

01183



DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Facultad de Ingeniería

**CÁLCULO DEL FLUJO BIDIMENSIONAL HORIZONTAL
CON COORDENADAS CURVILÍNEAS
GENERALES**

AMADO ABEL JIMÉNEZ CASTAÑEDA

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA A LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE
POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER

EL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERÍA

HIDRÁULICA

DIRIGIDA POR:

DR. MOISÉS BEREZOWSKY VERDUZCO

CIUDAD UNIVERSITARIA

2000

277371



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Con cariño a

MI MAMÁ

y a mis hermanas

MECHES Y CHELIS

RESUMEN

Se presenta el desarrollo de un modelo matemático de flujo bidimensional horizontal a superficie libre en régimen subcrítico. El modelo permite calcular el campo de velocidades en cuerpos de agua cuya profundidad es notablemente menor que el ancho de su superficie libre, y sus fronteras pueden ser de forma curva o con alineamiento irregular.

Se ha visto la conveniencia de usar sistemas de coordenadas curvilíneas generales para representar en forma adecuada las fronteras curvas. El uso de este tipo de coordenadas requiere de conceptos que son poco conocidos. En el trabajo se explican y aclaran con detalle los conceptos fundamentales sobre las distintas versiones que existen para expresar vectores en coordenadas curvilíneas generales. Se discute la selección de la versión covariante con componentes físicos de las ecuaciones de hidrodinámica, que es la versión que se usa en el presente trabajo, y se hace la deducción de cada uno de los términos que forman la versión de las ecuaciones en coordenadas generales. En las ecuaciones de hidrodinámica se incluyen los términos que toman en cuenta el efecto de la turbulencia, lo cual permite predecir en forma adecuada zonas de flujo con separación y recirculación. Se aplican y discuten dos modelos de turbulencia.

El sistema de ecuaciones diferenciales parciales en coordenadas curvilíneas se resuelve con el esquema de diferencias finitas de MacCormack, usando diferencias finitas hacia adelante y hacia atrás, en forma alternada.

El modelo numérico que se presenta en este trabajo se calibró y verificó con cinco casos de mediciones de laboratorio de campos de velocidades.

Entre las contribuciones más relevantes de este trabajo, está la explicación de las distintas formas de expresar un vector en coordenadas curvilíneas generales, la selección y deducción de la versión más adecuada de las ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas generales, así como mostrar el efecto de la construcción de la malla en el cálculo del campo de velocidades.

ABSTRACT

The development of a mathematical model for computation of shallow-water two-dimensional turbulent flow is presented. The model allows calculate the velocity field in water bodies where their boundaries can be curved or have irregular alignment.

General curvilinear coordinates systems should be used in order to represent adequately curved or irregular boundaries. In the thesis, fundamental concepts about different ways to express vectors in general curvilinear coordinates are explained and clarified in detail. From the different versions of the hydrodynamic equations in general curvilinear coordinates, the covariant version with physical components is selected and discussed in detail.

In order to predict adequately separation and recirculation zones, two turbulence models are also applied and discussed.

The system of differential equations is solved by the MacCormack explicit finite-difference scheme using forward and backward finite differences.

In order to check the numerical model, five runs were used in laboratory channels. The measured velocities in the longitudinal and transversal directions are used for comparison with the numerical simulation.

Among the contributions of this work, are the discussion of the different ways to express a vector in general curvilinear coordinates, the selection and deduction of the most adequate of the hydrodynamic equations in general curvilinear coordinates, as well as to show the effect of construction of the mesh in the calculation of the velocity field.

RESUMEN

1. INTRODUCCIÓN	1
2. COORDENADAS CURVILÍNEAS GENERALES Y RECTANGULARES	8
2.1 Concepto de invariancia	8
2.2 Transformaciones entre coordenadas curvilíneas generales y rectangulares	9
2.3 Forma contravariante de un vector	11
2.3.1 Elementos del tensor métrico covariante	14
2.3.2 Magnitud de un vector en forma contravariante	15
2.4 Forma covariante de un vector	16
2.4.1 Elementos del tensor métrico contravariante	19
2.4.2 Magnitud de un vector en forma covariante	19
2.5 Forma covariante de un vector con componentes físicos	20
2.5.1 Elementos del tensor métrico contravariante con componentes físicos	22
2.5.2 Magnitud de un vector en forma covariante con componentes físicos	22
2.6 Generación de mallas ajustadas a la frontera	23
3. VERSIÓN COVARIANTE DE LAS ECUACIONES DE HIDRODINÁMICA	25
3.1 Versiones de las Ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas generales	26
3.2 Deducción de la versión covariante de las ecuaciones de hidrodinámica	28
3.2.1 Ecuación dinámica en la dirección normal al eje curvilíneo ξ constante	32
3.2.2 Ecuación de continuidad en coordenadas curvilíneas	42
3.3 Ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas generales con componentes físicos	43
3.4 Modelos de turbulencia	46
3.4.1 Modelo de orden cero	46
3.4.2 Modelo de turbulencia $k-\epsilon$	47

4. ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINITAS	54
4.1 Metodología de cálculo	55
4.2 Discretización de las ecuaciones	58
4.3 Condiciones de frontera	65
4.3.1 Frontera cerrada (pared)	65
4.3.2 Frontera abierta con nivel de agua conocido	69
4.3.3 Frontera abierta con flujo conocido	71
4.4 Filtro numérico y condición de estabilidad	72
5. CALIBRACIÓN Y VERIFICACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO	74
5.1 Flujo en una curva horizontal	74
5.2 Efecto de un espigón en el flujo de un canal rectangular	79
5.3 Obstáculo de forma irregular	85
5.4 Flujo en un canal horizontal con curvatura compuesta	100
6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	107
AGRADECIMIENTOS	111
REFERENCIAS	112
APÉNDICE	123

*"A veces nuestro destino se parece a un árbol en invierno.
¿Quién va a pensar ante su triste aspecto,
que esas rígidas ramas reverdecerán en primavera?"*

Goethe.

1. INTRODUCCIÓN

En muchos estudios de hidráulica y de calidad del agua se requiere conocer con detalle el campo de velocidades de un flujo a superficie libre. Ejemplos de estos estudios son: el efecto en las características del flujo al colocar pilas de puente o espigones en un río, la estimación de la erosión y el depósito de sedimento en cauces, el cálculo del transporte y la dispersión de contaminantes en un río, lago, estuario o marina, la predicción de la demanda bioquímica de oxígeno y oxígeno disuelto en almacenamientos, etc. Para resolver en forma adecuada estos problemas es necesario predecir con suficiente aproximación el campo de velocidades.

En la actualidad es común el uso de modelos matemáticos en la solución de problemas de flujos a superficie libre. Dependiendo del problema que se desea resolver, se pueden usar modelos unidimensionales, bidimensionales o tridimensionales. En general, se usa un modelo unidimensional cuando no se requiere conocer con detalle el campo de velocidades, y es suficiente con obtener la variación espacial y temporal de la cota del agua en un flujo a superficie libre; ejemplos de este tipo de estudios son los de tránsito de avenidas en ríos y estuarios, sistemas de canales y redes de drenaje, y el efecto en el almacenamiento de una

marina o laguna que está conectada al mar por medio de un canal. Cuando además se requiere conocer con cierto detalle el campo de velocidades, es necesario usar un modelo bidimensional o tridimensional.

Debido a que en muchos flujos a superficie libre el componente vertical de la velocidad es mucho menor que los horizontales, y la distribución vertical de la velocidad es casi uniforme en la mayor parte de la profundidad del flujo, es factible usar modelos de flujo bidimensional horizontal, además de que los modelos tridimensionales requieren excesivos recursos de cálculo, y en muchas ocasiones, con la información proporcionada por un modelo matemático de flujo bidimensional es suficiente para resolver problemas de ingeniería

Se han desarrollado varios modelos numéricos para predecir el campo de velocidades suponiendo que el flujo es bidimensional horizontal (2DH); la mayoría de ellos se basan en la ecuación de continuidad y en las ecuaciones de cantidad de movimiento en coordenadas rectangulares. Hansen (1962) fue el primero en publicar un modelo matemático de flujo 2DH; posteriormente, Leendertse (1967) presentó el desarrollo de un modelo para calcular la propagación de ondas de período largo en estuarios y costas. Kuipers y Vreugdenhil (1973) extendieron el modelo de Leendertse para calcular el flujo secundario. Otros modelos del tipo 2DH citados ampliamente en la literatura son el de Falconer (1976), el cual se basa en el de Leendertse, y el de Flokstra (1977), quien indicó que es imposible modelar flujos con circulación si no se incluye el efecto de la turbulencia.

Algunos otros modelos matemáticos interesantes aparecen en los artículos de: Abbott (1979), Falconer (1980), Ponce y Yabusaki (1981), Benqué *et al* (1982) y García y Kahawita (1986), quienes proponen distintos esquemas de diferencias finitas para resolver las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el flujo a superficie libre.

Uno de los últimos modelos publicados que usan coordenadas rectangulares es el de Tingsanchali y Maheswaran (1990), quienes incluyen el modelo $k-\epsilon$ para calcular el efecto de la turbulencia generada por un espigón en el campo de flujo; estos autores presentan algunas correcciones al modelo original $k-\epsilon$ y a la resistencia al flujo para obtener una calibración adecuada de los resultados del modelo con las mediciones de laboratorio realizadas por Rajaratnam y Nwachukwu (1983). El modelo de Yulistiyanto *et al* (1998), lo emplean para modelar el efecto de una pila con forma de cilindro en un flujo; incluyen un procedimiento de esfuerzos para tomar en cuenta el efecto de la turbulencia; ellos validan su modelo numérico con las mediciones experimentales realizadas por Yulistiyanto (1997); se considera que los resultados obtenidos son bastante buenos, excepto en la zona cercana a la pared de la pila. Se hace notar que el modelo numérico se basa en la versión conservativa de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en coordenadas rectangulares, las cuales se resuelven con el esquema de diferencias finitas de MacCormack.

Los resultados obtenidos con modelos que utilizan sistemas de coordenadas rectangulares representan un avance importante; sin embargo, en gran cantidad de trabajos como Roache (1972), Pope (1978), Demirdzic *et al* (1987), Rodi *et al* (1989), Dammuller *et al* (1989), Borthwick y Akponasa (1997) y muchos otros, permiten concluir que el uso de sistemas de coordenadas rectangulares para representar fronteras con curvatura o con alineamiento distinto a la dirección de los ejes rectangulares, requiere hacer aproximaciones que pueden introducir grandes errores y problemas de estabilidad numérica.

Una manera de resolver el problema que presentan las fronteras de forma irregular o con curvatura es usar los métodos de elemento finito; sin embargo, en Weare (1976), Demirdzic (1987), Karki y Patankar (1988), Nielsen y Skovgaard (1990), Melaaen (1992), entre otros, se indica que estos métodos tienen la desventaja de que son computacionalmente más complicados.

Con base en innumerables estudios desarrollados en ingeniería mecánica y aeronáutica durante los últimos 20 años, se consideró la conveniencia de emplear sistemas de coordenadas curvilíneas, los cuales se pueden ajustar en forma adecuada a fronteras de forma curva o con alineamiento diferente al de los ejes rectangulares, como lo indican Thompson *et al* (1974) y Anderson *et al* (1984).

Al disponer de una malla de coordenadas curvilíneas ajustada a las fronteras, el espacio físico se puede representar en el llamado plano computacional por un plano o conjunto de planos rectangulares, donde el tamaño lateral de las celdas que componen la malla rectangular es unitario. En el plano computacional, se pueden aplicar los métodos de diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales en forma similar a como se aplican en coordenadas rectangulares con espaciamiento lateral constante, aprovechando de esta forma la experiencia que se ha ganado al resolver ecuaciones diferenciales en coordenadas rectangulares con métodos de diferencias finitas. De esta manera, el uso de las coordenadas curvilíneas incluye la ventaja que tienen los métodos de elemento finito para la definición de fronteras de forma irregular, y la posibilidad de usar los métodos de diferencias finitas que se emplean para resolver las ecuaciones diferenciales en coordenadas rectangulares, los cuales han sido estudiados ampliamente y son relativamente sencillos.

Dos de los primeros modelos matemáticos publicados para calcular el flujo bidimensional horizontal con sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales ajustados a las fronteras son el de Pope (1978) y el de Kalkwijk y De Vriend (1980), quienes usan las ecuaciones de flujo 2DH para calcular el campo de flujo con régimen permanente en canales con fronteras curvas. Entre los modelos publicados más recientes que usan coordenadas curvilíneas ortogonales esta el de Shankar y Chan (1997), quienes emplean componentes físicos e incluyen un modelo de turbulencia de orden cero.

Se ha hecho notar que cuando la forma de las fronteras es muy irregular, es casi imposible obtener una malla curvilínea que cumpla con la condición de ortogonalidad; para estos

casos la aplicación de métodos válidos para mallas ortogonales induce errores en los cálculos; esta desventaja se elimina al usar las coordenadas curvilíneas generales pues, en este caso, no se requiere cumplir con la condición de ortogonalidad y el modelo matemático tiene mayor generalidad, además de que la generación de mallas curvilíneas generales es más sencilla que cuando se tiene que cumplir con la condición de ortogonalidad. La desventaja de usar coordenadas curvilíneas generales es que aumenta el número de términos de las ecuaciones de hidrodinámica.

Debido a que gran cantidad de problemas de ingeniería hidráulica tratan con ríos, lagunas, estuarios, etc, los cuales están definidos por fronteras de forma irregular, es más recomendable emplear sistemas de coordenadas curvilíneas generales. Parece ser que Johnson (1980) fue de los primeros autores que publicaron un modelo de hidrodinámica que usa coordenadas curvilíneas generales ajustadas a las fronteras, el cual es de los más ampliamente citados en la literatura técnica.

Entre los últimos modelos matemáticos de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas generales que se han publicado están el de Molls y Chaudhry (1995), quienes calculan en forma simultánea el régimen subcrítico y supercrítico en canales con fronteras curvas; la versión de las ecuaciones en coordenadas curvilíneas la obtienen con base en la regla de la cadena, y para modelar la turbulencia se supone que la viscosidad turbulenta es constante. Otro modelo es el presentado por Borthwick y Akponasa (1997); ellos indican que su modelo se basa en la versión contravariante con componentes físicos, e incluyen el efecto de la turbulencia asignando un valor constante a la viscosidad turbulenta.

Se hace notar que cuando se utilizan coordenadas curvilíneas generales se dispone de varias formas de expresar vectores: entre las más conocidas están la covariante y la contravariante, cuyo significado físico es muy diferente cuando las coordenadas no son ortogonales. Puesto que tanto la velocidad del flujo como las ecuaciones dinámicas se expresan con componentes de un vector, también se tienen distintas versiones de las ecuaciones de

hidrodinámica en coordenadas curvilíneas generales. El manejo adecuado de los conceptos fundamentales de estas coordenadas es importante tanto para entender la transformación de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el flujo a superficie libre, como en la selección de la versión más adecuada para el cálculo del correspondiente campo de velocidades.

En este trabajo se presenta el desarrollo de un modelo matemático para calcular el flujo bidimensional horizontal a superficie libre con régimen subcrítico. El modelo utiliza un sistema de coordenadas curvilíneas generales. En el capítulo 2 se describen las principales versiones que hay para expresar vectores en coordenadas curvilíneas; se considera que la explicación de dichos conceptos y los ejemplos mostrados en el apéndice A de este trabajo, permiten aclarar muchas de las discusiones presentadas en otros trabajos publicados, con respecto al tipo de componentes que se deben usar para expresar tanto los componentes de la velocidad como las ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas generales.

En el capítulo 3 se describe la transformación de la versión rectangular de las ecuaciones de hidrodinámica a la versión covariante con componentes físicos. En el modelo se incluyen los términos que se requieren para tomar en cuenta el efecto de la turbulencia. También se presentan dos modelos de turbulencia; uno de ellos, aunque sencillo, calcula la distribución de la viscosidad turbulenta en el campo de flujo, y el otro se basa en el modelo $k-\epsilon$ estándar, el cual es mucho más complicado.

En el capítulo 4 se presenta un esquema de diferencias finitas; aquí se ha escogido el de MacCormack para discretizar y resolver las ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas, junto con las condiciones de frontera. Este esquema es de tipo explícito de segundo orden en el espacio.

En el capítulo 5 se demuestra la bondad del modelo numérico desarrollado en este trabajo. Para ello se escogieron mediciones de laboratorio de dos campos de velocidades reportadas en la literatura, donde se acepta la hipótesis de que el flujo es bidimensional horizontal. Con

base en los respectivos datos de los experimentos y el modelo matemático desarrollado, se calcularon los campos de velocidades correspondientes a las distribuciones horizontales de la velocidad, las cuales se compararon con las mediciones de laboratorio. Además, para este trabajo se hicieron experimentos en el canal de pendiente variable del Instituto de Ingeniería de la UNAM, y basándose en los datos medidos del campo de velocidades de esas pruebas se revisó el funcionamiento del modelo numérico desarrollado; en estos casos se hace notar la forma cómo se define la malla para el cálculo del campo de velocidades, lo cual se considera que es un aporte de este trabajo.

Finalmente, en el capítulo 6 se citan las conclusiones y recomendaciones de esta investigación.

2. COORDENADAS CURVILÍNEAS GENERALES Y RECTANGULARES

A continuación, se presentan algunos conceptos fundamentales para describir las relaciones que hay entre los sistemas de coordenadas rectangulares y curvilíneos, y se explican algunas de las principales formas de expresar un vector en coordenadas curvilíneas generales. Los conceptos aquí tratados pueden verse con mayor detalle, por ejemplo, en Hawkins (1963), Warsi (1993), Eiseman (1980), Farrashkhalvat y Miles (1990), entre algunas otras de las referencias anotadas al final de este trabajo.

2.1 Concepto de invariancia

En un sistema de coordenadas dado, un punto P queda definido por el conjunto de coordenadas p_j . Si se define otro sistema de coordenadas, el mismo punto P queda determinado por otro conjunto de coordenadas p'_j , pero la ubicación del punto P no se modifica al usar el nuevo sistema de coordenadas; por ello, se dice que un punto es un invariante.

Considérese ahora un par de puntos (P_1, P_2) que definen al vector q ; este vector, en un sistema de referencia particular, está determinado por el conjunto de componentes q_j asociados a los ejes del sistema de coordenadas y al correspondiente conjunto de vectores base e_j , los cuales tienen las direcciones de los ejes del sistema de referencia. Si se utiliza otro sistema de coordenadas, el mismo vector q queda determinado por otro conjunto de componentes q^j y el correspondiente conjunto de vectores base e^j , pero en ambos sistemas de coordenadas, el vector conserva la magnitud y dirección; por tanto, un vector es también un ente físico invariante.

2.2 Transformaciones entre coordenadas curvilíneas generales y rectangulares

En la fig 2.1 se muestran dos sistemas planos de coordenadas: el sistema rectangular (X, Y) y el curvilíneo no ortogonal (ξ, η) .

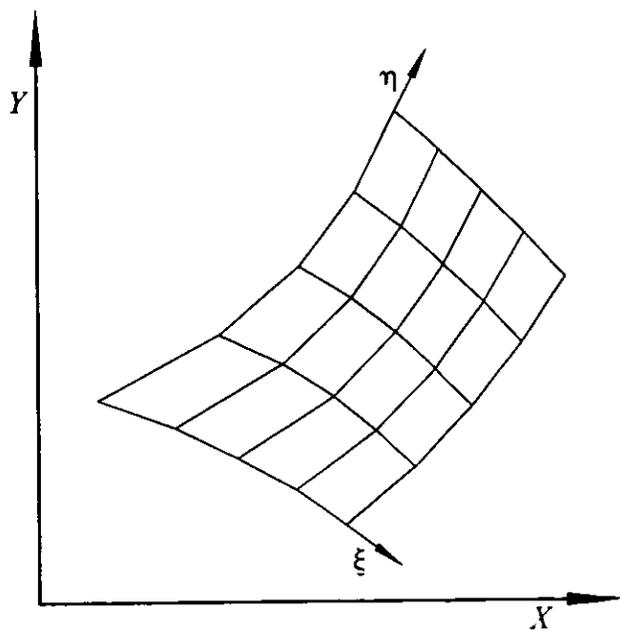


Fig 2.1 Sistemas de coordenadas (X, Y) y (ξ, η)

Las funciones para pasar del sistema (X, Y) al (ξ, η) son del tipo

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(X, Y) \\ \eta &= \eta(X, Y)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Cuando el Jacobiano de la transformación es diferente de cero, se pueden obtener las funciones inversas, es decir

$$\begin{aligned}X &= X(\xi, \eta) \\ Y &= Y(\xi, \eta)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Se recuerda que el Jacobiano, J , de la transformación inversa está dado por el determinante siguiente

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial X}{\partial \eta} \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{vmatrix}\tag{2.3}$$

A los términos siguientes se les conoce como los métricos de la transformación inversa

$$\frac{\partial X}{\partial \xi}; \frac{\partial X}{\partial \eta}; \frac{\partial Y}{\partial \xi}; \frac{\partial Y}{\partial \eta}$$

Puede demostrarse [ver por ejemplo Anderson (1995)] que los métricos de las transformaciones directa e inversa están relacionados por las expresiones siguientes

$$\frac{\partial \xi}{\partial X} = \frac{1}{J} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \quad ; \quad \frac{\partial \xi}{\partial Y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial X}{\partial \eta} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial X} = -\frac{1}{J} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \quad ; \quad \frac{\partial \eta}{\partial Y} = \frac{1}{J} \frac{\partial X}{\partial \xi}$$

2.3 Forma contravariante de un vector

Sea el vector de posición r (fig 2.2) definido en el plano rectangular (X, Y) como

$$r = X(\xi, \eta)e_x + Y(\xi, \eta)e_y \quad (2.5)$$

donde e_x y e_y son los vectores unitarios asociados a las direcciones de los ejes rectangulares X e Y respectivamente, y sea q otro vector que tiene su origen en el punto P . El vector q expresado con los componentes rectangulares u_x y v_y es

$$q = u_x e_x + v_y e_y \quad (2.6)$$

La forma contravariante del vector q es

$$q = u^\xi e_\xi + v^\eta e_\eta \quad (2.7)$$

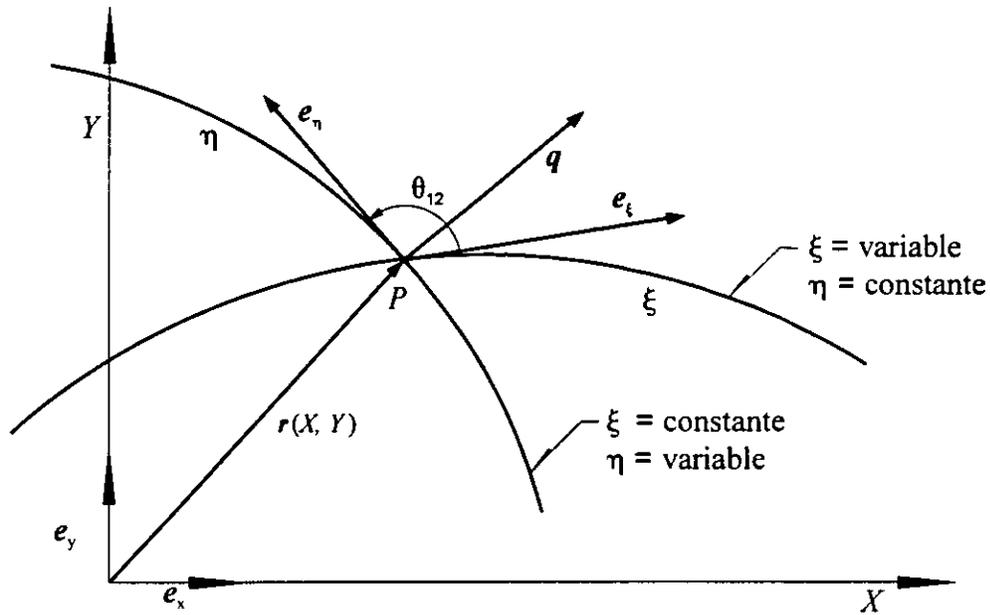


Fig 2.2 Vectores base covariantes

donde e_ξ y e_η son los vectores base covariantes locales en el punto P , y a u^ξ y v^η se les conocen como los componentes contravariantes del vector q . Los vectores base covariantes son tangentes a los ejes curvilíneos y se obtienen con las expresiones siguientes

$$e_\xi = \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\partial X}{\partial \xi} e_x + \frac{\partial Y}{\partial \xi} e_y \quad (2.8a)$$

$$e_\eta = \frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{\partial X}{\partial \eta} e_x + \frac{\partial Y}{\partial \eta} e_y \quad (2.8b)$$

donde e_ξ es el vector tangente al eje curvilíneo ξ , y e_η el vector tangente al eje curvilíneo η (ver fig 2.2). Es importante señalar que los vectores base covariantes no son unitarios y tampoco adimensionales, por lo que los componentes contravariantes no tienen la misma escala de los componentes rectangulares.

Las expresiones que relacionan a los componentes contravariantes con los rectangulares del vector q , se obtienen al aplicar el producto punto del vector q en forma contravariante con los vectores unitarios e_x y e_y , respectivamente, es decir

$$u_x = [u^\xi e_\xi + v^\eta e_\eta] \cdot e_x \quad (2.9)$$

Al sustituir las ecs 2.8 en la 2.9, se obtiene el componente rectangular u_x en función de los componentes contravariantes y de los métricos inversos

$$u_x = u^\xi \frac{\partial X}{\partial \xi} + v^\eta \frac{\partial X}{\partial \eta} \quad (2.10a)$$

De manera similar, el componente v_y se obtiene de

$$v_y = [u^\xi e_\xi + v^\eta e_\eta] \cdot e_y$$

esto es

$$v_y = u^\xi \frac{\partial Y}{\partial \xi} + v^\eta \frac{\partial Y}{\partial \eta} \quad (2.10b)$$

Las expresiones 2.10 forman un sistema lineal de dos ecuaciones, del cual se obtienen expresiones para los componentes contravariantes en función de los componentes rectangulares

$$u^\xi = \frac{1}{J} \frac{\partial Y}{\partial \eta} u_x - \frac{1}{J} \frac{\partial X}{\partial \eta} v_y \quad (2.11a)$$

$$v^\eta = -\frac{1}{J} \frac{\partial Y}{\partial \xi} u_x + \frac{1}{J} \frac{\partial X}{\partial \xi} v_y \quad (2.11b)$$

2.3.1 Elementos del tensor métrico covariante

En notación tensorial, el tensor métrico covariante se denota como g_{ij} ; sus elementos permiten determinar magnitudes en el sistema curvilíneo (ξ, η) , los cuales se obtienen con el producto punto de los vectores base covariantes como sigue

$$g_{11} = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\xi = \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)^2 \quad (2.12a)$$

$$g_{12} = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_\eta = \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \quad (2.12b)$$

$$g_{22} = \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_\eta = \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} \right)^2 \quad (2.12c)$$

$$g_{21} = \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_\xi = g_{12} \quad (2.12d)$$

Con base en las expresiones 2.12 y 2.3 se puede demostrar que el determinante del Jacobiano es igual a la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico covariante, es decir

$$J = \sqrt{g} = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \quad (2.13)$$

Tanto J como \sqrt{g} son iguales al área de la superficie de una celda del sistema de coordenadas curvilíneas.

2.3.2 Magnitud de un vector en forma contravariante

Como se sabe, el cuadrado de la magnitud de un vector se obtiene al aplicar el producto punto de un vector con respecto a sí mismo, es decir

$$|\mathbf{q}|^2 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \quad (2.14)$$

o sea

$$|\mathbf{q}|^2 = (u^\xi \mathbf{e}_\xi + v^\eta \mathbf{e}_\eta) \cdot (u^\xi \mathbf{e}_\xi + v^\eta \mathbf{e}_\eta) \quad (2.15)$$

Al desarrollar la ec 2.15 y considerar las expresiones 2.12, se tiene que la magnitud de un vector que está expresado en forma contravariante, se obtiene de la manera siguiente

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{g_{11}(u^\xi)^2 + 2g_{12}u^\xi v^\eta + g_{22}(v^\eta)^2} \quad (2.16)$$

2.4 Forma covariante de un vector

La forma covariante del vector q es

$$q = u_{\xi} e^{\xi} + v_{\eta} e^{\eta} \quad (2.17)$$

donde e^{ξ} y e^{η} son también una base local de vectores del sistema curvilíneo (ξ, η) , los cuales son perpendiculares a los ejes curvilíneos (fig 2.3). A estos vectores se les conoce como vectores base contravariantes, y a u_{ξ} y v_{η} como sus componentes covariantes. Estos vectores base contravariantes tampoco son unitarios ni adimensionales.

