cos[u], a v Sin[u], b u}

ParametricPlot3D[helicoide[1,1]
  [u,v]//Evaluate,
  {u,0,3Pi},{v,2,6},
  PlotPoints->15]
```



Tira de Möbius

La tira de Möbius es una superficie que resulta de revolver un segmento de línea alrededor de un eje circular, pero rotando esta línea alrededor del eje principal.

```
tiramobius[a_][u_,v_]:=
  a{Cos[u]+v Cos[u/2] Cos[u],
  Sin[u]+ v Cos[u/2] Sin[u],
  v Sin[u]/2}
```

Es fácil comprender que u en $tiramobius[a][u,0]$ es el eje circular de la tira Möbius, y que v en $tiramobius[a][u,v]$ es un segmento de línea que encuentra este círculo central.

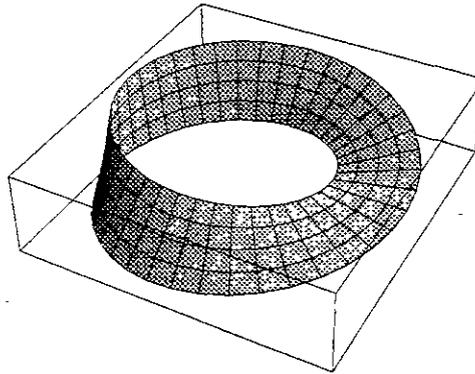
La función para generar un helicoide elíptico es como sigue:

```
helicoideelip[a_,b_,c_][u_,v_]:=
  {a v Cos[u], b v Sin[u], c u}

ParametricPlot3D[
  helicoideelip[1,2,1][u,v]//
  Evaluate,{u,0,3Pi},{v,2,6},
  PlotPoints->{40,5}];
```

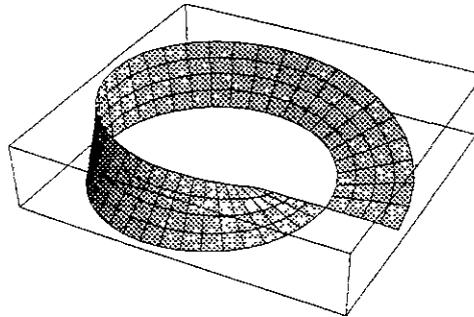
Para que la tira tenga continuidad, el parámetro v , debe ir de una magnitud negativa a una positiva de igual tamaño. Si el valor absoluto de v es menor a a , entonces la tira es hueca en su interior.

```
ParametricPlot3D[
  tiramobius[1][u,v]
  //Evaluate,{u,0,2Pi},
  {7,-0.3,0.3},
  PlotPoints->{40,5}];
```



```
ParametricPlot3D[
  tiramobius[1][u,v]
  //Evaluate, {u,0,2Pi},
  {v,0,0.6},
  PlotPoints->{40,5}];
```

Observe el eje circular, y el operando del parámetro v



paraboloide hiperbólico generado por dos rectas.

En la implementación, se considera que el arco se ubica en el plano x-z, con centro en el origen, siendo b el ángulo que comprende dicho arco y c, el ángulo inicial. La recta se define por d y e, y puede localizarse arbitrariamente en el espacio.

```
conoiderecta[a_,b_,c_,d_,e_][u_,v_]:=
Module[{nde, uce, esc, i,j,
  nij, uij},
  nde = norm[e-d];
  uce = (e -d)/nde;
  esc = (u - c)/( b);
  i = {a Cos[u], 0, a Sin[u]};
  j = d - uce esc nde;
  nij = norm[ j - i];
  uij = (j - i)/ nij;
  i + uij v nij ]
```

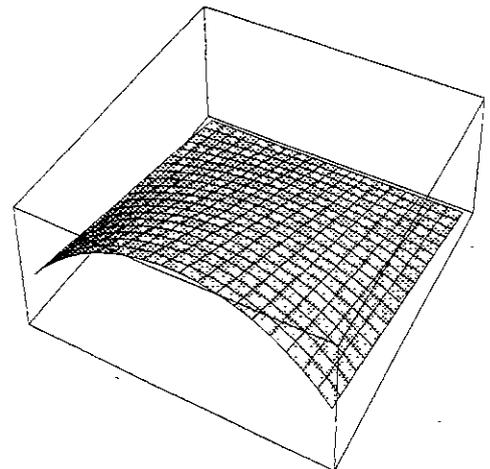
```
ParametricPlot3D[
  conoiderecta[2,Pi/2,Pi/4,
  {1.4,3,1},{-1.4,3,1}][u,v]
  //Evaluate, {u,Pi/4, 3Pi/4},
  {v,0,1}];
```

Candela utilizaba segmentos de este tipo de conoide, es decir sus dos extremos eran arcos, claro uno de menor tamaño. Su gran aportación fue el colocar los tirantes por la parte superior.

Conoide a recta

La superficie que se genera al unir un segmento de círculo a una recta algunas veces se conoce como conoide a recta. Esta superficie fue usada con frecuencia por Felix Candela en cascarones de concreto para cubiertas de naves industriales. En Industrias Fernández (Naucalpan, Edo de México), las utilizó por primera vez en el año 1950.

La función de esta superficie ha sido implementada en forma parecida al



Superficies de Revolución

Las formas de superficies de revolución son unas de las más triviales. La esfera, toroide y paraboloides son superficies de revolución bien conocidas. Una superficie de revolución se forma al girar una curva plana alrededor de un eje

Utilizando *Mathematica* se puede obtener una función que produzca la ecuación de una superficie de revolución correspondiente a una curva alfa. Siendo alfa la función de la curva plana.

```
surfrev[alfa_][u_,v_]:=
  {Cos[u] alfa[v][[1]],
   Sin[u] alfa[v][[1]],
   alfa[v][[2]]}
```

Si *a* es una lista *a*[[*k*]] extrae el elemento *k* de la lista. Los componentes de la curva plana son *alfa*[*v*][[1]] y *alfa*[*v*][[2]]

Toroide

Por ejemplo para obtener la superficie de revolución generada por un círculo con centro en (a,0) y radio *b*, aplicamos *surfrev* a *circle*[*b*] en la siguiente forma:

```
circle[a_][t_]:=
  {a Cos[t], a Sin[t]}
surfrev[
  circle[b][#]+{a,0}&][u,v]

{Cos[u]*(a + b*Cos[v]),
 (a + b*Cos[v])*Sin[u],
 b*SIN[v]}
```

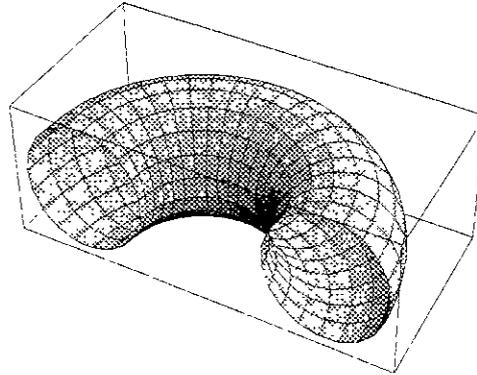
Dicha ecuación corresponde al toroide, el cual definimos como sigue:

```
toroide[a_,b_][u_,v_]:=
  {Cos[u]*(a + b*Cos[v]),
 (a + b*Cos[v])*Sin[u],
 b*SIN[v]}
```

```
b*SIN[v]}
```

Procedemos a graficar un toroide de la siguiente manera:

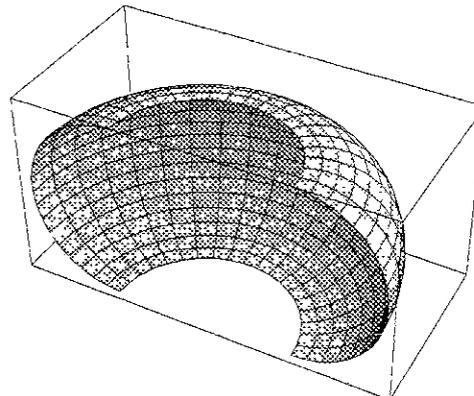
```
ParametricPlot3D[
  toroide[2,1][u,v]
 //Evaluate,{u,0, Pi},
 {v,0,2Pi}];
```



Seguramente podrás intuir que si *a* = 0, estaríamos refiriéndonos a la esfera, claro está que en ese caso se puede generar una función más simple si se prefiere

Vamos a ver otro ejemplo más, utilizando la misma función *toroide*.

