3196

5
24

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
CAMPUS - IZTACALA

"ANÁLISIS DE LA ADQUISICIÓN Y DESARROLLO DE CONCEPTOS ALGEBRAICOS"

REPORTE DE INVESTIGACIÓN QUE
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN MODIFICACIÓN DE CONDUCTA
P R E S E N T A :

SUSANA PAVÓN FIGUEROA

DIRECTOR DEL REPORTE DE INVESTIGACIÓN:
MAESTRO VÍCTOR MANUEL SERRANO CERRILLO

LOS REYES IZTACALA, MÉXICO 1999

AGRADECIMIENTOS

A Hilario y Elvia:

Por apoyarme en todo lo que hago.

A Javier:

Por compartir tu vida con la mia

Al Mtro. Víctor Manuel Serrano Cerrillo:

Por alentarme a concluir este trabajo
y por su apoyo incondicional.

A la Dra. Guadalupe Ortega,
Al Mtro. Vidal Vargas,
Al Dr. Pedro Luis del Angel y
A la Mtra. Laura Torres:

Por sus valiosos comentarios
para mejorar este trabajo.

A los profesores y alumnos del Colegio de
Ciencia y Humanidades plantel Naucalpan:

Por su amable participación
en esta investigación.

A la Universidad Nacional Autónoma de México:

A quien debo gran parte de mi formación académica

A la Fundación TELMEX:

Por confiar en mi y alentarme
a ser mejor cada día.

Al Gobierno del Estado de México:

Por el apoyo económico para
concluir mis estudios.

A Beatriz Frias,Rodolfo Barroso,
Silvia Flores y Lidia Gutiérrez:

Por su amistad y apoyo a
lo largo de la maestría.

A Xóchitl Galicia y,
Alejandra Sánchez:

Por su confianza, amistad y apoyo
en mi desarrollo profesional.

ÍNDICE

4. CONCLUSIONES

5. PROPUESTAS

ANEXOS

RESUMEN

Las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza - aprendizaje del álgebra, han despertado el interés de los investigadores para encontrar las causas y proponer alternativas de solución. Sin embargo, al realizar un análisis de la literatura existente al respecto, se encuentra que los objetivos que se pretenden cubrir con la mayoría de las investigaciones son muy específicos y de difícil inserción en un marco general de explicación del fenómeno. Por ello, se consideró importante hacer un análisis del proceso de enseñanza - aprendizaje del álgebra desde un punto de vista más amplio, que permitiera diseñar una propuesta didáctica encaminada a prevenir y remediar los problemas que presentan los alumnos en lo que se refiere a la comprensión, solución y aplicación de conceptos algebraicos a situaciones reales.

A partir de una perspectiva de explicación multicausal, se planteó el objetivo de analizar la forma en que se lleva a cabo el proceso de enseñanza - aprendizaje del álgebra (específicamente en el tema de ecuaciones lineales) en los salones de clase, para lo cual la metodologia básica fue la observación y la aplicación de cuestionarios, y solo al evaluar la solución de ecuaciones se realizaron evaluaciones antes y despues de la clase de cada profesor, por lo cual, los resultados fueron analizados tanto a nivel cuantitativo como cualitativo.

En esta investigación participaron voluntariamente 5 grupos de primer semestre del turno vespertino del CÇH Naucalpan (232 alumnos en total). Los materiales utilizados fueron: a) Instrumento de evaluación de los prerrequisitos, b) Instrumento de evaluación de solución de ecuaciones, c) Instrumento de evaluación de solución de un problema, d) Cuestionario de utilidad de las ecuaciones, e) Exámenes de cada grupo, f) Escala de autoevaluación de las características del profesor y la didáctica del curso, g) Entrevista para los profesores, h) Lineamientos a considerar en la dinámica de la clase, i) Programa oficial de la unidad 2: Ecuaciones Lineales.

Las observaciones, cuestionarios, instrumentos, entrevista y autoevaluación se aplicaron en el salón de clases durante el tema de ecuaciones lineales. Los resultados y conclusiones más relevantes son las siguientes:

a) se parte de la premisa de que los objetos de la matemática y sus relaciones están dados y bajo esta concepción, la matemática puede ser vista como un "objeto de enseñanza", pues el matemático la "descubre" en una realidad externa a él, y una vez descubierta puede ser enseñada,
b) la función del maestro es la de presentar y transmitir a los alumnos un producto, un saber acabado y completamente organizado y puede ofrecer el conocimiento a quien no lo posee, sin riesgo de que el conocimiento se modifique en el proceso de transmisión,
c) el alumno es visto como un sujeto pasivo, receptivo a lo que el maestro tiene que enseñarle o transmitirle y su función en dominar la información proporcionada,
d) la instrucción es enfocada en el contenido, pues los estudiantes conocen más mientras dominan un mayor número de contenidos y procedimientos del currículum,
e) la enseñanza es esencialmente de tipo expositivo, ya que se concibe al profesor y al alumno como transmisor y receptor de conocimientos,
f) la evaluación del aprendizaje se realiza a partir de los mismos contenidos que el profesor transmite y solicitando respuestas únicas y universales.

Aunque pareciera que a nivel teórico ya se ha superado esta concepción del aprendizaje de las matemáticas, en el salón de clase no han tenido impacto las teorías constructivistas y sociales del conocimiento, por ello, surge la necesidad de plantear un cambio real en la perspectiva epistemológica desde la cual se concibe la educación matemática actual. Sin embargo, el principal problema no es que se desconozca como dirigir este cambio, sino más bien la implementación del mismo en los salones de clase, para lo cual es necesario interesar e involucrar a los maestros con la literatura sobre educación matemática, propiciar un cambio de actitud más participativa y alentarlos a hacer de los salones de clase un espacio de experimentación y crítica donde se disminuya la distancia entre los avances teóricos y su aplicabilidad, para beneficio de los alumnos.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación surge como una forma de tratar de comprender la problemática que se presenta en la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas a todos los niveles educativos, pues, tanto los profesores como las autoridades se quejan de que es una de las materias mas difíciles para los alumnos y en la que se presentan los más altos índices de reprobación. La situación anterior se agrava conforme aumenta el nivel educativo, pues las exigencias son mayores y los conocimientos y habilidades de los alumnos son insuficientes para satisfacer estas exigencias. Por otra parte, los alumnos que han tenido una historia de fracasos escolares en esta materia manifiestan un fuerte rechazo a las matemáticas, lo que impide un adecuado acercamiento a la materia.

El interés central de esta investigación está enfocado en la enseñanza – aprendizaje del álgebra a nivel bachillerato, ya que este tema es considerado como una herramienta matemática que permite la generalización de expresiones aritméticas y es la base para las matemáticas superiores (geometría analítica, física, cálculo diferencial e integral).

El capítulo 1 está dedicado a la revisión de investigaciones que sobre el tema de álgebra se han realizado desde diferentes perspectivas. Este capítulo está conformado por cuatro secciones que se explican a continuación:

- En la sección 1 se analiza la relación entre la Psicología y la Educación Matemática, centrándose en las aportaciones que la primera (desde los enfoques cognitivos y culturales) puede hacer a la segunda y haciendo énfasis en la importancia de realizar conjuntamente trabajos de investigación, así como propuestas didácticas que permitan el logro de los objetivos educativos.
- En la sección 2, se revisan diferentes paradigmas en educación matemática y se analiza cómo el énfasis en alguno de ellos determina aspectos como la concepción de las matemáticas, de la enseñanza, de la investigación, el papel del profesor y del alumno en el proceso de enseñanza – aprendizaje, el tipo de evaluación de los conocimientos, la estructura del currículum escolar y los métodos didácticos.

- En la sección 3, se hace una breve descripción de la manera en que evoluciona el aprendizaje de las matemáticas desde que el niño nace hasta sus primeros contactos con la materia durante la educación básica.
- La sección 4, está dedicada a analizar el proceso de enseñanza – aprendizaje del álgebra considerando los conocimientos previos necesarios para comprender el tema, la solución de ecuaciones y la solución de problemas a través del método algebraico, así como el uso de las calculadoras y las computadoras para facilitar el logro de los objetivos educativos en este tema.

En el capítulo 2 se describen los propósitos de la investigación, las características de los sujetos que formaron parte de la muestra, los instrumentos utilizados y el procedimiento realizado para recabar la información.

En el capítulo 3 se describen los resultados obtenidos en cada uno de los instrumentos de evaluación y se analizan a partir sus implicaciones en la enseñanza – aprendizaje del álgebra, además de relacionar dichos resultados, con los hallazgos de otras investigaciones en el área de educación matemática.

En el capítulo 4 se describen las conclusiones principales del trabajo de investigación, que dan respuesta a las preguntas planteadas en el capítulo 2. Dichas conclusiones hacen referencia a los siguientes temas: nivel de los conocimientos previos al álgebra, los errores y su función en la enseñanza, la utilidad de los conocimientos académicos en la vida cotidiana, el papel de los alumnos y los profesores en el proceso de enseñanza – aprendizaje, el contenido del curso de álgebra, los métodos de enseñanza, la evaluación del aprendizaje, los niveles de desarrollo de los conocimientos algebraicos propiciados por la escuela, la eficiencia de los cursos de álgebra y el paradigma prevaleciente en el salón de clases.

Finalmente, en el capítulo 5 se hacen algunas reflexiones basadas en los resultados de esta investigación y se plantean sugerencias para mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas.

1. CONSIDERACIONES TEÓRICAS

1.1 RELACIÓN ENTRE PSICOLOGÍA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La Psicología ha tenido una influencia notable en la didáctica de las matemáticas porque un gran número de psicólogos han orientado su investigación hacia el estudio de los procesos de adquisición de la matemática y desde supuestos más o menos generales sobre el desarrollo individual y el aprendizaje, han realizado sugerencias con respecto a la forma en que hay que enseñar. Thorndike, Gagné, la Psicología de la Gestalt, Piaget, Bruner, la moderna Psicología Cognitiva, constituyen ejemplos claros de este hecho (Gómez-Granell y Fraile, 1993).

A principios de los años sesentas, tanto desde las matemáticas como desde la psicología se habían adoptado perspectivas estructuralistas. Desde las matemáticas, la teoría de conjuntos había puesto de manifiesto que los contenidos aislados de la matemática tradicional (aritmética, álgebra, geometría, teoría de las funciones) no eran contenidos independientes, sino que constituían partes interrelacionadas en el marco de una estructura más general. La comprensión de estas estructuras más generales, no el mero ejercicio rutinario del cálculo, debía constituir el objetivo de la enseñanza. Por su parte, la psicología (Gestalt y Piaget) consideraba que el conocimiento no consistía en una suma de contenidos aislados que se adquirían por mecanismos asociativos memorísticos, sino que existían estructuras de carácter más general, cuya adquisición permitía "comprender y relacionar" diversos contenidos (Gómez-Granell y Fraile, 1993). De esta manera, la psicopedagogía de las matemáticas se interesa por el estudio de la construcción de estas estructuras; se centra en la identificación de los estados sucesivos de esta construcción en el alumno, de los modelos provisionales en funcionamiento y de sus procesos de transformación. Este estudio se realiza mediante el análisis de los procedimientos que utiliza el alumno en las situaciones problema que le propone la enseñanza de las matemáticas (Vergnaud, 1977 citado en Brun, 1979).

A pesar de las aportaciones que ha realizado la psicología a la enseñanza de las matemáticas, es importante señalar que las principales razones de interés de la psicología en las matemáticas no son en general, las de conocer cómo se aprende y cómo se pueden enseñar los contenidos matemáticos. Las matemáticas han interesado a los psicólogos, en primer lugar, a causa de la identificación que todo el pensamiento occidental ha hecho entre inteligencia, racionalidad lógica y pensamiento abstracto. Los procesos cognitivos son estudiados a través del estudio de los procesos de adquisición del conocimiento matemático puesto que en nuestras sociedades occidentales las personas que tienen un buen dominio de las matemáticas son consideradas más inteligentes. Además, la investigación psicológica sigue considerando que su objeto de estudio prioritario es el sujeto individual y los procesos de aprendizaje que éste realiza frente a tareas y contenidos específicos, olvidándose de los aspectos contextuales y de que todo proceso de aprendizaje tiene lugar en un contexto cultural y socialmente organizado (Gómez-Granell y Fraile, 1993).

Con la finalidad de ejemplificar las aportaciones de la psicología cognoscitiva y de los enfoques sociales a la explicación de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, los apartados siguientes de dedican a cada una de estas posturas.

1.1.1 APORTACIONES DE LA PSICOLOGÍA COGNOSCITIVA

Fundamentos Conceptuales

La psicología cognoscitiva parte del supuesto de que el conocimiento es representado internamente, y que esta representación interna es estructurada, así pues, el entendimiento se da en términos de la forma en que los individuos estructuran la información a través de representaciones internas. Adicionalmente a estos supuestos básicos, existen otros que explican la formación del conocimiento: a) se asume que existe alguna relación entre las representaciones internas y externas, b) que la representación interna depende de la situación externa que está siendo representada (Kosslyn y Hatfield, 1984; Greeno, 1988a; Kaput, 1988; citados en Hiebert y Carpenter, 1992).

De esta manera, la forma de una representación externa (materiales físicos, pinturas, símbolos) con la cual un estudiante interactúa, tiene una influencia en la forma en que los estudiantes representan las cantidades o las relaciones internas. Recíprocamente, la forma en la cual un estudiante trata o genera representaciones externas, revela algunas veces la forma en que el estudiante ha representado la información internamente (Hiebert y Carpenter, 1992).

Formación de conexiones internas y externas

Las conexiones entre las representaciones externas de la información matemática pueden ser construidas por el alumno entre diferentes formas de representación de la misma idea matemática o entre ideas relacionadas dentro de la misma forma de representación. Las conexiones entre diferentes representaciones están frecuentemente basadas en relaciones de semejanza, diferencia e inclusión (Hiebert y Carpenter, 1992).

Las relaciones entre representaciones internas de ideas son construidas a partir de redes de conocimiento. No es posible comúnmente especificar la naturaleza exacta de las redes, pero se han propuesto dos metáforas: las redes pueden ser estructuradas igual que una jerarquía vertical, o puede ser estructurada igual que un tejido. Cuando las redes están estructuradas jerárquicamente, algunas representaciones son subsistemas de otras representaciones, las representaciones se ajustan dentro de representaciones más generales. En la segunda metáfora, una red puede ser estructurada igual que una telaraña, los nodos pueden ser las piezas que representan información y el hilo enhebrado entre ellas, las conexiones o relaciones. El tejido puede ser muy simple, como una cadena lineal, o puede ser extremadamente compleja, con muchas conexiones emanando de cada nodo. Finalmente, las dos metáforas anteriores pueden ser mezcladas, resultando en algunas formas adicionales de redes (Ausubel, 1982 y Hiebert y Carpenter, 1992).

¿Cómo se lleva a cabo el entendimiento?

El entendimiento crece cuando la red llega a ser más grande y más organizada. Las redes de representación mental son construidas gradualmente con la nueva información que es conectada en la red ya existente o con la nueva relación que es construida entre la información previamente desconectada. El crecimiento de la red puede ocurrir en varias formas, ya sea como suma de nuevos elementos de información en la red, o como reorganizaciones en la misma, en donde se forman nuevas conexiones que modifican o desechan las anteriores y en las que la reorganización puede ser local o amplia y dramática. De esta manera, el entendimiento es la forma en que la información es representada y estructurada. Una idea, procedimiento o hecho matemático es entendido si es parte de una red interna y el grado del entendimiento se determina por el número y la fuerza de las conexiones. Desde esta perspectiva, se dice que un niño entiende las ideas cuando se le presentan objetos concretos y construye relaciones que conecta con la red que contiene representaciones de materiales y de su interacción con ellos. Los niños pueden hacer ésto al presentarles los materiales de una forma que les permita realizar conexiones con las redes existentes o construir relaciones que reorganizan la red (Ausubel, 1982 y Hiebert y Carpenter, 1992).

Problemas en la enseñanza de las matemáticas en la escuela

Es ideal que la construcción de redes de conocimiento se realice de manera congruente con los conocimientos de la matemática formal desde antes de ingresar a la escuela y aun en congruencia con las actividades extraescolares de los alumnos, pero ¿qué pasa cuando ésto no es así?, ¿qué pasa cuando los alumnos tienen concepciones o representaciones diferentes a las que la escuela pretende enseñar?. Las respuestas a las anteriores preguntas han sido dadas por las investigaciones enfocadas a las preconcepciones o concepciones erróneas que los alumnos traen a la escuela.

Las preconcepciones son todas las ideas acerca de diversos fenómenos físicos y biológicos, conceptos matemáticos, la sociedad, la familia, el mundo, su propia vida, que los alumnos traen a la escuela. Gran parte de estas concepciones son diferentes a las que la escuela pretende enseñar y en muchos casos son totalmente contradictorias, aunque en otros tantos pueden ser correctas o tener elementos correctos. Las preconcepciones que son contradictorias a los conocimientos científicos que se pretenden enseñar en la escuela, generalmente persisten a la enseñanza porque son parte de un sistema que tiene una lógica interna en la cual no constituyen un error, de la misma manera como un conocimiento correcto no está aislado, sino que forma parte de una red de conocimientos que le da significado. De esta manera, la existencia de dos sistemas de explicación paralelos presenta un conflicto que obstaculiza la construcción del conocimiento científico ya que existe una incoherencia entre las representaciones del alumno y los conocimientos que se le tratan de enseñar (Medina y Peralta, 1997).

Cuando se trata de enseñar en clase conceptos contradictorios con las representaciones de los alumnos, éstos se encuentran ante una situación de conflicto que dificulta el aprendizaje de la ciencia, pues tienen una dura elección:

- Olvidar las ideas que han construido fuera de la escuela, que les han sido útiles y que son coherentes con sus creencias y reemplazarlas por nuevas concepciones "impuestas" por la escuela, es decir, negar lo que han construido por largo tiempo.
- Tratar de resguardar sus creencias y rechazar lo que se les enseña. Tomar esta alternativa sugiere por un lado, asumir una actitud activa a través del rechazo o bien una pasiva, a través de recitar todo lo que han escuchado (ésto es lo más probable, por que no renuncian a lo que les es útil y al memorizar, cumplen con criterios académicos).

Debido a que las preconcepciones son por lo general adecuadas para la experiencia pasada del alumno, persistirán a menos que los estudiantes sean expuestos a nuevas experiencias que contradigan suficientemente su contenido y para las cuales, los conceptos que él posee resulten inadecuados (Medina y Peralta, 1997).

Una de las consecuencias de tener una forma de explicación diferente a la que se pretende enseñar en la escuela es el constante olvido de lo que se enseña, sin embargo, el problema es más grave que el simple olvido de los conceptos aprendidos en la escuela. Si el alumno olvida o no incorpora ciertos conceptos científicos, no podrá construir toda una serie de nuevos conocimientos relacionados con esos conceptos. Ésto explica la incapacidad para aplicar a situaciones diferentes lo que se ha aprendido en la clase, pues los estudiantes pueden responder a las preguntas en clase, pero no saben utilizar esos conocimientos en su vida común o en contextos diferentes al de la escuela (Medina y Peralta, 1997). De esta manera, los estudiantes aprenden matemáticas en ambos contextos a través de experiencias limitadas y representan estas ideas matemáticas y procedimientos en forma de redes internas y aisladas, de modo que no son vistas por sus propietarios como relacionadas con otra información o conectadas con otras redes. Uno puede inferir si un niño tiene redes internas comunes a los conocimientos dentro y fuera de la escuela, si él reconoce las conexiones entre ellas, de manera que su entendimiento y ejecución en ambos ambientes debe mejorar. Sin embargo, como consecuencia de no establecer relaciones entre los conocimientos cotidianos y los que se proporcionan en la escuela, los alumnos aprenden los procedimientos para solucionar problemas en una forma mecánica. Esto es, los procedimientos aprendidos en la escuela frecuentemente no pueden ser flexibles para solucionar problemas diferentes a los que fueron practicados y de esta manera, no existe una transferencia de conocimientos, por ello, hemos sugerido que si los programas escolares presentan tareas solamente con símbolos escritos y no apoyan las conexiones con otras formas de representación y situaciones problemas, el conocimiento adquirido es de transferencia potencial limitada debido a que las representaciones internas son severamente restringidas (Ausubel, 1982 y Hiebert y Carpenter, 1992).

Desde el punto de vista de Gómez-Granell y Fraile (1993), los enfoques cognitivos no pueden aportar por si solos explicaciones a las dificultades de la educación matemática porque se basan en dos supuestos que necesitan ser modificados. Éstos son:

- El conocimiento y las destrezas que se construyen en un contexto se descontextualizan y se transfieren o generalizan fácilmente a otros contextos. Así, se supone que la matemática normativa aprendida en la escuela se traslada a cualquier situación. El conocimiento matemático de los sujetos se evalúa según los modelos normativos de la ciencia establecida sin que se valoren otros tipos de conocimiento matemático.
- Siguiendo la metáfora computacional, el conocimiento es el resultado de las representaciones y operaciones que el sujeto realiza sobre el mundo físico, más que de la interacción entre un sujeto y un contexto físico y social culturalmente organizado.

Como alternativa o complemento a los enfoques cognitivos surgieron los estudios que toman en cuenta la influencia de la cultura y el ambiente social en el aprendizaje de las matemáticas, y es precisamente a este tema que se dedica el siguiente apartado.

1.1.2 APORTACIONES DE LOS ENFOQUES CULTURALES

En los últimos años una buena parte de la investigación transcultural se ha orientado hacia el estudio de cómo las personas usan su conocimiento matemático en situaciones de la vida cotidiana. Dichos trabajos, utilizando pruebas de evaluación definidas desde la matemática escolar, muestran que la mayoría de las personas comunes no saben matemáticas. Sin embargo, estas mismas investigaciones han puesto de manifiesto que personas que fracasan en las tareas y pruebas de matemática formal y escolar pueden ser, sin embargo, extraordinariamente competentes en situaciones de actividad cotidiana que implican cálculos matemáticos como las ventas ambulantes, compras en supermercados, repartos de mercancías en las fábricas (Block y Dávila, 1993 y Gómez-Granell y Fraile, 1993). De la misma manera, muchas personas escolarizadas resuelven problemas matemáticos de la vida diaria usando estrategias diferentes de las que aprenden en la escuela. Frecuentemente, estos hallazgos permiten suponer que las competencias matemáticas son desarrolladas fuera de la escuela y que el aprendizaje de la escuela no es útil para solucionar problemas reales. Parece que la conducta matemática exhibida en los problemas de la vida diaria contiene muy pocos rasgos asociados con la solución de problemas matemáticos escolares (Hiebert y Carpenter, 1992).

A la luz de las aportaciones de la investigación transcultural, ¿no podríamos más bien pensar que las mismas personas no se comportan de la misma manera en situaciones diferentes, que implican metas diferentes?.

Los resultados de todos estos trabajos apoyan la idea de que el conocimiento se construye a través de la interacción entre el sujeto y las situaciones o los contextos socioculturalmente organizados en los que actúa. Dichos trabajos muestran que las mismas personas que no parecen poseer una determinada habilidad en un contexto, pueden ser perfectamente capaces de demostrarla en otros, lo que es lo mismo, muestran que el funcionamiento cognitivo no puede seguir aplicándose en términos de la posesión o no de determinadas habilidades. Desde nuestro punto de vista, lo fundamental de este enfoque reside en la concepción del conocimiento como resultado de una actividad realizada en un contexto cultural, histórico o institucionalmente definido, con el que interactúa el sujeto (Gómez-Granell y Fraile, 1993).

La idea de la práctica colaborativa contrasta con nuestras formas estándares de pensar acerca del conocimiento. Nosotros pensamos generalmente en el conocimiento como algo contenido en la mente de alguien, incluyendo la estructura mental y los procedimientos (propuesta cognitiva). En contraste con la anterior idea, se encuentra otra que sugiere como origen del conocimiento la práctica en una actividad de la vida diaria, llevada a cabo en un contexto significativo socialmente, en el cual la actividad depende de la comunicación y colaboración con otros y de saber cómo usar los recursos disponibles en la situación. De esta manera, el aprendizaje de las matemáticas es concebido como una actividad inherentemente social (también como cognitiva), y como una actividad constructiva esencialmente, en lugar de una actividad de absorción (Schoenfeld, 1992).

Es a partir de estas últimas ideas, que en recientes fechas se ha puesto mayor atención a la práctica educativa en los diferentes contextos culturales y se ha cuestionado el tipo de matemáticas que se enseñan en las escuelas y sus objetivos. Desde esta perspectiva, se enfatiza que la matemática tal y como usualmente la conocemos, marcada por la visión occidental, blanca y masculina del mundo, es una de las formas de la matemática, pero no la única. Así, la matemática escolar debe ser considerada como una etnomatemática, ya que es producida por un grupo social particular, a saber, el formado por aquellas personas que están autorizadas socialmente a producir ciencia, ejerciendo su actividad profesional en la academia, por eso, para ser más precisos, deberíamos decir que aquello que llamamos tradicionalmente matemáticas es una matemática académica. De esta manera, existen también otras formas de producir significados matemáticos, otras formas que son igualmente válidas, ya que son manifestaciones simbólicas de grupos culturales como, por ejemplo, las matemáticas de los diferentes grupos indígenas, las matemáticas de distintos grupos profesionales y aquella practicada por las personas en sus diferentes actividades laborales (Knijnik, 1997).

Las anteriores investigaciones y posturas nos permiten comprender cómo es que cuando los alumnos llegan a la escuela, generalmente poseen una concepción del mundo diferente de la concepción científica y matemática que se les pretende enseñar, en congruencia con ésto, las formas en que los alumnos utilizan el lenguaje y piensan las matemáticas difiere mucho del lenguaje matemático del ámbito académico (Peralta y Medina, 1997). Por ello, la sugerencia de Knijnik (1997), es que debemos tomar en cuenta las matemáticas cotidianas, para enseñar las matemáticas académicas y así, regresar nuevamente a las matemáticas cotidianas. Esto es, aprender la matemática oficial posibilitará tanto el dominio de esta forma particular de matemática, como la comprensión más acertada de los propios modos de producir significados matemáticos del grupo en el que estamos trabajando. Estos modos muchas veces difieren de los oficiales, tienen una lógica interna que, con el auxilio de las matemáticas académicas, puede ser comprendida mejor por los alumnos.

La implicación de la anterior propuesta es que debemos concebir la educación matemática menos como un proceso instruccional (en el sentido tradicional de enseñar habilidades específicas y bien definidas) que como un proceso de socialización. En esta concepción, la gente desarrolla puntos de vista y patrones de conducta asociados con los roles de género, la cultura étnica y familiar y otras cuestiones sociales. Cuando nosotros definimos los procesos por los cuales los niños son socializados en estos patrones de pensamiento, afecto y acciones, nosotros describimos patrones de interacción de largo plazo y comprometidos con un medio ambiente social (Schoenfeld, 1992). Como consecuencia de esta postura, el salón de clases debe reflejar las matemáticas como una actividad que tenga sentido, para que los estudiantes entiendan y usen las matemáticas en una forma significativa.

Una propuesta desde este enfoque fue hecha por Vigotsky, para quién la noción de "zona de desarrollo próximo" está directamente ligada a propósitos de instrucción. En contraste con los teóricos que consideraban que la instrucción que se puede impartir depende del nivel de desarrollo alcanzado por el alumno, Vygotsky considera que los niños pueden trabajar con problemas nuevos sólo con ayuda del adulto o de compañeros más capaces, lo que permite a los alumnos trabajar exitosamente con tópicos que antes estaban considerados fuera de su competencia. Al aplicar las ideas de Vygotsky a la enseñanza escolarizada, el papel del maestro cambia de ser un transmisor de un cuerpo de conocimientos, a ser un experto que interactuando con los alumnos, les ayuda a desarrollar un potencial para resolver problemas nuevos y para construir conceptos nuevos. También la cooperación entre compañeros adquiere un rol sobresaliente, en contraste con el trabajo individual y competitivo de los salones de clase tradicionales. La organización del entorno social en el que se desarrollan las actividades de enseñanza igualmente se torna crucial (Ursini, 1994).

Si bien las ideas de Vygotsky y sus implicaciones para la educación han sido analizadas y discutidas por muchos psicólogos, éstas no han influido substancialmente la práctica pedagógica, en particular, la enseñanza de las matemáticas. Es aún muy común considerar que el aprendizaje es un asunto individual y no un problema social, si bien ya empieza a haber resultados interesantes de estudios que analizan, por ejemplo, cómo influye en el aprendizaje la colaboración entre compañeros en el salón de clases y cuál es el papel de las intervenciones con el maestro (por ejemplo, Bartolucci, 1986). Sería interesante usar estas ideas para diseñar ambientes de clase especiales que ayuden a crear en los alumnos el potencial para trabajar con diferentes conceptos matemáticos e investigar el impacto de un acercamiento de este tipo sobre el aprendizaje de estos conceptos (Ursini, 1994).

1.1.3 FORMANDO LA ESTRUCTURA CONCEPTUAL EN UN CONTEXTO CULTURAL

No obstante la importancia que socialmente se le da al problema de la educación matemática y el creciente número de personas que se ocupan cada vez más del esclarecimiento de sus causas, todavía no se vislumbran avances sustanciales en un plano inmediato (Loyola, 1992). Como resultado de esta problemática se han producido diversas aportaciones teóricas (como la cognitiva y la social) tendientes a dar las respuestas que han requerido los docentes para resolver en la práctica sus dificultades, sin embargo, no existe ninguna teoría del aprendizaje de las matemáticas que obtenga una aprobación universal, no hay teoría general alguna del aprendizaje que sea enteramente aceptada como satisfactoria en términos de explicación y que incorpore todos los detalles que cabría esperar (Méndez, 1986 y Orthon, 1990). Ésto se debe principalmente a que se tiene una perspectiva de explicación lineal o unicausal que intenta explicar el aprendizaje de la matemática, que se caracteriza por estudiar factores o variables aisladas. Estas deficiencias en el modelo explicativo pueden ser superadas considerando la multicausalidad que caracteriza a los fenómenos complejos como es la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, siendo necesario considerar conjuntamente factores pedagógicos, de contenido, de contexto, del sujeto, los cuales están determinando fuertemente el incumplimiento de los criterios de eficiencia y permiten comprender la complejidad del aprendizaje de la matemática. De esta manera, es importante considerar las aportaciones de la psicología cognitiva y social a la explicación de las dificultades en la educación matemática, que desde el punto de vista de Gómez-Granell y Fraile (1993) son las siguientes:

- Desde la perspectiva del procesamiento de la información y la ciencia cognitiva, el conocimiento consiste en un conjunto de representaciones simbólicas, conceptuales y de procedimientos referidos a un dominio específico. La construcción de estructuras cognitivas se basa en la representación de conceptos y reglas, y entonces, razonar consiste en activar y relacionar dichas representaciones.

- Lo que la perspectiva sociohistórica aportaría a esta concepción es que para conocer no es suficiente poseer representaciones. Los conocimientos se construyen "usándolos" en contextos y situaciones sociales y comunicativas. Tan importante es poseer representaciones de conceptos y procedimientos como el establecimiento de las habilidades y condiciones necesarias para su uso en un contexto determinado.

Tal y como Wertsch (1991, citado en Gómez-Granell y Fraile, 1993) afirma, se darían diferentes formas de conceptualizar la realidad que serían el resultado de diferentes formas de actividad, de manera que se puede hablar de pensamiento cotidiano, científico, artístico. Aunque ciertas formas de pensamiento se adquieren en estadios de desarrollo posterior, ello no implica que sean más poderosas, puesto que "algunas (de estas formas) son más poderosas y eficaces para ciertas actividades o esferas de vida y otras son más poderosas y eficaces para otras".

Las sugerencias de investigación conjunta entre las diferentes posiciones teóricas, que ha propuesto Jorba (1993), son las siguientes:

- Que aborden los estudios y el trabajo de investigación desde una perspectiva no meramente individual, sino que preste atención a las influencias del contexto sobre cada individuo. Es decir, aceptar que la unidad de análisis más útil no es el individuo sino la persona en su contexto de actividad: la escuela.

- Que se tenga en cuenta que el cambio cognitivo viene posibilitado por la actividad constructiva, y que ésta se da en el proceso de interacción en el aula entre profesor - alumno - contenidos, y no tan sólo en los procesos internos del alumno.
- Estudiar los mecanismos de influencia educativa que permiten al alumno pasar de una matemática intuitiva a una matemática formal, y los mecanismos que permiten que esta matemática formal se pueda vincular a su significado referencial, pasando a ser usadas significativamente.

Estas consideraciones parecen reclamar la formación de equipos integrados de profesionales que desde diversas perspectivas colaboren en el estudio de problemas fundamentales relativos a los procesos escolares de enseñanza - aprendizaje. Por último, es fundamental no olvidar que el receptor final debería ser el profesorado que está en el aula, de modo que debe buscarse la forma para que los principales beneficiados con las investigaciones en esta área sean los profesores (Jorba, 1993).

1.2 PARADIGMAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Desde que la enseñanza escolarizada existe en su forma actual, o tal vez desde antes, la enseñanza de las matemáticas ha sido tradicionalmente uno de los problemas más comunes para los profesores de los diversos niveles educativos y para todos aquellos que se han encontrado comprometidos con esta tarea.

El primer gran enigma con la que uno se enfrenta al tratar de entender los problemas de la educación matemática es la siguiente: ¿Cómo puede suceder que la matemática, la más antigua y más seriamente establecida de todas las ciencias no haya encontrado a lo largo de sus 26 siglos de historia unos paradigmas de transmisión estables e incuestionables?, ¿cómo es posible que en nuestro tiempo tengamos tan serios problemas con respecto a lo que hay que transmitir y cómo hay que transmitirlo a los más jóvenes?.

De Guzmán (1986), quien planteó las anteriores preguntas, sugiere que para responder a ellas hay que tomar en consideración que la matemática es una actividad que ofrece una enorme gama de posibilidades a quien, como los educadores, se acercan a ella buscando elementos interesantes que les ayuden a conseguir sus propios objetivos. Por otra parte, también los objetivos de la educación pueden variar razonablemente de generación en generación y de un grupo cultural a otro, es decir, que si la matemática es una actividad de cien caras, la educación es una actividad de cien objetivos distintos posibles, por ejemplo, para unos privará el aspecto de preparación del ciudadano para realizar su servicio a la sociedad, para otros la conservación y transmisión del acervo cultural propio, otros pensarán que lo esencial es el desarrollo armónico de la personalidad individual, otros pondrán el énfasis en la consecución de una estructura personal dinámica capacitada para solucionar los nuevos problemas que se pueden presentar en el futuro, y si bien, es verdad que estos objetivos pueden no ser incompatibles, es claro que la atención preferente a unos aspectos sobre otros conducirá a proyectos educativos francamente diferentes. Así, es natural que la aproximación a la matemática con objetivos educativos diferentes produzca estructuras educativas muy diversas.

A partir de las consideraciones anteriores, la pregunta fundamental que debe responderse antes que cualquier otra es: ¿Qué objetivos básicos se deben pretender con la educación?, ¿formativos, informativos, utilitarios, desarrollo de habilidades, capacitación específicas?, ¿qué puede aportar la educación matemática a la consecución de estos objetivos?.

En la presente sección se intentan identificar las respuestas a las anteriores preguntas que han dado diferentes concepciones epistemológicas en el ámbito de las matemáticas y a su vez, analizar la influencia que tiene cada una de ellas en la concepción de los docentes, los alumnos, las tendencias de investigación y las prácticas escolares.

A este respecto, cada vez son más los autores que reconocen explícitamente el hecho de que las posiciones filosóficas y las teorías epistemológicas relativas al conocimiento matemático ejercen una influencia determinante sobre la educación matemática (Moreno y Weldegg, 1992). Entendiéndose "educación matemática" en un sentido amplio, en el que se incluye no sólo la labor que realiza el profesor dentro del salón de clase, sino también aquellos otros factores que intervienen y hacen posible que la matemática se enseñe y se aprenda; estos factores son por ejemplo, el diseño y el desarrollo de planes y programas de estudio, los libros de texto, la metodología de enseñanza, las teorías del aprendizaje y la construcción de marcos teóricos para la investigación educativa.

El actor o los actores, que intervienen para dar cuerpo a los factores mencionados arriba, lo hacen, explícita o implícitamente, desde sus personales convicciones filosóficas y epistemológicas respecto a la matemática. Las concepciones que ellos tienen ya sea individualmente o como grupo sobre "lo que es la matemática" y "lo que es el conocimiento matemático", permean los elementos que conforman los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas (Moreno y Weldegg, 1992). Por ejemplo, los maestros transmiten una posición epistemológica apareada con los conceptos que enseñan; los alumnos por su parte, construyen una posición influidos en buena parte por aquello que recibieron en transmisión y no tanto como enseñanza (Noriega y Gutiérrez, 1995).

De esta manera, la concepción que de las matemáticas tiene el maestro ejerce un fuerte impacto en la forma en la cual las matemáticas son enseñadas en el salón de clases y está fuertemente apoyada en el entendimiento que tienen los maestros de la naturaleza de las matemáticas y no en lo que ellos creen que es la mejor forma de enseñar. No quiere decir ésto que todos los profesionales de la educación matemática están "inscritos" en alguna escuela filosófica. En muchos casos se trata, simplemente, de las opiniones "privadas" del profesor, del autor de textos, del profesional que diseña los planes y programas o del investigador, acerca de la naturaleza de la matemática y del conocimiento matemático, y a sus convicciones de cómo éstas se relacionan con la labor de enseñanza y con el aprendizaje de los estudiantes. Por supuesto que uno puede preguntarse de donde obtienen los maestros sus concepciones acerca de la naturaleza de las matemáticas y de la propia pedagogía de la instrucción matemática, y no es sorprendente que las concepciones de los maestros y sus prácticas estén ampliamente relacionadas son sus experiencias escolares a partir de los métodos de enseñanza predominantes en los cursos que fueron parte de su propia formación, de ahí que las creencias de los maestros vengan a raíz de sucesivas generaciones de maestros, con lo que se crea un ciclo de vicios epistemológicos – pedagógicos (Dossey, 1992; Moreno y Weldegg, 1992 y Schoenfeld, 1992).

De esta manera, el sutil mensaje comunicado a los alumnos acerca de las matemáticas y su naturaleza, puede afectar la forma en que ellos ven las matemáticas y el rol que le asignan en el mundo (Dossey, 1992). La mayoría, ven a las matemáticas como una disciplina estática, desarrollada abstractamente, como un cuerpo fijo de conocimientos a lo largo de un conjunto de formas acabadas y cuyo objetivo es la manipulación de números y la realización de deducciones. Otros ven a las matemáticas como una disciplina dinámica, que cambia constantemente como resultado de nuevos descubrimientos de experimentación y aplicación (Crosswhite, 1986, citado en Dossey, 1992 y Romberg, 1992).

Adicionalmente, la epistemología determina las líneas de investigación y las premisas para certificar los conocimientos, es decir, la forma de "ver el mundo". Para entender las actuales tendencias en investigación de la educación matemática uno debe conocer las múltiples perspectivas y principios en los cuales dichas investigaciones están basadas.

Lo anterior es importante porque las diferencias en los métodos no son meramente formas alternativas de investigar la misma pregunta. Lo que distingue a un método de otro no es solamente la forma en la cual la información es recogida, analizada y reportada, sino también los diferentes tipos de preguntas hechas y los principios o paradigmas bajo los cuales está basado el método para investigar tales preguntas (Romberg, 1992). Algunos ejemplos de las preguntas que los investigadores se hacen, son las siguientes:

- ¿A qué didáctica conduce una cierta concepción de la matemática y del conocimiento matemático?
- ¿A qué concepción de la matemática y del conocimiento matemático obedece una cierta práctica educativa?
- ¿Quién toma las decisiones de cuáles matemáticas son incluidas en un currículum de matemáticas?
- ¿Qué concepciones tienen los maestros acerca de cómo los estudiantes aprenden a resolver problemas matemáticos?
- ¿Qué concepciones tienen los estudiantes acerca de las matemáticas?

El intuicionismo, formalismo, logicismo, constructivismo, empirismo, estructuralismo, y demás "ismos", han tenido, en su momento, una respuesta distinta a las anteriores preguntas, debido a su influencia (aunque no siempre explícita) en guiar las ideas y demarcar los principios que rigen la educación matemática (Moreno y Weldegg, 1992).

Ahora bien, la prevalencia de una de estas corrientes sobre las otras, responde a intereses y condiciones históricas concretas (Morán y Marín, 1990). Las condiciones sociales, en parte, dictan cual es la moda para realizar la práctica educativa y de investigación, por ejemplo, en los años sesentas, con el movimiento de derechos civiles en protesta por la guerra de Vietnam, se permitió el estudio de los nuevos roles sociales de la mujer y el hombre, lo cual repercutió en el estudio de las diferencias de género en el aprendizaje - enseñanza de las matemáticas en los años setentas. Hoy, el mandato es llevar a cabo prácticas educativas y producciones literarias en matemáticas que pueda servir para preparar a la gente en la actividad industrial.

Como un ejemplo de la influencia de la cultura en los objetivos de la matemática, su práctica didáctica y la visión de los diferentes miembros de la sociedad con respecto a ella, se menciona la investigación realizada por Stinler y Perry (1989, citados en Schoenfeld, 1992), quienes reportan que la gente en los Estados Unidos es más probable que crea en la habilidad innata (opuesta al esfuerzo) que subyace al éxito de los niños en matemáticas, que las personas en Japón. Tales creencias juegan un importante papel en el esfuerzo que realizan los estudiantes al aprender matemáticas, así como, en la forma en que los contenidos y la secuencia de temas son presentados en los libros de texto y en el currículum. Experiencias similares también fueron reportadas en Garduño y Lozano (1996).

Ahora bien, se debe tener claro que los estudiosos no solamente responden a las presiones políticas y sociales, sino que ellos también ayudan a definir los problemas y a crear las presiones políticas que originan las necesidades de investigación de estos problemas y de realización de las prácticas educativas específicas (Romberg, 1992).

A partir de lo dicho anteriormente, ha sido evidente que las diferencias de lente conceptual a través del cual los estudiosos ven los fenómenos, frecuentemente representan diferencias profundas en las suposiciones acerca de la naturaleza del mundo. En este sentido, la percepción de la naturaleza y el rol de las matemáticas por nuestra sociedad se refleja en un grupo de suposiciones acerca del conocimiento que está siendo enseñado, el trabajo de los estudiantes y de cómo ocurre el aprendizaje, el trabajo de los maestros, la organización social, la influencia de la tecnología en el salón de clases, y el desarrollo de la investigación (Dossey, 1992 y Romberg, 1992). A continuación, se revisarán en primer lugar, las dos posiciones históricas que fueron la base para las diferentes visiones del mundo, y en segundo lugar, cómo estas visiones del mundo están asociadas con tres paradigmas que han emergido para dar definiciones y estructura a la práctica y la investigación educativa (éstos son los paradigmas: empírico - analítico, simbólico y crítico).

La discusión de la naturaleza de las matemáticas data del siglo IV antes de Cristo, con Platón y su estudiante Aristóteles. Platón tomó la posición de que los objetos de las matemáticas tienen una existencia en sí mismo (o propio), más allá de la mente, en el mundo externo, al hacer ésto, Platón realizó una clara distinción entre las ideas de la mente y sus representaciones percibidas en el mundo por los sentidos. Platón ve a las matemáticas como una actividad mental abstracta, externa a la existencia de los objetos que tienen representaciones en el mundo sensorial. La tesis fundamental de esta postura epistemológica es la separación explícita entre el sujeto cognoscente y el objeto del conocimiento (Dossey, 1992 y Moreno y Weldegg, 1992).

Para Aristóteles, los sentidos son el origen de las ideas matemáticas abstractas. La visión de las matemáticas para Aristóteles está basada en la realidad experimentada donde los conocimientos son obtenidos por la experimentación, observación y abstracción. Esta visión, apoya a la concepción de que uno construye las relaciones inherentes en una situación matemática dada. En la visión de Aristóteles, la construcción de una idea matemática llega a través de la elaboración que los matemáticos hacen como resultado de sus experiencias con los objetos. Aristóteles intentó entender las relaciones matemáticas por medio de la colección y clasificación de resultados empíricos derivados de experimentos y observaciones y entonces, por derivación de un sistema para explicar las relaciones inherentes en los datos (Dossey, 1992 y Moreno y Weldegg, 1992).

De esta manera, el trabajo y las ideas de Platón y Aristóteles moldearon dos de las principales visiones de la naturaleza de las matemáticas. Ahora, pasaremos a explicar cómo es que estas posiciones filosóficas han influido en los diferentes paradigmas actuales.

1.2.1 PARADIGMA EMPÍRICO- ANALÍTICO

La epistemología de las matemáticas que domina la práctica educativa en este paradigma, tiene sus raíces históricas en las dos posturas filosóficas anteriores (Moreno y Weldegg, 1992), y es a partir de estas concepciones que se comienzan a desarrollar las ideas que a lo largo de la historia han prevalecido para la investigación, para el currículum y la práctica docente en matemáticas.

Ambas concepciones (la idealista de Platón y la empirista de Aristóteles) parten de la premisa fundamental de que los objetos de la matemática y sus relaciones están dados, su existencia no depende del sujeto que conoce, ya que preexiste a él. Esta visión del mundo dio origen a la aproximación empírica - analítica, la cual comenzó con la premisa de que el principal objetivo de la ciencia implica la explicación de las relaciones de los humanos con el mundo natural, debido a que estas explicaciones benefician el control técnico e intelectual del mundo (positivismo lógico). Esta aproximación también asume que los conocimientos deben basarse solamente en lo que puede ser observable o puede hacerse observable (lo empírico) y que dichas observaciones son hechas para separar la conducta humana en sus elementos constitutivos (lo analítico). El producto de tales análisis son leyes teóricas de la conducta social. Un ejemplo de este paradigma se encuentra cuando en 1913, J. B. Watson, el padre del conductismo, afirmó que "la Psicología, desde la visión conductista, es una rama puramente objetiva y experimental de las ciencias naturales, cuyo objetivo teórico es la predicción y el control de la conducta". Esta visión acerca de la empresa científica dominó la investigación educativa en el mundo occidental hasta muy recientemente (Romberg, 1992).

Popkewitz (1984, citado en Rombreg, 1992), ha argumentado que existen al menos cinco suposiciones interrelacionadas que dan forma a la investigación empírica analítica:

1. La teoría es universal, no limitada a un contexto específico o circunstancias actuales, y es por ello que podemos hablar de generalización.
2. Existe una desvinculación entre la ciencia y la sociedad . Las afirmaciones de las ciencias son creencias independientes de los objetivos y valores que la gente puede expresar en una situación y al eliminar el aspecto contextual, la teoría sólo describe las relaciones entre los "hechos".
3. Hay una creencia que el mundo social existe como un sistema de variables. Estas variables son distintas y analíticamente partes separables de un sistema de interacción. La noción de un

sistema de variables proporciona un significado específico de causa en la ciencia empírica - analítica. Una causa es una relación entre variables empíricas que puede ser explicada o manipulada para producir resultados predecibles.

4. Hay una creencia absoluta en el conocimiento formalizado. Lo anterior es válido siempre y cuando la definición de las variables y el planteamiento de la pregunta de investigación sean claros y precisos.
5. La búsqueda de un conocimiento desinteresado y formal crea una confianza en la construcción de una teoría en matemáticas. La cuantificación de variables de investigación reduce o elimina las ambigüedades y contradicciones. Ésto también permite elaborar una estructura lógica - deductiva de conocimiento por la cual las hipótesis pueden ser probadas y la teoría puede ser mejorada.

