UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

COMPENDIO DE EJERCICIOS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
ACTUARIA

PRESENTA:

IRIS AIDEE PÉREZ Y SOSA

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. LAURA ELENA CHAVEZ LOMELI

MÉXICO, D.F. 2000

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

COMPENDIO DE EJERCICIOS DE INVESTIGACION DE OPERACIONES

realizado por IRIS AIDEE PEREZ Y SOSA

con número de cuenta 9455514-1 , pasante de la carrera de ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. EN C. LAURA ELENA CHAVEZ LOMELI	Laura E. Chavez L.
Propietario	M. EN C. VIRGINIA ABRIN BATULE	Virginia Abrín Batule
Propietario	DR. ABDON SANCHEZ ARROYO	A. Sánchez
Suplente	ACT. JOSE JESUS MARTINEZ SALAZAR	
Suplente	MAT. ADRIAN GIRARD ISLAS	

Consejo ~~Departamental de~~ Matemáticas
M. en A.P. MA. DEL PILAR ALONSO REYES

Gracias por su apoyo y por estar siempre conmigo

a mis padres

M.V.Z. Jesús Pérez Ramos

y

Profra. Iris Sosa García

a mi hermana

Profra. Liliana Pérez y Sosa

los amo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El propósito de este trabajo es presentar una compilación de ejercicios que ilustran resultados y conceptos de investigación de operaciones a un nivel introductorio, sin profundizar en la teoría. Puede ser útil para el desarrollo de los conocimientos y habilidades de los estudiantes de nivel superior que se inician en el estudio de la materia y al profesor que imparte un curso introductorio.

El material que se cubre está dividido en dos partes, en la primera parte se tomó como modelo el curso de investigación de operaciones impartido en la Facultad de Ciencias de la UNAM; la segunda parte consta de problemas menos elementales que por su complejidad salen del alcance de un curso introductorio. Algunos de éstos ilustran la idea básica de que si un problema puede "transformarse" (reducirse) a otro, entonces una herramienta (un algoritmo, por ejemplo) que sirve para resolver uno, también es útil para resolver el otro.

En la primer sección se introduce la formulación y solución gráfica del problema de la programación lineal, siguiendo la solución algebraica, donde se describe el método símplex y los casos especiales en los que incurre, como degeneración, opciones óptimas, soluciones no acotadas y soluciones infactibles. Se sabe que para cada problema de programación lineal existe otro problema de programación lineal asociado; este problema proporciona información muy útil acerca de la solución óptima del problema original, esto se muestra en la teoría de dualidad con la aplicación del método símplex.

Una clase especial de problemas de programación lineal es el llamado problema de transporte, recibe este nombre debido a que muchas de sus aplicaciones involucran la determinación de un plan de transporte a costo mínimo; este problema posee una estructura especial que permite el desarrollo de algoritmos simples y eficientes y facilita un mejor entendimiento de las técnicas de programación lineal y del método símplex.

En la teoría de redes se aplican los conceptos anteriores sobre problemas de transporte, a una clase más general de problemas de flujos en redes.

Nuevamente se ve que esta clase de problemas posee una estructura especial que permite la simplificación del procedimiento símplex hasta un punto en el que se puede aplicar directamente a la red sin necesidad de una tabla símplex.

La teoría de juegos se encarga de sondear situaciones competitivas, sin embargo, para el fin de este trabajo se tomó en cuenta el juego de dos personas con suma cero. Los numerosos ejemplos que involucran adversarios en conflicto incluyen juegos de mesa, combates militares, campañas de publicidad, etc. Una característica básica en estas situaciones es que el resultado final depende, primordialmente, de la combinación de estrategias seleccionadas por los adversarios.

La programación dinámica no cuenta con una formulación matemática estándar, proporciona un procedimiento sistemático recursivo para determinar la combinación óptima de decisiones, se ilustra el modelo de la ruta más corta por programación dinámica y la solución de problemas de programación lineal por programación dinámica.

En la segunda sección se presenta una compilación de ejercicios de temas selectos, entre los que se cuentan flujo máximo a costo mínimo, el problema de la ruta más corta, flujo máximo con restricciones en los nodos, programación entera y el planteamiento de algunos problemas clásicos, como el problema de la mochila, el del cartero chino y el agente viajero.

Se asume que el estudiante está familiarizado con conceptos necesarios de álgebra, cálculo, geometría, álgebra lineal, teoría de gráficas, etc., ya que la función básica de este trabajo es servir de apoyo al profesor que imparte un curso de Investigación de Operaciones. El enfoque es primordialmente combinatorio y no se dan demostraciones ni se profundiza en la teoría. Las aplicaciones de los temas mencionados son enormes, por lo que se tomaron los problemas tipo de cada uno de ellos para ilustrar la manera en la que pueden ser resueltos.

Espero que este material sirva, no sólo como material de apoyo, sino que fomente el interés de los estudiantes de matemáticas, actuaría, ciencias de la computación y demás carreras afines en temas de optimización.

PROGRAMACIÓN LINEAL: FORMULACIÓN Y SOLUCIÓN GRÁFICA

Modelo de dos variables y su formulación [5, Cap. 2]

La programación lineal es una herramienta determinística, es decir, todos los parámetros del modelo se suponen conocidos con certeza. Sin embargo, en la vida real, es raro encontrar un problema donde prevalezca una verdadera certeza respecto a los datos.

En esta sección se presenta un modelo de PL con dos variables de decisión y se ilustra cómo se puede resolver gráficamente.

Ejemplo 1-1 (Arcoiris, S.A.)

Arcoiris, S.A. posee una pequeña fábrica de pinturas para interiores y exteriores de casas para su distribución al mayoreo. Se utilizan dos materiales básicos, A y B, para producir las pinturas. La disponibilidad máxima de A es de 6 toneladas diarias; la de B es de 8 toneladas por día. La necesidad diaria de materia prima por tonelada de pintura para interiores y exteriores se resume en la siguiente tabla:

	Toneladas de materia prima por tonelada de pintura		
	Exterior	Interior	Disponibilidad máxima (toneladas)
Materia prima A	1	2	6
Materia prima B	2	1	8

Un estudio del mercado ha establecido que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que la pintura para exteriores en más de una tonelada. Asimismo, el estudio señala que la demanda máxima de pintura para interiores está limitada a dos toneladas diarias.

El precio al mayoreo por tonelada es de $3 000 para la pintura de exteriores y $2 000 para la pintura de interiores.

¿Cuánta pintura para exteriores e interiores debe producir la compañía todos los días para maximizar el ingreso bruto?

Construcción del modelo matemático [5, Cap. 2]

La construcción de un modelo matemático se puede iniciar respondiendo a las tres preguntas siguientes:

1. ¿Qué busca determinar el modelo?, es decir, ¿cuáles son las **variables** (incógnitas) del problema?

2. ¿Qué ***restricciones*** deben imponerse a las variables a fin de satisfacer las limitaciones del sistema representado por el modelo?
3. ¿Cuál es el **objetivo** (meta) que necesita alcanzarse para determinar la solución óptima (mejor) de entre todos los valores **factibles** de las variables?

Una manera efectiva de responder a estas preguntas consiste en hacer un resumen verbal del problema. En términos del ejemplo de Arcoiris, S.A., la situación se describe como sigue:

La compañía busca determinar las cantidades (en toneladas) de pintura para exteriores e interiores que se producirán para maximizar (incrementar hasta donde sea factible) el ingreso bruto total (en miles de unidades monetarias), a la vez que se satisfacen las restricciones de la demanda y el uso de materias primas.

El punto capital del modelo matemático consiste en identificar, en primer término, las *variables* y después *expresar* el *objetivo* y las *restricciones* como funciones matemáticas de las variables. Por lo tanto, en relación con el problema de Arcoiris, S.A., tenemos lo siguiente.

Variables. Como deseamos determinar las cantidades de pintura para exteriores e interiores que se producirán, las variables del modelo se pueden definir como

x_E = toneladas de pintura para exteriores producidas diariamente
x_I = toneladas de pintura para interiores producidas diariamente

Función objetivo. Como cada tonelada de pintura para exteriores se vende en \$3 000, el ingreso bruto obtenido de la venta de x_E toneladas es $3x_E$ miles de unidades monetarias. En *forma análoga*, el *ingreso bruto* que se obtiene de vender x_I toneladas de pintura para interiores es $2x_I$ miles de unidades monetarias. Bajo la suposición de que las ventas de pintura para exteriores e interiores son independientes, el ingreso bruto total se convierte en la suma de los dos ingresos.

Si hacemos que z represente el ingreso bruto total (en miles de unidades monetarias), la función objetivo se puede escribir matemáticamente como $z = 3x_E + 2x_I$. La meta consiste en determinar los valores (factibles) de x_E y x_I que maximizarán este criterio.

Restricciones. El problema de Arcoiris, S.A., impone restricciones sobre el uso de materias primas y sobre la demanda. La restricción del uso de materias primas se puede expresar en forma verbal como

uso de materias primas en ambas pinturas
$\leq$
disponibilidad máxima de materias primas

Esto nos lleva a las restricciones que siguen

x_E	+	$2x_I$	$\leq$	6	materia prima A
$2x_E$	+	x_I	$\leq$	8	materia prima B

Las restricciones sobre la demanda se expresan en forma verbal como

cantidad en exceso de pinturas para interiores sobre exteriores	$\leq$	1 tonelada por día
demanda de pintura para interiores	$\leq$	2 toneladas por día

Matemáticamente éstos se expresan, respectivamente, como

x_I	-	x_E	$\leq$	1	exceso de pintura para interiores sobre exteriores
x_I			$\leq$	2	demanda máxima de pintura para interiores

Una restricción implícita (o "sobreentendida") es que la cantidad que se produce de cada pintura no puede ser negativa. Para evitar obtener una solución como ésta, imponemos las **restricciones de no negatividad**, que normalmente se escriben como

x_I	$\geq$	0	pintura para interiores
x_E	$\geq$	0	pintura para exteriores

Los valores de las variables x_E y x_I, se dice que contribuyen a una **solución factible** si satisfacen todas las restricciones del modelo, incluyendo las restricciones de no negatividad.

El modelo matemático completo para el problema de Arcoiris, S.A., se puede resumir ahora de la manera que sigue:

Determínense las toneladas de pinturas para interiores y exteriores que se producirán para

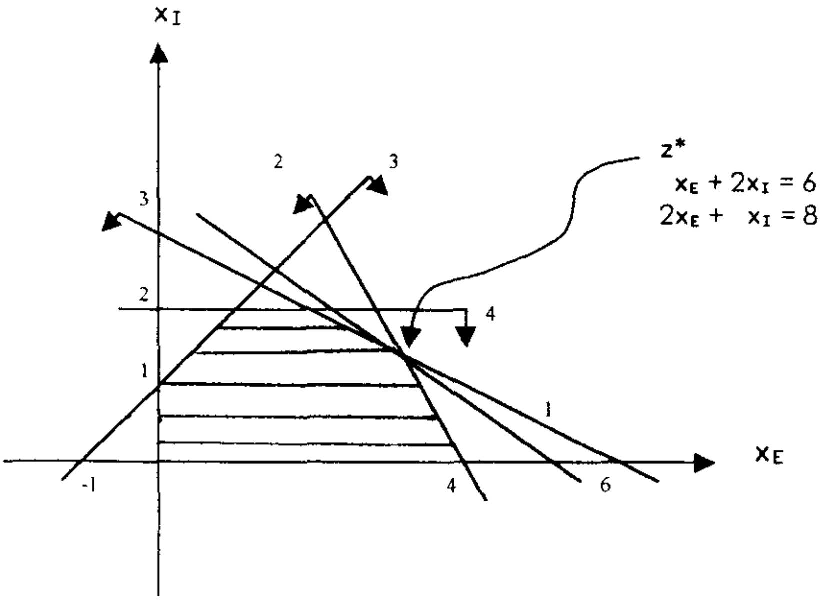
$$\text{Maximizar } z = 3x_E + 2x_I$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_E + 2x_I &\leq 6 \quad ① \\ 2x_E + x_I &\leq 8 \quad ② \\ -x_E + x_I &\leq 1 \quad ③ \\ x_I &\leq 2 \quad ④ \\ x_E, x_I &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución gráfica de modelos de PL

Consideraremos la solución del modelo de programación lineal de Arcoiris, S.A. El modelo se puede resolver en forma gráfica porque sólo tiene dos variables. Para modelos con tres o más variables, el método gráfico es impráctico o imposible.



Restricciones:

$$x_E + 2x_I \leq 6$$
$$2x_E + x_I \leq 8$$
$$-x_E + x_I \leq 1$$
$$x_I \leq 2$$
$$x_E, x_I \geq 0$$

Figura 1-1

Cada punto contenido o situado en la frontera del espacio de soluciones satisface todas las restricciones y por consiguiente, representa un punto *factible*.

Aunque hay un número infinito de puntos factibles en el espacio de soluciones, la **solución óptima** puede determinarse al observar la dirección en la cual aumenta la función objetivo $z = 3x_E + 2x_I$. Para conocer cuál es la solución óptima se resuelve el sistema de ecuaciones que delimita al punto óptimo.

Solución óptima:
$x_E = 3\ 1/3$ ton
$x_I = 1\ 1/3$ ton
$z = 12\ 2/3$ miles de $

Las dos ecuaciones producen $x_E = 3\ 1/3$ y $x_I = 1\ 1/3$. Por lo tanto, la solución indica que la producción diaria debe ser de 3 1/3 toneladas de pinturas para exteriores y de 1 1/3 toneladas de pinturas para interiores. El ingreso asociado es

$$z = 3(3\ 1/3) + 2(1\ 1/3) = 12\ 2/3 \text{ (miles de \$)}$$

Ejercicios de PL

Planteamiento
Hay infinitas posibilidades de aplicación, estas son sólo una cuantas.

1. Una compañía manufacturera descontinuó la producción de cierta línea de productos no redituables. Esto creó un exceso considerable en la capacidad de producción. La gerencia quiere dedicar esta capacidad a uno o más de tres productos; llámenseles productos 1, 2 y 3.
En la siguiente tabla se resume la capacidad disponible que puede limitar a las máquinas:

Tipo de máquina	Tiempo disponible (horas/máquina/semana)
Fresadora	500
Torno	350
Rectificadora	150

El número de horas máquina que se requiere para cada producto es:

	Coeficiente de productividad (horas/máquina por unidad)		
Tipo de máquina	**Producto 1**	**Producto 2**	**Producto3**
Fresadora	9	3	5
Torno	5	4	0
Rectificadora	3	0	2

El departamento de ventas ha indicado que las ventas potenciales para los productos 1 y 2 exceden la tasa máxima de producción y que las ventas potenciales del producto 3 son 20 unidades por semana. La ganancia unitaria sería de \$30, \$12 y \$15, respectivamente para los productos 1, 2 y 3.
El objetivo es determinar cuántos productos de cada tipo debe producir la compañía para maximizar la ganancia.

Función objetivo: $\text{Max } z = 30x_1 + 12x_2 + 15x_3$

Var: $x_1 = P_1 \qquad x_2 = P_2 \qquad x_3 = P_3$

Restricciones:

$$
\begin{aligned}
9x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 500\\
5x_1 + 4x_2 &\leq 350\\
3x_1 + 2x_3 &\leq 150\\
x_3 &\leq 20\\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

2. Un avión de carga tiene tres compartimentos para almacenar: delantero, central y trasero. Estos compartimentos tienen un límite de capacidad tanto en peso como en espacio.

Compartimento	**Capacidad de peso (toneladas)**	**Capacidad de espacio (pies 3)**
Delantero	12	7000
Central	18	9000
Trasero	10	5000

Para mantener el avión balanceado, el peso de la carga en los respectivos compartimentos debe ser proporcional a su capacidad.
Se tienen ofertas para los siguientes cuatro envíos en un vuelo próximo ya que se cuenta con espacio:

Carga	**Peso (toneladas)**	**Volumen (pies 3/ton)**	**Ganancia ($/ton)**
1	20	500	280
2	16	700	360
3	25	600	320
4	13	400	250

Se puede aceptar cualquier porción de estas cargas. El objetivo es determinar qué cantidad de carga debe aceptarse (si se acepta) y cómo distribuirla en los compartimentos para maximizar la ganancia del vuelo.

Función objetivo: Max $z = 280\,(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 360\,(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 320\,(x_{31} + x_{32} + x_{33}) + 250\,(x_{41} + x_{42} + x_{43})$

Var: x_{ij} i = carga $i = 1, 2, 3, 4$
j = compartimento $j = 1, 2, 3$

Restricciones:

$$20\,x_{11} + 16\,x_{21} + 25\,x_{31} + 13\,x_{41} \le 12$$
$$20\,x_{12} + 16\,x_{22} + 25\,x_{32} + 13\,x_{42} \le 18$$
$$20\,x_{13} + 16\,x_{23} + 25\,x_{33} + 13\,x_{43} \le 10$$
$$500\,x_{11} + 700\,x_{21} + 600\,x_{31} + 400\,x_{41} \le 7000$$
$$500\,x_{12} + 700\,x_{22} + 600\,x_{32} + 400\,x_{42} \le 9000$$
$$500\,x_{13} + 700\,x_{23} + 600\,x_{33} + 400\,x_{43} \le 9000$$

$$\frac{20\,x_{11} + 16\,x_{21} + 25\,x_{31} + 13\,x_{41}}{12} = \frac{20\,x_{12} + 16\,x_{22} + 25\,x_{32} + 13\,x_{42}}{12} = \frac{20\,x_{13} + 16\,x_{23} + 25\,x_{33} + 13\,x_{43}}{12}$$

$x_{ij} \ge 0,$ $i = 1, 2, 3, 4$ $j = 1, 2, 3$

4. Un entrenador de fútbol americano tiene dos jugadas, una por aire y la otra por tierra.

Jugadas	Avanza	Tiempo	Pierden el balón
Aire	5 yardas	15''	1/ 3
Tierra	3 yardas	40''	1/10

Queda 1 minuto y 55" a 28 yardas por anotar.

Función objetivo: Min $z = 1/3\, x_1 + 1/10\, x_2$

Var: x_1 = Jugada por aire
x_2 = Jugada por tierra

Restricciones:

$$5x_1 + 3x_2 \geq 28$$
$$15x_1 + 40x_2 \leq 115$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Método gráfico

5. Una compañía produce 2 tipos de juguetes, soldados y trenes. Un soldado se vende en $27, el costo de materia prima es de $10 y se incurren en otros gastos de $14. Mientras que un tren se vende en $21, con $9 de materia prima y otros gastos de $10. La venta semanal de trenes es infinita, mientras que la de los soldados es de $40.

Estos juguetes requieren pasar por dos departamentos: acabado y carpintería. La fabricación de un soldado requiere 2 horas de acabado y una de carpintería. Un tren requiere 1 hora en ambos departamentos.

La disponibilidad semanal del departamento de acabado en horas es de 100; y el de carpintería es de 80.

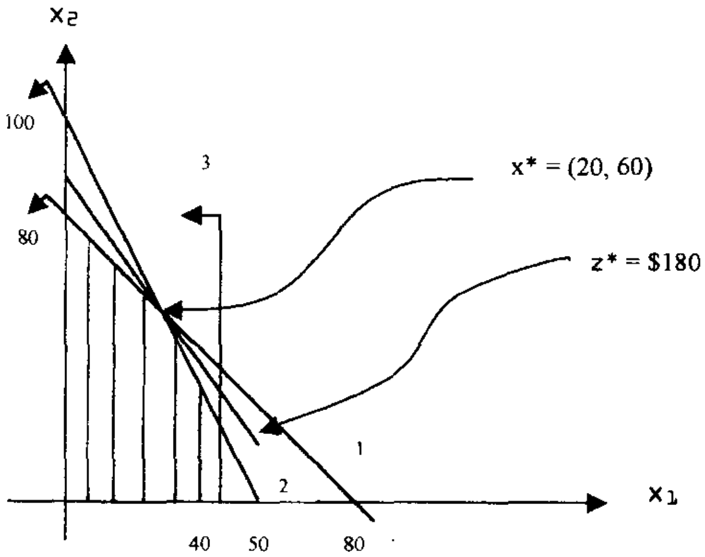
Si se desea maximizar las ganancias, ¿cuántos soldados y trenes debe producir la compañía?

Función objetivo: Soldado = 27 - 10 – 14 = $ 3
Tren = 21 – 9 – 10 = $ 2
Max $z = 3x_1 + 2x_2$

Var: x_1 = # de soldados a producir
x_2 = # de trenes a producir

Restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 80 \\ 2x_1 + x_2 &\le 100 \\ x_1 &\le 40 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$



$$x_1 + x_2 = 80$$
$$2x_1 + x_2 = 100$$

$x_2 = 60$

$\therefore$

$x_1 = 80 - 60 = 20$

$x^* = (20, 60)$

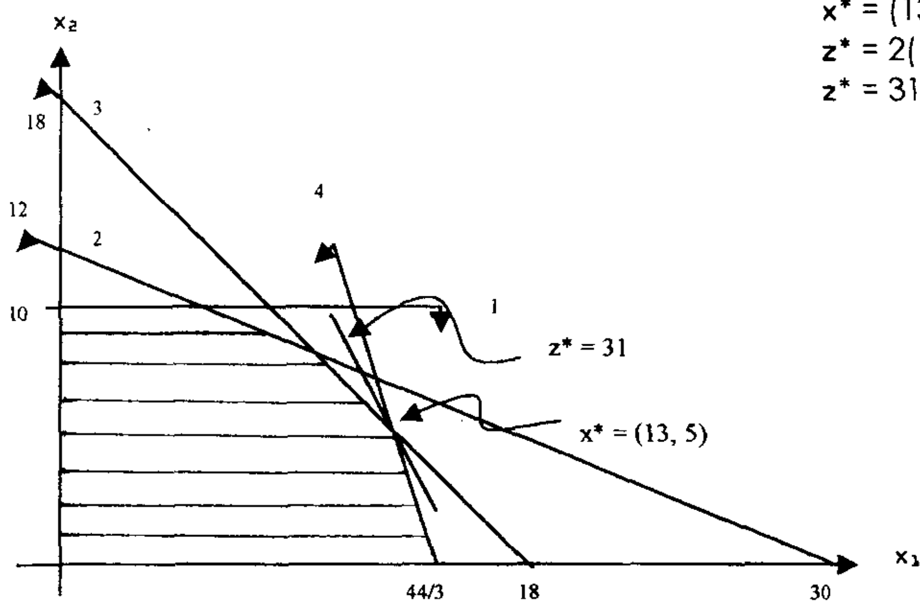
$z^* = 3(20) + 2(60)$

$z^* = \$180$

6. Max $z = 2x_1 + x_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_2 &\le 10 \\ 2x_1 + 5x_2 &\le 60 \\ x_1 + x_2 &\le 18 \\ 3x_1 + x_2 &\le 44 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$



$$x_1 + x_2 = 18$$
$$3x_1 + x_2 = 44$$

$x_2 = 5$

$\therefore$

$x_1 = 18 - 5 = 13$

$x^* = (13, 5)$

$z^* = 2(13) + 5$

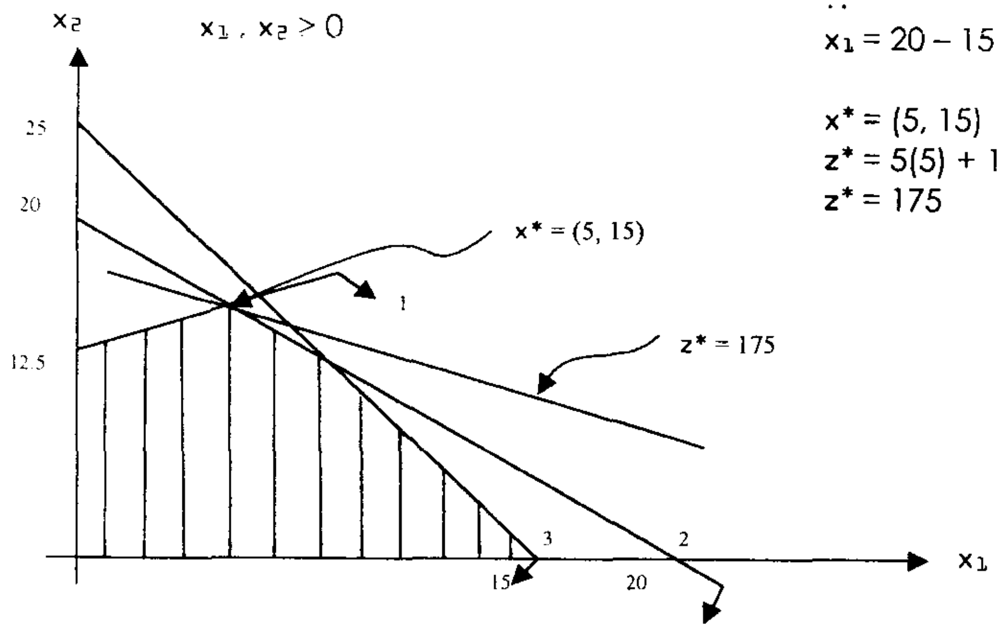
$z^* = 31$

7. Max $z = 5x_1 + 10x_2$
sujeto a
$$-x_1 + 2x_2 \leq 25$$
$$x_1 + x_2 \leq 20$$
$$5x_1 + 3x_2 \leq 75$$
$$x_1, x_2 > 0$$

$$-x_1 + 2x_2 = 25$$
$$x_1 + x_2 = 20$$

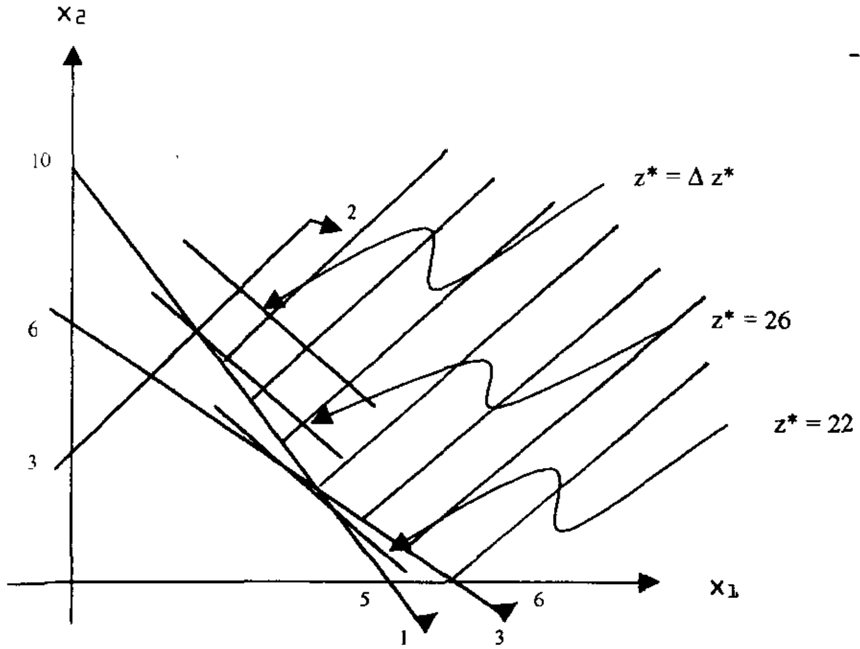
$x_2 = 15$
$\therefore$
$x_1 = 20 - 15 = 5$

$x^* = (5, 15)$
$z^* = 5(5) + 10(15)$
$z^* = 175$



Región factible no acotada
En los siguientes ejemplos se ilustran problemas con región no acotada. Se muestra que la solución óptima puede o no existir, independientemente de que la región sea acotada o no acotada.

8. Max $z = 4x_1 + 3x_2$
sujeto a
$$2x_1 + x_2 \geq 10$$
$$-3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



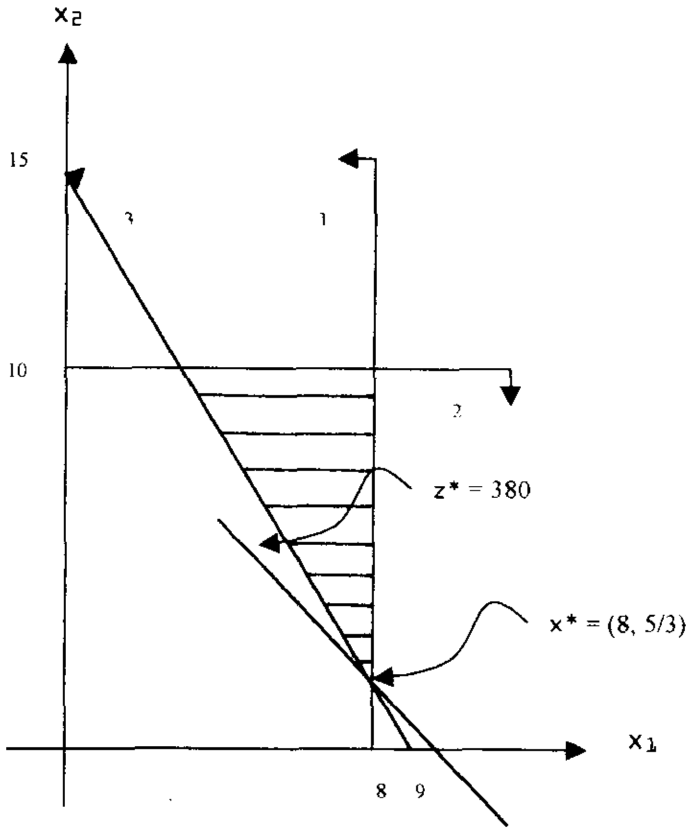
Como se puede ver la región de soluciones factibles es <u>no acotada</u>, más aún, el valor de la función objetivo aumenta indefinidamente.

9. Min $z = 40x_1 + 36x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 \quad &\leq 8 \\ x_2 &\leq 10 \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 8$
$5x_1 + 3x_2 = 45$
$\therefore$
$x_2^* = 5/3$

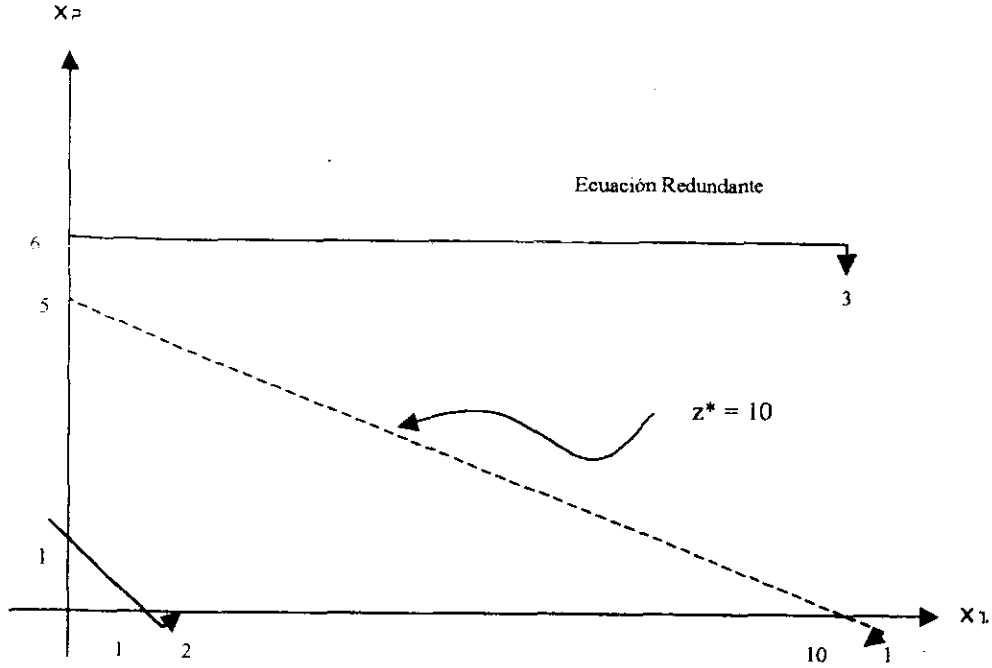
$x^* = (8, 5/3)$
$z^* = 40(8) + 36(5/3)$
$z^* = 380$



Región acotada, óptimo finito

10. Max $z = x_1 + 2x_2$
sujeto a

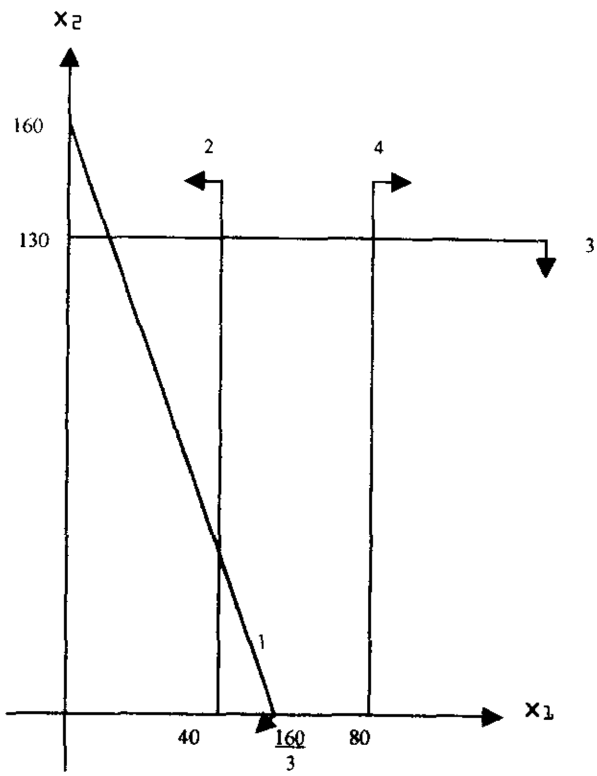
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Como se puede observar existe una <u>infinidad de soluciones óptimas</u>, con $z^* = 10$. Esto se debe a que la primera ecuación es *paralela* a la función objetivo.

11. Max $z = 6x_1 + 5x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + \quad x_2 &\leq 160 \\ x_1 \qquad &\leq 40 \\ x_2 &\leq 130 \\ x_1 \qquad &\geq 80 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Como se puede observar <u>la región de soluciones factibles</u> es ∅

PROGRAMACION LINEAL: SOLUCION ALGEBRAICA

En esta sección se presentan los detalles del algoritmo símplex, que es un método algebraico que puede resolver cualquier problema de programación lineal. La información que puede obtenerse con el método símplex, va mas allá de la determinación de los valores óptimos de las variables y de la función objetivo.

El método gráfico presentado anteriormente ilustra que la solución óptima de un PPL, está siempre asociada con un punto extremo o de esquina, del espacio de soluciones. Esta idea conduce precisamente a la creación del método símplex. Básicamente, lo que hace el método símplex es trasladar la definición geométrica del punto extremo a una definición algebraica.

Método símplex [5, Cap. 3]

Existen dos condiciones que rigen al método símplex que a continuación se presentan:

Condición de optimidad: la variable entrante en una maximización (en una minización) es la variable no básica, con el coeficiente más negativo (más positivo) en la ecuación **z** objetivo. Un empate puede romprese arbitrariamente. El óptimo se alcanza cuando todos los coeficientes no básicos en la ecuación **z** son no negativos (no positivos).

Condición de factibilidad: tanto en problemas de maximización como de minimización, la variable saliente es la variable básica actual, con la menor intersección (razón mínima con denominador estrictamente positivo) en la dirección de la variable entrante. Un empate se rompe arbitrariamente.

