00365
6

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ESPACIOS DE ADJUNCION DE LOS ESPACIOS ANR EQUIVARIANTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A :

EL MAT., ARMANDO MATA ROMERO

DIRECTOR DE TESIS: DR. SERGEY ANTONYAN

MEXICO, D.F. AÑO 2000

276801

Dra. Margarita Collazo Ortega
Jefe de la División
de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias UNAM

ASUNTO: Participación de
Sinodales en
Examen de Grado

Por este conducto nos permitimos informarle que el Trabajo de Tesis que Armando Mata Romero, alumno de la Maestría en Ciencias (Matemáticas) de la Facultad de Ciencias UNAM con Número de Cuenta 97808721 y Número de Expediente 3971271, presenta para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Matemáticas) el cual lleva por título "*Los Espacios de Adjunción de los Espacios ANR Equivariantes*", ha sido aceptado y por consiguiente estamos de acuerdo en fungir como sinodales del Examen de Grado correspondiente, a pesar de la situación crítica por la que pasa actualmente Nuestra Máxima Casa de Estudios y que ha impedido llevar a cabo los trámites de manera adecuada.

Para avalar la presente, anexamos a continuación nuestros nombres y firmas.

Sinodales

Dr. Alejandro Illanes Mejía

Dr. Ángel Tamariz Mascarúa

Dra. Isabel Puga Espinosa

Dr. Rolando Jiménez Benítez

Dr. Sergey Antonyan

Dr. Sergio Macías Álvarez

Dra. Sylvia De Neymet Urbina

Octubre de 1999, México D.F.

Vo. Bo.
Dr. Federico Sánchez Bringas

cc. Dr. Federico Sánchez Bringas
Coordinador de Posgrado del
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias UNAM

Espacios de Adjunción de los Espacios ANR Equivariantes

Armando Mata Romero

Facultad de Ciencias UNAM

México, D.F. 2000

Director de Tesis: Dr. Sergey Antonyan

Quisiera agradecer y dedicar esta tesis a todas aquellas personas que de una ú otra manera influyeron en su realización y que de alguna forma se encuentran presentes en ella.

A todos mis sinodales, por su valioso tiempo dedicado a la revisión del presente trabajo, así como por sus acertados comentarios y sugerencias.

A la Dra. Sylvia de Neymet, por su calidad humana, su apoyo incalculable y todos los conocimientos que me ha brindado en el transcuso de mi estancia en la Facultad de Ciencias.

Al Dr. Sergey Antonyan, por dirigir esta tesis, por su confianza y amistad, por enseñarme no sólo matemáticas, sino también a comprender mejor la vida.

A mi familia y a la de mi esposa, por ser parte de mi motivación en la realización de este trabajo y recibir de ellos siempre un enorme tesoro: su apoyo y un cariño inmenso.

A todos mis amigos, que me han otorgado la alegría de vivir, soñar y poder guardar en mi corazón esas fotografías imborrables llamadas recuerdos.

Mención aparte merecen dos personas, partes de mi ser y para quienes faltan palabras para agradecerles todo lo que han hecho por mí.

A mi esposa, por todos los momentos buenos y malos, por su comprensión infinita, por su fortaleza en los situaciones difíciles, por su ternura, su amor, y sobre todo, por haber decidido ser parte de mi vida y emprender conmigo esa maravillosa aventura que es el matrimonio.

A mi hijo, por permitirme vivir y sentir el don maravilloso y único de la paternidad, mostrándome la grandeza de la vida y del universo a través de su risa y su llanto.

Contenido

Introducción

Uno de los problemas principales de la topología lo constituye el problema de extensión de funciones continuas. En general, esto es lo siguiente:

Sean X un espacio topológico, A un subespacio cerrado de X y $f : X \to Y$ alguna función continua en un espacio topológico Y. ¿Cuándo f posee una extensión continua $F : X \to Y$ o $F : U \to Y$, donde U es una vecindad de A en X?

El teorema clásico de Tietze-Urysohn afirma que cuando X es un espacio normal y Y es un conjunto convexo en la recta real $\mathbb{R}$, por ejemplo $Y = [0,1]$, entonces el problema de extensión tiene solución. En otras palabras, lo que dice es que Y es un extensor absoluto para la clase de los espacios normales, lo cual se denota como $Y \in AE(\mathcal{N})$.

Otro teorema clásico de extensiones es el de J. Dugundji, el cual dice que cada conjunto convexo en un espacio vectorial localmente convexo es un AE para la clase de los espacios metrizables.

Éstos junto con otros resultados conforman una parte importante de la teoría de retractos, cuyo desarrollo sistemático comienza a partir de los trabajos de K. Borsuk.

La idea de un grupo topológico de transformaciones o un G-espacio, se remonta al inicio del presente siglo y es uno de los ejemplos más interesantes de la intersección exitosa de diversas áreas de la matemática, como la topología, el análisis funcional, el álgebra y la geometría.

Un G-espacio X es un espacio topológico en el que está actuando un grupo topológico G por medio de homeomorfismos de X sobre sí mismo. En otras palabras, se elige un grupo topológico de simetrías en X tal que la acción gx depende continuamente del par $(g,x) \in G \times X$.

En varias áreas de la matemática frecuentemente surge la necesidad de considerar la versión simétrica del problema de extensión, mencionado en un principio. Es decir:

Sean G un grupo topológico, X y Y dos G-espacios, A un subespacio cerrado de X, invariante bajo la acción de G y $f : A \to Y$, una función equivariante. ¿Cuándo existe una extensión equivariante $F : U \to Y$ de f, donde U es una vecindad invariante de A o $U = X$?

La noción de función "equivariante" significa la la continuidad de la misma y que conmuta con la acción.

El análogo equivariante del teorema de Tietze-Urysohn fue demostrado en 1951 por A. Gleason [Gl] para los grupos compactos de Lie; J. Jaborowski [Ja1], [Ja2] y S. Antonyan [An1], [An2] obtuvieron varias versiones equivariantes del teorema de Dugundji . Para una exposición más amplia de la teoría equivariante de retractos se puede consultar en [An3].

El presente trabajo se encuentra dentro de la rama de la teoría equivariante de retractos y su objetivo pincipal es mostrar resultados nuevos (que corresponden al capítulo III), acerca de las condiciones bajo las cuales el espacio de adjunción de dos espacios G-ANR's conserva propiedades de extensión, y particularmente, el cono de un G-espacio; además de presentar versiones equivariantes de proposiciones de topología general referentes a retractos, extensiones y espacios normales.

K. Borsuk [Bo1] en 1932, J.H.C. Whitehead [Wh] en 1948 y O. Hanner [Ha] en 1951, probaron de manera sucesiva el siguiente teorema:

Sean X espacio topológico, A un cerrado en X y $f : A \to Y$ una función continua de A sobre un espacio Y. Si $X, A, Y \in ANR$ entonces $X \bigcup_f Y \in ANR$, siempre que sea metrizable.

Aquí $W \in ANR$ significa que si W es un subespacio cerrado de un espacio métrico Z, entonces W es un retracto de alguna vecindad U de W en Z.

El hecho de que un espacio $W \in ANE$ significa que si $f : A \to W$ es una función continua de un subespacio cerrado A de un espacio métrico Z, entonces existe una extensión continua $F : U \to W$, donde U es una vecindad de A en Z.

Posteriormente D. M. Hyman [Hy] en 1967 generaliza este teorema afirmando que bajo las mismas hipótesis se tiene que $X \bigcup_f Y$ es un espacio ANE, no necesariamente métrico.

En nuestro caso, el Teorema 3.5 corresponde al análogo de esta generalización para el caso equivariante. Es decir:

Sean G un grupo compacto, X un G-espacio, A un cerrado invariante de *X y $f : A \to Y$ una función continua equivariante de A sobre un G-espacio Y. Si $X, A, Y \in G$-ANR entonces $X \bigcup_f Y \in G$-ANE.*

La prueba de este teorema se basa principalmente en la existencia de cubiertas semicanónicas, de la métrica invariante y el concepto de G-retracto fuerte por deformación, además del teorema 3.2, el cual se encuentra también en [Hy] para el caso en que la acción es trivial y representa uno los principales dentro de la tesis. Este teorema dice lo siguiente :

Sean G un grupo compacto, (Z, B) un G-par con cubierta semicanónica y B un G-retracto de vecindad fuerte por deformación de Z. Si B y $Z \backslash B$ son espacios G-ANE, entonces $Z \in G$-ANE

Del teorema 3.5 se derivan algunas consecuencias y aplicaciones interesantes al cono de un G-espacio, de forma que se obtienen condiciones necesarias para que tal espacio sea un G-AE.

Es importante señalar que los principales resultados de esta tesis dependen de la compacidad del grupo que actúa en el espacio topológico. Sin dicha propiedad la mayor parte de ellos no pueden formularse. No obstante, algunos de ellos han sido establecidos para el caso en que el grupo es localmente compacto, pero ha sido necesario añadir condiciones adicionales a la acción, como se puede ver en [Pa2] o [Ab].

La tesis está estructurada en tres capítulos. En el primero se establecen los conceptos preliminares que serán utilizados a lo largo de todo el trabajo. De esta manera, se definen y enumeran algunos ejemplos de grupos topológicos, sin detallar sus propiedades. Luego, se enuncia lo que es un Grupo Topológico de Transformaciones y se muestran sus resultados básicos, incluyendo la existencia de la métrica invariante y proposiciones clásicas de espacios normales adaptadas a la teoría de los G-espacios, como es el teorema de extensión invariante de Tietze-Urysohn. Este teorema se prueba por ejemplo en [Pa1] utilizando la integral de Haar. Nosotros presentamos una prueba diferente sin utilizar este hecho. Además se incluyen algunas cuestiones de topología general como son redes, identificaciones y espacios de adjunción, junto con algunos de sus resultados que serán esenciales para nuestros propósitos.

En el segundo capítulo se introducen los conceptos de $G\text{-}ANR$ y $G\text{-}ANE$, así como algunas proposiciones referentes a la obtención de dichos espacios a partir de otros que poseen tales propiedades, como es el caso de los subespacios abiertos o el de retractos. Serán tratadas también las cubiertas canónicas y su existencia en espacios métricos (Teorema 2.12). Así mismo, se definirán los G-retractos fuertes por deformación.

El último capítulo está destinado al tema central de la tesis. En él se establecen los teoremas que cosntituyen nuestra aportación a la teoría equivariante de retractos y extensores, así como sus consecuencias. Entre ellas tenemos el análogo del Teorema 3.5 para el caso $G\text{-}AR$. Esto es:

Sean G un grupo compacto y A, X, Y espacios *G-AR. Entonces $X\bigcup_f Y$* es un espacio *G-AE.*

Dado que el cono de un G-espacio métrico es un caso particular de los espacios de adjunción y además un espacio G-contraíble, se establece también el siguiente resultado:

Si G es un grupo compacto y $T \in G$-ANR entonces $Con(T) \in G$-AE.

Al final del capítulo este resultado es generalizado considerando a T como un G-espacio no necesariamente métrico y cambiando la topología cociente de $Con(T)$ por otra más débil. Esta topología será denotada por Ω y consiste de todos los $W \subsetneq Con(T)$ tales que:

i) Si el vértice $* \notin W$ entonces $W \in \Omega$ si y sólo si $p^{-1}(W)$ es abierto en $T \times I$, donde p es la proyección canónica de $T \times I$ sobre $Con(T)$.

ii) Si el vértice $* \in W$ entonces $W \in \Omega$ si y sólo si $p^{-1}(W)$ es abierto en $T \times I$ y además existe un $\varepsilon > 0$ tal que $T \times [0, \varepsilon) \subset p^{-1}(W)$.

En este caso al cono de un G-espacio T con la topología Ω lo denotaremos como $con(T)$, de forma que la generalización mencionada se enuncia como sigue:

Si G es un grupo compacto y $T \in G$-ANE entonces $con(T) \in G$-AE.

En este último resultado es importante notar que el espacio T no es necesariamente metrizable, y su prueba es independiente del Teorema 3.5, basándose principalmente en la compacidad de G y la topología débil Ω de $con(T)$. Esta topología coincidirá con la topología cociente de $Con(T)$ cuando T es compacto.

El hecho de que el cono de un G-espacio T sea un espacio G-AE es importante para diversos resultados de la teoría equivariante de retractos, dado que algunos espacios se pueden encajar equivariantemente en productos de conos y eso les permite heredar propiedades de extensión.

