00365
5

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FUNCIONES CARDINALES EN ESPACIOS COMPACTOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRIA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A :

ARMANDO MARTÍNEZ GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS

DR. ANGEL TAMARÍZ MASCARÚA

MÉXICO. D.F. 2000

276933.

DEDICATORIAS

A CARMEN:

La niña que amo mucho.

A MIS PAPAS:

Siempre están conmigo.

A MIS HERMANOS:

Siempre juntos.

Contenido

Introducción

En este trabajo veremos el comportamiento de las Funciones Cardinales en Espacios Compactos, para lo cual daremos estos conceptos en los Capitulos 1 y 2.

En el Capítulo 1 estableceremos la notación, terminologia y resultados básicos que se usan a lo largo de esté trabajo. Algunos de ellos se enuncian sin demostración y en cada uno de ellos se da la referenia en donde pueden ser consultados.

En el Capítulo 2 daremos la definición de Función Cardinal Topologica, como son peso, estrechez, densidad y otras mas. Se establecen algunas relaciones entre ellas, así como el comportamiento de éstas en $C_p(X)$, bajo funciones continuas y en el producto topológico.

En el Capítulo 3 estudiamos las Funciones Cardinales en Espacios Compactos, veremos que algunos resultados obtenidos en el Capítulo 2 son mejorados en este tipo espacios.

En el Capítulo 4 daremos la definición de Compacto Diádico, de Eberlein, de Gul'ko y de Corson. Veremos por ejemplo que en los compactos Diádicos el peso es igual a la estrechez, igual al caracter y al seudocaracter, que en los compactos de Eberlein el peso es igual a la celularidad, que en los compactos de Gul´ko el peso es igual a la densidad.

Antes que nada quiero agradecer muy afectuosamente al Profesor y amigo Angel Tamaríz Mascarúa por su apoyo y paciencia que me brindo, para poder llevar a buen termino este trabajo.

He de mencionar que dicho trabajo es uno de los frutos que ha dado el seminario de topología, que en conjunto se ha venido realizando entre los profesores Angel Tamaríz, Fidel Casarrubias de la facultad de ciencias de la U.N.A.M y los profesores Manuel Ibarra, Juan Angoa, Agustín Contreras y el que ahora presenta este trabajo de la facultad de ciencias fisico matematicas de la U.A.P.

Además que durante el tiempo en que lleve a cabo este trabajo, la U.A.P me concedio una descarga parcial de los cursos que imparto en la facultad de ciencias fisico matematicas de dicha universidad.

Finalmente, deseo agradecer a los profesores Sylvia de Neymet Urbina, Richard G. Wilson, Sergey Antonyan, Oleg Okunev, Isabel Puga Espinosa y Agustín Contreras Carreto por haber revisado el material aquí tratado.

CAPíTULO 1

Preliminares

Las siguientes notaciones serán utilizadas a lo largo de este trabajo, así como los siguientes resultados. Los números cardinales los denotaremos con las letras griegas τ, κ, λ. Los números ordinales con las letras α, β, γ, δ. Los números naturales con las letras i, n, m etc. Denotaremos con la letra ω al menor cardinal y ordinal infinito, con la letra ω_1 al menor cardinal y ordinal no numerable, κ^+ es el menor cardinal mayor que κ. Un número ordinal es el conjunto de todos los ordinales que lo preceden. Entonces las expresiones $\alpha < \kappa$ y $\alpha \in \kappa$ significarán lo mismo. Un cardinal κ es un cardinal sucesor si $\kappa = \lambda^+$ para algún cardinal λ. Un cardinal que no es un cardinal sucesor es un cardinal límite. Entonces, κ es un cardinal límite si $\lambda < \kappa$ implica que $\lambda^+ < \kappa$. Sea X un conjunto ordenado por $\leq$ y A un subconjunto de X. Diremos que A es cofinal en X si para cada $x \in X$ existe un $a \in A$ tal que $x \leq a$. La cofinalidad de κ, que denotaremos como $cf(\kappa)$, es el menor cardinal λ tal que κ tiene un subconjunto cofinal de cardinalidad λ.

EJEMPLO 1.1. *$cf(\omega) = \omega$ y $cf(\kappa^+) = \kappa^+$ para todo cardinal $\kappa \geq \omega$.*

Un cardinal κ es regular si $\omega \leq \kappa$ y $cf(\kappa) = \kappa$. Entonces ω y todos los cardinales infinitos sucesores son regulares.

Un cardinal regular κ tiene la siguiente importante propiedad.

LEMA 1.2. *Sea κ un cardinal regular y sea $A \subseteq \kappa$ de cardinalidad $< \kappa$. Entonces el supremo de A es $< \kappa$.*

Un cardinal infinito que no es regular es llamado un cardinal singular.

Notemos que un cardinal singular es siempre un cardinal límite.

Denotaremos con las letras mayúsculas, A, B, C, etc a los conjuntos, con las letras mayúsculas, X, Y, Z, etc a los espacios topologicos, con las letras mayúsculas, U, V, W, etc a los conjuntos abiertos, con las letras caligráficas, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{P}$, a las familias de conjuntos.

Sea A un conjunto y sea λ un número cardinal. Entonces

i) La cardinalidad de A, la denotaremos como $|A|$.

ii) Al conjunto potencia de A lo denotaremos como $\mathcal{P}(A)$.

iii) A la familia de todos los subconjuntos de A de cardinalidad $\leq \kappa$ la denotaremos como $\mathcal{P}_{\leq\kappa}(A)$.

iv) A la familia de todos los subconjuntos de A de cardinalidad κ lo denotaremos como $\mathcal{P}_\kappa(A)$.

v) A la familia de subconjuntos de A de cardinalidad $< \kappa$ la denotaremos como $\mathcal{P}_{<\kappa}(A)$.

vi) Sea $\mathcal{V}$ una cubierta de A. Diremos que $\mathcal{V}$ es una cubierta minimal de A, si para todo $V \in \mathcal{V}$ la familia $\mathcal{V}' = \mathcal{V} - \{V\}$ no es cubierta de A.

vii) Un filtro $\mathcal{F}$ en A es una familia no vacía de subconjuntos no vacios de A tal que: a) Si F_1 y $F_2 \in \mathcal{F}$ entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

b) Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subset F'$ con $F' \subset A$ entonces $F' \in \mathcal{F}$

viii) Un filtro $\mathcal{F}$ en A es un ultrafiltro si no existe un filtro $\mathcal{F}'$ en A tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ estrictamente.

Se puede demostrar que $|\mathcal{P}_{\leq\kappa}(A)| = |A|^{\kappa}$ para todo conjunto A.

Para $p \in X$ y $\mathcal{A}$ una cubierta de X denotaremos por $ord(p, \mathcal{A})$ al número cardinal del conjunto $\{A \in \mathcal{A} : p \in A\}$ y por $st(p, \mathcal{A})$ al conjunto $\cup\{A : A \in \mathcal{A}$ y $p \in A\}$.

Si A y B son conjuntos entonces A^B denota al conjunto de todas las funciones de B en A. Recordemos que $\left|A^B\right| = |A|^{|B|}$. Si κ es un cardinal y α y β son ordinales tales que $\beta < \alpha \leq \kappa$ y si $f \in \kappa^{\alpha}$, entonces $f\mid_{\beta} \in \kappa^{\beta}$ y es la restricción de f a β. Sean X un espacio topológico y $U \subseteq X$. Denotaremos por $cl_X(U)$ a la cerradura de U en X, y por $int_X(U)$ a la colección de puntos interiores de U en X. Si no hay posibilidad de error, escribiremos sólo $cl(U)$, $int(U)$. Sea U un conjunto abierto, diremos que U es un conjunto abierto regular si $intcl(U) = U$. Si A es cualquier subconjunto de X entonces $intcl(A)$ es un conjunto abierto regular. La familia de todos los conjuntos abiertos regulares la denotaremos como $RO(X)$. Es conocido que si X es un espacio regular entonces $RO(X)$ es una base para X.

Definición 1.3. *Sean X un espacio topológico, A un subconjunto infinito de X y $p \in X$. Diremos que p es un punto de acumulación completo de A si $|V \cap A| = |A|$ para toda vecindad V del punto p.*

Definición 1.4. *Sea X un espacio topológico. Una sucesión $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda\}$ en X es una sucesión libre de longitud λ si*

$$cl(x_\alpha : \alpha < \beta) \cap cl(x_\alpha : \beta < \alpha) = \emptyset, \text{ para toda } \beta < \lambda$$

De la definición tenemos la siguiente afirmación.

Proposición 1.5. *Sea X un espacio topológico, y sea $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda\}$ una sucesión libre de longitud λ. Entonces $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda\}$ es un subconjunto discreto de X.*

Demostración: Sea $\beta < \lambda$ entonces

$$x_\beta \in \{x_\alpha : \beta \leq \alpha < \lambda\} \subseteq cl\{x_\alpha : \beta \leq \alpha < \lambda\}$$

Por lo tanto

$$x_\beta \notin cl\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$$

Entonces existe un conjunto abierto U, tal que

$$x_\beta \in U,\ U \cap \{x_\alpha : \alpha < \beta\} = \emptyset \text{ y } U \cap \{x_\alpha : \beta \leq \alpha < \lambda\} \neq \emptyset$$

Si

$$U \cap (\{x_\alpha : \beta \leq \alpha < \lambda\} - x_\beta) = \emptyset$$

ya terminamos.

Si no, consideremos

$$\beta_0 = inf\,\{\gamma : x_\gamma \in (U \cap \{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}) - \{x_\beta\}\}$$

de donde se tiene que $\beta < \beta_0$ y

$$((cl\,\{x_\alpha : \beta_0 \leq \alpha\})^c \cap U) \cap \{x_\alpha : \alpha < \lambda\} = \{x_\beta\}$$

Por lo cual $\{x_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ es discreto. □

DEFINICIÓN 1.6. *Una función $f : X \to Y$ es un encaje si $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo.*

DEFINICIÓN 1.7. *Una función $f : X \to Y$ es una condensación si f es biyectiva y continua.*

Algunos espacios con los que trataremos en este trabajo son:
i) La compactación de Stone -Cěch de ω que denotaremos como $\beta\omega$ (Ver [23]). Que es el conjunto de todos los ultrafiltros A^p de ω con la topología generada por la familia de los conjuntos del tipo $Z^* = \{p \in \beta\omega : Z \in A^p\}$ como base para los conjuntos cerrados.
ii) El $\kappa-$ cubo de Cantor que es el espacio formado al tomar el producto de κ copias de $D = \{0,1\}$ (aquí D tiene la topología discreta) con la topología producto.
iii) La linea de Sorgenfrey, que denotaremos como X_S, que es el conjunto de los números reales $\mathbf{R}$ con la topología generada por la familia $\mathcal{U} = \{[a,b) : a,b \in \mathbf{R}\}$ como base.
iv) El cuadrado lexicográfico $X_{\mathcal{L}} = \{(x,y) : x,y \in I\}$ donde $I = [0,1]$ con el orden usual, y $X_{\mathcal{L}}$ con la topología inducida por el siguiente orden: dados (x_1,y_1), (x_2,y_2) $\in X$, entonces $(x_1,y_1) < (x_2,y_2)$ si $x_1 < x_2$ ó $x_1 = x_2$ y $y_1 < y_2$ en donde $<$ es el orden usual en $[0,1]$.
v) El espacio discreto de cardinalidad μ, $D(\mu)$.
vi) El espacio de ordinales $[0,\alpha)$ con la topología de su orden.
vii) $A(\mu)$ La Compactación a un punto del discreto $D(\mu)$.

DEFINICIÓN 1.8. *Sean X un conjunto y $\mathcal{P}$ una propiedad relativa a subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{P}$ es de carácter finito si $\emptyset$ satisface $\mathcal{P}$ y además $A \subset X$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ si y sólo si cada subconjunto finito de A tiene esta propiedad.*

LEMA 1.9. *(Teichmuller-Tukey) Sean X un conjunto y $\mathcal{P}$ una propiedad de subconjuntos de X. Si $\mathcal{P}$ es una propiedad de carácter finito entonces cualquier $A \subset X$ con la propiedad $\mathcal{P}$ está contenido en un conjunto $B \subset X$ el cual tiene la propiedad $\mathcal{P}$ y es maximal en la familia de subconjuntos de X que contienen a A y satisfacen $\mathcal{P}$ ordenada por $\subset$.*

Es de observar que este lema es equivalente al Axioma de Elección.

DEFINICIÓN 1.10. *Diremos que el espacio X es universal para todos los espacios que tengan la propiedad topológica $\mathcal{P}$ si X tiene la propidad $\mathcal{P}$ y para todo espacio Y que tenga la propiedad $\mathcal{P}$ existe un encaje f de Y en X.*

DEFINICIÓN 1.11. *Sean X un espacio topológico, $\{Y_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s\in S}$ una familia de funciones continuas donde $f_s : X \to Y_s$.*
i) Diremos que la familia $\mathcal{F}$ separa puntos si para cualesquiera x, $y \in X$ existe una función $f_s \in \mathcal{F}$ tal que $f_s(x) \neq f_s(y)$.
ii) Diremos que la familia $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados si para todo $x \in X$ y todo conjunto cerrado $F \subset X$ tal que $x \notin F$ existe una función $f_s \in \mathcal{F}$ tal que $f_s(x) \notin cl(f_s(F))$.

TEOREMA 1.12. *(Teorema de la diagonal) Sean X un espacio topológico, $\{Y_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s\in S}$ una familia de funciones continuas donde $f_s : X \to Y_s$.*

i) Si la familia $\mathcal{F}$ separa puntos de X entonces es inyectiva la función diagonal

$$f = \Delta_{s\in S} f_s : X \to \Pi_{s\in S} Y_s$$

Donde $f(x) = (f_s(x))_{s\in S}$.
ii) Si además $\mathcal{F}$ separa puntos de conjuntos cerrados entonces f es un encaje.

1. Espacios $\mathbf{C_p(X,Y)}$

En esta sección veremos algunos resultados sobre espacios de funciones continuas que nos serán de utilidad posteriormente.

DEFINICIÓN 1.13. *Sean X, Y espacios topológicos. Consideremos sobre el conjunto*

$$Y^X = \{f : X \to Y : f \text{ es función}\}$$

la topología producto.

Al subconjunto

$$C(X,Y) = \{f : X \to Y : f \text{ es función continua}\}$$

con la topología relativa lo denotaremos como $C_p(X,Y)$ y a la topología la llamaremos topología de la convergencia puntual. En caso de que $Y = \mathbf{R}$, denotaremos $C_p(X,Y)$ simplemente como $C_p(X)$.
Si consideramos los conjuntos de la forma

$$W(x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n) = \{f \in C(X,Y) : f(x_i) \in U_i \text{ para } i = 1, ..., n\}$$

con $n \in \omega$, $\{x_1, ...x_n\} \subset X$ y $U_1, ..., U_n$ conjuntos abiertos en Y, entonces, de la definición de topología producto, tenemos que la familia $\mathcal{W} = \{W(x_1, ...x_n; U_1, ..., U_n) : n \in \omega,\ \{x_1, ..., x_n\} \subset X, \text{ y } U_1, ..., U_n \text{ conjuntos abiertos en } Y\}$ es una base para $C_p(X,Y)$.
En particular es suficiente considerar una base $\mathcal{B}$ en Y para que la familia

$$\mathcal{W}' = \{W(x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n); n \in \omega, \{x_1, ...x_n\} \subset X \text{ y } \{U_1, ..., U_n\} \subset \mathcal{B}\}$$

sea una base de $C_p(X,Y)$. De esta forma, si $Y = \mathbf{R}$ entonces, para cada conjunto finito $\{x_1...x_n\} \subset X$ y $f \in C(X)$, la familia de conjuntos

$$W(f, x_1, ..., x_n; \varepsilon) = \{g \in C_p(X); |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \text{ para } i = 1, ..., n\}$$

resulta ser una base de $C_p(X)$.

DEFINICIÓN 1.14. *Sean X un conjunto y $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{R}^X$ y $x \in X$.*
i) La función evaluación en x, $e_x : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$, está definida como

$$e_x(f) = f(x).$$

ii) La función evaluación canónica $\psi_{\mathcal{F}} : X \to \mathbf{R}^{\mathcal{F}}$ está definida como

$$\psi_{\mathcal{F}}(x) = e_x.$$

TEOREMA 1.15. *([31]). Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F} \subseteq C_p(X)$. Entonces*
i) Para cada $x \in X$, e_x es continua.
ii) $\psi_{\mathcal{F}}$ es una función continua.
iii) La familia $\psi_{\mathcal{F}}(X)$ es una familia que separa puntos de $\mathcal{F}$.
iv) Si la familia $\mathcal{F}$ separa puntos de X entonces $\psi_{\mathcal{F}} : X \to C_p(\mathcal{F})$ es una condensación sobre su imagen.

v) Si $\mathcal{F}$ es una familia que separa puntos de X y puntos de cerrados entonces $\psi_{\mathcal{F}}$ es un encaje.

TEOREMA 1.16. *([31]). Sean X, Y, X_α y Y_α espacios topológicos y $\alpha \in J$. Entonces*
i) El espacio $C_p(X, \Pi_{\alpha\in J} Y_\alpha)$ es homeomorfo a $\Pi_{\alpha\in J} C_p(X, Y_\alpha)$
ii) El espacio $C_p(\sum_{\alpha\in J} X_\alpha, Y)$ es homeomorfo a $\Pi_{\alpha\in J} C_p(X_\alpha, Y)$ donde $\sum_{\alpha\in J} X_\alpha$ es la suma topológica ajena de los espacios X_α.

PROPOSICIÓN 1.17. *Sea $\phi : R \to (-1,1)$ un homeomorfismo y $h : C_p(Y) \to C_p(Y, (-1,1))$ dada por $h(f) = \phi \circ f$ para toda $f \in C_p(Y)$. Entonces h es un encaje y para cualquier conjunto $A \subset C_p(Y)$ que separa puntos de Y, $h(A)$ tambien separa puntos de Y.*

DEFINICIÓN 1.18. *Sea $f : X \to Y$ una función se define*

$$f^\sharp : R^Y \to R^X \text{ como } f^\sharp(h) = h \circ f.$$

El siguiente teorema enuncia algunas propiedades de $f^\sharp$.

TEOREMA 1.19. *Sea $f : X \to Y$ una función continua. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones. (Ver [31]).*

i) $f^\sharp$ es continua.
ii) Si $f(X) = Y$ entonces $f^\sharp$ es un homeomorfismo sobre el subespacio cerrado $f^\sharp(R^Y)$ de R^X.
iii) f es una condensación si y solo si $f^\sharp(C_p(Y))$ es denso en $C_p(X)$.

2. Principios Combinatorios

Los principios combinatorios juegan un importante papel en la teoría de funciones cardinales en espacios topológicos. Daremos en esta sección los resultados combinatorios que serán usados en este trabajo.

Los resultados presentados en esta sección los podemos encontrar en el articulo de R.Hodel [24].

TEOREMA 1.20. *(Tarski) Sea E un conjunto infinito. Existe una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de E tal que $|\mathcal{A}| = |E|^\omega$, $|A| = \omega$ para todo $A \in \mathcal{A}$ y la intersección de cualesquiera dos elementos distintos de $\mathcal{A}$ es finita.*

DEMOSTRACIÓN: Si $|E| = \omega$ podemos suponer que $E = \mathbf{Q}$ y considerar una biyección $\varphi : \omega \to \mathbf{Q}$. Ahora para cada $r \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ elijamos una sucesión creciente $\{r_n\}_{n\in\omega} \subset \mathbf{Q}$ tal que $r_n \to r$. Sea $A_r = \{\varphi^{-1}(r_i) : i < \omega\}$.

Sean $r, s \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, con $r \neq s$, entonces para las sucesiones estrictamente crecientes $\{r_n\}$, $\{s_n\}$, respectivas $r_n \to r$ y $s_n \to s$, lo que implica directamente que $|A_r \cap A_s| < \omega$. Por lo tanto, si consideramos la familia $\mathcal{A} = \{A_r : r \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}\}$, tenemos que esta satisface las condiciones deseadas.

Para probar el caso general es suficiente construir la familia deseada en el conjunto $\mathcal{P}_{<\omega}(E^\omega)$. Para cada función $f : \omega \to E$ y $n \in \omega$, sea $f|_n$ la restricción de f al conjunto $\{0, ...n\}$. Es claro que el conjunto $A(f) = \{f|_n : n < \omega\}$ tiene cardinalidad ω. Además, si tomamos dos funciones $f, g : \omega \to E$ con $f \neq g$, entonces existe un $n \in \omega$ tal que $f(n) \neq g(n)$; por lo que $f|_n \neq g|_n$, y por lo tanto $A(f) \neq A(g)$. Si $|A(f) \cap A(g)| = \omega$, entonces para cada $n \in \omega$ podemos elegir un $n_i \in \omega$ tal que $f|_{n_i} = g|_{n_i}$, de donde $f|_n = g|_n$ para todo $n \in \omega$, es decir que $f = g$, que es una contradicción. Por lo tanto, la familia $\mathcal{A} = \{A(f) : f \in 2^\omega\}$ satisface las condiciones requeridas. □

DEFINICIÓN 1.21. *Sea E un conjunto. Una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de E es llamada independiente si para cualquier familia finita $A_1, .., A_i, B_1, ..., B_n$ de distintos elementos de la familia $\mathcal{B}$ tenemos que:*

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_i \cap (E - B_1) \cap ... \cap (E - B_n) \neq \emptyset.$$

La prueba del siguiente teorema requiere la aplicación del teorema de Hewit-Marczewski-Pondiczery que veremos más adelante. Por esta razón pospondremos la demostración de este teorema.

TEOREMA 1.22. *(Hausdorff) Sea λ un cardinal infinito y sea E un conjunto tal que $|E| = \lambda$. Entonces existe una familia independiente $\mathcal{B}$ de subconjuntos de E con $|\mathcal{B}| = 2^\lambda$.*

Una aplicación directa del teorema de Hausdorff la tenemos en el siguiente resultado.

COROLARIO 1.23. *Sea $\lambda \geq \omega$. Entonces existen 2^{2^λ} ultrafiltros en $D(\lambda)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{A} = \left\{A_\alpha : 0 \leq \alpha < 2^\lambda\right\}$ una familia independiente en $D(\lambda)$ cuya existencia está asegurada por el teorema 1.22. Para cada función $f : 2^{2^\lambda} \to 2$, consideremos el conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_f &= \left\{A(f,\alpha) : 0 \leq \alpha < 2^\lambda\right\} \text{ con} \\ A(f,\alpha) &= A_\alpha \text{ si } f(\alpha) = 0 \text{ y } A(f,\alpha) = D(\lambda) - A_\alpha \text{ si } f(\alpha) = 1. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de la intersección finita, $\mathcal{A}_f$ tiene la propiedad de la intersección finita, ya que si $A(f,\alpha_1), ..., A(f,\alpha_n) \in \mathcal{A}$, y

$$\begin{aligned} A(f,\alpha_1) &= A_{\alpha_1}, ..., A(f,\alpha_i) = A_{\alpha_i}, \\ A(f,\alpha_{i+1}) &= D(\lambda) - A_{\alpha_{I+1}}, ..., A(f;\alpha_n) = D(\lambda) - A_{\alpha_n} \end{aligned}$$

entonces tenemos que

$$\cap_{i=1}^n A(f,\alpha_i) = A_{\alpha_1} \cap ... \cap A_{\alpha_i} \cap (\lambda - A_{i+1}) \cap ... \cap (\lambda - A_{\alpha_n}) \neq \emptyset$$

ya que $\mathcal{A}$ es una familia independiente. De donde $\mathcal{A}_f$ está contenida en un ultrafiltro P_f. Tomemos la familia $\mathcal{B} = \left\{\mathcal{A}_f : f \in 2^{2^\lambda}\right\}$. Es claro que $|\mathcal{B}| = 2^{2^\lambda}$; además si $f \neq g$, existe un $\alpha < \lambda$, tal que $f(\alpha) \neq g(\alpha)$, de donde $P_f \neq P_g$, con lo cual obtenemos el resultado deseado. □

LEMA 1.24. *(Šanin)(Δ−sistema) Sea λ un cardinal regular tal que $\omega < \lambda$, y sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos finitos tal que $|\mathcal{A}| = \lambda$. Entonces existe un conjunto F (posiblemente vacío) y una subfamilia $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, con $|\mathcal{A}'| = \lambda$ tal que para todo $A, B \in \mathcal{A}'$ distintos $A \cap B = F$.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que la familia $\mathcal{A}$ la podemos escribir como

$$\mathcal{A} = \cup_{n\in\omega}\mathcal{A}_n, \text{ con } \mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A} : |A| = n\}.$$

Si $|\mathcal{A}_n| < \lambda$ para todo $n \in \omega$, entonces $\sup|\mathcal{A}_n| < \lambda$ ya que λ es regular. Por lo tanto

$$|\mathcal{A}| = |\cup_{n\in\omega}\mathcal{A}_n| = \sum_{n\in\omega} |\mathcal{A}_n| \leq \omega.sup\,|\mathcal{A}_n| < \lambda.$$

Así que existe un $n \in \omega$ tal que $|\mathcal{A}_n| = \lambda$ y $|A| = n$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Por lo cual podemos suponer que $|A| = n$ para todo $\in \mathcal{A}$. Por lo que demostraremos el lema aplicando inducción sobre el número de elementos de los conjuntos $A \in \mathcal{A}$.

Si $n = 0$, tomando $F = \emptyset$, tenemos la propiedad deseada.

Sea $0 < n$ y supongamos cierta la afirmación para $(n-1)$. Sea $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ una subfamilia tal que $\mathcal{A}'$ es maximal con respecto a la propiedad siguiente: para todo $A, B \in \mathcal{A}'$, $A \cap B = \emptyset$. La existencia de esta subfamilia $\mathcal{A}'$ con las propiedades deseadas la obtenemos de la siguiente forma. Sea

$$\mathcal{A}^* = \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} : \text{para todo } A, B \in \mathcal{B},\ A \cap B = \emptyset\}.$$

Como $\mathcal{B} = \{A\}$ pertenece a $\mathcal{A}^*$, entonces $\mathcal{A}^* \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}^*$ una cadena con respecto a la contensión, demostraremos que $\cup\mathcal{C} \subset \mathcal{A}^*$, para lo cual es suficiente que para todo $A, B \in \cup\mathcal{C}$, $A \cap B = \emptyset$. Sean $A, B \in \cup\mathcal{C}$ como $\mathcal{C}$ es una cadena entonces A y B pertenecen ambos a algún elemento de $\mathcal{C}$, por lo cual $A \cap B = \emptyset$.

Con lo cual obtenemos que $\cup\mathcal{C}$ es cota superior de $\mathcal{A}^*$. Aplicando el lema de Zorn podemos concluir que ésta tiene un elemento maximal.

Si $|\mathcal{A}'| = \lambda$, tomamos $F = \emptyset$ y terminamos. Si $|\mathcal{A}'| < \lambda$, por la maximalidad de $\mathcal{A}'$ y la regularidad de λ, existe un $p \in \cup\mathcal{A}'$, tal que p está en λ elementos de $\mathcal{A}$.

Para ver esto sea $\mathcal{A}_{\surd} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $p \in A$ para todo $A \in \mathcal{A}_{\surd}$.

Entonces $\mathcal{A} = \cup_{p \in \cup\mathcal{A}'} \mathcal{A}_{\surd}$, ya que si existiese un $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \notin \cup_{p \in \cup\mathcal{A}'} \mathcal{A}_{\surd}$ para todo $p \in \cup A'$ con $p \in A$, se sigue que $\{A\} \cup \mathcal{A}'$ es maximal contradiciendo la maximalidad de $\mathcal{A}'$.

Ahora si $\left|\mathcal{A}_{\surd}\right| < \lambda$ para todo p implicaria que $\left|\mathcal{A}_{\surd}\right| < \lambda$.

Sea $\mathcal{A}_* = \{A - \{p\} : A \in \mathcal{A}\}$. Es inmediato que para cada $A - \{p\} \in \mathcal{A}_*$, $|A - \{p\}| = n - 1$. Por hipótesis de inducción, existe una subfamilia $\mathcal{A}_{**} \subseteq \mathcal{A}_*$ y un conjunto F_*, tales que

$$\text{para todo } A, B \in \mathcal{A}_{**},\ A \cap B = F_* \text{ y } |\mathcal{A}_{**}| = \lambda$$

Tomamos

$$\text{la familia } \mathcal{A}_{***} = \{C \cup \{p\} : C \in \mathcal{A}_{**}\} \text{ y el conjunto } F_{**} = F_* \cup \{p\}$$

que claramente satisfacen las condiciones deseadas. □

LEMA 1.25. *(Mišcenko) Sean λ un cardinal infinito, E un conjunto y $\mathcal{A}$ una subfamilia de subconjuntos de E tal que $ord(p, \mathcal{A}) \leq \lambda$ para todo $p \in E$. Entonces el número de cubiertas finitas minimales de E por elementos de $\mathcal{A}$, es a lo más λ.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que es falso el lema. Sea $\mathcal{C} = \{\mathcal{A}_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda^+\}$ una familia de distintas cubiertas finitas minimales de E por elementos de $\mathcal{A}$. Por el lema 1.24 existe $T \subseteq \lambda^+$, con $|T| = \lambda^+$, y un subconjunto $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, tal que para todo $\alpha, \beta \in T$ con $\alpha \neq \beta$, $\mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{A}_\beta = \mathcal{A}'$. Si para todo $\alpha \in T$, $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}'$, entonces $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_\beta$, para todo $\alpha, \beta \in T$, lo cual es una contradicción. Ahora, si para todo $p \in E$ tenemos que $p \in \cup\mathcal{A}'$, entonces $\mathcal{A}_\alpha$ no es minimal ya que $\mathcal{A}' \subsetneq \mathcal{A}_\alpha$. Por lo cual existe un punto $p \in E$ tal que $p \notin \cup\mathcal{A}'$. Sea $A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$ tal que $p \in A_\alpha$, y sean $\alpha, \beta \in T$ con $\alpha \neq \beta$. Como $p \notin \cup\mathcal{A}'$ y $\mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{A}_\beta = \mathcal{A}'$ se sigue que $A_\alpha \neq A_\beta$, y por tanto $ord(p, \mathcal{A}) = \lambda^+$, lo que es una contradicción. □

3. Espacios Topológicos Compactos.

En está sección presentamos el material básico sobre espacios compactos que será utizado a lo largo de este trabajo. Este material está contenido en el libro [17] Iniciaremos está sección con la definición de espacio compacto y una caracterización de estos espacios.

Veremos que la propiedad de compacidad es hereditaria bajo subconjuntos cerrados, y que todo espacio compacto es normal.

DEFINICIÓN 1.26. *Un espacio topológico X es compacto si es de Hausdorff y toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.*

DEFINICIÓN 1.27. *Diremos que una familia $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s\in S}$ tiene la propiedad de la interseccion finita si*
i) $F \neq \emptyset$ y
ii) $F_{s_1} \cap ... \cap F_{s_k} \neq \emptyset$ para cada conjunto finito $\{s_1...s_k\} \subset S$.

El siguiente resultado nos da una caracterización de los espacios compactos.

TEOREMA 1.28. *Un espacio Hausdorff es compacto si y sólo si cada familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la interseccion finita tiene interseccion no vacía.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X un espacio compacto y sea $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s\in S}$ una familia de subconjuntos cerrados de X tal que $\cap_{s\in S}F_{s\in S} = \emptyset$. Como F_s es un conjunto cerrado para cada $s \in S$ entonces $U_s = X - F_s$ es un conjunto abierto para cada $s \in S$. Además, ya que

$$\cup_{s\in S}U_s = \cup_{s\in S}(X - F_s) = X - \cap_{s\in S}F_s = X,$$

entonces $\{U_s\}_{s\in S}$ es una cubierta abierta de X; de donde se desprende que existe un subconjunto finito $\{s_{1...}s_k\} \subset S$ tal que $\{U_{s_1}....U_{s_k}\}$ es una subcubierta finita de X. Así que

$$X = \cup_{i=1...k}U_{s_i} = \cup_{i=1...k}(X - F_{s_i}) = X - \cap_{i=1...k}F_{s_i}.$$

Por lo tanto

$$\cap_{i=1...k}F_{s_i} = \emptyset.$$

Ahora, si X no es compacto entonces existe una cubierta abierta $\{U_s\}_{s\in S}$ que no tiene subcubiertas finitas, lo cual implica que

$$X - \cup_{i=1...k}U_{s_i} \neq \emptyset \text{ para todo subconjunto finito } \{s_1...s_k\} \subset S.$$

Entonces, $\mathcal{C} = \{X - U_s\}_{s\in S}$ resulta ser una familia de conjuntos cerrados con la propiedad de la interseccion finita y $\cap\, \mathcal{C} = \emptyset$. □

COROLARIO 1.29. *Sean X un espacio compacto y $Y \subset X$ un subconjunto cerrado. Entonces Y es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Es suficiente observar que si $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s\in S}$ es una familia de conjuntos cerrados en Y, como Y es cerrado en X, entonces cada F_s es un conjunto cerrado en X, y del teorema 1.28 se sigue el resultado. □

TEOREMA 1.30. *Sean X un espacio regular y Y un subespacio compacto de X. Entonces:*
(i) Para cada subconjunto cerrado Z en X tal que $Y \cap Z = \emptyset$, existen conjuntos abiertos U, V en X tales que $Y \subset U, Z \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.
(ii) Si Z es un subespacio compacto de X, es suficiente que X sea Hausdorff para poder demostrar la afirmación análoga a (i).

