

01163 10  
2cy



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TESIS

**PROPAGACIÓN DE ONDAS ELÁSTICAS  
EN MEDIOS IRREGULARES**

ROSSANA VAI

QUE SE PRESENTA COMO  
REQUISITO PARCIAL PARA  
OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA  
(MECÁNICA DE SUELOS)

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. FRANCISCO J. SÁNCHEZ SESMA

MÉXICO D.F.

1999

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1

275873





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice General

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Agradecimientos</b>                               | <b>5</b>  |
| <b>Resumen</b>                                       | <b>7</b>  |
| <b>1 Introducción</b>                                | <b>9</b>  |
| <b>2 Elementos de elastodinámica</b>                 | <b>13</b> |
| 2.1 Introducción . . . . .                           | 13        |
| 2.2 Deformación y esfuerzo . . . . .                 | 13        |
| 2.3 Ecuación de onda . . . . .                       | 14        |
| 2.4 Ondas planas . . . . .                           | 15        |
| 2.5 Ondas homogéneas e inhomogéneas . . . . .        | 16        |
| 2.6 Transformada de Fourier . . . . .                | 16        |
| 2.7 Condiciones de frontera . . . . .                | 17        |
| 2.8 Atenuación . . . . .                             | 18        |
| <b>3 El IBEM</b>                                     | <b>19</b> |
| 3.1 Introducción . . . . .                           | 19        |
| 3.2 Ecuaciones integrales . . . . .                  | 19        |
| 3.3 Condiciones de frontera . . . . .                | 20        |
| 3.4 Discretización . . . . .                         | 21        |
| <b>4 Aplicación del IBEM a medios estratificados</b> | <b>23</b> |
| 4.1 Introducción . . . . .                           | 23        |
| 4.2 Validación del programa . . . . .                | 24        |
| 4.2.1 Incidencia de ondas planas . . . . .           | 24        |
| 4.2.2 Fuente lineal de dilatación . . . . .          | 25        |
| 4.3 Estudio de efectos de sitio . . . . .            | 28        |
| 4.3.1 Incidencia de ondas planas . . . . .           | 28        |
| 4.3.2 Fuente lineal de dilatación . . . . .          | 29        |
| 4.4 Conclusiones . . . . .                           | 31        |
| 4.5 Figuras . . . . .                                | 32        |
| <b>5 Fronteras absorbentes</b>                       | <b>59</b> |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 5.1      | Introducción . . . . .                                  | 59         |
| 5.2      | Desplazamiento, esfuerzo y rigidez . . . . .            | 60         |
| 5.3      | Límite estático . . . . .                               | 62         |
| 5.4      | Ondas homogéneas . . . . .                              | 62         |
| 5.5      | Ondas inhomogéneas . . . . .                            | 63         |
| 5.6      | Tratamiento numérico . . . . .                          | 63         |
| 5.7      | Un ejemplo de aplicación . . . . .                      | 65         |
| 5.8      | Conclusiones . . . . .                                  | 66         |
| 5.9      | Figuras . . . . .                                       | 67         |
| <b>6</b> | <b>Conclusiones</b>                                     | <b>83</b>  |
|          | <b>Referencias</b>                                      | <b>85</b>  |
|          | <b>Anexos</b>   | <b>92</b>  |
| <b>A</b> | <b>Funciones de Green del espacio completo</b>          | <b>93</b>  |
| A.1      | Expresión analítica de las funciones de Green . . . . . | 93         |
| A.2      | Integración de las funciones de Green . . . . .         | 94         |
| A.3      | Figuras . . . . .                                       | 96         |
| <b>B</b> | <b>Cálculo de las soluciones de referencia</b>          | <b>97</b>  |
| B.1      | Incidencia de ondas planas . . . . .                    | 97         |
| B.2      | Fuente lineal de dilatación . . . . .                   | 98         |
| B.3      | Figuras . . . . .                                       | 100        |
| <b>C</b> | <b>Pulso de Ricker</b>                                  | <b>103</b> |
| C.1      | Expresión analítica de la ondícula . . . . .            | 103        |
| C.2      | Figuras . . . . .                                       | 104        |

# Agradecimientos

Esta tesis fue realizada gracias al apoyo financiero de la DGAPA (IN 10-8295 e IN 10-4998) y de la Fondazione Confalonieri (Milano, Italia). El trabajo se realizó en la Coordinación de Ingeniería Sismológica, en el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

Agradezco a Jean-Pierre Vilotte por haberme permitido conocer su laboratorio. Gracias a mi amigo y asesor Francisco Sánchez Sesma, a Paco Luzón Martínez, a José Manuel Castillo Covarrubias, a Jean-Pierre Vilotte y a Dimitri Komatitsch por su imprescindible aporte en la elaboración de los artículos que firmamos juntos.

Gracias a los profesores Francisco Chávez, Mario Ordaz, Efraín Ovando, Miguel Rodríguez, Miguel Romo, Martha Suarez y Víctor Taboada por haber estado siempre disponibles para disertar conmigo.

Gracias a los amigos Jorge Soto y Leobardo Salazar por su apoyo en cuestiones de cómputo. Gracias a Manuel Cruz y a Tere Radilla por haber resuelto muchas dudas de redacción.

# Resumen

Se usa el método de elementos de frontera (Indirect Boundary Element Method o IBEM) para simular la propagación de ondas elásticas en medios limitados por fronteras con geometría irregular. En particular, se analiza la respuesta de sistemas estratificados bidimensionales excitados por ondas planas y por fuentes lineales de dilatación. A partir de resultados en el dominio de la frecuencia se calculan sismogramas sintéticos por medio de la transformada de Fourier. Como validación de los programas se presentan comparaciones con series temporales obtenidas con soluciones analíticas o con otros métodos numéricos, como aplicación se muestran la simulación de la respuesta de la Cuenca de México y varios ejemplos. Con base en los resultados, se discuten algunas de las limitaciones del IBEM y se sugiere una estrategia para superar una de ellas. En efecto, se expone un análisis preliminar de una nueva condición de frontera absorbente para ondas  $SH$  y de Love. El estudio se lleva a cabo en los dominios número de onda-frecuencia y espacio-frecuencia y conduce, para ondas  $SH$ , a una solución analítica que se prueba con un ejemplo numérico.

# Capítulo 1

## Introducción

La simulación numérica de la propagación de ondas elásticas es de interés tanto en Ingeniería como en Sismología. En efecto, para el diseño y el cálculo estructural de las construcciones en zonas sísmicas, se requiere la evaluación cuantitativa de los movimientos del terreno relacionados con temblores. Hay muchos sitios donde los registros de sismos pasados permiten predecir las características de dichos movimientos, por ejemplo con los datos de la red acelerométrica instalada en la ciudad de México se pudo elaborar la microzonificación del área urbana (Pérez-Rocha, 1998). Por otro lado, la cobertura instrumental puede ser insuficientemente densa o del todo ausente; en esos casos el único recurso es la simulación numérica de la propagación de ondas. Otras aplicaciones del modelado matemático estriban en reproducir registros de temblores, explosiones y vibraciones por hincado de pilotes, por ejemplo.

Puesto que un tren de ondas sísmicas modifica su patrón según las características del medio que atraviesa, la interpretación cuantitativa de la información contenida en las señales permite elegir entre diferentes modelos de la estructura terrestre. Esto concierne tanto a problemas de ingeniería como de sismología, pudiéndose identificar heterogeneidades relativamente superficiales o muy profundas.

La solución de la ecuación de onda en un medio homogéneo es relativamente sencilla; sin embargo, satisfacer las condiciones de frontera en configuraciones irregulares es difícil (Sánchez-Sesma, 1996) y, para modelar casos reales, es necesario utilizar algún método numérico. Se han desarrollado algoritmos para simular el comportamiento de estructuras muy específicas, por ejemplo destacan los trabajos de Haskell (1953), Kennett (1983), Bouchon (1981) y Luco y Apsel (1983) en los cuales se analizan sistemas de capas planas. De otra forma, el cálculo de la respuesta sísmica se puede llevar a cabo con técnicas que permiten amplia libertad en la elección del modelo. Entre ellas se mencionan elementos finitos, diferencias finitas (Ohminato y Chouet, 1997), métodos espectrales (Faccioli *et al.*, 1997), métodos basados en la descomposición en número de onda discreto (Aki y Larner, 1970), métodos de frontera (Manolis y Beskos, 1988; Sánchez-Sesma y Campillo, 1991) y métodos híbridos en que se combinan diferentes esquemas (Moczo *et al.*, 1997). Cuando el método numérico por emplear requiera la discretización del medio o del operador diferencial, se precisa definir un modelo de dimensiones finitas aun cuando se

quisiera modelar un semiespacio con una capa superficial irregular e inhomogénea. Por consiguiente, se han dedicado esfuerzos significativos para formular diferentes condiciones que simulen fronteras ficticias, tratando de reproducir la condición de irradiación al infinito. Por ejemplo, Lysmer y Kuhlemeyer (1969) usan amortiguadores viscosos; Lysmer y Waas (1972) y Chen *et al.* (1981) adoptan formulas analíticas; Smith (1974) combina iterativamente condiciones de Neumann y de Dirichlet; Clayton y Engquist (1977) y Higdon (1990) proponen condiciones exactas por particulares ángulos de incidencia; exacta es también la condición proporcionada por Keller y Givoli (1989), mientras que errata, aun si efectiva, es la condición publicada por Stacey (1988).

A raíz del trabajo presentado en esta tesis está el interés en el modelado de medios irregulares. Mi asesor y yo implantamos un algoritmo (el IBEM) para resolver la ecuación de onda en dichas configuraciones excitadas por ondas planas y lo aplicamos a un modelo de la estructura geológica de la Cuenca de México. Queríamos comprobar si la larga duración de los temblores registrados en la cuenca pudiera adscribirse a una irregularidad cortical a tres kilómetros de profundidad, pero la respuesta simulada no fue realista ni en duración ni en amplitud. Trabajamos entonces en dos direcciones distintas. Por un lado, modificamos el algoritmo para modelar un sistema de  $N$  estratos, siempre bajo incidencia de ondas planas. Por otro lado, sustituimos el tipo de excitación con una línea de dilatación. En ambos casos el área de memoria del instrumento de computo de más fácil acceso (una estación de trabajo Sun, modelo Sparc 10 con 32Mb de RAM) llegaba a ser insuficiente para los cálculos de interés, además las simulaciones podían tardarse días. Decidimos dar un nuevo rumbo a nuestra investigación, abordando el tema de las fronteras absorbentes en el dominio de la frecuencia. Frecuentemente, la calidad de los resultados depende de la extensión espacial del dominio en que se resuelve la ecuación de onda y ésto, a su vez, determina el costo de cómputo. Una frontera eficiente permite circunscribir la región bajo estudio disminuyendo su vastedad, *i.e.* reduce el costo computacional. Probablemente, en un futuro no muy lejano, la tecnología de los equipos de computación volverá posible trabajar con dimensiones de RAM y de memoria mucho mayores que las actuales. Si, hoy en día, una frontera absorbente eficiente es una necesidad, mañana podría convertirse en una simple monería. A pesar de eso, la búsqueda de una nueva frontera absorbente sigue siendo un tema de investigación interesante porque vivimos en el presente.

En las siguientes secciones se recorre el proceso arriba descrito. En el capítulo dos se ofrece una muy rápida introducción a los conceptos de elastodinámica. No se pretende explicar los principios de esta disciplina; más bien se desglosan hipótesis, ecuaciones y notación usadas en el trabajo. En el capítulo tres, se presenta el método numérico empleado para las simulaciones ilustradas en el capítulo cuatro. Este último está dedicado al modelado matemático de propagación de ondas en medios estratificados. En el capítulo cinco, se discuten los avances en la búsqueda de una nueva frontera absorbente. El texto termina con unas breves conclusiones y análisis de los logros. Se mencionan varios puntos que merecen ser profundizados y caminos que apenas se empiezan a abordar.

Aun si se trata de una tesis de sismología, este trabajo se presenta para obtener el grado de maestro en mecánica de suelos y conceptos que se consideran elementales

en sismología no son necesariamente ordinarios en mecánica de suelos. Por eso, en la redacción de esta tesis, se buscó un balance entre claridad y trivialidad, tratando de acercar a la sismología los geotécnicos.

# Capítulo 2

## Elementos de elastodinámica

### 2.1 Introducción

Bajo hipótesis muy simplistas, la tierra puede considerarse como un medio elástico, homogéneo e isótropo y un temblor como una excitación del medio. La excitación produce una perturbación que se propaga en forma de onda mecánica, por consiguiente los puntos suficientemente lejos de la fuente están sujetos a movimiento alrededor de la posición de equilibrio estático sin que haya transporte de masa. En la realidad, los trenes de ondas se modifican al atravesar heterogeneidades y reflejarse en la superficie del terreno, además pueden interferir constructivamente o destructivamente entre ellos. Los registros sísmicos instrumentales presentan características de gran complejidad; sin embargo, con la ayuda de los principios de la elastodinámica, se logran identificar algunas características básicas. Para un estudio de la elastodinámica, se recomienda la lectura de los textos de Aki y Richards (1980) y Achenbach (1975). Este capítulo está dedicado exclusivamente a la aclaración de notación y convenciones usados en el texto.

### 2.2 Deformación y esfuerzo

En un medio continuo, los desplazamientos ( $\mathbf{u}$ ) de dos puntos ( $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$ ) están relacionados, despreciando los términos de orden superior, por la siguiente ecuación

$$u_i(Q) = u_i(P) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j, \quad (2.1)$$

donde  $dx = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$  y se adopta el sistema de referencia cartesiano, siendo este el idóneo para el estudio de los problemas aquí presentados. Según el caso, se usará notación indicial o extensa. El último paréntesis de la ecuación 2.1 define la rotación relativa, mientras que el primero define el tensor de deformación infinitesimal

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.2)$$

$\epsilon_{ij}$ , cuando  $i = j$ , expresa el alargamiento/acortamiento en la dirección  $x_i$ ;  $\epsilon_{ij}$ , cuando  $i \neq j$ , mide variaciones de ángulo entre las direcciones  $x_i$  y  $x_j$ . Por construcción, el tensor de deformación es simétrico ( $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ ).