En cuanto a la presentación del texto, los encabezados de las proposiciones, lemas, corolarios y teoremas se encuentran escritos en letras negritas. Se han numerado anteponiendo al número de proposición, el número del capítulo al que corresponde, mientras que el enunciado se ha escrito en letras cursivas. El símbolo □ indica el fin de una prueba. Las referencias se encuentran entre paréntesis cuadrados con las primeras dos letras del apellido del autor y en caso de tener más de un artículo, se encuentra escrito un número que corresponde al orden cronológico de cada publicación.

I. Preliminares

En este capítulo se establecerán los conceptos básicos de la teoría de grupos topológicos de transformaciones, así como algunas cuestiones básicas de topología general que serán utilizadas en capítulos posteriores.

1. GRUPOS TOPOLÓGICOS.

Definición 1.1. *Un conjunto G es un grupo topológico si satisface las siguientes condiciones:*

(1) G es un espacio de Hausdorff,

(2) G es un grupo,

(3) Las funciones $\alpha : G \times G \to G$ y $\beta : G \to G$ definidas por $\alpha(g,h) = gh$ y $\beta(g) = g^{-1}$ son continuas.

Es importante notar que $G \times G$ tiene la topología producto y que la condición (3) es equivalente a la siguiente.

(3 ') La función $\gamma : G \times G \to G$ definida por $\gamma(g,h) = gh^{-1}$ es continua.

Algunos ejemplos de grupos topológicos son los siguientes.

1.- Cualquier grupo con la topología discreta.

2.- El grupo aditivo de los números reales $\mathbb{R}$ y el grupo aditivo de los números complejos $\mathbb{C}$ con la topología de su métrica ordinaria.

3.- El grupo multiplicativo $GL(n,\mathbb{R})$ de las matrices no singulares $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$ y el grupo multiplicativo $GL(n,\mathbb{C})$ de las matrices no singulares sobre $\mathbb{C}$. En efecto, sea $M(n,\mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$. Si identificamos $M(n,\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{n^2}$, entonces $M(n,\mathbb{R})$ tendrá la topología del producto cartesiano $\mathbb{R}^{n^2}$. Así, $GL(n,\mathbb{R})$ tiene la topología relativa de $M(n,\mathbb{R})$ y la definición de multiplicación de matrices y la regla de cálculo de la matriz inversa implican que es un grupo topológico. De manera similar $GL(n,\mathbb{C})$ también es un grupo topológico.

4.- Los subgrupos de $GL(n,\mathbb{R})$, como son:

el *grupo especial lineal* $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$,

el *grupo ortogonal* $O(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : AA^t = I\}$,

y el *grupo especial ortogonal* $SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$, constituyen también grupos topológicos.

5.- Los subgrupos de $GL(n,\mathbb{C})$, como son:

el *grupo especial lineal complejo* $SL(n,\mathbb{C}) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : \det(A) = 1\}$,

el *grupo unitario* $U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : A(\overline{A})^t = I\}$,

y el *grupo especial unitario* $SU(n) = U(n) \cap SL(n,\mathbb{C})$, son también grupos topológicos.

6.- El círculo $S^1 = SU(1) = \{x \in \mathbb{C} : ||x|| = 1\}$ es un grupo topológico con la multiplicación de números complejos.

El concepto de grupo topológico, junto con el de espacio topológico y el de acción, definirán lo que son los grupos topológicos de transformaciones. En esta teoría, una propiedad topológica del grupo que permite obtener resultados interesantes es la compacidad. En nuestro caso, dicha propiedad representa un papel importante en la obtención de los resultados principales.

2. REDES.

La teoría de redes nos proporcionará una herramienta bastante útil para las pruebas de algunas proposiciones y teoremas de nuestro trabajo, puesto que permite controlar la estructura topológica de un espacio.

Para definir lo que es una red es necesario primero, introducir el concepto de conjunto dirigido.

Una relación binaria $\leq$ en un conjunto no vacío Λ se dice que dirige a Λ si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

i) Si $\lambda \in \Lambda$ entonces $\lambda \leq \lambda$,

ii) Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$ tales que $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$ entonces $\lambda_1 \leq \lambda_3$,

iii) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ entonces existe un miembro $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda$ y $\lambda_2 \leq \lambda$.

Ejemplos.

El conjunto $\mathbb{N}$ de todos los números naturales al igual que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales son dirigidos usando como relación binaria el orden usual $\leq$.

También, cada base local de vecindades de un punto en un espacio topológico, es dirigido por la inclusión $\subseteq$, es decir $U \leq V$ si y sólo si $V \subseteq U$.

Se dice que Λ es un *conjunto dirigido* si está provisto de una relación binaria $\leq$ que lo dirige.

Una red en un conjunto no vacío X es una función $\phi : \Lambda \to X$ de un conjunto dirigido $\Lambda = (\Lambda, \leq)$. Al punto $\phi(\lambda)$ se le denota usualmente como x_λ obteniendo así la red $\{x_\lambda\}$.

En particular, si $\Lambda = \mathbb{N}$ con la relación usual $\leq$, entonces ϕ será llamada una sucesión en X.

Se dice que una red $\{x_\lambda\}$ en un espacio X coverge a un punto x si para cada vecindad V de x existe un $\lambda \in \Lambda$ tal que $x_{\lambda'} \in V$ para todo $\lambda' \geq \lambda$. Esto lo denotaremos como $\{x_\lambda\} \rightsquigarrow x$.

La siguiente proposición es muy importante, puesto que caracteriza la topología de un espacio X mediante la convergencia de redes.

Proposición 1.2. *Un conjunto U en un espacio X es abierto si y sólo si ninguna red en $X \setminus U$ puede converger a un punto de U.*

Prueba. $\Rightarrow$) Sea U una vecindad abierta de p y $\{x_\lambda\}$ una red contenida totalmente en $X \setminus U$. Supongamos que $\{x_\lambda\} \rightsquigarrow p \in U$. Puesto que U es una vecindad de p, se sigue de la definición de convergencia que existe $\lambda' \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$, para toda $\lambda \geq \lambda'$, lo cual contradice el hecho de que $x_\lambda \in X \setminus U$, para toda $\lambda \in \Lambda$.

$\Leftarrow$) Supongamos que U no es abierto. Entonces existe un punto $p \in U$ tal que cada vecindad de p corta a $X \setminus U$. Sea D una base local en el punto p en X. Luego, D es un conjunto dirigido por la inclusión $\subseteq$. Para cada vecindad $\gamma \in D$, seleccione un punto $x_\gamma \in \gamma \bigcap (X \setminus U)$. Entonces la red $\{x_\gamma\}$ está en $X \setminus U$ y converge a p en U, lo cual es una contradicción. Por lo tanto U es abierto. □

El concepto de red proporciona también el camino para probar la continuidad de una función.

Proposición 1.3. *Una función $f : X \to Y$ es continua en p si y sólo si siempre que una red $\{x_\lambda\}$ converge a p en X, la red $\{f(x_\lambda)\}$ converge a $f(p)$ en Y.*

Prueba. $\Rightarrow$) Si f es continua en p, $x_\lambda \rightsquigarrow p$ en X y V es una vecindad de $f(p)$ en Y, entonces para la vecindad $f^{-1}(V)$ existe λ' para el cual $x_\lambda \in f^{-1}(V)$ siempre que $\lambda \geq \lambda'$, por tanto $f(x_\lambda) \in V$.

$\Leftarrow$) Si f no es continua en p, para cada vecindad U de p en X, alguna vecindad V de $f(p)$ no contiene a $f(U)$ para ninguna vecindad U de p. Entonces podemos seleccionar un punto $x_U \in U$ de tal manera que $f(x_U) \notin V$. Es claro que $\{x_U\} \rightsquigarrow p$ y que $\{f(x_U)\}$ no converge a $f(p)$. $\square$

3. GRUPOS TOPOLÓGICOS DE TRANSFORMACIONES.

En esta sección se enuncian conceptos básicos de la teoría de grupos topológicos de transformaciones, dentro de la cual se engloba el presente trabajo.

Definición 1.4. *Por un grupo topológico de transformaciones o un G-espacio se entenderá una terna (G, X, θ) donde G es un grupo topológico, X es un espacio topológico y $\theta : G \times X \to X$ es una función continua que satisface las siguientes condiciones:*

i) $\theta(e, x) = x$ $\quad \forall x \in X$ *donde* e *es el elemento identidad de* G.

ii) $\theta(h, \theta(g, x)) = \theta(hg, x)$ $\quad \forall x \in X$ *y* $\forall g, h \in G$.

A dicha función la llamaremos *la acción de G en X*. Para simplificar, denotaremos a $\theta(g, x)$ como gx y a (G, X, θ) como X. Algunos ejemplos de grupos topológicos de transformaciones se mencionan a continuación.

Ejemplos.

1.- Cualquier grupo topológico G actúa en sí mismo mediante la multiplicación izquierda.

2.- La *acción trivial* de un grupo arbitrario G en cualquier espacio X es la dada por $\theta(g, x) = x$ para todos $g \in G$, $x \in X$.

3.- Si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una colección de G-espacios, entonces se define la *acción diagonal* de G en el producto cartesiano $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ por $g(x_\alpha) = (gx_\alpha)$.

4.- El grupo S^1 actúa en el plano $\mathbb{R}^2$ de la siguiente manera: $\theta(e^{it}, re^{ix}) = re^{i(x+t)}$, para cada $e^{it} \in S^1$, $re^{ix} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

5.- Sea X un espacio topológico de Hausdorff y sea $\mathbb{R}$ el grupo topológico de los números reales. Entonces la $\mathbb{R}$-acción sobre X es llamada un *sistema dinámico o grupo 1-parámetro de homeomorfismos de X.*

Ahora bien, para cada $g \in G$, la acción θ determina un homeomorfismo

$$\theta_g : X \to X, \text{ donde}$$
$$\theta_g(x) = \theta(g, x). \text{ para todo } x \in X.$$

A θ_g la llamaremos *transición por g*. Así, la correspondencia $g \to \theta_g$ define una función $\Phi : G \to Homeo(X)$, donde $Homeo(X)$ es el grupo de homeomorfismos de X y de la Definición 1.4 se sigue inmediatamente que Φ es un homomorfismo de grupos.

Si X es un G-espacio y $x \in X$, se definen los siguientes conjuntos:

$G_x = \{g \in G : gx = x\}$ llamado el *estabilizador de x*. Si X es de Hausdorff, entonces G_x es un subgrupo cerrado de G.

$G(x) = \{gx : g \in G\}$, la *órbita de x*.

Además, si $G_x = G$, entonces x es un *punto fijo*, y X^G es el conjunto de puntos fijos de X. Aún más, X^G será un subconjunto cerrado de X [DN].

Sea A un subconjunto de X, H un subgrupo de G y denotemos por HA el subconjunto de X definido como $HA = \{ha : h \in H, a \in A\}$. Luego,

Definición 1.5. *Si $HA = A$, entonces diremos que A es un conjunto H-invariante. En el caso que $H = G$ entonces A se dirá simplemente invariante.*

Es fácil verificar que si A es invariante entonces el interior y la cerradura de A son también invariantes.

Si X es un G-espacio, H un subgrupo de G, entonces se induce una acción de H en X. En particular, si A es un conjunto invariante, la acción restringida al conjunto $G \times A$ es también una acción.

Es necesario, para el análisis categórico de los grupos topológicos de transformaciones, definir sus morfismos correspondientes.

Definición 1.6. *Una función continua $f : X \to Y$ entre G-espacios es una G-función o función equivariante si satisface $f(gx) = gf(x)$, para cada $g \in G, x \in X$.*

Lo anterior significa que f conmuta con las acciones, transformando órbitas en órbitas puesto que $f[G(x)] = G[f(x)]$.

En el caso que Y es un G-espacio trivial, es decir G actúa trivialmente sobre Y, entonces la función equivariante $f : X \to Y$ será llamada *invariante*, es decir, $f(gx) = f(x)$ para todo $x \in X$, $g \in G$.

Note que la función identidad es equivariante y la composición de dos funciones equivariantes es equivariante. Así, los G-espacios como objetos y las G-funciones como morfismos forman una categoría, la cual denotaremos por Top^G o G-Top.

Es fácil ver, que si $f : X \to Y$ es una función equivariante, H un subgrupo de G y A, B son subconjuntos H-invariantes de X y Y respectivamente, entonces $f(A)$ es un subconjunto H-invariante de Y y $f^{-1}(B)$ lo es de X.