Los componentes de los vectores base contravariantes se obtienen al aplicar el gradiente a las funciones $\xi(X, Y)$ y $\eta(X, Y)$, es decir

$$e^{\xi} = \nabla \xi(X, Y) = \frac{\partial \xi}{\partial X} e_x + \frac{\partial \xi}{\partial Y} e_y \quad (2.18a)$$

$$e^{\eta} = \nabla \eta(X, Y) = \frac{\partial \eta}{\partial X} e_x + \frac{\partial \eta}{\partial Y} e_y \quad (2.18b)$$

En general, cuando se trabaja con sistemas de coordenadas curvilíneas, es más fácil obtener las derivadas parciales de las funciones (X, Y) con respecto a (ξ, η) . Al sustituir la expresión 2.4 en las ecs 2.18 se obtienen los vectores base contravariantes en la forma siguiente

$$e^\xi = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} e_x - \frac{\partial X}{\partial \eta} e_y \right) \quad (2.19a)$$

$$e^\eta = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(-\frac{\partial Y}{\partial \xi} e_x + \frac{\partial X}{\partial \xi} e_y \right) \quad (2.19b)$$

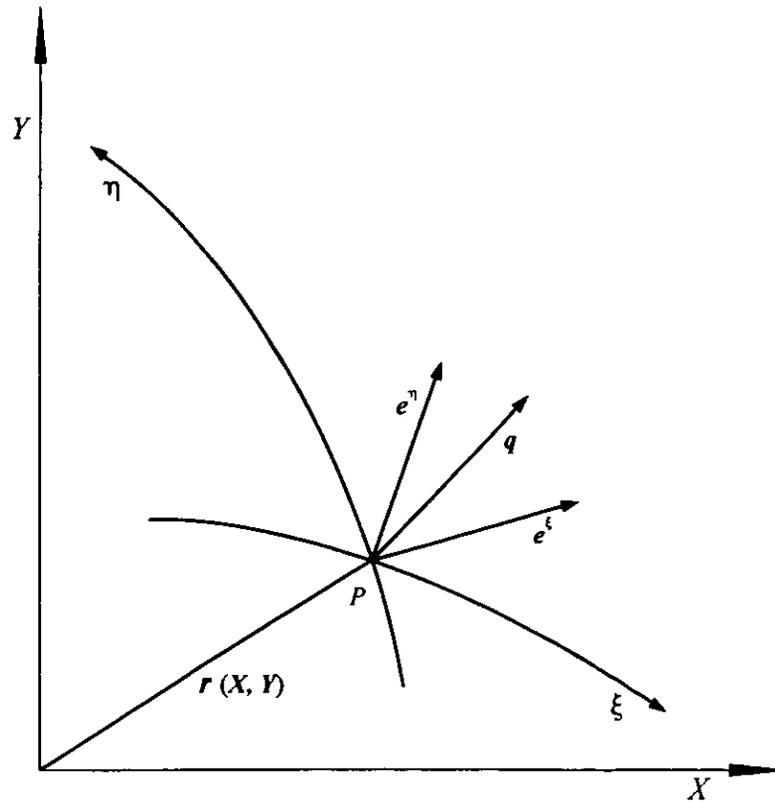


Fig 2.3 Vectores base contravariantes

A partir del vector q expresado en forma covariante, se pueden obtener sus correspondientes componentes rectangulares al aplicar el producto punto de la manera siguiente

$$u_x = [u_\xi e^\xi + v_\eta e^\eta] \cdot e_x \quad (2.20)$$

Al sustituir las ecs 2.19 en la 2.20 se obtiene el componente rectangular u_x en función de los componentes covariantes, como sigue

$$u_x = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} u_\xi - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} v_\eta \quad (2.21a)$$

de manera similar se obtiene el componente rectangular v_y ,

$$v_y = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial X}{\partial \eta} u_\xi + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial X}{\partial \xi} v_\eta \quad (2.21b)$$

Las ecuaciones 2.21 forman un sistema lineal, por lo que es posible obtener de este sistema los componentes covariantes del vector q en función de los componentes rectangulares; así se tiene que

$$u_\xi = \frac{\partial X}{\partial \xi} u_x + \frac{\partial Y}{\partial \xi} v_y \quad (2.22a)$$

$$v_\eta = \frac{\partial X}{\partial \eta} u_x + \frac{\partial Y}{\partial \eta} v_y \quad (2.22b)$$

2.4.1 Elementos del tensor métrico contravariante

Para el cálculo de magnitudes en el sistema definido por los vectores base contravariantes se utiliza el tensor métrico contravariante, g^{ij} , cuyos elementos se obtienen al aplicar el producto punto de los correspondientes vectores base contravariantes. Con base en las expresiones 2.12 se deduce que los elementos del tensor métrico contravariante se pueden expresar como sigue

$$g^{11} = e^{\xi} \cdot e^{\xi} = \frac{g_{22}}{g} \quad (2.23a)$$

$$g^{12} = e^{\xi} \cdot e^{\eta} = -\frac{g_{12}}{g} \quad (2.23b)$$

$$g^{22} = e^{\eta} \cdot e^{\eta} = \frac{g_{11}}{g} \quad (2.23c)$$

$$g^{21} = g^{12} \quad (2.23d)$$

2.4.2 Magnitud de un vector en forma covariante

Para este caso, el cuadrado de la magnitud de un vector en forma covariante se obtiene al aplicar el producto punto sobre el mismo vector, es decir

$$|q|^2 = (u_{\xi}e^{\xi} + v_{\eta}e^{\eta}) \cdot (u_{\xi}e^{\xi} + v_{\eta}e^{\eta}) \quad (2.24)$$

Al desarrollar la expresión 2.24 y sustituir las expresiones 2.23 se obtiene la magnitud del vector q en función de los componentes covariantes y los elementos del tensor métrico contravariante, como sigue

$$|q| = \sqrt{g^{11}u_{\xi}^2 + 2g^{12}u_{\xi}v_{\eta} + g^{22}v_{\eta}^2} \quad (2.25)$$

2.5 Forma covariante de un vector con componentes físicos

Debido a que tanto los vectores base covariantes como los contravariantes generalmente no son unitarios, los correspondientes componentes tienen escalas y dimensiones diferentes a los componentes rectangulares. Sin embargo, esta diferencia se puede evitar si los vectores base se dividen entre su magnitud para obtener una base de vectores unitarios asociados a las coordenadas curvilíneas.

A continuación se presentan las ecuaciones que permiten expresar vectores en función de vectores base contravariantes unitarios. Se observa que al utilizar vectores base unitarios, los componentes asociados a estos vectores reciben el nombre de componentes físicos, y dichos componentes tienen la misma escala y dimensión que los componentes rectangulares.

El vector q en forma covariante con componentes físicos se expresa de la manera siguiente

$$q = u_{(\xi)} e^{(\xi)} + v_{(\eta)} e^{(\eta)} \quad (2.26)$$

donde los paréntesis indican que se está utilizando la versión física del vector en forma covariante. Los vectores base físicos contravariantes se obtienen al dividir entre su magnitud a los vectores base de las ecs 2.19; de esta manera se tiene

$$e^{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} e_x - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial X}{\partial \eta} e_y \quad (2.27a)$$

$$e^{(\eta)} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} e_x + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial X}{\partial \xi} e_y \quad (2.27b)$$

Al aplicar el producto punto del vector q expresado en forma rectangular y los vectores base unitarios contravariantes dados en las ecs 2.19, se obtienen los componentes covariantes físicos del vector q , los cuales se escriben a continuación

$$u_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} u_x - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial X}{\partial \eta} v_y \quad (2.28a)$$

$$v_{(\eta)} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} u_x + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial X}{\partial \xi} v_y \quad (2.28b)$$

De las expresiones 2.28 se pueden obtener ecuaciones para calcular los componentes rectangulares en función de los componentes contravariantes físicos, los cuales son

$$u_x = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} \frac{\partial X}{\partial \xi} u_{(\xi)} + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} \frac{\partial X}{\partial \eta} v_{(\eta)} \quad (2.29a)$$

$$v_y = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} u_{(\xi)} + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} v_{(\eta)} \quad (2.29b)$$

2.5.1 Elementos del tensor métrico contravariante con componentes físicos

Se puede demostrar [ver Demirdzic *et al* (1987)] que los elementos del tensor métrico contravariante físico se expresan de la manera siguiente

$$g^{(11)} = \frac{g_{11}g_{22}}{g} \quad (2.30a)$$

$$g^{(22)} = \frac{g_{22}g_{11}}{g} \quad (2.30b)$$

$$g^{(12)} = \sqrt{g_{11}g_{22}} \frac{g_{12}}{g} \quad (2.30c)$$

2.5.2 Magnitud de un vector en forma covariante con componentes físicos

Procediendo como en los casos anteriores se demuestra que la magnitud de un vector en forma covariante con componentes físicos se obtiene con la expresión siguiente

$$|q| = \sqrt{g^{(11)}u_{(\xi)}^2 + 2g^{(12)}u_{(\xi)}v_{(\eta)} + g^{(22)}v_{(\eta)}^2} \quad (2.31)$$

2.6 Generación de mallas ajustadas a las fronteras

En la fig 2.4a se muestra una superficie definida por fronteras que tienen curvatura apreciable. En dicha superficie se puede definir una malla de coordenadas curvilíneas, tal que ésta queda representada en el plano computacional como se muestra en la fig 2.4b, donde los espaciamientos $\Delta \xi$ y $\Delta \eta$ son unitarios.

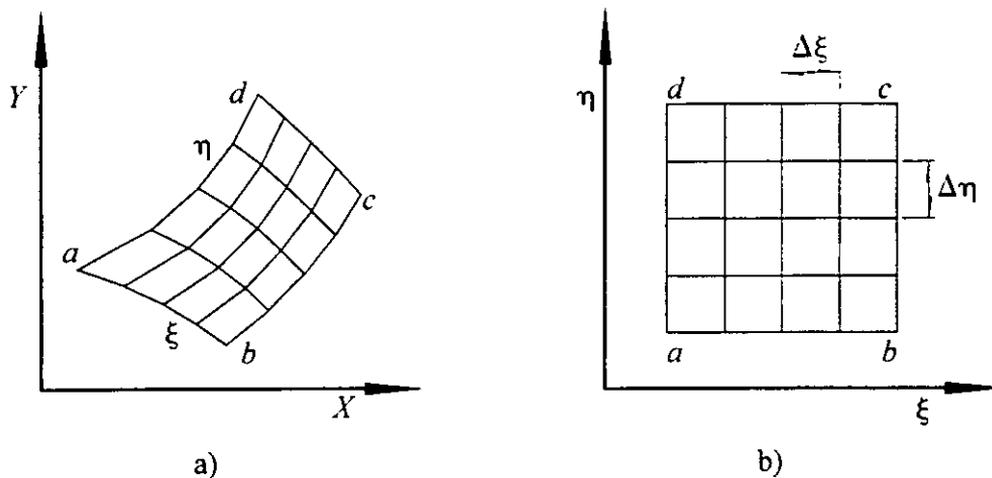


Fig 2.4 Malla curvilínea en el plano computacional

Existen varios métodos para obtener una malla de coordenadas curvilíneas que se ajusten a fronteras de forma irregular, y representarla en el llamado plano computacional. En Hoffmann y Chiang (1993) se describen los principales métodos que hay para la generación de mallas curvilíneas ajustadas a las fronteras; también se indican las correspondientes ventajas y desventajas de cada método. En Knupp y Steinberg (1994) se presentan los distintos métodos que hay para la generación de mallas curvilíneas, y además se anexan programas de cálculo para casos simples.

En este trabajo, la generación de la malla se obtuvo con un modelo numérico desarrollado por Mejía y Berezowsky (1996). El modelo se basa en el método de la malla transfinita, el cual es del tipo algebraico.

Para generar la malla se dan las coordenadas (X, Y) del perímetro de la superficie, y se obtienen las coordenadas rectangulares de cada vértice de las celdas que forman la malla curvilínea, las de la mediatriz de cada lado de las celdas y las del punto central de cada celda. Esta información es importante para calcular los parámetros métricos y los elementos del tensor métrico en cada celda, los cuales se utilizan en la versión de las ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas, como se explica en el capítulo 4 de este trabajo.

3. VERSIÓN COVARIANTE DE LAS ECUACIONES DE HIDRODINÁMICA

Las expresiones para modelar en forma numérica el flujo a superficie libre se derivan de las ecuaciones de Naviera-Stokes, las cuales fueron deducidas con base en la Segunda Ley de Newton; la correspondiente deducción se puede observar, por ejemplo, en Daily y Harleman (1966), Maza y García (1984) y Anderson (1995).

A partir de las ecuaciones de Naviera-Stokes, Reynolds (1895) obtuvo las ecuaciones de cantidad de movimiento para un fluido Newtoniano, en función de valores medios temporales de los componentes del vector velocidad y de la presión; a esas expresiones se les conoce como las ecuaciones de Reynolds. La derivación de estas ecuaciones se muestra, por ejemplo, en Hinze (1959) y Daily y Harleman (1966).

Cuando las dimensiones en planta de un flujo a superficie libre son notablemente mayores en comparación con la profundidad del mismo, se acepta que la velocidad media del flujo se puede representar en forma adecuada únicamente con sus dos componentes horizontales. Con base en esta suposición, las ecuaciones de Reynolds se integran sobre toda la profundidad del flujo con la regla de Leibnitz. Las ecuaciones resultantes son conocidas

como las ecuaciones de cantidad de movimiento para flujos bidimensionales horizontales a superficie libre. La derivación detallada de estas ecuaciones queda fuera de los objetivos del presente trabajo, pero la correspondiente deducción se puede observar, por ejemplo, en Kuipers y Vreugdenhill (1973), Abbott (1979) o Chaudhry (1993). Para su derivación se hacen las hipótesis siguientes: a) la densidad es constante por lo que el fluido es incompresible, b) la distribución de la velocidad es uniforme en toda la profundidad del flujo, c) el componente vertical de la velocidad y su correspondiente aceleración son despreciables, d) la curvatura de la superficie libre del agua es despreciable, e) el fondo del canal es rígido y de pendiente suave, f) los esfuerzos cortantes en el fondo se pueden calcular con fórmulas de flujo uniforme, g) el efecto de la turbulencia se puede modelar en forma adecuada con los esfuerzos de Boussinesq, h) no hay discontinuidades en el flujo, como saltos hidráulicos o frentes de onda, por lo que se puede usar la versión no conservativa de las ecuaciones de cantidad de movimiento, llamadas también ecuaciones dinámicas, las cuales junto con la ecuación de continuidad se conocen como ecuaciones de hidrodinámica para flujos bidimensionales horizontales a superficie libre.

3.1 Versiones de las ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas generales

En el capítulo dos de este trabajo se explicó que un vector se puede expresar de distintas formas, entre las más utilizadas están la contravariante y la covariante, y cada una de ellas se puede expresar con componentes que pueden o no ser físicos. Debido a que tanto la velocidad como la ecuaciones dinámicas se expresan con componentes de vectores, también las ecuaciones de hidrodinámica se pueden expresar de distinta manera, dependiendo del tipo de coordenadas que se usen; en la fig 3.1 se muestra una clasificación de las principales versiones que hay de las ecuaciones de hidrodinámica. En Jiménez y Berezowsky (1996) se hace la revisión del estado del arte sobre las distintas versiones de las ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas. En general, los últimos trabajos publicados donde se presentan modelos numéricos para calcular las características de flujos con coordenadas curvilíneas generales, utilizan los componentes contravariantes

físicos para representar a la velocidad; por ejemplo, en Demirdzic *et al* (1987) y Takizawa *et al* (1992) se usan los componentes contravariantes físicos de la velocidad; Segal *et al* (1992) utilizan como variables dependientes a los componentes contravariantes de la velocidad multiplicados por el Jacobiano de la transformación; Melaaen (1992) utiliza las proyecciones de los componentes covariantes físicos en su modelo numérico; He y Salcudean (1994) y He *et al* (1996) usan también los componentes contravariantes físicos.

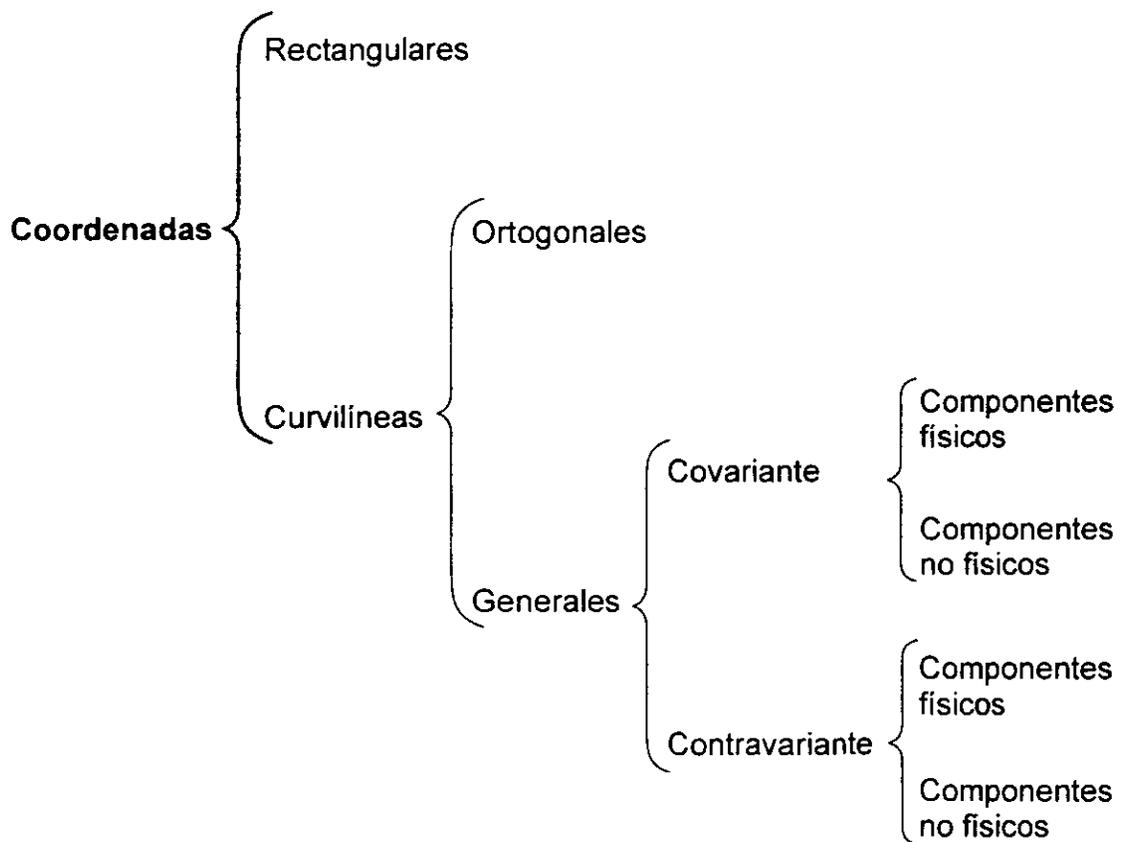


Fig 3.1 Clasificación de las ecuaciones de hidrodinámica

Aunque parece ser que hay cierta preferencia por usar los componentes contravariantes físicos para representar a la velocidad en los modelos numéricos desarrollados, el autor del presente trabajo considera que con base en la interpretación geométrica de las distintas formas de expresar un vector, es mejor usar la versión covariante con componentes físicos, ya que como se mostró en el capítulo dos de este trabajo, con la versión covariante de las ecuaciones de hidrodinámica con componentes físicos, se cumple que los vectores base locales sean perpendiculares a los ejes curvilíneos, por lo que ello garantiza que el cálculo del flujo de masa que pasa por una sección transversal se haga de manera correcta, lo cual sirve para revisar la conservación de masa. Dicha condición no se cumple cuando se usa la versión contravariante, puesto que para ese caso los correspondientes vectores base locales son tangentes pero no necesariamente perpendiculares a los ejes curvilíneos; por ello, se considera que el cálculo del flujo de masa con los componentes contravariantes no es adecuado.

3.2 Dedución de la versión covariante de las ecuaciones de hidrodinámica

Para deducir la versión covariante con componentes físicos de las ecuaciones de hidrodinámica, en este trabajo se escogió como base la versión diferencial rectangular de dichas ecuaciones; esta versión ha sido ampliamente usada en distintos trabajos de investigación; algunos de ellos son: Ponce y Yabusaki (1981), Tawatchai y Selvaratnam (1990), Borthwick y Barber (1992) y Borthwick y Akponasa (1997), entre otros. Las correspondientes expresiones son las siguientes

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial X} + \frac{\partial(vh)}{\partial Y} = 0 \quad (3.1)$$

Componente de la ecuación dinámica en la dirección del vector unitario e_x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial X} + v \frac{\partial u}{\partial Y} + g_v \frac{\partial H}{\partial X} - \frac{g_v u}{C^2 h} |V| +$$

$$- \frac{1}{\rho h} \left[\frac{\partial(hT_{xx})}{\partial X} + \frac{\partial(hT_{xy})}{\partial Y} \right] = 0 \quad (3.2)$$

Componente de la ecuación dinámica en la dirección del vector unitario e_y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial X} + v \frac{\partial v}{\partial Y} + g_v \frac{\partial H}{\partial Y} - \frac{g_v v}{C^2 h} |V| +$$

$$- \frac{1}{\rho h} \left[\frac{\partial(hT_{xy})}{\partial X} + \frac{\partial(hT_{yy})}{\partial Y} \right] = 0 \quad (3.3)$$

donde u y v son los componentes rectangulares de la velocidad promediada en la profundidad, en m/s ; H la cota de la superficie libre del agua, en m ; h el tirante, en m ; V el módulo de la velocidad, en m/s ; g_v la constante de la aceleración de la gravedad, en m/s^2 ; C el coeficiente de fricción de Chezy, en $m^{1/2}/s$; T_{xx} , T_{xy} y T_{yy} son los esfuerzos efectivos, en N/m^2 .

En Kuipers y Vreugenhill (1973) y Flokstra (1977) se discute que cada uno de los esfuerzos efectivos, es decir T_{xx} , T_{xy} y T_{yy} , están formados por tres partes que son: los esfuerzos

viscosos laminares, los turbulentos debidos a las variaciones en el tiempo y en un mismo punto de la velocidad, y los que incluyen el efecto de que la distribución vertical de la velocidad no es uniforme; dado que los esfuerzos turbulentos son más importantes que los demás, (ver por ejemplo Rastogi y Rodi (1978)), en este trabajo sólo se consideran los esfuerzos turbulentos, los cuales se pueden expresar con el concepto de Boussinesq (1877) de la llamada viscosidad turbulenta como sigue

$$T_{xx} = 2 \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial X} \quad (3.4a)$$

$$T_{yy} = 2 \rho \nu_t \frac{\partial v}{\partial Y} \quad (3.4b)$$

$$T_{xy} = \rho \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right) \quad (3.4c)$$

donde ν_t es la llamada viscosidad turbulenta, en m^2/s , la cual es una variable por determinar. En el subcapítulo 3.4 se describen dos métodos para obtener dicha variable.

La versión de las ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas que se presenta en este trabajo es muy parecida a la usada por Borthwick y Akponasa (1997), aunque ellos le llaman la versión contravariante. El autor del presente trabajo considera que esta versión debe ser llamada covariante, puesto que como se demostró en el capítulo 2 (de este trabajo), los componentes que acompañan a los vectores base contravariantes reciben el nombre de componentes covariantes.

Para simplificar la notación de los métricos se hacen las definiciones siguientes

$$x_{\xi} = \frac{\partial X}{\partial \xi} ; y_{\xi} = \frac{\partial Y}{\partial \xi} ; x_{\eta} = \frac{\partial X}{\partial \eta} ; y_{\eta} = \frac{\partial Y}{\partial \eta}$$

Como se demostró en el capítulo 2, los componentes covariantes físicos, $u_{(\xi)}$ y $v_{(\eta)}$, y los componentes rectangulares, u y v , del vector velocidad están relacionados por las expresiones siguientes

$$u_{(\xi)} = \frac{y_{\eta}}{\sqrt{g_{22}}} u - \frac{x_{\eta}}{\sqrt{g_{22}}} v \quad (3.5a)$$

$$v_{(\eta)} = -\frac{y_{\xi}}{\sqrt{g_{11}}} u + \frac{x_{\xi}}{\sqrt{g_{11}}} v \quad (3.5b)$$

o en forma inversa

$$u = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} x_{\xi} u_{(\xi)} + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} x_{\eta} v_{(\eta)} \quad (3.6a)$$

$$v = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} y_{\xi} u_{(\xi)} + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} y_{\eta} v_{(\eta)} \quad (3.6b)$$

Es importante hacer notar que los componentes rectangulares del vector velocidad sustituidos en las ecs 3.5, permiten determinar los correspondientes componentes covariantes físicos del vector en el sistema curvilíneo. Entonces, para obtener las ecuaciones dinámicas en el sistema curvilíneo, se siguen estos tres pasos: a) con base en la regla de la cadena, todas las derivadas parciales con respecto a las coordenadas rectangulares se sustituyen por derivadas parciales con respecto a las coordenadas curvilíneas; b) los componentes rectangulares se sustituyen por sus correspondientes componentes covariantes; c) a los componentes rectangulares de la ecuación dinámica, ecs 3.2 y 3.3, se les aplica la transformación dada por las ecs 3.5, con lo cual se obtienen las ecuaciones dinámicas en términos de las coordenadas curvilíneas y los componentes covariantes físicos.

Con base en la regla de la cadena, las derivadas parciales de una función cualquiera $f(X, Y)$ se expresan en función de las coordenadas curvilíneas y los parámetros métricos como sigue

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{y_\eta}{\sqrt{g}} \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{y_\xi}{\sqrt{g}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = -\frac{x_\eta}{\sqrt{g}} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{x_\xi}{\sqrt{g}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (3.7b)$$

3.2.1 Ecuación dinámica en la dirección normal al eje curvilíneo ξ constante

A continuación, se deduce cada uno de los términos que forman la versión covariante con componentes físicos de la ecuación dinámica en la dirección normal al eje curvilíneo ξ constante, en coordenadas curvilíneas generales.

Aceleración local

Con base en las ecs 3.6, los componentes rectangulares de la aceleración local se expresan como

$$ALX = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} x_{\xi} u_{(\xi)} + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} x_{\eta} v_{(\eta)} \right] \quad (3.8a)$$

$$ALY = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} y_{\xi} u_{(\xi)} + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} y_{\eta} v_{(\eta)} \right] \quad (3.8b)$$

El término de la aceleración local en la dirección normal al eje ξ constante se obtiene como sigue (ver ec 3.5a)

$$AL = \frac{y_{\eta}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{x_{\eta}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.9)$$

Al sustituir las ecs 3.8 en la 3.9, desarrollar ésta y reducir términos semejantes, se obtiene

$$AL = \frac{\partial u_{(\xi)}}{\partial t} \quad (3.10)$$

Aceleración convectiva

La parte convectiva de la ecuación dinámica en la dirección del vector e_x se define como

$$ACX = u \frac{\partial u}{\partial X} + v \frac{\partial u}{\partial Y} \quad (3.11)$$

Al aplicar la regla de la cadena en la ec 3.11, y tomar como factor común las derivadas parciales de u , resulta

$$ACX = \frac{[y_\eta u - x_\eta v]}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{[-y_\xi u + x_\xi v]}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (3.12)$$

Al sustituir las ecs 3.5 en la 3.12, se obtiene

$$ACX = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} u_{(\xi)} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} v_{(\eta)} \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (3.13)$$

Si se sustituye la ec 3.6a en la 3.13, se llega a

$$ACX = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} u_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} x_\xi u_{(\xi)} + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} x_\eta v_{(\eta)} \right] + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} x_\xi u_{(\xi)} + \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} x_\eta v_{(\eta)} \right] \quad (3.14)$$

Por otro lado, la parte convectiva de la ecuación dinámica en la dirección del vector e_y es

$$ACY = u \frac{\partial v}{\partial X} + v \frac{\partial v}{\partial Y} \quad (3.15)$$

Al aplicar la regla de la cadena a los términos de las derivadas parciales de la ec 3.15, y tomar como factor común los términos de las derivadas parciales del componente v , resulta

$$ACY = \frac{(y_\eta u - x_\eta v)}{\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{(-y_\xi u + x_\xi v)}{\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (3.16)$$

Al sustituir las ecs 3.5 en la 3.16, se obtiene

$$ACY = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} u_{(\xi)} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} v_{(\eta)} \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (3.17)$$

Ahora, si se sustituye la ec 3.6b en la 3.17 se tiene que

$$ACY = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} u_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} y_\xi u_{(\xi)} + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} y_\eta v_{(\eta)} \right] + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} y_\xi u_{(\xi)} + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} y_\eta v_{(\eta)} \right] \quad (3.18)$$

La parte convectiva de la ecuación dinámica en la dirección normal al eje curvilíneo ξ constante se obtiene como

$$AC = \frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} ACX - \frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} ACY \quad (3.19)$$

Al sustituir las ecs 3.14 y 3.18 en la 3.19, y después de ordenar algunos términos se obtiene

$$\begin{aligned}
 AC &= u_{(\xi)}^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} \right) + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} \right) \cdot \\
 &\frac{y_\eta}{g} \left[\sqrt{g_{22}} u_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} (x_\xi u_{(\xi)}) + \sqrt{g_{11}} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} (x_\xi u_{(\xi)}) \right] \cdot \\
 &\frac{y_\eta}{g} \left[\sqrt{g_{11}} u_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} (x_\eta v_{(\eta)}) + \frac{g_{11}}{\sqrt{g_{22}}} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} (x_\eta v_{(\eta)}) \right] \cdot \\
 &\frac{x_\eta}{g} \left[-\sqrt{g_{22}} u_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} (y_\xi u_{(\xi)}) - \sqrt{g_{11}} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} (y_\xi u_{(\xi)}) \right] \cdot \\
 &\frac{x_\eta}{g} \left[-\sqrt{g_{11}} u_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta v_{(\eta)}) - \frac{g_{11}}{\sqrt{g_{22}}} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} (y_\eta v_{(\eta)}) \right] \cdot
 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Se hace notar que los dos primeros términos del lado derecho de la expresión 3.20 involucran derivadas parciales de los elementos del tensor métrico; dichos términos reciben el nombre de Símbolos de Christoffel de segunda especie, y toman en cuenta que los vectores base contravariantes cambian de dirección a lo largo de los ejes curvilíneos.