Considérese un corte imaginario del medio; sea  $A$  la superficie de dicho corte,  $\mathbf{n}$  la normal a ella asociada y  $\mathbf{F}$  la fuerza que cada una de las dos partes del medio ejerce sobre la otra. Para un punto  $\mathbf{P}$  de  $A$ , se define el vector esfuerzo asociado a  $\mathbf{n}$  como

$$t_i^{(\mathbf{n})} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{F_i}{\Delta A}, \quad (2.3)$$

donde el vector  $\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}$  es conocido como tracción y  $\Delta A$  es una porción del área  $A$  alrededor de  $\mathbf{P}$ . El teorema de Cauchy demuestra que  $t_i^{(\mathbf{n})}$  se puede calcular mediante los esfuerzos que actúan en el mismo punto  $\mathbf{P}$ , pero en tres planos ortogonales

$$t_i^{(\mathbf{n})} = \sigma_{ji} n_j, \quad (2.4)$$

donde  $\sigma_{ji}$  es el componente del esfuerzo que actúa en la dirección  $x_i$  sobre un plano normal a  $x_j$  y  $n_j$  es el coseno director de  $\mathbf{n}$  con respecto a  $x_j$ . Los subíndices asumen valores de 1 a 3.

Se puede demostrar que en un medio elástico homogéneo e isótropo los esfuerzos y las deformaciones están relacionados por medio de dos parámetros independientes según la ley de Hooke

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad (2.5)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé, parámetros mecánicos del medio, y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. En muchos campos de la ingeniería se acostumbra usar una notación diferente:  $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$  (módulo de deformación longitudinal o de Young),  $G = \mu$  (módulo de deformación tangencial) y  $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$  (módulo de Poisson). Cabe aclarar que sólo dos parámetros de la terna  $E$ ,  $G$  y  $\nu$  son independientes.

## 2.3 Ecuación de onda

Para que exista equilibrio dinámico rotacional respecto a los tres ejes coordenados, tiene que cumplirse  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  (el tensor de esfuerzos es simétrico). El equilibrio dinámico en translación conduce a la ecuación

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2.6)$$

donde  $\mathbf{f}$  es la fuerza de volumen,  $\rho$  la densidad del medio y  $t$  la variable temporal.

Substituyendo las ecuaciones 2.2 y 2.5 en la ecuación de equilibrio dinámico (2.6) se llega a la ecuación de Navier

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

o

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (2.8)$$

donde  $\nabla$  es el operador nabla ( $\nabla = \partial/\partial x \hat{i} + \partial/\partial y \hat{j} + \partial/\partial z \hat{k}$ ), y  $\nabla^2$  es el laplaciano ( $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ );  $x, y, z$  corresponden a las direcciones  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  o bien 1, 2, 3. Para los casos en estudio  $\mathbf{f} = 0$ .

El teorema de Lamé enuncia que si las condiciones iniciales admiten descomposición por medio de potenciales también el campo de desplazamiento se puede descomponer en potenciales y la ecuación de Navier se reduce a dos ecuaciones de onda (una escalar y una vectorial).

## 2.4 Ondas planas

La solución general de la ecuación de onda en un medio infinito y homogéneo es una función del tipo  $f\left(t \pm \frac{x_i n_i}{c}\right)$ , cuyo argumento se llama fase. Cuando la fase es constante,  $f$  describe un plano que se mueve en dirección  $n$ , sentido expresado por el signo de  $x$  y velocidad  $c$ ;  $f$  representa una onda plana. El vector unitario  $n$  se denomina rayo; en sentido más amplio se le llama rayo también a una línea recta formada por la secuencia temporal de  $n$ . Existen ondas para las cuales la dirección de desplazamiento es igual a la dirección de propagación, este tipo de onda y su velocidad se denotan con las letras  $P$  y  $\alpha$  respectivamente. Hay otras ondas para las cuales la dirección de desplazamiento es transversal a la dirección de propagación, en este caso se usan  $S$  y  $\beta$  para indicar tipo de onda y velocidad de propagación respectivamente. Por el teorema de Lamé resulta que  $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  y  $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ , notese que  $\alpha > \beta$ . Entre más blando es el medio, menores son los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . Las propiedades mecánicas del medio, dadas por  $\lambda$  y  $\mu$  en la sección anterior, se pueden especificar también asignando  $\alpha$  y  $\beta$  o  $\beta$  y  $\nu$ . Los parámetros  $\rho\alpha$  y  $\rho\beta$  se llaman impedancia de ondas  $P$  y  $S$  respectivamente.

Se adoptará un sistema de referencia cartesiano donde el plano  $x_1x_2$  se ubica en superficie y el eje  $x_3$  está dirigido hacia el interior de la tierra. Con este sistema de referencia el desplazamiento asociado a una onda  $S$  se puede descomponer en la suma de dos vectores, uno en dirección  $x_2$  y otro contenido en el plano  $x_1x_3$ . El primero indica el movimiento asociado a ondas  $SH$  y, matemáticamente, se representa con la ecuación escalar

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (2.9)$$

donde  $\mathbf{u} = u_2(x_1, x_3; t)\hat{j} = v(x, z; t)\hat{j}$ .  $u_2, \sigma_{x_1x_2}$  y  $\sigma_{x_2x_3}$  son las únicas variables no nulas. El segundo vector indica movimiento asociado a ondas  $SV$  y se representa con la ecuación vectorial de Navier escrita para  $\mathbf{u} = u_1(x_1, x_3; t)\hat{i} + u_3(x_1, x_3; t)\hat{k} = u(x, z; t)\hat{i} + w(x, z; t)\hat{k}$ .  $u_2, \sigma_{x_1x_2}$  y  $\sigma_{x_2x_3}$  son nulos. Para las ondas  $P$ , como para las  $SV$ , el campo de desplazamiento es  $\mathbf{u} = u_1(x_1, x_3; t)\hat{i} + u_3(x_1, x_3; t)\hat{k} = u(x, z; t)\hat{i} + w(x, z; t)\hat{k}$  y  $u_2, \sigma_{x_1x_2}$  y  $\sigma_{x_2x_3}$

son nulos. En el caso en que el medio no sea infinito y homogéneo, la existencia de ondas  $P$  es acoplada a la existencia de ondas  $SV$ .

## 2.5 Ondas homogéneas e inhomogéneas

La solución de la ecuación de onda se puede expresar como producto de funciones de una sola variable

$$f\left(t \pm \frac{x_i n_i}{c}\right) = v_0(k_1, k_2, k_3; \omega) e^{i(\omega t - k_i x_i)} d\omega dk_1 dk_2 dk_3, \quad (2.10)$$

donde  $i = \sqrt{-1}$  es la unidad imaginaria,  $k_j = \omega n_j / c$  y  $k_3 = \sqrt{\omega^2 / c^2 - k_1^2 - k_2^2}$ , ya que  $\mathbf{n}$  es un vector con módulo unitario. En este trabajo, se asumirá  $k_1 = k$ ,  $k_2 = 0$  y  $k_3 = \eta$ . Si  $|k| \leq |\omega / \beta|$ ,  $\eta$  es real y la ecuación 2.10 representa una onda plana homogénea, o sea  $n_x$  y  $n_z$  son reales y la onda se propaga en dirección positiva de los ejes  $x$  y  $z$ . Si  $|k| > |\omega / \beta|$ ,  $\eta$  es imaginario y la ecuación 2.10 representa una onda inhomogénea, o sea  $n_x$  es real mientras que  $n_z$  es imaginario, la onda se propaga en dirección  $x$  y su amplitud varía exponencialmente en  $z$ . Dado el sistema de referencia elegido, se requiere imponer  $Im(\eta) \leq 0$ , así que se respete la condición de irradiación al infinito o condición de Sommerfeld (Eringen y Suhubi, 1975). En un semiespacio homogéneo es posible que un par de ondas inhomogéneas  $P$ - $SV$  se propague a lo largo de la superficie, en este caso se habla de una onda de Rayleigh. En un semiespacio con uno o más estratos, es posible que ondas  $SH$  inhomogéneas se propaguen a lo largo de la superficie, en este caso se habla de ondas de Love. En presencia de varios estratos también se pueden propagar ondas de Rayleigh. La velocidad de propagación de las ondas de Rayleigh y de Love depende de  $\omega$  y las ondas se dicen dispersivas.

## 2.6 Transformada de Fourier

En lugar de trabajar en el dominio espacio-tiempo, a veces, es útil cambiar de variable y moverse en el dominio espacio-frecuencia. Matemáticamente esto corresponde a operar la transformada de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.11)$$

donde  $t$  es el tiempo y  $\omega$  es la frecuencia circular. La transformada de Fourier inversa es

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.12)$$

Aplicar la transformada de Fourier en la variable temporal equivale a descomponer la onda en una suma de ondas armónicas. A la función  $|F(\omega)|$  se le dice espectro de amplitud de Fourier. Además del valor absoluto de  $F$ , se acostumbra analizar su variación con

respecto a una función de referencia, a esta relación se le llama función de transferencia. En este trabajo,  $F$  se normaliza con respecto al campo de desplazamiento asociado a la onda incidente. La función de transferencia se analiza en valor absoluto versus  $\omega$ .

La versión discreta de la transformada de Fourier y la transformada rápida de Fourier (FFT) son los algoritmos que permiten el uso práctico del operador de transformada. La transformada discreta de una función real de soporte compacto  $f(t)$  goza de propiedades de simetría, por eso es suficiente calcular la función de transferencia hasta la frecuencia de Nyquist, o sea hasta la mitad de la frecuencia máxima deseada ( $f_{max}$ ), para poder construir la función sobre el intervalo completo. Debido a las propiedades de la transformada discreta de Fourier, existen ciertas relaciones entre los parámetros en el dominio del tiempo y de la frecuencia. Considerando  $\omega = 2\pi f \geq 0$ ,  $\Delta f = 1/t_{max}$  (donde  $\Delta f$  es el paso de muestreo en frecuencia y  $f(t)$  está teóricamente definida entre 0 y  $t_{max}$ ) y  $\Delta t = 1/f_{max}$  (donde  $\Delta t$  es el paso de muestreo en el tiempo y  $F(\omega)$  está teóricamente definida entre 0 y  $f_{max}$ ). La transformada discreta introduce una periodicidad ficticia en los pares de Fourier ( $f$  y  $F$ ), el período es  $t_{max}$  para  $f(t)$  y  $f_{max}$  para  $F(\omega)$ .

También se puede operar la transformada de Fourier en la variable espacial

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx \quad (2.13)$$

y

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-ikx} dk, \quad (2.14)$$

pasando así del dominio espacial al dominio del número de onda ( $k$ ). Análogamente a las relaciones vistas entre tiempo y frecuencia, en un intervalo de números de onda simétrico con respecto al cero resulta  $k_{max} = \pi/\Delta x$ . A la cantidad  $\lambda = 2\pi/k$  se le llama longitud de onda. La relación entre longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación está expresada por la ecuación  $\lambda f = c$ .

## 2.7 Condiciones de frontera

Para estudiar problemas de propagación de ondas en medios finitos, en una o más direcciones, hay que introducir alguna ecuación para describir el comportamiento de las ondas en presencia de fronteras. A estas restricciones matemáticas se le llama condiciones de frontera. En los casos presentados en este trabajo se utilizan dos tipos de restricciones. La primera se denomina condición de superficie libre e implica tracciones nulas. Según la terminología aquí adoptada, la segunda se llama condición de interfaz y traduce continuidad de esfuerzo y desplazamiento entre dos medios de diferentes propiedades elásticas, es decir representa un contacto soldado.

Cuando la superficie es libre, toda la energía se refleja. Cuando se trata de una interfaz parte de la energía se refleja y parte se transmite. Una onda  $SH$  incidente genera solamente ondas  $SH$ . Una onda  $P$  incidente genera ondas  $P$  y  $SV$ . Una onda  $SV$  incidente

genera ondas  $SV$  y, en relación al ángulo de incidencia, ondas  $P$  o de Rayleigh. La ley de Snell-Descartes traduce el comportamiento de una onda que se refleja o se transmite

$$\frac{\sin \theta}{c} = Const. , \quad (2.15)$$

donde  $\theta$  es el ángulo que el rayo de la onda incidente forma con la normal a la superficie. En el caso de onda  $SV$  incidente

$$\frac{\sin \theta_{SV}}{\beta} = \frac{\sin \theta_P}{\alpha} , \quad (2.16)$$

para algunas combinaciones de  $\theta_{SV}$ ,  $\beta$  y  $\alpha$  puede resultar  $\alpha \sin \theta_{SV}/\beta > 1$ . En general, cuando una onda se propaga de un medio más blando a un medio más rígido, puede resultar  $c_2 \sin \theta_i/c_1 > 1$  (donde  $\theta_i$  es el ángulo de incidencia,  $c_1$  es la velocidad de propagación en el medio más blando y  $c_2$  es la velocidad en el otro medio). En estos casos se genera una onda inhomogénea.

## 2.8 Atenuación

En los materiales reales existen procesos de fricción interna que disipan parte de la energía ligada al movimiento. Para tomar en cuenta este fenómeno se modela el comportamiento viscoelástico del medio introduciendo un término correctivo en los parámetros elásticos (Sánchez-Sesma *et al.*, 1999). Comúnmente se usan valores complejos de las velocidades de propagación

$$\alpha^* = \alpha \left( 1 + \frac{i}{2Q_P} \right) , \quad (2.17)$$

$$\beta^* = \beta \left( 1 + \frac{i}{2Q_S} \right) , \quad (2.18)$$

donde  $Q_i$  es el factor de calidad del tipo de onda  $i$ . Con base en trabajos experimentales se determinó que  $Q$  es constante en un amplio rango de frecuencias (Seed y Idriss, 1970; Aki y Richards, 1980).

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is essential for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part of the document outlines the various methods and tools used to collect and analyze data. It highlights the need for a systematic approach to data collection and the importance of using reliable sources of information.