DEMOSTRACIÓN: i) Sea $Y \subset X$ compacto y $Z \subset X$ un subconjunto cerrado tal que $Y \cap Z = \emptyset$. Como X es regular, para cada $x \in Y$ existen conjuntos abiertos U_x , V_x en X tales que, $x \in U_x$, $Z \subset V_x$ y $U_x \cap V_x = \emptyset$. Como $Y \subset \cup_{x \in Y} U_x$ entonces existe un conjunto finito $\{x_{1....}x_k\} \subset Y$ tal que $Y \subset \cup_{i=1...k} U_{x_i}$.

Sean $U = \cup_{i=1...k} U_{x_i}$ y $V = \cap_{i=1...k} V_{x_i}$ que claramente satisfacen lo requerido.

ii) Se demuestra en forma análoga al caso i). □

LEMA 1.31. *Sean X un espacio topológico T_3, K un subconjunto compacto de X y $p \in X - K$. Entonces, existen conjuntos cerrados G_δ A y B tales que $p \in A, K \subseteq B$ y $A \cap B = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN: Es suficiente observar que si $\{V_n : n \in \omega\}$ es una sucesión de conjuntos abiertos en X tales que $cl(V_{n+1}) \subseteq V_n$, entonces $\cap_{n<\omega} cl(V_n) = \cap_{n<\omega} V_n$ es un conjunto cerrado G_δ en X. □

Del corolario 1.29 y del teorema 1.30 se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA 1.32. *Sea X un espacio compacto. Entonces X es normal.*

COROLARIO 1.33. *Sea X un espacio Hausdorff y $Y \subset X$ un subespacio compacto. Entonces Y es un conjunto cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $Y \subset X$ compacto. Por teorema 1.30, para cada $x \in X - Y$ existe un conjunto abierto V en X tal que $x \in V$ y $Y \cap V = \emptyset$; es decir $X - Y$ es un conjunto abierto en X. □

PROPOSICIÓN 1.34. *Sea X un espacio compacto y A un subconjunto de X con $|A| \geq \omega$. Entonces A tiene un punto de acumulación completo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea M el conjunto de puntos que no son de acumulación completo de A. Para cada $x \in M$ elijamos un abierto O_x tal que $|A \cap O_x| < |A|$, si $M = X$ entonces la familia $\mathcal{O} = \{O_x\}_{x \in M}$ una cubierta abierta de X de donde podemos extraer una subcubierta finta $O_{x_1},...,O_{x_n}$ de X es claro que $A \subset \cup_{i=1}^{n}(A \cap O_{x_i})$. De donde se sigue que $|A| < sup|A \cap O_{x_i}|$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto A tiene un punto de acumulación completo. □

4. Espacios Compactos y Funciones Continuas

En está sección veremos que la propiedad de compacidad se preserva bajo funciones continuas, que es una propiedad productiva, que toda función continua de un producto de espacios compactos en $\mathbb{R}$ depende solamente de ω coordenadas y otros resultados que aplicaremos a lo largo de este trabajo.

TEOREMA 1.35. *Sean X un espacio compacto, Y un espacio Hausdorff, y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva entonces Y es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{V} = \{V_s\}_{s\in S}$ una cubierta abierta del espacio Y. Como f es una función continua entonces $f^{-1}(V_s)$ es un conjunto abierto en X para cada $s \in S$, y como f es sobreyectiva entonces $\{f^{-1}(V_s)\}_{s\in S}$ es una cubierta abierta de X. De donde se obtiene que existe un conjunto finito $\{s_1 ... s_k\} \subset S$ tal que

$$f^{-1}(V_{s_1}) \cup f^{-1}(V_{s_2}) \cup ... \cup f^{-1}(V_{s_k}) = X$$

con lo que obtenemos que $Y = V_{s_1} \cup ... \cup V_{s_k}$. □

COROLARIO 1.36. *Sean X un espacio compacto, Y un espacio Hausdorff, y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces $cl(f(A)) = f(cl(A))$ para todo subconjunto $A \subset X$.*

DEMOSTRACIÓN: i) $f(cl(A)) \subset cl(f(A))$. Se sigue de la continuidad de f.

ii) $clf(A)) \subset f(cl(A))$. Esta se sigue de los corolarios 1.29, 1.33, y el teorema 1.35. □

Del corolario 1.36 obtenemos los siguientes resultados.

COROLARIO 1.37. *Sean X un espacio compacto, Y un espacio T_2 y $f : X \to Y$ una a función continua. Entonces f es cerrada.*

COROLARIO 1.38. *Sean X un espacio compacto, Y un espacio T_2 y $f : X \to Y$ una función continua biyectiva. Entonces f es un homeomorfismo.*

TEOREMA 1.39. *Sean $Z \subset X$ con $cl(Z) = X$, Y compacto y $f : Z \to Y$ continua. Entonces f tiene una extensión continua sobre X si y sólo si para cualesquiera $B_1, B_2 \subset Y$ subconjuntos cerrados de Y tales que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ se cumple que $cl(f^{-1}(B_1)) \cap cl(f^{-1}(B_2)) = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $F : X \to Y$ una extension continua de f y B_1,B_2 conjuntos cerrados ajenos en Y. Entonces $F^{-1}(B_1), F^{-1}(B_2)$ son conjuntos cerrados ajenos en X . Como F es extensión de f tenemos que

$$cl(f^{-1}(B_1)) \cap cl(f^{-1}(B_2)) \subset F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2)$$

de donde

$$cl(f^{-1}(B_1)) \cap cl(f^{-1}(B_2)) = \emptyset$$

Ahora, para cada $x \in X$, sea

$\mathcal{V}(x) = \{U \subset X : U$ es vecindad de $x\}$ y $\mathcal{C}(x) = \{cl(f(Z \cap U) : U \in \mathcal{V}(x)\}$.

Observemos que se satisfacen las siguientes afirmaciones:

a) $\emptyset \neq cl(f(Z \cap U_1 ... \cap U_k) \subseteq cl(f(Z \cap U_1) \cap ... \cap cl(f(Z \cap U_k))$ para cualesquiera $U_1 ... U_k \in \mathcal{V}(x)$. Por lo cual $\mathcal{C}(x)$ tiene la propiedad de la interseccion finita. Por el teorema 1.28, $\cap\mathcal{C}(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in X$.

Demostraremos ahora que $\cap\mathcal{C}(x)$ consta de un único punto, lo cual implicará en particular que

b) $\cap\mathcal{C}(x) = \{f(x)\}$ para cada $x \in Z$.

Supongamos que existen $y_1, y_2 \in \cap\mathcal{C}(x)$ con $y_1 \neq y_2$. Entonces existen abiertos V_1, V_2,tales que

$$y_1 \in V_1, y_2 \in V_2 \text{ y } cl(V_1) \cap cl(V_2) = \emptyset$$

de donde

$$cl(f^{-1}(V_1)) \cap cl(f^{-1}(V_2)) = \emptyset.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \notin cl(f^{-1}(V_1))$. Entonces

$$X - cl(f^{-1}(V_1) \in \mathcal{V}(x) \text{ y } y_1 \in \cap\mathcal{C}(x) \subset cl(f(Z - cl(f^{-1}(V_1)).$$

Por otro lado, como

$$V_1 \cap f(Z - cl(f^{-1}(V_1)) = \emptyset,$$

entonces

$$y_1 \notin cl(f(Z - cl(f^{-1}(V_1))),$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\cap\mathcal{C}(X)$ consta de un solo punto.

Asignemos a cada $x \in X$ el único punto en $\cap\mathcal{C}(x)$, lo cual nos define una función $F : X \to Y$, que por (b) es una extensión de f. Ahora demostraremos que F es continua.

Sea V una vecindad de $F(x)$ en Y. Como

$$\{F(x)\} = \cap_{U \in \mathcal{V}(x)} cl(f(Z \cap U)) \subset V$$

entonces existe una familia finita $\{U_1, ..., U_k\} \subset \mathcal{V}(x)$ tal que:

c) $cl(f(Z \cap U_1)) \cap ... \cap cl(f(Z \cap U_k) \subset V$.

Como

$$U_1, U_2, ..., U_k \in \mathcal{V}(x) \text{ si } U = U_1 \cap ... \cap U_k$$

entonces $U \in \mathcal{V}(x)$, y aplicando (a) y (c) tenemos que

$$F(x') \in cl(f(Z \cap U) \subset V \text{ para todo } x' \in U$$

de donde F es continua. □

El siguiente teorema es uno de los resultados fundamentales de la topología general.

TEOREMA 1.40. *(Tychonoff) Sea $\{X_s\}_{s \in S}$ una familia de espacios con $X_s \neq \emptyset$ para todo $s \in S$. Entonces, $\Pi_{s \in S} X_s$ es compacto si y sólo si X_s es compacto para todo $s \in S$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X = \Pi_{s \in S} X_s$. Si X es compacto, entonces los X_s son Hausdorff, y como las proyecciones $p_s : X \to X_s$ son continuas, los X_s son compactos.

Ahora si X_s es compacto para todo $s \in S$, entonces $X = \Pi_{s \in S} X_s$ es Hausdorff.

Sea Ω una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la interseccion finita. Como esta es una propiedad de caracter finito, entonces, por el lema 1.9, la familia Ω está contenida en una familia maximal Ω_0 de subconjuntos de X que tiene la propiedad de la interseccion finita.

Demostraremos que $\cap\Omega \neq \emptyset$ para lo cual es suficiente demostrar que

(a) existe un $x \in X$ tal que $x \in cl(A)$ para todo $A \in \Omega_0$.

En efecto, como Ω_0 tiene la propiedad de la intersección finita tenemos que

(b) si $A_1, A_2, ...A_k \in \Omega_0$ entonces $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k \in \Omega_0$,

y por la maximalidad de Ω_0 se tiene que

(c) si $A_0 \subset X$ es cerrado y $A_0 \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in \Omega_0$, entonces $A_0 \in \Omega_0$.

Como Ω_0 tiene la propiedad de la intersección finita, entonces la familia $\Omega_s = \{cl(p_s(A))\}_{A \in \Omega_0}$ de subconjuntos cerrados de X_s, tienen esta propiedad para todo $s \in S$. Por lo tanto, para todo $s \in S$ existe un punto

$$x_s \in \cap_{A \in \Omega_0} cl(p_s(A)) \subset X_s.$$

Sea W_s un abierto tal que $x_s \in W_s \subset X_s$. Entonces $W_s \cap p_s(A) \neq \emptyset$ para todo $A \in \Omega_0$, lo cual implica que $p^{-1}cl(W_s) \cap A \neq \emptyset$ para cada $A \in \Omega_0$. De donde, por (c), se sigue que $p^{-1}cl(W_s) \in \Omega_0$, y de (b) se sigue que la cerradura de cualquier elemento de la base canónica de X que contiene al punto $x = (x_s)_{s\in S}$, pertenece a la familia Ω_0. Como Ω_0 tiene la propiedad de la intersección finita, cada $A \in \Omega_0$ intersecta a todo elemento de la base canónica de X que contiene al punto x; de donde tenemos que $x \in cl(A)$ para cada $A \in \Omega_0$. □

DEFINICIÓN 1.41. *Sean $\{X_{s\in S}\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos compactos, Y un espacio topológico y $f : \Pi_{s\in S}X_{s\in S} \to Y$ una función continua. Si existe un subconjunto $S_0 \subseteq S$ tal que para todo $x = \{x_s\}, y = \{y_s\} \in \Pi_{s\in S}X_{s\in S}$ con $x_s = y_s$ para todo $s \in S_0$ implica que $f(x) = f(y)$, entonces diremos que f depende solamente de las coordenadas pertenecientes a S_0.*

Si f depende sólamente de las coordenadas de S_0 y $|S_0| = \mu$, entonces diremos que f depende solamente de μ coordenadas.

TEOREMA 1.42. *Sean, $\{X_{s\in S}\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos compactos y $f : \Pi_{s\in S}X_{s\in S} \to \mathbf{R}$ una función continua. Entonces f depende solamente de $\omega-$coordenadas.*

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$\mathcal{C} = \{f : \Pi_{s\in S}X_{s\in S} \to \mathbf{R} : f \text{ es continua y depende de } \omega - \text{coordenadas}\}.$$

Para cada $f \in \mathcal{C}$, sea $S(f) \subseteq S$ con $|S(f)| = \omega$, tal que f depende solamente de las coodenadas que pertenecen a $S(f)$. Dadas $f, g \in \mathcal{C}$ entonces $f + g$ y fg, dependen solamente de las coordenadas pertenecientes a $S(f) \cup S(g)$, y que toda función $f : \Pi_{s\in S}X_s \to \mathbf{R}$ que es límite uniforme de una sucesión de funciones $\{f_i\}_{i\in\omega}$, con $f_i \in \mathcal{C}$ para toda $i \in \omega$, depende únicamente de las coordenadas pertenecientes al conjunto $\cup_{i=1}^{\infty} S(f_i)$.

Veamos ahora la familia $\mathcal{C}$ contiene a todas las funciones constantes y que separa puntos de $\Pi_{s\in S}X_{s\in S}$. Sean, $x, y \in \Pi_{s\in S}X_s$, con $x \neq y$ y $x = \{x_s\}$, $y = \{y_s\}$. Consideremos el conjunto $K = \{s \in S : x_s \neq y_s\}$ y elijamos un subconjunto $K_0 \subseteq K$ tal que $|K_0| = \omega$.

Definamos

$$A = \Pi_{s\in S}A_s, \text{ con } A_s = \{x_s\} \text{ si } s \in K_0 \text{ y } A_s = X_s \text{ si } s \notin K_0$$

Es claro que A es un conjunto cerrado en $\Pi_{s\in S}X_s$, $x \in A$, $y \notin A$ y como $\Pi_{s\in S}X_s$ es completamente regular existe una función $f \in \mathcal{C}$ tal que $f(A) = 0$ y $f(y) = 1$, que implica que $f(x) \neq f(y)$.

Ahora el resultado se sigue del teorema de Stone-Weierstrass. □

CAPÍTULO 2

Funciones Cardinales Topológicas

1. Definiciones básicas

En este capítulo daremos la definición de función cardinal topológica y estableceremos algunas relaciones entre ellas. Estos resultados y relaciones los podemos encontrar en R. Hodel [24], en Juhasz I. [25], y en Arhangel'skiĭ [7]. Algunas de estas relaciones nos servirán para poder obtener algunos resultados de los capítulos posteriores y otras serán mejoradas en los siguientes capítulos.

DEFINICIÓN 2.1. *Una función cardinal topológica es una función de clases ϕ que asigna a cada espacio topológico X en una clase C un número cardinal infinito $\phi(X)$, de tal forma que $\phi(X) = \phi(Y)$ si X y Y son homeomorfos.*

Las definiciones y resultados que presentamos en esta sección los podemos encontrar en el articulo de R. Hodel [24].

A continuación definiremos algunas funciones cardinales que se basan en alguna propiedad topológica que da información global acerca del espacio.

DEFINICIÓN 2.2. *Sea X un espacio topológico.*

i) El peso de X, que denotaremos como $w(X)$, es

$$w(X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es base de } X\} + \omega.$$

ii) $O(X)$ es el número de abiertos de X más ω.

iii) La densidad de X, que denotaremos como $d(X)$, es

$$d(X) = \text{mín}\{|S| : cl(S) = X\} + \omega.$$

iv) La amplitud de X, que denotaremos como $s(X)$, es

$$s(X) = \sup\{|D| : D \subseteq X \text{ y } D \text{ es discreto}\} + \omega.$$

v) El grado de Lindelöf de X, que denotaremos como $l(X)$, es el mínimo de los cardinales infinitos λ tal que toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta de cardinalidad $\leq \lambda$.

vi) La extensión de X que denotaremos como $e(X)$ es

$$e(X) = \sup\{|D| : D \text{ es cerrado y discreto}\} + \omega.$$

Para dar la definición de otras funciones cardinales se requiere la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.3. *Sean X y Y espacios topológicos.*

i) Una familia de conjuntos abiertos ajenos dos a dos en X es llamada una familia celular.

ii) Una red en X es una familia $\mathcal{N}$ de subconjuntos no vacios de X tal que todo conjunto abierto de X es unión de elementos de $\mathcal{N}$.

iii) Una π-base para X es una familia $\mathcal{V}$ de conjuntos abiertos no vacíos de X tal que si U es un conjunto abierto no vacío de X, entonces existe un $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subset U$.

iv) Una cubierta $\mathcal{U}$ de X es separante si

$$\cap\{U : U \in \mathcal{U}, x \in U\} = \{x\} \text{ para cada } x \in X.$$

DEFINICIÓN 2.4. *Sea X un espacio topológico.*

i) La celularidad de X, que denotaremos como $c(X)$, es

$$c(X) = \sup\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ es una familia celular en } X\} + \omega.$$

ii) El peso red de X, que denotaremos como $nw(X)$, es

$$nw(X) = \text{mín}\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \text{ es una red de } X\} + \omega.$$

iii) El $\pi-$ *peso* de X, que denotaremos como $\pi w(X)$, es

$$\pi w(X) = \text{mín}\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es } \pi - \text{ base de } X\} + \omega.$$

iv) El peso puntual separante de X, que denotaremos como $psw(X)$, es el mínimo de los cardinales infinitos λ tal que X tiene una cubierta abierta separante $\mathcal{U}$ con $ord(p, \mathcal{U}) \leq \lambda$ para cada $p \in X$.

v) El $i-$peso de X, que denotaremos como $iw(X)$, es

$$iw(X) = \text{mín}\{w(Y) : \text{existe una condensación } f : X \to Y\}.$$

vi) El grado diagonal de X, que denotaremos como $\Delta(X)$, es el mínimo de los cardinales infinitos λ tal que X tiene una familia $\{\mathcal{U}_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda\}$ de cubiertas abiertas tales que

$$\cap_{\alpha<\lambda} st(p, \mathcal{U}_\alpha) = \{p\} \text{ para cada } p \in X.$$

De las definiciones de estas funciones cardinales tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 2.5. *Sea X un espacio topológico. Entonces*
i) $nw(X) \leq w(X) \leq O(X)$;
ii) $c(X) \leq d(X) \leq nw(X)$;
iii) $c(X) \leq s(X)$;
iv) $e(X) \leq s(X)$;
v) $e(X) \leq l(X) \leq nw(X)$;
vi) $d(X) \leq \pi w(X) \leq w(X)$;
vii) $psw(X) \leq w(X)$;
viii) $iw(X) \leq w(X)$.

PROPOSICIÓN 2.6. *Sean X un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Entonces*
i) $w(Y) \leq w(X)$.
ii) $s(Y) \leq s(X)$.

DEMOSTRACIÓN: i) Es suficiente observar que si $\mathcal{B} = \{U_s\}_{s \in S}$ es una base de X entonces $\mathcal{B}' = \{U_s \cap Y\}_{s \in S}$ es una base en Y.

ii) Si E es un subespacio discreto en Y entonces E es discreto en X de donde $s(Y) \leq s(X)$. □

La proposición anterior nos lleva a dar la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.7. *Una función cardinal ϕ es monótona si $\phi(Y) \leq \phi(X)$ para todo subespacio Y de X.*

El siguiente ejemplo nos permite ver que no todas las funciones cardinales son monótonas.

EJEMPLO 2.8. *Consideremos el espacio* $X = X_s \times X_s$, *con* X_s *la línea de Sorgenfrey y* X *con la topología producto. Es claro que* $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ *es denso en* X, *de donde* $d(X) = \omega$. *Consideremos el subespacio* $Y = \{(x, -x) : x \in I\}$ *con la topologia inducida. Se tiene que* Y *es discreto, de donde* $d(Y) = 2^\omega$. *Por lo cual* $d(X) < d(Y)$.

DEFINICIÓN 2.9. *Si* ϕ *es una función cardinal que no es monótona se define la función cardinal*

$$h\phi(X) = sup\{\phi(Y) : Y \subseteq X\}.$$

Dentro de las funciones cardinales monótonas tenemos el peso, el peso red, la cardinalidad y la amplitud, mientras que la densidad, la celularidad, el grado de Lindelöf no lo son.

COROLARIO 2.10. *Sea* X *un espacio topológico. Entonces*
i) $hd(X) \leq nw(X)$;
ii) $hl(X) \leq nw(X)$.

DEMOSTRACIÓN: i) Sea $Y \subseteq X$. Del inciso (ii) del teorema 2.5 tenemos que $d(Y) \leq nw(Y) \leq nw(X)$. De donde se sigue el resultado deseado.
ii) Sea $Y \subseteq X$. Del inciso (v) del teorema 2.5 se tiene que $l(Y) \leq nw(Y) \leq nw(X)$. De donde se sigue el resultado. □

Los siguientes resultados nos dan otras relaciones entre estas funciones.

TEOREMA 2.11. *Sea* X *un espacio topológico. Entonces*
i) $w(X) \leq O(X) \leq 2^{|X|}$.
ii) Si X *es* T_0, *entonces* $|X| \leq 2^{w(X)}$ *y* $|X| \leq O(X)$.

DEMOSTRACIÓN: i) Se sigue del inciso (i) del teorema 2.5 y del inciso (iii) de la definición 2.2.
ii) Sea $\mathcal{B}$ una base de X tal que $|\mathcal{B}| \leq w(X)$. Definamos

$$\phi : X \to \mathcal{P}(\mathcal{B}) \text{ con } \phi(p) = \{B \in \mathcal{B};\ p \in B\}$$

Como X es T_0, dados $p, q \in X$ con $p \neq q$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B$ y $q \notin B$, lo que implica que ϕ es inyectiva; de donde $|X| \leq 2^{w(X)}$.

Para probar la segunda parte de (ii) definamos

$$\phi : X \to O(X) \text{ con } \phi(p) = X - cl(p).$$

Argumentando en forma análoga a la primera parte de este inciso tenemos que ϕ es inyectiva, de donde $|X| \leq O(X)$. □

En el siguiente teorema obtenemos una cota superior de la cardinalidad de un espacio en términos de su densidad.

TEOREMA 2.12. *(Pospišil) Sea* X *un espacio topológico* T_2. *Entonces*
i) $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$.
ii) $w(X) \leq O(X) \leq 2^{2^{2^{d(X)}}}$.

DEMOSTRACIÓN: i) Sea $d(X) = \lambda$ y $S \subseteq X$ tal que $cl(S) = X$ y $|S| \leq \lambda$. Como X es T_2, dados $p, q \in X$ con $p \neq q$, existe un conjunto abierto U tal que $p \in U$ y $q \notin cl(U)$. Como $cl(S) = X$ entonces $U \cap S \neq \emptyset$. Sea $A = U \cap S$. Entonces A satisface las siguientes condiciones:
a) $A \subseteq S$, lo cual se sigue de la definición de A.
b) $p \in cl(A)$. Para comprobar esto, es suficiente observar que si V es un conjunto abierto tal que $p \in V$, como $p \in U$, se sigue que $p \in U \cap V$, de donde

$$V \cap A = V \cap (U \cap S) = (V \cap U) \cap S \neq \emptyset.$$

Entonces $p \in cl(A)$.

c) $q \notin cl(A)$. Esto se sigue de que $A \subseteq U$ y $q \notin cl(U)$.

Ahora, si definimos $\phi : X \to \mathcal{PP}((S))$ como

$$\phi(p) = \{A \subseteq S : p \in cl(A)\}$$

obtenemos, por los incisos, a), b) y c), que ϕ es inyectiva; de donde

$$|X| \leq 2^{2^{d(X)}}.$$

ii) Se sigue del inciso (i) del teorema 2.11 y del inciso (i) de este teorema. □

En el siguiente teorema se mejora el inciso (ii) del teorema anterior si el espacio es regular.

TEOREMA 2.13. *(De Groot) Sea X un espacio topológico. Entonces*
i) $|RO(X)| \leq 2^{d(X)}$.
ii) Si X es regular $w(X) \leq 2^{d(X)}$.

DEMOSTRACIÓN: i) Sea $d(X) = \lambda$, $S \subseteq X$ con $cl(S) = X$ y $|S| \leq \lambda$. Es suficiente demostrar que

$$RO(X) \subseteq \{int(cl(A)) : A \subseteq S\}.$$

Sea R un conjunto abierto en X tal que $int(cl(R)) = R$. Como $cl(S) = X$ entonces

$$R \cap S \neq \emptyset \text{ y } cl(R \cap S) = cl(R).$$

Si $A = R \cap S$ entonces $cl(A) = cl(R)$, de donde $int(cl(A)) = R$.

ii) Se sigue del inciso (i) de este teorema ya que en los espacios regulares $RO(X)$ forma una base de la topología de X. □

En los siguientes resultados veremos algunas relaciones del grado diagonal con otras funciones cardinales.

TEOREMA 2.14. *Sea X un espacio T_3. Entonces*

$$\Delta(X) \leq nw(X).$$

DEMOSTRACIÓN: Para esto es suficiente observar que si $\mathcal{N}$ es una red de X y Δ es la diagonal de $X \times X$, entonces

$$\Delta = \cap \{(cl(N) \times cl(M))^c : N, M \in \mathcal{N} \text{ y } cl(N) \cap cl(M) = \phi\}.$$

En efecto si $cl(N) \cap cl(M) = \emptyset$ entonces

$$(x, x) \notin cl(N) \times cl(M)$$

de donde

$$(x, x) \in (cl(N) \times cl(M))^c$$

por lo cual

$$\Delta \subseteq \cap \{(cl(N) \times cl(M))^c : N, M \in \mathcal{N} \text{ y } cl(N) \cap cl(M) = \emptyset\}.$$

Ahora, sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces existen conjuntos abiertos O_x, O_y tales que $x \in O_x, y \in O_y$ y $O_x \cap O_y = \emptyset$. Además, como X es regular, existen abiertos U_x, U_y tales que

$$x \in U_x \subseteq cl(U_x) \subseteq O_x \text{ y } y \in U_y \subseteq cl(U_y) \subseteq O_y.$$

Por lo tanto, existen $N_x, N_y \in \mathcal{N}$ tales que

$$x \in N_x \subseteq cl(U_x) \text{ y } y \in N_y \subseteq cl(U_y)$$

de donde se concluye que

$$cl(N_x) \cap cl(N_y) = \emptyset \text{ y } (x, y) \in cl(N_x) \times cl(N_y)$$

Por lo tanto

$$(x, y) \notin \cap \{(cl(N) \times cl(M))^c : N, M \in \mathcal{N} \text{ y } cl(N) \cap cl(M) = \emptyset\}$$

de donde obtenemos que $\Delta(X) \leq nw(X)$. □

PROPOSICIÓN 2.15. *Sea X un espacio topológico. Entonces*

$$psw(X) \leq l(X)\Delta(X).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\lambda = l(X)\Delta(X)$. Entonces $l(X) \leq \lambda$ y $\Delta(X) \leq \lambda$. Sea $\{\mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ una familia de cubiertas abiertas de X, tal que

$$\cap_{\alpha<\lambda} st(p, \mathcal{V}_\alpha) = \{p\} \text{ para cada } p \in X.$$

Como $l(X) \leq \lambda$, para cada $\alpha < \lambda$ existe $\mathcal{V}'_\alpha \subseteq \mathcal{V}_\alpha$ tal que $|\mathcal{V}'_\alpha| \leq \lambda$ y $\mathcal{V}'_\alpha$ cubre a X. Además,

$$\cap_{\alpha\leq\lambda} st(p, \mathcal{V}'_\alpha) = \{p\}.$$

Sea $\mathcal{V} = \cup_{\alpha<\lambda} \mathcal{V}'_\alpha$, entonces $|\mathcal{V}| \leq \lambda$ y $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta separante de X ya que

$$\{p\} \subseteq \cap\{V \in \mathcal{V} : p \in V\} \subseteq \cap_{\alpha\leq\lambda} st(p, \mathcal{V}'_\alpha) = \{p\},$$

lo que implica que $psw(X) \leq \lambda$. □

Las definiciones de las siguientes funciones cardinales están basadas en propiedades topológicas locales. Para lo cual requerimos de las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 2.16. *Sean X un espacio topológico, $\mathcal{V}$ una familia de conjuntos abiertos y $p \in X$.*
i) $\mathcal{V}$ es una $\pi-$base local para p en X si para cada abierto U tal que $p \in U$ existe un $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq U$.
ii) $\mathcal{V}$ es una base local para p en X si para cada abierto U tal que $p \in U$, existe un $V \in \mathcal{V}$ tal que $p \in V \subseteq U$.
iii) $\mathcal{V}$ es una pseudobase de p en X si $p \in V$ para todo $V \in \mathcal{V}$ y $\cap_{V\in\mathcal{V}} V = \{p\}$.

DEFINICIÓN 2.17. *Sean X un espacio topológico y $p \in X$*
i) El carácter de p en X que denotaremos como $\chi(p, X)$ es

$$\chi(p, X) = mín\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es base local para } p \text{ en } X\}.$$

ii) El $\pi-$carácter de p en X que dentaremos como $\pi\chi(p, X)$ es

$$\pi\chi(p, X) = mín\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es una } \pi - \text{base local para } p \text{ en } X\}.$$

iii) El pseudocarácter de p en X, que denotaremos como $\psi(p, X)$, es

$$\psi(p, X) = mín\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es una seudobase para } p \text{ en } X\}.$$

iv) La estrechez de p en X, que denotaremos como $t(p, X)$, es el mínimo de los λ tal que para todo subconjunto $Y \subseteq X$ con $p \in cl(Y)$, existe un subconjunto $A \subseteq Y$ tal que $|A| \leq \lambda$ y $p \in cl(A)$.

DEFINICIÓN 2.18. *Sea X un espacio topológico.*
i) El carácter de X, que denotaremos como $\chi(X)$, es

$$\chi(X) = sup\{\chi(p, X) : p \in X\} + \omega.$$

ii) El $\pi-$carácter de X, que denotaremos como $\pi\chi(X)$, es

$$\pi\chi(X) = sup\{\pi\chi(p, X) : p \in X\} + \omega.$$

iii) El pseudocarácter de X, que denotaremos como $\psi(X)$, es

$$\psi(X) = sup\{\psi(p, X) : p \in X\} + \omega.$$

iv) La estrechez de X que denotaremos como $t(X)$, es

$$t(X) = sup\{t(p, X) : p \in X\} + \omega.$$

En el siguiente teorema damos algunas relaciones básicas entre las funciones cardinales recién definidas.

TEOREMA 2.19. *Sea X un espacio topológico. Entonces*
i) $\chi(X) \leq w(X) \leq \chi(X) \cdot |X|$.
ii) $\pi w(X) = d(X) \cdot \pi\chi(X)$.
iii) $t(X) \leq hd(X)$.
iv) $t(X) \leq h\pi\chi(X)$.