Se enunciarán los pasos iterativos formales del método símplex:

Paso 0: Usando la forma estándar (con los segundos miembros no negativos), determine una solución inicial básica factible.

Paso 1: Seleccione una *variable entrante* entre las variables actuales *no básicas*, usando la condición de optimidad.

Paso 2: Seleccione la *variable saliente* entre las variables actuales *básicas*, usando la condición de factibilidad.

Paso 3: Determine los valores de las nuevas variables básicas, haciendo a la variable entrante básica y a la variable saliente no básica. Vuelva al paso 1.

Ejemplo

Usaremos el modelo Arociris, S.A. para explicar los detalles de cálculo del método símplex. Esto exigirá expresar el problema en la forma estándar.

$$\text{Maximizar } z = 3x_E + 2x_I$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_E + 2x_I + h_1 &= 6 \\ 2x_E + x_I + h_2 &= 8 \\ -x_E + x_I + h_3 &= 1 \\ x_I + h_4 &= 2 \\ x_E, x_I, h_1, h_2, h_3, h_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Una manera conveniente de resumir las ecuaciones es por medio de la siguiente tabla, conocida también como Tableu Símplex:

Básica	x_E	x_I	h_1	h_2	h_3	h_4	Solución
h_1	1	2	1	0	0	0	6
h_2	(2)	1	0	1	0	0	8
h_3	-1	1	0	0	1	0	1
h_4	0	1	0	0	0	1	2
Z	-3	-2	0	0	0	0	0

Al aplicar la condición de optimidad, x_E tiene el coeficiente más negativo en la ecuación z y por ello, se escoge como la variable entrante. La condición de factibilidad muestra que h_2 corresponde a la menor intersección, por lo que deberá salir de la solución.

Después de identificar las variables entrantes y salientes, necesitamos determinar la nueva solución básica que debe incluir ahora a h_1, x_E, h_3 y h_4. Esto se logra aplicando el método de la columna pivote, que consiste en hacer cero a todas las variables que están arriba y debajo de la variable entrante y a esta hacerla uno. La siguiente tabla resume estas operaciones:

Básica	x_E	x_I	h_1	h_2	h_3	h_4	Solución
h_1	0	(3/2)	1	-½	0	0	2
x_E	1	½	0	½	0	0	4
h_3	0	3/2	0	½	1	0	5
h_4	0	1	0	0	0	1	2
Z	0	-½	0	3/2	0	0	12

Como se puede ver la solución que otorga la primera iteración en la tabla símplex nos lleva a la primera coordenada en la gráfica del problema de Arcoiris, S.A. (4,0).

Ahora se vuelve a iterar para mejorar la solución inicial.

Básica	x_E	x_I	h_1	h_2	h_3	h_4	Solución
x_I	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
(x_E)	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
h_3	0	0	-1	1	1	0	3
h_4	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3
z	0	0	1/3	4/3	0	0	12 2/3

La nueva solución da como resultado $x_E = 3\ 1/3$ y $x_I = 1\ 1/3$ (punto óptimo en la figura 1-1). El valor de **z** ha aumentado de 12 en la tabla anterior a 12 2/3.

La última tabla es óptima porque *ninguna* de las variables *no básicas* tiene un coeficiente negativo en la función **z**. Esto completa los cálculos del método símplex.

La técnica de dos fases [5, Cap. 3]

Fase I. Se aumentan las variables artificiales según se necesite para asegurar una solución inicial Se forma una nueva función objetivo que busque la *minimización* de la suma de las variables artificiales sujeta a las restricciones del problema original modificado por las variables artificiales. Si el valor *mínimo* de la nueva función objetivo es cero, el problema tiene un espacio de soluciones factible. Se sigue a la fase II. De lo contrario, si el mínimo es positivo, el problema no tiene solución factible. Pare.

Fase II. Se utiliza la solución básica óptima de la fase I como solución inicial para el problema original.

Se describirá este método por medio del siguiente ejemplo numérico:

$$\text{Minimizar } \mathbf{z} = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La forma estándar de este modelo es entonces:

$$\text{Minimizar } \mathbf{z} = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 \phantom{{}- h_1} &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - h_1 &= 6 \end{aligned}$$

$$x_1 + 2x_2 \qquad + h_2 = 4$$
$$x_1, x_2, h_1, h_2 \geq 0$$

Se necesita completar la base que entrará en la tabla para realizar los cálculos del método símplex.

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + a_1 \qquad\qquad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \quad - h_1 + a_2 \quad &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + h_2 &= 4 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, a_1, a_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Fase I. Como necesitamos las variables artificiales a_1 y a_2 en la primera y segunda ecuaciones, el problema de la fase I se lee como

$$\text{Minimizar } w = a_1 + a_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + a_1 \qquad\qquad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \quad - h_1 + a_2 \quad &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + h_2 &= 4 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, a_1, a_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la tabla *inicial* se convierte en

Básica	x_1	x_2	h_1	a_1	a_2	h_2	Solución
a_1	3	1	0	1		1	3
a_2	4	3	-1	0	1	0	6
h_2	1	2	0	0	0	1	4
w	0	0	0	-1	-1	0	0
w	7	4	-1	0	0	0	9

La tabla óptima se obtiene en dos iteraciones y está dada por

Básica	x_1	x_2	h_1	a_1	a_2	h_2	Solución
x_1	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
x_2	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
h_2	0	0	1	1	-1	1	1
w^*	0	0	0	-1	-1	0	0

Como el mínimo es $w^* = 0$, el problema tiene una solución factible y pasamos a la fase II.

Fase II. Las variables artificiales han servido ahora a su propósito y deben eliminarse en todos los cálculos subsiguientes. Ahora se introduce la ecuación del problema original en la tabla. Por lo tanto, la tabla inicial para la fase II se convierte en

Básica	x_1	x_2	h_1	h_2	Solución
x_1	1	0	1/5	0	3/5
x_2	0	1	-3/5	0	6/5
h_2	0	0	1	1	1
Z	-4	-1	0	0	0
Z	0	0	1/5	0	18/5

La tabla no es óptmia ya que $h_1 > 0$, por lo que debe entrar a la solución.

Básica	x_1	x_2	h_1	h_2	Solución
x_1	1	0	0	-1/5	2/5
x_2	0	1	0	3/5	9/5
h_1	0	0	1	1	1
Z	0	0	0	-1/5	17/5

La solución óptima es $x_1^* = 2/5$, $x_2^* = 9/5$ y $z^* = 17/5$. Como no contiene variables artificiales básicas, la solución es factible con respecto al problema original antes de que se sumaran las variables artificiales.

Casos especiales en la aplicación del método símplex [5, Cap. 3]

Se considerarán algunos casos especiales que pueden presentarse en la aplicación del método símplex, entre los que se cuentan:

1. Degeneración
2. Opciones óptimas
3. Soluciones no acotadas
4. Soluciones inexistentes o infactibles

Estos casos ya se ilustraron con el método gráfico, ahora se vuelven a considerar, en el contexto del método símplex.

Degeneración

Se indicó que en la aplicación de la condición de factibilidad, un empate de la razón mínima se debe descomponer en forma arbitraria para los fines de determinar la variable que sale. Sin embargo, cuando sucede esto más veces, una o más de las variables *básicas*, será necesariamente igual a cero en la siguiente iteración. En este caso, decimos que la nueva solución es **degenerada.**

Desde el punto de vista práctico, esto revela que el modelo tiene cuando menos una restricción redundante.

Ejemplo 2-1 (Solución óptima degenerada)

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 9x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Iteración	Básica	x_1	x_2	h_1	h_2	Solución
x_2 entra	h_1	1	4	1	0	8
h_1 sale	h_2	1	2	0	1	4
0 (inicial)	z	-3	-9	0	0	0
x_1 entra	x_2	¼	1	¼	0	2
h_2 sale	h_2	½	0	-½	1	0
1	z	-¾	0	9/4	0	18
	x_1	0	1	½	-½	2
	x_2	1	0	1	2	0
2 (óptima)	z*	0	0	3/2	3/2	18

¿Cuál es la implicación práctica de la degeneración? Obsérvese la figura 2-1 que proporciona la solución gráfica del modelo. Tres rectas cruzan el óptimo ($x_1 = 0$, $x_2 = 2$ y $x_2 = 0$). Se dice que el punto está más que *determinado*, ya que sólo necesitamos dos rectas para identificarlo. Por este motivo, concluimos que la segunda restricción es redundante.

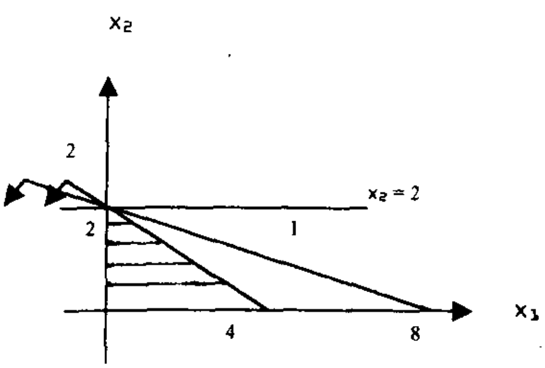


Figura 2-1

Opciones óptimas

Cuando la función objetivo es paralela a alguna restricción, esta tomará el *mismo valor óptimo* en más de un punto de solución. Por esta razón reciben el nombre de **opciones óptimas**. El ejemplo que sigue muestra que normalmente existe un número *infinito* de estas soluciones.

Ejemplo 2-2 (Infinidad de soluciones)

$$\text{Maximizar } \mathbf{z} = 3x_1 + 9x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

La siguiente tabla muestra que el punto óptimo ($x_1 = 0$, $x_2 = 5/2$, $z^* = 10$) se encuentra en la iteración 1. ¿Cómo sabemos por esta tabla que existen opciones óptimas? Esto se da porque en el renglón de **z-x_1** (variable no básica), tiene como coeficiente cero, lo que implica que puede entrar a la solución básica sin alterar el valor de **z**, pero provoca un cambio en los valores de las variables. La segunda iteración hace que x_1 entre en la solución básica, lo que obligará a h_2 a salir. Esto da origen al nuevo punto solución ($x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $z^* = 10$)

Solución por el método símplex

Básica	x_1	x_2	h_1	h_2	Solución
h_1	1	(2)	1	0	5
h_2	1	1	0	1	4
z	-2	-4	0	0	0
x_2	½	1	½	0	5/2
h_2	(½)	0	-½	1	3/2
z*	0	0	2	0	10
x_2	0	1	1	-1	1
x_1	1	0	-1	2	3
z*	0	0	2	0	10

La figura 2-2 ilustra la forma como se pueden presentar opciones óptimas en un modelo de PL cuando la función objetivo es paralela a una restricción. Cualquier punto en el *segmento de recta* representa una opción óptima con el mismo valor en la función **z** = 10

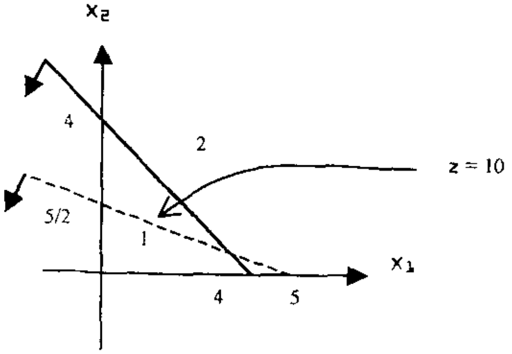


Figura 2-2

Solución no acotada

En algunos modelos de programación lineal, los valores de las variables se pueden aumentar en forma indefinida sin violar ninguna de las restricciones, lo que significa que el espacio de soluciones es **no acotado** cuando menos en una dirección. Como resultado, el valor de la función objetivo puede crecer (caso de maximización) o decrecer (caso de minimización) en forma indefinida. En este caso decimos que el espacio de soluciones y el valor óptimo de la función objetivo son no acotados.

Ejemplo 2-3 (Función objetivo no acotada)

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeto a

$$x_1 - x_2 \leq 10$$
$$2x_1 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Iteración inicial

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	-2	-1	0	0	0
x_3	1	-1	1	0	10
x_4	2	0	0	1	40

En la tabla inicial, x_1 y x_2 son candidatos para entrar en la solución. Como x_1 tiene el coeficiente más negativo, normalmente se selecciona como la variable que entra. Sin embargo, nótese que *todos* los coeficientes de las *restricciones en la columna* de x_2 son *negativos* o *cero*, esto significa que el valor de x_2 puede crecer haciendo crecer a la función objetivo en forma indefinida sin que se infrinja ninguna de las restricciones. Por lo tanto, concluimos sin hacer más cálculos, que el problema no tiene solución acotada.

Solución infactible

Si las restricciones no se pueden satisfacer en forma simultánea, se dice que el modelo no tiene solución factible. Esta situación nunca puede ocurrir si *todas* las restricciones son del tipo ≤ (suponiendo constantes no negativas en el segundo miembro), ya que la variable de holgura produce siempre una solución *factible*. Sin embargo, cuando empleamos los otros tipos de restricciones, recurrimos al uso de las variables artificiales que, por su mismo diseño, no ofrecen una solución factible al modelo *original*.

Ejemplo 2-4 (Espacio de solución infactible)

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 2 \\ 3x_1 + 4x_2 &\ge 12 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\text{Minimizar } w = a_1$$

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	Solución
x_3	2	(1)	1	0	0	2
a_1	3	4	0	-1	1	12
w	0	0	0	0	-1	0
w	3	4	0	-1	0	12
x_2	2	1	1	0	0	2
a_1	-5	0	-4	-1	1	4
w	-5	0	-4	-1	0	4

Como se ve en la tabla, se llega a una solución óptima con $w^* \neq 0$; entonces se concluye que el espacio de soluciones es infactible. La figura 2-3 muestra el espacio de soluciones infactible.

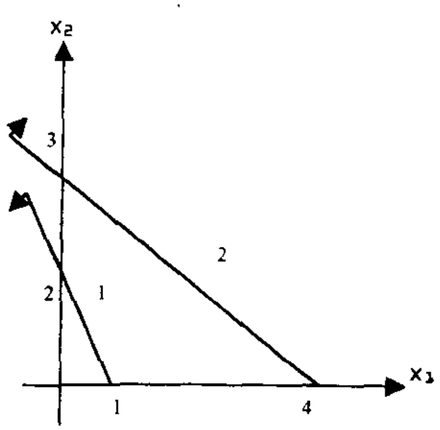


Figura 2-3

Ejercicios de PL por el método símplex

1. Maximizar $z = x_1 + 3x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\leq 5 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma estándar:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + h_1 \quad\quad &= 5 \\ x_1 + 2x_2 \quad + h_2 &= 10 \\ x_2 \quad\quad h_3 &= 4 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Básica	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución
h_1	1	0	1	0	0	5
h_2	1	2	0	1	2	10
h_3	0	(1)	0	0	1	4
z	-1	-3	0	0	0	0
h_1	1	0	1	0	0	5
h_2	(1)	0	0	1	-2	2
x_2	0	1	0	0	1	4
z	-1	0	0	0	3	12
h_1	0	0	1	-1	2	3
x_1	1	0	0	1	-2	2
x_2	0	1	0	0	1	4
z^*	0	0	0	1	1	14

Tenemos como resultado:

$x^* = (x_1, x_2, h_1, h_2, h_3) = (2, 4, 3, 0, 0)$

$z^* = 2 + 3\ (4)\ 14$

2. Maximizar $z = 30x_1 + 12x_2 + 15x_3$
sujeto a

$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 500 \\ 5x_1 + 4x_2 \quad\quad &\leq 350 \\ 3x_1 \quad\quad + 2x_3 &\leq 150 \\ x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma estándar:

$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 + h_1 \quad\quad\quad &= 500 \\ 5x_1 + 4x_2 \quad\quad + h_2 \quad\quad &= 350 \\ 3x_1 \quad + 2x_3 \quad\quad + h_3 \quad &= 150 \\ x_3 \quad\quad\quad + h_4 &= 20 \\ x_1, x_2, x_3, h_1, h_2, h_3, h_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Básica	x_1	x_2	x_3	h_1	h_2	h_3	h_4	Solución
h_1	9	3	5	1	0	0	0	500
h_2	5	4	0	0	1	0	0	350
h_3	(3)	0	2	0	0	1	0	150
h_4	0	0	1	0	0	0	1	20
z	-30	-12	-15	0	0	0	0	0
h_1	0	(3)	-1	1	0	-3	0	50
h_2	0	4	-10/3	0	1	-5/3	0	100
x_1	1	0	2/3	0	0	1/3	0	50
h_4	0	0	1	0	0	0	1	20
z	0	-12	5	0	0	10	1	1500
x_2	0	1	-1/3	1/3	0	-1	0	50/3
h_2	0	0	-2	-4/3	1	-1/3	0	100/3
x_1	1	0	2/3	0	0	(1/3)	0	50
h_4	0	0	1	0	0	0	1	20
z	0	0	1	4	0	-2	0	1700
x_2	3	1	5/3	1/3	0	0	0	500/3
h_2	1	0	-4/3	-4/3	1	0	0	250/3
h_3	3	0	2	0	0	1	0	150
h_4	0	0	1	0	0	0	1	20
z*	6	0	5	4	0	0	0	2000

Tenemos como resultado:

$x^* = (x_1, x_2, x_3, h_1, h_2, h_3, h_4) = (0, 500/3, 0 , 0, 250/3, 150, 20)$
$z^* = 30(0) + 12\ (500/3) + 15\ (0) = 2000$

3. Maximizar $z = 7x_1 + 10x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\leq 36 \\ x_2 &\leq 12 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 60 \\ 2x_1 + \quad x_2 &\leq 30 \\ x_1 - \quad x_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma estándar:

$$\begin{aligned} x_1 + h_1 &= 36 \\ x_2 + h_2 &= 12 \\ x_1 + 4x_2 + h_3 &= 60 \\ 2x_1 + x_2 + h_4 &= 30 \\ x_1 - x_2 + h_5 &= 0 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Básica	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	Solución
h_1	1	0	1	0	0	0	0	36
h_2	0	1	0	1	0	0	0	12
h_3	1	4	0	0	1	0	0	60
h_4	2	1	0	0	0	1	0	30
h_5	1	-1	0	0	0	0	1	0
z	-7	-10	0	0	0	0	0	0

Al observar la tabla inicial, nos podemos dar cuenta que la ecuación 5 es redundante, pues es igual a cero. Se puede concluir que la solución es degenerada.

4. Maximizar $z = 4x_1 + 3x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma estándar:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + h_1 \qquad &= 10 \\ x_1 + x_2 \quad +h_2 \quad &= 6 \\ x_2 \qquad +h_3 &= 6 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Básica	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	Solución
h_1	(2)	1	1	0	0	10
h_2	-3	2	0	1	0	6
h_3	1	1	0	0	1	6
z	-4	-3	0	0	0	0
x_1	1	½	½	0	0	5
h_2	0	7/2	3/2	1	0	21
h_3	0	(½)	-½	0	1	1
z	0	-1	2	0	0	20
x_1	1	0	1	0	-1	4
h_2	0	0	5	1	-7	14
x_2	0	1	-1	0	2	2
z*	0	0	1	0	2	22

Tenemos como resultado:

$x^* = (x_1, x_2, h_1, h_2, h_3) = (4, 2, 0, 14, 0)$

$z^* = 4\,(4) + 3\,(2) = 22$

5. Maximizar $z = x_1 + 2x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma estándar:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + h_1 \qquad\qquad &= 10 \\ x_1 + x_2 \quad -h_2 + a_1 \quad &= 1 \\ x_2 \qquad\qquad +h_3 &= 6 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, a_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Minimizar $w = a_1$

Básica	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	a_1	Solución
h_1	1	2	1	0	0	0	10
a_1	(1)	1	0	-1	0	1	1
h_3	0	1	0	0	1	0	6
w	0						0
w	1	1	0	-1	0	0	1
h_1	0	1	1	1	0	-1	9
x_1	1	(1)	0	-1	0	1	1
h_3	0	1	0	0	1	0	6
w*	0	0	0	0	0	-1	0
z	-1	-2	0	0	0		0
z	0	-1	0	-1	0		1
h_1	-1	0	1	(2)	0		8
x_2	1	1	0	-1	0		1
h_3	-1	0	0	1	1		5
z	1	0	0	-2	0		2
h_2	-½	0	½	1	0		4
x_2	(½)	1	½	0	0		5
h_3	-½	0	-½	0	1		1
Z	0	0	1	0	0		10
h_2	0	1	1	1	0		9
x_1	1	2	1	0	0		10
h_3	0	1	0	0	1		6
z	0	0	1	0	0		10

Como encontramos una variable no básica, x_2, con coeficiente igual a cero, podemos concluir que este programa tiene una infinidad de soluciones óptimas.

$x_1^* = (0, 5, 0, 4, 1)$
$x_2^* = (10, 0, 0, 9, 6)$
$z^* = 10$

$x^* = \alpha\, x_1^* + (1-\alpha)\, x_2^*$ con $\alpha \in [0, 1]$
$x^* = \alpha\, (0, 5, 0, 4, 1) + (1-\alpha)\, (10, 0, 0, 9, 6)$
$z^* = 10$

6. Maximizar $z = 5x_1 - 2x_2 + x_3$
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0;\ x_3 &\text{ s.r.s.} \\ x_3 = x_3' - x_3'' & \end{aligned}$$

Maximizar $z = 5x_1 - 2x_2 + x_3' - x_3''$
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3' - 3x_3'' + h_1 \qquad\qquad &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3' - 3x_3'' \qquad - h_2 + a_1 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3', x_3'', h_1, h_2, a_1 &\ge 0 \end{aligned}$$

Minimizar $w = a_1$

Básica	x_1	x_2	x_3'	x_3''	h_1	h_2	a_1	Solución
h_1	1	4	3	-3	1	0	0	6
a_1	2	1	(3)	-3	0	-1	1	2
w	0	0	0	0	0	0	-1	0
w	2	1	3	-3	0	-1	0	2
h_1	-1	3	0	0	1	1	-1	4
x_3'	(2/3)	1/3	1	-1	0	-1/3	1/3	2/3
w	0	0	0	0	0	0	-1	0
z	-5	0	-1	1	0	0		0
z	-13/3	7/3	0	0	0	-1/3		2/3
h_1	0	7/2	3/2	-3/2	1	½		5
x_1	1	½	3/2	-3/2	0	-½		1
z*	0	9/2	13/2	-13/2	0	-5/2		5

Como se puede observar, todos los valores de la columna pivote son negativos. Así es que la solución es no acotada, es decir, el valor de la función objetivo puede ir creciendo indefinidamente.

$x^* = (1, 0, 0, 0, 5, 0)$

$z^* = 5$

7. Maximizar $z = 3x_1 + 9x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ -x_2 &\leq -1 \Rightarrow \\ x_2 &\geq 1 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma estándar:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + h_1 \qquad\qquad &= 1 \\ x_2 - h_2 + a_1 \quad &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + h_3 &= 1 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, a_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Minimizar $w = a_1$

Básica	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	a_1	Solución
h_1	1	1	1	0	0	0	1
a_1	0	1	0	-1	0	1	1
h_3	-1	(2)	0	0	1	0	1
w	0	0		0	0	-1	0
w	0	1	0	-1	0	0	1
h_1	(3/2)	0	1	0	-½	0	½
a_1	½	0	0	-1	-½	1	½
x_2	-½	1	0	0	½	0	½
w	½	0	0	-1	-½	0	½
x_1	1	0	2/3	1	-1/3	0	1/3
a_1	0	0	-1/3	-1	-1/3	1	1/3
x_2	0	1	1/3	0	1/3	0	2/3
w	0	0	-1/3	-1	-1/3	0	1/3

Como no se llegó al punto óptimo en el que $w^* = 0$, entonces se puede concluir que existe una inconsistencia en el problema, es decir, no existe una solución factible.

8. Maximizar $z = 4x_1 + 3x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 10 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 &\geq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma estándar:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - h_1 + a_1 &= 10 \\ -3x_1 + 2x_2 + h_2 &= 6 \\ x_1 + x_2 - h_3 + a_2 &= 8 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, a_1, a_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Minimizar $w = a_1 + a_2$

Básica	x_1	x_2	h_1	h_2	h_3	a_1	a_2	Solución
a_1	(2)	1	-1	0	0	1	0	10
h_2	-3	2	0	1	0	0	0	6
a_2	1	1	0	0	-1	0	1	8
w	0	0	0	0	0	-1	-1	0
w	3	2	-1	0	-1	0	0	18
x_1	1	½	-½	0	0	½	0	5
h_2	0	7/2	-3/2	1	0	3/2	0	21
a_2	0	½	(½)	0	-1	-½	1	3
w	0	½	½	0	-1	-3/2	0	3
x_1	1	1	0	0	-2	0	1	11
h_2	0	5	0	1	-3	0	3	30
h_1	0	1	1	0	-2	-1	2	6

w	0	0	0	0	0	-1	-1	0
z	-4	-3	0	0	0			0
z	0	1	0	0	-8			44

Como podemos observar todos los valores de la columna de la variable que entra son no positivos, por lo que concluimos que el espacio de soluciones factibles es no *acotado*.

TEORÍA DE DUALIDAD

La teoría de dualidad incorpora gran riqueza a la programación lineal; la mejor forma de introducir la definición de un problema dual es mediante un ejemplo. Dado un problema de programación lineal, se define su dual como

Max $z = 5x_1 + 6x_2$	Min $w = 5y_1 + 3y_2$
sujeto a	sujeto a
$x_1 + 2x_2 \leq 5$	$y_1 - y_2 \geq 5$
$-x_1 + 5x_2 \leq 3$	$2y_1 + 5y_2 \geq 6$
$x_1, x_2 \geq 0$	$y_1, y_2 \geq 0$

El diagrama que sigue ilustra que el problema dual se obtiene simétricamente del problema primal. **[5, Cap. 5]**

Tabla 3-1 **Tabla primal dual para PL [5, Cap. 5]**

a) Caso general

			Problema primal					
			(Coeficiente de)				Lado derecho	
			x_1	x_2	...	x_n		
Problema dual	***(Coeficiente de)***	y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$< b_1$	Coeficientes de la función objetivo (Minimizar)
		y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$< b_2$	
		⋮	...	...	...	...	⋮	
		y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mm}	$< b_m$	
		Lado derecho	c_1	c_2	...	c_n		
			Coeficientes de la función objetivo (Maximizar)					

Ahora se atenderá la determinación de los elementos restantes del problema dual: el sentido de la optimización, el tipo de restricciones y el signo de las variables duales. Esta información se presenta en la tabla 3-2 para los tipos de maximización y minimización de la forma estándar.

Tabla 3-2 [5, Cap. 5]

	Minimización	Maximización	
Variables	≥ 0	$\leq$	Restricciones
	≤ 0	$\geq$	
	Irrestrictas (srs)	$=$	
Restricciones	$\geq$	≥ 0	Variables
	$\leq$	≤ 0	
	$=$	Irrestrictas (srs)	

Resumen de las relaciones primal-dual [4, Cap. 6]

Se dará un resumen seguido de un ejemplo de estas importantes relaciones entre los problemas primal y dual.

Propiedad de dualidad débil: si x es una solución factible para el problema primal y y es una solución factible para el problema dual, entonces

$$cx \leq yb$$

Propiedad de dualidad fuerte: si x* es una solución óptima para el problema primal y y* es una solución óptima para el problema dual, entonces

$$cx^* = y^*b$$

Ejemplo

Max $z = 5x_1 + 6x_2$
sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + h_1 \leq 5$$
$$-x_1 + 5x_2 + h_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2, h_1, h_1 \geq 0$$

Solución del primal por el método símplex

Básica	x_1	x_2	h_1	h_2	Solución
h_1	1	2	1	0	5
h_2	-1	(5)	0	1	3
z	-5	-6	0	0	0
h_1	(7/5)	0	1	-2/5	19/5
x_2	-1/5	1	0	1/5	3/5
z	-31/5	0	0	6/5	18/5
x_1	1	0	5/7	-2/7	19/7
x_2	0	1	1/7	1/7	8/7
z*	0	0	31/7	4/7	143/7

$x^* = (19/7, 8/7)$
$z^* = 143/7$

Analizando la solución simétrica que da la tabla del método símplex al problema dual, tenemos que:

Dada la solución del problema primal, $x_1 = 19/7$ y $x_2 = 8/7$
$19/7 + 2(8/7) = 35/7 = 5 = 5$
$-19/7 + 5(8/7) = 21/7 = 3 = 3$

Como se cumplen estrictamente la primera y segunda restricciones, no podemos decir nada acerca de y_1 ni de y_2.
Ahora, como $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$, podemos concluir que las restricciones del dual se cumplen, es decir, se da la igualdad. Por lo que ahora se puede resolver el sistema de ecuaciones del problema dual.

$y_1 - y_2 = 5$
$2y_1 + 5y_2 = 6$

$y_2 = -4/7$
$y_1 = 31/7$

Por lo que
$y^* = (31/7, -4/7)$
$w^* = 5(31/7) + 3(-4/7) = 155/7 - 12/7 = 143/7$

Se puede observar que ambas soluciones son óptimas, por lo que se da la igualdad $z^* = w^*$

Así, estas dos propiedades implican que $cx \le yb$ para soluciones factibles si una o ambas son *no óptimas* para sus problemas respectivos, mientras que la igualdad se cumple cuando ambas son óptimas.

Propiedad de holguras complementarias: el método símplex identifica simultáneamente una solución óptima factible, x, para el problema primal y una solución complementaria, y, para el problema dual (que se encuentra en el renglón 0, como los coeficientes de las variables de holgura), en donde

$$cx = yb$$

Si x *no es óptima* para el problema primal, entonces y *no es factible* para el problema dual.

Propiedad de holguras complementarias óptimas: al final de cada iteración, el método símplex identifica simultáneamente una solución óptima x^* para el problema primal y una **solución óptima complementaria** y^* para el problema dual (que se encuentra en el renglón 0 como los coeficientes de la variables de holgura), en donde

$$cx \leq yb$$

Ejemplo

Max $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 15 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 &= 10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Min $w = 15y_1 + 10y_2 + 20y_3$

sujeto a

$$\begin{aligned} y_1 - 2y_2 + 4y_3 &\geq 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 &\geq 2 \\ y_1 + 5y_2 - 3y_3 &\geq 3 \\ y_1 - y_2 + 3y_3 &\geq 0 \\ y_1, y_2, y_3 &\text{ srs} \end{aligned}$$

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	a_3	Solución
a_1	1	1	1	1	1	0	0	15
a_2	-2	(1)	5	-1	0	1	0	10
a_3	4	1	-3	3	0	0	1	20
w	3	3	3	3	0	0	0	45
a_1	(3)	0	-4	2	1	-1	0	5
x_2	-2	1	5	-1	0	1	0	10
a_3	6	0	8	4	0	-1	1	10
w	9	0	-12	6	0	-3	0	15
x_1	1	0	-4/3	2/3	1/3	-1/3	0	5/3
x_2	0	1	7/3	1/3	2/3	1/3	0	40/3
a_3	0	0	0	0	-2	1	1	0
w^*	0	0	0	0	-3	0	0	0

Se puede observar que algunas variables no básicas tienen como coeficiente 0, lo que implica que la solución es degenerada; llegamos a la solución del

problema inicial que era Min $w = a_1 + a_2 + a_3$, con $w^* = 0$ pero $a_1 \neq 0$ por lo que el problema es no factible o inconsistente.
Cuando esto sucede, la solución del problema dual no tiene solución óptima.

Propiedad de simetría: una propiedad esencial de la dualidad en programación lineal es que $(P^*)^* = P$. Una consecuencia de esto es que se puede hablar de un "par de problemas duales" sin que haya distinción entre el problema primal y su problema dual.

Ejemplo

(P) Min $w = 3y_1 + 4y_2$
sujeto a
$$y_1 + y_2 \leq 4$$
$$2y_1 + 3y_2 \geq 18$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

(P*) Max $z = 4x_1 + 18x_2$
sujeto a
$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 4$$
$$x_1 \# 0,\ x_2 \geq 0$$

(P*)* Min $w = 3y_1 + 4y_2$
sujeto a
$$y_1 + y_2 \leq 4$$
$$2y_1 + 3y_2 \geq 18$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Así, todas las propiedades anteriores se cumplen sin importar cuál de los dos problemas se etiqueta como problema primal. En consecuencia, el método símplex se puede aplicar a cualquiera de los dos problemas e identificará al mismo tiempo las soluciones complementarias para el otro problema.

Hasta aquí se han estudiado las relaciones entre las soluciones factibles u óptimas para el problema primal y las soluciones correspondientes para el problema dual. Sin embargo, es posible que el problema primal (o el dual) no tenga soluciones factibles o bien tenga soluciones factibles pero no una solución óptima (debido a que la función objetivo no esté acotada). La última propiedad resume las relaciones primal-dual bajo todas estas posibilidades.

Teorema de dualidad [4, Cap. 6]: Las siguientes son las únicas relaciones posibles entre los problemas primal y dual.

1. Si un problema tiene *soluciones factibles* y una función objetivo *acotada* (y por lo tanto tiene una solución óptima), entonces ocurre lo mismo para el otro problema, de manera que se aplican tanto la propiedad de dualidad débil como la propiedad de dualidad fuerte.
2. Si uno de los problemas tiene *soluciones factibles* y una función objetivo *no acotada* (y por lo tanto *no* tiene una *solución óptima*), entonces el otro problema *no* tiene *soluciones factibles*.
3. Si un problema *no* tiene *soluciones factibles*, entonces el otro problema *no* tiene *soluciones factibles* o bien la función objetivo es *no acotada*.

Los ejercicios que siguen están diseñados para ilustrar el uso de estas reglas.

Ejercicios

1. (P) Max $z = 5x_1 + 5x_2$
sujeto a

$$4x_1 + 2x_2 \leq 12$$
$$4x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2, \geq 0$$

(D) Min $w = 12y_1 + 10y_2$
sujeto a

$$4y_1 + 4y_2 \geq 5$$
$$2y_1 + y_2 \geq 5$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Solución del primal por el método símplex

Básica	x_1	x_2	h_1	h_2	Solución
h_1	4	2	1	0	12
h_2	(4)	1	0	1	10
z	-5	-5	0	0	0
h_1	0	(1)	1	-1	2
x_1	1	¼	0	¼	5/2
z	0	-15/4	0	5/4	25/2
x_2	0	1	1	-1	2
x_1	1	0	-¼	(½)	2
z	0	0	15/4	-5/2	20
x_2	2	1	½	0	6
h_2	2	0	-½	1	4
z	5	0	5/2	0	30

$x^* = (0, 6)$
$z^* = 30$

$4(0) + 2(6) = 12 = 12$, no se puede decir nada acerca de y_1.
$4(0) + 6 = 6 < 10$, como se cumple la segunda restricción entonces $y_2 = 0$.