3. The third part of the document focuses on the analysis and interpretation of the collected data. It discusses the various statistical techniques and models used to identify trends and patterns in the data, and how these can be used to inform decision-making.

4. The fourth part of the document discusses the importance of communication and reporting in the data analysis process. It emphasizes that the results of the analysis must be clearly and effectively communicated to the relevant stakeholders in order to ensure that they can make informed decisions.

5. The fifth part of the document discusses the importance of ongoing monitoring and evaluation of the data analysis process. It emphasizes that the process should be regularly reviewed and updated to ensure that it remains relevant and effective in the face of changing circumstances.

6. The sixth part of the document discusses the importance of ethical considerations in the data analysis process. It emphasizes that the collection and use of data must be done in a way that respects the privacy and rights of individuals, and that the results of the analysis should be used to benefit the organization and its stakeholders.

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is crucial for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part of the document outlines the various methods and tools used to collect and analyze data. It highlights the need for consistent data collection procedures and the use of advanced analytical techniques to derive meaningful insights from the data.

3. The third part of the document focuses on the implementation of data-driven decision-making processes. It provides a detailed overview of the steps involved in identifying key performance indicators (KPIs) and how they are used to monitor and improve organizational performance.

4. The fourth part of the document discusses the challenges and risks associated with data management and analysis. It offers practical advice on how to mitigate these risks and ensure the security and integrity of the data.

5. The final part of the document provides a summary of the key findings and recommendations. It concludes by emphasizing the ongoing nature of data management and the need for continuous improvement and innovation in the field.

# Capítulo 3

## El IBEM

### 3.1 Introducción

Para los recientes progresos en sismología, así como en otras ramas de la ingeniería, ha sido vital el uso de las computadoras y el desarrollo de técnicas numéricas. Un panorama completo de las diferentes técnicas utilizadas para resolver la ecuación de ondas se puede encontrar en Sánchez-Sesma (1996). Existen métodos de dominio en los que se discretiza el medio (elementos finitos) o el operador diferencial (diferencias finitas y métodos espectrales). Estos conllevan un alto costo computacional, pero permiten tratar de forma sencilla heterogeneidades y fenómenos no lineales. Cuando el medio se puede representar como conjunto de dominios homogéneos con leyes constitutivas lineales, es posible aplicar el método de número de onda discreto o un método de frontera (BEM o IBEM). La ventaja principal del IBEM (o del BEM) es que se resuelve la ecuación de onda sólo sobre la frontera del medio. Es decir, se trabaja con una dimensión menor con respecto al dominio físico. Adicionalmente, los métodos de frontera satisfacen desde su planteamiento la condición de radiación al infinito. En este capítulo se ilustran las ecuaciones básicas y algunos detalles del método numérico utilizado para las simulaciones presentadas en el siguiente capítulo. Para estudios más amplios el lector puede acudir a Manolis y Beskos (1988), Sánchez-Sesma y Rosenblueth (1979), Sánchez-Sesma y Campillo (1991), Sánchez-Sesma *et al.* (1993), Sánchez-Sesma y Luzón (1996) y Sánchez-Sesma (1996).

### 3.2 Ecuaciones integrales

Para la deducción de las ecuaciones integrales fundamento del IBEM en el dominio de la frecuencia se puede consultar Sánchez-Sesma y Campillo (1991). Otro texto de interés es el libro de Manolis y Beskos (1988). En esta tesis se decidió por una presentación alternativa más intuitiva, aunque menos rigurosa. La formulación ilustrada es válida en el dominio de la frecuencia. Se plantean y resuelven las ecuaciones por una frecuencia dada, luego se repite el procedimiento por un conjunto de frecuencias, en fin se aplica la transformada de Fourier para obtener la solución en el tiempo.

La solución de la ecuación de la elastodinámica en un espacio infinito elástico homogéneo e isotrópico está dada por las funciones de Green del espacio completo. Dichas funciones proporcionan el campo de desplazamiento  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \xi)$  y tracciones  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \xi)$  en  $\mathbf{x}$  cuando se aplica una fuerza unitaria en  $\xi$ . En el anexo A se transcribe la expresión de las funciones de Green, aquí cabe mencionar que  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{T}$  son singulares en  $\mathbf{x} = \xi$ , o sea en el punto de aplicación de la fuerza.

Del espacio completo, se aísla un volumen  $V$ , el cual está sujeto a una densidad de fuerzas desconocida  $\phi(\xi)$ . El desplazamiento de un punto de  $V$  se calcula sumando las contribuciones de  $\phi$  a lo largo de toda la frontera  $S$  (que puede ser cerrada o abierta)

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_S \phi_j(\xi) G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi \quad (3.1)$$

y las tracciones se obtienen mediante la ley de Hooke

$$t_i(\mathbf{x}) = c\phi_i(\mathbf{x}) + \int_S \phi_j(\xi) T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi, \quad (3.2)$$

donde el primer término del segundo miembro de la 3.2 se debe a la singularidad de  $T$  en  $\mathbf{x} = \xi$  (ver anexo A).  $c$  se llama coeficiente de término libre; cuando  $S$  es plana en  $\mathbf{x}$ ,  $|c| = 1/2$  (ver anexo A). La existencia de singularidades que requieren tratamiento analítico de la integral implica inestabilidad numérica para distancias pequeñas entre  $\mathbf{x}$  y  $\xi$ .

Para que se respeten las condiciones de irradiación al infinito, las ecuaciones 3.1 y 3.2 no se pueden aplicar al campo incidente, sino al reflejado y difractado. Entonces, se descompone el campo total en dos términos

$$u = u^{(d)} + u^{(0)}, \quad (3.3)$$

$$t = t^{(d)} + t^{(0)}, \quad (3.4)$$

donde  $u^{(0)}$  y  $t^{(0)}$  son los campos de referencia, que están dados por desplazamientos y esfuerzos asociados a la excitación. Si el sistema en estudio está compuesto de más de un medio, la solución de referencia puede ser nula en algunos dominios. Por ejemplo, si la excitación es una onda plana incidente, la solución de referencia es diferente de cero sólo en el semiespacio donde  $z$ , positivo, tiende a infinito. Si en un medio está colocada una fuente,  $u^{(0)}$  y  $t^{(0)}$  son diferentes de cero sólo en ese medio. Operativamente, se imponen las condiciones de frontera correspondientes al problema en estudio y se obtiene un sistema de ecuaciones integrales en las incógnitas  $\phi$ . Resuelto dicho sistema, se substituye la distribución de densidades de fuerza en la ecuación 3.1 y se determina el campo de desplazamiento reflejado y difractado que va sumado a la solución de referencia. En el anexo B se dan algunos detalles sobre las soluciones de referencia usadas en este trabajo.

### 3.3 Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera que se utilizan en este trabajo son de dos tipos: superficie libre y contacto soldado entre dos medios. La primera requiere tracciones nulas en l

frontera

$$\frac{1}{2}\phi_i + \int_S \phi_j T_{ij} dS + t_i^{(0)} = 0, \quad (3.5)$$

donde la normal a  $S$  apunta hacia afuera del medio. La condición de unión de dos medios ( $R_i$  y  $R_{i+1}$ ), sin que haya fractura, implica continuidad de desplazamiento y esfuerzos

$$\int_{S_i} \phi_j^{R_i} G_{ij}^{R_i} dS_i + u_i^{(0)R_i} = \int_{S_{i+1}} \phi_j^{R_{i+1}} G_{ij}^{R_{i+1}} dS_{i+1} + u_i^{(0)R_{i+1}}, \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{2}\phi_i^{R_i} + \int_{S_i} \phi_j^{R_i} T_{ij}^{R_i} dS_i + t_i^{(0)R_i} = -\frac{1}{2}\phi_i^{R_{i+1}} + \int_{S_{i+1}} \phi_j^{R_{i+1}} T_{ij}^{R_{i+1}} dS_{i+1} + t_i^{(0)R_{i+1}}, \quad (3.7)$$

donde la normal a la interfaz apunta de  $R_i$  a  $R_{i+1}$ . La variable de integración es  $\xi$  y describe las superficies que contornean los medios,  $S_i$  y  $S_{i+1}$  por  $R_i$  y  $R_{i+1}$  respectivamente. El punto  $\mathbf{x}$  en que se impone la continuidad está colocado en la interfaz entre los medios,  $S_i \cap S_{i+1}$ .

### 3.4 Discretización

Las ecuaciones integrales 3.1 y 3.2 no tienen solución analítica y su resolución numérica impone su discretización. Además, en muchos problemas de sismología, las fronteras  $S$  son infinitas, por ejemplo en el caso de topografías o de medios estratificados, entonces se necesita truncar las superficies  $S$ . De esta forma, el conjunto de  $\xi$  pasa de infinito a finito y el sistema de ecuaciones integrales se reduce a un sistema de ecuaciones lineales. En forma matricial, las ecuaciones 3.1 y 3.2 se escriben

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}\phi, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\phi, \quad (3.9)$$

donde  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{t}$  y  $\phi$  son los vectores de desplazamiento, tracción y densidad de fuerza, respectivamente, en los puntos de discretización.  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{T}$  son las matrices de las funciones de Green, sus diagonales principales corresponden a los términos singulares.

La frontera curva se discretiza en segmentos lineales, cuya longitud es inversamente proporcional a la frecuencia. Cuanto mayor es la frecuencia, tanto mayor es el detalle del campo de onda. Entonces, para que la solución numérica de una aproximación suficientemente buena de la realidad, en alta frecuencia es necesaria una discretización muy fina. La misma discretización sería innecesaria en baja frecuencia, ya que se pueden obtener resultados igualmente precisos utilizando un muestreo más ralo. El número de segmentos, es decir de incógnitas, crece casi linealmente con la frecuencia. Operativamente, con la ecuación  $\lambda f = c$  (ver sec. 2.6) se calcula la longitud de onda en los dos medios en contacto, la longitud mínima determina el paso de discretización. A lo largo de cada segmento, se asigna arbitrariamente una ley de variación para las densidades de fuerza y se integra numéricamente, o analíticamente en correspondencia de las singularidades de  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{T}$ . Más

detalles sobre el procedimiento de discretización se pueden encontrar en Sánchez-Sesma y Campillo (1991) y Sánchez-Sesma *et al.* (1993). Los resultados que se presentan en esta tesis se obtuvieron escogiendo una longitud de segmento menor de un sexto de longitud de onda,  $\phi$  constante y tres puntos de integración gaussiana (para detalles sobre el algoritmo de integración gaussiana ver Abramowitz y Stegun, 1970).

El IBEM se puede ver como la realización numérica del principio de Huygens. Es decir, para reconstruir un frente de onda, todo punto de la superficie de discontinuidad actúa como fuente e irradia energía. Al truncar las fronteras, se desprecia el aporte de las superficies laterales y la solución numérica carece de estas contribuciones. Además, los bordes actúan como puntos de difracción que generan ondas espurias. Para reducir este ruido se pueden adoptar diferentes estrategias. La solución más simple consiste en escoger una longitud total de la superficie tal que las ondas ficticias queden afuera de la ventana espacio-temporal de observación. Alternativamente se puede variar el factor de calidad aumentando el amortiguamiento cerca de las extremidades (Pedersen, 1994) o aproximar la integral sobre la superficie infinita usando una expresión analítica asintótica (Yokoi y Takenaka, 1995). Los resultados que se presentan se obtuvieron sin utilizar artificios de ningún tipo. Más detalles sobre los problemas encontrados son puntualizados ilustrando los sintéticos (en sismología, la palabra sintético se usa para designar un sismograma generado a partir de un modelo matemático). Puesto que el costo computacional aumenta con el tamaño de las superficies, se buscó un compromiso entre economía y precisión.

## Capítulo 4

# Aplicación del IBEM a medios estratificados

### 4.1 Introducción

Por medio estratificado se entiende un sistema de capas superyacente a un semiespacio. A pesar de su sencillez, esta geometría permite modelar muy bien muchos casos reales, de aquí el interés en examinarlo. El cálculo de la respuesta sísmica de un medio estratificado se puede llevar a cabo con técnicas numéricas cuyo esquema resuelve cualquier tipo de morfología; sin embargo se encuentran en la literatura algunos algoritmos optimizados para simular la propagación en este tipo específico de configuración. Para el estudio de un sistema de capas planas elásticas e isótropas, los métodos más conocidos son el de Haskell (Haskell, 1953 y Aki y Richards, 1980) y el de Kennett (Kennett, 1983). En el primero se define por cada capa una matriz propagadora  $\mathbf{P}$ , multiplicando las  $\mathbf{P}$  se *propaga* la solución entre diferentes niveles. En el segundo se escribe la respuesta del sistema en función de los coeficientes de reflexión y transmisión; la formulación puede interpretarse en términos de la teoría de rayos (para una introducción a la teoría de rayos ver, por ejemplo, Aki y Richards, 1980). El método de Kennett puede usarse también con fuentes puntuales y, en muchos casos, resulta ventajoso con respecto al método de Haskell (Chapman y Orcutt, 1985). Si el medio no es homogéneo, se pueden usar el método WKBJ o la expansión asintótica de Langer y adoptar métodos iterativos (Chapman y Orcutt, 1985). En la literatura existen por lo menos otras dos técnicas que han tenido mucho éxito para la solución de la ecuación de onda en medios estratificados. La primera, presentada en Bouchon (1981), calcula las funciones de Green en el dominio de la frecuencia utilizando una expansión en números de ondas discretos. La segunda, debida a Luco y Apsel (1983), usa una factorización de la matriz generalizada de los coeficientes de reflexión y transmisión. Desde la divulgación de esos métodos, se ha hecho mucho trabajo para optimar las formulaciones y generalizarlas, con particular atención por los métodos de Kennett y de Luco y Apsel. Por ejemplo, Fryer y Frazer (1984) y Mallick y Frazer (1988) reestructuran la formulación original de Kennett para aplicarla al estudio de medios anisótropos. Por otro lado, los trabajos de Chen (1993), Hisada (1994 y 1995) y Zeng y Anderson (1995) se han desarrollado con

base en el del algoritmo presentado por Luco y Apsel. Rara vez, las capas litológicas se presentan planas y paralelas, sin embargo las técnicas citadas son de gran interés. En algunos casos, el margen de incertidumbre en la definición de la morfología es tal que no se justifica el costo computacional de un modelo de estratos irregulares. En otros casos, la precisión y la rapidez de un método optimizado para geometrías sencillas pueden ser prioritarias con respecto a la posibilidad de resolver morfologías complejas. Por ejemplo, cuando se trata de inferir las características del subsuelo a partir de registros de señales, se resuelven muchos modelos buscando el mejor ajuste entre datos y simulaciones. Esto no sería posible usando técnicas muy sofisticadas que requieran días o semanas para completar una sola simulación. En fin, hay casos en que es necesario tomar en cuenta el efecto de irregularidades laterales. En este campo destacan las contribuciones de Aki y Larner (1970) y Bouchon *et al.* (1989), en las que se utiliza el método de número de onda discreto. Asimismo es importante el trabajo de Boore (1972), en el que se usa un esquema de diferencias finitas. Nolet *et al.* (1989) proponen una técnica modal aproximada. Chen (1990) extiende el método de Kennett con una formulación que se hace muy competitiva conforme aumenta el número de estratos.