1.2.1.1 IMPLICACIONES DEL PARADIGMA EMPÍRICO ANALÍTICO

Concepción de la matemática

Por sus características, este paradigma parte de la premisa fundamental de que los objetos de la matemática y sus relaciones están dados, su existencia no depende del sujeto que conoce, ya que preexiste a él. Bajo esta concepción, la matemática puede ser vista como un "objeto de enseñanza", el matemático la "descubre" en una realidad externa a él, una vez descubierto un resultado matemático, es necesario "justificarlo" dentro de una estructura formal y queda listo para ser enseñado a partir de hechos, conceptos y procedimientos.

Esta concepción epistemológica, en una especie de simbiosis con el formalismo, encaja dentro del empirismo lógico del siglo XX, "contexto de descubrimiento/contexto de justificación": el realismo suministra el contexto de descubrimiento, mientras que el formalismo nos da el contexto de justificación (Moreno y Weldegg, 1992 y Romberg, 1992).

Enfoque en la investigación

Los trabajos de los investigadores que tratan a las matemáticas como algo externo investigan el rol del maestro de matemáticas en el salón de clases y comúnmente se enfocan en las acciones y en los métodos instruccionales de los maestros (énfasis en el maestro y su didáctica). Por otra parte, los investigadores también se enfocan en el ajuste del currículum para reflejar los progresos de la disciplina y para ver cómo los estudiantes adquieren el conocimiento, sin embargo, el aspecto principal de este enfoque está en la habilidad de los estudiantes para dominar el currículum y en las aplicaciones de los recientes avances tecnológicos, ya sean instruccionales o matemáticos (énfasis en el contenido).

Función del maestro

La función que es asignada al maestro en este paradigma es la de presentar y transmitir a los alumnos un producto, un saber acabado y completamente organizado. Mediante la transmisión de conocimientos acudimos a un ritual de presentación, donde el maestro enseña verdades y puede ofrecer el conocimiento a quien no lo posee, sin riesgo de que el conocimiento se modifique en el proceso de transmisión. De esta manera, la tarea del profesor consiste en "inyectar" el conocimiento en la mente del estudiante a través de un discurso adecuado y de monitorear su progreso hacia el dominio del conocimiento absoluto (Morán y Marín, 1990; Moreno y Weldegg, 1992 y Romberg, 1992).

Función del alumno

El estudiante, por su parte, no puede modificar la estructura del discurso, su tarea consiste en decodificarlo, con la finalidad de lograr el dominio de tales conocimientos (Moreno y Weldegg, 1992 y Romberg, 1992). El alumno es visto como un sujeto pasivo, receptivo a lo que el maestro tiene que enseñarle o transmitirle, por ello, las matemáticas son vistas como un conjunto limitado y estático de conceptos y habilidades que deben ser dominadas (Schoenfeld, 1992).

Curriculum

La instrucción es enfocada en el contenido del currículum, pues los estudiantes conocen más mientras dominan un mayor número de contenidos y procedimientos del currículum, por ello, los temas o contenidos de las materias deben ser organizados en grandes piezas de información a partir de las cuales se debe proporcionar instrucción explícita y práctica en cada una de estas piezas que los estudiantes deben dominar (Schoenfeld, 1992). La didáctica, bajo este punto de vista en el que el ser humano es relativamente fácil de modelar y dirigir desde el exterior de la escuela, busca optimizar la tarea del profesor al dividir el conocimiento en pequeños segmentos de conocimiento que se organizan jerárquicamente (de lo simple a lo complejo, de lo particular a lo general, de lo concreto a lo abstracto, del análisis a la síntesis) para que el alumno pueda dominarlos con mayor facilidad, poniendo especial énfasis en el contexto de la justificación como estado superior del conocimiento (Mendoza, 1993 y Moreno y Weldegg, 1992).

Técnicas de enseñanza

La enseñanza es esencialmente de tipo expositivo, ya que se concibe al profesor y al alumno como transmisor y receptor de conocimientos (Mendoza, 1993). Sin embargo, algunas otras teorías del aprendizaje, desarrolladas en épocas recientes, propiciaron la introducción de innovaciones de la didáctica que ofrecían optimizar el proceso de "transmisión y adquisición" del conocimiento.

Un ejemplo de estas innovaciones didácticas fueron las basadas en las teorías conductistas, que alcanzaron su auge en la década de los años sesenta, las cuales proponían una serie de técnicas (máquinas de enseñanza, textos programados, programación por objetivos) bajo el supuesto de que el aprendizaje consiste en la modificación de ciertas conductas observables, provocadas por un programa de enseñanza basada en binomio estímulo - reforzamiento. Estas teorías conductistas tampoco lograron escapar de la concepción realista de la matemática; detrás de la tecnología educativa derivada de ellas, está la idea de que el conocimiento es una especie de "paquete " que se transmite y se adquiere tanto mejor cuanto mejores sean los vehículos que lo transportan. La expresión "proceso de enseñanza - aprendizaje" empleada indiscriminadamete en la actualidad, proviene de estas teorías: hay un proceso único en cuyos extremos están la enseñanza y el aprendizaje que, en términos generales, vienen a ser una y la misma cosa (Moreno y Weldegg, 1992 y Romberg, 1992).

Evaluación del aprendizaje

La evaluación del aprendizaje, bajo esta concepción, queda definida de manera clara: los mismos contenidos que el profesor transmite inequívocamente mediante su discurso, serán demandados al estudiante, quien deberá responder con un discurso análogo. Aunque se reconocen diferencias entre los estudiantes (de inteligencia, de actitud, de motivación), estas diferencias se borran al solicitar respuestas únicas y universales, centradas principalmente en el contexto de justificación (Moreno y Weldegg, 1992).

Actualmente, se ha dado un rápido abandono de las creencias basadas en el paradigma empírico - analítico, debido principalmente a los siguientes factores, según Romberg (1992):

Primero, en gran parte por el desarrollo de la geometría no euclidiana que se ha desarrollado en el siglo XIX y que ha demostrado que se pueden desarrollar intentos teóricos con diferentes suposiciones, puesto que las teorías no reflejan la verdad de la naturaleza del mundo sino solamente los principales tipos de suposiciones acerca del mundo.

Segundo, la posición de filósofos como Karl Popper (1968, citado en Romberg, 1992) con respecto a los intentos por probar las proposiciones teóricas, han promovido un cambio de paradigma. Él afirma que la verdad nunca puede ser verificada, sino solamente refutada, y con base en esta afirmación, actualmente la ciencia está interesada en el conocimiento fiable y no verdadero. Una proposición puede ser útil porque no ha sido falsificada, sin embargo, se pueden mostrar muchas posibilidades para falsearla en el futuro.

Finalmente, durante este siglo, muchos científicos sociales y educadores han rechazado el modelo de ciencia física como apropiado para su disciplina. Sus argumentos ideológicos no naturalistas (referido a la hermeneútica, interpretación, fenomenología o crítica) intentan la interpretación de las interacciones sociales humanas en una cultura y las reglas que gobiernan estas interacciones.

1.2.2 PARADIGMA SIMBÓLICO

Un cambio fundamental en las tesis del realismo matemático se presenta con la crítica de la razón pura de Immanuel Kant (1724-1804, citado en Moreno y Weldegg, 1992), en donde de manera brillante entra en cuestionamiento la "objetividad" del conocimiento, sin caer en la trampa de la autocónciencia que imponía el racionalismo cartesiano. La tesis Kantiana postula que cuando el sujeto cognoscente se acerca al objeto de conocimiento (sea este material o ideal) lo hace a partir de ciertos supuestos, de tal manera que el conocimiento es el resultado de un proceso dialéctico entre el sujeto y el objeto, en donde ambos se modifican sucesivamente. Conocer para Kant, es dar significado a los objetos en términos del propio conocimiento y no, como suponían los filósofos griegos, crear el conocimiento en términos de los objetos.

El objetivo de esta aproximación es, por un lado, entender cómo los humanos se relacionan con el mundo social que ellos han construido y, por el otro, desarrollar teorías acerca de las reglas sociales que subyacen y gobiernan la acción social.

Esta aproximación está basada en la creencia de que la vida social es creada a través de la interacción simbólica y los patrones de conducta. De esta manera, el lenguaje y su uso en una cultura (la interacción y negociación en una situación social) son la base para definir las posibilidades de existencia humana. Algunos han usado los términos hermenéutico, interpretativo o fenomenológico para describir este paradigma (Romberg, 1992).

Los anteriores puntos de vista son los puntos de partida para una de las principales propuestas educativas del presente siglo, la constructivista, la cual se basa en la idea de que el conocimiento se construye mediante la actividad del sujeto sobre los objetos. Los objetos matemáticos ya no habitan en un mundo eterno y externo a quien conoce, sino que son producidos y construidos por él mismo, en un proceso continuo de asimilaciones y acomodaciones que ocurre en su estructura cognitiva (Moreno y Weldegg, 1992).

Para los constructivistas, el sujeto se acerca al objeto dotado de ciertas estructuras intelectuales que le permiten "ver" al objeto de cierta manera y extraer de él cierta información, misma que es asimilada por dichas estructuras. La nueva formación produce modificaciones, acomodaciones en las estructuras intelectuales, de tal manera que cuando el sujeto se acerca nuevamente al objeto lo "ve" de manera distinta a como lo había visto originalmente y es otra la información que ahora le es relevante. Sus observaciones se modifican sucesivamente conforme lo hacen sus estructuras cognoscitivas, construyéndose así el conocimiento sobre el objeto (Moreno y Weldegg, 1992).

1.2.2.1 IMPLICACIONES DEL PARADIGMA SIMBÓLICO

Concepción de la matemática

Este paradigma es común en disciplinas tales como la sociología, las ciencias políticas, y la antropología. En educación matemática, esta perspectiva se traslada en la creencia de que el conocimiento, es resultado de esta reflexión sobre acciones interiorizadas (la abstracción reflexiva). La matemática no es un cuerpo codificado de conocimientos, sino esencialmente una actividad, por tanto, el conocimiento es siempre situacional y personal. En el proceso de conocer, el sujeto va asignando al objeto una serie de significados, cuya multiplicidad determina conceptualmente al objeto. Conocer es actuar, pero conocer también implica comprender de tal forma, que permita compartir con otros el conocimiento y formar así una comunidad. En esta interacción de naturaleza social, un rol fundamental lo juega la negociación de significados (Moreno y Weldegg, 1992). Un conocimiento no es sólo algo dado, no es sólo un producto sino también una manera de pensar en ese producto o crear a partir de él otro producto (Morán y Marín, 1990).

Enfoque en la investigación

Las investigaciones realizadas en este enfoque consideran la matemática como una construcción personal, interna o como un conjunto de conocimientos. Existen tres vertientes:

- En la primera de éstas, la matemática es vista como un proceso, es decir, conocer matemáticas es equivalente a hacer matemáticas. El énfasis en que los estudiantes hagan matemáticas es el sello de esta conceptualización en matemáticas, el "hacer" (la experimentación, abstracción, generalización y especialización) constituye las matemáticas y no la transmisión a través de una buena comunicación.
- Una segunda conceptualización de la matemática está basada en la descripción de las actividades matemáticas en términos de modelos psicológicos, para lo cual se emplean esquemas y procedimientos cognitivos.
- La tercera concepción de las matemáticas ve al conocimiento matemático como el resultado de una interacción social. Aquí, el alumno que aprende matemáticas adquiere hechos, conceptos, principios y habilidades relevantes como resultado de la interacción social que se da en el contexto. Si los estudiantes están aprendiendo y aplicando las matemáticas, ellos pueden llegar a ver las matemáticas como algo importante en su ambiente social. Tal sentido de "utilidad" en el aprendizaje de las matemáticas, lleva a los estudiantes a participar activamente en "hacer matemáticas" para aprender las habilidades de la disciplina.

Cada una de estas tres concepciones del desarrollo y estudio de modelos internos para la educación matemática proporciona importantes ventajas para la investigación en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. La elección de una de estas filosofías y su uso en el diseño de investigaciones determina fuertemente la naturaleza de la pregunta de investigación, la manera en la cual los datos relevantes son obtenidos y analizados y la importancia de las conclusiones. Los creadores y usuarios de investigaciones en educación matemática pueden poner atención en el rol que tales filosofías juegan en la conducta de los investigadores, pues el ignorar este hecho puede llevarnos a mal interpretar los resultados y a aplicar incorrectamente las conclusiones de tales estudios.

Papel del maestro

Cualquier persona involucrada en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas tiene que aprender que las matemáticas son una materia personal, en la cual los aprendices desarrollan sus propias nociones como resultado de las actividades en las cuales ellos participan. Una tesis fundamental de este paradigma es que todo acto intelectual se construye progresivamente a partir de estructuras cognoscitivas (lingüísticas) anteriores y más primitivas. La tarea del educador, consistirá entonces en diseñar y presentar situaciones que apelando a las estructuras anteriores de que el estudiante dispone, le permita asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje y nuevas operaciones asociadas a él. La actividad del profesor ya no se limita a tomar el conocimiento de un contexto y exponerlo en el aula, o en una nota, o en otro texto, con mayor o menor habilidad, sino que demanda una constante creatividad para crear experiencias instruccionales para los estudiantes y facilitar el entendimiento intersubjetivo obtenido de estas experiencias (Moreno y Weldegg, 1992 y Romberg, 1992).

El lugar del profesor en este paradigma según Giordan (1992), es:

1. Estar abierto a todas las ideas y propuestas del alumno (escucha).
2. Estar abierto a todas las ideas y propuestas de la ciencia.
3. Estar presente para dar seguridad (en la fase de transmisión), pero no demasiado.
4. Estar presente para relacionar: al alumno con el alumno, al alumno con su búsqueda (investigación), al alumno con la ciencia (aprendizaje formativo e informativo).
5. Ser creativo para proponer al alumno un abanico de posibilidades, haciendo que continúe su proceso.

Una característica importante en este paradigma, es que se preocupa por conocer cuáles son los procesos de razonamiento que ocurren en la mente del profesor durante su actividad profesional. La premisa fundamental es que el docente es un sujeto reflexivo, racional, que toma decisiones, emite juicios, tiene creencias y genera rutinas propias de su desarrollo profesional (García, 1987).

Papel del alumno

En este paradigma, es la actividad del sujeto lo que resulta primordial: no hay "objeto de enseñanza" sino "objeto de aprendizaje". El sujeto es un sujeto activo y no pasivo, que selecciona, asimila, procesa, interpreta y confiere significado a los estímulos y que aprenden por construcción, como una consecuencia de las experiencias (Mendoza, 1993 y Moreno y Weldegg, 1992).

Implicaciones en la metodología de enseñanza

En el paradigma simbólico son necesarias las propuestas didácticas que apoyan una actividad de estudio autodirigida con base en la guía de un profesor, que permitan lograr un aprendizaje basado en la formación de la conciencia de la realidad teórica y práctica del conocimiento. Ésto ha conllevado un auge de los enfoques cognitivos en el estudio del desarrollo humano y ha llevado a subrayar el carácter constructivo del proceso de adquisición del conocimiento (Mendoza, 1993). Con la finalidad de lograr lo anterior, la organización y la tecnología del salón de clases y de la escuela son arregladas de modo que todas sus experiencias puedan ser ricas y significativas.

1.2.3 PARADIGMA CRÍTICO

El objetivo del paradigma crítico es desmitificar la generación de conocimiento en las condiciones sociales que restringen nuestra actividad práctica. La suposición básica que defiende esta visión es que los humanos, a través del pensamiento y de la acción, pueden mejorar el mundo social en el cual viven. Esta creencia está arraigada en el rápido cambio social del pasado siglo y en ciertos problemas que surgieron a partir de estos cambios. De esta manera, como Popkewitz (1984, citado en Romberg, 1992) ha argumentado, "la función de la teoría crítica es entender las relaciones entre los valores, intereses y acción, y cambiar el mundo, no describirlo".

1.2.3.1 IMPLICACIONES DEL PARADIGMA CRÍTICO

El impacto de este paradigma en el pensamiento educativo implica la creencia de que el conocimiento es obtenido por reflexión de cómo los humanos pueden mejorar la condición social, que los alumnos aprenden a través de reflexión y acción, y que el trabajo del maestro es tener estudiantes que reflexionen cerca del mundo social en el cual viven y que inicien acciones para cambiar las prácticas vigentes (Romberg, 1992).

En este paradigma se considera que el conocimiento no puede "darse", sino que es necesario crearlo; ésto exige un cambio en la relación del alumno con el saber; el alumno es actualmente un consumidor, debe convertirse en un actor de su propia formación. El elemento importante del proceso educativo no es la ciencia que se trata de impartir, sino la relación entre el alumno y la disciplina científica; permitir al niño y al adolescente construir o usar las herramientas que le permitan dominar su cuerpo, su medio ambiente natural y social (Giordan, 1992).

García (1987), afirma que en este paradigma también se considera que los procesos de pensamiento de los profesores no se producen en el vacío, sino hacen referencia a un contexto psicológico (teorías implícitas, valores, creencias) y a un contexto ecológico (recursos, circunstancias externas, limitaciones administrativas, entre otros).

1.3 APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

El hombre desarrolló las matemáticas para expresar ideas de cantidad, tamaño y orden. Los números son convencionalmente usados para registrar o comunicar ideas y relaciones de cantidad (Johnson y Myklebust, 1967). Sin embargo, existen algunas condiciones o circunstancias en las que la adquisición y desarrollo del conocimiento matemático se ve entorpecido.

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en los niños son relativamente comunes (Badian, 1983 y Kosc, 1974 citados en Geary, 1995). Por ejemplo, en un estudio a gran escala, Badian encontró que 64% de los niños en escuela elemental y en junior high school, muestran alguna forma de dificultad en matemáticas. En otro estudio, se encontró que 64% de la muestra de niños de Checoslovaquia presentan alguna forma de dificultad para aprender matemáticas. Fernández, Llopis y Pablo de Riesgo (1991), reportan que en España, el Servicio de Inspección Técnica de Educación pone de manifiesto que el mayor índice de fracasos en la educación general básica se produce en el área de matemáticas y ciencias (42% en los centros estatales y 38% en los no estatales). En México, incluso se ha encontrado que los problemas debidos a una deficiente ejecución de las habilidades matemáticas tempranas acarrean deficiencias en otras áreas y a otros niveles de escolaridad (Tirado y Serrano, 1989). Estos estudios sugieren que las dificultades en matemáticas son comunes en los niños (Geary, 1995) y que tienen graves consecuencias a largo plazo en su ejecución escolar, un ejemplo de ello es que las dificultades en matemáticas persisten en los niveles de educación media superior y superior.

Aunado a la problemática de la ineficiencia escolar del aprendizaje de las matemáticas, encontramos el rechazo implícito y explícito que manifiestan los estudiantes ante la materia, causadas por razones didácticas, escolares, sociales y familiares. Este rechazo está basado en las creencias de los alumnos con respecto a la materia y los maestros que la imparten, por ejemplo, los alumnos consideran que la matemática es la asignatura más difícil y más aburrida en la que la actividad principal es la memorización y aunque suene contradictorio, existe también la creencia social de que la matemática es una disciplina útil y creativa en la que se aprende a pensar (Schoenfeld, 1989 y Arana, Escudero, Garces y Palacian, 1986). Con respecto a los profesores, los alumnos piensan que en su mayoría son impuntuales, son flojos, pasivos, indiferentes, autoritarios, usan un lenguaje confuso, no propician la intervención grupal, ni planifican su clase (Loyola, 1992).

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y el rechazo por parte de los alumnos hacia la materia son sólo dos aspectos por los que el estudio del proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas ha llamado la atención. Algunas otras consecuencias que provocan las dificultades del aprendizaje de las matemáticas en diferentes ámbitos son: en el ámbito escolar, por lo general, un mayor índice de reprobación que en las demás asignaturas; en el familiar, preocupación por las calificaciones de esta materia; en el ámbito personal, angustia cada vez que se enfrentan a situaciones donde hay que hacer uso de las matemáticas; distorsión en la preparación de recursos humanos, insuficiencia de profesionistas y técnicos en carreras con amplio contenido en matemáticas y, a su vez exceso en las carreras cuyos planes de estudio tienen poca o nula exigencia en ésta áreas (Loyola, 1992).

El estudio de cada uno de los anteriores aspectos se aborda solamente como un obstáculo para lograr un fin práctico y raras veces se logra darle un tratamiento sistemático que permita ir definiendo las causas con mayor precisión. Por ello, la propuesta de este trabajo se centra en realizar un análisis de la forma en que actualmente se lleva a cabo el proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas en el salón de clases, con el propósito de revisar y de ser necesario corregir los objetivos educativos, los contenidos curriculares, la didáctica prevaleciente, la forma en que los alumnos aprenden y la interacción que establecen los alumnos con sus compañeros y con el profesor.

Con el propósito de comprender mejor el proceso de enseñanza –aprendizaje, es necesario hacer la distinción entre lo que Geary (1995) llama habilidades matemáticas primarias y secundarias, ya que las primeras son una condición necesaria para que la estructura cognoscitiva como tal, pueda ser conformada.

Las habilidades matemáticas primarias son habilidades numéricas universales como el conteo y la numeración, que no dependen del desarrollo del lenguaje, de acciones complejas o de la adquisición del sistema de conteo específico de cada cultura, además de que surgen en el desarrollo temprano y son evidentes en primates y algunas otras especies animales (Geary, 1995). Una investigación que ejemplifica este tipo de habilidad es la que realizaron Starkey, Spelke y Gelman (1990), quienes encontraron que los infantes humanos (de 6 y 8 meses) son hábiles para establecer equivalencias y no equivalencias visuales y auditivas, además de operar a un nivel abstracto, que puede servir como punto de partida para desarrollar el razonamiento numérico (basado en el establecimiento de relaciones entre objetos).

Por su parte, las habilidades matemáticas secundarias son las que surgen de la educación y se diferencian de las anteriores por ser un dominio matemático complejo. Entre estas habilidades se puede encontrar la aritmética, el álgebra, la geometría, por mencionar algunas.

El desarrollo de las ideas y eventos matemáticos comienza con el simple proceso de abstraer relaciones de las situaciones ambientales (Kantor, 1980). De esta manera, puede afirmarse que el aprendizaje de la conducta matemática inicia paralelamente con el desarrollo de otras habilidades con que cuentan los infantes, las cuales surgen a partir de la interacción del individuo con el medio ambiente inmediato. Por ejemplo, Burton (1992) sugiere que muchas de las formas en las cuales los niños pequeños inician el conocimiento de conceptos matemáticos han sido paralelas a las formas en las cuales ellos desarrollan el lenguaje materno. A ellos no les "enseñan" palabras o estructuras lingüísticas como conocimientos manifiestos, pero ellos mismos adquieren los procesos de pensamiento que necesitan para expresar y comunicar ideas. Asimismo, el conocimiento de la inteligencia matemática se adquiere como parte de procesos semejantes a la adquisición del lenguaje materno, que ellos mismos van construyendo a la par con el conocimiento de su medio inmediato.

La adquisición del lenguaje matemático se ve ejemplificado cuando los niños usan los pronombres posesivos como "mio", "tuyo", "suyo", pues están realizando una respuesta de clasificación; la construcción exitosa de oraciones con sujeto, verbo y complemento, que de inicio tienen la finalidad de comunicarse, constituyen una respuesta de ordenación; el relacionar objetos con base en la correspondencia uno a uno, como cuando reparten dulces entre las personas presentes, es el origen de la numeración; el establecimiento de relaciones familiares, por ejemplo, abuelos, tios, primos, hermanos, involucra la formación de subconjuntos. Todas estas habilidades que surgen con la adquisición del lenguaje, forman la base del conocimiento matemático.

Otra relación existente entre la conducta matemática y la adquisición del lenguaje, es el aprendizaje del vocabulario usado en matemáticas y que permite la representación de las relaciones observadas en el medio ambiente inmediato. Este vocabulario incluye números (tales como 1, 2, 3, 10, 100, millón, primero, segundo, tercero, mitad) operadores (tales como dividir en dos, doblar la cantidad, sumar uno) y relaciones (tales como igual, diferente, menor y mayor), que permiten enfocarse en el vocabulario útil para el manejo de los números. Por lo anterior, podemos decir que el origen de las representaciones numéricas surge de la identificación de relaciones de similitud y diferencia entre conjuntos de objetos, primero a nivel perceptual y después a través de símbolos (Commins, 1991).

Las consideraciones anteriores nos permiten afirmar que cuando los niños inician su educación formal, ya cuentan con ciertas habilidades y conocimientos matemáticos, sin embargo, en las primeras etapas de enseñanza en la escuela, los niños carecen de conceptos abstractos, motivo por el cual dependen de las experiencias concretas. Esta es la razón por la que los niños se resisten a descontextualizar los problemas aritméticos, siendo necesario en el inicio de la enseñanza, realizar concretamente las operaciones representadas de manera simbólica, puesto que los niños sienten la necesidad de establecer relaciones con los objetos conocidos. Un ejemplo de ello, es el hecho de que las palabras que designan números y las operaciones son inicialmente entendidas en términos tales como reagrupar conjuntos de tres manzanas más dos manzanas, por citar un ejemplo.

Posterior a la etapa inicial de dependencia de experiencias concretas, el uso de las palabras como sustitución de objetos es desarrollada, lo que permite la simbolización de cantidades a través de los números. De esta manera, al sustituir palabras que establecen relaciones específicas por símbolos, se logran las representaciones matemáticas, que permiten trascender la situación concreta, pues perduran en el tiempo.

Commins (1991), ha sugerido la siguiente secuencia en el desarrollo de conceptos matemáticos en la escuela:

1) Las constantes, posiblemente son las primeras categorías de expresión matemática que se dominan.

2) Los niños comprenden posteriormente que la variable x puede significar muchas cosas a la vez, dependiendo del contexto.

3) En una etapa posterior a la adquisición de conceptos matemáticos se realiza la formulación de proposiciones, donde ya es posible establecer relaciones entre diferentes elementos o representaciones, por ejemplo, los niños comprenden que significa $x > 1$, que $½ = 0.5$, entre otros.

4) Una vez que los niños tienen los conceptos de números (1, 2, 3,...), relaciones (>, <, =) y pueden realizar las operaciones básicas (suma, resta, división o multiplicación), están en condiciones de desarrollar conceptos más complejos como el de ecuación, ya que para poder construir este concepto, los alumnos deben apoyarse en sus conocimientos acerca de igualdades, constantes, variables, operaciones básicas, funciones, por citar algunos.

Dado que esta tesis está enfocada al análisis de la enseñanza - aprendizaje del álgebra en el salón de clases, en el apartado siguiente se presenta una visión general de la problemática existente en el aprendizaje de dicho tema.

1.4 ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

Así como existen múltiples dificultades en la adquisición y desarrollo de nociones matemáticas básicas (suma, resta, multiplicación y división), así también se presentan múltiples dificultades en la adquisición y desarrollo de conceptos algebraicos. Weaver III y Kintsch (1992), apoyan la anterior afirmación reconociendo que los problemas de álgebra son notoriamente difíciles para los estudiantes. Un ejemplo de ello es la investigación realizada por O´dell y VonKluge (1993), en la que compararon las habilidades matemáticas de 79 y 120 estudiantes en 1976 y 1991 respectivamente. Los estudiantes fueron evaluados en la clase de Psicología Estadística con una prueba de matemáticas diseñada por Brown en 1933. Los resultados muestran una declinación general en las habilidades matemáticas medidas por la prueba, especialmente cuando los reactivos involucran razonamiento matemático y especialmente álgebra.

Las dificultades presentadas por los estudiantes en la resolución de problemas de álgebra no son sorprendentes. Lindquist (1989, citado en O´dell y VonKluge, 1993), reporta que la Evaluación Nacional de Progresos de la Educación muestra que solamente el 7% de los estudiantes de junior high school pueden resolver un problema simple de álgebra. Similares resultados fueron encontrados por Pavón, Galicia y Sánchez (1997) en un estudio que evaluó diversas habilidades cognitivas en estudiantes de diferentes disciplinas a nivel licenciatura.

Pérez, Cruz y Mercado (1986), realizaron una investigación con el propósito de conocer el perfil de conocimientos matemáticos de los alumnos de bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, encontrando que dentro del contexto algebraico, los errores más frecuentes fueron: interpretación de los literales en las expresiones algebraicas, uso e interpretación del lenguaje algebraico, desconocimiento de las operaciones permisibles en expresiones algebraicas, ausencia del concepto de solución de una ecuación y, confusión de la terminología usada en los enunciados (resolver, simplificar, comprobar, evaluar). Los anteriores errores cometidos por los estudiantes, indican un conocimiento pobre del significado de los conceptos y términos utilizados.

De la misma manera, Rosas (1995), reporta varios estudios realizados en México a niveles escolares medio básico, medio superior y superior, dentro del proyecto de "Competencia en el Uso del Lenguaje Algebraico" coordinado por Filloy y Rojano entre 1984 y 1986, y en los cuales llegaron a las siguientes conclusiones:

- La mayoría de los estudiantes de los niveles escolares medios no adquieren el lenguaje algebraico en un nivel aceptable, ni en su manejo operativo, ni en su utilización en la resolución dé problemas y modelación en situaciones extramatemáticas.
- Hay una gran persistencia en la utilización de los métodos intuitivos o propios de los estudiantes en sustitución de los métodos matemáticos escolares.
- Las situaciones descritas en los puntos anteriores no se modifican significativamente conforme los alumnos avanzan en su escolaridad.
- Los tratamientos de enseñanza remedial experimentados ayudan parcialmente a vencer las dificultades y a rectificar los errores detectados en los diagnósticos.
- La situación descrita, en el punto anterior, se explica por el hecho de que las causas que dan lugar al desempeño deficiente y uso erróneo del lenguaje matemático, pueden ser de naturaleza diversa.

El aprendizaje del álgebra presenta grandes dificultades dado que exige el desarrollo de habilidades de pensamiento abstracto, pues el paso de la aritmética al álgebra es concebido como la adquisición de un lenguaje simbólico nuevo que enfrenta al sujeto con el mundo matemático de los modelos y algoritmos generalizadores. La función de cualquier lenguaje es permitir el intercambio y la comunicación continua entre los individuos; con el lenguaje algebraico, el sujeto descubre la riqueza de realidades matemáticas superiores a él; y le sucede en la misma forma como cuando adquirió su primer lenguaje durante la niñez. Apropiarse del álgebra es adquirir una de las claves que permiten el acceso a los conocimientos superiores de la ciencia y la tecnología. La interiorización del lenguaje algebraico es la aparición del pensamiento algebraico propiamente dicho, que tiene como soportes la representación matemática interior y el sistema de los signos colectivos (Peralta y Medina, 1997).

1.4.1 CONTENIDOS DEL CURRÍCULUM DE ÁLGEBRA

Para lograr el objetivo de enseñar el lenguaje algebraico, la escuela ha determinado dos formas de organizar los contenidos del currículum del álgebra. Por un lado, se encuentra la propuesta "psicológica" de que los contenidos del álgebra deben estar basados en el conocimiento que proporciona la psicología acerca de las etapas del desarrollo del niño. Por otro lado, la propuesta "matemática" afirma que la mejor forma de organizar los contenidos del álgebra es retomar las etapas históricas de desarrollo la matemática como ciencia.

Sea cual fuere la forma de organizar los contenidos del álgebra escolar, las exigencias en cuanto a la ejecución o conocimientos adquiridos por los alumnos deben ser establecidas por el sistema educativo con base en las necesidades del individuo en la sociedad, y a las necesidades de la sociedad misma, puesto que los conocimientos serán reconocidos como tales por que permiten resolver ciertos problemas y dominar determinadas situaciones (Brun, 1979).

El proceso de enseñanza – aprendizaje que se analiza en los siguientes apartados, se basa en la siguiente secuencia: a) prerrequisitos, que son los temas vistos antes del álgebra y que son fundamentales para su total entendimiento, b) solución de ecuaciones y c) solución de problemas a partir de ecuaciones. Aunque autores como Kathleen (1995) han propuesto que el tema de funciones sea incluido en el currículum del álgebra, este trabajo sólo se enfocará al tema de ecuaciones lineales.

1.4.2 PRERREQUISITOS

En este apartado se consideran todos aquellos conocimientos básicos necesarios para aprender álgebra. Retomando las propuestas cognitivas, la formación de redes de conocimiento avanzado, como es el álgebra, se sustenta en los conocimientos matemáticos básicos, por ello es necesario que cualquier alumno que inicie el estudio del álgebra cuente con estos conocimientos. Los temas que han sido reportados por la literatura como fundamento del álgebra son presentados a continuación.

1.4.2.1 IGUALDAD

Un requerimiento importante para generar e interpretar adecuadamente la representación estructural de las ecuaciones es la concepción de las características de simetría y transitividad de la igualdad (algunas veces se refiere a la "equivalencia derecha – izquierda" del signo igual). En aritmética, el signo igual significa una transformación de procedimientos (usualmente una muy específica). Ésto denota un signo direccional de izquierda a derecha. Las ecuaciones en cambio, dan la misma información a ambos lados de la ecuación (equivalencia). La igualdad es una relación de equivalencias y desde un punto de vista psicológico, los aprendices requieren moverse de un modo de lectura unidireccional, a una forma multidireccional de procesar la información (Gallardo, 1987 y Linchevski, 1995). La idea entre los estudiantes que comienzan en el estudio del álgebra, de que el signo "muestra el resultado de las operaciones" más que ser un símbolo de equivalencia entre el lado izquierdo y derecho de una ecuación, es indicador de su inicial rechazo a aceptar enunciados tales como $4 + 3 = 6 + 1$ ó $3 = 3$. Ellos piensan que el lado derecho puede indicar la respuesta, esto es, $4 + 3 = 7$. Los estudiantes de álgebra en secundaria ven el signo igual como un símbolo separador más que como un signo de equivalencia izquierda – derecha, ésto es visto en su abreviación de pasos en la solución de una ecuación y en su alteración cuando "suman la misma cosa a ambos lados" (Byers y Herscovics, 1977; citado en Kieran, 1992), por ejemplo;

Resolver para x:

$2x + 3 = 5 + x$

$2x + 3 - 3 = 5 + x$

$2x = 5 + x - x - 3$

$2x - x = 5 - 3$

$x = 2$

Este mal uso del signo igual persiste también en la preparatoria, como ha sido reportado por Mevarech y Yitschak (1983, citado en Kieran, 1992).

Un ejemplo más del uso del signo igual para anunciar el resultado en vez de expresar una relación simétrica y transitiva, es reportado por Vergnaud, Benhad y Dussouet (1979, citado en Kieran, 1992), al intentar resolver el problema siguiente:

Daniel fue a visitar a su abuela, quién le dió $1.50. Entonces, él compró un libro que costó $3.20. Si le sobró $2.30, ¿Cuánto dinero tenía antes de visitar a su abuela?.

Los niños de sexto grado frecuentemente escriben 2.30 + 3.20 = 5.50 - 1.50 = 4. La simetría y la transitividad del signo igual son violados. El signo igual es leído como "ésto da", que es, un signo direccional de izquierda a derecha. La interpretación que puede ocurrir en álgebra con respecto al signo igual es precisamente que representa las características simétricas y transitivas de la igualdad (Vergnaud, 1984, 1986, citados en Kieran, 1992). Es necesario ampliar el concepto del signo igual en el estudio del álgebra, ya que las ecuaciones son representaciones que involucran una perspectiva no aritmética en el uso del signo igual y la naturaleza de las operaciones que son representadas.

1.4.2.2 TÉRMINOS Y EXPRESIONES LITERALES

El uso de ejemplos que ilustran los procedimientos generales, deben ser explorados antes de comenzar el estudio del álgebra, los siguientes ejemplos ilustran patrones típicos de generalización. Los estudiantes de la escuela elemental (6 a 12 años) no reconocen que el número total de elementos en dos conjuntos de 5 y 8 respectivamente, pueden ser escritos como 5 + 8 (más que 13), por tal razón es altamente improbable que ellos puedan reconocer que a + b representan el total de números de elementos en el conjunto que contiene los elementos a y b. Cuando los estudiantes calculan una secuencia tal como 3 + 5 – 5 = 3; ellos deben eventualmente llegar a la generalización y conclusión de que a + b – b = a (Linchevski, 1995). En otras palabras, el inicio de la habilidad de tratar a + b como un objeto en álgebra tiene algunos precursores intuitivos en aritmética. El álgebra demanda que los estudiantes reconozcan, por ejemplo, que a + b – c no es lo mismo que a – b + c, a menos que b = c (Gallardo, 1987 y Kieran, 1989 citado en Kieran, 1992).

Cuando el álgebra es concebida como una aritmética generalizada, el resultado es el estudio de las propiedades del sistema numérico. Algunos ejemplos de estas propiedades son la propiedad conmutativa, la propiedad asociativa y las reglas de los signos (el producto de dos números de igual signo tiene un signo positivo y el producto de dos números de signo diferente tiene signo negativo). En esta concepción del álgebra, la variable x en la ecuación $x + 2 = 3$ es interpretado como "representando a" un número (por ejemplo, 1) que soluciona esta oración; esta interpretación de variable resulta de hallar la suma perdida, restando factores (Booth, 1984 citado en Kieran, 1992 y Harvey, Waits y Demana, 1995).

Bell (1976, citado en Bell, 1995), realizó un estudio acerca de la habilidad típica de los estudiantes de 15 años para explicar y justificar la generalización, donde mostró que existe un bajo nivel de aplicación del álgebra. Una de las tareas requirió derivar y explicar el hecho de que si al mismo número se le suman 10 y se le restan 10, el resultado es siempre el mismo número. Solo 3 de 41 estudiantes intentaron representar la situación algebraicamente, los restantes usaron expresiones verbales, frecuentemente fallando al distinguir los datos de las conclusiones.

Cuando los estudiantes comienzan a estudiar álgebra, frecuentemente no pueden interpretar las expresiones algebraicas como operaciones aritméticas con algún número, pero pueden pronto entender que los objetos que son manipulados son expresiones algebraicas más que números; en el futuro, las operaciones realizadas son simplificadas, factorizando, racionalizando el denominador, resolviendo, diferenciando, en lugar de simplificar sumando, restando, multiplicando y dividiendo como en el caso de la aritmética (Kieran, 1992).

1.4.2.3 VARIABLES

El concepto de variable no es fácil de definir, ya que su significado puede cambiar en el contexto en el cual aparece. Usiskin (1988; citado en Ursini, 1994), por ejemplo, destaca cuatro usos diferentes de la variable y los asocia a diferentes concepciones del álgebra.

CONCEPCIÓN DEL ÁLGEBRA	USO DE LA VARIABLE
Aritmética generalizada	Generalizadores de patrones (traduce, generaliza)
Medio para resolver problemas	Incógnitas, constantes (resuelve, simplifica)
Estudio de relaciones	Argumentos, parámetros (relaciona, grafica)
Estructura	Marcas arbitrarias en papel (manipula, justifica)

Un alumno competente en el álgebra es capaz de interpretar las variables de modos distintos dependiendo del problema en el cual aparecen. Reconoce, por ejemplo, ante las siguientes oraciones:

$x + 5 = x + 1$ **(A)**

$x + 5 = 5 + x$ **(B)**

cuándo una oración representa una ecuación (A), y la variable representa una incógnita específica cuyo valor puede determinarse con precisión; y cuándo una expresión representa una tautología (B), y la variable representa un valor indeterminado. Es capaz de distinguir estas expresiones a pesar de que parezcan muy similares. También es capaz de simplificar una expresión algebraica, de trabajar con la idea de variación cuando las variables están involucradas en una relación funcional y de discriminar entre las acciones a tomar en cada caso particular. Para él, las diferencias que caracterizan los distintos usos de la variable, pueden parecer triviales y hasta insignificantes, sin embargo, reconocerlas es crucial para los principiantes, el no reconocerlas se torna frecuentemente un obstáculo que bloquea el aprendizaje del álgebra (Matz, 1982; citado en Ursini, 1994).

Küchemann (1980; citado en Ursini, 1994), realizó una investigación en la que identificó seis maneras diferentes en las que los alumnos interpretaban los símbolos literales:

- Letras evaluadas: a la letra se le asigna un valor numérico;
- La letra no utilizada: la letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado;
- Letras como objetos: se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como a un objeto en sí;
- Letras como incógnitas específicas: la letra representa un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella;
- Letra como número generalizado: se considera que la letra representa o es capaz de asumir distintos valores;
- Letra como variable: se considera que las letras representan un rango de valores de algún tipo.

Los resultados anteriores destacan el hecho de que los alumnos tienen diferentes maneras de interpretar las letras usadas para representar las variables. Ésto indica que los que se inician en el estudio del álgebra consideran que los símbolos literales usados como variables pueden interpretarse de diferentes modos, y que su significado puede variar con el problema. Pero, los resultados reportados por Küchemann muestran también que la interpretación dada por los niños no siempre es la apropiada, y frecuentemente es la fuente de respuestas erróneas. Para ejemplificar lo anterior, Gallardo (1987), reporta que los estudiantes que se inician en el estudio del álgebra, frecuentemente interpretan la x en una ecuación como un número generalizado e incógnita al mismo tiempo (como número generalizado es el simbolismo literal que puede tomar más de un valor numérico y como incógnita es la letra que representa un número específico aunque desconocido).

Además, esta clasificación de la interpretación de los símbolos literales, refleja un grado de dificultad creciente. Si bien, puede ser válido considerar que los alumnos se acercan al álgebra cuando sus respuestas pertenecen a las últimas tres categorías, la visión jerárquica que refleja la clasificación de Küchemann podría estar insinuando un orden en el cual deberían enseñarse los distintos usos de las variables.

Se han realizado diversos estudios (Küchemann, 1980 y Booth, 1984; citados en Ursini, 1994) para investigar la capacidad que tienen los alumnos para trabajar con la variable como número general cuando aparece en tareas algebraicas tradicionales, encontrando que la gran mayoría tenían dificultades para trabajar con esta caracterización de la variable, de modo que los alumnos tienden a interpretarla dependiendo del problema: la ignoran; la interpretan como una incógnita específica asignándole un valor específico; la interpretan como objeto. Resultados similares se obtuvieron en un estudio desarrollado en México con alumnos de secundaria (Ávila, Garcia y Rojano, 1990, citado en Ursini, 1994).

1.4.2.4 LECTURA Y ORDEN DE LAS OPERACIONES

En general, las operaciones aritméticas se realizan en forma vertical, mientras que en álgebra domina la lectura horizontal de las operaciones en las ecuaciones. Estas diferencias en la lectura aunadas al uso de los signos "más" y "menos" ocasionan dificultades cuando no se da una explicación apropiada. Por ejemplo, en el ejercicio $x + 1568 = 392$, un alumno manifestó: "no se puede resolver la ecuación por que x es siempre positivo y para que x pudiera ser negativo, deberían escribir $-x$" (Gallardo, 1987).

La lectura horizontal de las expresiones algebraicas también tiene implicaciones en el orden en que se deben realizar las operaciones, pues no siempre es correcto realizar las operaciones de acuerdo al orden en que son presentadas. En los cursos previos al álgebra, se debe comenzar a trabajar con ejercicios que proporcionen a los estudiantes la oportunidad de percibir la necesidad de establecer la prioridad con que deben realizarse las operaciones para obtener un resultado correcto. Así pues, se debe enfatizar el uso de reglas útiles para dar prioridad a la realización de operaciones, un ejemplo de tales ejercicios es: $25 + 13 * 2 - 16 \div 2$, en el cual, se pide a los estudiantes que indiquen el orden en que deben realizarse las operaciones en la expresión dada. A partir de este ejercicio se debe:

- Discutir los resultados producidos al usar diferentes ordenes de operación en el ejemplo previo.
- Decidir cuándo, para una expresión aritmética dada, la evaluación de izquierda a derecha corresponde con el orden convencional de operaciones (Linchevski, 1995).

1.4.2.5 PARÉNTESIS

En aritmética, los estudiantes ven los paréntesis como estáticos, como un signo de "haz esto primero" o "los paréntesis se hacen primero por ser de máxima prioridad" aún cuando no discriminen si el paréntesis está indicando la base de una potencia, separando signos solamente, cambiando el orden en la ejecución de operaciones, o cumpliendo dos o más funciones a la vez. Freudental (1973 citado en Kieran, 1992) ha mencionado que si en *ab*, la *a* es reemplazada por *–a*, ésto se convierte en *–ab*; pero si *b* es remplazada por *–b*, esto no llega a convertirse en *–ab*, sino en *a (-b)*. Los estudiantes pueden aprender dónde suman los paréntesis y dónde no. Kieran (1979, citado en Linchevski, 1995), ha encontrado que los estudiantes tienden a leer las expresiones de izquierda a derecha y no ven la necesidad de los paréntesis, que están relacionados con la puntuación del álgebra. El rol de los cursos de pre-álgebra es expandir esta concepción de los estudiantes y poner una dimensión más dinámica en el uso de los paréntesis. El objetivo de las actividades con paréntesis en los cursos previos al álgebra es preparar a los estudiantes para un uso más flexible de los paréntesis que es necesario en el aprendizaje del álgebra (Linchevski, 1995 y Medina y Peralta, 1997).

1.4.2.6 SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES.

Para iniciar el estudio del álgebra es necesario considerar las expresiones algebraicas como expresiones grafémicas de carácter simbólico que son reguladas por la gramática (Renney, 1987). Entender las propiedades estructurales de una expresión algebraica incluye la habilidad para dividir en partes una expresión y realizar manipulaciones en ella antes de reintegrarla. Identificar el punto en una cadena dada, dónde una división es legitima, es una parte necesaria para el entendimiento y para una correcta manipulación que permita simplificar expresiones y producir ecuaciones equivalentes (Linchevski, 1995). Sin embargo, los estudiantes a los que se ha evaluado fallan en sus clases de álgebra al simplificar expresiones, debido a la complejidad de las expresiones y a la naturaleza de la simplificación, de esta manera, la simplificación no se realiza a menos que el estudiantes sea hábil para desarrollar su sentido de operar con las expresiones algebraicas como objetos matemáticos en sí mismos. Tal concepción involucra aplicar las propiedades no a los números, sino a las expresiones (Kieran, 1992).

Ernest (1987), ha propuesto el siguiente modelo de significado cognitivo de las expresiones matemáticas, que permite suponer la manera en que se lleva a cabo la formulación de ecuaciones algebráicas: la expresión matemática es examinada visualmente por el lector, quien se forma una representación de la estructura de la expresión, esta representación es corroborada con el conocimiento previo, lo cual implica la verificación de todos los símbolos que son conocidos y la verificación de la complejidad y el largo de la expresión que el lector puede manejar. Si uno de estos dos pasos falla, el proceso es interrumpido y remitido a la toma de decisiones, pero si no, el procedimiento de análisis sintáctico es ejecutado. En este procedimiento el operador principal de la expresión es localizado e identificado. Las reglas apropiadas del análisis sintáctico son aplicadas a la expresión. Este resultado es un nuevo análisis sintáctico parcial, el sucesor en una secuencia de análisis sintáctico hasta que se llega al análisis sintáctico completo. Después, el significado de los símbolos básicos del análisis sintáctico es localizado en la memoria semántica. La representación de la estructura completa de la expresión es ahora construida, con el significado de la estructura analizada y el significado de los símbolos básicos activados o listos para activarse. La representación puede ahora ser usada, como un punto de inicio en la solución de problemas rutinarios.