Gradiente hidráulico

Con base en la regla de la cadena, los términos del gradiente hidráulico en las direcciones de los vectores e_x y e_y se definen respectivamente como

$$GHX = g_v \frac{\partial H}{\partial X} = \frac{g_v}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial H}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial H}{\partial \eta} y_\xi \right] \quad (3.21a)$$

$$GHY = g_v \frac{\partial H}{\partial Y} = \frac{g_v}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial H}{\partial \xi} x_\eta - \frac{\partial H}{\partial \eta} x_\xi \right] \quad (3.21b)$$

El gradiente hidráulico en la dirección normal al eje ξ constante se expresa como

$$GH = g_v \frac{\partial H}{\partial X} \frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} - g_v \frac{\partial H}{\partial Y} \frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} \quad (3.22)$$

Al sustituir las ecs 3.21 en la 3.22, y después de desarrollar y reducir términos semejantes se obtiene

$$GH = \frac{g_v}{\sqrt{g}} \left[\sqrt{g_{22}} \frac{\partial H}{\partial \xi} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right] \quad (3.23)$$

Resistencia al flujo

El efecto de la fricción en las direcciones de los vectores e_x y e_y se expresa respectivamente de la manera siguiente

$$SF_X = \frac{g_v}{C^2} \frac{u}{h} |V| \quad (3.24a)$$

$$SF_Y = \frac{g_v}{C^2} \frac{v}{h} |V| \quad (3.24b)$$

La resistencia al flujo en la dirección normal al eje curvilíneo ξ se obtiene como sigue

$$SF = \frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} \frac{g_v}{C^2} \frac{u}{h} |V| - \frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} \frac{g_v}{C^2} \frac{v}{h} |V| \quad (3.25)$$

Nuevamente, al sustituir las expresiones 3.6 en 3.25, y reducir términos semejantes, se tiene que el efecto de la fricción está dado por

$$SF = \frac{g_v}{C^2} \frac{u_{(\xi)}}{h} |V| \quad (3.26)$$

Términos de turbulencia

Los componentes que toman en cuenta el efecto de la turbulencia en las direcciones de los vectores e_x y e_y , son respectivamente

$$TURX = \frac{-1}{\rho h} \left(\frac{\partial hT_{xx}}{\partial X} + \frac{\partial hT_{xy}}{\partial Y} \right) \quad (3.27a)$$

$$TURY = \frac{-1}{\rho h} \left(\frac{\partial hT_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial hT_{yy}}{\partial Y} \right) \quad (3.27b)$$

El efecto de la turbulencia en la dirección normal al eje curvilíneo ξ constante se expresa como

$$TUR = \frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} \frac{-1}{\rho h} \left(\frac{\partial hT_{xx}}{\partial X} + \frac{\partial hT_{xy}}{\partial Y} \right) - \frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} \frac{-1}{\rho h} \left(\frac{\partial hT_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial hT_{yy}}{\partial Y} \right) \quad (3.28)$$

Al aplicar la regla de la cadena en las derivadas parciales de la expresión 3.28, y después de ordenar términos se obtiene que el efecto de la turbulencia en la dirección normal a ξ constante se expresa como sigue

$$TUR = \frac{-1}{\rho h \sqrt{g} \sqrt{g_{22}}} \left[y_{\eta}^2 \frac{\partial(hT_{xx})}{\partial \xi} - y_{\xi} y_{\eta} \frac{\partial(hT_{xx})}{\partial \eta} - (x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}) \frac{\partial(hT_{xy})}{\partial \eta} \right] \quad (3.29)$$

$$\frac{-1}{\rho h \sqrt{g} \sqrt{g_{22}}} \left[-2x_{\eta} y_{\eta} \frac{\partial(hT_{xy})}{\partial \xi} - x_{\xi} x_{\eta} \frac{\partial(hT_{yy})}{\partial \eta} - x_{\eta}^2 \frac{\partial(hT_{yy})}{\partial \xi} \right] = 0$$

Esfuerzos de turbulencia

El esfuerzo T_{xx} se expresa en coordenadas rectangulares como sigue

$$T_{xx} = 2 \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial X} \quad (3.30)$$

Al aplicar la regla de la cadena en la ec 3.30 se tiene

$$T_{xx} = 2 \rho \nu_t \left(\frac{y_{\eta}}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y_{\xi}}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (3.31)$$

Si se sustituye la ec 3.6a en la 3.31 se obtiene que

$$T_{xx} = \frac{2\rho v_t}{\sqrt{g}} y_\eta \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} x_\xi u(\xi) \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} x_\eta v(\eta) \right) \right] - \frac{2\rho v_t}{\sqrt{g}} y_\xi \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} x_\xi u(\xi) \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} x_\eta v(\eta) \right) \right] \quad (3.32a)$$

Procediendo de manera similar con los otros esfuerzos, T_{xy} y T_{yy} , se llega a las expresiones siguientes

$$T_{xy} = -\frac{\rho v_t}{\sqrt{g}} x_\eta \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} x_\xi u(\xi) \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} x_\eta v(\eta) \right) \right] + \frac{\rho v_t}{\sqrt{g}} x_\xi \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} x_\xi u(\xi) \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} x_\eta v(\eta) \right) \right] - \frac{\rho v_t}{\sqrt{g}} y_\eta \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} y_\xi u(\xi) \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} y_\eta v(\eta) \right) \right] - \frac{\rho v_t}{\sqrt{g}} y_\xi \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} y_\xi u(\xi) \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} y_\eta v(\eta) \right) \right] \quad (3.32b)$$

$$T_{yy} = - \frac{2\rho v_i}{\sqrt{g}} x_\eta \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} y_\xi u(\xi) \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} y_\eta v(\eta) \right) \right] + \frac{2\rho v_i}{\sqrt{g}} x_\xi \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} y_\xi u(\xi) \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} y_\eta v(\eta) \right) \right] \quad (3.32c)$$

Estos son todos los términos transformados que forman la ecuación dinámica en la dirección normal al eje curvilíneo ξ constante. De manera similar se obtiene la ecuación dinámica en la dirección normal al eje curvilíneo η constante.

3.2.2 Ecuación de continuidad en coordenadas curvilíneas

Las derivadas parciales de una función $f(X, Y)$ se expresan con la forma conservativa de la regla de la cadena como sigue

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta f) - \frac{\partial}{\partial \eta} (y_\xi f) \right] \quad (3.33a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (x_\eta f) + \frac{\partial}{\partial \eta} (x_\xi f) \right] \quad (3.33b)$$

Al aplicar las ecs 3.33 a la versión rectangular de la ecuación de continuidad, ec 3.1, resulta

$$\frac{\partial H}{\partial t} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (y_{\eta} u h) - \frac{\partial}{\partial \eta} (y_{\xi} u h) \right] - \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} (x_{\eta} v h) + \frac{\partial}{\partial \eta} (x_{\xi} v h) \right] = 0$$

Si se aplica la propiedad asociativa a la suma de los operadores de las derivadas parciales en esta ecuación, se tiene

$$\frac{\partial H}{\partial t} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} (y_{\eta} u h - x_{\eta} v h) - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta} (-y_{\xi} u h + x_{\xi} v h) = 0 \quad (3.35)$$

Con base en las ecs 3.5, la ec 3.35 se puede expresar de manera más sencilla.

3.3 Ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas generales con componentes físicos

A continuación se presenta la versión covariante completa, con componentes físicos, de las ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas generales, la cual se usa en este trabajo para modelar el flujo bidimensional horizontal a superficie libre.

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial H}{\partial t} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} (\sqrt{g_{22}} u_{(\xi)} h) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta} (\sqrt{g_{11}} v_{(\eta)} h) = 0 \quad (3.36)$$

Componente de la ecuación dinámica en la dirección normal al eje curvilíneo ξ constante

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u_{(\xi)}}{\partial t} \cdot u_{(\xi)}^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} \right) - \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} \right) \cdot \\
 & \cdot \frac{y_{\eta}}{g} \left[\sqrt{g_{22}} u_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} (x_{\xi} u_{(\xi)}) - \sqrt{g_{11}} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} (x_{\xi} u_{(\xi)}) \right] \cdot \\
 & \cdot \frac{y_{\eta}}{g} \left[\sqrt{g_{11}} u_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} (x_{\eta} v_{(\eta)}) - \frac{g_{11}}{\sqrt{g_{22}}} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \xi} (x_{\eta} v_{(\eta)}) \right] \cdot \\
 & \cdot \frac{x_{\eta}}{g} \left[-\sqrt{g_{22}} u_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} (y_{\xi} u_{(\xi)}) - \sqrt{g_{11}} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} (y_{\xi} u_{(\xi)}) \right] \cdot \\
 & \cdot \frac{x_{\eta}}{g} \left[-\sqrt{g_{11}} u_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} (y_{\eta} v_{(\eta)}) - \frac{g_{11}}{\sqrt{g_{22}}} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} (y_{\eta} v_{(\eta)}) \right] \cdot \\
 & \cdot \frac{g_v}{\sqrt{g}} \left[\sqrt{g_{22}} \frac{\partial H}{\partial \xi} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right] \cdot \frac{g_v}{C^2} \frac{u_{(\xi)}}{h} \cdot \mathcal{V} \cdot \\
 & \cdot \frac{-1}{\rho h \sqrt{g} \sqrt{g_{22}}} \left[y_{\eta}^2 \frac{\partial(hT_{xx})}{\partial \xi} - y_{\xi} y_{\eta} \frac{\partial(hT_{xx})}{\partial \eta} - (x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}) \frac{\partial(hT_{xy})}{\partial \eta} \right] \cdot \\
 & \cdot \frac{-1}{\rho h \sqrt{g} \sqrt{g_{22}}} \left[-2x_{\eta} y_{\eta} \frac{\partial(hT_{xy})}{\partial \xi} - x_{\xi} x_{\eta} \frac{\partial(hT_{yy})}{\partial \eta} - x_{\eta}^2 \frac{\partial(hT_{yy})}{\partial \xi} \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

Componente de la ecuación dinámica en la dirección normal al eje curvilíneo η constante

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial v_{(\eta)}}{\partial t} + v_{(\eta)}^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} \right) + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} u_{(\xi)} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} \right) + \\
 & + \frac{x_{\xi}}{g} \left[\frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11}}} u_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} (y_{\xi} u_{(\xi)}) + \sqrt{g_{22}} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} (y_{\xi} u_{(\xi)}) \right] + \\
 & + \frac{x_{\xi}}{g} \left[\sqrt{g_{22}} u_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} (y_{\eta} v_{(\eta)}) + \sqrt{g_{11}} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} (y_{\eta} v_{(\eta)}) \right] + \\
 & + \frac{y_{\xi}}{g} \left[-\frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11}}} u_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} (x_{\xi} u_{(\xi)}) - \sqrt{g_{11}} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} (x_{\xi} u_{(\xi)}) \right] + \\
 & + \frac{y_{\xi}}{g} \left[-\sqrt{g_{22}} u_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} (x_{\eta} v_{(\eta)}) - \sqrt{g_{11}} v_{(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} (x_{\eta} v_{(\eta)}) \right] + \\
 & + \frac{g_v}{\sqrt{g}} \left[\sqrt{g_{11}} \frac{\partial H}{\partial \eta} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial H}{\partial \xi} \right] + \frac{g_v}{C^2} \frac{v_{(\eta)}}{h} |V| + \\
 & + \frac{-1}{\rho h \sqrt{g} \sqrt{g_{11}}} \left[y_{\xi}^2 \frac{\partial(hT_{xx})}{\partial \eta} - y_{\xi} y_{\eta} \frac{\partial(hT_{xx})}{\partial \xi} + (x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}) \frac{\partial(hT_{xy})}{\partial \xi} \right] + \\
 & + \frac{-1}{\rho h \sqrt{g} \sqrt{g_{11}}} \left[-2x_{\xi} y_{\xi} \frac{\partial(hT_{xy})}{\partial \eta} - x_{\xi} x_{\eta} \frac{\partial(hT_{xy})}{\partial \xi} + x_{\xi}^2 \frac{\partial(hT_{yy})}{\partial \eta} \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

3.4 Modelos de turbulencia

La mayoría de los flujos a superficie libre son turbulentos; esto se distingue por la presencia de remolinos causados por paredes, obstáculos dentro del flujo o cambios de dirección en las fronteras que definen el escurrimiento. Este complicado fenómeno se considera en el modelo numérico al incluir los esfuerzos efectivos o de turbulencia que están en las ecuaciones dinámicas. Dichos esfuerzos dependen de la llamada viscosidad turbulenta, ν_t . Existen varios modelos para calcular esta variable. En el presente trabajo se han incluido los dos procedimientos siguientes.

3.4.1 Modelo de orden cero

Consiste en calcular la viscosidad turbulenta con la expresión siguiente:

$$\nu_t = C_t h U \quad (3.39)$$

donde U es la velocidad asociada al esfuerzo cortante del flujo, la cual se puede expresar de la manera siguiente

$$U = \frac{\sqrt{g_v}}{C} |V| \quad (3.40)$$

En cuanto al coeficiente empírico C_t , en la literatura consultada se reportan los valores siguientes: Tingsanchali y Maheswaran (1990) utilizan $C_t=0.0765$; en Duc *et al* (1996) se usa $C_t=0.07$; Hu y Kot (1997) y Yulistiyanto *et al* (1998) proponen $C_t=0.1$. En este trabajo se usa $C_t=0.0765$.

3.4.2 Modelo de turbulencia $k-\epsilon$

Este método, propuesto originalmente por Launder y Spalding (1974), ha sido usado ampliamente para calcular la viscosidad turbulenta en modelos de hidrodinámica que se basan en resolver la versión rectangular de las ecuaciones de continuidad y dinámica; algunas de las publicaciones donde se reporta su uso son: Tingsanchali y Maheswaran (1990), Bravo y Holly (1996), Zhou *et al* (1994). entre muchos otros; en la mayoría de los últimos artículos publicados se aclara que se le han hecho modificaciones al modelo original de turbulencia $k-\epsilon$.

La viscosidad turbulenta se calcula con la expresión siguiente

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.41)$$

donde c_μ es una constante empírica, k es la llamada energía cinética turbulenta del flujo y ϵ indica la tasa de disipación de dicha energía. Estos parámetros se obtienen al resolver las ecuaciones diferenciales parciales de transporte semiempíricas siguientes

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial X} + v \frac{\partial k}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial Y} \right] \\ &+ P_h - \epsilon - \frac{U^3}{\sqrt{c_f} h} \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \epsilon}{\partial X} + v \frac{\partial \epsilon}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial Y} \right] \quad (3.43)$$

$$+ c_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} P_h - c_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} + c_\epsilon \frac{U^3}{h^2}$$

donde:

$$P_h = 2v_t \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + 2v_t \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \right)^2 + v_t \left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \right)^2$$

$$\sqrt{c_f} = \frac{\sqrt{g_v}}{c} ; U_* = \sqrt{c_f} |V|$$

$$c_\epsilon = 3.6 \frac{c_{2\epsilon}}{c_f^{3/4}} \sqrt{c_\mu}$$

$$c_\mu = 1.49; c_{1\epsilon} = 1.43; c_{2\epsilon} = 1.92; \sigma_k = 1.0; \sigma_\epsilon = 1.3$$

Las expresiones 3.41 a 3.43 forman la versión rectangular del modelo $k-\epsilon$. Para acoplar dichas ecuaciones a la versión covariante del modelo de hidrodinámica, es necesario expresarlas en función de las coordenadas curvilíneas y los componentes covariantes del vector velocidad. Debido a que las ecs 3.42 y 3.43 son escalares, su transformación se hace aplicando la regla de la cadena dada por las ecs 3.7. A continuación se muestra la

transformación de los términos que forman la ecuación de transporte del parámetro k .

$$k_x = \frac{\partial k}{\partial X} = \frac{y_\eta}{\sqrt{g}} \frac{\partial k}{\partial \xi} - \frac{y_\xi}{\sqrt{g}} \frac{\partial k}{\partial \eta} \quad (3.44a)$$

$$k_y = \frac{\partial k}{\partial Y} = -\frac{x_\eta}{\sqrt{g}} \frac{\partial k}{\partial \xi} + \frac{x_\xi}{\sqrt{g}} \frac{\partial k}{\partial \eta} \quad (3.44b)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{v_x k_x}{\sigma_k} \right) = \frac{1}{\sigma_k} \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} (v_x k_x) - \frac{y_\xi}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta} (v_x k_x) \right) \quad (3.45a)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{v_y k_y}{\sigma_k} \right) = \frac{1}{\sigma_k} \left(-\frac{x_\eta}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} (v_y k_y) + \frac{x_\xi}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta} (v_y k_y) \right) \quad (3.45b)$$

En cuanto a los términos de P_h , se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{y_\eta}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y_\xi}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (3.46)$$

Al sustituir la ec 3.6a en la 3.46 se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{y_\eta}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (T_1 u_{(\xi)}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (T_2 v_{(\eta)}) \right] -$$

(3.47)

$$- \frac{y_\xi}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (T_1 u_{(\xi)}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (T_2 v_{(\eta)}) \right]$$

De manera similar se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial X} = \frac{y_\eta}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (T_3 u_{(\xi)}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (T_4 v_{(\eta)}) \right] -$$

(3.48)

$$- \frac{y_\xi}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (T_3 u_{(\xi)}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (T_4 v_{(\eta)}) \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = - \frac{x_\eta}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (T_1 u_{(\xi)}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (T_2 v_{(\eta)}) \right] -$$

(3.49)

$$- \frac{x_\xi}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (T_1 u_{(\xi)}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (T_2 v_{(\eta)}) \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial Y} = - \frac{x_\eta}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (T_3 u_{(\xi)}) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (T_4 v_{(\eta)}) \right] \cdot$$

(3.50)

$$\cdot \frac{x_\xi}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (T_3 u_{(\xi)}) \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (T_4 v_{(\eta)}) \right]$$

donde

$$T_1 = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} x_\xi ; \quad T_2 = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} x_\eta$$

$$T_3 = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} y_\xi ; \quad T_4 = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} y_\eta$$

Al sustituir las expresiones 3.44, 3.45, 3.47, 3.48, 3.49 y 3.50 en la 3.42, se obtiene la ecuación de transporte del parámetro k .

De forma similar se obtiene la ecuación de transporte del parámetro ϵ . A continuación se escriben ambas ecuaciones en coordenadas curvilíneas.

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} - \frac{y_\xi}{\sqrt{g}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \right) + v \left(-\frac{x_\eta}{\sqrt{g}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} + \frac{x_\xi}{\sqrt{g}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \right) +$$

$$\frac{1}{\sigma_\epsilon} \frac{y_\eta}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(v_i \frac{y_\eta}{\sqrt{g}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} - v_i \frac{y_\xi}{\sqrt{g}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \right) +$$

$$- \frac{1}{\sigma_\epsilon} \frac{y_\xi}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v_i \frac{y_\eta}{\sqrt{g}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} - v_i \frac{y_\xi}{\sqrt{g}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \right) +$$

(3.52)

$$- \frac{1}{\sigma_\epsilon} \frac{x_\eta}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-v_i \frac{x_\eta}{\sqrt{g}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} + v_i \frac{x_\xi}{\sqrt{g}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\sigma_\epsilon} \frac{x_\xi}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-v_i \frac{x_\eta}{\sqrt{g}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} + v_i \frac{x_\xi}{\sqrt{g}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} \right) +$$

$$+ c_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} P_h - c_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} + c_\epsilon \frac{U_*^4}{h^2}$$

Se hace notar que cuando se dispone del parámetro k , los esfuerzos cortantes de turbulencia se expresan, en notación tensorial, como sigue

$$\tau_{ij} = \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

4. ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINITAS

Entre los distintos esquemas de diferencias finitas que se han publicado en los últimos años, destaca el propuesto por MacCormack, el cual ha sido usado ampliamente en dinámica y mecánica de fluidos para la solución de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, y recientemente también en el cálculo del campo de velocidades en flujos a superficie libre; algunos ejemplos de esos trabajos son los siguientes: García y Kahawita (1986) muestran el cálculo del flujo bidimensional horizontal en coordenadas rectangulares; Fennema y Chaudhry (1990) modelan el fenómeno del salto hidráulico, donde se tienen simultáneamente los regímenes de flujo subcrítico y supercrítico; García-Navarro y Saviron (1992) calculan el movimiento de un frente de onda; Yulistiyanto *et al* (1998) resuelven la versión conservativa de las ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas rectangulares para modelar el flujo bidimensional horizontal a superficie libre alrededor de una pila.

El esquema de MacCormack es explícito, de segundo orden en el espacio, y consta de dos etapas (tipo predictor - corrector): en la fase de predicción se calculan las variables dependientes (llamadas variables predichas) con diferencias espaciales hacia atrás; y en la fase de corrección se obtienen las variables dependientes (llamadas variables corregidas)

con diferencias espaciales hacia adelante, en función de las variables calculadas en la etapa de predicción. Los valores de las variables dependientes al final del intervalo de tiempo se obtienen en función de los valores de las variables al inicio del intervalo de tiempo y de las variables obtenidas en la fase de corrección.

En García y Kahawita (1986), Chaudhry (1993), Yulistiyanto *et al* (1998), entre otros, se indica que se obtienen mejores resultados con este esquema, cuando se alterna el cálculo de las diferencias en cada etapa de cálculo, es decir, en un paso de tiempo se calcula la etapa de predicción con diferencias hacia atrás y la etapa de corrección con diferencias hacia adelante; y en el siguiente paso de tiempo, la etapa de predicción se calcula con diferencias hacia adelante, y la etapa de corrección con diferencias hacia atrás.

Sea el plano computacional mostrado en la fig 4.1, donde se muestra una malla de cálculo de M celdas en la dirección del eje ξ y N celdas en la del eje η . En la misma figura se indica que las celdas del lado izquierdo definen una frontera abierta donde se conoce el gasto que ingresa y en las celdas del lado derecho se conoce el nivel del agua, mientras que en la parte superior e inferior del plano computacional se tiene fronteras sólidas, también llamadas cerradas. Para aplicar el esquema de MacCormack se propone que todas las variables dependientes sean calculadas en el mismo lugar, esto es, en el centro de las celdas como se muestra en la fig 4.1; esto tiene la ventaja de que se requiere menor número de parámetros métricos en las ecuaciones discretizadas.

4.1 Metodología de cálculo

a) En un tiempo inicial, k , se asignan valores propuestos a las variables

$$(H^k, u_{(\xi)}^k, v_{(\eta)}^k)_{i,j} \text{ en cada punto central } (i,j) \text{ de las celdas}$$

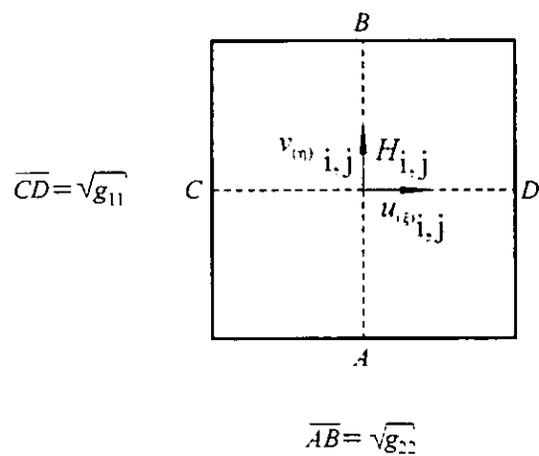
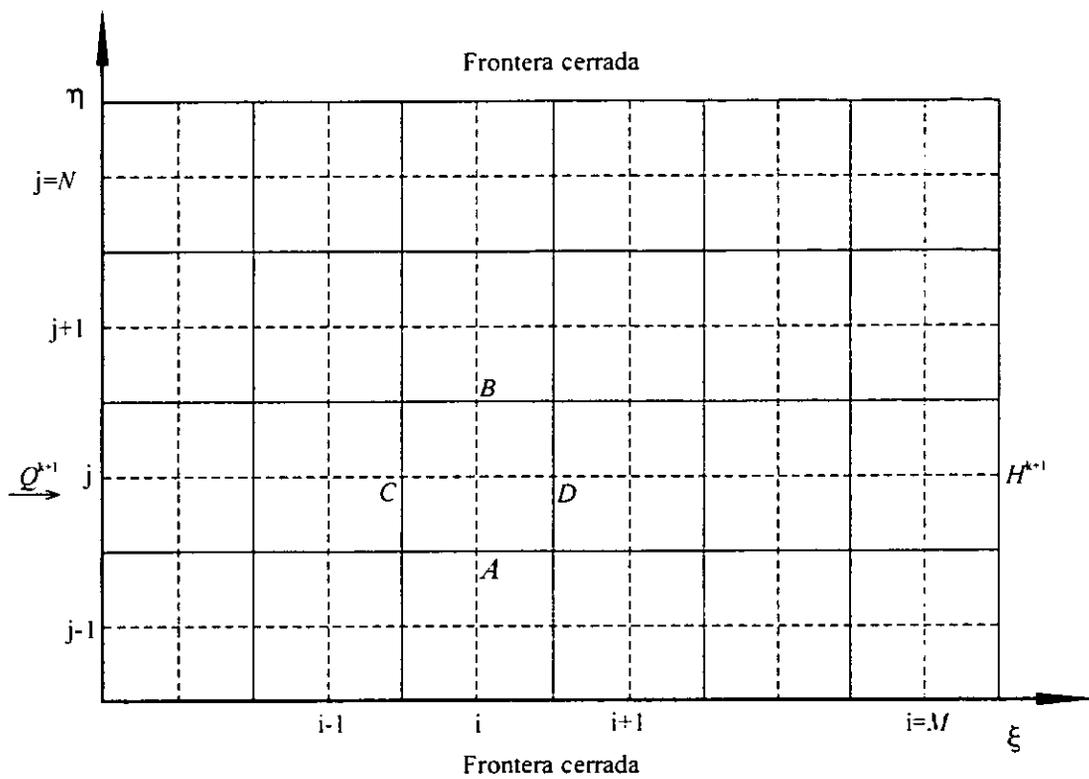


Fig 4.1 Malla de cálculo en el plano computacional

Fase de predicción

- b) Se calculan las variables dependientes de la etapa de predicción, $(H^p, u_{(\xi)}^p, v_{(\eta)}^p)_{i,j}$ con diferencias hacia atrás para $2 \leq i \leq M$ y $2 \leq j \leq N$
- c) Con base en la hipótesis de la frontera reflejante, la cual se explica posteriormente, se calculan las variables predichas para $j = 1$ y $2 \leq i \leq N$

Fase de corrección

- d) Se calculan las variables dependientes de la fase de corrección, $(H^c, u_{(\xi)}^c, v_{(\eta)}^c)_{i,j}$ para $2 \leq i \leq M-1$ y $1 \leq j \leq N-1$, con diferencias finitas hacia adelante, en función de los valores de las variables obtenidas en la etapa de predicción
- e) También con base en la hipótesis de frontera reflejante, se calculan los valores de las variables de la fase de corrección para $j = N$ y $2 \leq i \leq M-1$

Valores para la etapa de tiempo $k+1$

- f) Hasta aquí se tienen tanto los valores predichos como los corregidos para las celdas comprendidas entre $2 \leq i \leq M-1$ y $1 \leq j \leq N$. Con esos valores se calculan las variables dependientes al final del intervalo de tiempo para esas celdas, en función de los valores de las variables iniciales y corregidas como sigue

$$H_{ij}^{k+1} = \frac{1}{2}(H_{ij}^k + H_{ij}^c) \quad (4.1a)$$

$$u_{(\xi)ij}^{k+1} = \frac{1}{2}(u_{(\xi)ij}^k + u_{(\xi)ij}^c) \quad (4.1b)$$

$$v_{(n)U}^{k+1} = \frac{1}{2}(v_{(n)U}^k + v_{(n)U}^c) \quad (4.1c)$$

Efecto de las fronteras abiertas

- g) Se resuelven las celdas que definen las fronteras donde se conoce la velocidad del flujo o el nivel de la superficie libre del agua, como se explica posteriormente.
- h) Una vez que se tienen los valores de las variables dependientes para cada una de las celdas del plano computacional, los valores de las variables dependientes para el paso de tiempo $k+1$ se toman como los valores iniciales y se repite el procedimiento de cálculo, pero ahora calculando primero la fase de predicción con diferencias finitas hacia adelante y la fase de corrección con diferencias hacia atrás.

La solución del campo de velocidades, para un flujo con régimen permanente, se obtiene cuando durante el ciclo iterativo las variables dependientes no cambian de una iteración a otra.

4.2 Discretización de las ecuaciones

A continuación se muestra la forma como se discretiza cada una de las ecuaciones de hidrodinámica.