El trabajo que se presenta en el siguiente capítulo dio lugar a la publicación de tres artículos (Sánchez-Sesma *et al.*, 1995a, Sánchez-Sesma *et al.*, 1995b y Vai *et al.*, 1999). Se implantó el IBEM para un sistema de capas planas irregulares. El algoritmo se validó, para ondas *SH*, con otras técnicas (número de onda discreto, óptica glorificada, haces gaussianos y elementos finitos) y se aplicó a un modelo inspirado a una sección geológica propuesta por F. Mooser, A. Montiel y A. Zúñiga (comunicación personal, 1994; la sección definitiva se publicó en Mooser *et al.*, 1996). También se exploró el uso del IBEM para resolver la ecuación de onda en un medio irregular estratificado excitado por una fuente lineal sepultada. El programa se validó analizando la distribución de las densidades de fuerza en superficie, comparando con la solución analítica de Garvin (Garvin, 1956) y con resultados numéricos obtenidos con un método espectral (Vai *et al.*, 1999 y Komatitsch *et al.*, 1999). Para este tipo de excitación se discuten algunos ejemplos de aplicación.

La solución de referencia utilizada para simular la incidencia de ondas planas se calculó con el método de Haskell. En el anexo B se discuten algunos detalles de su implantación. En la misma sección se presenta la solución de referencia para la línea de dilatación.

## 4.2 Validación del programa

### 4.2.1 Incidencia de ondas planas

Para validar el programa desarrollado se resolvió el ejemplo presentado por Aki y Larner (1970). Se trata de una capa cuyo espesor varía según una función coseno a lo largo de  $50 \text{ km}$  (Fig. 4.1). En las extremidades laterales el espesor del estrato es de  $1 \text{ km}$ , mientras que en la parte central alcanza un máximo de  $6 \text{ km}$ . El medio superficial está caracterizado por  $\beta$  igual a  $0.7 \text{ km/s}$  y  $\rho$  igual a  $2 \text{ g/cm}^3$ , en el semiespacio  $\beta$  es igual a  $3.5 \text{ km/s}$  y  $\rho$  igual a  $3.3 \text{ g/cm}^3$ . No se considera atenuación en ninguno de los dos medios. S

calcularon sintéticos en cuarenta y nueve estaciones sobre la superficie libre. Este modelo se resolvió considerando incidencia vertical de ondas planas. La excitación fue dada por un Ricker (ver anexo C) con período característico de 18.67 s. En el artículo de referencia (Aki y Larner, 1970), se presentó el método de número de onda discreto y con ese se calcularon los sintéticos para el modelo propuesto; sin embargo, otros autores resolvieron el mismo ejemplo con diferentes técnicas y, en la comparación, se hace referencia a una figura de Nowack y Aki (1984) (Fig. 4.2). El acuerdo entre las soluciones obtenidas con el IBEM y con el DW es excelente.

### 4.2.2 Fuente lineal de dilatación

El comportamiento de las densidades de fuerza puede dar una primera validación del programa. Se eligió un ejemplo (Fig. 4.3) que se resolvió como topografía y como estrato irregular sobre un semiespacio. En el primer caso, de aquí en adelante indicado con T, la única condición de frontera corresponde a tracciones nulas en la superficie libre. En el segundo caso (E), a la ecuación anterior se añaden dos condiciones, correspondientes a continuidad de esfuerzos y desplazamientos a lo largo de la interfaz. Se consideraron propiedades iguales en el estrato y en el semiespacio, así que la solución de T coincide con la de E. Las pendientes de la irregularidad forman un ángulo de 45° con la horizontal y la altura de la colina es igual al espesor del estrato. La velocidad de propagación de las ondas P es el doble de la de las ondas S ( $\nu = 0.3333$ ). El modelo se excitó por medio de dos líneas de dilatación, una (S1) a la mitad del estrato y la otra (S2) simétrica a la primera con respecto a la interfaz (las dos son colocadas sobre el eje de simetría geométrica). Sea  $S_1$  la superficie libre y  $S_2$  la interfaz. Sea  $\phi^{ij}$  la densidad de fuerzas a lo largo de la superficie  $i$  para el caso  $j$ . Para validar el programa se demuestra teóricamente y se comprueba numéricamente que  $\phi^{1T} = \phi^{1E}$ . El siguiente planteamiento matemático se desarrolla a partir de la expresión del desplazamiento en un punto de la superficie; cabe aclarar que un procedimiento análogo se podría construir a partir del desplazamiento en cualquier punto de observación. Cuando la excitación está dada por la fuente S1, se escribe

$$T) \quad u_i = \int_{S_1} \phi_j^{1T} G_{ij} dS + u_i^{(0)}, \quad (4.1)$$

$$E) \quad u_i = \int_{S_1} \phi_j^{1E} G_{ij} dS + \int_{S_2} \phi_j^{2E} G_{ij} dS + u_i^{(0)}, \quad (4.2)$$

donde  $u_i$  y  $u_i^{(0)}$  son iguales en las dos ecuaciones. Ya que la interfaz es transparente, es decir divide dos medios caracterizados por los mismos parámetros mecánicos, no hay ondas reflejadas hacia la superficie libre. Salvo errores numéricos, toda la energía tiene que irradiarse hacia el semiespacio

$$\int_{S_2} \phi_j^{2E} G_{ij} dS \cong 0. \quad (4.3)$$

Esto implica que  $\phi_j^{1T} \cong \phi_j^{1E}$ . En las figuras 4.4a y b se presenta la distribución de las densidades de fuerza en superficie para la frecuencia adimensional  $\eta = 0.5$  (donde  $\eta = 2a/\beta f$ ,  $f$  es la frecuencia y  $a$  es el espesor de la capa). El acuerdo es excelente, la predicción teórica resulta confirmada. Se analiza ahora la solución de los dos modelos iluminados por la fuente S2.

$$T) \quad u_i = \int_{S_1} \phi_j^{1T} G_{ij} dS + u_i^{(0)}, \quad (4.4)$$

$$E) \quad u_i = \int_{S_1} \phi_j^{1E} G_{ij} dS + \int_{S_2} \phi_j^{2E} G_{ij} dS. \quad (4.5)$$

Ya que la interfaz es transparente toda la energía irradiada por la fuente hacia la superficie libre tiene que propagarse hacia arriba

$$u_i^{(0)} \cong \int_{S_2} \phi_j^{2E} G_{ij} dS. \quad (4.6)$$

Esto implica que, salvo errores numéricos, tiene que ser  $\phi_j^{1T} \cong \phi_j^{1E}$ . En las figuras 4.5a y b se presenta, para la misma frecuencia considerada en el caso anterior, la distribución de las densidades de fuerza en superficie. También en este ejemplo se cumple la predicción teórica y el error numérico resulta despreciable.

Para la validación de los resultados en el tiempo se utilizó una solución analítica. Garvin (1956) expresó con formulas algebraicas exactas los desplazamientos superficiales debidos a una fuente lineal de dilatación aplicada impulsivamente en un semiespacio homogéneo. Con el IBEM modelamos un estrato irregular con las mismas propiedades del semiespacio. La superficie libre es plana (Fig. 4.6). La irregularidad tiene forma trapezoidal: su base mayor mide 2 km y la menor 1 km; la profundidad del estrato varía de 0.5 a 1 km. Las velocidades de ondas son de 1 y 2 km/s para las ondas S y P, respectivamente. No se considera atenuación ( $Q=1000$ ). La fuente está colocada sobre el eje de simetría del modelo, a una profundidad de 0.2 km. Se usa un arreglo de once estaciones equiespaciadas (0.4 km de distancia entre dos estaciones sucesivas). La excitación fue dada con un pulso de Ricker con período característico de 1 s y  $t_s$ , de 2 s. Se sobrepusieron los sintéticos obtenidos con el método numérico con las trazas calculadas con las formulas de Garvin (Fig. 4.7). La comparación muestra un acuerdo excelente. Se puede identificar la llegada de ondas de Rayleigh espurias (Fig. 4.8), que representan un efecto de borde, debido a la longitud finita de la superficie discretizada. Los límites laterales de la superficie libre parecen ser los únicos puntos en que se generan ondas espurias. Al variar la longitud total de las superficies discretizadas, la función de transferencia mantiene el mismo patrón, pero los niveles de amplificación muestran pequeñas diferencias (Fig. 4.9). El efecto de borde es perversivo, las frecuencias altas resultan afectadas al igual que las frecuencias bajas y no es evidente una relación con la longitud de onda. No es fácil encontrar una explicación a este fenómeno. La solución en cualquier punto  $x$  siempre se construye considerando todos los puntos de discretización; sin embargo, intuitivamente se pensaría que las contribuciones serían diferentes. En particular se esperaría que el aporte

principal viniera de los puntos de discretización cuya distancia de  $x$  sea comparable con la longitud de onda, así que en alta frecuencia no se tendría que ver ningún efecto de borde en las estaciones centrales, contrariamente a como se ilustra en la figura 4.9. La relación entre la amplitud de ondas espurias y real depende de la posición de la estación. Puesto que en los ejemplos analizados la diferencia es mayor de un orden de magnitud, no se profundizó más el estudio. La solución converge aumentando la relación entre dominio discretizado y observado, o sea conforme los efectos de borde quedan afuera de la ventana espacio-temporal de observación.

En fin, se presentan dos ejemplos de validación para los cuales se utilizó otro método numérico. Estudiando el efecto de irregularidades laterales, comparamos los resultados obtenidos con el IBEM y con el SEM (la formulación espectral a que hacemos referencia es ilustrada en Komatitsch y Vilotte, 1998 y Komatitsch *et al.*, 1999). El modelo de figura 4.10 está caracterizado por  $\beta$  igual a  $0.5 \text{ km/s}$  y  $\rho$  de  $1 \text{ gr/cm}^3$  en el estrato,  $\beta$  de  $1.5 \text{ km/s}$  y  $\rho$  de  $2 \text{ gr/cm}^3$  en el semiespacio; en ambos casos  $\alpha$  es dos veces  $\beta$  y no se considera amortiguamiento. Se examinaron fuentes localizadas en el estrato y en el semiespacio, pero la simulación aquí presentada corresponde sólo a las fuente S1[-1 km, 3 km]. Se calcularon sintéticos para cincuenta y una estaciones igualmente espaciadas sobre un longitud de  $4 \text{ km}$  en superficie libre. La frecuencia central del pulso de Ricker fue de  $0.75 \text{ Hz}$  y  $t_s$  de  $1.4 \text{ s}$ . Se analizaron los efectos producidos por una interfaz irregular descrita por la función  $z = 1 + 0.5[\sin(\pi(x+1)/2)]^2$ , si  $-1 \text{ km} < x < 1 \text{ km}$ . En la figura 4.11 se presentan los resultados. El encimarse de las trazas indica efectos de amplificación. Este fenómeno es notable por el movimiento horizontal así como por el vertical. Las diferencias entre los niveles de amplificación dependen de la posición de la estación y del componente considerado (Fig. 4.12). Para un análisis minuciosa del campo de desplazamiento ver la sección 4.3.2.

El segundo modelo que usamos para validar el programa en caso de estratos irregulares se obtuvo del anterior introduciendo una superficie libre irregular según la función  $z = -0.5[\sin(\pi(x+1)/2)]^2$  por  $-1 \text{ km} < x < 1 \text{ km}$  (Fig. 4.13). En este caso, para disminuir el costo computacional, la superficie plana discretizada se truncó en  $x = \pm 4 \text{ km}$  (en lugar de  $x = \pm 6 \text{ km}$ ). Los sintéticos presentados en la figura 4.14 se obtuvieron por la fuente S2[-1 km, 1.5 km]. El acuerdo entre las dos soluciones numéricas no es tan bueno como para el ejemplo anterior. Las diferencias entre las dos trazas se deben a efectos de borde, que se manifiestan en las discrepancias en las fases y en las amplitudes tardías. Las ondas difractadas en los extremos y en el interior de la depresión, interfieren constructivamente, sin que sea posible identificar diferentes grupos de ondas. Además al truncar las superficies se pierde la contribución de fuentes que, según el principio de Huygens, son necesarias para reconstruir correctamente los frentes de onda. Por ello, si la superficie discretizada es demasiado corta, se desprecia una cantidad considerable de ondas y los sintéticos no pueden ser precisos. El tiempo de viaje de las perturbaciones gobierna la ventana temporal en que la solución es confiable. Se logra reproducir muy bien el movimiento para los primeros seis segundos, cuando el desplazamiento alcanza su máxima amplitud. Considerando los primeros cinco segundos, el movimiento calculado en las estaciones laterales está dominado por los arribos directos y las principales reflexiones en la

interfaz. En tiempos sucesivos, el campo difractado generado por la topografía irregular modifica el patrón de movimiento.