Kouba (1989), sugiere las siguientes transformaciones al intentar solucionar un problema algebraico:

a) transformaciones conmutativas: la representación de un término de la forma a + b, es el resultado de un término de la forma b + a. Existen tres etapas para llegar a este nivel de transformación: 1) para sumar a + b, cuanta *a* y luego cuenta *b* para llegar a una cuenta global al contar todos los elementos, 2) el alumno cuenta a + b, comenzando de *a*, 3) el alumno suma a + b ó b + a con base en el que sea más fácil, cuenta *a* ó *b* (el que sea menor) y después *b* ó *a* (el más grande).

b) transformación substitucional: son reglas en las cuales la representación de un número es reemplazada por una o más operaciones que son percibidas como simples o fáciles, por ejemplo, cuando 10-1 se substituye por 9 en 150 x 9, resultando de la transformación de 150 x (10-1).

c) transformaciones compensatorias. Son reglas en las cuales se realizan dos transformaciones mutuamente compensatorias, por ejemplo, en la transformación de la representación: 820 * 25 a ¼ * 820 * 100.

Carry, Lewis y Bernard (1980; citado en Kieran, 1992) realizaron un estudio del proceso de solución de ecuaciones usado por estudiantes de preparatoria, y ellos encontraron que un error frecuente al simplificar fue, por ejemplo: $39x - 4$ es $35x$ o que $2yz - 2y$ es z. Ellos llamaron a este tipo de error "supresión" y fue el más común cuando los estudiantes hacían simplificaciones de expresiones en varios pasos en el proceso de solución de ecuaciones. Los autores sugieren que algunos estudiantes han sobregeneralizado ciertas operaciones matemáticamente válidas, que llevan a una sola operación de supresión, que después produce resultados incorrectos. Una extensión de estos hallazgos es que, debido a que muchos estudiantes continúan viendo las letras en el nivel de objetos concretos, ellos simplifican las expresiones algebraicas de acuerdo a las reglas de la aritmética y entonces suman las letras.

Por otra parte, Kieran (1992), encontró que los estudiantes de álgebra de 12 años tienen dificultades en juzgar expresiones equivalentes en relación a la adición y substracción. Dos de los errores que estos estudiantes cometen indican su confusión con respecto a reconocer las formas equivalentes de adición y substracción cuando las representaciones implican términos literales. Un error fue no reconocer que $x + 37 = 150$ tiene una solución diferente que $x = 37 + 150$; otro error fue no reconocer que, $x + 37 = 150$ tiene una solución diferente de $x + 37 - 10 = 150 + 10$.

1.4.3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES

Los cursos previos al álgebra son considerados como un estado de transición del medio ambiente aritmético hacia el álgebra formal. Las experiencias previas al álgebra deben facilitar el entendimiento significativo del estudiante y la lógica del sistema de representación simbólico, y posteriormente, la manipulación algebraica. Sin embargo, hay que recordar que aunque los conceptos que sirven de base para el estudio del álgebra deben ser introducido en los cursos de preparación antes de comenzar con el álgebra formal, las ideas y actividades pueden también ser usadas intermitentemente, al comienzo de un capítulo de álgebra formal o en la aritmética (Linchevski, 1995).

El propósito de los cursos previos al álgebra, según Kieran (1992), es permitir al alumno cambiar de una concepción procedural a una estructural, es decir, pasar de las operaciones que se realizan con números para producir números (por ejemplo, si tomamos la expresión "$3x + y$" y reemplazamos "x" e "y" por 4 y 5, respectivamente, el resultado es 17), a operaciones que se realizan no con números, sino con expresiones algebraicas (por ejemplo, si se toma la expresión algebraica $3x + y + 8x$, ésto puede ser simplificado para producir $11x + y$). Una vez que los alumnos han cambiado su concepción procedural por una estructural, los alumnos están listos para iniciar el estudio del álgebra.

Los lenguajes matemáticos, como el álgebra, tienen reglas de transformación que permite la manipulación de los objetos matemáticos a través de símbolos, sin que se aplique un razonamiento consciente a los conceptos representados. De esta manera, el álgebra es un conjunto de procedimientos enseñados para encontrar soluciones a ecuaciones, desigualdades y sistemas de ecuaciones a partir de ejecutar la misma operación en ambos lados de la ecuación (Bell, 1995 y Harvey, Waits y Demana, 1995).

Sin embargo, antes de llegar a este nivel de conceptualización en el uso de métodos formales, los alumnos han intentado diversos métodos o técnicas informales de solución de ecuaciones. Los métodos de solución de ecuaciones que han sido reportados por Gallardo (1987) y Kieran (1992), son los siguientes:

- Uso de datos numéricos, por ejemplo, resolver $5 + n = 8$ recordando la adición numérica de que 5 más 3 son 8, puede ser usado para conocer el dato numérico.
- Uso de técnicas de conteo, resolver la ecuación anterior por conteo implica contar 5, 6, 7, 8 y anotar que 3 números son nombrados después de 5 para llegar a 8 (Gallardo, 1987, llama a este método ensayo y error). Booth (1983, citado en Kieran, 1992), ha reportado el uso de ambos métodos entre los estudiantes de álgebra novatos.
- Encubrimiento, Bell, O'Brien y Shiu (1980, citados en Kieran, 1992) han visto que los estudiantes usan el método de encubrimiento para solucionar ecuaciones tales como $2x + 9 = 5x$ debido a que el total de $2x + 9$ es $5x$, el 9 es lo mismo que $3x$ porque $2x + 3x$ es igual a $5x$; por ello x es 3.
- Deshacer, el método de deshacer es análogo a la aproximación de trabajar al revés, usado en la solución de problemas aritméticos. Por ejemplo, para resolver $2x + 4 = 18$, los estudiantes toman el resultado numérico en el lado derecho y proceden en orden de derecha a izquierda, deshaciendo cada operación que el alumno reemplaza usando la operación inversa.
- Sustitución por ensayo y error, es un método de solución de ecuaciones en el que se prueban diferentes valores para la variable hasta llegar al resultado correcto, por ejemplo, en la ecuación $2x + 5 = 13$ se prueban diferentes valores tales como 2, 6, y entonces posiblemente 4 (Gallardo, 1987, llama a este método tanteo sistematizado).
- Transposición (cambiar de lado cambiando el signo), es el método en el que los alumnos intentan "ahorrarse" pasos en la solución de ecuaciones por el método de realizar la misma operación a ambos lados de la ecuación. Algunas investigaciones han mostrado que muchos estudiantes aprenden a manipular ecuaciones automáticamente, usando generalmente el procedimiento de cambiar de lado cambiando de signo, sin embargo, estos

estudiantes generalmente no prestan atención a la estructura fundamental de manipulación que ellos desempeñan.

- Ejecutar la misma operación en ambos lados. Aunque los maestros han considerado que el método de transposición es una versión corta de la ejecución de operaciones a ambos lados de la ecuación, los alumnos los perciben de forma diferente ya que la ejecución de la misma operación en ambos lados de la ecuación enfatiza la simetría de una ecuación y este énfasis está ausente en el procedimiento de transposición.

Las dos últimas aproximaciones son frecuentemente referidas como métodos formales (la transposición es considerada una abreviación de la realización de operaciones en ambos lados). Sin embargo, el uso de los primeros métodos de solución de ecuaciones se desarrolla a partir del estudio de la aritmética. Bell (1995), ha sugerido usar una secuencia parecida a la descrita anteriormente en la enseñanza de solución de ecuaciones, ya que él afirma que esta didáctica permite a los alumnos llegar por sí mismos a darse cuenta de la necesidad de usar representaciones simbólicas para solucionar las ecuaciones más complejas que no pueden ser resueltas mentalmente, sino solo a través de la manipulación. Aprender los métodos de solución para los diferentes tipos de ecuaciones es importante aquí. Durante la escuela primaria, y antes de cualquier acercamiento al álgebra, los niños empiezan a trabajar con problemas simples en los que se les pide determinar el valor de una incógnita específica (por ejemplo, 2 + __ = 5), usualmente el valor de la incógnita no es representado por un símbolo literal, sino por otros signos (por ejemplo, un cuadro, una línea, un espacio vacío). Cuando los niños inician el estudio del álgebra estos signos son sustituidos por un símbolo literal y los niños empiezan a trabajar con variables como incógnitas específicas (Ursini, 1994).

Una vez que se inicia el estudio formal del álgebra, los alumnos deben ser capaces de trabajar con la variable como incógnita específica cuando ésta aparece en ecuaciones de un paso, como en las ecuaciones de la forma $ax = b$, $a + x = b$ y $x + a = b$ (Kieran, 1984, citado en Ursini, 1994). Para resolver este tipo de ecuaciones, los alumnos inicialmente usan las operaciones inversas o substituyen distintos números al símbolo literal con el objeto de encontrar el valor que equilibre ambos lados de la ecuación. Estas observaciones muestran que frente a problemas verbales simples, o a ecuaciones algebraicas de un paso, los niños que inician el estudio del álgebra son capaces de conceptualizar una incógnita específica, y de determinar su valor, deshaciendo las operaciones, o empleando el "ensayo y error". Sin embargo, cuando una incógnita específica aparece en ecuaciones con una estructura más complicada (por ejemplo, $a + x = b + c$, $ax + b = cx = d$, $ax + b = cx + d$) los alumnos tienen serias dificultades para trabajar con ellas. Estas ecuaciones no pueden ser resueltas con un solo paso y, es muy frecuente, que los alumnos que inician el estudio del álgebra usen el ensayo y error asignando diferentes valores a las diferentes apariciones de la incógnita específica en una misma expresión. Para resolver este tipo de ecuaciones es necesario realizar primero ciertas operaciones numéricas, operar con la incógnita o ambas cosas. Ésto implica la capacidad para percibir la ecuación de manera global a fin de reordenar los términos, antes de intentar calcular los valores de la incógnita específica (Herscovics y Linchevski, 1991b; citados en Ursini, 1994). Operar con la incógnita específica representa dificultades para los que se inician en el estudio del álgebra y es entonces cuando se enfrentan a la necesidad de recurrir a los dos últimos métodos de solución de ecuaciones (que son los únicos considerados formales) para encontrar la solución.

Cuando se es hábil para realizar las mismas operaciones en ambos lados de la ecuación, se pueden obtener ecuaciones equivalentes que lleven a la solución de la ecuación. De esta manera, las acciones pueden ser representadas como la aplicación de una serie de reglas. El uso de una regla es una decisión de dos partes (condición - acción) que determina una acción dada que se ejecuta bajo una condición específica. Cuando una condición es verdadera, una acción específica es ejecutada, por ejemplo, cuando se tiene una ecuación inicial con operaciones entre paréntesis (condición), lo primero que hay que hacer es realizar la multiplicación para eliminarlos (acción). La aplicación de reglas puede ser unida al sistema de producción, así, la acción realizada por la aplicación de una regla activa la ejecución de otra aplicación de reglas. El resultado de aplicar reglas es la transformación de la información, la cual es una secuencia de pasos al solucionar un problema, siguiendo con el ejemplo anterior, una vez que se tiene una ecuación equivalente a la original, se continua aplicando reglas matemáticas para obtener ecuaciones equivalentes cada vez más simples, hasta que se obtiene el valor de la incógnita. En este caso, la producción de reglas representa el tipo de conocimientos específicos empleados al solucionar ecuaciones lineales (Medina-Díaz, 1993; Nesher, 1986 y Payne y Squibb, 1990).

Al realizar la aplicación de reglas es importante atender a los errores más comunes que realizan los estudiantes con la finalidad de poder diseñar métodos educativos para prevenirlos. Aquí es necesario hacer una pausa para distinguir entre errores y equivocaciones. Para Norman (1981 citado en Payne y Squibb, 1990), la distinción depende de la intención del autor pues, si se intenta ejecutar una acción apropiada pero se falla, se ha cometido una equivocación, sin embargo, si se formula la intención incorrectamente, entonces se ha cometido un error. La equivocación es vista como una consecuencia de la forma en que se realiza el procesamiento de la información humana y que es afectada por factores tales como la carga de trabajo de la memoria o la habilidad atencional, entre otros. Por ejemplo, al cambiar un término de un lado a otro del signo igual en una ecuación, frecuentemente se olvida cambiar el signo del término, esto constituye una equivocación. Los errores, por otro lado, son evidencias de una pobre competencia, por ejemplo, cuando en una ecuación se suman todos los enteros que aparecen del lado derecho o izquierdo de la ecuación, puesto que aquí no existe una comprensión real del objetivo de la solución de una ecuación y de los medios para lograrlo.

Esta distinción entre errores y equivocaciones ha sido reportada también por Matz (1982, citado en Payne y Squibb, 1990), con el nombre de errores conceptuales y errores de ejecución. Sin embargo, en la investigación realizada por Payne y Squibb (1990), se puso en duda la utilidad de esta clasificación al presentarse dificultades empíricas para identificar la intención de los alumnos al aplicar algunas reglas para resolver ecuaciones, por ejemplo, existieron malas reglas que originalmente fueron clasificadas como equivocaciones (errores de cambio de signo al cambiar un término de un lado a otro del signo igual), que por la alta frecuencia con que ocurrieron, podrían clasificarse también como errores conceptuales. Aunque se reconoce la dificultad de identificar la intención de los alumnos al usar las reglas algebraicas, no se considera que el único parámetro para determinar su clasificación sea la frecuencia con que ocurren.

Payne y Squibb (1990) y Gómez y Pavón (1996), han detectado los varios tipos de malas reglas al solucionar ecuaciones, de las cuales se presentan algunos ejemplos a continuación:

1) Equivocación de signo, por ejemplo:

$$5x = 8x - 6$$
$$5x + 8x = -6$$

2) Equivocaciones aritméticas, por ejemplo:

$$9\ (7) = 65$$

3) Adición de todos los enteros que aparecen en el lado izquierdo y derecho de la ecuación, por ejemplo:

$$3x + 2(x+5) = 45$$
$$10x = 45$$
$$x = 4.5$$

4) Error de captura, por ejemplo:

$$6x = 39 - 3\ (8x - 7)$$
$$6x = 36 - 24x + 21$$
$$30x = 57$$
$$x = 57 \div 30$$

5) Errores al multiplicar para eliminar paréntesis, por ejemplo:

a) una constante por un monomio, $4(3x) = 12$

b) una constante por un binomio, $3(2-x) = 6 - x$

c) un monomio por un binomio, $3x(x+2) = 3x - 6$

d) un binomio por un binomio, $(2x + 1)(5+x) = 10x + x$

6) Identificación del mínimo común múltiplo (mcm), por ejemplo:

$$\frac{3x}{4} - \frac{1x}{3} = 5 \qquad \text{mcm} = 12x$$

De las anteriores categorías que fueron propuestas por Payne y Squibb (1990), se reportó que la frecuencia de malas reglas está severamente sesgada, pues muchas ocurren muy raras veces y son pocas las que ocurren frecuentemente, además de que son muy inestables, ya que es muy raro el estudiante que usa una mala regla en más de la mitad de las ecuaciones propuestas. Contrario a estos resultados, Gómez y Pavón (1996), encontraron que existen patrones de respuestas en las soluciones de los estudiantes, así, para algunos alumnos persistía la equivocación de signo en la mayoría de las ecuaciones, para otros, el error de multiplicación para eliminar paréntesis. De esta manera, no es claro si la aplicación de las malas reglas se presenta solo por azar (infrecuentemente) o se debe a que los alumnos manifiestan problemas conceptuales (cuando se presentan frecuentemente en un mismo sujeto).

En este sentido, el trabajo de Matz (1982, citado en Gallardo, 1987) demuestra que ciertos errores frecuentes en la clase de álgebra elemental son el resultado de una adaptación sistemática del conocimiento anterior que se ha generalizado o extrapolado en forma inadecuada. Esta perspectiva permite clasificar las respuestas de los alumnos en las siguientes categorías:

- Errores generados por la elección incorrecta de una técnica de extrapolación.
- Errores que reflejan un conocimiento básico correcto pero deficiente.

- Errores que surgen durante la ejecución de un procedimiento.

La importancia de poner énfasis en los errores que los alumnos cometen al solucionar ecuaciones se debe a que ello permite generar categorías para tener un diagnóstico más preciso del tipo de errores más frecuentes que los alumnos cometen, con lo cual se contaría con una información necesaria para el diseño de estrategias remediales. En efecto, los errores no sólo muestran algo que no maneja o conoce el estudiante, también proporcionan el punto de partida para establecer posibles causas de dichos errores, pues nos ponen en contacto con la forma en que ellos conceptualizan ideas e inventan procedimientos en las partes que ellos tienen dificultades (Arcavi, 1995; Mancera, 1991; Peralta y Medina, 1997 y Pérez, et al., 1986). De esta manera, el estudio sistemático de los errores ayuda a comprender las dificultades que para los alumnos presentan diversos temas de matemáticas y permite diseñar procedimientos de enseñanza adecuados para disminuir estas dificultades de aprendizaje.

1.4.4 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS A TRAVÉS DE ECUACIONES

Muchos estudiantes creen que el propósito del álgebra es la manipulación de algunas piezas o símbolos. Para evitar esta desventaja en el trabajo con ecuaciones, es importante que los estudiantes experimenten la completa actividad de: comenzar con un problema, formar la ecuación, y entonces resolverla e interpretar el resultado (Bell, 1995).

En años recientes ha existido una amplio énfasis en la solución de problemas. Uno puede inferir entonces que existe una aceptación general de la idea de que el principal objetivo de la instrucción matemática debe ser que los estudiantes sean competentes para solucionar problemas. Sin embargo, la solución de problemas ha sido usada con múltiples significados que van desde "trabajar con ejercicios rutinarios" hasta "hacer matemáticas como un profesional". Schoenfeld (1992), caracteriza estos usos de los problemas en la enseñanza de las matemáticas de acuerdo con su finalidad, en: a) proporcionar un contexto, b) desarrollar habilidades y c) como un arte.

Solución de problemas como contexto

Aquí los problemas son empleados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares. Se han identificado 5 roles que los problemas juegan:

- Como una justificación para enseñar matemáticas. Históricamente, la solución de problemas ha sido incluida en el currículum matemático en parte por que los problemas proporcionan una justificación para enseñar matemáticas. Presumiblemente, al menos algunos problemas relacionados con experiencias en el mundo real fueron incluidos en el currículum para convencer a los estudiantes y a los maestros del valor de las matemáticas.
- Para proporcionar una motivación específica para los tópicos de la materia. Los problemas son frecuentemente usados para introducir tópicos con el implícito o explícito propósito de que una vez que se han aprendido las lecciones, se puede ser hábil para resolver problemas de este tipo.

- Como recreación. Los problemas recreacionales intentan ser una motivación. Ellos muestran que las matemáticas "pueden ser divertidas" y que son útiles para que los estudiantes puedan dominar dichas habilidades.
- Como un medio de desarrollar nuevas habilidades. Una cuidadosa secuencia de problemas puede introducir a los estudiantes a nuevas materias o temas y proporcionan un contexto de discusión de las técnicas de la materia.
- Como práctica. La gran mayoría de las tareas matemáticas escolares caen en esta categoría. A los estudiantes se les muestra una técnica y entonces se les dan problemas para practicar hasta que ellos han dominado la técnica.

Los anteriores 5 puntos muestran que la solución de problemas en matemáticas no es usualmente vista como un objetivo en sí mismo, sino más bien como facilitador de la realización de otros objetivos.

Solución de problemas como habilidad

Se parte del supuesto de que el aprendizaje de las habilidades de razonamiento en dominios como las matemáticas pueden resultar en una mejora general de las habilidades de razonamiento en otros dominios. Las técnicas de solución de problemas son enseñadas como temas o materias a través de problemas prácticos asignados para que las técnicas puedan ser dominadas. Después de recibir este tipo de instrucción en solución de problemas (frecuentemente como parte separada del currículum), los estudiantes poseen las habilidades de solución de problemas también como los hechos y procedimientos que ellos han estudiado. Ésto expande el cuerpo de conocimientos que presumiblemente comprende el conocimiento y comprensión matemática de los estudiantes.

Solución de problemas como arte

Esta visión contrasta fuertemente con las dos anteriores, puesto que sostiene que la solución de problemas del mundo real no es el corazón de las matemáticas, sino las matemáticas en sí mismas. Aunque lo ideal sería privilegiar esta última caracterización de los problemas en la enseñanza del álgebra, por desgracia, los problemas se siguen usando más como contexto (especialmente para prácticar las nuevas técnicas aprendidas).

En las clases de álgebra, el principal uso de problemas escritos tiene la finalidad de introducir el tema y de permitir que los alumnos practiquen tanto el planteamiento de ecuaciones (traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico), como la solución de las mismas, sin embargo, algunas investigaciones realizadas con base en el uso de problemas en la enseñanza del álgebra muestran que generar ecuaciones para representar las relaciones que típicamente se encuentran en los problemas escritos es el área de mayor dificultad para los estudiantes de álgebra en la escuela superior. Ésto se evidencia en las investigaciones que muestran la preferencia de los estudiantes por el uso de otros métodos alternativos al algebraico para solucionar problemas en los que no se aclara el método a utilizar. Por ejemplo, en el siguiente problema propuesto por Linchevski (1995), existen tres métodos de solución y generalmente los alumnos prefieren el método aritmético o procedural, antes que el algebraico.

La distancia entre el punto A y el punto B es de 520 Km. Un carro en el punto A sale hacia el punto B a las 7:00 a.m. a una velocidad de 80 km/h. Un segundo carro sale del punto B hacia el punto A, a las 9:00 a.m. viajando a 100 km/h. ¿Cuándo se encuentran los dos carros?.

Solución procedural (o prealgebraica)

Número de horas desde las 7:00	Distancia del primer carro en km.	Distancia del segundo carro	Distancia total
1	1*80 = 80	0	80 km
2	2*80 = 160	0	160 km
3	3*80 = 240	(3-2) * 100 = 100	340 km.
4	4*80=320	(4-2) * 100 = 200	520 km.
x	x*80	(x-2) * 100	80x + (x-2) * 100

Solución aritmética

- 2 * 80 = 160 km. En las primeras dos horas el primer carro viaja 160 km.
- 520 – 160 = 360 La distancia entre los dos carros, cuando el segundo carro sale es de 360 km.
- 100 + 80 = 180 km. Cuando los dos carros viajan, la combinación de la velocidad determina la distancia cubierta por los carros, por hora.
- 360 ÷ 180 = 2 hr. La separación de la distancia de 9:00 am., dividida por la combinación de la velocidad (distancia cubierta por hora) da el tiempo de viaje.
- 9+2 = 11 Los carros van a encontrase a las 11:00 am.

Solución Algebraica

El número de horas que el primer carro debe viajar es x

El número de horas para el segundo carro es de x-2

Entonces, $80x + 100\,(x-2) = 520$

$x = 4$

De igual forma, en el estudio de Galvin y Bell (1977, citado en Bell, 1995), se evidencia una fuerte tendencia de los estudiantes para escribir cálculos aritméticos requeridos para solucionar problemas algebraicos. Escribir una ecuación para representar el problema, y entonces trabajar con la ecuación en lugar de trabajar con el problema original, fue el mayor obstáculo. Quizá ésta sea la más importante diferencia entre la aritmética y el álgebra: "Parece que la representación de ecuaciones es una distinta forma de expresión que fue poco probable que se adoptara por los estudiantes espontáneamente a menos que ellos reconocieran que estas expresiones conducían a un posible algoritmo para encontrar la solución, y también era necesario que ellos hubieran tenido alguna práctica en la solución de tales ecuaciones, resultando en la solución del problema correspondiente".

La estrategia aritmética puede ser útil para ciertos problemas, sin embargo, existen otro tipo de problemas un poco más complejos, en los que los estudiantes no pueden usar la aritmética. Por ejemplo, en el siguiente problema propuesto por Kieran (1992):

La tienda de video Westmount ofrece 2 planes de renta. El primer plan cuesta $ 22.50 por año más $ 2.00 por video rentado. El segundo plan ofrece una membresia libre por un año pero cobra $3.25 por video rentado. ¿Para qué número de video rentas estos dos planes pueden costar exactamente lo mismo?.

Para resolver el problema anterior, es necesario (como comenta Lesh, Post y Behr, 1987, citados en Kieran, 1992), "primero descubrir y después calcular", a diferencia de los problemas que pueden ser resueltos fácilmente por métodos aritméticos. Filloy y Rojano

(1984, citado en Kieran, 1992) han enfatizado que éste tipo de problemas pueden ser modelados por ecuaciones del tipo ax +- b = cx +- d, pero el planteamiento correcto de estas relaciones en símbolos algebraicos es precisamente la principal dificultad para los alumnos.

Por ejemplo (Küchemann, 1981, citado en Bell, 1995), encontró que solamente el 10% de los estudiantes de 14 años respondieron correctamente al solicitarles que simbolizaran el siguiente problema:

Los lápices azules cuestan 5 centavos y los lápices rojos 6 centavos cada uno. Yo compré algunos lápices azules y otros rojos y todos me costaron 90 centavos. Si "a" es el número de lápices azules que compré y "r" es el número de lápices rojos que compré, ¿qué puedo escribir acerca de a y r?.

Algunos alumnos escribieron $5a + 6r = 90$, mientras que otros escribieron $a + r = 90$.

Otro ejemplo es el problema propuesto por Clement (1982, citado Philipp, 1992), en donde se pide a los estudiantes que escriban una ecuación usando *S* y *P* para representar la siguiente oración: "hay seis veces más estudiantes que profesores en la Universidad", usa *S* para el número de estudiantes y *P* para el número de profesores. Los resultados de esta investigación muestran 4 patrones de resolución usados por estudiantes para construir ecuaciones; las dos primeras llevan una respuesta incorrecta y las dos últimas a una respuesta correcta:

- Igualar el orden de las palabras (traslación directa): es un procedimiento sintáctico caracterizado porque los sujetos directamente trasladan las palabras clave de la oración del problema a símbolos algebraicos. La explicación de los estudiantes cuenta solamente con la igualación en el orden de los símbolos de la ecuación y el orden de las palabras en el problema, y no un fundamento lógico del problema.

- Comparación estática: se caracteriza porque los estudiantes colocan el coeficiente próximo con la letra asociada con un grupo grande. Por ejemplo, en el problema "6 estudiantes por cada profesor", la representación sería $6S = P$. Un estudiante que usa la comparación estática puede construir la misma ecuación que un estudiante que usa directamente la igualación del orden de las palabras, pero por diferentes razones, pues mientras que el que usa la aproximación de comparación estática entiende los fundamentos de la situación problema, el que usa la igualación del orden de palabras, no.

- El patrón operativo: implica que los estudiantes inventen una operación en la cual generen una equivalencia. No solamente requiere de entender el significado de las variables, sino también deben entender cuales ecuaciones son usadas en matemáticas.

- Substitución: en el cual los sujetos primero substituyen un número para probar la ecuación y entonces explican el significado de la ecuación en términos de los patrones operativos.

La respuesta común a este problema fue $6S = P$. La primera y más obvia explicación ofrecida para este error es que los estudiantes tienden a cambiar la forma verbal a seis estudiantes por cada profesor ($6S = P$). Sin embargo, posteriores investigaciones mostraron que el error podía estar relacionado con una asociación percibida en la oración $6S = P$, puesto que el número más grande S está siendo asociado con 6 (Bell, 1995).

Los intentos de Rosnick y Clemet (1980, citados en Kieran, 1992) por mejorar el planteamiento de la ecuación sin el contexto de la versión original del problema de los "estudiantes – profesor" los llevó a cambiar la demanda de la tarea, en la que se pedía elaborar un programa por computadora en lenguaje de programación BASIC que pudiera producir el número de estudiantes cuando se proporcionaba (vía el teclado) el número de profesores. Además se debía usar S para el número de estudiantes y P para el número de profesores. La investigación mostró que el medio ambiente de programación permitió a los estudiantes reorganizar sus razonamientos para representar el problema basado en un modelo de input – ouput, para calcular el valor de la variable S, se debe multiplicar el valor de P por 6.

Existen características, con respecto a la forma en que los problemas son presentados, que deben tomarse en cuenta para comprender las diferencias que los alumnos muestran al plantear una ecuación.

- Mayer (1982, citado en Weaver III y Kintsch, 1992) distingue diferentes tipos de proposiciones en los problemas escritos de álgebra. Las "proposiciones de asignación" asignan un valor numérico a alguna variable (por ejemplo, el avión vuela dos horas) y las "proposiciones de relación" establecen relaciones entre las variables del problema (por ejemplo, el avión vuela 350 kilómetros en dos horas).
- Kaput, 1986 y Schwartz, 1988 (citados en Weaver III y Kintsch, 1992), han diferenciado los conceptos de cantidad intensiva y extensiva. La cantidad intensiva involucra más de un componente en la que se establece una relación entre dos o más componentes, tal como millas por kilómetro. La cantidad extensiva, por otro lado, tienen solamente un componente, tal como distancia (pulgadas, millas) o tiempo (horas, segundos).
- También se ha encontrado que los estudiantes tienen dificultad para notar las similitudes estructurales entre los problemas de diferentes historias (Reed, 1987; citado en Kieran, 1992). Los efectos de la instrucción o la experiencia en solución de problemas similares les permite examinar y comparar dos problemas y aplicar procedimientos de solución que trabajaron en un problema a otro problema. Reed (1987, citado en Weaver III y Kintsch, 1992), ha clasificado los pares de problemas en 4 diferentes tipos, dependiendo de la similaridad de ambos procedimientos de solución y del contexto histórico. Reed llama a los problemas que tienen el mismo procedimiento de solución y el mismo contexto histórico *problemas equivalentes*. A los problemas que no tienen el mismo procedimiento de solución y tampoco el mismo contexto histórico se les llama *problemas no relacionados*. A los problemas que tienen el mismo contexto histórico se les llama *problemas similares* y son erróneamente usados como análogos, siendo que tienen diferente procedimiento de solución. Contrariamente, los problemas que tienen procedimientos de solución similares pero diferente contexto histórico se llaman *problemas isomorfos*.

- Philipp (1992), ha distinguido entre problemas no familiares, en los cuales no se incluye el sistema de representación natural (por ejemplo, 6 estudiantes por cada profesor), y los problemas familiares que si incluyen un sistema de representación natural (por ejemplo, 5 centavos por cada nickel). Este autor ha conjeturado que la dificultad de un problema está relacionado con el número de referentes significativos para las variables en cada problema.
- Low y Over (1993) afirman que el conocimiento del dominio específico de la estructura de un problema es necesario para determinar qué procedimiento computacional es apropiado para la solución de un problema algebraico escrito. Los autores resaltan la importancia de hacer una distinción entre la información suficiente e irrelevante para la solución de problemas algebraicos.

Como lo muestran las investigaciones anteriores, existen características de los propios problemas escritos que aunados con los problemas conceptuales de los alumnos pueden explicar las dificultades que estos últimos tienen en el planteamiento de ecuaciones. Como una forma de disminuir estas dificultades, a continuación se presentan varias sugerencias de algunos autores para mejorar la enseñanza del álgebra a través de la solución de problemas. Por ejemplo, Kieran (1992) sugiere un uso más amplio de la solución de problemas en la enseñanza del álgebra, a través de problemas como el siguiente:

Carla está planeando una semana de vacaciones en el Poconos con su prima Kate, Ella pidió $195 a su madre para comprar una máquina segadora de césped con la que puede ganar dinero para el viaje, cortando césped. Supóngase que ella decide cobrar $ 10 por cada césped.

a) Haz una tabla graficando sus ganancias para 0, 5, 10, 15, 20, 25, y 30 céspedes.
b) Ahora ¿cuántos céspedes debe segar Carla para juntar para el viaje?.
c) Escribe las operaciones necesarias para calcular el sistema de Carla después de que haya segado 35 céspedes.
d) Escribe una regla para explicar como calcular las ganancias de Carla como una función del número de céspedes segados. Ganancia = ______.

e) ¿Cuántos céspedes tiene Carla que segar para tener ganancias de $500 para su viaje al Poconos?.

Finalmente, Bell (1995) propone coordinar la geometría, el cálculo, las expresiones de leyes físicas y los problemas de cantidades de varios tipos, para hacer claro que el dominio del lenguaje algebraico es indispensable para el futuro trabajo matemático y que la inestabilidad o los errores en su uso son una incapacidad en este nivel igual que la torpeza o inestabilidad al manejar números en etapas más tempranas.

Por su parte, Schoenfeld (1992) hace las siguientes sugerencias a los maestros:

- Modelar la conducta de solución de problemas cuando sea posible, explorando y experimentando con los estudiantes.
- Crear una atmósfera en el salón de clases en la cual todos los estudiantes sientan confianza para probar sus ideas.
- Invitar a los estudiantes a explicar sus pensamientos en todos los estados de la solución de problemas.
- Permitir que los hechos, más que las estrategias sean necesarios para resolver un problema dado y que los problemas requieran de soluciones originales.
- Presentar situaciones problemas que estén relacionados con situaciones reales en su riqueza y complejidad, así que la experiencia que los estudiantes adquieran en el salón de clases pueda ser transferida.

1.4.5 SOLUCIÓN DE ECUACIONES VERSUS SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

¿Qué es lo que se debe privilegiar en la enseñanza del álgebra, la solución de ecuaciones o la solución de problemas?. El aprendizaje de las matemáticas requiere de por lo menos dos niveles de habilidad, según Campos (1990): la habilidad de manejo de algoritmos y la solución mediante la interpretación, a los cuales se refiere Greeno (1980, citado en Campos,

1990) como niveles mecánico y semántico, Anderson (1985, citado en Medina-Díaz, 1993) como conocimiento procedural y declarativo, o Sfard (1995) y Kieran (1992) como procedural y estructural. Es importante hacer esta distinción porque no siempre ambos niveles de habilidad se desarrollan en igual medida en el ámbito educativo y este hecho es una de las múltiples causas de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas.

La habilidad de manejo de algoritmos, mecánica o procedural es aquella en que el estudiante usa definiciones, reglas o procedimientos, siendo este proceso de carácter acumulativo. Una vez que se tiene el manejo adecuado de ciertos procedimientos, los ejercicios se convierten en "problemas sencillos" y el estudiante pasa a otro nivel de dificultad. Un ejemplo es cuando se han aprendido las multiplicaciones de manera automática, ésto permite pasar a resolver problemas de divisiones. Esta situación implica que un ejercicio de procedimiento se puede convertir en un proceso mecanizado necesario para otros ejercicios de procedimiento más dificiles.

Por su parte, la habilidad de interpretación, semántica o estructural, es aquella en la que el estudiante debe determinar cual de toda esa información disponible le permitirá encontrar la solución, por ejemplo, el planteamiento de problemas escritos que plantean situaciones prácticas.

De Guzmán (1986), afirma que estos dos niveles de habilidad son importantes y que constituyen dos componentes necesarios, ya que pretender fomentar la creatividad de tipo matemático sobre un vacío de información previa y rutinaria básica parece constituir un claro error, pero también constituye un defecto el insistir demasiado en procesos rutinarios y el hecho de acumular información excesiva antes de tratar de hacer algo interesante alrededor del tema.

En este punto es importante reflexionar acerca de que tanto énfasis se debe poner en que los alumnos desarrollen habilidades de manipulación de los objetos algebraicos, pues aunque se reconoce que algunas habilidades mecánicas son necesarias como una base para el entendimiento, al mismo tiempo se sabe que existen algunas habilidades que sólo pueden ser comprendidas cuando existe algún entendimiento previo. De hecho, se ha llegado a comparar el proceso de dominio del álgebra con el "ping – pong", en el cual uno va continuamente entre el hacer mecánico y el entendimiento. A pesar de que parece existir un consenso en la afirmación anterior, no es clara la relación entre la ejecución y el entendimiento conceptual, ya que los estudiantes pueden tener un alto nivel de habilidad, pero no siempre lo mantienen por un largo periodo de tiempo. Ésto sugiere que los maestros deben poner más atención en la percepción de los estudiantes de lo que está pasando, además de intentar alentar más las estrategias de pensamiento. ¿Los estudiantes tienen una visión global del proceso?, ¿pueden ellos detectar cuándo algo es incorrecto?, ¿pueden los maestros esforzarse por un entendimiento basado en habilidades, flexibilidad mental y habilidad para comunicarse? (Barbeau, 1995).

Obviamente es importante aprender conceptos matemáticos y procedimientos matemáticos prácticos, pero es también importante tener la oportunidad de resolver problemas al nivel de la capacidad de los alumnos. Frecuentemente, los estudiantes encuentran que el álgebra (u otros temas en el currículum matemático) no tiene sentido, pero después de todo, ¿cómo pueden disfrutar rutinariamente al solucionar un sistema simultáneo de ecuaciones lineales?. Como un resultado de tales experiencias limitadas, muchos estudiantes tienen prejuicios para aprender aspectos más interesantes de las matemáticas (Romberg, 1992).

De esta manera, Kathleen (1995), sugiere que los estudiantes necesitan aprender a usar el álgebra más que enfocarse al dominio del álgebra. Así, el álgebra debe comenzar en contexto, con situaciones en las que los alumnos usarán el álgebra y la simbolización no debe ser enfatizada en aislado desde el inicio de la enseñanza del álgebra. Si la manipulación de los símbolos es retardada hasta después, los estudiantes pueden concentrarse en habilidades importantes y en el entendimiento que involucra la formulación de situaciones y la interpretación de los resultados en el contexto real. Finalmente, concluye que los problemas del mundo real deben conducir a la manipulación y no al revés.

1.4.6 USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA

La problemática de la enseñanza de las matemáticas no se limita a tener ideas claras sobre lo que se debe pretender con la enseñanza de la matemática y sobre cuáles son los contenidos a ser enseñados, sino que una parte muy importante es encontrar los modos efectivos que hagan posible la consecución de tales objetivos. A este respecto los educadores tienen que recurrir constantemente a la siguiente pregunta ¿cuál es la mejor forma de acercamiento a un tema matemático determinado?. Sin embargo, se encuentran dificultades al responder esta pregunta, ya que la matemática es una actividad muy rica y variada, cada tema concreto de los que uno se proponga tratar admite diversas formas de aproximación, y es bueno preguntarse cuál de ellas se adapta más al tema, a la personalidad del profesor, a la edad y presupuesto de los alumnos, al nivel que se quiere llegar (De Guzmán, 1986).

La enseñanza de la matemática se ha caracterizado por usar métodos expositivos de transmisión de conocimientos, sin embargo, en la actualidad se ha puesto demasiado énfasis en el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas en general y del álgebra en particular (Gómez y Pavón, 1996). Una gran variedad de tecnología matemática está actualmente disponible, la lista incluye calculadoras científicas programables, calculadoras con graficadores, sistemas de computación con propósitos generales o específicos para las matemáticas (Harvey, Waits y Demana, 1995).

De manera general, se pueden distinguir dos usos de las computadoras en la educación matemática:

- Como herramienta que proporciona respuestas y cuyo uso pretende evitar al alumno el tedioso esfuerzo de hacer operaciones monótonas permitiéndole con ello centrar su atención en las definiciones, formulación e interpretación correcta de los resultados. Sin embargo, ello no elimina la necesidad de los estudiantes de dominar alguna habilidad técnica, para lo cual necesitan apreciar lo que la computadora puede hacer, monitorear su salida y planear eficientes formas de proceder. Considérese por ejemplo, las gráficas de expresiones algebraicas, en la que el estudiante requiere de un conocimiento general de funciones de modo que conozca lo que está buscando y como interpretar lo que está viendo (Barbeau, 1995). Esta propuesta, según Baggett y Ehrenfeucht (1992) se basa en dejar que el profesor explique, dejar que el alumno piense y dejar a la computadora el esfuerzo mecánico.

- Como herramienta educativa que permite a los alumnos aprender y ejercitar el planteamiento y resolución de algoritmos que lo conduzcan a obtener la respuesta al problema planteado. Un ejemplo de este uso de la computadora lo constituye la propuesta de Méndez (1994), en la que la hoja electrónica de cálculo (lotus) permite la introducción de la estrategia algebraica a partir de estrategias más primitivas como el ensayo y error o el tanteo sistematizado, ya que inicia con la representación de las relaciones del problema en diferentes celdas y puede observar los cambios al asignar un valor a la variable. Conforme los alumnos representan problemas más complejos se dan cuenta de que modelarlos en la hoja electrónica no es suficiente, por lo que recurren al álgebra que ahora es más sencilla, aunque abordados aritméticamente serían muy complejos. Otro ejemplo, lo constituye el software realizado por Gómez y Pavón (1996) que tiene como propósito que los alumnos aprendan y ejerciten la solución de ecuaciones lineales. Un ejemplo final, es la propuesta de Rojano y Sutherland (1995) de usar la computadora para facilitar el aprendizaje del álgebra a través del planteamiento de fórmulas en las que se relacionan los elementos de problemas escritos.

Las calculadoras y las computadoras, son las herramientas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas más comúnmente mencionadas y se ha propuesto que cada estudiante debería tener acceso constante a este tipo de herramientas (Harvey, Waits y Demana, 1995), ya que su uso puede proporcionar ejemplos más realista en conferencias, laboratorios y salones de clase. Además, las computadoras pueden ser una herramienta que rompa con las barreras entre la disciplina matemática, ya que ella permite una fácil combinación de, por ejemplo, las ideas algebraicas y geométricas (Barbeau, 1995).

El uso de las calculadoras y computadoras puede permitir también, la transformación entre las siguientes representaciones matemáticas: simbólica (algebraica), gráfica y numérica. Cada una de estas representaciones puede ser transformada en alguna de las otras formas de representación fácilmente. Por ejemplo, si se comienza a través de una representación simbólica, es posible el desarrollo de una gráfica o una representación numérica. Las calculadoras gráficas pueden ayudarnos a definir tres de estas transformaciones: simbólica a gráfica, simbólica a numérica, y gráfica a numérica. Además, las calculadoras eliminan muchas y posiblemente todas, las tediosas operaciones previas asociadas con el desarrollo de las representaciones. De este modo, las calculadoras gráficas pueden hacer más fácil el desarrollo de representaciones gráficas múltiples de una función o relación (Harvey, Waits y Demana, 1995).

Por desgracia, no todos los estudiantes tienen actualmente acceso a la emergente tecnología, de modo que la disponibilidad de las calculadoras y computadoras está realmente basada en los recursos financieros tanto de los alumnos como de las comunidades donde ellos viven, así que su incorporación en el currículum podría solamente intensificar las diferencias entre los que "tienen y los que no tienen" y evidenciar más la distancia del tercer mundo, del resto del mundo (Kathleen, 1995).

Es importante notar, sin embargo, que percibir la falta de accesibilidad a la tecnología por computadora puede estar indisolublemente relacionada con la naturaleza del actual currículum matemático, ya que muchos de los contenidos del currículum actual están solamente enfocados en el uso de calculadoras gráficas para apoyar el contenido tradicional más que tomar las ventajas del poder de la tecnología. Por ello, no es sorprendente notar que el uso de las computadoras está reservado a los físicos y a otras áreas de conocimiento, puesto que las clases de matemáticas hacen solamente un uso ocasional y suplementario de esta tecnología (Kathleen, 1995).

1.4.6.1 IMPLICACIONES

Con la aceptación de la tecnología de las computadoras en los salones de clases de matemáticas de las escuelas, los educadores de matemáticas por todas partes del mundo están cambiando la suposición fundamental acerca de la enseñanza, aprendizaje, y el contenido del álgebra en la escuela (Kathleen, 1995). Algunas consecuencias en el currículum de álgebra que pueden resultar de la introducción de la tecnología en la escuela son los siguientes, según Harvey, Waits y Demana (1995):

- Actualmente, existen las siguientes secuencia de temas en los niveles de secundaria y preparatoria: preálgebra, álgebra, trigonometría, precálculo, y cálculo. Se cree que estas distinciones van a desaparecer o que al menos, las divisiones entre ellas se van a debilitar con el uso de la nueva tecnología.
- Con el uso de la tecnología gráfica, el currículum del álgebra puede ser ampliado al menos en tres formas: a) pueden estudiarse las propiedades globales y locales de las funciones y relaciones, b) las funciones pueden ser estudiadas más completamente y c) se pueden estudiar otro tipo de funciones.
- La habilidad para usar las representaciones múltiples puede permitir que muchos problemas sean solucionados de diferente forma. Ésto significa que los estudiantes probablemente solucionen problemas en muchas formas diferentes, si se les da la oportunidad de construir sus propios procedimientos y técnicas. Como resultado, el rol de los maestros puede cambiar en el salón de clases de álgebra, ya que los procedimientos y técnicas desarrolladas por los estudiantes pueden ser menos específicos y algoritmicos que lo que son enseñados en la actualidad, y el nuevo currículum y los textos deben estructurarse de modo que alienten a los estudiantes a solucionar, a desarrollar y verificar su propio conocimiento matemático. Con el uso de las calculadoras gráficas, los estudiantes tienen varias formas de solucionar un problema, pueden verificar la validez de sus respuestas y pueden descubrir nuevos conocimientos.

- Se considera que usar la tecnología en el álgebra puede alentar y posiblemente necesitar que los maestros cambien su función en el salón de clase y que se conviertan en una guía para los alumnos. Cuando los estudiantes se han apropiado de las tecnologías y han aprendido a usarlas como herramientas matemáticas, ellos participan más completamente en la instrucción de lo que lo han hecho en el pasado. El nuevo rol del maestro es el de supervisor; el maestro contesta preguntas que los estudiantes le hagan, ayuda a los estudiantes a juzgar los resultados de sus investigaciones, relaciona los problemas que los estudiantes han resuelto con sus conocimientos matemáticos o ayuda a los estudiantes a consolidar y generalizar sus resultados.

1.4.6.2 PERSPECTIVAS

Debido a las implicaciones anteriores, existen dudas de que la tecnología pueda asumir el rol protagonista en el futuro del álgebra en la escuela por varias razones. Primero, la visión tecnológica tiene un potencial de cambio del contenido del currículum. Tópicos tradicionalmente vistos como avanzados, pueden ser abordados más pronto, por ejemplo, las funciones pueden ser fácilmente tratadas como objetos o entidades para ser manipuladas. Segundo, la trayectoria del aprendizaje de los estudiantes puede ser muy diferente. La forma en que los estudiantes aprenden puede cambiar drásticamente cuando ellos hacen uso de la tecnología. Finalmente, no solamente el contenido y el aprendizaje pueden ser diferentes, sino también la naturaleza de las matemáticas en sí mismas como una disciplina que está cambiando (Arcavi, 1995).

Sin embargo, la breve pero extensa experiencia de la tecnología en la educación no puede ser ignorada. El campo del software educativo en general y particularmente en matemáticas, es muy joven. No mucho más que una década ha pasado desde que las microcomputadoras llegaron a estar disponibles en las escuelas y en los hogares. Desde aquellos tiempos, la tecnología ha cambiado sorprendentemente rápido. Los desarrollos que toman lugar en la tecnología pueden verse anticuados rápidamente después de que ellos fueron introducidos (Arcavi, 1995).

Al principio, los guías de la comunidad educativa se dejaron llevar por un eufórico entusiasmo y creyeron que era la panacea universal de los problemas de la enseñanza y el aprendizaje. Se ha visto que la real revolución fue la forma en que las computadoras en la educación llegaron a ser un campo de derecho propio. Piezas de software inundaron el mercado, muchos de ellos de poco valor educativo. Recientemente, ha surgió una aproximación más realista del potencial de las computadoras en la educación, sin embargo, existe un largo camino antes de que podamos tener un sólido manejo de cómo la tecnología puede afectar el aprendizaje del álgebra de forma positiva (Arcavi, 1995).

Existen también otros cuestionamientos importantes: ¿Puede una generación de maestros quienes crecieron sin tecnología, ser hábiles para guiar y ayudar a los estudiantes? ¿está el currículum existente diseñado para que puedan incluirse estas herramientas?, ¿es la mera disponibilidad de la herramienta una buena razón para emocionarse acerca de ella?, ¿realmente creemos que la expresión inicial de entusiasmo de los estudiantes necesariamente refleje una diferente y profunda experiencia de aprendizaje? (Arcavi, 1995).