Proposición 1.7. *Sean G un grupo topológico, X un G-espacio, K un subconjunto de G y A un subconjunto de X. Luego se cumple,*

(1) Si A es abierto en X, entonces KA es abierto en X,

(2) Si K es compacto y A es cerrado en X, entonces KA es cerrado en X,

(3) Si tanto K como A son compactos, entonces KA es compacto.

Prueba. (1) Si A es abierto, entonces $gA = \theta_g(A)$ es un abierto para cada $g \in G$, puesto que θ_g es un homeomorfismo. Así, el conjunto $KA = \bigcup_{g \in K} gA$, es también abierto.

(2) Sea B un subconjunto cualquiera de X. Es fácil verficar que se cumplen las siguientes equivalencias:

$B \bigcap KA = \emptyset \Leftrightarrow K^{-1}B \bigcap A = \emptyset \Leftrightarrow (K^{-1} \times B) \bigcap \theta^{-1}(A) = \emptyset.$

Fijemos $x \in X \setminus KA$ un punto arbitrario. Por la observación anterior se tiene que,

$$(K^{-1} \times \{x\}) \bigcap \theta^{-1}(A) = \emptyset,$$

esto es,

$$K^{-1} \times \{x\} \subset (G \times X) \setminus \theta^{-1}(A).$$

Puesto que A es cerrado en X, entonces $\theta^{-1}(A)$ es cerrado en $G \times X$, y por lo tanto, $(G \times X)\setminus\theta^{-1}(A)$ es abierto y además contiene al conjunto $K^{-1} \times \{x\}$. Así, para cada punto $g \in K^{-1}$, existe una vecindad abierta $U_g \ni g$ en G y una vecindad abierta $V_g \ni x$ en X, tales que,

$$U_g \times V_g \subset (G \times X) \setminus \theta^{-1}(A).$$

Notemos que x es fijo, y que tanto U_g como V_g varían de acuerdo a $g \in K^{-1}$. Además, trivialmente se tiene que,

$$K^{-1} \subset \bigcup_{g \in K^{-1}} U_g.$$

Dado que K es compacto, K^{-1} es también compacto por la continuidad de la operación de inversión del grupo. Por lo tanto, existen $g_1, g_2, ..., g_n \in K^{-1}$, tales que

$$K^{-1} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{g_i}.$$

Ahora bien, sea

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{g_i}, \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{g_i},$$

los cuales son abiertos en G y X respectivamente. Note que

$$K^{-1} \times V \subset U \times V \subset (G \times X) \setminus \theta^{-1}(A),$$

esto es,

$$(K^{-1} \times V) \bigcap \theta^{-1}(A) = \emptyset.$$

De esta manera, y usando las equivalencias mencionadas al principio de la prueba, se sigue que, $V \cap KA = \emptyset$. Esto es, para cada $x \in X \setminus KA$, existe una vecindad abierta V de x en X, tal que $x \in V \subset X \setminus KA$, lo cual significa que KA es cerrado en X.

(3) Si K y A son compactos, su producto cartesiano $K \times A$ es también compacto. Entonces, su imagen $\theta(K, A) = KA$ es compacto, por la continuidad de θ. □

Uno de los factores necesarios para obtener G-espacios a partir de otros, es la verificación de la continuidad de la acción en el nuevo espacio. El siguiente resultado será útil en este tipo de cuestiones.

Proposición 1.8. *Sea X un G-espacio con acción θ. Entonces θ es abierta. En el caso que G es compacto, θ es cerrada.*

Prueba. Como $G \times X$ tiene la topología producto, entonces sus abiertos básicos son de la forma $U \times V$ donde U es abierto en G y V es abierto en X. Luego, $\theta(U \times V) = UV$ y por (1) de la Proposición 1.7 se tiene que UV es abierto y por lo tanto θ es abierta.

Mostremos ahora que θ es cerrada cuando G es compacto.

Sea C un cerrado de $G \times X$ y x un punto de X. Sea $\{g_\lambda x_\lambda\}$ una red en $\theta(C)$ que converge a x en X, donde $\{(g_\lambda, x_\lambda)\}$ está en C. Como G es compacto, existe una subred $\{g_{\lambda_\gamma}\}$ de $\{g_\lambda\}$ que converge a un elemento g de G. Luego $\{g_{\lambda_\gamma}^{-1}\}$ converge a g^{-1} y por continuidad de la acción, $\{x_{\lambda_\gamma}\} = \{g_{\lambda_\gamma}^{-1}(g_{\lambda_\gamma} x_{\lambda_\gamma})\}$ converge a $g^{-1}x$. Entonces la red $\{g_{\lambda_\gamma}, x_{\lambda_\gamma}\}$ en C converge a $\{g, g^{-1}x\}$ y como C es cerrado, $\{g, g^{-1}x\} \in C$. Por lo tanto $x = \theta(g, g^{-1}x) \in \theta(C)$. □

Ahora bien, si $x_1, x_2 \in X$, entonces sus órbitas coinciden o son ajenas, es decir, $G(x_1) = G(x_2)$ ó $G(x_1) \bigcap G(x_2) = \emptyset$. Esto origina una descomposición de X en las órbitas de cada uno de sus puntos. Así, la relación $x \sim y \Leftrightarrow G(x) = G(y)$, es una relación de equivalencia cuyas clases son precisamente las órbitas de X. El conjunto $X/\sim$

lo denotaremos por X/G y a la función que asocia a cada x con su clase de equivalencia, la representaremos por π y la llamaremos *proyección orbital.*

Definición 1.9. *Sean X un espacio topológico, Y un conjunto y $p : X \to Y$, una función sobreyectiva.*

Entonces se define la topología cociente $\mathcal{T}$ en Y como

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq Y : p^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$$

y p se dirá que es una identificación.

Es claro, de acuerdo a la construcción de la topología cociente, que una identificación es continua.

De aquí en adelante, X/G será considerado un espacio topológico con la topología cociente. Algunas propiedades importantes de π se prueban a continuación.

Proposición 1.10. *Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. Entonces la proyección orbital π es abierta. Más aún, si G es compacto, se cumple lo siguiente:*

1) π es cerrada.

2) X es de Hausdorff $\Rightarrow$ X/G es de Hausdorff.

3) X es compacto $\Longleftrightarrow$ X/G es compacto.

4) X es localmente compacto $\Longleftrightarrow$ X/G es localmente compacto.

Prueba. Si O es un abierto en X, entonces por (1) de la Proposición 1.7, se tiene que GO es abierto en X. Así, $\pi^{-1}(\pi(O)) = GO$ es abierto en X, y puesto que X/G tiene la topología cociente, entonces $\pi(O)$ es abierto en X/G. Por lo tanto π es abierta.

Supongamos ahora que G es un grupo compacto y probemos la segunda parte de la proposición.

1) Sea A un subconjunto cualquiera de X. Entonces se cumple lo siguiente,

$$GA = \pi^{-1}(\pi(A)) = X \setminus \{\pi^{-1}[X/G \setminus \pi(A)]\} \qquad (*)$$

Si A es cerrado en X, entonces GA es cerrado en X por (2) de la Proposición 1.7. De (*) se sigue que $\pi^{-1}[X/G \setminus \pi(A)]$ es abierto en X y por la definición de topología cociente, $X/G \setminus \pi(A)$ es abierto y entonces $\pi(A)$ es cerrado en X/G. Así π es cerrada.

2) Observemos que si X es de Hausdorff y G es compacto entonces las órbitas son compactas y cerradas por la Proposición 1.7. Ahora bien, cualesquiera dos puntos diferentes de X/G pueden ser escritos como $\pi(x)$ y $\pi(y)$ para $x, y \in X$ con $G(x) \bigcap G(y) = \emptyset$. Dado que X es de Hausdorff, entonces existen conjuntos abiertos U y V tales que $G(x) \subset U$, $G(y) \subset V$, y $U \bigcap V = \emptyset$.

Se tiene que, $\overline{U} \bigcap G(y) \subset \overline{U} \bigcap V = \emptyset$. Esto significa que $\pi(y) \notin \pi(\overline{U})$. De esta manera, $\pi(x) \in \pi(U)$, $\pi(y) \in X/G \setminus \pi(\overline{U})$, $\pi(U) \bigcap (X/G \setminus \pi(\overline{U})) = \emptyset$.

Por la Proposición 1.8, $\pi(U)$ es abierto, y por (1) de esta proposición, $X/G \setminus \pi(\overline{U})$ es también un abierto. Luego X/G es de Hausdorff.

3) $\Rightarrow$) Si X es compacto su imagen continua X/G es también compacta.

$\Leftarrow$) Dado que π es cerrada, que cada órbita es compacta y que $G(x) = \pi^{-1}(\pi(x))$, entonces $\pi^{-1}(C)$ es compacto para cada compacto C de X/G ([Ka, p. 38]). Por tanto, $\pi^{-1}(X/G) = X$ es compacto.

4) $\Rightarrow$) Dado $y \in X/G$, seleccione un punto arbitrario $x \in \pi^{-1}(y)$. Si X es localmente compacto, entonces existe una vecindad abierta U de x y un conjunto compacto C que contiene a U. Así, $y = \pi(x) \in \pi(U) \subset \pi(C)$. Como $\pi(U)$ es abierto y $\pi(C)$ es compacto entonces X/G es localmente compacto.

$\Leftarrow$) Suponga que X/G es localmente compacto. Entonces, para cualquier $x \in X$, existe una vecindad abierta U de $\pi(x)$ y un conjunto compacto C que contiene a U. Se sigue que $x \in \pi^{-1}(U) \subset \pi^{-1}(C)$. Se tiene que $\pi^{-1}(U)$ es abierto, y por [Ka, p. 38], $\pi^{-1}(C)$ es compacto. Entonces X es localmente compacto. $\square$

La adaptación de teoremas topológicos clásicos a la teoría equivariante no siempre se lleva a cabo de manera natural. Uno de los factores que influyen para lograr lo anterior, es por supuesto la existencia de una acción en los espacios topológicos. Además de esto, en repetidas ocasiones será necesario que los subconjuntos de los G-espacios sean invariantes, los cuales no siempre se tienen. En particular, cuando se trata de obtener vecindades invariantes de algún punto o conjunto, la siguiente proposición es bastante útil.

Proposición 1.11. *Sean G un grupo topológico compacto y X un G-espacio. Entonces toda vecindad de un conjunto invariante A contiene una vecindad abierta invariante de A.*

Prueba. Supongamos que V es una vecindad abierta de un conjunto invariante A. El conjunto $U = X/G \setminus \pi(X \setminus V)$ es un abierto de X/G que contiene a $\pi(A)$ y además $\pi^{-1}(U) \subset V$ debido a que si $u \in U$ entonces $\pi^{-1}(u) \bigcap (X \setminus V) = \emptyset$. De esta forma, $\pi^{-1}(U) = X \setminus (G(X \setminus V))$ es la vecindad abierta invariante de A contenida en V. □

4. MÉTRICA INVARIANTE.

En esta sección se menciona, qué es una métrica invariante y cuáles son las condiciones para que exista en un G-espacio metrizable.

Definición 1.12. *Una métrica ρ para un G-espacio metrizable X, compatible con su topología, es una métrica invariante si $\rho(gx, gy) = \rho(x, y)$ para todo $g \in G$, y $x, y \in X$, esto es, si el homemorfismo θ_g es una isometría respecto a la métrica ρ, para todo $g \in G$.*

La siguiente proposición establece una condición para la existencia de una métrica invariante.

Proposición 1.13. *Sean G un grupo compacto, X un G-espacio metrizable. Entonces existe una métrica invariante ρ para X.*

Prueba. Sea ρ cualquier métrica consistente con la topología de X. Para $x, y \in X$ definimos $d(x, y) = \sup_{g \in G} \rho(gx, gy)$

Afirmamos que d es la métrica buscada. En efecto,

$$d(hx,hy) = \sup_{g\in G} \rho(ghx,ghy) = \sup_{gh\in G} \rho(ghx,ghy) = d(x,y).$$

Probemos ahora que ρ y d generan la misma topología de X. Para esto, mostremos que cualquier sucesión de puntos $\{x_n\}$ en X converge a x_0 en (X,d) si y sólo si $\{x_n\}$ converge al mismo punto x_0 en (X,ρ).

Como $\rho(x,y) \leq d(x,y)$ entonces claramente $x_n \rightsquigarrow x_0$ en (X,d) implica que $x_n \rightsquigarrow x_0$ en (X,ρ).