$x_1 = 0,\ x_2 > 0,\ y_2 = 0$

La primera restricción es una desigualdad por ser $x_1 = 0$. Entonces, con $y_2 = 0$ tenemos de la segunda restricción que:

$y_1 = 5/2$

La solución del problema dual es
$y^* = (5/2, 0)$
$w^* = 12(5/2) + 10(0) = 30$

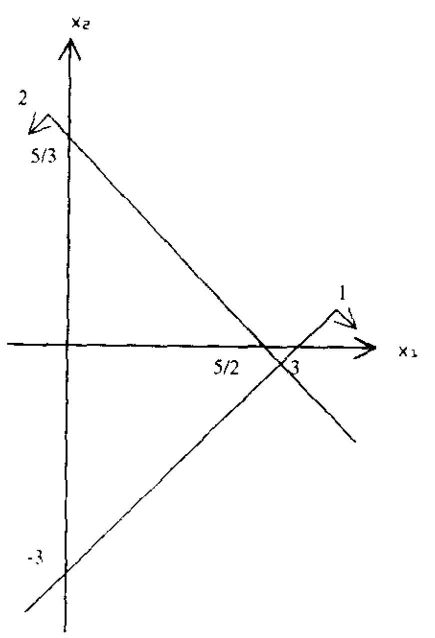
Como se puede observar existe x^* y y^*, que son las soluciones óptimas de sus problemas primal y dual respectivamente, por lo que se llegó a la solución óptima $z^* = w^*$.

2. (P) Max $z = -5x_1 + 2x_2$
sujeto a

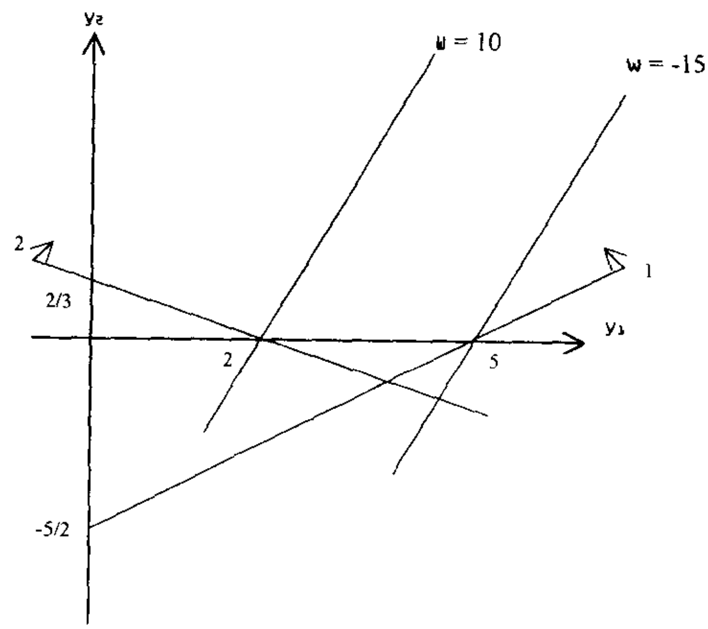
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le -3 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(D) Min $w = -3y_1 + 5y_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} -y_1 + 2y_2 &\ge -5 \\ y_1 + 3y_2 &\ge 2 \\ y_1, y_2 &\ge 0 \end{aligned}$$



Gráfica del problema primal



Gráfica del problema dual

Como podemos darnos cuenta el problema primal tiene región de soluciones vacía, esto implica el problema dual tenga una función objetivo no acotada.

3. (P) Min $z = 6x_1 + 3x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + x_3 &\ge 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &\ge 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

(D) Max $w = 2y_1 + 5y_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} 6y_1 + 3y_2 &\le 6 \\ -3y_1 + 4y_2 &\le 3 \\ y_1 + y_2 &\le 0 \\ y_1, y_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Solución del dual por el método símplex

Básica	y_1	y_2	h_1	h_2	h_3	Solución
h_1	6	3	1	0	0	6
h_2	-3	4	0	1	0	3
h_3	1	1	0	0	0	0
z	-2	-5	0	0		0
h_1	(27/4)	0	1	-¾		21/4
y_2	-¾	1	0	¼		¾
Z	-23/4	0	0	5/4		15/4
y_1	1	0	4/27	-1/9		7/9
y_2	0	1	1/9	1/6		4/3
z	0	0	23/27	11/18		74/9

Como se puede ver el problema dual tiene una solución degenerada porque la ecuación 3 pasa por (0, 0).

4. (P) Max $z = 5x_1 + 6x_2$
sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \le 5$$
$$-x_1 + 5x_2 \ge 3$$
$$x_1 \text{ srs}$$
$$x_2 \ge 0$$

(D) Min $w = 5y_1 + 3y_2$
sujeto a

$$y_1 - y_2 = 5$$
$$2y_1 + 5y_2 \ge 6$$
$$y_1 \exists 0,\ y_2 \le 0;$$
$$y_2' = -y_2,\ y_2' \ge 0$$

(D) Min $w = 5y_1 - 3y_2'$
sujeto a

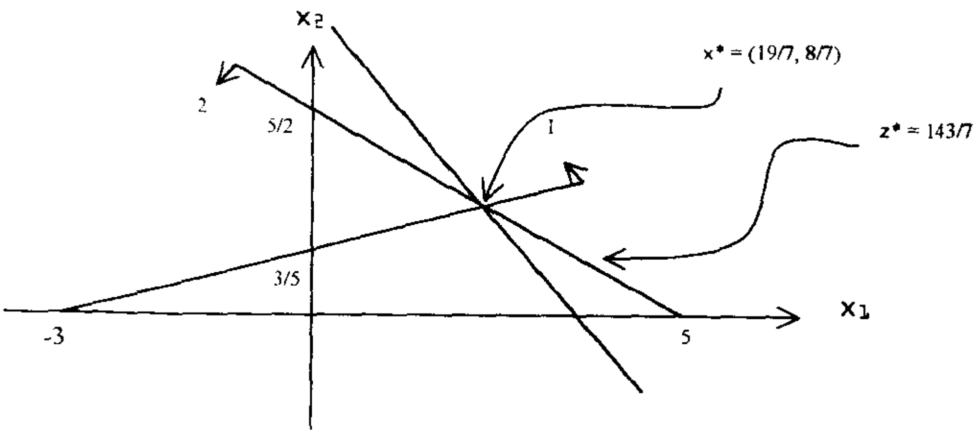
$$y_1 + y_2' \ge 5$$
$$y_1 + y_2' \le 5$$
$$2y_1 - 5y_2' \ge 6$$
$$y_1 \exists 0,\ y_2' \ge 0$$

Solución del dual por el método símplex

Básica	y_1	y_2'	h_1	h_2	h_3	a_1	a_2	Solución
a_1	1	1	-1	0	0	1	0	5
h_2	1	1	0	1	0	0	0	5
a_2	2	-5	0	0	-1	0	1	6
w'	0	0	0	0	0	-1	-1	0
w'	3	-4	-1	0	-1	0	0	11
a_1	0	(7/2)	-1	0	½	1	-½	2
h_2	0	7/2	0	1	½	0	-½	2
y_1	1	-5/2	0	0	-½	w	½	3
w'	0	7/2	-1	0	½	0	-3/2	2
y_2'	0	1	-2/7	0	1/7	2/7	-1/7	4/7
h_2	0	0	(1)	1	0	-1	0	0
y_1	1	0	-5/7	0	-1/7	5/7	1/7	31/7
w'	0	0	0	0	0	-1	-1	0
w	-5	3	0	0	0			0
w^*	0	0	-19/7	0	-8/7			143/7

Entonces concluimos que la solución del problema dual es:
$y^* = (31/7, -4/7)$, donde $y_1^*=31/7$; $y_2' = 4/7 \rightarrow y_2^* = -4/7$
$w^* = 5(31/7) - 3(4/7) = 155/7 - 12/7 = 143/7$

Solución gráfica para el problema primal



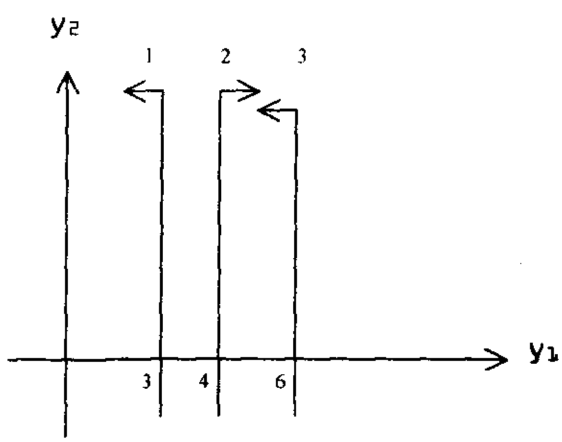
$x_1 + 2x_2 = 5$
$-x_1 + 5x_2 = 3$

$x_2^* = 8/7$
$x_1^* = 19/7$

$z^* = 5(19/7) + 6(8/7)$
$z^* = 95/7 + 48/7$
$z^* = 143/7$

5. (P) Min $z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$
sujeto a
$x_1 + x_2 \geq 10$
$x_1, x_3 \geq 0$
$x_2 \leq 0$

(D) Max $z = 10y_1$
sujeto a
$y_1 \leq 3$
$y_1 \geq 4$
$y_1 \leq 6$
$y_1 \geq 0$



Gráfica del problema dual

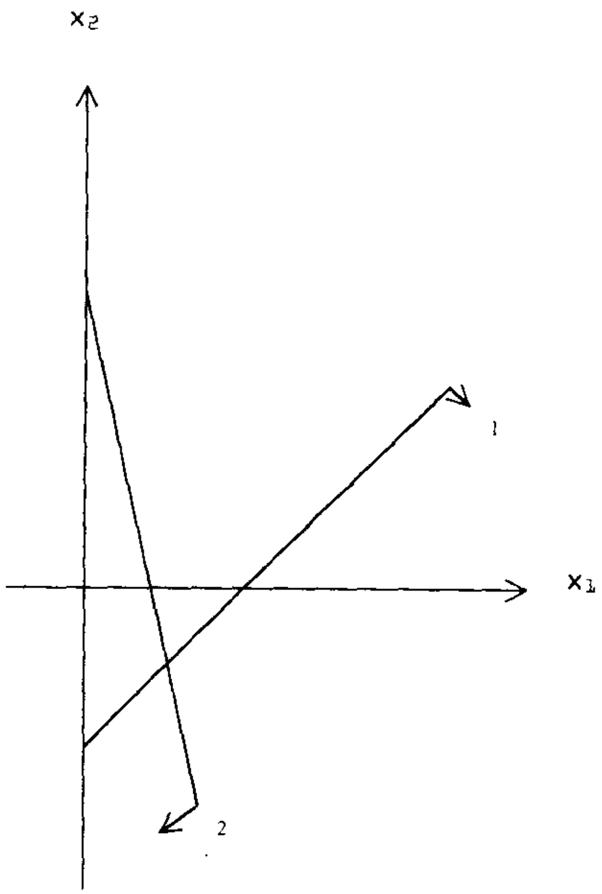
Como se puede observar el problema dual tiene región de soluciones vacía, lo que implica que el problema primal tenga función objetivo no acotada o sea no factible.

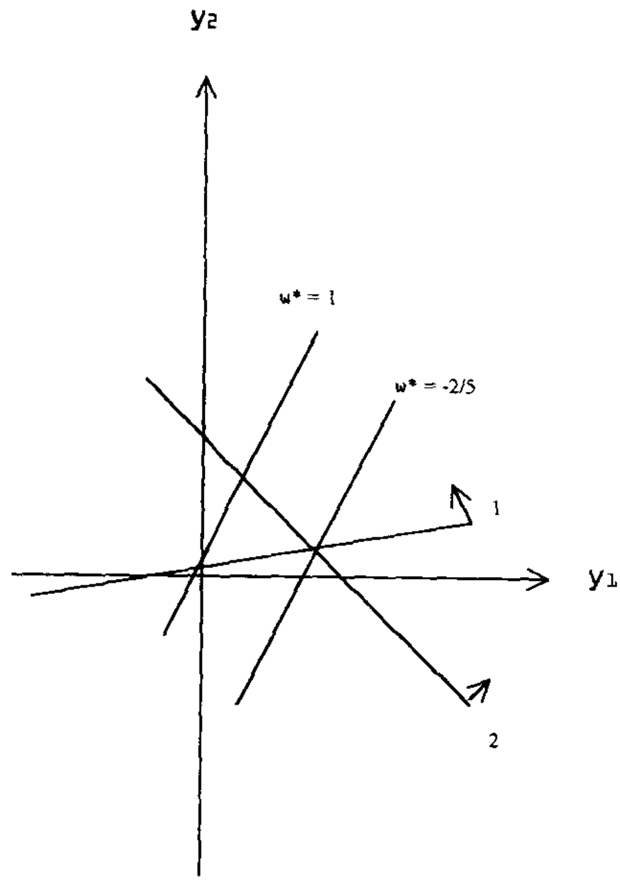
6. (P) Max $z = x_1 + 2x_2$
sujeto a

$$-x_1 + x_2 \leq -2$$
$$4x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(D) Min $w = -2y_1 + 4y_2$
sujeto a

$$-y_1 + 4y_2 \geq 1$$
$$y_1 + y_2 \geq 2$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$





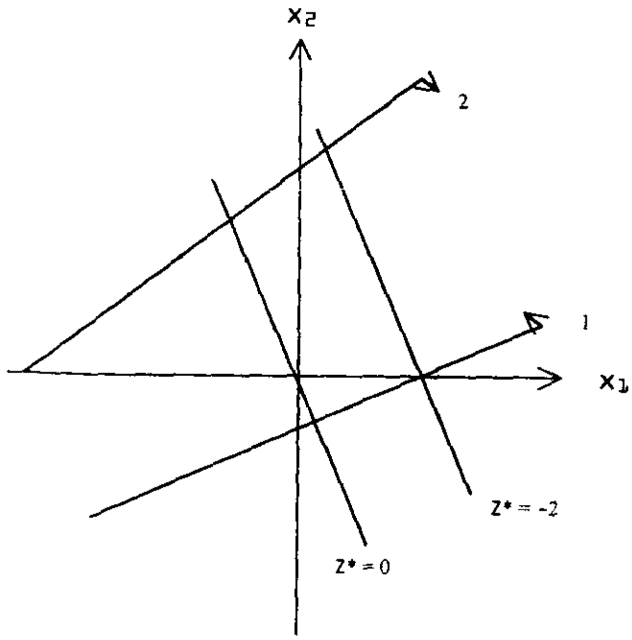
Como podemos observar el problema primal tiene una región de soluciones vacía, entonces se observa que el problema dual tiene una función objetivo no acotada.

7. (P) Min $z = -x_1 - 3x_2$
sujeto a

$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$
$$-x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(D) Max $w = 2y_1 + 4y_2$
sujeto a

$$y_1 - y_2 \leq -1$$
$$-2y_1 + y_2 \leq -3$$
$$y_1, y_2 \leq 0$$



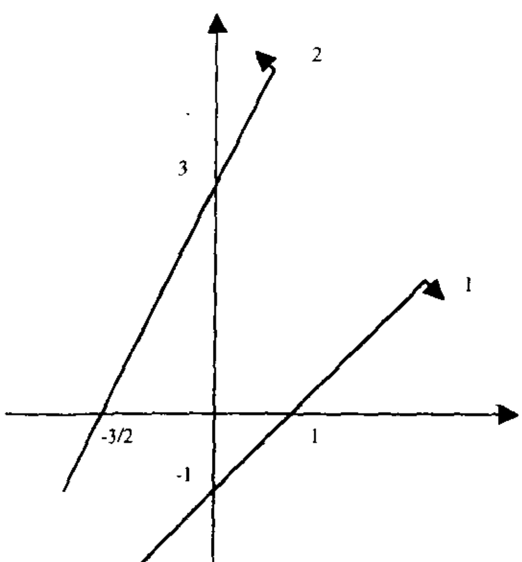
Gráfica del problema primal
Solución factible no acotada

Max $w = 2y_1 + 4y_2$
sujeto a

$$y_1 - y_2 \leq -1$$
$$-2y_1 + y_2 \leq -3$$
$$y_1, y_2 \leq 0$$
$$y_1' = -y_1$$
$$y_2' = -y_2$$
$$y_1', y_2' \geq 0$$

Max $w = -2y_1' - 4y_2'$
sujeto a

$$-y_1' + y_2' \leq -1$$
$$2y_1' - y_2' \leq -3$$
$$y_1', y_2' \geq 0$$



Gráfica del problema dual
Espacio de soluciones vacía

8. Max $z = 6x_1 + 8x_2$
sujeto a
$5x_1 + 2x_2 \leq 20$
$x_1 + 2x_2 \leq 10$
$x_1, x_2 \geq 0$

Min $w = 20y_1 + 10y_2$
sujeto a
$5y_1 + y_2 \geq 6$
$2y_1 + 2y_2 \geq 8$
$y_1, y_2 \geq 0$

Solución del primal por el método símplex

Básica	x_1	x_2	h_1	h_2	Solución
h_1	5	2	1	0	20
h_2	1	(2)	0	1	10
z	-6	-8	0	0	0
h_1	(4)	0	1	-1	10
x_2	½	1	0	½	5
z	-2	0	0	4	40
x_1	1	0	1/4	-1/4	5/2
x_2	0	1	-1/8	5/8	15/4
z*	0	0	½	7/2	45

$x_1^* = 5/2$
$x_2^* = 15/4$
$z^* = 6(5/2) + 8(15/4)$
$z^* = 45$

$y_1^* = ½$
$y_2^* = 7/2$
$w^* = 20(1/2) + 10(7/2)$
$w^* = 45$

EL PROBLEMA DE TRANSPORTE

En esta sección se presenta un tipo particularmente importante de problema de programación lineal, llamado el *problema de transporte;* recibe este nombre debido a que muchas de sus aplicaciones involucran determinar un plan de costo mínimo para transportar una mercancía desde varias fuentes a varios destinos.

El **problema de transporte** es básicamente un programa lineal que se puede resolver a través del método símplex regular. Sin embargo, su estructura especial hace posible el desarrollo de un procedimiento de solución, conocido como técnica de transporte.

Definición y aplicación del problema de transporte [5, Cap. 6]

En un sentido estricto, el problema de transporte busca determinar un plan de transporte de una mercancía de varias fuentes a varios destinos. Entre los datos del modelo se cuentan

1. Nivel de oferta en cada fuente y la cantidad de la demanda en cada destino.
2. El costo de transporte *unitario* de la mercancía de cada fuente a cada destino.

La figura 5-1 representa el problema de transporte como una red con m fuentes y n destinos. Una *fuente* o un *destino* está representado por un **nodo.** El **arco** que une una fuente y un destino representa la ruta por la cual se transporta la mercancía. La cantidad de la oferta en la fuente i es a_i y la demanda en el destino j es b_j. El costo de transporte unitario entre la fuente i y el destino j es c_{ij}.

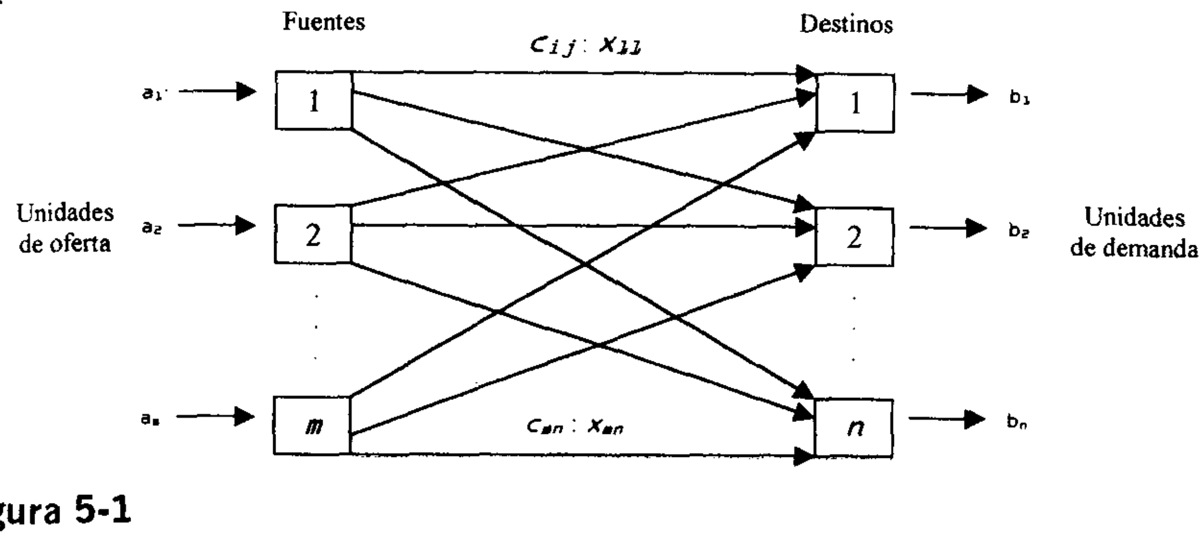


Figura 5-1

Podemos decir que la suma de los envíos desde una fuente no puede ser mayor que su oferta; y también se requiere que la suma de los envíos a un destino satisfaga su demanda.

Ejemplo 5.1 Jarritos, S.A.

Jarritos, S.A. tiene plantas en el D.F., Monterrey y Guadalajara. Sus principales centros de distribución están ubicados en Veracruz y La Paz. Las capacidades de las tres plantas durante el trimestre próximo son de 1, 000, 1, 500, y 1, 200 cajas de refrescos. Las demandas trimestrales en los dos centros de distribución son de 2, 300 y 1, 400 cajas. El costo de transporte de una caja de refrescos por tren es aproximadamente de 8 centavos por milla. El diagrama de la distancia recorrida entre las plantas y los centros de distribución es el siguiente:

	Veracruz	La Paz
D.F.	1 000	2690
Monterrey	1250	1350
Guadalajara	1275	850

El diagrama de la distancia de recorrido puede traducirse en costo por cada caja de refrescos a razón de 8 centavos por milla recorrida. Esto produce los costos siguientes (redondeados a números enteros), que representan a c_{ij} del modelo original:

		Veracruz (1)	La Paz (2)
D.F.	(1)	80	215
Monterrey	(2)	100	108
Guadalajara	(3)	102	68

Se utiliza una **tabla de transporte** para representar el modelo de transporte.

Tabla 5-1

			Destinos: Veracruz	Destinos: La Paz	Oferta
Fuentes	D.F.	(1)	x_{11} [80]	x_{12} [215]	**1000**
	Monterrey	(2)	x_{21} [100]	x_{22} [108]	**1500**
	Guadalajara	(3)	x_{31} [102]	x_{32} [68]	**1200**
Demanda			**2300**	**1400**	

Esta es una forma de matriz donde sus renglones representan las fuentes y sus columnas el destino. Los elementos de costo c_{ij} se resumen en la esquina noreste de la celda de la matriz (i, j). Por lo tanto, el modelo de Jarritos, S.A. se puede resumir como se ilustra en la tabla 5-1.

Técnica de transporte (Método de la esquina noroeste) [5, Cap. 6]

Los pasos básicos de la técnica de transporte son:

Paso 1: determínese una solución factible inicial.

Paso 2: determínese la variable que entra, que se elige entre las variables no básicas. Si todas estas variables satisfacen la condición de optimidad (del método símplex), deténgase; de lo contrario, diríjase al paso 3.

Paso 3: determínese la variable que sale (mediante el uso de la condición de factibilidad) de entre las variables de la solución básica actual; después obténgase la nueva solución básica. Regrese al paso 2.

Cuando se utiliza la tabla de transporte, una solución factible básica inicial se puede obtener fácil y directamente. Para este fin se presenta el procedimiento conocido como la regla de esquina noroeste, aplicada al ejemplo de Jarritos, S.A.

Tabla 5-2

		Destino 1	Destino 2	Oferta
Fuente	1	x_{11} [80]	x_{12} [215]	**1000**
	2	x_{21} [100]	x_{22} [108]	**1500**
	3	x_{31} [102]	x_{32} [68]	**1200**
Demanda		**2300**	**1400**	

1. x_{11} = 1000, como se agota la oferta se tacha el renglón 1. Falta satisfacer una demanda de 1300 unidades en la columna 1.
2. x_{21} = 1300, como se satisface la demanda se tacha la columna 1. La oferta excedente es de 200 unidades en el renglón 2.

3. x_{22} = 200, como se agota la oferta se tacha el renglón 2. Falta satisfacer una demanda de 1200 unidades en la columna 2.

4. x_{32} = 1200, como se satisface simultáneamente la demanda y se agota la oferta, sólo se tacha el renglón 3 o la columna 2. Así, sólo uno de los dos queda sin tachar y el proceso llega a su fin.

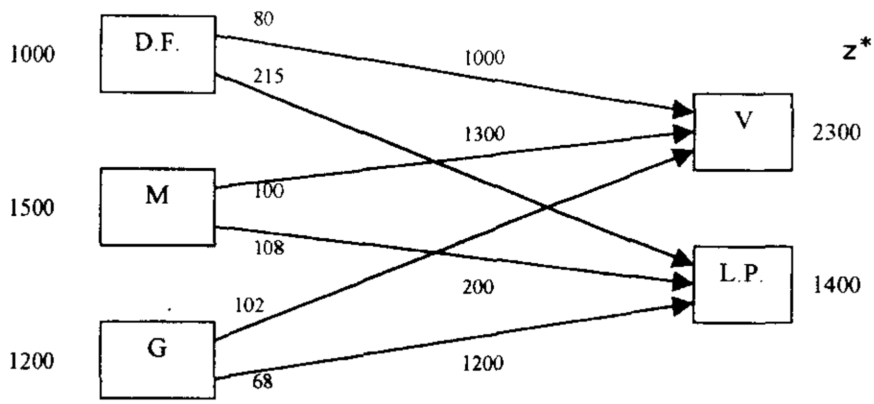
La solución básica inicial resultante se presenta en la tabla 5-3. Las variables *básicas* son x_{11} = 1000, x_{21} = 1300, x_{22} = 200 y x_{32} = 1200. Las variables restantes son *no básicas*. El costo del transporte asociado es

$$1000 * 80 + 1300 * 100 + 200 * 108 + 1200 * 68 = \$\ 313,\ 200.$$

Tabla 5-3

	1	2	
1	**1000**		**1000**
2	**1300**	**200**	**1500**
3		**1200**	**1200**
	2300	**1400**	

Otra forma para representar este problema de transporte es de la siguiente manera:



z^* = 1000*80 + 1300*100 +
200*108 + 1200*68
= $313,200

Ejemplo 5-2

Tres refinerías con capacidades diarias máximas de 15, 25 y 5 millones de gasolina reparten a cuatro áreas de distribución con demandas diarias de 5, 15, 15 y 10 millones de galones del combustible. La gasolina se transporta a las cuatro áreas de distribución a través de una red de tubería. El costo del transporte se calcula con base en la longitud de la tubería aproximadamente a 1 centavo por 100 galones por kilómetro recorrido.

		Área de distribución			
		1	**2**	**3**	**4**
Refinería	**1**	10	0	20	11
	2	12	7	9	20
	3	0	14	16	18

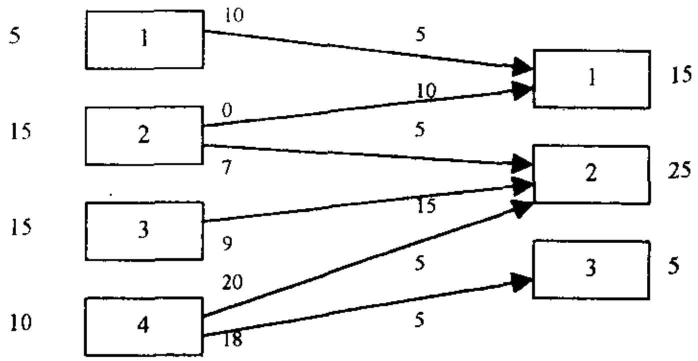
Resolviendo por el método de la esquina noroeste, tenemos como primer solución:

Tabla 5-4

	1	2	3	4	
1	**5** (10)	**10** (0)	(20)	(11)	**15**
2	(12)	**5** (7)	**15** (9)	**5** (20)	**25**
3	(0)	(14)	(16)	**5** (18)	**5**
	5	**15**	**15**	**10**	

Con un costo inicial de 5 * 10 + 10 * 0 + 5 * 7 + 15 * 9 + 5 * 20 + 5 * 18 = 410

Viéndolo de la otra forma, tenemos que



z* = 5*10 + 10*0 + 5*7 +
15*9 + 5*20 + 5*18
= 418

Construcción de un ciclo [5, Cap. 6]

Este paso es equivalente a aplicar las condiciones de optimidad y factibilidad del método símplex.

Con el fin de determinar la razón mínima, se construye un *ciclo* para la variable actual que entra. El ciclo empieza y termina en una variable no básica designada. Este consta de los segmentos *sucesivos* horizontales y verticales (conectados) cuyos puntos extremos deben ser variables básicas. Se toman en cuenta los costos de todas las variables dentro del ciclo para obtener la variable que entra.

$c_{13} = 20 - 9 + 7 = 18$
$c_{14} = 11 - 20 + 7 = -2$
$c_{21} = 12 - 7 - 10 = -5$
$c_{31} = -18 + 20 - 7 - 10 = -15$
$c_{32} = 14 - 18 + 20 - 7 = 9$

La tabla 5-5 ilustra el ciclo para la variable que entra x_{31}, ya que fue con la que más se disminuyó el costo de transporte; cuando todos los ciclos son positivos, se puede decir que se encontró con la ruta óptima. Este ciclo se puede definir en términos de las variables básicas como $x_{31} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{24} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31}$. *Es irrelevante si el ciclo es en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario.*

Tabla 5-5

	1	2	3	4	
1	[10] **5** ⊖	[0] **10** ⊕	[20]	[11]	**15**
2	[12]	[7] **5** ⊖	[9] **15**	[20] **5** ⊕	**25**
3	[0] x_{31} ⊕	[14]	[16]	[18] **5** ⊖	**5**

La variable que sale se selecciona de entre las variables de esquina del ciclo que disminuirán cuando la variable que entra, x_{31}, aumente arriba del nivel cero. Estas situaciones se indican en la tabla 5-5 a través de las variables contenidas en el cuadro etiquetado con los signos de menos. De la tabla 5-5, x_{34}, x_{22} y x_{11} son las variables básicas que disminuirán cuando aumente x_{31}. Después se selecciona la variable que sale como la que tiene el valor *más pequeño*, ya que será la primera en llegar al valor cero y cualquier disminución adicional la volverá negativa. En este ejemplo las tres variables negativas tienen el mismo valor (=5) por lo que se puede escoger cualquiera de las tres como la variable que sale. Supóngase que x_{34} se toma como la variable que sale; después se incrementa en 5 el valor de x_{31} y los valores de las variables *de esquina* (básicas) se ajustan según este incremento. La nueva solución se presenta en la tabla 5-6. Su nuevo costo es 0 * 10 + 15 * 0 + 0 * 7 + 15 * 9 + 10 * 20 + 5 * 0 = $335.

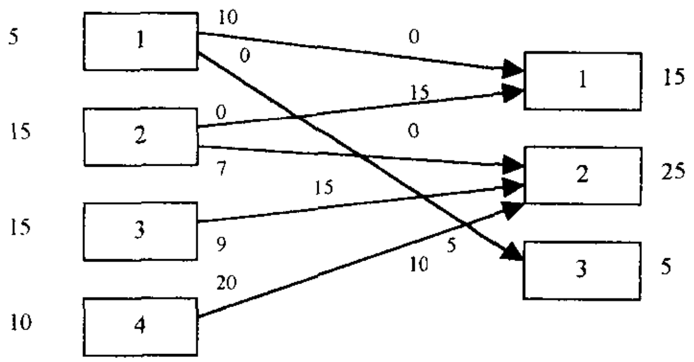
Este costo difiere del asociado con la solución inicial de la tabla 5-4 en 410 – 335 = \$75, que es igual al número de unidades asignadas a x_{31} (=5) por c_{31} (=15).

La solución básica de la tabla 5-6 es degenerada, ya que las variables básicas x_{11} y x_{22} son cero. Sin embargo, la degeneración no requiere precauciones especiales y las variables básicas cero se consideran como cualquier otra variable básica positiva.

Tabla 5-6

	1	2	3	4	
1	**0** [10]	**15** [0]	[20]	[11]	**15**
2	[12]	**0** [7]	**15** [9]	**10** [20]	**25**
3	**5** [0]	[14]	[16]	[18]	**5**
	5	**15**	**15**	**10**	

Viendo esta iteración de la otra forma, tenemos



$z^* = 0*10 + 5*0 + 15*0 +$
$0*7 + 15*9 + 10*20$
$= 335$

Ahora se revisa la optimidad de la nueva solución básica de la tabla 5-6 calculando los *nuevos* costos.

$c_{13} = 20 - 9 + 7 = 18$
$c_{14} = 11 - 20 + 7 = -2$
$c_{21} = 12 - 7 - 10 = -5$
$c_{32} = 14 + 10 = 24$
$c_{33} = 16 - 9 + 7 + 10 = 34$
$c_{34} = 18 - 20 + 7 + 10 = 15$

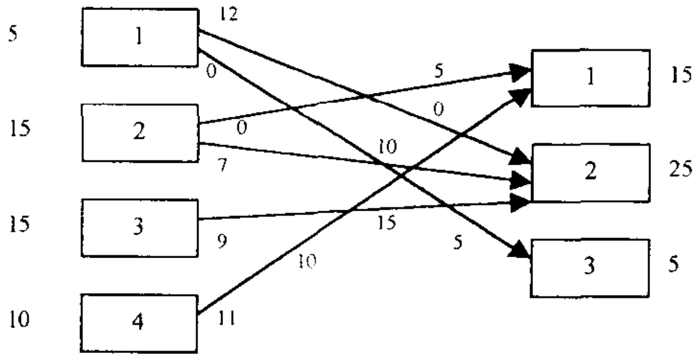
Como se puede observar la nueva variable entrante es x_{21} ya que es la que tiene mayor costo negativo, con lo cual disminuye aún más el costo de la iteración anterior.

Tabla 5-7

	1	2	3	4	
1	10 **0** ⊖	0 **15** ⊕	20 -18	11 +2	**15**
2	12 x_{21} +5 ⊕	7 **0** ⊖	9 **15**	20 **10**	**25**
3	0 **5**	14 -24	16 -24	18 -15	**5**
	5	**15**	**15**	**10**	

La tabla 5-8 muestra la variable que entra y la que sale como x_{14} y x_{24}, respectivamente. Al efectuar este cambio en la tabla 5-8, se obtiene la nueva solución de la tabla 5-9. Como todos los costos c_{ij} de la tabla 5-9 son *positivos*, se ha llegado a la solución óptima.

Ahora se muestra la tercera iteración que corresponde a la tabla 5-8.



$$z^* = 0*12 + 5*0 + 5*0 + 10*7 + 15*9 + 10*11 = 315$$

Tabla 5-8

	1	2	3	4	
$u_i = 0$	10 -5	0 **15** ⊖	20 -18	11 x_{14} +2 ⊕	**15**
$u_i = 7$	12 **0**	7 **0** ⊕	9 **15**	20 **10** ⊖	**25**
$u_i = -5$	0 **5**	14 -24	16 -24	18 -15	**5**
	5	**15**	**15**	**10**	

La solución óptima se resume como sigue. Envíense cinco unidades de (la fuente) 1 a (el destino) 2 a 5 * 0 = $ 0, 10 unidades de 1 a 4 a 10 * 11 = $ 110, 10 unidades de 2 a 2 a 10 * 7 = $ 70, 15 unidades de 2 a 3 a 15 * 9 = $ 135 y 5 unidades de 3 a 1 a 5 * 0 = $ 0. El costo total del transporte del problema es $ 315.