```
ParametricPlot3D[
  toroide[1,1][u,v]
 //Evaluate,
 {u,0, Pi}, {v,-Pi/2, Pi/2}];
```



Algún lugar en Africa.
Fotografía Orestida
Africana, Pier Paolo
Passolini, IDI
Cinematográfica/ Les
Filmes Number One. Italia,
1970

Paraboloide

La función no implícita de la parábola en posición vertical y con vértice en el origen, y su correspondiente superficie de revolución es como sigue:

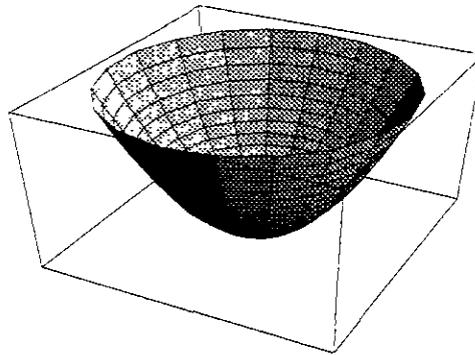
```
parabola[a_][t_]:=
  {2 a t, a t^2}

surfrev[parabola[a][#]&][u,v]

  {2*a*v*Cos[u], 2*a*v*Sin[u],
   a*v^2}

paraboloide[a_][u_,v_]:=
  {2 a v Cos[u], 2 a v Sin[u],
   a v^2}

ParametricPlot3D[
  paraboloide[1][u,v]//
  Evaluate, {u,0,2Pi},
  {v,0,3}];
```



Concoide

Recordarás el Concoide de Nicómedes que vimos anteriormente, señalé que es una curva que tiene una gran sencillez de trazo, posiblemente aplicable en la construcción de bóvedas, tal afirmación se basa en el entendimiento de que su trazo parte de un punto fijo localizado en el eje central y en un plano horizontal. Su función es:

```
concoidenico[a_,b_][u_]:=
  {Tan[u] (a+b Cos[u] ),
   a + b Cos[u]}
```

Aplicando surfrev obtenemos la ecuación de la superficie de revolución.

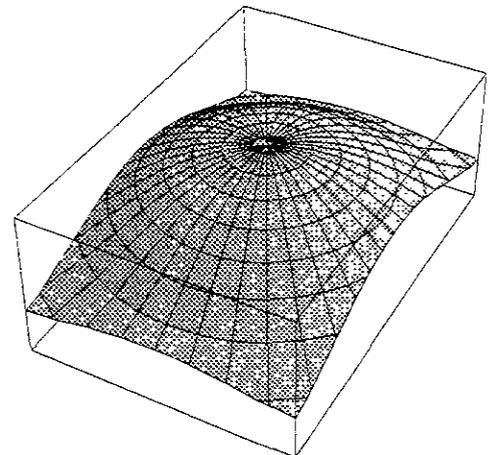
```
surfrev[
  concoidenico[a,b][#]&][u,v]

  {Cos[u] (a + b Cos[v]) Tan[v],
   (a + b Cos[v]) Sin[u] Tan[v],
   a + b Cos[v]}

concoide3d[a_,b_][u_,v_]:=
  {Cos[u] (a + b Cos[v]) Tan[v],
   (a + b Cos[v]) Sin[u] Tan[v],
   a + b Cos[v]}

ParametricPlot3D[
  concoide3d[1,4][u,v]
  //Evaluate,
  {u,-Pi/2, Pi/2},
  {v,-Pi/2, Pi/2},
  PlotRange->{{-4,4},
  {-6,6},Automatic}];
```

Observa el rango de PlotRange, que ha sido definido como tal para ayudarnos a visualizar una cubierta sobre una superficie rectangular.



Superficies de Transición

Son aquellas superficies resultado de la trayectoria de una curva a lo largo de otra, donde los parámetros de la primera se pueden modificar en relación a la curva de trayectoria, también llamada generatriz, de esta manera la curva inicial sufre una transición al recorrer la generatriz, y de esta manera se generan superficies que denominamos de transición

Una aplicación muy útil de estas superficies es para generar bóvedas con diferentes condiciones o contornos de apoyo. Dada la común utilización de espacios rectangulares en la arquitectura, voy a ejemplificar algunas bóvedas pensando en estos espacios rectangulares.

Recordarás que hemos hablado de la parábola como una curva que corresponde a los esfuerzos de cargas uniformemente repartidas, y dada que esta condición es muy común para las cubiertas de estos espacios rectangulares conformados por muros de carga o columnas aisladas, voy a utilizar a la parábola en estas superficies. Al final, daré ejemplos de superficies de transición generadas por arcos circulares y cisoides donde los contornos de apoyo no sean rectangulares, con el objeto de abundar el tema. En todos estos casos utilizaremos las funciones de caja que hemos definido anteriormente.

Bóvedas parabólicas apoyadas en un plano

Consideremos una bóveda apoyada sobre muros o traves perimetrales en un mismo plano. Definimos el ancho y largo del rectángulo de apoyo como a, b y la altura en el centro como c . Los parámetros u, v

corresponden a las coordenadas x, y del lugar de la curva que se busca.

Voy a considerar que generamos una bóveda cuyas generatrices longitudinal y transversal corresponden a una misma curva (en el primer ejemplo voy a usar parábolas).

Voy a considerar una curva transversal (sentido del eje x) que pasa por el centro del rectángulo y que corresponde a la generatriz central cuya altura es c . Utilizando la función de caja de la curva aplicada a la generatriz central para un parámetro u , se obtiene la altura en el centro que corresponde de la generatriz longitudinal. De la generatriz longitudinal se obtiene la altura de la curva correspondiente al parámetro v , y de esta forma se obtiene la altura de la bóveda en u, v .

Podemos proponer una función en *Mathematica* que genere bóvedas rectangulares cuyo contorno sea un plano. La función `bovedaaplano`, considera que `alfa` es una función de caja. Las funciones de caja que hemos definido nos regresan una lista, la altura de la curva corresponde al segundo elemento de la lista que se extrae como `[[2]]`. La solución es sencilla:

```
bovedaaplano[alfa_]
  [u_, v_, a_, b_, c_] :=
  {u, v, alfa[u,
    alfa[a, c][u][[2]]
  ][[v][[2]]]}
```

Vamos a utilizar esta función para generar una bóveda a base de parábolas como sigue:

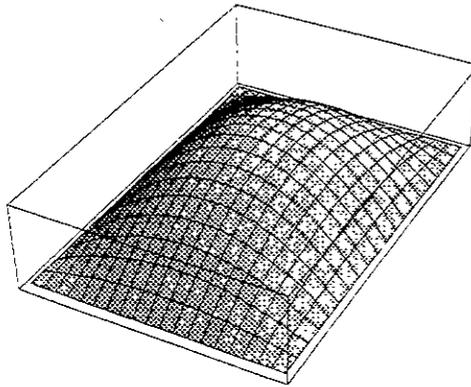
```
fun2 =
bovedaaplano[parabbox[##] &]
  [u, v, a, b, c]
  {u, v, c - (c*L^2)/a^2 -
  ((c - (c*L^2)/a^2)*v^2)/b^2}
```

```

bovparab[a_,b_,c_][u_,v_]=fun2;

ParametricPlot3D
[bovparab[2,3,1.5][u,v]
//Evaluate,
{u,-2,2},{v,-3,3}];

```



Se puede observar la bondad de la función *bovedaaplano*, y la facilidad para utilizarla con cualquier función de curvas de caja.

La función *bovedaaplano* se puede modificar para utilizar la curva generatriz longitudinal distinta a la transversal como sigue:

```

bovedaaplano2[alfa_, beta_]
[u_,v_,a_,b_,c_] :=
{u,v,beta[b,
  alfa[a,c][u][[2]]
][v][[2]]}

```

Recordarás en los capítulos anteriores que el trazo de la parábola se puede hacer por una colgante. Con este método de trazo se puede usar una colgante fija que pase por el centro transversalmente y otro longitudinal que se deslice perpendicular a la central, tomando las diferentes alturas en el centro dadas por la colgante central, claro esta que la medida vertical del punto

deseado se invierte para construir la bóveda.

Dovela

Consideremos ahora una dovela parabólica aplicable a un área rectangular, que se apoya en dos extremos opuestos sobre un mismo plano, y que tiene una generatriz central dada por una parábola de altura c y otras dos en sus extremos longitudinales de altura d . Esta dovela funciona como un arco de dos articulaciones teniendo en el centro el mayor momento de inercia dado por la diferencia de altura de las dos generatrices longitudinales.

Si tenemos a, b como ancho y largo del rectángulo, c altura en el centro y d altura del arco lateral, tenemos que la solución para cualquier curva con función de caja se obtiene de restar de la altura de la curva central la altura de la curva lateral correspondiente al parámetro v (coordenada en y), esa diferencia es el parámetro de altura para la bóveda que corre en el sentido transversal y aplicable al parámetro u . La altura obtenida se suma a la obtenida en el primer arco lateral. La función genérica para estas superficies es como sigue:

```

dovelaaplano[alfa_]
[u_,v_,a_,b_,c_,d_] :=
Module[{hc,hd},
hc = alfa[b,d][v][[2]];
hd = alfa[b,c][v][[2]];
{u,v, hc +
  alfa[a, hc - hd][u][[2]]}

```

En este caso hc corresponde a la altura en el arco generatriz lateral y hd corresponde a la altura en el arco generatriz central. Si utilizamos como curva la función de caja de la parábola tenemos:

```

fun3 = dovelaaplano
[parabbox[##]&][u,v,a,b,c,d]

```

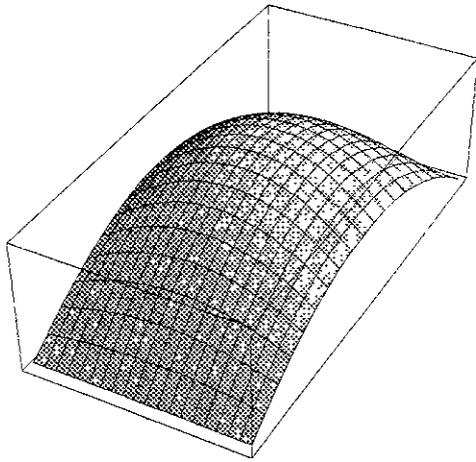
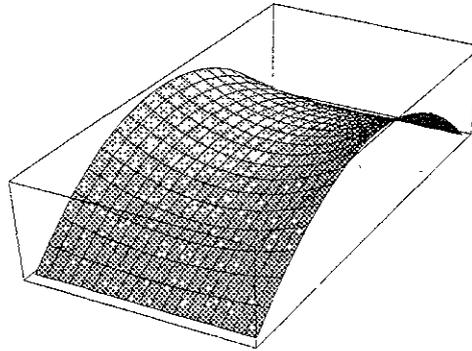
```

{u, v, c - (c*v^2)/b^2 -
 (u^2*(c - d - (c*v^2)/b^2 +
 (d*v^2)/b^2))/a^2}

doveparab[a_,b_,c_,d_][u_,v_]=
  fun3;

ParametricPlot3D
 [doveparab[2,4,2.5,1.5][u,v]
 //Evaluate,
 {u,-2,2},{v,-4,4}];

```



Utilizando la misma función, se puede hacer que la altura del arco lateral sea mayor que la altura en el centro, y de esta manera se puede obtener dovelas en forma de canal. El lector podrá imaginar que su trazo es más simple, ya que teniendo la geometría de los arcos laterales, se pueden trazar las parábolas transversales por medio de colgantes que partan de estos arcos laterales, sin hacer inversiones verticales.