Es imperativo acompañar la introducción de la tecnología con una fuerte racionalización y con una cuidadosa observación y análisis detallado de la conducta de los estudiantes. Si no se progresa en el entendimiento de lo que exactamente la tecnología hace y como lo hace, se puede fallar aún si cada estudiante pronto posee una calculadora gráfica o una computadora (Arcavi, 1995).

2. ESTRATEGIA DE INVESTIGACIÓN

2.1 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza - aprendizaje del álgebra, han originado que los investigadores intenten dar una explicación y propongan alternativas de solución. En este sentido, se han realizado investigaciones que abarcan factores como los que han sido reportados por Mancera (1990): Métodos de enseñanza (Arcavi, 1995; Baggett y Ehrenfeucht, 1992; Gómez y Pavón, 1996 y Kathleen 1995), factores relacionados con la presentación de la información y procesos mentales en la formación de conceptos o habilidades (Birenbaum, Kelly y Tatsuoka, 1993; Ernest, 1987; Hiebert y Carpenter, 1992 y Renney, 1987), solución de problemas (Parra, 1990 y Schoenfeld, 1992), diferencias de género y factores de personalidad (Felson, Trudeau, 1991; Low y Over, 1993; Mills, Ablard y Stumpf, 1993 y Odom y Shaugnessy, 1989), diseño e impartición del currículum (Kieran, 1992), papel de las matemáticas en la formación del individuo, formación de maestros, evaluación del currículum y del aprendizaje (Wedd, 1992), uso de materiales didácticos (Arcavi, 1995; Barbeau, 1995; Harvey, Waits y Demana, 1995 y Katheleen, 1995), impacto de la evolución de la matemática (Kieran, 1992 y Sfard, 1995), por mencionar algunos.

Sin embargo, al realizar un análisis de la literatura existente al respecto, se encuentra que la mayoría de las investigaciones se realizan dentro de un marco teórico cognoscitivo, que generalmente cuentan con supuestos teóricos no explícitos que dificultan el análisis de resultados a los lectores, que los objetivos que se pretenden cubrir con la investigación son muy específicos y de difícil inserción en un marco general de explicación del fenómeno. Esta situación dentro de la investigación matemática ha originado que no exista hasta el momento consenso en la forma en que debe llevarse a cabo la educación matemática. Por ello, es importante hacer un análisis del proceso de enseñanza - aprendizaje del álgebra desde un punto de vista multicausal que permita diseñar una propuesta didáctica encaminada a prevenir y remediar los problemas que presentan los alumnos, en lo que se refiere a la comprensión, solución y aplicación de conceptos algebraicos a situaciones reales. Un primer paso para ello, como menciona Mancera (1990), es reconocer la complejidad inherente a los problemas que plantea la enseñanza de la matemática, la necesidad del trabajo interdisciplinario, la importancia de una formación más amplia de la que se conseguiría en una escuela de Matemáticas, Pedagogía, Psicología o de profesores de matemáticas que intentan encontrar de manera independiente la forma adecuada de llevar a cabo la educación matemática.

A partir de una perspectiva de explicación multicausal, se plantean las siguientes preguntas de investigación:

1) Con respecto al aprendizaje de los alumnos:

- ¿Cuentan con los conocimientos necesarios para comprender el tema de ecuaciones lineales (por ejemplo, prioridad en la realización de operaciones aritméticas)?
- ¿Respetan las reglas matemáticas de resolución de ecuaciones (por ejemplo, propiedades de la igualdad, leyes de los signos, etcétera)?
- ¿Conocen la utilidad de lo que están aprendiendo?
- ¿Pueden usar sus conocimientos de álgebra para solucionar problemas en su vida cotidiana?
- ¿Cuál es el papel de los alumnos en el proceso de enseñanza – aprendizaje?

2) En cuanto a los profesores, interesa conocer:

- ¿Cuál es el papel de los maestros en el proceso de enseñanza – aprendizaje?
- ¿Cómo llevan a cabo la enseñanza del álgebra?

3) En cuanto al currículum del álgebra, se plantean las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los contenidos temáticos del programa oficial para el tema de ecuaciones lineales?

- ¿Qué temas o secuencia de temas se lleva a cabo realmente en el salón de clases?

4) En cuanto a la metodología de enseñanza, es necesario conocer:

- ¿Qué método o técnicas de enseñanza son usados por el maestro en el salón de clase y a qué supuestos epistemológicos obedecen?

5) En cuanto a la evaluación del aprendizaje, se plantea la pregunta:

- ¿De que manera se evalúa el aprendizaje de los alumnos en el tema de ecuaciones lineales?

6) Finalmente, las preguntas anteriores se integrarán para resolver las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la eficiencia de los cursos de álgebra en el aprendizaje de los alumnos?
- ¿Cuáles son los supuestos epistemológicos que prevalecen en la enseñanza - aprendizaje del álgebra en el salón de clases?

Para responder a las preguntas anteriores, el objetivo del presente trabajo fue: Analizar la forma en que se lleva a cabo el proceso de enseñanza - aprendizaje del álgebra (específicamente en el tema de ecuaciones lineales) en los salones de clase para detectar deficiencias que sirvan de base para realizar propuestas de mejoramiento del aprendizaje de dicho tema.

Para cumplir el anterior objetivo, se usó un diseño descriptivo, cuya metodología básica fue la observación y la aplicación de cuestionarios, y solo al evaluar la solución de ecuaciones se realizaron evaluaciones antes y después de la clase de cada profesor, por lo cual, los resultados fueron analizados tanto a nivel cuantitativo como cualitativo.

A continuación se describirá detalladamente la metodología usada en esta investigación.

2.2 MÉTODO

2.2.1 SUJETOS.

En esta investigación participaron 5 grupos de primer semestre del turno vespertino del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), plantel Naucalpan. Todos los grupos fueron incluidos en esta investigación debido a la participación voluntaria de los profesores y alumnos del grupo. En total se incluyeron 232 alumnos distribuidos de la siguiente manera: 39 del grupo 1, 50 del grupo 2, 44 del grupo 3, 50 del grupo 4 y 49 del grupo 5.

2.2.2 MATERIALES E INSTRUMENTOS

- Instrumento de evaluación de los prerrequisitos. Para la elaboración de este cuestionario se realizó una investigación bibliográfica para conocer cuáles eran los temas que se consideraban antecedentes del tema de álgebra (Baldor, 1964; Barnett, 1987; Hernández, García, Bautista y Torres, 1996; Jiménez, 1995; Pérez, Cruz y Mercado, 1986; Rees y Sparks, 1992; Sepúlveda y García, 1995). Con base en ello, se realizó una primera versión del cuestionario que se dió a revisar a varios profesores de matemáticas de nivel secundaria y bachillerato, para posteriormente realizar un estudio piloto con un grupo de alumnos de secundaria. El cuestionario fue corregido a partir de las observaciones hechas por los maestros y los resultados del estudio piloto en secundaria. La versión final del cuestionario se evaluó a partir de otro estudio piloto con alumnos de CCH (que no participaron en la investigación) y quedó conformada a partir de los siguientes temas: números primos, múltiplos y divisores, leyes de los signos, conocimiento del uso e identificación de las propiedades de los números reales, prioridad en las operaciones, operaciones con números reales (fracciones y decimales), conversión de fracciones a decimales y viceversa, raíz cuadrada, identificación de números naturales, enteros, racionales e irracionales, identificación de las partes de una ecuación, reducción de términos semejantes, planteamiento de ecuaciones a partir de un problema y resolución de 10 ecuaciones organizadas de menor a mayor complejidad (ver anexo 1).

- Instrumento de evaluación de solución de ecuaciones. Este instrumento consistió en la presentación de 10 ecuaciones ordenadas de menor a mayor complejidad y que fueron equivalentes a las presentadas en la parte final del instrumento de evaluación de prerrequisitos (ver anexo 2).

- Instrumento de evaluación de solución de un problema. Este instrumento consistió en la presentación de un problema sencillo de álgebra (seleccionado de la propuesta de Jiménez, 1995), que fue uno de los tres problemas presentados en el instrumento de evaluación de prerrequisitos. La diferencia entre esta evaluación y la de prerrequisitos se centró en las instrucciones, pues en los prerrequisitos únicamente se pedía plantear la ecuación y en éste instrumento se solicitaba también la solución del problema y la descripción del procedimiento que cada alumno siguió para resolver el problema (ver anexo 3).

- Cuestionario de utilidad de las ecuaciones. Este cuestionario consistió en 5 preguntas en las que los alumnos expresan la utilidad que para ellos tiene aprender y solucionar ecuaciones lineales fuera de la escuela (ver anexo 4).

- Exámenes. El profesor de cada grupo elaboró una evaluación sobre el tema de ecuaciones lineales que sirvió para asignar la calificación de este tema a cada uno de sus alumnos. Estos exámenes fueron diferentes entre sí y en ellos se reflejan los contenidos y secuencia que cada profesor enfatizó en su clase (anexo 5).

- Escala de autoevaluación de las características del profesor y la didáctica del curso. Este instrumento se basó en la investigación de (López y Nava, 1992) y consistió en una serie de afirmaciones con respecto a la planeación del curso, el control del proceso de aprendizaje, el desarrollo del curso y la relación maestro - estudiante. El profesor debía calificar con una escala de 5 puntos la frecuencia con que cumplía la característica que se le presentaba en cada oración (ver anexo 6).

- Guía de entrevista para los profesores. Contiene 9 preguntas que sirvieron de guía para entrevistar a los profesores de los grupos que participaron en el estudio con respecto a su experiencia, formación, creencias sobre lo que es la matemática y como debería llevarse a cabo el proceso de enseñanza - aprendizaje en el salón de clase, además de su función en dicho proceso (ver anexo 7).

- Lineamientos a considerar en la dinámica de la clase. Este instrumento contiene 8 preguntas que hacen referencia a la forma de calificación, la habilidad principal desarrollada en la clase, el número de clases destinadas al tema de ecuaciones lineales, la función del profesor y la de los alumnos, los contenidos del curso, entre otros, que el investigador tomó en cuenta en sus registros de cada clase de ecuaciones lineales en los 5 grupos.

- Programa oficial de la unidad 2: Ecuaciones Lineales. Consistió en la versión actualizada de los programas de matemáticas para el CCH (Programa de estudio para las asignaturas: Matemáticas I y II, 1996).

2.2.3 ESCENARIOS

Todas las aplicaciones de los instrumentos y los registros de las clases del profesor se realizaron en el salón asignado a cada uno de los grupos participantes. Las entrevistas a los profesores se realizaron ya sea en el salón de clases o en el cubículo de los profesores dentro del plantel Naucalpan.

2.2.4 PROCEDIMIENTO

Una vez que se contó con el permiso de las autoridades del CCH, plantel Naucalpan se solicitó la participación de los profesores de matemáticas de primer semestre para realizar la investigación con sus grupos, en el tema de ecuaciones lineales. Los grupos que se incluyeron en la investigación variaban en el día y horario de la clase de matemáticas (de dos de la tarde a 8 de la noche), pero todos cumplían con 5 horas semanales.

Debido a que los 5 grupos tuvieron diferentes maestros y cada uno tenía un particular ritmo de trabajo, las aplicaciones de los instrumentos no se realizaron de manera simultánea, sino más bien, se adecuaron al calendario de cada grupo, sin embargo, la secuencia de evaluaciones a los alumnos fue la misma para todos los grupos. Aunque la muestra total de alumnos fue de 232, no se cuenta con las evaluaciones de todos ellos debido a diversas causas: inasistencia a clases el día en que se aplicó el instrumento, falta de disponibilidad a contestar puesto que el profesor no asignó puntos extras a su calificación por realizar esta actividad y en algunos casos, los alumnos no siguieron las instrucciones por lo que se eliminaron del análisis. A continuación se describe el procedimiento de aplicación de cada uno de los instrumentos.

- Instrumento de evaluación de los prerrequisitos. La actividad del primer día con cada grupo consistió en explicar a los alumnos el objetivo de la investigación y solicitar su colaboración en la misma. Posteriormente se les repartió el instrumento de evaluación de los prerrequisitos y se les pidió que resolvieran de manera individual la mayor cantidad de ejercicios posible, aclarándoles que dicha evaluación no sería tomada en cuenta para la evaluación de la materia y que no tendrían límite de tiempo para contestar. Esta actividad se realizó en una clase de dos horas en todos los grupos. La muestra de alumnos que contestaron este instrumento fue de 221 de los 5 grupos.

- Instrumento de evaluación de solución de ecuaciones. Este instrumento se aplicó después de que el profesor concluía el tema de solución de ecuaciones y antes de pasar al tema de solución de problemas, sin embargo, como la secuencia de temas que cada profesor seguía no era la misma, este instrumento en ocasiones se aplicó a mitad del curso de ecuaciones lineales. La aplicación de este instrumento se realizó en el salón de clases y las instrucciones para los alumnos hacían énfasis en que solucionaran cada ecuación y describieran la secuencia de pasos que realizaron para solucionarla, con la finalidad de dar un seguimiento a los errores que ellos cometían. La muestra que contestó este instrumento fue de 140 alumnos de los 5 grupos.

- Instrumento de evaluación de solución de problemas. Este instrumento se aplicó después de que el profesor concluía el tema de solución de problemas, sin embargo, como la secuencia de temas en cada grupo fue diferente, este instrumento en ocasiones se aplicó al final del curso de ecuaciones lineales. Las condiciones e instrucciones de aplicación de este instrumento fueron similares a las del instrumento de evaluación de solución de ecuaciones. La muestra de alumnos que resolvió este instrumento fue de 98 de los 5 grupos.

- Cuestionario de utilidad de las ecuaciones. Este cuestionario se distribuyó al final del tema de ecuaciones lineales a algunos alumnos (40 en total) que formaban parte de 4 de los grupos incluidos en la investigación (13 alumnos del grupo 1, 8 del grupo 2, 8 del grupo 3 y 11 del grupo 5).

- Exámenes. El examen que cada profesor elaboró para evaluar a sus alumnos se aplicó al final del tema de ecuaciones y el profesor estableció las instrucciones, determinó el tiempo de aplicación y calificó dichos exámenes. La muestra de alumnos de los cuales se obtuvo su examen final de la unidad 2, fue de 134 de 4 grupos (no se contó con los exámenes del grupo 3).

Cabe mencionar que durante todo el curso de ecuaciones lineales en cada grupo se registró el contenido y secuencia de temas, con la finalidad de conocer la metodología del profesor, los contenidos, secuencia, y profundidad de cada clase y la actitud de los alumnos. Estos registros sirvieron para determinar los lineamientos a considerar en la dinámica de la clase.

Con respecto a las entrevistas y las autoevaluaciones de los profesores, estas se realizaron al final del curso de ecuaciones lineales. El procedimiento para la aplicación de dichas evaluaciones, que fueron realizadas en un mismo día, se presenta a continuación:

- Escala de autoevaluación de las características del profesor y la didáctica del curso. Se pidió a cada profesor que evaluara una serie de características sobre la didáctica de su clase con base en una escala de 5 puntos, donde 1 significaba siempre y 5 nunca. Al finalizar, se realizó la entrevista.

- Entrevista. Se realizó una entrevista con cada profesor, en la que se indagó sobre sus creencias acerca del proceso de enseñanza aprendizaje de la materia de matemáticas. Finalmente, se agradeció la participación de los profesores en la investigación y las facilidades prestadas para la realización de la misma.

Con respecto al análisis de los contenidos del programa oficial para el tema de ecuaciones lineales, éste fue un trabajo independiente de las clases de los profesores, sin embargo, sirvió para ser comparado con la secuencia que los profesores realizan en el salón de clases. Las semejanzas y diferencias entre el programa oficial y los contenidos y secuencia que se llevaron a cabo en el salón de clases son presentadas en la siguiente sección, así como los resultados obtenidos en la aplicación de los anteriores instrumentos y entrevistas.

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

La descripción de resultados se realiza a partir de cada uno de los instrumentos aplicados tanto a profesores como a los alumnos, del análisis realizado al programa oficial del álgebra del CCH y de las observaciones hechas en las clases de álgebra. Debido a que la muestra que se usó para realizar esta investigación no fue seleccionada al azar, los resultados a continuación presentados no pueden ser generalizados, sin embargo, dado que diversos autores reportan algunos resultados similares a los aquí encontrados, posiblemente muchos de los datos obtenidos pueden ser válidos para otras poblaciones.

3.1 INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN DE PRERREQUISITOS

Para el análisis del instrumento de evaluación de prerrequisitos, se usaron las categorías presentadas en el anexo 8. El análisis de los resultados de este instrumento se presenta por secciones, de acuerdo a los temas que fueron evaluados en él para identificar el nivel de conocimiento de los alumnos acerca de temas básicos de matemáticas que están relacionados con el dominio del álgebra y de los temas de álgebra que supuestamente son vistos en secundaria y que representan un antecedente a los temas abordados en CCH en esta materia. Este último punto es importante puesto que el currículum de CCH parte del supuesto que los alumnos de primer ingreso deben tener amplios conocimientos en estos temas. Finalmente, es importante aclarar que el total de la muestra de alumnos a los que se evaluaron con este instrumento fue de 221 alumnos de los 5 grupos (37 del grupo 1, 42 del grupo 2, 44 del grupo 3, 50 del grupo 4 y 48 del grupo 5).

NÚMEROS PRIMOS

Ejercicio	Respuesta Correcta	Error Conceptual	No Contestó
6	42.5	55.7	1.8
15	46.2	48.8	5
20	60.2	37.1	2.7

Tabla 1.- Porcentajes de respuestas en las diferentes categorías que se presentaron al resolver los ejercicios de identificación de números primos.

El conocimiento e identificación de los números primos es importante en álgebra debido a que al realizar operaciones con fracciones, muchas veces es necesario encontrar el mínimo común múltiplo. Como se puede observar en la tabla 1, la mayoría de los alumnos que participaron en esta investigación no pueden identificar los números primos que al ser multiplicados dan los números 6, 15 y 20. Las principales confusiones se presentaron en el concepto de "números primos", pues algunos alumnos parecen no saber que los números primos por definición son números que solo pueden ser divididos por la unidad y por ellos mismos para producir un resultado entero, lo anterior es percibido al analizar respuestas en donde se menciona al 0 y al 10 como números primos. La dificultad presentada por los alumnos en la identificación de los números primos tiene serias repercusiones en su habilidad para realizar operaciones con fracciones y por ende, en su habilidad para solucionar ecuaciones.

MÚLTIPLOS Y DIVISORES

Múltiplos	Respuesta Correcta	Error Conceptual	Aritmético	No Contestó
6	36.2	60.2		3.6
12	30.7	60.2	5.0	4.1
20	36.2	57.5	0.9	5.4
Divisores	**Respuesta Correcta**	**Error Conceptual**	**Aritmético**	**No Contestó**
6	76.9	18.5	0.5	4.1
12	76.9	17.6		5.5
20	74.7	18.1	0.5	6.7

Tabla 2.- Porcentajes de respuestas en las diferentes categorías que se presentaron al resolver los ejercicios que evalúan la identificación de múltiplos y divisores.

La utilización de múltiplos y divisores es un requisito indispensable para realizar operaciones básicas con números racionales, sin embargo, como se puede observar en la tabla 2, los alumnos pueden identificar con mayor facilidad los divisores que los múltiplos, evidenciando que no son capaces de realizar operaciones inversas. Con respecto a los tipos de errores cometidos por los alumnos, se encontró que la principal dificultad es de tipo conceptual, mientras que las equivocaciones aritméticas son mínimas. De igual manera, la cantidad de alumnos que no contestaron estos ejercicios es muy reducida.

OPERACIONES CON SIGNO

Ejercicio	Respuesta Correcta	Signo	Aritmética	No Contestó
2+(-4)	55.7	5.0	38.8	0.5
-2+5	74.7	12.2	12.2	0.9
-7-18	59.7	25.3	14.5	0.5
8+2	98.6	0.9	0.5	
2(-4)	83.3	10.0	6.7	
-2(5)	81.4	14.1	4.5	
-7(-18)	72.0	9.0	16.7	2.3
8(2)	90.0	0.5	9.0	0.5
4 ÷-2	67.4	27.1	3.7	1.8
-6 ÷3	83.2	5.0	10	1.8
-4 ÷-2	76.9	17.6	3.7	1.8
6 ÷3	88.2	1.8	9.5	0.5

Tabla 3.- Porcentajes de respuestas en las diferentes categorías que se presentaron al resolver los ejercicios de operaciones básicas con números enteros (usando signos).

La tabla 3 muestra la distribución de respuestas de los alumnos que participaron en la presente investigación en la solución de operaciones con signos. El dominio de la habilidad para resolver estas operaciones es fundamental en el álgebra, puesto que en la solución de ecuaciones es muy común encontrar este tipo de operaciones. Como puede observarse en la tabla 3, es más fácil para los alumnos resolver operaciones con números positivos, seguido de operaciones con un solo número negativo y finalmente operaciones con ambos números negativos. Las principales dificultades, se encuentran en el dominio de las leyes de los signos y en el uso de los paréntesis, puesto que principalmente en el primer ejercicio, los alumnos confunden el uso del paréntesis, suponiendo que está indicando una multiplicación, cuando en realidad, es una suma lo que se pide (similares resultados han sido reportados por Medina y Peralta 1997 y Peralta y Medina 1997). También se puede notar que los errores aritméticos fueron en algunos casos el tipo de respuesta incorrecta más frecuente, ésto llama la atención principalmente si se considera que la mayoría de los números usados en estos ejercicios son de una sola cifra, lo que indica que muchas veces los alumnos no son hábiles para realizar las operaciones básicas ni siquiera con números pequeños.

APLICACIÓN E IDENTIFICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

APLICACIÓN	Respuesta Correcta	Error Conceptual	Gramatical	Atención	No Contestó
Conmutativa (+)	96.7	0.5	0.5	1.8	0.5
Asociativa (+)	78.8	5.7	5.0	8.1	2.4
Inverso Aditivo	96.7	1.4		0.5	1.4
Conmutativa (*)	92.3	4.5	0.5	0.5	2.2
Asociativa (*)	76.0	3.7	9.0	8.1	3.2
Inverso Multiplicativo	59.3	33.5		0.9	6.3
Identidad	95	0.9			4.1
Distributiva	82.4	2.3	2.3	6.3	6.7
IDENTIFICACIÓN	**Respuesta Correcta**	**Error Conceptual**	**Gramatical**	**Atención**	**No Contestó**
Conmutativa (+)	33.0	35.7			31.3
Asociativa (+)	19.9	37.1			43.0
Inverso Aditivo	9.5	38.0			52.5
Conmutativa (*)	16.3	28.5			55.2
Asociativa (*)	14.0	29.9			56.1
Inverso Multiplicativo	1.8	35.7			62.5
Identidad	1.4	36.2			62.4
Distributiva	17.6	23.1			59.3

Tabla 4.- Porcentajes de respuestas en las diferentes categorias que se presentaron al aplicar e identificar las propiedades de los números reales.

El uso de las propiedades de los números reales en la solución de ecuaciones es muy importante si se considera que cuando se están produciendo ecuaciones equivalentes, en el proceso de solución de ecuaciones, es indispensable aplicar estas propiedades. Con respecto a la aplicación de dichas propiedades, es importante notar (ver tabla 4) que la mayoría de los alumnos pueden usarlas sin dificultad, a excepción del inverso multiplicativo en el que un gran porcentaje de los alumnos presentaron problemas conceptuales. De manera general, puede señalarse que fueron mínimas las equivocaciones gramaticales y de atención, los errores conceptuales, al igual que los alumnos que no contestaron a estos ejercicios.

Contrario al desempaño de los alumnos en la aplicación de propiedades de los números reales, en la identificación de estas mismas propiedades, los alumnos tuvieron serias dificultades. Como puede observarse en la tabla 4, la mayor parte de los alumnos se abstuvieron de contestar estos ejercicios con lo que denotan su falta de conocimientos sobre la identificación de las propiedades de los números reales. También se muestran grandes dificultades conceptuales, lo que se manifiesta principalmente en el hecho de que la mayoría de los alumnos confunden los nombre de las propiedades de los números reales.

Llama la atención el hecho de que los alumnos sean capaces de aplicar las propiedades de los números reales y no puedan identificar el nombre de dichas propiedades, lo cual refleja que su educación ha estado centrada en el desarrollo de habilidades mecánicas más que conceptuales. Sin embargo, hay que considerar que en cada uno de los ejercicios de aplicación de propiedades existió un ejemplo para que los alumnos observaran la aplicación de las propiedades y posteriormente, ellos mismos pudieran aplicarlas. Posiblemente el desempeño de los alumnos hubiera sido inferior si no se hubiera presentado el ejemplo de la aplicación de las propiedades de los números reales en cada ejercicio. Por otra parte, aunque es importante que los alumnos puedan aplicar las propiedades de los números reales, ya que ello disminuye las posibilidades de cometer errores o equivocaciones en el procedimiento de solución de ecuaciones, es también importante identificar el nombre de dichas propiedades, pues, de no ser así, se les hace más difícil comprender la clase del maestro cuando usa dichos términos, o no son capaces de entender el contenido de los libros cuando mencionan el nombre de dichas propiedades y ellos no saben cuales son.

PRIORIDAD EN LAS OPERACIONES

Ejercicios	Respuesta Correcta	Error de Prioridad	No Contestó
10-2•4	11.3	86.9	1.8
8-3(6-2•2)	3.2	94.1	2.7
(8-3)(6-2•2)	8.2	87.3	4.5
(-(5-4)-5)(-7-5-9)	17.2	70.1	12.7
(-(5•4)•5)(-7•5-9)	10.9	72.4	16.7
3 { 6+2 [8-2(3-1)] }	3.2	70.1	26.7

Tabla 5.- Porcentajes de respuestas en las diferentes categorías que se presentaron al resolver los ejercicios de prioridad en las operaciones.

Conservar la prioridad en las operaciones es una habilidad importante cuando se solucionan ecuaciones, puesto que al reducir términos semejantes o realizar operaciones se corre el riesgo de llegar a resultados incorrectos si no se respetan dichas prioridades. La prioridad de las operaciones en matemáticas es la siguiente: paréntesis, multiplicación y división, y finalmente, suma y resta. Como se muestra en la tabla 5, los alumnos tienen serias dificultades al reconocer la prioridad de las operaciones, puesto que generalmente siguen el orden de solución en que es presentado el ejercicio, así, resuelven las expresiones de izquierda a derecha y no atienden a los paréntesis que están relacionados con la puntuación algebraica como lo menciona Kieran (1992). El porcentaje de alumnos que resuelven correctamente aún el ejercicio más sencillo, es realmente muy bajo.

OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

Aunque en el estudio piloto que se realizó con el instrumento de evaluación de prerrequisitos se encontró que los alumnos pueden realizar satisfactoriamente operaciones con números enteros, no sucede lo mismo con las operaciones con números fraccionarios y decimales.

Ejercicio	Respuesta Correcta	Gramatical	Operac. reales	Signo	Redondeo	Aritmética	No Contestó
2796+85	30.3	0.5			58.8	7.7	2.7
24/6+3/16	33.0		55.7				11.3
[illegible] - 2/3	28.5	0.5	37.5	25.8			7.7
8/16*9/7	48.9		42.1				9
[illegible] ÷2/3	50.2		33.9		0.5		15.4
2.111+0.0025	79.6		15.4				5
0.058-1.32	10.0		65.1	14.5			10.4
0.0032÷0.0003	18.1		57.5		1.8		22.6
1.32*0.084	57.9	0.5	32.5			0.5	8.6

Tabla 6.- Porcentajes de respuestas en las diferentes categorías que se presentaron al resolver los ejercicios de operaciones básicas con números reales.

En general, en el tema de ecuaciones y principalmente en las ecuaciones de mayor complejidad, es muy común encontrar el uso de los números fraccionarios, por ello es importante saber solucionar operaciones con estos números. Sin embargo, los resultados de esta investigación muestran que los alumnos evaluados no pueden realizar estas operaciones correctamente, pues a excepción de la suma con números decimales y la multiplicación con decimales, los alumnos que resuelven correctamente los demás ejercicios son menos de la mitad de la muestra total de 221 alumnos (ver tabla 6).

A excepción de los problemas de redondeo que presentan los alumnos en el primer ejercicio, los errores o equivocaciones de atención, redondeo, aritméticos y gramaticales son mínimos comparados con los errores de operaciones con números reales y de signo.

CONVERSIÓN DE NÚMEROS DECIMALES A FRACCIONARIOS Y VICEVERSA

Diversas investigaciones han resaltado la importancia de poder reconocer las múltiples representaciones de un mismo número (Campos y Balderas, 1998; Duval, 1993 y Harvey, Waits y Demana, 1995), en este caso, se hace referencia a las representaciones fraccionarias y decimales, por ejemplo, el número 2 puede ser representado como 2/1, 4/2, 8/4, o como 2.0.

Reconocer las diferentes formas de representación de un mismo número puede facilitar la solución de ecuaciones puesto que permite manejar las operaciones con números en el formato que es más fácil para el alumno.

Fracción - decimal	Respuesta Correcta	Error Conceptual	Gramatical	Atención	Operaciones con reales	No Contestó
$\frac{1}{2}$	85.1	0.5	0.5		12.1	1.8
7/4	55.2	0.5	0.5		38.0	5.8
8/10	69.7	0.5			23.0	6.8
Decimal - fracción	**Respuesta Correcta**	**Error Conceptual**	**Gramatical**	**Atención**	**Operaciones con reales**	**No Contestó**
0.20	38.5				33.4	28.1
1.5	27.5			0.5	48.9	23.1
1.75	43.9			0.5	35.7	19.9

Tabla 7.- Porcentajes de respuesta en las diferentes categorías que se presentaron al resolver los ejercicios de conversión de números decimales a fraccionarios y viceversa.

Los resultados de esta investigación muestran, al igual que con los múltiplos y divisores, que los alumnos no pueden realizar operaciones inversas, pues en la tabla 7 se observa que es más fácil la conversión de números fraccionarios a números decimales que la conversión contraria (de números decimales a números fraccionarios). Nuevamente, las equivocaciones gramaticales y de atención, al igual que los errores conceptuales son mínimos comparados con los errores de operaciones con números y las ausencias de respuestas, principalmente al transformar los números decimales a fraccionarios.

RAÍZ CUADRADA

La mayoría de los alumnos son hábiles para obtener la raíz cuadrada de un número entero y positivo, sin embargo, tienen dificultades cuando se les presenta un número negativo, pues muy pocos pueden explicar que los números negativos no tienen raíz cuadrada. Con respecto a los tipos de errores conceptuales y equivocaciones aritméticas presentados en estos ejercicios, realmente son mínimos a excepción del ejercicio con número negativo (ver tabla 8).

Ejercicios	Respuesta Correcta	Error Conceptual	Aritmético	No Contestó
81	95.9	2.3		1.8
25	97.3	0.9		1.8
144	85.1	7.2	0.9	6.8
-243	11.3	53.4		35.3
64	95	1.8		3.2

Tabla 8.- Porcentajes de respuestas en las diferentes categorías que se presentaron al resolver los ejercicios de raíz cuadrada.

IDENTIFICACIÓN DE LAS FAMILIAS DE NÚMEROS

Los alumnos que participaron en esta investigación, muestran serias dificultades conceptuales al identificar los números enteros (solo consideran los positivos), irracionales, racionales y naturales (ver tabla 9). También se nota que el porcentaje de alumnos que no contestan va aumentando desde los números naturales hasta los números irracionales. Las implicaciones de estos resultados en el álgebra están relacionadas con la correcta o incorrecta aplicación de las reglas válidas para ciertas familias de números, pues, las reglas para los números reales no son las mismas que para los números irracionales y si los alumnos no pueden distinguir entre estas familias de números seguramente extrapolarán las reglas válidas para los números racionales, a otros números en donde estas mismas reglas constituyen un error, tal como lo han mencionado Mancera (1991) y Medina y Peralta (1997).

Familia de números	Respuesta Correcta	Error Conceptual	No Contestó
Natural	60.2	34.8	5.0
Entero	3.2	88.2	8.6
Racional	19.5	59.2	21.3
Irracional	2.7	71.5	25.8

Tabla 9.- Porcentajes de respuestas en las diferentes categorías que se presentaron al resolver los ejercicios de identificación de las familias de números.

IDENTIFICACIÓN DE LOS ELEMENTOS DE UNA ECUACIÓN

Elementos de la ecuación	Respuesta Correcta	Error Conceptual	No Contestó
Variable o incógnita	79.7	16.7	3.6
Constante	11.8	76	12.2
Término	14.5	71.5	14.0
Factor	14.5	69.7	15.8
Exponente	73.8	22.6	3.6

Tabla 10.- Porcentajes de respuestas en las diferentes categorías que se presentaron al resolver los ejercicios de identificación de las partes o elementos de una ecuación.

El conocimiento de cómo se divide una ecuación tiene importantes implicaciones en el dominio de la sintaxis de la representación de expresiones algebraicas, dentro de las que se incluyen las ecuaciones, y como se mencionó en la parte teórica, tiene relevancia para la manera en cómo se divide y se transforman cada una de las partes de la ecuación. Sin embargo, las únicas partes de la ecuación que no son tan difíciles de identificar por los alumnos son las variables y los exponentes, mientras que los demás elementos de la ecuación presentan grandes errores conceptuales (ver tabla 10). Una de las causas de estos resultados es que posiblemente no comprendieron la pregunta, pues hubiera sido más claro especificar el grado de cada uno de los términos de la ecuación (término de primer grado y término de segundo grado) y asignar un espacio independiente para que el alumno los identificara.

REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES

Uno de los objetivos de transformar una ecuación es obtener ecuaciones equivalentes que sean más fáciles de resolver, para ello es necesario reducir la longitud de las ecuaciones reduciendo términos semejantes.

La tabla 11, muestra la habilidad de los alumnos que participaron en esta investigación para reducir términos semejantes, y como se puede observar, los principales errores que muestran los alumnos se presentan al realizar operaciones algebraicas que implican el uso de leyes de los signos, conocimiento de las partes de las expresiones algebraicas y conocimiento de las operaciones con exponentes y variables. Las equivocaciones de atención, gramática y signo, así como los errores conceptuales, son mínimos al compararlos con los errores al realizar operaciones algebraicas. Sin embargo, los errores conceptuales encontrados al identificar los términos de una ecuación (tabla 10), seguramente influyen en la mala aplicación de reglas necesarias para reducir términos semejantes que se muestra en los resultados de la tabla 11.

Ejercicio	Respuesta Correcta	Error Conceptual	Gramatical	Atención	Operaciones algebraicas	Signo	No Contestó
$2+a^2-9a^2$	27.1		1.4		59.3	5.0	7.2
$-5b-7b$	40.7	0.5			45.7	7.7	5.4
$6b-b+6b$	44.3				48	1.4	6.3
$5a-6b+8c+$ $9^a-2ac-b+6b-c$	27.1	0.9		1.4	59.7	0.5	10.4

Tabla 11.- Porcentajes de respuestas en las diferentes categorías que se presentaron al resolver los ejercicios que evalúan la reducción de términos semejantes.

TRADUCCIÓN DE PROBLEMAS ESCRITOS A EXPRESIONES ALGEBRAICAS

La habilidad para transformar una oración escrita donde se expresan relaciones entre cantidades, en una expresión algebraica, es indispensable en la solución de problemas por el método algebraico, por desgracia, los alumnos del CCH que fueron evaluados en esta investigación no muestran dicha habilidad.

No. de Ejercicio	Respuesta Correcta	No Contestó	Respuesta Incorrecta
1	14.5	40.3	45.2
2	35.3	22.6	42.1
3	0.5	51.6	47.9

Tabla 12.- Porcentajes de respuestas en las diferentes categorías que se presentaron al resolver los ejercicios de traducción de oraciones escritas a expresiones algebraicas.

Los ejercicios de traducción fueron categorizados como correctos, incorrectos o no contestó. Los resultados se muestran en la tabla 12, donde se observa que muy pocos alumnos representaron correctamente las oraciones escritas en una ecuación, predominando las respuestas incorrectas y las ausencias de respuesta. Es importante notar que sólo el 0.5 % de alumnos tradujo correctamente la última oración puesto que este mismo ejercicio fue utilizado para evaluar la solución de un problema después del curso de álgebra (las comparaciones entre este nivel de habilidad inicial de los alumnos será posteriormente comparado con las habilidades después del curso). Por otra parte, es importante notar que el ejercicio dos que contiene un mayor número de relaciones expresadas en la oración escrita que el ejercicio uno, resultó ser más fácil para los alumnos, posiblemente porque se encuentra redactado en un formato tradicional de problemas algebraicos. Los resultados aquí reportados coinciden con los mencionados por Linchevski (1995), pues se muestra que generar ecuaciones para representar las relaciones que se encuentran en los problemas escritos es una de las áreas de mayor dificultad para los estudiantes de álgebra.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES

La mayoría de los alumnos que ingresan la CCH ya han tenido clases de álgebra en la secundaria y por ello era importante conocer qué tipo de ecuaciones eran capaces de resolver antes del curso de álgebra en CCH.

La tabla 13 muestra que ninguna ecuación es fácil de resolver para los alumnos, puesto que ni aún las más simples pudieron ser resuelta por la mayoría de ellos. De hecho, las ecuaciones se habían organizado por grado de complejidad y sorprende que la primera ecuación resulte más difícil sólo por contener un número negativo, que las ecuaciones dos y tres que contienen más términos y variables a ambos lados de la ecuación. La dificultad de las ecuaciones aumenta cuando contienen paréntesis y cuando contienen fracciones. Es importante notar que conforme aumenta la dificultad de las ecuaciones, también aumenta el porcentaje de alumnos que no contestan el ejercicio. Cabe aclarar que el análisis de solución de ecuaciones se realizó con una muestra de 140 alumnos solamente, debido que los demás alumnos no contestaron esta sección del instrumento de evaluación de prerrequisitos.

No. de Ejercicio	Respuesta Correcta	No Contestó	Respuesta Incorrecta
1	24.4	20.8	54.8
2	48.4	28.5	23.1
3	40.3	31.2	28.5
4	21.7	43.5	34.8
5	6.3	51.6	42.1
6	5.9	70.6	23.5
7	0.5	79.2	20.3
8	1.8	82.4	15.8
9		86.4	13.6
10		90.5	9.5

Tabla 13.- Porcentajes de respuestas en las diferentes categorías que se presentaron al resolver los ejercicios solución de ecuaciones lineales.

DOMINIO DE LOS TEMAS BÁSICOS PARA EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

La figura 1 muestra el porcentaje de respuestas correctas que los alumnos lograron en cada uno de los temas que contiene el instrumento de evaluación de prerrequisitos. Como puede observarse, los únicos temas que la mayoría de los alumnos puede utilizar sin cometer demasiados errores son: identificación de divisores, operaciones con signos, aplicación de propiedades de los números reales, conversión de números fraccionarios a decimales y obtener la raíz cuadrada de números positivos y enteros.

Por supuesto que con estos resultados no se puede suponer que los alumnos cuentan con los conocimientos necesarios para iniciar el estudio del álgebra, sino más bien se evidencia su falta de conocimientos y habilidades para operar con 11 de los 16 temas básicos en el estudio de este tema que fueron medidos con el instrumento de evaluación de prerrequisitos. A pesar de las consideraciones anteriores, hay que tener en cuenta que no se esperaba que los alumnos dominaran los 3 últimos temas pues eran los que iban a revisar en su curso de álgebra en CCH, sin embargo, se incluyeron en el instrumento debido a que los alumnos tenían antecedentes de haber revisado el tema en secundaria y puesto que los profesores del CCH suponen que ya conocen estos temas.

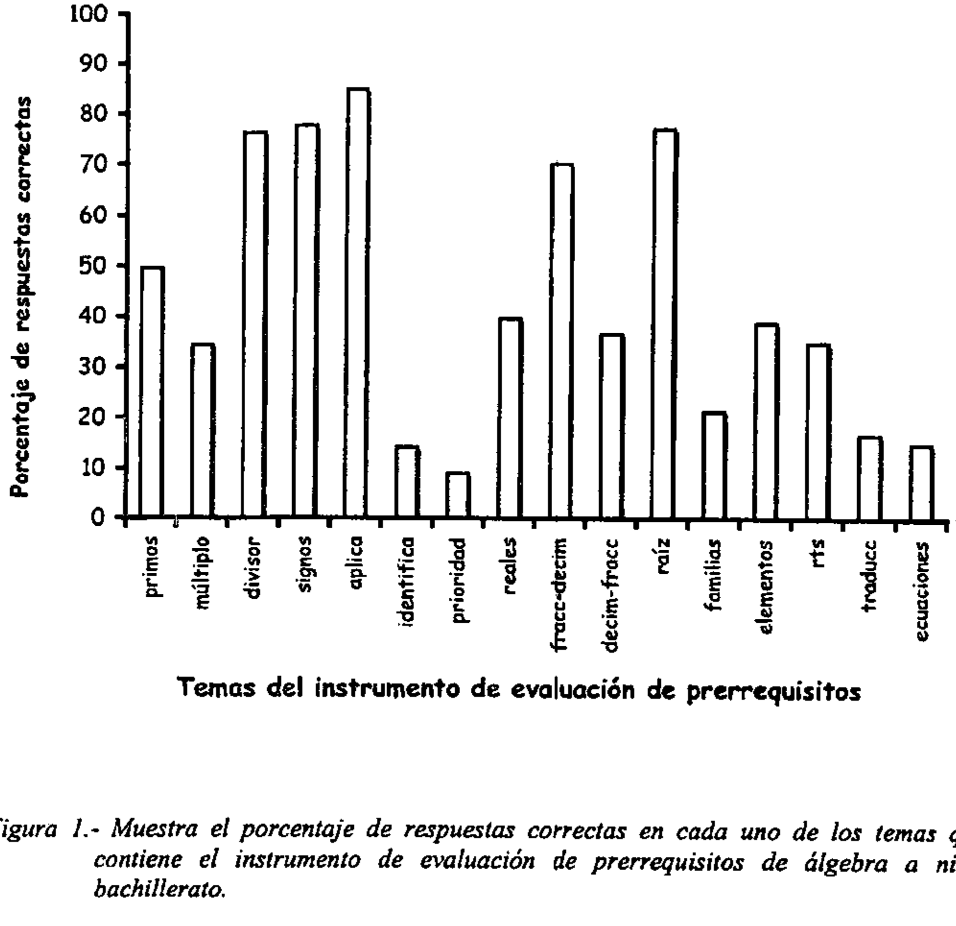

Figura 1.- Muestra el porcentaje de respuestas correctas en cada uno de los temas que contiene el instrumento de evaluación de prerrequisitos de álgebra a nivel bachillerato.

Los anteriores resultados concuerdan con lo reportado por Sepúlveda y García (1995), pues estos investigadores mencionan que los estudiantes de diferentes niveles escolares en México (incluso egresados del bachillerato) muestran deficiencias conceptuales y algorítmicas en el dominio numérico (conjuntos numéricos, operaciones y propiedades) así como en sus aplicaciones a problemas cotidianos, a pesar de que el cálculo numérico se viene enseñando y ejercitando desde los estudios básicos.

En cuanto a los errores más frecuentemente cometidos por los alumnos, éstos varían dependiendo del tipo de ejercicio presentado, como se muestra en el análisis de cada tema que se presentó anteriormente, sin embargo, de manera general se puede afirmar que se cometió un mayor porcentaje de errores de resultado (no contestó y respuestas incorrectas), posteriormente siguieron los errores de código (principalmente conceptuales) y de regla, y finalmente, existieron muy pocos errores de procedimiento (ver figura 2).

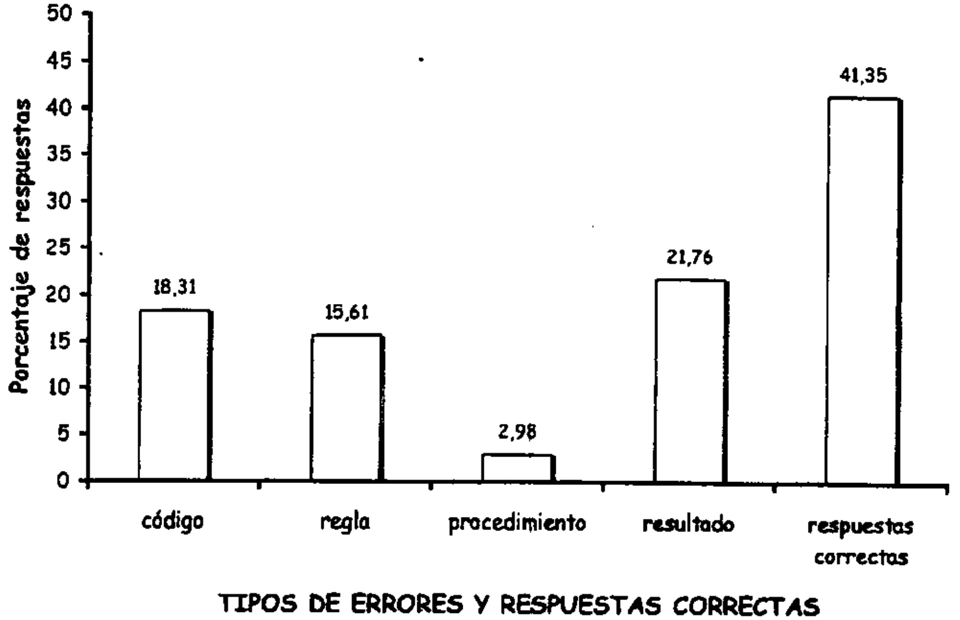

Figura 2.- Muestra el porcentaje de errores y respuestas correctas de los alumnos de primer semestre al contestar el instrumento de evaluación de prerrequisitos de álgebra.

Aunque es muy importante la distinción que hace Norman (1981, citado en Payne y Squibb, 1990) entre errores y equivocaciones, la presente investigación muestra que al menos en álgebra, son mucho más comunes los errores (principalmente los conceptuales) que las equivocaciones, lo que indica que dichos errores se deben a la falta de compresión y conocimientos profundos del tema más que a falta de atención o equivocaciones esporádicas debidas a distracciones.

EJECUCIÓN GENERAL POR GRUPO

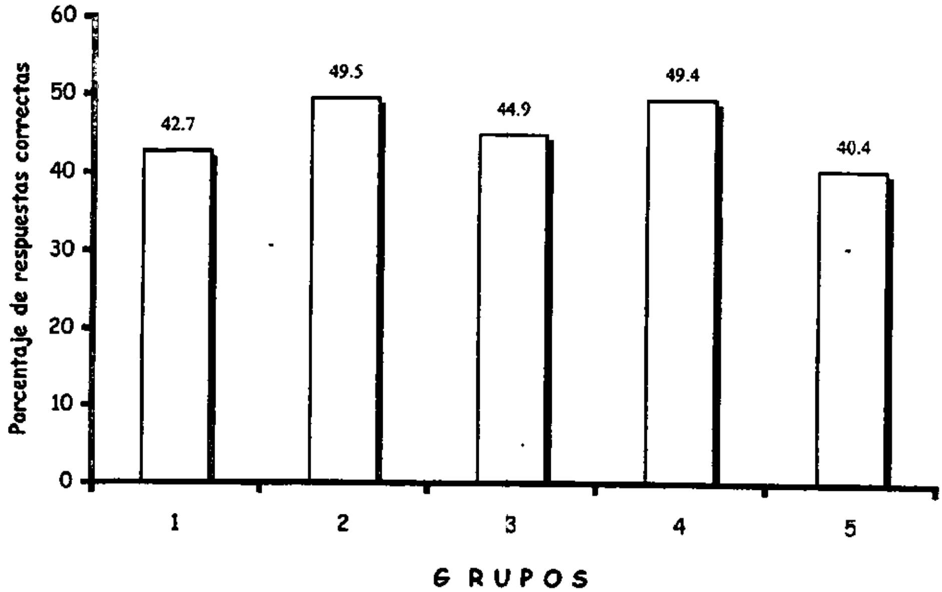

Figura 3.- Muestra el porcentaje de respuestas correctas de los alumnos de los 5 grupos de primer semestre al contestar el instrumento de evaluación de prerrequisitos de álgebra.