Supongamos ahora que $x_n \rightsquigarrow x_0$ en (X,ρ), es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $\rho(x_n,x_0) < \varepsilon$, para toda $n \geq N$. Afirmamos que $x_n \rightsquigarrow x_0$ en (X,d). En efecto, sean $\varepsilon > 0$, $g \in G$ y $V_g = \{y \in X : \rho(gx_0,y) < \frac{\varepsilon}{2}\}$ vecindad abierta de gx_0. Por continuidad de la acción podemos elegir vecindades abiertas O_g de g y $W_g = \{y \in X : \rho(x_0,y) < \delta_g\}$ de x_0 tales que $\theta(O_g \times W_g) \subset V_g$. Luego, para cada $h \in O_g$ y $x \in W_g$, se tiene que $hx \in V_g$, esto es

$$\rho(hx,gx_0) < \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$

Por la compacidad de G existen $g_1,...,g_n \in G$ y vecindades O_{g_i} de g_i con $i = 1,...,n$, tales que

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} O_{g_i}.$$

Además, para cada O_{g_i} existe su respectivo $W_{g_i} = \{y \in X : \rho(x_0,y) < \delta_{g_i}\}$ tal que $\theta(O_{g_i} \times W_{g_i}) \subset V_{g_i}$. Sea $\delta = min\{\delta_{g_1},...,\delta_{g_n}\}$. Debido a que $x_k \rightsquigarrow x_0$ en (X,ρ), entonces para δ existe $N_1 > 0$ tal que $\rho(x_k,x_0) < \delta \leq \delta_{g_i}$, para toda $k \geq N_1$. Tenemos entonces que cualquier g debe estar en algún O_{g_i} y x_k en W_{g_i}, lo que implica por (**) que $\rho(gx_k,g_ix_0) < \frac{\varepsilon}{2}$.

De esta manera, $\rho(gx_k,gx_0) \leq \rho(gx_k,g_ix_0) + \rho(g_ix_0,gx_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, para $k \geq N_1$. Luego, tomando supremos se tiene que $\sup_{g\in G}(gx_k,gx_0) \leq \varepsilon$, es decir, $d(x_k,x_0) \leq \varepsilon$, para toda $k \geq N_1$. Hemos probado entonces que $x_k \rightsquigarrow x_0$ en (X,d). $\square$

5. ESPACIOS DE ADJUNCIÓN.

El proceso de "pegar" dos espacios topológicos por medio de una función continua es de gran importancia dentro del estudio de la topología. En este proceso se encuentran, por ejemplo, las construcciones del cono, de las suspensiones, de CW-complejos, etc. En nuestro caso, las propiedades de extensión y retracción de estos espacios vistos como G-espacios representan nuestro problema principal.

Definición 1.14. *Sean X y Y dos espacios topológicos ajenos. La suma disjunta $X+Y$ es el espacio formado por la unión disjunta de X y Y, con la topología $\mathcal{D} = \{U \subset X \bigcup Y : U \bigcap X$ es abierto en X y $U \bigcap Y$ es abierto en $Y\}$.*

Dado que $X \bigcap Y = \emptyset$, X y Y conservan sus topologías y son abiertos disjuntos en $X+Y$. Además, $A \subset X+Y$ es cerrado si y sólo si $A \bigcap X$ y $A \bigcap Y$ son cerrados en X y Y respectivamente.

Definición 1.15. *Sean X, Y espacios topológicos, A un subconjunto cerrado de X y $f : A \to Y$ una función continua. Si se genera una relación de equivalencia en $X+Y$ dada por $a \sim f(a)$ para cada $a \in A$* y $x \sim x$ para cada $x \in A$, *entonces se dice que el espacio cociente $X+Y/\sim$ es el espacio de adjunción de X a Y por medio de f y será denotado por $X \bigcup_f Y$.*

La función $p : X+Y \to X \bigcup_f Y$ definida por $z \mapsto p(z) = [z]$, donde $[z]$ denota la clase de equivalencia de z, de acuerdo a la definición anterior, es llamada la *proyección canónica* o *natural* de $X+Y$ en $X \bigcup_f Y$.

Claramente p es sobre y $X \bigcup_f Y$ tiene la topología cociente respecto a ella, lo cual implica que p es una identificación.

A lo largo de este trabajo, el espacio de adjunción tendrá la topología cociente respecto a su proyección canónica, y sólo cuando sea necesario se especificará otra topología sobre el mismo.

Ejemplos.

1.- Sean $A \subset X$ un cerrado y $Y = \{y_0\}$. Adhiriendo X a Y por medio de $f(A) = y_0$; entonces $X \bigcup_f \{y_0\} \cong X/A$. En particular, adheriendo el intervalo unitario $I = [0,1]$ a y_0 por $f(0) = f(1) = y_0$ se obtiene el círculo S^1.

2.- Si se adhiere $X \times I$ a un punto p_0 por $f(X \times 0) = p_0$ se obtiene el *cono sobre* X, el cual denotaremos por $Con(X)$.

3.- Pegando $X \times I \times Y$ a la suma disjunta $X + Y$ por $(x, 0, y) \mapsto x$, $(x, 1, y) \mapsto y$ obtenemos el *espacio join* X^*Y *de* X *a* Y. Éste consiste de los espacios X y Y junto con los segmentos de línea que unen cada $x \in X$ a cada $y \in Y$, donde ningún par de segmentos tiene puntos en común fuera de $X \bigcup_f Y$. Es fácil ver que $X * \{y_0\} \cong Con(X)$.

Las propiedades topológicas de $X + Y$, nos permiten establecer las de su espacio de adjunción.

Proposición 1.16. *Sea* $p : X + Y \to X \bigcup_f Y$ *la proyección canónica. Entonces:*
(1) $i = p|_Y$ *es un encaje cerrado.*
(2) $j = p|_{X \setminus A}$ *es un encaje abierto.*

Prueba. (1) Es claro de la definición que i es continua y biyectiva. Si $C \subset Y$ es cerrado, $p^{-1}(i(C)) = C \bigcup f^{-1}(C)$ es cerrado en $X + Y$, ya que C es cerrado en Y y $f^{-1}(C)$ es cerrado en A, el cual a su vez es cerrado en X. Por lo tanto, $i(C)$ es cerrado en $X \bigcup_f Y$. Así, i es encaje cerrado.

(2) De la definición es fácil ver que j es continua y biyectiva. Si $U \subset X \setminus A$ es abierto, $p^{-1}(j(U)) = U$ es abierto en X y por tanto en $X + Y$. Luego, $j(U)$ es abierto en $X \bigcup_f Y$ y entonces j es encaje abierto. □

6. PROPIEDADES DE IDENTIFICACIONES.

Las propiedades topológicas de los espacios de adjunción dependen en gran medida de las propiedades de su proyección canónica. A continuación se mencionarán algunas de ellas.

Comenzaremos con establecer las condiciones para que una identificación sea abierta, para lo cual definimos lo que es un conjunto saturado.

Definición 1.17. *Sea $p : X \to Y$ una identificación. Un subconjunto A de X es saturado, si es la imagen inversa de algún subconjunto de Y.*

De esta manera, podemos establecer las condiciones necesarias y suficientes para que una identificación sea abierta.

Teorema 1.18. *Sea $p : X \to Y$ una identificación. Entonces p es abierta (cerrada) si y sólo si la saturación $p^{-1}p(A)$ de cada conjunto abierto (cerrado) A en X es también abierto (cerrado) en X.*

Prueba. $\Rightarrow$) Si p es abierta (cerrada), entonces A abierto (cerrado) en X implica $p(A)$ abierto (cerrado) en Y. Por la continuidad de p obtendremos que $p^{-1}p(A)$ es abierto (cerrado) en X.

$\Leftarrow$) Si A es abierto (cerrado) en X, entonces por hipótesis, $p^{-1}p(A)$ es abierto (cerrado) en X, lo que implica por ser p una identificación, que $p(A)$ es abierto (cerrado) en Y. Por lo tanto p es abierta (cerrada). $\square$

La composición de identificaciones es siempre una identificación. Sin embargo, el producto de identificaciones no es siempre una identificación. A continuación se mencionará cuándo ocurre este hecho. Para esto necesitamos los siguientes lemas, cuyas demostraciones las puede encontrar en [Du, pp. 123-124 y 261].

Lema 1.19. *Sea $p : X \to Y$ una función continua sobreyectiva. Entonces p es una identificación si y sólo si, para cada espacio Z y cada función $g : Y \to Z$, la continuidad de gp implica la de g.*

Lema 1.20 (Transgresión). *Sean $p : X \to Y$ una identificación y $h : X \to Z$ una función continua. Supongamos que hp^{-1} es univaluada (esto es, h es constante sobre cada fibra $p^{-1}(y)$). Entonces $hp^{-1} : Y \to Z$ es continua.*

Lema 1.21. *Sea Z^Y el espacio de todas las funciones continuas de Y en Z, con la topología compacto-abierta, y sea $\widehat{\alpha} : X \to Z^Y$ la función asociada a la función* $\alpha : X \times Y \to Z$, definida como $x \mapsto \widehat{\alpha}(x) : Y \to Z$, donde $[\widehat{\alpha}(x)](y) = \alpha(x, y)$. Entonces,

(1) Si $\alpha : X \times Y \to Z$ es continua, entonces $\widehat{\alpha} : X \to Z^Y$ es también continua.

(2) Si $\widehat{\alpha} : X \to Z^Y$ es continua y Y es localmente compacto, entonces $\alpha : X \times Y \to Z$ es también continua.

Los tres lemas anteriores nos permiten probar el teorema principal de esta sección.

Teorema 1.22 (J.H.Whitehead). *Sea $p : X \to Y$ una identificación y sea Z localmente compacto. Entonces la función $p \times id : X \times Z \to Y \times Z$ es una identificación.*

Prueba. Sea W cualquier espacio y $g : Y \times Z \to W$ cualquier función tal que $g \cdot (p \times id) : X \times Z \to W$ es continua. De acuerdo al Lema 1.19 debemos de probar que g es continua. Nótese primero que si $\alpha = g \cdot (p \times id)$ es continua y W^Z denota el espacio de todas las funciones continuas de Z a W con la topología compacto-abierta, entonces la función asociado $\widehat{\alpha} : X \to W^Z$ es también continua por (1) del Lema 1.21. Aún más, $\widehat{\alpha}p^{-1} : Y \to W^Z$ es univaluada, dado que

$$[\widehat{\alpha}p^{-1}(y)](z) = \alpha(p^{-1}(y), z) = g(pp^{-1}(y), z) = g(y, z) = [\widehat{g}(y)](z).$$

Por el Lema 1.20, se tiene que $\widehat{\alpha}p^{-1} = \widehat{g} : Y \to W^Z$ es continua, y puesto que Y es localmente compacto, por (2) del Lema 1.21 se concluye que $g : Y \times Z \to W$ es continua. □

7. TEOREMAS SOBRE G-ESPACIOS NORMALES.

A continuación se establecen las versiones equivariantes de algunos teoremas clásicos sobre espacios normales, las cuales posteriormente se aplicarán al caso particular de los G-espacios métricos

Teorema 1.23. *Si G es un grupo compacto, X un G-espacio normal y A un cerrado invariante de X, entonces para cada abierto $U \supset A$, existe un abierto invariante V tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Prueba. Como X es normal entonces existe una vecindad W de A tal que $A \subset W \subset \overline{W} \subset U$. Como A es invariante y W es vecindad de A, existe por la Proposición 1.11, una vecindad abierta e invariante V de A tal que $A \subset V \subset W$. Más aún, $\overline{V} \subset \overline{W}$. Entonces $A \subset V \subset \overline{V} \subset \overline{W} \subset U$. □

La siguiente proposición se sigue fácilmente del teorema anterior y será utilizada en el Teorema 1.25.

Proposición 1.24. *Si G es un grupo compacto y X un G-espacio normal, entonces X/G es un G-espacio normal.*

Una caracterización de los espacios normales es el Lema de Extensión de Tietze-Urysohn. Para los fines de este trabajo, probaremos la versión equivariante.

Teorema 1.25 (Lema Invariante de Extensión de Tietze-Urysohn). *Sean G un grupo compacto, X un G-espacio normal y C un cerrado invariante de X.*

Si $f : C \to [0,1]$ es una función invariante, entonces existe una extensión invariante $F : X \to [0,1]$ de f.

Prueba. La función invariante $f : C \to [0,1]$ induce una función continua $\tilde{f} : \pi(C) \to [0,1]$ definida como $\tilde{f}(\pi(x)) = f(x)$, para cada $x \in C$ y donde $\pi : X \to X/G$ es la proyección orbital. Dado que G es compacto entonces $\pi(C)$ es un cerrado en X/G. Por la Proposición 1.24 X/G es normal. Así, aplicando el teorema clásico de extensión de Tietze-Urysohn existe una extensión $f^* : X/G \to [0,1]$ de $\tilde{f}$ a todo el espacio orbital X/G. Considérese la función $F = f^*\pi : X \to [0,1]$. Afirmamos que F es la extensión deseada.