```

ParametricPlot3D
 [doveparab[2,4,1.5,2.5][u,v]
 //Evaluate,
 {u,-2,2},{v,-4,4}];

```

Bóveda con perímetros curvos

Consideremos ahora una bóveda sobre superficie rectangular, que se apoya sobre dos pares de curvas opuestos dispuestos perimetralmente. En el centro se tiene una generatriz central dada por una curva de altura c , dos curvas simétricas longitudinales extremas de altura d , y dos curvas transversales extremas de altura e . La estructura de esta superficie puede funcionar considerando que se apoya en las curvas perimetrales o bien en las esquinas del área rectangular.

Desarrollamos una función genérica como en los casos anteriores como sigue:

```

bovedaacurvas[alfa_]
 [u_,v_,a_,b_,c_,d_,e_] :=
 Module[ {hc,hd},
  hd = alfa[b,d][v][[2]];
  hc = alfa[b,c-e][v][[2]] + e;
  {u,v, hd +
   alfa[a,hc-hd][u][[2]] } ]

```

Vamos a usar la función de caja de la parábola para generar la superficie, en donde los arcos laterales son parábolas.

```

fun4 = bovedaacurvas
 [parabbox[##]&][u,v,a,b,c,d,e]

{u, v, c - ((c - e)*v^2)/b^2 -
 (u^2*(c - d + (d*v^2)/b^2 -
 ((c - e)*v^2)/b^2))/a^2}

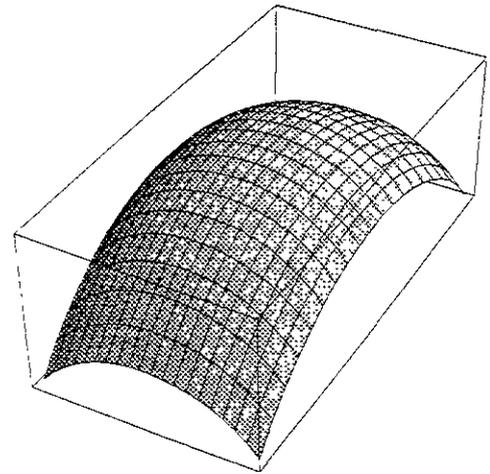
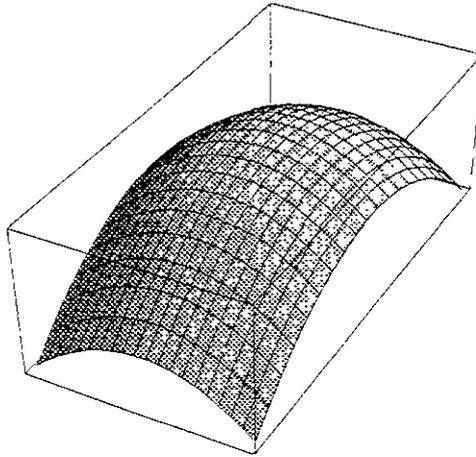
```

```

boveparabarcos
  [a_,b_,c_,d_,e_] [u_,v_] = fun4;

ParametricPlot3D
  [boveparabarcos[2,4,3,2,1][u,v]
  //Evaluate,
  {u,-2,2},{v,-4,4}];

```



La función genérica de este tipo de bóvedas se puede adaptar para utilizar diferentes curvas laterales, y curvas generatrices, en tales casos, la función genérica puede proponerse de esta manera:

```

bovedaacurvas2[alfa_, beta_]
  [u_,v_,a_,b_,c_,d_,e_] :=
Module[ {hc,hd},
  hc = alfa[b,c][v][[2]];
  hc = alfa[b,c-e][v][[2]] + e;
  {u,v, hd -
  beta[a, hc-hc][u][[2]]} ]

```

Veamos ahora otro ejemplo en el que utilizamos arcos circulares por medio de la función `arcirbox` que desarrollamos en los capítulos anteriores. Te podrás imaginar que el trazo no es simple pues requiere definir un conjunto de radios correspondientes a los arcos de diferentes coordenadas, mismos que tenderán a multiplicarse en la medida de la precisión deseada, por lo que se puede considerar que su trazo es poco práctico.

```

fun5 = bovedaacurvas[
  arcirbox[##]&][u,v,a,b,c,d,e];

bovecircarcos[a_,b_,c_,d_,e_]
  [u_,v_] = fun5;

ParametricPlot3D
  [bovecircarcos[2,4,3,2,1][u,v]
  //Evaluate, {u,-2,2},{v,-4,4}];

```

Superficies focales

Podemos definir las superficies focales como aquellas cuyo trazo depende de puntos fijos en el espacio. Hemos visto curvas como el círculo, elipse, plomoides, poleógenas y elipzógenas cuya transición de dos a tres dimensiones es prácticamente automática.

La esfera tiene como ecuación paramétrica en término de dos ángulos u, v y radio a :

```
esfera[a_][u_,v_]:=
  a{Cos[v]Cos[u],Cos[v]Sin[u],Sin[v]}
```

Elipsoide

El trazo del elipsoide es prácticamente el mismo que el de la elipse, únicamente que los cordeles giran alrededor del eje de los focos

Las siguientes funciones de la elipsoide corresponden al sentido del eje principal, paralelo a los ejes coordenados

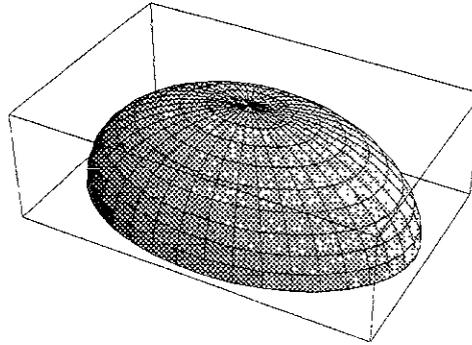
```
elipsoidex[a_,c_][u_,v_]:=
  {c Cos[v]Cos[u],
  a Cos[v]Sin[u], a Sin[v]}
```

```
elipsoidey[a_,c_][u_,v_]:=
  {a Cos[v]Cos[u],
  c Cos[v]Sin[u], a Sin[v]}
```

```
elipsoidez[a_,c_][u_,v_]:=
  {a Cos[v]Cos[u],
  a Cos[v]Sin[u], c Sin[v]}
```

Se puede obtener la gráfica de un elipsoide de la siguiente manera:

```
ParametricPlot3D[
  elipsoidex[1,1.5][u,v]
  //Evaluate, {u,0,Pi},{v,0,Pi}];
```



Plomoide 3D

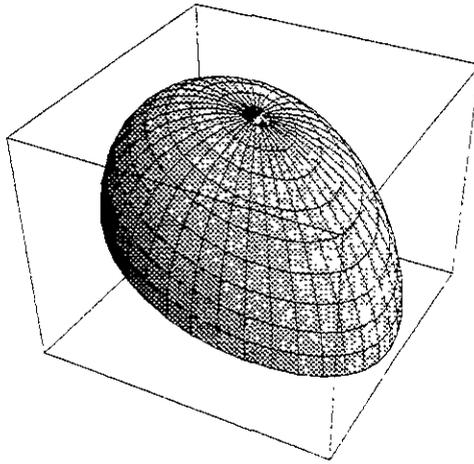
La plomoide3D se implementa directamente de la curva plana que hemos estudiado anteriormente (plomoide), y que consiste en una resta vectorial del foco al lugar geométrico de la curva base, que para el ámbito tridimensional será una superficie y su proyección vertical (eje z) de la magnitud remanente.

```
plomoide3D[
  {cx_,cy_,cz_},{fx_,fy_,fz_},l_]:=
  Module[{c,d},
    c = Sqrt[{cx-fx]^2+
      cy-fy]^2+(cz-fz)^2};
    d = l - c;
    {cx,cy,cz-d}]
```

En donde la lista $\{cx, cy, cz\}$ serán obtenidas de la superficie base, donde $\{fx, fy, fz\}$ son las coordenadas del foco y l la longitud del cable aplomado.

Por ejemplo una plomoide3D que tiene una esfera como curva base se puede graficar como sigue:

```
ParametricPlot3D[
  plomoide3D[esfera[1][u,v],
  {0.5,0,0},2]
  //Evaluate,
  {u,0,Pi},{v,0,Pi}];
```



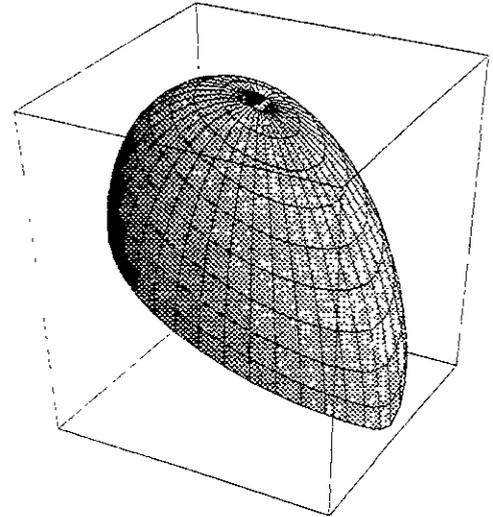
Se puede comprender que la proyección horizontal de la superficie anterior es un círculo.

Una plomoide3D que usa como curva base a una elipsoide de eje principal en x, se puede obtener como sigue:

```
ParametricPlot3D[
  plomoide3D[
    elipsoidex[1,1.5][u,v],
    {0.5,0,0.2},2]
  //Evaluate,
  {u,-Pi,Pi}, {v,0,Pi}];
```

Un Plomoide3D que tiene como curva base un elipsoide de eje principal en z es como sigue, su proyección horizontal sería un círculo.

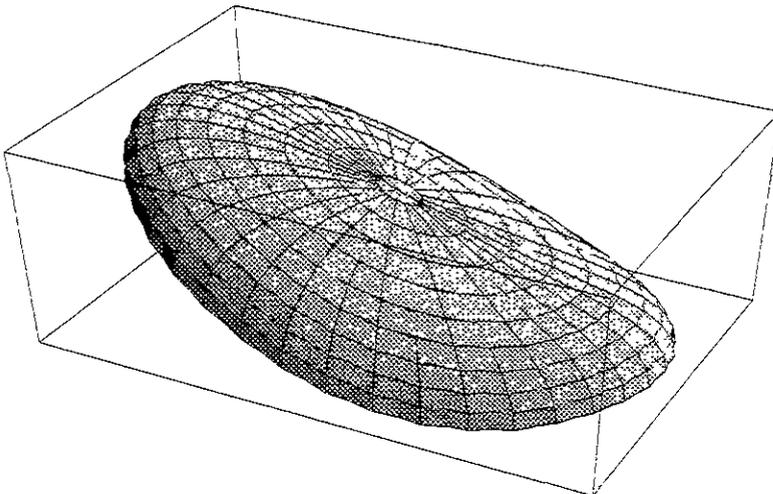
```
ParametricPlot3D[
  plomoide3D[
    elipsoidez[1,1.4][u,v],
    {1,0,.1},2]
  //Evaluate,
  {u,0,Pi}, {v,0,Pi}];
```



Poleógena 3D

Recordarás que la curva Poleógena se plantea partiendo de una lista consistente en sub-listas que contenían como primer parámetro las coordenadas de los focos y como segundo las distancias de dichos focos al lugar geométrico de la curva. Para el caso de tres dimensiones se plantea de igual manera a excepción de las coordenadas de los focos que entonces estarán dadas en tres dimensiones. Una lista de focos y cordeles por ejemplo sería:

```
lf =
  {{{1,3,0},1},{{0,1,2},2},{{3,1,0},1}};
```



Podemos ahora plantear la función para obtener la ecuación de la superficie Poleógena 3D de manera similar a la planteada anteriormente para la curva

```
poleoeq3D[focos_, lcable_]:=
Module[{p,eqn=0},
  p = {x,y,z};
  Do[eqn += norm[
    p - focos[[1,1]] ]
  focos[[1,2]],
  {1, Length[focos] }];
  eqn = eqn == lcable
]
```

Utilizando la función anterior se puede obtener la ecuación de la Poleógena 3D correspondiente a la lista lf planteada anteriormente

```
ecu = poleoeq3D[lf, 9]
```

$$2 \sqrt{x^2 + (-1+y)^2 + (-2+z)^2} + \sqrt{(-1+x)^2 + (-3+y)^2+z^2} + \sqrt{(-3+x)^2 + (-1+y)^2+z^2} = 9$$

Se puede intuir que al plantear la ecuación de la Poleógena 3D en términos de $\{x, y, z\}$, se puede incurrir en casos en los que no exista un lugar geométrico real de la curva para ciertos parámetros, y con ello caer en el error de obtener parches imaginarios. Por esta razón este planteamiento resulta inconveniente, sin embargo puede resultar útil cuando en el proceso de diseño se tiene conocimiento de los límites de esa superficie y se quiera obtener información en términos de parámetros a ejes

Vamos a buscar una solución que considere p al lugar geométrico de la superficie en función de $\{u, v\}$ como ángulos horizontal y vertical, y t como escalar de un vector unitario en esa dirección.

Favor de notar que la ventaja de este planteamiento radica en que para un par de parámetros $\{u, v\}$ siempre tendremos una

solución, y de esta manera es más fácil encontrar continuidad.

```
poleoeq3Db[focos_, lcable_]:=
Module[{p,eqn=0},
  p = t{Cos[v]Cos[u],
    Cos[v]Sin[u],
    Sin[v]};
  Do[eqn += norm[
    p - focos[[1,1]] ]
  focos[[1,2]],
  {1, Length[focos] }];
  eqn = eqn == lcable
]

ecu3 = poleoeq3Db[lf, 9]
```

$$\begin{aligned} & \sqrt{(-1 + t \cos u \cos v)^2 + (-3 + t \cos v \sin u)^2 + t^2 \sin^2 v} + \\ & \sqrt{(-3 + t \cos u \cos v)^2 + (-1 + t \cos v \sin u)^2 + t^2 \sin^2 v} + \\ & 2 \sqrt{t^2 \cos^2 u \cos^2 v + (-1 + t \cos v \sin u)^2 + (-2 + t \sin v)^2} = 9 \end{aligned}$$

Sustituimos un valor dado de u y v en la ecuación ecu3

```
ecu3 /. {u->Pi/2, v->Pi/2}

2*Sqrt[1 + (-2 + t)^2] +
2*Sqrt[10 + t^2] == 9
```

Se puede uno imaginar que en estos casos es necesario resolver una ecuación para cada parámetro u, v, y en ello radica la dificultad de cómputo de esta superficie. Se puede usar Solve o buscar algún otro método que sea más eficiente para su cálculo.

Se puede plantear la función de la Poleógena 3D en mathematica como sigue:

```
poleogena3db[ecuacion_][m_,n_]:=
Module[{solt},
  solt = Map[t/.,#&,
    NSolve[ecuacion /.
      {u->m, v->n},t]];
  {Cos[m]Cos[n],
  Cos[n]Sin[m], Sin[n]} *
```

```
If [Length[solt]>1,
  solt[[-1]], solt[[-1]] ]
]
```

Favor de notar que en el planteamiento anterior estoy usando `Nsolve` para la solución de las ecuaciones de cada lugar geométrico de la superficie. `Nsolve` proporciona una lista de reglas, por ejemplo:

```
rulesxx = NSolve[ecu3 /.
  {u->P1/2, v->0}, t]

{{t -> 1.37807}, {t -> 1.88594}}
```

Para pasar de una lista de reglas a una lista de números se utiliza `##&` que es una forma de hacer sustituciones en línea, para mayor información al respecto consultar el manual de *Mathematica*.

```
solxx = Map[./.#&, rulesxx]

{1.37807, 1.88594}
```

Utilizando la función `poleogena3db` definida anteriormente y teniendo como ejemplo para un par de parámetros u, v igual a $[0, 0]$ tendríamos:

```
poleoide3db[ecu3][0,0]

{0.973886 - 1.43057 I, 0, 0}
```

Lo que resulta en un lugar geométrico con el parámetro en x como número complejo (solución imaginaria). Tendrá que prevenirse el utilizar soluciones de números reales únicamente.

Puedo anticiparte que la solución planteada en la función `poleoogena3db` resulta muy lenta en su computo, quizás utilizando grandes recursos computacionales por lo que se hace necesario investigar soluciones más eficientes. Por ejemplo al pedir la solución de una tabla de coordenadas de la superficie como a continuación defino, resulta que mi computadora (con 32MB de RAM) parece ser insuficiente en su capacidad de memoria.

```
Table[poleogena3db[ecu3][u,v],{u,-
P1,P1,P1/18},{v,-P1,P1,P1/18}]
```

Out of memory. Exiting.

¡Advertido!

Aunque *Mathematica* es un programa que ha resultado muy útil para el desarrollo de esta investigación, resulta inconveniente para obtener la solución de las ecuaciones de las Poleógena 3D. Posiblemente el uso de Visual Basic o lenguaje C, pueda considerarse como una herramienta más adecuada, sin embargo su desarrollo queda como punto de partida para continuar esta investigación posteriormente.

Análisis Estructural de Placas

La orientación que ha existido en esta investigación para mostrar la definición geométrica de superficies curvas, se debe en parte, a la necesidad de obtener de esta geometría el análisis estructural de dichas superficies, y así refinar el comportamiento de la superficie construida con cierto material bajo diferentes condiciones de apoyo y cargas. El objeto de este capítulo es mostrar un ejemplo de análisis de una bóveda parabólica apoyada en un plano rectangular, como la que se muestra en el capítulo de *Superficies de Transición*, página 56.

Traducción de la geometría

Desde Mathematica se puede traducir la información de la geometría de una superficie a Autocad para su dibujo, o bien se pueden implementar las funciones de las curvas en AutoLisp o en lenguaje C dentro del mismo Autocad. Una vez que se tiene la geometría de la superficie tridimensional dentro de Autocad se puede exportar la información por medio de archivos tipo .DXF a los programas de análisis estructural que se utilicen.

De Mathematica podemos obtener una tabla de las coordenadas de un conjunto de puntos de la superficie como sigue:

```
Table[bovparab2[2,3,1.5][u,v],{u,-2,2,0.5},{v,-3,3,0.5}]
{{{-2, -3, 0.}, {-2, -2.5, 0.},
{-2, -2., 0.}, {-2, -1.5, 0.},
{-2, -1., 0.}, {-2, -0.5, 0.},
{-2, 0., 0.}, {-2, 0.5, 0.},
{-2, 1., 0.}, {-2, 1.5, 0.},
{-2, 2., 0.}, {-2, 2.5, 0.},
{-2, 3., 0.}}, {{-1.5, -3, 0.},
{-1.5, -2.5, 0.20052083333333333},
etc. etc.
```

Se entiende que esta tabla corresponde a un arreglo de filas y columnas correspondientes a las coordenadas de la superficie en el orden y al intervalo en que fueron solicitadas, en este caso a una bóveda parabólica apoyada en un plano de 4 de ancho, 6 de largo y 1.5 de alto, con coordenadas a intervalos de 0.5 en ambas direcciones. Podemos asumir que las unidades son metros.

La información obtenida de dicha tabla, se puede copiar, y empastar en un archivo de texto. Este archivo se puede traducir a Autocad por medio de un pequeño programa escrito en Visual Basic, para crear un archivo tipo SCRIPT, dicha rutina en Visual Basic entiende que hay una forma con un caja de texto llamada Text1 que contiene el nombre del archivo con la tabla en formato de Mathematica. En este caso el nombre del archivo de salida (Script File), tiene como nombre el mismo del anterior pero con la terminación «.SCR». La función que obedece a la ejecución de un botón dentro de la forma, corresponde a la rutina **Parse_Click** que se muestra en la página siguiente, junto con otras rutinas y funciones auxiliares.

Favor de notar que el archivo tipo Script en este caso crea caras tridimensionales (3Dface), donde además se ha buscado que exista la opción para que la superficie sea cerrada tal como un cilindro o una esfera, para estos casos se define un botón de opción llamado RoundB dentro de la forma para tal efecto.

Se puede preferir crear puntos o líneas en vez de caras tridimensionales, en cuyo caso se tendría que crear una función similar. Se muestra la implementación de una rutina que crea puntos llamada **PointsB_Click**. Una vez creado el archivo Sript, se carga en AutoCad por medio del comando Script.