Tabla 5-9

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 11$	
$_i = 0$	10 -5	0 **5**	20 -18	11 **10**	**15**
$u_i = 7$	12 **0**	7 **10**	9 **15**	20 -2	**25**
$u_i = -5$	0 **5**	14 -19	16 -19	18 -12	**5**
	5	**15**	**15**	**10**	

El método de la esquina noroeste que se ilustró anteriormente no produce necesariamente una "buena" solución inicial para el modelo de transporte. A continuación se ilustra un procedimiento que determina la solución inicial a través de la selección de las rutas "económicas" del modelo.

Método de costo mínimo (casilla de costo mínimo) [5, Cap. 6]

El procedimiento consiste en asignar el valor más grande posible a la variable con el menor costo *unitario* de toda la tabla. (Los empates se rompen en forma arbitraria). Se tacha el renglón o columna satisfecho. (Como en el método de la *esquina noroeste,* si una columna y un renglón se satisfacen de manera simultánea, sólo uno puede tacharse). Después de ajustar la oferta y la demanda de todos los renglones y columnas *no* tachados, se repite el proceso asignando el valor más grande posible a la variable con el costo unitario no tachado más pequeño. El procedimiento está completo cuando queda exactamente un renglón o bien una columna sin tachar.

El problema de transporte de la tabla 5-4 se utiliza una vez más para ilustrar la aplicación del método de la casilla de costo mínimo. La tabla 5-10 presenta la solución inicial resultante. Los pasos de la solución son los siguientes, x_{12} y x_{31} son las variables asociadas con los menores costos unitarios ($c_{12} = c_{31} = 0$). Rompiendo el empate en forma arbitraria, se selecciona x_{31}. Las unidades de oferta y demanda asociadas producen $x_{31} = 5$, lo que satisface la columna 1 y el renglón 3. Tachando la columna 1, la oferta que queda en el renglón 3 es cero.

Después, x_{12} tiene el menor costo unitario no tachado. Por lo tanto x_{12} = 15 satisface el renglón 1 y la columna 2. Tachando el renglón 1, la demanda en la columna 2 es cero. Y así sucesivamente con el resto de las casillas.

El costo total asociado con esta solución es 15 * 0 + 0 * 7 + 15 * 9 + 10 * 20 + 5 * 0 + 0 * 18 = $ 335. Ahora se analizarán los costos igual que en las tablas anteriores.

Tabla 5-10

	1	2	3	4	
~~1~~	10	**15** 0	20	11	~~**15**~~
2	12	**0** 7	**15** 9	**10** 20	**25**
~~3~~	**5** 0	14	16	**0** 18	~~**5**~~
	5	**15**	**15**	**10**	

c_{11} = 10 + 14 = 24
c_{13} = 20 – 9 + 7 = 18
c_{14} = 11 – 20 + 7 = -2
c_{21} = 12 –7 + 14 = 19
c_{32} = 14 – 18 + 20 - 7 = 9
c_{33} = 16 – 9 + 7 – 14 = 0

La tabla resultante de que la variable x_{14} entre es

	1	2	3	4	
1	10	**5** 0	20	**10** 11	**15**
2	12	**10** 7	**15** 9	**0** 20	**25**
3	**5** 0	14	16	18	**5**
	5	**15**	**15**	**10**	

Con un costo de 5 * 0 + 10 * 11 + 10 * 7 + 15 * 9 + 0 * 20 + 5 * 0 = $ 315

Como se ve el método de la casilla de costo mínimo es bastante rápido y se llegó a la solución con sólo dos iteraciones.

Ejercicios

1. Se envían automóviles en un camión de tres centros de distribución a cinco distribuidores.

El costo de envío está basado en la distancia recorrida entre las fuentes y destinos. La tabla que sigue hace un resumen de las distancias de recorrido entre los centros de distribución y los distribuidores y también las cifras mensuales de oferta y demanda calculadas en *números* de automóviles.

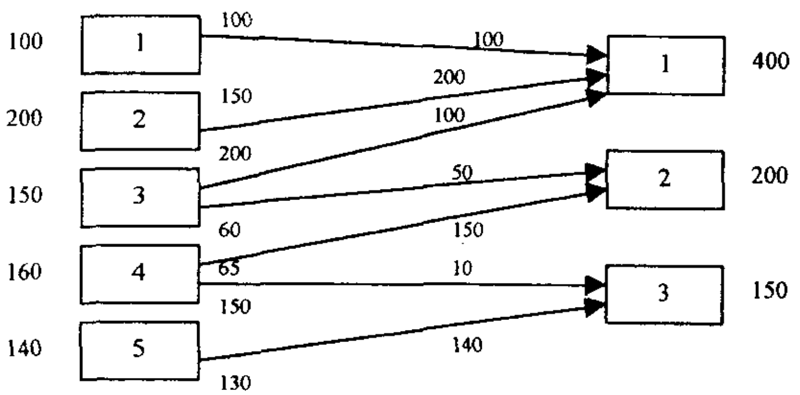
	1	2	3	4	5	
1	100	150	200	140	35	**400**
2	50	70	60	65	80	**200**
3	40	90	100	150	130	**150**
	100	**200**	**150**	**160**	**140**	

Método de la casilla noroeste

Primera iteración

	1	2	3	4	5	
1	**100** [100]	**200** [150]	**100** [200]	[140]	[35]	**400**
2	[50]	[70]	**50** [60]	**150** [65]	[80]	**200**
3	[40]	[90]	[100]	**10** [150]	**140** [130]	**150**
	100	**200**	**150**	**160**	**140**	

Costo total = 100*100 + 200*150 + 100*200 + 50*60 + 150*65 + 10*150 + 140*130 = $92,450



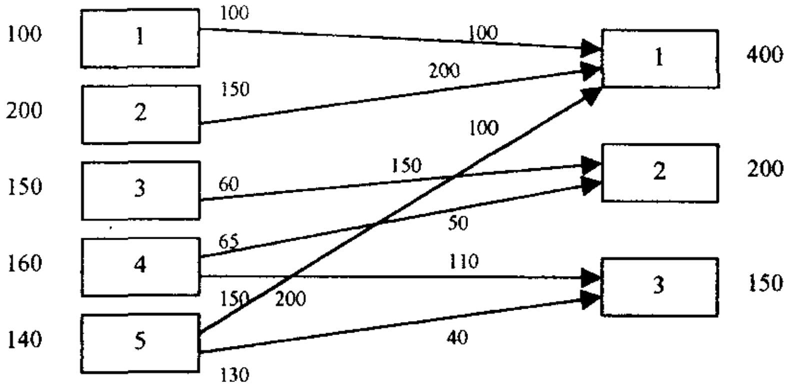
Realizando las operaciones necesarias y desarrollando los ciclos, tenemos que:

c_{14} = 140-65+60-200 = -65
c_{15} = 35-130+150-65+60-200 = -150 (variable que entra)
c_{21} = 50-100+200-60 = 90
c_{22} = 70-60+200-150 = 60
c_{25} = 80-130+150-65 = 35
c_{31} = 40-150+65-60+200-100 = -5
c_{32} = 90-150+65-60+200-100 = -5
c_{33} = 100-60+65-150 = -45

Segunda iteración

	1	2	3	4	5	
1	**100** 100	**200** 150	200	140	**100** 35	**400**
2	50	70	**150** 60	**50** 65	80	**200**
3	40	90	100	**110** 150	**40** 130	**150**
	100	**200**	**150**	**160**	**140**	

Costo total = 100*100 + 200*150 + 150*60 + 50*65 + 110*150 + 40*130 = $ 77,450



Realizando las operaciones tenemos que:

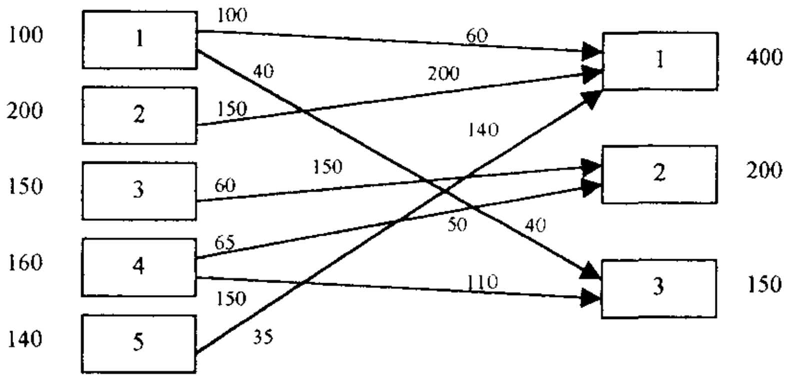
c_{13} = 200-60+65-150+130-35 = 150
c_{14} = 140-150+130-35 = 85
c_{21} = 50-65+150-130+35-100 = -60
c_{22} = 70-65+150-130+35-150 = -90
c_{25} = 80-130+150-65 = 35

c_{31} = 40-100+35-130 = -155 (variable que entra)
c_{32} = 90-130+35-150 = -155
c_{33} = 100-60+65-150 = -45

Tercera iteración

	1	2	3	4	5	
1	**60** 100	**200** 150	200	140	**140** 35	**400**
2	50	70	**150** 60	**50** 65	80	**200**
3	**40** 40	90	100	**110** 150	130	**150**
	100	**200**	**150**	**160**	**140**	

Costo total = 60*100 + 200*150 + 150*60 + 50*65 + 40*40 + 110*50 = $ 71,250



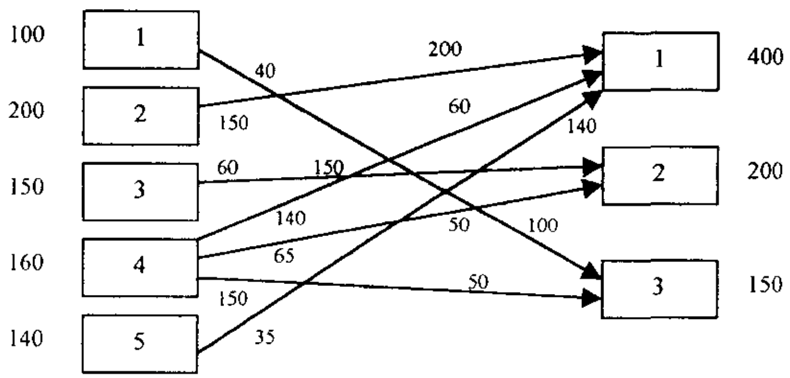
Realizando las operaciones tenemos que:

c_{13} = 200-60+65-150+40-100 = -5
c_{14} = 140-150+40-100 = -70 (variable que entra)
c_{21} = 50-65+150-40 = 95
c_{22} = 70-65+150-40+100-150 = 65
c_{25} = 80-65+150-40+100-35 = 190
c_{32} = 90-40+100-150 = 0
c_{33} = 100-150+65-60 = -45
c_{35} = 130-40+100-35 = 155

Cuarta iteración

	1	2	3	4	5	
1	100	**200** 150	200	**60** 140	**140** 35	**400**
2	50	70	**150** 60	**50** 65	80	**200**
3	**100** 40	90	100	**50** 150	130	**150**
	100	**200**	**150**	**160**	**140**	

Costo total = 200*150 + 60*40 + 140*35 + 150*60 + 50*65 + 100*40 = \$ 67,050



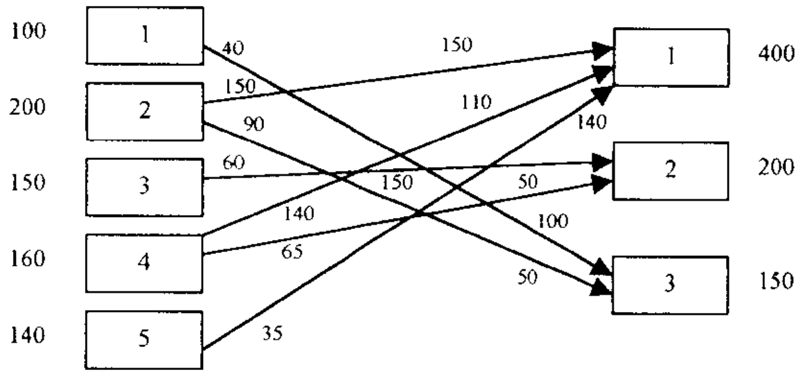
Realizando las operaciones tenemos que:

c_{11} = 100-140+150-40 = 70
c_{13} = 200-60+65-140 = 65
c_{21} = 50-65+150-40 = 95
c_{22} = 70-65+140-150 = -5
c_{25} = 80-65+140-35 = 120
c_{32} = 90-150+140-150 = -70 (variable que entra)
c_{33} = 100-150+65-60 = -45
c_{35} = 130-35+140-150 = 85

Quinta iteración

	1	2	3	4	5	
1	100	**150** 150	200	**110** 140	**140** 35	**400**
2	50	70	**150** 60	**50** 65	80	**200**
3	**100** 40	**50** 90	100	150	130	**150**
	100	**200**	**150**	**160**	**140**	

Costo total = 150*150 + 110*140 + 140*35 + 150*60 + 50*65 + 100*40 + 50*90 = $ 63,550



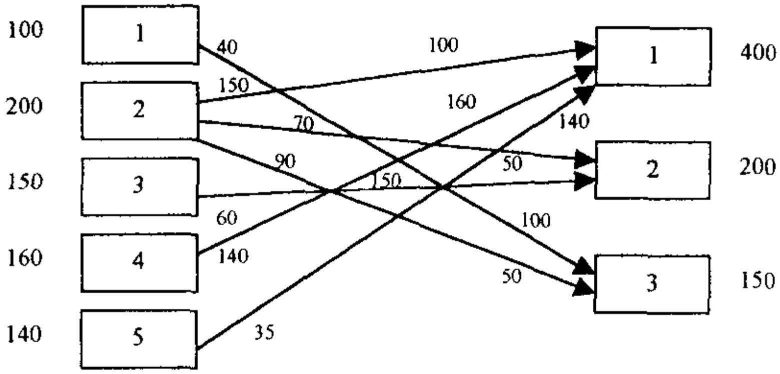
Realizando las operaciones necesarias, tenemos que:

c_{11} = 100-150+90-40 = 0
c_{13} = 200-140+65-60 = 65
c_{21} = 50-40+90-150+140-65 = 25
c_{22} = 70-65+140-150 = -5 (variable que entra)
c_{25} = 80-35+140-65 = 120
c_{33} = 100-90+150-140+65-60 = 25
c_{34} = 150-140+150-90 = 70
c_{35} = 150-35+150-90 = 175

Sexta iteración

	1	2	3	4	5	
1	100	**100** 150	200	**160** 140	**140** 35	**400**
2	50	**50** 70	**150** 60	65	80	**200**
3	**100** 40	**50** 90	100	150	130	**150**
	100	**200**	**150**	**160**	**140**	

Costo total = 100*150 + 160*140 + 140*35 + 50*70 + 150*60 + 100*40 + 50*90 = $ 63,300



Realizando las operaciones se da que:

c_{11} = 100-150+90-40 = 0
c_{13} = 200-60+70-150 = 60
c_{21} = 50-70+90-40 = 30
c_{24} = 65-70+150-140 = 5
c_{25} = 80-70+150-35 = 125
c_{33} = 100-90+70-60 = 20
c_{34} = 150-90+150-140 = 70
c_{35} = 150-90+150-35 = 175

Como todos los c_{ij} > 0, ya no existe alguna variable no básica que disminuya el costo del transporte, entonces el costo del transporte es de $63,300.

Para llegar a la solución óptima tuvieron que pasar 6 ciclos, lo cual implica mucho tiempo. Con el otro método el trabajo se simplifica.

2. En el problema de transporte que sigue, la demanda total excede la oferta total. Supóngase que los costos de penalización por unidad de demanda insatisfecha son 5, 3 y 2 para los destinos 1, 2 y 3. Determínese la solución óptima.

	1	2	3	
1	5	1	7	**10**
2	6	4	6	**80**
3	3	2	5	**15**
	75	**20**	**50**	

Casilla de costo mínimo

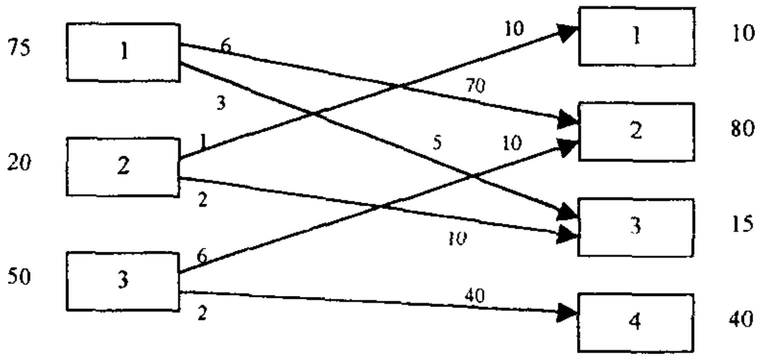
Antes de resolver el problema, se debe equilibrar aumentando una fuente para satisfacer la demanda requerida.

	1	2	3	
1	5	1	7	**10**
2	6	4	6	**80**
3	3	2	5	**15**
4	5	3	2	**40**
	75	**20**	**50**	

Ahora sí, con la tabla ya equilibrada se procede a resolver el problema.

	1	**2**	**3**	
1	5	**10** 1	7	**10**
2	**70** 6	4	**10** 6	**80**
3	**5** 3	**10** 2	5	**15**
4	5	3	**40** 2	**40**
	75	**20**	**50**	

Costo total = 10*1 + 70*6 + 10*6 + 5*3 + 10*2 + 40*2 = $ 605

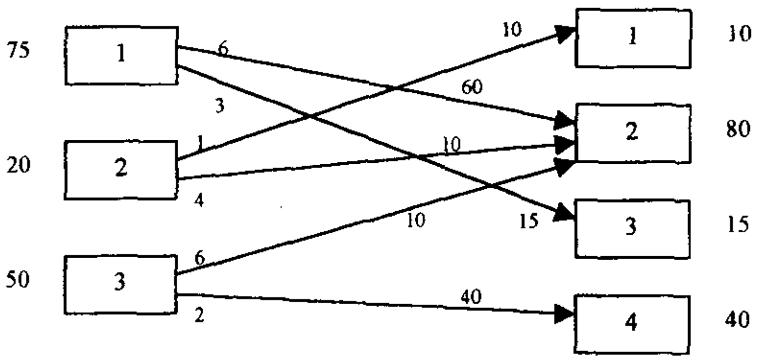


Realizando las operaciones

$c_{11} = 5-11+2-3 = 3$
$c_{13} = 7-6+6-3+2-1 = 5$
$c_{22} = 4-2+3-6 = -1$
$c_{33} = 5-6+4-2 = 1$
$c_{41} = 5-2+6-6 = 3$
$c_{42} = 3-2+6-4 = 3$

	1	2	3	
1	5	**10** 1	7	**10**
2	**60** 6	**10** 4	**10** 6	**80**
3	**15** 3	2	5	**15**
4	5	3	**40** 2	**40**
	75	**20**	**50**	

Costo total = 10*1 + 60*6 + 10*4 + 10*6 + 15*3 + 40*2 = $ 595



Se realizan las operaciones y

$c_{11} = 5-1+4-6 = 2$
$c_{13} = 7-6+4-1 = 4$
$c_{32} = 2-3+6-4 = 1$
$c_{33} = 5-6+6-3 = 2$
$c_{41} = 5-6+6-2 = 3$
$c_{42} = 3-4+6-2 = 3$

Como se ve, todos los $c_{ij} > 0$, entonces se concluye que se ha encontrado la solución óptima con un costo total de $ 595.

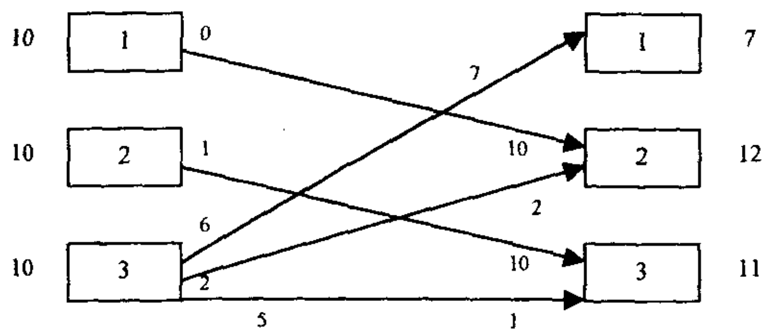
3. Resolver el siguiente modelo.

	1	2	3	
1	1	2	6	**7**
2	0	4	2	**12**
3	3	1	5	**11**
	10	**10**	**10**	

Casilla de costo mínimo

	1	2	3	
1	1	2	**7** 6	**7**
2	**10** 0	4	**2** 2	**12**
3	3	**10** 1	**1** 5	**11**
	10	**10**	**10**	

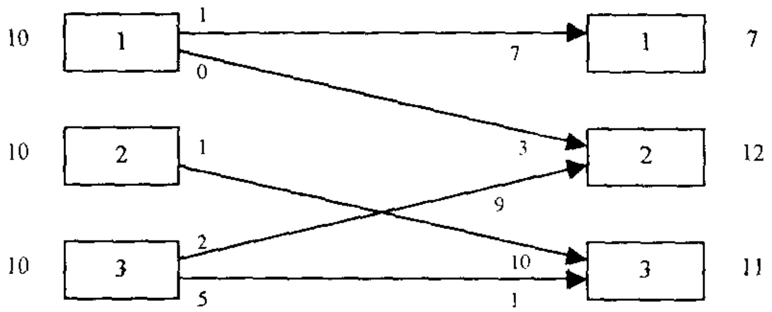
Costo total = 7*6 + 10*0 + 2*2 + 10*1 + 1*5 = $ 61



$c_{11} = 1\text{-}6\text{+}2\text{-}0 = -3$
$c_{12} = 2\text{-}1\text{+}5\text{-}6 = 0$
$c_{22} = 4\text{-}1\text{+}5\text{-}2 = 6$
$c_{31} = 3\text{-}5\text{+}2\text{-}0 = 0$

	1	2	3	
	7 1	2	6	**7**
2	**3** 0	4	**9** 2	**12**
3	3	**10** 1	**1** 5	**11**
	10	**10**	**10**	

Costo total = 7*1 + 3*0 + 9*2 + 10*1 + 1*5 = $ 40



Se realizan las operaciones

$c_{12} = 2\text{-}1\text{+}5\text{-}2\text{+}0\text{-}1 = 3$
$c_{13} = 6\text{-}2\text{+}0\text{-}1 = 3$
$c_{22} = 4\text{-}2\text{+}5\text{-}1 = 6$
$c_{31} = 3\text{-}5\text{+}2\text{-}0 = 0$

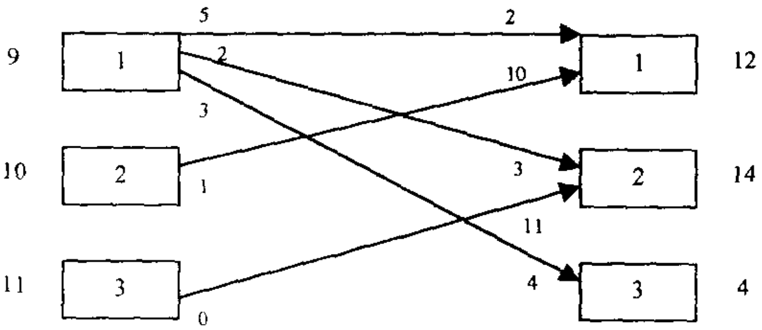
4. Resolver el siguiente modelo

	1	2	3	
1	5	1	8	**12**
2	2	4	0	**14**
3	3	6	7	**4**
	9	**10**	**11**	

Casilla de costo mínimo

	1	2	3	
	2 (5)	**10** (1)	(8)	**12**
2	**3** (2)	(4)	**11** (0)	**14**
3	**4** (3)	(6)	(7)	**4**
	9	**10**	**11**	

Costo total = 2*5 + 10*1 + 3*2 + 11*0 + 4*3 = $ 38



Se realizaron las operaciones necesarias para obtener

c_{11} = 8-0+2-5 = 5
c_{22} = 4-1+5-2 = 6
c_{32} = 6-3+2-4 = 1
c_{33} = 7-0+2-3 = 6

Ya que todas las $c_{ij} > 0$ el costo del transporte total es $ 38.

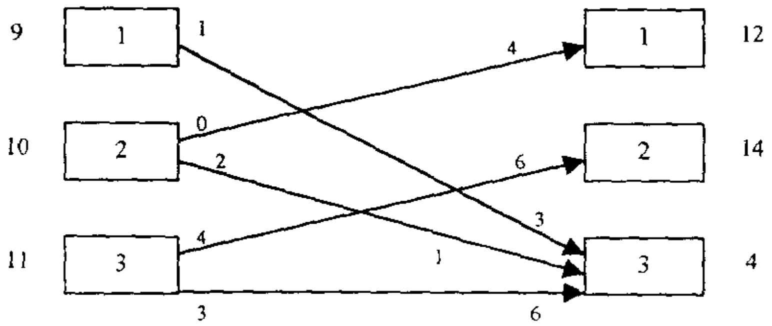
5. Resolver este modelo a través de la técnica de transporte.

	1	2	3	
1	1	0	2	**4**
2	3	5	4	**6**
3	1	2	3	**10**
	3	**5**	**12**	

Casilla de costo mínimo

	1	2	3	
1	[1]	**4** [0]	[2]	**4**
2	[3]	[5]	**6** [4]	**6**
3	**3** [1]	**1** [2]	**6** [3]	**10**
	3	**5**	**12**	

Costo total = 4*0 + 6*4 + 3*1 + 1*2 + 6*3 = $ 47



Después de los cálculos efectuados, tenemos que:

$c_{11} = 1-0+2-1 = 2$
$c_{13} = 2-3+2-0 = 1$
$c_{21} = 3-4+3-1 = 1$
$c_{22} = 5-4+3-2 = 2$

Como todos los $c_{ij} > 0$, esta es la solución óptima.

TEORÍA DE REDES

Una red consta de un conjunto de nodos conectados por arcos o aristas. Asociada a cada arista se tiene un flujo de algún tipo. Por ejemplo, en una red de transporte, las ciudades representan nodos y los caminos representan aristas, mientras que el tráfico representa el flujo en las aristas.

Se puede observar que el modelo de transporte es sin duda uno de los muchos problemas que se pueden representar y resolver como una red. Para mayor especificación se consideran los casos siguientes:

a. Determinación del árbol de peso mínimo de una gráfica que representa varias rutas para llegar a cualquier punto, no importando el lugar donde empecemos ni a donde queramos llegar.

b. Diseño de una red de tubería de gas natural mar adentro, que conecta fuentes del Golfo de México con un punto de entrega en tierra, con el objetivo de minimizar el costo de construcción del conducto.

c. Determinación de la capacidad anual máxima en toneladas de una red de conductos de gasolina, que enlaza las gasolineras de la ciudad de Coatzacoalcos con las plantas generadoras del estado de Tabasco.

Estos problemas tipo pueden resolverse a través de uno de los siguientes algoritmos o modelos:

1. Algoritmo de Kruskal (APM) (Algoritmo glotón)

2. Algoritmo de Prim (APM)

3. Algoritmo de Bellman (Gráfica sin ciclos dirigidos)

4. Algoritmo de Dijkstra (Gráficas cíclicas)

5. Algoritmo de Ford y Fulkerson (Redes de flujo máximo)

Los casos citados tienen que ver con la determinación de distancias y flujo de material en un sentido literal. Existen muchas aplicaciones donde las variables del problema pueden representar otras propiedades como flujo de dinero.

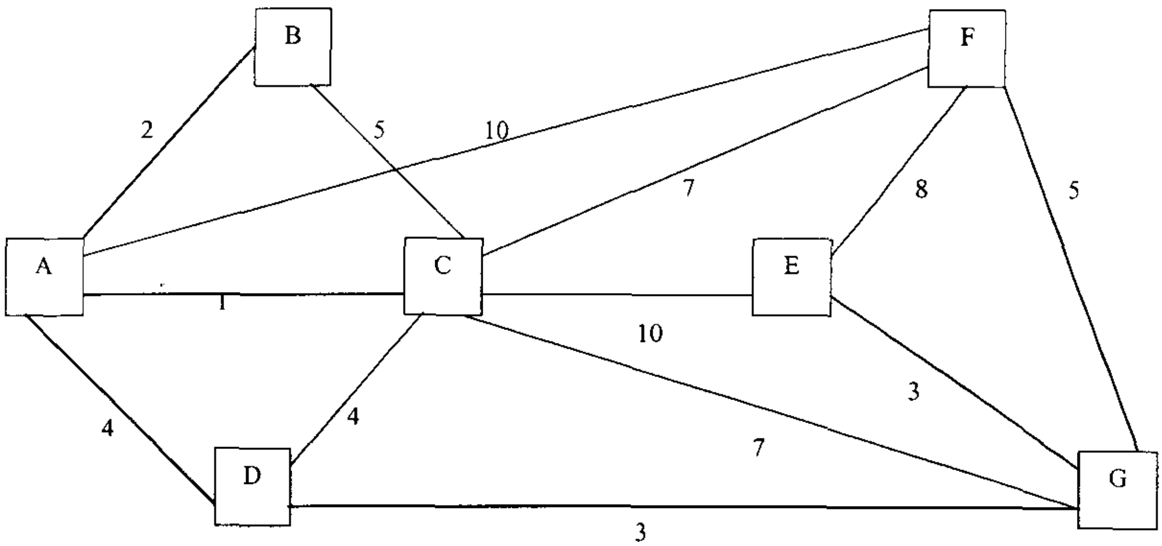
Algoritmo de Kruskal (Algoritmo glotón)

Paso 0	Formar un orden en las aristas de la red (gráfica), $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tal que $$c(a_i) \le c(a_{i+1}) \qquad i = 1, \ldots, m-1$$ $$(m = \lvert A \rvert)$$ $j = 0, k = 0, A_k = \phi$
Paso 1	$j = j + 1$
Paso 2	Si $A_k \cup \{a_j\}$ forma un ciclo, ir al paso 3; los empates se rompen arbitrariamente. *Si* $A_k \cup \{a_j\}$ *no forma un ciclo, entonces* $$A_k = A_k \cup \{a_j\}$$ $$k = k + 1$$
Paso 3	Si $k = n - 1$, alto; A_k es el APM En caso contrario, ir al paso 1.

Ejercicios

En estos ejemplos hay muchos empates en los costos de las aristas, por lo que podemos obtener diferentes soluciones, siendo todas APM; esto es consecuencia de la libertad que da el Algoritmo de Kruskal para ordenar las aristas.