La figura 3 muestra que en ninguno de los grupos participantes en esta investigación existe el conocimiento mínimo necesario para iniciar el estudio del álgebra pues los alumnos resuelven, en promedio, menos del 50% de los reactivos del instrumento de evaluación de prerrequisitos correctamente (el total de reactivos fue 89). También se aplicó la prueba de Kruskal – Wallis para detectar diferencias entre los grupos con respecto al nivel de conocimientos de los alumnos al resolver el instrumento de evaluación de prerrequisitos, encontrándose una H= 26.8644, con g.l. = 4 y α = 0.0000, por lo que puede afirmarse que si hay diferencias estadísticamente significativas entre los grupos. El orden de los grupos de mayor a menor rango fue: grupo 4, grupo 2, grupo 3, grupo 1 y grupo 5.

3.2. INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES

Una vez aplicado el instrumento de evaluación de solución de ecuaciones a los alumnos de cada grupo, se compararon estos datos con la solución de las 10 ecuaciones lineales que contenía el instrumento de evaluación de prerrequisitos que fue aplicado antes de las clases de álgebra. El análisis comparativo entre estas evaluaciones se presenta a continuación.

ANÁLISIS GENERAL EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES

Los resultados se analizaron inicialmente comparando la ejecución de los alumnos de cada grupo en las ecuaciones del pretest (instrumento de evaluación de prerrequisitos) y las ecuaciones del postest (instrumento de evaluación de solución de ecuaciones). Dicho análisis se presenta a continuación en la figura 4, aunque cabe aclarar que las comparaciones se realizaron usando promedios debido a que la muestra de alumnos en el pretest fueron 221 (37 del grupo 1; 42 del grupo 2; 44 del grupo 3; 50 del grupo 4 y 48 del grupo 5) y en el postest fueron 140 (15 del grupo 1; 49 del grupo 2; 20 del grupo 3; 25 del grupo 4 y 31 del grupo 5).

Como puede observarse en la figura 4, aunque los grupos varían en el promedio obtenido en la solución de ecuaciones en el pretest, estas diferencias no son estadísticamente significativas, lo cual es apoyado por la prueba no paramétrica de Kruskal – Wallis, pues al aplicar esta prueba comparando los puntajes de los 5 grupos en el pretest, se obtuvo una H de 3.2073 con g.l. = 4, y una probabilidad asociada de 0.5238, que es mayor que el nivel de significación de $\alpha = 0.05$.

No obstante estos resultados, al aplicar la misma prueba a los datos del postest se encontró una H de 15.6054 con g.l. = 4 y una probabilidad asociada de $\alpha = 0.0036$ por lo que a un nivel de significación de 0.05 se puede afirmar que los grupos son estadísticamente diferentes entre sí después de la clase de álgebra (ver figura 4).

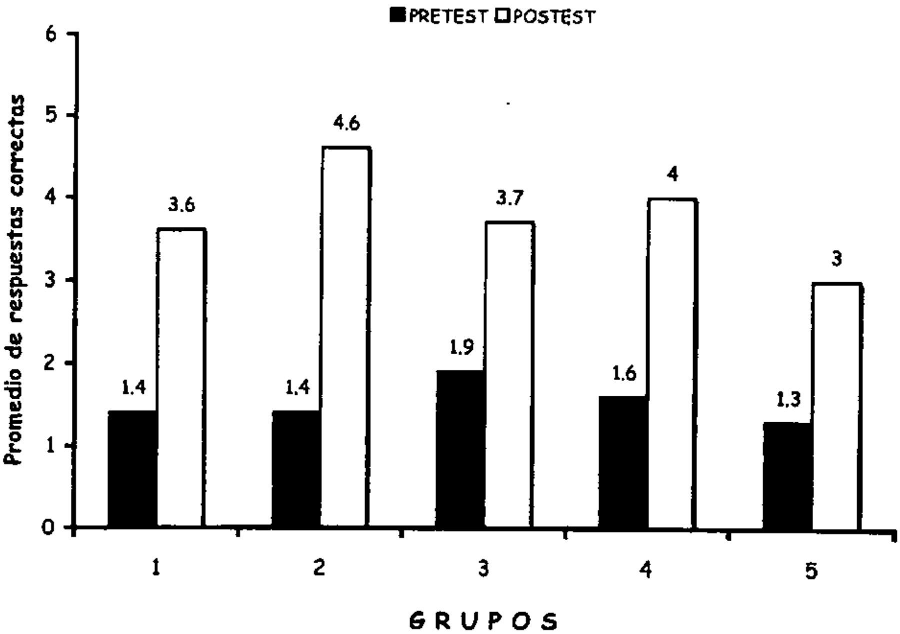

Figura 4.- Promedio de respuestas correctas por grupo en las solución de ecuaciones del pretest y del postest.

Con la finalidad de saber si el efecto de la clase fue estadísticamente significativo en la ejecución de los alumnos, se aplicó la prueba de Wilcoxon entre el pretest y el postest de cada grupos, encontrando que para todos los grupos estas diferencias son estadísticamente significativas aunque a diferentes niveles (grupo 1, $Z=1.9876$ $\alpha= 0.0469$; grupo 2, $Z=5.3765$ $\alpha= 0.0000$; grupo 3, $Z= 2.8698$ $\alpha= 0.0041$; grupo 4, $Z= 4.3724$ $\alpha= 0.0000$; grupo 5, $Z= 4.0452$ $\alpha= 0.0001$). A pesar de estas diferencias significativas entre el pretest y el postest, este aumento no es suficiente para que los alumnos alcancen calificaciones aprobatorias en la solución de ecuaciones, lo cual será corroborado cuando se analice la ejecución de los alumnos en los exámenes aplicados por cada profesor para determinar su calificación en el curso de álgebra.

Con el propósito de conocer si el instrumento de prerrequisitos predice la ejecución de los alumnos en la solución de ecuaciones, se usó el coeficiente de correlación de rango de Spearman para comparar los puntajes obtenidos por los alumnos en estas dos evaluaciones, obteniéndose una correlación moderada a un nivel de significación de 0.001 ($r_s = 0.4166$, N = 129 y $\propto = 0.000$). Lo anterior, permite afirmar que los conocimientos y habilidades evaluados por el instrumento de prerrequisitos están relacionados con el éxito o fracaso de los alumnos para el aprendizaje del tema de ecuaciones lineales, sin embargo, convendría depurar más este instrumento de modo que se alcance un mayor grado de predicción, además de identificar otras variables a parte del conocimiento matemático previo que estén relacionadas con el aprendizaje del tema de ecuaciones lineales.

ANÁLISIS POR ECUACIÓN

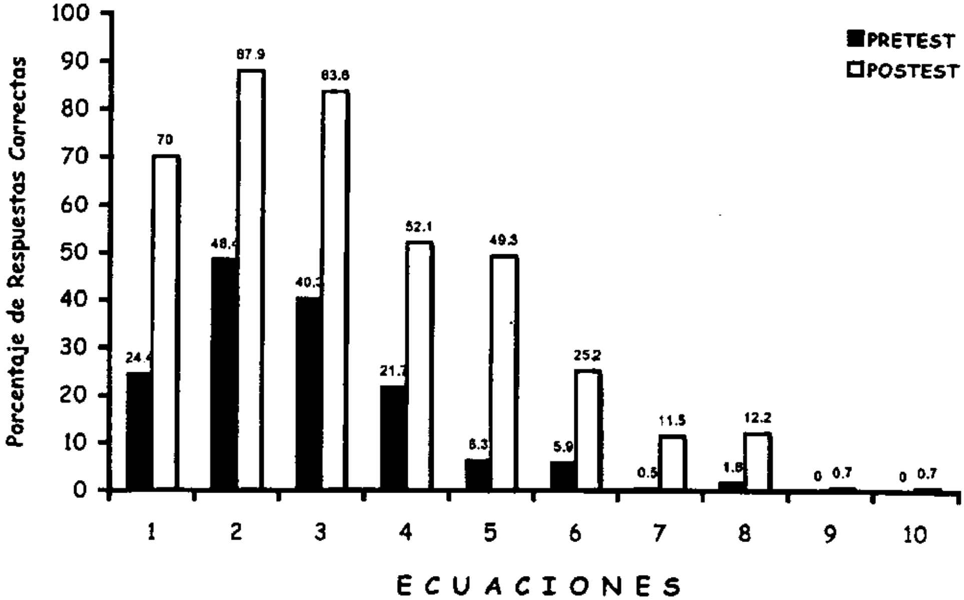

Figura 5.- Porcentaje de respuestas correctas en las ecuaciones del pretest y del postest.

La figura 5 muestra que los alumnos mejoraron su habilidad en la solución de ecuaciones después de la clase del profesor y de hecho, al aplicar la prueba de Wilcoxon a los puntajes obtenidos por todos los alumnos en cada ecuación, se encontró que estas diferencias entre el pretest y el postest son estadísticamente significativas ($Z = 8.5788$ con $\alpha = 0.0000$). Sin embargo, es importante considerar que en este caso la validez estadística no tiene una correspondencia con la validez "práctica" o pedagógica, como la ha llamado Wedd (1992), pues si bien es cierto que los alumnos aumentan su habilidad en solucionar ecuaciones, sólo pasan de resolver, de cerca de 1.5 ecuaciones a 3.8 ecuaciones, lo cual implicaría una calificación reprobatoria si cada ecuación tuviera un valor de un punto. Volviendo a la figura 5, se puede observar que sólo en las 3 primeras ecuaciones del postest (las más sencillas) puede considerarse que la mayoría de los alumnos saben resolverlas.

ANÁLISIS POR TIPO DE RESPUESTA EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES

Debido a que los anteriores análisis se realizaron sólo a partir de la categoría de respuestas correctas, se consideró importante realizar una análisis más fino que permitiera identificar los tipos de error o equivocación que los alumnos cometen en el proceso de solución de ecuaciones, para ello, se analizó paso a paso la forma de solucionar ecuaciones, anotando los errores o equivocaciones que se cometían de acuerdo a las categorías presentadas en el anexo 9. De la muestra total de alumnos se seleccionaron a 5 de cada grupo, de entre quienes habían realizado la mayor parte de las evaluaciones de las que consta esta investigación (recuérdese que no todos los alumnos realizaron todas las evaluaciones), de esta manera, la muestra de alumnos utilizada para el análisis de los errores en la solución de ecuaciones constó de 25 alumnos de los 5 grupos.

Como se puede observar en la tabla 14, los errores conceptuales y la prioridad en las operaciones se mantuvieron muy similares antes y después de la clase de álgebra, mientras que otros aumentaron ligeramente, como por ejemplo, los gramaticales, de atención, la propiedad distributiva, las operaciones algebraicas y con números reales y los problemas de signo. Por otra parte, son menos las categorías de respuesta que disminuyeron después de la clase de álgebra, por ejemplo, propiedades de la igualdad al usar el inverso multiplicativo, la aritmética y la de no contestó. Ademas existieron categorías que no se presentaron, como las propiedades de la igualdad al usar el inverso aditivo y el redondeo.

Ecuación		CATEGORIAS DE RESPUESTA													
		1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2
1	PRETEST	40				12					8		8	20	12
	POSTEST	8		8							24			60	
2	PRETEST	12				4					4			56	24
	POSTEST													100	
3	PRETEST	20		4							8		4	40	24
	POSTEST			4							4			92	
4	PRETEST	44									12			20	24
	POSTEST	8	4	4			4	4			24			48	4
5	PRETEST	48				4				4			4	4	36
	POSTEST	20					12			4	8		4	52	
6	PRETEST	32				4								12	52
	POSTEST	56							8					36	
7	PRETEST	24				4			4						68
	POSTEST	80												16	4
8	PRETEST	24				4								4	68
	POSTEST	32												20	48
9	PRETEST	24				4									72
	POSTEST	56													44
10	PRETEST	16													84
	POSTEST	28													72
TOTAL	PRETEST	28	0	0.4	0	3.6	0	0	0.4	0.4	3.2	0	1.6	16	46
	POSTEST	29	0.4	1.6	0	0	1.6	0.4	0.8	0.4	6.0	0	0.4	42	17
	TOTAL	29	0.2	1.0	0	1.8	0.8	0.2	0.6	0.4	4.6	0	1.0	29	32

Categorías de respuesta: 1.1 conceptual, 1.2 gramatical, 1.3 atención, 2.1 propiedades de la igualdad al usar el inverso aditivo, 2.2 propiedades de la igualdad al usar el inverso multiplicativo, 2.3 propiedad distributiva, 2.4 operaciones algebraicas, 2.5 operaciones con números reales, 2.6 prioridad en las operaciones, 3.1 signo, 3.2 redondeo, 3.3 aritmética, 4.1 respuesta correcta, 4.2 no contestó.

Tabla 14.- Porcentaje de respuestas en las categorías de análisis del procedimiento de solución de ecuaciones en el pretest y postest.

El mayor porcentaje de errores se presenta en las categorías de conceptual, de signo y las faltas de respuesta (no contestó) que por no presentar procedimiento no pudieron ser categorizadas, pero que sí muestran la falta de conocimientos para solucionar las ecuaciones. Sin embargo, en el postest disminuyó considerablemente el porcentaje de respuestas de no contestó y aumentaron las respuestas correctas así como los errores o equivocaciones menores, pues al resolver un mayor porcentaje de ítems de la evaluación del postest se hace posible categorizar en los diferentes tipos de errores lo que antes se había considerado como una falta de respuesta, pues cerca del 50% de los sujetos no contestaron los ítems del pretest.

Con respecto a la categoría de signo, se nota que sigue siendo un problema para los alumnos aun después de la clase de álgebra, especialmente cuando deben resolver ecuaciones que presentan signos negativos. Nótese que este tipo de error fue el más común en las ecuaciones más simples, sin embargo, conforme la dificultad de la ecuación aumenta, este tipo de error se sustituye por errores conceptuales.

Es importante considerar con detenimiento las implicaciones de los errores conceptuales, pues debe recordarse que en esta categoría se incluyeron los procedimientos de solución de ecuaciones que presentaron más de dos errores y que muestran una falta de estrategia para solucionar la ecuación presentada o que muestran serios problemas con respecto al objetivo y reglas de solución de ecuaciones. Llama la atención que este tipo de errores no disminuyó con la clase de álgebra y que de hecho, aumenta conforme aumenta la dificultad de las ecuaciones evaluadas, especialmente en el postest, pues hay en general más ecuaciones resueltas que pudieron ser categorizadas.

Estos resultados evidencian la falta de énfasis en el desarrollo de habilidades conceptuales en las clases de álgebra, pues los errores más frecuentes no se encuentran en los procedimientos para solucionar ecuaciones o en las reglas válidas para la transformación de las mismas sino en los códigos usados y especialmente en el entendimiento de lo que los alumnos están haciendo. Aunque la decisión de incluir en la categoría de conceptual más de dos errores puede estar disfrazando los porcentajes de las categorías de regla y procedimiento, pues los disminuyen, si nos indican que el énfasis en las clases debe cambiar de la sola transmisión de reglas y el ejercicio de procedimiento, al diseño de condiciones para que los estudiantes construyan y apliquen el concepto de ecuación. En este sentido, puede ser útil la sugerencia de Bell (1995), quien enfatiza la necesidad de que la educación se enfoque en el significado más que en la simple aplicación de reglas.

ANÁLISIS POR GRUPO DEL TIPO DE RESPUESTA EN CADA ECUACIÓN

ECUACIÓN		CATEGORÍAS DE RESPUESTA POR GRUPO																			
		1.1 Conceptual					3.1 Signo					4.1 Correcta					4.2 No contestó				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	PRE	2	2	2	3	1		2				2		3							
	POST		2				2	1	1		2	3		4	5	3					
2	PRE		1	1	1				1			4	4	3	2	1			1	2	3
	POST											5	5	5	5	5					
3	PRE	1	2	1		1			1		1	3	2	1	3	1		1	1	2	2
	POST							1				5	3	5	5	5					
4	PRE	1	3	2	2	3	1		1	1		3	1	1				1	1	2	2
	POST					1		3	2		1	4	2	3	2	1					1
5	PRE	1	3	4	2	2						1						2	1	3	3
	POST	1			1	3		1		1		3	3	4	2	1					
6	PRE	3	1	2	1	1						2				1		4	3	3	3
	POST	1	3	3	3	4						3	2	2	2						
7	PRE	3	1	1	1													4	4	4	5
	POST	4	3	5	4	4						1	2			1				1	
8	PRE	2	1	2		1						1					1	4	3	5	4
	POST	1	3	1		3						2	2	1			2		3	5	2
9	PRE	3	1			2											1	4	5	5	3
	POST	5	5	2		2													3	5	3
10	PRE	2		1		1											3	5	4	5	4
	POST	3	2			2											2	3	5	5	3
TOTAL	PRE	17	15	15	10	13	1	2	3	1	1	16	7	8	5	3	5	28	23	32	31
	POST	15	18	11	8	19	2	6	3	1	3	26	19	24	21	16	4	3	11	16	9

Tabla 15.- Muestra el número de respuestas por grupo en las 10 ecuaciones del pretest y las 10 del postest (solo se incluyeron las respuestas más frecuentes).

Este análisis se realizó a partir de los 25 alumnos seleccionados (5 de cada grupo) para una análisis más fino de sus respuestas. En la tabla 15, se observa lo siguiente de cada grupo:

- Los alumnos del grupo 1 fueron los que dejaron menos ecuaciones sin contestar tanto en el pretest como en el postest por lo que tuvieron un mayor número de respuestas correctas en ambas evaluaciones, sin embargo, también por esta razón, pudieron detectarse un mayor número de errores, especialmente conceptuales, que no variaron entre ambas evaluaciones.
- El grupo 2 aumentó su confianza para intentar resolver las ecuaciones pues en el pretest dejaron muchos ejercicios sin contestar, mientras que en postest fueron los que dejaron menos. A pesar de estas diferencias en los intentos por resolver ecuaciones, puede observarse que los errores conceptuales se mantuvieron casi al mismo nivel, es decir, el aumentar sus intentos de responder las ecuaciones repercutió en las respuestas correctas más que en los errores conceptuales.
- El grupo 3 aumentó sus intentos por responder y sus respuestas correctas, sin embargo, los errores conceptuales los disminuyó muy poco.
- El grupo 4, a pesar de haber aumentado sus intentos por responder, fue el que presentó más ausencias de respuestas en el pretest y en el postest al compararlo con los otros grupos, ello se refleja en el bajo número de ejercicios en los que presentaron errores conceptuales, por lo cual puede suponerse que los alumnos de este grupo solo contestaban cuando consideraban que podían resolver la ecuación (pues habían mecanizado el procedimiento) y no intentaban responder cuando consideraban que no iban a tener éxito. Con relación a las respuestas correctas podemos observar que aumentó el número de ellas entre el pretest y el postest.
- El grupo 5 aumentó su confianza para contestar, pues disminuyeron las ausencias de respuesta en el postest y por ello también aumentaron los errores conceptuales, de signo y las respuestas correctas.

Con respecto a las comparaciones entre grupos podemos observar que los grupos 1 y 2 fueron los que intentaron resolver el mayor número de ecuaciones, aún las más difíciles y por ello tuvieron más respuestas correctas en estas ecuaciones. Sin embargo, el grupo 4 fue más hábil para resolver las 3 primeras ecuaciones, probablemente debido a que realizaron más ejercicios de mecanización similares.

3.3 INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN DE SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Se pidió a los alumnos de todos los grupos que resolvieron un problema escrito y que explicaran su método de solución con el propósito de evaluar el planteamiento de la ecuación para resolver el problema y el procedimiento de solución de la misma. Dado que en las instrucciones no fue obligatorio que los alumnos solucionaran el problema por medio de álgebra, surgieron varios métodos de solución que fueron retomados para categorizar las respuestas de los alumnos en la base de datos. Las categorías y códigos usados son presentados en el anexo 10.

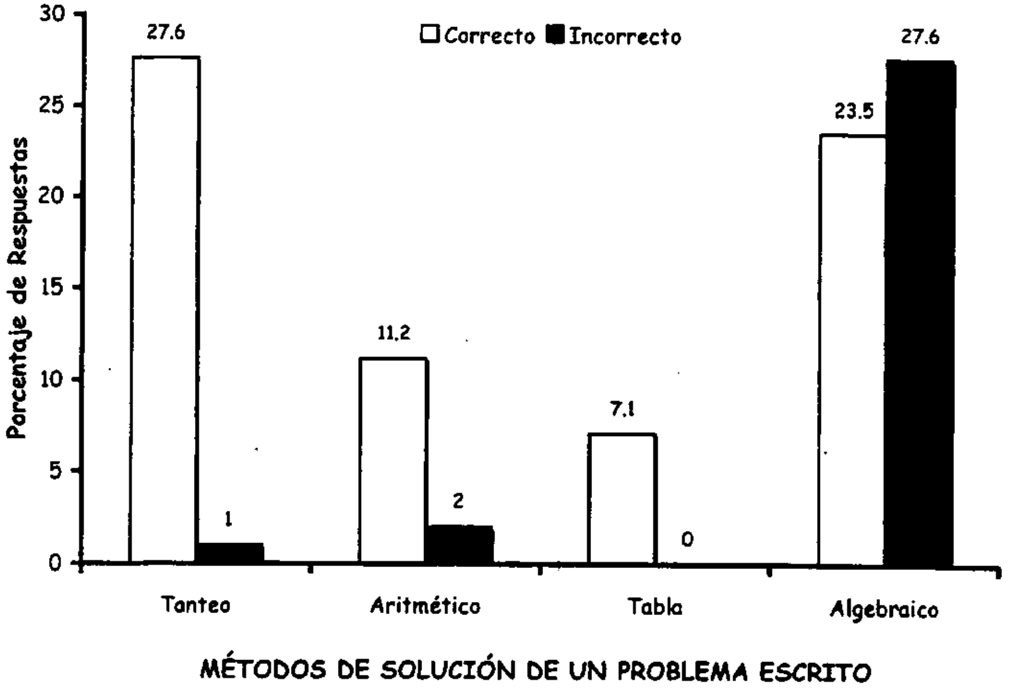

Figura 6.- Porcentaje de soluciones correctas e incorrectas en los 4 métodos de solución de un problema escrito usados por los alumnos de primer semestre después de la clase de álgebra

Cabe aclarar que en la solución del problema escrito participaron 98 alumnos de todos los grupos (8 del grupo1, 38 del grupo 2, 15 del grupo 3, 25 del grupo 4 y 12 del grupo 5). La figura 6 muestra los métodos usados por los alumnos y, como se puede observar, casi la mitad de la muestra usó un método de solución distinto al algebraico a pesar de que estaban revisando este tema en sus clases de matemáticas. También es interesante observar que el mayor porcentaje de respuestas correctas se presentaron en los métodos diferentes al algebraico, pues las respuestas correctas constituyeron el 69.4 % de la muestra y de este porcentaje, sólo el 23.5% se debe al método algebraico.

Al analizar el porcentaje de respuestas correctas comparado con el de respuestas incorrectas se nota que los alumnos que intentaron la solución del problema por métodos no algebraicos tuvieron más éxito, pues el porcentaje de respuestas incorrectas es de sólo el 3%, mientras que los que usaron el método algebraico tuvieron un porcentaje de 27.6% de respuestas incorrectas. Además, los alumnos que usaron el método algebraico tuvieron un mayor porcentaje de fracasos (27.6%) que de éxitos (23.5%).

De los métodos de solución del problema escrito alternativos al algebraico, el método de tanteo fue el más frecuentes entre los alumnos, lo cual refleja una falta de estrategia para la solución del problema, pues debido a que el problema escrito presentado era relativamente sencillo, se prestaba para que los alumnos usaran este método. La frecuencia del método de tanteo entre los alumnos de álgebra refleja la carencia de comprensión y transferencia de lo que los alumnos aprenden en clase a la solución de problemas, a pesar de que en clase habían resuelto varios ejercicios similares y algunos otros más complejos habían sido modelados por el profesor. La gravedad de esta situación puede comprenderse si se considera que este método es situado por Kieran (1995) como de los más sencillos y aún previo a los métodos de solución aritméticos.

Las observaciones de Block y Dávila (1993) con respecto a la mala aplicación de los algoritmos y fórmulas que fueron previamente enseñados permiten dar una posible explicación al fracaso de los alumnos en el uso del álgebra para solucionar problemas a través del método algebraico. Block y Dávila esbozan algunas razones que explican esta mala aplicación de algoritmos:

- El sentido del algoritmo está dado tanto por los problemas que permite resolver, como por los procedimientos largos y no sistemáticos que el algoritmo sustituye. Sin embargo, en la enseñanza escolar ambas fuentes del sentido de los algoritmos tienden a estar ausentes. Los algoritmos se suelen enseñar separadamente de los problemas, e incluso antes que los problemas. Esas largas y numerosas horas que los alumnos dedican a dominar la técnica de un algoritmo fuera de contexto producen, en el mejor de los casos, destrezas en una técnica algorítmica vacía de significado: aprenden a resolver ecuaciones, pero no saben cuándo usarlas. Por otro lado, nunca se da un espacio en que los alumnos desarrollen por sí mismos procedimientos de resolución informales, previamente a la enseñanza del algoritmo, de forma que el algoritmo sea para ellos una herramienta que evita esfuerzos y ahorra tiempo.

- La variedad de problemas que se resuelven con una ecuación puede ser muy grande, aún cuando ya se identifican algunos problemas que se resuelven con ecuaciones, reconocer que otros se resuelven también con ella no es nada inmediato. Implica un proceso en el que durante un tiempo, se ponen en juego nuevamente procesos informales hasta que más adelante se descubre que una ecuación la resuelve. Cuando ésto sucede, se ha enriquecido el significado que las ecuaciones tienen para el alumno, sin embargo, el proceso de enseñanza llevado a cabo en la escuela, no permite que los alumnos tengan este significado de las ecuaciones.

ANÁLISIS POR GRUPO

MÉTODO DE SOLUCIÓN		GRUPO				
		1	2	3	4	5
Tanteo	**Correcto**	0	57.9	13.3	8	8.3
	Incorrecto	0	0	6.7	4	0
Aritmética	**Correcto**	37.5	13.2	0	0	25
	Incorrecto	0	0	0	0	8.3
Tabla	**Correcto**	0	0	0	24	8.3
	Incorrecto	0	0	0	0	0
Álgebra	**Correcto**	12.5	18.4	13.3	52	0
	Incorrecto	50	10.5	66.7	12	50

Tabla 16.- Porcentaje de respuestas (correctas e incorrectas) de los alumnos en los 5 grupos para cada método de solución del problema escrito.

El análisis de los efectos de la clase del profesor en los métodos de solución del problema escrito y el éxito obtenido se realizaron a partir de la tabla 16, donde se observa que en el grupo 1 se obtuvo 50% de respuestas correctas, pero de este porcentaje 37.5% se logró usando un método distinto al algebraico, mientras que el otro 50% fue atribuible al uso del método algebraico pero con resultados incorrectos. En el grupo 2, casi el 90% de los alumnos obtuvieron resultados correctos, aunque de este porcentaje, 71.1% fueron obtenidos por métodos distintos al álgebra, de hecho, la mayor parte de estas respuestas correctas se debieron al método de tanteo y llama la atención que ninguno de los alumnos que usó este método llegó a resultados incorrectos, lo mismo que al usar el método aritmético, mientras que los que usaron el método algebraico, si tuvieron fracasos. Con respecto al grupo 3, solo se usaron los métodos de tanteo y algebraico y nuevamente los que usaron el método algebraico fallaron más que los que usaron el otro método, sin embargo, es importante notar que este grupo fue el que usó en mayor porcentaje el método algebraico (80%). El grupo 4 fue el que usó más que los otros grupos el método de tablas y siempre tuvieron resultados correctos, también hay que recalcar que éste fue el único grupo que al usar el método algebraico fallaron en un menor porcentaje, de esta manera, 52% de sus respuestas correctas se deben al uso del álgebra. Finalmente, el grupo 5, fue el único grupo que al usar el método algebraico tuvo siempre respuestas incorrectas, y este grupo, junto con el grupo 3 fueron los grupos en los que las respuestas incorrectas superaron a las respuestas correctas, de hecho, el grupo 5 fue el único que al usar el método aritmético tuvo errores.

A manera de resumen, se puede mencionar que el grupo 1 obtuvo mejores resultados con el método aritmético, el grupo 2 con el método de tanteo, y únicamente el grupo 4 con el método algebraico, mientras que en los dos grupos restantes (3 y 5) no existe una tendencia de que usen algún método con éxito. Estas tendencias pueden estar muy relacionadas con las características de la clase de cada profesor, pues en el instrumento de evaluación de prerrequisitos, se evaluó la habilidad de los alumnos para plantear el mismo problema escrito en una ecuación algebraica y sólo el 0.5% de los alumnos lo pudo hacer, lo que equivale a un solo alumno de los 221 que respondieron dicho instrumento, por tal motivo, se puede suponer que todos los alumnos presentaban una falta de conocimientos y habilidades para plantear una oración algebraica que resolviera el problema, mientras que después de la clase del profesor los alumnos usaron los métodos que fueron modelados por el profesor, por ejemplo, el grupo 4 que usó el método de tabla, se debe a que este método fue visto en clase, de igual manera, en algunos grupos se logró que cierto porcentaje de alumnos usara los planteamientos algebraicos correctamente para solucionar el mismo problema escrito.

Otra observación importante es que para la mayoría de los grupos y alumnos, el método algebraico no es de gran utilidad en la solución de problemas, ni siquiera en un contexto escolarizado por lo que se puede deducir que tampoco es útil en la solución de problemas en la vida diaria, por ello es difícil que abandonen los métodos que generalmente usan como son el de tanteo y en el mejor de los casos el aritmético, y los sustituyan por el método algebraico que no les es funcional. Estas afirmaciones son apoyadas por la investigación de Medina y Peralta (1997) y Peralta y Medina (1997), y por la investigación de Schoelfeld (1987 citado en Santos 1992) quien observó que los estudiantes a menudo no usaban el contenido matemático que conocían cuando intentaban resolver problemas en un contexto diferente al salón de clase.

Las investigaciones de Bell (1976, citado en Bell 1995), Kieran y Clement (1990 y 1982 respectivamente, citados en Rubio, 1995) y Linchevsky (1995) apoyan también los resultados anteriores, pues reportan que el principal problema cuando se usa el método algebraico es el planteamiento de la ecuación, ya que si en ella no se expresan correctamente las relaciones enunciadas en el problema escrito, es muy probable que se llegue a un resultado incorrecto. Además, en esta investigación pudo observarse que éste no es el único problema que los alumnos enfrentan con el método algebraico, pues, suponiendo que planteen correctamente la ecuación y realicen sin errores el procedimiento de solución, la siguiente dificultad con la que se enfrentan es la interpretación del resultado obtenido. Por ejemplo, en el problema que se usó en esta investigación, el valor de $x = 15$, pero a los alumnos se les dificulta reconocer si x es la cantidad que corresponde a la primera, segunda o tercer persona, y entonces comenzar a establecer las relaciones enunciadas en el problema escrito para conocer la cantidad de dinero que le toca a cada persona.

Las anteriores dificultades de los alumnos con el uso del método algebraico explican su preferencia por otros métodos cuando el problema planteado lo permite, como fue el caso de esta investigación. Resultados similares son reportados por Gallardo (1995) quien realizó una investigación con estudiantes mexicanos de secundaria, en la que encontró diferentes estrategias de solución de problemas de edades que implican soluciones negativas, y al igual que en la presente investigación, de 29 estudiantes, solo 4 usaron el método algebraico, mientras que los restantes usaron estrategias similares a las que en esta investigación se denominaron como tanteo y aritmético. Además, una observación importante de la investigación de Gallardo fue la identificación de métodos específicos, problema a problema, por ejemplo, en un problema de edades se presentaron seis métodos mientras que en un problema de compra de mercancía se presentaron tres métodos. Dado que en esta investigación el análisis se realizó con un solo problema, no fue posible confirmar esta información y realizar un análisis al respecto.

Los resultados antes reportados también concuerdan con las observaciones de Sfard (1995), quien encuentra que los métodos previos al álgebra son usados por alumnos de diferentes niveles educativos, con lo que demuestra que su uso es independiente de la instrucción y además menciona que el uso de métodos diferentes al álgebra está muy relacionado con el desarrollo histórico del álgebra.

Otras investigaciones que puede ayudar a interpretar los datos obtenidos son las realizadas por Schoenfeld (1985, citado en Santos, 1992) y Schoenfeld (1992), quien menciona que al comparar la ejecución de expertos y novatos en solución de problemas, se encuentra que los novatos emplean muy poco tiempo en leer el problema y se pasan inmediatamente a intentar resolverlo a través de varios métodos, mientras que los expertos distribuyen su tiempo en: leer, analizar, explorar, planear, implementar y verificar, empleando la mayor parte del tiempo en analizar. Ésto puede explicar porque los alumnos del CCH llegan a la solución a través del método de tanteo y no planteando una estrategia a través de ecuaciones que requieren de la comprensión de las relaciones expresadas en el problema y por tanto, mayor tiempo dedicado a la comprensión del mismo. Ante esta situación, una estrategia didáctica útil puede ser la estrategia de autorregulación, similar a la usada por Bermúdez, Figueroa y Loyola (1998), quienes entrenaron a alumnos de primaria a solucionar problemas aritméticos a través de varias etapas: planeación, ejecución, monitoreo y evaluación del proceso.

Otra propuesta que vale la pena considerar es la que hizo Rubio (1995) para mejorar el proceso de resolución de problemas algebraicos. Esta propuesta consiste en un modelo cognitivo que incluye varios procesos psicológicos: a) la lectura del problema, b) la formación de una representación mental que interpreta la información en el problema como objetos con propiedades asociadas, c) la organización de las relaciones entre esos objetos y d) la representación de las relaciones como ecuaciones.

Finalmente, la información anterior acerca de la solución de problemas puede ser resumida a partir de las cuatro dimensiones propuestas por Schoenfeld (citado en Santos, 1992) que influyen en el proceso de resolución de problemas:

- Dominio del conocimiento que incluye definiciones, hechos y procedimientos usados en el dominio matemático.
- Estrategias cognoscitivas, que incluyen métodos heurísticos tales como descomponer el problema en casos simples, establecer metas relacionadas, invertir el problema y dibujar diagramas.
- Estrategias metacognitivas que se relacionan con el monitoreo empleado al resolver el problema, por ejemplo, el proceso de selección de una estrategia y la necesidad de cambiar de dirección como resultado de una evaluación permanente del proceso.
- Sistema de creencias que incluye las ideas que los estudiantes tienen acerca de la matemática y cómo resolver problemas.

Como se puede apreciar, la solución de problemas no solo depende del conocimiento que los alumnos tengan acerca del álgebra, sino también de las habilidades desarrolladas y la concepción que tienen de la materia, que son dimensiones usualmente no tomadas en cuenta.

3.4 CUESTIONARIO DE UTILIDAD DE LAS ECUACIONES

La muestra de alumnos que se usó para este cuestionario fue de 40 alumnos (12 del grupo 1, 8 del grupo 2, 9 del grupo 3 y 11 del grupo 5). El análisis de este cuestionario se realizó con base en las categorías que se encuentran en el anexo 11. La información obtenida de dicho cuestionario por cada pregunta, se presenta a continuación.

1) Describe tres situaciones de la vida cotidiana en las que las ecuaciones sean útiles.

Los alumnos que dieron al menos dos de los tres ejemplos que se pedía de forma pertinente se consideraron como alumnos que identificaban el uso de las ecuaciones (25%), los demás alumnos se consideraron como alumnos que no identificaban el uso de las ecuaciones (75%). De esta manera, puede afirmarse que 3/4 de la muestra de alumnos que contestó el cuestionario de utilidad de las ecuaciones no reconoce dicha utilidad. Además, es importante considerar que los alumnos que mencionaron situaciones pertinentes donde se usa el álgebra, solo mencionaron situaciones vistas en la clase y ninguno mencionó alguna situación de la vida cotidiana en donde ellos usen las ecuaciones.

2) ¿Qué utilidad tiene saber resolver ecuaciones si tú tuvieras alguna de las siguientes ocupaciones: matemático, médico, comerciante y deportista?.

La figura 7 muestra la distribución de las respuestas de los alumnos y como se puede observar, la utilidad que los alumnos atribuyen al uso de ecuaciones en las profesiones de matemáticas y medicina está enfocada principalmente a contenidos que vieron en clase, es decir, para los alumnos, las matemáticas son útiles para los matemáticos porque pueden solucionar más fácil problemas escritos, mientras que los médicos pueden conocer la cantidad de sustancias químicas que deben mezclar para producir una cierta solución de medicina. Estas respuestas reflejan que los alumnos no son capaces de reconocer el uso de las ecuaciones de manera creativa y de extrapolar su aplicación para solucionar problemas de la vida cotidiana, sino solamente repiten lo que su profesor les modela o les menciona en la clase.

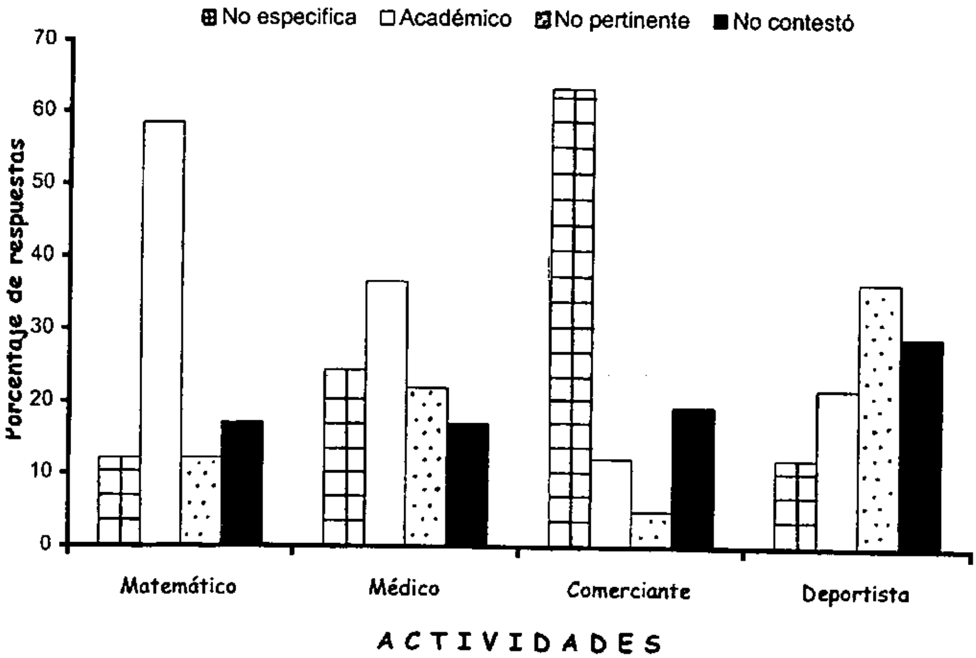

Figura 7.- Porcentaje de respuestas en las diferentes categorías de análisis con respecto a la utilidad de las ecuaciones en varias actividades.

A pesar de las anteriores observaciones, la situación para las actividades de comerciante y deportista es peor, pues en el caso de los comerciantes los alumnos parecen no tener claro la utilidad de las ecuaciones en esta actividad ya que las respuestas más comunes son las que mencionan usos generales, donde las ecuaciones pueden ser necesarias, pero ellos no son capaces de poner ejemplos o mencionar usos específicos. En el caso de los deportistas, por ejemplo, los alumnos ni siquiera logran reconocer alguna utilidad pertinente de las ecuaciones, pues si se observa la figura 7, los mayores porcentajes de respuestas se encuentran en las categorías de no pertinente y no contestó.

Nuevamente se nota que mientras más se alejan las actividades del ámbito académico, más difícil es para los alumnos encontrar un uso pertinente de las ecuaciones en estas actividades, pues nunca realizaron ejercicios en clase que hicieran referencia a la utilidad de las ecuaciones en estas áreas y ellos no pueden proponer algunas muy probablemente porque cuando se han enfrentado a problemas reales en estas áreas ellos los resuelven sin usar las matemáticas o las ecuaciones.

3) ¿Qué piensas estudiar o a qué te piensas dedicar?.

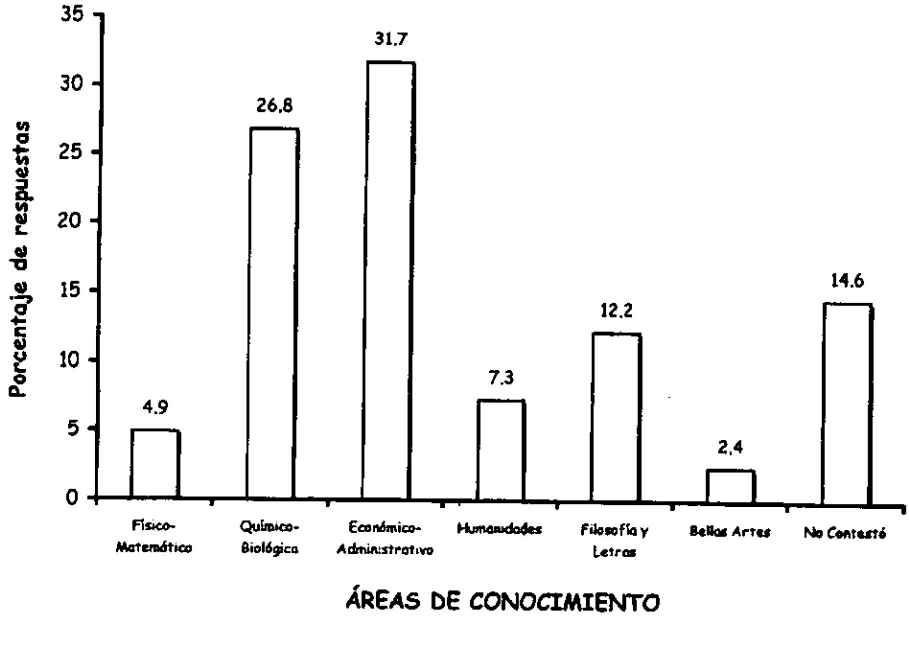

Figura 8.- Porcentaje de alumnos que están interesados en estudiar diferentes áreas de conocimiento.

La anterior pregunta se incluyó para saber si los alumnos estaban interesados en áreas de conocimiento donde las matemáticas son fundamentales o en áreas que no hacen mucho uso de esta materia y conocer si existe una relación entre este interés y su desempeño en álgebra. Como puede observarse en la figura 8, la mayoría de los alumnos están interesados en el área económica – administrativa y aunque los alumnos que están interesados específicamente en el área físico - matemática son muy pocos, al considerar conjuntamente las tres primeras áreas que hacen gran uso de las matemáticas, se observa que la mayor parte de los alumnos eligieron estas áreas (62.4%), comparados con el 21.9% que escogió áreas diferentes o con el 14.6% que aún no saben a que dedicarse.

Los resultados sobre los intereses profesionales de los alumnos no corresponden con el nivel de conocimientos y habilidades algebraicas con que ellos cuentan, además también evidencian que muy probablemente los alumnos no estén escogiendo su profesión de acuerdo a sus habilidades, sino a otros factores como podrían ser factores económicos, modas profesionales u otros. A pesar de que estos alumnos son apenas de primer semestre, si no logran superar las dificultades que tienen con esta materia aunque logren aprobar los cursos de matemáticas, seguramente llegarán a un nivel de estudios superior arrastrando serias dificultades y seguramente los profesores de esos niveles criticarán la educación que los alumnos recibieron en el bachillerato así como los profesores de bachillerato critican la educación que los alumnos recibieron a nivel secundaria.

4) Lee el siguiente problema y menciona como puedes resolverlo: ***En una tienda comercial debido al fin de la temporada de primavera – verano se esta liquidando la ropa con rebajas del 35%. ¿Cuánto es lo que tienes que pagar por un pantalón que cuesta $ 160?.***

La figura 9 muestra resultados muy similares a los encontrados en el instrumento de evaluación de solución de problemas. Como se puede observar, el método aritmético es más popular que el método algebraico. Nuevamente se nota que por las características del problema presentado, los alumnos no creen necesario usar el álgebra pues consideran que pueden solucionar un problema de la vida cotidiana como éste a través de la aritmética. Los resultados muestran reiterativamente que los alumnos prefieren métodos alternativos al algebraico, pero el interés de esta investigación fue también conocer si los alumnos tenían esta preferencia porque no reconocían el uso del álgebra en ciertos problemas o simplemente porque otros métodos son más fáciles y útiles para ellos. Por ello, se incluyó la siguiente pregunta en este cuestionario.

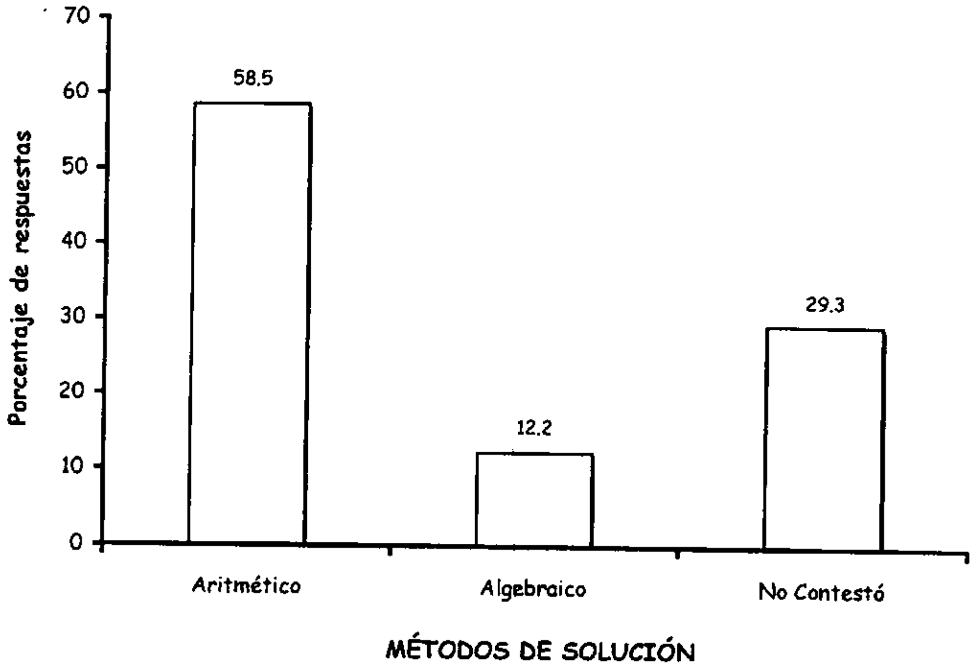

Figura 9.- Porcentaje de alumnos que eligieron varios métodos de solución de un problema escrito.

¿Puedes resolver el problema con ecuaciones o lo resolverías con otro método?