DEMOSTRACIÓN: i) $\chi(X) \leq w(X)$. Esta desigualdad se sigue de las definiciones 2.2 inciso (i) y 2.17 inciso (i). Ahora sea $\chi(X) \cdot |X| = \lambda$. Entonces $\chi(X) \leq \lambda$ y $|X| \leq \lambda$, de donde se cumple que $\chi(p, X) \leq \lambda$ para todo $p \in X$. Sea $\mathcal{V}_p$ una base local de p en X tal que $|\mathcal{V}_P| = \chi(p, X)$ para cada $p \in X$. Consideremos $\mathcal{V} = \bigcup\{\mathcal{V}_p : p \in X\}$. Es claro que $|\mathcal{V}| \leq \lambda$ y $\mathcal{V}$ es una base de X, de donde obtenemos que $w(X) \leq |\mathcal{V}|$ y por lo tanto $w(X) \leq \chi(X) \cdot |X|$.

ii) a) $d(X) \cdot \pi\chi(X) \leq \pi w(X)$. Del inciso (vi) del teorema 2.5 y las definiciones 2.4 inciso iii) y 2.18 inciso (ii) tenemos que $d(X) \leq \pi w(X)$ y $\pi\chi(X) \leq \pi w(X)$. De donde

$$d(X) \cdot \pi\chi(X) \leq \pi w(X)$$

b) $\pi w(X) \leq d(X) \cdot \pi\chi(X)$. Ahora supongamos que $d(X) \cdot \pi\chi(X) = \lambda$. Entonces $d(X) \leq \lambda$ y $\pi\chi(X) \leq \lambda$. Sea $D \subseteq X$ tal que $cl(D) = X$ y $|D| = d(X)$. Para cada $d \in D$ sea $\mathcal{V}_d$ una $\pi - base$ de d en X tal que $|\mathcal{V}_d| = \pi\chi(p, X)$. Sea $\mathcal{V} = \bigcup\{\mathcal{V}_d : d \in D\}$, entonces $|\mathcal{V}| \leq \lambda$ y $\mathcal{V}$ es una π-*base* de X, de donde concluimos que $\pi w(X) \leq |\mathcal{V}| \leq \lambda$.

iii) Sean $p \in X$, y $Y \subseteq X$, tal que $p \in Y$. Si $hd(X) = \lambda$ se sigue que $d(Y) \leq \lambda$, y por tanto podemos elegir un subconjunto $Z \subseteq Y$ tal que $d(Y) = |Z| \leq \lambda$ y $cl_Y(Z) = Y$, por lo que $p \in cl_Y(Z) \subseteq cl_X(Z)$ y por tanto $t(p, X) \leq \lambda$ de donde se sigue que $t(X) \leq hd(X)$.

iv) Sean $p \in X$, y $Y \subseteq X$, tal que $p \in cl(Y)$. Si $h\pi\chi(X) = \lambda$, se sigue que $\pi\chi(Y) \leq \lambda$, por lo que podemos elegir una $\pi-$base $\mathcal{V}$ de p en Y tal que $\pi\chi(Y) = |\mathcal{V}|$. Para cada $V \in \mathcal{V}$, elijamos un $a_V \in V$. Sea $A = \{a_V : V \in \mathcal{V}\}$. Es claro que A es denso en Y, y por lo tanto $p \in cl_Y(A) \subseteq cl_X(A)$ además $|A| \leq |\mathcal{V}| \leq \lambda$; de donde concluimos que $t(p, X) \leq \lambda$, y por tanto $t(X) \leq h\pi\chi(X)$. □

En los espacios T_1 el seudocarácter es acotado superiormente tanto por hl, como por la cardinalidad como nos lo hace ver el siguiente resultado.

TEOREMA 2.20. *Si X es un espacio topológico T_1. Entonces*
i) $\psi(X) \leq hl(X)$.
ii) $\psi(X) \leq |X|$.

DEMOSTRACIÓN: i) Sean $p \in X$, y $Y = X - \{p\}$. Entonces para cada $q \in Y$ existen abiertos U_q^p, V_q^p, tales que $p \in U_q^p$, $q \in V_q^p$ y $U_q^p \cap V_q^p = \emptyset$. Consideremos las familias de abiertos $\mathcal{V} = \{V_q^p\}_{q \in Y}$ y $\mathcal{U} = \{U_q^p\}_{q \in Y}$. Es claro que $\mathcal{V}$ es una cubierta de Y, y $\mathcal{U}$ es una seudobase de p. Si $l(Y) = \lambda$, entonces existe una subcubierta $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ con $|\mathcal{V}'| \leq \lambda$. Sea $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ la familia inducida por $\mathcal{V}'$. Entonces $|\mathcal{U}| \leq \lambda$ y $\cap \mathcal{U} = \{p\}$; de donde $\mathcal{U}$ es seudobase de p, con lo que obtenemos que $\psi(p, X) \leq |\mathcal{U}|$. Por lo tanto $\psi(X) \leq hl(X)$.

ii) Como X es T_1 para cada $x \in X$ el conjunto $U_x = X - \{x\}$ es un conjunto abierto, de donde podemos asegurar que para cada $p \in X$ la familia $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in X - \{p\}}$ es una seudobase de p con $|\mathcal{U}| \leq |X|$; con lo cual obtenemos que $\psi(p, X) \leq |X|$. □

En los siguientes teoremas se obtienen diversas cotas superiores para la cardinalidad del espacio en términos de otras funciones cardinales.

TEOREMA 2.21. *Sea X un espacio topológico T_1. Entonces*

$$|X| \leq nw(X)^{\psi(X)}$$

DEMOSTRACIÓN: Sean $\psi(X) = \kappa$, $\mathcal{N}$ una red de X con $|\mathcal{N}| = nw(X)$. Como $\psi(p, X) \leq \kappa$, para cada $p \in X$ podemos elegir $\mathcal{N}_p \subseteq \mathcal{N}$ con $|\mathcal{N}_p| \leq \kappa$ tal que $\cap \mathcal{N}_p = \{p\}$. Como $|\mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{N})| \leq |\mathcal{N}|^\kappa \leq nw(X)^\kappa$, obtenemos que $|X| \leq nw(X)^{\psi(X)}$. □

De los teoremas 2.5, 2.13 y inciso (i) y 2.21 inciso (ii), obtenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 2.22. *Sea X un espacio topológico T_3.*
Entonces

$$|X| \leq 2^{d(X) \cdot \psi(X)}$$

LEMA 2.23. *Sean λ un cardinal infinito y X un espacio topológico tales que:*
i) para cada $p \in X$ existe una familia $\mathcal{V}_p$ de conjuntos abiertos tal que $p \in V$ para todo $V \in \mathcal{V}_p$, $|\mathcal{V}_p| \leq \lambda$ y $\cap \{cl(V) : V \in \mathcal{V}_p\} = \{p\}$;
ii) existe un subconjunto $S \subseteq X$ tal que $X = \cup \{cl(A) : A \subseteq S,\ |A| \leq \lambda\}$. Entonces

$$|X| \leq |S|^\lambda.$$

DEMOSTRACIÓN: Por el inciso ii), para cada $p \in X$ existe un subconjunto $A_p \subseteq S$ tal que $p \in cl(A_p)$ y $|A_p| \leq \lambda$. Por lo tanto, para cada $V \in \mathcal{V}_p$, $V \cap A_p \neq \emptyset$.

Es claro que se satisfacen las siguientes afirmaciones.

a) $A_p \cap V \subseteq S$ ya que $A_p \cap V \subseteq A_p$.
b) $|A_p \cap V| \leq \lambda$ (se sigue del inciso (i)).
c) $p \in cl(A_p \cap V)$. Esto se sigue del hecho de que si U es un conjunto abierto tal que $p \in U$, entonces $p \in V \cap U$, de donde $A_p \cap (V \cap U) \neq \emptyset$.
d) $\cap \{cl(A_p \cap V) : V \in \mathcal{V}_p\} = \{p\}$ ya que $cl(A_p \cap V) \subseteq cl(V)$.

Definamos $\Phi : X \to \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{P}_\lambda(S))$ como

$$\Phi(p) = \{A_p \cap V : V \in \mathcal{V}_p\}.$$

Por el inciso d), Φ es inyectiva, de donde $|X| \leq (|S|^\lambda)^\lambda = |S|^\lambda$. □

TEOREMA 2.24. *(Pospišil) Sea X un espacio topológico T_2. Entonces*

$$|X| \leq d(X)^{\chi(X)}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\chi(X) = \lambda$ y $D \subseteq X$ denso con $|D|$=$d(X)$.

Sea $p \in X$ como $\chi(X) = \lambda$, podemos elegir $\mathcal{V}_p$ una base local de p en X, con $|\mathcal{V}_p| \leq \lambda$. Entonces, para cada $V \in \mathcal{V}_p$ tenemos que $V \cap D \neq \emptyset$, de donde podemos elegir un $x \in V \cap D$.

Sea $A = \{x \in V \cap D : V \in \mathcal{V}_p\}$, es claro que $p \in clA$, $A \subseteq D$ y $|A| \leq \lambda$. De donde $X = \cup \{cl(A) : A \in |A| \leq \lambda\}$, por lo cual aplicando el lema 2.23 obtenemos el resultado. □

LEMA 2.25. *Sean X un espacio topológico con $\chi(X) \leq \lambda$, y $\{H_\alpha : \alpha < \lambda^+\}$ una sucesión creciente de conjuntos cerrados. Entonces $H = \cup_{\alpha<\lambda^+} H_\alpha$ es un conjunto cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $p \in cl(H)$ y $\mathcal{V}_p$ una base local de p en X, tal que $|\mathcal{V}_p| \leq \lambda$. Entonces, para cada $V \in \mathcal{V}_p$ tenemos que $V \cap H \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe un $\beta^V < \lambda^+$ tal que $V \cap H_{\beta^V} \neq \emptyset$. Consideremos $\beta = \sup\{\beta^V : V \in \mathcal{V}_p\}$. Como $|\{\beta^V : V \in \mathcal{V}_p\}| \leq |\mathcal{V}_p| \leq \lambda$, se sigue que $\beta < \lambda^+$. Ahora, por la definición de β tenemos que para toda $V \in \mathcal{V}_p$, $V \cap H_\beta \neq \emptyset$. de donde concluimos que $p \in cl(H_\beta) = H_\beta$; con lo cual obtenemos que $p \in H$. □

TEOREMA 2.26. *(Arhangel'skiĭ) Sea X un espacio topológico T_2. Entonces*

$$|X| \leq 2^{l(X)\chi(X)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $l(X)\chi(X) = \lambda$. Entonces $l(X) \leq \lambda$ y $\chi(X) \leq \lambda$, de donde concluimos que $\chi(p, X) \leq \lambda$ para cada p en X. Sea $\mathcal{V}_p$ una base de p en X tal que $|\mathcal{V}_p| \leq \lambda$. Construiremos una sucesión creciente $\{H_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda^+\}$ de conjuntos cerrados en X y una sucesión $\{\mathcal{V}_\alpha : 0 < \alpha < \lambda^+\}$ de familas de conjuntos abiertos en X tales que

i) $|H_\alpha| \leq 2^\lambda$ si $0 \leq \alpha < \lambda^+$,
ii) $\mathcal{V}_\alpha = \{V \in \mathcal{V}_p\text{: } p \in \cup_{\beta<\alpha} H_\beta\}$ si $0 < \alpha < \lambda^+$, y
iii) si W es la unión de a lo más λ elementos de $\mathcal{V}_\alpha$ y $W \neq X$, entonces $H_\alpha - W \neq \emptyset$.

La construcción la haremos por inducción transfinita. Si $\alpha = 0$ hacemos $H_0 = \{p\}$ que satisface lo requerido. Sea ahora $0 < \alpha < \lambda$. Supongamos que para $\beta < \alpha$

tenemos construidos los H_β, $\mathcal{V}_\beta$, con $|\mathcal{V}_\beta| \leq 2^\lambda$. Y así que por ii) podemos definir $\mathcal{V}_\alpha$ tal que $|\mathcal{V}_\alpha| \leq 2^\lambda$ ya que

$$|\mathcal{V}_\alpha| \leq \left|\cup_{p\in\cup_{\beta<\alpha}H_\beta}\mathcal{V}_p\right| \leq \sum_{p\in\cup_{\beta<\alpha}H_\beta} |\mathcal{V}_p| \leq \sum_{p\in\cup_{\beta<\alpha}H_\beta} \lambda \leq \lambda \sum_{\beta<\alpha} |H_\beta| \leq 2^\lambda.$$

Para cada conjunto W el cual es la unión de a lo más λ elementos de $\mathcal{V}_\alpha$ y tal que $X - W \neq \emptyset$, elegimos un punto $p_W \in X - W$. Sea A_α el conjunto de estos puntos el cual satisface que $|A_\alpha| \leq 2^\lambda$, ya que

$$|A_\alpha| \leq |\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{V}_\alpha)| \leq |\mathcal{V}_\alpha|^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^\lambda.$$

Definamos $H_\alpha = cl(A_\alpha \cup (\cup_{\beta<\alpha}H_\beta))$. Resulta que

$$d(H_\alpha) \leq |A_\alpha \cup (\cup_{\beta<\alpha}H_\beta)|\,.$$

Del teorema 2.24 tenemos que

$$|H_\alpha| \leq d(H_\alpha)^{\chi(H_\alpha)} \leq |A_\alpha \cup (\cup_{\beta<\alpha}H_\beta)|^\lambda \leq (2^\lambda + 2^\lambda)^\lambda = 2^\lambda.$$

Lo cual termina la construcción.

Sea $H = \cup_{\alpha<\lambda^+}H_\alpha$ que por el lema 2.25 es cerrado. Si $H = X$ obtenemos el resultado deseado. Supongamos que $X \neq H$, es decir que existe un $q \in X - H$. Como X es T_2 , para cada $p \in H$ podemos elegir una $V_p \in \mathcal{V}_p$ tal que $q \notin V_p$. De donde la familia $\{V_p : p \in H\} \cup \{X - H\}$ es una cubierta abierta de X. Por lo cual existe un subconjunto $A \subseteq H$ con $|A| \leq \lambda$ tal que $\{V_p : p \in A\}$ cubre a H. Ahora sea $W = \cup_{p\in A}V_p$. Por la definición de W, $H \subseteq W$ y $q \notin W$.

Elijamos $\alpha < \lambda^+$ tal que $A \subseteq \cup_{\beta<\alpha}H_\beta$. Como $W \neq X$, por el inciso iii), tenemos que $H_\alpha - W \neq \emptyset$. Lo cual contradice que $H \subseteq W$. □

En los resultados 2.27 hasta 2.32 se demuetran varias propiedades que involucran a la amplitud de un espacio X.

LEMA 2.27. *(Šapirovskii) Sean X un espacio topológico con $s(X) \leq \kappa$ y $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe un subconjunto A de X con $|A| \leq \kappa$ y una subfamilia $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ con $|\mathcal{W}| \leq \kappa$ tal que $X = cl(A) \cup (\cup\mathcal{W})$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que es falsa la conclusión del lema. Entonces podemos construir sucesiones $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\} \subseteq X$ y $\{V_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\} \subseteq \mathcal{V}$ tales que $x_0 \in V_0$ y $x_\alpha \in V_\alpha - [(\cup_{\beta<\alpha}V_\beta) \cup (cl\{x_\beta : \beta < \alpha\})]$ para $0 < \alpha < \kappa^+$. Entonces $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ es un conjunto discreto en X de cardinalidad κ^+ lo cual es una contradicción. □

PROPOSICIÓN 2.28. *Sea X un espacio topológico T_2. Entonces*

$$\psi(X) \leq 2^{s(X)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $s(X) = \kappa$ y $p \in X$. Para $q \neq p$ existen conjuntos abiertos U_q, V_q tales que

$$p \in U_q,\, q \in V_q \text{ y } U_q \cap V_q = \emptyset.$$

De donde la familia $\{V_q : q \in X - \{p\}\}$ es una cubierta abierta de $X - \{p\}$. Del lema 2.28, existen $A \subset X - \{p\}$ y $B \subset X - \{p\}$ tales que

$$|A| \leq \kappa,\ |B| \leq \kappa \text{ y } X - \{p\} \subseteq cl(A) \cup (\cup_{q\in B}V_q).$$

Sean

$$\mathcal{V}_A = \{X - cl(C) : C \subset A \text{ y } p \notin cl(C)\} \text{ y } \mathcal{V}_B = \{X - cl(V_q) : q \in B\}.$$

Definamos $\mathcal{V} = \mathcal{V}_A \cup \mathcal{V}_B$. Se asegura que $\mathcal{V}$ es una seudobase para p con $|\mathcal{V}| \leq 2^\kappa$.

Sea $r \neq p$. Si $r \in \cup_{q \in B} V_q$, se sigue que $r \in V_{q'}$ para algún $q' \in B$, de donde $r \notin X - cl(V_q)$ por lo cual $r \notin \cap \mathcal{V}_B$.

Si $r \in cl(A)$, como $r \in cl(V_r)$ y $p \notin cl(V_r)$ se sigue que $r \in cl(A) \cap cl(V_r)$. De donde $r \notin X - cl(A \cap V_r)$ y $p \in X - cl(A \cap V_r)$. Por lo cual $r \notin \cap \mathcal{V}_A$. Ahora como $|\mathcal{V}_A| \leq 2^\kappa$, $|\mathcal{V}_B| \leq 2^\kappa$ entonces $|\mathcal{V}| \leq 2^\kappa$. De donde se sigue el resultado. □

PROPOSICIÓN 2.29. *Sea X un espacio topológico T_2, con $s(X) \leq \kappa$. Entonces existe un subconjunto S de X con $|S| \leq 2^\kappa$ tal que*

$$X = \cup\{cl(A) : A \subset S \text{ y } |A| \leq \kappa\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $p \in X$. Del corolario 2.28 existe una pseudobase de p, $\mathcal{V}_p$, con $|\mathcal{V}_p| \leq 2^\kappa$. Construiremos una sucesión $\{S_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ de subconjuntos de X y una sucesión $\{\mathcal{V}_\alpha\}_{0<\alpha<\kappa^+}$ de familias de abiertos de X tales que:

i) $|S_\alpha| \leq 2^\kappa$, $0 \leq \alpha < \kappa^+$.

ii) $\mathcal{V}_\alpha = \{V \in \mathcal{V}_p\text{: } p \in \cup_{\beta<\alpha} S_\beta\}$, $0 < \alpha < \kappa^+$.

iii) Si $A \subseteq (\cup_{\beta<\alpha} S_\beta)$ tal que $|A| \leq \kappa$ y si W es la unión de a lo más κ elementos de $\mathcal{V}_\alpha$ y $cl(A) \cup W \neq X$, entonces $S_\alpha - (cl(A) \cup W) \neq \emptyset$.

Para $\alpha = 0$, sea $S_0 = \{p\}$.

Para $\alpha = 1$, sea $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_p$. Si $A \subseteq S_0$ y W es la unión de a lo más κ elementos de $\mathcal{V}_p$ y $cl(A) \cup W \neq X$, sean $p_W \in X - (cl(A) - W)$ y $S_1 = \{p_w\}$. Entonces

$$|S_1| \leq |\mathcal{P}_\kappa(\mathcal{V}_p)| \leq |\mathcal{V}_p|^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa,$$

y por construcción se satisface (iii).

Sea $0 < \alpha < \kappa^+$. Supongamos que S_β y $\mathcal{V}_\beta$ han sido definidos para $\beta < \alpha$. Por (ii) la familia $\mathcal{V}_\alpha$ la tenemos definida y

$$|\mathcal{V}_\alpha| \leq |\cup_{p \in \cup_{\beta<\alpha} S_\beta} \mathcal{V}_p| \leq \sum_{p \in \cup_{\beta<\alpha} S_\beta} |\mathcal{V}_p| \leq \kappa^+ \cdot 2^\kappa \cdot 2^\kappa = 2^\kappa.$$

Como

$$|\mathcal{P}_\kappa(\cup_{\beta<\alpha} S_\beta)| \leq |\cup_{\beta<\alpha} S_\beta| \leq 2^\kappa,$$

entonces la cardinalidad de la familia de los conjuntos W considerados en el inciso (iii) es a lo más

$$|\mathcal{P}_\kappa(\mathcal{V}_\alpha)| \leq |\mathcal{V}_\alpha|^\kappa \leq 2^\kappa.$$

Para cada A y W que satisfagan el inciso (iii) elijamos $p_{A,W} \in X - (cl(A) - W)$. Consideremos $S_\alpha = \{p_{A,W} : A \text{ y } W \text{ satisfacen el inciso (iii)}\}$.
Definamos

$$|S_\alpha| \leq 2^\kappa \cdot 2^\kappa.$$

De donde (iii) se satisface por construcción. Con lo cual terminamos la construcción.

Sea $S = \cup_{\alpha<\kappa^+} S_\alpha$. Si para todo $q \in X$ existe $A \subseteq S$ tal que $|A| \leq \kappa$ y $q \in cl(A)$, entonces ya terminamos.

Supongamos que existe un $q \in X$ tal que $q \notin cl(A)$ para todo $A \subseteq S$ con $|S| \leq \kappa$. Como $q \notin cl(A)$ entonces $q \notin S$. Para cada $p \in S$ sea $V_p \in \mathcal{V}_p$ tal que

$q \notin V_p$. Aplicando el lema 2.27 a S y $\{V_p : p \in S\}$, podemos asegurar que existen A y $B \subset S$ con $|A| \leq \kappa$, $|B| \leq \kappa$ y tal que $S \subseteq cl(A) \cup W$, con $W = \cup_{p \in B} V_p$.

Entonces $q \notin cl(A)$, elijamos $\alpha < \kappa^+$ tal que $(A \cup B) \subseteq \cup_{\beta<\alpha} S_\beta$. Del inciso (iii) $S_\alpha - (cl(A) \cup W) \neq \emptyset$ lo cual contradice que $S \subseteq (cl(A) \cup W)$. □

PROPOSICIÓN 2.30. *(Šapirovskii) Sea X un espacio topológico, con $s(X) \leq \kappa$. Entonces X tiene un subconjunto denso Y con $hl(Y) \leq \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $d(X) \leq \kappa$, entonces existe un subconjunto $S \subset X$ tal que $cl(S) = X$ y $|S| \leq \kappa$. Demostraremos que $hl(S) \leq \kappa$. Sea $A \subset S$ y $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in J\}$ una cubierta abierta de A con los U_α conjuntos abiertos en A; lo cual implica que existen conjuntos abiertos V_α en X tales que $U_\alpha = V_\alpha \cap A$ para cada $\alpha \in J$. Como S es denso en X se sigue que $S \cap V_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in J$. Elijamos un $x_\alpha \in S \cap V_\alpha$ para cada $\alpha \in J$. Como $|S| \leq \kappa$ podemos tomar $K \subset J$ con $|K| \leq \kappa$ y $\cup_{\alpha \in K} U_\alpha = A$, de donde se sigue el resultado deseado.

Supongamos ahora que $d(X) = \lambda \geq \kappa^+$. Sea $S = \{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda\}$ un subconjunto denso de X. Construiremos un subconjunto $Y = \{x_{\alpha_\beta} : 0 \leq \beta < \lambda\}$ de S tal que para cada $\beta < \lambda$, α_β sea el menor ordinal $< \lambda$ tal que

$$x_{\alpha_\beta} \notin cl(\{x_{\alpha_\gamma} : 0 \leq \gamma < \beta\}.$$

Sea $\alpha_0 \in S$. Como $cl(S) = X$ y $|S| \geq \kappa^+$, $S - cl(\{x_{\alpha_0}\}) \neq \emptyset$; entonces existe $\alpha < \lambda$ tal que $x_\alpha \in S - cl(\{x_{\alpha_0}\})$. Sea

$$\alpha_1 = \text{mín}\{\alpha < \lambda : x_\alpha \in S - cl(\{x_{\alpha_0}\})\}$$

lo cual implica que

$$x_{\alpha_1} \notin cl(\{x_0\}).$$

Sea $\beta < \lambda$ y supongamos que para toda $\delta < \beta$ tenemos definido el x_{α_δ} tal que

$$x_{\alpha_\delta} \notin cl(\{x_{\alpha_\gamma} : 0 \leq \gamma < \delta\}).$$

Como $\delta < \beta < \lambda$, entonces

$$S - cl(\{x_{\alpha_\delta} : 0 < \gamma < \delta\}) \neq \emptyset$$

de donde existe $\alpha < \lambda$ tal que

$$x_\alpha \in S - cl(\{x_{\alpha_\delta} : 0 < \gamma < \delta\}).$$

Sea

$$\alpha_\beta = \text{mín}\{\alpha < \lambda : x_\alpha \in S - cl(\{x_{\alpha_\delta} : 0 < \gamma < \delta\})\},$$

con lo cual tenemos que

$$x_{\alpha_\beta} \notin cl(\{x_{\alpha_\delta} : 0 < \delta < \beta\}).$$

Observemos que $\alpha_\beta \geq \beta$ para todo $\beta < \lambda$. En efecto, $0 \leq \alpha_0$ y supongamos que $\gamma \leq \alpha_\gamma$ para todo $\gamma < \beta$. Sea $\gamma < \beta$ arbitrario, entonces

$$\{x_{\alpha_\eta} : \eta < \gamma\} \subset \{x_{\alpha_\eta} : \eta < \beta\},$$

de donde

$$cl(\{x_{\alpha_\eta} : \eta < \gamma\} \subset cl(\{x_{\alpha_\eta} : \eta < \beta\},$$

y como $x_{\alpha_\beta} \notin cl(\{x_{\alpha_\eta} : \eta < \beta\}$, entonces

$$x_{\alpha_\beta} \notin cl(\{x_{\alpha_\eta} : \eta < \gamma\});$$

de donde $\gamma \leq \alpha_\gamma < \alpha_\beta$. Por lo cual $\gamma < \alpha_\beta$ para todo $\gamma < \beta$. Por lo tanto $\beta \leq \alpha_\beta$. Lo cual nos permite afirmar que $cl(Y) = S$, Que aunado hal hecho de que $cl(S) = X$, de donde se sigue que $cl(Y) = X$. Por construcción Y tiene la propiedad que si $Z \subset Y$ con $|Z| = \kappa^+$ entonces Z tiene un subconjunto A tal que $d(A) = \kappa^+$.

Ahora demostraremos que $hl(Y) \leq \lambda$. Supongamos que esto es falso, entonces existen una familia $\{G_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ de conjuntos abiertos en Y y un subconjunto $Z = \{y_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ de Y tal que $y_\alpha \in (G_\alpha - \cup_{\beta<\alpha} G_\beta)$ para todo $\alpha < \kappa^+$. Sea $A \subset Z$ con $d(A) = \kappa^+$. Ahora para cada $\alpha < \kappa^+$ sea $V_\alpha = \{y_\beta : \beta < \alpha\}$. Es claro que $V_\alpha = Z \cap \cup_{\beta<\alpha} G_\beta$, de donde resulta que V_α es un conjunto abierto en Z y $|V_\alpha| \leq \kappa$. Entonces, la familia $\{V_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ cubre a A. Aplicando el lema 2.27 podemos elegir un subconjunto $B \subset A$ con $|B| \leq \kappa$ y un $\alpha_0 < \kappa^+$ tal que $A \subset cl(B) \cup V_{\alpha_0}$. Como $cl(B \cup (V_{\alpha_0} \cap A)) = A$ y $|B \cup (V_{\alpha_0} \cap A)| \leq \kappa$, se sigue que $d(A) \leq \kappa$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $hl(Y) \leq \kappa$. □

PROPOSICIÓN 2.31. *Sean X un espacio T_3 $Y \subseteq X$ con $hl(Y) \leq \lambda$ y $A \subseteq Y$. Entonces existe una familia $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos en X tal que*
i) $|\mathcal{U}| \leq \lambda$
ii) $cl(A) \subseteq \cap\mathcal{U}$
iii) $Y \cap cl(A) = Y \cap (\cap\mathcal{U})$.

DEMOSTRACIÓN: Si $Y = cl(A)$ entonces tomamos $\mathcal{U} = \{X\}$. Supongamos que $Y - cl(A) \neq \emptyset$. Sea $Z = Y - cl(A)$. Para cada $x \in Z$ tenemos que $x \in Y$ y $x \notin cl(A)$. Como X es regular, podemos asegurar que existen conjuntos abiertos U, V tales que $x \in U$, $cl(A) \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. De nuevo, como X es T_3, existe un conjunto abierto R_x tal que $x \in R_x \subseteq cl(R_x) \subseteq U$. Así que $cl(R_x) \cap cl(A) = \emptyset$. Consideremos $\mathcal{W} = \{R_x : x \in Z\}$. Resulta que $\mathcal{W}$ es una cubierta abierta de Z. Como $Z \subseteq Y$ y $hl(Y) \leq \lambda$, entonces existe un subconjunto $E \subseteq Z$ tal que $|E| \leq \lambda$ y $\mathcal{W}' = \{R_x : x \in E\}$ cubre a Z.

Sea $\mathcal{U} = \{X - cl(R_x) : x \in E\}$. $\mathcal{U}$ es una familia de conjuntos abiertos tal que $|\mathcal{U}| \leq \lambda$, y como $cl(R_x) \cap cl(A) = \emptyset$ para cada $x \in E$, entonces $cl(A) \subseteq X - cl(R_x)$ para todo $x \in E$. Por lo cual $cl(A) \subseteq \cap\mathcal{U}$. Por lo tanto $Y \cap cl(A) \subseteq Y \cap (\cap\mathcal{U})$.

Además, si $y \in Y \cap (\cap\mathcal{U})$, entonces $y \in cl(A)$ ya que si $y \notin cl(A)$ entonces $y \in Z$; de donde se infiere que $y \in \cup_{x\in E} R_x$, por lo que $y \notin X - cl(R_x)$ para algún $x \in E$. Por lo tanto, $y \notin \cap\mathcal{U}$, lo cual es una contradicción. □

En los últimos teoremas que presentamos en esta sección se demuestra que en espacios regulares el $\pi\chi(X)^{c(X)}$ es una cota superior del peso y la densidad.

PROPOSICIÓN 2.32. *Sea X un espacio T_3. Entonces*

$$nw(X) \leq 2^{s(X)}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $s(X) = \kappa$. De la proposición 2.29 existe un subconjunto S de X con $|S| \leq 2^\kappa$ y $X = \cup\{cl(A) : A \subseteq S, |A| \leq \kappa\}$. Entonces $\mathcal{N} = \{cl(N) : N \subseteq S, |N| \leq \kappa\}$ es una red de cardinalidad $\leq 2^\kappa$. Para ver esto sea $p \in X$ y R un conjunto abierto tal que $p \in R$. Sea V un abierto tal que $p \in V \subseteq cl(V) \subseteq R$, sea A un subconjunto de S con $p \in cl(A)$ y $|A| \leq \kappa$ y $N = A \cap V$. Entonces $cl(N) \in \mathcal{N}$ y $p \in cl(N) \subseteq R$. □

TEOREMA 2.33. *Sean S un conjunto denso en X. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones.*
i) $d(X) \leq d(S) \leq d(X)t(X)$;
ii) $\pi w(S) \leq \pi w(X)$;
iii) $\pi\chi(p, S) \leq \pi\chi(p, X)$, *para cada* $p \in S$.

DEMOSTRACIÓN: i) Sea $D \subseteq X$ tal que $cl(D) = X$ y $|D| \leq d(X)$. Para cada $d \in D$, $d \in cl(S)$, de donde podemos asegurar que existe $A_d \subseteq S$ tal que $d \in cl(A_d)$ y $|A_d| \leq t(d, X)$. Sea $S_0 = \cup_{d \in D} A_d$. Es claro que $S_0 \subseteq S$ y además como $cl(S) = X$, $U \cap S \neq \emptyset$ para todo conjunto abierto U de X. Como $S_0 \subseteq S$, $(U \cap S) \cap S_0 = U \cap S_0$. Además, como $cl(D) = X$, $U \cap D \neq \emptyset$. Sea $d' \in U \cap D$. Como $d' \in cl(A_{d'})$, implica que $U \cap A_{d'} \neq \phi$, de donde se sigue que $U \cap S_0 \neq \emptyset$ y por lo tanto $cl(S_0) = S$. Lo cual nos da que

$$d(S) \leq |S_0| \leq \sum_{d \in D} |A_d| \leq \sum_{d \in D} t(p, X) \leq |D|\, t(X) \leq d(X)t(X).$$

ii) Sea $\mathcal{U}$ una $\pi - base$ de X. Entonces, $U \cap S \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}$. Si $\mathcal{U}' = \{U \cap S : U \in \mathcal{U}\}$, entonces $\mathcal{U}'$ es una $\pi - base$ de S, de donde concluimos que $\pi w(S) \leq \pi w(X)$.

iii) Razonando en forma analoga al inciso (ii) obtenemos el resultado. □

PROPOSICIÓN 2.34. *Sea X un espacio topológico con $c(X) = \kappa$ y sea $\mathcal{V}$ una familia de conjuntos abiertos en X. Entonces existe una subfamilia $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ tal que $|\mathcal{W}| \leq \kappa$ y $\cup\mathcal{V} \subseteq cl(\cup\mathcal{W})$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{G}$ la familia de conjuntos abiertos en X que son subconjuntos de algun elemento de $\mathcal{V}$. Aplicando el Lema de Zorn obtenemos una familia maximal celular $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$. Entonces $|\mathcal{G}'| \leq c(X) = \kappa$ y $\cup\mathcal{V} \subseteq cl(\cup\mathcal{G}')$ por la maximalidad de $\mathcal{G}'$. Utilizando $\mathcal{G}'$ obtenemos el resultado deseado. □

TEOREMA 2.35. *(Efimov) Sea X un espacio topológico. Entonces*

$$|RO(X)| \leq \pi w(X)^{c(X)}$$

DEMOSTRACIÓN: Sean $c(X) = \kappa$ y $\mathcal{V}$ una π-base para X con $|\mathcal{V}| \leq \pi w(X)$. Sea $\mathcal{G} = \{int(cl(G)) : G$ es la unión de a lo más κ elementos de $\mathcal{V}\}$. Es suficiente probar que $RO(X) \subseteq \mathcal{G}$, de donde $|RO(X)| \leq \pi w(X)^{c(X)}$. Sea R un conjunto abierto regular. Ahora sea $\mathcal{V}_R = \{V \in \mathcal{V} : V \subseteq R\}$. Por la proposición 2.34 existe una subfamilia $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}_R$ con $|\mathcal{W}| \leq \kappa$ y $\cup\mathcal{V}_R \subseteq cl(\cup\mathcal{W})$. Sea $G = \cup\mathcal{W}$. Ahora, como R es abierto y $\mathcal{V}$ es una π-base para X se sigue que $R \subseteq cl(\cup\mathcal{V}_R)$. De donde $cl(R) = cl(G)$ y por lo tanto $R = int(cl(G))$. Con lo cual obtenemos el resultado deseado. □

TEOREMA 2.36. *Sea X un espacio regular. Entonces*

$$d(X) \leq \pi\chi(X)^{c(X)}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $c(X) = \kappa$. Para cada $p \in X$ elijamos una $\pi-$base $\mathcal{V}_p$ para p con $|\mathcal{V}_p| \leq \pi\chi(X)$. Construiremos una sucesión $\{A_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ de subconjuntos de X y una sucesión $\{\mathcal{V}_\alpha : 0 < \alpha < \kappa^+\}$ de familias de conjuntos abiertos en X tales que
i) $|A_\alpha| \leq \pi\chi(X)^\kappa$ para $0 \leq \alpha < \kappa^+$

ii) $\mathcal{V}_\alpha = \{V \in \mathcal{V}_p \colon p \in \cup_{\beta<\alpha} A_\beta\}$ para $0 < \alpha < \kappa^+$;
iii) Si W es la union de a lo mas κ elementos de $\mathcal{V}_\alpha$ y $cl(W) \neq X$ entonces $A_\alpha - cl(W) \neq \emptyset$.