Diferencias finitas hacia atrás

Con base en la ecuación de continuidad (ec 3.36) se obtiene la variable predicha HP_{ij} con diferencias finitas hacia atrás como sigue

$$\begin{aligned}
H_{ij}^p &= H_{ij}^k - \frac{\Delta t}{\sqrt{g_{ij}}} \left[(\sqrt{g_{22}} u_{(\xi)}^k h)_{ij}^k - (\sqrt{g_{22}} u_{(\xi)}^k h)_{i-1,j}^k \right] - \\
&- \frac{\Delta t}{\sqrt{g_{ij}}} \left[(\sqrt{g_{11}} v_{(\eta)}^k h)_{ij}^k - (\sqrt{g_{11}} v_{(\eta)}^k h)_{i,j-1}^k \right]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

El valor predicho del componente de la velocidad $u_{(\xi)ij}^p$ en la dirección normal al eje ξ constante, se obtiene al expresar la ecuación dinámica (ec 3.37) con diferencias finitas hacia atrás, de donde

$$\begin{aligned}
u_{(\xi)ij}^p &= u_{(\xi)ij}^k - \Delta t (ACXIP1 + ACXIP2) - \\
&- \Delta t (ACXIP3 + ACXIP4 + ACXIP5 + ACXIP6) - \\
&- \Delta t (GHXIP + SFXIP + TURXIP)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

donde

$$\begin{aligned}
ACXIP1 &= [u_{(\xi)ij}^k]^2 \left[\left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} \right)_{ij} - \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} \right)_{i-1,j} \right] \\
ACXIP2 &= \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \right)_{ij} u_{(\xi)ij}^k v_{(\eta)ij}^k \left[\left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} \right)_{ij} - \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} \right)_{i,j-1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ACXIP3 &= \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{g} y_{\eta} u_{(\xi)}^k \right)_{ij} \left[(x_{\xi} u_{(\xi)}^k)_{ij} - (x_{\xi} u_{(\xi)}^k)_{i-1,j} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{g} y_{\eta} v_{(\eta)}^k \right)_{ij} \left[(x_{\xi} u_{(\xi)}^k)_{ij} - (x_{\xi} u_{(\xi)}^k)_{i,j-1} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ACXIP4 &= \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{g} y_{\eta} u_{(\xi)}^k \right)_{ij} \left[(x_{\eta} v_{(\eta)}^k)_{ij} - (x_{\eta} v_{(\eta)}^k)_{i-1,j} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g_{22}} g} y_{\eta} v_{(\eta)}^k \right)_{ij} \left[(x_{\eta} v_{(\eta)}^k)_{ij} - (x_{\eta} v_{(\eta)}^k)_{i,j-1} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ACXIP5 &= - \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{g} x_{\eta} u_{(\xi)}^k \right)_{ij} \left[(y_{\xi} u_{(\xi)}^k)_{ij} - (y_{\xi} u_{(\xi)}^k)_{i-1,j} \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{g} x_{\eta} v_{(\eta)}^k \right)_{ij} \left[(y_{\xi} u_{(\xi)}^k)_{ij} - (y_{\xi} u_{(\xi)}^k)_{i,j-1} \right]
 \end{aligned}$$

$$ACXIP_6 = - \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{g} x_\eta u_\xi^k \right)_{ij} \left[(y_\eta v_\eta^k)_{ij} - (y_\eta v_\eta^k)_{i-1,j} \right] \cdot$$

$$- \left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{x_\eta}{g} v_\eta^k \right)_{ij} \left[(y_\eta v_\eta^k)_{ij} - (y_\eta v_\eta^k)_{i,j-1} \right]$$

$$GHXIP = \frac{g_v}{\sqrt{g_{ij}}} \left[\sqrt{g_{22}} (H_{ij}^k - H_{i-1,j}^k) - \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{22}}} \right)_{ij} (H_{ij}^k - H_{i,j-1}^k) \right]$$

$$SFXIP = \frac{g_v}{C^2} \left(\frac{u_\xi^k}{h^k} \right)_{ij} |v_{ij}^k|$$

$$TURXIP = \Gamma_{ij} y_\eta^2 [(h^k T_{xx})_{ij} - (h^k T_{xx})_{i-1,j}] \cdot$$

$$- \Gamma_{ij} (y_\xi y_\eta [(h^k T_{xx})_{ij} - (h^k T_{xx})_{i,j-1}]) \cdot$$

$$+ \Gamma_{ij} (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) [(h^k T_{xy})_{ij} - (h^k T_{xy})_{i,j-1}] \cdot$$

$$- 2\Gamma_{ij} x_\eta y_\eta [(h^k T_{xy})_{ij} - (h^k T_{xy})_{i-1,j}] \cdot$$

$$- \Gamma_{ij} x_\xi x_\eta [(h^k T_{yy})_{ij} - (h^k T_{yy})_{i,j-1}] \cdot$$

$$- \Gamma_{ij} x_n^2 [(h^k T_{yy})_{ij} - (h^k T_{yy})_{i-1,j}]$$

donde

$$\Gamma_{ij} = \frac{-1}{(\rho h^k g \sqrt{g_{22}})_{ij}}$$

$$T_{xx} = 2\rho v_i \frac{y_n}{\sqrt{g}} [(T1 u_{(\xi)}^k)_{ij} - (T1 u_{(\xi)}^k)_{i-1,j}] -$$

$$- 2\rho v_i \frac{y_n}{\sqrt{g}} [(T2 v_{(n)}^k)_{(ij)} - (T2 v_{(n)}^k)_{ij}]$$

$$- 2\rho v_i \frac{y_{\xi}}{\sqrt{g}} [(T1 u_{(\xi)}^k)_{ij} - (T1 u_{(\xi)}^k)_{i,j-1}] -$$

$$- 2\rho v_i \frac{y_{\xi}}{\sqrt{g}} [(T2 v_{(n)}^k)_{(ij)} - (T2 v_{(n)}^k)_{i,j-1}]$$

$$\begin{aligned}
T_{xy} = & - \rho v_i \frac{x_\eta}{\sqrt{g}} [(T1 u_{(\xi)}^k)_{ij} - (T1 u_{(\xi)}^k)_{i-1,j}] \cdot \\
& - \rho v_i \frac{x_\eta}{\sqrt{g}} [(T2 v_{(\eta)}^k)_{(ij)} - (T2 v_{(\eta)}^k)_{i-1,j}] \cdot \\
& + 2 \rho v_i \frac{x_\xi}{\sqrt{g}} [(T1 u_{(\xi)}^k)_{ij} - (T1 u_{(\xi)}^k)_{ij-1}] \cdot \\
& - \rho v_i \frac{x_\xi}{\sqrt{g}} [(T2 v_{(\eta)}^k)_{(ij)} - (T2 v_{(\eta)}^k)_{ij-1}] \cdot \\
& + \rho v_i \frac{y_\eta}{\sqrt{g}} [(T3 u_{(\xi)}^k)_{ij} - (T3 u_{(\xi)}^k)_{i-1,j}] \cdot \\
& - \rho v_i \frac{y_\eta}{\sqrt{g}} [(T4 v_{(\eta)}^k)_{(ij)} - (T4 v_{(\eta)}^k)_{i-1,j}] \cdot \\
& - \rho v_i \frac{y_\xi}{\sqrt{g}} [(T3 u_{(\xi)}^k)_{ij} - (T3 u_{(\xi)}^k)_{ij-1}] \cdot
\end{aligned}$$

$$- \rho v_i \frac{y_\xi}{\sqrt{g}} [(T4 v_{(\eta)}^k)_{(i,j)} - (T4 v_{(\eta)}^k)_{i,j-1}]$$

$$T_{yy} = -2\rho v_i \frac{x_\eta}{\sqrt{g}} [(T3 u_{(\xi)}^k)_{ij} - (T3 u_{(\xi)}^k)_{i-1,j}] -$$

$$- 2\rho v_i \frac{x_\eta}{\sqrt{g}} [(T4 v_{(\eta)}^k)_{(i,j)} - (T4 v_{(\eta)}^k)_{i-1,j}]$$

$$- 2\rho v_i \frac{x_\xi}{\sqrt{g}} [(T3 u_{(\xi)}^k)_{ij} - (T3 u_{(\xi)}^k)_{i,j-1}] -$$

$$+ 2\rho v_i \frac{x_\xi}{\sqrt{g}} [(T4 v_{(\eta)}^k)_{(i,j)} - (T4 v_{(\eta)}^k)_{i,j-1}]$$

De manera similar se discretiza la ecuación dinámica (ec 3.39) en la dirección normal al eje curvilíneo η constante, de donde se obtiene la variable predicha $v_{(\eta)ij}^p$

Diferencias finitas hacia adelante

Se calculan las variables dependientes con diferencias finitas hacia adelante, en función de las variables obtenidas en la etapa de predicción como sigue

$$\begin{aligned}
H_{ij}^c = H_{ij}^p - \frac{\Delta t}{\sqrt{g_{ij}}} & \left[(\sqrt{g_{22}} u_{(\xi)} h)_{i-1,j}^p - (\sqrt{g_{22}} u_{(\xi)} h)_{ij}^p \right] \\
& - \frac{\Delta t}{\sqrt{g_{ij}}} \left[(\sqrt{g_{11}} v_{(\eta)} h)_{i,j-1}^p - (\sqrt{g_{11}} v_{(\eta)} h)_{ij}^p \right]
\end{aligned}
\tag{4.4}$$

$$u_{(\xi)ij}^c = F_1^{(c)}(H, u_{(\xi)}, v_{(\eta)})_{ij}^p
\tag{4.5}$$

$$v_{(\eta)ij}^c = F_2^{(c)}(H, u_{(\xi)}, v_{(\eta)})_{ij}^p
\tag{4.6}$$

4.3 Condiciones de frontera

Las expresiones anteriores no se aplican en celdas cuyos lados coinciden con las fronteras que definen la zona en estudio, ya que se carece de valores para el cálculo de las derivadas parciales con el esquema de MacCormack. Para resolver las celdas en cuestión es necesario identificar el tipo de frontera que se tiene. En general, existen dos tipos de frontera que son cerradas (paredes) o abiertas; a continuación se discuten las expresiones correspondientes para celdas cuyos lados forman parte de una frontera.

4.3.1 Frontera cerrada (pared)

La modelación numérica del flujo bidimensional horizontal requiere de la definición adecuada de las condiciones de frontera dadas en las paredes. Existen varios procedimientos para modelar el efecto de una pared en el campo de velocidades, los cuales se explican y discuten a continuación.

Ley de pared

Este método consiste en utilizar la ley logarítmica de la distribución de la velocidad en la zona cercana a la pared. Como se sabe, cerca de la pared se distinguen tres zonas: una de esas capas se conoce como la subcapa viscosa, donde los efectos de turbulencia no son importantes; otra como la zona de transición y la tercera como de franca turbulencia, donde es válida la ley logarítmica. El dominio de aplicación de la ley logarítmica se define con base en el parámetro adimensional siguiente

$$y^+ = \frac{y_w U_*}{\nu} \quad (4.7)$$

donde y_w es la distancia perpendicular a la pared, en m , del punto p donde se desea conocer la velocidad u_w ; ν es la viscosidad cinemática del fluido, en m^2/s ; y U_* se define como la velocidad de fricción o asociada al esfuerzo cortante medio que hay entre el flujo y las paredes del canal, en m/s . En general, la expresión para calcular la variable U_* se obtiene a partir de la definición de flujo uniforme

$$U_* = \sqrt{g_v h S} = \frac{\sqrt{g_v}}{C} U_0 \quad (4.8)$$

donde g_v es la aceleración de la gravedad, en m/s^2 ; S la pendiente de la línea de energía; h el tirante del flujo, en m ; y U_0 el módulo de la velocidad media del flujo, en m/s .

Con base en las ecs 4.7 y 4.8 se calcula la distribución de velocidades cercana a la pared como sigue

$$u_w = \frac{U_*}{\kappa} \ln(E y^+); \quad 30 \leq y^+ \leq 100 \quad (4.9)$$

donde $E = 9.793$ para paredes lisas, y κ es la constante de von-Karman que tiene un valor de 0.4187, según Versteeg y Malalasekera (1995).

En gran cantidad de artículos publicados, donde se presentan aplicaciones de modelos de flujo bidimensional horizontal en coordenadas rectangulares, no se discute con mayor detalle el uso de la ley logarítmica para definir la velocidad cercana a una pared como condición de frontera; ejemplos de dichas publicaciones son: Tingsanchali y Maheswaran (1990), Rastogi y Rodi (1978) y Duc *et al* (1996).

La aplicación de la ley logarítmica como condición de frontera para calcular, por ejemplo, la distribución trasversal de la velocidad en un canal rectangular, es tal vez la mejor manera de resolver el problema, y tiene la ventaja de que la malla de cálculo no debe ser demasiado fina en la zona cercana a la pared, donde el gradiente trasversal de la velocidad es notable. En Jiménez (1998) se muestra la aplicación de esta metodología para calcular el perfil trasversal de un flujo bidimensional horizontal en un canal rectangular.

Una cuestión importante que se tiene al utilizar las expresiones 4.8 y 4.9, es que se requiere conocer el valor de U . Al considerar que U es constante en todo el campo del flujo, el autor de este trabajo demostró que la ley de pared no es una técnica adecuada para modelar flujos bidimensionales con zonas de separación o recirculación, como se puede ver en Jiménez (1998).

Sin deslizamiento o velocidad nula en la pared

El hecho de que los componentes horizontales de la velocidad del flujo en una pared impermeable son nulos, se toma en cuenta en el cálculo de las derivadas parciales correspondientes en las celdas cuyas orillas coinciden con la pared; sin embargo, algunos autores han hecho notar que el cálculo de la variación de la velocidad en la dirección

normal a la pared requiere que la malla de cálculo sea demasiado densa en esa zona, lo cual no es recomendable debido al notable incremento en los requerimientos de memoria de máquina y de tiempo de proceso de cálculo.

Libre deslizamiento o frontera reflejante

Para este caso se hacen las hipótesis de que tanto la variación de la velocidad tangencial a la pared, en el sentido normal a la misma, como la velocidad normal a la pared son nulas. Sea el caso de una celda, donde uno de sus lados forma parte de la frontera que confina a la superficie libre del agua, como se muestra en la fig 4.2. Con base en las hipótesis mencionadas, se supone que en la frontera hay una imagen de la celda, la cual está definida por puntos ficticios en la pared sólida, como se muestra en la fig 4.2 (ver Chaudhry (1993) o Yulistiyanto (1998)).

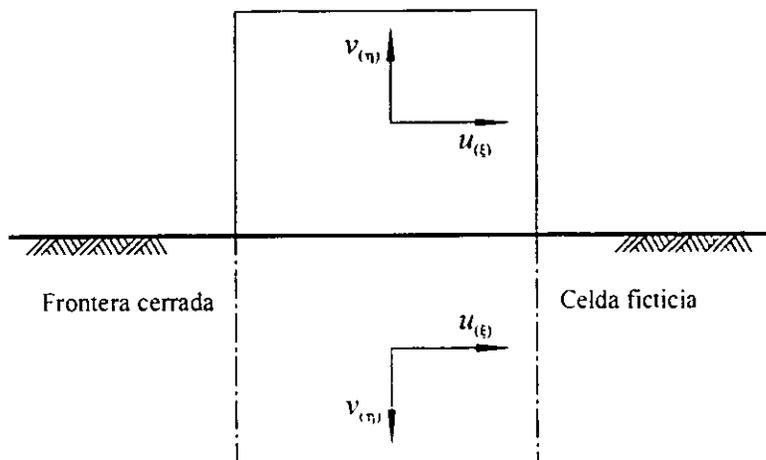


Fig 4.2 Celda con frontera cerrada

En la figura se observa que los componentes de la velocidad paralelos a la pared son idénticos y los perpendiculares a la misma tienen signo opuesto. De esta manera, las derivadas parciales en la dirección normal a la pared se expresan como

$$\left(\frac{\partial P u_{(\xi)}^k}{\partial \eta} \right)_{ij} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial P v_{(\eta)}^k}{\partial \eta} \right)_{ij} = 2 P_{ij} v_{(\eta)ij}^k$$

donde P_{ij} es un parámetro métrico o la combinación de algunos de ellos en la celda i,j .

Debido a su sencillez esta es la manera como se modelan las fronteras cerradas en el modelo numérico que se desarrolla en este trabajo.

4.3.2 Frontera abierta con nivel de agua conocido

En cuanto a la modelación de una frontera donde se conoce la variación de la superficie libre del agua en el tiempo y se desea conocer el gasto, se propone calcular el componente de la velocidad en la dirección normal al eje curvilíneo ξ constante, con base en el componente de la ecuación dinámica en la misma dirección, y suponer que el otro componente de la velocidad es nulo, como se muestra en la fig 4.3 (ver por ejemplo, Rahman y Chaudhry (1995)).

De esta manera se tiene que el componente de la ecuación dinámica en diferencias finitas con el esquema de MacCormack se expresa como sigue

$$\begin{aligned}
u_{(\xi)ij}^{k-1} &= u_{(\xi)ij}^k - \Delta t [u_{(\xi)ij}^k]^2 \left[\left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} \right)_{ij} - \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} \right)_{i-1,j} \right] \cdot \\
&- \Delta t \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} y_\eta \right)_{ij} u_{(\xi)ij}^k [(x_\xi u_{(\xi)ij}^k) - (x_\xi u_{(\xi)i-1,j}^k)] \cdot \\
&\cdot \Delta t \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} x_\eta \right)_{ij} u_{(\xi)ij}^k [(y_\xi u_{(\xi)ij}^k) - (y_\xi u_{(\xi)i-1,j}^k)] \cdot \\
&- \Delta t \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}} \right)_{ij} g_v (H_{ij}^k - H_{i-1,j}^k) - \Delta t \frac{g_v}{C^2} \frac{u_{(\xi)ij}^k}{h_{ij}^k} |V_{ij}^k|
\end{aligned}
\tag{4.10}$$

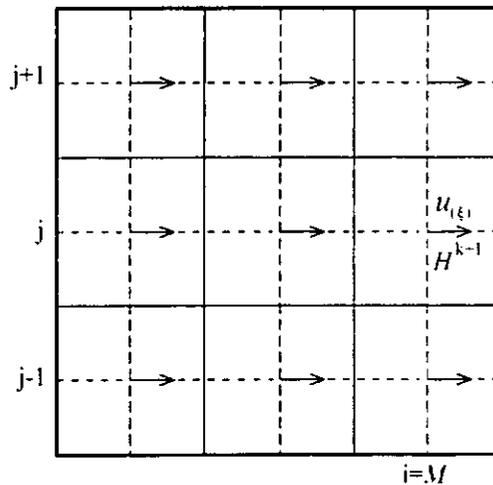


Fig 4.3 Celda i, j con frontera de nivel H^{k-1} conocido

Con esta velocidad y el tirante se determina el gasto en la frontera. Se hace notar que la expresión 4.10, se debe aplicar en secciones donde se cumpla que el flujo es prácticamente paralelo, para que de esta manera se satisfaga la hipótesis de que el componente de la velocidad en el sentido transversal al flujo principal sea nulo.

4.3.3 Frontera abierta con flujo conocido

Cuando el gasto de ingreso (Q^{k-1}) es conocido, la cota de la superficie libre del agua se obtiene al aplicar la ecuación de continuidad, donde se supone que el componente $v_{(n)}$ es nulo, de esta manera, para la celda mostrada en la fig 4.4 se tiene la expresión

$$H_{ij}^{k+1} = H_{ij}^k - \frac{\Delta t}{\sqrt{g_{ij}}} [(u_{(t)} h)_{i-1,j}^k - Q^{k-1}] \quad (4.11)$$

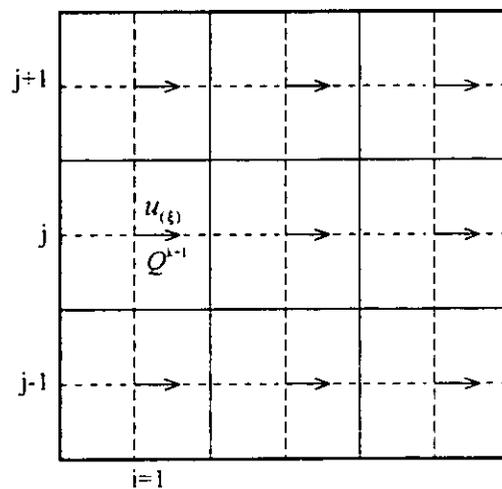


Fig 4.4 Celda i, j con frontera de gasto Q^{k-1} conocido

Se hace notar que la solución del campo de velocidades de un flujo permanente, se obtiene cuando los valores de las velocidades y niveles de agua convergen a un cierto valor. Puesto que lo que se obtiene son los componentes covariantes del vector velocidad, para conocer los componentes rectangulares correspondientes se utilizan las expresiones 3.6.

4.4 Filtro numérico y condición de estabilidad

Debido a que el método de diferencias finitas es aproximado e introduce errores numéricos de truncado, el método de solución puede no tener solución numérica estable. Para lograr la estabilidad del modelo numérico es común aplicar un filtro en este tipo de modelos. En el modelo desarrollado en este trabajo, se aplica un filtro propuesto por Abbott (1979), el cual se ha adaptado para el flujo bidimensional y que consiste en modificar cada una de las variables dependientes en función de los valores vecinos de la misma variable como

$$R_f = X_{i-1,j} + X_{i+1,j} + X_{i,j-1} + X_{i,j+1} \quad (4.12a)$$

$$X_{i,j}^f = (1 - 4\alpha)X_{i,j} + \alpha R_f \quad (4.12b)$$

donde $X_{i,j}$ es la variable que se va a filtrar; α un factor de peso ($0 \leq \alpha \leq 0.25$); y $X_{i,j}^f$ es la variable filtrada.

Puesto que el filtro numérico se obtiene con base en el promedio pesado de las variables de las celdas vecinas, al aplicar la expresión 4.8 a celdas que definen las fronteras, el promedio se hace únicamente con los valores de las celdas vecinas.

Debido a que el esquema que se usa en este trabajo es explícito, el paso de tiempo debe cumplir con la restricción de Courant. En Yulistiyanto (1997) se demuestra con algunas simplificaciones que el esquema de MacCormack es estable cuando se cumple la condición siguiente

$$\Delta t < C_n \frac{1}{\frac{u \cdot C_L}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{v \cdot C_L}{\sqrt{g_{22}}} + \frac{2v_t}{g_{11}} + \frac{2v_t}{g_{22}}} \quad (4.13)$$

donde C_n es el número de Courant, el que debe ser menor a la unidad, y

$$C_L = \sqrt{g_v h}$$

*"Los últimos peldaños
son los más difíciles de subir".*

Goethe.

5. CALIBRACIÓN Y VERIFICACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

La calibración y verificación del funcionamiento del modelo matemático desarrollado se hizo con base en mediciones de laboratorio de campos de velocidades en canales definidos por fronteras de distintas formas geométricas. A continuación se describen cada una de las cinco pruebas realizadas.

5.1 Flujo en una curva horizontal

Entre los trabajos experimentales más interesantes de mediciones del campo de velocidades en canales con fronteras curvas destacan los realizados por Rozovskii (1957), cuyas mediciones han sido utilizadas por varios investigadores, como por ejemplo Leschziner y Rodi (1979); una parte de dichas mediciones están reportadas en Molls (1992). Dichos experimentos se llevaron a cabo en un canal rectangular con ancho $B = 0.80 \text{ m}$, que forma una curva en planta de 180° , con pendiente de plantilla nula, coeficiente de fricción de Chezy reportado de $C = 60 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, velocidad de entrada al canal $U = 0.265 \text{ m/s}$ y tirante de 0.06 m , lo cual da un gasto de $0.0123 \text{ m}^3/\text{s}$. Con esta información se aplicó el modelo numérico desarrollado en este trabajo.

La malla de cálculo se muestra en la fig 5.1, la cual consta de 117 x 20 celdas, donde se nota que el tamaño de las celdas cambia en forma gradual en las zonas aguas arriba y aguas abajo de la curva. Para la modelación se utilizó un intervalo de tiempo $\Delta t = 0.005$ s, con coeficiente de filtrado $\alpha = 0.05$, el cual se aplicó cada 10 Δt . Debido a que no se reporta el valor del tirante en la salida del canal se propuso un valor constante de 0.058 m; no se consideró el efecto de la turbulencia en los cálculos.

El correspondiente campo horizontal de velocidades para $t = 60$ s se muestra en la fig 5.2. Se aclara que con esta malla se logró una exacta conservación de masa en los cálculos; y en algunas celdas, el número de Courant llegó a tener valores mayores a 0.30.

En la fig 5.3 se muestran los perfiles medidos y calculados de la distribución trasversal de la velocidad en dos secciones de la curva para los ángulos de 37° y 102°. Nótese que tanto la velocidad calculada como la medida son mayores en la parte interior de la curva.

En la fig 5.4 se muestra la comparación de los perfiles de la superficie libre del agua medidos y calculados en las paredes de la curva. Se nota que en la pared de la curva exterior el nivel del agua aumenta, mientras que en la pared interior de la misma dicho nivel disminuye; además, el perfil trasversal de la superficie libre del agua tiene pendiente distinta a cero, tanto en la entrada como en la salida de la curva.

El autor considera que los resultados obtenidos con el modelo numérico son muy buenos, ya que el flujo que se está modelando es notablemente tridimensional, mientras que el modelo que aquí se utiliza se basa en la hipótesis de flujo bidimensional horizontal promediado en la profundidad. Conviene aclarar que los resultados de este modelo numérico son muy parecidos a los reportados por Molls (1992). Se aclara que al incluir el efecto de la turbulencia en los cálculos del modelo matemático, se observó que los resultados obtenidos son casi iguales con respecto al caso donde no se incluye el efecto de la turbulencia, lo cual coincide con lo anotado en Molls (1992).