La figura 10 muestra las respuestas a la anterior pregunta y como se puede observar, aunque el 39% de los alumnos reconocen el uso de las ecuaciones en el anterior problema, sólo 12.2% (figura 9) menciona las ecuaciones como un método que ellos usarían para solucionarlo. Estas aseveraciones se ven apoyadas por las propias respuestas de los alumnos, pues algunos de ellos hacen las siguientes afirmaciones: "podría resolverlo por medio de una ecuación, ¿cuál?, no sé, todavía no me las aprendo", "yo lo resolvería por porcentajes, por ecuaciones a lo mejor, pero no me gustan".

De igual manera se nota que 48.8% de los alumnos no reconocen el uso de las ecuaciones en este problema y muy probablemente ello explique porque del total de alumnos, 58.5% (figura 9) mencionan preferir el uso de la aritmética. Estas respuestas también son congruentes con las respuestas de los alumnos al mencionar la utilidad de las ecuaciones en las diferentes actividades, pues al no ser el anterior problema meramente académico, es más difícil para los alumnos asociarlo con el uso de ecuaciones.

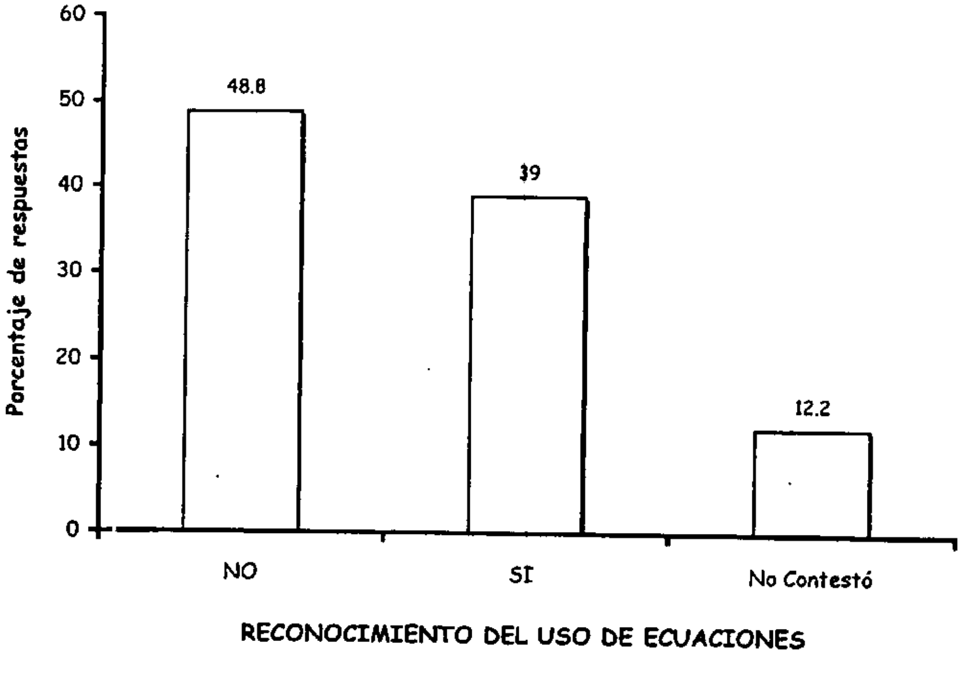

Figura 10.- Porcentaje de respuestas en la pregunta que indaga el reconocimiento del uso de las ecuaciones en un problema escrito.

3.5 EXAMEN

Con el fin de evaluar los conocimientos de los alumnos en cada grupo, los profesores elaboraron un examen que resumía los contenidos de su curso de álgebra. Dado que cada curso presentó variaciones con respecto al programa oficial (como se verá en un apartado posterior), los exámenes de cada grupo fueron diferentes (anexo 5), sin embargo, la decisión de incluirlos en esta investigación se debe a que las calificaciones oficiales fueron asignadas a los alumnos a partir de su desempeño en dicho examen y por ello se consideró que constituyen una muestra de los criterios de evaluación y el nivel de conocimientos a partir de los cuales se determina el éxito o fracaso de los cursos dentro de las propias instituciones educativas.

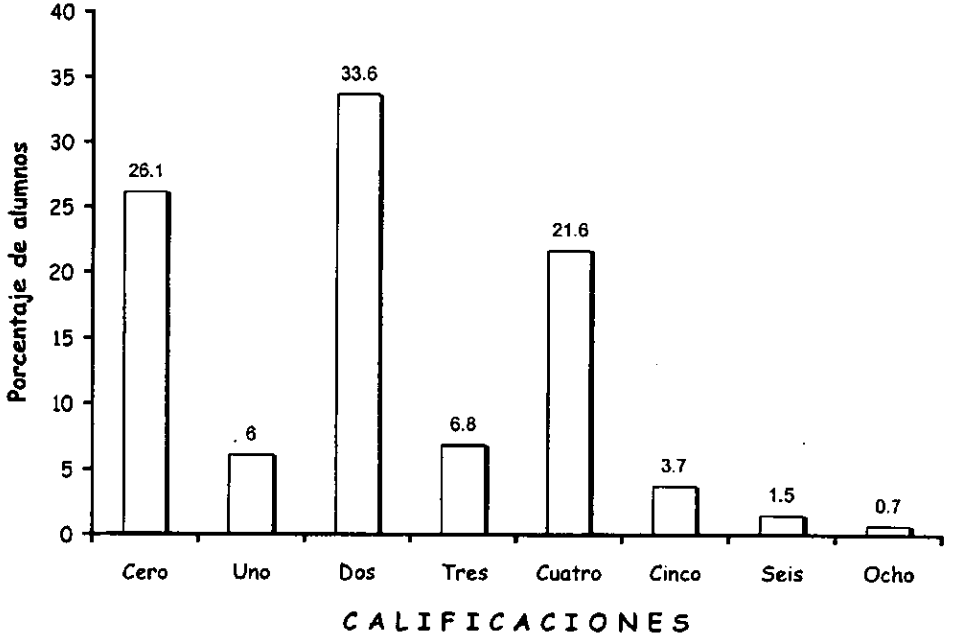

Figura 11.- Muestra el porcentaje de alumnos a los que se les asignaron diferentes calificaciones en cuatro de los cursos de álgebra.

La muestra de alumnos que se tomó para el análisis de este apartado fue de 134 alumnos de 4 de los grupos participantes en esta investigación (ningún alumno del grupo 3 presentó su examen debido a la falta de disponibilidad del profesor). La muestra total estuvo conformada por 31 alumnos del grupo 1, 49 alumnos del grupo 2, 8 alumnos del grupo 4 y 46 alumnos del grupo 5. Los resultados obtenidos se resumen en la figura 11.

Como puede observarse en la figura 11, las calificaciones de cero, dos y cuatro fueron las más frecuentes entre los alumnos y solo 2.2% obtuvieron calificaciones aprobatorias (seis y ocho). Cabe mencionar que los únicos alumnos a los que se asignaron calificaciones aprobatorias pertenecen al grupo 1, mientras que todos los alumnos de los demás grupos están reprobados en el curso de álgebra (unidad dos del programa oficial para primer semestre).

Aunque el examen en cada grupo fue diferente, ellos reflejan los contenidos del curso de álgebra en cada grupo y por tanto puede considerarse que evaluaron el nivel de conocimientos de los alumnos a partir del curso recibido por el profesor. A pesar de ello, es evidente que el proceso de enseñanza – aprendizaje del álgebra no se realiza adecuadamente, dado que los alumnos no manifiestan tener los conocimientos mínimos necesarios en el tema ni aún cuando son evaluados únicamente a partir de los contenidos vistos en el curso de álgebra, por tanto es comprensible obtener los resultados descritos en apartados anteriores cuando se aplica una evaluación externa e independiente de los contenidos del curso que recibieron.

Estos resultados reflejan la gravedad del problema que enfrentan las instituciones educativas en sus cursos de enseñanza de las matemáticas y específicamente del álgebra, pues es sabido que la materia con mayores índices de reprobación es precisamente ésta. También es preocupante considerar que si los temas de álgebra son considerados como la base para el aprendizaje de otros temas en matemáticas como podrían ser Geometría Analítica, Física o Cálculo (Guzmán, 1995), con estos resultados es fácil predecir un fracaso en dichos cursos, pues así como el álgebra se enseña sin asegurarse de que los alumnos tengan los conocimientos mínimos necesarios para aprender esta materia y se obtienen estos altos índices de reprobación, así también al no tener unas bases sólidas de los temas de álgebra, se esperan altos índices de reprobación en temas que hacen uso de estos conocimientos.

Por supuesto que el fracaso en el conocimiento y uso de esta materia tiene influencia en las actitudes y creencias que tanto alumnos como maestros manifiestan hacia las matemáticas y finalmente en el número de alumnos que elegirán carreras con altos contenidos matemáticos como son Física, Actuaría y Matemáticas.

Una de las principales críticas que se han hecho a la evaluación académica es que solo contempla criterios externos a los alumnos para determinar el desempeño en el uso de conocimientos matemáticos, sin embargo, en ésta investigación tampoco se encontraron resultados alentadores cuando se intentó conocer la utilidad y el uso que los alumnos hacen del álgebra en su vida diaria. Como lo demuestran los resultados anteriormente expuestos, los alumnos no tienen conocimientos algebraicos académicos y tampoco tienen conocimientos algebraicos prácticos, sino más bien se valen, en el mejor de los casos de la aritmética para solucionar problemas sencillos que se les presentan. En este punto, sería pertinente evaluar el nivel de exigencia de la cultura y el medio en el que se desarrollan con respecto a conocimientos algebraicos más complejos de los que fueron indagados en esta investigación.

3.6 ESCALA DE AUTOEVALUACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL PROFESOR Y LA DIDÁCTICA DEL CURSO

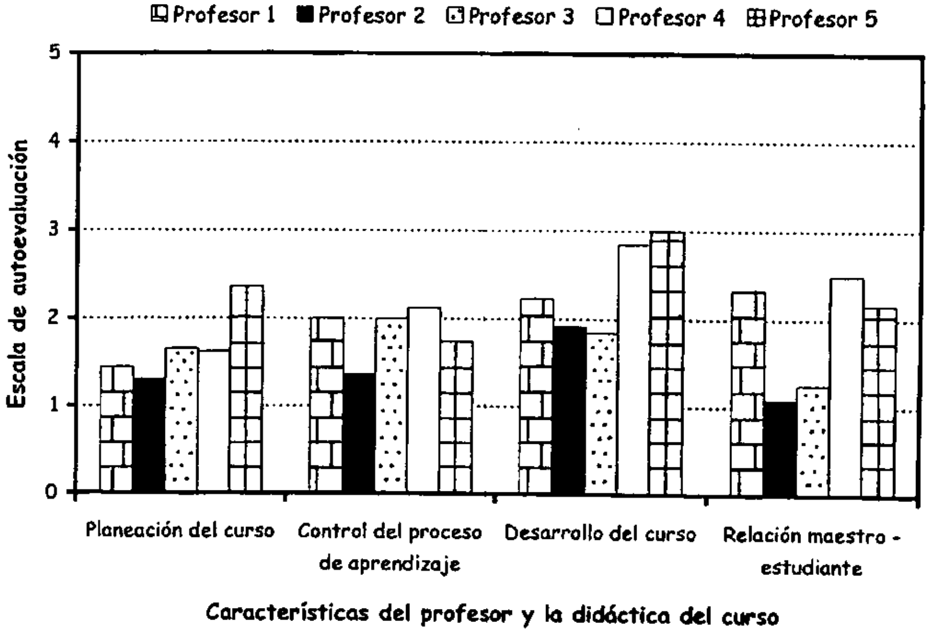

Figura 12.- Muestra la autoevaluación de los profesores en las diferentes áreas del Instrumento de Evaluación de las Características del Profesor y la Didáctica del Curso.

Las respuestas de los profesores a cada una de las preguntas del Instrumento de Evaluación de las Características del Profesor y la Didáctica del Curso son presentadas en el anexo 12. La figura 12 resume estos resultados y como se puede observar, los profesores se autoevalúan favorablemente, pues en una escala donde 1 significa siempre y 5 nunca, la mayoría los profesores se sitúan entre los números 1 y 2, es decir, consideran que casi siempre o siempre llevan a cabo las diversas actividades que se les cuestiona.

En cuanto a la planeación del curso, que evalúa la información que los profesores dan a los alumnos con respecto a los objetivos de la materia, la organización del curso, las actividades a realizar, la forma de evaluación, la relación del tema con otros temas de la misma materia y con otras materias y la recomendación de bibliografía, la mayoría de los profesores se sitúa entre siempre y casi siempre y sólo el profesor 5 considera que no siempre realiza todas estas actividades evaluadas.

En cuanto al control del proceso de aprendizaje, que evalúa los aspectos que los profesores toman en cuenta en la calificación final del curso, la relación entre los objetivos educativos y el punto anterior y la retroalimentación a los alumnos de su desempeño, existe una mayor variabilidad entre las autoevaluaciones de los profesores, sin embargo, de manera general, siguen situándose en el punto dos de la escala, que significa que casi siempre realizan estas actividades.

En lo que se refiere al desarrollo del curso, que evalúa el lenguaje usado por los profesores, el dominio del tema, el uso de métodos y herramientas didácticas, el trabajo extraclase, la asistencia y puntualidad del profesor y la vinculación de los contenidos académicos con la realidad, los profesores se sitúan entre la escala de casi siempre y algunas veces. El área en donde los profesores consideran que tienen mayores deficiencias es en el uso de métodos y herramientas didácticas como puede observarse en la tabla de anexo 12, sin embargo, en las diferentes áreas que evalúan el desarrollo del curso existen grandes diferencias entre las autoevaluaciones de los profesores. Como puede observarse en la figura 12, los profesores del grupo 4 y 5 son los que consideran no llevar a cabo todas las actividades evaluadas en esta área.

Con respecto a la relación maestro – alumno, que evalúa el diálogo académico maestro – alumno, la disposición del profesor, el reconocimiento del profesor de sus propias limitaciones, el respeto a los acuerdos con el grupo y la disposición de escuchar a temas ajenos a los de la asignatura, los profesores nuevamente regresan a ubicarse en la escala de siempre y casi siempre. De hecho, los profesores 2 y 3 son los que consideran que tienen una muy buena relación con sus alumnos y autoevalúan esta área mejor que las anteriores que se refieren a cuestiones didácticas y académicas.

De manera general, puede decirse que el profesor 2 es el que mejor se evalúa en todas las áreas del instrumento y el profesor 5 es el que reconocer tener más deficiencias. Sin embargo, dado que el investigador asistió a todas las clases de los 5 grupos en el curso de álgebra, puede mencionar que los profesores en general se autoevaluaron más favorablemente de lo que en realidad sucedió en la clase.

Por desgracia, esta investigación no contempló inicialmente una evaluación estricta de las áreas de este instrumento por otra persona ajena a los propios profesores, como pudo haber sido los alumnos o el mismo investigador, sin embargo, anecdóticamente si puede mencionarse, por ejemplo, que aunque los profesores se autoevaluaron muy favorablemente en todas las áreas, solo uno dió a conocer el temario del curso de álgebra, ninguno tomaban asistencia, muchos no daban bibliografía complementaria, no dejaban tarea y si la dejaban no la revisaban, la calificación final era generalmente lo que sacaran en el examen, no daban retroalimentación, no mostraban interés en que los alumnos aprendieran, llegaban tarde, los alumnos no se acercaban a los profesores ni siquiera para preguntarles sobre sus dudas e incluso en algunos grupos los alumnos manifestaban rechazo al maestro o la clase, al salirse del salón después de 15 minutos de haber empezado y los profesores seguían explicando aún cuando notaran que nadie les ponía atención.

Los anteriores resultados presentan la problemática de la responsabilidad de los profesores de lo que pasa en el salón de clases. ¿Cómo puede esperarse que mejoren sus técnicas didácticas y la relación con sus alumnos cuando ni siquiera perciben que pueden mejorarla?.

3.7 ENTREVISTA CON LOS PROFESORES

	Profesor 1	Profesor 2	Profesor 3	Profesor 4	Profesor 5
Profesión	Lic. Físico - Matemático	Lic. en Matemáticas	Mtro. en Investigación Educativa, Lic. en Actuaría y Contaduría	Lic. en Matemáticas	Lic. Físico - Matemático
Experiencia Docente	15 años en CCH, ESIME, UPICSA	23 años en CCH e IPN.	29 años en CCH e IPN.	17 años en CCH y UAM.	17 años en CCH, UAM e IPN.
Causa de los problemas en la educación matemática	Devaluación social del estudio, prejuicios hacia la matemática, falta de hábitos de estudio de los alumnos	Devaluación cultural de la matemática, condiciones económicas del alumno y déficit de aprendizaje en primaria.	Déficit de aprendizaje en primaria, temor al maestro, mala preparación, situación económica y falta de tiempo de los maestros, falta de recursos en las escuelas y número de alumnos.	Déficits de conocimientos, problemas personales, económicos y falta de interés de los alumnos.	Condición de vida del alumno, rechazo a las matemáticas, visión del mundo y falta de hábitos de estudio de los alumnos.
Importancia de las anteriores causas	Aspecto Social	Aspecto Económico	Vocación y conocimientos del profesor	Déficit de conocimientos de los alumnos	Intereses y valores del estudiante.
Aprendizaje de las matemáticas	El maestro transmite y el alumno construye el conocimiento	El maestro transmite y el alumno construye el conocimiento	El maestro transmite el conocimiento	El alumno construye el conocimiento.	El maestro transmite y el alumno construye el conocimiento
Papel del profesor en el proceso de enseñanza – aprendizaje	Guía y transmisor, la construcción del conocimiento es individual y el profesor nada tiene que ver	Generar conocimientos en el alumno	Transmitir el conocimiento a través del razonamiento	Tratar de enseñar	Orientar
Motivos del cambio de su didáctica	Porque se adquiere experiencia y se adecua el conocimiento a las capacidades del alumno	Por la experiencia	Porque siempre se aprende	Por que así lo indican los programas del CCH	Debido a lo que sugieren las teorías del aprendizaje
Cuáles han sido estos cambios	Hacer comentarios, generar preguntas en los alumnos, extrapolar conocimientos.	Trato de enseñar mejor a partir de la experiencia didáctica	Aplicar conceptos de grupos interdisciplinarios		Uso de cierta metodología didáctica.
Sugerencias para mejorar la enseñanza de las matemáticas	Que el profesor elabore y distribuya su material de trabajo y sugiera consultar bibliografía	Mejorar las condiciones de la escuela, las condiciones económicas de los alumnos y sus intereses, fomentar el gusto por la ciencia	Que los maestros mejoren sus conocimientos, que entiendan a sus alumnos, que tengan tiempo y recursos	Regresar a los programas originales del CCH.	Mejorar la secuencia de temas en el programa y mejorar las condiciones de vida del profesor.

Tabla17.- Respuestas de los profesores de los 5 grupos participantes en esta investigación acerca de: su experiencia, formación, creencias sobre lo que es la matemática y como debería llevarse a cabo el proceso de enseñanza - aprendizaje en el salón de clase y su función en dicho proceso.

Esta entrevista se realizó cuando cada profesor concluyó su curso de álgebra. Las respuestas de los profesores en esta entrevista se resumen en la tabla 17.

Los profesores titulares de los grupos de primer semestre del CCH que participaron en la presente investigación tienen una amplia experiencia como docentes que va de 15 a 29 años impartiendo clases a nivel bachillerato e incluso a nivel licenciatura. Todos ellos son egresados de carreras del área físico – matemática y uno de ellos tiene 2 licenciaturas y una Maestría en Investigación Educativa. En realidad no existe un consenso en las causas a las que los profesores atribuyen a los problemas en el aprendizaje de las matemáticas, pero si existe una tendencia a remarcar aspectos que tienen que ver con los alumnos (nivel de conocimientos, hábitos de estudio, nivel económico, problemas personales, rechazo a las matemáticas o falta de interés en el estudio), solamente el profesor del grupo 3 hizo más énfasis en aspectos relacionados con el profesor (vocación y conocimiento de los profesores, falta de tiempo y situación económica).

Las anteriores respuestas llaman la atención en el sentido del grado de responsabilidad que asumen los maestros en la problemática de la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, pues al mencionar como causas principales factores sociales, económicos, educativos, axiológicos y de interés de los alumnos no se refleja que estén considerando tener cierta responsabilidad en la problemática existente y por ello probablemente no sientan la necesidad de modificar radicalmente su didáctica. Esta afirmación se ve apoyada por las posteriores respuestas de los profesores, pues ellos consideran que el proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas es un proceso dividido en dos partes desvinculadas entre sí; los maestros son sólo responsables de "transmitir" el conocimiento, mientras que los alumnos deben construirlo a partir de la anterior transmisión. Por supuesto que ellos transmiten el conocimiento al exponer su tema en la clase, pero ellos no son responsables de la construcción de dicho conocimiento pues este proceso es individual y ellos "nada tienen que ver".

Para los profesores del CCH, construir el conocimiento es un proceso similar a lo que los cognitivos llaman formación de redes de conocimiento, cuya característica principal es que son individuales y privadas y por tanto la construcción de ellas las hace sólo el propio alumno (una concepción interna, según Dossey, 1992), pero se les olvida (¿o no lo saben?) que para que ello ocurra, el material didáctico, el currículum y las condiciones de enseñanza deben tener ciertas características que ayuden a los alumnos a esta construcción y es precisamente en esta parte en la que ellos pueden participar.

Resulta curioso analizar a su vez el grado de responsabilidad que los alumnos se atribuyen a sí mismos en el proceso de aprendizaje, pues como lo han reportado varias investigaciones (Newman y Stevenson, 1990; Garduño y Lozano, 1996 y Montoro y De Torres, 1997) y también fue observado en los alumnos participantes en esta investigación, generalmente ellos no asumen ninguna responsabilidad en su proceso de aprendizaje, especialmente los alumnos reprobados o que no tienen buenas calificaciones, de esta manera, los alumnos mencionan que su fracaso se debe a los profesores, a los criterios de la escuela o la clase y a las características de la materia. Aunque en esta investigación no se analizaron los procesos de atribución causal sistemáticamente, si pudo observarse, y se recibieron comentarios referentes a que el desinterés que los alumnos mostraban hacia la clase de matemáticas se debía a que los profesores "no enseñaban bien" y a que "explicaban para ellos mismos, pues nadie les entendía". Considerando que ni los alumnos ni los maestros creen tener una participación activa en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, la pregunta que surge es ¿entonces quién asume la responsabilidad de este proceso?.

Dado que existen investigaciones que afirman que las atribuciones que las personas hacen con respecto al éxito o fracaso están afectadas por el contexto social, económico, político y cultural, y por lo tanto son susceptibles de aprenderse o modificarse, valdría la pena analizar la forma en que se pueden cambiar estas atribuciones de los alumnos y profesores. Puesto que además también tienen relación con la autoestima, y posiblemente las atribuciones externas que hacen los profesores y alumnos sean una forma de proteger su autoestima ante la situación en la que no tienen expectativas de logro (Garduño y Lozano, 1996).

Las anteriores afirmaciones llevan a considerar que la educación debe centrarse en el alumno de forma integra, atendiendo los problemas y deficiencias académicas de los alumnos, pero sin dejar de lado la parte emocional.

Volviendo a los resultados de la entrevista con los profesores, se observa que aunque los profesores mencionan haber cambiado sus técnicas didácticas a lo largo de sus años de experiencia, estos cambios no han sido radicales como para cambiar sus efectos en el aprendizaje de los alumnos, pues más bien sólo han hecho más natural su exposición, intercalando comentarios y preguntas o mencionado posibles usos de los temas (en este caso el álgebra) a situaciones diversas. Esta situación es explicada debido a que un cambio más radical implica no solo un cambio de técnicas didácticas sino un cambio de concepción de lo que la matemática es, de los objetivos de la enseñanza y de las implicaciones de estos aspectos en la función de los profesores y los alumnos.

Finalmente, las sugerencias que los profesores proponen para mejorar la enseñanza de las matemáticas se enfocan a cambios en los programas, la secuencia del currículum, condiciones sociales y económicas de alumnos y profesores, en una participación de los profesores en los materiales de trabajo, en mejoras en las condiciones físicas de la escuela, en la capacitación constante de los profesores y en el desarrollo del gusto por la ciencia. De manera general, estos cambios pueden mejorar las condiciones de la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, realizar todos estos cambios a la vez es difícil y se necesita principalmente un cambio de concepción del proceso enseñanza – aprendizaje que guíe los cambios en el currículum, la didáctica y la función de los implicados en este proceso. Sin embargo, hay que tener en cuenta, como menciona Block y Dávila (1993) que también hay numerosos factores que influyen, presionan, limitan o posibilitan el trabajo de los maestros (tiempos disponibles para la enseñanza, programas escolares, exámenes externos, expectativas de la sociedad, condiciones laborales de los maestros, entre otros).

3.8 LINEAMIENTOS A CONSIDERAR EN LA DINÁMICA DE LA CLASE

La información que se presenta en la tabla 18 fue obtenida de los registros de las clases de cada grupo en el tema de álgebra.

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Forma de calificación	100% exámenes	Exámenes más puntos extra por tareas	Exámenes más puntos extra por tareas	100% exámenes	100% exámenes
Nivel de análisis en el curso	Analítico	Algorítmico	Algorítmico	Algorítmico	Analítico
Número de sesiones para el tema de álgebra	4	9	4	4	4
Porcentaje de teoría, ejercicios y actividades de vinculación	20% teoría, 30% ejercicios y 50% actividades de vinculación	40% teoría, 25% ejercicios y 35% actividades de vinculación	10% teoría, 40% ejercicios y 50% actividades de vinculación	30% teoría, 50% ejercicios y 20% actividades de vinculación	30% teoría, 30% ejercicios y 40% actividades de vinculación
Papel del profesor	Proporcionar información	Proporcionar información	Proporcionar información	Proporcionar información	Proporcionar información
Papel de los alumnos	Copiar y realizar ejercicios	Copiar y realizar ejercicios	Copiar y realizar ejercicios	Copiar y realizar ejercicios	En ocasiones ni siquiera ponían atención.
Tipo de actividades extraclase	Ejercicios y solución de problemas	Solución de problemas	Solución de problemas	Ejercicios	Solución de problemas

Tabla 18.- Muestra las áreas evaluadas en la dinámica de la clase de álgebra en los 5 grupos que participaron en esta investigación.

Como se anticipaba ya en el apartado anterior, a pesar de que los profesores consideran que sus cursos cumplen con los requerimientos didácticos necesarios, los registros realizados no corresponden con lo que ellos reportan, pues como se observa en la tabla 18, en tres grupos sólo se toma en cuenta los exámenes como calificación del curso y los dos grupos restantes asignan puntos extras sólo si los alumnos realizaron los ejercicios de tarea que eran voluntarios y principalmente enfocados a solucionar problemas. En la mayoría de los grupos se enfatizó un nivel de análisis algorítmico (es decir, solución de ejercicios) y el número de sesiones en que fue revisado el tema de álgebra fue de 4 aunque existió un grupo que lo revisó en 9 sesiones.

En cuanto al énfasis que se dió en el curso a la teoría, ejercicios y actividades de vinculación, existió mucha variabilidad entre los grupos, pero a pesar de ello, existió una tendencia a dar más énfasis a las actividades de vinculación (solución de problemas) que a la teoría o los ejercicios, sin embargo, el uso de la solución de problemas en todos los grupos estuvo enfocado en lo que Schoenfeld (1992) llama uso de problemas como contexto, principalmente en la práctica de lo aprendido en la clase. Con respecto a los ejercicios de ecuaciones lineales, cabe mencionar que el énfasis de las clases estaba en la correcta aplicación de reglas (por ello en el postest no existieron muchos errores de este tipo) y no se prestaba atención a la comprobación de los resultados como conjunto solución de la ecuación. Finalmente, la poca atención prestada a cuestiones teóricas explica el alto índice de errores conceptuales que los alumnos cometen en la solución de ecuaciones.

El papel del profesor y el de los alumnos es el papel tradicional de transmisor y receptor, pues los profesores se dedicaron a proporcionar información a los alumnos y éstos a copiar lo que el profesor ponía en el pizarrón y a resolver ejercicios o problemas que el profesor sugería en el salón de clase.

3.9 PROGRAMA OFICIAL DE LA UNIDAD 2: ECUACIONES LINEALES

A continuación se transcribe el programa para la unidad 2: ecuaciones lineales de la versión actualizada de los programas de matemáticas I para el CCH (Programa de estudio para las asignaturas: Matemáticas I y II, 1996).

Horas: 10

Temática

- Problemas introductorios; su solución por inversión de operaciones y otros métodos, por ejemplo, por medio de una tabla de valores, de una gráfica o de un modelo o diagrama geométrico.

- Métodos algebraicos de solución: operaciones con ambos miembros de una ecuación; transposición de términos y solución de ecuaciones de la forma: $ax+b=c$; $ax+bx+c=d$; $ax+b=cx+d$; y casos sencillos de ecuaciones con paréntesis.

- Planteo y solución de problemas que conducen a ecuaciones lineales.

Objetivos educativos

Objetivo particular: El propósito de esta unidad es que el alumno desarrolle su habilidad para el planteo de problemas que conducen a ecuaciones lineales y su solución por métodos algebraicos. El profesor deberá tomar en cuenta que éste es un tema conocido por los alumnos desde la secundaria por lo que en lugar de caer en repasos sistemáticos, deberán enfatizarse las actividades que permitan revisar lo olvidado y dotar de sentido a los procedimientos algebraicos.

Objetivo específico: Al finalizar la unidad el alumno sabrá plantear y resolver por métodos algebraicos problemas que dan lugar a una ecuación lineal operando con ambos lados de la igualdad, transponiendo términos de un lado a otro y aplicando, cuando se requiera, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.

Estrategias de enseñanza – aprendizaje

- Usar modelos algebraicos lineales en situaciones concretas cercanas al estudiante para despertar su interés y atención hacia los tópicos que se abordan, en función del significado que poseen para él y de la utilidad práctica de tales conocimientos.

- Diversificar los problemas que se resuelven mediante el uso de ecuaciones lineales para enfatizar que una misma técnica puede: a) utilizarse en diferentes contextos, b) servir de fundamento para otras técnicas de resolución de problemas.

- Introducir casos de ecuaciones con decimales sólo hasta que los estudiantes hayan comprendido las técnicas de resolución en casos más simples. Obtener soluciones exactas y aproximadas de ecuaciones con decimales. Modelar y resolver problemas que involucren operaciones con fracciones.

- Destacar la relación entre ecuaciones y funciones de primer grado considerando a las primeras como casos especiales de estas últimas al adoptar alguna de las variables involucradas un valor específico.

- Solicitar un trabajo de investigación a los estudiantes sobre el desarrollo histórico del álgebra en relación al planteamiento y solución de ecuaciones lineales.

Bibliografía

- Larson, H. Álgebra Universitaria, capítulo 2. Publicaciones Cultural, México, 1996.

GRUPO	SESIÓN	TEMA (Ejercicios)	TAREAS
GRUPO 1	1	Definición de ecuación y ejemplos Reglas de transformación de ecuaciones Definición de ecuaciones equivalentes Solución de ecuaciones (8)	
	2	Solución de ecuaciones (4) Solución de problemas escritos (3)	Solución de 6 ejercicios de la guia.
	3	Solución de problemas escritos (4)	
	4	Solución de problemas escritos (7)	
GRUPO 2	1	Razones y variación (10) Descripción del programa para el tema de ecuaciones lineales	
	2	Método de aproximaciones sucesivas (3) Solución gráfica de ecuaciones lineales (4) Solución algebraica de una ecuación lineal (4) Definición de ecuación y reglas de transformación	
	3	Resumen de la clase anterior Solución de ecuaciones (4) Reglas de transformación de ecuaciones	
	4	Despejes (2) Solución es ecuaciones (4)	
	5	Solución de ecuaciones (10)	
	6	Despejes (10) Representación algebraica de oraciones (7) Solución de problemas escritos (8)	
	7	Problemas de razón y variación (6) Solución de problemas escritos con ecuaciones (6)	Solución de un problema.
	8	Solución de problemas escritos con ecuaciones (7)	
	9	Resumen de la unidad de ecuaciones lineales (tablas, gráficas y ecuaciones)	

Tabla 19.- Muestra la descripción y secuencia de temas de cada grupo en la unidad 2: Ecuaciones Lineales de la materia de Matemáticas I (continua en la siguiente página).

GRUPO 3	1	Representación algebraica de enunciados (2) Solución de problemas escritos (6) Solución de ecuaciones (1)	Solución de 3 problemas escritos
	2	Revisión de un problema de tarea. Solución de problemas (1)	
	3	Solución gráfica y algebraica de un problema escrito. Solución de sistemas de ecuaciones (6 determinantes)	Resolver un problema escrito
	4	Solución gráfica de ecuaciones (4) Solución de determinantes (2) Solución de ecuaciones (3)	
GRUPO 4	1	Solución de problemas escritos a través de tablas y representación algebraica (2) Definición de ecuación lineal y ecuación equivalente Identificación de las partes de una ecuación (miembro, factor, término) Reglas de transformación de ecuaciones Solución de ecuaciones (7)	
	2	Solución de ecuaciones con coeficientes enteros (3) Solución de ecuaciones con coeficientes racionales (5) Solución de ecuaciones con variables en ambos miembros (3) Representación gráfica de una ecuación lineal	
	3	Representación gráfica de ecuaciones lineales (3) Solución de ecuaciones (8)	Resolver 80 ejercicios
	4	Revisión de algunas ecuaciones de tarea (10) Solución gráfica y algebraica de problemas escritos (3) Solución de problemas escritos a través de ecuaciones (3)	
GRUPO 5	1	Prioridad en las operaciones (10) Traducción de problemas escritos al lenguaje algebraico (3)	Solución de un problema escrito
	2	Solución del problema de tarea Solución de problemas escritos (2)	Solución de un problema escrito
	3	Solución de problemas escritos (13)	
	4	Definición del concepto de ecuación, ecuaciones equivalentes, solución de ecuaciones, tipos de ecuaciones, reglas de transformación. Solución de problemas escritos (3) Solución de ecuaciones (6)	Sacar los números primos del 1 al 100. Solucionar problemas

Tabla 19.- Muestra la descripción y secuencia de temas de cada grupo en la unidad 2: Ecuaciones Lineales de la materia de Matemáticas I (continuación).

El análisis del cumplimiento del programa oficial por parte de los profesores de cada grupo se realiza a partir de la temática, las actividades extraclase y las estrategias de enseñanza – aprendizaje usadas en el curso, pero antes de ello se presenta un resumen de los registros de las clases en cada grupo (ver tabla 19).

ANÁLISIS POR GRUPO

GRUPO 1

En este grupo, la secuencia temática propuesta por el programa oficial no se respeta, pues se comienza directamente con cuestiones teóricas y solución de ecuaciones sin introducir el tema a partir de la estrategia de solución de problemas, tampoco se usan gráficas, tablas de valores o modelos geométricos para solucionar los problemas propuestos, sino sólo se hizo énfasis en el método algebraico. En cuanto a las estrategias didácticas, se usaron problemas que planteaban situaciones diversas y concretas cercanas al estudiante, usando números enteros, decimales y fraccionarios. Sin embargo, existió poco trabajo extraclase, no hubo trabajo de investigación, ni se relacionaron las ecuaciones con las funciones. Finalmente, puede mencionarse que el tema se revisó en menos tiempo del propuesto por el programa oficial.

GRUPO 2

La secuencia temática en este grupo fue respetada en cuanto a su secuencia, sin embargo, se agregaron temas que no fueron originalmente propuestos por el programa oficial, por ello, en este grupo se uso más tiempo del sugerido para revisar el tema de ecuaciones lineales. En cuanto a las estrategias didácticas, se usaron una gran cantidad de problemas diversos y cercanos al estudiante y se manejaron números enteros y fraccionarios. Aunque en este grupo se hizo un buen manejo de las representaciones múltiples de las expresiones algebraicas y de la solución de problemas en el salón de clase, casi no existió trabajo extraclase o trabajos de investigación.

GRUPO 3

En este grupo no se hizo énfasis en la solución de ecuaciones, sino que desde un inicio se manejó la solución de problemas a través de diversas representaciones (gráfica y algebraicas) y se incluyó el tema de determinantes que no está originalmente en el programa oficial. Con respecto al tiempo dedicado al tema de ecuaciones, en este grupo se empleó menos del propuesto por el programa oficial. En lo que respecta a las estrategias didácticas, los problemas propuestos por el profesor en algunos casos no fueron tan cercanos a los alumnos, pues el profesor usaba problemas de un libro llamado "El hombre que calculaba" donde se proponen problemas matemáticos clásicos. Aunque el profesor ocasionalmente dejó ejercicios de tarea, la solución de estos ejercicios fue voluntaria y eran muy pocos los alumnos que los resolvían, además de que no se dejaron trabajos de investigación.

GRUPO 4

En este grupo se cambió ligeramente la secuencia de los temas del programa oficial pues la representación gráfica se presenta al final, además de que se hace más énfasis en la solución de ecuaciones que en la solución de problemas. El tiempo empleado en este grupo para la unidad de ecuaciones lineales fue menor que el propuesto en el programa oficial. Los problemas propuestos estuvieron adecuados al contexto de los alumnos, no se usaron ecuaciones con decimales y en una ocasión se dejó de tarea la solución de 80 ejercicios que no contaron para la calificación en el curso, pero que si fueron en su mayoría revisados en clase. En este grupo tampoco se dejaron trabajos de investigación.

GRUPO 5.

En el grupo 5 no se explicó la solución de problemas por métodos gráficos o de tablas, y la solución de ecuaciones se presentó al final del curso. En este grupo también se empleó menos tiempo del propuesto para la unidad de ecuaciones lineales. Algunos de los problemas propuestos no estuvieron acordes con situaciones cotidianas de los alumnos, pues al igual que en el grupo 3, fueron problemas matemáticos clásicos. En este grupo fue en el que el profesor dejó más ejercicios de tarea, sin embargo no contaban para la calificación final y muy pocos fueron revisados en clase.

ANÁLISIS GENERAL

Se puede afirmar que ningún maestro respetó el plan de estudios oficial del CCH, pues todos, en menor o mayor medida cambiaron la secuencia de presentación o los contenidos temáticos, de la misma manera, tampoco se respetó el tiempo propuesto para revisar la unidad de ecuaciones lineales pues la mayoría de los profesores le dedicó menos tiempo del propuesto y solo en un grupo se usaron 3 sesiones más de las sugeridas. En cuanto a la complejidad de las ecuaciones y problemas presentados éstos variaron también en cada grupo, pues mientras en unos ni siquiera de dedicó tiempo a la solución de ecuaciones en sí mismas, en otros la complejidad de las ecuaciones fue el principal tema de la unidad y se usaron ecuaciones de una complejidad mayor a la propuesta por el programa oficial. Esta observación es importante puesto que a partir de los criterios de esta investigación y de los criterios de los propios maestros, los alumnos no logran obtener calificaciones aprobatorias, sin embargo, si se consideran los criterios del programa oficial, que son menos ambiciosos, posiblemente el número de alumnos aprobados aumentaría, pues existe menos demanda de conocimientos por parte de los alumnos.

En cuanto al incumplimiento de los objetivos oficiales en los cursos de álgebra, Sepúlveda y García (1984) han reportado que también se presenta en el Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios, y ellos atribuyen esta situación a las siguientes causas:

- Al crecimiento de la población escolar que trae aparejado un crecimiento en el número de profesores y el sistema no ha sido capaz de transmitirles con claridad los objetivos de los cursos que deben impartir, además de que no son claros ni los contenidos ni los objetivos de los programas. A ello se aumentaría el hecho de que muchos profesores no se identifican con los programas oficiales por no haber participado en la conformación de los mismos.

- Hay objetivos en el curso del álgebra que no son alcanzados ni por los mejores alumnos en la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas, los despejes, las simplificaciones y operaciones con expresiones algebraicas. Uno de los motivos es que ciertas habilidades algebraicas básicas necesarias para alcanzar tales objetivos no son dominadas de manera completamente satisfactoria. El incumplimiento de los objetivos en los cursos de álgebra es importante dado que otros cursos del bachillerato basan sus objetivos en lo que no se logro en el curso de álgebra.
- El tiempo dedicado al curso es insuficiente para cubrir los objetivos dado que los alumnos presentan muchas deficiencias. Posiblemente por ello, generalmente los cursos no se concluyen.
- Existe un gran número de alumnos por grupo.

En cuanto a la diversidad de problemas presentados en los salones de clase, se encontraron problemas de representación algebraica de expresiones simples, problemas de edades, de encontrar números, de mezcla de líquidos, de ganancias en diferentes planes de ahorro, de encontrar distancias o velocidades, de proporciones, entre otros. Como se mencionaba en apartados anteriores, esta diversidad de problemas presentados dan una idea a los alumnos del uso de ecuaciones para solucionar problemas, pero fuera de la escuela, este método no es usado para resolver problemas similares a los modelados en clase. Además, aunque el programa oficial sugiere el planteamiento de problemas por parte de los alumnos, en ningún grupo existió este planteamiento, pues todos los problemas vistos en clase fueron propuestos por el profesor o extraídos de los libros de texto. En la mayoría de los grupos se hizo énfasis en la solución de problemas, pero sólo a nivel de práctica, como lo menciona Schoenfeld (1992).

Dentro de las estrategias didácticas también estuvo ausente la relación entre ecuaciones y funciones, que según Kathleen (1995) es fundamental cuando se revisa el tema de álgebra y finalmente, las actividades extraclase fueron muy escasas y generalmente eran voluntarias o no se revisaban en clase, ésto debido a que los profesores consideraban que tenían un gran número de alumnos por grupo y que no tendrían tiempo para revisar las tareas y por la misma razón, tampoco se pidió el trabajo de investigación propuesto en el programa oficial, a pesar de que Sfard (1995) ha resaltado la importancia de relacionar la historia del álgebra con su práctica.

En cuanto a los temas evaluados en el instrumento de prerrequisitos, los profesores de los 5 grupos generalmente no repasan o evalúan estos conocimientos básicos para la unidad de ecuaciones lineales en sus alumnos, puesto que parten de la suposición de que son conocimientos que los alumnos deben de tener. Solamente en el grupo 4 se mencionaron las partes de la ecuación y en el grupo 5 la prioridad en las operaciones.

Es interesante contrastar la situación anterior con las observaciones hechas por Álvarez, García y Santos (1995) quienes reportan que los problemas de manipulación aún no han sido superados por la mayoría de los estudiantes de segundo año de secundaria, que es el grado donde tienen el primer contacto formal con el álgebra y en particular con las técnicas para la solución de ecuaciones. Sin embargo, los profesores de secundaria en muchas ocasiones no prestan la importancia debida porque suponen que es un tema que retomarán en niveles posteriores. De esta manera, las deficiencias en el aprendizaje del álgebra se pasan por alto en secundaria pues los profesores suponen que dada la importancia del tema, será retomado a nivel bachillerato, y en este último nivel no se retoman ampliamente pues se supone que fue un tema visto a nivel secundaria.

Uno de los objetivos de la enseñanza del álgebra a nivel bachillerato es el de servir a los alumnos como una herramienta para poder resolver problemas, tanto en el contexto del álgebra, como en contextos extra – algebraicos como son la Física, Geometría Analítica y el Cálculo Diferencial e Integral. Sin embargo, la investigación realizada por Guzmán (1995) muestra que alumnos de las carreras de Ecología, Agricultura, y Sistemas Computacionales que habían recibido cursos de Álgebra Simbólica, Física y Geometría Analítica en la Universidad usaron estrategias pre – algebraicas para resolver problemas de Física y Geometría Analítica. Estos resultados muestran las consecuencias del incumplimiento de los objetivos que se le asignan al álgebra en la currícula escolar.

3.10 ANÁLISIS DEL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA EN CADA GRUPO

		GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3	GRUPO 4	GRUPO 5
Características del curso	Énfasis en la teoría	20%	40%	10%	30%	30%
	Énfasis en la solución de ecuaciones	30%	25%	40%	50%	30%
	Énfasis en la solución de problemas	50%	35%	50%	20%	40%
	Tareas	Ecuaciones y problemas	1 problema	4 problemas	80 ecuaciones	4 problemas
	No. de sesiones	4	9	4	4	4
Características de los alumnos	Conocimientos pre – algebraicos	47.7%	49.5%	44.9%	49.4%	40.4%
	Solución de ecuaciones antes del curso	1.38	1.38	1.82	1.58	1.29
	Solución de ecuaciones después del curso	3.60	4.61	3.70	4.04	3.03
	Método algebraico correcto	12.5%	18.4%	13.3%	52%	0%
	Método algebraico incorrecto	50%	10.5%	66.7%	12%	50%

Tabla 20.- Características del curso de álgebra en cada grupo y de los conocimientos previos y posteriores al curso por parte de los alumnos

Con la finalidad de comprender el desempeño general de cada grupo, se realizó una integración de los resultados presentados en apartados anteriores (ver tabla 20).

En el grupo 1 se enfatizó la solución de problemas a través del álgebra, más que la solución de ecuaciones y la teoría, lo cual se refleja en el porcentaje de alumnos que usaron el método algebraico para intentar solucionar un problema dado, aunque por desgracia, tuvieron más fracasos que éxitos. Ésto puede deberse a que si bien es cierto que se enfatizó la solución de problemas a través de este método, fue el profesor el que modelo la mayor parte de los mismos y los alumnos realizaron muy poco ejercicios por sí solos y además sin retroalimentación por parte del profesor. Aunque los alumnos llegaron con un deficiente nivel de conocimientos pre – algebraicos, este nivel fue mayor que en otros grupos (3 y 5), pero aun así, su habilidad para solucionar ecuaciones no mejoró en gran medida.

En el grupo 2 los alumnos iniciaron con el mayor nivel de conocimientos pre – algebraicos de la muestra de los 5 grupos participante en esta investigación, lo cual, sumado a que el curso también fue más largo que en los otros grupos y se puso especial atención en la teoría más que en la solución de problemas o en la solución de ecuaciones, los alumnos del grupo 2 muestran una mayor habilidad para solucionar ecuaciones más complejas de las que fueron solucionadas por los otros grupos, además de que dejaron menos ejercicios sin contrastar a pesar de que no siempre los resolvieron correctamente (adquirieron seguridad para intentar solucionar ejercicios que era considerados difíciles). Sin embargo, dado que no se puso demasiado énfasis en la solución de problemas y los alumnos casi no realizaron ejercicios al respecto, fue el grupo que usó el método algebraico en menos ocasiones para intentar solucionar un problema dado, aunque cuando lo hicieron, tuvieron más éxitos que fracasos.

En el grupo 3 se puso más atención a la solución de problemas y a la solución de ecuaciones que a la teoría y ello tuvo un impacto en la tendencia a usar el método algebraico para solucionar el problema dado, pues en este grupo fue en el que se usó con más frecuencia este método, aunque por desgracia, la mayoría de las ocasiones tuvieron más fracasos que éxitos, posiblemente porque no contaban con un buen conocimiento pre – algebraico y no se prestó atención al aspecto teórico en la clase. Con respecto a la habilidad de solucionar ecuaciones, podemos decir que a pesar de haber sido el grupo que resolvió más ecuaciones en el pretest, no logró superar a los demás grupos en el postest.