Para dar una idea del costo computacional del IBEM, se reportan algunos datos de esta última simulación, en la cual se resolvieron conjuntamente cinco fuentes distintas. Se calculó la función de transferencia con un paso de muestreo de  $0.01 \text{ Hz}$  hasta una frecuencia de  $1.33 \text{ Hz}$ . En la figura 4.15 se grafica número de incógnitas versus frecuencia. Los cálculos se efectuaron en una estación de trabajo Sun4/80 (SPARCstation 10), con 32Mb de RAM y 126Mb de Swap; sistema operativo SunOS Release 5.4 Generic-101945-42. El tiempo de CPU ocupado por la corrida fue de catorce horas y media por un tamaño máximo de la matriz de ochocientos noventa por ochocientos noventa.

## 4.3 Estudio de efectos de sitio

### 4.3.1 Incidencia de ondas planas

En los sitios de zona lacustre de la Ciudad de México, se han observado movimientos prolongados durante más de tres minutos y con una coda casi monocromática. Para investigar la relación entre este patrón y el efecto de una posible variación lateral de los depósitos bajo la Cuenca de México, se estudió una sección aproximada SSW-NNE en la dirección Chapultepec-Peñón (Fig. 4.16). De la sección geológica proporcionada por F. Mooser, A. Montiel y A. Zúñiga (comunicación personal, 1994) se definió un modelo muy simplificado (Fig. 4.17). Un estrato irregular con variaciones de espesor entre 2 y 4 km, por una longitud de 7 km, apoya sobre un semiespacio. El estrato se caracteriza por  $\alpha$  igual a  $3.5 \text{ km/s}$ ,  $\beta$  de  $2 \text{ km/s}$ ,  $\rho$  de  $2.2 \text{ g/cm}^3$  y  $Q$  de 250, mientras que los parámetros mecánicos del semiespacio son:  $\alpha$  igual a  $5 \text{ km/s}$ ,  $\beta$  igual a  $2.9 \text{ km/s}$ ,  $\rho$  igual a  $2.8 \text{ g/cm}^3$  y  $Q$  igual a 500 (Mooser, comunicación personal, 1994). Las estaciones forman un arreglo que cubre  $19.2 \text{ km}$  y la distancia entre ellas es constante, igual a  $0.4 \text{ km}$ . El modelo se excitó con ondas planas  $SH$ , así como  $P$  o  $SV$ , con diferentes ángulos de incidencia. La forma temporal de la señal incidente fue un pulso de Ricker con una frecuencia característica de  $1 \text{ Hz}$ . En las figuras 4.18, 4.19 y 4.20 se presentan algunos resultados de las simulaciones. En general, el modelo se comportó de manera similar ante la incidencia de ondas  $SH$  y  $SV$ . Para incidencia de ondas  $SV$  con inclinación mayor de o igual a  $45^\circ$ , el componente vertical se excita significativamente. Para incidencia de ondas  $P$ , el componente vertical predomina por ángulos de incidencia bajos. Este patrón de respuesta, obvio en el caso de un semiespacio, nos indica escasa influencia de la irregularidad. En todos los casos analizados, las señales muestran efectos moderados tanto en amplificación como en el aumento de duración. Además todos los sintéticos calculados tienen semejante duración, mientras que la duración de un mismo evento sísmico registrado en diferentes puntos de la ciudad puede variar de un orden de magnitud. Las pruebas realizadas indican que ligeras variaciones de las propiedades mecánicas de los medios o de la geometría, no afectarían la duración de la coda de forma significativa. Otras simulaciones de la respuesta sísmica de la Cuenca (por ejemplo Chávez-Perez, 1993), que se basan en el uso de modelos similares pero diferentes métodos numéricos, son consistentes con los sintéticos aquí presentados.

En realidad, la larga duración de algunos registros se debe probablemente a un conjunto de causas. El movimiento que excita la cuenca es mucho más largo que la ruptura en la fuente (Singh y Ordaz, 1993). Además, la velocidad de las ondas de corte en las rocas volcánicas del Oligoceno y del Plioceno, cuyo límite superior se encuentra a profundidad variable entre 0 y 200 m, presenta valores anormalmente bajos (Singh *et al.*, 1995 y Shapiro *et al.*, 1997). Al efecto de amplificación regional se suma la influencia de las capas superficiales de 30-70 m de profundidad máxima (M. Ordaz, comunicación personal; 1999). Trabajos recientes muestran que existe una relación directa entre duración del movimiento, rigidez (Reinoso *et al.*, 1996) y amortiguamiento (Barcena-Vega, 1999) de estos estratos. En conclusión, la larga duración de los temblores en la cuenca de México no se debe a la influencia de una irregularidad cortical a 2 km de profundidad.

### 4.3.2 Fuente lineal de dilatación

Para analizar la influencia del contraste de impedancia y de la irregularidad en las características de la respuesta sísmica local, se comparan cinco diferentes modelos excitados por la misma fuente. En el orden de las figuras se presentan las geometrías alternadas con los sintéticos, para que sea inmediata la asociación entre modelo y respuesta. A continuación se describen primero todos los modelos y luego se discuten las diferencias entre las respuestas. Se analizaron: 1) semiespacio elástico caracterizado por  $\beta = 1.5$  km/s,  $\nu = 0.3333$  y  $\rho = 2$  gr/cm<sup>3</sup> (Fig. 4.21); 2) semiespacio elástico caracterizado por  $\beta = 0.5$  km/s,  $\nu = 0.3333$  y  $\rho = 1$  gr/cm<sup>3</sup>; 3) estrato plano horizontal de 1 km de espesor (Fig. 4.24), con los parámetros elásticos utilizados en el modelo de la figura 4.10; 4) modelo de la figura 4.10; 5) modelo de la figura 4.13, pero excitado por la fuente S1 [-1 km; 3 km] (Fig. 4.26). En los cinco casos no se consideró amortiguamiento y la excitación fue dada por la fuente S1. Los parámetros del Ricker son  $t_p = 1.33$  y  $t_s = 1.4$  s. Para los primeros dos ejemplos, las ondas emitidas por la fuente alcanzan la superficie libre, se reflejan y se propagan hacia el semiespacio (Figs. 4.22 y 4.23). Siendo la fuente un centro de dilatación relativamente profundo, las ondas llegan con incidencia muy cercana a la vertical, el componente vertical del movimiento predomina sobre el horizontal y no se aprecia propagación de ondas superficiales. La onda P directa es el primer y único arribo y alcanza la superficie en instantes distintos por el primer y segundo modelo. Los tiempos de viaje de la perturbación dependen, por supuesto, de los parámetros mecánicos del medio. La amplitud del desplazamiento es mayor mientras más blando es el suelo. Cuando se considera un estrato plano superficial (tercer modelo) la historia del campo de desplazamiento empieza a hacerse un poco más compleja (Fig. 4.25). La geometría de los rayos indica que en el estrato las ondas se propagan con dirección casi vertical, entonces las trazas horizontales y verticales de los sintéticos representan arribos de ondas S y P, respectivamente. Arriba de la fuente, entre las estaciones trece y catorce, el desplazamiento horizontal es despreciable, mientras que en los extremos del arreglo se identifican claramente los arribos de las ondas S. En la estación cincuenta y uno, el primer arribo es una onda P con ángulo de incidencia de 15°, después de 1 s se registra la llegada de una onda S con ángulo de incidencia de 8°. En los instantes sucesivos el

movimiento está determinado por las reflexiones de estas dos ondas entre superficie libre e interfaz. El componente horizontal del movimiento registra un arribo en  $t = 6$  s que se asocia a la reflexión de la onda  $P$  en la interfaz. Sin embargo la energía de este arribo es muy pequeña y no se detectan otras conversiones entre ondas  $P$  y  $SV$ . Puesto que el contraste de impedancia entre los dos medios es el mismo para ondas  $S$  y  $P$ , las dos pierden el treinta por ciento de energía en cada reflexión en la interfaz. Después de cinco reflexiones la amplitud de las ondas es tal que casi no se alcanza a distinguir en la escala de la figura 4.25. Debido a la relación entre las velocidades de propagación en el estrato se registra el arribo de una onda  $S$  cada dos llegadas de  $P$ ; sin embargo la energía inicial de la onda  $S$  es inferior a aquella del arribo directo y la duración del movimiento fuerte horizontal y vertical son comparables. El patrón del campo de desplazamiento generado por una interfaz irregular se discutió en la sección anterior. Al comparar este ejemplo con el anterior se nota que la amplitud de los primeros arribos disminuye notablemente entre las estaciones treinta y ocho y cuarenta y tres. El fenómeno se observa tanto en el componente vertical cuanto en el horizontal. El trazado de rayos muestra que la onda emitida por la fuente incide sobre la parte derecha de la irregularidad ( $0 < x < 1$ ) con ángulos muy próximos a  $90^\circ$ . En lugar de propagarse casi verticalmente, las ondas transmitidas se propagan hacia la parte izquierda ( $x < 0$ ) de la superficie libre. Este efecto es sólo parcialmente compensado por la reflexión sobre una pequeña porción de la parte más profunda de la irregularidad, delimitada por el rayo normal a la interfaz y el punto de coordenadas  $(0, -1.5)$ . Las reflexiones múltiples de las ondas  $P$  y  $S$  se pueden identificar solamente en las primeras y últimas estaciones del arreglo. En las estaciones centrales no hay relación entre el desplazamiento simulado por este ejemplo y por una capa plana. La irregularidad de la interfaz, aun si suave, altera tiempos y amplitudes de los arribos, además es responsable de la notable generación de ondas superficiales. Al igual que para la simulación de la figura 4.14, los resultados obtenidos para el modelo de la figura 4.26 son confiables solamente en los primeros segundos, antes de que se genere interferencia por efectos de borde. Comparando con el cuarto ejemplo (Fig. 4.11 versus Fig. 4.27), adentro del valle se nota un incremento tanto en amplificación como en duración. La doble irregularidad es tal que el campo difractado no puede ser fácilmente irradiado al infinito. Resumiendo, el movimiento calculado por el primer modelo presenta claramente la forma del pulso, es prevalentemente vertical y de corta duración. Por la presencia de una interfaz plana se generan reflexiones múltiples y se observa conversión de ondas  $P$ - $SV$ . Puesto que la energía no puede irradiarse libremente hacia el semiespacio, la duración del movimiento aumenta. Cuando la interfaz es irregular, el campo de desplazamiento se altera notablemente con respecto a los ejemplos anteriores. Las características del movimiento son determinadas por la relación entre ángulo de incidencia e inclinación de la interfaz y se puede generar concentración de energía en algunas partes del modelo. En fin, por la doble irregularidad, se concentra aún más la energía en la zona central. El campo de desplazamiento es determinado por interferencias constructivas y destructivas. Ya no se pueden identificar las reflexiones múltiples de la tercera simulación y se generan ondas superficiales.

## 4.4 Conclusiones

Se han presentado ejemplos de modelado para sistemas de capas excitados por ondas planas o por fuentes dilatacionales y resueltos con el IBEM. Los sintéticos obtenidos son de óptima calidad, pero los programas elaborados resultaron ser de difícil aplicación en la práctica. Para el estudio de problemas geotécnicos, se necesita simular la respuesta sísmica de sistemas complejos y de alta frecuencia. Entre mayor es el grado de complejidad del modelo, menor es la eficiencia del IBEM en comparación con métodos de dominio. En particular el IBEM no es adecuado para simular la propagación de ondas en medios con propiedades no lineales y/o altamente heterogéneas. Entre mayor es la frecuencia que se pretende calcular, mayor es el costo de cómputo (en términos de dimensión del área de memoria y de tiempo de cálculo) y menor es la posibilidad que una pequeña empresa de geotécnica tenga el hardware necesario. En el modelado en sismología, por lo regular las dimensiones del modelo son muy grandes y constituyen el obstáculo principal a la aplicación de los programas elaborados. Además, para obtener una ventana espacio-temporal de observación en que la solución sea confiable, tenemos que extender el dominio a causa de efectos de borde.

Dos líneas de investigación se abren para abordar los problemas señalados. Por un lado se puede buscar una forma más eficiente de construir, almacenar y resolver el sistema de ecuaciones que se construye con el IBEM. Por otro lado, se puede buscar reducir el dominio bajo estudio introduciendo fronteras absorbentes. Logrando estas metas se abrirían posibles aplicaciones en sismología.

## 4.5 Figuras

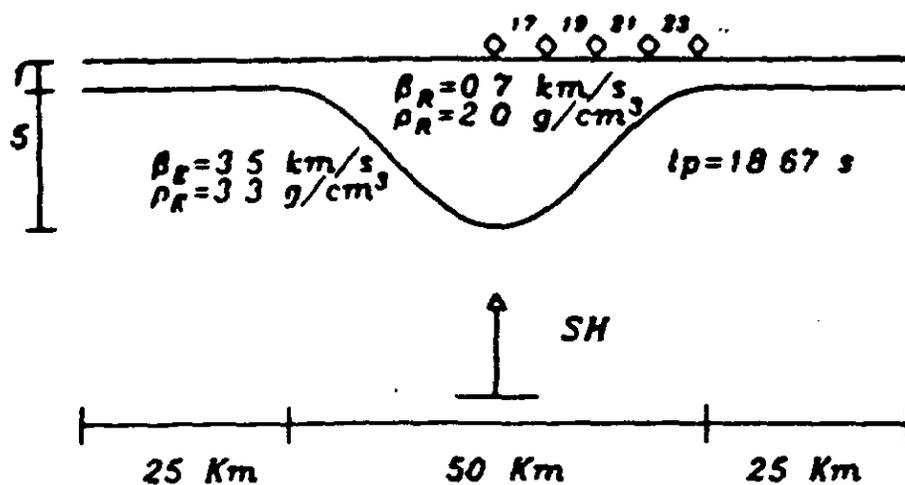


Figura 4.1 Modelo del valle presentado por Aki y Larner, 1970 y utilizado para validar el programa elaborado.