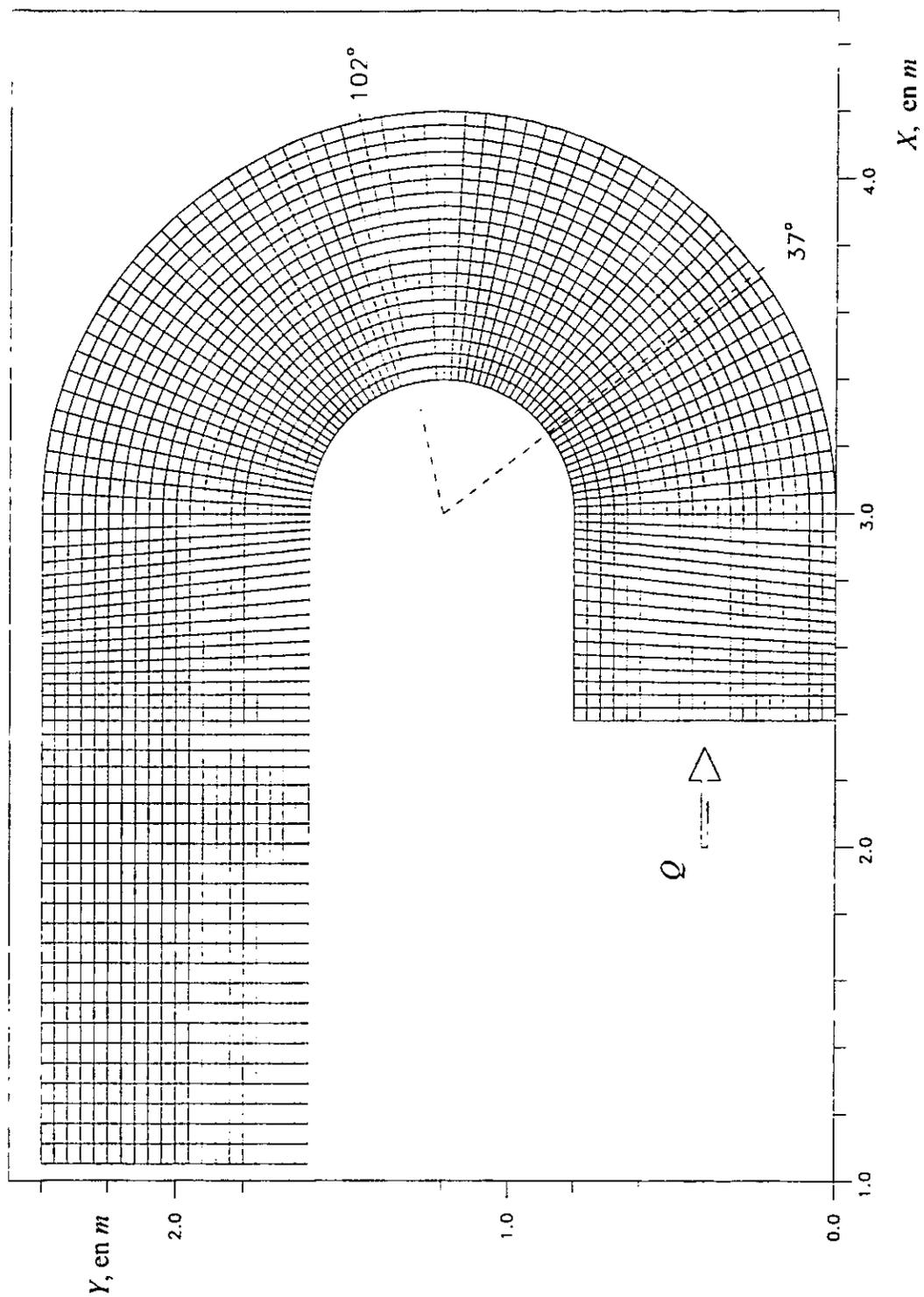


Fig 5.1 Malla de cálculo

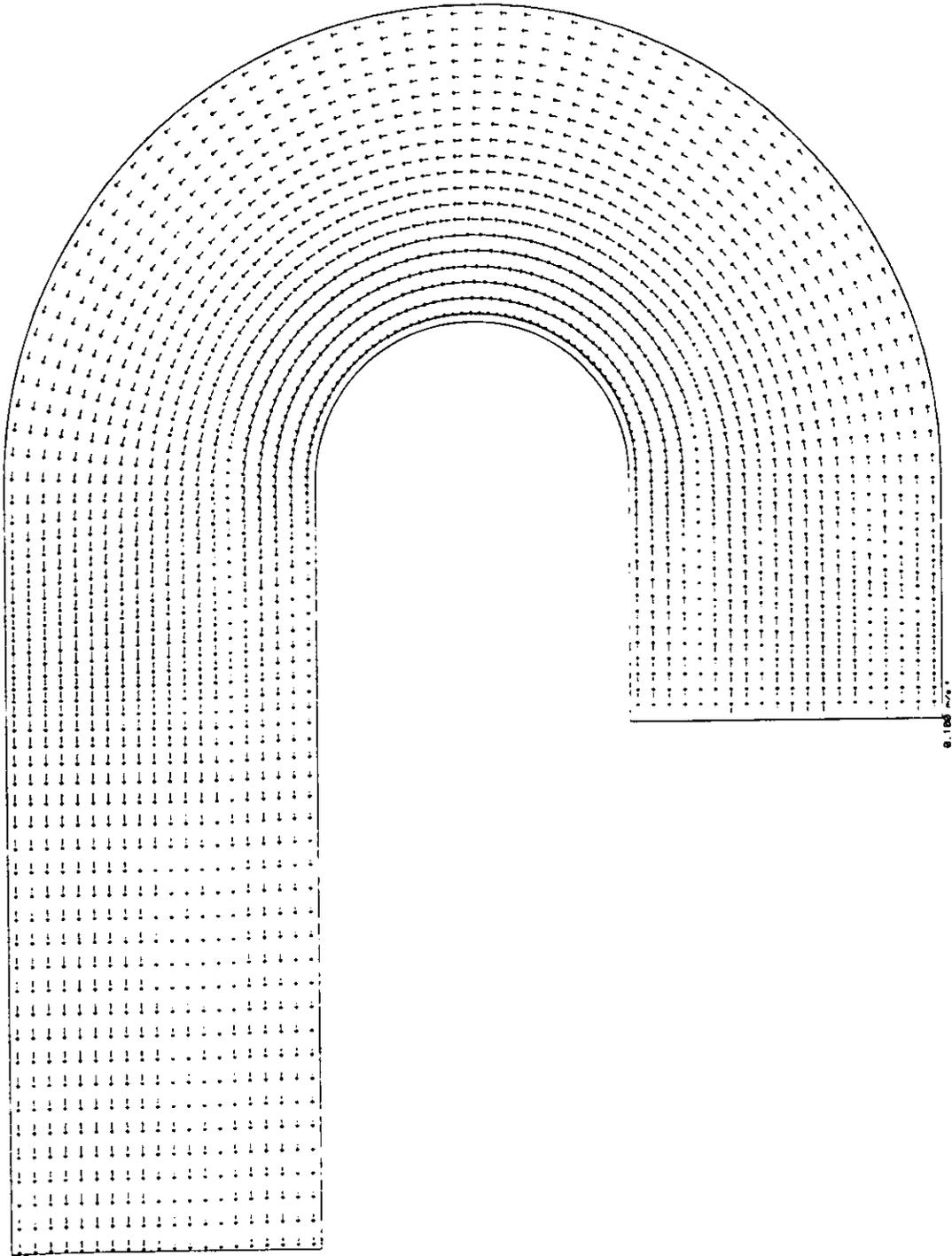


Fig 5.2 Campo horizontal de velocidades

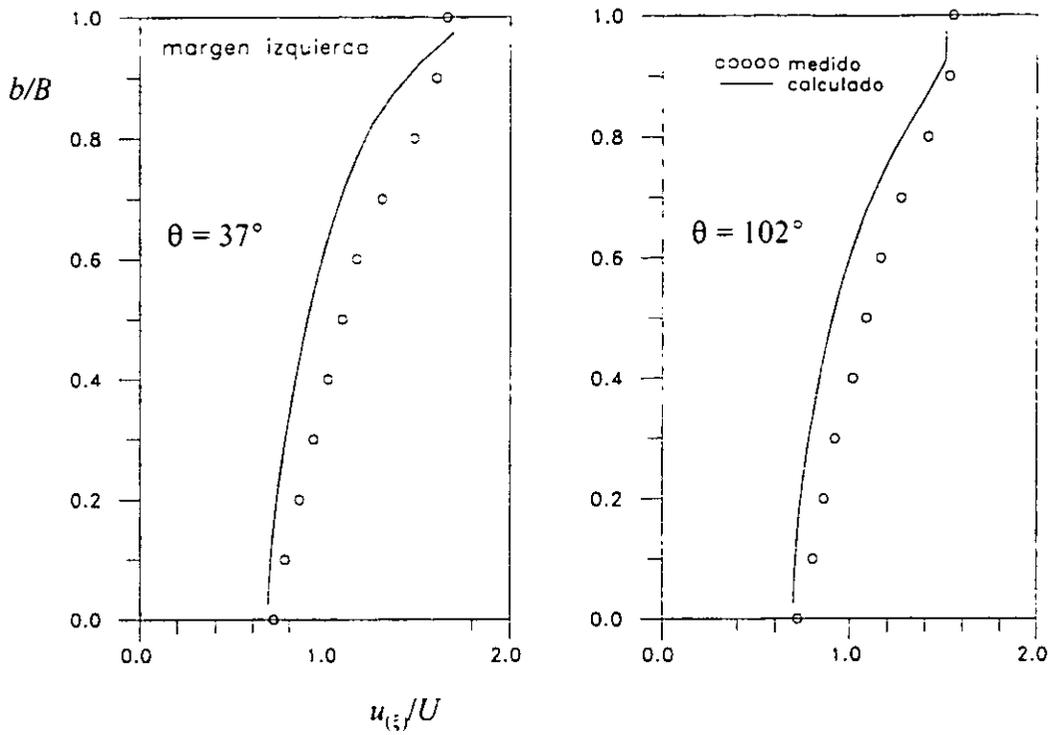


Fig 5.3 Perfiles trasversales de velocidad

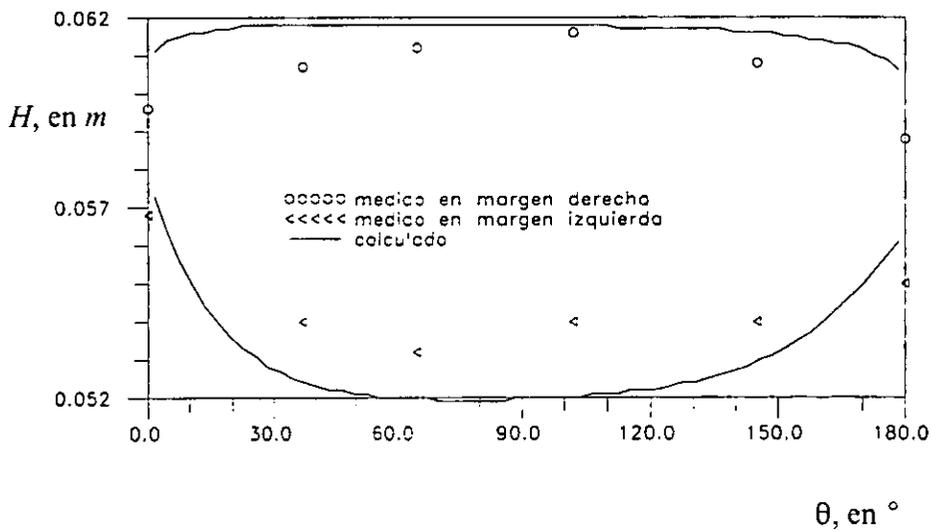


Fig 5.4 Perfiles hidráulicos en la curva

5.2 Efecto de un espigón en el flujo de un canal rectangular

Rajaratnam y Nwachukwu (1983) realizaron varias series de experimentos y mediciones en un canal horizontal rectangular de 37 m de longitud, 0.915 m de ancho y 0.76 m de profundidad, con sistema de recirculación de agua y una compuerta plana en el extremo final para regular el nivel del agua en el canal. En uno de sus ensayos, el "A2", colocaron en la mitad de la longitud del canal una placa de 3 mm de espesor y 0.15 m de longitud, como se muestra en la fig 5.5; durante la prueba el tirante en el canal fue de 0.223 m con velocidad del flujo a la entrada de $U = 0.22$ m/s. Tingsanchai y Maheswaran (1990) reportan una gráfica adimensional de la distribución del componente horizontal de la velocidad en el sentido longitudinal del canal, para las cinco secciones transversales mostradas en la fig 5.6. De dicha gráfica se obtuvieron los valores medidos con los cuales se revisó el funcionamiento del modelo numérico desarrollado. La malla de cálculo que se usó se muestra en la fig 5.6, la cual consta de 112 x 43 celdas; para la modelación se usó Δt de 0.001 s, coeficiente de filtrado $\alpha = 0.05$, el cual se aplicó cada 10 Δt , y coeficiente de fricción de Chezy reportado de 60 m^{1/2}/s.

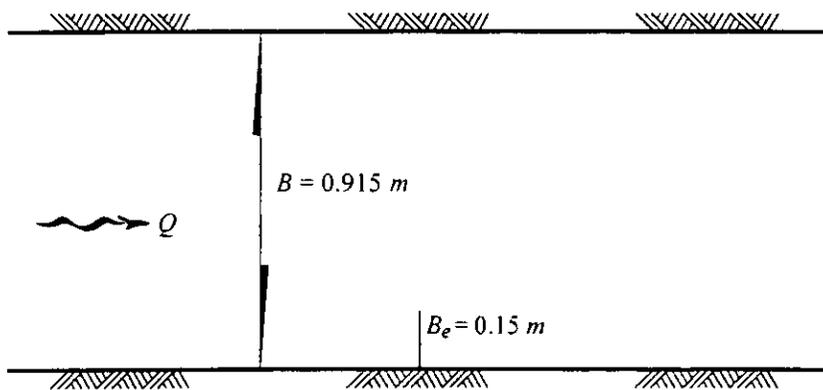


Fig 5.5 Canal rectangular con espigón

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

El modelo numérico se aplicó para las tres opciones siguientes:

- a) Sin considerar los términos que incluyen los esfuerzos efectivos turbulentos
- b) Se incluyen los esfuerzos efectivos, con la viscosidad turbulenta calculada con la expresión 3.40.
- c) Se calcula la viscosidad turbulenta con el modelo $k-\epsilon$, el cual se explica con detalle en el subcapítulo 3.4.2.

Al comparar los resultados obtenidos de cada una de las opciones con los datos medidos en laboratorio, se observó que la segunda opción da resultados excelentes; en la fig 5.7 se muestra el campo de velocidades obtenido con la segunda opción para $t = 120$ s. En las figs 5.8 y 5.9 se muestran los campos de velocidades obtenidos para $v_x = 0$ y v_x obtenida con el modelo $k-\epsilon$, en ellas se observa que cuando no se incluye el efecto de la turbulencia, la longitud de la zona de separación es demasiado grande, mientras que cuando se calcula la viscosidad turbulenta con el modelo $k-\epsilon$, dicha zona es demasiado pequeña en cuanto a su longitud y ancho, lo cual ha sido señalado en varios trabajos publicados, como por ejemplo, en Tingsanchai y Maheswaran (1990).

La comparación entre el componente rectangular u de las distribuciones de velocidad medidas y calculadas con la segunda opción se muestra en la fig 5.10. Se aclara que en algunas de las celdas cercanas al espigón, el número de Courant llegó a 0.35.

En la fig 5.11 se muestran únicamente los perfiles transversales calculados del componente rectangular v de la velocidad, para cada una de las cinco secciones indicadas. Se hace notar que los valores de dicho componente son negativos en la última de las secciones analizadas.

En la fig 5.12 se muestran las distribuciones de la viscosidad turbulenta calculada con la segunda opción, para cada una de las secciones indicadas en la fig 5.6. Como se observa en la fig 5.10, este método sencillo de calcular la llamada viscosidad turbulenta produce muy buenos resultados.

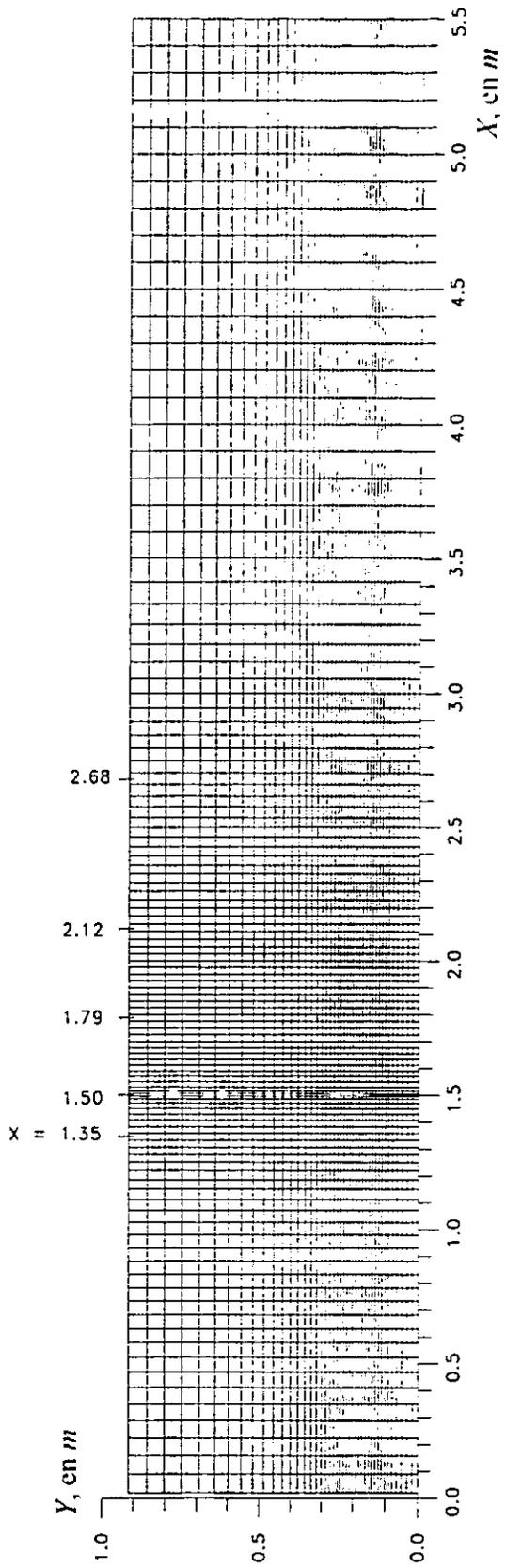


Fig 5.6 Malla de cálculo

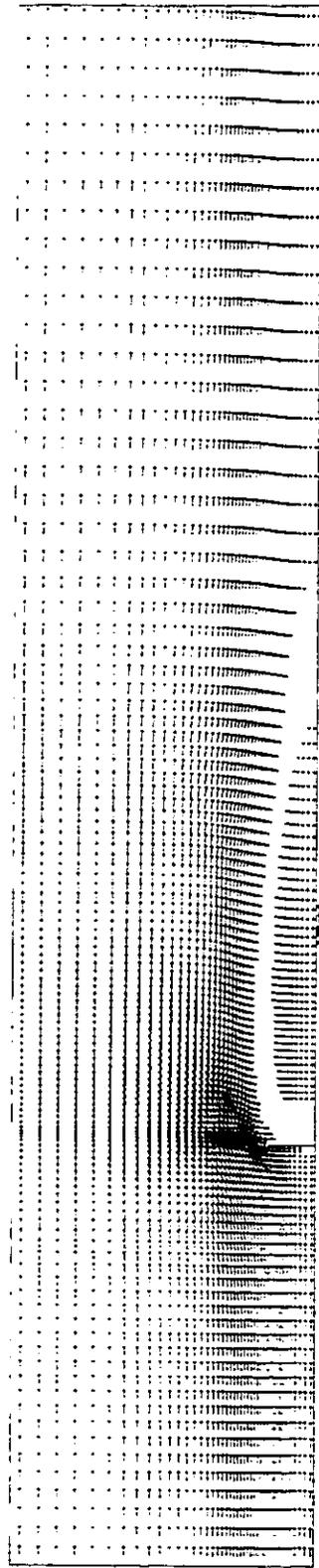


Fig 5.7 Campo horizontal de velocidades ($v_1 = 0.0765 h U_*$)

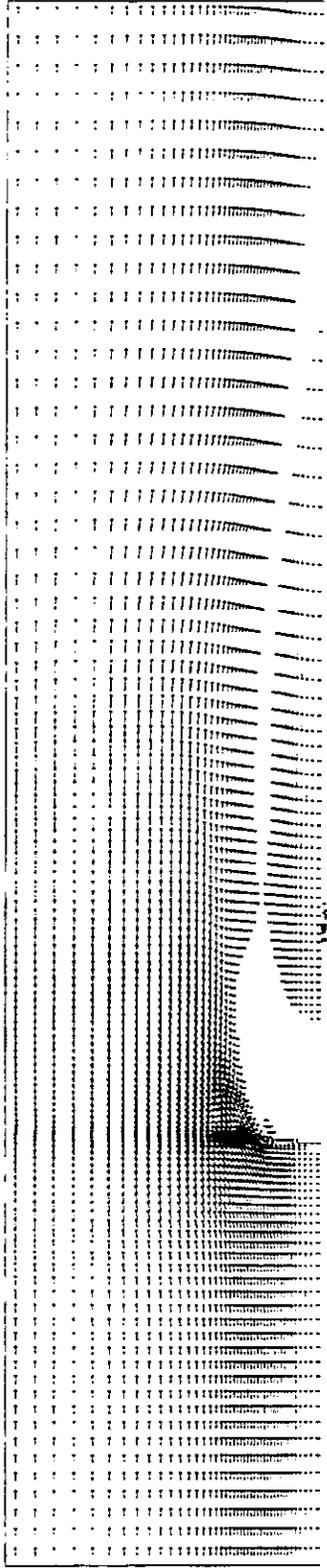


Fig 5.8 Campo horizontal de velocidades ($v_t = 0$)

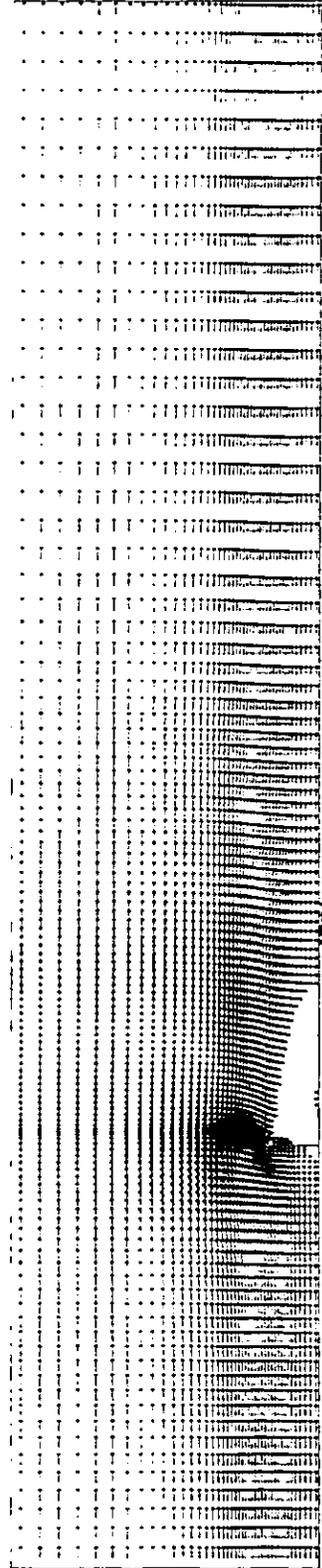


Fig 5.9 Campo horizontal de velocidades ($v_t = f(k, \epsilon)$)

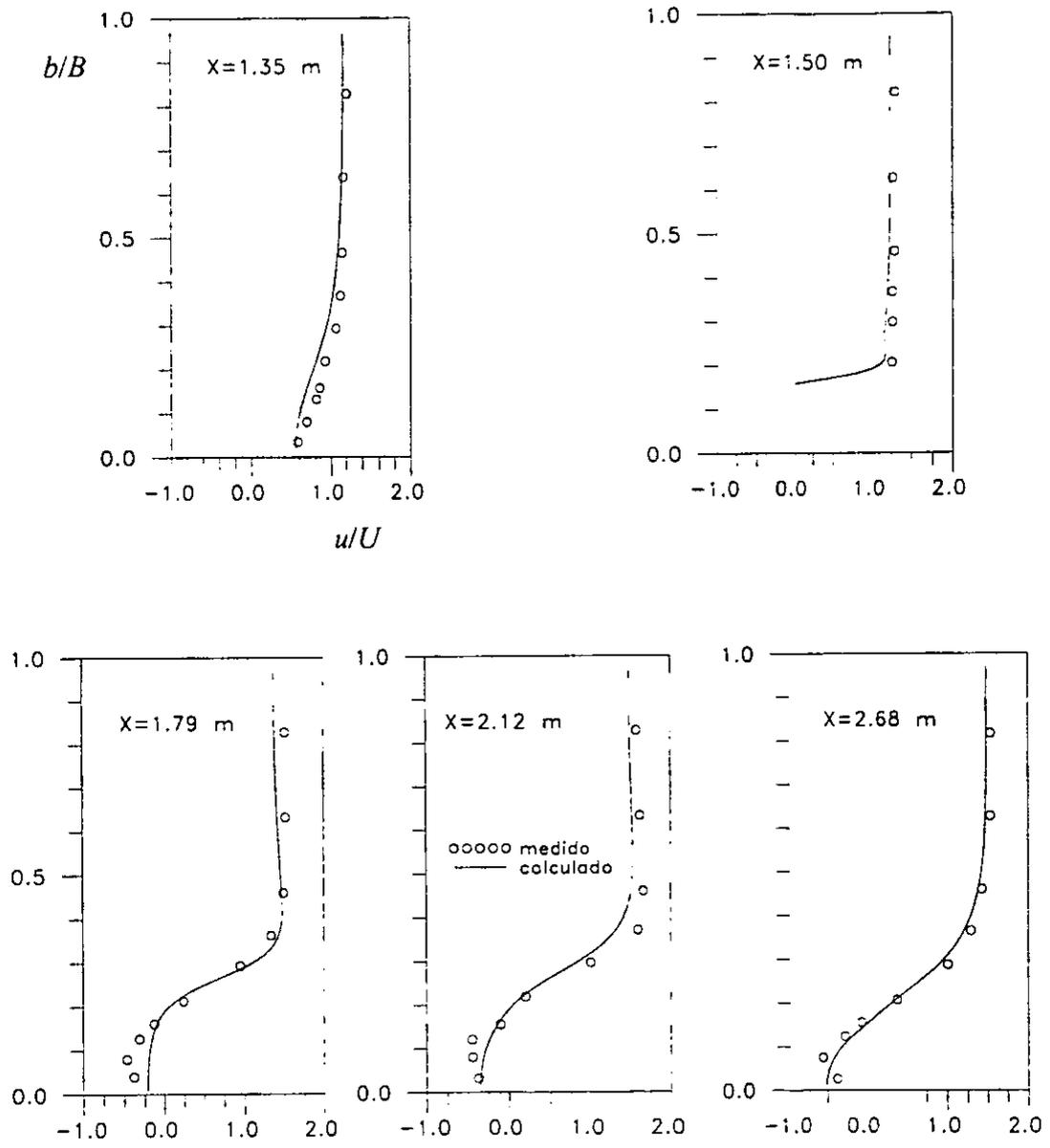


Fig 5.10 Distribución trasversal del componente u

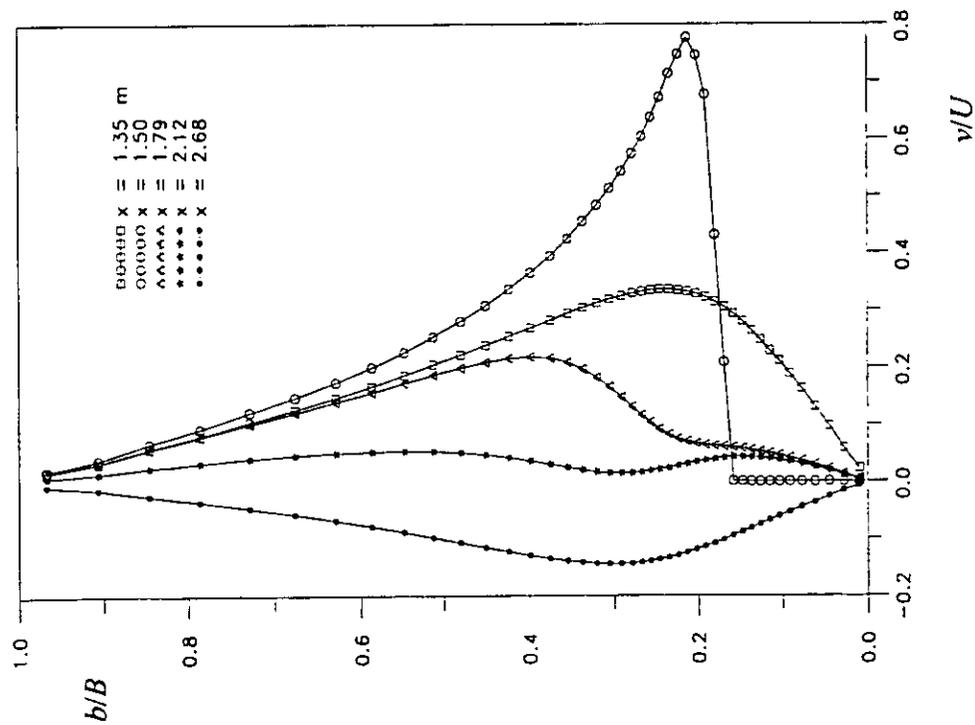


Fig 5.11 Distribución transversal del componente v

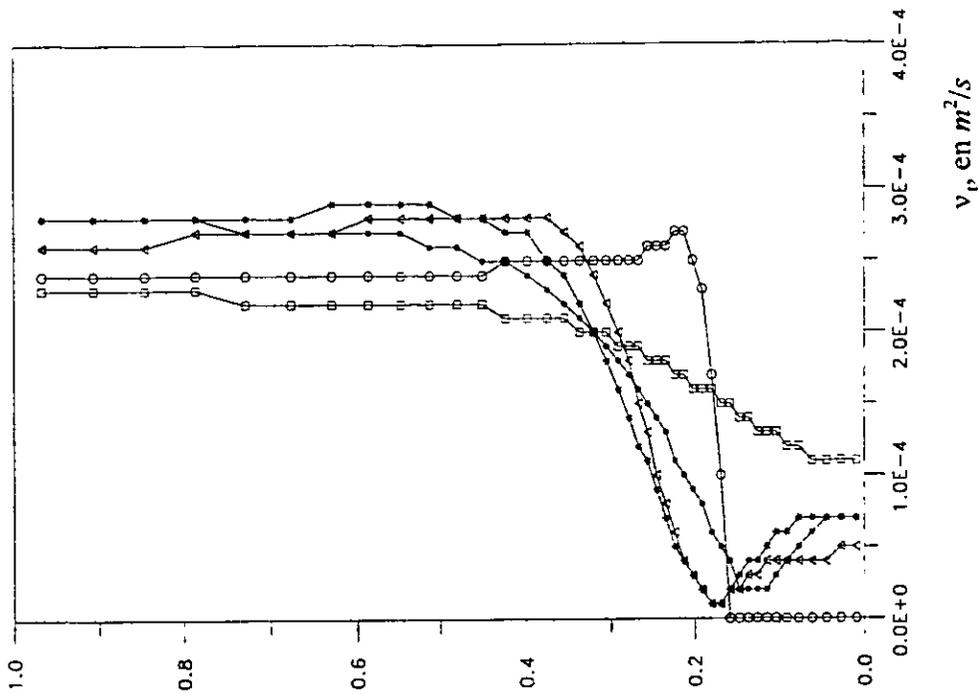


Fig 5.12 Distribución transversal de la viscosidad turbulenta

5.3 Obstáculo de forma irregular

Con el propósito de aplicar el modelo de flujo bidimensional horizontal en coordenadas generales, se propuso colocar un obstáculo de forma irregular en el canal de pendiente variable de la Coordinación de Hidráulica del Instituto de Ingeniería, de la UNAM, como se indica en la fig 5.13. El canal tiene 30 m de largo, 0.78 m de ancho y 0.8 m de altura, con un sistema para recircular el agua, tanque de carga constante, tres bombas con capacidad para bombear hasta 40 l/s, un vertedor rectangular de cresta afilada con 1.48 m de ancho sin contracciones laterales, y paramento aguas arriba de 2.32 m, un limnómetro para aforar el gasto en dicho vertedor, y una compuerta vertical plana en la salida del mismo para controlar el nivel del agua. Se revisó que la plantilla del tramo del canal donde se ubica el obstáculo estuviera horizontal. La malla de cálculo correspondiente se muestra en la fig 5.14, donde se puede apreciar que las celdas que forman la malla en la zona cercana al obstáculo son cuadriláteros no ortogonales. La malla está compuesta de 151 x 35 celdas.