En efecto, sea $k \in C$, entonces $F(k) = f^*(\pi(k)) = \tilde{f}(\pi(k)) = f(k)$. Además, $F(gx) = f^*(\pi(gx)) = f^*(\pi(x)) = F(x)$, para todo $x \in X$ y $g \in G$. □

Del teorema anterior se deduce el siguiente corolario, que corresponde a la versión equivariante del Lema de Urysohn.

Corolario 1.26. *Si G es un grupo compacto y X un G-espacio normal, entonces para A y B subespacios cerrados invariantes de X existe una función invariante f de X en el intervalo unitario tal que $f|A = 0$ y $f|B = 1$.*

II. Propiedades de Espacios G-A(N)E y G-A(N)R

Los espacios A(N)R(C) y A(N)E(C) (sobre la clase C), poseen propiedades interesantes relacionadas con encajes en espacios vectoriales topológicos y propiedades de extensión (véase [Hu] o [Bo1]).

En nuestro caso, estableceremos las definiciones para dichos espacios en la categoría Top^G (véase [An1], [An2], [An3]).

1. DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS DE ESPACIOS G-A(N)E Y G-A(N)R.

Para cualquier clase de espacios topológicos C, denotaremos por C^G la clase de todos los G-espacios X, tales que X como espacio topológico pertenece a C.

Definición 2.1. *Un G-espacio Y es llamado un G-extensor absoluto de vecindad de C^G o G-$ANE(C)$ (resp., G-extensor absoluto de C^G o G-$AE(C)$) si para cada $X \in C^G$ y cada subconjunto cerrado invariante A de X, cualquier función equivariante $f : A \to Y$ puede ser extendida a una función equivariante $f : U \to Y$, donde U es una vecindad invariante de A en X (resp., $U = X$).*

Antes de definir lo que es un espacio G-ANR(C), recordaremos el concepto de *retracto*.

Sea Z un espacio topológico y Y un subespacio de Z. Se dice que Y es un retracto de vecindad (resp., retracto) de Z, si la función identidad $id : Y \to Y$ se puede extender a una función continua $r : U \to Y$, donde U es una vecindad de Y en Z, (resp. $U = Z$). Dicha extensión se llama retracción de vecindad (resp., retracción).

El análogo de retracto en la categoría de los G-espacios, lo enunciamos a continuación.

Definición 2.2. *Un subconjunto invariante Y de un G-espacio Z es llamado un retracto equivariante de vecindad (resp., un retracto equivariante) de Z, si existe una retracción equivariante $r : U \to Y$, donde U es una vecindad invariante de Y en Z (resp., $U = Z$).*

Entonces podemos definir lo que es un espacio G-ANR(C).

Definición 2.3. *Un G-espacio Y es llamado un G-retracto absoluto de vecindad de C^G o un G-ANR(C) (respectivamente, un G-retracto absoluto de C^G o un G-AR(C)), si $Y \in C^G$ y siempre que Y sea un cerrado invariante de un G-espacio $Z \in C^G$, entonces Y es un retracto equivariante de vecindad (respectivamente, un retracto equivariante) de Z.*

En nuestro trabajo, los principales resultados serán sobre los espacios G-A(N)E($\mathcal{M}$) y G-A(N)R($\mathcal{M}$) donde $\mathcal{M}^G$ es la clase de los G-espacios metrizables. Así, para simplificar la notación, dichos espacios se denotarán simplemente como G-A(N)E y G-A(N)R.

Además, si X es un G-espacio y $A \subseteq X$ un cerrado invariante, entonces (X, A) será llamado un *G-par*. En el caso en que la acción es trivial, (X, A) será llamado simplemente un *par*.

Las siguientes proposiciones se refieren a propiedades de los espacios G-ANE($\mathcal{N}$) (donde $\mathcal{N}^G$ es la clase de los G-espacios normales), que permiten obtener espacios G-ANE($\mathcal{N}$) a partir de otros ya dados. Dichas propiedades serán aplicadas más adelante al caso particular de los espacios G-ANE.

Teorema 2.4. *Cualquier subconjunto abierto invariante de un G-ANE($\mathcal{N}$) es un G-ANE($\mathcal{N}$).*

Prueba. Sea $Y \in G$-ANE($\mathcal{N}$) y sea W un subconjunto abierto invariante de Y. Sea $f : A \to W$ una función equivariante, donde A es un cerrado invariante de un G-espacio normal X. Entonces afirmamos que f tiene una extensión equivariante de vecindad.

En efecto, sea $i : W \to Y$ la inclusión. Como $Y \in G$-ANE($\mathcal{N}$), la composición $\phi = i \cdot f : A \to Y$ tiene una extensión equivariante $\psi : V \to Y$, donde V es una vecindad invariante de A. Considere la preimagen $U = \psi^{-1}(W)$ en V. Como U es abierto en V y V es abierto en X, entonces U es un abierto en X que contiene a A. Además, U es invariante ya que W lo es y ψ es equivariante. Entonces la función $g : U \to W$, definida por $g(x) = \psi(x)$, para $x \in U$, es una extensión equivariante de vecindad de f. □

Proposición 2.5. *Sea G un grupo compacto. Si Y_1 y Y_2 son dos subespacios abiertos G-ANE($\mathcal{N}$) de un G-espacio Y y $Y = Y_1 \cup Y_2$, entonces Y es un G-ANE($\mathcal{N}$).*

Prueba. Sea $f : A \to Y$ cualquier función equivariante de un cerrado invariante A de un G-espacio X normal. Debemos probar que f tiene una extensión equivariante de vecindad.

Es claro que $f^{-1}(Y_1) \bigcup f^{-1}(Y_2) = A$. De la misma manera, si $W_1 = f^{-1}(Y_1) \bigcup (X \backslash A)$ y $W_2 = f^{-1}(Y_2) \bigcup (X \backslash A)$, se tiene que $X = W_1 \bigcup W_2$. Como X es normal, por el Teorema 1.23 y [Sa, p. 81], existen cerrados invariantes $X_1 \subset W_1$ y $X_2 \subset W_2$, en X tales que $X = X_1 \bigcup X_2$.

Sea $A_1 = X_1 \bigcap A$ y $A_2 = X_2 \bigcap A$. Entonces $A = A_1 \bigcup A_2$. Claramente, $f(A_1) \subset Y_1$, $f(A_2) = Y_2$ y $f(A_1 \bigcap A_2) \subset Y_1 \bigcap Y_2$.

Además, $Y_1 \bigcap Y_2 \in G$-ANE($\mathcal{N}$) por el Teorema anterior y puesto que $A_1 \bigcap A_2$ es un cerrado invariante del subespacio invariante normal $X_1 \bigcap X_2$, la restricción $f|_{A_1 \cap A_2}$ tiene una extensión equivariante $\phi : M \to Y_1 \bigcap Y_2$, sobre un abierto invariante $M \supset A_1 \bigcap A_2$ de $X_1 \bigcap X_2$.

Dado que $X_1 \bigcap X_2$ es normal, por el Teorema 1.23, existe un abierto invariante N de $X_1 \bigcap X_2$ tal que

$A_1 \bigcap A_2 \subset N \subset \overline{N} \subset M \subset X_1 \bigcap X_2$.

Considere la intersección $\overline{N} \bigcap A$; entonces

$A_1 \bigcap A_2 \subset \overline{N} \bigcap A \subset X_1 \bigcap X_2 \bigcap A = A_1 \bigcap A_2$.

Por lo tanto, $\overline{N} \bigcap A = A_1 \bigcap A_2$.

Esto nos permite definir la siguiente función equivariante $g : \overline{N} \bigcup A \to Y$, dada por:

$$g(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \in \overline{N} \\ f(x) & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Es fácil ver que $g(\overline{N} \bigcup A_1) \subset Y_1$ y como $Y_1 \in G\text{-ANE}(\mathcal{N})$, la restricción $g|_{\overline{N} \bigcup A_1}$ tiene una extensión equivariante $h_1 : V_1 \to Y_1$ a una vecindad abierta invariante $V_1 \supset \overline{N} \bigcup A_1$.

De la misma manera, $g|_{\overline{N} \bigcup A_2}$ tiene una extensión equivariante $h_2 : V_2 \to Y_2$ a una vecindad abierta invariante $V_2 \supset \overline{N} \bigcup A_2$.

Para cada $i = 1, 2$ se sigue de la normalidad de X_i y del Teorema 1.23, que existe un abierto invariante Q_i en X_i, tal que $\overline{N} \bigcup A_i \subset Q_i \subset \overline{Q_i} \subset V_i \subset X_i$.

Además, dado que $(X_1 \bigcap X_2) \setminus N$ y A son cerrados invariantes y disjuntos del espacio normal X, existen abiertos invariantes disjuntos D y E de X, tales que $(X_1 \bigcap X_2) \setminus N \subset D$ y $A \subset E$.

Considere los cerrados invariantes de X, $J_1 = \overline{(Q_1 \setminus X_2)} \cap \overline{E}$ y $J_2 = \overline{(Q_2 \setminus X_1)} \cap \overline{E}$.

Entonces, $J_1 \subset V_1$, $J_2 \subset V_2$ y $J_1 \bigcap J_2 \subset N$.

Sea $K_1 = J_1 \bigcup \overline{N}$ y $K_2 = J_2 \bigcup \overline{N}$. Luego, K_1 y K_2 son cerrados invariantes de X con $K_1 \subset V_1$, $K_2 \subset V_2$ y $K_1 \bigcap K_2 = \overline{N}$.

Puesto, que $h_1|_{\overline{N}} = g|_{\overline{N}} = h_2|_{\overline{N}}$, podemos definir la función $h : K \to Y$ sobre $K = K_1 \bigcup K_2$, de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{si } x \in K_1 \\ h_2(x) & \text{si } x \in K_2 \end{cases}$$

la cual es extensión equivariante de f.

Sea $R = L \bigcap E$, donde $L = (Q_1 \setminus X_2) \bigcup (Q_2 \setminus X_1) \bigcup N$. Entonces, $A \subset R \subset K$.

Tenemos que E es abierto invariante y L es un subconjunto invariante. Probaremos que L es abierto en X.

De las definiciones de N, Q_1 y Q_2, se sigue que existen abiertos B_0, B_1 y B_2 de X tales que,

$N = B_0 \bigcap X_1 \bigcap X_2$, $Q_1 = B_1 \bigcap X_1$ y $Q_2 = B_2 \bigcap X_2$.

Se sigue inmediatamente que $Q_1 \setminus X_2 = B_1 \setminus X_2$, $Q_2 \setminus X_1 = B_2 \setminus X_1$ son abiertos de X. Como $N \subset Q_1$ y $N \subset Q_2$ se tiene que

(1) $$N \subset B_0 \bigcap B_1 \bigcap B_2.$$

Sea $x \in B_0 \bigcap B_1 \bigcap B_2$ un punto arbitrario. Tenemos tres casos:

i) $x \in X_1 \bigcap X_2 \Rightarrow x \in N$.

ii) $x \in X \setminus X_2 \Rightarrow x \in B_1 \bigcap (X \setminus X_2) = B_1 \setminus X_2$.

iii) $x \in X \setminus X_1 \Rightarrow x \in B_2 \bigcap (X \setminus X_1) = B_2 \setminus X_1$.

(2) $$B_0 \bigcap B_1 \bigcap B_2 \subset L.$$

Las inclusiones de (1) y (2) implican que $L = (B_1 \setminus X_2) \bigcup (B_2 \setminus X_1) \bigcup B_0 \bigcap B_1 \bigcap B_2$.

Lo cual prueba que L es abierto en X.

En conclusión, $h|_R : R \to Y$ es extensión equivariante de vecindad de f. Por lo tanto, $Y \in G$-ANE($\mathcal{N}$). □

Es importante señalar que en los G-espacios métricos la propiedad de ser G-A(N)E es equivalente con la de ser G-A(N)R. Aunque esto sucede no sólo para esta clase de espacios (ver [An1] y [An3]), nosotros sólo lo probaremos para el caso métrico. Para esto es necesario el siguiente lema.