```

Private Sub Parse_Click()
Dim fname As String, sname As String
Dim dirfname As String
Dim st As String
Dim sArray() As String 'tabla dinámica, definir mas tarde
Dim nRows As Double, nCols As Double 'se usa para dimensiones tabla
Dim nR As Double, nC As Double
Dim nOrden As Integer

fname = Trim(Text1.Text)
dirfname = Dir(fname)
If Dir(fname) = "" Then
MsgBox ("file not found: " + fname)
Exit Sub
End If

'encuentra las dimensiones de la tabla
Open fname For Input As #1
FindArrayDims 1, nRows, nCols
Close #1

ReDim sArray(nCols, nRows) As String
'lee el archivo entrada / llena array
Open fname For Input As #1
For nC = 1 To nCols
For nR = 1 To nRows
' lee 3 números
st = GetNum(1)
st = st + ","
st = st + GetNum(1)
st = st + ","
st = st + GetNum(1)
sArray(nC, nR) = st
Next nR
Next nC
Close #1

'Escribe el archivo script
Mid(fname, InStr(fname, ".") = ".scr"
Open fname For Output As #1
For nC = 2 To nCols
Print #1, "3DSPACE"
nOrden = 0
For nR = 1 To nRows
If nOrden = 0 Then
Print #1, sArray((nC - 1), nR)
Print #1, sArray(nC, nR)
nOrden = 1
Else
Print #1, sArray(nC, nR)
Print #1, sArray((nC - 1), nR)
nOrden = 0
End If
Next nR
Print #1,

```

```

Next nC

If RoundB.Value = True Then
    Print #1, "3DFACE"
    nOrden = 0
    For nR = 1 To nRows
        If nOrden = 0 Then
            Print #1, sArray(nCols, nR)
            Print #1, sArray(1, nR)
            nOrden = 1
        Else
            Print #1, sArray(1, nR)
            Print #1, sArray(nCols, nR)
            nOrden = 0
        End If
    Next nR
    Print #1,
End If
Close #1
End Sub

Public Sub FindArrayDims(filename As Double, nRows As Double, nCols As
Double)
    Dim ch As String
    nRows = 0
    nCols = 0
    Do While Not EOF(filename)
        ch = GetBra(filename)
        If ch = "{" Then 'opening first bracket
            Do While Not EOF(filename)
                ch = GetBra(filename)
                If ch = "{" Then 'opening second bracket
                    nRows = 0
                    Do While Not EOF(filename)
                        ch = GetBra(filename)
                        If ch = "{" Then 'opening third bracket
                            Do While Not EOF(filename)
                                ch = GetBra(filename)
                                If ch = "}" Then
                                    nRows = nRows + 1
                                    Exit Do
                                End If
                            Loop
                        Else 'ch should be } ; closing second bracket
                            nCols = nCols + 1
                            Exit Do
                        End If
                    Loop
                Else
                    Exit Do
                End If
            Loop
        Else
            Exit Do
        End If
    Loop
Else
    Exit Do
End If

```

```

Loop
End Sub

Public Function GetNum(filenum As Double) As String
Dim snum As String
Dim ch As String
snum = ""
' el primer caracter puede ser "-"
Do While Not EOF(filenum)
    ch = GetToken(filenum)
    If InStr("-1234567890.", ch) > 0 Then
        snum = ch
        Exit Do
    End If
Loop

'continue reading the rest of the number
Do While Not EOF(filenum)
    ch = GetToken(filenum)
    If InStr("1234567890.", ch) > 0 Then
        snum = snum + ch
    Else 'have finish to read numeric characters
        Exit Do
    End If
Loop
GetNum = snum
End Function

Public Function GetToken(filenum As Double) As String
Dim cn As String
Do While Not EOF(filenum)
    ch = Input(1, filenum)
    If InStr("-1234567890.,{}\"", ch) > 0 Then
        Exit Do
    End If
Loop
GetToken = ch
End Function

Private Sub PointsB_Click()
Dim fname As String, wname As String
Dim dirfname As String
Dim st As String

fname = Trim(Text1.Text)
wname = fname
Mid(wname, InStr(fname, ".") = ".scr"
dirfname = Dir(fname)
If Dir(fname) = "" Then
    MsgBox ("No se encontró archivo: " - fname)
Exit Sub
End If
'Recorre archivo de entrada / escribe archivo scrip de salida
Open fname For Input As #1

```