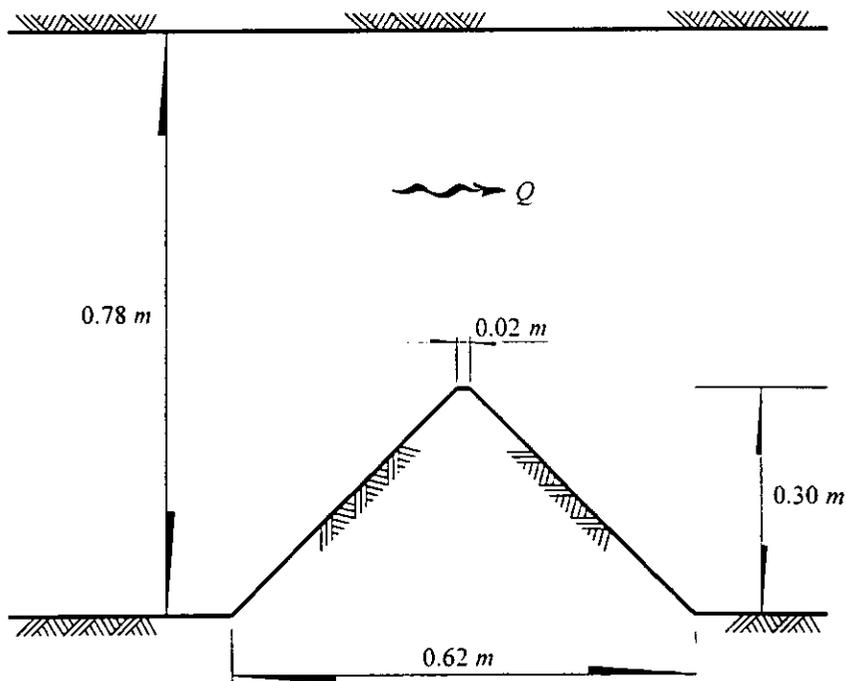


Fig 5.13 Canal rectangular con un obstáculo

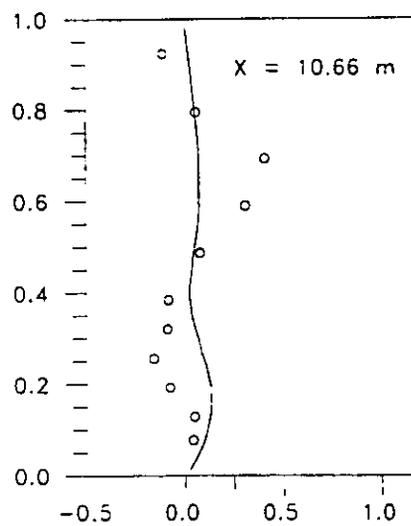
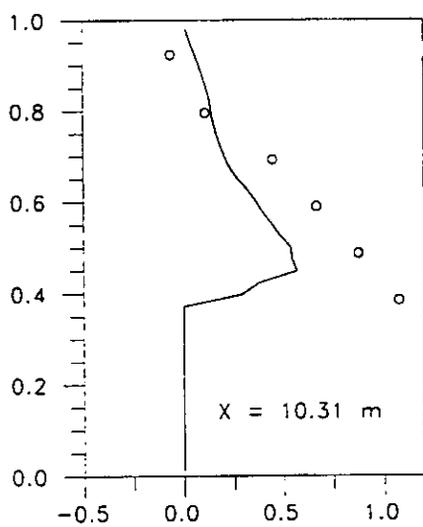
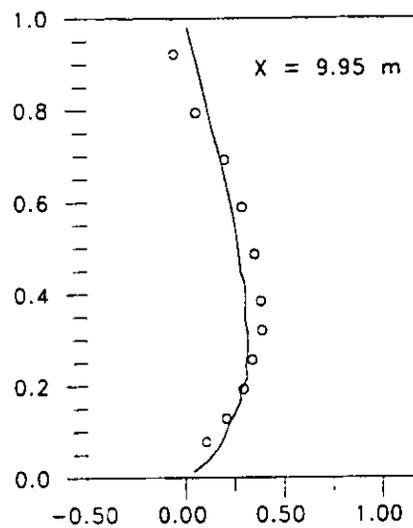
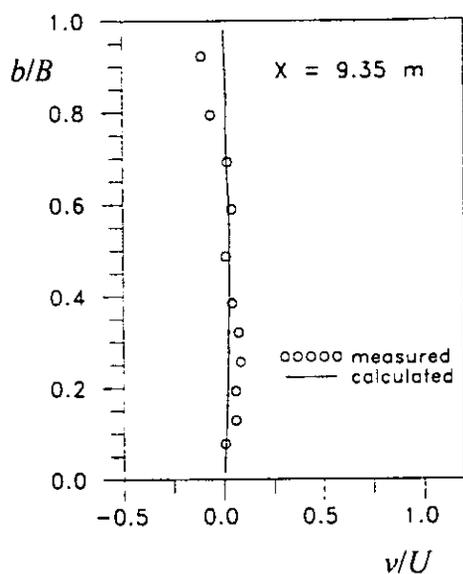
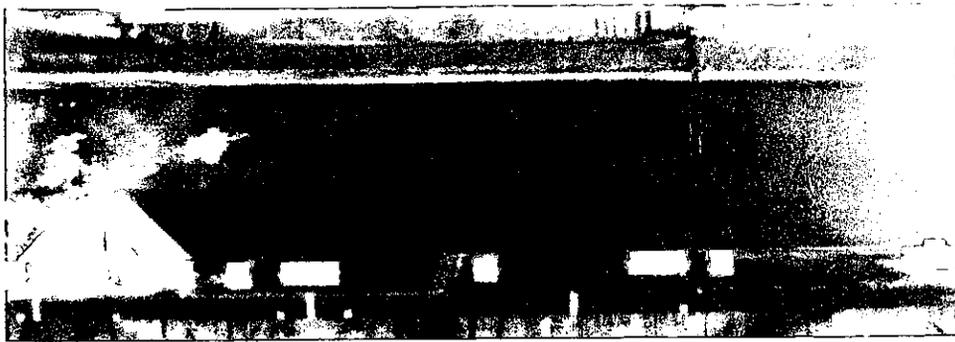
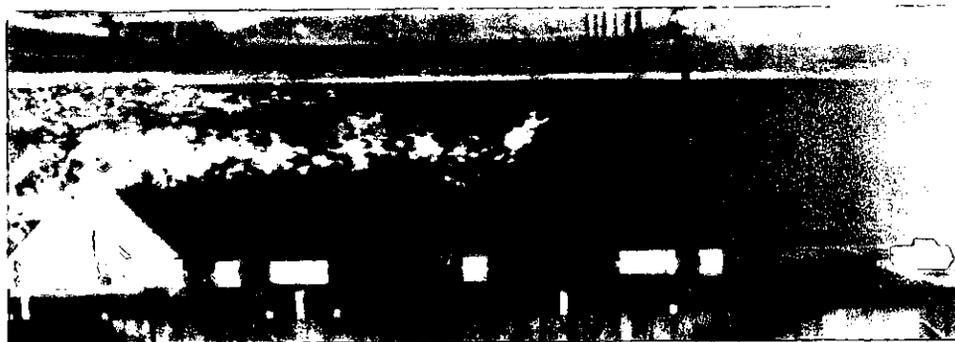


Fig 5.17 Distribución transversal del componente v



t₁



t₂



t₃



t₄

Fig. 5.19 Fotos del experimento con $Q=0.0146 \text{ m}^3/\text{s}$

Prueba 2. Gasto de 0.0296 m³/s

Sin modificar las dimensiones ni la ubicación del obstáculo colocado en el canal de pendiente variable, se hizo pasar un gasto de 0.0296 m³/s, con lo cual la velocidad del agua en la sección ubicada a 1 m aguas arriba del obstáculo fue de $U = 0.22$ m/s, mientras que a 5 m aguas abajo del mismo se mantuvo un tirante constante de 0.17 m.

También para este caso se aplicó el programa con cada una de las tres opciones descritas en el subcapítulo 5.2. Se utilizó $\Delta t = 0.001$ s, con coeficiente de filtrado $\alpha = 0.05$ para las celdas comprendidas entre $10.06 \leq X \leq 10.58$ m y $\alpha = 0.02$ para todas las demás, el cual se aplicó cada $10 \Delta t$, y no se modificó la malla de cálculo. En la fig 5.20 se muestra la malla de cálculo y en la 5.21 el campo de velocidades calculado con la segunda opción; en las figs 5.22 y 5.23 se muestra la comparación de los perfiles transversales de los componentes de la velocidad medidos y calculados; como se puede apreciar en las figuras, también para este caso los resultados del modelo numérico con la segunda opción coinciden bastante bien con los valores medidos. La discontinuidad que se nota en los perfiles del componente u para $X = 9.95$ y 10.66 m se deben a la discontinuidad que presentan las líneas de la malla para η constante en la zona cercana al obstáculo. En cuanto a la oscilación que se tiene en el perfil transversal del componente v para $X = 10.31$ m, se considera que esto es también consecuencia de los cambios de dirección de las líneas η constante.

En la fig 5.24 se muestran los perfiles transversales de la distribución de la llamada viscosidad turbulenta para cuatro secciones, la cuales se considera que son de mayor relevancia.

También para esta prueba se obtuvo la serie de fotos mostradas en la fig 5.25, donde se aprecia el confeti de distintos colores que permite visualizar la zona de separación y los correspondientes remolinos que se desplazan hacia aguas abajo del obstáculo.

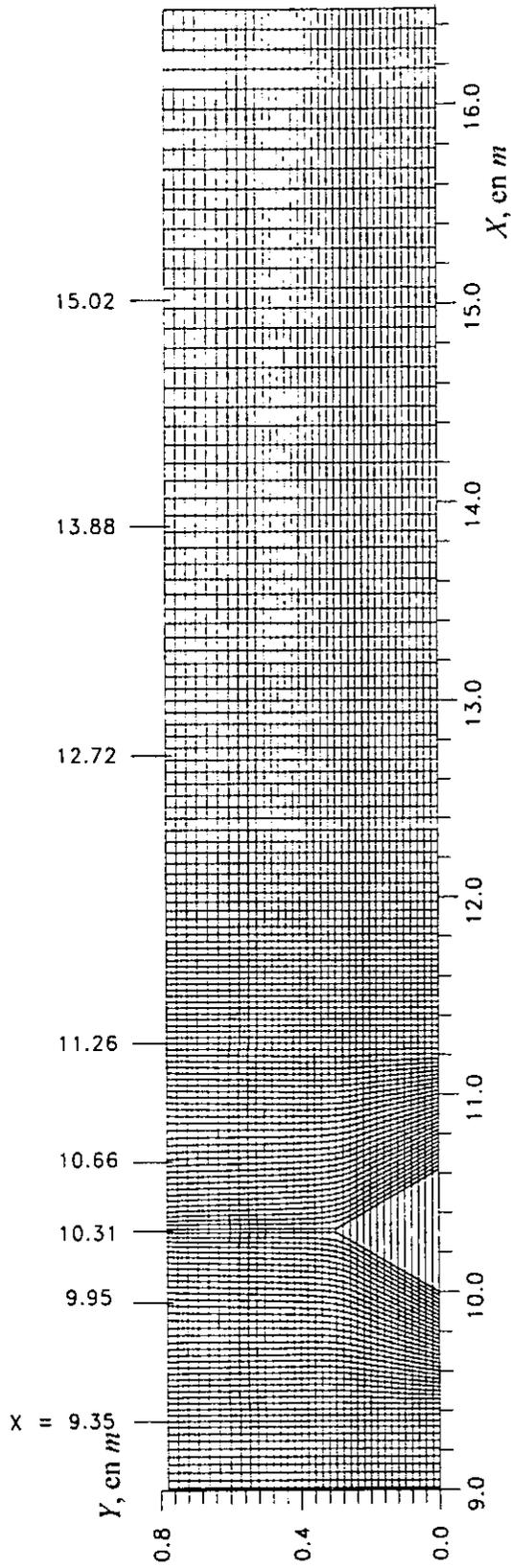


Fig 5.20 Malla de cálculo

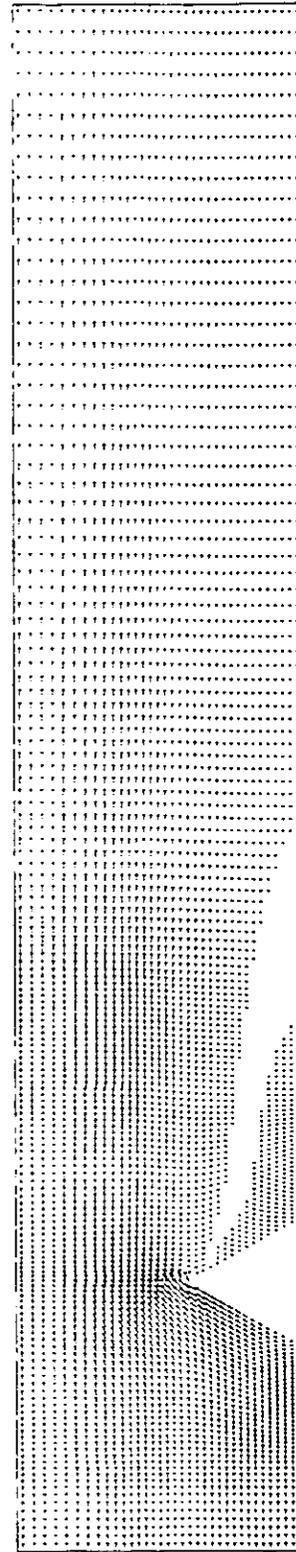


Fig 5.21 Campo horizontal de velocidades ($Q = 0.0296 \text{ m}^3/\text{s}$ y $v_t = 0.0765 \text{ h } U_*$)

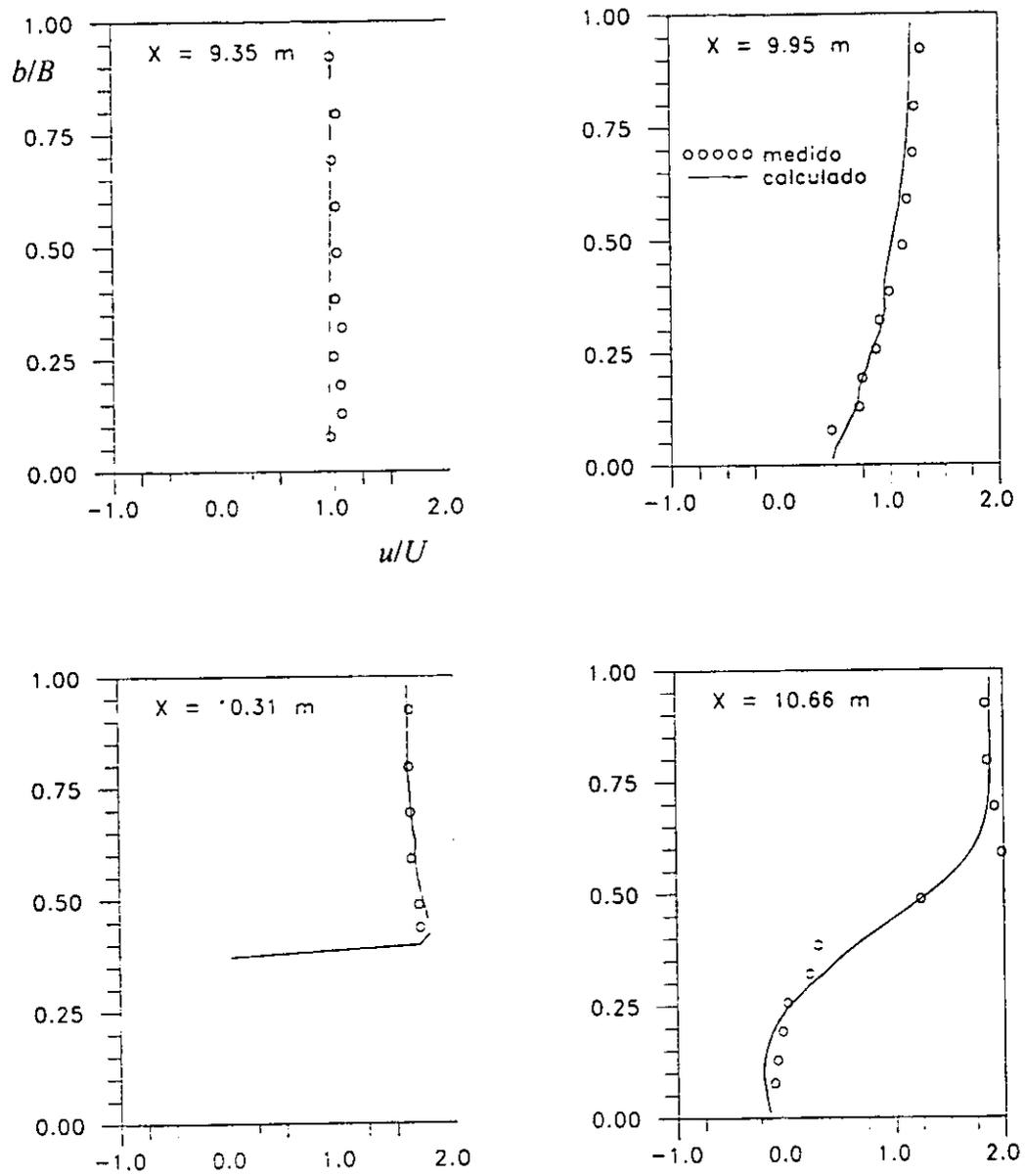


Fig 5.22 Distribución trasversal del componente u

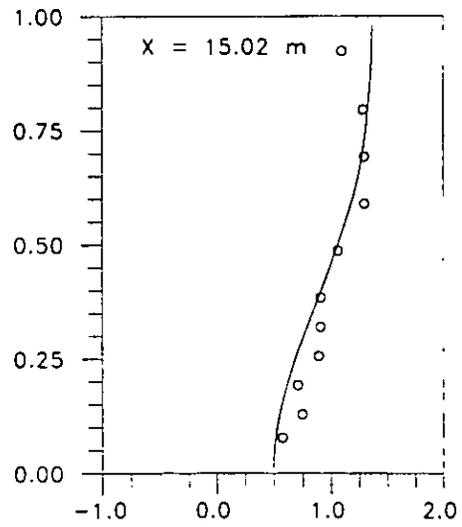
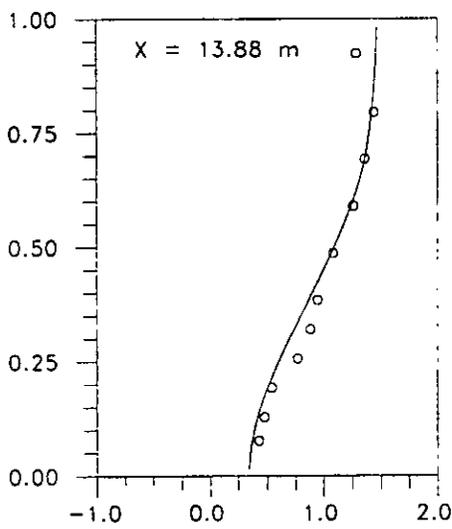
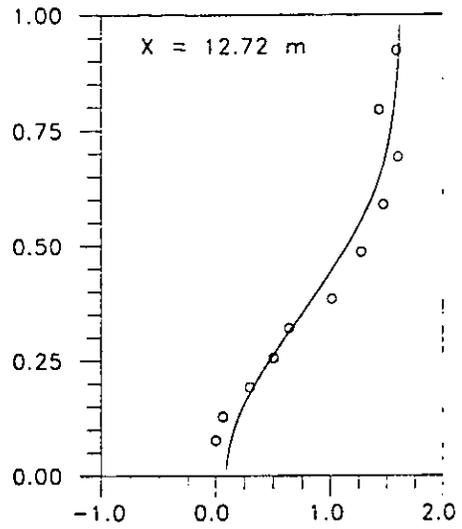
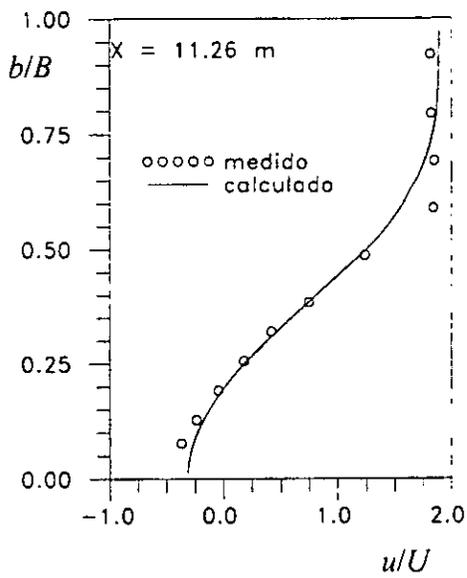


Fig 5.22 Continuación

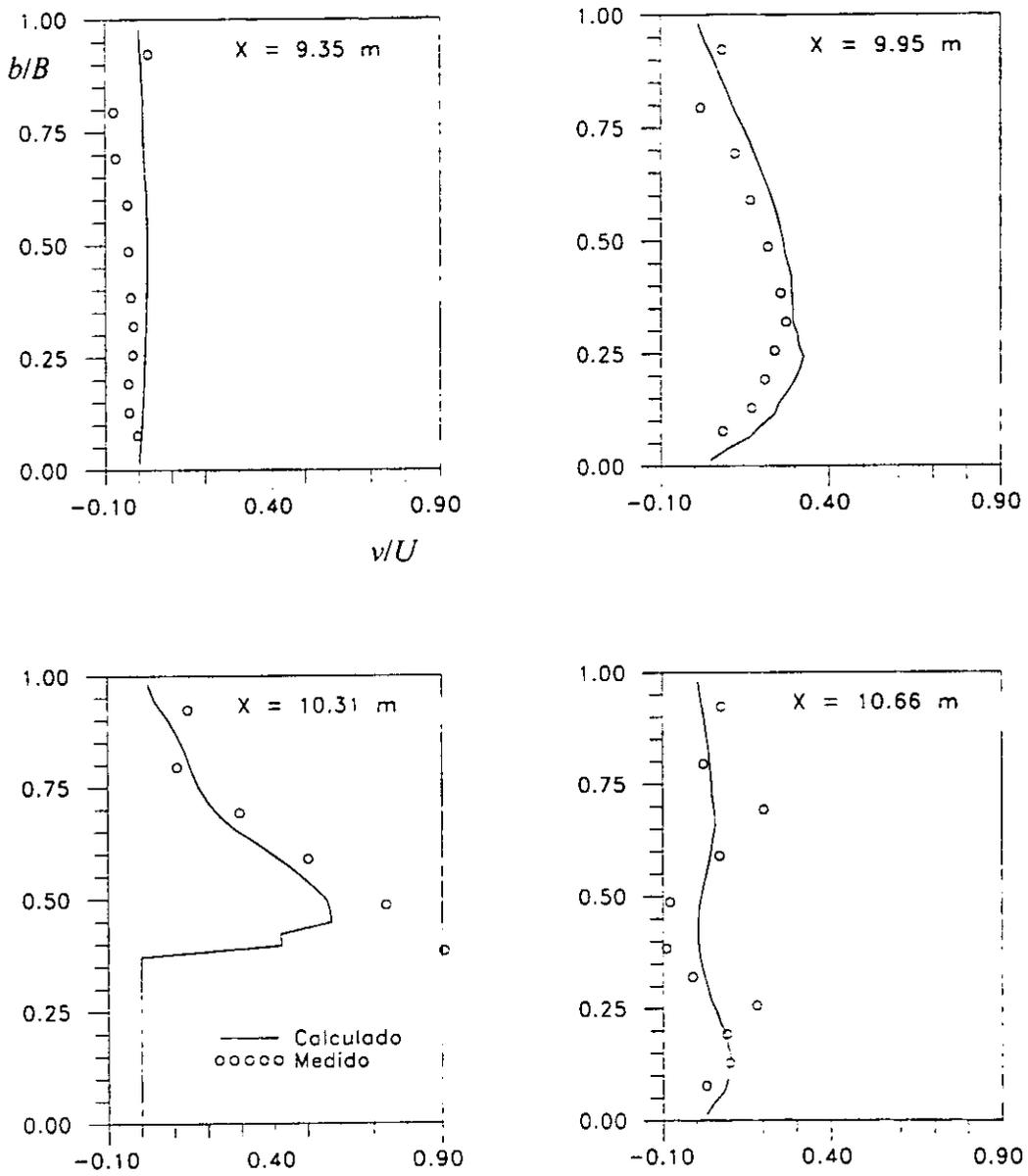


Fig 5.23 Distribución trasversal del componente v

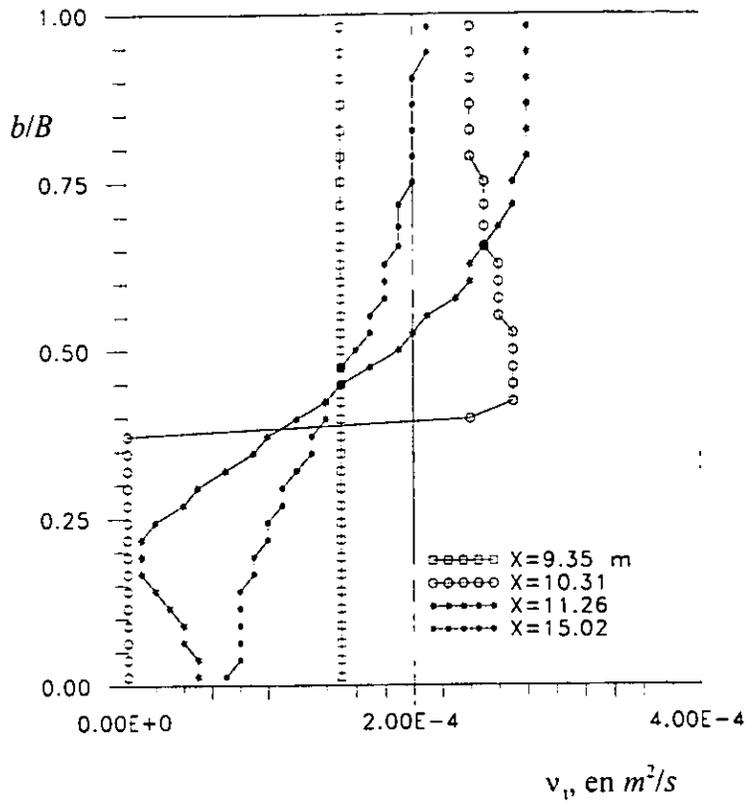
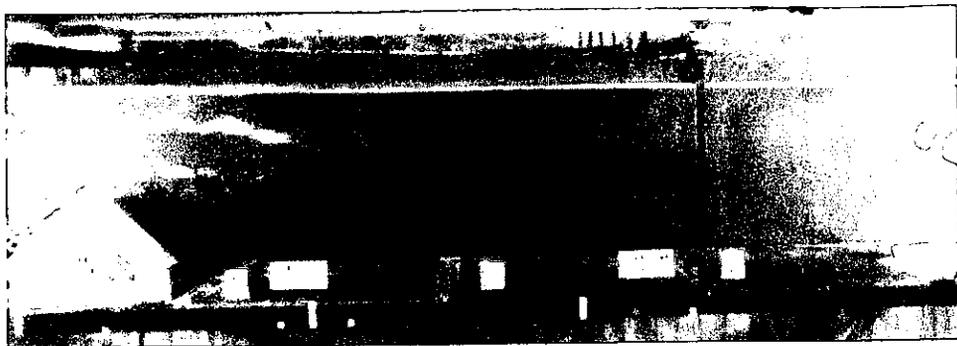


Fig 5.24 Distribución transversal de la llamada viscosidad turbulenta



t₁



t₂



t₃



t₄

Fig. 5.25 Fotos del experimento con $Q=0.0296 \text{ m}^3/\text{s}$

5.4 Flujo en un canal horizontal con curvatura compuesta

Una prueba más que se decidió hacer con el modelo matemático, fue aplicarlo a un canal de sección rectangular definido por curvas compuestas, como se muestra en la fig 5.26. Para ello, se colocaron varias estructuras en el canal de pendiente variable del Instituto de Ingeniería. En este caso la velocidad aguas arriba de las curvas fue de $U = 0.088 \text{ m/s}$, con tirante aguas abajo de 0.149 m , lo cual da un gasto de $0.0103 \text{ m}^3/\text{s}$. De manera similar a como se midió el campo de velocidades en el caso del obstáculo, se obtuvieron los componentes rectangulares de la velocidad en las secciones indicadas en la fig 5.26, donde también se indica la malla de cálculo, la cual consta de 129×30 celdas. Para la modelación numérica se usó $\Delta t = 0.002 \text{ s}$, con factor de fricción de Chezy de $60 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$. El modelo se aplicó primero para $\nu_t = 0$ con coeficiente de filtrado $\alpha = 0.02$ cada $10 \Delta t$, y después con ν_t calculada con la expresión 3.40, con coeficiente de filtrado de 0.05 cada $10 \Delta t$.

Al comparar los resultados se observó que no hay diferencias notables entre ellos incluyendo o no la turbulencia.

El campo de velocidades se muestra en la fig 5.27. En las figs 5.28 y 5.29 se indican los componentes de la velocidad medidos y calculados en las ocho secciones indicadas en la fig 5.26; con línea discontinua se indican los resultados sin incluir la turbulencia y con línea continua los resultados que incluyen el efecto de la turbulencia. Se hace notar que para el componente u , únicamente en las secciones para $X = 11.55$, 11.71 y 11.86 m hay diferencias notables en una zona muy cercana a la margen izquierda del canal, mientras que en las demás secciones los resultados obtenidos con el modelo numérico son bastante aproximados.

En la fig 5.30 se muestran los perfiles transversales de la distribución de la llamada viscosidad turbulenta, donde se nota que todos los valores son muy pequeños.