En el grupo 4 se puso más énfasis en la solución de ecuaciones (mecanización), tanto en el salón de clases, como en las tareas realizadas, por lo que su habilidad para solucionar ecuaciones mejoró después de la clase de álgebra aunque no superó al grupo 2 a pesar de haber realizado mucho más ejercicios. Lo anterior puede deberse a que se enfatizó más el aspecto mecánico que el teórico durante el curso y por ello, en las evaluaciones de solución de ecuaciones previas y posteriores al curso no intentaban solucionar ecuaciones más complejas de las que fueron presentadas por el maestro, pues no tenían confianza en sus conocimientos para intentar solucionar ecuaciones nuevas sino sólo en su habilidad para repetir los procedimientos que habían sido ejercitados previamente. La anterior afirmación se ve apoyada si recordamos que este grupo fue el que dejó más ejercicios sin contestar y cuando intentaban solucionar una ecuación era debido a que sabían como desarrollar los algoritmos adecuados, por lo cual, tuvieron más éxitos que fracasos. A pesar de que en la clase no se puso énfasis en la aplicación de los conocimientos aprendidos (solución de problemas), los alumnos usaron el método algebraico para solucionar el problema dado con mayor frecuencia y éxito que los demás grupos. Las explicaciones para estos resultados son difíciles de encontrar, pero se plantean las siguientes hipótesis:

- El haber puesto más énfasis en la solución de ejercicios permitió a los alumnos ser capaces de plantear la ecuación que solucionaba el problema y resolverla exitosamente.

- Aunque los datos de este grupo y los del grupo 2 son muy similares en cuanto al nivel de conocimientos pre – algebraicos y a la habilidad desarrollada para solucionar ecuaciones, tal vez las comparaciones entre ellos deben hacerse con ciertas reservas puesto que en el grupo 4 el profesor no asignó puntos extras a los alumnos que entregaron las evaluaciones de las que consta esta investigación, como sucedió en el grupo 2, lo cual implica que los alumnos del grupo 4 que se incluyeron en el análisis fueron los más responsables y probablemente los que tenían mejores habilidades algebraicas, mientras que en el análisis del grupo 2 se incluyeron a todos los alumnos del grupo, por lo cual, los datos comparativos son el promedio de los alumnos de alto y bajo nivel de conocimientos algebraicos. Si esto es cierto, podríamos suponer que el mayor nivel de conocimientos pre – algebraicos y el énfasis en la solución de ecuaciones fue lo que permitió a los alumnos del grupo 4 ser capaces de plantear una ecuación a partir de un problema escrito y encontrar la solución.

La anterior diferencia metodológica entre el grupo 2 y los demás grupos puede explicar las similitudes encontradas entre ellos a pesar de que en el grupo 2 se dedicó más tiempo a revisar el tema y se puso más énfasis en la teoría que en el desarrollo de habilidades mecánicas.

En el grupo 5, la clase de álgebra estuvo muy equilibrada en cuanto a teoría, ejercicios de solución de ecuaciones y solución de problemas a través del método algebraico, sin embargo, existió muy poco trabajo extraclase. Con respecto al conocimiento de los alumnos, en este grupo se mostró el más deficiente nivel de conocimientos previos al álgebra (en comparación con los demás grupos) y no lograron superar estas deficiencias con la clase de álgebra en el nivel bachillerato, pues en este grupo se presentan más dificultades en la solución de ecuaciones y en el uso del método algebraico para solucionar problemas (aunque lo usaron, nunca tuvieron éxito con este método).

El análisis comparativo entre el nivel de conocimientos, habilidades y aplicación del álgebra desarrolladas en cada grupo, permite reflexionar acerca de la importancia que tienen los siguientes factores en el nivel de conocimiento algebraicos que los alumnos alcanzan en la escuela:

1) El nivel de conocimientos pre – algebraicos con que cuentan los alumnos antes de revisar este tema puede ser un aspecto que favorezca o limite el nivel de conocimiento algebraico logrado por los alumnos.

2) El nivel de conocimientos previos al álgebra no predice, por si mismo, el nivel de habilidad para solucionar ecuaciones alcanzado por los alumnos después del curso recibido, pues este depende también de las características del curso.

3) El diagnóstico acerca del nivel de conocimientos pre – algebraico de los alumnos antes de las clases de álgebra (que estuvo ausente en todos los grupos) podría permitir dar al curso un enfoque basado en las necesidades de los alumnos, por ejemplo, si los alumnos presentan problemas conceptuales, privilegiar la teoría más que el desarrollo de habilidades mecánicas.

4) El énfasis puesto en la clase a la teoría, la solución de ecuaciones (mecanización) y a la solución de problemas (aplicación del conocimiento algebraico) tiene importantes efectos en el tipo de habilidad desarrollada en los alumnos.

5) El énfasis en la teoría permite una mejor habilidad y confianza en los alumnos para solucionar ecuaciones a pesar de no haber realizado tantos ejercicios durante el curso. Con ello no se evitan errores de procedimiento y de regla (para ello se necesita hacer énfasis en la mecanización), pero si se garantiza una mayor comprensión de lo que se hace al solucionar ecuaciones y por ello, se facilita la extrapolación de dichos conocimientos a otras ecuaciones no vistas en clase.

6) El énfasis en la mecanización puede mejorar la solución de ecuaciones similares a las que fueron ejercitada, pero no permite la extrapolación de conocimientos a ecuaciones diferentes. Es importante hacer esta distinción pues el desempeño de dos grupos puede ser similar en cuanto a la calificación final obtenida (tal como sucedió entre el grupo 2 y 4), pero por diferentes razones: en uno se realizan muchos ejercicios de mecanización similares a los que se usan en la evaluación final del curso y ello probabiliza que los alumnos resuelvan correctamente la mayoría de ellos, mientras que en el otro se pone más atención en la comprensión, y aunque pueden tener más fracasos por no dominar los procedimientos y el uso de reglas, son capaces de usar estos conocimientos en ecuaciones que no les han sido modeladas previamente. Finalmente, estas observaciones ponen de manifiesto la importancia de desarrollar tanto habilidades conceptuales como habilidades mecánicas en los cursos de álgebra.

7) En énfasis puesto durante el curso en la solución de problemas a través del álgebra se vio generalmente reflejado en la tendencia a usar este método en la solución de nuevos problemas donde no se especifica el uso de algún método en particular. Esta tendencia en el uso del método algebraico tiene más posibilidades de ser útil para encontrar la solución de un problema cuando la clase pone énfasis también en el desarrollo de habilidades de solución de ecuaciones, ya que no es suficiente con saber plantear la ecuación que resuelve el problema, sino que además es necesario tener un nivel adecuado de habilidad mecánica para poder resolver la ecuación planteada.

8) Es necesario que los alumnos pongan en práctica lo que los maestros modelan en el salón, pues en la mayoría de las ocasiones sólo se explica y se resuelven ejercicios en clase sin fomentar que los alumnos realicen sus propios ejercicios y resuelvan problemas por si mismos (e incluso que planteen problemas) y cuando se dejan tareas con este propósito no se revisan. En este sentido puede ser útil el uso de programas educativos por computadora que permiten la ejercitación de habilidades algebraicas además una retroalimentación inmediata (ver Gómez y Pavón, 1996).

9) Hay que considerar que dado que el aprendizaje es un proceso individual, los resultados presentados aquí por grupo no necesariamente son válidos para cada uno de los alumnos de los mismos (pues se muestra el promedio de ejecución de todos ellos). Esto puede constatarse al compara este análisis general (que incluye a todos los sujetos de cada grupo), con el análisis más fino realizado con los 5 alumnos de cada grupo, pues no todos ellos muestran el patrón de ejecución reportado aquí para el grupo al que pertenecen.

10) Finalmente, es importante no olvidar algunas otras variables que pueden haber influido en el proceso de enseñanza – aprendizaje del álgebra en cada uno de los grupos y que no fueron analizadas sistemáticamente en este trabajo, como podrían ser: el interés de los estudiantes en la materia, las asistencias a las clases, las características de personalidad del profesor, la relación maestro – alumno, el tiempo dedicado al curso, entre otros. Posiblemente algunas de estas variables podrían aportar más elementos para explicar el bajo rendimiento de los alumnos en el curso de álgebra.

4. CONCLUSIONES

Con respecto a las preguntas que se plantearon en esta investigación podemos obtener las siguientes conclusiones que son presentadas por apartados.

4.1 CONOCIMIENTOS PREVIOS AL ALGEBRA

El programa oficial de álgebra y los maestros en CCH parten de la suposición de que los alumnos de primer semestre cuentan con los conocimientos básicos para iniciar el estudio del álgebra pues en los cursos de matemáticas de secundaria debieron haber revisado este tema. A partir de esta suposición, ni siquiera se da un repaso del tema, sino más bien, el objetivo que se pretende es desarrollar habilidades de planteamiento y solución de problemas por métodos algebraicos. Sin embargo, como se encontró en esta investigación, los alumnos no cuentan con esos conocimientos mínimos para iniciar el estudio del álgebra en la escuela, pues presentan graves errores conceptuales en temas como: identificación de las propiedades de los números reales, prioridad en las operaciones, identificación de las partes de una ecuación, reducción de términos semejantes, representación algebraica de oraciones. Los anteriores resultados demuestran que la suposición de la que parten los maestros y los programas educativos es errónea ya que los alumnos no tienen los conocimientos suficientes para iniciar el estudio del álgebra. Se les olvida, como menciona Schoenfeld (1992), que los estudiantes no sólo fallan en el dominio de ideas abstractas en los contenidos que acaban de ser enseñados, sino también fallan al dominar las habilidades básicas que ellos habían aprendido con éxito previamente.

La situación anterior nos lleva a plantear una serie de cuestionamientos acerca de la enseñanza de las matemáticas en la escuela y el grado de asimilación de esta materia por parte de los alumnos: ¿Cuáles son los conocimientos que los estudiantes están realmente adquiriendo sobre matemáticas en los ciclos escolares? (Sepúlveda y García, 1995), ¿Cuál es la validez de los instrumentos con que se determina el dominio de los conocimientos, pues no se evalúa su aplicabilidad, sino sólo la habilidad mecánica inmediata de los alumnos para resolver ejercicios?. Por desgracia, la educación matemática en México (y no dudo que en muchos países del mundo) no esta diseñada para crear una red de conocimientos que permita la generación de otros conocimientos más amplios, por lo tanto, se crean rezagos de conocimientos que se originan en los niveles básicos y que no pueden solucionarse en niveles posteriores, por lo que se pasan por alto pretendiendo aparentar que no tienen influencia en el nivel actual.

A la luz de estos resultados, los objetivos educativos son muy ambiciosos si se considera el nivel inicial real de conocimientos de los alumnos. Similares consideraciones han sido reportadas por Medina y Peralta (1997) y Peralta y Medina (1997), quienes desde una perspectiva piagetiana afirman que: "la demanda de habilidades cognitivas en el ámbito académico es excesiva para el alumno, ya que el repertorio de operaciones formales que poseen los estudiantes, a menudo no coincide con el que se requiere para aprender lo que se pretende enseñar". De igual manera, Sepúlveda y García (1995) opinan que dado que existe un deficiente conocimiento de los sistemas numéricos y sus propiedades, así como de las habilidades operatorias, esta situación constituye la base para la deficiencia en las estructuras conceptuales y habilidades operatorias más complejas, particularmente las algebraicas, que se sitúan en un nivel de mayor abstracción y complejidad estructural. Puesto que el álgebra es la herramienta matemática de mayor importancia para el acceso a las matemáticas superiores y para la solución de problemas en diferentes contextos (Física, Química, Administración, Ingeniería) que son abordados en el bachillerato y a nivel superior, podríamos esperar deficientes conocimientos y habilidades en estas áreas, como de hecho ha sido reportado por Guzmán (1995).

Debido a la situación anterior, es un error no considerar el nivel inicial real de conocimientos de los alumnos para decidir desde donde es necesario iniciar los cursos en el CCH, pues de lo contrario, se tiende a una enseñanza sin cimientos conceptuales que llevará, en el mejor de los casos, al desarrollo de habilidades mecánicas sin la comprensión necesaria y al rápido olvido de lo "aprendido". Esta problemática nos lleva a analizar los actuales objetivos educativos de la enseñanza de las matemáticas a todos los niveles, y encontramos que dichos objetivos están basados principalmente en el cumplimiento de programas sin considerar el real desarrollo de conocimientos prácticos en los alumnos. Dada la anterior situación, varios autores (Schoenfeld, 1992; Harvey, Waits y Demana, 1995 y Knijnik, 1997) han apoyado el cambio de objetivos educativos actuales.

4.2 ERRORES Y SU FUNCION EN LA ENSEÑANZA

Con respecto a la estabilidad o inestabilidad en el tipo de respuestas formuladas por los alumnos en la solución de ecuaciones, en esta investigación se encontró que existen errores como los conceptuales, que se presentan muy frecuentemente y que manifiestan graves errores de comprensión, mientras que los errores de regla y procedimiento fueron menos frecuentes, por lo que pueden denotar equivocaciones (de acuerdo a la clasificación de Norman, 1981, citado en Payne y Squibb, 1990) que fueron muy probablemente azarosas. Los resultados anteriores son relevantes, puesto que como menciona Peralta y Medina (1997), el éxito de la enseñanza depende de saber la causa de las dificultades en el aprendizaje y en este sentido, se vuelve relevante no dejar pasar como "descuidos de los estudiantes" errores de cálculo que en realidad son reflejo de una estructura conceptual incompleta o deficiente que hay que corregir.

En la enseñanza de la matemática, el estudio sistemático de los errores ayuda a comprender las dificultades que presentan diversos temas y permite diseñar procedimientos de enseñanza adecuados, por ello, Mancera (1991) propuso generar categorías que permitan tener un diagnóstico más preciso del tipo de errores más frecuentes que cometen los alumnos, con lo cual se contaría con información necesaria para el diseño de estrategias remediales. En este sentido, la clasificación de errores y equivocaciones que se usó en esta investigación, basada en la forma en que se llevan a cabo los procesos simbólicos, permitió lograr el anterior objetivo.

Tanto Mancera (1991), como Medina y Peralta (1997) y Peralta y Medina (1997), han identificado algunas causas de los errores más frecuentes que se encontraron en esta investigación, las cuales se presentan a continuación: los profesores dan explicaciones intuitivas que se generalizan equivocadamente; el uso inadecuado del lenguaje que hacen los profesores en el aula, pues se abusa del deletreo y se evita "hablar matemáticas" con toda la propiedad y el argot específico de la materia; el uso de métodos que desarrollan los alumnos y que son válidos sólo en casos especiales y la falta de conocimientos teóricos amplios por parte de los estudiantes.

Gran parte de los errores que cometen los alumnos se debe a la concepción del mundo que poseen, y que con frecuencia difiere de la concepción científica y matemática que se les pretende enseñar, en congruencia con ésto, las formas en que los alumnos utilizan el lenguaje y piensan las matemáticas difiere mucho del lenguaje matemático del ámbito académico, lo que dificulta la enseñanza de la matemática académica. Por ello, Bell (1995) ha propuesto utilizar una estrategia didáctica llamada "diagnóstico de enseñanza", la cual consiste principalmente en provocar conflictos cognitivos y discusiones intensivas de puntos conceptuales críticos, y se ha mostrado que es notablemente más efectiva en la retención de conocimientos a largo plazo que los métodos usuales. El principal propósito es proporcionar un contexto en el cual las concepciones erróneas sean más fácilmente tratadas.

Un ejemplo de esta propuesta puede ser que ante el problema "Se deben repartir $70.^{00} entre tres personas, de modo que la primera reciba $5.^{00} más que la segunda y ésta $10.^{00} más que la tercera, ¿cuánto le toca a cada persona?", se pida a los alumnos que representen x como la primera, segunda y tercer persona alternativamente con el propósito de: mostrar la posibilidad de usar la x para representar a las diferentes personas, observar las diferentes ecuaciones que resultan, y enfatizar la interpretación del resultado en cada ecuación. Las ecuaciones resultantes en este ejemplo serían:

$x + x - 5 + x - 15 = 70$	Aquí x representa a la primer persona
$x + x + 5 + x - 10 = 70$	Aquí x representa a la segunda persona
$x + x + 10 + x + 15 = 70$	Aquí x representa a la tercer persona

Representar de diferentes maneras el problema permite observar la forma en que se modifica la expresión cambiando los signos positivos (+) por los negativos (-) y proporciona un contexto para analizar la interpretación del valor de x como solución de problema en las diferentes ecuaciones.

4.3 UTILIDAD DE LOS CONOCIMIENTOS ACADÉMICOS EN LA VIDA COTIDIANA

Se espera de quien sabe matemáticas que "piense mejor", que pueda resolver problemas con mayor facilidad y que sea capaz de aplicar sus conocimientos a diferentes campos disciplinarios, sin embargo, en la práctica, a pesar de hacer mucho esfuerzo en que los estudiantes aprendan a extender las aplicaciones de los conocimientos de matemáticas en otros campos ésto no sucede así, la transferencia de conocimientos presenta dificultades y se observa muy poco en los cursos de matemáticas, como lo han mencionado Peralta y Medina (1997). De igual manera, la presente investigación muestra que para los alumnos de álgebra, la utilidad real de este tema se reduce a los ejemplos que son vistos en clase y no transfieren su uso a situaciones cotidianas, especialmente cuando los problemas presentados pueden resolverse por medio de otros métodos más simples y con mayores probabilidades de encontrar la solución correcta, como el método de tanteo o el aritmético. Ésto puede explicarse al considerar que en los salones de clases se privilegia el uso de la solución de problemas como contexto y no como arte (según Schoenfeld, 1992), lo que refleja una separación entre los problemas académicos y los problemas cotidianos.

La desvinculación existente entre los objetivos académicos y la aplicación de los conocimientos en la vida cotidiana de los alumnos hace más difícil que los alumnos cumplan con las expectativas escolares, pues la información que les es transmitida en la escuela es vista como impuesta, irrelevante, innecesaria y aburrida. Ante este panorama, es muy pertinente considerar la propuesta de Kathleen (1995) con respecto a que los estudiantes deben enfocarse a "usar el álgebra más que a dominar el álgebra", sin embargo, ello implicaría también un cambio radical en los objetivos educativos actuales.

Por otra parte, es importante considerar que las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas crean actitudes de rechazo hacia la materia por parte de los alumnos basadas en las creencias de que la matemática es una materia aburrida, mecánica y difícil. Otra característica relevante es el estilo de atribución causal característico de los alumnos ante esta materia, pues de manera generalizada entre los alumnos a los que se les dificulta la matemática, encontramos una actitud de indiferencia y falta de responsabilidad en el proceso de su propio aprendizaje, pues se atribuyen los fracasos a los profesores, programas y a las características de la propia materia, como lo ha demostrado Arana et al. (1986), Loyola (1992) y Montoro y De Torres (1997).

4.4 PAPEL DE LOS ALUMNOS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE

El papel asignado a los alumnos por los programas educativos y por los maestros es el de sujetos pasivos a los que hay que transmitir los conocimientos, sin ser necesario que realicen actividades fuera del salón de clase para mejorar su entendimiento del tema, pues sólo en contadas ocasiones se deja tarea o se vinculan los conocimientos académicos con la práctica social. Además, aunque no se observó sistemáticamente el papel que los alumnos se asignan a sí mismos, si se pudo notar que los alumnos no asumen responsabilidad alguna en su propio proceso de aprendizaje, pues actúan como entes pasivos que esperan a que el maestro les dé la solución a los problemas planteados, les asigne actividades a realizar y les diga qué tienen que hacer. De esta manera, si algo sale mal, la culpa la tiene el profesor.

4.5 EL PAPEL DEL PROFESOR EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA – APRENDIZAJE

Aunque los profesores reconocen que el aprendizaje debe ser construido por cada uno de los alumnos, las actividades que se realizan en el salón de clases no están diseñadas para facilitar la construcción de este conocimiento, probablemente porque los profesores consideran que su papel principal es la transmisión de la información y ellos tratan de cumplir con este papel que han asumido dejando la responsabilidad de la construcción del conocimiento a los propios alumnos. De esta manera, el papel del profesor es el de proporcionar a los alumnos los conocimientos previamente establecidos por los programas de estudio y de hacer notar los errores que cometen los alumnos cuando su ejecución no se apega a lo que se espera de ellos.

De manera general, los profesores se autoevalúan muy favorablemente con relación a la planeación del curso, el control que realizan del proceso de enseñanza – aprendizaje, al desarrollo del curso y a su relación con los alumnos, situación que no se corrobora en las observaciones en el salón de clases.

4.6 CONTENIDOS DEL CURSO

Con respecto a los contenidos del curso, los resultados de la presente investigación muestran que los contenidos del programa oficial para la unidad de ecuaciones lineales no se respetan en los salones de clases, pues se alteran secuencias, temas y tiempo dedicado a la unidad, sin embargo, resulta importante mencionar que el programa oficial es muy limitado si lo comparamos con el contenido de lo que es enseñado por los maestros, pues oficialmente, la unidad de ecuaciones sólo debería manejar ecuaciones de la forma $ax+b=cx+d$ y casos sencillos de ecuaciones con paréntesis mientras que los maestros incluyen ecuaciones de mayor dificultad. Ahora bien, también es importante mencionar que ningún maestro considera el nivel de habilidades y conocimientos de sus alumnos a partir del cual iniciar sus cursos, lo cual refleja implícitamente una concepción en la que el papel del sujeto es solo de ser receptor de lo que los profesores pueden transmitirles y los cambios en el aprendizaje serían atribuidos únicamente a las manipulaciones ambientales.

Los programas oficiales deben reflejar una concepción de la enseñanza del álgebra como lenguaje, cuyo objetivo principal sea convertir a los alumnos en usuarios competentes de dicho lenguaje y no reflejar la enseñanza del álgebra como la construcción de una cadena de conceptos (Rosas, 1995).

El desarrollo histórico de la matemática como ciencia ha demostrado la dificultad de pasar de la representación aritmética a la algebraica (a lo que Sfard, 1995, llama el cambio de una perspectiva procedural a una estructural) y un proceso similar ha sido reportado en las dificultades que presentan los alumnos en los salones de clase. Sin embargo, los programas de estudio de las escuelas no están diseñados de forma que guíen a los alumnos en la construcción de los conocimientos algebraicos, la propuesta de Kieran (1995) es aprovechar la experiencia histórica al elaborar los programas de estudio, de esta manera, estos programas deben reflejar la constante evolución entre la perspectiva procedural y estructural en el desarrollo del conocimiento algebraico.

4.7 MÉTODOS DE ENSEÑANZA

Con respecto a los métodos de enseñanza en el salón de clases, puede afirmarse que los profesores se basan principalmente en la exposición y ocasionalmente pasan a algunos alumnos a resolver ejercicios en el pizarrón, generalmente no dejan tareas y cuando lo hacen, existe muy poca oportunidad de revisarla debido a la gran cantidad de alumnos por cada grupo, por lo que los profesores optan por no dejar trabajos extraclase. Aunque en varios grupos se privilegia la solución de problemas más que la solución de ecuaciones, ésto se realiza solo a través de problemas clásicos de álgebra que son resueltos por el profesor y no se hace uso de ejemplos o problemas que los alumnos puedan usar en su vida cotidiana y que tengan relevancia en su contexto social, por ejemplo, para los alumnos de la ciudad puede ser más pertinente un problema como el que sigue "a tu papá le ofrecen un empleo con un sueldo de \$4000.^{00} mensuales y actualmente gana \$3700.^{00} pero ya está hecho el descuento del 4% por impuesto sobre la renta y \$15.^{80} de su seguro de vida, ¿le conviene cambiarse?", que un problema de mezclas o de área de un terreno.

Las principales sugerencias en cuanto a la didáctica son: aprovechar los avances tecnológicos como las calculadoras y computadoras (por ejemplo, tutoriales, programas de ejercicio y práctica, como herramientas de cálculo o como simuladores), involucrar a los alumnos en actividades que les permitan hacer uso de la información que adquieren en el salón de clases, hacer uso de los libros o material especialmente diseñado como apoyo didáctico, y evitar que el aprendizaje gire alrededor de las capacidades y características de los profesores.

4.8 EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

La calificación final de los alumnos en los cursos de álgebra se basa principalmente en los exámenes elaborados por sus profesores, los cuales reflejan algunas de las concepciones implícitas que los profesores tienen con respecto al proceso de enseñanza – aprendizaje. Los exámenes aplicados a los alumnos en cada grupo generalmente evalúan solo el resultado como correcto e incorrecto y no el proceso que los alumnos realizan para llegar a este resultado, y que podría permitir a los maestros realizar diagnósticos más precisos sobre los errores de los alumnos. De igual manera, las evaluaciones de los cursos de álgebra se realizan principalmente sobre la solución de ejercicios (habilidad de manejar algorítmos) y no sobre las habilidades más generales de solución de problemas y la capacidad de pensar matemáticamente en situaciones reales.

Las anteriores observaciones con respecto a las características de la evaluación en el salón de clases tienen grandes implicaciones con respecto a la concepción que se tiene de lo que son las matemáticas: un conjunto de contenidos definidos formalmente o una capacidad que se manifiesta en la manera de actuar y de proceder frente a diversos problemas (Block y Dávila, 1993).

4.9 NIVELES DE DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO ALGEBRAICO PROPICIADOS POR LA ESCUELA

Existen diversos niveles en los que el aprendizaje del álgebra puede darse:

- En el primero, el alumno solo reproduce lo que el maestro realiza, por ejemplo, al resolver una ecuación, el alumno sigue exactamente el mismo procedimiento que el profesor y el hecho de obtener una respuesta correcta no nos garantiza que los alumnos realmente sean capaces de resolver ecuaciones si se varía la presentación de la misma.

- En el segundo, el alumno tiene una visión más flexible de la situación y puede estar en la posibilidad de usar métodos distintos a los usados por el maestro porque tiene una visión más general de la solución de ecuaciones, conoce las reglas del juego y sabe como aplicarlas.
- El tercer nivel es cuando los alumnos son capaces de establecer una ecuación a partir de las relaciones expresadas en un problema dado por el profesor y ello permite la solución del mismo a través del correcto uso de reglas para solucionar ecuaciones y de una adecuada interpretación de los resultados con base en el problema.
- El cuarto nivel es cuando el alumno identifica un problema real que puede ser solucionado a través de una ecuación lineal, en donde ya no se le presenta el problema escrito contextualizado en una situación didáctica, si no que directamente de la situación real, él es capaz de: 1) abstraer de la realidad las relaciones, 2) reconocer que dichas relaciones pueden ser plantadas en términos de una ecuación y 3) utiliza los resultados para facilitar el análisis de la toma de decisiones.
- En el último nivel, el alumno es capaz de establecer relaciones que no están directamente expresadas en su entorno sino que son representaciones simbólicas de las relaciones expresadas convencionalmente, un ejemplo es cuando los alumnos pueden formular leyes, axiomas, teoremas y usar estas formulaciones en la solución de problemas (en el caso del álgebra, las ecuaciones del tipo $2x + 3 = 5$; $3x - 1 = 19$ pueden representarse a partir de $ax + b = c$).

Por desgracia, la educación matemática en los salones de clase sólo se realiza enfatizando los tres primeros niveles, mientras que los dos últimos niveles que son los más importantes tanto para un verdadero uso práctico, como para el desarrollo de nuevos conocimientos, no pueden ser desarrollados debido a que las exigencias del medio (educativo y cotidiano) no se realizan a este nivel, un ejemplo de ello es el nivel de exigencia de las evaluaciones que se realizan en los salones de clase, donde sólo se pide a los alumnos el dominio de los tres primeros niveles. Por ello es necesario crear un ambiente y actividades propicias en el salón de clases para facilitar el acceso de los alumnos a los últimos niveles de uso del álgebra como proceso simbólico.

4.10 EFICIENCIA DEL CURSO DE ÁLGEBRA EN EL APRENDIZAJE DE LOS ALUMNOS

La eficiencia en los cursos de ecuaciones lineales en CCH puede ser medida tomando en cuenta varios aspectos, entre los que se encuentran: 1) la significancia estadística de los cambios en los conocimientos de los alumnos antes y después del curso, 2) la habilidad de los alumnos para resolver ecuaciones y problemas propuestos ya sea por el maestro o por alguien ajeno al contenido y la didáctica del curso, y que usualmente son evaluados en una escala de 10 puntos con la finalidad de otorgar una calificación en el curso, o 3) por la utilidad real que para los alumnos tiene la información aprendida.

Con respecto al primer aspecto, los cursos en los 5 grupos lograron cambios en la habilidad o conocimiento de los alumnos que estadísticamente fueron significativos, lo cual quiere decir que pueden ser atribuidos únicamente a la clase de cada profesor con un margen de error de 0.05, sin embargo, estos cambios sólo se presentaron a un nivel de habilidad mecánica y no a nivel conceptual, por lo que no fueron suficientemente importantes como para que los alumnos logren acreditar los cursos de ecuaciones lineales, pues casi todos los alumnos de los 5 grupos reprobaron las evaluaciones tanto del profesor, como las diseñadas para esta investigación. Finalmente, si consideramos la utilidad que los alumnos hacen de la información recibida en el salón de clases en su vida cotidiana, los cursos de ecuaciones no tienen impacto en la solución de problemas reales.

Los resultados anteriores nos obligan a considerar la validez de los contenidos, la metodología y la perspectiva tanto de profesores como de alumnos, que impiden cumplir los objetivos académicos y los objetivos prácticos.

4.11 PERSPECTIVA EPISTEMOLÓGICA PREVALECIENTE EN EL SALÓN DE CLASES

Al analizar los métodos didácticos que usan los profesores, sus creencias sobre la matemática y su papel y el papel de los alumnos en el proceso de enseñanza – aprendizaje, el currículum y la forma de evaluación del conocimiento, se observa que corresponden fielmente a los que Romberg (1992) llama la concepción empírica – analítica. Pareciera que aunque a nivel teórico ya se ha superado esta concepción en el aprendizaje de las matemáticas, en el salón de clase no han tenido impacto las teorías constructivistas y sociales de la construcción del conocimiento. Ésto se debe posiblemente a que el principal objetivo de la educación no es que los alumnos aprendan, sino solo que aprueben las materias aún recitando información que es memorizada, que no tiene utilidad práctica y que se olvidará fácilmente. Además de que los avances teóricos muy pocas veces están disponibles para los profesores por razones de tiempo, aplicación real en el aula, disponibilidad de bibliografía, de espacios para discutir o comentar estas investigaciones, por el tipo de lenguaje que se utiliza en las investigaciones, o simplemente por falta de interés. Además, dado que los profesores dejan la responsabilidad de la construcción del conocimiento a los alumnos, y consideran estar realizando adecuadamente su trabajo, no hay razones para esperar que ellos mismos sientan la necesidad de realizar cambios en la didáctica que se realiza en los salones de clase, pues la responsabilidad de los problemas de la educación matemática se depositan en los alumnos y las autoridades.

5. PROPUESTAS

5.1 ¿CÓMO PODEMOS MEJORAR LA ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA?

¿Qué es lo que hace que la comprensión del álgebra en la escuela sea difícil para la mayoría de los alumnos?. Al igual que Kieran (1992), coincidimos en que entre los factores principales se encuentran los contenidos del álgebra, la forma de pensamiento de los alumnos y la forma de enseñanza de la materia. Sin embargo, el factor más importante y que no fue contemplado por Kieran es la perspectiva epistemológica de la cual se derivan los anteriores factores y algunos otros como los objetivos educativos y las creencias de los participantes en el proceso educativo.

Una de las principales preguntas que debemos hacernos al tratar de encontrar los fundamentos de este cambio de perspectiva de las matemáticas es ¿necesitamos realmente el álgebra para el mundo real?. Mucho se ha hablado de que la matemática que se pretende enseñar en la escuela es solo una de las diferentes matemáticas que se pueden desarrollar si tomamos en cuenta las relaciones entre la matemática y la cultura (Knijnik, 1997), y especialmente en esta investigación se ha puesto de manifiesto que los conocimientos de álgebra no han sido necesarios para la vida cotidiana de los alumnos, puesto que han podido enfrentar el mundo con conocimientos matemáticos básicos (aritmética). Aun los alumnos aritméticamente competentes rechazan el uso del simbolismo algebraico porque no ven la necesidad de usarlo, dado que poseen recursos alternativos para enfrentar esos problemas, como fue demostrado por Wheeler y Lee (1989, citado en Cedillo, 1995). De igual manera, Arcavi (1995), piensa que podemos estar muy bien en la vida real sin el álgebra, puesto que nuestro mundo real está matemáticamente empobrecido, y nosotros podemos tener una vida feliz sin tener ningún conocimiento del álgebra, aún en una sociedad tecnológica igual que la nuestra.

Entonces ¿cuáles son las razones por las que se deba insistir en enseñar álgebra a los alumnos?. Arcavi (1995) mismo responde a esta pregunta afirmando que todo depende de la perspectiva que uno quiera tomar ante nuestra realidad, pues, él piensa que nuestro mundo es matemáticamente rico si nosotros lo queremos ver así. Usar una visión matemática cuando estamos viendo alrededor para tomar el sentido del mundo en conjunto puede facultarnos para ver mejor, para tomar decisiones más pertinentes, para comprender mejor la complejidad de las situaciones que nosotros vemos, y de esta manera vivir mejor. Aunque estamos de acuerdo con esta afirmación, pareciera que llegar a este nivel de conceptualización y disfrute de las matemáticas en la actualidad es exclusivo de los matemáticos y entonces, el problema siguiente sería diseñar estrategias para que los alumnos también logren ver a la matemática de esta manera, pero ¿cómo puede lograrse esto?. Pensamos que no hay otra manera más que acercando la matemática a la realidad de los alumnos a través del diseño de actividades que desde el salón de clases permitan tomar otra actitud frente al uso de los recursos matemáticos para transformar su realidad.

Existe también otro aspecto menos cognitivo, quizás más político para aprender álgebra y que ha sido propuesto por Knijnik (1997). Conocer el álgebra, o las matemáticas académicas en general que están socialmente legitimadas, coloca a los propios grupos subordinados en condición para que puedan participar de la vida cultural, social y económica de un modo menos desventajoso, y puede alentarnos a ser menos pasivos y ciudadanos más críticos. En suma, el conocimiento de las matemáticas en general, y del álgebra en particular, no es un asunto de supervivencia para una persona, sino más bien es un asunto relacionado con la calidad de vida que queremos tener.

¿Pero que hay que hacer para crear esta conciencia de utilidad si realmente no es necesario para sobrevivir y los alumnos no logran ver las ventajas que este aprendizaje pudiera tener en sus vidas?. Creemos que la opción es hacer este conocimiento necesario en sus vidas, pues como afirma Knijnik (1997), al tratar la matemática no en forma abstracta sino como un artefacto cultural, directamente relacionado con las tradiciones, los modos de vivir, sentir y de producir significados de las personas en diferentes contextos sociales, se puede reconocer que hay diferentes maneras de hacer matemáticas que pueden relacionarse con las matemáticas académicas, pero que necesariamente tienen que "aterrizar" nuevamente en situaciones prácticas de quien aprende.

Por ello resulta muy valiosa la propuesta de Vergnaud (1990, citado en Cedillo, 1995) con respecto a que una estrategia didáctica para evitar el rechazo al uso de simbolismos algebraicos es utilizar problemas que hagan *necesario* el uso del álgebra (se marca la palabra "necesario" pues se quiere hacer énfasis en crear necesidades de uso del álgebra en la vida real y no solo en el sentido de hacerla necesaria para acreditar la materia de matemáticas).

Lo anterior puede lograrse a partir de la creación de "microcosmos matemático", lo cual implica propiciar en los salones condiciones similares a las condiciones que los matemáticos experimentan en el proceso del desarrollo de las matemáticas (Schoenfeld, citado en Santos, 1992), pues si uno desea que los alumnos salgan del salón de clases con el sentido real de las matemáticas, entonces el salón de clases tiene que reflejar actividades donde los estudiantes tomen parte en el desarrollo de las matemáticas de tal manera que encuentren el sentido de estudiar esta materia, que exista motivación para que los estudiantes continúen estudiando matemáticas fuera del salón de clases.

Consideramos que es inútil y hasta contraproducente tratar de enseñar las matemáticas fuera de contexto, pues desde el momento en que los alumnos no encuentran una utilidad a lo que aprenden lo olvidan muy rápidamente y se sienten obligados a "aprender" algo que ellos no desean, creando así actitudes de rechazo y resistencia hacia nuevos conocimientos matemáticos. ¿Porqué se insiste en enseñar a los alumnos a que apliquen ideas de otras personas (los grandes matemáticos o los maestros) sin permitirles experimentar las suyas?, ¿Porqué se pide a los alumnos que acepten y apliquen ideas ajenas si la misma historia muestra que no hay una sola evolución del conocimiento matemático, sino que varía de cultura a cultura?. En cambio, si se logra que los alumnos aprendan matemáticas en la medida en que lo necesitan, ellos mismos podrán disfrutar de hacer uso de esos conocimientos y buscarán ampliarlos en la medida que lo consideren necesario.

Un ejemplo de esta perspectiva, a propósito de la reciente discusión acerca del aumento de cuotas en la UNAM, puede ser invitar a los alumnos a analizar los argumentos financieros en los que esta propuesta se fundamenta. Para ello es necesario que los alumnos investiguen el monto de las aportaciones del gobierno a la Universidad, la proporción con que se contribuirá al aumentar las cuotas, la proporción de ingresos que se generan de los proyectos de vinculación con la industria, el monto de las aportaciones voluntarias de los egresados, entre otros. La suma de todas estas aportaciones y proporciones de ingresos darán el presupuesto de la Universidad, que después se tendrán que comparar con la cantidad de egresos y así determinar la justificación de la propuesta del rector. Dado que seguramente se desconocerán algunas cantidades, se verá la necesidad de establecer relaciones con las cantidades conocidas, resultando en una ecuación como la que sigue, donde x es el presupuesto total de la UNAM y cada término representa las aportaciones del gobierno, las cuotas y los egresados:

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}x+\frac{1}{8}x+\frac{2}{5}+5{,}648{,}500=x$$

Por supuesto que para involucrarse en una situación didáctica como la antes descrita, los alumnos deberán realizar una investigación para obtener los datos necesarios y reflexionar acerca de su entorno social. Debemos estar conscientes de que al participar en este tipo de actividades, desaparecen los límites entre las disciplinas y se tiene que recurrir a una gran cantidad de conocimientos y de información para estructurarlo y solucionarlo.

Creemos que el principal cambio que debe darse está en la perspectiva epistemológica desde la cual se concibe la educación matemática, puesto que a partir de ella se determina, consciente o inconscientemente, los objetivos, contenidos, didáctica y función de los involucrados en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. Como hemos visto anteriormente, en la actualidad prevalece una perspectiva empírico analítica en la educación matemática que es necesario modificar a la luz de los avances teóricos en varias áreas del conocimiento. Mientras no se logre un cambio en este sentido, difícilmente se pueden lograr avances sustanciales que beneficien a los alumnos.

Los cambios en la concepción de la educación matemática deben poner énfasis en:

- Dejar de enseñar conceptos abstractos a los alumnos como principal objetivo educativo y poner énfasis en la forma en que ellos abordan su realidad y a partir de ahí, apoyarse en las representaciones simbólicas que les permitan ampliar su visión del mundo y transformar su realidad.
- Privilegiar el conocimiento surgido de la vida diaria más que el conocimiento mecánico que se fomenta en el salón de clase donde el alumno tiene un papel pasivo.
- Poner énfasis en las características sociales y culturales en la que están inmersos los alumnos que aprenden más que en el proceso de aprendizaje aislado.
- Dejar de lado la idea de que existe un mundo de conocimientos matemáticos exteriores al alumno, de los cuales debe apropiarse a través de la transmisión de información que el profesor realiza a partir de su exposición en clase y privilegiar la interpretación social que el alumno puede hacer de dicha realidad.
- Reconocer que existen varias maneras de hacer matemáticas y no solamente la matemática formal.
- Privilegiar el desarrollo de habilidades que permanezcan a lo largo del tiempo y no la transmisión o acumulación de información que se olvidará después del examen por no haber sido significativa para el alumno, y que por tanto, no sirve de fundamento para posteriores conocimientos.
- Incluir el cambio de actitud de los alumnos hacia la matemática como uno de los objetivos educativos de igual importancia que la formación de conceptos, el desarrollo de habilidades mecánicas y la solución de problemas en esta materia.

Se considera que los cambios deben darse integrando las concepciones interno – externo reportadas por Dossey (1992), puesto que ni las concepciones cognitivas o sociales (internas) o los cambios en la didáctica, los maestros o el uso de la tecnología (externos) pueden por si solo realizar los cambios fundamentales que la educación matemática requiere. Las implicaciones de estos cambios en las concepciones de la matemática y de los objetivos educativos deben tener un impacto en los siguientes aspectos:

- Enfatizar la solución de problemas surgidos de la realidad de los alumnos e involucrarlos en proyectos donde sientan la responsabilidad de contribuir a la solución de dichos problemas a partir de sus conocimientos.
- Fomentar proyectos donde los alumnos realicen el planteamiento de problemas reales en los que se usen las ecuaciones lineales y no solo pedirles que resuelvan problemas planteados por otros (libros o maestros).
- Poner mayor atención en la interpretación de los resultados a partir del problema planteado, el fin último es resolver el problema y no encontrar un dato sin interpretar.
- Introducir el aspecto mecánico solo después del conceptual, puesto que la solución de ecuaciones debe ser vista como una herramienta o un medio para solucionar problemas reales y no solo con la finalidad de encontrar el valor de x o cualquier otra variable.
- La educación matemática debe trascender el salón de clase y trasladarse a otros aspectos de la vida de los alumnos.
- Ampliar las perspectivas de la influencia y función de los profesores en el proceso de enseñanza – aprendizaje, cambiando la concepción de ser solo transmisores de información a otra donde sientan la necesidad y responsabilidad de evaluar su influencia y mejorar constantemente su didáctica, puesto que la actitud del maestro es la clave para motivar al alumno a descubrir.
- Ampliar las perspectivas de la influencia y función de los alumnos en el proceso de enseñanza – aprendizaje, cambiando la concepción de ser solo receptores de información a otra donde sientan la necesidad y responsabilidad de involucrarse en actividades que les permitan ampliar sus conocimientos, puesto que el aprendizaje es un proceso en el que el alumno debe ser activo.
- Sustituir el método tradicional de exposición en el salón de clases por otras técnicas didácticas en las que la participación del alumno sea más activa.
- Cambiar el uso de evaluaciones que sólo consideran el resultado final, por evaluaciones que permitan realizar diagnósticos de enseñanza, puesto que al identificar los errores que cometen los estudiantes se tiene la posibilidad de establecer estrategias para corregirlos.

A pesar de que sugerencias similares han sido realizadas por varios investigadores a raíz de sus propuestas teóricas, lo más difícil es llevarlas a cabo en la práctica. El problema no es que se desconozca como mejorar la enseñanza, sino el problema está más bien en cómo implementar esos cambios que en ocasiones parecen utópicos. Para ello, indudablemente, es necesario involucrar a los maestros con la literatura sobre educación matemática y alentarlos a hacer de los salones de clase un espacio de experimentación donde se disminuya la distancia entre los avances teóricos y su aplicabilidad para beneficio de los alumnos.

La principal propuesta derivada de este trabajo es el cambio de perspectiva epistemológica a partir de la cual se estructura el proceso de enseñanza – aprendizaje del álgebra, lo cual implica cambios que afectan la visión actual de los maestros, los alumnos y las autoridades educativas, sin embargo, consideramos que el papel protagónico de este cambio está en el profesor pues es él quien, a través de la interacción con los alumnos promueve la creación de actitudes hacia la materia que facilitan o entorpecen el aprendizaje, y el impacto de los cambios que realicen en su modo de concebir la enseñanza – aprendizaje del álgebra se verán directamente reflejados en beneficio del aprendizaje de los alumnos. Por ello, se quiere alentar a todos los involucrados en el proceso educativo (y en especial a los profesores) a reflexionar sobre el tipo de sociedad que se quiere tener y comenzar a realizar cambios para lograr los objetivos planteados a partir de la educación en general y de la educación matemática en particular.

REFERENCIAS

1. Álvarez, A.; García, F. y Santos, S. (1995). Competencias en el uso del lenguaje algebraico en escuelas secundarias y normales del Estado de México. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.). Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. (pp. 73 - 78). México: CINVESTAV.
2. Arana, J.; Escudero, T.; Garces, R. y Palacian, E. (1986). El <<status>> socio – académico de las matemáticas: Un punto de referencia singular. Enseñanza de las Ciencias, 4 (2), 129 – 135.
3. Arcavi, A. (1995). Teaching and learning algebra: Past, present and future. Journal of Mathematical Behavior, 14, 145-162.
4. Ausubel, D. (1982). Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo. México, Trillas.
5. Baggett, P. y Ehrenfeucht, A. (1992). What should be the role of calculators and computers in mathematics education?. The Journal of Mathematical Behavior, 11 (1), 61-71.
6. Baldor, R. (1964). Álgebra elemental. Madrid: Mediterráneo.
7. Barbeau, E. (1995). Álgebra at the tertiary level. Journal of Mathematical Behavior, 14, 139-142.
8. Barnett, R. (1987). Álgebra. México: McGraw-Hill.
9. Bartolucci, J. (1986). Interacción social y aprendizaje en un salón de clase. Cuadernos del Colegio, 30, 2 – 7.
10. Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. Journal of Mathematical Behavior, 14, 41-73.
11. Bermúdes, P.; Figueroa, G. y Loyola, J. (1998). Solución de problemas aritméticos narrativos mediante una estrategia de autorregulación. Manuscrito inédito presentado en el VIII Congreso Mexicano de Psicología, Sociedad Mexicana de Psicología, México.
12. Birenbaum, M.; Kelly, A. y Tatsuoka, K. (1993). Diagnosing knowledge state in algebra using the rule-space model. Journal for Research in Mathematic Education, 24 (5), 442-459.
13. Block, D. y Dávila, M. (1993). La matemática expulsada de la escuela. Educación Matemática, 5 (3), 39 – 58.

14. Brun, J. (1979). Pedagogía de las matemáticas y psicología: Análisis de algunas relaciones. Infancia y Aprendizaje, 9, 44-56.

15. Burton, J. (1992). Do young children think mathematically?. Early Child Development and Care, 82, 57-63.

16. Campos, M. (1990). Análisis estructural del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en los niveles medio superior y superior. Revista Intercontinental de Psicología y Educación, 3 (1-2), 97-114.

17. Campos, M. y Balderas, P. (1998). Representación matemática en solución de problemas. Manuscrito inédito presentado en el IV Seminario de Cognición, Epistemología y Enseñanza de las Ciencias, UNAM, México.

18. Cedillo, T. (1995). De un razonamiento aritmético - cuantitativo a un razonamiento algebraico - relacional. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.). Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática (pp. 91 - 98). México: CINVESTAV.

19. Commins, V. (1991). Theaching mathematics for understading: What is a number?. Early Child Development and Care, 73, 53-62.

20. De Guzmán, M. (1986). Cuestiones fundamentales sobre la enseñanza de la matemática. De Thales. No. 8, 13-26.

21. Dossey, J. (1992). The nature of mathematics: Its role and its influence. En: D. Grouws (Ed.). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 39 – 48). New York: MaCmillan.

22. Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Registres de représentation sémiotique et functionnement cignitif de la penseé. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37 – 65. (Traducción del Departamento de Matemáticas Educativas, CINVESTAV).

23. Ernest, P. (1987). A model of cognitive meaning of mathematical expressions. The British Journal of Educational Psychology, 57 (pte. 3), 343 – 370.

24. Felson, R. y Trudeau, L. (1991). Gender differences in mathematics performance. Social Psychology Quarterly, 54 (2), 113 – 126.

25. Fernández, M.; Llopis, A. y Pablo de Riesgo, P. (1991). Niños con dificultades para las matemáticas (p.p. 11-14). Madrid: Ciencias de la Educación Preescolar y Especial.