Construcción: Para $\alpha = 0$. Sea $p \in X$ y $A_0 = \{p\}$.

Para $\alpha = 1$, $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_p$. Para cada W, unión de a lo más κ elementos de $\mathcal{V}_1$, como $X \neq cl(W)$, sea $p_W \in X - cl(W)$, y A_1 el conjunto de puntos así elegidos. Observemos que $|A_1| \leq |\mathcal{P}_\kappa(\mathcal{V}_1)| \leq |\mathcal{V}_1|^\kappa \leq \pi(X)^\kappa$.

Supongamos que ya construimos A_β, $\mathcal{V}_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Por (ii) tenemos definido $\mathcal{V}_\alpha$. Ahora para cada W, unión de a lo más κ elementos de $\mathcal{V}_\alpha$, tal que $X \neq cl(W)$, sea $p_W \in X - cl(W)$ y sea A_α el conjunto de puntos así elegidos.

Observemos que

$$|\mathcal{V}_\alpha| = \left|\cup_{p\in\cup_{\beta<\alpha} A_\alpha} \mathcal{V}_p\right| \leq \sum_{p\in\cup_{\beta<\alpha} A_\beta} |\mathcal{V}_p| \leq \sum_{p\in\cup_{\beta<\alpha} A_\beta} \pi\chi(X) \leq (\pi\chi(X))^\kappa$$

de donde

$$|A_\alpha| \leq |\mathcal{P}_\kappa(\mathcal{V}_\alpha)| \leq |\mathcal{V}_\alpha|^\kappa \leq \pi(X)^\kappa,$$

y (iii) se satisface por construcción con lo que terminamos la construcción.

Sea $S = \cup_{\alpha<\kappa^+} A_\alpha$, entonces $|S| \leq \pi\chi(x)^\kappa$. Si $cl(S) = X$ obtenemos el resultado deseado.

Supongamos que $cl(S) \neq X$ y sea R un conjunto abierto en X con $cl(R) \cap S = \emptyset$. Sea $\mathcal{G} = \{V \in \mathcal{V}_p : p \in S \text{ y } V \cap R = \emptyset\}$, y sea $G = \cup\mathcal{G}$. Se sigue que $S \subseteq cl(G)$ y $cl(G) \cap R = \emptyset$. Por la propocisión 2.34 existe una subfamilia $\mathcal{W} \subset \mathcal{G}$ con $|\mathcal{W}| \leq \kappa$ tal que $G \subseteq cl(\cup\mathcal{W})$. Sea $W = \cup\mathcal{W}$. Notemos que $S \subseteq cl(W)$ y $cl(W) \cap R = \emptyset$. Elijamos $\alpha < \kappa^+$ tal que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}_\alpha$. Por el inciso (iii) $A_\alpha - cl(W) \neq \emptyset$ que es una contradicción a que $S \subseteq cl(W)$. □

TEOREMA 2.37. *Sea X un espacio regular. Entonces*

$$w(X) \leq |RO(X)| \leq \pi\chi(X)^{c(X)}.$$

DEMOSTRACIÓN: i) Aplicando el hecho de que $RO(X)$ es una base para X, y los teoremas 2.19, 2.35 y 2.36 obtenemos el resultado deseado. □

2. Funciones Cardinales en $\mathbf{C}_p(X)$

En esta sección calcularemos algunas de las funciones cardinales en espacios de funciones continuas, en términos de funciones cardinales aplicadas a los espacios dominio y codominio. Nos centramos en resultados que nos serán útiles en los capítulos posteriores. Todos los espacios considerados en esta sección son Tychonoff.

Los resultados presentados en esta sección los podemos encontrar en el libro de Arhangel'skiĭ [**2**].

TEOREMA 2.38. *Sean X, Y espacios topológicos. Entonces*

$$w(C_p(X,Y)) \leq |X| \cdot w(Y) \text{ y } \chi(C_p(X,Y)) \leq |X| \cdot \chi(Y)$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{B}$ una base de Y tal que $|\mathcal{B}| \leq w(Y)$. Entonces, dado que

$$\mathcal{W} = \{W(x_1, ..., x_n; B_1, ..., B_n : n \in \omega, \{x_1, ..., x_n\} \subseteq X \text{ y } \{B_1, ..., B_n\} \subseteq \mathcal{B}\}$$

es una base para $C_p(X,Y)$ y

$$|\mathcal{W}| \leq |\{F \subseteq X : |F| < \omega\}| \cdot |\{\mathcal{B}_f \subseteq \mathcal{B} : |\mathcal{B}_f| < \omega\}| \leq |X| \cdot w(Y),$$

se tiene que

$$w(C_p(X,Y)) \leq |X| \cdot w(Y).$$

Ahora consideremos $f \in C_p(X,Y)$ y una base local $\mathcal{B}_Y(y)$ para y con $|\mathcal{B}_Y(y)| = \chi(y,Y)$. Entonces $\mathcal{W}' = \{W(x_1,...,x_n;B_1,...,B_n) : n \in \omega,\ \{x_1,...,x_n\} \subseteq X$ y $B_i \in \mathcal{B}_Y(f(x_i))$ para cada $i = 1,...,n\}$ es una base local para f y

$$|\mathcal{W}'| \leq |\{F \subseteq X : F \text{ es finito}\}| \cdot |\{\mathcal{F} \subseteq \cup_{x\in X}\mathcal{B}_Y(f(x)) : |\mathcal{F}| < \omega\}|.$$

Por lo tanto $\chi(f, C_p(X,Y)) \leq |X| \cdot \chi(Y)$ de donde

$$\chi(C_p(X,Y)) \leq |X| \cdot \chi(Y).$$

□

TEOREMA 2.39. *Sea X un espacio topológico y X infinito. Entonces*

$$|X| = w(C_p(X)) = \chi(C_p(X))$$

DEMOSTRACIÓN: De 2.19 y 2.38 tenemos que

$$\chi(C_p(X)) \leq w(C_p(X)) \leq |X| \cdot w(\mathbf{R}) = |X| \cdot \omega = |X|,$$

entonces es suficiente demostrar que $|X| \leq \chi(C_p(X))$. Supongamos que $\chi(C_p(X)) < |X|$ y consideremos $\mathcal{B}(\overline{0})$ una base local de $\overline{0}$ en $C_p(X)$ con $|\mathcal{B}(\overline{0})| < |X|$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los elementos de $\mathcal{B}(\overline{0})$ son de la forma $W(\overline{0}, x_1,...,x_n;\varepsilon)$ con $\{x_1,...x_n\} \subseteq X$ y $\varepsilon > 0$. Para cada $W(\overline{0}, x_1,...,x_n,\varepsilon) \in \mathcal{B}(\overline{0})$ sea $K(W) = \{x_1,...,x_n\}$ y definamos $Y = \cup\{K(W) : W \in \mathcal{B}(\overline{0})\}$. Entonces $|Y| < |X|$ y por lo tanto se puede elegir $x^* \in X - Y$ y considerar la vecindad de $\overline{0}$ en $C_p(X)$, $W(\overline{0}, x^*, 1)$. Sea $W = W(0, x_1,...,x_n,\varepsilon)$ un elemento arbitrario de $\mathcal{B}(\overline{0})$; entonces $x^* \neq x_i$ para todo $i = 1,...,n$ como X es Tychonoff existe una función $g \in C_p(X)$ tal que $g(x_i) = 0$ para todo $i = 1,...n$ y $g(x^*) = 1$. Por lo tanto $g \in W - W(\overline{0}, x^*, 1)$ de donde $W \nsubseteq W(\overline{0}, x^*, 1)$ lo cual es una contradicción al hecho que $\mathcal{B}(\overline{0})$ es una base local de $\overline{0}$ en $C_p(X)$. Por lo tanto $|X| \leq \chi(C_p(X))$. □

TEOREMA 2.40. *Sea X un espacio topológico. Entonces*

$$nw(X) = nw(C_p(X))$$

DEMOSTRACIÓN: i) $nw(C_p(X)) \leq nw(X)$ Sea $\mathcal{N}$ una red en X con $|\mathcal{N}| \leq nw(X)$ y $\mathcal{B}$ una base numerable en $\mathbf{R}$. Para cada par de familias $S_1,...,S_k \in \mathcal{N}$ y $U_1,...,U_k \in \mathcal{B}$ fijemos

$$W(S_1,...S_k, U_1,...,U_k) = \{f \in C_p(X) : f(S_i) \subset U_i, i = 1,...,k).$$

Sea

$$\mathcal{W} = \{W(S_1,...,S_k, U_1,...,U_k) : k \in \omega,\ S_1,..S_k, \in \mathcal{N},\ U_1,...,U_k \in \mathcal{B}\}$$

Entonces

$$|\mathcal{W}| \leq |\mathcal{P}_{<\omega}(\mathcal{N})|\,|\mathcal{P}_{<\omega}(\mathcal{B})| = |\mathcal{N}|.\omega = |\mathcal{N}|.$$

Es suficiente demostrar que $\mathcal{W}$ es una red en $C_p(X)$. Sea $f \in C_p(X)$ y $W(f, x_1,...,x_k,\varepsilon)$ una vecindad de f en $C_p(X)$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Elijamos $U_1,...,U_k \in \mathcal{B}$ tales que $f(x_i) \in U_i \subset (f(x_i) - \varepsilon,\ f(x_i) + \varepsilon)$ para $i = 1,..,k$. Como f es continua, existen $S_1,...,S_k \in \mathcal{N}$ tales que $x_i \in S_i$ y $f(S_i) \subset U_i$ para $i = 1,...,k$. Ahora $f \in W(S_1,..,S_k, U_1,...,U_k)$ ya que $f(S_i) \subset U_i$. Sea $g \in W(S_1,...S_k.U_1,...,U_k)$, como $x_i \in S_i$, $g(x_i) \in U_i$

de donde $|g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ para $i = 1, ..., k$. De donde $g \in W(f, x_1, ..., x_k, \varepsilon)$. Además $|\mathcal{W}| \leq |\mathcal{N}|$, por lo cual

$$nw(C_p(X)) \leq nw(X).$$

ii) $nw(X) \leq nw(C_p(X))$

Del teorema 1.15 se sigue que $X \subset C_pC_p(X)$, aunado a la desigualdad anterior obtenemos que

$$nw(X) \leq nw(C_pC_p(X) \leq nw(C_p(X)),$$

de donde $nw(X) = nw(C_p(X))$. □

TEOREMA 2.41. *Sea X un espacio topológico. Entonces*

$$d(X) = iw(C_p(X)) = \psi(C_p(X).$$

DEMOSTRACIÓN: i) $\psi(C_p(X)) \leq iw(C_p(X))$

Para probar esto haremos ver que $iw(C_p(X))$ es una cota superior del conjunto $\{\psi(f, C_p(X)) : f \in C_p(X)\}$. Para probarlo sean Y un espacio topológico, $g : C_p(X) \to Y$ biyectiva y continua y $\mathcal{B}$ una base de Y tal que $|\mathcal{B}| \leq iw(C_p(X))$. Veremos que para $f \in C_p(X)$,

$$\mathcal{R} = \{g^{-1}(B) : f \in g^{-1}(B) \text{ y} B \in \mathcal{B}\}$$

es una pseudobase para f en $C_p(X)$ y, por lo tanto

$$\psi(f, C_p(X)) \leq |\mathcal{R}| \leq |\mathcal{B}| \leq iw(C_p(X)).$$

Primero obsérvese que

$$\cap\{B \in \mathcal{B} : g(f) \in B\} = \{g(f)\}.$$

Entonces si $h \in \cap\mathcal{R}$ obtenemos que $g(h) \in B$ para todo $B \in \mathcal{B}$ con $f \in g^{-1}(B)$ lo cual implica que $g(h) = g(f)$ y como g es biyectiva entonces $h = f$, es decir, $\cap\mathcal{R} = \{f\}$ y por lo tanto $\mathcal{R}$ es una pseudobase para f en $C_p(X)$.

ii) $iw(C_p(X)) \leq d(X)$.

Sean $\tau = d(X)$ y $Y \subseteq X$ denso en X con $|Y| \leq \tau$. La función restricción

$$\pi_Y : C_p(X) \to Z \subseteq C_p(Y) \text{ con } \pi_Y(f) = f_Z$$

es una condensación de $C_p(X)$ sobre $Z = \pi_Y(C_p(X)) \subseteq C_p(Y)$, y por lo tanto

$$w(Z) \leq w(C_p(Y)) = |Y| \leq \tau$$

y esto implica que

$$iw(C_p(X)) \leq w(Z) \leq \tau = d(X).$$

iii) $d(X) \leq \psi(C_p(X))$

Sea $\mathcal{B}$ una pseudobase formada por vecindades básicas canónicas de $\overline{0}$ en $C_p(X)$ con $|\mathcal{B}| \leq \psi(C_p(X))$. Para cada $W(\overline{0}, x_1, ..., .x_k, \varepsilon) \in \mathcal{B}$ sea $K(W) = \{x_1, ..., x_k\}$ y defínase

$$Y = \cup\{K(W) : W \in \mathcal{B}\} \subseteq X.$$

Entonces $|Y| \leq |\mathcal{B}|$ y $cl(Y) = X$. En efecto

$$|Y| \leq \sum_{W \in \mathcal{B}} K(W) \leq |\mathcal{B}| \cdot \omega = |\mathcal{B}|$$

y si existiera $x^* \in X - cl(Y)$ entonces existiría $g \in C_p(X)$ tal que $g(x^*) = 1$ y $g(cl(Y)) = \{\overline{0}\}$. Entonces para todo $x \in Y$ se tendría que $g(x) - \overline{0}(x) = 0$ y esto implicaría que $g \in \cap\mathcal{B}$, pero $g \neq \overline{0}$ lo cual sería una contradicción. Por lo tanto $cl(Y) = X$. De donde se sigue que

$$d(X) \leq |Y| \leq |\mathcal{B}| \leq \psi(C_p(X)).$$

Ahora (i), (ii) y (iii) prueban el teorema. □

TEOREMA 2.42. *Sea X un espacio topológico. Entonces*

$$iw(X) = d(C_p(X)).$$

i) $iw(X) \leq d(C_p(X))$.

Como $X \subset C_p(C_p(X))$ entonces

$$iw(X) \leq iw(C_p(C_p(X)) = d(C_p(X)).$$

ii) $d(C_p(X)) \leq iw(X)$.

Sea Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ una condensación tal que $w(Y) \leq iw(X)$. Entonces de los teoremas 2.40 y 2.5 tenemos que $nw(C_p(Y)) = nw(Y) \leq w(Y)$ y del teorema 1.19 tenemos que $nw(C_p(Y)) = nw(f^\sharp(C_p(Y))$ donde $f^\sharp : R^Y \to R^X$ está dada por $f^\sharp(h) = hof$, entonces se tiene que $nw(f^\sharp(C_p(Y)) \leq w(Y)$. Una vez mas del teorema 1.19, como f es una condensación si y solo si $f^\sharp(C_p(Y))$ es denso en $C_p(X)$ se sigue que

$$d(C_p(X)) \leq d(f^\sharp(C_p(Y)) \leq nw(f^\sharp(C_p(Y)) \leq w(Y) \leq iw(X)$$

de donde $d(C_p(X)) \leq iw(X)$. Ahora de (i) y (ii) se sigue el teorema. □

TEOREMA 2.43. *(Asanov)(Ver [2]) Sea X un espacio topológico. Entonces*

$$t(X) \leq l(C_p(X)).$$

DEMOSTRACIÓN: Sean $\tau = l(C_p(X))$ y $x \in X$. Sea $A \subset X$ y supongamos que $x \in cl(A)$. Como $x \in cl(A)$ entonces $U \cap A \neq \emptyset$ para todo abierto U tal que $x \in U$. Además es claro que $x \in cl(A \cap U)$.

Sean $A' = A \cap U$ y $\Phi = e_x^{-1}(\{1\})$ donde $e_x : C_p(X) \to R$ es la función evaluación en x. Entonces Φ es cerrado en $C_p(X)$ y $\Phi = \{f \in C_p(X) : f(x) = 1\}$. Como $l(C_p(X)) = \tau$ y Φ es cerrado en $C_p(X)$ se sigue que $l(\Phi) \leq \tau$. Ahora para cada $y \in A'$ sea $V_y = \{g \in C_p(X) : g(y) > 0\}$.

Veremos que $\Phi \subset \cup_{y \in A'} V_y$. Sean $f \in \Phi$ y $\varepsilon > 0$ tal que $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \subset R^+$, como f es continua en x y $f(x) = 1$ se sigue que existe V abierto en X tal que $x \in V$ y $f(V) \subseteq (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Como $x \in cl(A')$ y $x \in V$ entonces existe $y \in A' \cap V$. Por lo tanto $f(y) \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \subseteq R^+$, es decir, $f \in V_y$ y por consiguiente $\Phi \subseteq \cup_{y \in A'} V_y$. Ahora como $l(\Phi) \leq \tau$ se tiene que existe $B \subseteq A'$, $|B| \leq \tau$ y $\Phi \subseteq \cup_{y \in B} V_y$.

Ahora probaremos que $x \in cl(B)$. Supongamos que $x \notin cl(B)$ entonces existe un abierto W en X tal que $x \in W$ y $W \cap B = \emptyset$ y sea $U' = U \cap W$. Como X es Tychonoff existe $f \in C_p(X)$ tal que $f(x) = 1$ y $f(X - U') = \{0\}$. De donde $f \in \Phi \subseteq \cup_{y \in B} V_y$, asi que $f \in V_y$ para algún $y \in B$, lo cual implica que $f(y) > 0$ por lo cual $y \in U'$.

Por lo tanto $y \in U' \cap B \subseteq W \cap B$ lo cual es una contradicción. De donde se sigue que $x \in cl(B)$. Por lo cual tenemos que $t(x, X) \leq \tau$, es decir $t(X) \leq l(C_p(X))$. □

TEOREMA 2.44. *(Arkhangel'skiĭ-Pytkeev). Sea X un espacio topológico. Entonces*

$$t(C_p(X)) \leq l(X).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $l(X) \leq \tau$. Sean $f \in C_p(X)$ y $A \subset C_p(X)$ tales que $f \in cl(A)$. Para cada $x \in X$ existe $g_x \in A$ tal que $| g_x(x) - f(x) |< \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$. Como g_x y f son continuas existe un abierto en X, V_x tal que $x \in V_x$ y $|g_x(y) - f(y)| < \varepsilon$ para todo $y \in V_x$.

Consideremos la familia $\mathcal{V} = \{V_x : x \in X\}$ la cual resulta ser una cubierta abierta de X, como $l(X) \leq \tau$ existe $Y \subset X$ con $|Y| \leq \tau$ tal que $\mathcal{V}' = \{V_x : x \in Y\}$ es una cubierta abierta de X.

Sea $B = \{g_x : V_x \in \mathcal{V}'\}$. Es claro que $B \subset A$, $|B| \leq \tau$ y $f \in cl(B)$. De donde $t(x, X) \leq \tau$ y por lo tanto $t(X) \leq \tau$ □

PROPOSICIÓN 2.45. *Sea X un espacio topológico. Si X contiene una familia celular $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in M\}$ con $|M| = \tau$. Entonces $C_p(X)$ contiene un subespacio homeomorfo al espacio compacto $A(\tau)$.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $\alpha \in M$ elijamos $f_\alpha \in C_p(X)$ tal que $1 \in f_\alpha(U_\alpha)$ y $f_\alpha(X - U_\alpha) = \{0\}$. Sea $B = \{f_\alpha : \alpha \in M\}$. Como $1 \in f_\alpha(U_\alpha)$ existe $x_\alpha \in U_\alpha$ tal que $f_\alpha(x_\alpha) = 1$. Consideremos el conjunto abierto $W = W(f_\alpha, x_\alpha, 1/2)$, entonces $W \cap B = \{f_\alpha\}$ por lo cual B es un subespacio discreto de $C_p(X)$. Sea $g(x) = 0$ para todo $x \in X$. Consideremos el conjunto $F = B \cup \{g\} \subset C_p(X)$, y observemos que si tomamos el conjunto abierto $W' = W'(g, y_1, y_2, ...y_k, \varepsilon)$, entonces $|\{\alpha \in M : U_\alpha \cap \{y_1, ..., y_k\} \neq \emptyset\}| < \omega$. De donde $|\{\alpha \in M : f_\alpha \notin W\}| < \omega$. Por lo tanto F es homeomorfo a $A(\tau)$. □

PROPOSICIÓN 2.46. *Sea X un espacio topológico. Entonces*

$$c(X) \leq sup\{w(F) : F \subset C_p(X) \text{ y } F \text{ compacto}\}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $c(X) = \tau$ y λ =sup$\{w(F) : F \subset C_p(X)$ y F compacto$\}$. Sea $\mathcal{V}$ una familia celular en X con $|\mathcal{V}| = \mu$. Por la proposición 2.45, $C_p(X)$ contiene un subconjunto homeomorfo a $A(\mu)$ y como $w(A(\mu)) = \mu$ se sigue que $\tau \leq \lambda$. □

3. Funciones Cardinales y Funciones Continuas

Los resultados presentados en esta sección los podemos encontrar en el libro de Engelking [17].

PROPOSICIÓN 2.47. *Sean, X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Entonces*
i) $c(Y) \leq c(X)$
ii) $s(Y) \leq s(X)$

DEMOSTRACIÓN: i) Sea $\mathcal{V}$ una familia celular en Y. Como f es continua se sigue que $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en X para cada $V \in \mathcal{V}$. Consideremos la familia $\mathcal{U} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}\}$. Es claro que $|\mathcal{V}| \leq |\mathcal{U}|$. Además $\mathcal{U}$ es una familia celular en X ya que si existierán $V, V' \in \mathcal{V}$ con $V \neq V'$ tal que $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(V') \neq \emptyset$, existiría $x \in f^{-1}(V) \cap f^{-1}(V')$. Tendríamos entonces que $f(x) \in V$ y $f(x) \in V'$, que es una contradicción. Por lo tanto $|\mathcal{U}| \leq c(X)$, de donde se sigue que $c(Y) \leq c(X)$.

ii) Sea B un conjunto discreto en Y. Como f es una función sobreyectiva, para cada $y \in B$ elijamos un unico $x_y \in X$ tal que $f(x_y) = y$. Consideremos el conjunto $A = \{x_y \in X : y \in B\}$, es claro que $|B| \leq |A|$. Como B es un conjunto discreto en Y, para cada $y \in B$ existe un conjunto abierto V_y en Y tal que $V_y \cap B = \{y\}$. Y como f es una función continua, para cada $x_y \in A$ existe un conjunto abierto U_{x_y} en X tal que $x_y \in U_{x_y}$ y $f(U_{x_y}) \subseteq V_y$.

Ahora es claro que para cada $x_y \in A$ se satisface que $U_{x_y} \cap A = \{x_y\}$, por lo que se sigue que A es un conjunto discreto en X. Lo que implica que $|A| \leq s(X)$. De donde se sigue que $s(Y) \leq s(X)$. □

PROPOSICIÓN 2.48. *Sean, X y Y espacios topológicos con X un espacio T_1, y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Entonces $e(Y) \leq e(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea B un conjunto cerrado y discreto en Y. Como f es una función sobreyectiva, para cada $y \in B$ elijamos un unico $x_y \in X$ tal que $f(x_y) = y$. Sea $A = \{x_y \in X : y\}$, por el inciso (ii) del lema 2.47, tenemos que A es un conjunto discreto en X, aplicando el hecho de que X es un espacio T_1, tenemos que $x_y = clx_y$ para cada $x_y \in A$ de donde $clA = cl(\cup\{x_y\})_{y\in B} = \cup_{y\in B} cl\{x\} = \cup_{y\in B}\{x\} = A$ por lo tanto tenemos que A cerrado y discreto en X, por lo cual $|A| \leq e(X)$, lo cual nos permite concluir que $e(Y) \leq e(X)$. □

TEOREMA 2.49. *Sean, X,Y espacios topológicos con Y un espacio compacto y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Entonces $w(Y) \leq w(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Es suficiente observar que dada una base $\mathcal{U}$ de X, entonces la familia $\mathcal{N} = \{f(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es una red en Y, de donde obtenemos que $nw(Y) \leq w(X)$, y como Y es compacto se sigue que $w(Y) \leq w(X)$. (Ver 3.7) □

4. Funciones Cardinales en Productos

Veremos el comportamiento de algunas funciones cardinales en el producto de espacios topologicos.

DEFINICIÓN 2.50. *Sea $X = \Pi_{\alpha\in M} X_\alpha$. Diremos que un conjunto $U \subset X$ es un abierto canónico de X, si $U = \Pi_{\alpha\in M} U_\alpha$ en donde U_α es un abierto no vacío en X_α para cada $\alpha \in M$, y el conjunto $K(U) = \{\alpha \in M : U_\alpha \neq X_\alpha\}$ es finito.*

TEOREMA 2.51. *Si $w(X_s) \leq \mu$ para todo $s \in S$ y $|S| \leq \mu$. Entonces $w(\Pi_{s\in S} X_s) \leq \mu$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea B_s una base de X_s con $|B_s| \leq \mu$. Como la familia de conjuntos $\{\Pi_{s\in S} W_s : W_s \in B_s$ y $W_s \neq X_s$ para un número finito de $s \in S\}$ es una base de $\Pi_{s\in S} X_s$ se sigue el resultado deseado. □

TEOREMA 2.52. *I^μ es universal con respecto a la clase de espacios topológicos Tychonoff de peso $\leq \mu$.*

DEMOSTRACIÓN: Como I es un espacio de Tychonoff es claro que I^μ es un espacio de Tychonoff y por el teorema 2.51 obtenemos que $w(I^\mu) \leq \mu$.

Ahora veremos que todo espacio Tychonoff X de peso $\leq \mu$ es encajable en I^μ.

Como X es un espacio de Tychonoff tenemos que la familia de conjuntos conulos es una base de X y como $w(X) = \mu$ podemos elegir una base de conulos $\mathcal{V} =$

$\{U_s\}_{s\in S}$ de X con $|S| = \mu$. Para cada $s \in S$ consideremos una función continua $f : X \to I$ tal que $U_s = f_s^{-1}((0,1))$. Resulta que la familia $\mathcal{F} = \{f_s\}_{s\in S}$ separa puntos y puntos de cerrados. Como X es en particular T_0, se sigue del teorema 1.12 de la diagonal que $\Delta_{s\in S} f_s$ es un encaje de X en I^μ. □

Los siguientes corolarios son consecuencia de los teoremas 2.52 y 1.40.

COROLARIO 2.53. *I^μ es universal para todo espacio topológico compacto de peso μ.*

COROLARIO 2.54. *Un espacio topológico X es Tychonoff si y sólo si existe un espacio compacto Hausdorff Y y un encaje f de X en Y.*

Sea $F = \{0,1\}$ con la topología formada por $\emptyset$, $\{0\}$ y F.

DEFINICIÓN 2.55. *El cubo de Alexandroff de peso $\mu \geq \omega$ es el espacio $F^\mu = \Pi_{s\in S} F_s$ con $F_s = F$ para todo $s \in S$ y $|S| = \mu$. Es claro que este es un espacio T_0.*

Aplicando el teorema de la diagonal y el hecho de que para todo conjunto abierto U de un espacio T_0 X, la función $f : X \to F$ dada por

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in U \text{ y } f(x) = 1 \text{ si } x \in X - U$$

define una función continua, tenemos la siguiente afirmación.

TEOREMA 2.56. *Sea $\mu \geq \omega$. El cubo de Alexandroff de peso μ es universal para todo espacio T_0 de peso menor o igual a μ.*

LEMA 2.57. *Sea T un conjunto tal que $|T| \leq 2^\kappa$. Entonces existe una cubierta $\mathcal{A}$ del conjunto T, tal que se satisfacen las siguientes condiciones:*
i) $|\mathcal{A}| \leq \kappa$;
ii) si $t_1, ..., t_n$ son distintos elementos de T, existe una subfamilia ajena $\{A_1, ..., A_n\}$ de $\mathcal{A}$ tal que $t_i \in A_i$, para $1 \leq i \leq n$.

DEMOSTRACIÓN: Es suficiente construir tal cubierta en el Cubo de Cantor D^κ, que por el teorema 1.40 (Tychonoff) es un espacio compacto. Como D^κ es T_2 concluimos que cualquier base de D^κ satisface el inciso (ii). Como D^κ tiene una base de cardinalidad κ, también se satisface el inciso (i). (Para justificar la existencia de dicha base ver el ejemplo D^κ en la sección 5 de este capitulo). □

TEOREMA 2.58. *(Hewitt-Marczewski-Pondiczery (H-M-P)) Sea $X = \Pi_{t\in T} X_t$ con $|T| \leq 2^\kappa$ y tal que $d(X_t) \leq \kappa$ para todo $t \in T$. Entonces $d(X) \leq \kappa$. En particular, el producto de a lo más 2^ω espacios separables es separable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{A}$ una cubierta de T que satisfaga las condiciones del lema anterior. Para cada $t \in T$, sea $\{x(t,\alpha) : 0 \leq \alpha < \kappa\}$ un subconjunto denso en X_t. Para cada $n < \omega$, para cada $n-$nupla ordenada $\Gamma = (A_1, ..., A_n)$ de elementos ajenos en $\mathcal{A}$, y para cada $n-$nupla ordenada $\Delta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ de ordinales $< \kappa$, definamos un elemento de X como sigue:

$$f(n, \Gamma, \Delta)(t) = x(t, \beta_i) \text{ si } t \in A_i, \text{ y } f(n, \Gamma, \Delta)(t) = x(t, 0) \text{ si } t \notin \cup_{i=1}^n A_i.$$

Consideremos el conjunto S de todos los elementos de X definidos de esta forma. Claramente $|S| \leq \kappa$. Veremos que S es denso en X. Para esto, sea $V = \Pi_{t\in T} V_t$ un abierto canónico en X con coordenadas restringidas $t_1 < t_2 <, ..., < t_n$, y sea $\Gamma = (A_1, ..., A_n)$ en donde $\{A_1, ..., A_n\}$, es una familia de conjuntos ajenos en $\mathcal{A}$ tal que $t_i \in A_i$ para $1 \le i \le n$. Para $1 \le i \le n$, sea $x(t_i, \beta_i) \in V_{t_i}$ y $\Delta = (\beta_1, ..., \beta_n)$. Entonces $f(n, \Gamma, \Delta) \in S \cap V$. □

COROLARIO 2.59. *Sea* $X = \Pi_{t \in T} X_t$, *con* $d(X_t) \le \kappa$ *para cualquier* $t \in T$. *Entonces* $c(X) \le \kappa$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que la afirmación del corolario es falsa.

Sea $\{V_\alpha : 0 \le \alpha < \kappa^+\}$ una familia celular en X. Supongamos que cada V_α es un conjunto abierto canónico, y sea F_α el conjunto finito de coordenadas restringidas de V_α. Sea $A = \cup_{\alpha < \kappa^+} F_\alpha$ y sea $Y = \Pi_{t \in A} X_t$. Entonces $|A| \le 2^\kappa$ y $d(Y) \le 2^\kappa$. Ahora si V_n^* es la proyección de V_n sobre Y, entonces la familia $\{V_n^* : 0 \le \alpha < \kappa^+\}$ es una familia celular en Y de cardinalidad κ^+ lo cual es una contradicción. □

Como una aplicación del teorema de (H-M-P) podemos dar la demostración del teorema de Hausdorff que ya mencionamos en el teorema 1.22.