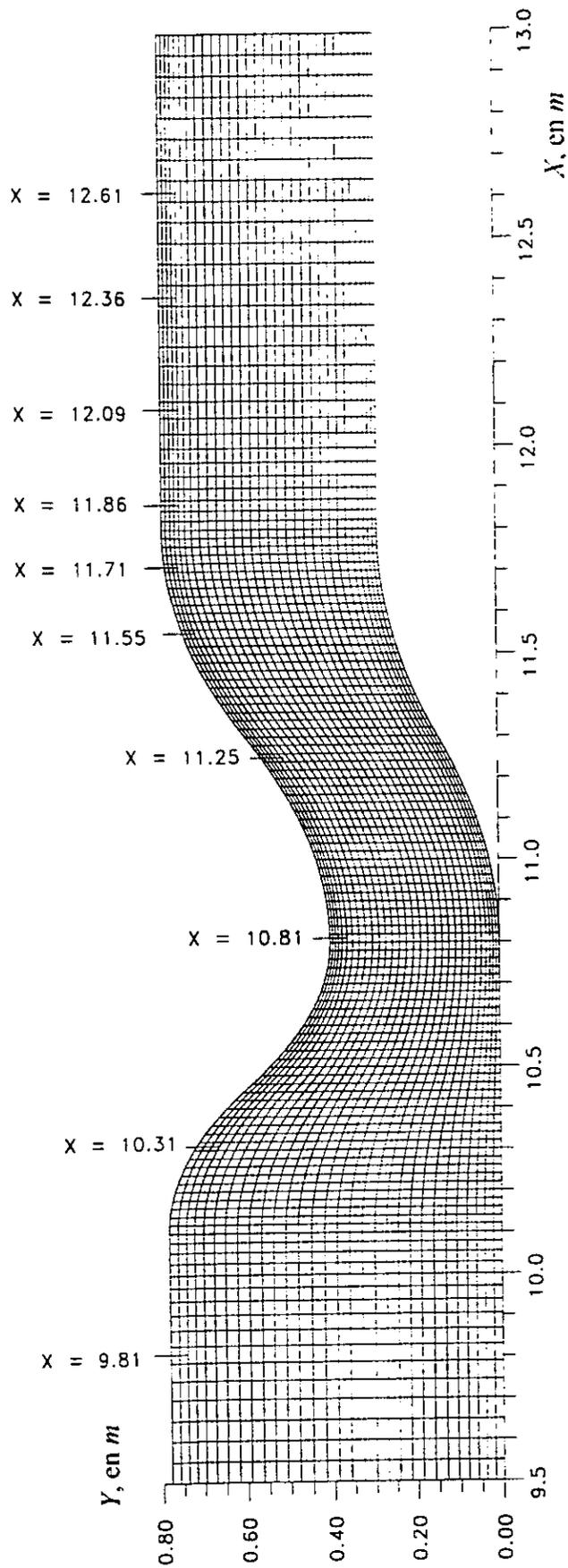


Fig 5.26 Malla de cálculo

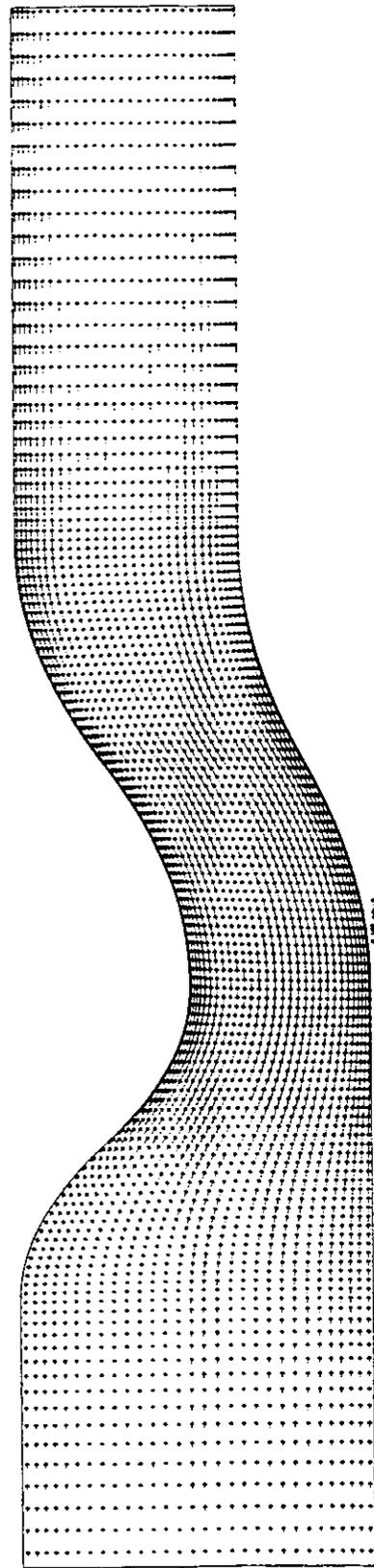


Fig 5.27 Campo horizontal de velocidades ($Q = 0.010 \text{ m}^3/\text{s}$ y $v_t = 0.0765 h U_s$)

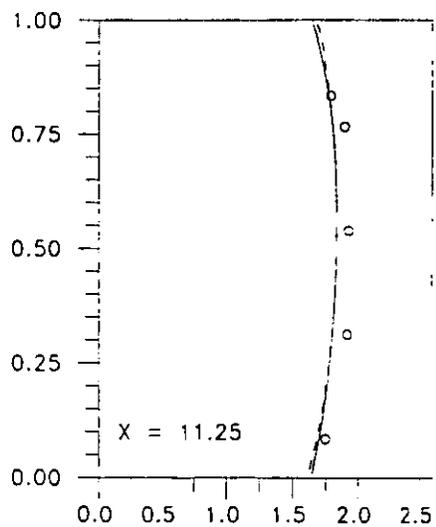
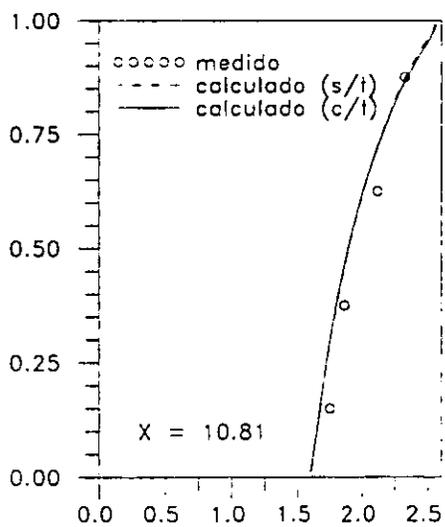
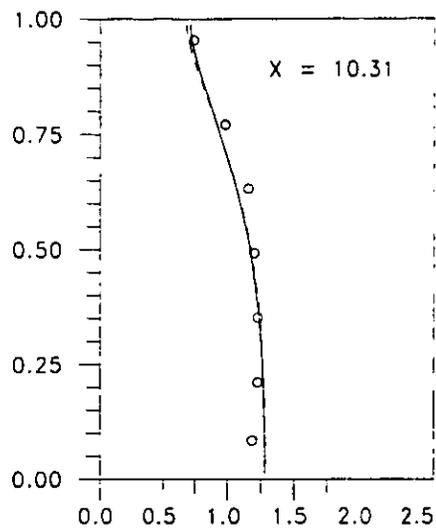
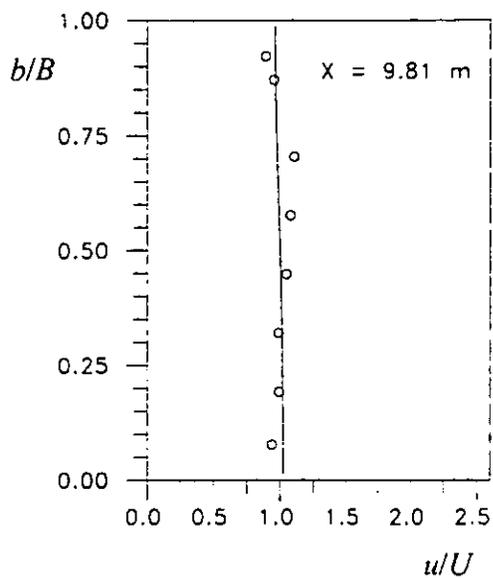


Fig 5.28 Distribución trasversal del componente u

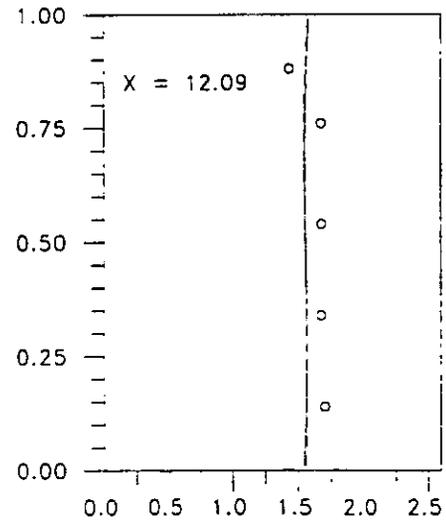
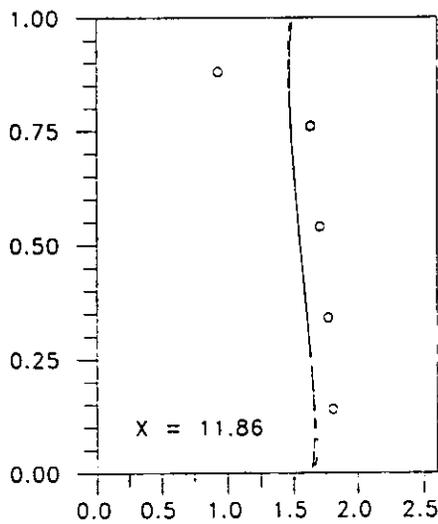
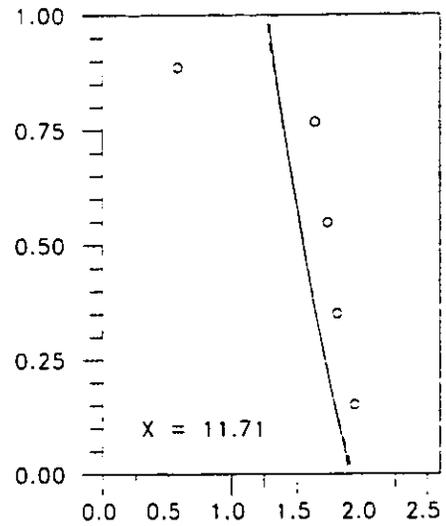
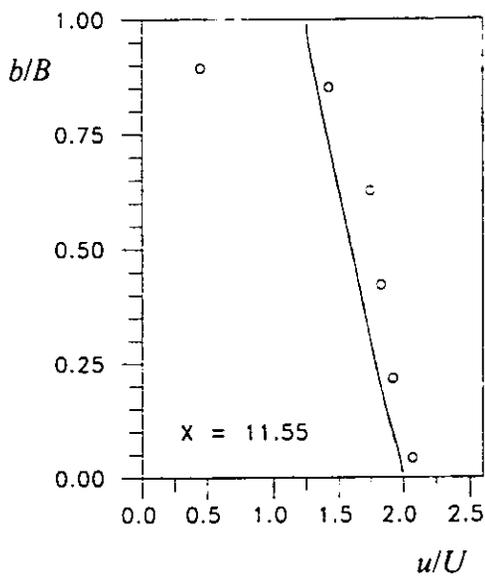


Fig 5.28 Continuación

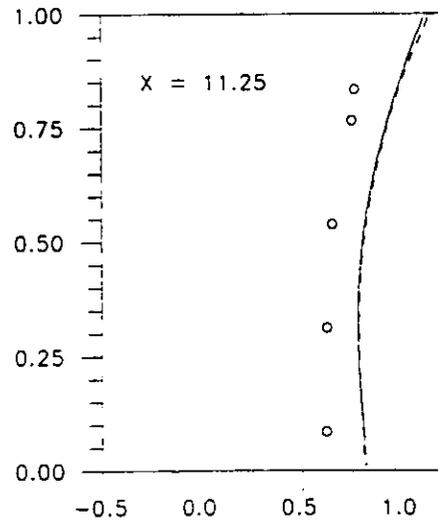
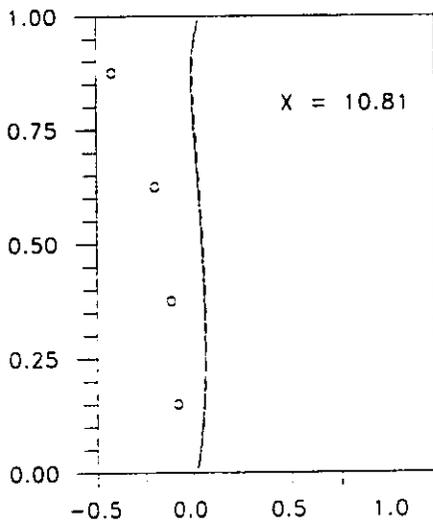
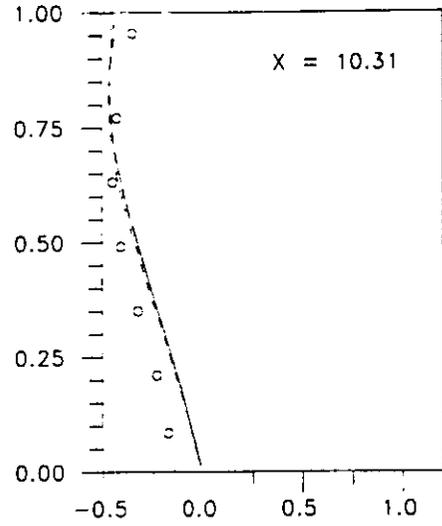
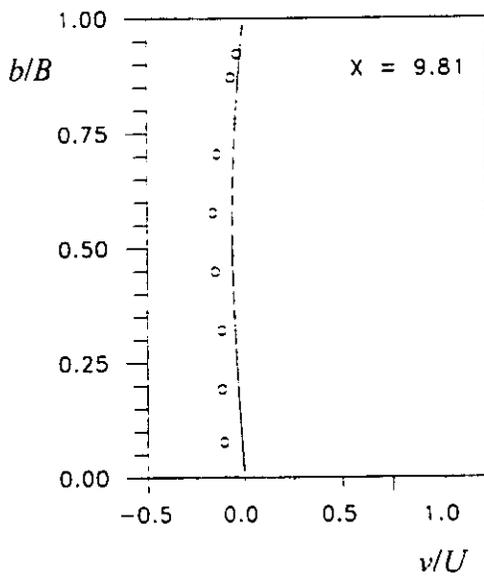


Fig 5.29 Distribución trasversal del componente v

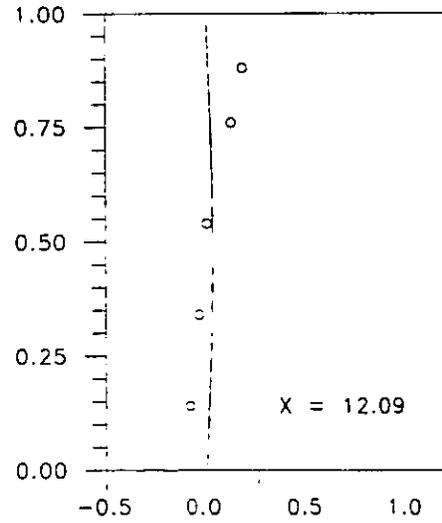
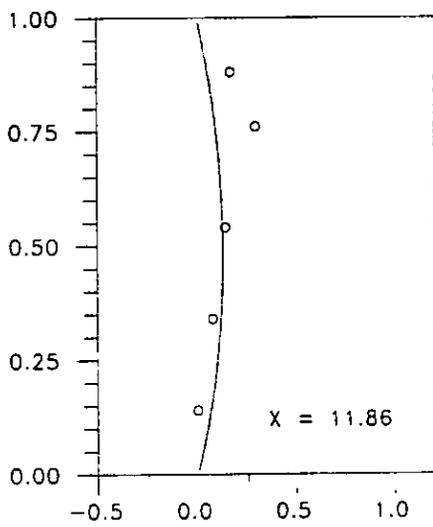
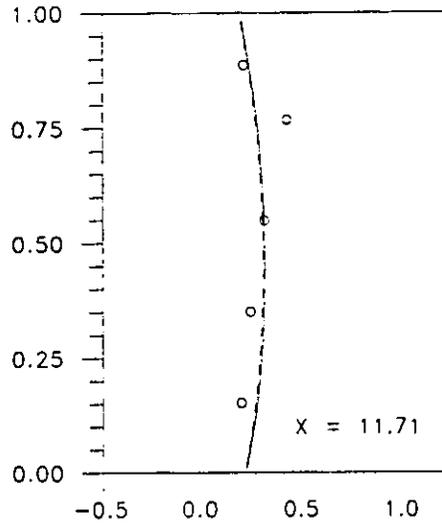
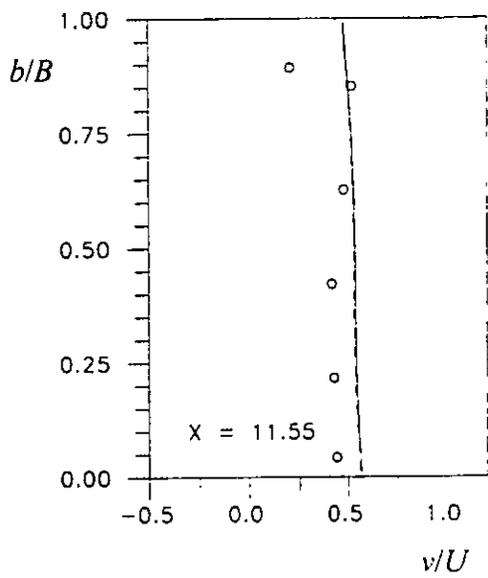


Fig 5.29 Continuación

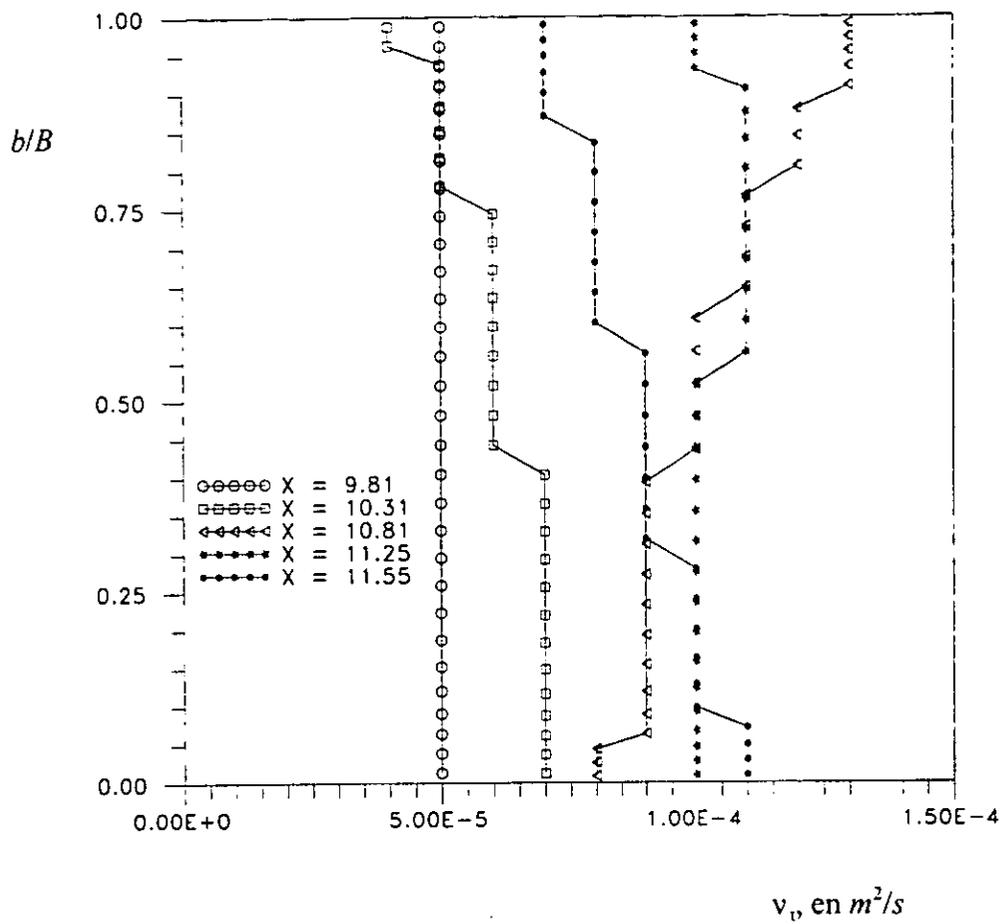


Fig 5.30 Distribución transversal de la llamada viscosidad turbulenta

*"La alegría y el amor son las dos alas
de las grandes acciones".*

Goethe.

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se desarrolló un modelo numérico de flujo bidimensional horizontal, para predecir el campo de velocidades en cuerpos de agua con flujo en régimen subcrítico, cuyas fronteras pueden estar definidas por líneas curvas o con orientación distinta a la de los ejes de un sistema de coordenadas rectangulares.

Puesto que la forma de las fronteras que definen los cuerpos de agua de ríos, lagunas y estuarios, es muy irregular, el uso de mallas en coordenadas curvilíneas generales da mayor versatilidad al modelo numérico desarrollado.

Debido a que se usan sistemas de coordenadas curvilíneas generales, fue necesario aclarar algunos conceptos importantes relacionados con las distintas formas de expresar vectores en dichos sistemas de coordenadas. Puesto que el uso de tales conceptos ha sido relativamente nuevo en el campo de la ingeniería hidráulica, esto ha dado lugar a interesantes discusiones de diferentes investigadores sobre la manera más adecuada de utilizar vectores en sistemas de coordenadas generales, y a la forma de expresar las ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas generales. Por ello, en este trabajo

se explican con detalle y sencillez varios conceptos fundamentales de las formas como se expresan los vectores en coordenadas curvilíneas generales, lo cual permite justificar con más claridad la selección de la versión utilizada para expresar las ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas generales, así como demostrar con mayor facilidad la deducción de las correspondientes ecuaciones.

El modelo matemático incluye los términos que permiten tomar en cuenta el efecto de la turbulencia para determinar zonas de separación o recirculación del flujo. Con base en los resultados del modelo numérico se deduce que en aplicaciones semejantes a las aquí descritas, con la expresión 3.40 el funcionamiento del modelo es bastante satisfactorio, y que esta manera de calcular dicha variable es mucho más sencilla que aplicar el modelo de turbulencia $k-\epsilon$.

El esquema de diferencias finitas de MacCormack que se usa en este trabajo, requiere que las variables dependientes y los métricos de la malla se calculen en el centro de cada celda de la malla de cálculo; esto permite reducir notablemente los recursos de memoria de máquina.

La manera de calcular el efecto de las fronteras en el flujo ha presentado siempre complicaciones; en este trabajo se utiliza el concepto de frontera reflejante, lo cual permite modelar las fronteras cerradas de manera sencilla.

La técnica de filtrado numérico que se usa en este trabajo es sencilla y se aplica en general, cada diez pasos de tiempo, lo cual es mucho menor en comparación con otros métodos de filtrado, donde se aplica dos veces en cada paso de tiempo y se requiere en algunos casos de mayores recursos de memoria de máquina.

Se calibró y verificó el funcionamiento del modelo matemático con cinco series de experimentos de laboratorio, los cuales se indican a continuación:

- a) Las mediciones experimentales del caso 1 de Rozovskii (1957), las cuales están reportadas en Molls (1992).
- b) Las mediciones de Rajaratnam y Nwachukwu (1983), las cuales están reportadas en Tingsanchai y Maheswaran (1990).
- c) Las tres series de mediciones realizadas para este trabajo en el canal de pendiente variable del Instituto de Ingeniería de la UNAM.

Con base en la comparación de las mediciones de velocidades en laboratorio con los resultados obtenidos del modelo matemático, se puede decir que el modelo de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas generales desarrollado en este trabajo funciona muy bien.

Se considera que las contribuciones más importantes del presente trabajo son las siguientes:

- 1) Mostrar las distintas maneras de expresar un mismo vector en un sistema de coordenadas curvilíneas generales; para ello se utilizaron las diferentes formas de la representación geométrica de un mismo vector, explicando con detalle los vectores base locales y sus correspondientes componentes para cada caso.
- 2) Con base en las ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas rectangulares, se han deducido cada uno de los términos de las ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas generales. Para ello se emplean los métodos para expresar derivadas parciales en coordenadas curvilíneas generales, en función de las coordenadas rectangulares, y los métodos para obtener los componentes covariantes físicos de un vector en función de los componentes rectangulares.
- 3) Con base en los ejemplos mostrados en el subcapítulo 5.3, se ha mostrado la importancia que tiene la construcción de la malla en la determinación del patrón del campo de velocidades, cuando se tienen zonas de separación o recirculación.

- 4) De la calibración y verificación del modelo numérico se deduce que el modelo de turbulencia descrito en el subcapítulo 3.4.1 es sencillo, y da muy buenos resultados cuando se tienen zonas de recirculación en el flujo.

Para futuras investigaciones se recomienda desarrollar otro generador de mallas que permita integrar bloques las mallas, cuyas líneas en la unión de dichos bloques tengan curvatura suave en la medida de lo posible; esto es con el fin de representar flujos en ríos con islas y cambios notables en el ancho de la superficie libre del agua, y adecuar el modelo matemático para calcular la hidrodinámica con ese tipo de geometrías. Aunque el esquema de diferencias finitas que se usa en este trabajo produce buenos resultados, convendría probar otro esquema del tipo semi-implícito, para poder incrementar el tamaño en el paso de tiempo en el modelo.

AGRADECIMIENTOS

Al recordar algunas etapas de mi vida, considero que he sido muy afortunado. Hay dos épocas muy valiosas: Una la conforman muchos de los profesores que conocí durante mis estudios; otra se refiere a mi oportunidad de colaborar con los investigadores de la Coordinación de Hidráulica del Instituto de Ingeniería, UNAM. Admiro las grandes virtudes de todos ellos tanto en su práctica de la ingeniería como en su manera de pensar, y les agradezco que hayan compartido su experiencia conmigo.

En especial, expreso mi gratitud al doctor Moisés Berezowsky por el apoyo que me brindó para poder llevar a cabo el presente trabajo, pues consiguió proyectos de investigación patrocinados por CONACYT y esto permitió que me dedicara de tiempo completo al desarrollo de la tesis; también le agradezco sus atinadas sugerencias, que sirvieron para enriquecer este estudio.

Ricardo Orozco y Carlos A. Basaldud, quienes son becarios de la Coordinación de Hidráulica del Instituto de Ingeniería, colaboraron con gran entusiasmo en las series de mediciones de distribuciones de velocidad en el canal de pendiente variable.

Los doctores Carlos Cruickshank, Ramón Domínguez, Jesús Gracia y Oscar Fuentes, así como el Profesor José Antonio Maza, aportaron comentarios importantes durante las mediciones hechas en laboratorio, y con su revisión crítica se mejoró este trabajo.

Hago un reconocimiento al Instituto de Ingeniería (Sección de Dibujo, Editoriales, Unidad de Servicios de Información y Talleres) y a la Facultad de Ingeniería de la UNAM, por su ayuda para efectuar esta investigación.

Finalmente, agradezco al CONACYT la beca que me otorgó; este apoyo económico fue importante para poder concentrarme en desarrollar la presente tesis.

REFERENCIAS

Abbott, M. B. (1979). *Computational Hydraulics. Elements of the Theory of Free Surface Flows*, Pitman, Londres.

Abbott, M. B. y Basco, D. R. (1989). *Computational Fluid Dynamics - An Introduction for Engineers*, Longman Scientific & Technical, Harlow, Reino Unido.

Anderson, J. D. Jr. (1995). *Computational Fluid Dynamics. The Basics with Applications*. McGraw-Hill, Inc., Nueva York.

Anderson, D. A., Tannehill, J. D. y Pletcher, R. H. (1984). *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Hemisphere Publishing Corporation. Taylor & Francis Group, Nueva York.

Benqué, J. P., Cunge, J. A., Feuillet, A. H. y Holly, F. M. Jr. (1982). New Method for Tidal Current Computation, *Journal of Waterways Port Coast and Oc. Div.*, Vol. 108, No. 3, pp. 396 - 417.

Borthwick, A. G. L. y Akponasa, G. A. (1997). Reservoir Flow Prediction by Contravariant Shallow Water Equations, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 123, No. 5, pp. 432 - 439.

Borthwick, A. G. L. y Barber, R. W. (1992). River and Reservoir Flow Modelling Using the Transformed Shallow Water Equations, *Int. Journal Numer. Methods in Fluids*, Vol. 14, No. 12, pp. 1193 - 1217.

Boussinesq, J. V. (1877). Théorie de lécoulement tourbillant, Mem. Prés. Acad. Sci. XXIII, 46, Paris.

Bravo, H. R. y Holly, F. M. (1996). Turbulence Model for Depth - Averaged Flows in Navigation Installations, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 122, No. 12, pp. 718 - 727.

Chaudhry, M. H. (1993). *Open Channel Flow*. Prentice Hall, Englewood Cliffs. Nueva Jersey.

Dammuller, D. C., Bhallamudi, S. M. y Chaudhry, M. H. (1989). Modeling of Unsteady Flow in Curved Channel, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 115, No. 11, pp. 1479 - 1495.

Daily, J. W. y Harleman, D. R. (1966). *Fluid Dynamics*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.

Demirdzic, I., Gosman, A. D., Issa, R. I. y Peric, M. (1987). A Calculation Procedure for Turbulent Flow in Complex Geometries, *Computers & Fluids*, Vol. 15, No. 3, pp. 251 - 273.

Duc, B. M., Wenka, Th. y Rodi, W. (1996). Depth - Average Numerical Modeling of Flow in Curved Open Channels, *Computational Methods in Water Resources XI*, Vol. 2, Computational methods in surface flow and transport problems.

Eiseman, P. R. (1980). Geometric Methods in Computational Fluid Dynamics. *ICASE Report No 80-11*, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, EUA.

Falconer, R. A. (1976). Mathematical Modelling of Jet-Forced Circulation in Reservoirs and Harbors, *Tesis de doctorado*, Imperial College, Londres.

Falconer, R. A. (1980). Numerical Modelling of Tidal Circulation in Harbors, *Journal of Waterways, Port. Coastal and Ocean Div. Proc. ASCE*, Vol. 106, WW1, pp. 31-48.

Farrashkhalvat, M. y Miles, J. P. (1990). *Tensor Methods for Engineers and Scientists*, Ellis Horwood, Ltd., Chichester, Inglaterra.

Fennema, R. J. y Chaudhry, M. H. (1990). Explicit Methods for 2-D Transient Free - Surface Flows, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 116, No. 8, pp. 1013-1034.

Flokstra, C. (1977). The Closure Problem for Depth-Averaged Two-Dimensional Flow. *Paper A 106*, 17th Int. Assoc. for Hydraulic Res. Congress, Baden-Baden, Alemania, pp. 247 - 256.

García-Navarro, P. y Saviron, J. M. (1992). McCormack's Method for the Numerical Simulation of One-Dimensional Discontinuous Unsteady Open Channel Flow, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 30, No. 1, pp. 95 - 105.

García, R. y Kahawita, R. A. (1986). Numerical Solution of the Saint-Venant Equations with the MacCormack Finite-Difference Scheme, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 6, pp. 259 - 274.

Hansen, W. (1962). Hydrodynamical Methods Applied to Oceanographic Problems, *Proc. of the Symp. on Mathematical-Hydrodynamical Methods of Physical Oceanography*, Institute für Meereskunde Der Universität Hamburg.

Hawkins, G. A. (1963). *Multilinear Analysis for Students in Engineering and Science*, John Wiley and Sons, Inc.

He, P. y Salcudean, M. (1994). A Numerical Method for 3D Viscous Incompressible Flows Using Non-orthogonal Grids. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, pp. 449 - 469.

He, P., Salcudean, M., Gartshore, I. S. y Nowak, P. (1996). Multigrid Calculation of Fluid Flows in Complex 3D Geometries Using Curvilinear Grids, *Computers & Fluids*, Vol. 25, No. 4, pp. 395 - 419.

Hinze, J. O. (1959). *Turbulence. An Introduction to its Mechanism and Theory*, McGraw-Hill, Inc., Nueva York.

Hoffman, K. A. y Chiang, S. T. (1993). *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, Vol. I, Education Engineering System, Austin, Texas.

Hoffman, K. A. y Chiang, S. T. (1993). *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, Vol. II, Education Engineering System, Austin, Texas.

Hu, S. y Kot, S. C. (1997). Numerical Model of Tides in Pearl River Estuary with Moving Boundary, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 123, No. 1, pp. 21 - 29.

Jiménez, A. A. (1998). *Cálculo de la Hidrodinámica en Cuerpos de Agua con Fronteras Irregulares. Séptimo Informe de Actividades*, Trabajo de tesis de doctorado, DEPMI, UNAM.

Jiménez, A. A. y Berezowsky, M. (1996). Discusión Sobre Métodos de Transformación de las Ecuaciones Fundamentales a Coordenadas Curvilíneas, *Congreso Latinoamericano de Hidráulica*, Vol. VI, Guayaquil, Ecuador.

Johnson, B. H. (1980). "VAHM - A Vertically Averaged Hydrodynamic Model Using Boundary Fitted Coordinates, *Misc. Paper HL-80-3*, US Army Engineer Waterways Experiment Station Hydraulics Laboratory, Vicksburg, MS, EUA.