```

Open whame For Output As #2
Do While Not EOF(1)
  ' lee 3 números
  st = GetNum(1)
  st = st + ","
  st = st + GetNum(1)
  st = st + ","
  st = st + GetNum(1)
  Print #2, "POINT"
  Print #2, st
Loop
Close #1
Close #2
End Sub

```

Introducción a la Teoría de placas

Se hace necesario hacer una introducción a la teoría general de membranas para un mayor entendimiento de los términos con que se analiza el comportamiento estructural

Se entiende como placa estructural a un material sólido encerrado entre dos superficies curvas muy cercanas, en donde la distancia entre las curvas es el espesor de la placa t . Si el espesor es pequeño en comparación al límite de la envolvente, se define como placa *delgada*, si no como *gruesa*. La placa estructural se construye con un material isotrópico, homogéneo y elástico, como el acero, concreto, ferrocemento, etc, aunque esta teoría también es aplicable a materiales axisotrópicos como el tabique y la madera.

Con el objeto de definir un punto en la superficie es conveniente señalar una capa interior localizada a la mitad entre las dos superficies limitantes llamada *superficie media*. Las caras limitantes de una pequeña porción de placa se pueden referir paralelas a los ejes ortogonales x, y .

Los esfuerzos inducidos en una placa bajo la influencia de cargas externas, se distinguen bajo dos tipos de acciones, una

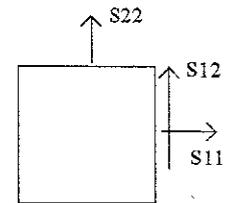
llamada acciones de *membrana* y otra acciones de *flexión por momentos*.

En las acciones de membrana se asume que la placa estructural no es capaz de soportar ningún esfuerzo de flexión por momento, y que las cargas externas son transmitidas por fuerzas internas en el interior de la placa. En la teoría de placas se define que las fuerzas actuantes en una porción de placa son fuerzas por unidad de longitud del lado de esa porción, y son denominados *esfuerzos resultantes*, de esta manera los resultados aparecen en unidad de fuerza (en nuestro caso kg/cm^2).

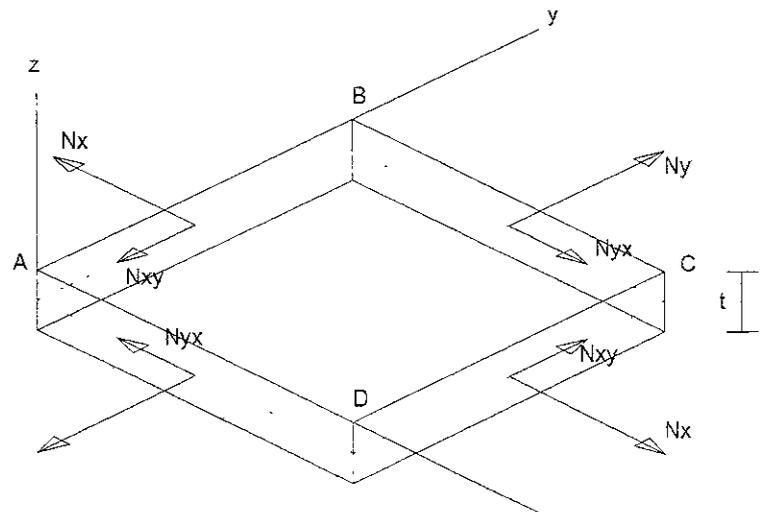
Los esfuerzos normales son denominados N_x y N_y , mientras que los N_{xy} y N_{yx} son esfuerzos cortantes en los planos x, y respectivamente.

Los valores son positivos en el sentido de las flechas que se indican.

Todos los esfuerzos de membrana se obtienen por medio de la estática.



Nombre convencional de los esfuerzos de membrana obtenidos en algunos programas de análisis de elemento finito, en nuestro caso m*Tab /Sap IV



Los esfuerzos de *membrana* son insuficientes para predecir el comportamiento de un elemento de la placa, porque necesariamente las fuerzas externas producen flexiones o pandeos y tal flexión solo puede ser resistida por esfuerzos de momentos y fuerzas internas tal como se muestra en la figura.

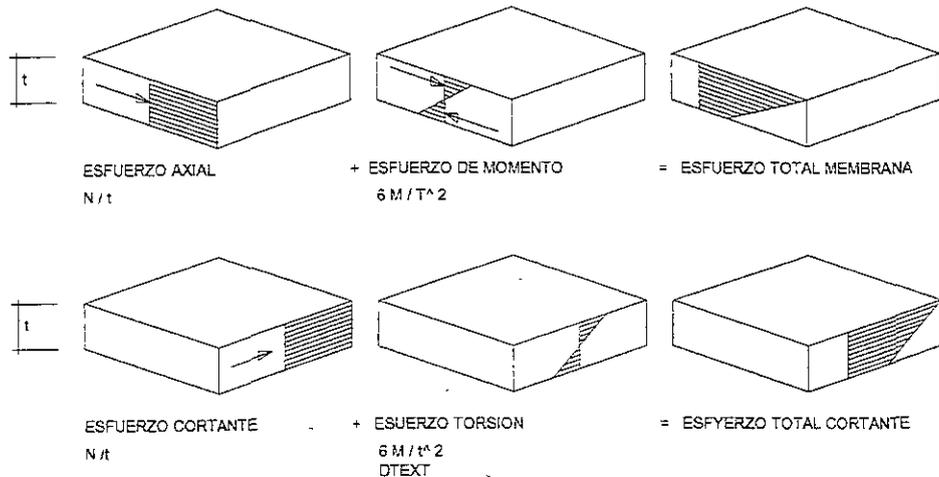
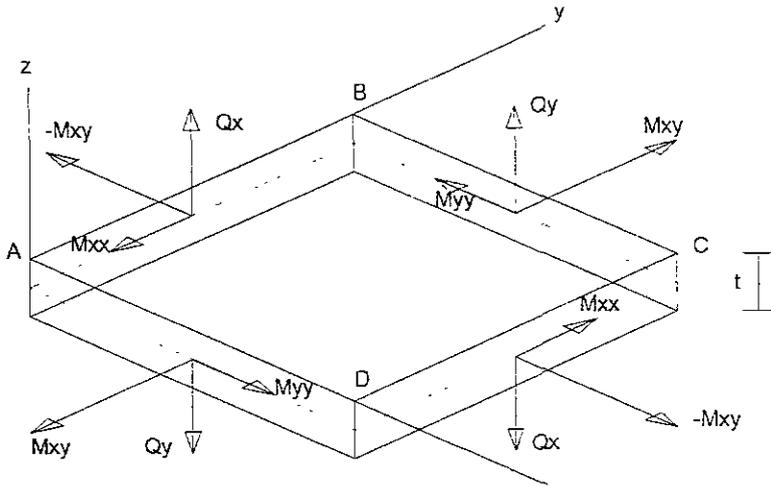
Aunque entendemos que un momento al producir flexiones hacia abajo comunmente

se entienden como momentos positivos, En una placa los resultantes aparecen como esfuerzos en la capa superior o inferior de la placa.

M_x y M_y son momentos por unidad de longitud, sobre los cuales actuan momentos de torsión M_{xy} y M_{yx} en el sentido de los ejes x , y respectivamente. Q_x y Q_y son las fuerzas cortantes transversales (perpendiculares a la superficie). El sentido positivo es el que se muestra en las flechas.

Las ecuaciones de la estática son insuficientes para determinar estos resultados, y por tanto se tienen que considerar ecuaciones de flexión y desplazamiento.

Es posible considerar la existencia de esfuerzos normales o cortantes en forma aislada, así como, de esfuerzos por momento o torsión también en forma aislada, sin embargo se encuentra conveniente combinar estos esfuerzos para obtener un mayor entendimiento del comportamiento de la placa, tal como se muestra en la figura.



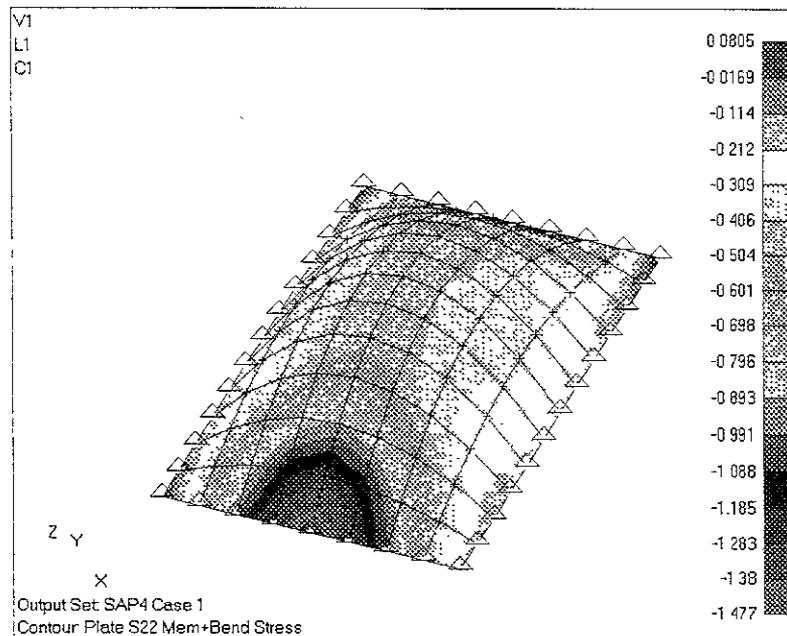
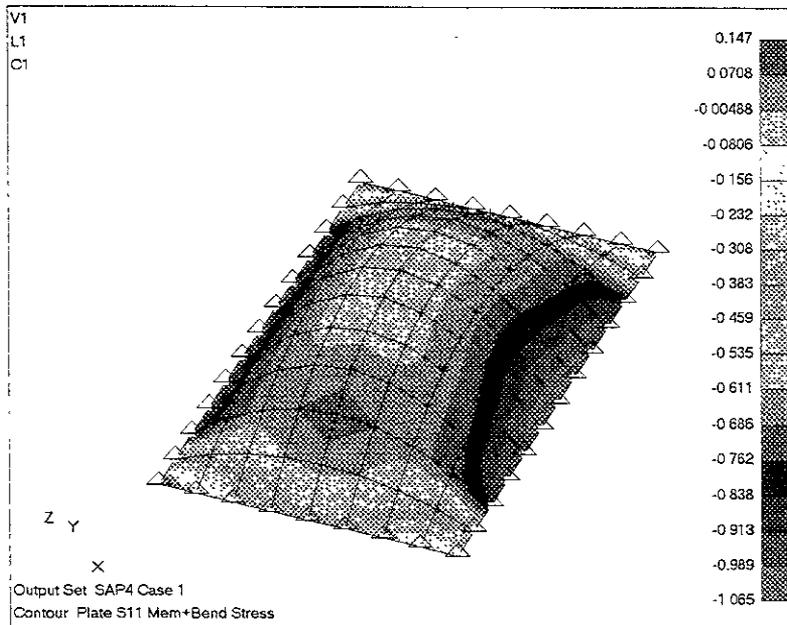
La aplicación de esta teoría de placas ha evolucionado hacia la teoría de elemento finito, que ha resultado en el surgimiento de varios programas de computadora para el análisis de placas y sólidos, dentro de los más conocidos, se encuentra Nastran, Ansys, Cosmos, y en nuestro caso mTab/SAP IV.

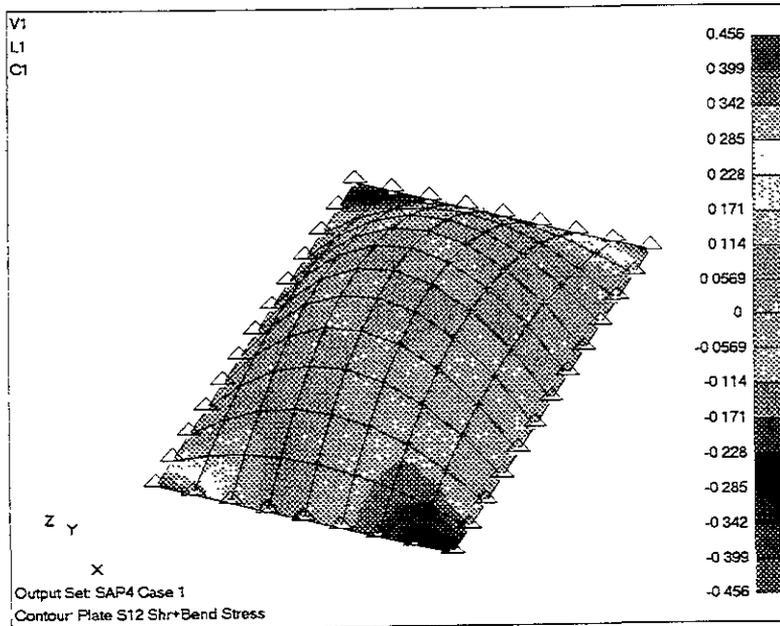
Análisis Estructural

Vamos a realizar el análisis de una bóveda parabólica apoyada en un plano rectangular, que tiene un perímetro de 4 x 6m y una altura en el centro de 1.5m. Suponemos que la bóveda esta hecha de tabique dispuesto en petatillo colocado en una forma perpendicular a la curva de la superficie y que la bóveda tiene un espesor de 10cm. pegada con mortero cemento-cal-arena. Así también vamos a considerar una carga uniforme vertical de 500 kg/m² que aproximadamente es la suma de su propio peso, un enladrillado y una carga viva de azotea.

Si tenemos en consideración los esfuerzos máximos permisibles que define el Reglamento de Construcciones del DDE, podemos señalar que la compresión de mampostería de tabique rojo recocido f^*m esta definida en 15 kg/cm², mas 4kg/cm² cuando los elementos están confinados por dalas y castillos, lo cual es el caso, y considerando un factor de excentricidad FE de 0.7, tenemos que el límite a la compresión $f^*m = 13.3$ kg/cm². El cortante v^* se define en 3.5 kg/cm² al cual se aplica un coeficiente de reducción de 0.85 más el factor de excentricidad FE, con lo que tenemos que el límite a cortante $v^* = 2.08$ kg/cm².

La imagen S11 esfuerzos de membrana y momentos corresponde al sentido del eje x; S22 igual a la anterior en el sentido del eje y, y S12 a cortante y momentos.





Se puede observar que en la imagen S11 y S22 el esfuerzo de membrana (fuerza normal) + momentos corresponde a 1.47 kg/cm^2 y considerando el máximo permitido por el Reglamento de 13.3 kg/cm^2 , tenemos que se podría reducir el espesor de la bóveda proporcionalmente a 1.1 cm . Así también se puede observar que en la imagen S12 el esfuerzo de cortante y momento corresponde a 0.45 kg/cm^2 y considerando el máximo permitido por el Reglamento de 2.08 kg/cm^2 , tenemos que se podría reducir el espesor de la bóveda proporcionalmente a 2.16 cm . Ahora bien desde el punto de vista constructivo resulta entonces práctico fabricar la bóveda con ladrillo de 1.5 cm de espesor en dos capas paralelas a la curva de la superficie, también llamada tipo *atalana*. Considerando el espesor del mortero intermedio de 1.0 cm tendríamos una bóveda de 4 cm de espesor y la cual resultaría sobrada en aproximadamente un 50% .

Se puede observar que la geometría que se ha obtenido de la bóveda, responde favorablemente a los esfuerzos de la carga uniforme, resultando que el espesor necesario es muy pequeño, y por tanto confirmamos nuestras hipótesis que las formas parabólicas responden favorablemente a las cargas uniformemente repartidas, y que en el caso de esta bóveda parabólica, la respuesta de la curva es también favorable, resultando un espesor de material muy pequeño.

Al ver estos resultados podemos confirmar algunas de las vagas hipótesis que se han planteado, al señalar que la incursión en la búsqueda de curvas y superficies curvas con sistemas de trazo razonables, en conjunción con su definición geométrica, y un adecuado análisis estructurales, permite optimizar las formas diseñadas.

Si planteo la construcción de esta bóveda con ferrocemento (mortero cemento arena reforzado con fibras o mallas metálicas), el espesor resultante podría ser menor al espesor mínimo construible con ese material que es de 0.5 cm .

Conclusiones