TEOREMA 2.60. *(Hausdorff)*[24] *Sea* λ *un cardinal infinito y sea* E *un conjunto tal que* $|E| = \lambda$. *Entonces existe una familia independiente* $\mathcal{E}$ *de subconjuntos de* E *tal que* $|\mathcal{E}| = 2^\lambda$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos el cubo de Cantor $X = D^{2^\lambda}$, que por el teorema 2.58 (H-M-P) cumple $d(X) \le \lambda$. Sea $E \subseteq X$, tal que E es denso en X y $|E| = \lambda$. Como E es denso en X,

$$E \cap \pi_\alpha^{-1}(\{0\}) \ne \emptyset \text{ para todo } 0 \le \alpha < 2^\lambda.$$

Consideremos la familia

$$\mathcal{E} = \left\{E \cap \pi_\alpha^{-1}\{(0)\} : 0 \le \alpha < 2^\lambda\right\}.$$

Es claro que $|\mathcal{E}| = 2^\lambda$. Además si

$$E \cap \pi_{\alpha_1}^{-1}(\{0\}), ..., E \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{E}$$

tenemos que

$$E \cap (\cap_{j=1}^{i} \pi_{\alpha_j}^{-1}\{(0)\}) \cap (\cap_{j=i+1}^{n} \pi_{\alpha_j}^{-1}(\{1\})) \ne \emptyset.$$

Por lo tanto, $\mathcal{E}$ es la familia deseada. □

5. Ejemplos

En esta sección calcularemos en espacios típicos algunas de las funciones cardinales definidas en este capítulo. Se podrá apreciar que no es posible mejorar muchas de las relaciones establecidas a lo largo del capítulo.
Iniciaremos esta sección con un lema que nos será de utilidad.

LEMA 2.61. *Sea* $\mathbb{R}$ *con la topología usual. Entonces* $\mathbb{R}$ *es hereditariamente Lindelöf.*

5.1. La recta Euclidiana R. Consideremos $X = \mathbf{R}$ con la topología que esta generada por la familia $\mathcal{C} = \{(a,b) : a, b \in \mathbf{R}\}$. Como es sabido esta topología coincide con la topología generada por la metrica usual: $d(x,y) = |x-y|$. En adelante denotaremos este espacio como $X_{\mathbf{r}}$.
i) Es conocido que $|X_{\mathbf{r}}| = 2^{\omega}$. En efecto podemos asociar a cada número real r una única sucesión de racionales r_n que converge a r, de tal manera que si $r \neq s$ entonces $r_n \neq s_n$.
ii) $w(X_{\mathbf{r}}) = \omega$, ya que la familia $\mathcal{B}$ de intervalos abiertos con centro racional y extremos racionales es una base de X con $|\mathcal{B}| = \omega$.
iii) $d(X_{\mathbf{r}}) = \omega$. Se sigue del hecho de que el conjunto de números racionales $\mathbf{Q}$ es denso en $X_{\mathbf{r}}$ y $|\mathbf{Q}| = \omega$.
iv) $c(X_{\mathbf{r}}) = \omega$. Se sigue del hecho que $c(X_{\mathbf{r}}) \leq d(X_{\mathbf{r}})$.
v) $e(X_{\mathbf{r}}) = s(X_{\mathbf{r}}) = l(X_{\mathbf{r}}) = hl(X_{\mathbf{r}}) = hd(X_{\mathbf{r}}) = \omega$. Se sigue del inciso (ii).
viii) $\chi(X_{\mathbf{r}}) = \psi(X_{\mathbf{r}}) = \omega$. Para verificar esto es suficiente observar que para cada $x \in X_{\mathbf{r}}$, la familia $\mathcal{D} = \{V_{1/n}(x) : n \in \omega\}$ (Donde $V_{1/n}(0)$ es la bola abierta con centro en 0 y radio $1/n$) es una base para x en $X_{\mathbf{r}}$ con $|\mathcal{D}| = \omega$.
ix) Es claro que $|X_{\mathbf{r}}| = 2^{\chi(X_{\mathbf{r}})l(X_{\mathbf{r}})}$. Este ejemplo muestra que es posible obtener las igualdades en el corolario 2.10, teorema 2.14, proposción 2.15, teoremas 2.21, 2.22, 2.24 y 2.26. Una afirmación que contempla este ejemplo como caso particular es la siguiente.

5.2. Espacio Métrico X.

TEOREMA 2.62. *Sea X un espacio métrico y X infinito. Entonces*

i) $w(X) \leq |X|$.
ii) $\psi(X) = t(X) = \pi\chi(X) = \chi(X) = psw(X) = \Delta(X) = \omega$.
iii) $w(X) = nw(X) = \pi w(X) = c(X) = e(X)$.
iv) $O(X) = 2^{w(X)}$.
La demostración de estas afirmaciones se pueden encontrar en **[24]**.

5.3. La Linea de Sorgenfrey $\mathbf{X}_{\mathcal{S}}$. Sea $X = \mathbf{R}$ con la topologia τ generada por la familia $\mathcal{B} = \{[a,b) : a, b \in \mathbf{R}\}$. A (X,τ) lo denotaremos como $X_{\mathcal{S}}$ y es llamado la linea de Sorgenfrey.
i) $|X_{\mathcal{S}}| = 2^{\omega}$.
ii) $w(X_{\mathcal{S}}) = 2^{\omega}$: Es suficiente observar que si $\mathcal{B}'$ es una base de $X_{\mathcal{L}}$, para cada $a \in \mathbf{R}$ podemos elegir un $B_a \in \mathcal{B}'$ tal que $a \in B_a \subset [a, a+1)$. Es claro que la función de $\mathbf{R}$ en $\mathcal{B}'$ definida por $a \to B_a$ es inyectiva. En efecto para cada $a \in \mathbf{R}$, a es el primer elemento de B_a, y un subconjunto de $\mathbf{R}$ no puede tener más de un primer elemento.
iii) $d(X_{\mathcal{S}}) = \omega$. En efecto, A es denso en $X_{\mathbf{r}}$ si sólo si A es denso en $X_{\mathcal{S}}$. Si A no es denso en $X_{\mathcal{S}}$, existen a,$b \in \mathbf{R}$, $a < b$, tales que $A \cap [a,b) = \emptyset$. Por tanto $A \cap (a,b) = \emptyset$ y A tampoco es denso en $X_{\mathbf{r}}$. Ahora si A no es denso en $X_{\mathbf{r}}$, existen a,$b \in \mathbf{R}$, $a < b$, tales que $A \cap (a,b) = \emptyset$. Por tanto $A \cap [(a+b)/2, b) = \emptyset$ y A tampoco es denso $X_{\mathcal{S}}$.
iv) $c(X_{\mathcal{S}}) = \omega$. Se sigue de $c(X_{\mathcal{S}}) \leq d(X_{\mathcal{S}})$
v) $hl(X_{\mathcal{S}}) = \omega$ Esto se sigue del lema 2.62.
vi) $s(X_{\mathcal{S}}) = e(X_{\mathcal{S}}) = l(X_{\mathcal{S}}) = \omega$. Es inmediato del inciso (v).

5.4. El Erizo no metrizable de Cardinalidad ω $\mathbf{X}^*$. Sea X la unión de ω copias ajenas del intervalo cerrado de racionales $[0,1] \cap \mathbf{Q}$. Denotamos la n-esima

copia de $[0,1]\cap \mathbf{Q}$ como $I_n = [0_n, 1_n]$. Demosle a X la topología suma. Ahora consideremos la siguiente relación de equivalencia $\sim$ en X: para $x \in X - \{0_n\}_{n\in\omega}$, $x \sim y$ si solo si $x = y$ y si $x = 0_n$ para algún $n \in \omega$ $x \sim 0_m$ para todo $m \in \omega$. Entonces, si $[X]$ es el conjunto de clases de equivalencia de X bajo $\sim$, definimos $p : X \to [X]$ tal que $p(x) = \widetilde{x}$ donde $\widetilde{x}$ es la clase de equivalencia tal que $x \in \widetilde{x}$. Ahora a $[X]$ le damos la siguiente topología: $A \subseteq [X]$ es abierto si solo si $p^{-1}(A)$ es abierto en X. En adelante nos referiremos a este espacio como el $\aleph_0-$erizo racional que denotaremos como X^*. Resulta que:
i) $|X^*| = \omega$
ii) $\psi(X^*) = \omega$. Esto se sigue del hecho de que la familia $\{B_{1/n}(\widetilde{0})\}_{n\in\omega}$ donde $B_{1/n}$ es la bola abierta que contiene a $\widetilde{0}$ y de radio $1/n$, es una familia tal que $\cap_{n\in\omega} B_{1/n}(\widetilde{0}) = \{\widetilde{0}\}$.
iii) $\chi(\widetilde{0}, X^*) > \omega$. Ya que si $\mathcal{F} = \{C_m\}_{m\in\omega}$ es una familia numerable de abiertos tal que $\cap_{m\in\omega} C_m = \{\widetilde{0}\}$ tenemos lo siguiente: para cada $m \in \omega$ existe $x_m \in \omega$ tal que $0_m \in [0_m, x_m) \subseteq I_m \cap p^{-1}(C_m)$; sea $y_m \in (0_m, x_m)$; entonces si $A = \cup_{m<\omega}[0_m, y_m)$, $p(A)$ es un abierto en X^* cociente tal que para toda $m \in \omega$, $C_m \cap p(A)^c \neq \emptyset$ es decir, $\{C_m\}_{m\in\omega}$ no es base local de $\widetilde{0}$ en X^*.
iv) $w(X^*) > \omega$.
v) $nw(X^*) = \omega$. Para esto es suficiente observar que $|X^*| = \omega$

5.5. El espacio Discreto de Cardinalidad μ $\mathbf{D}(\mu)$. Si consideramos $X = D(\mu)$ se sigue que
$|X| < 2^{l(X)\chi(X)}$.

5.6. X Numerable. Sea X un conjunto numerable y consideramos en él la topologia discreta. Es claro que
a)$|X| = \omega$ y que
b)$O(X) = 2^\omega$, de donde
c)$|X| < O(X)$.
d) Ahora si X lo consideramos con la topología cofinita (los abiertos son de la forma $U = X - F$ con $|F| < \omega$) entonces
d)$|X| = O(X)$.

5.7. Espacios Linealmente Ordenados. Sea X un conjunto con un orden total. Consideremos en X la topología generada por esté orden. En adelante denotaremos esté espacio como $X^{\mathcal{L}}$.

Las siguientes afirmaciones son válidas (Ver **[13]**, **[14]**, **[26]**).
i) $\chi(X^{\mathcal{L}}) \leq c(X^{\mathcal{L}})$.
ii) $hl(X^{\mathcal{L}}) = c(X^{\mathcal{L}})$.
iii) $hd(X^{\mathcal{L}}) = d(X^{\mathcal{L}})$.
iv) $\chi(X^{\mathcal{L}}) = \psi(X^{\mathcal{L}})$.
v) $t(X^{\mathcal{L}}) = \chi(X^{\mathcal{L}})$.
vi) $w(X^{\mathcal{L}}) = nw(X^{\mathcal{L}})$.
vii) $w(X^{\mathcal{L}}) = d(X^{\mathcal{L}}) + g(X^{\mathcal{L}})$ donde $g(X^{\mathcal{L}})$ es el número de saltos de $X^{\mathcal{L}}$.

1) Observemos que del ejemplo 5.4 el seudocaracter del espacio en cuestión es menor que el caracter del espacio.

2) Del ejemplo 5.1 tenemos que el peso del espacio que ahí consideramos es menor que la cardinalidad del espacio.

3) Del ejemplo 5.4 tenemos que la cardinalidad del espacio en cuestión es menor que el peso del espacio.
De (2) y (3) odemos concluir que ni la cardinalidad es cota superior del peso del espacio ni el peso es cota superior de la cardinalidad.

4) Del ejemplo 5.4 tenemos que el peso red del espacio en cuestión es menor que el peso del espacio.
En el siguiente capítulo veremos que estos resultados (Ver teoremas 3.1, 3.5 y 3.7) así como otros son mejorados si suponemos que el espacio que consideramos es compacto.

5) Si consideramos el espacio $X = \beta\omega$, la compactación de Stone-Čech de ω, entonces $\mid X \mid = 2^{2^{d(X)}}$, demostrandose así que se puede obtener la igualdad en el teorema 2.12. (Vease el ejemplo 5.3 en el capítulo 3).

6) Consideremos el espacio $X = [0,1] \times [0,1]$, con la topología del orden lexicografico. Sea $Y = \{(x,0) : x \in [0,1]\} \cup \{(x,1) : x \in [0,1]\}$ con la topología inducida de X.

Se puede demostrar que $i\omega(Y) = \omega(Y) = 2^{\omega}$. (Vease el ejemplo 5.3 de esta sección y la proposición 3.6 del capitulo 3). Además $\pi\chi(C_p(Y)) = \chi(C_p(Y)) = \mid Y \mid = 2^{\omega}$ y $c(C_p(Y)) = \omega$. Por lo tanto, la igualdad del teorema 2.36 se obtiene, cuando aplicamos las funciones involucradas al espacio $C_p(Y)$.

CAPÍTULO 3

Funciones Cardinales en Espacios Compactos

En este capítulo, estudiaremos el comportamiento de las funciones cardinales topologicas en espacios compactos Hausdorff. Veremos que algunas desigualdades que tenenemos en el capítulo anterior se convierten en igualdades, y otras pueden ser mejoradas suponiendo que el espacio en cuestión es un espacio compacto.

1. Cardinalidad en Espacios Compactos

Los resultados presentados en esta sección los podemos encontrar en el articulo de R. Hodel [24].

De las definición 2.18 incisos (i), (iii) tenemos que $\psi(X) \leq \chi(X)$ para todo espacio X. El primer resultado de este capítulo nos permite mejorar esta afirmación para espacios compactos.

TEOREMA 3.1. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces*

$$\psi(X) = \chi(X).$$

DEMOSTRACIÓN: i) $\psi(X) \leq \chi(X)$. Se sigue de la definición 2.18 incisos (i) y (iii). ii) $\chi(X) \leq \psi(X)$. Sean $p \in X$ y $\mathcal{V}$ una seudobase local de p tal que $|\mathcal{V}| \leq \psi(p, X)$. Como X es compacto, en particular es regular, de donde para cada $V \in \mathcal{V}$ existe un conjunto abierto W^V tal que $p \in W^V \subseteq cl(W^V) \subseteq V$. Consideremos $\mathcal{V}_0 = \{W^V : V \in \mathcal{V}\}$. Tenemos que $|\mathcal{V}_0| \leq |\mathcal{V}| \leq \psi(p, X)$, y $\mathcal{V}_0$ es una seudobase de p.

Además, como $\bigcap \{cl(W^V) : V \in \mathcal{V}\} = \{p\}$, entonces, dado $q \neq p$, existe $W_q \in \mathcal{V}_0$ tal que $q \notin cl(W_q)$. Por lo cual existe un abierto U_q tal que $q \in U_q$ y $U_q \cap W_q = \emptyset$. Esto nos permite asegurar que $\mathcal{W} = \{W_q\}_{q \neq p}$ es una seudobase de p, y como $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}_0$, $|\mathcal{W}| \leq \psi(p, X)$.

Sea $\mathcal{W}_0$ la familia de todas las intersecciones finitas de elementos en $\mathcal{W}$. Observemos que $|\mathcal{W}| = |\mathcal{W}_0|$. Sea O un conjunto abierto tal que $p \in O$; entonces $\mathcal{U} = \{U_q\}_{q \neq p} \cup \{O\}$ es una cubierta abierta de X, de donde, como X es compacto existen $q_1, q_2 ..., .q_n$ tales que $\{U_{q_i}\}_{i=1}^n \cup \{O\}$ es una subcubierta finita de X. Afirmamos que $\bigcap_{i=1}^n W_{q_i} \subseteq O$. En efecto, sea $z \in \bigcap_{i=1}^n W_{q_i}$, es decir que $z \in W_{q_i}$ para $i = 1, ..., n$. Por lo cual $z \notin U_{q_i}$, de donde se tiene que $z \in O$. Por lo tanto $\mathcal{W}_0$ es una base local de p en X. Con lo cual obtenemos que $\chi(p, X) \leq \psi(p, X)$, y por lo tanto $\psi(X) = \chi(X)$. □

Es claro que si X un espacio topológico compacto. Entonces

$$l(X) = \omega.$$

En los dos siguientes resultados obtenemos, primero una cota superior para la cardinalidad del espacio en términos del pseudocaracter del espacio y segundo, una cota inferior de la cardinalidad del espacio en terminos del caracter del espacio.

Recordemos que si X es T_2, el teorema 2.26 (Arkhangel'skiĭ) nos asegura que $|X| \leq 2^{l(X)\chi(X)}$. En particular, si X es compacto este resultado queda como.

TEOREMA 3.2. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces*

$$|X| \leq 2^{\psi(X)}.$$

En particular si $\psi(X) = \omega$, tenemos que $|X| \leq 2^{\omega}$.

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de los teoremas 3.1 y 2.26 □

TEOREMA 3.3. *(Čech-Pospišil). Sea X un espacio compacto infinito tal que $\chi(p, X) \geq \lambda$ para todo $p \in X$. Entonces*

$$|X| \geq 2^{\lambda}$$

DEMOSTRACIÓN: Para cada $\alpha < \lambda$ construiremos una familia de conjuntos cerrados no vacios $\{K_f : f \in 2^{\alpha}\}$ en X tal que

i) Si $f \in 2^{\alpha}$ y $\beta < \alpha$ entonces $K_f \subseteq K_{(f|_{\beta})}$.

ii) Si $f, g \in 2^{\alpha}$ y $f \neq g$ entonces $K_f \cap K_g = \emptyset$.

Supongamos por un momento que tenemos construida la familia $\{K_f : f \in 2^{\alpha}\}$ para cada $\alpha < \lambda$ tal que se satisfacen i) y ii).

Para cada $f \in 2^{\lambda}$ sea $K_f = \cap_{\alpha<\lambda} K_{f|_{\alpha}}$. Por el inciso (i), la familia $\{K_{f|_{\alpha}} : \alpha < \lambda\}$ es una sucesión decreciente de cerrados no vacios en X, y por compacidad $K_f \neq \emptyset$. Por el inciso (ii), si $f, g \in 2^{\alpha}$ y $f \neq g$ entonces $K_f \neq K_g$ y como $|2^{\lambda}| = 2^{\lambda}$, entonces $|X| \geq 2^{\lambda}$.

Construyamos ahora la familia de conjuntos $\{K_f : f \in 2^{\alpha}\}$. Esta construcción la haremos en dos casos.

1) Si $\lambda = \omega$. Para este caso agregaremos la condición

iii) Para cada $f \in 2^{\alpha}$, $int(K_f) \neq \emptyset$.

Para $\alpha = 0$, $2^{\alpha} = \{\emptyset\}$ y tomamos $K_{\emptyset} = X$.

Sea $0 < \alpha < \omega$, y supongamos que para $\beta < \alpha$ tenemos construida la familia de conjuntos cerrados $\{K_f : f \in 2^{\beta}\}$, que satisface los incisos (i), (ii), (iii).

Sean $\alpha = \gamma + 1$, $g \in 2^{\gamma}$ y f_0, $f_1 \in 2^{\alpha}$ tales que $f_0 |_{\gamma} = f_1 |_{\gamma}$, $f_0(\gamma) = 0$ y $f_1(\gamma) = 1$.

Construyamos K_{f_0}, K_{f_1}. Por el inciso (iii) $int(K_g) \neq \emptyset$ y como $\chi(p, X) \geq \lambda$, para todo $p \in X$, entonces X no tiene puntos aislados. Sean $x, y \in int(K_g)$ con $x \neq y$. Entonces existen abiertos U_x, U_y tales que $x \in U_x \subseteq K_g$, $y \in U_y \subseteq K_g$.

Además, como X es T_2, existen abiertos W_x, W_y tales que $x \in W_x$, $y \in W_y$ y $W_x \cap W_y = \emptyset$, de donde concluimos que $x \in U_x \cap W_x$, $y \in U_y \cap W_y$. Por la regularidad de X, existen abiertos V_x, V_y tales que :$x \in V_x \subseteq cl(V_x) \subseteq U_x \cap W_x$, $y \in V_y \subseteq cl(V_y) \subseteq U_y \cap W_y$. Por lo tanto $cl(V_x) \cup cl(V_y) \subseteq K_g$ y $cl(V_x) \cap cl(V_y) = \emptyset$.

Si definimos $K_{f_1} = cl(V_1)$ y $K_{f_2} = cl(V_2)$, entonces por construcción se satisfacen las propiedades deseadas.

2) $\lambda > \omega$. Para este caso pediremos también la siguiente condición

iii) K_f sea la intersección de a lo más $|\alpha| + \omega$ conjuntos abiertos para cada $f \in 2^{\alpha}$.

Sea $0 < \alpha < \lambda$ y supongamos que para todo $\beta < \alpha$ la familia $\{K_f. : f \in 2^{\beta}\}$, esta bién construida y satisface las propiedades deseadas. Para un ordinal limite α definamos $K_f = \cap_{\beta<\alpha} K_{f|_{\beta}}$ para cada $f \in 2^{\alpha}$. De la definición de K_f éste satisface los incisos (i) y (iii). Ahora sean $f, g \in 2^{\alpha}$ con $K_f = \cap_{\beta<\alpha} K_{f|_{\beta}}$, $K_g = \cap_{\beta<\alpha} K_{g|_{\beta}}$. Si $K_f \cap K_g \neq \emptyset$ entonces existe $\beta < \alpha$ tal que $K_{f|_{\beta}} \cap K_{g|_{\beta}} \neq \emptyset$ lo cual no es posible por hipotesis de inducción. Por lo tanto también se satisface ii).

Si α es un ordinal sucesor, sea: $\alpha = \gamma + 1$, $g \in 2^\gamma$ y $f_0, f_1 \in 2^\alpha$ tales que: $f_0 \restriction_\gamma = f_1 \restriction_\gamma = g$ y $f_0(\gamma) = 0$ y $f_1(\gamma) = 1$.

Construyamos K_{f_0}, K_{f_1}. Como para cada $p \in X$, $\chi(p, X) \geq \lambda$ y K_g es la intersección de menos de λ conjuntos abiertos entonces K_g debe de tener más de un punto, ya que si $K_g = \{p\}$ y tambien $K_g = \cap_{i<\lambda} V_i$ entonces $\{p\} = \cap_{i<\lambda} V_i$ por lo cual el conjunto $\{V_i\}_{i<\lambda}$ seria una seudobase de p. Como X es compacto, esta propiedad induciria una base local $\left\{V_i'\right\}_{i<\lambda}$ de p, de donde $\chi(p, X) < \lambda$ lo cual es una contradicción.

Aplicando el teorema podemos encontrar conjuntos cerrados G_0, G_1 ajenos G_δ tales que: $G_0 \cap K_g \neq \emptyset$, $G_1 \cap K_g \neq \emptyset$. Por lo tanto si definimos $K_{f_1} = G_1 \cap K_g$, $K_{f_0} = G_0 \cap K_g$, estos satisfacen por construcción las propiedades deseadas.

Asi terminamos la construcción de la familia $\{K_f : f \in^\alpha 2\}$, de conjuntos cerrados no vacíos de X.

Por la observación inicial tenemos el resultado deseado. $\square$

TEOREMA 3.4. *Sea X un espacio compacto infinito con $\chi(X) = \omega$. Entonces*

$$|X| = \omega \text{ ó } |X| = 2^\omega$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $|X| > \omega$. Del teorema 3.2 tenemos que $|X| \leq 2^\omega$. Sea $A = \{p \in X : \text{ toda vecindad de } p \text{ tiene cardinalidad } > \omega\}$. El conjunto A satisface las siguientes afirmaciones:

i) $A \neq \emptyset$. En efecto si $A = \emptyset$, entonces cada punto $p \in X$ tiene una vecindad V_p tal que $|V_p| \leq \omega$, de donde la familia $\{V_p\}_{p\in X}$ es una cubierta abierta de X. Por lo tanto existen $p_1,,, p_n \in X$ tales que $X = \cup_{i=1}^n V_{p_i}$. Por lo cual

$$|X| = |\cup_{i=1}^n V_{P_i}| \leq \sum_{i=1}^n |V_{p_i}| = n\omega = \omega.$$

ii) A es cerrado. Sea $p \in cl(A)$ entonces para toda vecindad abierta V_p tal que $p \in V_p$ tenemos que $V_p \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto podemos elegir un $x \in V_p \cap A$, lo cual implica que $x \in V_p$, y $x \in A$, de donde $|V_p| > \omega$ y por lo tanto $p \in A$.

iii) Ningún punto de A es aislado en A. Afirmación que podemos comprobar de la siguiente forma. Sean $p \in A$ y V un abierto de X que contiene a p. Como X es regular podemos construir una base local $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n\in\omega}$ de p tal que $cl(V_0) \subset V$ y $cl(V_{n+1}) \subseteq V_n$ para cada $n \in \omega$. Además podemos observar que

$$V_0 - \{p\} = \cup_{n<\omega}(V_n - V_{n-1})$$

Es claro que $\cup_{n<\omega}(V_n - V_{n-1}) \subseteq V_0 - \{p\}$. Tomemos ahora $q \in V_0 - \{p\}$. Entonces $q \neq p$, de donde existe un minimo n_0 tal que $q \notin V_{n_0}$, y como $q \in V_0$ entonces $q \in V_{n_o-1}$, de donde $q \in \cup_{n<\omega}(V_n - V_{n-1})$.

Entonces existe un $i < \omega$ tal que $|V_i - V_{i-1}| > \omega$, y como X es compacto por la proposición 1.34 el conjunto $V_i - V_{i-1}$ tiene un punto de acumulación completo r, de donde $r \in V_0 - \{p\}$. Por lo que $r \in V$ y $|V| > \omega$. Por lo tanto $r \in V \cap A$ ($r \neq p$). Entonces p no es aislado en A.

Por lo tanto A es un compacto tal que para cada $p \in A$, $\chi(p, A)$ es infinito numerable. Por el teorema 3.3 resulta que $|A| \geq 2^\omega$ con lo que obtenemos que $|X| \geq 2^\omega$. De donde obtenemos el resultado deseado. $\square$

2. Peso en Espacios Compactos

Los resultados presentados en esta sección los podemos encontrar en el articulo de R. Hodel **[24]**.

En el capítulo anterior observamos que $w(X) \leq |X|$, o $|X| \leq w(X)$. En caso de que X sea un espacio compacto, podemos asegurar que $w(X) \leq |X|$ como nos lo hace ver el siguiente resultado.

TEOREMA 3.5. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces*

$$w(X) \leq |X|.$$

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de los teoremas 2.19 inciso (i), 2.20, y 3.1 inciso (ii). □

De los teoremas 2.5 tenemos que $iw(X) \leq w(X)$, $nw(X) \leq w(X)$, $psw(X) \leq w(X)$, 2.14 tenemos que $\Delta(X) \leq nw(X)$ y de 2.15 $psw(X) \leq l(X)\Delta(X)$. Si X es compacto todos estos resultados son mejorados como nos lo hacén ver los siguientes 5 rsultados.

PROPOSICIÓN 3.6. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces*

$$iw(X) = w(X).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : X \to Y$ una condensación. Como X es compacto, del corolario 1.38 resulta que f es un homeomorfismo, de donde se sigue el resultado deseado. □

TEOREMA 3.7. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces*

$$w(X) = nw(X).$$

DEMOSTRACIÓN: i) $nw(X) \leq w(X)$. Se sigue del teorema 2.5 inciso (i).
ii) $w(X) \leq nw(X)$. Sea $\mathcal{N}$ una red de X tal que $|\mathcal{N}| = nw(X) = \lambda$. Consideremos la familia

$$\mathcal{A} = \{(N_1, N_2) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : N_1 \cap N_2 = \emptyset\}.$$

Sea $\mathcal{B}$ la familia de parejas (V_1, V_2) de conjuntos abiertos tales que existe un elemento $(N_1, N_2) \in \mathcal{A}$ con $N_1 \subseteq V_1, N_2 \subseteq V_2$. Observemos que la familia $\mathcal{B}$ satisface que si $p, q \in X$ y $p \neq q$, existe $(V_p, V_q) \in \mathcal{B}$, tal que $p \in V_p, q \in V_q$ y $V_p \cap V_q = \emptyset$. Esto se sigue del hecho de que X es T_2, ya que si $p, q \in X$ con $p \neq q$ existen conjuntos abiertos $V_p(q)$, $V_q(p)$, tales que $p \in V_p(q)$, $q \in V_q(p)$ y $V_p(q) \cap V_q(p) = \emptyset$. Como $\mathcal{N}$ es una red existén $N_p, N_q \in \mathcal{N}$ tales que,

$$p \in N_p \subseteq V_p(q),\ q \in N_q \subseteq V_q(p)$$

por lo cual $N_p \cap N_q = \emptyset$ y por tanto $(N_p, N_q) \in \mathcal{A}$. De donde $(V_p(q),\ V_q(p)) \in \mathcal{B}$. Ahora, para cada $(N_1, N_2) \in \mathcal{A}$ elijamos una y sólo una pareja $(V_1, V_2) \in \mathcal{B}$ tal que $N_1 \subseteq V_1$ y $N_2 \subseteq V_2$. Sea $\mathcal{B}_0$ la famlia de estas parejas de subconjuntos abiertos asi elegidos. Sea $\mathcal{W}$ la familia de intersecciones de subfamilias finitas de elementos de $\pi_1(\mathcal{B}_0)$. Se sigue que $|\mathcal{W}| \leq |\mathcal{B}_0| \leq |\mathcal{N}|$. $\mathcal{W}$ genera una topología de Hausdorff en X y puesto que X es compacto $\mathcal{W}$ es una base. De donde $w(X) \leq nw(X)$. □

TEOREMA 3.8. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces*

$$psw(X) = nw(X).$$

DEMOSTRACIÓN: i) $psw(X) \leq nw(X)$. Se sigue del teorema 2.5 inciso (vii).
ii) $nw(X) \leq psw(X)$. Sea $psw(X) = \lambda$ y $\mathcal{V}$ una cubierta abierta separante de X con $ord(p, \mathcal{V}) \leq \lambda$ para todo $p \in X$. La compacidad de X implica que $|\mathcal{V}| \leq \lambda$. Para ver esto, sea $\{\mathcal{V}_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda\}$ la familia de todas las cubiertas finitas minimales de X por elementos de $\mathcal{V}$, la cual la podemos indicar por λ aplicando el lema 1.25 (de Miscenko). Entonces $\mathcal{V} \subseteq \cup_{\alpha<\lambda}\mathcal{V}_\alpha$ ya que si $V_0 \in \mathcal{V}$ y $p \in V_0$ para cada $q \neq p$ podemos elegir un elemento de $\mathcal{V}$ que contenga a q pero no a p. Esta familia de conjuntos junto con V_0 cubren a X, de donde existe una subfamilia finita minimal que cubre a X, digamos $\mathcal{V}_\alpha$, asi que $V_0 \in \mathcal{V}_\alpha$.. Además

$$|\mathcal{V}| \leq |\cup_{\alpha<\lambda}\mathcal{V}_\alpha| \leq \sum_{\alpha<\lambda} |\mathcal{V}_\alpha| = \omega\lambda = \lambda.$$

Ahora sea $\mathcal{N}$ la familia de todos los subconjuntos de X de la forma $X - W$ donde W es la unión de una subfamilia finita de $\mathcal{V}$. Afirmamos que $\mathcal{N}$ es una red de X con $|\mathcal{N}| \leq \lambda$. En efecto sea $p \in X$ y sea U un abierto que contiene a p. Como $\mathcal{V}$ es una cubierta separante entonces para cada $q \in X - U$ existe un $V_q \in \mathcal{V}$ tal que $p \notin V_q$. Resulta entonces que $\{U\} \cup \{V_q : q \in X - U\}$ es una cubierta de abierta de X. Como X es compacto, existen $q_1, ..., q_n \in X - U$ tales que $\{U\} \cup \{V_{q_i} : 1 \leq i \leq n\}$ cubre a X. Resulta ahora que

$$p \in X - \cup_{i=1}^{n} V_{q_i} \subset U \text{ y } X - \cup_{i=1}^{n} V_{q_i} \in \mathcal{N}.$$

□

De los teoremas 3.7 y 3.8 se sigue el siguiente resultado.