1. Encontrar el APM en la siguiente red, por medio del método de Kruskal.



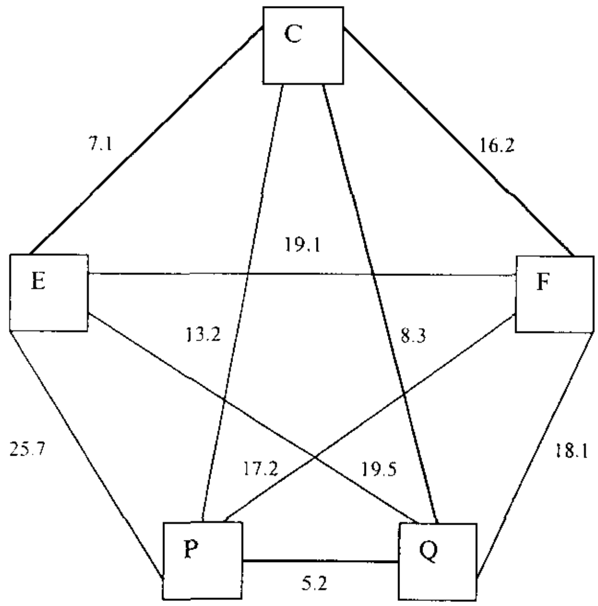
AC = 1	ra al APM
AB = 2	Sí
DG = 3	Sí
FG = 3	Sí
AD = 4	Sí
CD = 4	No entra porque completa un ciclo

BC = 5	No
EG = 5	Sí
CE = 7	No
CG = 7	No
EF = 8	No
AE = 10	No
CF = 10	No

$A_k = \{AC, AB, DG, FG, AD, EG\}$
$\# A_k = n - 1 = 6$

P = 18

2. Encontrar el APM en la siguiente red.

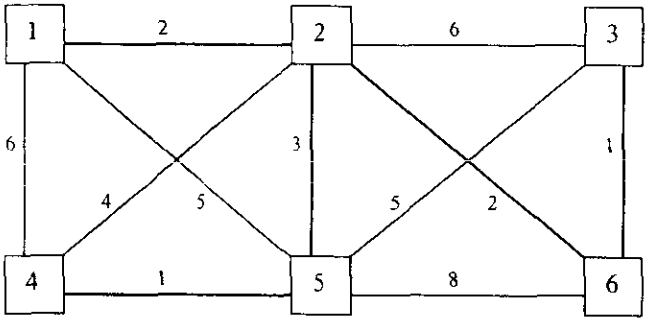


PQ = 5.2	Sí entra al APM	FP = 17.2	No
CE = 7.1	Sí	FQ = 18.1	No
CQ = 8.3	Sí	EF = 19.1	No
CP = 13.2	No	EQ = 19.5	No
CF = 16.2	Sí	EP = 25.7	No

$A_k = \{PQ, CE, CQ, CF\}$
$\# A_k = n - 1 = 4$

P = 36.8

3. Sacar el APM

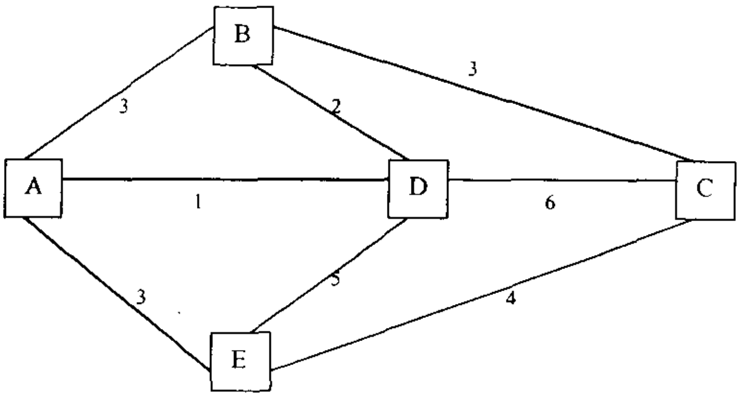


(4,5) = 1	Sí entra
(3,6) = 1	Sí
(1,2) = 2	Sí
(2,6) = 2	Sí
(2,5) = 3	Sí
(2,4) = 4	No
(1,5) = 5	No
(3,5) = 5	No
(1,4) = 6	No
(2,3) = 6	No
(5,6) = 8	No

$A_k = \{(4,5), (3,6), (1,2), (2,6), (2,5)\}$
$\# A_k = n - 1 = 5$

P = 9

4. Obtener el APM de

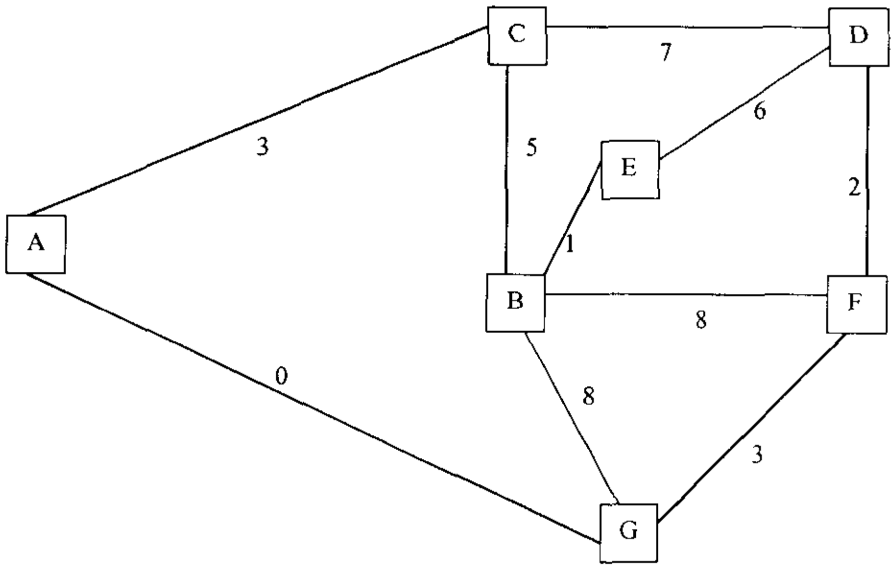


A,D = 1	Sí entra
B,D = 2	Sí
A,B = 3	No
B,C = 3	Sí
A,E = 3	Sí
C,E = 4	No
D,E = 5	No
C,D = 6	No

A_k = {AD, BD, AB, BC, AE, CE, DE, CD}
$A_k = n - 1 = 4$

P = 9

5. Obtener el APM de



AG = 0	Sí entra
BE = 1	Sí
DF = 2	Sí
FG = 3	Sí
AC = 3	Sí
CB = 5	Sí
ED = 6	No
CD = 7	No
BG = 8	No
BF = 8	No

A_k = {AG, BE, DF, FG, AC, CB}
$A_k = n - 1 = 6$

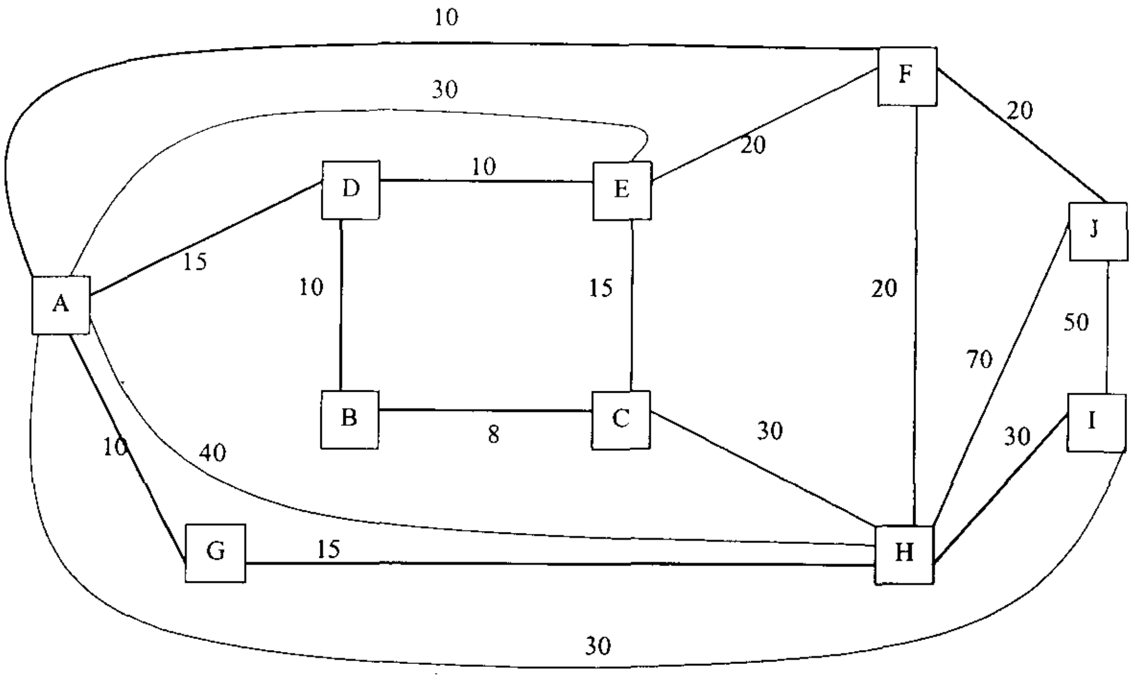
P = 14

Algoritmo de Prim [5]

Paso 0	$T_s = \{v_s\}$, v_s arbitrario $A_s = \{\Phi\}$
Paso 1	$\forall\ v_j \notin T_s$ Si $\exists\ \alpha_j \in T_s$ tal que $c\ (\alpha_j, v_j) = \{\min\ [c\ (v_i, v_j)]\} = \delta_j$ asignar a v_j la etiqueta v_j: $[\alpha_j, \delta_j]$ e ir al paso 2. Si no se puede encontrar, asignar a v_j la etiqueta $[0, \infty]$ e ir al paso 2.
Paso 2	Escoger $v_j{}^*$ tal que $\delta_j{}^* = \min\ \{\delta_j \mid v_j \notin T_s\}$ $T_s = T_s \cup \{v_j{}^*\}$, $A_s = A_s \cup \{(\alpha_j{}^*, v_j{}^*)\}$ Si $\lvert T_s \rvert = n$ alto. Si $\lvert T_s \rvert \neq n$ ir al paso 3
Paso 3	$\forall\ v_j \notin T_s$ y $v_j \in \Gamma\ (v_j{}^*)$ actualizar etiquetas: Si $\delta_j > c\ (v_j, v_j{}^*) \Rightarrow \delta_j = c\ (v_j, v_j{}^*)$ Si $\delta_j \leq c\ (v_j, v_j{}^*)$ ir al paso 2.

Ejercicios

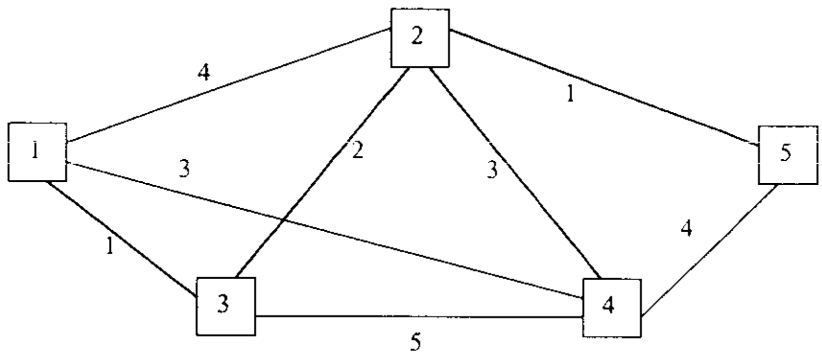
1. Obtener el APM



$T_s = \{G, A, F, H, D, E, B, C, J, I\}$

$A_s = \{GA, AF, GH, AD, DE, DB, BC, FJ, HI\}$
$\#\ A_s = n - 1 = 9$
$P = 128$

2. Obtener el APM de la siguiente red

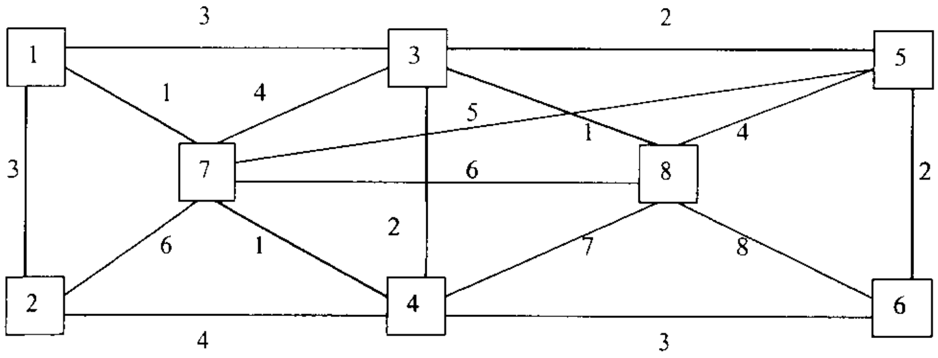


$T_s = \{2, 5, 3, 1, 4\}$

$A_s = \{(2,5), (2,3), (1,3), (2,4)\}$
$\# A_s = n - 1 = 4$

$P = 7$

3. Obtener el APM de

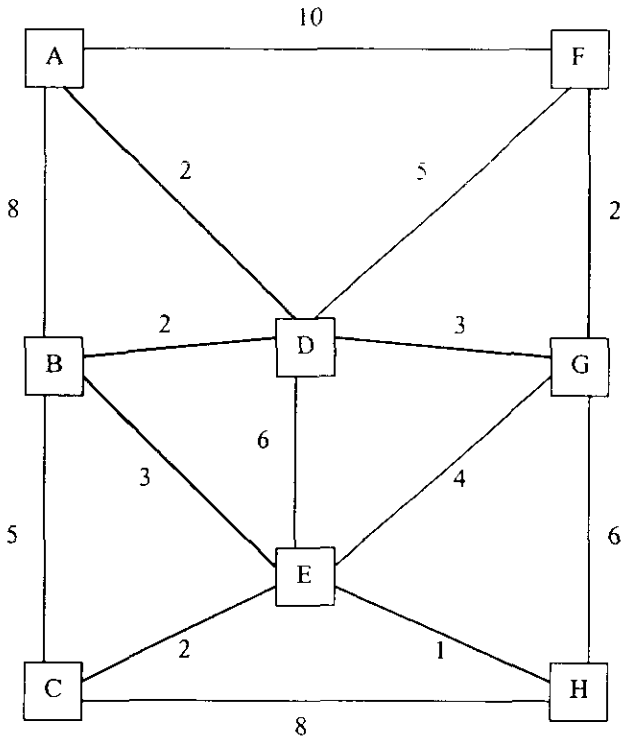


$T_s = \{4, 7, 1, 3, 8, 5, 6, 2\}$

$A_s = \{(4,7), (7,1), (4,3), (3,8), (3,5), (5,6), (1,2)\}$
$\# A_s = n - 1 = 7$

$P = 12$

4. Obtener el APM de



$T_s = \{H, E, C, B, D, A, G, F\}$

$A_S = \{HE, EC, EB, BD, DA, DG, GF\}$
$\# A_S = n - 1 = 7$

$P = 15$

Algoritmos de la ruta más corta

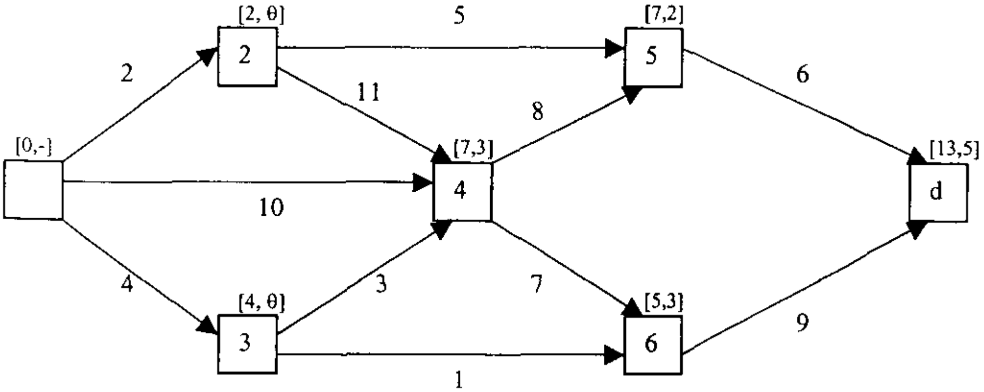
Aquí se presentan dos algoritmos para encontrar la ruta más corta en redes acíclicas y cíclicas. Se dice que una red es acíclica si no contiene ciclos dirigidos; de otra manera, es cíclica.

Algoritmo de Bellman (Gráficas sin ciclos dirigidos) [1]

El algoritmo acíclico se basa en el uso de cálculos recursivos, que son la base de los cálculos de la programación dinámica. Se resolverá un ejemplo numérico para poder entender mejor este procedimiento.

Ejemplo

Considérese la siguiente red. El nodo θ es el nodo inicial (fuente u origen) y el nodo d es el punto terminal (destino). Las distancias d_{ij} entre los nodos i y j se indican directamente sobre cada arista. Por ejemplo, $d_{12} = 2$. La red es acíclica porque no contiene ciclos dirigidos.



Sea

v_j = la distancia *más corta* entre el nodo θ y el nodo j

donde $v_\theta = 0$, por definición. Los valores de v_j, $j = 2, \dots, n$, se calculan en forma recursiva por medio de la fórmula siguiente:

$$v_j = \min_i \left\{ \begin{array}{c} \text{la distancia } u_i \text{ más corta a un nodo } i \textit{ inmediatamente anterior} \\ + \\ \text{la distancia } d_{ij} \text{ entre el nodo actual } j \text{ y su predecesor } i \end{array} \right.$$

$$= \min_i \{v_i + d_{ij}\}$$

La fórmula recursiva implica que la distancia más corta v_j al nodo j se puede determinar sólo después de que se calcula la distancia más corta a cada nodo predecesor i enlazado a j por un arco.

En la solución final del modelo de la ruta más corta no es suficiente determinar sólo la v_j del nodo j. En forma concurrente, se debe identificar también los nodos encontrados a lo largo de la ruta. Para lograr esto se usa un procedimiento de etiquetado, que asocia la siguiente etiqueta al nodo j:

$$\text{etiqueta del nodo } j = [v_j, n]$$

donde n es el nodo que *precede inmediatamente* a j y que da la distancia más corta v_j; o sea,

$$v_j = \min_{i} \{u_i + d_{ij}\}$$
$$= u_n + d_{nj}$$

Por definición, la etiqueta en el nodo θ es [0,-], lo que indica que el nodo θ es la fuente.

Los cálculos proceden en etapas; cada etapa se identifica con un nodo distinto. La siguiente tabla proporciona la secuencia de cálculos que conducen a la solución final. Los cálculos también se pueden resumir en la red, como se muestra en la figura.

La ruta óptima se obtiene comenzando en el nodo **d** y procediendo hacia atrás, a través de los nodos, utilizando la información de las etiquetas. La siguiente secuencia muestra el procedimiento:

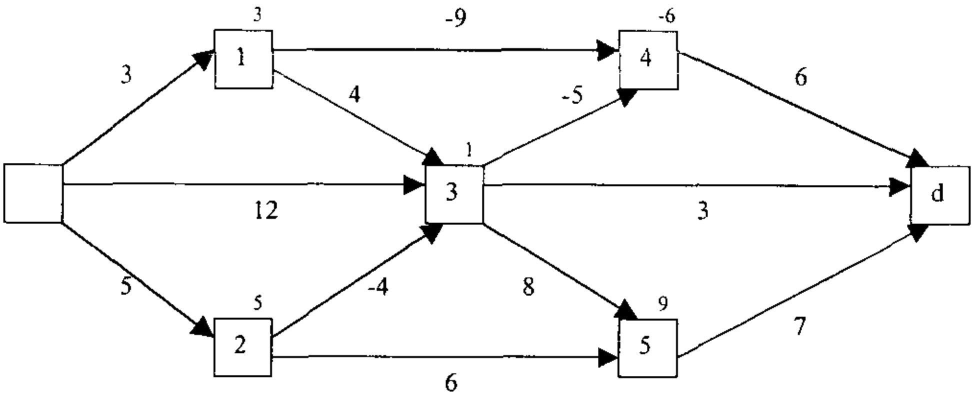
(d) → [13,5] → (5) → [7,2] → (2) → [2, θ] → θ

Nodo j	Cálculo de v_j	Etiqueta
θ	$v_\theta = 0$	[0,-]
2	$v_2 = u_\theta + d_{\theta 2} = 0 + 2 = 2$, desde θ	[2,θ]
3	$v_3 = u_\theta + d_{\theta 3} = 0 + 4 = 4$, desde θ	[4,θ]
4	$v_4 = \min \{u_1 + d_{14}, u_2 + d_{24}, u_3 + d_{34}\}$ $= \min \{0 + 10, 2 + 11, 4 + 3\} = 7$, desde 3	[7,3]
5	$v_5 = \min \{u_2 + d_{25}, u_4 + d_{45}\}$ $= \min \{2 + 5, 7 + 8\} = 7$, desde 2	[7,2]
6	$v_6 = \min \{u_3 + d_{36}, u_4 + d_{46}\}$ $= \min \{4 + 1, 7 + 7\} = 5$, desde 3	[5,3]
d	$v_d = \min \{u_5 + d_{5d}, u_6 + d_{6d},\}$ $= \min \{7 + 6, 5 + 9\} = 13$, desde 5	[13,5]

El algoritmo proporciona la distancia más corta entre el nodo θ y cualquier otro nodo de la red.

Ejercicios

1. Obtener la R+C de

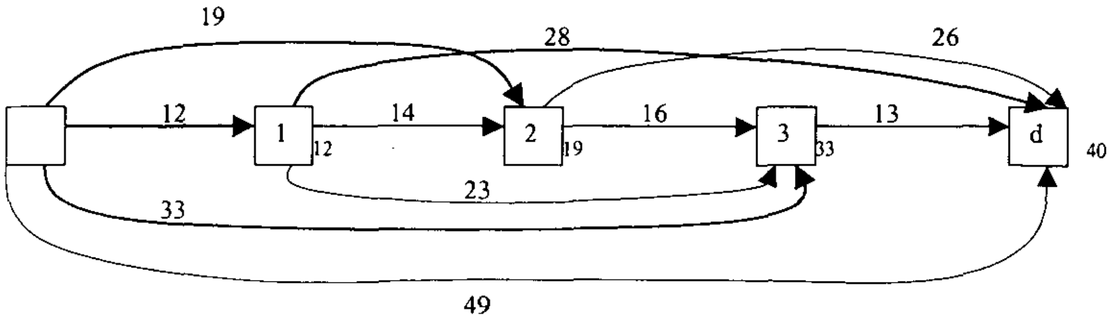


S = {θ, 1, 2, 3, 5, 4, d}

Π(θ) = 0
Π(1) = 0+3 = 3
Π(2) = 0+5 = 5
Π(3) = min {(5-4), (12+0), (4+3)}
Π(3) = 1
Π(5) = min {(8+1), (6+5)}
Π(5) = 9
Π(4) = min {(3-9), (1-5)}
Π(4) = -6
Π(d) = min {(6-6), (3+1), (7+9)}
Π(d) = 0

A = {(θ,1), (θ,2), (2,3), (3,5), (1,4), (4,d)}

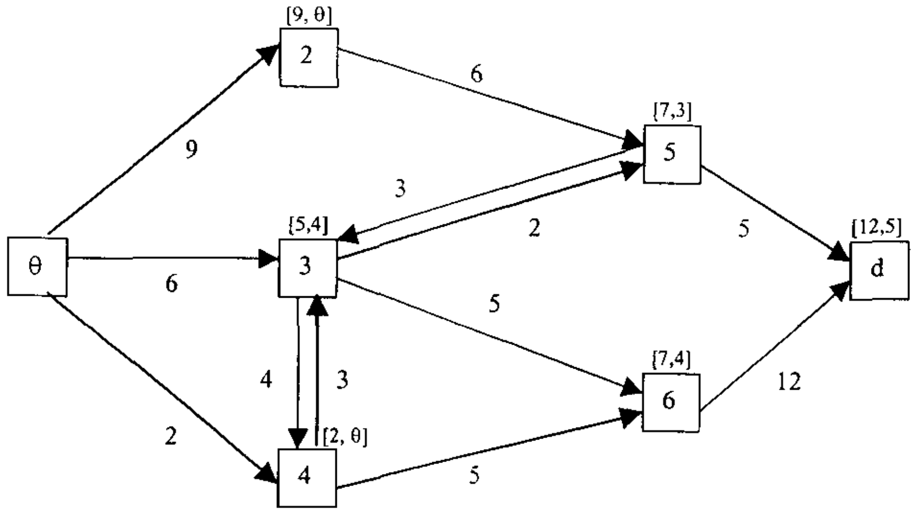
2. Encontrar la R+C de



S = {1, 2, 3, 4, 5}

A = {(1,2), (1,3), (1,4), (3,5)}

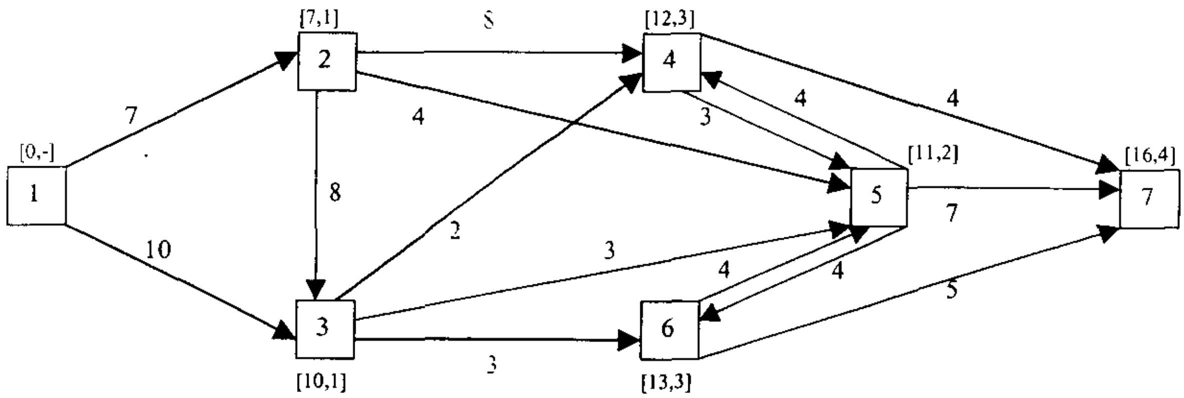
3. Obtener la R+C de



S = {θ, 4, 2, 3, 5, 6, d}

A = {(θ,4), (θ,2), (4, 3), (3,5), (4,6), (5,d)}

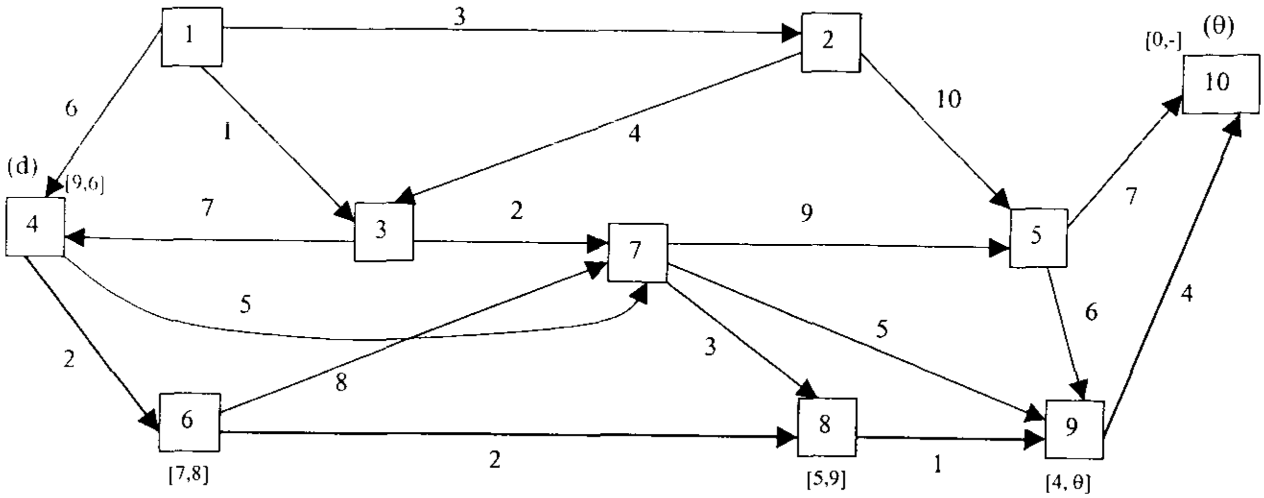
4. Determinar la R+C de



S = {1, 2, 3, 5, 4, 6, 7}

A = {(1,2), (1,3), (2,5), (3,4), (3,6), (4,7)}

5. Obtener la R+C en la siguiente red, del nodo 4 al nodo 10.

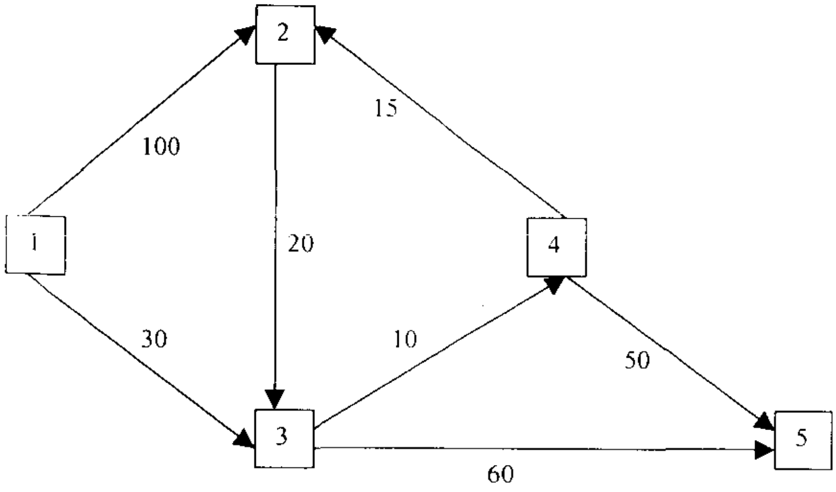


Algoritmo de Dijkstra (Gráficas cíclicas) [1]

El algoritmo cíclico difiere del algoritmo acíclico en el sentido que permite tantas oportunidades como sean necesarias para reevaluar un nodo, ya que de acuerdo con las reglas del algoritmo acíclico se necesita que se calcule la u_i de todos los nodos que llegan al nodo j antes de que se pueda evaluar v_j. Cuando resulta evidente que se ha alcanzado la distancia más corta a un nodo, éste se excluye de cualquier consideración posterior. El proceso termina cuando se ha evaluado el nodo destino.

El algoritmo cíclico usa dos tipos de etiquetas: temporal y permanente. Ambas etiquetas utilizan el mismo formato que en el algoritmo acíclico, esto es, [*d*, *n*], donde *d* es la distancia más corta, *disponible hasta el momento,* para un nodo corriente y *n* es el nodo inmediato precedente al cual la distancia es igual a *d*. El algoritmo comienza con el nodo fuente que lleva la etiqueta *permanente* [0, -]. Luego, consideramos *todos* los nodos que se pueden alcanzar directamente desde el nodo fuente y determinamos sus etiquetas asociadas. Las etiquetas recién creadas se designan como *temporales*. La siguiente etiqueta permanente se selecciona como aquella, de entre todas las etiquetas temporales corrientes, que tenga la menor *d* en la etiqueta [*d*, *n*] (los empates se rompen arbitrariamente). El proceso se repite para el último nodo que se ha designado permanente. En tal caso, una etiqueta temporal de un nodo se puede cambiar sólo si la nueva etiqueta da una distancia *d* menor.

Se aplica este procedimiento a la siguiente red. Una hipótesis básica del algoritmo es que todas las distancias en la red son no negativas.



Iteración 0: el nodo 1 lleva la etiqueta *permanente* [0, -].

Iteración 1 : los nodos 2 y 3, que se pueden alcanzar directamente desde el nodo 1 (el último nodo rotulado permanentemente), llevan ahora las etiquetas *temporales* [0 + 100, 1] y [0 + 30, 1], respectivamente.

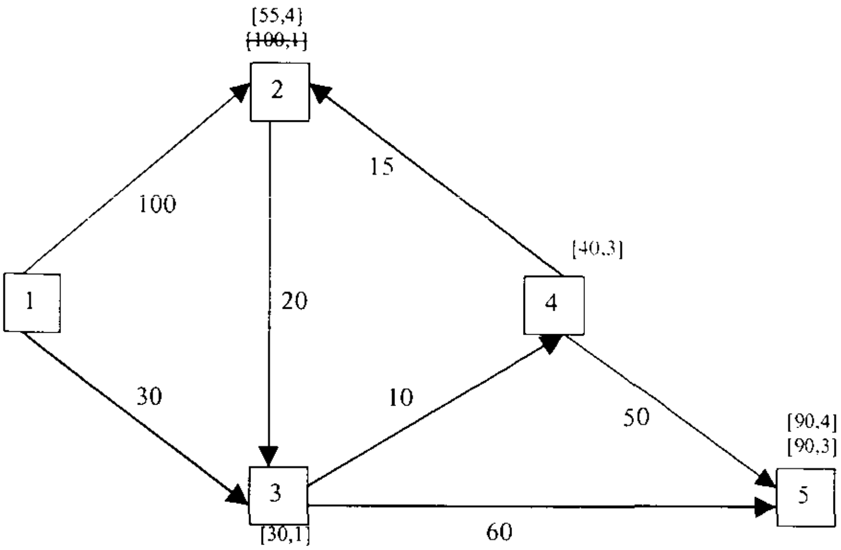
Entre las etiquetas temporales corrientes, el nodo 3 tiene la menor distancia d = 30 (= min {100, 30}). Así el nodo 3 está etiquetado permanentemente.

Iteración 2 : los nodos 4 y 5 se pueden alcanzar desde el último nodo rotulado permanentemente (nodo 3) y sus etiquetas temporales son [30 + 10, 3] y [30 + 60, 3] (o bien [40, 3] y [90, 3]), respectivamente. En este punto tenemos las 3 etiquetas temporales [100, 1], [40, 3] y [90, 3] asociadas con los nodos, 2, 4 y 5, respectivamente. El nodo 4 etiquetado temporalmente tiene la menor d = 40 (= min {100, 40, 90}) y, por consiguiente, su etiqueta [40, 3] se convierte a un estado permanente.

Iteración 3 : Del nodo cuatro rotulamos ahora el nodo 2 con la etiqueta temporal [40 + 15, 4] = [55, 4], que reemplaza a la etiqueta temporal anterior [100, 1]. A continuación el nodo 5 se etiqueta temporalmente con [40 + 50, 4] = [90, 4]. Las etiquetas temporales incluyen ahora a [55, 4] y [90, 4] asociadas con los nodos 2 y 5, respectivamente. Rotulamos entonces al nodo 2 en forma permanente con la etiqueta [55, 4].

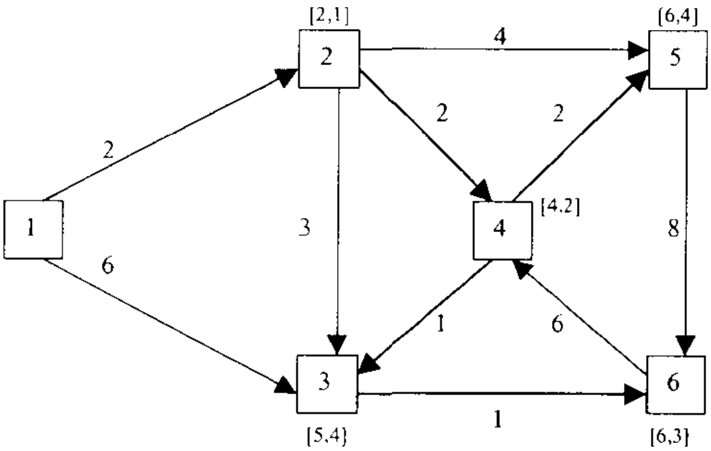
El único nodo restante es el nodo destino 5, que convierte su etiqueta [90, 4] a una etiqueta permanente, con lo que se termina el procedimiento.

Los pasos de cálculo anteriores se resumen gráficamente en la siguiente red. Se observa que los cálculos se basan en el concepto de recursión empleado en el algoritmo acíclico. La diferencia principal entre los dos algoritmos estriba en que un nodo en el algoritmo cíclico puede etiquetarse (temporalmente) sin tener en cuenta que todos los nodos que llegan directamente a él se hayan o no etiquetado.