Se han expuesto algunos sistemas de trazo de curvas, algunos de ellos desarrollados desde el tiempo de la Grecia Clásica, otros en el Renacimiento, y algunas otras curvas como las poleógenas, plomoides y elipzógenas que son descubrimientos nuevos de esta investigación y una aportación al conocimiento universal, siendo éstas últimas sistemas en proceso de patente¹. Se han expuesto sistemas de trazo para superficies curvas, algunos de ellos ampliamente conocidos, y otras han resultado ser una novedad a las posibilidades constructivas y expresivas dentro de la arquitectura (aunque no dudo que puedan tener aplicaciones en otros campos). Se ha expuesto también las fórmulas geométricas de dichas curvas y superficies curvas, algunas de ellas bien conocidas, pero otras, han representado un reto matemático, o en su caso, mantienen el reto a la futura investigación para desarrollar métodos más eficientes para computar su geometría.

Lejos de exponer el universo de conocimientos sobre curvas y superficies que poseen cierta mecánica de trazo, y que pudieran considerarse como fundamentales en el diccionario de todo Arquitecto, he pretendido, abordar el campo de algunas de ellas que en mi entender presentan cierto potencial de aplicación, y así, despertar la inquietud por entender que las expresiones formales relacionadas a curvas y superficies curvas, deben estar relacionadas a sistemas de trazo, que por su facilidad permitan la creación de formas construibles, pero también, hacer notar la necesidad de un dominio matemático que permita la correcta formulación de la geometría, necesaria para su dibujo y análisis estructural. Si el trazo y el dominio matemático de su geometría no son un conocimiento firme, el Arquitecto no podrá

utilizar estas herramientas en su quehacer expresivo.

Percibo que la evolución formal de la arquitectura, puede por un lado buscar formas que respondan con mayor eficiencia a los esfuerzos externos, o bien a funciones para las cuales las formas de los espacios requieren de geometrías no planas, o bien a necesidades puramente estéticas que requieran el uso de ciertas curvas y superficies curvas. Son estas particulares percepciones de donde ha surgido la necesidad de esta investigación, pero también, el de exponer finalmente, que si las tendencias anteriores son correctas, la formación y desarrollo del Arquitecto necesita ante este panorama una mayor preparación geométrica y matemática que le permita expandir su lenguaje geométrico. Es en este punto donde es posible cuestionar si el programa de estudios de esta Facultad de Arquitectura de la UNAM es congruente con esta percepción, es también donde podemos cuestionar las limitaciones del Arquitecto de hoy en día en este campo, y el reto y motivación para buscar acercar estos conocimientos a sus dominios. Es en estas últimas ideas en donde me atrevo a pensar que el material que se ha expuesto en esta investigación puede ser un material de referencia relevante.

Para poder utilizar prácticamente el material que se expone en este texto en el sentido de la geometría, se pueden tomar varios senderos, una opción consiste en utilizar el programa de Mathematica tal como aquí lo he hecho, y traducir los resultados obtenidos a un archivo tipo Script con las rutinas de Visual Basic que se mostraron, para así insertar las geometrías en Autocad u otro programa de dibujo o análisis estructural; una segunda opción, implica la implementación de la ecuaciones o los programas dentro de Autocad u otros programas de dibujo, en lenguaje Lisp o en lenguaje C, lo que significa un esfuerzo de

¹ Ver Acuerdo de Licencia de uso para Profesionales de la Arquitectura de la UNAM, pp vi

programación computacional, para la cual desafortunadamente no existe una gran preparación en el medio de los Arquitectos, pero que se hace necesaria, si se desea tener la herramienta que produzca la geometría dentro del programa de dibujo que se está utilizando para diseñar. Esta segunda opción simplifica la generación de la geometría y la acerca al proceso de diseño. Para aquellas curvas donde únicamente es necesario traducir la ecuación a Lisp o C, el reto es sencillo, sin embargo para aquellas que requieren procesos computacionales más complejos y donde se hace necesario encontrar la solución de varias ecuaciones como el caso de Poleógenas y Elipzógenas, el reto es mayor.

Cuando se tengan las herramientas disponibles para jugar libremente con las geometrías de estas curvas y superficies curvas dentro del programa de dibujo, se podrá desarrollar un entendimiento práctico de los parámetros que las generan por medio de la experimentación con éstos, para así poder producir las geometrías deseadas, ya que, como recordamos, en muchos casos, sus parámetros no son puntos que se encuentren sobre la curva o superficie.

Aunque, con estos últimos comentarios pudiera parecer que existen todavía senderos por recorrer, antes de que los conocimientos de este texto puedan ser aplicables, puedo señalar que la ruta está trazada, fácilmente alcanzable para muchas de las geometrías aquí expuestas, y aunque desafiante en otros casos, hoy se vuelven metas más cercanas, y que, si te acercas a ellas, y las conviertes en tuyas, compartirás el emoción y la esperanza que en el fondo he abrigado para con la arquitectura, que en algún día, estos conocimientos puedan ayudar a generar.

Bibliografía

- Alberti, Leon Battista, *On the Art of Buildings in Ten Books*, traducido por Joseph Rykwert, Neil Leach, Robert Tavernor, 1988.- De la Pintura. 1435
- Aga Khan, *The Aga Khan Visual Archives*. MIT room 7-238, MIT
<http://libraries.mit.edu/rvo/aka/agakhan/index.html>
- Boi, D. Flament, and J.-M. Salanskis, editors. *1830-1930: A Century of Geometry: Epistemology, History, and Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1992.
- Bold, Benjamin. *Famous problems of mathematics; a history of constructions with straight edge and compasses*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1969
- Chanfón, Olmos Carlos. *Willars de Honecort: Su Manuscrito*. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Arquitectura, División de Estudios de Posgrado, México, 1994
- Coolidge, Julian Lowell (1873-1954). *A history of geometrical methods*. Clarendon Press, Oxford, 1940. Reprint: Dover, New York, 1963. *A history of the conic sections and quadric surfaces*. Clarendon Press, Oxford, 1945. Reprint: Dover, New York, 1968.
- Curtis, William J.R., Balkrishna Doshi. *An Architecture for India*. Rizzoli, Nueva York, 1988
- Descartes, René, *La Geometrie. La Geometria*, Trad. Roberto R. Garcia Aguilar, Editorial Limusa SA CV, México, 1997
- Fellicien. *La Rose de Nostre Dame*. Mambre, Paris, 1994.
- Fletcher, Barnister. *A History of Architecture: on the Comparative Method*. University of London, Primera edición 1896, 17a ed, The Athlone Press, 1967
- Gasson, Peter C. *Geometry of Spatial Forms: Analysis, Synthesis, Concept, Formulation and Space Vision for CAD*. Ellis Horwood Limited, Great Britain, 1983.
- Giedion, Sigfrid. *Architecture and the Phenomena of Transition, The Three Space Conceptions in Architecture*, Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts, 1971
- Gray, Alfred. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*. CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, 1993
- Goodman, Arthur. *Precalculus. Algebra y Geometría Analítica*. Trad, Oscar Alfredo Palmas Velasco, Rev. Víctor Hugo Ibarra Mercado. Prentice Hall Hispanoamericana, S. A., México, 1996.
- Guell, Xavier. *Antonio Gaudí, Gustavo Gil*, Estudio paperback, 2a ed. España, 1987, pp 162
- Hoechelbert. *Fine Arts. Obra gráfica de Le Corbusier*.
- Jestaz Bertrand. *Architecture of the Renaissance, From Brunelleschi to Palladio*. Tahames and Hudson, New Horizons, Londres, 1996