TEOREMA 3.9. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces*

$$w(X) = psw(X).$$

También, del teorema 2.14, la proposición 2.15, y de los teoremas 3.7 y 3.8 obtenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 3.10. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces*

$$\Delta(X) = w(X).$$

COROLARIO 3.11. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces*

$$w(X) \leq |RO(X)| \leq 2^{s(X)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de las definiciones 2.2 inciso (i), 2.4 inciso (iii), del teorema 2.35 y 3.7 y la proposición 2.32. □

3. Estrechez en Espacios Compactos

En esta sección veremos la relación que existe entre la estrechez y la longitud de sucesiones libres en espacios compactos. Además se determinan otras relaciones entre la estrechez, el peso y la amplitud.

TEOREMA 3.12. *Sea X un espacio topológico compacto tal que $t(X) \leq \lambda$. Entonces X no tiene una sucesión libre de longitud λ^+.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X tiene una sucesión libre $\{x_\alpha\}_{\alpha<\lambda^+}$ de longitud λ^+. Por la proposición 1.34, $\{x_\alpha\}_{\alpha<\lambda^+}$ tiene un punto de acumulacion completo p. Entonces $p \in cl(\{x_\alpha\}_{\alpha<\lambda^+})$. Como $t(X) \leq \lambda$ existe un subconjunto $A \subseteq \{x_\alpha\}_{\alpha<\lambda^+}$ tal que $|A| \leq \lambda$ y $p \in cl(A)$. Sean $A = \{x_{\alpha_\delta}\}_{\delta<\lambda}$ y β =sup$\{\alpha_\delta : x_{\alpha_\delta} \in A\}$. Entonces $\beta < \lambda^+$, de donde

$$cl(\{x_\alpha : \alpha < \beta+1\}) \cap cl(\{x_\alpha : \beta+1 \leq \alpha\}) = \emptyset.$$

Como $A \subseteq \{x_\alpha : \alpha < \beta+1\}$, $p \in cl(\{x_\alpha : \alpha < \beta+1\})$. Además, si $V = (cl(\{x_\alpha : \alpha \geq \beta+1\}))^c$ tenemos que V es un conjunto abierto tal que $p \in V$ y $V \cap \{x_\alpha : \alpha < \beta+1\}$ tiene a lo más $|\beta|$ puntos de la sucesión. Como $|\beta| < \lambda^+$, entonces p no es un punto de acumulación completo de $\{x_\alpha\}_{\alpha<\lambda^+}$, lo cual es una contradicción. □

TEOREMA 3.13. *Sea X un espacio compacto con $\lambda < h\pi\chi(X)$. Entonces X tiene una sucesión libre de longitud λ^+.*

DEMOSTRACIÓN: Como $\pi\chi(Y) \leq \pi\chi(cl(Y))$, es suficiente probar el resultado si $\pi\chi(X) > \lambda$. Sea $p \in X$ tal que $\pi\chi(p, X) \geq \lambda^+$. Consideremos la famila $\mathcal{G}$ de conjuntos cerrados G_δ en X. Entonces $\mathcal{G}$ tiene la siguiente propiedad:
(∗) Si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ y $|\mathcal{H}| \leq \lambda$, entonces existe una vecindad abierta R de p tal que $H - R \neq \phi$ para todo $H \in \mathcal{H}$.

Afirmación que podemos verificar, de la siguiente forma:.
Como $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ tenemos que para todo $H \in \mathcal{H}$, $H \in \mathcal{G}$. De donde $H = \cap_{n\in\omega} G_n^H$, con los G_n^H conjuntos abiertos para todo $n \in \omega$ y $(clG_{n+1}^H) \subset G_n^H$ para todo $n < \omega$. Además, ya que

$$\left|\{G_n^H : n \in \omega,\, H \in \mathcal{H}\}\right| \leq \omega.\lambda = \lambda$$

se sigue que $\{G_n^H : n \in \omega,\, H \in \mathcal{H}\}$ no es π- base local de p en X. Por lo cual existe un conjunto abierto R con $p \in R$, tal que $G_n^H - R \neq \emptyset$ para todo $n \in \omega$, y para todo $H \in \mathcal{H}$. Para cada $H \in \mathcal{H}$, $\{(clG_n^H) \cap (X - R) : n < \omega\}$ es una colección de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita.

Como $X - R$ es compacto existe

$$x_0 \in \cap_{n<\omega}(clG_n^H) \cap (X - R) = H \cap (X - R).$$

Construiremos ahora subfamilias $\{A_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda^+\}$ y $\{B_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda^+\}$ de $\mathcal{G}$ tales que :

i) $p \in A_\alpha$ y $A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$ si $0 \leq \alpha < \lambda^+$.

ii) Si H es intersección de una subfamilia finita no vacía de

$$\{A_\beta : 0 \leq \beta < \alpha\} \cup \{B_\beta : 0 \leq \beta < \alpha\},$$

entonces $H \cap B_\alpha \neq \emptyset$, si $0 < \alpha < \lambda^+$.

La contrucción la haremos por inducción transfinita.

Sea $p \in X$ y sea U un conjunto abierto tal que $p \in U$, entonces $p \notin X - U$, y como $X - U$ es compacto, por el lema 1.31 existén conjuntos cerrados G_δ, A_0 y B_0 tales que $p \in A_0$ y $A_0 \cap B_0 = \emptyset$.

Supongamos que para α tal que $0 < \alpha < \lambda^+$ tenemos construidos las familias $\{A_\beta : \beta < \alpha\}$ y $\{B_\beta : \beta < \alpha\}$ satisfaciendo (i) y (ii). Sea $\mathcal{H}$ la familia de todas las intersecciones de subfamilias finitas no vacías de $\{A_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{B_\beta : \beta < \alpha\}$. Entonces tenemos qué $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ y $|\mathcal{H}| \leq \lambda$, por lo cual $\mathcal{H}$ satisface (∗). Por lo tanto existe un conjunto abierto R tal que $p \in R$ y $H - R \neq \emptyset$ para todo $H \in \mathcal{H}$. Por el lema 1.3.1 existen A_α, $B_\alpha \in \mathcal{G}$ tal que $p \in A_\alpha$, $(X - R) \subseteq B_\alpha$ y $A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$. Ahora como $H - R \neq \emptyset$, tenemos que $H \cap B_\alpha \neq \emptyset$, por lo cual se satisfacen los incisos (i) y (ii).

Sea ahora α fijo con $0 \leq \alpha < \lambda^+$. Entonces cualquier intersección de una subfamilia finita de $\{A_\beta : \beta \leq \alpha\} \cup \{B_\beta : \beta > \alpha\}$ es distinta del vacío. Como X es compacto existe un

$$x_\alpha \in (\cap_{\beta \leq \alpha} A_\beta) \cap (\cap_{\beta > \alpha} B_\beta).$$

Entonces la sucesión $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda^+\}$ es libre de longitud λ^+ en X, ya que para todo $\beta < \lambda^+$ tenemos que

$$cl(\{x_\alpha : \alpha < \beta\}) \subseteq B_\beta,\ cl(\{x_\alpha ; \alpha \geq \beta\}) \subseteq A_\beta \text{ y } A_\beta \cap B_\beta = \emptyset.$$

□

Como una consecuencia inmediata de este teorema tenemos.

COROLARIO 3.14. *Sea X un espacio topológico compacto con $t(X) > \lambda$. Entonces X tiene una sucesión libre de longitud λ^+.*

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de los teoremas 2.19 inciso (iv) y 3.13. □

De donde, sintetizando este corolario con el teorema tenemos que.

TEOREMA 3.15. *Sea X un espacio topológico compacto y definamos: $F(X)$ =sup$\{\lambda : X$ tiene una sucesión libre de longitud $\lambda\} + \omega$. Entonces*

$$t(X) = F(X)$$

DEMOSTRACIÓN: Se sigue del teorema 3.12 y corolario 3.14. □

Sabemos que por el teorema 2.19 inciso (iv) $t(X) \leq h\pi\chi(X)$ para cualquier espacio topologico X. Si X es compacto se obtiene la igualdad.

TEOREMA 3.16. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces*

$$h\pi\chi(X) = t(X)$$

En particular todo subespacio Y de X con $t(Y) = \omega$ tiene π-carácter numerable.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $t(X) = \lambda$. Si $h\pi\chi(X) > \lambda$, entonces, por el teorema 3.13, X tendría una sucesión libre de longitud λ^+, contradiciendo el teorema 3.12. □

TEOREMA 3.17. [12] *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces*

$$w(X) \leq t(X)^{c(X)}$$

DEMOSTRACIÓN: Como el $\pi\chi(X) \leq h\pi\chi(X)$, de los teoremas 2.37 y 3.16 obtenemos el resultado deseado. □

TEOREMA 3.18. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces*

$$t(X) \leq s(X)$$

En particular si $s(X) = \omega$ entonces $t(X) = \omega$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $s(X) = \lambda$. Si $t(X) > \lambda$ entonces, por el corolario 3.14 X tiene una sucesión libre de longitud λ^+; pero esta sucesión es un conjunto discreto, lo que contradice que $s(X) = \lambda$. □

LEMA 3.19. [2] *Sea X un espacio topológico compacto tal que $t(X) = \omega$, y sea U un conjunto abierto no vacio de X. Entonces existe un conjunto cerrado P G_δ en X y un subconjunto numerable $A \subset X$ tales que $P \subset cl(A) \cap U$.*

DEFINICIÓN 3.20. [29] *Un espacio topológico X es monolítico si $d(Y) = nw(Y)$ para todo $Y \subseteq X$.*

COROLARIO 3.21. [29] *Sea X un espacio topológico. Entonces X es monolítico si y sólo si para todo τ y para todo $A \subset X$ con $|A| \leq \tau$ entonces $nw(cl(A)) \leq \tau$.*

TEOREMA 3.22. *Sea X un espacio topológico compacto monolítico con $t(X) = \omega$. Entonces existe un subconjunto denso $F \subset X$, tal que el $\chi(x, X) = \omega$ para todo $x \in F$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea U un conjunto abierto no vacío de X. Por el lema 3.19 existe un conjunto numerable $A \subset X$, y un conjunto cerrado $F(U) \subset X$ de tipo G_δ en X tal que $F(U) \subset cl(A) \cap U$. Como X es monolítico y $|A| = \omega$, $nw(cl(A)) = \omega$ y como $cl(A)$ es compacto $w(cl(A) = nw(cl(A))$, por lo tanto $w(cl(A)) = \omega$. De donde $F(U)$ es compacto con $w(F(U)) = \omega$, por lo cual $\chi(x, F(U)) = \omega$ para todo $x \in F(U)$. Con lo que obtenemos que para todo $x \in F(U)$, x es de tipo G_δ en $F(U)$, y como $F(U)$ es de tipo G_δ en X entonces x es de tipo G_δ en X para todo $x \in F(U)$. Entonces $\psi(x, X) = \omega$ para todo $x \in F(U)$, y como X es compacto $\chi(x, X) = \omega$ para todo $x \in F(U)$. Sea

$$F = \cup\{F(U) : U \subset X \text{ es abierto}\},$$

entonces F es el conjunto deseado. □

TEOREMA 3.23. *Sea X un espacio topológico compacto monolítico con $t(X) = \omega$. Entonces X es un espacio de Frechet-Urysohn.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $y \in X$, $A \subset X$, con $y \in cl(A)$. Como $t(X) = \omega$, existe un subconjunto numerable $B \subset A$ tal que $y \in cl(B)$. Como X es monolítico $nw(cl(B)) = \omega$, y como $cl(B)$ es compacto tenemos que $w(cl(B)) = \omega$. Entonces existe una sucesión de puntos en $B \subset A$, que converge a y. □

DEFINICIÓN 3.24. [29] *Un espacio topológico X es estable si $iw(Y) = nw(Y)$ para todo Y que sea imagen continua de X.*

PROPOSICIÓN 3.25. *Sea X un espacio compacto. Entonces X es estable.*

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de la proposición 3.6. □

PROPOSICIÓN 3.26. [2] *Sea X un espacio estable. Entonces $C_p(X)$ es monolítico.*

4. Densidad Hereditaria en Espacios Compactos

El resultado principal de esta sección es ver que la densidad hereritaria es menor ó igual al sucesor de la amplitud.

TEOREMA 3.27. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces*

$$h\pi w(X) = hd(X).$$

En particular, todo subespacio Y de X hereditariamente separable tiene una $\pi-$base numerable.

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de los teoremas 3.16 y 2.18 inciso (ii). □

TEOREMA 3.28. *Sean X un espacio compacto con $t(X) \leq \lambda$, y $Y \subseteq X$ tal que $hl(Y) \leq \lambda$. Entonces*

$$d(Y) \leq \lambda^+.$$

DEMOSTRACIÓN: Construirémos una sucesión creciente $\{A_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda^+\}$ de subconjuntos de Y y una sucesion $\{\mathcal{V}_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda^+\}$ de familias de abiertos de X tales que para todo $0 \leq \alpha < \lambda^+$ se satisfaga:

i) $|A_\alpha| \leq \lambda$ y $|\mathcal{V}_\alpha| \leq \lambda$.

ii) $cl(A_\alpha) \subseteq \cap\mathcal{V}_\alpha$ y $Y \cap cl(A_\alpha) = Y \cap (\cap\mathcal{V}_\alpha)$.

iii) Si G es unión de una colección finita de elementos de $\cup_{\beta<\alpha}\mathcal{V}_\alpha$ y $Y - G \neq \emptyset$, entonces $A_\alpha \cap (Y - G) \neq \emptyset$.

Para $\alpha = 0$ sea $y \in Y$ y $A_0 = \{y\}$. Por la proposición 2.31 existe una familia $\mathcal{V}_0$ de abiertos de X que satisface (i) y (ii) para $\alpha = 0$.

Ahora sea $0 < \alpha < \lambda^+$ y supongamos que para todo $\beta < \alpha$, A_β y $\mathcal{V}_\beta$ han sido definidos. Por el inciso (iii), si G es unión finita de elementos de $\cup_{\iota<\beta}\mathcal{V}_\iota$ y $Y - G \neq \emptyset$, elijamos un $x_{\alpha,G} \in Y - G$ y definamos

$$A_\alpha = A_\beta \cup \{x_{\alpha,G} : G \text{ es unión finita de elementos de } \cup_{\iota<\beta}\mathcal{V}_\iota \text{ y } Y - G \neq \emptyset\}$$

de donde claramente tenemos que

$$A_\alpha \cap (Y - G) \neq \emptyset,\ A_\alpha \subseteq Y \text{ y } |A_\alpha| \leq \lambda,$$

y por la proposición 2.31 tenemos que existe una familia $\mathcal{V}_\alpha$ de abiertos de X tal que

$$|\mathcal{V}_\alpha| \leq \lambda, cl(A_\alpha) \subseteq \cap\mathcal{V}_\alpha \text{ y } Y \cap cl(A_\alpha) = Y \cap (\cap\mathcal{V}_\alpha).$$

De esta forma la construcción inductiva de tales familias está garantizada.

Ahora observemos que como $t(X) \leq \lambda$ y $\{cl(A_\alpha) : 0 \leq \alpha < \lambda^+\}$ es una sucesión creciente de conjuntos cerrados en X, entonces $\cup_{\alpha<\lambda^+}cl(A_\alpha)$ es cerrado. En efecto si $x \in cl(\cup_{\alpha<\lambda^+}(cl(A_\alpha))$, entonces existe un subconjunto $L \subseteq \cup_{\alpha<\lambda^+}cl(A_\alpha)$ tal que $|L| \leq \lambda$ y $x \in cl(L)$. Si $L \subsetneq A_\alpha$ para todo $\alpha < \lambda^+$ entonces existe un subconjunto cofinal J en λ^+ y para $\alpha \in J$ existe $x_\alpha \in L - A_\alpha$ con todos los x_α distintos, de donde concluimos que el conjunto $\{x_\alpha : \alpha < J\}$ tiene cardinalidad λ^+, lo cual es una contradicción. De donde podemos garantizar que existe $\alpha_0 < \lambda^+$ tal que $L \subseteq A_{\alpha_0}$ y como $x \in cl(L)$ entonces $x \in cl(A_{\alpha_0})$. Por lo tanto $x \in \cup_{\alpha<\lambda^+}cl(A_\alpha)$.

Sea $S = \cup_{\alpha<\lambda^+}A_\alpha$. Entonces

$$cl(S) = \cup_{\alpha<\lambda^+}cl(A_\alpha),\ |S| \leq \lambda^+ \text{ y } S \subseteq Y.$$

Si $Y \nsubseteq cl(S)$, sea $q \in Y - cl(S)$. Se tiene que $q \notin cl(A_\alpha)$ para todo $\alpha < \lambda^+$. Por la segunda parte del inciso (ii) existe $V_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$ tal que $q \in V_\alpha$, y por la primera parte de (ii) $\{V_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda^+\}$ es una cubierta abierta de $cl(S)$. Por lo tanto existen $\beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_n$ tales que $\{V_{\beta_1}...V_{\beta_n}\}$ cubre a $cl(S)$.

Si $G = \cup_{i=1}^n V_{\beta_i}$ y $\beta < \alpha$, entonces $Y - G \neq \phi$ y $A_\alpha \cap (Y - G) = \emptyset$, lo cual es una contradiccion al inciso (iii). De aquí se obtiene que $Y \subseteq cl(S)$ y por lo tanto $d(Y) \leq |S|$ de donde $d(Y) \leq \lambda^+$. □

TEOREMA 3.29. *(Šapirovskii). Sea X un espacio compacto. Entonces*

$$hd(X) \leq s(X)^+$$

DEMOSTRACIÓN: Sea X un espacio compacto y supongamos que $s(X) \leq \lambda$. Por el teorema 3.18, $t(X) \leq \lambda$. Si $Z \subseteq X$, del inciso (i) del teorema 2.33 tenemos

$$d(Z) \leq d(cl(Z))t(cl(Z))$$

y como $t(cl(Z)) \leq t(X)$, entonces es suficiente demostrar que $d(cl(Z)) \leq \lambda^+$.

Ahora, como $cl(Z) \subseteq X$ y $s(X) \leq \lambda$, entonces $s(cl(Z)) \leq \lambda$. Por la proposición 2.30 existe un subconjunto $Y \subseteq cl(Z)$ denso en $cl(Z)$ tal que $hl(Y) \leq \lambda$. Como Y es denso en $cl(Z)$, entonces $d(cl(Z)) \leq d(Y)$. Ahora del teorema 3.28 tenemos el resultado deseado. □

PROPOSICIÓN 3.30. *Todo espacio compacto y perfectamente normal X tiene una $\pi-$base de cardinalidad a lo más ω_1.*

DEMOSTRACIÓN: Como

$$\pi w(X) \leq h\pi w(X) \leq hd(X) \leq s(X)^+$$

que se sigue del teorema 3.29, entonces es suficiente demostrar que $s(X) \leq \omega$. Supongamos que $s(X) > \omega$, entonces existe un subconjunto $A \subseteq X$ discreto tal que $|A| > \omega$. Por lo cual podemos elegir un subconjunto $D \subseteq A$ tal que $|D| = \omega_1$. Como D es discreto, entonces para cada $x \in D$ existe un abierto V_x tal que $x \in V_x$ y $V_x \cap D = \{x\}$. Sea $V = \cup_{x \in D} V_x$. Como X es perfectamente normal, $V = \cup_{n<\omega} F_n$ donde F_n es cerrado para cada $n < \omega$. Además es claro que $D = \cup_{n<\omega}(F_n \cap D)$.

Consideremos $H_n = F_n \cap D$ para cada $n < \omega$. Como $|D| \leq \sum_{n<\omega} |H_n|$, existe un $n' \in \omega$ tal que $|H_{n'}| = \omega_1$.

Afirmamos que para cada $n < \omega$, H_n no tiene puntos de acumulación.

En efecto si $x \in X$ es un punto de acumulación de H_{n_0} para algún $n_0 < \omega$, entonces x es punto de acumulación de F_{n_0}, de donde $x \in F_{n_0}$. Como $F_{n_0} \subseteq \cup_{n<\omega} F_n = \cup_{x \in D} V_x$, entonces existe un $y \in D$ tal que $x \in V_y$ donde V_y es una vecindad de y tal que $V_y \cap D = \{y\}$. Por lo tanto $|V_y \cap H_{n_0}| \leq 1$. Por lo tanto cada H_n es cerrado y discreto. En particular $H_{n'}$ es un cerrado de cardinalidad ω_1 y sin puntos de acumulación, lo cual no puede pasar ya que X es compacto. Por lo tanto $s(X) \leq \omega$. □

DEFINICIÓN 3.31. [7] *Un cardinal τ es un calibre del espacio X si cada familia $\mathcal{F}$ de conjuntos abiertos en X con $|\mathcal{F}| = \tau$ tiene una subfamilia $\mathcal{F}^*$ con $|\mathcal{F}^*| = \tau$ y la $\cap \mathcal{F}^* \neq \emptyset$.*

TEOREMA 3.32. [7] *Sea X un espacio compacto. Sean τ un calibre de X y Y un subconjunto denso de X. Entonces se cumple una de las siguientes afirmaciones.*

a) $d(Y) < \tau$

b) Existe $x \in X$ y $A \subset Y$ con $|A| = cf(\tau)$ y $x \in cl(A)$ tales que si $B \subset A$ y $|B| < \tau$ entonces $x \notin cl(B)$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $d(Y) \geq \tau' = cf(\tau)$. Entonces podemos construir por inducción transfinita una familia $\mathcal{M} = \{M_\alpha : \alpha < \tau'\}$ de subconjuntos de Y y una familia de conjuntos abiertos $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \tau'\}$ tales que para cada $\alpha < \tau'$, se satifagan las siguientes condiciones;

i) $|M_\alpha| < \tau'$.

ii) $cl(M_\alpha) \cap cl(V_\alpha) = \emptyset$.

iii) Si $\alpha_1, ...\alpha_k < \alpha$ y $V_{\alpha_1} \cap ... \cap V_{\alpha_k} \neq \emptyset$, entonces $M_\alpha \cap (V_{\alpha_1} \cap ... \cap V_{\alpha_k}) \neq \emptyset$.

iv) Si $\alpha' < \alpha''$, entonces $M_{\alpha'} \subset M_{\alpha''}$.

Sea $A = \cup\{M_\alpha : \alpha < \tau'\}$. Como τ' es también un calibre de X, existe un $L \subset \tau'$ tal que la familia $\mathcal{V}' = \{V_\alpha : \alpha \in L\}$ tiene la propiedad de la intersección finita y $|L| = \tau'$. Del inciso (iii) se sigue que la familia

$$\mathcal{V}'' = \{cl(A) \cap cl(V_\alpha) : \alpha \in L\}$$

también tiene la propiedad de la intersección finita. De donde $\cap\mathcal{V}'' \neq \emptyset$. por lo cual podemos considerar un $x \in \cap\mathcal{V}''$.

Es claro que $|A| = \tau'$ y que $x \in cl(A)$. Sea $B \subset A$ con $|B| < \tau$. Como $|L| = \tau'$ y τ' es regular existe $\alpha^* \in L$ tal que $B \subset \cup\{M_\alpha : \alpha < \alpha^*\}$. De donde $cl(B) \subset cl(M_{\alpha^*})$, y por el inciso (ii) $cl(M_{\alpha^*}) \cap cl(V_{\alpha^*}) = \emptyset$ y $x \in cl(V_{\alpha^*})$ por lo cual $x \notin cl(B)$. Por lo tanto A es el conjunto deseado. □

COROLARIO 3.33. *Sea X un espacio compacto con calibre τ y $t(X) < \tau$. Entonces*

$$d(X) < \tau.$$

DEMOSTRACIÓN: Como $t(X) < \tau$ entonces no se cumple el inciso (b) del teorema 3.32 de donde $d(X) < \tau$. □

Usando algunos resultados anteriores vamos ahora a obtener algunos importantes resultados que involucran espacios compactos, espacios de funciones, su densidad y su estrechez.

PROPOSICIÓN 3.34. *Sea X un espacio compacto. Entonces*

$$nw(C_p(X)) = d(C_p(X)).$$

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de la proposición 3.6 y los teoremas 3.7 y 2.40 y 2.41. □

TEOREMA 3.35. *Sea X compacto, entonces $t(C_p(X)) = \omega$.*

DEMOSTRACIÓN: Se sigue del teorema 2.44. □

TEOREMA 3.36. *Si $C_p(X)$ es compacto, entonces $t(X) = \omega$.*

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de 2.43. □

TEOREMA 3.37. [2] *Sea Y un espacio compacto y Z un subespacio compacto del espacio $C_p(Y)$. Entonces existe un subconjunto denso M en Z de tipo G_δ tal que en M la topologia generada en Z por la metrica ρ (de la convergencia uniforme) coincide con la topologia generada en Z por $C_p(Y)$. (Ver [2]).*

5. Ejemplos

En esta sección calcularemos las funciones cardinales en algunos espacios compactos con la ayuda de los resultados de esté capitulo.

5.1. I=[0,1]. $I = [0, 1]$ con la topología inducida de $\mathbf{R}$.

De lo ejemplos 2.3.1 y 2.3.2 tenemos que:
i) $|I| = 2^\omega$.
ii) $\psi(I) = \chi(I) = t(I) = \pi\chi(I) = psw(I) = \Delta(I) = \omega$.
iii) $w(I) = nw(I) = \pi w(I) = hd(I) = hl(I) = s(I) = c(I) = e(I) = \omega$.
iv) $O(I) = 2^\omega$.

5.2. El Cubo de Cantor D^μ.

DEFINICIÓN 3.38. *Sea $\mu \geq \omega$ y considereremos $D = \{0,1\}$con la topología discreta. El cubo de Cantor de peso μ es el espacio D^μ con la topología producto con $D^\mu = \Pi_{s\in S} D_s$, $s \in S$, $D_s = D$ para todo $s \in S$ y $|S| = \mu$.*

Del teorema 1.40 tenemos que D^μ es un espacio compacto, de donde se sigue la siguiente afirmación.
i) $|D^\mu| = 2^\mu$.
ii) $l(D^\mu) = \omega$.
iii) $e(D^\mu) = \omega$.

Del teorema 2.51 tenemos que $w(D^\mu) \leq \mu$, lo cual implica que $\chi(D^\mu) \leq \mu$, de donde $\chi(x, D^\mu) \leq \mu$ para todo $x \in D^\mu$. Afirmamos que

TEOREMA 3.39. *$\chi(x, D^\mu) = \mu$ para todo $x \in D^\mu$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existe $x \in D^\mu$ tal que $\chi(x, D^\mu) = \eta < \mu$. Como $\chi(x, D^\mu) = \eta$, sea $\mathcal{V}(x)$ una base de x en D^μ tal que $|\mathcal{V}(x)| = \eta$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que para todo $U \in \mathcal{V}(x)$ $U = \Pi_{s\in S} W_{s\in S}$ con $|K(U)| < \omega$, donde $K(U) = \{s \in S : W_s \neq D_s\}$, ($K(U)$ es llamado el soporte de U). Como D^μ es denso en sí mismo todo abierto en él tiene más de un punto, y como $\cap\mathcal{V}(x) = \{x\}$ entonces $\eta \geq \omega$, ya que si $\eta < \omega$ entonces $\cap\mathcal{V}(x) = \{x\}$ es un abierto con un unico punto, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\eta \geq \omega$.

Sea $K_0 = \cup_{U\in\mathcal{V}(x)} K(U)$. Como $|K_0| < \mu$ y $K_0 \subset S$, existe un $s_0 \in S - K_0$, tal que $P_{s_0}^{-1}(P_{s_0}(x)) = V$ es un abierto tal que $x \in V$ y $U \subsetneq V$ para todo $U \in \mathcal{V}(x)$ lo que implicaría que $\mathcal{V}(x)$ no es base local de x. Por lo tanto $\chi(x, D^\mu) = \mu$ para todo $x \in D^\mu$. □

iv) $\chi(D^\mu) = w(D^\mu) = \mu$.
DEMOSTRACIÓN: Del teorema anterior tenemos que $\chi(D^\mu) = \mu$, de donde $w(D^\mu) = \mu$. □

v) $nw(D^\mu) = \Delta(D^\mu) = psw(D^\mu) = iw(D^\mu) = \mu$.
DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia de los teoremas 3.7, 3.9, la proposición 3.6 y el corolario 3.10. □

vi) $s(D^\mu) = \mu$.
DEMOSTRACIÓN: De la definición 2.2 incisos (i) y (v) tenemos que $s(D^\mu) \leq w(D^\mu)$ de donde $s(D^\mu) \leq \mu$.
Ahora para toda $\alpha < \mu$ definimos :
(i) $f_\alpha(\beta)$=0 si $\beta \neq \alpha$ y $f_\alpha(\beta)$=1 si β=α

(*ii*) $O_\alpha = \Pi_{\alpha\in\mu} W_\beta$ con $W_\beta = D$ si $\beta \neq \alpha$ y $W_\beta = \{1\}$ si $\beta = \alpha$.
Y consideramos $A = \{f_\alpha : \alpha < \beta\}$. Para demostrar que A es discreto en D^μ es suficiente observar que $A \cap O_\alpha = \{f_\alpha\}$. Como $|A| = \mu$ entonces $\mu \leq s(D^\mu)$. De donde obtenemos el resultado deseado. □

En forma analoga tenemos la siguiente afirmación.

TEOREMA 3.40. *$\pi\chi(x, D^\mu) \geq \mu$ para todo $x \in D^\mu$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in D^\mu$ y supongamos que x tiene una π base local $\mathcal{V}$ consistente de conjuntos abiertos canonicos y tal que $|\mathcal{V}| < \mu$. Para cada $V \in \mathcal{V}$, sea $K(V)$ el soporte de V. Como $|\mathcal{V}| < \mu$, existe $\alpha < \mu$ tal que $\alpha \notin K(V)$ para toda $V \in \mathcal{V}$. Es claro que $\pi_\alpha^{-1}(\{x(\alpha)\})$, es una vecindad abierta de x tal que

$$V - \pi_\alpha^{-1}(\{x(\alpha)\}) \neq \emptyset \text{ para toda } V \in \mathcal{V}.$$

De donde $\pi\chi(x, D^\mu) \geq \mu$. □

vii) $\pi\chi(D^\mu) \geq \mu$.
DEMOSTRACIÓN: Se sigue del teorema anterior. □

viii) $\pi\chi(D^\mu) = h\pi\chi(D^\mu) = h\pi w(D^\mu) = \mu$.
DEMOSTRACIÓN: Como $\pi\chi(D^\mu) \leq h\pi\chi(D^\mu) \leq h\pi w(D^\mu) \leq w(D^\mu)$ se sigue entonces el resultado. □

ix) $t(D^\mu) = \mu$.
DEMOSTRACIÓN: Se sigue del teorema 3.16. □

x) $hl(D^\mu) = hd(D^\mu) = \mu$.
DEMOSTRACIÓN: Se sigue del teorema 3.27, el corolario 2.10 inciso (ii) y el inciso (v) de este ejemplo. □

Además como $d(D) \leq \omega$, aplicando el colorario 2.59, tenemos que.
xi) $c(D^\mu) = \omega$.

5.3. La Compactación de Stone-Čech de ω, $\beta\omega$. Sea $\beta\omega$ la compactación de Stone-Čech. de ω.
i) $l(\beta\omega) = e(\beta\omega) = \omega$
ii) $d(\beta\omega) = \omega$.
DEMOSTRACIÓN: Se sigue del hecho de que ω es denso en $\beta\omega$. □

iii) $c(\beta\omega) = \omega$.
iv) $\pi w(\beta\omega) = \omega$.
DEMOSTRACIÓN: Es suficiente observar que $\{\{n\} : n \in \omega\}$ es una $\pi - base$ de $\beta\omega$. □

v) $\pi\chi(\beta\omega) = \omega$.
DEMOSTRACIÓN: Se sigue del teorema 2.19. □

El siguiente resutado nos permitirá calcular algunas más de las funciones cardinales en $\beta\omega$.

PROPOSICIÓN 3.41. *$\beta\omega - \omega$ tiene una familia celular de cardinalidad 2^ω.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\varphi : \omega \to Q$ una función biyectiva.(Q es el conjunto de numeros racinales). Para cada $r \in (R - Q)$ elijamos una única sucesión creciente $\{r_n\}_{n\in\omega} \subseteq Q$ tal que r_n converja a r. Ahora para cada sucesión r_n que converja a r definimos $E_r = \{\varphi^{-1}(r_i) : i \in \omega\}$. $(E_r \subseteq \omega\ )$ E_r. Sea $\xi = \{E_r : r \in (R - Q)\ \}$. Es claro que $|\xi| = |R - Q| = 2^\omega$. De donde para cualesquiera E_r,$E_s \in \xi$ tenemos que: $cl_{\beta\omega}(E_r \cap E_s) = cl_{\beta\omega}E_r \cap cl_{\beta\omega}E_s$. Además para cualesquiera E_r,$E_s \in \xi$ si $|E_r \cap E_s| = \omega$ entonces $r = s$ de donde $|E_r \cap E_s| < \omega$, y como $\beta\omega$ es T_2 implica que $E_r \cap E_s$ es un conjunto cerrado en $\beta\omega$.