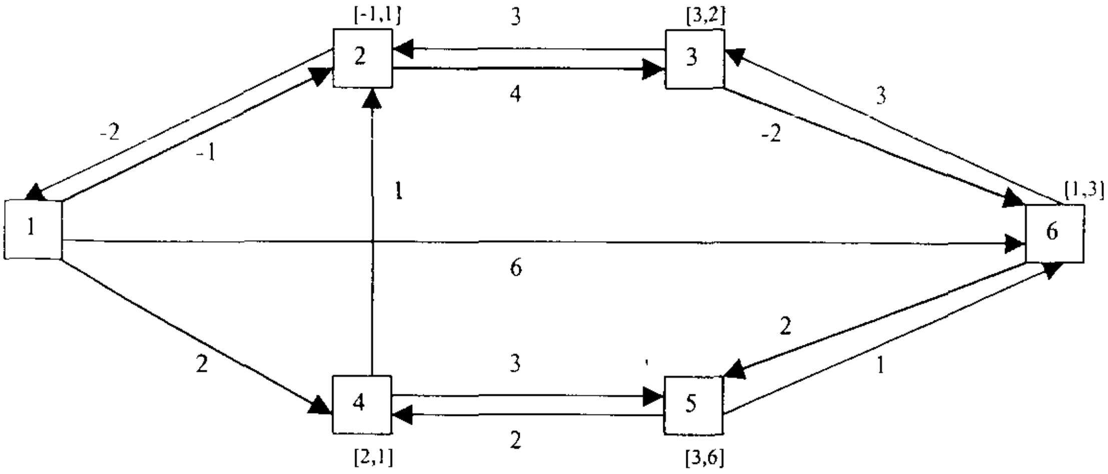
Ejercicios

1. Obtener la R+C de



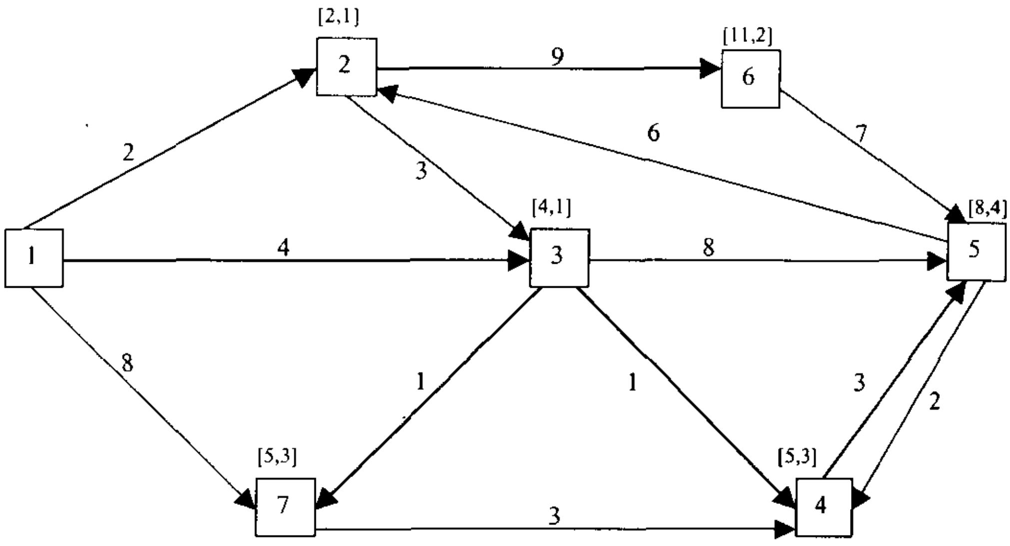
v	ζ(*v*)	P
1	[0,-]	Primera iteración
2	[2,1]	Segunda iteración
3	~~[6,1]~~; ~~[5,2]~~; [5,4]	Cuarta iteración
4	[4,2]	Tercera iteración
5	~~[6,2]~~; [6,4]	Sexta iteración
6	[6,3]	Quinta iteración

2. Encontrar la R + C de uno a otro vértice.



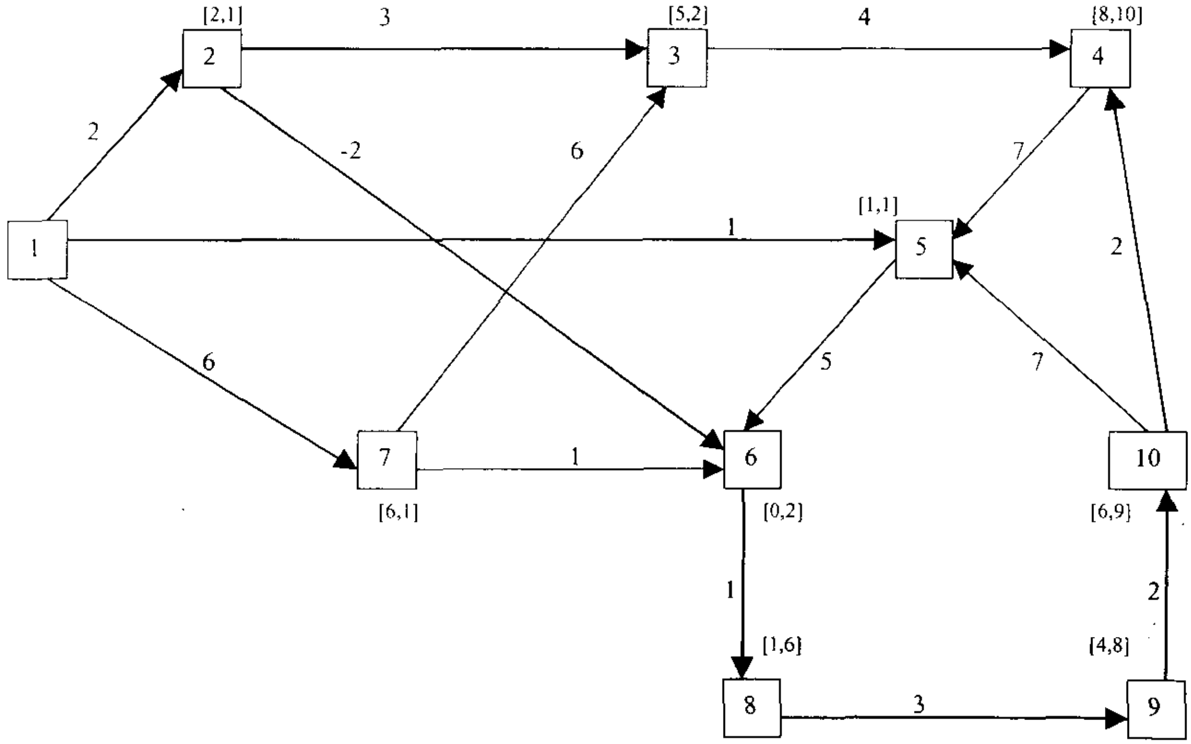
v	$\zeta(v)$	P
1	[0,-]	Primera iteración
2	[-1,1]	Segunda iteración
3	[3,2]	Cuarta iteración
4	[2,1]	Tercera iteración
5	~~[5,4]~~; [3,6]	Sexta iteración
6	~~[6,1]~~; [1,3]	Quinta iteración

3. Encontrar la R + C de



v	ζ(*v*)	P
1	[0,-]	Primera iteración
2	[2,1]	Segunda iteración
3	[4,1]	Tercera iteración
4	[5,3]	Quinta iteración
5	~~[12,3]~~; [8,4]	Sexta iteración
6	[11,2]	Séptima iteración
7	~~[8,1]~~; [5,3]	Cuarta iteración

4. Encontrar la R + C de



v	ζ(*v*)	P
1	[0,-]	Primera iteración
2	[2,1]	Tercera iteración

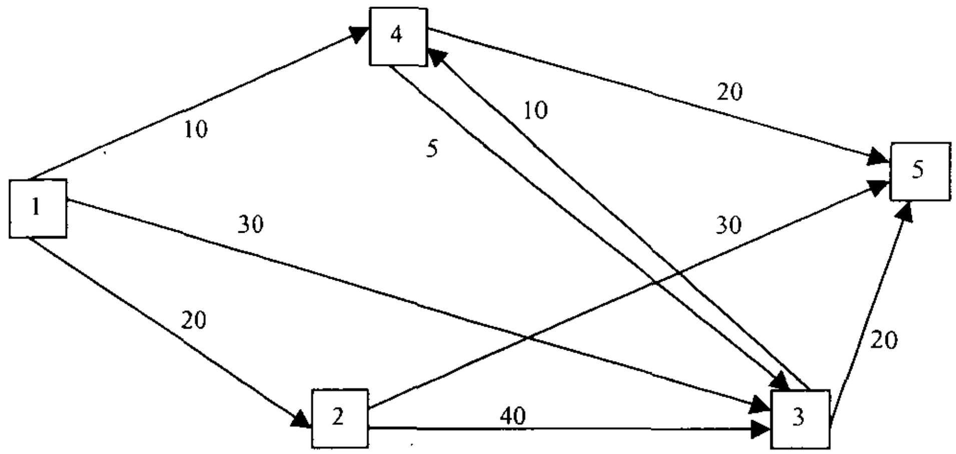
3	[5,2]	Séptima iteración
4	~~[9,3]~~; [8,10]	Décima iteración
5	[1,1]	Segunda iteración
6	~~[6,5]~~; [0,2]	Cuarta iteración
7	[6,1]	Octava iteración
8	[1,6]	Quinta iteración
9	[4,8]	Sexta iteración
10	[6,9]	Novena iteración

Algoritmo de Ford y Fulkerson (Redes de flujo máximo) [1]

En esta parte se considera cuando se enlazan un nodo fuente y un nodo destino, a través de una red de aristas o arcos de capacidad finita.

La idea básica del algoritmo de Ford y Fulkerson (flujo máximo) es encontrar una trayectoria de flujo que conecte el nodo fuente con el nodo destino en forma tal, que la capacidad de cada arista en esta trayectoria debe ser igual a la capacidad *mínima*, c^*, de todas las aristas que constituyen la trayectoria.

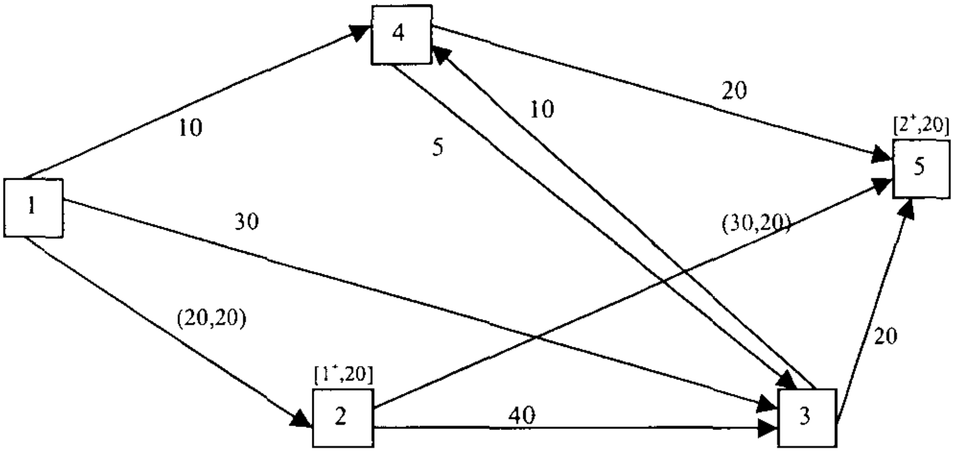
Para que sea más claro este proceso considérese la siguiente red.



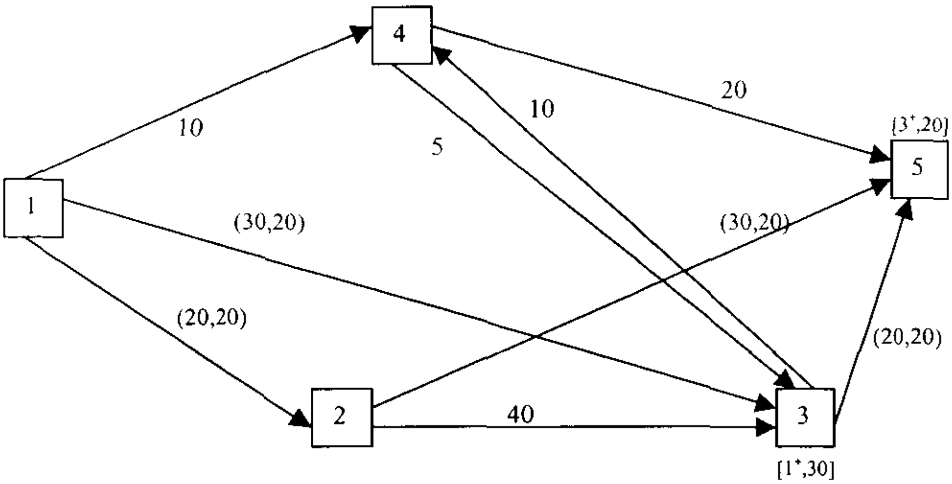
Supóngase que con cada nodo j se asocia una etiqueta $L(j) = (i\pm, \Delta_j)$ conteniendo dos piezas de información (capacidad y flujo).

La segunda componente, Δ_j, en $L(j)$ indica la cantidad de flujo que se puede enviar del nodo j al nodo 1 a través de la red presente con capacidades dadas. La primera componente, $i\pm$, en $L(j)$ indica el nodo anterior en la cadena a lo largo de la cual se puede cambiar el flujo. Si la primera componente en $L(j)$ es $i+$, entonces se sumará el flujo al arco (i, j); en caso contrario, si la primera componente es $i-$, entonces se restará el flujo del arco (j, i). El algoritmo de etiquetado se describe como sigue:

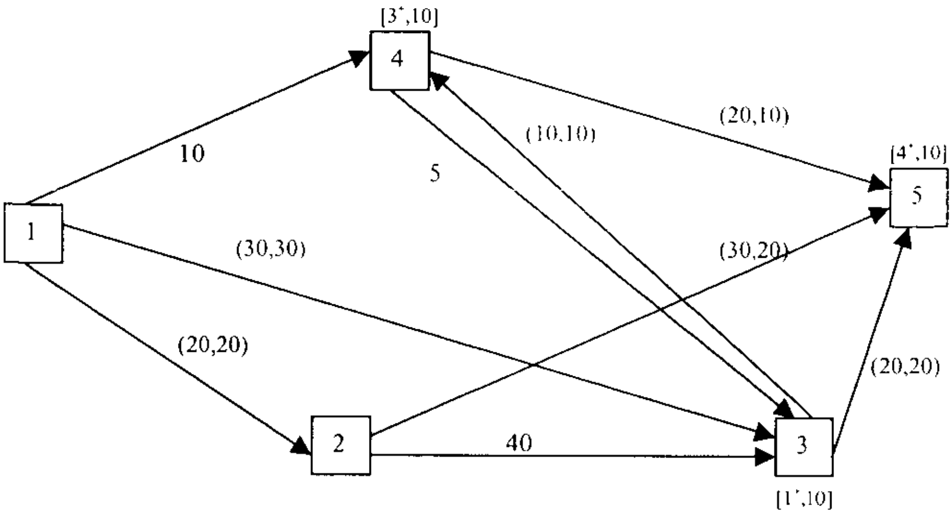
Paso inicial
$L(1) = (-, \infty)$
$L(2) = (1^+,20)$
$L(5) = (2^+,20)$
$\Delta = 20$
$L_{20}(5) = (30,20)$
$L_{20}(2) = (20,20)$



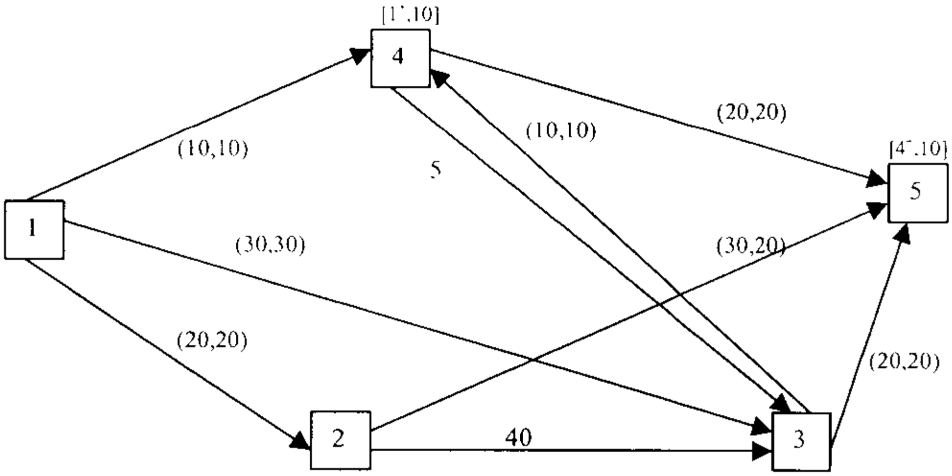
Bórrense todas las etiquetas, $L(1) = (-,\infty)$
$L(3) = (1^+,30)$
$L(5) = (3^+,20)$
$\Delta = 20$
$L_{20}(5) = (20,20)$
$L_{20}(3) = (30,20)$



Bórrense todas las etiquetas, $L(1) = (-,\infty)$
$L(3) = (1^+,10)$
$L(4) = (3^+,10)$
$L(5) = (4^+,10)$
$\Delta = 10$
$L_{10}(5) = (20,10)$
$L_{10}(4) = (10,10)$
$L_{20}(3) = (30,30)$



Bórrense todas las etiquetas, L(1) = (-,∞)
L(4) = (1⁺,10)
L(5) = (4⁺,10)
Δ = 10
$L_{10}(5)$ = (20,20)
$L_{10}(4)$ = (10,10)



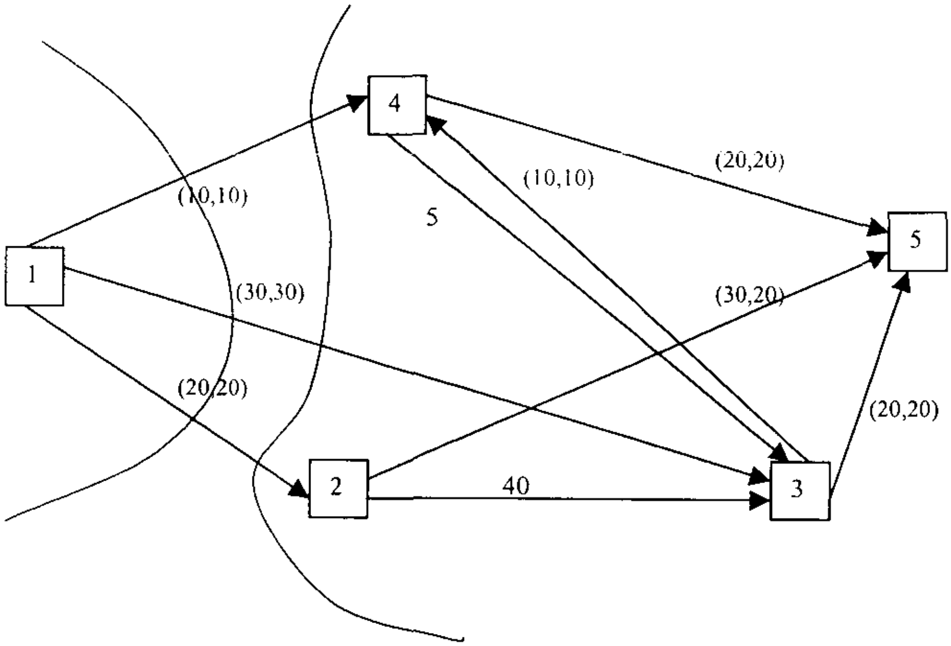
Borre todas las etiquetas, L(1) = (-,∞); el proceso termina cuando ya no hay nodos por etiquetar y en su caso cuando las aristas están llenas, es decir, cuando están saturadas sus capacidades.

Cuando el algoritmo se detiene, se toma X como el conjunto de nodos etiquetados y X^c como el conjunto de vértices no etiquetados.

$(X, X^c) = \{(x, y) \mid x \in X, j \in X^c\}$ = cortadura mínima.

$\Sigma c(x., y)$ = capacidad de la cortadura mínima = Flujo máximo.

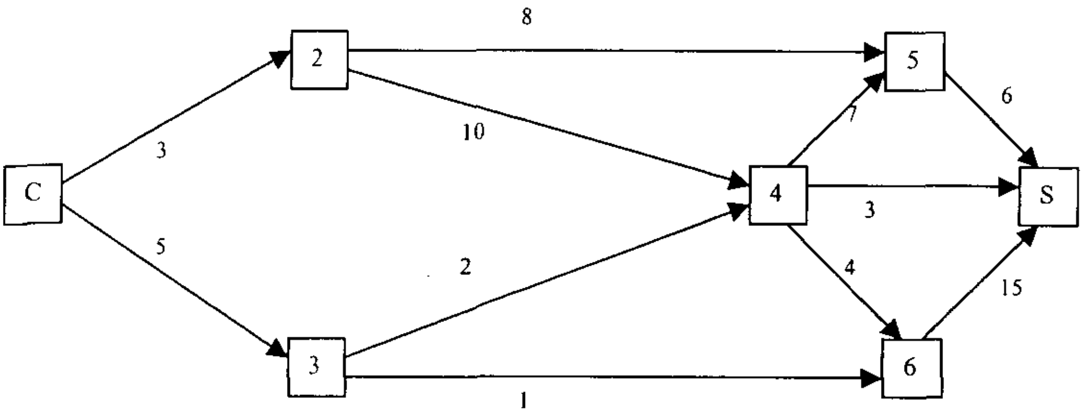
Entonces la representación gráfica de la cortadura mínima queda como:



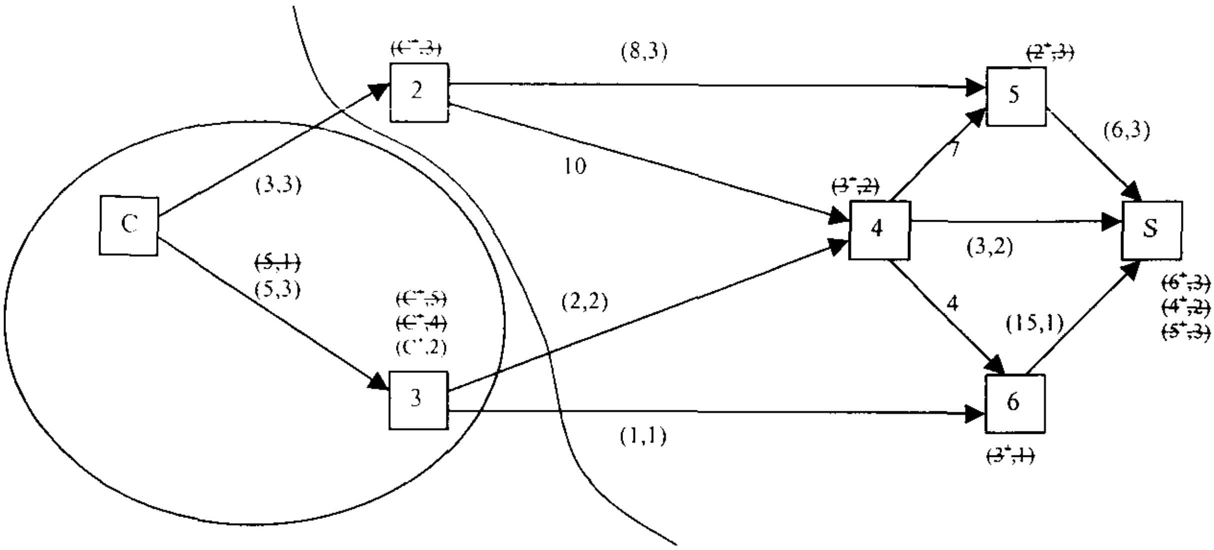
C = ({1}, {2, 3, 4, 5})
v = 60

Ejercicios

1. En una red de comunicaciones de comando y control, un comandante está localizado en un nodo y su subordinado en otro.
   Con cada eslabón en la red se tiene asociado un valor (u_{ij}) que mide el esfuerzo requerido para romper el eslabón (i, j).
   Encontrar el mínimo esfuerzo requerido para bloquear todas las comunicaciones entre el comandante y el subordinado.

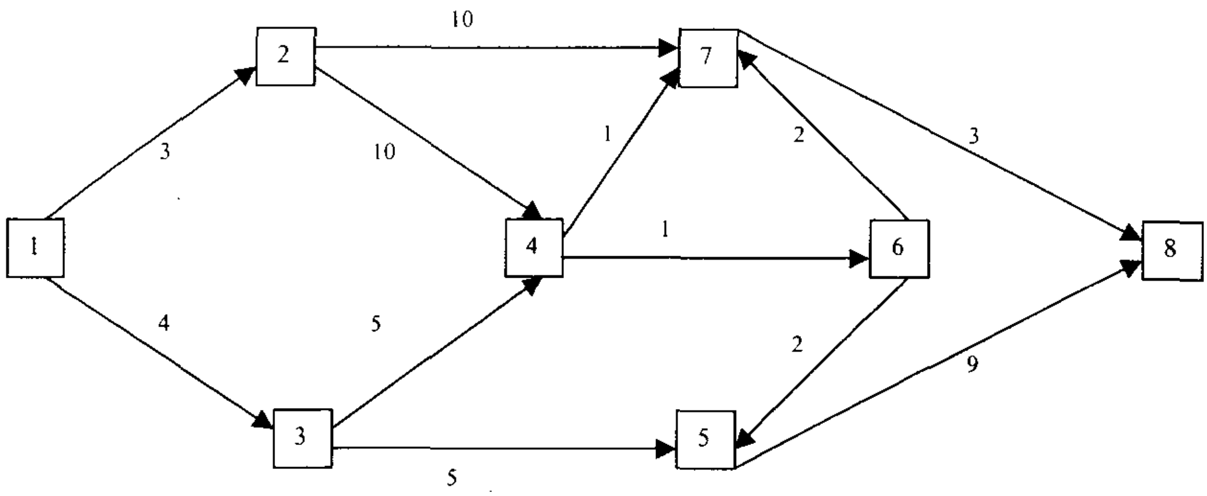


Después de todas las iteraciones posibles aquí representadas, tenemos que:

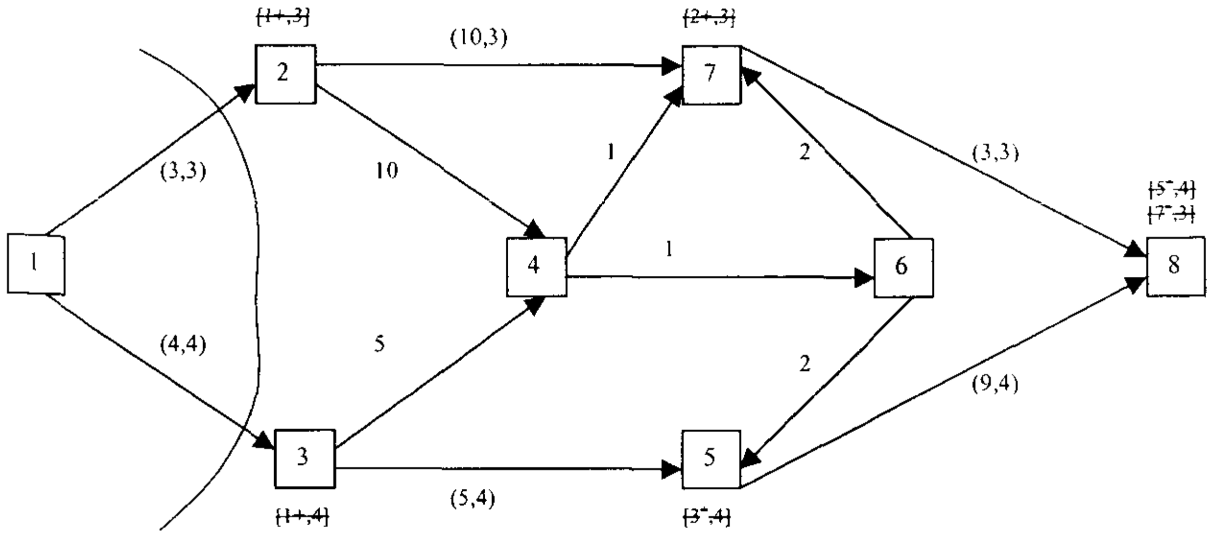


C = ({C, 3}, {2, 4, 5, 6, S})
v = 6

2. Encontrar el flujo máximo de 1 a 8 en la siguiente red



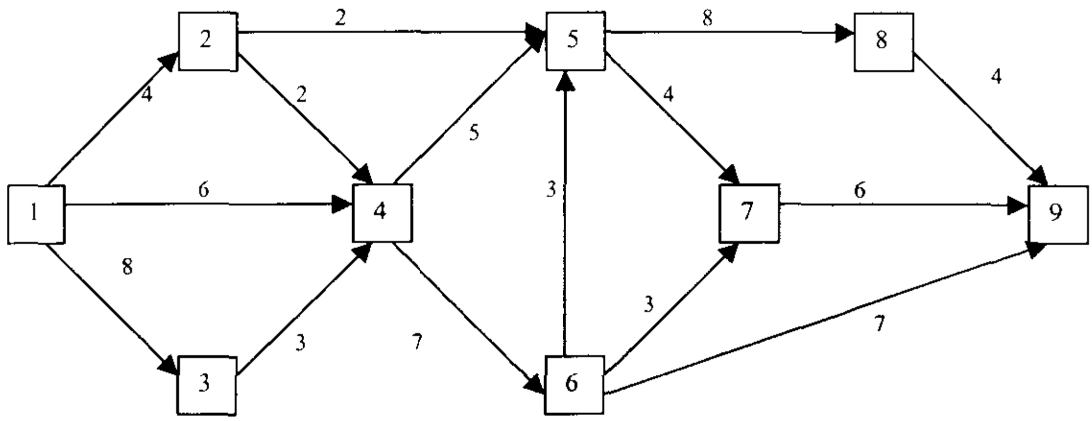
Después de realizar los cálculo para el algoritmo de Ford y Fulkerson, tenemos que:



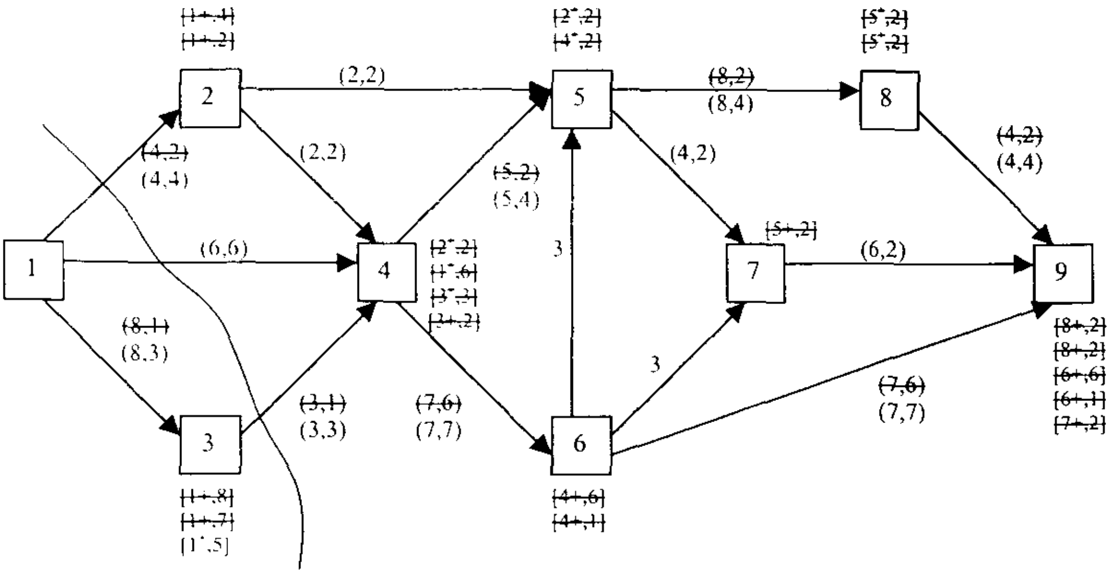
C = ({1}, {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8})

v = 7

3. Encontrar el flujo máximo y cortadura mínima del inicio al origen en la siguiente red.



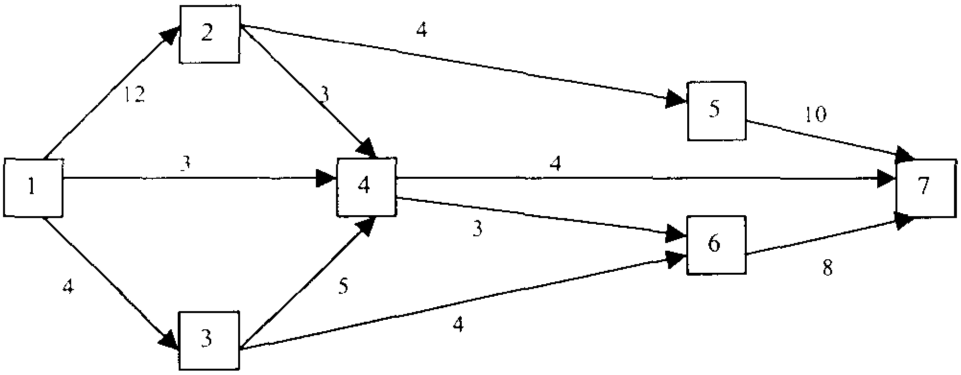
La cortadura mínima queda como:



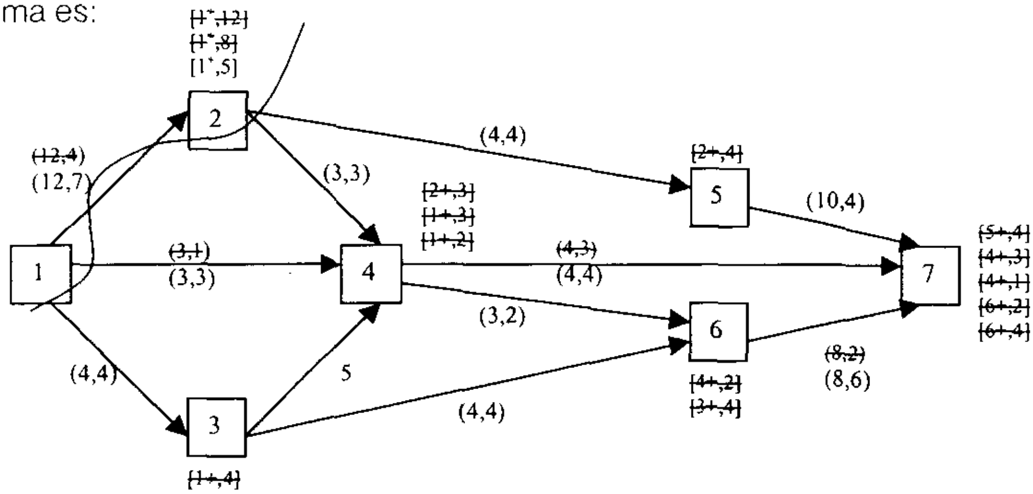
C = ({1, 3}, {2, 4, 5, 6, 7, 8, 9,}

v = 13

4. Determinar la cortadura mínima de:



La cortadura mínima es:



CAPÍTULO SEIS: TEORÍA DE JUEGOS

Solución óptima de juegos de dos personas y suma cero [5, Cap. 12]

En la teoría de juegos, un oponente se designa como **jugador**. Cada jugador tiene un número de elecciones finito o infinito, llamadas **estrategias**. Los **resultados** o pagos de un juego se resumen como funciones de las diferentes estrategias para cada jugador. Un juego con dos jugadores, I y II, donde la ganancia de I es *igual a* la pérdida de II, se conoce como un juego de dos personas y suma cero. En tal juego es suficiente expresar los resultados en términos del pago a un jugador.

Para ilustrar las definiciones de un juego de *dos personas y suma cero,* considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6-1

El juego consiste en "igualar" monedas, en el cual cada uno de los 2 jugadores A y B elige sol (S) o águila (A). Si son iguales los dos resultados (esto es, SyS o AyA), el jugador A gana $1.00 al jugador B. De otra manera, A pierde $1.00 que paga a B.

En este juego cada jugador tiene dos estrategias S o A. Esto proporciona la siguiente matriz de 2 x 2 expresada en términos del pago al jugador A.

		Jugador B	
		A	S
Jugador A	A	1	-1
	S	-1	1

La solución "óptima" a tal juego puede necesitar que cada jugador emplee una **estrategia** pura (por ejemplo, S o A) o una mezcla de estrategias puras. Este caso se conoce como la selección de **estrategia mixta**.

Consideramos aquí el criterio minimax-maximin para resolver juegos de dos personas y suma cero, que es un criterio muy conservador para establecer la estrategia a seguir. En la teoría de juegos cada jugador es inteligente y por tanto, activamente trata de derrotar a su oponente.

El criterio minimax elige la estrategia (mixta o pura) de cada jugador que proporciona el *mejor* de los *peores* resultados posibles. Se dice que se alcanza una solución óptima si ningún jugador encuentra beneficioso alterar su estrategia. En este caso se dice que el juego es estable.

Ya que la matriz del juego generalmente se expresa en términos del pago al jugador A (cuyas estrategias están representadas por los renglones), el criterio minimax requiere que A seleccione la estrategia que maximice su ganancia mínima; el mínimo se toma sobre todas las estrategias del jugador B. Por el mismo razonamiento, el jugador B elige la estrategia que minimice sus máximas pérdidas. De nuevo el máximo se toma sobre todas las estrategias de A, criterio maximin.

Ejemplo 6-2

Considérese la siguiente matriz de pagos que representa la ganancia del jugador A. Los cálculos de los valores minimax y maximin se muestran en la matriz.

		Jugador B				Mínimo de
		I	II	III	IV	renglón
Jugador A	1	8	2	9	5	2
	2	6	5	7	18	5 Maximin
	3	7	3	-4	10	-4
	Máximo de columna	8	5 Minimax	9	18	

El valor minimax (superior) es *mayor que* o *igual al* valor máximo (inferior). En el caso donde ocurre la igualdad, esto es,

valor minimax = valor maximin,

las estrategias puras correspondientes se conocen como estrategias "óptimas" y se dice que el juego tiene un **punto de silla**. El valor del juego, dado por la cantidad común de las estrategias puras óptimas, es igual a los valores maximin y minimax. En general, el valor del juego debe satisfacer la desigualdad

$$\underset{\text{(inferior)}}{\text{valor maximin}} \leq \text{valor del juego} \leq \underset{\text{(superior)}}{\text{valor minimax}}$$

En el juego anterior, el valor maximin = valor del juego = valor minimax = 5. Esto implica que el juego tiene un punto de silla en (2,2) en la matriz de pagos. El valor del juego, por consiguiente, es igual a 5. Se observa que ningún jugador puede mejorar su posición seleccionando alguna otra estrategia.