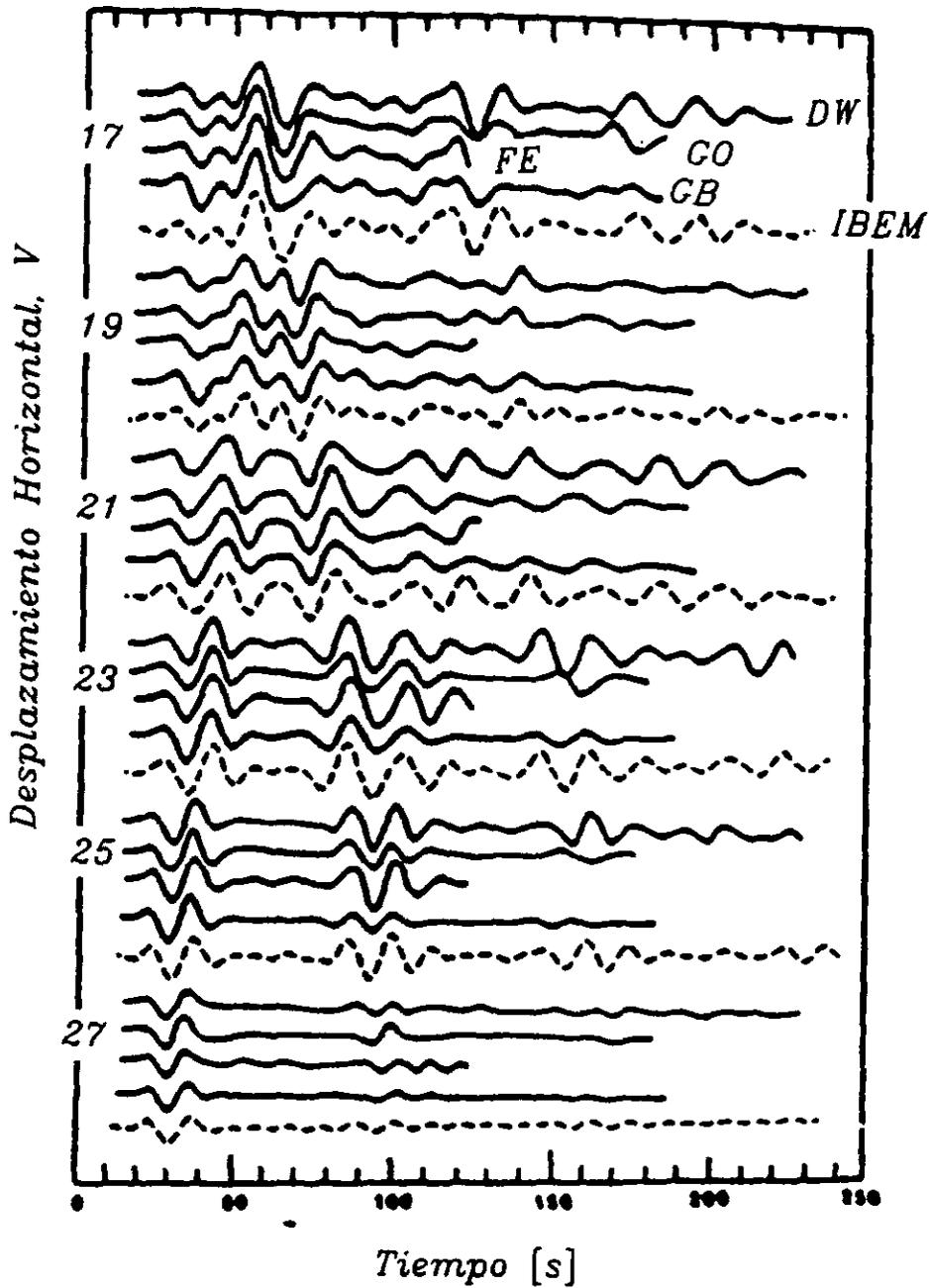


Figura 4.2 Comparación de los sintéticos obtenidos con varios métodos numéricos en algunas estaciones del modelo de la figura 4.1 (DW número de onda discreto; GO óptica glorificada; FE elementos finitos; GB haces gaussianos; IBEM método indirecto de elementos de frontera). Esta figura es adaptada de Nowack y Aki, 1984. En el eje vertical se indica el número de estación a la cual corresponde la traza de desplazamiento horizontal graficada contra el tiempo. El acuerdo entre la solución obtenida con el IBEM y el DW es excelente.

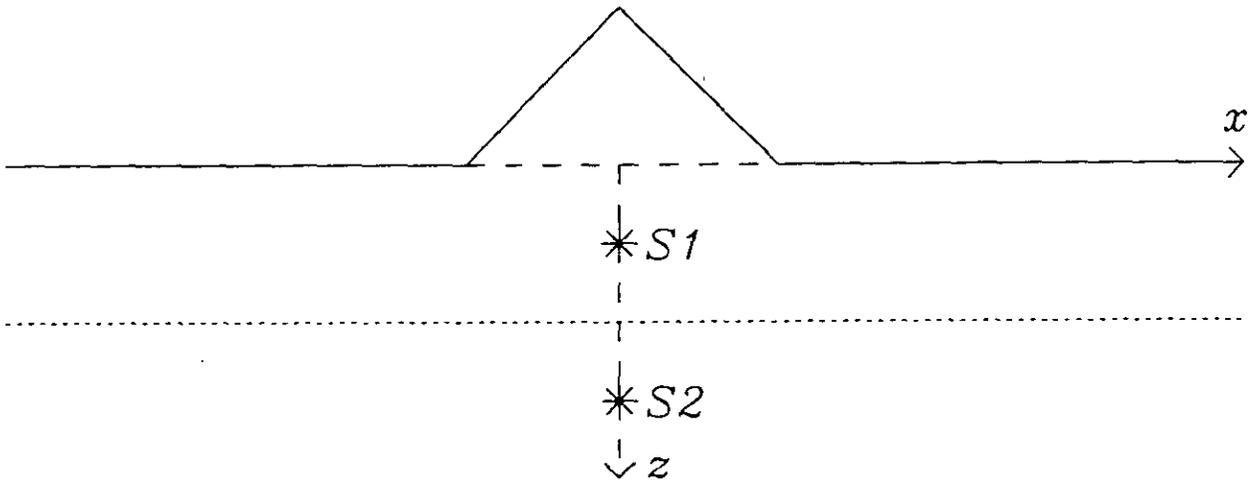


Figura 4.3 Topografía irregular superyacente a una interfaz transparente. El modelo se usó para una primera validación del programa elaborado. Los asteriscos indican la posición de las líneas de dilatación paralelas al eje  $y$ .

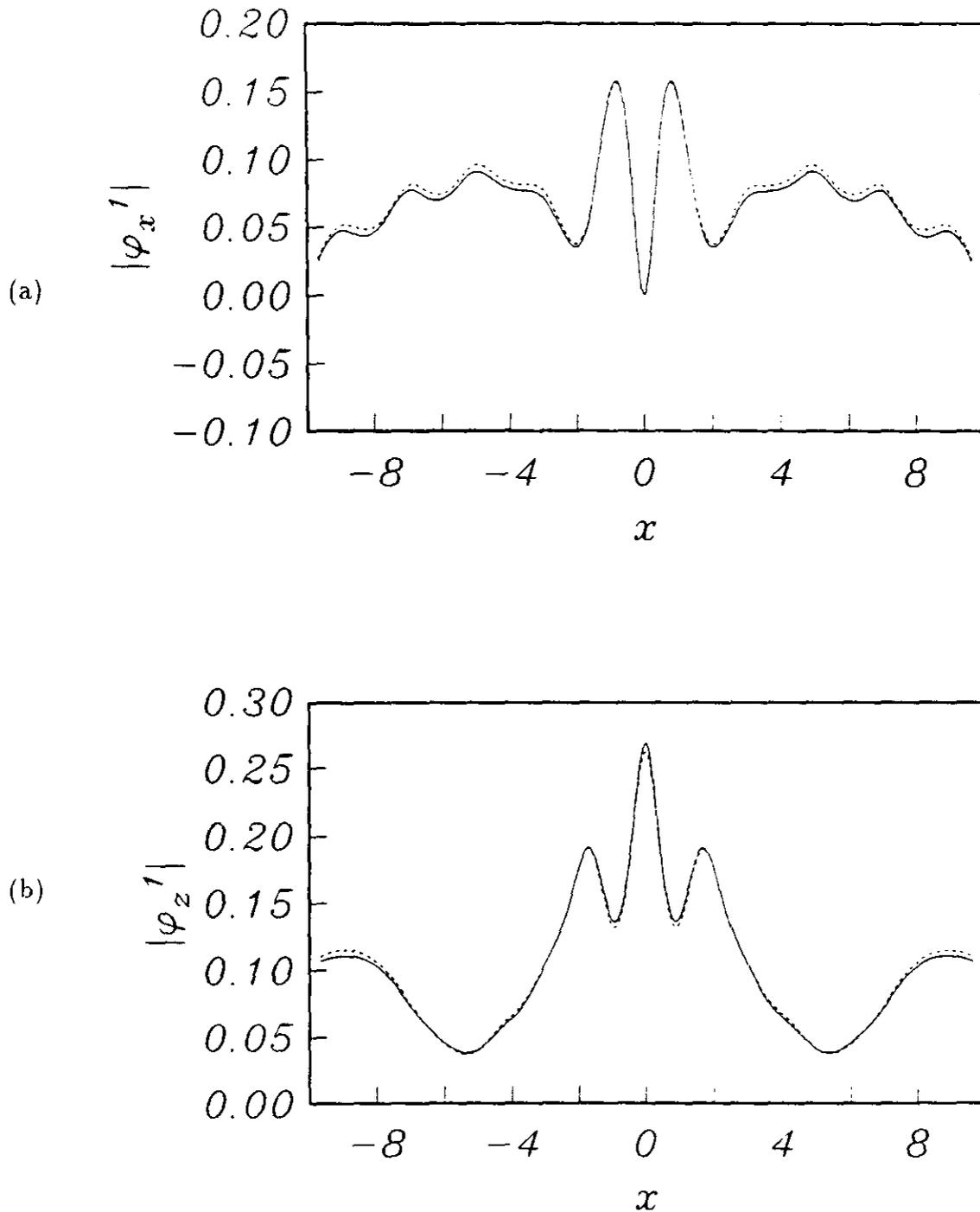


Figura 4.4 Distribución de las densidades de fuerza en superficie libre por el modelo de la figura 4.3, excitado por la fuente S1. Las densidades de fuerza, ilustradas en valor absoluto, se calcularon por  $\eta = 0.5$  (donde  $\eta = 2a/\beta$  es la frecuencia adimensional y  $a$  es el espesor de la capa). Para el caso T,  $\phi$  se graficó en línea continua, mientras que por el caso E se utilizó la línea punteada.

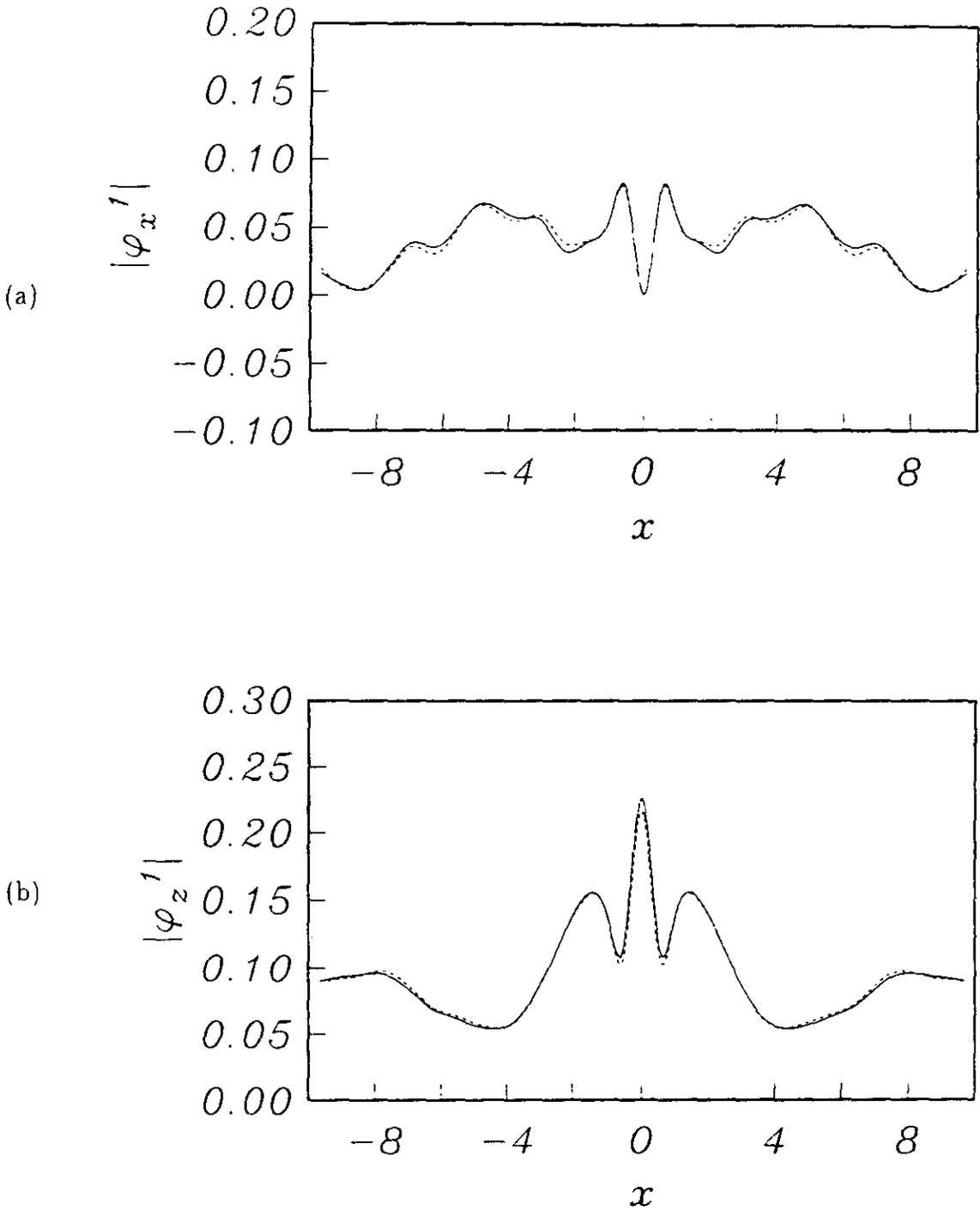


Figura 4.5 Distribución de las densidades de fuerza en superficie libre por el modelo de la figura 4.3, excitado por la fuente  $S_2$ . Las densidades de fuerza, ilustradas en valor absoluto, se calcularon por  $\eta = 0.5$ . Para el caso T,  $\phi$  se graficó en línea continua, mientras que por el caso E se utilizó la línea punteada.