Como cada $E_r \in \xi$ es un subconjunto de ω entonces E_r es un subconjunto abierto y cerrado en ω lo cual implica que $cl_{\beta\omega}E_r$ es un conjunto abierto y cerrado en $\beta\omega$ para cada $E_r \in \xi$.

Con lo cual obtenemos que $cl_{\beta\omega}(E_r \cap E_s) = E_r \cap E_s$ para cualesquiera E_r, $E_s \in \xi$.

Ahora para cada $E_r \in \xi$ definamos $E'_r = cl_{\beta\omega}E_r - \omega$. Sea $\xi' = \{E'_r : E_r \in \xi\}$ es claro que $|\xi'| = |\xi|$de donde $|\xi'| = 2^\omega$.

Como $E'_r \cap E'_s = (cl_{\beta\omega}E_r \cap cl_{\beta\omega}E_s) - \omega = (E_r \cap E_s) - \omega = \emptyset$. Además como $E'_r = cl_{\beta\omega}E_r - \omega = cl_{\beta\omega}E_r \cap (\beta\omega - \omega)$ lo cual implica que E'_r es un conjunto abierto y cerrado en $\beta\omega - \omega$. De donde ξ' es una familia celular en $\beta\omega - \omega$ con cardinalidad $|\xi'| = 2^\omega$. □

vi) $s(\beta\omega) \geq 2^\omega$.
DEMOSTRACIÓN: $s(\beta\omega) \geq s(\beta\omega - \omega) \geq c(\beta\omega - \omega) \geq 2^\omega$. □

vii) $w(\beta\omega) = 2^\omega$.
DEMOSTRACIÓN: Se sigue del inciso (vi) □

viii) $\Delta(\beta\omega) = nw(\beta\omega) = psw(\beta\omega) = 2^\omega$.
DEMOSTRACIÓN: Se sigue de los teoremas 3.7, 3.8 y el corolario 3.10. □

ix) $s(\beta\omega) = 2^\omega$.
DEMOSTRACIÓN: Se sigue de los incisos (vi) y (vii). □

x) $hl(\beta\omega) = 2^\omega$.
DEMOSTRACIÓN: Se sigue de que $s(\beta\omega) \leq hl(\beta\omega) \leq w(\beta\omega)$. □

xi) $hd(\beta\omega) = 2^\omega$.
DEMOSTRACIÓN: Se sigue de que $s(\beta\omega) \leq hd(\beta\omega) \leq w(\beta\omega)$. □

xii) $h\pi w(\beta\omega) = 2^\omega$.
DEMOSTRACIÓN: Es inmediato del teorema 3.27 y el inciso (xi). □

xiii) $|\beta\omega| = 2^{2^\omega}$.
DEMOSTRACIÓN: Se sigue del colorario 1.23, teorema 3.2. □

xiv) $O(\beta\omega) = 2^{2^\omega}$.
DEMOSTRACIÓN: Se sigue del corolario 1.23. □

xv) Todo subconjunto infinito cerrado $A \subset \beta\omega$ satisface $|A| = 2^{2^\omega}$.
DEMOSTRACIÓN: Sea A un subconjunto infinito cerrado de $\beta\omega$. Como $\beta\omega$ es regular y A es infinito existe una familia de abiertos $\{V_n : n \in \omega\}$ tal que $cl(V_n) \cap cl(V_m) = \emptyset$ para todo $n \neq m$ y $A \cap V_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$.

Para cada $n \in \omega$ elijamos un $a_n \in A \cap V_n$ y consideremos el conjunto $A_0 = \{a_n : a_n \in A \cap V_n\}$ el cual es un conjunto discreto,por lo cual A_0 es homeomorfo a ω. Con lo cual obtenemos que βA_0 es homeomorfo a $\beta\omega$. Sean Y un espacio compacto, $f : A_0 \to Y$ una función continua, y $y_0 \in Y$. Definamos $g : \omega \to Y$ como $g(x) = f(a_n)$ si $x \in V_n \cap \omega$ y $g(x) = y_0$ si $x \in \omega - \cup V_n$. Como g es una función continua ésta tiene una extensión continua $G : \beta\omega \to Y$. Además como ω es denso en $\beta\omega$ tenemos que $cl(V_n) = cl(V_n \cap \omega)$ de donde $a_n \in cl(V_n)$. De donde $G(a_n) \in G(cl(V_n \cap \omega)) \subseteq cl(G(V_n \cap \omega)) = cl(g(V_n \cap \omega)) = f(a_n)$. Por lo cual $G(a_n) = f(a_n)$. Con lo cual obtenemos que A_0 es C^*- encajado en $\beta\omega$ por lo cual $cl_{\beta\omega} A_0 = \beta A_0$. Como $|\beta A_0| = 2^{2^\omega}$ y $cl_{\beta\omega} A_0 \subset A$, entonces $|A| = 2^{2^\omega}$. □

xvi) Existe un $p \in \beta\omega$ tal que $\chi(p, \beta\omega) = 2^\omega$.
DEMOSTRACIÓN: Es suficiente observar que del (xv) se sigue que si $p \in \beta\omega - \omega$, p no puede tener una base local numerable. De donde aplicando el inciso (vii) obtenemos el resultado deseado. □

xvii) $\chi(\beta\omega) = 2^\omega$.
DEMOSTRACIÓN: Del inciso (xvi) tenemos que $2^\omega \leq \chi(\beta\omega) \leq w(\beta\omega)$. □

xviii) $\psi(\beta\omega) = 2^\omega$.
DEMOSTRACIÓN: Se sigue del teorema 3.1. □

5.4. El Cuadrado Lexicografico $X_{\mathcal{L}}$. Consideremos el espacio $X = X_{\mathcal{L}}$ el cuadrado lexicografico (Vease preliminares y el inciso 6 en 5.8 del capítulo 2).
i) Es claro que $|X_{\mathcal{L}}| = 2^\omega$.
ii) Sea $Y \subset X$ con $Y = \{(x, y) : y = \frac{1}{2}\}$. Démosle a Y la topológia inducida. Se sigue que Y es un espacio discreto de donde $l(Y) = 2^\omega$. Por lo tanto $hl(X_{\mathcal{L}}) = 2^\omega$.
iii) En forma analoga al inciso (iv) obtenemos que $d(Y) = 2^\omega$ de donde se sigue que $hd(X_{\mathcal{L}}) = 2^\omega$.
iv) Ahora como $hd(X_{\mathcal{L}}) \leq nw(X_{\mathcal{L}}) \leq |X_{\mathcal{L}}|$ obtenemos que $nw(X_{\mathcal{L}}) = 2^\omega$.
v) Del inciso (iv) y teorema 3.7 tenemos que $w(X_{\mathcal{L}}) = 2^\omega$.
vi) Observemos que la familia $\mathcal{C} = \{((x, y - \frac{1}{n}), (x, y + \frac{1}{n})) : 0 < x < 1 \text{ y } 0 < y < 1\}$ resulta ser una familia celular de $X_{\mathcal{L}}$ con $|\mathcal{C}| = 2^\omega$ de donde $c(X_{\mathcal{L}}) \geq 2^\omega$. Por otro lado como $c(X_{\mathcal{L}}) \leq hd(X_{\mathcal{L}})$ tenemos que $c(X_{\mathcal{L}}) = 2^\omega$.
vii) De los incisos (iii) y (vii) tenemos que $d(X_{\mathcal{L}}) = 2^\omega$.
vii) También podemos observar que $\chi(X_{\mathcal{L}}) = \omega$.

CAPÍTULO 4

Funciones Cardinales en Compactos Diádicos, de Eberlein, de Gul'ko y de Corson

En este capítulo definiremos lo que es un compacto Diádico, un compacto de Eberlein, un compacto de Gul'ko y un, compacto de Corson. Veremos que algunos de los resultados obtenidos en el capitulo anterior son mejorados en cada una de estas clases de espacios.

Los resultados presentados en esta sección los podemos encontrar en el articulo de Arhangel'skiĭ [8]. Iniciaremos este capítulo dando el Lema de Factorización de Arhangel'skiĭ que nos será de gran utilidad.

Antes de dar el Lema de Factorización de Arhangel'skiĭ estableceremos la siguiente notación. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in M}$ una familia de espacios topológicos, y $X = \Pi_{\alpha\in M}X_\alpha$ el producto topológico de los X_α. Si $L \subset M$ es un subconjunto de índices, denotaremos como X_L, a la $L-$ésima cara de $X = \Pi_{\alpha\in M}X_\alpha$ y como p_L a la proyección natural de X en X_L, es decir $p_L(f) = f\,|_L$ para cada $f \in X$.

Para presentar el Lema de Factorización de Arhangel'skiĭ necesitaremos las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 4.1. *Sean, X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Una famila $\mathcal{U}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X es una $\pi-$base de f en x, si para cada abierto W en Y tal que $f(x) \in W$, $x \in cl(\cup\{U \in \mathcal{U} : f(U) \subset W\})$.*

DEFINICIÓN 4.2. *Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función continua y $x \in X$. El $\pi-$caracter de f en x, el cual denotaremos como $\pi\chi(f, x)$ es*

$$\pi\chi(f,x) = mín\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \text{ es una } \pi - \text{base de } f \text{ en } x\}.$$

DEFINICIÓN 4.3. *Sean, X, Y espacios topologicos y $f : X \to Y$ una función continua, el $\pi-$caracter de f en X el cual denotaremos como $\pi\chi(f)$, es*

$$\pi\chi(f) = sup\{\pi\chi(f,x) : x \in X\}$$

DEFINICIÓN 4.4. *Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función continua y $x \in X$. Una familia $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos no vacíos de X es una base de f en x, si $x \in \cap\mathcal{U}$ y para cada abierto W en Y tal que $f(x) \in W$, existe un abierto $U \in \mathcal{U}$ tal que $f(U) \subset W$.*

DEFINICIÓN 4.5. *Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función continua y $x \in X$. El carácter de f en x, el cual denotaremos como $\chi(f, x)$, es*

$$\chi(f,x) = mín\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \text{ es base de } f \text{ en } x\}.$$

DEFINICIÓN 4.6. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. El carácter de f el cual denotaremos como $\chi(f)$, es*

$$\chi(f) = sup\{\chi(f,x) : x \in X\}$$

Con respecto a las definiciones anteriores presentamos a continuación algunas relaciones importantes.

TEOREMA 4.7. *Sea $f : X \to Y$ una función continua. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones.*
i) $\chi(f,x) \leq \chi(f(x),Y)$ para cada $x \in X$.
ii) Si $c(X) \leq \kappa$, $\mathcal{B}$ es una $\pi-$base de X, y $\pi\chi(f,x) \leq \kappa$, entonces existe una familia $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$, con $|\mathcal{U}| \leq \kappa$, tal que $\mathcal{U}$ es una $\pi-$base de f en x.

DEMOSTRACIÓN: i) Es suficiente observar que si $\mathcal{V}$ es una base local de $f(x)$ en Y, entonces la familia $\mathcal{U} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}\}$ es una base de f en x.
ii) Sea $\mathcal{U}$ una $\pi-$base de f en x con $|\mathcal{U}| \leq \pi\chi(f,x)$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, fijemos $\mathcal{U}_U$, una subfamilia de $\mathcal{B}$ ajena maximal de tal manera que $\bigcup\mathcal{U}_U \subset U$. Observemos que las familias $\mathcal{U}_U$ satisfacen que $U \subset cl(\bigcup\mathcal{U}_U)$(Ya que de lo contrario podemos elegir un $B \in \mathcal{B}$ de tal forma que $B \subset U - cl(\bigcup\mathcal{U}_U)$. De donde resulta que $\mathcal{U}_U$ está contenido en forma propia en $\mathcal{U}_U \cup \{B\}$, lo cual contradice la maximalidad de $\mathcal{U}_U$).

Ahora como $c(X) \leq \kappa$, se sigue que $|\mathcal{U}_U| \leq \kappa$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Consideremos ahora la familia $\mathcal{W} = \cup_{U \in \mathcal{U}}\mathcal{U}_U$. Es claro que $|\mathcal{W}| \leq \kappa$, y que $\mathcal{W}$ es una $\pi-$base de f en x. Para ver esto, sea W un abierto en Y tal que $f(x) \in W$, y sea G un abierto en X tal que $x \in G$. Como $\mathcal{U}$ es una $\pi-$base de f en x,

$$x \in cl(\cup\{U \in \mathcal{U} : f(U) \subset W\}).$$

Entonces, existe un $V \in \mathcal{U}$ tal que $f(V) \subset W$ y $G \cap V \neq \emptyset$. Como $V \subset cl(\bigcup\mathcal{U}_V)$ y $V \cap G \neq \emptyset$, $G \cap (\bigcup\mathcal{U}_V) \neq \emptyset$. De donde concluimos que existe $U \subset \mathcal{U}_V \subset \mathcal{W}$ tal que $G \cap U \neq \emptyset$. Observe ahora que como $\mathcal{U}_V \subset V$, $f(U) \subset W$. Así que

$$G \cap \{U \in \mathcal{W} : f(U) \subset W\} \neq \emptyset.$$

Por lo tanto

$$x \in cl(\cup\{U \in \mathcal{W} : f(U) \subset W\}).$$

□

Ahora daremos el Lema de Factorización de Arkhagel'skiĭ, del cual omitiremos su demostración. (Ver [8]).

LEMA 4.8. *(De Factorización de Arkhangel'skiĭ) (L.F.A) Sean Y un espacio T_3, $X = \Pi_{\alpha \in M}X_\alpha$, $D \subset X$ un subconjunto denso, $f : D \to Y$ una función continua y $\omega \leq \kappa$. Supongamos que para todo $L \subset M$, tal que $|L| \leq \kappa$ se satisface que $hd(p_L(D)) \leq \kappa$. Entonces existen*
i) $L^* \subset M$
ii) $E \subset p_{L^*}(D)$ cerrado en $p_{L^*}(D)$
iii) $F \subset D$ cerrado en D y
iv) una función continua $\phi : E \to Y$ tales que
1) $|L^*| \leq \kappa$
2) $p_{L^*}(F) = E$
3) $f(x) = \phi(p_{L^*}(x))$ para todo $x \in F$
4) $Z \subset F$, donde $Z = \{d \in D : \pi\chi(f,d) \leq \kappa\}$
En particular si Z es denso en D entonces $F = D$ y $f = \phi(p_{L^*}|_D)$

1. Funciones Cardinales en Compactos Diádicos

Veremos en esta sección cómo en la clase de los compactos diádicos la amplitud, el caracter, el peso, el π caracter y la estrechez coinciden. Además se demostrará que todo compacto metrizable es diádico.

DEFINICIÓN 4.9. *Diremos que un espacio compacto X es un Espacio Compacto Diádico si existe un cardinal $\mu \geq \omega$, tal que X es la imagen continua del Cubo de Cantor D^μ.*

Recordemos que D^μ es el espacio topológico con la topología producto, donde $D^\mu = \Pi_{s\in S} D_s$ con $D_s = \{0, 1\}$ con la topología discreta, para todo $s \in S$ y $|S| = \mu$. Del ejemplo 5.2 inciso (x) tenemos el siguiente resultado.

LEMA 4.10. *Sea $L \subset S$ tal que $|L| = \eta < \mu$. Entonces*
i) $p_L(D^\mu) = D^\eta$
ii) $hd(p_L(D^\mu)) = \eta$

PROPOSICIÓN 4.11. *Sea X un espacio compacto diádico. Entonces*
i) $c(X) = \omega$.
ii) $e(X) = \omega$

DEMOSTRACIÓN: i) Como X es un espacio compacto diádico, existe una función continua y sobreyectiva $f : D^\eta \to X$, para algun $\eta \geq \omega$. Del ejemplo 5.2 tenemos que $c(D^\eta) = \omega$. Aplicando la proposición 2.47 inciso (i) obtenemos que $c(X) = \omega$.
ii) Del ejempo 5.2 tenemos que $e(D^\eta) = \omega$, aplicando la proposición 2.48 obtenemos el resultado deseado. □

TEOREMA 4.12. *(Šanin)*[18] *Sea X un espacio compacto diádico con $w(X) = \mu$. Entonces existe una función continua del $\mu-$cubo de Cantor D^μ sobre X.*

DEMOSTRACIÓN: Como X es un espacio compacto diádico, existe un cardinal $\eta \geq \omega$ y una función continua y sobreyectiva $f : D^\eta \to X$. Como f es sobreyectiva, por el teorema 2.47, tenemos que $w(X) \leq w(D^\eta)$; de donde $\eta \geq \mu$.

Ahora, por el lema anterior tenemos que para todo $L \subset \eta$ tal que $|L| = \mu$, $hd(p_L(D^\eta)) = \mu$. Entonces por el lema 4.8 (L.F.A), existe una función continua $g : D^\eta \to D^\mu$, tal que $f = g_\circ p_L$.

Es claro que

$$X = f(D^\eta) = (g_\circ p_L)(D^\eta) = g(p_L(D^\eta)) = g(D^\mu)$$

con lo cual obtenemos que $g(D^\mu) = X$. □

Compárense los siguientes resultados con aquellos dados en la sección 2 del capítulo anterior.

TEOREMA 4.13. *(Esenin-Volpin)* [16] *Sea X un espacio compacto diádico. Entonces*

$$w(X) = \chi(X)$$

DEMOSTRACIÓN: i) $\chi(X) \leq w(X)$. Se sigue de las definiciones 2.2 inciso (i) y 2.18 inciso (i).
ii) $w(X) \leq \chi(X)$. Como X es un espacio compacto diádico, existe una función continua y sobreyectiva $f : D^\eta \to X$, para algún $\eta \geq \mu$, y supongamos que $\chi(X) =$

κ. Por el lema 4.8 L.F.A, existe un subconjunto $L \subset \eta$ con $|L| = \kappa$, y una función continua $g : D^\kappa \to X$ tal que $f = g_\circ p_L$. Ahora como X y D^κ, son espacios compactos y g es una función continua y sobreyectiva se sigue

$$w(X) \leq w(D^\kappa) \leq \kappa = \chi(X)$$

Por lo tanto $w(X) \leq \chi(X)$. De donde $w(X) = \chi(X)$. □

Ahora es claro que:

COROLARIO 4.14. *Sea X un espacio compacto diádico con $\chi(X) = \omega$. Entonces*

$$w(X) = \omega,$$

o sea que X es metrizable.

COROLARIO 4.15. *Sea X un espacio compacto diádico. Entonces*

$$\psi(X) = w(X).$$

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de los teoremas 3.1 y 4.13 (Esenin -Volpin). □

TEOREMA 4.16. [8] *Sea X un espacio compacto diádico. Sea*

$$X_0 = \{x \in X : \pi\chi(x, X) \leq \kappa\}.$$

Si $cl(X_0) = X$ entonces

$$w(X) \leq \kappa.$$

DEMOSTRACIÓN: Como X es un espacio compacto diádico, existe una función continua $f : D^\eta \to X$ para algun $\eta \geq \omega$. Es claro que f es una función perfecta y por el L.F.A. existen:
i) $L \subset \eta$ con $|L| \leq \kappa$,
ii) $E \subset D^\kappa$ cerrado,
iii) $F \subset D^\eta$ cerrado y
iv) una función continua $g : E \to X$ tales que:
a) $p_L(F) = E$,
b) para cada $a \in F$, $f(a) = g(p_L(a))$ y
c) $Z = \{a \in D^\eta : \pi\chi(f, a) \leq \kappa\} \subset F$.
Como

$$\{z_x : x \in X_0\} \subset \{a \in D^\eta : \pi\chi(f, a) \leq \kappa\} \subset F$$

se satisface que

$$f(\{z_x : x \in X_0\}) \subset f(F) \subset X.$$

Como $f(\{z_x : x \in X_0\}) = Z$, y $f(F)$ es compacto entonces $f(F) = cl(Z)$; de donde $f(F) = X$, lo cual implica que $g(E) = X$.

Por lo tanto

$$w(X) \leq w(E) \leq \kappa.$$

Por lo que $w(X) \leq \kappa$. □

COROLARIO 4.17. *Sea X un espacio compacto diádico. Entonces*

$$w(X) = \pi\chi(X) = t(X).$$

DEMOSTRACIÓN: i) $\pi\chi(X) \leq t(X)$. Se sigue del teorema 3.16.

ii) $w(X) \leq t(X)$. Sea $\pi\chi(X) = \kappa$. Entonces $\{x \in X : \pi\chi(x, X) \leq \kappa\} = X$, de donde, por el teorema 4.16, $w(X) \leq \kappa$. Con lo cual obtenemos el resultado deseado. □

Del corolario anterior obtenemos el siguiente resultado:

COROLARIO 4.18. *Sea X un espacio compacto diádico con $t(X) = \omega$. Entonces*

$$w(X) = \omega,$$

o sea que X es metrizable.

Del teorema 4.16 se obtiene el siguiente resultado.

COROLARIO 4.19. *(Efimov) Sea X un espacio compacto diádico. Si existe un subconjunto $X_0 \subset X$, tal que $cl(X_0) = X$, y $\chi(x, X) = \kappa$ para todo $x \in X_0$. Entonces*

$$\chi(X) = w(X) = \kappa.$$

COROLARIO 4.20. *Sea X un espacio compacto diádico. Entonces*

$$s(X) = t(X).$$

DEMOSTRACIÓN: Del teorema 3.18 tenemos que $t(X) \leq s(X)$, y del corolario 4.17 tenemos que $t(X) = w(X)$, de donde $t(X) = s(X)$. □

COROLARIO 4.21. *Sea X un espacio compacto diádico con $s(X) = \omega$. Entonces*

$$w(X) = \omega,$$

o sea que X es metrizable.

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de los corolarios 4.17 y 4.20. □

Ahora veremos la relación entre el peso y la cardinalidad de un compacto diádico. Compárese este resultado con el teorema 3.5.

COROLARIO 4.22. *Sea X un espacio compacto diádico con $w(X) = \eta$, con $\eta \geq \omega$. Entonces*

$$|X| = 2^{\eta}.$$

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de los teoremas 4.13, 3.1, 3.2 y la 3.3. □

TEOREMA 4.23. *Todo espacio compacto Y, con $w(Y) = \eta$, es imagen continua de un subespacio cerrado del Cubo de Cantor D^{η}.*

DEMOSTRACIÓN: Sea Y un espacio compacto con $w(Y) = \eta$. Del teorema 2.56 (del cubo de Alexandeoff) se sigue que Y es homeomorfo a un subespacio del cubo de Alexandroff F^{η}. Por simplicidad supondremos que $Y \subset F^{\eta}$. Como F^{η} y D^{η} son los mismos como conjuntos, y todo elemento de la base canónica $\mathcal{B}$ de F^{η} es un abierto y cerrado en D^{η}, entonces la función identidad $h : D^{\eta} \to F^{\eta}$ es continua

Veremos que las hipótesis del teorema 1.39 se satisfacen si tomamos

$$A = h^{-1}(Y), X = cl(A) \subset D^{\eta} \text{ y } f = h|_A : A \to Y.$$

Sean B_1, B_2, dos subconjuntos cerrados ajenos en Y. Entonces existen subconjuntos cerrados K_1, K_2, en F^η, tales que $B_i = Y \cap K_i$, para $i = 1, 2$. Dado que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, se sigue que $Y \subset F^\eta - (K_1 \cap K_2)$, y como $F^\eta - (K_1 \cap K_2)$, es un conjunto abierto, para todo $x \in Y$, existe un abierto $U_x \in \mathcal{B}$, tal que $x \in U_x \subset F^\eta - (K_1 \cap K_2)$. Ahora como Y es compacto, existe $x_1, ..., x_n \in Y$ tales que

$$Y \subset U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n} \subset F^\eta - (K_1 \cap K_2).$$

Sea $U = U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n}$. Resulta que U es un abierto y cerrado en D^η tal que

$$A \subset U \text{ y } X = cl(A) \subset U \subset D^\eta - (K_1 \cap K_2).$$

Como

$$cl(f^{-1}(B_i)) = cl(A \cap K_i) \subset cl(A) \cap K_i \text{ para } i = 1, 2$$

se sigue que:

$$cl(f^{-1}(B_1)) \cap cl(f^{-1}(B_2)) \subset cl(A) \cap K_1 \cap K_2 \subset (D^\eta - (K_1 \cap K_2)) \cap K_1 \cap K_2 = \emptyset,$$

que es la hipotesis del teorema 1.39. Por lo cual existe una extensión continua $F : X \to Y$, de la función f. Como $Y = f(A) \subset F(X)$, el espacio Y es imagen continua del subespacio cerrado X de D^η. □

TEOREMA 4.24. *Sea $C = D^\omega$, el conjunto de Cantor. Entonces todo subconjunto cerrado A de C es un retracto de C.*

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de la afirmación siguiente. Sea X un espacio metrico, compacto y totalmente disconexo y A un subconjunto cerrado de X. Entonces A es un retracto de X (Ver [19]). □

Como una consecuencia inmediata de los dos últimos teoremas tenemos que.

TEOREMA 4.25. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces X es un espacio compacto diádico.*

TEOREMA 4.26. *Sea X un espacio compacto linealmente ordenado diádico. Entonces*

$$w(X) = \omega,$$

o sea X es metrizable.

DEMOSTRACIÓN: Sea X un espacio compacto linealmente ordenado diádico. Como X es linealmente ordenado $\chi(X) \leq c(X)$ (Ver [27]). De donde, de la proposición 4.11 y del teorema 4.13 tenemos el resultado deseado. □

TEOREMA 4.27. *Sea X un espacio compacto diádico, con $l(C_p(X)) = \omega$. Entonces*

$$w(X) = \omega.$$

DEMOSTRACIÓN: Como $l(C_p(X)) = \omega$ del teorema 2.43 (de Asanov) tenemos que $t(X) = \omega$ y del corolario 4.17 obtenemos el resultado deseado. □

Recordemos que ω no es pseudocompacto y del ejemplo 5.3 incisos (v) y (vii) del capitulo anterior junto con el corolario 4.17 de este capítulo tenemos que $\beta\omega$ no es diádico.
Lo cual nos permite afirmar que si βX es diádico entonces X es pseudocompacto.

Observemos que tanto ω como R no son pseudocompactos y si X es homeomorfo a R entonce X no es pseudocompacto y βX es homeomorfo a βR lo cual nos permite dar la siguiente afirmación.

PROPOSICIÓN 4.28. *Sea X un espacio metrizable. Entonces βX es compacto diádico si y sólo si βX es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN: Si βX es compacto diádico, entonces X es pseudocompacto y como X es metrizable entonces este es compacto. De donde $\beta X = X$, por lo cual βX es metrizable.

Ahora si βX es metrizable, del teorema 4.25 tenemos que βX es compacto diádico. □

Aplicando el teorema 4.13 (Esenin-Volpin) y el ejemplo 5.4 nos permite afirmar que $X_{\mathcal{L}}$ no es compacto diádico.

En forma analoga si $\mu > \omega$ aplicando el lema 4.11 inciso (i) podemos concluir que $A(\mu)$ no es diádico.

2. Funciones Cardinales en Espacios Compactos de Eberlein

En las siguientes secciones analizaremos algunas funciones cardinales en subespacios compactos de algunos subconjuntos densos importantes en espacios productos, espacios de funciones y Σ productos.

Empezaremos con los espacios compactos de Eberlein que tienen relevancia en analisis funcional. Demostraremos que todo compacto de Eberlein homogeneo es primero numerable, que la intersección de los compactos de Eberlein y los compactos diádicos son los compactos metrizables, y que la celularidad y el peso coinciden cuando se trata de compactos de Eberlein.

DEFINICIÓN 4.29. *Sea Y un espacio compacto. Y es llamado un espacio compacto de Eberlein si existe un espacio compacto X tal que Y es homeomorfo a un subespacio de $C_p(X)$.*

TEOREMA 4.30. *Sea X un espacio $\sigma-$compacto. Entonces existe un espacio compacto Y tal que $C_p(X)$ es homeomorfo a un subespacio de $C_p(Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $Y = C_p(X)$, y sea Z la imagen de X bajo la función canónica $\psi_X : X \to C_pC_p(X)$. Entonces Z es homeomorfo a X. Sea $h : C_p(Y) \to C_p(Y,(-1,1))$ el homeomorfismo definido en la proposición 2.38. Tenemos que $h(Z)$ es un subespacio $\sigma-$compacto de $C_p(Y)$. Sea $h(Z) = \cup\{F_i : i \in \omega\}$ con los F_i compactos. Entonces los $\Phi_i = \{\frac{1}{i}f : f \in F_i\}$ también son compactos, para todo $i \in \omega$; además si $g \in \Phi_i$, entonces $|g(Y)| < \frac{1}{i}$ para todo i $\in \omega$. Sea $g_0(y) = 0$ para todo $y \in Y$, entonces el subespacio $\Phi = \cup\{\Phi_i : i \in \omega\} \cup \{g_0\}$ también es compacto. Es claro que la familia de funciones Φ también generan la topología de Y. De donde la función canónica $\psi_Y : Y \to C_p(\Phi)$ es un homeomorfismo del espacio $Y = C_p(X)$ sobre un subespacio de $C_p(\Phi)$. □

TEOREMA 4.31. *Sea X un espacio compacto con $w(X) = \omega$. Entonces*

X es un compacto de Eberlein.

DEMOSTRACIÓN: Del teorema 2.40 se tiene que $nw(X) = nw(C_p(X))$, y del teorema 3.7 sabemos que $nw(X) = w(X) = \omega$, de donde $C_p(X)$ es separable. Sea $Y \subset C_p(X)$ un subconjunto denso numerable. Como Y separa los puntos de X y éste es compacto, la función canónica $\psi : X \to C_p(Y)$ manda a X homeomorfamente sobre $\psi(X)$. Ahora como Y es $\sigma-$compacto, por el teorema 4.30 existe un compacto Z tal que $C_p(Y)$ es homeomorfo a un subespacio de $C_p(Z)$. De donde $\psi(X)$ y por lo tanto X son espacios compactos de Eberlein. □

Del teorema anterior obtenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 4.32. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces*

X es un compacto de Eberlein

PROPOSICIÓN 4.33. *Para todo cardinal τ, $A(\tau)$ es un espacio compacto de Eberlein. ($A(\tau)$ es la compactación a un punto del discreto $D(\tau)$ de cardinalidad τ).*

DEMOSTRACIÓN: De la proposición 2.45 tenemos el resultado deseado. □

TEOREMA 4.34. *Sea X un espacio compacto de Eberlein. Entonces X es un espacio monolítico, Fréchet-Urysohn y existe un subconjunto denso Y en X con $\chi(x, X) = \omega$ para todo $x \in Y$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X un compacto de Eberlein. Entonce $X \subset C_p(F)$ para algún compacto F. De donde $t(X) \leq t(C_p(F))$, y del teorema 2.45 tenemos que $t(C_p(F)) \leq l(F) \leq \omega$. De las proposiciones 3.25 y 3.26 $C_p(F)$ es monolítico. Por lo cual X es un compacto monolítico (ya que el ser monolítico es una propiedad hereditaria) con $t(X) = \omega$. De donde el resultado se sigue de los teoremas 3.25 y 3.26 . □

DEFINICIÓN 4.35. *Un espacio topológico X es homogeneo si para cualesquiera $x,y \in X$ existe un homeomorfismo h de X en sí mismo tal que $h(x) = y$.*

Como una consecuencia del teorema 4.34 tenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 4.36. *Sea X un compacto de Eberlein homogeneo. Entonces*

$$\chi(X) = \omega$$

COROLARIO 4.37. *Sea X un compacto de Eberlein homogeneo. Entonces*

$$|X| \leq 2^\omega$$

DEMOSTRACIÓN: Se sigue del corolario 4.36 y los teoremas 3.1, 3.2. □

Del teorema 3.37 se obtiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.38. *Sea X un espacio compacto de Eberlein. Entonces X contiene un subespacio denso metrizable.*

Veamos ahora uno de los resultados centrales de esta sección.