Estrategias mixtas [5, Cap. 12]

En la sección anterior se ilustró que la existencia de un punto de silla proporciona inmediatamente las estrategias puras óptimas para el juego. Sin embargo, algunos juegos no tienen punto de silla. Por ejemplo, consideremos el siguiente juego de suma cero.

	I	II	III	IV	
1	5	-10	9	0	-10
2	6	7	8	1	1
3	8	7	15	2	2
4	3	4	-1	4	-1
	8	7	15	4	

El valor minimax (=4) es mayor que el valor maximin (=2). Por consiguiente, el juego no tiene un punto de silla y las estrategias puras maximin-minimax no son óptimas.

Cuando un juego no tiene punto de silla, la teoría de juegos aconseja a cada jugador asignar *una distribución de probabilidad sobre su conjunto de estrategias*. Esto es:

x_i = probabilidad de que el jugador 1 use la estrategia i ($i=1,2,\ldots,m$),
y_j = probabilidad de que el jugador 2 use la estrategia j ($j=1,2,\ldots,n$),

donde m y n son el número de estrategias disponibles.

Como x_i y y_j son valores probabilísticos, se tiene que:

$$\sum_i x_i = 1,\ x_i \geq 0;\ \sum_j y_j = 1,\ y_j \geq 0$$

Teorema minimax [5, Cap. 12]: si se permiten estrategias mixtas, el par de estrategias que es *óptimo de acuerdo con el criterio minimax, proporciona una* solución única con v = v* (el valor del juego), de manera que ninguno de los dos jugadores pueda mejorar cambiando unilateralmente su estrategia.

Solución gráfica de juegos de (2 x N) y (M x 2) [5, Cap. 12]

Las soluciones gráficas son únicamente aplicables a juegos en los cuales, por lo menos uno de los jugadores, tiene solamente dos estrategias. Considérese el siguiente juego de (2 x **n**).

		B			
		y_1	y_2	...	y_n
A	x_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
	$x_2 = 1 - x_1$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}

Se supone que este juego no tiene un punto de silla. Puesto que A tiene dos estrategias, se deduce que $x_2 = 1 - x_1$; $x_1, x_2 \geq 0$

Entonces los pagos esperados de A quedan como:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 \end{gathered}$$

donde

$$x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*) = \max \{\min \{a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{mj}x_m\}\}$$

$$\max_i \{\min_j \{a_{ij}x_i + \ldots + a_{mj}x_m\}\}$$

con

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$x_2 = 1 - x_1$$

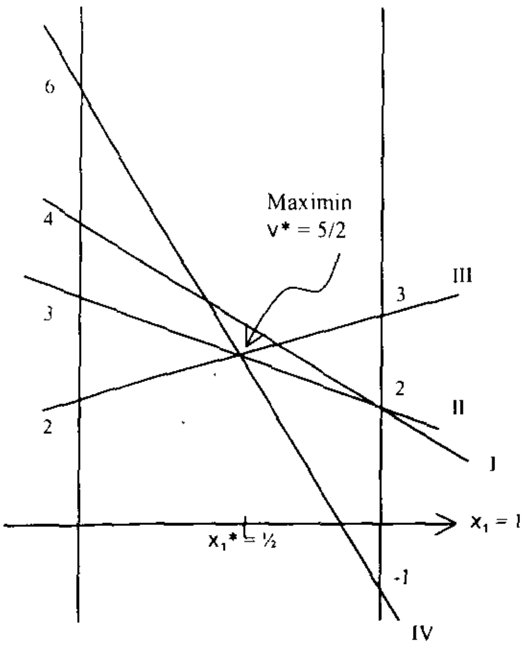
Según el *criterio minimax de juegos de estrategias mixtas*, el jugador A debe seleccionar el valor de x_i que maximice sus pagos mínimos esperados. El ejemplo que sigue ilustra el procedimiento gráfico.

Ejemplo 6-3

Considere el siguiente juego de (2 x 4).

	I	II	III	IV
1	2	2	3	-1
2	4	3	2	6

Este juego no tiene punto de silla, por consiguiente, los pagos esperados de A correspondientes a las estrategias puras de B están dados como sigue



$2x_1 + 4x_2$ ①
$2x_1 + 3x_2$ ②
$3x_1 + 2x_2$ ③
$-x_1 + 6x_2$ ④

$$\begin{matrix} x_1^* = \tfrac{1}{2} \Leftarrow \\ x_2^* = \tfrac{1}{2} \Leftarrow \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 3x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 6x_2 \\ x_2 = 1 - x_1 \end{matrix} \right.$$

$$x^* = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$
$$\Sigma x_i = 1$$
$$v^* = 3(\tfrac{1}{2}) + 2(\tfrac{1}{2}) = 3/2 + 2/2 = 5/2$$

Figura 6-1

Estas cuatro rectas se trazan entonces como funciones de x_1 como se muestra en la figura 6-1. El maximin ocurre en $x^* = (½, ½)$, que es el punto de intersección de las estrategias III y IV, es decir el jugador A debe decidirse por jugar ½ de la estrategia 1 y ½ de la estrategia 2.

Solución de juegos de (M x N) por dominancia [5, 12]

Sean a_{ij} los pagos que recibe el jugador A, se dice que

$$k \text{ domina a } l \text{ si } a_{kj} \geq a_{lj} \ \forall\, j$$
ó
$$k \text{ domina a } l \text{ si } a_{jk} \geq a_{jl} \ \forall\, j$$

Ejemplo 6-4
Obsérvese la matriz de pagos siguiente:

	I	II	III	IV
1	~~3~~	~~5~~	$\boxed{2}$	~~2~~
2	~~3~~	~~1~~	~~2~~	~~6~~
3	~~1~~	~~4~~	~~0~~	~~1~~
4	~~0~~	~~2~~	~~1~~	4

La Est(1) *domina a la Est(2), se tacha el renglón 2 para A*
La Est(1) domina a la Est(3), se tacha el renglón 3 para A
La Est(II) paga más que Est(I), se tacha la columna II para B
La Est(IV) paga más que Est(III), se tacha la columna IV para B
La Est(1) domina a la Est(4), se tacha el renglón 4 para A
La Est(I) paga más que Est(III), se tacha la columna I para B

Por lo que se puede ver, se tiene un punto de silla en (1,3), entonces se dice que el valor del juego es 2.

Ejemplo 6-5
Reducir por dominancia la siguiente matriz de pagos y resolver.

	I	II	III
1	2	4	~~5~~
2	~~2~~	~~3~~	~~2~~
3	3	2	~~4~~
4	-2	6	~~1~~

La Est(III) paga más que Est(I), se tacha la columna III para B
La Est(1) *domina a la Est(2), se tacha el renglón 2 para A*

Entonces se tiene una nueva matriz:

	I	II
1	2	4
2	3	2
3	-2	6

Solución gráfica para B

$2y_1 + 4y_2$
$3y_1 + 2y_2$
$-2y_1 + 6y_2$

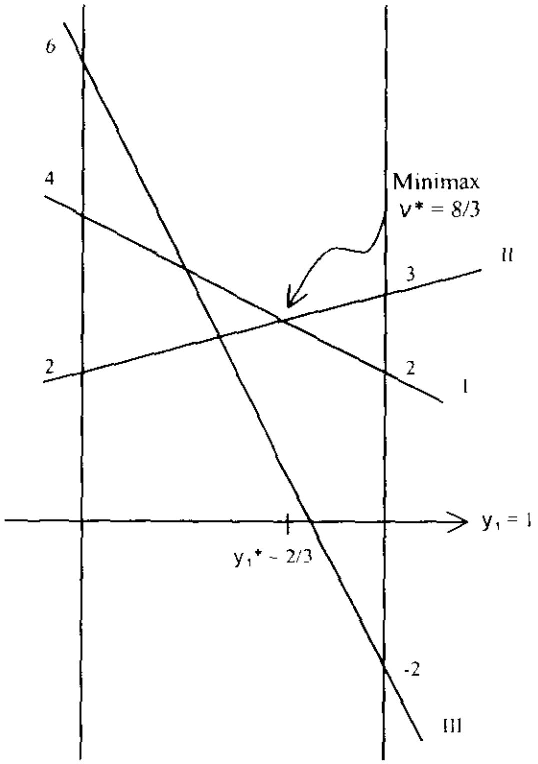
$y_1 + y_2 = 1$
$y_2 = 1 - y_2$

$$\left.\begin{array}{l} 2y_1 + 4y_2 \\ 3y_1 + 2y_2 \\ y_2 = 1 - y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1^* = 2/3$$

$y_2^* = 1 - 2/3 = 1/3$

$y^* = (2/3, 8/3)$

$v^* = 2(2/3) + 4(1/3)$
$= 8/3$



Solución de juegos de (M x N) por programación lineal [5, cap. 12]

En la sección anterior vimos que

$$\max_{x_i} \{\min (\sum a_{ij}x_i)\}$$

sujeta a la restricción

$$\sum x_i = 1, \forall\ x_i \geq 0\ i = 1, 2, ..., m$$

Este problema puede ponerse en la forma de programación lineal como sigue. Sea

$$v = \min (\sum a_{ij}x_i)$$

entonces el problema será

$$\text{maximizar } z = v$$

sujeto a

$$\sum a_{ij}x_i \geq v,\ j = 1, ..., n$$
$$\sum x_i = 1,\ x_i \geq 0\ i = 1, ..., m$$

donde v representa el valor del juego.
Supongamos que $v > 0$, entonces

$$\sum a_{ij}\, x_i/v \geq 1$$
$$\sum x_i/v = 1/v,\ x_i \geq 0$$

Sea $x_i' = x_i/v$
Entonces el problema queda como

$$\min z = \sum x_i'$$

sujeto a

$$\sum a_{ij}x_i' = 1,$$
$$x_i' \geq 0\ i = 1, \dots, m$$

Esta formulación de programación lineal es correcta siempre que $v > 0$. Si $v \leq 0$, puede agregarse una constante positiva k a todos los elementos de la matriz, garantizando que sea mayor que cero el valor del juego para la matriz "modificada". El valor *real* del juego se determina restando k del valor *modificado* del juego.

El problema del jugador B está dado por el problema dual del problema primal para el jugador A, es decir

$$\max w = \sum y_j'$$

sujeto a

$$\sum a_{ij}y_j' \leq 1$$
$$y_j' \geq 0\ j = 1, \dots, n;$$

por lo que la solución óptima de un problema automáticamente proporciona la solución óptima del otro.

Ejemplo 6-6

3	-1	-3	-3
-3	3	-1	-3
-4	-3	3	-4
3	3	3	$-3 \leq v \leq 3$

Como el valor del juego tiene como límite un número < 0, entonces sumamos una constante $k = 5$, y tenemos

8	4	2	2
2	8	4	2
1	2	8	1
8	8	8	$2 \leq v \leq 8$

Solución para el jugador B

$$\max w = y_1' + y_2' + y_3'$$

sujeto a

$$8y_1' + 4y_2' + 2y_3' \le 1$$
$$2y_1' + 8y_2' + 4y_3' \le 1$$
$$y_1' + 2y_2' + 8y_3' \le 1$$
$$y_j' \ge 0 \quad j = 1, 2, 3$$

Solución por el método símplex

Básica	y_1'	y_2'	y_3'	h_1	h_2	h_3	Solución
h_1	8	4	2	1	2	2	1
h_2	2	8	4	0	1	0	1
h_3	1	2	8	0	0	1	1
w	-1	-1	-1	0	0	0	0
.							.
.							.
.							.
y_1'	1	0	0	1/7	-1/4	0	1/14
y_2'	0	1	0	-3/98	31/196	-1/14	11/196
y_3'	0	0	1	-1/98	-3/98	1/7	5/49
w*	0	0	0	5/49	11/196	1/14	45/196

Tenemos para el problema original que

$v^* = 1/w^* - k = 196/45 - 5 = -29/45$

$y_j^* = y_j'/w^*$

$y_1^* = (1/14)/(45/196) = 14/45$

$y_2^* = (11/196)/(45/196) = 11/45$

$y_3^* = (5/49)/(45/196) = 20/45$

Las estrategias óptimas para A se obtienen de la solución dual del problema anterior.

$z^* = w^* = 45/196$

$x_1' = 5/49$, $x_2' = 11/196$ y $x_3' = 1/14$

$x_i^* = x_i'/z^*$

en consecuencia

$x_1^* = 20/45$
$x_2^* = 11/45$
$x_3^* = 14/45$

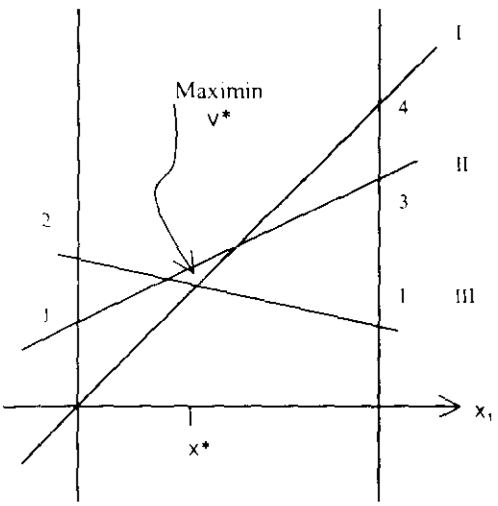
Note que se está aplicando dualidad de P.L.

Ejercicios

1. Resolver gráficamente

4	3	1	1
0	1	2	0
4	3	2	$1 \leq v \leq 2$

Solución para A



$4x_1$ ①
$x_1 + 2x_2$ ②
$x_2 = 1 - x_1$

$x_1 = 2/5 \Rightarrow$
$x_2 = 3/5$

$x^* = (2/5, 3/5)$
$v^* = 8/5$

A juega 2/5 E(1)
y 3/5 E(2)

Solución para B

$$\max w = y_1' + y_2' + y_3'$$

sujeto a

$$4y_1' + 3y_2' + y_3' \leq 1$$
$$y_2' + 2y_3' \leq 1$$

	y_1'	y_2'	y_3'	h_1	h_2	Solución
h_1	4	3	1	1	0	1
h_2	0	1	2	0	1	1
W	-1	-1	-1	0	0	0
y_1'	1	¾	¼	¼	0	¼
h_2	0	1	2	0	1	1
W	0	-¼	-¾	¼	0	¼

y_1'	1	5/8	0	¼	-1/8	1/8
y_3'	0	½	1	0	½	½
w^*	0	1/8	0	¼	3/8	5/8

$v^* = 1/w^* = 5/8$

$y_j^* = y_j' / w^*$

$y_1^* = 1/5$
$y_2^* = 0$
$y_3^* = 4/5$

$y^* = (1/5, 0, 4/5)$

B juega 1/5 E(I)
0 E(II)y
4/5 E(III)

2. Resolver

-3	1	2	-3
1	2	1	1
1	0	-2	-2
1	2	2	$v^* = 1$

Como la tabla tiene un punto de silla en la coordenada (2, 1), entonces el valor del juego es 1, es decir el jugador A siempre juega la estrategia 2 y el jugador B juega la estrategia I.

3. Resolver

3	-2	5
-3	6	-1
1	-1	4
0	4	2

Est (III) paga más que Est (I), por lo que se tacha III para B.

3	-2
-3	6
1	-1
0	4

Solución para el jugador B

$$\max w = y_1' + y_2'$$

sujeto a

$$3y_1' - 2y_2' \leq 1$$
$$-3y_1' + 6y_2' \leq 1$$
$$y_1' - y_2' \leq 1$$
$$4y_2' \leq 1$$
$$y_j' \geq 0$$

Básica	y_1'	y_2'	h_1	h_2	h_3	h_4	Solución
h_1	3	-2	1	0	0	0	1
h_2	-3	6	0	1	0	0	1
h_3	1	-1	0	0	1	0	1
h_4	0	4	0	0	0	1	1
w	-1	-1	0	0	0	0	0
y_1'	1	-2/3	1/3	0	0	0	1/3
h_2	0	4	1	1	0	0	2
h_3	0	-1/3	-1/3	0	1	0	2/3
h_4	0	4	0	0	0	1	1
w	0	-5/3	1/3	0	0	0	1/3
y_1'	1	0	1/3	0	0	1/6	½
h_2	0	0	1	1	0	-1	1
h_3	0	0	-1/3	0	1	1/12	¾
y_2'	0	1	0	0	0	¼	¼
w	0	0	1/3	0	0	5/12	¾

$w^* \; z^* = 3/4$
$1/w^* = v^* \Rightarrow v^* = 4/3$

$y_j^* = y_j'/v^*$

$y_1^* = 1/2 * 4/3 = 2/3$
$y_2^* = 1/4 * 4/3 = 1/3$

Para A

$x_i^* = x_i'/v^*$

$x_1^* = 1/3 * 4/3 = 4/9$
$x_4^* = 5/12 * 4/3 = 5/9$
$x_2^* = 0$
$x_3^* = 0$

$x^* = (4/9, 0, 0, 5/9)$

PROGRAMACIÓN DINÁMICA

La programación dinámica, es una técnica matemática útil en la toma de una serie de decisiones interrelacionadas. Proporciona un procedimiento sistemático para determinar la combinación óptima de soluciones mediante etapas, donde interviene en cada una de ellas, exactamente una variable de optimización. Las diferentes etapas se enlazan a través de cálculos recursivos de manera que se genere una solución óptima factible a todo el problema.

Ejemplo 7-1 El problema de la diligencia [4]

Trata sobre un cazafortunas mítico de Missouri que decide ir al oeste a unirse a la fiebre del oro en California a mediados del siglo XIX. Tiene que hacer el viaje en diligencia a través de territorios sin ley cuando existían ciertos peligros de ser atacado por merodeadores. Aun cuando su punto de partida y su destino eran fijos, tenía muchas opciones en cuanto a qué estados debía elegir como puntos intermedios. En la figura 7-1 se muestran las rutas posibles, en donde cada estado está representado por un cuadro con una letra y la dirección del viaje es siempre de izquierda a derecha en el diagrama. Como se puede observar, se requerían cuatro etapas (jornadas en diligencia) para viajar desde su punto de partida en el estado A (Missouri) a su destino en el estado J (California).

Este cazafortunas era un hombre prudente que estaba preocupado por su seguridad. Después de reflexionar un poco se le ocurrió una manera bastante ingeniosa para determinar la ruta más segura. Se ofrecían pólizas de seguros de vida a los pasajeros. Como el costo de la póliza para cualquier jornada en la diligencia estaba basado en una evaluación cuidadosa de la seguridad del recorrido, la ruta más segura debía ser la que tuviera el menor costo total de la póliza del seguro.

El costo de la póliza estándar para el viaje en diligencia, del estado i al j, que se denotará por c_{ij}, es

	B	*C*	*D*
A	2	4	3

	E	*F*	*G*
B	7	4	6
C	3	2	4
D	4	1	5

	H	*I*
E	1	4
F	6	3
G	3	3

	J
H	3
I	4

Estos costos se muestran en la figura 7-1.

La atención se centrará sobre la pregunta ¿cuál es la ruta que minimiza el costo total de la póliza?

Solución del problema

Se observó primero que el procedimiento poco inteligente de elegir la ruta más barata en cada etapa sucesiva no conduce a una decisión óptima global. Al seguir esta estrategia se obtiene la ruta *A →B→F→I→J*, con un costo total de 13. Pero un pequeño sacrificio en una etapa puede permitir mayores ahorros más adelante. Por ejemplo, A→*D*→*F* es en total más barato que *A*→*B*→*F*.

Un enfoque posible para resolver este problema es el de la ruta más corta. Sin embargo, el número de rutas posibles es grande (18) y el cálculo del costo total para cada ruta no es una tarea atractiva.

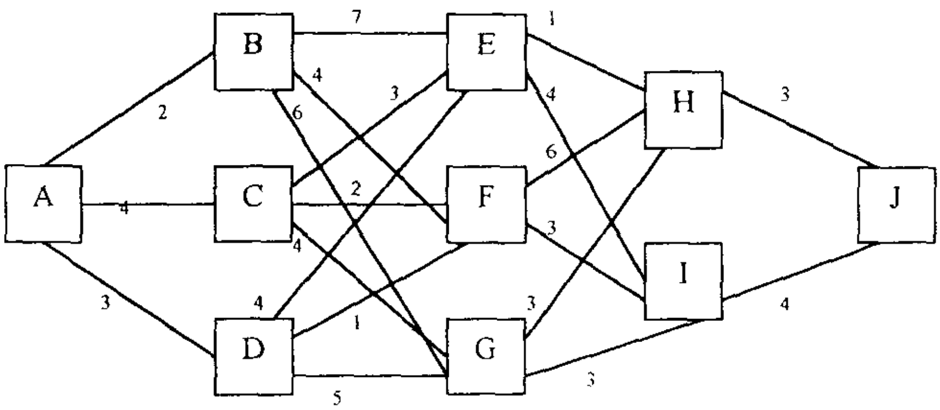


Figura 7-1 Sistema de caminos y costos para el problema de la diligencia.

Por fortuna la programación dinámica proporciona una solución con mucho menos esfuerzo que la enumeración exhaustiva.

En el problema de la diligencia, se comienza con el problema sencillo en el que el agente casi ha llegado al final de su viaje y sólo tiene una etapa más (una jornada en la diligencia) por recorrer. La solución óptima para este problema reducido es ir del estado actual (el que sea en el que se encuentre) a su destino final (estado *J*).

En cada una de las iteraciones siguientes, el problema se agranda aumentando de uno en uno el número de etapas que le quedan por recorrer para completar el viaje. En cada problema aumentado se puede encontrar la solución óptima del lugar al que debe dirigirse desde cada estado posible tomando en cuenta los resultados obtenidos en la iteración anterior. A continuación se describen los detalles de este procedimiento.

Formulación

Sean x_n (n = 1, 2, 3, 4) las variables de decisión que representan el destino inmediato de la etapa n (el n-ésimo viaje que se hará en diligencia). Entonces, la ruta seleccionada es $A \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$, en donde $x_4 = J$.

Sea $f_n(s, x_n)$ el costo total de la mejor *política* global para las etapas *restantes*, dado que el cazafortunas se encuentra en el estado s listo para iniciar la etapa n y elige x_n como destino inmediato. Dados s y n, sea x_n^* el valor de x_n (no necesariamente único) que minimiza $f_n(s, x_n)$, y sea $f_n^*(s)$ el valor mínimo correspondiente de $f_n(s, x_n)$. Entonces,

$$f_n^*(s) = \min f_n(s, x_n) = f_n(s, x_n^*),$$

en donde

$f_n(s, x_n)$ = costo inmediato (etapa n) + mínimo costo futuro (etapa $n + 1$ en adelante)

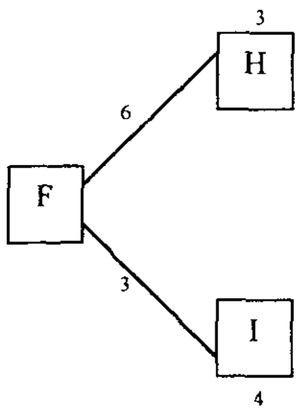
$= c_{sx_n} + f^*_{n+1}(x_n)$

El valor de c_{sx_n} está dado por las tablas anteriores para c_{ij} estableciendo $i = s$ (el estado actual) y $j = x_n$ (el destino inmediato). Como el destino final (estado J) se alcanza al terminar la etapa 4, $f_5^*(J) = 0$.

El objetivo es encontrar $f_1^*(A)$ y la ruta correspondiente. La programación dinámica la encuentra al hallar sucesivamente $f_4^*(s)$, $f_3^*(s)$, $f_2^*(s)$ para cada uno de los estados posibles s y usar después $f_2^*(s)$ para encontrar $f_1^*(A)$.

Procedimiento de solución

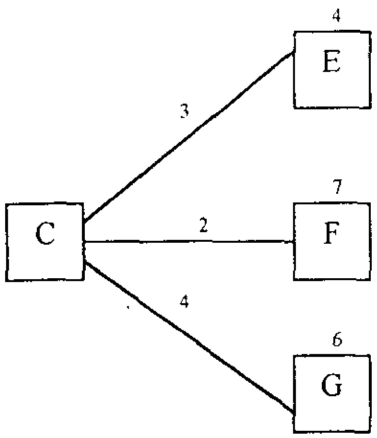
Cuando el cazafortunas tiene dos etapas por recorrer (n = 3), el procedimiento de solución requiere unos cuántos cálculos. Por ejemplo suponga que se encuentra en el estado F. Entonces, como se describe en el diagrama debe ir al estado H o al estado I a un costo inmediato de $c_{FH} = 6$ o $c_{FI} = 3$, respectivamente. Si elige el estado H, el costo adicional mínimo al llegar ahí está dado en la tabla anterior como $f_4^*(H) = 3$, de manera que el costo total de esta decisión es 6 + 3 = 9. De igual manera, si elige el estado I, el costo total es 3 + 4 = 7, que es menor. Por lo tanto deberá escoger el estado I, $x_3^* = I$, ya que da el costo mínimo, $f_3^*(F)$ = 7.



Se necesitan cálculos similares cuando se comienza en los otros dos estados posibles $s = E$ y $s = G$ cuando quedan dos jornadas por viajar para el problema con $n = 3$.

s \ x_3^*	$f_3(s, x_3) = c_{sx_3} + f_4^*(x_3)$			
	H	I	$f_3^*(s)$	x_3^*
E	4	8	4	H
F	9	7	7	I
G	6	7	6	H

La solución para la segunda etapa ($n = 2$), *en el que quedan tres jornadas por* recorrer, se obtiene en forma parecida. En este caso, $f_2(s, x_2) = c_{sx_2} + f_3^*(x_2)$. Por ejemplo, supongamos que el cazafortunas se encuentra en el estado C, como se muestra en el diagrama.



Ahora deberá ir al estado E, F o G con un costo inmediato de $c_{CE} = 3$, $c_{CF} = 2$ o $c_{CG} = 4$, respectivamente. Al llegar ahí, el costo adicional mínimo hasta llegar al destino está dado en la tabla de $n = 3$ como $f_3^*(E) = 4$, $f_3^*(F) = 7$ o $f_3^*(G) = 6$, *respectivamente, como se ilustra arriba de los estados E, F y G en el diagrama* anterior. A continuación se resumen los cálculos que resultan para las tres alternativas.

$x_2 = E$: $f_2(C, E) = c_{CE} + f_3^*(E) = 3 + 4 = 7$

$x_2 = F$: $f_2(C, F) = c_{CF} + f_3^*(F) = 2 + 7 = 9$

$x_2 = G$: $f_2(C, G) = c_{CG} + f_3^*(G) = 4 + 6 = 10.$

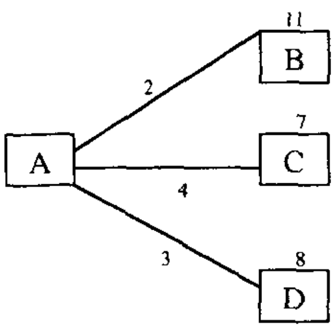
El mínimo de estos tres números es 7, por lo que el costo total mínimo desde el estado C al final es $f_2^*(C) = 7$ y el destino inmediato debe ser $x_2^* = E$.

Al hacer cálculos similares cuando se comienza desde el estado *B* o *D* se llega a los siguientes resultados para el problema de $n = 2$.

s \ x_2	$f_2(s, x_2) = c_{sx_2} + f_3^*(x_2)$				
	E	*F*	*G*	$f_2^*(s)$	x_2^*
B	11	11	12	11	*E* o *F*
C	7	9	10	7	*E*
D	8	8	11	8	*E* o *F*

Obsérvese en el primer y tercer renglones de esta tabla que *E* y *F* empatan como el valor de x_2 que minimiza, de manera que el destino inmediato desde cualquiera de los estados *B* o *D* debe ser $x_2^* = E$ o *F*.

Si se pasa el problema desde la primera etapa (n = 1), cuando se tienen las cuatro etapas por realizar, los cálculos son parecidos a los que se acaban de mostrar para la segunda etapa (n = 2), excepto que ahora sólo hay *un* inicio *posible, $s = A$, como se ilustra en el siguiente diagrama.*



Estos cálculos se resumen a continuación para los tres destinos inmediatos posibles:

$X_1 = B$: $\quad f_2(A, B) = c_{AB} + f_2^*(B) = 2 + 11 = 13.$

$X_1 = C$: $\quad f_2(A, C) = c_{AC} + f_2^*(C) = 4 + 7 = 11.$

$X_1 = D$: $\quad f_2(A, D) = c_{AD} + f_2^*(D) = 3 + 8 = 11.$

Como el mínimo es 11, $f_1^*(A) = 11$ y $x_1^* = C$ o D, como se muestra en la siguiente tabla:

s \ x_1	$f_1(s, x_1) = c_{sx_1} + f_2^*(x_1)$			$f_1^*(s)$	x_1^*
	B	C	D		
A	13	11	11	11	C o D

En este punto se puede identificar una solución óptima a partir de las cuatro tablas. Los resultados del problema para $n = 1$ indican que el cazafortunas debe elegir como primer destino inmediato el estado C o el estado D. Suponga que elige $x_1^* = C$. Con $n = 2$, el resultado para $s = C$ es $x_2^* = E$. Este resultado conduce al problema para $n = 3$, que da $x_3^* = H$ para $s = E$ y el problema con $n = 4$ indica que $x_4^* = J$ para $s = H$. Así, una ruta óptima es $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J$. Si se elige $x_1^* = D$, se obtienen las otras dos rutas óptimas $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J$ y $A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J$. Todas tienen un costo total de $f_1^*(A) = 11$.

La figura 7-2 resume también estos resultados del análisis de programación dinámica. Obsérvese que las dos flechas de la etapa 1 se obtienen de la primera y últimas columnas de la tabla de $n = 1$, y el costo resultante se encuentra en la penúltima columna. Cada una de las otras flechas (y el costo resultante) se lee en un renglón de cada una de las otras tablas, justo de la misma manera.

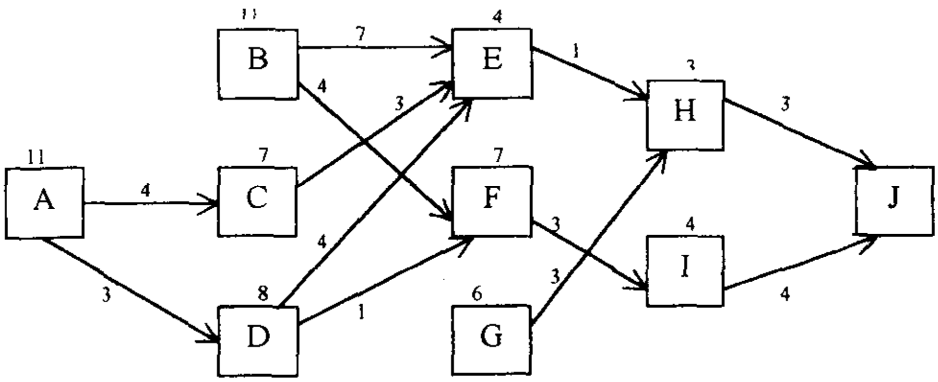


Figura 7-2 Nótese que el análisis es de atrás hacia delante

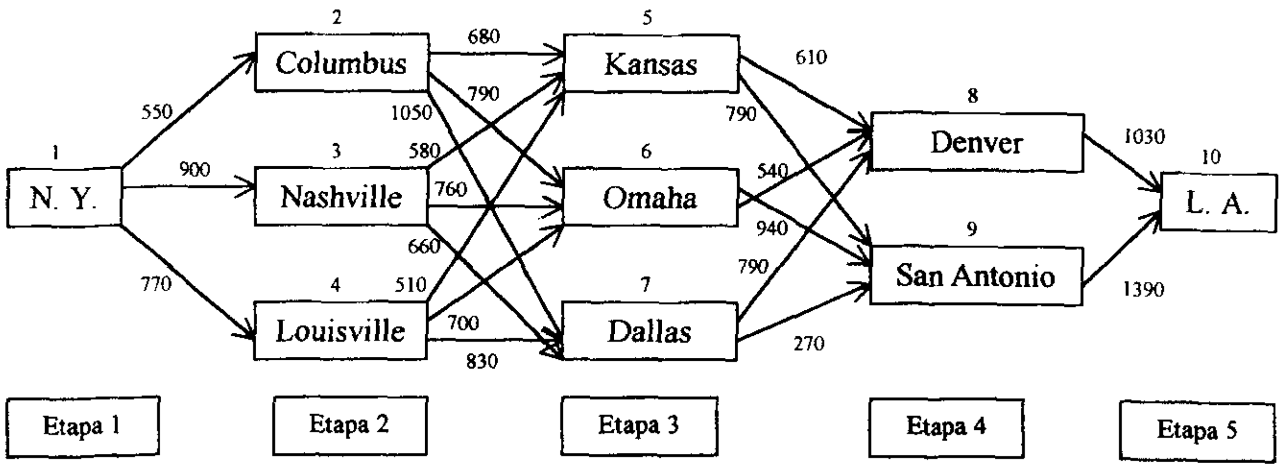
Ejercicios [2]

1. Se tiene una taza de 9 onzas y una taza de 4 onzas. Alguien pidió que se le entregaran exactamente seis onzas de leche. ¿Cómo se le puede hacer para lograr este cometido?

Se empezará con el final del problema, para resolverlo sería más fácil si se puede vaciar una onza de leche dentro de la taza de 4 onzas. Entonces llenar la de 9 onzas y vaciar tres en la de 4 onzas. Así habrán quedado seis onzas de leche en la taza de 9 onzas. El problema se describe en la siguiente tabla: (la situación inicial está escrita a lo último y la situación final está escrita primero).

Número de onzas de leche en la taza de 9 onzas	Número de onzas de leche en la taza de 4 onzas
6	0
6	4
9	1
0	1
1	0
1	4
5	0
5	4
9	0
0	0

2. David vive en Nueva York, pero planea viajar a Los Ángeles para obtener fama y fortuna. Los fondos de David son limitados, así es que ha decidido pasar las noches de su viaje en casa de sus amigos. Tiene amigos en Columbus, Nashville, Louisville, Kansas, Omaha, Dallas, San Antonio y Denver. Sabe que con un día de recorrido puede llegar a Columbus, Nashville o Louisville; con dos días a Kansas, Omaha o Dallas, puede llegar después de tres días de viaje a San Antonio o Denver. Finalmente, después de cuatro días manejando él puede llegar a Los Ángeles: Con tal de manejar el menor número de km, ¿dónde debe pasar las noches? (El primer día comienza cuando David sale de Nueva York).



Etapa 4

$f_4(8) = 1030$ *
$f_4(9) = 1390$

Etapa 3

$$f_3(5) \quad \min \begin{cases} c_{58} + f_4(8) = 610 + 1030 = 1640\ * \\ c_{59} + f_4(9) = 790 + 1390 = 2180 \end{cases}$$

Ruta más corta para llegar a Los Ángeles = 5 – 8 – 10.

$$f_3(6) \quad \min \begin{cases} c_{68} + f_4(8) = 540 + 1030 = 1570\ * \\ c_{69} + f_4(9) = 940 + 1390 = 2330 \end{cases}$$

Ruta más corta para llegar a Los Ángeles = 6 – 8 – 10.

$$f_3(7) \quad \min \begin{cases} c_{78} + f_4(8) = 790 + 1030 = 1820 \\ c_{79} + f_4(9) = 270 + 1390 = 1660\ * \end{cases}$$

Ruta más corta para llegar a Los Ángeles = 7 – 9 – 10.