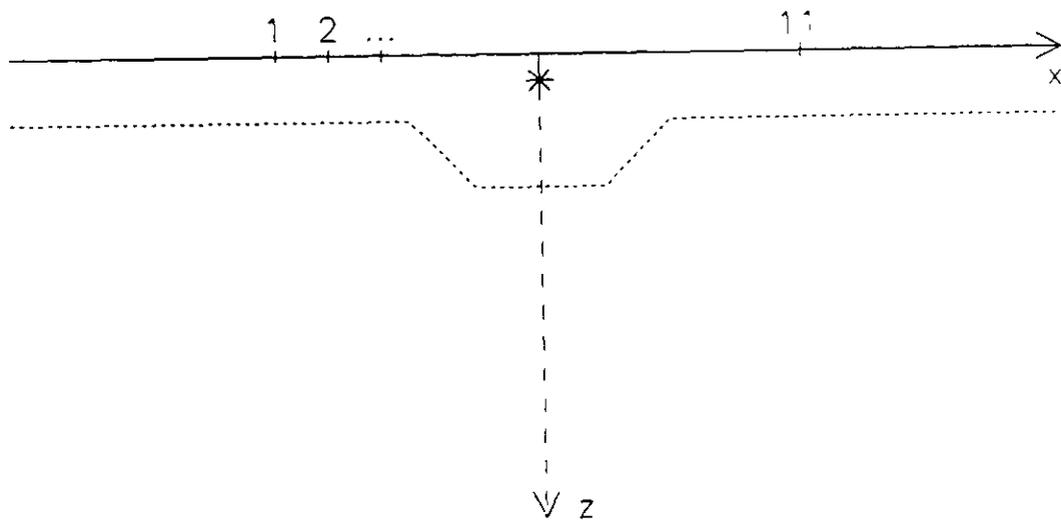


Figura 4.6 Modelo utilizado para la validación del programa elaborado. En la figura se indica la posición de algunas estaciones (numeradas de 1 a 11) y de la fuente (marcada por el asterisco). La interfaz es transparente. Con notación del todo personal se grafica con línea continua la superficie libre, con línea punteada la interfaz y con línea de raya los ejes. Este estilo se mantiene en todos los croquis de los modelos.

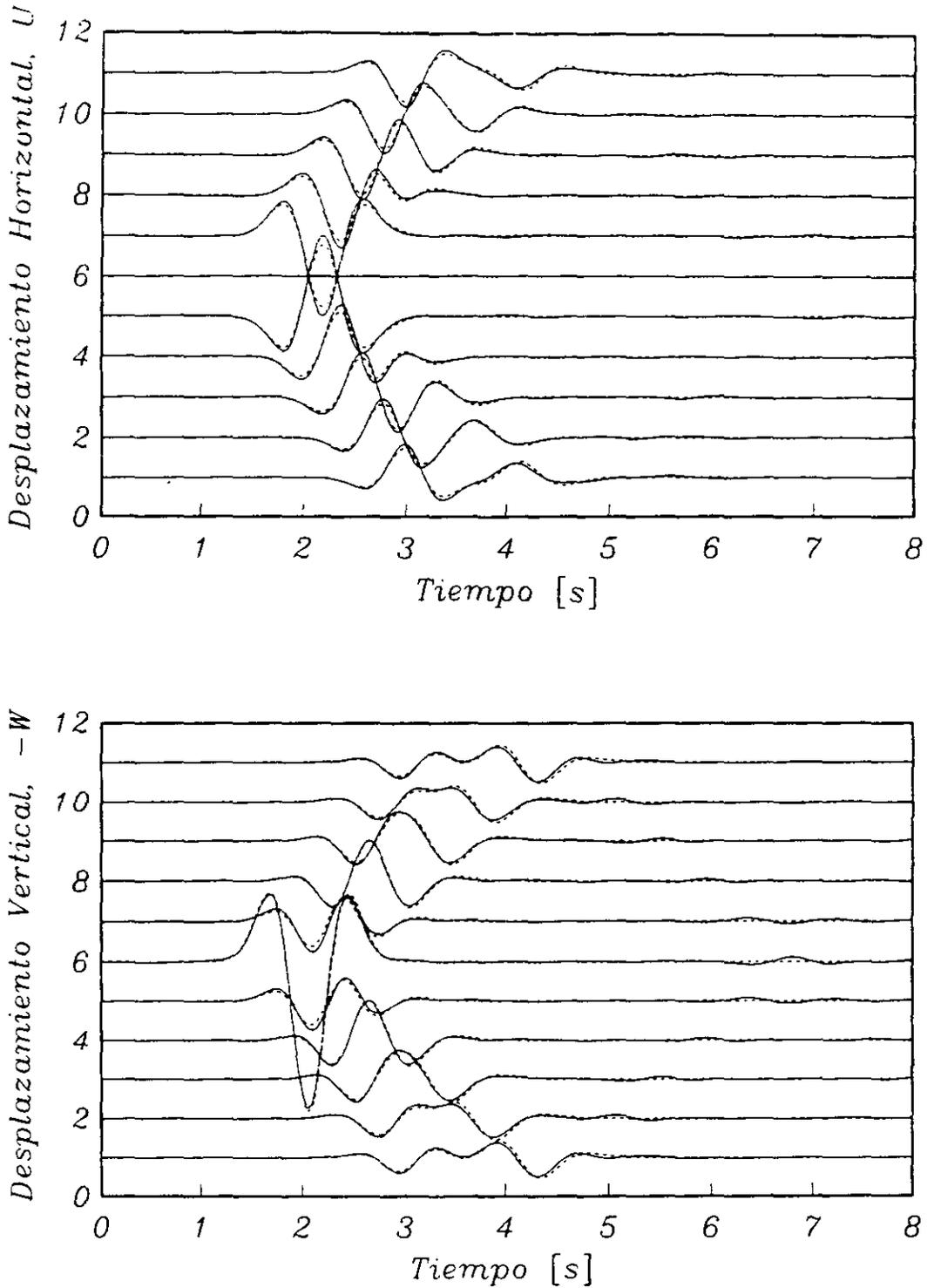


Figura 4.7 Sismogramas sintéticos obtenidos por el modelo de la figura 4.6. Con línea continua se dibuja el resultado obtenido con el IBEM, mientras que la línea punteada corresponde a la solución analítica de Garvin. El acuerdo es excelente.

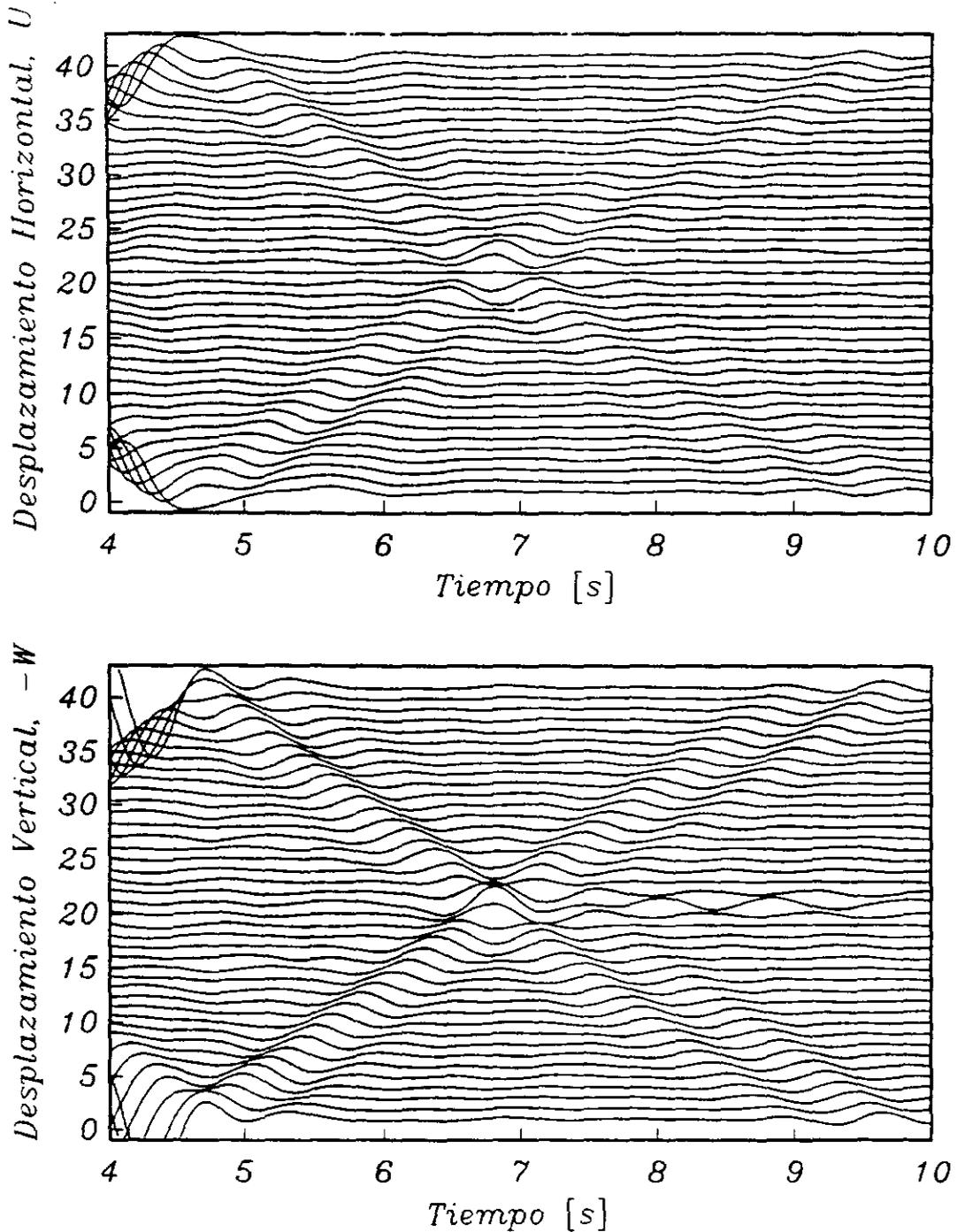


Figura 4.8 Para resaltar los efectos de borde se aumentó el número de estaciones, se amplificaron en un orden de magnitud los sismogramas presentados en la figura 4.7 y se eligió otra ventana temporal. Las nuevas estaciones están colocadas cada 0.1 km, es decir que tomando una cada cuatro, a partir de la primera, se reconstruye el arreglo descrito en el texto. Dos onda de Rayleigh espurias "dibujan" una cruz. Una onda se propaga de la estación 1 (donde llega a  $t = 4$  s) a la 41 (donde llega a  $t = 8$  s). La otra se propaga de la 41 a la 1.

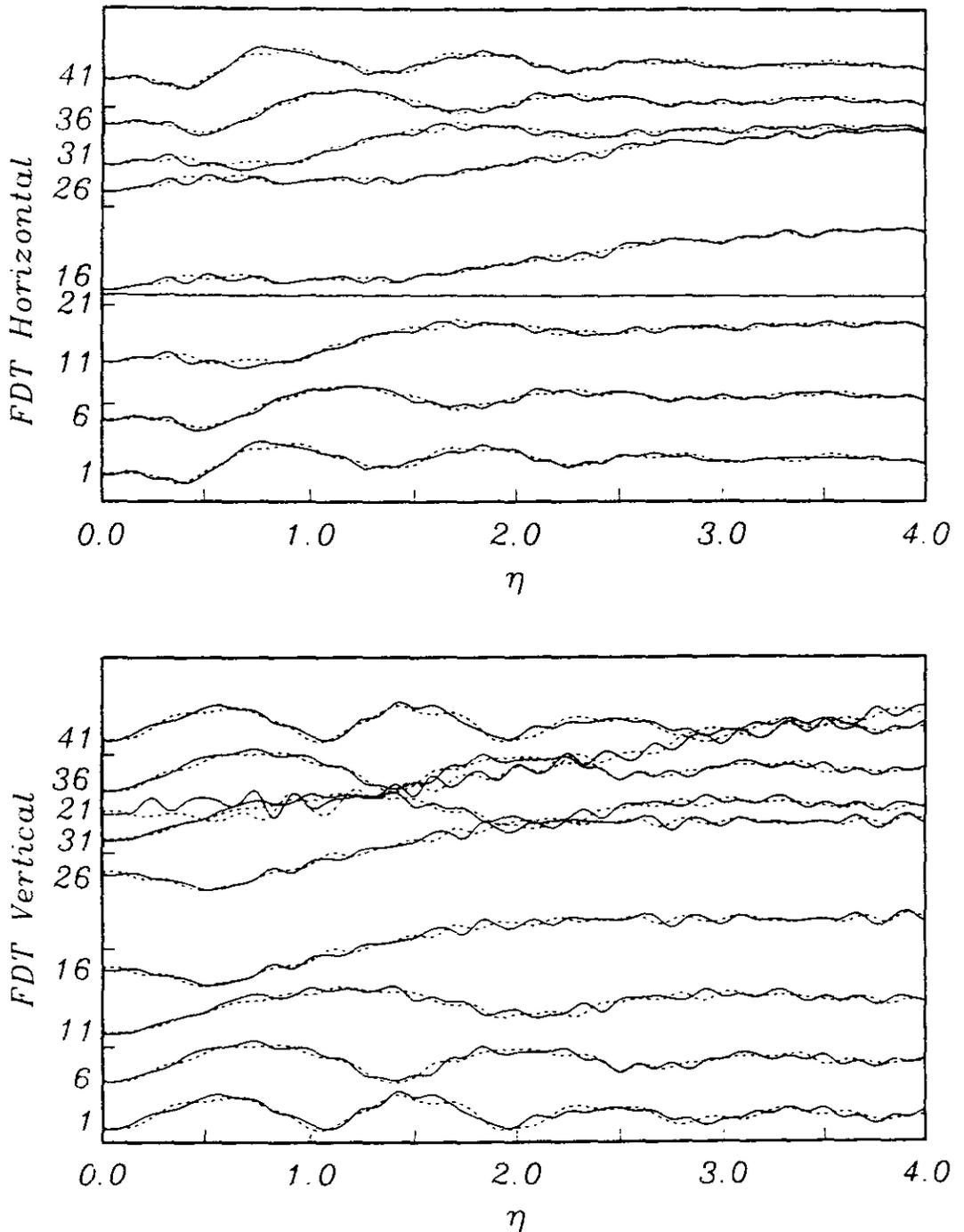


Figura 4.9 Funciones de transferencia calculadas por el modelo de la figura 4.6. En ordenada se indica el número de la estación correspondiente. En abscisa se indica la frecuencia adimensional  $\eta$  calculada como  $\eta = 2af/\beta$ , donde  $a$  es una dimensión característica de la geometría (por el modelo de la figura 4.6,  $a$  es igual a 1 km). La línea continua se obtuvo discretizando una superficie libre de 6 km de longitud, mientras que la línea punteada corresponde a una superficie libre de 8 km. Aumentando la extensión de la superficie discretizada, la función de transferencia mantiene el mismo patrón, pero se suaviza. Se notan diferencias entre las dos soluciones tanto en bajas cuanto en altas frecuencias.