26. Gallardo, A. (1987). Habilidades pre – algebraicas en los niños de menor rendimiento escolar. Tesis de Mestría en Ciencias con especialidad de Matemática Educativa, CINVESTAV, México.

27. Gallardo, A. (1995). Las soluciones negativas en la resolución de problemas verbales. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.). Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática (pp. 5 - 26). México: CINVESTAV.

28. García, C. (1987). El pensamiento del profesor. Barcelona: CEAC.

29. Garduño, L. y Lozano, A. (1996). Diferencias en atribuciones y expectativas sobre una tarea en matemáticas entre niños de primaria de escuelas públicas y privadas. Revista Mexicana de Psicología, 13 (1), 75 – 83.

30. Geary, D. (1995). Mathematical disabilities: Cognitive, neuropsychological and genetic components. Psychological Bulletin, 14 (2) 345-362.

31. Giordan, A. (1992). La enseñanza de las ciencias. Perfiles Educativos. 57-58, 92 - 95.

32. Gómez - Granell, C. y Fraile, J. (1993). Psicología y didáctica de las matemáticas. Infancia y Aprendizaje, 62 - 63, 101 - 113.

33. Gómez, R. y Pavón, S. (1996). TUTECS: Una propuesta de software educativo para el tema de ecuaciones lineales a nivel bachillerato. Tesis de licenciatura en Psicología, E.N.E.P. Iztacala, México.

34. Guzmán, J. (1995). Uso del lenguaje algebraico en la modelación de problemas extra – algebraicos. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.). Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática (pp. 107 - 112). México: CINVESTAV.

35. Harvey, J.; Waits, V. y Demana, F. (1995). The influence of technology on the teaching and learning of algebra. Journal of Mathematical Behavior, 14, 75 – 109.

36. Hernández, A.; García, E.; Bautista, V. y Torres, F. (1996). Unidad 2: Ecuaciones Lineales. Seminario taller de planeación didáctica para el curso de Matemáticas I. (UNAM, Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Vallejo).

37. Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with undestanding. En D. Grouws (Ed.). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 65 - 97). New York: MaCmillan.

38. Jiménez, B. (1995). Encuentra la ecuación. Propuesta didáctica para la resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado. México: Universidad Pedagógica Nacional.

39. Johnson, D. y Myklebust, H. (1967). Disorders of arithmetic. Learning Disabilities (pp. 244 – 271). Orlando, Grune & Stratton.

40. Jorba, J. (1993). Síntesis de la discusión de las ponencias sobre psicología y didáctica de las matemáticas. Infancia y Aprendizaje, 62 - 63, 115 - 119.

41. Kantor, J. (1980). Psicología interconductual (cap. 19). México, Trillas.

42. Kathleen, M. (1995). The impact of technology, mathematical modeling, and meaning on content, learning, and teaching of secondary school algebra. Journal of Mathematical Behavior, 14, 121 – 137.

43. Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En: D. Grouws (Ed.). Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 390 – 419). New York: MaCmillan.

44. Knijnik, G. (1997). Educación matemática, cultura y exclusión social. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 28 (4), 61 - 75.

45. Kouba, V. (1989). Childrens solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. Journal for Research in Mathematics Education, 20(2), 147-158.

46. Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre – algebra. Journal of Mathematical Behavior, 14, 113 – 120.

47. López, M. y Nava, M. (1992). Evaluación alumno – docente a nivel medio superior: Aplicación y validación del instrumento CEPAL. Tesis de licenciatura en Psicología, ENEP Iztacala, México.

48. Low, R. y Over, R. (1993). Gender differences in solution of algebraic word problems containing irrelevant information. Journal of Educational Psychology, 85 (2), 331-339.

49. Loyola, E. (1992). El Rechazo al estudio de las Matemáticas. México: UNAM.

50. Mancera, E. (1990). Investigación y educación matemática. Educación Matemática, 2 (1) 10-20.

51. Mancera, E. (1991). El papel de los errores en la matemática y su enseñanza (Monografía de la Maestría en Educación Matemática de la UACPyP del CCH). México: UNAM.

52. Medina, B. y Peralta, D. (1997). Preconcepciones que dificultan el aprendizaje del álgebra. En A. Carlón (Ed.). Memorias del VI Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger (pp. 175 – 180). México: Iberoamérica.

53. Medina-Díaz, M. (1993). Analysis of cognitive structure using the linear logistic test model and quadratic assignment. Applied Psychological Measurement, 17 (2), 117-130.

54. Méndez, B. (1986). La enseñanza de las matemáticas ¿Un problema didáctico?. Cero en Conducta, 4.

55. Méndez, R. (1994). Las hojas electrónicas de cálculo y la resolución de problemas algebraicos: Experimento de enseñanza con estudiantes de nivel medio superior. Tesis de Mestría en Ciencias con especialidad de Matemática Educativa, CINVESTAV, México.

56. Mendoza, E. (1993). La construcción del conocimiento en la investigación sobre la enseñanza de la ciencia. Perfiles Educativos, 60, 73 - 78.

57. Mills, C; Ablard, K y Stumpf, H. (1993). Gender differences in academically talentes young students' mathematical reasoning: Patterns across age and subskills. Journal of Educational Psychology, 85 (2), 340 - 346.

58. Montoro, M. y De Torres, M. (1997). Estilos de atribución causal de éxito o fracaso de alumnos de matemáticas de primer año de universidad. Un trabajo exploratorio. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos. 27 (4), 77 - 90.

59. Morán, P. y Marín, E. (1990). El papel del docente en la transmisión y construcción del conocimiento. Perfiles Educativos, 47-48, 56 - 60.

60. Moreno, L. y Weldegg, G. (1992). Constructivismo y educación matemática. Educación Matemática, 92, 1-18.

61. Nesher, P. (1986). Learning mathematics. A cognitive perspective. American Psychologist, 41 (10), 1114-1122.

62. Newman, R. y Stevenson, H. (1990). Children's achievement and causal attributions in mathematics and reading. Journal of Experimental Education, 58 (3), 197 – 212.

63. Noriega, A. y Gutiérrez, C. (1995). Introducción a la epistemología para psicólogos. México: Plaza y Valdéz.

64. O'dell, J. y VonKluge, S. (1993). Mathematical difficulties in statistics. Psychological Reports, 72, 495-498.

65. Odom, J. y Shaugnessy, M. (1989). Personality and mathematical achievement. Psychological Reports, 65, 1195 – 1201.

66. Orthon, A. (1990). Didáctica de las matemáticas, Madrid: Morata.

67. Parra, B. (1990). Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas. Educación Matemática, 2 (3), 22 – 31.

68. Pavón, S.; Galicia, X. y Sánchez, A. (1997). Efectos diferenciales de la disciplina cursada por estudiantes universitarios en las habilidades de razonamiento. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 27 (4), 33 – 60.

69. Payne, S. y Squibb (1990). Algebra mal-rules and cognitive account of error. Cognitive Science, 14, 445-481.

70. Peralta, D. y Medina, B. (1997). Pensamiento y lenguaje algebraico. Manuscrito inédito presentado en el IV Coloquio sobre la Enseñanza de las Ciencias, UNAM, México.

71. Pérez, H.; Cruz, J. y Mercado, M. (1986). El perfil de conocimientos matemáticos del alumno del Bachillerato. Cuadernos del Colegio, 30, 35 – 43.

72. Philipp, R. A. (1992). A study of algebraic variables: beyond the student-professor problem. Journal of Mathematical Behavior, 11, 161-176.

73. Programa de Estudio para las Asignaturas de Matemáticas I y II: Álgebra y Geometría (1996). Unidad Académica del Ciclo de Bachillerato, UNAM, México.

74. Rees, P. y Sparks, F. (1992). Álgebra contemporánea. México: McGraw-Hill.

75. Renney, M. (1987). The role of structural context in perception: Syntax in recognition of algebraic expressions. Memory & Cognition, 15 (1), 29-41.

76. Rojano, T. y Sutherland, R. (1995). A new approach to algebra: results from a study with 15 years old – resistant pupils. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.). Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática (pp. 27 - 46). México: CINVESTAV.

77. Romberg, T. (1992). Perspectives on scholarship and research methods. En D. Grouws (Ed.). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 49 – 64). New York: MaCmillan.

78. Rosas, R. (1995). Competencias en el uso del lenguaje algebraico y comprensión de la equivalencia de los números racionales. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.). Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática (pp. 131 - 144). México: CINVESTAV.

79. Rubio, G. (1995). El desarrollo de la capacidad para realizar el análisis lógico de los problemas aritmético/algebraicos y su vinculación con su comprensión y uso competente. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.). Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática (pp. 47 - 72). México: CINVESTAV.

80. Santos, M. (1992). Resolución de problemas; El trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. Educación Matemática, 4 (2), 16 – 24.

81. Schoenfeld, A. (1989). Exploration of students' mathematical beliefs and behavior. Journal for Tesearch in Mathematics Education, 20, 338 – 355.

82. Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in matematics. En D. Grouws (Ed.). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334 – 370). New York: MaCmillan.

83. Sepúlveda, A. y García, R. (1984). En que medida se alcanzan los objetivos del curso de álgebra: Un análisis de los objetivos y una observación de los resultados de un curso de álgebra a nivel Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios. Tesis de Maestría en Ciencias con especialidad de Matemática Educativa, CINVESTAV, México.

84. Sepúlveda, A. y García, R. (1995). Diagnóstico sobre el dominio operatorio numérico. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.). Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática (pp. 145 - 150). México: CINVESTAV.

85. Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. Journal of Mathematical Behavior, 14, 15 – 39.

86. Starkey, P.; Spelke, E. y Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. Cognition, 36 (2), 97 – 127.

87. Tirado, F. y Serrano, V. (1989). En torno a la calidad de la educación pública y privada en México. Ciencia y Desarrollo, 15 (85), 37-49.

88. Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. Educación Matemática, 6 (3), 90 – 108.

89. Weaver III, C. y Kintsch, W. (1992). Enhancing students' comprehension of the conceptual structure of algebra word problem. Journal of Educational Psychology, 84 (4), 419-428.

90. Wedd, N. (1992). Assessment of students' knowledge of mathematics: Steps towar a theory. En D. Grouws (Ed.). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 661 - 683). New York: MaCmillan.

ANEXO 1

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN DE PRERREQUISITOS

Nombre del alumno:

Semestre: Grupo:

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente las instrucciones y resuelve cada uno de los ejercicios que se te pide. No dejes ningún ejercicio sin contestar. *Gracias por tu colaboración.*

1.- Observa el siguiente ejemplo: (2) (2) (3) = 12. De manera similar, encuentra los números primos que al multiplicarlos dan los siguientes números:

	NÚMEROS PRIMOS
6	
15	
20	

2.- Encuentra 3 múltiplos y 3 divisores de los siguientes números :

NUMERO	MÚLTIPLOS	DIVISORES
6		
12		
20		

3.- Realiza los siguientes ejercicios :

EJERCICIO	RESULTADO	EJERCICIO	RESULTADO
2+ (-4) =		-7 (-18) =	
-2+5 =		8 (2) =	
-7-18 =		4 ÷ -2 =	
8÷2 =		-6 ÷ 3 =	
2 (-4) =		-4 ÷ -2 =	
-2 (5) =		6 ÷ 3 =	

4.- Identifica las propiedades de las siguientes operaciones y aplícalas:

- Note que 3 + 5 = 5 + 3, en forma similar, 2+4 = ____
- ¿Qué propiedad se está aplicando en las anteriores operaciones ? ____________

- Note que 3+(5+6) = (3+5)+6, en forma similar, 2+(5+4) = ____
- ¿Qué propiedad se está aplicando en las anteriores operaciones ? ____________

- Note que dado 5, existe -5 tal que 5+(-5) = 0, en forma similar, dado 10, existe ____ tal que 10 + (   ) = 0
- ¿Qué propiedad se está aplicando en las anteriores operaciones ? ____________

- Note que (4) (-3) = (-3) (4), en forma similar, (6) (5) = ____
- ¿Qué propiedad se está aplicando en las anteriores operaciones ? ____________

- Note que 3 (5 (6)) = (3 (5)) 6, en forma similar, 3 (4 (5)) = ____
- ¿Qué propiedad se está aplicando en las anteriores operaciones ? ____________

- Note que dado -4, existe -1/4 tal que -4 (-1/4) = 1, en forma similar, dado 8, existe ______ tal que 8 (   ) = 1
- ¿Qué propiedad se está aplicando en las anteriores operaciones ? ____________

- Note que dado 5, existe el 1 tal que 5 (1) = 5, en forma similar, dado 9, existe el ____ tal que 9 ( ) = 9
- ¿Qué propiedad se está aplicando en las anteriores operaciones ? ____________

- Note que 4(5+6) = 4 (5) + 4 (6), en forma similar, 8 (2+7) = ____
- ¿Qué propiedad se está aplicando en las anteriores operaciones ? ____________

5.- ¿Cuál es el resultado de las siguientes expresiones?

EXPRESIÓN	RESULTADO
10-2 x4=	
8-3(6-2x2)=	
(8-3)(6-2x2)=	
(-(5-4)-5)(-7-5-9)=	
(-(5x4)+5)(-7x5-9)=	
3 { 6+2 [8-2 (3-1)] } =	

6.- Resuelve los siguientes ejercicios?

a) $2796 \div 85$

$b)\dfrac{24}{6}+\dfrac{3}{16}$

$c)\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}$

$d)\dfrac{8}{16}\times\dfrac{9}{7}$

$e)\dfrac{1}{2}\div\dfrac{2}{3}$

f) $2.111 + 0.0025$

g) $0.058 - 1.32$

h) $0.0032 \div 0.0003$

$i)1.32\times 0.084$

7.- ¿Cómo se representan en números decimales las siguientes fracciones?

FRACCIÓN	DECIMALES
$\frac{1}{2}$	
$\frac{7}{4}$	
$\frac{8}{10}$	

8.- ¿Cómo se representan en números fraccionarios los siguientes números decimales?

DECIMALES	FRACCIONARIOS
0.20	
1.5	
1.75	

9.- Calcula las siguientes raíces

NÚMERO	RAÍZ
81	
25	
144	
-243	
64	

10.- Da 3 ejemplos de las siguientes familias de números:

TIPO DE NÚMERO	EJEMPLOS
Natural	
Entero	
Racional	
Irracional	

11.- Identifica las partes de una expresión algebraica colocándolas correctamente en frente del nombre que le corresponda.

$$5x^2 = 3 + 2x$$

variable o incógnita	
constante	
término	
factor	
exponente	

12.- Realiza la reducción de términos semejantes en las siguientes expresiones algebraicas.

	REDUCCIÓN DE TÉRMINOS
$2 + a^2 - 9a^2 =$	
$- 5b - 7b =$	
$6b - b + 6b =$	
$5a - 6b + 8c + 9a - 20c - b + 6b - c =$	

13.- Traduce cada una de las siguientes proposiciones en una ecuación algebraica

a) Escribe en forma algebraica el número de días en x años (supónte que el año tiene 365 días)

b) Cinco veces un número es igual al 3 más el doble del número.

c) Se deben repartir $ 70.00 entre 3 personas de modo que la primera reciba $5.00 más que la segunda y ésta $10.00 más que la tercera.

14.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

$a) 14x = -2$

$b) 3x + 4x - 2x = 8$

$c) 8x - 5 = 6x + 7$

$d) 3(2x - 1) - 2(5 - x) = 3$

$e) 2(3 - x) = 4 + 3(4x)$

$f) \frac{3}{4}x - \frac{1}{3}x = 5$

$g) \frac{5}{6}x - \frac{3}{8} = \frac{7}{4}x - \frac{2}{3}$

$h) \frac{2}{3} - \frac{2}{x} = \frac{4}{x}$

$i) \frac{3x}{(x-2)} - 4 = \frac{14 - 4x}{x - 2}$

$j) \frac{6x+5}{15} - \frac{5x+2}{3x+4} = \frac{2x+3}{5} - 1$

ANEXO 2

INSTRUMENTO DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES

Resuelve las siguientes ecuaciones en una hoja de tu cuaderno, solo que además de resolver la ecuación debes indicar en cada paso cómo le hiciste para obtener cada ecuación equivalente.

$\boxed{13x = -7}$

$\boxed{2x + 5x - 3x = 30}$

$\boxed{6x - 3 = 4x + 5}$

$\boxed{7(2x-1) - 2(1+x) = 17}$

$\boxed{4(6-x) = 8 + 6(8-x)}$

$\boxed{\frac{6x}{4} - \frac{2x}{5} = 11}$

$\boxed{\frac{3x}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2x}{3} - \frac{2}{3}}$

$\boxed{\frac{1}{5} - \frac{1}{x} = \frac{3}{x}}$

$\boxed{\frac{2x}{(x-2)} - 4 = 16x - \frac{6x}{(x-2)}}$

$\boxed{\frac{2x+5}{18} - \frac{2x+1}{2x+6} = \frac{3x+2}{5} - 2}$

GRACIAS POR TU COLABORACIÓN.

ANEXO 3

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN DE UN PROBLEMA

Resuelve el siguiente problema en una hoja de tu cuaderno indicando además como le hiciste para plantear la ecuación y resolverla.

Se deben repartir S 70.^{00} entre tres personas, de modo que la primera reciba \$ 5.^{00} más que la segunda y ésta S 10.^{00} más que la tercera. ¿Cuánto le toca a cada persona?

GRACIAS POR TU COLABORACIÓN.

ANEXO 4

CUESTIONARIO DE UTILIDAD DE LAS ECUACIONES

NOMBRE: GRUPO:

1) Describe tres situaciones de la vida cotidiana en las que las ecuaciones sean útiles.

2) Que utilidad tiene saber resolver ecuaciones si tu te dedicaras a las siguientes ocupaciones:

Matemático

Médico

Comerciante

Deportista

3) ¿Qué piensas estudiar o a qué te piensas dedicar?

4) Lee el siguiente problema y menciona cómo puedes resolverlo: *En una tienda comercial, debido al fin de la temporada primavera - verano, se esta liquidando la ropa con rebajas del 35%.¿ Cuánto es lo que tienes que pagar por un pantalón que cuesta $ 160.^{00}?*

¿Puedes resolverlo con ecuaciones o lo resolverías a través de otros métodos (menciona cuál o cuáles)?

ANEXO 5

EXÁMENES

EXAMEN DEL GRUPO 1

A) Resuelve la siguiente ecuación: $(8x-4)^2 = 8(2x+2)(4x+16)$.

B) Despeja la x de la siguiente ecuación: $\frac{3x + a}{b} = \frac{4x + b}{a}$

C) Usando suma o resta, resolver:

$5(x + y) - \frac{y + 2}{5} = 4$ .... (1)

$\frac{x + 23}{3} - y + 2x = 0$ .... (2)

D) Resolver:

$x - 2y + 3z = 8$ ..... (1)
$2x - 3y + z = -1$ .... (2)
$3x - y + 2z = 11$ ...... (3)

EXAMEN DEL GRUPO 2

A) Una variación lineal presenta en una tabla los siguientes datos:

x	y
2	3
4	13
5	18
X	0

Usando el método de aproximaciones sucesivas obtenga el valor de x para el cual la pareja de datos $(x, 0)$ es parte de la variación lineal.

B) Construye la gráfica de la recta que pasa por los puntos de coordenadas A(4,7) y B(2,1) y utiliza el método de proporción entre triángulos para obtener las coordenadas del punto $C(x, 0)$.

C) Resuelve la siguiente ecuación: $2 + \frac{x+3}{5} = \frac{x}{3} + 1$

D) En la fórmula siguiente que es para calcular el área de un cilindro: $A=2\pi r\,(r+h)$, despeja h.

E) Diana está coleccionando estampas para su álbum. Ayer me comentó que tenía la tercera parte de las estampas que componen el álbum, y de las estampas que le faltan, su prima Jazmín le dará hoy 37, así sólo le faltarán la mitad de estampas para llenar su álbum. Obtén la ecuación que permite calcular el total de estampas y dime cuántas estampas tenía Diana ayer.

F) En el siguiente problema: "Un químico tiene una solución clorada en un 60% y otra que está clorada en un 30%. ¿Qué cantidad de cada solución se necesita para hacer 100 litros de una solución clorada al 50%?"

1) Completa la tabla siguiente:

	Cantidad de solución	Porcentaje de cloro	Cantidad de cloro
Primera solución	x	60%	$0.6x$
Segunda solución			
Solución final	100		

2) Plantea y resuelve la ecuación que es solución del problema.

EXAMEN DEL GRUPO 4

A) Encuentra el inverso aditivo de los siguientes números:

3   -5 $\frac{4}{7}$ $\frac{x+3}{y-2}$

B) Resuelve las siguientes ecuaciones:

$2\,(x+7) - 2 = x-3$

$\frac{x-2}{3} + 1 = \frac{x}{7}$

C) ¿Cuántos kilogramos de café de \$2 pesos el kilogramo se deben mezclar con 20 kilogramos de \$14 pesos para que la mezcla sea de \$12.5 pesos el kilogramo?

EXAMEN DEL GRUPO 5

A) Resolver la ecuación: $5x - 4 = 2(x-2)$

B) Resolver la ecuación: $\dfrac{2}{2x+5} + \dfrac{3}{2x+5} = \dfrac{10x+5}{4x^2-25}$

C) Despejar la variable especificada: $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$ R_2 (tres resistencias conectadas en paralelo).

D) Dos niños se encuentran a una distancia de 224 metros, comienzan a caminar uno hacia el otro al mismo instante a velocidades de 1.5 m/seg. y 2 m/seg., respectivamente.

¿Cuándo se encontrarán?
¿Qué distancia habrán caminado?

E) Una muchacha necesita 45 minutos para entregar los diarios de su ruta, sin embargo, si le ayuda su hermano, juntos solo necesitan 20 minutos, ¿cuánto tardará el hermano en entregar los diarios él solo?.

ANEXO 6

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL PROFESOR Y LA DIDÁCTICA DEL CURSO

Escala de evaluación:

1) SIEMPRE
2) CASI SIEMPRE
3) ALGUNAS VECES
4) CASI NUNCA
5) NUNCA

PLANEACIÓN DEL CURSO

Objetivos de la Materia	
Menciona y explica los objetivos de la materia, haciendo hincapié sobre lo que se espera aprendan los alumnos.	
Organización del Curso	
Da a conocer los contenidos del temario a sus alumnos	
Elabora sobre la base del plan de estudios de la materia un calendario de actividades y lo da a conocer a sus alumnos	
Definición y Establecimiento de Actividades del Alumno	
Da a conocer las actividades que desarrollaran los alumnos: asistencia, participación, tareas, trabajos, puntualidad.	
Da a conocer los criterios que el alumno tiene que cumplir para acreditar la materia.	
Evaluación del Aprendizaje	
Establece la forma de evaluación en el grupo	
Señala el peso que tendrán las diferentes actividades del alumno en su calificación	
Continuidad Inter e Intra Asignaturas	
Ubica cada unidad del temario relacionándola con los objetivos de la materia	
Enfatiza la utilidad de los conocimientos en relación con otras materias	
Bibliografía	
Menciona el material bibliográfico que se requerirá para la materia (libros, artículos, revistas)	
Indica los diferentes lugares donde podrán acudir sus alumnos en busca de fuentes de información relacionada con la materia.	

CONTROL DEL PROCESO DE APRENDIZAJE

Elementos a Evaluar	
Toma en cuenta la participación, tareas y exámenes.	
Menciona las actividades de los alumnos a evaluar	
Informa oportunamente el tema a ver en la próxima clase	
Pasa asistencia a los alumnos	
Relación entre los Objetivos y la Evaluación	
Contempla en la evaluación los objetivos de la materia	
Al evaluar a los alumnos, considera los objetivos de la unidad	
Retroalimentación a los Alumnos	
El maestro hace notar los avances y errores a los alumnos	
Menciona el desempeño de los alumnos dentro de la materia	

DESARROLLO DEL CURSO

Lenguaje	
Despierta el interés de los alumnos con respecto a la materia	
Hace comentarios de la asignatura que son interesantes	
Dominio del Contenido Temático	
Da respuestas satisfactorias a las preguntas formuladas con respecto a los contenidos de la materia	
Demuestra tener conocimientos acerca de la materia impartida.	
Uso De Métodos y Herramientas Didácticas	
Al exponer, procura que todos los alumnos le presten atención	
Además de la exposición, utiliza otra forma de dar la clase	
Recurre a técnicas de enseñanza para impartir su clase (dinámicas grupales, discusión, exposición individual y por equipos).	
Procura dar atención individual	
Hace uso de otro apoyo didáctico a parte del pizarrón.	
Trabajo Extraclase	
Plantea la realización de trabajos o tareas para complementar la enseñanza en el salón de clases	
Revisa estos trabajos o tareas	
Los trabajos o tareas son individuales	
Los trabajos o tareas son obligatorios	
Asistencia y Puntualidad	
El profesor asiste a la clase	
El profesor es puntual	
Extrapolación y Vinculación a la Realidad	
Concluye toda exposición orientándola a la aplicación de la realidad	
Menciona la importancia de la asignatura en la práctica	

RELACIÓN MAESTRO - ESTUDIANTE

Dialogo Académico Maestro - Alumno	
Establece un ambiente para que el alumno plantee sus dudas y preguntas en la clase con respecto a la materia	
Durante la clase, permite que alumno le haga preguntas concernientes a la asignatura	
Durante la clase, intercala oportunamente hechos graciosos	
Disposición del Profesor	
Con respecto a las dudas o preguntas formuladas por los alumnos el maestro toma una actitud de agrado para ayudarlos	
Se muestra dispuesto a ayudar al alumno para resolver sus dudas o preguntas	
Reconocimiento del Profesor de sus Propias Limitaciones	
El maestro reconoce sus limitaciones y errores ante los alumnos	
El maestro establece que desconoce algún elemento de la materia o de algún error cometido	
Respeto a los Compromisos con el Grupo	
Respeta los acuerdos tomados en el salón de clases	
Cumple con los compromisos establecidos con los alumnos	
Disposición de Escucha a Temas Ajenos a la Asignatura	
Cuando el alumno expresa alguna inquietud no relacionada con la materia el maestro lo atiende	
Establece una relación con los alumnos para platicar sobre temas ajenos a la materia dentro de la clase	
Muestra interés por los problemas personales de los alumnos	

ANEXO 7

GUÍA DE ENTREVISTA

- ¿Cuánto tiempo tiene usted dando clases?
- ¿A qué atribuye usted los problemas que presentan los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas (por ejemplo, autoridades, contenidos, maestro, alumnos)?
- ¿Cuál de los aspectos anteriores tiene mayor peso?
- ¿Qué sugeriría para mejorar la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Ha cambiado su didáctica en el salón de clases a lo largo del tiempo?
- ¿Por qué?
- ¿Cuál ha sido el cambio?
- ¿Cuál en su papel en el proceso de enseñanza aprendizaje?
- ¿Cómo piensa que los alumnos aprenden mejor?

ANEXO 8

CATEGORÍAS DE RESPUESTAS USADAS EN EL ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN DE PRERREQUISITOS

Los tipos de respuestas de los alumnos en las evaluaciones de conocimientos y habilidades matemáticas básicas sobre el tema de ecuaciones lineales, especialmente los errores que comenten los alumnos, se clasificaron usando como base las etapas que sigue la formación de procesos simbólicos: código, regla, procedimiento y resultado.

1. CÓDIGO

Este tipo de errores se dividieron en conceptuales, gramaticales y de atención o descuido.

1.1. CONCEPTUALES, son los errores que están relacionados con:

- Desconocimiento de elementos de un conjunto de números solicitados y de sus características o desconocimiento de las propiedades que se aplican en ejemplos concretos. Por ejemplo, cuando a los alumnos se les pide que encuentren los números primos que al multiplicarlos dan 20, y contestan que son (1) (2) (10), hacen suponer que no conocen cuales son los números primos. Otro ejemplo sería cuando a los alumnos se les pide que identifiquen la propiedad que se está aplicando en la operación de $4\ (5 - 6) = 4\ (5) + 4\ (6)$ y responden que es la propiedad asociativa.

- Desconocimiento del objetivo y utilidad de realizar un ejercicio específico, o de las propiedades que se aplican para resolver dicho ejercicio. Por ejemplo, cuando los alumnos no identifican que una ecuación implica una igualdad a ambos miembros, que debe conservarse al producir ecuaciones equivalentes. Este desconocimiento los lleva a cometer errores en los que no se respeta la igualdad en ambos miembros, puesto que se realizan operaciones sólo en un miembro y no en el otro. Otro error frecuente que puede mencionarse es cuando los alumnos mezclan los enteros y los términos con variables al realizar las operaciones indicadas, por ejemplo:

$3x + 2(x+5) = 45$

$10x = 45$

$x = 4.5$

1.2. GRAMATICALES: Fueron errores relacionados con la manera de escribir correctamente una expresión matemática, puesto que se usaron signos o símbolos inadecuados al tipo de ejercicio que se estaba representando. Por ejemplo, cuando las ecuaciones equivalentes se escribieron de la siguiente manera:

$6 - 2x = 4 + 12x = 10 + 10x = x = 1$

1.3. ATENCIÓN O DESCUIDO: Se incluyeron en este tipo de errores, los errores de captura, ocasionados por descuido o falta de atención del alumno. Por ejemplo:

$6x = 39 - 3\ (8x - 7)$

$6x = 36 - 24x + 21$

También se incluyen errores de falta de paréntesis, como en el siguiente caso:

$3\ (4\ (5)) = (3(4)\ 5$

2. REGLA

Todos los errores que se clasificaron en este rubro se relacionan con la aplicación errónea de las reglas de transformación de expresiones matemáticas, por ejemplo, cuando existió una confusión entre lo que es válido hacer al transformar una expresión matemática, o cuando fue evidente un desconocimiento del contexto en el cual se podía aplicar una regla. En el caso específico del tema de ecuaciones lineales, las categorías contemplaron la aplicación errónea de las propiedades de los números racionales, cuya intención inicial fue la de conservar la igualdad en ambos miembros de la ecuación. Estos errores se dividieron en:

2.1. PROPIEDADES DE LA IGUALDAD AL USAR EL INVERSO ADITIVO. Por ejemplo:

$$a)\ 5x = 8x - 6$$
$$x = 3x - 1$$
$$x = 2x$$
$$x = 1$$

$$b)\ 8x - 5 = 6x + 37$$
$$8x + 6x = 37 - 5$$

2.2. PROPIEDADES DE LA IGUALDAD AL USAR EL INVERSO MULTIPLICATIVO. Por ejemplo:

$$3x + 4x - 2x = 8$$
$$5x = 8$$
$$x = 8 - 5$$
$$x = 3$$

2.3. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA. Por ejemplo:

a) una constante por un monomio, $4(3x) = 12$

b) una constante por un binomio, $3(2-x) = 6 - x$

c) un monomio por un binomio, $3x(x+2) = 3x - 6$

d) un binomio por un binomio, $(2x + 1)\ (5+x) = 10x + x$

2.4. OPERACIONES ALGEBRAICAS. Por ejemplo: $2 + a^2 - 9a^2 = 2 + (-9a^4)$

2.5. OPERACIONES CON NÚMEROS REALES. Por ejemplo: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2/6$

2.6. PRIORIDAD EN LAS OPERACIONES. Por ejemplo: $10 - 2\ (4) = 32$

3. PROCEDIMIENTO

Las equivocaciones que se clasificaron en este apartado estuvieron relacionadas con la falta de habilidades de los alumnos para aplicar una regla, es decir, los alumnos conocían las reglas a aplicar, pero fallaban al realizar los pasos, ya sea por descuido o por falta de conocimientos más amplios acerca de como proceder en situaciones que no les han sido modeladas. Los tipos de equivocaciones de procedimiento que se presentaron en los alumnos de CCH en el tema de ecuaciones lineales fueron:

3.1. EQUIVOCACIÓN DE SIGNO. Por ejemplo:

$$5x = 8x - 6$$
$$5x + 8x = -6$$

3.2. REDONDEO. Por ejemplo, en la división de 2796 entre 85, dan el siguiente resultado sin redondear: 32.8

3.3. EQUIVOCACIONES ARITMÉTICAS. Por ejemplo:

$$9\,(7) = 65$$

4. RESULTADO

En este caso se tomó en cuenta únicamente la validez matemática del resultado final que el alumno obtuvo en un ejercicio, sin tomar en cuenta la validez de los símbolos usados, las reglas aplicadas y el procedimiento seguido. Es bien cierto que estos tres últimos aspectos mencionados están íntimamente relacionados con el resultado final al que el alumno llegue, y es muy común que a un buen uso de códigos, la correcta aplicación de reglas y el adecuado procedimiento corresponda un resultado correcto y a la inversa, que cuando uno de estos aspectos falla, se obtenga un resultado incorrecto, sin embargo, según Mancera (1991) pueden darse dos situaciones que rompen con esta generalidad y que constituyen la *excepción de la regla.*

- Procedimientos incorrectos, resultados correctos: Este es el caso de cuando el alumno, a pesar de hacer mal uso de las reglas o los procedimientos adecuados, llega a un resultado correcto, muchas de estas veces, debido a que un error cometido anula otro error anterior. Un ejemplo que ilustra este caso es el siguiente ejercicio:

$$(5 - 3x)(7 - 2x) = (11 - 6x)(3 - x)$$
$$5 - 3x + 7 - 2x = 11 - 6x + 3 - x$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

Observe que aún cuando el alumno está sumando en vez de multiplicar los dos binomios, como lo indican los paréntesis, $x = 1$ es la solución correcta.

- Procedimientos correctos, resultados incorrectos: También en posible encontrar casos en los que los alumnos aplican adecuadamente el código, las reglas y el procedimiento para resolver un problema y sin embargo, matemáticamente su resultado no es correcto, aunque didácticamente, el profesor podría considerar la respuesta como correcta. Ejemplo de ello es que en la división de $2796 \div 85$, cuando se les pide el resultado con un decimal, muchos alumnos no redondean el resultado, puesto que únicamente truncan los números en el primer decimal, obteniendo 32.8 en lugar de 32.9

Debido a las anteriores consideraciones, cuando una respuesta fue categorizada como incorrecta, se usó generalmente el código de tipos de errores presentado en los párrafos anteriores, con el propósito de identificar el tipo de error que cometió y evitar así los inconvenientes de identificar únicamente respuestas correctas o incorrectas. Las opciones en este rubro son:

4.1. RESPUESTA CORRECTA: Hace referencia a que la respuesta del alumno es adecuada a la pregunta que se le hace o resuelve el problema planteado.

4.2. NO CONTESTÓ: El alumno no da respuesta y por lo tanto, el ejercicio no es resuelto.

4.3. RESPUESTA INCORRECTA: El alumno proporciona una respuesta no pertinente a lo que se le pide o su respuesta no resuelve el problema.

ANEXO 9

CATEGORÍAS DE RESPUESTAS USADAS EN EL ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN DE SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

El proceso de solución de ecuaciones fue analizado usando las mismas categorías que en el instrumento de evaluación de prerrequisitos, salvo pequeñas modificaciones que se presentan a continuación:

- Cuando al analizar el proceso de solución de ecuaciones se encontraban una equivocación y un error, solamente el error era registrado por representar un problema de mayores implicaciones para la solución de ecuaciones.

- Se categorizaron como errores conceptuales los procedimientos que presentaron más de 2 errores de cualquier tipo puesto que se partió del hecho de que los alumnos que cometen este número de errores en la solución de ecuaciones, especialmente en las más sencillas, no tienen claro el objetivo o los procedimientos de solución de ecuaciones.

- Ningún procedimiento se categorizó como resultado incorrecto, puesto que si un procedimiento presentaba errores que llevaran a un resultado incorrecto, éste o éstos errores debían ser incluido en alguna de las categorías previamente establecidas.

- De esta manera, las categorías de error quedaron como sigue:

CÓDIGO	TIPO DE ERRORES
	CÓDIGO
11	Conceptual
12	Gramatical
13	Atención o descuido
	REGLA
21	Propiedades de la igualdad (inverso aditivo)
22	Propiedades de la igualdad (inverso multiplicativo)
23	Propiedad distributiva
24	Operaciones algebraicas
25	Operaciones con números reales
26	Prioridad en las operaciones
	PROCEDIMIENTO
31	Equivocación de signo
32	Redondeo
33	Equivocación aritmética
	RESULTADO
41	Resultado correcto
42	No contestó

ANEXO 10

CATEGORÍAS DE RESPUESTAS USADAS EN EL ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN DE SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

El problema usado en esta investigación fue el siguiente:

Se deben repartir $ 70.00 entre 3 personas de modo que la primera reciba $ 5.00 más que la segunda y ésta $ 10.00 más que la tercera.

Los procedimientos de solución usados por los alumnos fueron categorizados de la siguiente manera:

- TANTEO. Cuando se iban probando diferentes combinaciones de números para tratar de encontrar la respuesta correcta, que es equivalente a lo que Kieran (1992), llama sustitución por ensayo y error, o Gallardo (1987) como tanteo sistematizado.

- ARITMÉTICO. Cuando existió un planteamiento del problema pero no a través de símbolos algebraicos, sino a través de procedimientos aritméticos, como en el siguiente ejemplo:

  Primer persona debe recibir 5 + 10 = 15
  Segunda persona debe recibir 10
  Tercer persona debe recibir 0

  Como 5 + 10 + 10 = 25, entonces restamos 70 – 25 = 45. El 45 lo dividimos entre 3 y nos da 15, entonces sumamos:

  Primer persona: 15 + 15 = 30
  Segunda persona: 15 + 10 = 25
  Tercer persona: 15 + 0 = 15

- TABLA. Cuando realizaron una tabla en la que iban cambiando los valores de la variable para encontrar la solución. Esto es lo que Linchevski (1995), llamó solución procedural o prealgebraica. Un ejemplo de esta categoría es presentado a continuación:

Tercera persona	Segunda persona	Primera persona	Total
30	40	45	115
25	35	40	100
20	30	35	85
15	25	30	70

- ALGEBRAICO. Cuando plantearon una ecuación tomando en cuenta los elementos del problema y posteriormente desarrollaron la ecuación para encontrar la respuesta, por ejemplo:

$x+15 + x+ 10 + x = 70$

$3x + 25 = 70$

$3x = 45$

$x = 45/3$

$x = 15$

Así, $15 + 15 = 30$ para la primer persona,

$15 + 10 = 25$ para la segunda persona,

$\underline{15}$ para la tercer persona

70

Cabe mencionar que para cada una de estas categorías se registró si el resultado fue correcto o incorrecto, de esta manera, las categorías de registro en la base de datos fueron las siguientes:

CÓDIGO	CATEGORÍA
1	Correcto tanteo
2	Incorrecto tanteo
3	Correcto aritmético
4	Incorrecto aritmético
5	Correcto tabla
6	Incorrecto tabla
7	Correcto algebraico
8	Incorrecto algebraico
9	No contestó

ANEXO 11

CATEGORÍAS DE RESPUESTAS USADAS EN EL ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO DE UTILIDAD DE LAS ECUACIONES

Cada una de las preguntas del Cuestionario de Utilidad de las Ecuaciones tuvo diferentes categorías, las cuales se presentan a continuación:

1) **Describe tres situaciones de la vida cotidiana en las que las ecuaciones sean útiles.** Para esta pregunta, las categorías fueron:

- Pertinentes: en las que los alumnos mencionaban situaciones reales y pertinentes en las que podían usar las ecuaciones, por ejemplo, "para conocer la edad de alguien", "para obtener un precio desconocido", "para saber el promedio de calificaciones". Cabe mencionar que las respuestas que se categorizaron como pertinentes estuvieron estrechamente relacionadas con el tipo de problemas escritos presentados por los maestros en el salón de clases y ningún estudiante mencionó el uso de las ecuaciones a otras situaciones no presentadas por el profesor.

- No pertinentes: en la que las respuestas de los alumnos mencionaban situaciones donde no se usaban ecuaciones o no especificaron el uso de las ecuaciones en estas situaciones, por ejemplo, "para pagar el pasaje", "en la cocina", "en las carpinterías".

2) **¿Qué utilidad tiene saber resolver ecuaciones si tú tuvieras alguna de las siguientes ocupaciones: matemático, médico, comerciante y deportista?.** Se diseñaron diferentes categorías que estuvieron relacionadas con el grado de utilidad de las ecuaciones para las profesiones antes mencionadas, es decir, 1 se refiere a una utilidad muy general que no especifica dando ejemplos pertinentes, 2 se refiere a usos pertinentes, 3 a usos no pertinentes y 4 a la falta de respuesta por parte de los alumnos. Estas categorías con algunos ejemplos de cada actividad son presentadas a continuación:

CÓDIGO	PROFESIÓN / CATEGORÍA
	MATEMATICOS
1	Para enseñar
2	Solución de problemas matemáticos
3	No pertinente (p.e. sabría todo con facilidad)
4	No contestó
	MÉDICOS
1	En su práctica médica
2	Para mezclar sustancias
3	No pertinente (p.e. para llevar la contabilidad, sacaría un número dado de enfermos)
4	No contestó
	COMERCIANTES
1	Para vender, comprar o ganar
2	Para saber cantidades desconocidas
3	No pertinentes (p.e. para sacar los productos que vende)
4	No contestó
	DEPORTISTAS
1	Para mejorar su rendimiento
2	Para saber distancias
3	No pertinentes (p.e. para saber el porcentaje de ganancias en su deporte, metería más goles)
4	No contestó

3) **¿Qué piensas estudiar o a qué te piensas dedicar?**. Las respuestas a esta pregunta se categorizaron con base en las siguientes áreas de conocimiento.

CODIGO	ÁREA DE CONOCIMIENTO
1	Físico – matemático (Actuaría, Ingeniería, Matemáticas, Física)
2	Químico – biológicas (Medicina, Biología, Psicología)
3	Económico – administrativo (Contabilidad, Administración, Relaciones Internacionales, Economía, Ciencias de la Comunicación.)
4	Humanidades (Sociología, Derecho)
5	Filosofía y Letras (Filosofía)
6	Bellas Artes (Diseño Gráfico, Música)
7	No contestó o no sabe todavía

4) **Lee el siguiente problema y menciona como puedes resolverlo:** ***En una tienda comercial debido al fin de la temporada primavera – verano se está liquidando la ropa con rebajas del 35%. ¿Cuánto es lo que tienes que pagar por un pantalón que cuesta $160?.*** Las categorías de respuestas se realizaron de acuerdo al método utilizado o mencionado por los alumnos como útil para solucionar el problema. Los códigos en la base de datos fueron los siguientes:

CÓDIGO	CATEGORÍA
1	Aritmética (por ejemplo, porcentajes)
2	Álgebra
3	Otra
4	No contestó

¿Puedes resolver el problema con ecuaciones o lo resolverías con otro método?. Esta pregunta solo tuvo tres categorías, que son las siguientes:

CÓDIGO	CATEGORÍA
1	Si
2	No
3	No contestó

ANEXO 12

RESPUESTAS DE LOS PROFESORES DE CADA GRUPO EN LA ESCALA DE AUTOEVALUACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL PROFESOR Y LA DIDÁCTICA DEL CURSO

PLANEACIÓN DEL CURSO	GRUPO				
	1	2	3	4	5
Menciona y explica los objetivos de la materia haciendo hincapié sobre lo que se espera aprendan los alumnos	3	1	3	2	1
Da a conocer los contenidos del temario a sus alumnos	1			1	1
Elabora en base al plan de estudios de la materia un calendario de actividades y lo da a conocer a sus alumnos	2	1	1	4	5
Da a conocer las actividades que desarrollaran los alumnos: asistencia, participación, tareas, trabajos, puntualidad.	2	4	1	1	2
Da a conocer los criterios que el alumno tiene que cumplir para acreditar la materia	1	1	1	1	1
Establece la forma de evaluación en el grupo	1	1	1	1	1
Señala el peso que tendrán las diferentes actividades del alumno en su calificación	1	1		1	5
Ubica cada unidad del temario relacionándola con los objetivos de la materia	1	1	2	1	3
Enfatiza la utilidad de los conocimientos en relación con otras materias	2	1	1	3	3
Menciona el material bibliográfico que se requerirá para la materia.	1	1		1	1
Indica los diferentes lugares donde podrán acudir sus alumnos en busca de fuentes de información relacionada con la materia.	1	1	5	2	3

CONTROL DEL PROCESO DE APRENDIZAJE	GRUPO				
	1	2	3	4	5
Toma en cuenta la participación, tareas y exámenes	2	4	1	1	1
Menciona las actividades de los alumnos a evaluar	1	1	1	1	1
Informa oportunamente el tema a ver en la próxima clase	1	1	3	3	3
Pasa asistencia a los alumnos	5	1	5	5	3
Contempla en la evaluación los objetivos de la materia	2	1	1	1	1
Al evaluar a los alumnos, considera los objetivos de la unidad	1	1	1	1	1
El maestro hace notar los avances y errores a los alumnos	2	1	1	3	1
Menciona el desempeño de los alumnos dentro de la materia	2	1	3	2	3

DESARROLLO DEL CURSO	GRUPO				
	1	2	3	4	5
Despierta el interés de los alumnos con respecto a la materia	2	1	1	3	3
Hace comentarios de la asignatura que son interesantes	2	1	1	3	3
Da respuestas satisfactorias a las preguntas formuladas con respecto a los contenidos de la materia	2	1	1	3	4
Demuestra tener conocimientos con respecto a la materia impartida	1	1	1	1	4
Al exponer, procura que todos los alumnos le presten atención	2	1	1	2	4
Además de la exposición, utiliza otras formas de dar clase	4	3	3	3	4
Recurre a técnicas de enseñanza para impartir su clase (dinámica grupal, discusión, exposición individual)	3	4	5	5	3
Procura dar atención individual	3	1	1	4	3
Hace uso de otro apoyo didáctico a parte del pizarrón	3	5	5	5	2
Plantea la realización de trabajos o tareas para complementar la enseñanza en el salón de clases	1	5	1	1	4
Revisa estos trabajos o tareas	2			1	2
Los trabajos o tareas son individuales	1			3	3
Los trabajos o tareas son obligatorios	5			5	3
El profesor asiste a la clase	1	1	2	1	1
El profesor es puntual	2	1	1	2	2
Concluye toda exposición orientándola a la aplicación de la realidad	2	1	2	3	3
Menciona la importancia de la asignatura en la práctica	2	1	1	3	3

RELACIÓN MAESTRO – ESTUDIANTE	GRUPO				
	1	2	3	4	5
Establece un ambiente para que el alumno plantee sus dudas y preguntas en la clase con respecto a la materia	2	1	1	2	3
Durante la clase, permite que el alumno haga preguntas concernientes a la asignatura	2	1	1	1	3
Durante la clase, intercala oportunamente hechos graciosos	3	2	1	5	4
Con respecto a las dudas o preguntas formuladas por los alumnos el maestro toma una actitud de agrado para ayudarlos	2	1	1	3	3
Se muestra dispuesto a ayudar al alumno para resolver sus dudas o preguntas	3	1	1	3	2
El maestro reconoce sus limitaciones y errores ante los alumnos	2	1	1	2	2
El maestro establece que desconoce algún elemento de la materia o algún error cometido	1	1	1	2	2
Respeta los acuerdos tomados en el salón de clases	2	1	1	1	2
Cumple con los compromisos establecidos con los alumnos	2	1	1	1	2
Cuando el alumno expresa alguna inquietud no relacionada con la materia el maestro lo atiende	3	1	1	3	1
Establece una relación con los alumnos para platicar sobre temas ajenos a la materia dentro de la clase	3	1	1	4	1
Muestra interés en los problemas personales de los alumnos	3	1	4	3	1