Lema 2.6. *Sea X un G-espacio métrico. Si X es un retracto equivariante de vecindad de un espacio $Y \in G$-ANE, entonces X es un G-ANE.*

Prueba. Sea A un cerrado invariante de un G-espacio métrico Z, y $f : A \to X \subset Y$ una función equivariante. Como $Y \in G$-ANE, entonces existe $g : U \to Y$, una función equivariante, donde U es una vecindad invariante de A en Z y $g|_A = f$.

Sea $r : V \to X$ la retracción equivariante de una vecindad invariante V de Y sobre X. Definamos $W = g^{-1}(V)$ y $F = rg|_W$. Es claro entonces que F es una función equivariante de W sobre X. Además, $F|_A = f$. Por lo tanto X es un G-ANE. □

Teorema 2.7. *Sea G un grupo compacto. Entonces un G-espacio métrico X es un G-ANE si y sólo si X es un G-ANR.*

Prueba. $\Rightarrow$) Sea $X \in G$-ANR. De acuerdo a [An3, p.p. 518 y 523] tenemos que X puede ser encajado de manera equivariante, como un cerrado de algún G-espacio métrico $Z \in G$-AE. Como $X \in G$-ANR, entonces es un retracto de vecindad equivariante de Z. Así, por el lema anterior se concluye esta parte.

$\Leftarrow$) Considere a X como un cerrado invariante de un G-espacio métrico Z y considere $id : X \to X$, la identidad en X. Como $X \in G$-ANE entonces id tiene una extensión de vecindad equivariante $r : U \to X$, con una vecindad invariante U de X en Z. Por lo tanto $X \in G$-ANR. □

2. G-RETRACTOS FUERTES POR DEFORMACIÓN Y CUBIERTAS CANÓNICAS.

El concepto de Retracto Equivariante de Vecindad Fuerte por Deformación será manejado dentro de las hipótesis necesarias para que el espacio de adjunción de dos G-ANE sea un G-ANE. A continuación lo establecemos.

Definición 2.8. *Sea Y un G-espacio. Un cerrado invariante $B \subseteq Y$ es un G-retracto de vecindad fuerte por deformación de Y si existe una vecindad invariante W de B y una homotopía equivariante $h : W \times I \to Y$, donde I tiene la acción trivial, tal que $h_0 : B \hookrightarrow Y$ es la inclusión, h_1 es una retracción de W sobre B, y $h(b,t) = b$ para todo $b \in B$, $t \in I = [0,1]$. En este caso h será llamada una G-retracción fuerte por deformación de W sobre B.*

La continuidad de algunas funciones en las pruebas de los teoremas principales del siguiente capítulo, estará determinada por las cubiertas canónicas de los espacios. Dichas cubiertas se definen de la siguiente manera.

Definición 2.9. *Sean (Y, B) un par y $\{V_\alpha\}$ una colección de subconjuntos abiertos de Y. Decimos que dicha $\{V_\alpha\}$ es una cubierta canónica de (Y, B) si cumple con las siguientes condiciones:*

(1) $\bigcup_{\alpha} V_\alpha = Y \backslash B$

(2) Para cada $b \in B$ *y cada vecindad* U *de* b *en* Y, *existe una vecindad* W *de* b *en* Y *tal que* $V_\alpha \subset U$ *siempre que* $V_\alpha \bigcap W \neq \emptyset$.

(3) $\{V_\alpha\}$ *es localmente finita (es decir, para cada* $y \in Y$ *existe una vecindad* V *de* y, *tal que* V *intersecta a lo más un número finito de elementos de* $\{V_\alpha\}$*).*

Además, si $\{V_\alpha\}$ *cumple sólo con las dos primeras condiciones, entonces se dice que* $\{V_\alpha\}$ *es una cubierta semicanónica.*

Si un par tiene una cubierta canónica, diremos que es un *par canónico*. Más aún, si $\{V_\alpha\}$ es una cubierta canónica de un par (Y, B) y para cada $y \in Y \backslash B$ se selecciona un elemento V_y de $\{V_\alpha\}$ que contenga a y, entonces la colección $\{V_y\}$ es una cubierta canónica de (Y, B).

Antes de probar que todos los pares métricos son canónicos es necesario mencionar algunas cuestiones preliminares.

Definición 2.10. *Sean* $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ *y* $\{B_\beta : \beta \in J\}$ *dos cubiertas de un espacio* Y. *Se dice que* $\{A_\alpha\}$ *refina a (o es un refinamiento de)* $\{B_\beta\}$ *si para cada* A_α *existe algún* B_β *con* $A_\alpha \subset B_\beta$, *lo cual se denotará de la siguiente manera* $\{A_\alpha\} \succ \{B_\beta\}$.

Si $\{A_\alpha\}$ es una familia localmente finita entonces se dice que $\{A_\alpha\}$ es un *refinamiento localmente finito* de $\{B_\beta\}$.

Definición 2.11. *Un espacio* X *de Hausdorff es paracompacto si cada cubierta abierta de* X *tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

De esta manera, llegamos al resultado principal de esta sección.

Teorema 2.12. *Cada par métrico* (Y, B) *es canónico.*

Prueba. Sea $y \in Y \setminus B$, $r(y) = \frac{1}{2}d(y, B)$ y $C(y, r(y)) = \{x \in Y : d(x, y) < r(y)\}$. Es claro que $Y \backslash B = \bigcup_{y \in Y \backslash B} C(y, r(y))$.

Ahora bien, puesto que Y es métrico, lo es también $Y \setminus B$, y por el teorema de A. H. Stone [Du, p. 186], $Y \setminus B$ es paracompacto. Así, existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{U} = \{U_\mu\}$ de $\mathcal{C} = \{C(y, r(y))\}$. Afirmamos que $\mathcal{U}$ es la cubierta canónica que buscamos.

Si V_a es una vecindad de un punto $a \in B$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola abierta en Y, con centro en a y de radio ε, está contenida en V_a. Sea W_a la bola abierta con centro en a y radio $\frac{1}{3}\varepsilon$. Supongamos que existe $w \in U_\mu \cap W_a$, para algún $U_\mu \in \mathcal{U}$. Puesto que $\mathcal{U}$ refina a $\mathcal{C}$, podemos encontrar un punto $s \in Y \setminus B$, para el cual $U_\mu \subset C(s, r(s))$. Además, $w \in C(s, r(s))$ y consecuentemente $d(w, s) < \frac{1}{2}d(s, B) \leq \frac{1}{2}d(a, s)$. De esta manera, $d(a, s) \leq d(a, w) + d(w, s) < d(a, w) + \frac{1}{2}d(a, s)$; de aquí, $\frac{1}{2}d(a, s) < d(a, w)$, y como $d(a, w) < \frac{1}{3}\varepsilon$, entonces $d(a, s) < \frac{2}{3}\varepsilon$.

Luego, si $z \in U_\mu \subset C(s, r(s))$ se tiene que,

$d(a, z) \leq d(a, s) + d(s, z) < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{2}d(s, B) \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{2}d(s, a) < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon.$

Por lo tanto $z \in V_a$. Es decir, $U_\mu \subset V_a$. $\square$

Para nuestros propósitos las cubiertas a utilizar serán las semicanónicas, por lo que es importante mencionar que para estas últimas, la proposición anterior es válida también y será aplicada en el capítulo siguiente.

III. Espacios de Adjunción de Espacios G-ANR's

Sean X, Y espacios métricos, $A \subseteq X$ un cerrado de X y $f\colon\ A \to Y$ una función continua. Entonces si X, Y, y A son ANR's, el espacio de adjunción $X \bigcup_f Y$ también lo es siempre y cuando sea metrizable. Esta proposición fue probada en distintas etapas por Borsuk [Bo2], Whitehead [Wh] y Hanner [Ha]. Posteriormente Hyman [Hy] hace una generalización de dicho teorema.

Nuestro propósito es llegar a un resultado análogo a este último, en la categoría de G-espacios.

1. TEOREMA EQUIVARIANTE DE BORSUK-WHITEHEAD-HANNER.

Es importante mencionar que en este capítulo se utilizará el concepto de *cubierta semicanónica*. El propósito de utilizarlo se debe a que dichas cubiertas son un caso más débil que las canónicas dado que no poseen la propiedad de ser localmente finitas y en el espacio de adjunción no necesitaremos utilizar dicha propiedad, aunque los dos tipos de cubiertas se conservan bajo la proyección canónica en los espacios de adjunción.

El siguiente lema será útil en cuestiones de continuidad para la demostración del teorema posterior.

Lema 3.1. *Suponga que $\{V_\alpha\}$ es una cubierta semicanónica para un par (Y, B). Sean $\{x_\lambda\}$ y $\{y_\lambda\}$ dos redes en $Y \setminus B$, y suponga que para cada λ, x_λ y y_λ están en un elemento común V_λ de $\{V_\alpha\}$. Entonces $\{x_\lambda\}$ converge a un punto $b \in B$ si y sólo si $\{y_\lambda\}$ converge a b.*

Prueba. Suponga que $\{x_\lambda\}$ converge a b. Sea U cualquier vecindad de b y W una vecindad de b tal que $V_\alpha \subseteq U$ siempre que $V_\alpha \cap W \neq \emptyset$. Como existe λ_0 tal que $x_\lambda \in W$

para toda $\lambda \geq \lambda_0$, los conjuntos V_λ están contenidos en U para toda $\lambda \geq \lambda_0$ y puesto que $y_\lambda \in V_\lambda$, se sigue que $\{y_\lambda\}$ converge a b. El inverso es análogo. □

A continuación estableceremos el teorema en el cual se sustentan nuestros resultados principales acerca de las propiedades de extensión de los espacios de adjunción equivariantes.

Teorema 3.2. *Sean G un grupo compacto y (Z, B) un G-par semicanónico tal que B es G-retracto de vecindad fuerte por deformación de Z. Si B y $Z \setminus B$ son G-ANE, entonces Z es un G-ANE.*

Prueba. Sea $h : W \times I \to Z$ una G-retracción fuerte por deformación de W sobre B, con W vecindad invariante de B. Sea $\{V_\alpha\}$ una cubierta semicanónica para el G-par (Z, B). Si para cada $y \in Z \setminus B$ se selecciona un elemento V_y tal que $y \in V_y$, entonces $\{V_y\}$ será también una cubierta semicanónica para el G-par (Z, B), de acuerdo a la observación hecha en el capítulo anterior después de la definición de cubierta canónica. Por la Proposición 2.5, sólo tenemos que probar que W es un G-ANE pues $Z = W \bigcup (Z \setminus B)$.

Sea (X, A) un G-par métrico y $f : A \to W$ una función equivariante. Debemos probar que f tiene una extensión equivariante de vecindad.

Definamos los siguientes conjuntos $A_0 = f^{-1}(B)$, $A_1 = A \setminus A_0$ y $X_1 = X \setminus A_0$. Así, $f(A_1) \subseteq Z \setminus B$ y dado que $Z \setminus B$ es un G-ANE, entonces como A_1 es un cerrado invariante en X_1, existe una vecindad G-invariante $\Gamma_1 \supseteq A_1$ en X_1 y una función equivariante $\varphi_1 : \Gamma_1 \to Z \setminus B$, tales que $\varphi_1|A_1 = f|A_1$.

Para cada $a \in A_1$, sea Γ_a el conjunto de puntos $x \in \Gamma_1$ tales que se cumplen las siguientes condiciones:

i) $d(x, A_0) > \frac{1}{2}d(a, A_0)$

ii) $d(x, a) < d(a, A_0)$

iii) $x \in \varphi_1^{-1}(V_{\varphi_1(a)})$

iv) $x \in \varphi_1^{-1}(W)$

Haciendo $\Gamma_2 = \bigcup_{a\in A_1} \Gamma_a$, entonces se tiene que Γ_2 es abierto en X_1 y contiene a A_1.

Puesto que X es métrico y por el Teorema 1.23, existe vecindad invariante U de A_1 en X_1 tal que $\overline{U} = K$ en X_1 cumple $K \subseteq \Gamma_2$. Además, por el Corolario 1.26, existe una función invariante $\lambda : X_1 \to [0,1]$ tal que $\lambda(A_1) = 0$ y $\lambda(X_1 \setminus U) = 1$.