Kalkwijk, J. P. Y De Vriend, H. J. (1980). Computation of the Flow in Shallow River Bends. *Journal of Hydraulic Research*. Vol. 18, No. 4, pp. 327 - 340.

Karki, K. C. y Patankar, S. V. (1988). Calculation Procedure for Viscous Incompressible Flows in Complex Geometries, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 14, pp. 295 - 307.

Knupp, P. M. y Steinberg, S. (1993). *Fundamentals of Grid Generation*, CRC Press, Inc.

Kuipers, J. y Vreugdenhil, C. B. (1973). Calculations of Two-dimensional Horizontal Flow, *Research Report S163, Part 1, Delft Hydraulics Laboratory*, Delft, Países Bajos.

Leendertse, J. J. (1967). Aspects of a Computational Model for Long-period Water-Wave Propagation, *RM-5294-PR*, The Rand Corporation, Santa Mónica, Cal.

Leschziner, M. A. y Rodi, W. (1979). Calculation of Strongly Curved Open Channel Flow, *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 105, No. 10, pp. 1297 - 1314.

Liu, N.S. (1976). Finite-difference Solution of the Navier-Stokes Equations for Incompressible Three-dimensional Internal Flows, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 59, Springer, Nueva York. pp. 300 - 306.

Maza, J. A. y García, F. M. (1984). Hidrodinámica. Bases para hidráulica Fluvial, *Series del Instituto de Ingeniería, UNAM*, D - 20.

Mejía, M. A. y Berezowsky, M. (1996). Generación Numérica de Mallas en Coordenadas Curvilíneas para Cálculo de Flujos a Superficie Libre. *Rev. Ingeniería Hidráulica en México*, pp. 13 - 24.

Melaen, M. C. (1992). Calculation of Fluid Flows with Staggered and Nonstaggered Curvilinear Nonorthogonal Grids - The Theory, *Numerical Heat Transfer*, Parte B, Vol. 21.

Molls, T. R. (1992). A general two-dimensional free-surface flow model for solving the depth-averaged equations using an implicit ADI scheme, *Tesis de doctorado*, Washington State University. Pullman, EUA.

Molls, T. y Chaudhry, M. H. (1995). Depth Averaged Open-channel Flow Model, *Journal Hydr. Engrg.*, Vol. 121, No. 6, pp. 453 - 465.

Nielsen, P. y Skovgaard, O. (1990). A Scheme for Automatic Generation of Boundary-Fitted Depth - and Depth - Gradient - Dependent Grids in Arbitrary Two - Dimensional Regions, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 10, pp. 741 -752.

Nielson, P. y Skovgaard, O. (1990). The Effect of Using Non-Orthogonal Boundary-Fitted Grids for Solving the Shallow Water Equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.11, pp. 177-188.

Patankar, S. V. (1981). A Calculation Procedure for Two Dimensional Elliptic Situations, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 4, pp. 409-425.

Patankar, S. V. y Spalding, D. B. (1972). A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three - Dimensional Parabolic Flows, *International Journal of Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 1787-1806.

Ponce, V. M. y Yabusaki, S. B. (1981). Modeling Circulation in Depth-Averaged Flow, *Journal of the Hydraulic Division*, ASCE, Vol. 107, No. 11, pp. 1501 - 1518.

Pope, S. B. (1978). The Calculation of Turbulent Recirculating Flows in General Orthogonal Coordinates, *Journal of Comput. Phys.* Vol. 26, pp. 197 - 217.

Rahman, M. y Chaudhry, M. H. (1995). Simulation of Hydraulic Jump with Grid Adaptation, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 33, No. 4, pp. 555 - 569.

Raghunath, R., Sengupta, S. y Häuser, J. (1987). A Study of the Motion in Rotating Containers Using a Boundary-fitted Coordinate System, *International Journal of the Numerical Methods in Fluids*, Vol. 7, pp. 453 - 464.

Rajaratnam, N. y Nwachukwu, B. (1983). "Flow near groin-like structures", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 109, No. 3, pp. 463-480.

Rastogi, A. K. y Rodi, W. (1978). Predictions of Heat and Mass Transfer in Open Channels, *Journal of Hydraulic Division*, ASCE, Vol. 104, No. 3, pp. 397-420.

Reynolds, O. (1895). On the Dynamic Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion, *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*, Vol.186, Series A, pp. 123-164.

Rhie, C. M. y Chow, W. L. (1982). A Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Isolated Airfoil with Trailing Edge Separation". AIAA-82-0998.

Roache, P. J. (1972). *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa Publishers, Albuquerque, EUA.

Rodi, W., Majumdar, S. y Schonung, B., (1989). Finite Volume Methods for Two-dimensional Incompressible Flows with Complex Boundaries. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 75, pp. 369 - 392.

Rosenfeld, M., y Kwak, D. (1991). Time-dependent Solutions of Viscous Incompressible Flows in Moving Co-ordinates, *Int. Journal of Numer. Methods Fluids*, Vol. 13, pp. 1311 - 1328.

Rosenfeld, M., Kwak, D. y Vinokur, M. (1988). A Solution Method for the Unsteady and Incompressible Navier-Stokes Equations in Generalized Coordinate Systems". AIAA Paper 88-0718.

Rozovskii, I. L. (1957). *Flow of Water in Bends of Open Channels*, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalén, Israel.

Segal, A., Wesswling, J., Van Kan, Oosterlee, C. W. y Kasseles, K. (1992). Invariant Discretization of the Incompressible Navier - Stokes Equations in Boundary Fitted Co-ordinates, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 15, pp. 411 - 426.

Shankar, N. J., Cheon, H. F. y Chan, C. T. (1997). Boundary Fitted Grid Models for Tidal Motions in Singapore Coastal Waters, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 35, No. 1.

Sheng, Y. P. y Choi, J-K. (1989). Three-dimensional Numerical Modelling of Tidal Circulation and Salinity Transport in James River Estuary, *Proc. Estuarine and Coastal Modelling, ASCE*, pp. 209 - 218.

Sheng, Y. P. y Hirsh, J. E. (1984). Numerical Solution of Shallow Water Equations in a Boundary-fitted Grid, *Tech. Memo. 84-15, US Army Engineer, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi, EUA.*

Sherenkov, I. A. y Gladyshev, M. T. (1977). Mathematical Modelling of Two-dimensional Plane Flows in Open Channels." *Proc. XVII Congress of IAHR*. International Association for Hydraulic Research, Vol. 2, pp. 239 - 246.

Shyy, W. y Vu, T. C. (1991). On the Adoption of Velocity Variable and Grid Systems for Fluid Flow Computations in Curvilinear Coordinates, *J. Comp. Physics*, Vol. 92, pp. 82 - 105.

Takizawa, A., Koshizuka, S. y Kondo, S. (1992). Generalization of Physical Component Boundary Fitted Coordinate (PCBFC) Method for the Analysis of Free-surface Flow. *International Journal of the Numerical Methods in Fluids*, Vol. 115, pp. 1213 - 1237.

Tingsanchali, T. y Maheswaran, S. (1990). 2-D Depth-averaged Flow Computation Near Groyne", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 116, No. 1, pp. 71-85.

Thompson, J. F., Thames, F. C. y Mastin. C. W. (1974). Automatic Numerical Generation of Body-fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing any Number of Arbitrary Two-dimensional Bodies, *Journal Comput. Physics*. Vol. 15, pp. 299 -319.

Van Doormaal, J. P. y Raithby, G. D. (1984). Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 7, pp. 147 -163.

Versteeg, H. K. y Malalasekera, W., (1995), *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*, Longman, Inglaterra.

Wachspress, E. L. (1979). The Numerical Solution for Turbulent Flow Problems in General Geometry, *Knolls Atomic Power Laboratory Report, KAPL-4116*.

Wang, P., (1992). Review of Equations of Conservation in Curvilinear Coordinates, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, No. 11, pp. 2265 - 2281.

Warsi, Z. U. A. (1981). *Tensor and Differential Geometry Applied to Analytic and Numerical Coordinate Generation*, MSSU-EIRS 81-1 Mississippi State University,

Warsi, Z. U. A. (1992). *Fluid Dynamics. Theoretical and Computational Approaches*, CRC Press, EUA.

Weare, T. J. (1976). Finite Element or Finite Difference Methods for the Two-Dimensional Shallow Water Equations?, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 7, No. 3, pp. 351 - 357.

Ye, J. y Dou, G. (1992). Computation of Incompressible Fluid Flows an Implicit Fractional Step Scheme", Proc, 2nd. International Conference on Hydraulic and Environmental Modelling of Coast, Estuaring and River Waters Ashgate Publishing Ltd Honts, Reino Unido. pp. 529 - 539.

Yulistiyanto, B. (1997). Flow Around a Cylinder Installed in a Fixed-bed Open Channel, *Tesis de doctorado, No. 1631*, Ecole, Polytechnique Fédérale, Lousana, Suiza.

Yulistiyanto, B., Zech, Y. y Graf, W. H. (1998). Flow Around a Cylinder: Shallow-Water Modeling with Diffusion-dispersion, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 124, No. 4, pp. 419 - 429.

Zhou, B., McCorquodale, J. A. y Godo, A. M. (1994). Short Circuiting and Density Interface in Primary Clarifiers, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 120, No. 9, pp. 1060 - 1080.

APÉNDICE

VECTORES EN COORDENADAS CURVILÍNEAS GENERALES

El objetivo de este apéndice es mostrar algunas de las formas cómo se expresa un vector cuando se utiliza un sistema de coordenadas curvilíneas generales. Para ello, se definen los ejes del sistema de coordenadas curvilíneas no ortogonales con las parábolas siguientes

$$Y = - \sqrt{(R \cdot B \xi)^2 + 4P(K \cdot A \eta) - L^2 \cdot (2P - L)^2} - 2P - L \quad (\text{A.1})$$

$$X = \sqrt{4P(Y - K - A\eta)} \quad (\text{A.2})$$

Las funciones inversas son

$$\xi = \frac{\sqrt{X^2 + (Y - L)^2} - R}{B} \quad (\text{A.3})$$

$$\eta = \frac{Y - \frac{X^2}{4P} - K}{A} \quad (\text{A.4})$$

donde $A = 10$, $B = 5$, $K = 20$, $L = 70$, $P = -25$, $R = 40$.

En la fig A.1 se muestran el plano rectangular y los ejes curvilíneos para $\xi = 1$ y $\eta = 1$.

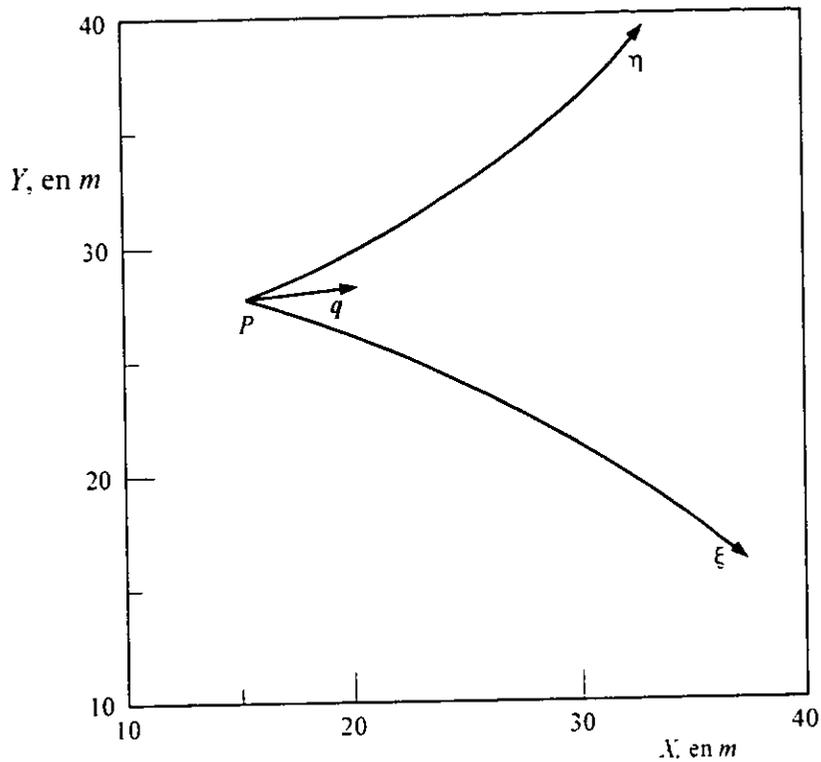


Fig A.1 Vector q en el sistema de coordenadas curvilíneas generales

Se desea expresar el vector q que tiene componentes rectangulares $u = 5 \text{ m/s}$ y $v = 0.5 \text{ m/s}$, y cuyo origen se ubica en el punto P , con coordenadas rectangulares $X = 15.2674 \text{ m}$ y $Y = 27.6691 \text{ m}$, en la forma contravariante, covariante y covariante física. También se desea calcular la magnitud del vector en función de los correspondientes tensores métricos y componentes.

Para calcular tanto los vectores base covariantes y contravariantes, como los correspondientes componentes de los tensores métricos y vectores, se requiere conocer los valores de las derivadas parciales de las coordenadas rectangulares con respecto a las

coordenadas curvilíneas. Estos valores se anotan a continuación, para el punto P , con coordenadas curvilíneas $\xi = 1$ y $\eta = 1$.

$$\frac{\partial Y}{\partial \eta} = - \frac{2AP}{FR} = 5.4153 \text{ m} \quad (\text{A.5a})$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \xi} = - \frac{B(R + B\xi)}{FR} = - 2.4369 \text{ m} \quad (\text{A.5b})$$

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} = \frac{2P}{X} \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} - A \right) = 15.0147 \text{ m} \quad (\text{A.5c})$$

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{2P}{X} \frac{\partial Y}{\partial \xi} = 7.9807 \text{ m} \quad (\text{A.5d})$$

$$J = \sqrt{g} = \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} = 79.8070 \text{ m}^2 \quad (\text{A.5e})$$

donde

$$FR = \sqrt{(R + B\xi)^2 + 4P(K + A\eta) - L^2 - (2P - L)^2}$$

Forma contravariante del vector q

La forma contravariante del vector q está dada por la expresión 2.7, donde los vectores base covariantes se calculan con las ecs 2.8, como sigue

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{\partial X}{\partial \xi} \mathbf{e}_x + \frac{\partial Y}{\partial \xi} \mathbf{e}_y \quad (\text{A.6a})$$

$$\mathbf{e}_\eta = \frac{\partial X}{\partial \eta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial Y}{\partial \eta} \mathbf{e}_y \quad (\text{A.6b})$$

Al sustituir los correspondientes valores de las expresiones A.5 en las A.6 se obtienen los vectores base covariantes en función de los vectores base rectangulares

$$\mathbf{e}_\xi = 7.9807 \mathbf{e}_x - 2.4369 \mathbf{e}_y; \quad |\mathbf{e}_\xi| = 8.3444 \text{ m}$$

$$\mathbf{e}_\eta = 15.0147 \mathbf{e}_x + 5.4153 \mathbf{e}_y; \quad |\mathbf{e}_\eta| = 15.9614 \text{ m}$$

Se hace notar que los vectores base covariantes no son unitarios y tienen dimensión de longitud, lo que difiere de los vectores base del sistema rectangular, los cuales son unitarios y adimensionales.

Los correspondientes componentes contravariantes se obtienen con base en las ecs 2.11, cuyas expresiones se escriben a continuación

$$u^\xi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} u_x - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial X}{\partial \eta} v_y \quad (\text{A.7a})$$

$$v^\eta = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} u_x + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial X}{\partial \xi} v_y \quad (\text{A.7b})$$

Al sustituir los valores de las expresiones A.5 en las A.7 se obtienen los componentes contravariantes del vector q , de donde $u^\xi = 0.2452$ 1/s y $v^\eta = 0.2027$ 1/s, por lo que la forma contravariante del vector q es

$$q = 0.2452 e_\xi + 0.2027 e_\eta \quad (\text{A.8})$$

Para obtener la magnitud de este vector es necesario calcular los elementos del tensor métrico covariante, g_{ij} , los cuales se obtienen de las ecs 2.12, como sigue

$$g_{11} = \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)^2 = 69.63 \text{ m}^2$$

$$g_{12} = \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} = 106.6312 \text{ m}^2$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} \right)^2 = 254.7663 \text{ m}^2$$

Con estos valores y los componentes contravariantes sustituidos en la ec 2.16 se obtiene que la magnitud del vector q es

$$q = \sqrt{g_{11}(u^\xi)^2 + 2g_{12}u^\xi v^\eta + g_{22}(v^\eta)^2} = 5.0249 \text{ m/s}$$

En la fig A.2 se muestran los vectores base covariantes y los componentes contravariantes del vector q .

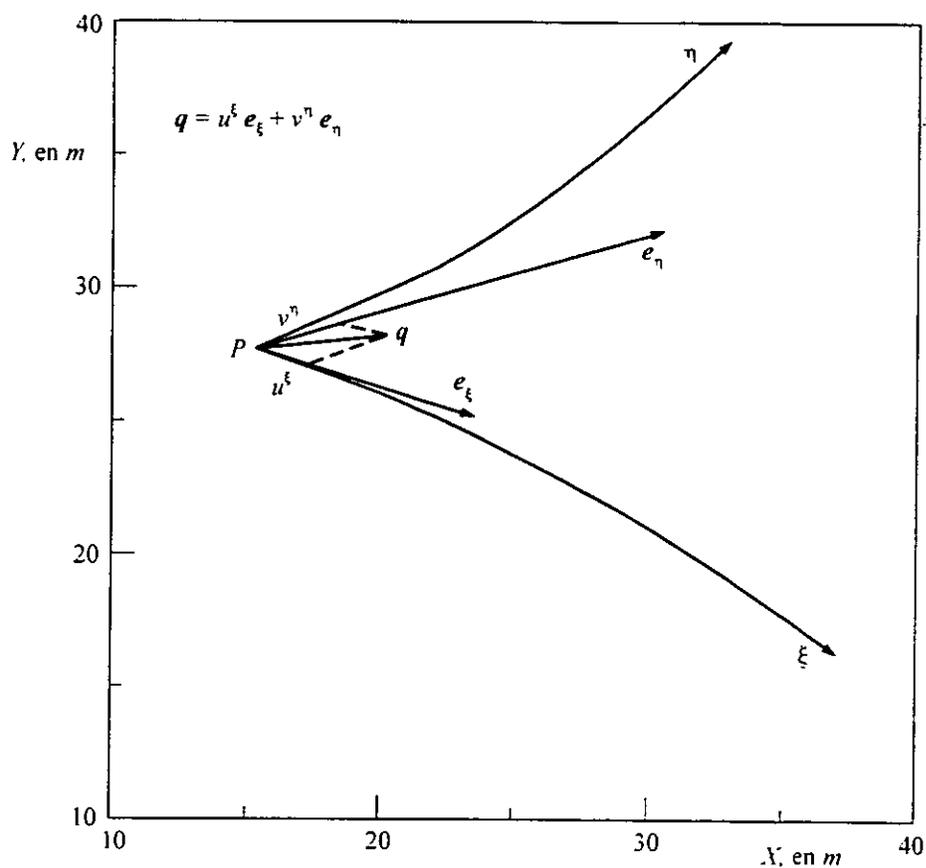


Fig A.2 Forma Contravariante del vector q

Forma covariante del vector q

La forma covariante del vector q está dada por la ec 2.17, donde los vectores base contravariantes se obtienen al aplicar las ecs 2.19 siguientes

$$\mathbf{e}^{\xi} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \mathbf{e}_x - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial X}{\partial \eta} \mathbf{e}_y \quad (\text{A.9a})$$

$$\mathbf{e}^{\eta} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial X}{\partial \xi} \mathbf{e}_y \quad (\text{A.9b})$$

Al sustituir los valores de las expresiones A.5 en las A.9 se obtiene los vectores base contravariantes en función de los vectores base rectangulares

$$\mathbf{e}^{\xi} = 0.0679 \mathbf{e}_x - 0.1881 \mathbf{e}_y; \quad |\mathbf{e}^{\xi}| = 0.20 \text{ 1/m}$$

$$\mathbf{e}^{\eta} = 0.0305 \mathbf{e}_x + 0.10 \mathbf{e}_y; \quad |\mathbf{e}^{\eta}| = 0.1045 \text{ 1/m}$$

También en este caso se hace notar que las dimensiones de los vectores base contravariantes es de L^{-1} .

Los correspondientes componentes covariantes del vector q se obtienen al aplicar las ecs 2.22 siguientes

$$u_{\xi} = \frac{\partial X}{\partial \xi} u_x + \frac{\partial Y}{\partial \xi} v_y \quad (\text{A.10a})$$

$$v_{\eta} = \frac{\partial X}{\partial \eta} u_x + \frac{\partial Y}{\partial \eta} v_y \quad (\text{A.10b})$$

de donde se obtiene que $u_{\xi} = 38.6851 \text{ m}^2/\text{s}$ y $v_{\eta} = 77.7811 \text{ m}^2/\text{s}$; al sustituir estos valores en la ec 2.17 se obtiene el vector \mathbf{q} en su forma covariante

$$\mathbf{q} = 38.6851 \mathbf{e}^{\xi} + 77.7811 \mathbf{e}^{\eta} \quad (\text{A.11})$$

Para obtener su magnitud es necesario calcular los elementos del tensor métrico contravariante, g^{ij} , cuyos valores se obtienen con las expresiones 2.23 siguientes

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g} = 0.04 \text{ 1/m}^2 \quad (\text{A.12a})$$

$$g^{12} = -\frac{g_{12}}{g} = -0.0167 \text{ 1/m}^2 \quad (\text{A.12b})$$

$$g^{22} = \frac{g_{11}}{g} = 0.0109 \text{ 1/m}^2 \quad (\text{A.12c})$$

Con estos valores y los componentes covariantes del vector q sustituidos en la expresión 2.25 se obtiene que

$$|q| = \sqrt{g^{11}u_{\xi}^2 + 2g^{12}u_{\xi}v_{\eta} + g^{22}v_{\eta}^2} = 5.0249 \text{ m/s}$$

En la fig A.3 se muestran los correspondientes componentes covariantes. Debido a su pequeña magnitud, los vectores base contravariantes se notan en el recuadro de la misma figura.

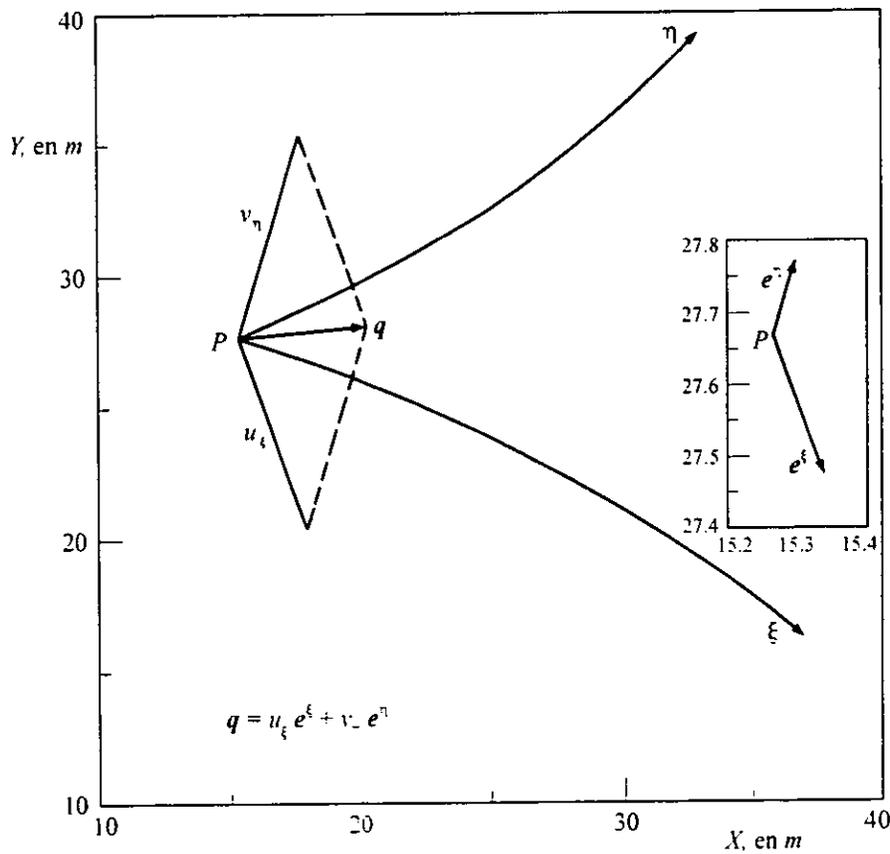


Fig A.3 Forma covariante del vector q

Forma covariante física del vector q

En este caso, los vectores base contravariantes (los cuales son unitarios) se obtienen a partir de las ecs 2.27 siguientes

$$\mathbf{e}^{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \mathbf{e}_x - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial X}{\partial \eta} \mathbf{e}_y \quad (\text{A.13a})$$

$$\mathbf{e}^{(\eta)} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial X}{\partial \xi} \mathbf{e}_y \quad (\text{A.13b})$$

Al sustituir los correspondientes valores de las expresiones A.5 en A.13 se obtienen los vectores base contravariantes en función de los vectores base rectangulares

$$\mathbf{e}^{(\xi)} = 0.3393 \mathbf{e}_x - 0.9407 \mathbf{e}_y \quad ; \quad |\mathbf{e}^{(\xi)}| = 1$$

$$\mathbf{e}^{(\eta)} = 0.2920 \mathbf{e}_x + 0.9564 \mathbf{e}_y \quad ; \quad |\mathbf{e}^{(\eta)}| = 1$$

Para este caso se hace notar que los vectores base contravariantes físicos son unitarios y sin dimensión, igual que los vectores base del sistema de coordenadas rectangulares.

Los correspondientes componentes covariantes se obtienen de las ecs 2.28, como sigue

$$u_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} u_x - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial X}{\partial \eta} v_y \quad (\text{A.14a})$$

$$v_{(\eta)} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} u_x + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial X}{\partial \xi} v_y \quad (\text{A.14b})$$

de donde se obtiene que $u_{(\xi)} = 1.2260 \text{ m/s}$ y $v_{(\eta)} = 1.9384 \text{ m/s}$, por lo que la forma covariante del vector \mathbf{q} con componentes físicos es

$$\mathbf{q} = 1.2260 \mathbf{e}^{(\xi)} + 1.9384 \mathbf{e}^{(\eta)} \quad (\text{A.15})$$

Para calcular la magnitud del vector \mathbf{q} en forma covariante con componentes físicos se requiere conocer los elementos del tensor métrico contravariante físico, $g^{(ij)}$, cuyos elementos se calculan con las ecu. 2.30 como sigue

$$g^{(11)} = \frac{g_{11}g_{22}}{g} = 2.7852$$

$$g^{(12)} = \sqrt{g_{11}g_{22}} \frac{g_{12}}{g} = 2.2298$$

$$g^{(22)} = \frac{g_{22}g_{11}}{g} = 2.7852$$

Con estos valores y los correspondientes componentes sustituidos en la expresión 2.31 resulta que la magnitud del vector es

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{g^{(11)}u_{(\xi)}^2 + 2g^{(12)}u_{(\xi)}v_{(\eta)} + g^{(22)}v_{(\eta)}^2} = 5.0249 \text{ m/s}$$

En la fin A.4 se muestran los vectores base unitarios contravariantes y los correspondientes componentes covariantes físicos.

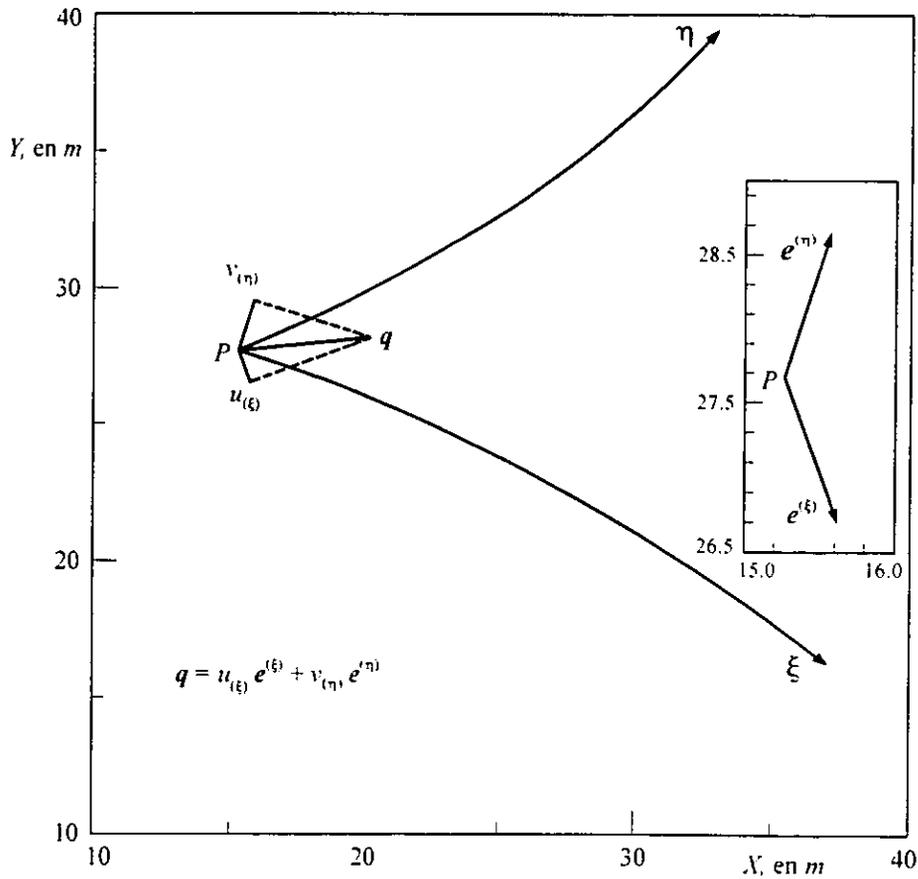


Fig A.4 Forma covariante del vector \mathbf{q} con componentes físicos