Etapa 2

$$f_2(2) \quad \min \begin{cases} c_{25} + f_3(5) = 680 + 1640 = 2320\ * \\ c_{26} + f_3(6) = 790 + 1570 = 2360 \\ c_{27} + f_3(7) = 1050 + 1660 = 12710 \end{cases}$$

Ruta más corta para llegar a Los Ángeles = 2 – 5 – 8 – 10.

$$f_2(3) \quad \min \begin{cases} c_{35} + f_3(5) = 580 + 1640 = 2220\ * \\ c_{36} + f_3(6) = 760 + 1570 = 2330 \\ c_{37} + f_3(7) = 660 + 1660 = 2320 \end{cases}$$

Ruta más corta para llegar a Los Ángeles = 3 – 5 – 8 – 10.

$$f_2(4) \quad \min \begin{cases} c_{45} + f_3(5) = 510 + 1640 = 2150\ * \\ c_{46} + f_3(6) = 700 + 1570 = 2270 \\ c_{47} + f_3(7) = 830 + 1660 = 2490 \end{cases}$$

Ruta más corta para llegar a Los Ángeles = 4 – 5 – 8 – 10.

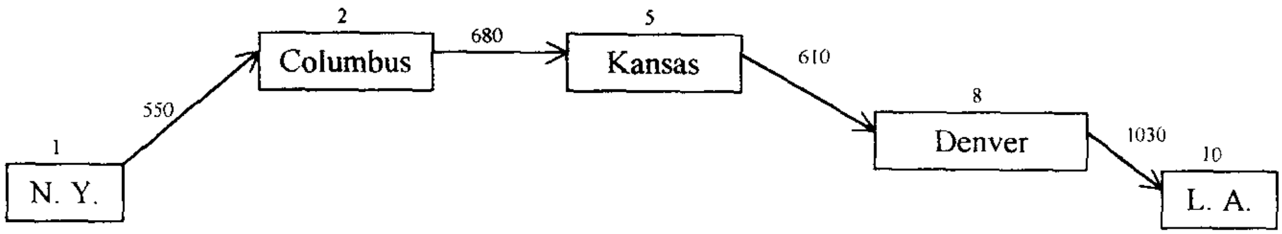
Etapa 1

$$f_1(1) \quad \min \begin{cases} c_{12} + f_2(2) = 550 + 2320 = 2870\ ^* \\ c_{13} + f_2(3) = 900 + 2220 = 3120 \\ c_{14} + f_2(4) = 770 + 2150 = 2920 \end{cases}$$

Ruta más corta para llegar a Los Ángeles = 1 – 2 – 5 – 8 – 10.

La ruta que debe seguir David es, salir de Nueva York hacia Columbus, llegar a Kansas, visitar a su amigo en Denver y finalizar en Los Ángeles; recorriendo un total de 2870 km.

La siguiente gráfica muestra el recorrido de David.



Solución de problemas de PL por programación dinámica

El problema de programación lineal general

$$\text{maximizar } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

sujeto a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

puede formularse como un modelo de programación dinámica. Cada actividad j ($j = 1, 2,\ldots,n$) puede considerarse como una etapa. El nivel de actividad x_j (≥ 0) representa las alternativas en la etapa j. Ya que x_j es continua, cada etapa posee un número infinito de alternativas dentro del espacio factible. Se supone que todas las $a_{ij} \geq 0$.

Los estados pueden definirse como las cantidades de los recursos que se van a asignar a la etapa actual y las etapas subsecuentes. (Esto dará lugar a una ecuación recursiva de retroceso).

Sean $(B_{1j}, B_{2j}, ..., B_{mj})$ los estados del sistema en la etapa j, esto es, las cantidades de recursos 1, 2, ..., n. Usando la ecuación recursiva, sea $f_j(B_{1j}, B_{2j}, ..., B_{mj})$ el valor óptimo de la función objetivo para las etapas j, $j + 1$, ..., n dados los estados $B_{1j}, ..., B_{mj}$. Por consiguiente,

$$f_n(B_{1j}, B_{2j}, ..., B_{mj}) = \max_{\substack{0 \le a_{in}x_n \le B_{in} \\ i=1,...,m}} \{c_n x_n\}$$

$$f_n(B_{1j}, B_{2j}, ..., B_{mj}) = \max_{\substack{0 \le a_{ij}x_j \le B_{ij} \\ i=1,...,m}} \{c_j x_j + f_{j+1}(B_{1j} - a_{1j}x_j, ..., B_{mj} - a_{mj}x_j)\},$$

$$j = 1, 2, ..., n-1$$

donde $0 \le B_{ij} \le b_i$ para todas i y j.

Ejercicios [5]

1.

$$\text{Max } z = 4x_1 + 14x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + 7x_2 \le 21$$
$$7x_1 + 2x_2 \le 21$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Sean (v_j, w_j) los estados en la etapa j ($j = 1, 2$). Por tanto,

$$f_2(v_2, w_2) = \max_{\substack{0 \le 7x_2 \le v_2 \\ 0 \le 2x_2 \le w_2}} (14x_2)$$

Ya que x_2 # min $\{v_2/7, w_2/2\}$ y $f_2(x_2/ v_2, w_2) = 14x_2$, entonces

$$f_2(v_2, w_2) = \max_{x_2} f_2(x_2/ v_2, w_2) = 14 \min \{v_2/7, w_2/2\}$$

y $x_2^* = \min (v_2/7, w_2/2)$.

Ahora

$$f_1(v_1, w_1) = \max_{\substack{0 \le 2x_1 \le v_1 \\ 0 \le 7x_1 \le w_1}} \{4x_1 + f_2(v_1 - 2x_1, w_1 - 7x_1)\}$$
$$= \max_{\substack{0 \le 2x_1 \le v_1 \\ 0 \le 7x_1 \le w_1}} \{4x_1 + 14 \min [(v_1 - 2x_1)/7, (w_1 - 7x_1)/2]\}$$

Ya que ésta es la última etapa, $v_1 = 21$, $w_1 = 21$. Por consiguiente,
$x_1 \le (v_1/2, w_1/7)$
$x_1 \le (21/2, 21/7) = (21/2, 3) \rightarrow$
$x_1 \le 3$
y

$$\begin{aligned}
f_n(x_1/\ v_j,\ w_j) &= f_j(x_1,\ 21,\ 21)\\
&= 4x_1 + 14 \min\{(21 - 2x_1)/7,\ (21 - 7x_1)/2\}\\
&= 4x_1 + \{14\ (21 - 7x_1)/2,\ 0\le x_1\le 7/3;\ 14(21 - 2x_1)/7,\ 7/3\le x_1\le 3\}\\
&= 4x_1 + \{147 - 49x_1,\ 0\le x_1\le 7/3;\ 42 - 4x_1,\ 7/3\le x_1\le 3\}\\
&= \{4x_1 + 147 - 49x_1;\ 4x_1 + 42 - 4x_1\}\\
&= \{147 - 45x_1,\ 0\le x_1\le 7/3;\ 42,\ 7/3\le x_1\le 3\}
\end{aligned}$$

Por tanto, para los intervalos dados de x_1,

$$\begin{aligned}
f_1(v_1,\ w_1) = f_1(21,\ 21) &= \max_{x_1}\ (147 - 45x_1,\ 42)\\
&= 147 - 45(7/3) = 42 = 42
\end{aligned}$$

lo cual se logra en $x_1^* = 7/3$.

Para obtener x_2^*, se observa que

$$\begin{aligned}
v_2 &= v_1 - 2x_1 = 21 - 14/3 = 49/3\\
w_2 &= w_1 - 7x_1 = 21 - 49/3 = 14/3
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$x_2^* = \min\ (v_2/7,\ w_2/2) = \min\ (49/21,\ 14/6) = \min\ (7/3,\ 7/3) \rightarrow$$

$x_2^* = 7/3$.

Por consiguiente, la solución óptima es $Z^* = 42$, $x_1^* = 7/3$, $x_2^* = 7/3$.

2.

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\le 6\\
2x_1 + x_2 &\le 8\\
x_1,\ x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

Sean $(v_j,\ w_j)$ los estados en la etapa $j\ (j = 1,\ 2)$. Por tanto,

$$f_2(v_2,\ w_2) = \max_{\substack{0\le 2x_2\le v_2\\ 0\le x_2\le w_2}} (2x_2)$$

Ya que $x_2 \le \min\{v_2/2,\ w_2\}$ y $f_2(x_2/\ v_2,\ w_2) = 2x_2$, entonces

$$f_2(v_2,\ w_2) = \max_{x_2}\ f_2(x_2/\ v_2,\ w_2) = 2\min\{v_2/2,\ w_2\}$$

y $x_2^* = \min\ (v_2/2,\ w_2)$.

Ahora

$$f_1(v_1,\ w_1) = \max_{\substack{0\le x_1\le v_1\\ 0\le 2x_1\le w_1}} \{3x_1 + f_2(v_1 - x_1,\ w_1 - 2x_1)\}$$

$$= \underset{\substack{0 \le x_1 \le v_1 \\ 0 \le 2x_1 \le w_1}}{\text{máx}} \{3x_1 + 2 \min [(v_1 - x_1)/2,\ w_1 - 2x_1]\}$$

Ya que ésta es la última etapa, $v_1 = 6$, $w_1 = 8$. Por consiguiente,
$x_1 \le (v_1,\ w_1/2)$
$x_1 \le (6,\ 8/2) = (6,\ 4) \rightarrow$
$x_1 \le 4$
y

$$\begin{aligned} f_n(x_1/\ v_j,\ w_j) &= f_j(x_1,\ 6,\ 8) \\ &= 3x_1 + 2 \min \{(6 - x_1)/2,\ 8 - 2x_1\} \\ &= 3x_1 + \{2(8 - 2x_1),\ 0 \le x_1 \le 10/3;\ 2(6 - x_1)/2,\ 10/3 \le x_1 \le 4\} \\ &= 3x_1 + \{16 - 4x_1,\ 0 \le x_1 \le 10/3;\ 6 - x_1,\ 10/3 \le x_1 \le 4\} \\ &= \{3x_1 + 16 - 4x_1;\ 3x_1 + 6 - x_1\} \\ &= \{16 - x_1,\ 0 \le x_1 \le 10/3;\ 2x_1 + 6,\ 10/3 \le x_1 \le 4\} \end{aligned}$$

Por tanto, para los intervalos dados de x_1,

$$\begin{aligned} f_1(v_1,\ w_1) = f_1(6,\ 8) &= \underset{x_1}{\text{máx}} (16 - x_1,\ 2x_1 + 6) \\ &= 16 - (10/3) = 2(10/3) + 6 = 38/3 \end{aligned}$$

lo cual se logra en $x_1^* = 10/3$.

Para obtener x_2^*, se observa que

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 - \ x_1 = 6 - 10/3 = 8/3 \\ w_2 &= w_1 - 2x_1 = 8 - 20/3 = 4/3 \end{aligned}$$

En consecuencia

$$x_2^* = \min (v_2/2,\ w_2) = \min (8/6,\ 4/3) = \min (4/3,\ 4/3) \rightarrow$$

$x_2^* = 4/3$.

Por consiguiente, la solución óptima es $Z^* = 38/3$, $x_1^* = 10/3$, $x_2^* = 4/3$.

3.

$$\text{Max } \mathbf{z} = 2x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ x_2 &\le 430 \\ 2x_2 &\le 460 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Sean $(v_j,\ w_j)$ los estados en la etapa j ($j = 1, 2$). Por tanto,

$$f_2(v_2,\ w_2) = \underset{\substack{0 \le x_2 \le v_2 \\ 0 \le 2x_2 \le w_2}}{\text{máx}} (5x_2)$$

Ya que $x_2 \leq \min\{v_2, w_2/2\}$ y $f_2(x_2/\ v_2, w_2) = 5x_2$, entonces

$$f_2(v_2, w_2) = \max_{x_2} f_2(x_2/\ v_2, w_2) = 5 \min\{v_2, w_2/2\}$$

y $x_2^* = \min(v_2, w_2/2)$.

Ahora

$$\begin{aligned} f_1(v_1, w_1) &= \max_{0\leq 2x_1 \leq v_1} \{2x_1 + f_2(v_1 - 2x_1, w_1)\} \\ &= \max_{0\leq 2x_1 \leq v_1} \{2x_1 + 5 \min[(v_1 - 2x_1), w_1/2]\} \end{aligned}$$

Ya que ésta es la última etapa, $v_1 = 430$, $w_1 = 460$. Por consiguiente,
$x_1 \leq (v_1/2)$
$x_1 \leq (430/2) = (215) \Rightarrow$
$x_1 \leq 215$
y

$$\begin{aligned} f_n(x_1/\ v_j, w_j) &= f_j(x_1, 430, 460) \\ &= 2x_1 + 5 \min\{430 - 2x_1, 460/2\} \\ &= 2x_1 + \{5(230), 0\leq x_1 \leq 100;\ 2(430 - 2x_1), 100\leq x_1 \leq 215\} \\ &= \{2x_1 + 1150, 0\leq x_1 \leq 100;\ -8x_1 + 2150, 100\leq x_1 \leq 215\} \end{aligned}$$

Por tanto, para los intervalos dados de x_1,

$$\begin{aligned} f_1(v_1, w_1) = f_1(430, 460) &= \max_{x_1} (2x_1 + 1150, -8x_1 + 2150) \\ &= 2(100) + 1150 = -8(100) + 2150 = 1350 \end{aligned}$$

lo cual se logra en $x_1^* = 100$.
Para obtener x_2^*, se observa que

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 - 2x_1 = 430 - 200 = 230 \\ w_2 &= w_1 - 0 = 460 \end{aligned}$$

En consecuencia

$$x_2^* = \min(v_2, w_2/2) = \min(230, 460/2) = \min(230, 230) \Rightarrow$$

$x_2^* = 230$.

Por consiguiente, la solución óptima es $Z^* = 1350$, $x_1^* = 100$, $x_2^* = 230$.

En los tres ejercicios anteriores todos los coeficientes de restricción son no negativos, lo cual no implica que para una restricción del tipo ($\leq$) sea cierto que el segundo miembro dará el valor máximo de la variable de estado. El problema se agudiza más si sucede que la solución es no acotada. Entonces la conclusión general es que *la programación dinámica no es adecuada para resolver el problema de programación lineal general.*

TEMAS SELECTOS

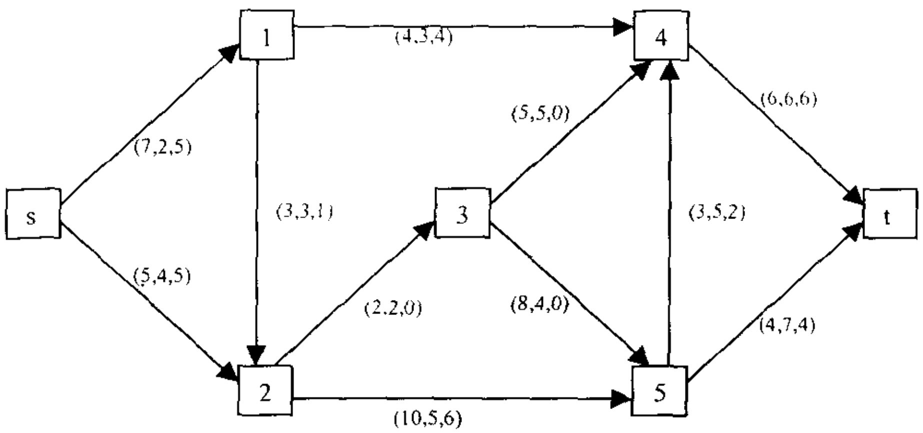
Flujo máximo a costo mínimo [3]

El problema de flujo máximo a costo mínimo tiene su origen entre los modelos de optimización de redes. Al igual que el problema de flujo máximo, toma en cuenta un flujo a través de una red con capacidades limitadas en sus aristas; y al igual que el problema de la ruta más corta, considera un costo para el flujo a través de cada arco. Entonces se tiene un nuevo problema con restricciones en las aristas, que representan la capacidad, el costo unitario y flujo; por lo que es necesario un método eficiente para resolver este modelo.

El método de solución se basa en la construcción de una red marginal asociada a un flujo dado que refleja la posibilidad de cambiar (incrementar o decrementar) dicho flujo a través de la red, e ilustra la modificación del costo del mismo cuando este se distribuye a lo largo de un ciclo.

Si el costo de todos los ciclos dentro de la red marginal es > 0, entonces el costo del flujo en la red original es el mínimo y la solución factible es la óptima.

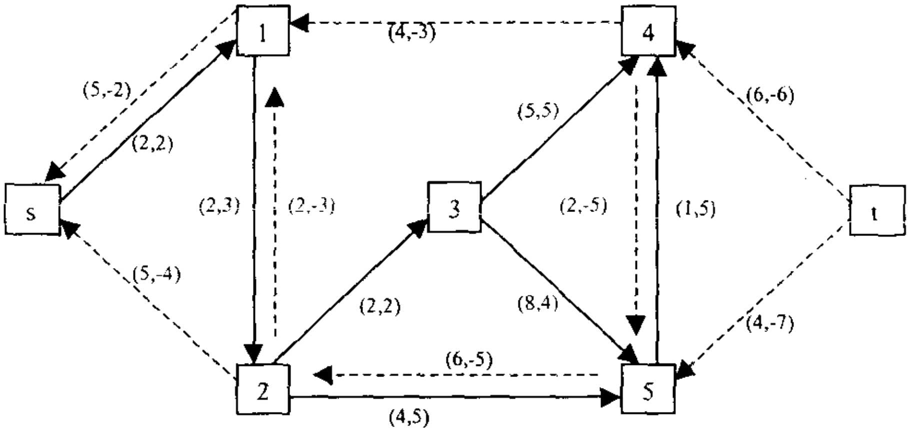
Si el costo de algún ciclo dentro de la red marginal es < 0, entonces se redistribuyen los flujos obteniendo un flujo nuevo y se repite el proceso hasta que no exista ciclo negativo en la red marginal con el cual se pueda disminuir el costo del flujo. En todo este proceso, el valor del flujo permanece sin cambio.



Los números asociados a cada arista son, respectivamente, la capacidad, el costo unitario y el flujo. Esta red tiene un flujo máximo $v = 10$ y un costo mínimo inicial de

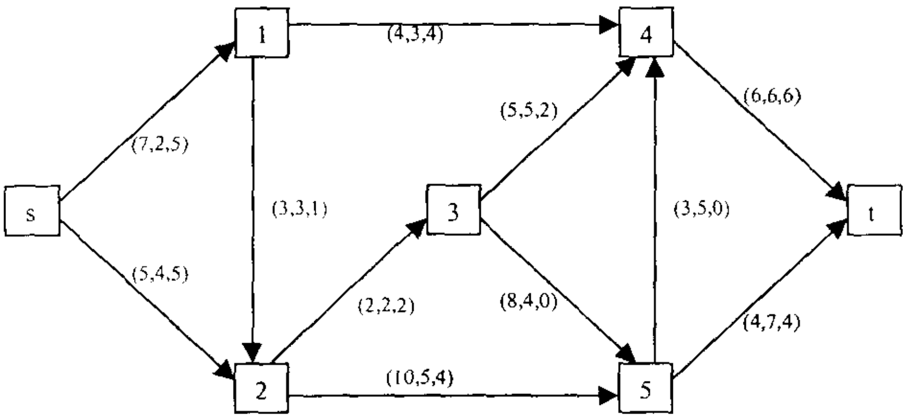
$$c = 10 + 20 + 3 + 12 + 30 + 10 + 36 + 28 = 149$$

La red marginal asociada a la red anterior, con respecto al flujo es la siguiente:

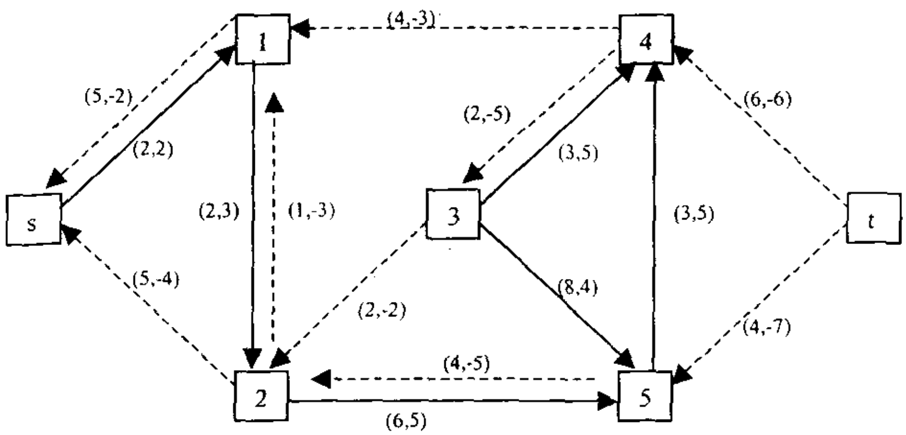


Los números asociados a cada arista corresponden a la capacidad y el costo unitario del flujo a través de ella.

Existe un ciclo dirigido (2 → 3 → 4 → 5 → 2) de costo negativo $c = -3$, y una redistribución de flujo de 2 unidades, lo cual indica que el costo inicial será disminuido en - 3 (2) = -6 unidades.



$c = 10 + 20 + 3 + 12 + 4 + 20 + 10 + 36 + 28 = 143$

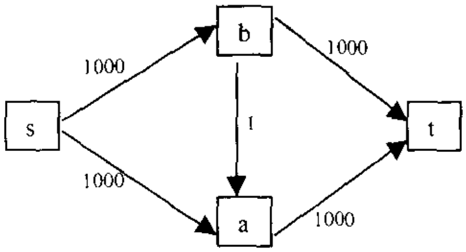


Esta red no tiene ningún ciclo dirigido negativo, así es que aquí acaba todo el proceso. En todo el proceso se mantiene un flujo factible (con valor v) y en cada iteración se mejora el costo.

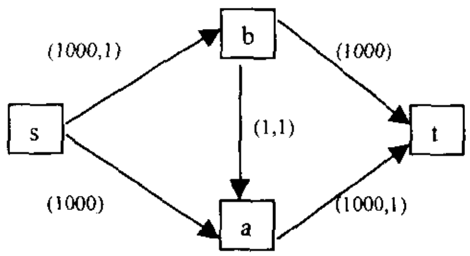
Problema de la ruta más corta [6]

El problema de flujo máximo puede resolverse con el algoritmo de Ford y Fulkerson, en el cual los vértices pueden ser etiquetados en cualquier orden. Es decir, la selección de una trayectoria aumentante (cuando esta existe) puede hacerse arbitrariamente. Con el siguiente ejemplo se ilustra a dónde nos puede conducir un problema al cual se le aplican estas imparcialidades.

Considérese la red de transporte siguiente. Supongamos que se empieza a etiquetar el algoritmo con flujo cero y alternativamente usamos las trayectorias P_1: s, a, b, t y P_2: s, b, a, t como trayectorias aumentantes. En cada paso el valor del flujo está incrementándose en exactamente 1 unidad, y el flujo máximo de 2000 unidades es alcanzado después de 2000 pasos aumentantes.



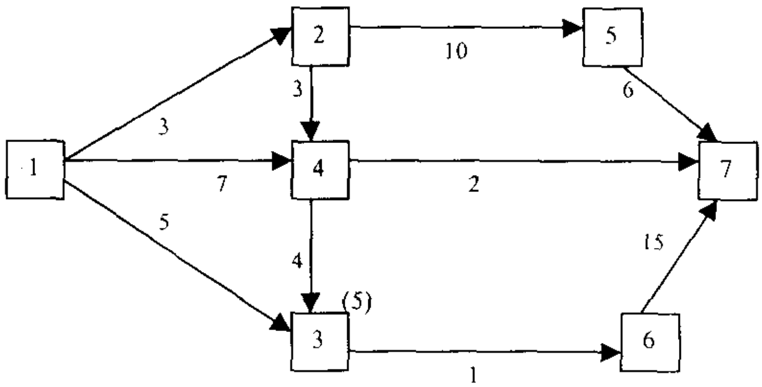
Así el número de pasos usados en este caso es ilimitado, ya que está en función al número de vértices y al número de aristas de la red. Este número está en función de la capacidad, la cual puede ser arbitrariamente grande.



Sin embargo este método puede mejorarse. Para evitar este p'roblema, Edmonds & Karp [6] sugirieron un refinamiento en el algoritmo de etiquetado: En cada paso aumentante el flujo debe pasar a través de la trayectoria más corta. Por trayectoria más corta se entiende una trayectoria que tiene el menor número de aristas.

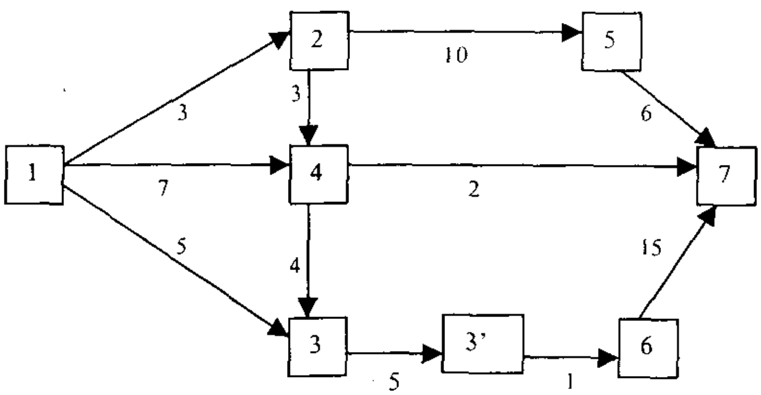
Puede verse fácilmente que la trayectoria más corta aumentante será seleccionada si en el proceso de etiquetado podemos explorar sobre una base etiquetada, es decir, si el vértice v ha sido etiquetado antes que el vértice u, entonces exploramos v antes que u. Explorar un vértice etiquetado v significa etiquetar (siempre y cuando sea posible) todos los vértices no etiquetados adyacentes a v.

Flujo máximo con restricciones en los nodos

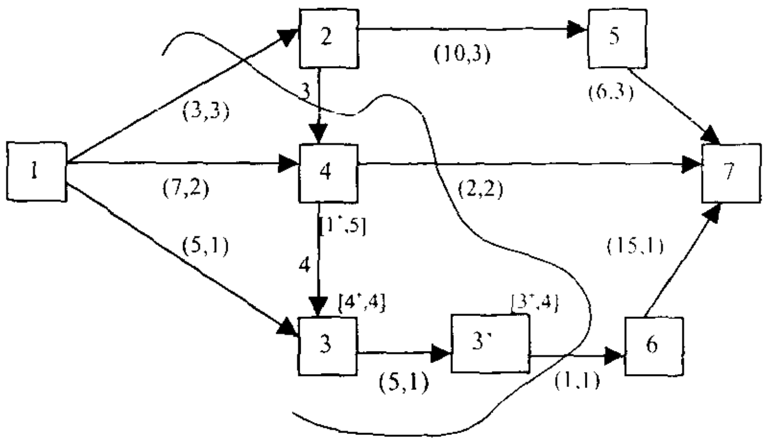


Red con restricción en el nodo 3, se realiza una transformación y se resuelve con el algoritmo de Ford y Fulkerson.

Red transformada o reducida



Solución *óptima mediante el algoritmo de Ford y Fulkerson*



C = ({1, 3, 3', 4}, {2, 5, 6, 7})
v = 6

Programación entera [2]

En los primeros capítulos vimos muchos ejemplos de distintas aplicaciones de programación lineal. La única diferencia entre programación lineal y programación entera es el hecho de exigir valores enteros en la formulación del problema.

El modelo matemático para programación entera es sencillamente el modelo de *programación lineal con la restricción adicional de que las variables deben tener valores* enteros. Es común sugerir que si un problema tiene un número finito de soluciones posibles, entonces dicho problema siempre puede resolverse mediante el método trivial de solución: que consiste en verificar cada posible solución y elegir la mejor. Por desgracia, en este tipo de razonamiento existe una falacia, la cual es que tener un número finito de soluciones factibles asegure que el problema se puede resolver; y es que los números finitos pueden ser astronómicamente grandes, como se puede observar en el siguiente planteamiento de un problema clásico.

"Problema de la mochila"

Un excursionista tiene una mochila con capacidad v, y tiene una lista de cháchara de las cuales debe escoger las necesarias para llevar a su próximo viaje, sin que excedan la capacidad de la mochila.

Cháchara (i)	Volumen (v_i)	Utilidad (u_i)
Navaja	2	100
Agua	10	100
Ropa	50	50
Víveres	30	75
Sleeping bag	80	25
Chamarra	50	50
Rifle	10	7

Tennis	18	5
Botas	25	75
Utensilios para la comida	20	12
Cámara fotográfica	15	75
Cerillos	2	95
Papel sanitario	10	80
Pala	70	20
Radio	15	50
Reloj	30	10
Brújula	5	100
Mapa	5	100

Función objetivo: Max $z = \Sigma\,(u_i)x_i$

Restricciones: $\Sigma(v_i)x_i < v$
$x_i = \{0,1\}$

Aparentemente este problema es muy sencillo, porque existe una sola restricción $x_i = \{0,1\}$. *Su dimensión es* n = N° *chácharas, es decir igual a 20 y el número de subconjuntos de n es:*

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \binom{n}{5} + \binom{n}{6} + \ldots$$

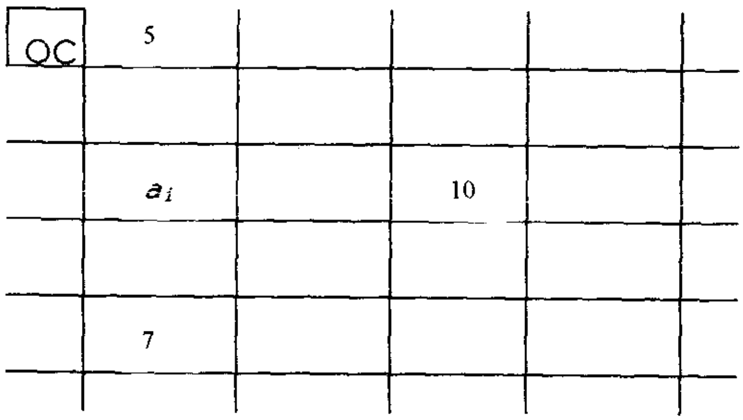
Por lo que se ve este problema tiene un número estratosféricamente grande de soluciones posibles, por lo que se convierte en un problema realmente difícil.

Más ejemplos de problemas combinatorios "difíciles" en el sentido del de la mochila.

"Problema del cartero chino"[7]

Un cartero desea repartir todas sus cartas a un conjunto de direcciones de forma que *la distancia total a recorrer sea la más corta posible. Evidentemente deberá recorrer una vez al menos cada una de las carreteras, pero por razones obvias no quiere pasar más de una vez por una misma carretera a menos que no haya más remedio.*

El problema puede formularse en términos de la teoría de redes, en el que la gráfica representa la red de carreteras que unen las diversas direcciones, y el peso de cada arista representa la longitud de la carretera correspondiente. Formulado de este modo, el problema consiste en encontrar una secuencia de aristas cerrada que incluya todas las aristas y que tenga un peso total mínimo.



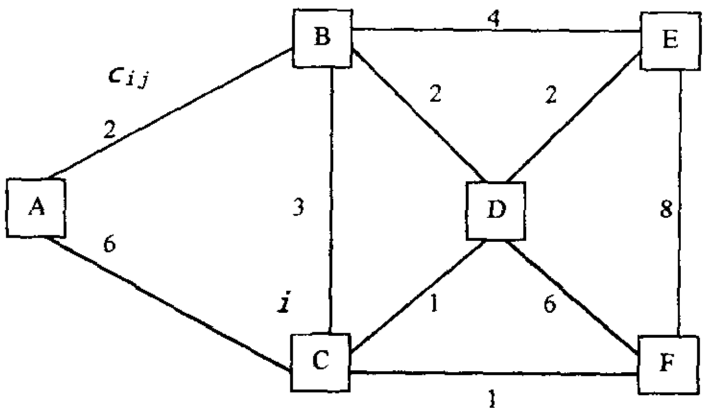
Encontrar en G un paseo de longitud mínima que cubra todas las aristas.

$$1(P) \geq \Sigma\, d(a_i)$$

"Problema del agente viajero"[7]

En este problema, un vendedor ambulante desea visitar varias ciudades y volver a su punto de partida, de manera que cubra la menor distancia total posible. Por ejemplo, si son seis ciudades A, B, C, D, E y F, y si las distancias son las que se indican en la figura, entonces la ruta más corta posible es A, B,D, C,F, E, B, A, que supone una distancia total de 20, como puede verse por simple inspección.

Se puede observar también que este problema puede ser formulado en términos del problema de la ruta más corta en donde los números representan tanto distancias como tiempos empleados en ir de una ciudad a otra, o el costo de estos trayectos.



Un posible algoritmo consistiría en calcular la distancia total de todos los posibles circuitos hamiltonianos, pero resulta demasiado complicado para resolver el problema cuando hay involucradas más de cuatro o cinco ciudades.

CONCLUSIONES

Como se ha podido observar, la Investigación de Operaciones tiene muchísimas aplicaciones, para las cuales hay diversos métodos de resolución.

Es muy útil en la obtención de soluciones óptimas de casi cualquier tipo de problema.

Creo que la compilación de estos ejercicios es muy importante, ya que son parte primordial del aprendizaje de todo estudiante de un curso introductorio de Investigación de Operaciones.

Se buscaron los problemas equivalentes de "casos tipo" que ilustran peculiaridades de los temas que se cubrieron.

Espero que este trabajo haya servido para la aterrización de muchas ideas que no siempre son muy claras en el momento en que se está estudiando un tema.

Por lo demás, doy gracias a todas las personas que participaron en la realización de este Compendio de ejercicios de investigación de operaciones.

BIBLIOGRAFÍA

1. Bazaraa, M.S., y Jarvis, J.J. *Programación Lineal y Flujo en Redes.* Escuela de Ingeniería Industrial y de Sistemas Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia. 11ª edición, Ed. Limusa, México, 1996.

2. Cormen, T.H., Leiserson, C.E., y Rivest, R.L. *Introduction to Algorithms.* Ed. McGraw-Hill, Book Company, 1970

3. Hernández Ayuso, M.C. *Introducción a la Teoría de Redes.* Sociedad Matemática Mexicana, 1997

4. Hillier, F.S., y Lieberman, G.J. *Introducción a la investigación de operaciones.* 4ª edición, Ed. McGraw-Hill, México, 1997.

5. Taha, H. *Investigación de Operaciones.* 5ª edición, Ed. Alfaomega, México, 1995.

6. Thulasiraman, K., y Swamy, M.N.S. *Graphs: Theory and algorithms,* Ed. John Wiley & Sons, Inc, USA, 1992.

7. Wilson, R.J. Introducción a la Teoría de Grafos. Ed. Alianza Editorial, Madrid, 1983.