TEOREMA 4.39. *Sea X un espacio compacto de Eberlein. Entonces*

$$c(X) = w(X)$$

DEMOSTRACIÓN: i) $c(X) \leq w(X)$. Se sigue de los teoremas 2.5, incisos (i),(ii) y 3.7.
ii) $w(X) \leq c(X)$. De la proposición anterior X contiene un subespacio denso metrizable Y. Del ejemplo 2.3.2, como Y es metrizable, $d(X) \leq d(Y) = c(Y) = c(X)$, y del teorema 4.34 tenemos que X es monolítico por lo cual $nw(X) \leq d(X)$. Del teorema 3.7, $w(X) = nw(X)$, por lo cual $w(X) \leq c(X)$. De donde $c(X) = w(X)$. □

COROLARIO 4.40. *Sea X un espacio compacto de Eberlein Diádico. Entonces*

$$w(X) = \omega$$

DEMOSTRACIÓN: Del teorema 4.39 tenemos que $c(X) = w(X)$ y de la proposición 4.11 , tenemos que $c(X) = \omega$ de donde $w(X) = \omega$ y por lo tanto X es metrizable. □

TEOREMA 4.41. *Sea X un espacio compacto. Entonces*

$$c(X) = sup\{w(F) : F \subset C_p(X), \text{ con } F \text{ compacto}\}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $c(X) = \tau$ y λ =sup$\{w(F) : F \subset C_p(X)$ y F compacto$\}$.

i) $\tau \leq \lambda$. Se sigue de la proposición 2.46 .

ii) $\lambda \leq \tau$. Ahora sea $F \subset C_p(X)$ con F compacto. La imagen del compacto X bajo la función canónica $\psi : X \to C_p(F)$ es un compacto Φ que separa los puntos de F. Además como ψ es una función continua se sigue que $c(\Phi) \leq c(X) \leq \tau$. Como F es homeomorfo a un subespacio de $C_p(X)$, y como F y Φ son compactos tenemos que

$$w(F) = nw(F) \leq nw(C_p(\Phi)) = nw(\Phi) = w(\Phi);$$

y como Φ es un cumpacto de Eberlein, del teorema 4.39 tenemos que $w(\Phi) = c(\Phi)$, de donde $w(F) \leq \tau$, y por lo tanto $\lambda \leq \tau$. □

COROLARIO 4.42. *Sean X un espacio compacto y Y un espacio topológico tal que $C_p(X)$ es homeomorfo a $C_p(Y)$. Entonces*

$$c(Y) \leq c(X)$$

DEMOSTRACIÓN: Por la proposición 2.46 tenemos que $c(Y) \leq$sup$\{w(F) : F \subset C_p(Y)$ con F compacto$\}$, y como X es compacto, por el teorema 4.41

$$c(X) = \sup\{w(F) : F \subset C_p(X) \text{ con } F \text{ compacto}\}.$$

De donde obtenemos el resultado deseado. □

COROLARIO 4.43. *Sean X, Y espacios compactos tales que $C_p(X)$ es homeomorfo a $C_p(Y)$. Entonces*

$$c(X) = c(Y)$$

DEMOSTRACIÓN: Se sigue del corolario 4.42. □

En el capítulo anterior vimos que si X es un espacio métrico compacto, entonces X es un compacto Diádico, y en este capítulo tenemos que si X es un métrico compacto, entonces X es un compacto de Eberlein, y si X es un compacto de Eberlein Diádico, entonces X es metrizable lo cual nos da el siguiente resultado.

TEOREMA 4.44. *La intersección de la clase de los compactos Diádicos con la clase de los compactos de Eberlein es la clase de los métricos compactos.*

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de la observación anterior. □

COROLARIO 4.45. *Sea X un espacio compacto con $c(X) = \omega$. Entonces todo subespacio compacto $F \subset C_p(X)$ es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN: Del teorema 4.41 $w(F) \leq c(X) = \omega$, para todo subespacio compacto $F \subset C_p(X)$. De donde $w(F) = \omega$. □

TEOREMA 4.46. *Sea X un espacio compacto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
i) X es un compacto de Eberlein.
ii) Existe un compacto $F \subset C_p(X)$ que separa los puntos de X.
iii) Existe un subespacio $Y \subset C_p(X)$ σ-compacto que separa los puntos de X.

DEMOSTRACIÓN: (i) implica (ii). Como X es un compacto de Eberlein, $X \subset C_p(Y)$ para algún compacto Y. Sea $\psi : Y \to C_p(X)$ la evaluación canónica, y sea $F = \psi(Y)$.

Entonces F es compacto y separa puntos de X.

(ii) implica (iii). Es inmediato.

(iii) implica (i). Sea $\psi : X \to C_p(Y)$. Como ψ distingue puntos de X y Y es σ-compacto, entonces X es homeomorfo a $\psi(X)$. Ahora como Y es σ-compacto, por el teorema 4.30, existe un compacto F tal que $C_p(Y)$ es homeomorfo a un subespacio de $C_p(F)$, de donde se sigue que $\psi(X)$ es un compacto de Eberlein y por lo tanto X también lo es. □

Ahora daremos las siguientes definiciones que nos serán de gran utilidad.

DEFINICIÓN 4.47. *Sea X un espacio topológico. X es un espacio $\sum$ de Lindelöf si existen un espacio metrizable Y, un espacio compacto K, un conjunto cerrado $F \subset Y \times K$, y una función continua $f : Y \times K \to X$ tal que $f(F) = X$.*

DEFINICIÓN 4.48. *Sea X un espacio topológico. Denotaremos por $\mathcal{E}(X)$ a la familia $\{Y :$ existe un compacto K y una función continua y sobreyectiva $f : X \times K \to Y\}$.*

DEFINICIÓN 4.49. *Una clase $\mathcal{P}$ de espacios topológicos es llamada $k-$dirigida si*
i) Si $X, Y \in \mathcal{P}$ entonces $XxY \in \mathcal{P}$.
ii) Si $X \in \mathcal{P}$ entonces $\mathcal{E}(X) \subset \mathcal{P}$.

DEFINICIÓN 4.50. *Sea X un espacio topológico. X es del tipo $K_{\sigma\delta}$ en un espacio ambiente Y si es la intersección de una familia numerable de espacios $\sigma-$compactos.*

DEFINICIÓN 4.51. *Sea $\mathcal{P}$ una clase de espacios.*

$$\mathcal{P}_{\sigma\delta} = \{X : X = \cap_{i\in\omega} X_i \text{ tal que } X_i = \cup_{i\in\omega} Y_i \text{ con } Y_i \in \mathcal{P}\}$$

TEOREMA 4.52. [2] *Sea X un espacio compacto y $\mathcal{P}$ una clase $k-$dirigida de espacios. Si existe $Y \subset C_p(X)$, tal que $Y \in \mathcal{P}$ y Y separa puntos de X, entonces*

$$C_p(X) \in \mathcal{P}_{\sigma\delta}.$$

TEOREMA 4.53. *Sea X un compacto de Eberlein. Entonces $C_p(X)$ es un espacio de tipo $K_{\sigma\delta}$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 4.46 existe un compacto $F \subset C_p(X)$ que separa los puntos de X. Como la clase $\mathcal{K}$ de los espacios compactos es k−dirigida del teorema anterior $C_p(X) \in \mathcal{K}_{\sigma\delta}$. O sea que $C_p(X)$ es un espacio $K_{\sigma\delta}$. □

PROPOSICIÓN 4.54. [2] *Sea X un espacio $K_{\sigma\delta}$. Entonces X es un espacio $\sum$ de Lindelöf.*

COROLARIO 4.55. *Sea X un compacto de Eberlein. Entonces $C_p(X)$ es un espacio $\sum$ de Lindelöf.*

DEMOSTRACIÓN: Se sigue del teorema 4.53 y la proposición 4.54. □

Recordemos que en el ejemplo 5.3 tenemos que $c(\beta\omega) = \omega$ y $w(\beta\omega) = 2^\omega$ lo cual nos permite afirmar que $\beta\omega$ no es un compacto de Eberlein ya que en caso contrario, del teorema 4.39, tendríamos que $c(\beta\omega) = w(\beta\omega)$.

También del ejemplo 5.2 tenemos que $c(D^\mu) = \mu$ y $w(D^\mu) = \mu$ de donde si $\mu > \omega$ entonces D^μ no es un compacto de Eberlein por el teorema 4.39.

3. Funciones Cardinales en Compactos de Gul'ko

DEFINICIÓN 4.56. *Sea X un espacio compacto. X es un compacto de Gul'ko si $C_p(X)$ es un espacio $\sum$ de Lindelöf.*

PROPOSICIÓN 4.57. *Sea X un compacto de Eberlein. Entonces X es un compacto de Gul'ko.*

DEMOSTRACIÓN: Se sigue del corolario 4.55. □

La siguiente definición y el siguiente resultado nos permitirán dar un ejemplo de un espacio compacto de Gul'ko que no es compacto de Eberlein.

DEFINICIÓN 4.58. *Sea T un conjunto no vacío. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de T es llamada adecuada si se satisfacen las siguientes condiciones.*
i) Si $A \in \mathcal{A}$ y $B \subset A$ entonces $B \in \mathcal{A}$.
ii) Para todo $t \in T$, $\{t\} \in \mathcal{A}$.
iii) Si $A \subset T$, y todo subconjunto finito de A está en $\mathcal{A}$ entonces $A \in \mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ es una familia adecuada de T definimos

$$K = K_{\mathcal{A}} = \{\chi_A : A \in \mathcal{A}\} \subset \{0,1\}^T$$

en donde χ_A es la función característica en A. Es claro que K es un subconjunto cerrado de $\{0,1\}^T$, de donde K es compacto.

Sea $\mathcal{A}$ una familia adecuada de T. Consideremos $T^* = T \cup \{\infty\}$, y definamos la siguiente topología en T^* de la siguiente forma: Todo elemento de T es aislado; una subbase para ∞ es la familia $\{\{\infty\} \cup (T - A) : A \in \mathcal{A}\}$.

PROPOSICIÓN 4.59. *(Ver [2]) Sea $\mathcal{A}$ una familia adecuada de T. Entonces*
i) $K_{\mathcal{A}}$ es un compacto de Eberlein si y sólo si T^* es σ-compacto.
ii) Si T^* es K analítico entonces $C_p(K_{\mathcal{A}})$ es un espacio $\sum$ de Lindelöf.

El siguiente ejemplo, (Ver [1]) nos permite afirmar que existe un compacto de Gul'ko el cual no es un compacto de Eberlein.

Sea $\sum = \omega^\omega$ el espacio de Baire el cual identificamos con J el conjunto de numeros irracionales en el $[0,1]$; sea $\Phi : \sum \to$ J un homeomorfismo y $\{\sigma_\iota : \iota < 2^\omega\}$ un buen orden de $\sum$. Denotemos por $P_m : \omega^\omega \to \omega^m$ la proyección natural; es decir $P_m(n_1, ..., n_m, ...) = (n_1, ..., n_m)$.

Un conjunto finito $\{\iota_1 < ... < \iota_n\} \subset 2^\omega$ es Φ admisible si se satisfacen las siguientes condiciones.

a) $|\Phi(\sigma_{\iota_i}) - \Phi(\sigma_{\iota_j})| \leq \frac{1}{i}$ para $1 \leq i < j \leq n$.

b) Existe un $k < \omega$ tal que $P_k(\sigma_{\iota_i}) = P_k(\sigma_{\iota_j})$ y $P_{k+1}(\sigma_{\iota_i}) \neq P_{k+1}(\sigma_{\iota_j})$ para $1 \leq i < j \leq n$.

Sea $\mathcal{A} = \{A \subset \sum$: todo subconjunto finito de $\{\iota < 2^\omega : \sigma_\iota \in A\}$ es Φ admisible$\}$. Es claro que $\mathcal{A}$ es una familia admisible.

Consideremos el espacio

$$K = K_{\mathcal{A}} \subset \{0,1\}^{\Sigma}$$

1) Afirmamos que el espacio K no es un compacto de Eberlein. Para demostrar esto es suficiente observar que el espacio $\sum^* = \sum \cup \{\infty\}$ no es σ compacto, de donde por el inciso (i) de la proposición anterior K no es compacto de Eberlein.

2) Afirmamos que el espacio K es un compacto de Gul'ko. Para demostrar esto consideremos el siguiente espacio

$$\Delta = [0,1]\text{x}\{0,1\}$$

con la siguiente topología: los puntos de $[0,1]\text{x}\{1\}$ son aislados; y una base para los puntos de la forma $(x,0) \in [0,1]\text{x}\{0\}$ es de la forma

$$\{V\text{x}\{0,1\} - \{(x,1)\} : V \in \mathcal{B}\}$$

donde $\mathcal{B}$ es una base de x en la topología usual del $[0,1]$.

Sea

$$X = \text{J}\text{x}\{0,1\} \subset \Delta$$

el cual resulta ser un $K_{\sigma\delta}$ en Δ, de donde es un espacio K analítico.

Sea

$$F : X \to \sum \text{ dada por } F(t,0) = \infty \text{ si } t \in \text{J}, \; F(t,1) = \Phi^{-1}(t) \text{ si } t \in \text{J}$$

la cual resulta ser una función continua y sobreyectiva. De donde $\sum^*$ es K analitico, del inciso (ii) de la proposición anterior tenemos que $C_p(K)$ es un espacio $\sum$ de Lindelöf, por lo cual K es un compacto de Gul'ko.

PROPOSICIÓN 4.60. *(Ver [2]) Sea X un espacio $\sum$ de Lindelöf. Entonces X es estable.*

Veamos ahora el teorema fundamental de esta sección.

TEOREMA 4.61. *(Ver [10]) Sea X un compacto de Gul'ko. Entonces*

$$d(X) = w(X).$$

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de los teoremas 2.40, 2.41, 3.7 y la proposición 4.59. ☐

Recordemos que en el ejemplo 3.5.3 tenemos que $d(\beta\omega) = \omega$ y $w(\beta\omega) = 2^\omega$, lo cual nos permite afirmar que $\beta\omega$ no es un compacto de Gul'ko ya que en caso contrario tendriamos que $d(\beta\omega) = w(\beta\omega)$, lo cual no es cierto.

4. Funciones Cardinales en Compactos de Corson

Iniciaremos esta sección dando la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.62. *Sea* $X = \Pi_{\alpha\in M} X_\alpha$, $s \in X$, *y* $\sum \subset X$, *con* $\sum = \{x \in X : |\alpha \in M : x_\alpha \neq s_\alpha| \leq \omega\}$. *En caso particular que* $X_\alpha = R$, $\sum = \sum \mathbf{R}^\tau$.

DEFINICIÓN 4.63. *Un espacio compacto* X *es un compacto de Corson si* X *es homeomorfo a un subespacio compacto de* $\sum \mathbf{R}^\tau$, *para algun cardinal* τ.

TEOREMA 4.64. *Sea* X *un compacto de Gul'ko. Entonces* X *es un compacto de Corson. (Ver* [1]*)*

El siguiente ejemplo, (Ver [1]) nos permite afirmar que existe un compacto de Corson el cual no es un compacto de Gul'ko, para lo cual requerimos las siguientes definiciones y el siguiente resultado.

Sea P el espacio de los números irracionales el cual identificamos con ω^ω. Con S denotaremos el conjunto de las sucesiones finitas de números naturales. Para cada $s \in S$ denotaremos por $|s|$ el número de elementos de s al cual llamaremos la longitud de s. Para $s, t \in S$ escribiremos $s \prec t$ si s es igual a los primeros $|s|$ terminos de la la sucesión t. Si $\sigma \in P$ y $n \in \omega$ $\sigma\restriction_n$ denota la sucesión finita de los primeros n terminos de σ. Si $s \in S$, y $n < \omega$ $s,^\frown n$ denota la sucesión finita de longitud $|s|+1$, cuyos primeros $|s|$ términos es s y último término es n.

PROPOSICIÓN 4.65. *(Ver* [1]*) Sea* X *un espacio* $\sum$ *de Lindelöf. Entonces existe una familia* $\{A_s : s \in S\}$ *de subconjuntos de* X *tal que*
i) $A_\emptyset = X$, $\cup_{k<\omega} A_{s,^\frown k}$ *para cada* $s \in S$,
ii) para cada $x \in X$ *existe un* $\sigma \in \sum$ *tal que*
a) $x \in \cap_{k<\omega} A_{\sigma|_k}$
b) si $x_k \in A_{\sigma|_k}$ *para* $k < \omega$ *entonces la sucesión* $\{x_k\}$ *tiene un punto limite en* X.

Construiremos un subconjunto compacto K de $\{0,1\}^{\omega^+}$ el cual es un compacto de Corson y no es un compacto de Gul'ko.

Por el teorema de Tarski podemos considerar una familia infinita $\{N_\xi : \xi < \omega^+\}$ de subconjuntos de ω tal que la intersección de cualesquiera dos es finita.

Definamos $\Phi : \omega^+ \text{x } \omega^+ \to \omega$ dada por $\Phi(\xi,\zeta) = |N_\xi \cap N_\zeta|$. Diremos que un subconjunto $L \subset \omega^+$ es Φ admisible si para todo $\xi, \zeta \in L$, con $\xi < \zeta$

$$|\{\eta \in L : \xi < \eta < \zeta\}| \leq \Phi(\xi,\zeta).$$

Sea $\mathcal{A} = \{L \subset \omega^+ : L \text{ es un conjunto } \Phi \text{ admisible}\}$. Resulta que la familia $\mathcal{A}$ es una familia adecuada de subconjuntos de ω^+. Consideremos el conjunto $K = K_{\mathcal{A}}$.

Observemos que si $x \in K$ entonces $x = \chi_L$ para $L \in \mathcal{A}$. De donde K es un compacto de Corson.

qSupongamos que K es un compacto de Gul'ko. Por la proposición anterior existe una familia $\{K_s : s \in S\}$ de subconjuntos de ω^+ tal que

$$K_\emptyset = \omega^+, \ \cup_{k<\omega} K_{s,^\frown k} = K_s \text{ para cada } s \in S$$

y para cada $\xi < \omega^+$, existe un $\sigma \in P$ tal que $\xi \in \cap_{k<\omega} K_{\sigma|_k}$, y si $\xi_k \in K_{\sigma|_k}$ para $k < \omega$ entonces el conjunto $\{\xi_k : k < \omega\}$ no es Φ admisible.

Sea $L = \cup\{K_s : K_s \text{ no es un conjunto estacionario de } \omega^+\}$. Entonces $\omega^+ - L$ contiene un subconjunto cerrado no acotado de ω^+, de donde si G es un subconjunto estacionario de ω^+ entonces $|G - L| = \omega^+$.

Para cada $s \in S$, tal que $|s| = k$ y $K_s \not\subseteq L$ definamos

$$f_s : K_s \to \omega^+ \text{ dada por } f_s(\xi) = \max\{\zeta_1^\xi, ..., \zeta_k^\xi\} < \xi.$$

Del teorema de Fodor [22], existe un $L_s \subset K_s$ con L_s estacionario, y $\xi_s < \omega^+$ tal que $f_s(\xi) = \xi_s$ para $\xi \in L_s$. Elijamos $\xi < \omega^+$, tal que $\xi \in L$ y $\xi >$sop$\{\xi_s : s \in S, K_s \subset L\}$.

De las propiedades de la familia $\{K_s : s \in S\}$ existe un $\sigma \in P$ tal que $\xi \in \cap_{k<\omega} K_{\sigma|_k}$ y si $\xi_k \in K_{\sigma|_k}$ entonces el $\{\xi_k : k < \omega\}$ no es Φ admisible. Elijamos $\zeta_0 > \xi$, $\zeta_1 \in L_{s_1}$ e inductivamente $\zeta_k > \zeta_{k-1}$, con $\zeta_k \in L_{s_k}$. Aseguramos que $\{\zeta_k : k < \omega\}$ es Φ admisible. En realidad si $k < n$ entonces $\Phi(\zeta_k, \zeta_n) \geq n$, ya que en la enumeración de de $\zeta_n = \{\zeta_k^{\zeta_n} : k < \omega\}$ ζ_k aparece despues de la n esima posición: de donde $|N_{\zeta_k} \cap N_{\zeta_n}| = \Phi(\zeta_k, \zeta_n) \geq$n$= |\{\zeta : k < l < n\}| = n - k$. Lo cual es una contradicción.

TEOREMA 4.66. *Sea $X = \Pi_{\alpha\in M} X_\alpha$ con $w(X_\alpha) = \omega$ para todo $\alpha \in M$, $s \in X$, y $\sum \subset X$, con $\sum = \{x \in X : |\alpha \in M : x_\alpha \neq s_\alpha| \leq \omega\}$. Entonces $\sum$ es monolítico.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\sum = \{x \in X : |\alpha \in M : x_\alpha \neq s_\alpha| \leq \omega\}$. Sea $C \subset \sum$ con $|C| \leq \tau$. Para cada $\alpha \in M$ consideremos la proyección $p_\alpha : X \to X_\alpha$ y $p_\alpha(C) = C_\alpha$.

Definamos $M_C = \{\alpha \in M : C_\alpha \neq \{s_\alpha\}\}$ y $F_\alpha = cl(C_\alpha)$; es claro que $|M_\alpha| \leq \tau$, y que $w(F_\alpha) = \omega$ para cada α. Si $\alpha \notin M_C$ sea $F_\alpha = \{s_\alpha\}$ y consideremos $F = \Pi_{\alpha\in M} F_\alpha$ entonces F satisface las siguientes afirmaciones:
i) $C \subset F$.
ii) F es homeomorfo a $\Pi_{\alpha\in M_C} F_\alpha$.
iii) $w(\Pi_{\alpha\in M_C} F_\alpha) \leq |M_C| \leq \tau$.
iv) $cl(C) \subset F \subset \sum$.

De los incisos (ii) y (iii) se sigue que $w(F) \leq \tau$, y del teorema 2.5 $nw(F) \leq \tau$ de donde $nw(cl(C)) \leq \tau$. De donde, por el corolario 3.21 $\sum$ es monolítico. □

COROLARIO 4.67. *Sea X un compacto de Corson. Entonces*

$$d(X) = w(X)$$

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de los teoremas 3.7 y 4.66. □

TEOREMA 4.68. *(Ver [1]) Sea X un compacto de Gul'ko con $c(X) = \omega$. Entonces*

$$w(X) = \omega$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $w(X) > \omega$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $w(X) = \omega_1$. Por el primer teorema de esta sección X es un compacto de Corson, de donde entonces $K \subset [0,1]^{\omega_1}$. Además sin perdida de generalidad, podemos suponer que para cada $\xi < \omega_1$ existé θ, con $0 < \theta < 1$ tal que

$$V_\xi = (\pi_\xi |_K)^{-1}(\theta, 1] \neq \emptyset \text{ para } \xi < \omega_1.$$

Sea $Y \subset C_p(X)$ con $Y = \{f \in C_p(X) : \|f\| \leq 1\}$. Como $C_p(X)$ es un espacio $\sum$ de Lindelöf, Y también lo es, de donde por la proposición anterior existe una familia $\{A_s : s \in S\}$ de subconjuntos de Y, que satisface los incisos (i) y (ii) de dicha afirmación.

Sea $\Pi = \{\pi_\xi : \xi < \omega_1\} \subset Y = A_\emptyset$, y $B_s = \{\xi < \omega_1 : \pi_\xi \in A_s\}$ para cada $s \in S$.

Para cada $s, t \in S$, con $|s| = |t|$ definiremos x^t_s, ξ^t_s, V^t_s, C^t_s tales que se satisfagan las siguientes condiciones

i) Para $m < \omega$

$$\cup_{p<\omega} V^{t,\frown p}_{s,\frown m} \text{ sea denso en la } \cup\{V_\xi \cap V^t_s : \xi \in C^t_s \cap B_{s,\frown m}\}.$$

ii) V^t_s sea abierto en X,

$$V^{t'}_{s'} \subset V^t_s \text{ para } t \prec t',\ s \prec s' \text{ y } x^t_s \in V^t_s \text{ si } V^t_s \neq \emptyset.$$

iii) $C^t_s \subset B_s$, $C^t_s \cap \mathrm{sop}(x^t_s) = \emptyset$,

$$\begin{aligned} C^{t'}_{s'} &\subset C^t_s \text{ para } t \prec t',\ s \prec s',\ C^\emptyset_\emptyset = \omega_1, \\ \cup C^{t,\frown p}_{s,\frown m} &\supset C^t_s - \cup\{\mathrm{sop}(x^{t'}_{s'}) : |t'| = |s'| \leq |t| + 1\}, \end{aligned}$$

y si $\xi \in C^t_s$, entonces $V_\xi \cap V^t_s \neq \emptyset$.

iv) Si $x \in V^t_s$ entonces $\pi_{\xi^t_s}(x) > \theta$.

v) $\xi^{t,\frown p}_{s,\frown m} \in C^t_s \cap B_{s,\frown m}$ si $C^t_s \cap B_{s,\frown m} \neq \emptyset$.

Supongamos que para $n < \omega$ y para cada s, $t \in S$, con $|s| = |t| \leq n$, x^t_s, ξ^t_s, V^t_s, C^t_s están bien definidas y satisfacen las propiedades deseadas. Sean s, $t \in S$, con $|t| = |s| = n$.

Como $c(X) = \omega$ existe $\xi^{t,\frown p}_{s,\frown m} \in C^t_s \cap B_{s,\frown m}$ para $p < \omega$ y $m < \omega$ tales que

$$\cup_{p<\omega}(V_{\xi^{t,\frown p}_{s,\frown m}} \cap V^t_s)$$

es denso en $\cup\{V_\xi \cap V^t_s : \xi \in C^t_s \cap B_{s,\frown m}\}$.

Sea

$$V^{t,\frown p}_{s,\frown m} = V^t_s \cap V_{\xi^{t,\frown p}_{s,\frown m}} \text{ para } m,\ p < \omega.$$

Si $V^{t,\frown p}_{s,\frown m} \neq \emptyset$, elegimos $x^{t,\frown p}_{s,\frown m} \in V^{t,\frown p}_{s,\frown m}$ (en otro caso elegimos $x^{t,\frown p}_{s,\frown m} \in X$ arbitrario).

Para p, $m < \omega$ sea

$$C^{t,\frown p}_{s,\frown m} = \{\xi \in C^t_s \cap B_{s,\frown m} - \mathrm{sop}(x^{t,\frown p}_{s,\frown m}) : V^{t,\frown p}_{s,\frown m} \cap V_\xi \neq \emptyset\}.$$

Notemos que si $x \in V^{t,\frown p}_{s,\frown m}$ entonces

$$\pi_{\xi^{t,\frown p}_{s,\frown m}}(x) > \theta \text{ ya que } V^{t,\frown p}_{s,\frown m} \subset V_{\xi^{t,\frown p}_{s,\frown m}}.$$

Con lo cual concluimos la construcción que satisface las propiedades deseadas.

Elijamos $\xi \in \omega_1 - \cup\{\mathrm{sop}(x^{t,\frown p}_{s,\frown m}) : t,\ s \in S \text{ y } |s| = |t|\}$. Por las condiciones de la proposición anterior aplicada a la familia $\{A_s : s \in S\}$, existe $\sigma \in P$ tal que $\pi_\xi \in \cap_{k<\omega} A_{\sigma|_k}$, y si $f_k \in A_{\sigma|_k}$ para $k < \omega$ la sucesión $\{f_k\}$ tiene un punto limite en Y. Por (iii) podemos elegir números naturales $t_0, ..., t_k$...para $k < \omega$, tales que

$$\xi \in C^{t_0,\ldots,t_k}_{\sigma(0),\ldots,\sigma(k)} \text{ para } k < \omega.$$

Hagamos $\tau = \{t_0, ..., t_k...\} \in \sum$ con lo cual tenemos que $\xi \in \cap_{k<\omega} C^{\tau|_k}_{\sigma|_k}$.

De (iii) tenemos que $V^{\tau|_k}_{\sigma|_k} \neq \emptyset$ para $k < \omega$ de donde por (ii) $x^{\tau|_k}_{\sigma|_k} \in V^{\tau|_k}_{\sigma|_k}$ para $n < \omega$. Como X es un compacto de Corson la sucesión $(x^{\tau|_k}_{\sigma|_k})$ tiene una subsucesión convergente (que sin perdida de generalidad la seguiremos denotando de la misma forma) a un punto $x \in X$.

Por (v) $\pi_{\xi^{\tau|k}_{\sigma|k}} \in A_{\sigma|k}$ para $k < \omega$. En forma análoga la sucesión $(\pi_{\xi^{\tau|k}_{\sigma|k}})$ tiene una subsucesión convergente (que por comodida denotaremos de la misma forma) a un punto $g \in Y$. De (iv)

$$\pi_{\xi^{\tau|l}_{\sigma|l}}(x^{\tau|k}_{\sigma|k}) > \theta \text{ para todo } l > k,$$

de donde $g(\ x^{\tau|k}_{\sigma|k}) \geq \theta$ para $k < \omega$ lo cual implica que $g(x) \geq \theta > 0$.

Ahora de (iii) y (v) tenemos que

$$\pi_{\xi^{\tau|l}_{\sigma|l}}(x^{\tau|k}_{\sigma|k}) = 0 \text{ para todo } l < k.$$

lo cual implica que $\pi_{\xi^{\tau|l}_{\sigma|l}}(x) = 0$ para todo $l < \omega$, de donde $g(x) = 0$ lo cual es una contradicción. $\square$

Bibliografía

[1] Argyros S. and S. Negrepontis, *On Weakly K-countably determined spaces of continuos function*,Proc. Amer. Math. Soc., 87:4 (1983), 731-736.

[2] A.V. Arkhangel'skiĭ, *Topological Spaces Functions*, Kluwer Academic Publishers., 1989.

[3] A.V. Arkhangel'skiĭ, *Continuous mappings, factorization theorems, and function spaces*, Trans. Moscow Math. Soc (1985).

[4] A.V. Arkhangel'skiĭ, *Approximation of the theory of dyadic bicompacta*, Soviet. Math. Dokl., Vol 10 (1969) N 1, pp. 151-154.

[5] A.V. Arkhangel'skiĭ, *On some topological spaces that ocurr in functional anlysis.*, Russian. Mtah. Surveys., 31:5 (1976), pp 14-30.

[6] A.V. Arkhangel'skiĭ, *On mappings of everywhere dense subsets of topological products*, Soviet. Math. Dokl., Vol 12 (1971) N 2, pp. 524-526.

[7] A.V. Arkhangel'skiĭ , *Structure and classfication of topological spaces and cardinal invariants*, Russian. Math. Surveys. 33:6 (1982) 1 pp 177-181.

[8] A.V. Arkhangel'skiĭ,*Factorization theorems and function spaces stability and monolithicity*,Soviet. Math. Dokl. 26(1982) 1 pp 177-181.

[9] A.V. Arkhangel'skiĭ, *Function spaces in the topology of pointwise convergence, and compact sets*, Russia. Math. Surveys. 39:5(1984) pp 9-56.

[10] A.V. Arkhangel'skiĭ, *C_p-theory recent progress in general topology*, M. Huser y J. Van Mill editores (1992) Elsevier Science Publishers B.V pp 1-56.

[11] A.V. Arkhangel'skiĭ and V. I. Ponomarev, *On dyadic bicompacta* Soviet. Math. Dokl. Vol 9(1968) N 5 pp 1220-1224.

[12] A.V. Arkhangel'skiĭ and V. V. Uspenski, *On the cardinality of Lindelöf subspaces of function spaces*, Commentationes Mathematica. E. Universitatis Caroline. 27, 4(1986) pp 673-676.

[13] Bennett, H.R. A note on point-countability in linearly ordered spaces. Proc. A.M.S vol 28 n 2 (1971) pp 598-606.

[14] Bennett, H.R y Lutzer, D.J-Separability, the countable chain condition and the Lindelöf property in linearly orderable spaces. Proc. A.M.S 23 (1969) pp 664-667.

[15] B. Efimov and R. Engelking, *Remarks on dyadic spaces II*. Colloquium Mathematicum. Vol 13 (1965) Fasc 2 pp 181-197.

[16] R. Engelking, *Functión defined on cartesian products*, Fundamenta Mathematicae (1986).

[17] R. Engelking, *General Topology*,Heldermann Verlag,Berlin (1989).

[18] R. Engelking and Pelczyński *Remarks on dyadic spaces* Colloquium Mathematicum vol X1 fasc 1 (1963).

[19] A.García Máynez y A.Tamariz, *Topología General*, Porrúa México.

[20] S.P. Gul'ko, *On propiertes of subset of Σ-products*, Soviet Math. Dokl., 18 (1977) pp 1438-1442.

[21] S.P. Gul'ko, *On Structure of spaces of continuous, and their complete paracompactness.* Russian. Math. Surveys 34:6 (1979) pp 36-44.

[22] K.Kunen. Set theory an introducction to independence proofs. North-Holland.

[23] Leonard Gillman Mayer Jerison, *Rings of continuous function.*, Springer Verlag.

[24] R. Hodel, *Cardinal function* Handbook of set theoretic topology. Elservier Science Publishers B. V. (1984) pp 1-61.

[25] Juhasz, I,*Cardinal Functions in Topology*. Math Centre Tracts 34, Math. Centrum, Amsterdam, 1971.

[26] Lynn, I.L-Linearly orderable spaces. Trans A.M.S 113 (1964) pp 189-218.

[27] Mardeši c, Papi c *Continous images of ordered compacta the Suslin property and diadic compacta* Glasnik mat 17 (1962 3-25).
[28] Okunev, *Lindelöf subspaces of* $C_p(X)$ manuscrito.
[29] Okunev, *Monolithicity and Stability* manuscrito.
[30] Okunev, *Cp on Compact spaves* manuscrito.
[31] A. Tamariz, F. Casarrubias, F. Hernandez, *Notas sobre espacios de Funciones Continuas.*
[32] Willard,S., *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, (1970).

Índice Analítico