- Kahan Hasan-Uddin. Contemporary Asian Architecture. Vastu-Shilpa Consultants India. (Balkrishna Doshi). 147-151, Taschen, Colonia, 1995
- Lanczos, Cornelius. Space through the ages; The evolution of geometrical ideas from Pythagoras to Hilbert and Einstein. Academic Press, London-New York, 1970.
- MacTutor, Archivo histórico de matemáticas, School of Mathematics and Computational Science, University of St Andrews, St Andrews, Scotland.
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/>
- Maeder, Roman E. Programming in Mathematica. 2a. Ed. Addison-Wesley Publishing Company. Redwood City California, 1991.
- Middlemiss, Ross R, Marks, John L. y Smart, James R. Analytic Geometry, McGraw-Hill, Inc, New York. Geometría Analítica, 4a Ed. McGraw-Hill / Interamericana de México SA CV, México, 1988.
- Moise, Edwin y Downs, Floyd. Geometry, Addison-Wesley Publishing Co. USA, Canada, 1965.
- Morgan, Hicky, ver Vitruvius
- O'Connor. Ver MacTutor.
- Parker, Harrys. Simplified Design of Roof Strusses for Architects and Builders, John Wiley & Sons, New York and London, 5d ed, 1962
- Pevsner, Nicholas. Esquema de la Arquitectura Europea. Ediciones Infinito, Buenos Aires, 1968
- Pevsner, Nicholas. The Sources of Modern Architecture and Design. Thames and Hudson, London, 1968.
- Philibert de L'Orme. La Architecture. 1567
- R M Porter, Desarrollos Históricos de la integral elíptica. Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana, Ciudad de México, 1989, 133-156
- Quondam. A virtual museum of Architecture. Proyectos no realizados de Le Corbusier
<http://members.col.com/quondam001/index.html>
- Spainer, Jerome y Oldham, Keith B. An Atlas of Functions. Hemisphere Publishing Corporation. New York. 1987
- Summerson, John. The Classical Language of Architecture, Thames and Hudson Ltd, Londres. El Lenguaje Clásico de la Arquitectura, De L.B. Alberti a Le Corbusier. traducción de Justo G. Beramendi y Ramón Alvarez, Gustavo Gil, Barcelona, 1984
- Timoshenko, S., Theory of Plates and Shells, 2a. Ed. McGraw-Hill, 1959, pp 544
- Vignola, Giacomo Barozzi da, I quattro libri dell'architettura, 1562, primera edición 1669.- Regola delle cinque ordini. 1562
- Vitruvius. The Ten Books on Architecture. Traducido por Morris Hicky Morgan, originalmente publicada por Harvard University Press 1914. Reeditada por Dover, Nueva York, 1960, pp 87

- Waerden, B. L. van der (Bartel Leendert van der). Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983.
- Wolf, Williams S. Graphical Analysis: A textbook on Graphic Statics, McGraw Hill Book Co., New York and London, 1921
- Wolfram, Stephen. Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer. 2a. Ed. Addison-Weley Publishing Co. USA, 1991
- Wickerman, Jones. Mathematica Graphics, Techniques and Applications. Springer-Verlag/ Telos. New York 1994
- Zwillinger, Daniel. CRC Standard Mathematical Tables and Formulae. 30a. ed. CRC Press, Boca Raton 1996.

Bibliografía sobre Mathematica

- Wolfram, Stephen. Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer. 3a. Ed. Addison-Weley Publishing Co. USA, 1996
- Gray Theodore y Glynn, Jerry. Beginner's Guide to Mathematica Version 3. Cambridge University Press, 1997
- Blachman Nancy y Williams, Colin P., Mathematica: A Practical Approach. 2a. ed. Prentice Hall, 1997
- Gray, John W., Mastering Mathematica: Programing Methods and Applications, 2a. ed. AP Profesional, 1997
- Wagner, David B. Power Programming with Mathematica: The Kernel, McGraw-Hill, 1996

Sitios en la Red relacionados a la geometría y matemática

Catálogo de curvas famosas

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html>

Catálogo de sitios en la red relacionados a la matemática y geometría

<http://mthwww.uwc.edu/wwwmahes/files/math01.htm#ref11>

Geometry Center, University of Minnesota

<http://www.geom.umn.edu/>

Historia de las matemáticas, Department of Mathematics and Computer Science, Clark University: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/mathhist.html>

Introduction to Mathematica

COLECCIÓN DE LA BIBLIOTECA
SERIE DE LA BIBLIOTECA
NO DEBE SER
SAIB DE LA BIBLIOTECA

<http://calculus.sjdccd.cc.ca.us/MathematicaBasics/7-0-ma.html>

MacTutor, Archivo histórico de matemáticas, School of Mathematics and Computational Science, University of St Andrews, St Andrews, Scotland.

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/>

Wolfram Research Inc.

<http://www.wolfram.com>

Índice

Símbolos

% 1
 [] 2
 {} 2

A

Ahmedabad 7
 Ahmes 36
 Ajustamiento de curvas 12
 Alberti 5
 Análisis estructural 67
 Análisis gráfico 38
 Apolonio 25, 39
 Arco 8, 23, 37
 Arco circular 37, 49, 62
 Aristaeus 33
 Arquímedes 19
 Arquitectura griega 37
 Arquitectura romana 37
 Autocad 67

B

Bacardí 7
 Barroco alemán 40
 Barrow, Isaac 23
 Bauhaus 9
 Berrúni 40
 Bezier 12
 Bilge 41
 Bisector 31
 Bóveda con perímetros curvos
 61
 Bóvedas 23, 37, 59
 Bóvedas parabólicas 7, 59, 67,
 73

C

Cadenas 25
 Calatrava 9
 Cálculo 12
 Candela 9, 25, 53, 56
 Candela, Felix 7
 Capilla del Pocito 40
 Caracol 18
 Cardioide 18, 19
 Carga uniforme 26
 Cargas 25
 Cassini 33
 Catenaria 27

Catillón 19
 Cinemáticos 31
 Círculo 4, 35
 tres puntos 5
 Circunferencia 35
 Cisoide 50
 Cisoide de Diocles 19
 Columnas 20
 Compás 31
 Concha 22
 Concoide 58
 Concoide de Nicómedes 22
 Cónicas 46
 Conoide a recta 56
 Corchete [] 2
 Cordel 41
 Cuatrismoide 41
 Curva focal 45
 Curvas algebraicas 13
 Curvas cerradas 46

D

Demirkoz, Bilge 41
 Diámetro 35
 Dintel 37
 Diocles 19
 Doshi, Balkrishna 7
 Dovela 60
 DXF 67

E

Egipto 12
 Elipse 39
 elipse 45
 Elipsoide 63
 Elipzación 45
 Elipzógenas 45
 Enseñanza 9
 Esfera 4, 57
 Esfuerzos 71
 Estropoide 23
 Euclíd 25, 33, 39
 Expresiones 2

F

Fagnano 33
 Ferguson 12
 ferrocemento 74
 Focales 15
 Foco 15, 25, 28, 35
 Fuller 9
 Función 3
 Funciones de caja 49

Funicular de esfuerzos 26

G

Galileo 12, 25, 27
 Gaudi 53
 Gaudí 14
 Geminus 19
 Geometría Analítica 9
 Geometría Descriptiva 9
 Gótico 10
 Gráficas 3
 Gravedad 27
 Gravitacionales 15, 25
 Grecia 8, 10, 20
 Gregory 25, 27
 Guerrero y Torres 40

H

Halley 39
 Helicoide 55
 Hilos 15
 hilos 35
 Hipérbola 32, 33
 Hiperboloide 32
 Hiperboloide elíptico 54
 Huygens 19, 27

I

India 7, 12
 Instrumentos 5, 31
 Inversor 31

K

Kahn, Louis 7
 Kepler 12, 39

L

La Hire 19
 Le Corbusier 6
 Lemniscato de Bernoulli 33
 Limasón de Pascal 17
 Lista 2
 Llaves {} 2
 L'Orme 5

M

Mampostería 73
 Matemática 12
 Mathematica 1
 Mecanismos 15, 31
 Mecanismos 34
 Membrana 71

Menaechmus 25, 33
 Menaechumus 39
 Möbius 55
 Momentos 71
 Morgan, Hicky 20

N

Nervi 9
 Newton 12, 19, 25, 39
 Nicómedes 22, 58

O

Ojiva 23
 Órdenes 22
 Otto, Frei 14
 Óvalos 40

P

Pantógrafo 31
 Papiro Rhind 36
 Pappus 25, 39
 Parábola 25, 49
 Parábola 32, 45
 Paraboloides 58
 Paraboloides hiperbólicos 53
 Pascal 12, 18, 25
 Peaucellier 31
 Perge 8
 Perímetro 35
 Perrault 20
 Plomada 28
 plomadas 25
 plomoide 63
 Plomoide 3D 63
 Plomoides 28
 poleas 41
 Poleógena 64
 Poleógena 3D 64
 Poleógenas 41
 Polinomio 2
 Programación 3
 Puente colgante 26

R

Radiales 15, 17
 Radio 35
 Rectas 53
 Regladas 15
 Reglamento de Construcciones
 del DDF 73
 Renacimiento 5, 10
 Resultantes 71
 Revolución 15

Rhind 36
 Roberval 18
 Rochamp 6
 Roemer 19

S

San Andrea al Quirinale 40
 SCR 67
 Script 67
 Símbolo 2
 Superficie 4, 71
 Superficies de Revolución 57
 Superficies de transición 59
 Superficies focales 63
 Superficies regladas 53

T

Tabique rojo 73
 Teoría de elemento finito 73
 Teoría de placas 71
 Tira de Möbius 55
 Toroide 57
 toroide 57
 Torricelli 23
 Toyo Ito 8
 Traducción de la geometría 67
 Transición 15
 Trazo 10, 14
 Trigonometría 12
 Trisoide 41

V

valor 1

W

Wallis 19
 Wilars de Honecort 10
 Wolfram 1

Y

Yutshiro 8