Defínase ahora:

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} h(\varphi_1(x), \lambda(x)) & \text{si } x \in K \\ f(x) & \text{si } x \in A_0. \end{cases}$$

Tenemos que φ_2 conmuta con la acción y está bien definida puesto que $K \bigcap A_0$; además extiende a f. Aún más, φ_2 es continua excepto, posiblemente, en los puntos de A_0, los cuales son puntos límites de $K \setminus A_1$. Para probar la continuidad en dichos puntos, suponemos que $a \in A_0$, es el límite de una sucesión $\{x_n\}$ en $K \setminus A_1$ y mostremos que $\{\varphi_2(x_n)\} \rightsquigarrow \varphi_2(a)$. Así, para cada n, escójase $a_n \in A_1$ tal que $x_n \in \Gamma_{a_n}$. Puesto que $\{x_n\} \rightsquigarrow a \in A_0$, se sigue de $i)$ que $\{d(a_n, A_0)\} \rightsquigarrow 0$ y de $ii)$ que $\{d(x_n,a_n)\} \rightsquigarrow 0$. Así $\{a_n\} \rightsquigarrow a$. Debido a que $\{\varphi_1(a_n)\} = \{f(a_n)\} \rightsquigarrow f(a)$, encontramos por $iii)$ y el Lema 3.1 que $\{\varphi_1(x_n)\} \rightsquigarrow f(a)$. Dada una vecindad V de $f(a)$ en Z, existe una vecindad V_1 de $f(a)$ en Z, tal que $h(V_1 \times I) \subseteq V$. Como $\{\varphi_1(x_n)\} \rightsquigarrow f(a)$, entonces existe n_0 tal que para toda $n \geq n_0$, $\varphi_1(x_n) \in V$ y por definición de φ_2, $\varphi_2(x_n) \in V$, para toda $n \geq n_0$. De esta manera, φ_2 es continua en a y por consiguiente es continua en $K \cup A_0$. Por tanto, φ_2 es equivariante.

Dado que $\lambda = 1$ sobre la frontera de U en X_1 y h envía $W \times \{1\}$ en B, se sigue que φ_2 envía la frontera de $K \cup A_0$ en X, en B. Entonces, restringiendo φ_2 a la frontera de $Fr(K \bigcup A_0)$, tenemos, $\varphi_2|_{Fr(K\cup A_0)} : Fr(K \bigcup A_0) \to B$. Como B es un G-ANE, se sigue que $\varphi_2|_{Fr(K\cup A_0)}$ tiene una extensión equivariante $\psi : T \to B$, para algún abierto invariante $T \supset Fr(K \bigcup A_0)$ en X.

Sea $Q = T \cup Int(K \bigcup A_0)$, donde $Int(K \bigcup A_0)$ es el interior de $K \bigcup A_0$ en X.

Definamos la función equivariante $F : Q \to Y$ de la siguiente manera

$$F(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in T \\ \varphi_2(x) & \text{si } x \in K \bigcup A_0. \end{cases}$$

De esto se sigue que la restricción $F|F^{-1}(W)$ es una extensión de vecindad de f, así W es un G-ANE, y como $Z = W\bigcup(Z \setminus B)$, entonces por la Proposición 2.5, Z es un G-ANE. □

Mostremos ahora que el espacio de adjunción es un G-espacio.

Proposición 3.3. *Sean G un grupo localmente compacto, (X, A) un G-par, Y un G-espacio y $f : A \to Y$ una función equivariante.*

Entonces $X\bigcup_f Y$ es un G-espacio con acción $\varphi : G\times\ X\bigcup_f Y \to X\bigcup_f Y$, definida de la siguiente manera, $\varphi(g, [x]) = (p\theta)(g, x)$, donde θ es la acción natural sobre $X + Y$ y p la proyección canónica (equivariante).

Prueba. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G \times (X + Y) & \xrightarrow{id\times p} & G \times (X\bigcup_f Y) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \varphi \\ X + Y & \xrightarrow{p} & X\bigcup_f Y \end{array}$$

Mostremos que φ es una acción continua en $X\bigcup_f Y$, donde id es la identidad sobre G. Veamos primero que φ está bien definida. Para esto tenemos tres casos:

i) Si $x \in X \setminus A$ o $x \in Y$, es trivial.

ii) Sea $x \in A$ y $y = f(x) \in Y$; mostraremos que si $[x] = [y]$ entonces $\varphi(g, [x]) = \varphi(g, [y])$. Así,
$\varphi(g, [x]) = p\theta(g, x) = p(gx) = [gx]$ y $\varphi(g, [y]) = p\theta(g, f(x)) = p(gf(x)) = [f(gx)]$.
Pero $[gx] = [f(gx)]$, lo que implica que $\varphi(g, [x]) = \varphi(g, [y])$.

iii) Sea $x_1, x_2 \in A$, donde $f(x_1) = f(x_2)$.
Luego $\varphi(g, [x_1]) = \varphi(g, [f(x_1)]) = \varphi(g, [f(x_2)]) = \varphi(g, [x_2])$.

El hecho de que φ es una acción es claro y solamente falta probar que es continua. Por el diagrama se tiene que $\varphi(id \times p) = p\theta$, como G es localmente compacto entonces, por el Teorema 1.22, $id \times p$ es una identificación, y como $p\theta$ es continua entonces φ es continua. Con esto queda probada la proposición. □

El siguiente lema nos permite establecer las condiciones necesarias para aplicar el Teorema 3.2 al caso de los espacios de adjunción.

Lema 3.4. *Sean G un grupo compacto, (X,A) un G-par, Y un G-espacio, $f : A \to Y$ una función equivariante y $p : X+Y \to X\bigcup_f Y$ la proyección canónica. Entonces se cumple:*

1) Si $\{V_\alpha\}$ es una cubierta semicanónica para $(X+Y,\ A+Y)$, entonces $\{p(V_y)\}$ es una cubierta semicanónica para $(X\bigcup_f Y,\ p(Y))$.

2) Si $X, A, Y \in G$-ANR entonces $p(Y)$ es un G-retracto de vecindad fuerte por deformación de $X\bigcup_f Y$.

Prueba. 1) Por (2) de la Proposición 1.16, p envía al conjunto $X \setminus A$ homeomórficamente sobre el conjunto $(X\bigcup_f Y)\setminus p(Y)$, de lo cual se sigue que cada $p(V_\alpha)$ es abierto y además que $\bigcup\limits_\alpha p(V_\alpha) = (X\bigcup_f Y)\setminus p(Y)$. Sean $y \in p(Y)$ y U una vecindad de y en $X\bigcup_f Y$. Puesto que $\{V_\alpha\}$ es una cubierta semicanónica, para cada $x \in p^{-1}(U\bigcap p(Y))$ existe una vecindad $W_x \subset p^{-1}(U)$ de x en $X+Y$, tal que $V_\alpha \subset p^{-1}(U)$ siempre que $V_\alpha\bigcap W_x \neq \emptyset$. Sea $W = \bigcup\{W_x : x \in p^{-1}(U\bigcap p(Y))\}$.

De nuestra construcción es claro que $y \in p(W)$ y que si $p(V_\alpha)\bigcap p(W) \neq \emptyset$, entonces $V_\alpha\bigcap W_x \neq \emptyset$ para alguna $x \in p^{-1}(U\bigcap p(Y))$. De manera que $p(V_\alpha) \subseteq U$.

Ahora sólo resta probar que $p(W)$ es abierto. Como p es una identificación, por el Teorema 1.18 es suficiente mostrar que W es saturado, esto es, $W = p^{-1}(S)$ para algún $S \subset X\cup_f Y$. De nuestra construcción tenemos que

$W \cap p^{-1}(p(Y)) = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(p(Y)) = p^{-1}(U \cap p(Y))$.

Más aún, puesto que p es uno a uno en $(X+Y)\setminus p^{-1}(p(Y))$ se sigue que $W\setminus p^{-1}(p(Y))$ es saturado. Dado que W es la unión de los conjuntos saturados, $W\cap p^{-1}(p(Y))$ y $W\setminus p^{-1}(p(Y))$, entonces es saturado. De esta manera concluimos la prueba de 1). □

2) Dado que $p(Y)$ es homeomorfo a Y entonces $p(Y)$ es un G-espacio. Puesto que

$A \in G$-ANR, existe una vecindad invariante U de A en X y una retracción equivariante $\psi : U \to A$. Como U es abierto invariante en $X \in G$-ANR entonces por el Teorema 2.4, U es un G-ANR.

Sea $L = A \times I \cup U \times \{0\} \cup U \times \{1\}$ y $J : L \to U$ la deformación definida de la siguiente manera :

$J(x,0) = x,\ J(a,t) = a,\ J(x,1) = \psi(x), \forall x \in U, \forall a \in A.$

Como U es un G-ANR, existe una extensión equivariante $J^* : W \to U$ de J a una vecindad invariante de L en $U \times I$. Luego, por la compacidad del segmento I, podemos seleccionar una vecindad invariante V de A en U con $V \times I \subset W$. Así, tomando $j = J^*|_{V\times I}$ tenemos la deformación $j : V \times I \to U$, tal que $j(a,t) = a,\ \forall a \in A, \forall t \in I$ y $j(x,1) = (\psi|_V)(x)$ para $x \in V$.

Definamos la función

$$k_t([z]) = \begin{cases} pj_t(z) & \text{si } [z] \in p(V),\quad 0 \le t \le 1 \\ [z] & \text{si } [z] \in p(Y),\quad 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Como $V + Y$ es saturado y abierto en $X + Y$, se concluye que $p(V+Y)$ es vecindad de $p(A)$ en $X \cup_f Y$, y fácilmente se prueba que k es G-retracción fuerte por deformación de $p(V+Y)$ en $p(Y)$. □

El siguiente teorema constituye el resultado principal de nuestro trabajo. Es la versión equivariante del Teorema de Borsuk-Whitehead-Hanner.

Teorema 3.5. *Sean G un grupo compacto y (X,A) un G-par. Si X, Y, y A son espacios G-ANR entonces $X \bigcup_f Y \in G$-ANE.*

Prueba. Por el Teorema 2.12, (X,A) tiene una cubierta semicanónica y por tanto $(X+Y, A+Y)$ es un G-par semicanónico.

Entonces por (1) del Lema 3.4, y porque $p(Y)$ es cerrado invariante en $X \bigcup_f Y$, se tiene que $(X \bigcup_f Y, p(Y))$ es un G-par semicanónico. Además, por (2) del Lema 3.4, $p(Y)$ es un G-retracto de vecindad fuerte por deformación de $X \bigcup_f Y$, y como $p(Y)$ es G-homeomorfo a Y entonces $p(Y) \in G$-ANR. Ahora bien, $X \setminus A$ es abierto en X y por lo tanto es un G-ANR, y dado que $X \setminus A$ es G-homeomorfo a $p(X \setminus A)$, entonces $p(X \setminus A) \in G$-ANR.

De esta manera, si $Z = X \bigcup_f Y$ y $B = p(Y)$, por el Teorema 3.2, $Z \in G$-ANE. □

La siguiente proposición muestra las condiciones necesarias para que un G-ANE sea un G-AE.

Proposición 3.6. *Sean G un grupo compacto y $E \in G$-ANE. Si E puede ser deformado equivariantemente en un subespacio G-AE entonces $E \in G$-AE.*

Prueba. Sean $B \subset E$ un G-AE y $h : E \times I \to E$ una deformación equivariante tal que $h(E \times 1) \subset B$. Sean (X, A) un G-par métrico y $f : A \to E$ una función equivariante. Puesto que $E \in G$-ANE, existe una vecindad invariante $U \supset A$ en X y una extensión equivariante $F : \overline{U} \to E$ de f.

Por el Corolario 1.26, existe una función invariante $\lambda : X \to I$, tal que $\lambda(A) \subset \{0\}$ y $\lambda(X \setminus U) \subset \{1\}$.

Sea la restricción $\alpha = h_1 F|_{Fr(U)} : Fr(U) \to B$, donde $Fr(U)$ es la la frontera de U y $h_1 : E \to B$ es la función continua definida como $h_1(y) = h(y, 1)$, para cada $y \in E$. Como $B \in G$-AE, existe una extensión equivariante $\gamma : X \setminus U \to B$ de α.

Definimos

$$\phi(x) = \begin{cases} h(F(x), \lambda(x)) & \text{si } x \in \overline{U} \\ \gamma(x) & \text{si } x \in X \setminus U. \end{cases}$$

Es fácil ver que ϕ extiende equivariantemente la función f a todo X. Es decir, $E \in G$-AE. □

Usando (2) del Lema 3.4, el Teorema 3.5 y la Proposición 3.6, se sigue de inmediato el siguiente corolario para espacios $G-$AR.

Corolario 3.7. *Sea G un grupo compacto. Si $X, A, Y \in G$-AR's, entonces $X \bigcup_f Y \in G$-AE.*

2. APLICACIONES AL CONO DE UN G-ESPACIO.

En esta parte aplicaremos los resultados mostrados en la sección anterior al caso del cono de un G-espacio. Para esto probaremos antes que nada que dicho espacio es G-contraíble.

Lema 3.8. *Sean G un grupo compacto y T un G-espacio. Entonces $Con(T)$ es G-contraíble.*

Prueba. Sea $H : Con(T) \times I \to Con(T)$ la función definida de la siguiente manera :

$$H(\tau x, t) = t\tau x, \text{ para } \tau x \in Con(T);\ \tau, t \in I.$$

Afirmamos que H es una G-contracción. En efecto, como $0x = *$ donde $*$ es el vértice de $Con(T)$ se tiene que :

$H(\tau x, 0) = 0\tau x = *$ y $H(\tau x, 1) = 1\tau x = \tau x$.

Luego observamos que H es equivariante, puesto que :

$H[g(\tau x, t)] = H(\tau gx, t) = t\tau gx = g(t\tau x) = gH(\tau x, t)$.

Sólo resta probar que H es continua, para lo cual analizaremos la continuidad en los puntos de $Con(T) \times I$.

Tomemos cualquier punto $(\tau_0 x_0, t_0) \in Con(T) \times I$. Tenemos entonces dos casos:

i) Cuando $\tau_0 = 0$. Entonces $\tau_0 x_0 = *$ y $H(\tau_0 x_0,\ t_0) = *$. Sea U una vecindad del vértice $*$. Luego, $(x, 0) \in p^{-1}(U)$ para cada $x \in T$. Además por la continuidad de p se tiene que $p^{-1}(U)$ es abierto en $T \times I$ y por la definición de la topología en $T \times I$, existen V_x una vecindad de x y $[0, \varepsilon_x)$ tales que $V_x \times\ [0, \varepsilon_x) \subseteq p^{-1}(U)$, para todo $x \in T$. Sea $Q = \bigcup_{x\in T} V_x \times [0, \varepsilon_x)$ y considérese $V = p(Q)$ y $W = I$. Es claro que V es vecindad del vértice y W es vecindad de t_0. Mostremos ahora que $H(V \times W) \subseteq U$. Sea $v \in V$ y $t \in W$. Consideremos los siguientes casos.

a) $v = *$. En este caso $H(*, t) = * \in U$.

b) $v = \tau y$, donde $\tau \in (0, \varepsilon_y)$, $y \in T$. Entonces existe V_y vecindad de y tal que $V_y \times [0, \varepsilon_y) \subset Q$. Además, $t\tau \leq \tau$, para todo $t \in I$. Por lo tanto $t\tau \in [0, \varepsilon_y)$. Así,

$H(v,t) = t\tau y = p(y, t\tau) \in p(Q) = V \subseteq U.$

ii) Cuando $\tau_0 \neq 0$. Luego $\tau_0 x_0 \neq *$. Sea U una vecindad de $H(\tau_0 x_0, t_0) = t_0\tau_0 x_0$. Entonces $(x_0, t_0\tau_0) \in p^{-1}(U)$. Como p es continua, $p^{-1}(U)$ es abierto en $T \times I$ y por lo tanto existen vecindades M y N de x_0 y $t_0\tau_0$ respectivamente, tales que $M \times N \subseteq p^{-1}(U)$. Ahora bien, por continuidad de la multiplicación en $\mathbb{R}$, existen vecindades N_1 de t_0 y N_2 de τ_0 tales que $N_1 N_2 \subseteq N$.

Sea $V = p(M \times N_2)$ y $W = N_1$. Como $p : T \times (0,1] \to Con(T) \setminus \{*\}$ es un homeomorfismo, V es abierto en $Con(T) \setminus \{*\}$ y por tanto en $Con(T)$. Además $\tau_0 x_0 \in V$, dado que $\tau_0 \in N_2$ y $x_0 \in M$. Afirmamos que $H(V \times W) \subseteq U$. En efecto, sea $\tau x \in V$ y $t \in W$. Entonces, $t \in N_2$, $x \in M$ y

$H(\tau x, t) = t\tau x \in p(M \times (N_1 N_2)) \subseteq p(M \times N) \subseteq U.$ □

A partir del Teorema 3.5 se obtiene el siguiente corolario importante sobre el cono de un G-espacio.

Corolario 3.9. *Sea G un grupo compacto y $T \in G$-ANR. Entonces $Con(T) \in G$-ANE.*

Prueba. Sea $A = T \times \{0\}$, $Y = \{*\}$, $X = T \times [0,1]$, $Z = Con(T)$. Es claro que A y Y son G-ANR's. Además tanto T como $[0,1]$ son G-ANR's, por lo tanto X también lo es. Entonces por el Teorema 3.5, $Con(T) \in G$-ANE. □

El siguiente resultado es un corolario que se desprende del Lema 3.8, del corolario anterior y de la Proposición 3.6.

Corolario 3.10. *Sea G un grupo compacto y $T \in G$-ANR. Entonces $Con(T) \in G$-AE.*

Prueba. Por el Lema 3.8, $Con(T)$ es G-contraíble y por lo tanto puede ser deformado de manera equivariante en su vértice. Por el Corolario 3.9, $Con(T)$ es un G-ANE. Entonces haciendo $E = Con(T)$ y $B = *$ se tiene por la Proposición 3.6 que $Con(T) \in G$-AE. □

Es importante notar en la proposición anterior, que si T no se considera un G-ANR, sino que suponemos que es un G-ANE no metrizable, entonces la prueba no funciona, puesto que la metrizabilidad de T nos garantiza la existencia de cubiertas semicanónicas y por consiguiente permite aplicar el Teorema 3.5 al caso del cono.

Sin embargo, si T es un G-ANE no métrico el corolario anterior también es válido, sólo que es necesario definir otra topología para el $Con(T)$, la cual llamaremos *topología débil* y la denotaremos por Ω. Al cono de T con la topología Ω lo representaremos por $con(T)$.

Así, Ω consiste de todos los subconjuntos $W \subseteq con(T)$ tales que *$p^{-1}(W)$ es abierto en $T \times I$ y si* el vértice *$* \in W$, entonces existe además $\varepsilon > 0$ tal que $T \times [0, \varepsilon) \subset p^{-1}(W)$, donde p es la proyección canónica de $T \times I$ en el $con(T)$.*

Esta topología es más débil que la topología cociente y coincide con esta última cuando T es compacto.En este momento podemos ya establecer la proposición deseada.

Proposición 3.11. *Sean G un grupo compacto y $T \in G$-ANE. Entonces $con(T) \in G$-AE.*

Prueba. Sean (Y, B) un G-par métrico y $f : B \to con(T)$ una función equivariante. Sea $B_0 = f^{-1}(*)$, donde $*$ es el vértice del cono, y defínanse $f_1 = p_1 \circ f|_{B \setminus B_0} : B \setminus B_0 \to T$ y $f_2 = p_2 \circ f : B \to (0, 1]$, donde $p_1 : con(T) \setminus \{*\} \to T$ y $p_2 : con(T) \to [0, 1]$, son las proyecciones. Claramente f_1 es equivariante y f_2 es invariante. Puesto que $T \in G$-ANE, la función equivariante f_1 tiene una extensión equivariante $F_1 : U \to T$, sobre una vecindad invariante U de $B \setminus B_0$ en $Y \setminus B_0$.

Consideremos la restricción $\pi|_B : B \to B/G$ de la proyección orbital $\pi : Y \to Y/G$, la cual induce una función continua $\tilde{f}_2 : B/G \to [0, 1]$, dada por $\tilde{f}_2[G(b)] = f_2(b)$.

Como G es compacto, entonces $\pi(Y \setminus U) \cup \pi(B)$ es un cerrado de Y/G. Así, definamos la función continua, $\phi : \pi(Y \setminus U) \cup \pi(B) \to [0, 1]$ de la siguiente manera,

$$\phi(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in \pi(Y \backslash U) \\ \tilde{f}_2(z) & \text{si } z \in \pi(B). \end{cases}$$

Puesto que Y/G es métrico por la compacidad de G, entonces por el Teorema de Extensión de Tietze-Urysohn, existe una extensión $\Phi : Y/G \to [0,1]$ de ϕ. Luego, la función $\lambda = \Phi \circ \pi : Y \to [0,1]$ es continua, invariante y cumple con que $\lambda|_{Y \backslash U} = 0$ y que $\lambda|_B = f_2$.

Defínase la función $F : Y \to con(T)$ por,

$$F(y) = \begin{cases} p(F_1(y), \lambda(y)) & \text{si } y \in U \\ * & \text{si } y \in Y \setminus U. \end{cases}$$

Es claro que es extensión equivariante de f sobre Y.

Sólo falta probar que es continua, para lo cual sólo es necesario verificar la continuidad en los puntos del conjunto $Y \setminus U$. Sean $y \in Y \setminus U$ y W cualquier vecindad de $F(y) = *$. Debemos probar que existe una vecindad V de y tal que $F(V) \subset W$. Dado que $W \in \Omega$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $T \times [0, \varepsilon) \subset p^{-1}(W)$.

Como $y \in Y \backslash U$, entonces $\lambda(y) = 0$ Por lo tanto, $\lambda(y) \in [0, \varepsilon)$. Puesto que λ es continua, existe una vecindad V de y tal que $\lambda(V) \subset [0, \varepsilon)$. Afirmamos que V es la vecindad buscada. En efecto, sea $v \in V$. Tenemos entonces dos casos.

Caso 1. Si $v \in V \cap U$. Luego, $F(v) = p(F_1(v), \lambda(v)) \in p(T \times [0, \varepsilon)) \subset W$.

Caso 2. Si $v \in V \cap (Y \backslash U)$. Entonces, $F(v) = * \in W$.

De esta manera, $F(V) \subset W$, es decir F es continua y $con(T) \in G$-AE. $\square$

Bibliografía

[Ab] Abels, H. *Parallelizability of proper actions, global K-slices and maximal compact subgroups*, Math. Ann., No. 212 (1974), pp. 1-19.

[An1] Antonyan, S. *Retracts in categories of G-spaces*, Izvestiya Akad. Nauk. Arm. SSR. Ser. Mat. No. 15 (1980), pp. 365-378; English transl. in : Soviet J. Contemp. Math. Anal. No. 15 (1980), pp. 30-43.

[An2] Antonyan, S. *An equivariant theory of retracts in : Aspects of Topology (In Memory of Hugh Dowker)*, London Math. Soc. Lect. Note Ser., Vol. 93, Cambridge Univ. Press, 1985, pp. 251-265.

[An3] Antonian, S. *Equivariant embeddings into G-AR's*, Glasnik Mat. , Vol. 22, No. 42 (1987), pp. 503-533.

[Bo1] Borsuk, K. *Theory of retracts*, Polish Scientific Publishers, Tomo 44, Varsovia (1967).

[Bo2] Borsuk, K. *Uber eine Klasse von lokal zusammenhangenden Raumen*, Fund. Math. Vol. 19 (1932), pp. 220-242.

[DN] De Neymet, S. *Grupos Topológicos de Transformaciones*, Apuntes del curso "Grupos Topológicos de Transformaciones", Facultad de Ciencias UNAM, 1996.

[Du] Dujundji J. *Topology*; Allyn and Bacon Inc., Boston (1966).

[Ha] Hanner , O. *Some theorems on absolute neighborhood retracts*, Arkiv. Math. Vol. 1 (1951), pp. 389-408.

[Hu] Hu, S. T. *Theory of retracts*, Wayne State Press, Detroit (1965).

[Hy] Hyman, D.M. *A generalization of the Borsuk-Whitehead-Hanner theorem*, Pacific J. Math., Vol. 23, No. 2 (1967), pp. 263-271.

[Ja1] Jaworowski, J. *Extension of maps of spaces with periodic homeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 4 (1972), pp. 527-531.

[Ja2] Jaworowski, J. *Equivariant extension of maps*, Pacific J. Math., Vol. 45 (1973), pp. 229-244.

[Ka] Kawakubo, K. *The theory of transformation groups*, Oxford University Press (1991).

[Li] Lipschutz, S. *General Topology*, McGraw-Hill, USA (1982).

[Pa1] Palais, R., *The classification of G-spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., No. 36 (1960).

[Pa2] Palais, R., *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. Math., No. 73 (1961), pp. 295-323..

[Sa] Salicrup, G., *Introducción a la topología*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, Textos Nivel Medio (1997).

[Wh] Whitehead, J. H. C. *Note on a theorem due to Borsuk*, Bull. Amer. Math. Soc.Vol. 54, (1948), pp. 1125-1132.

Índice Analítico