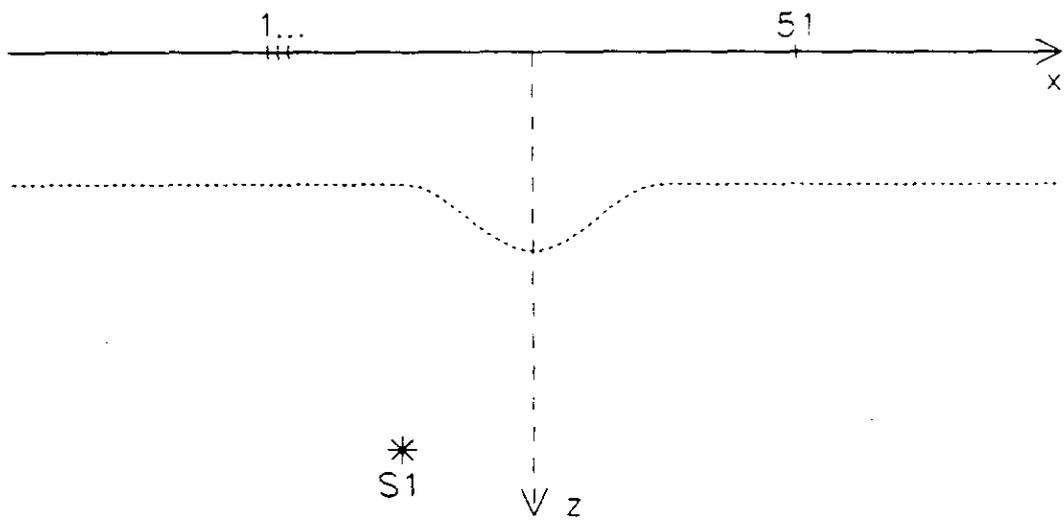


Figura 4.10 Una capa irregular con superficie libre plana es excitada por la fuente profunda  $S_1$ . Se calcula la respuesta en 51 estaciones colocadas en superficie libre. La irregularidad se encuentra entre las estaciones 13 y 38.

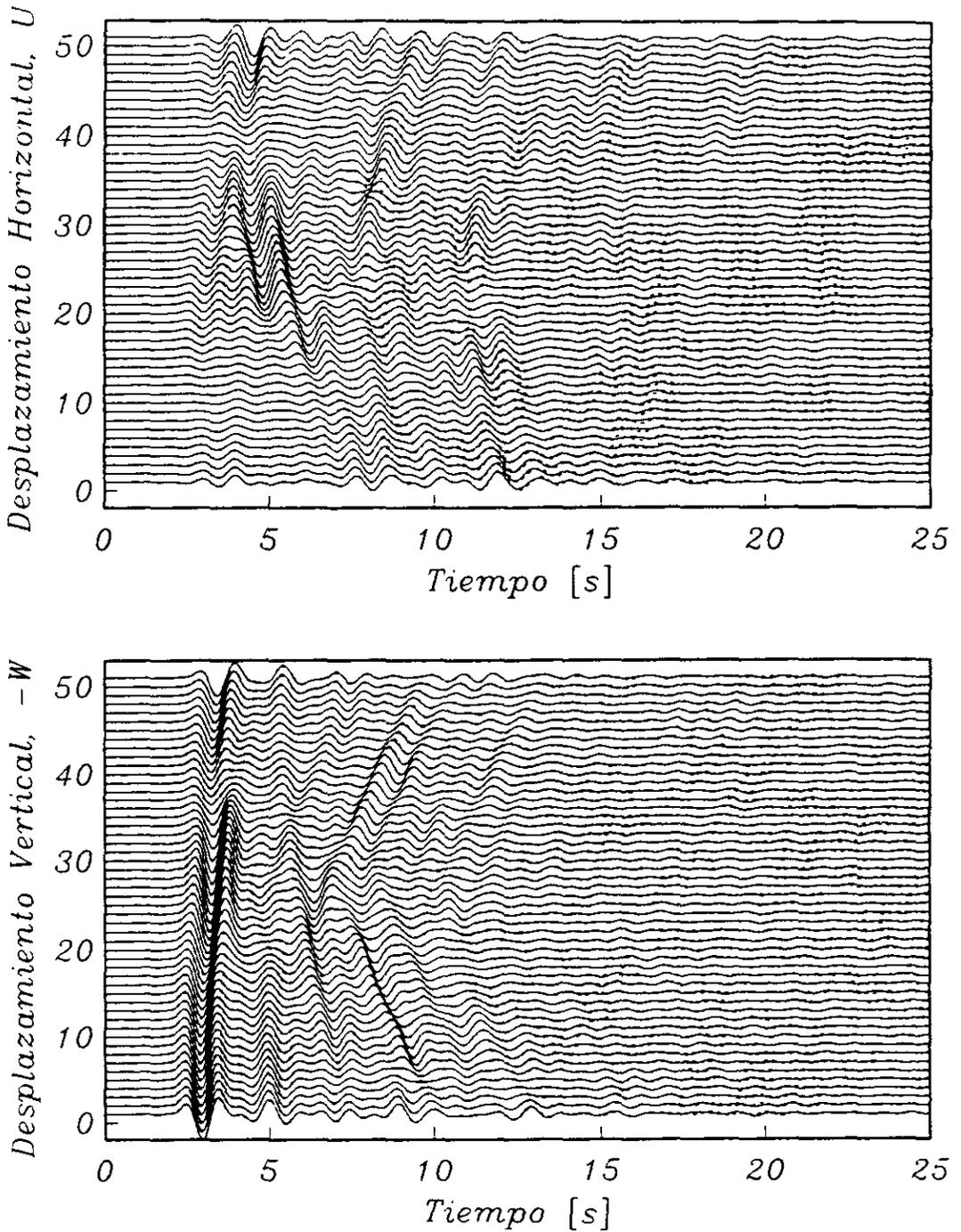


Figura 4.11 *Sintéticos obtenidos por el modelo de la figura 4.10. La línea continua corresponde a la simulación con el IBEM, mientras que la línea punteada corresponde al cálculo con el SEM. El acuerdo entre las dos soluciones numéricas es más que bueno, la línea punteada prácticamente desaparece encimándose a la continua.*

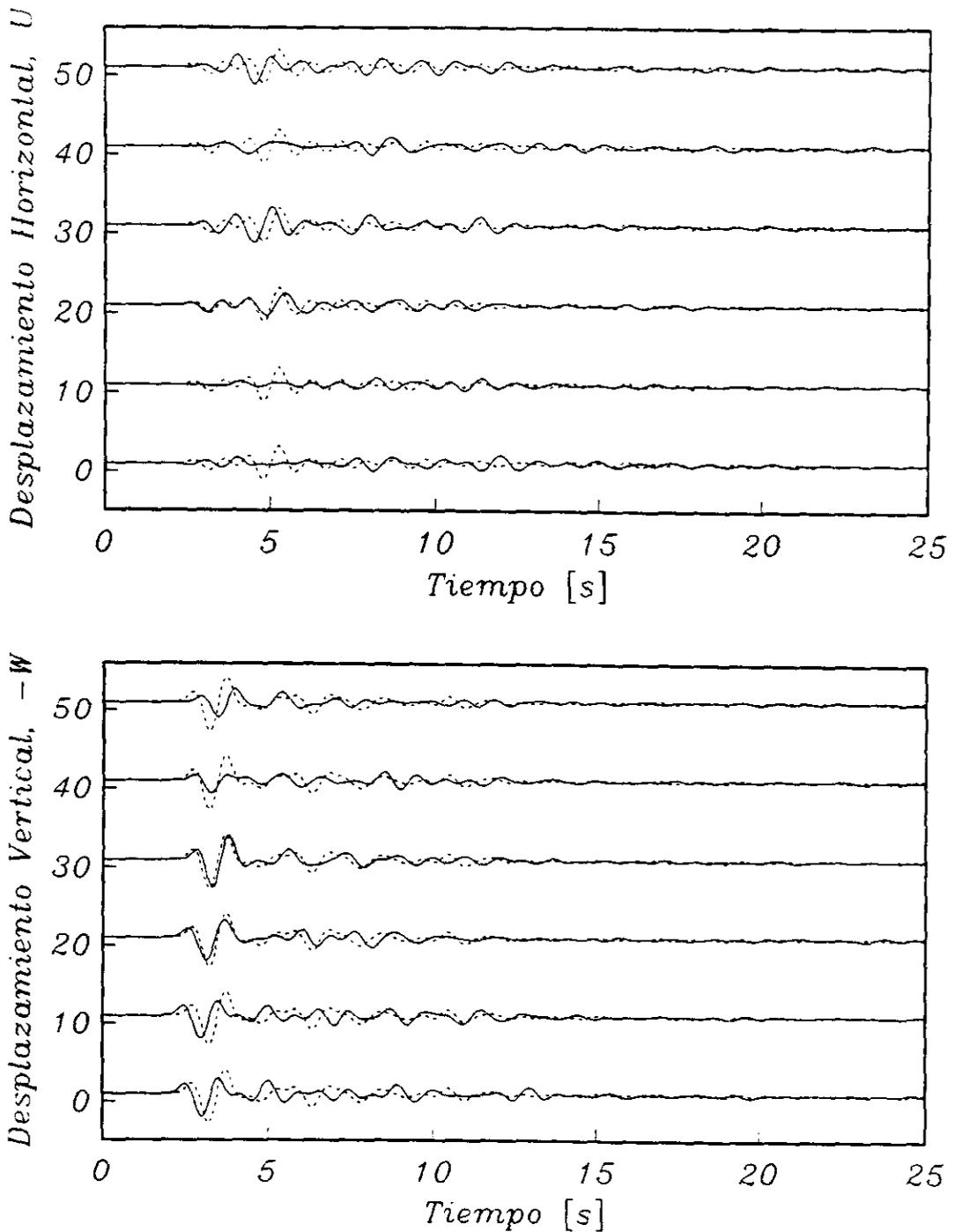


Figura 4.12 Sintéticos obtenidos por el modelo de la figura 4.10. Se comparan los sintéticos en las estaciones 1, 11, 21, 31, 41 y 51 (línea continua) con el sintético en la estación 25 (línea punteada). Las diferencias entre los niveles de amplificación dependen de la posición de la estación y del componente considerado.

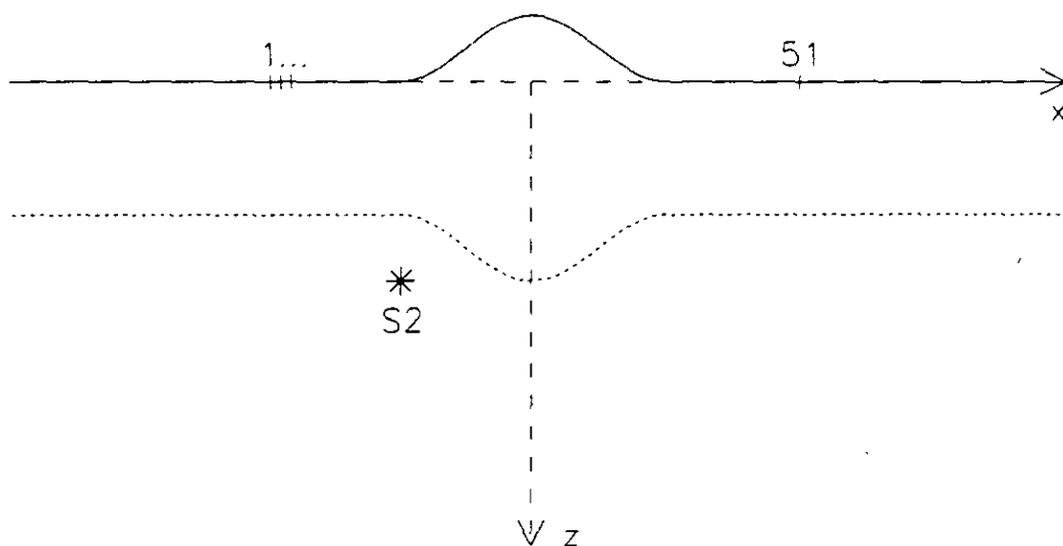


Figura 4.13 Capa con irregularidad superficial y profunda, excitada por la fuente  $S2$  colocada en el semiespacio. Se calcula la respuesta en 51 estaciones en la superficie libre. La irregularidad se encuentra entre las estaciones 13 y 38.

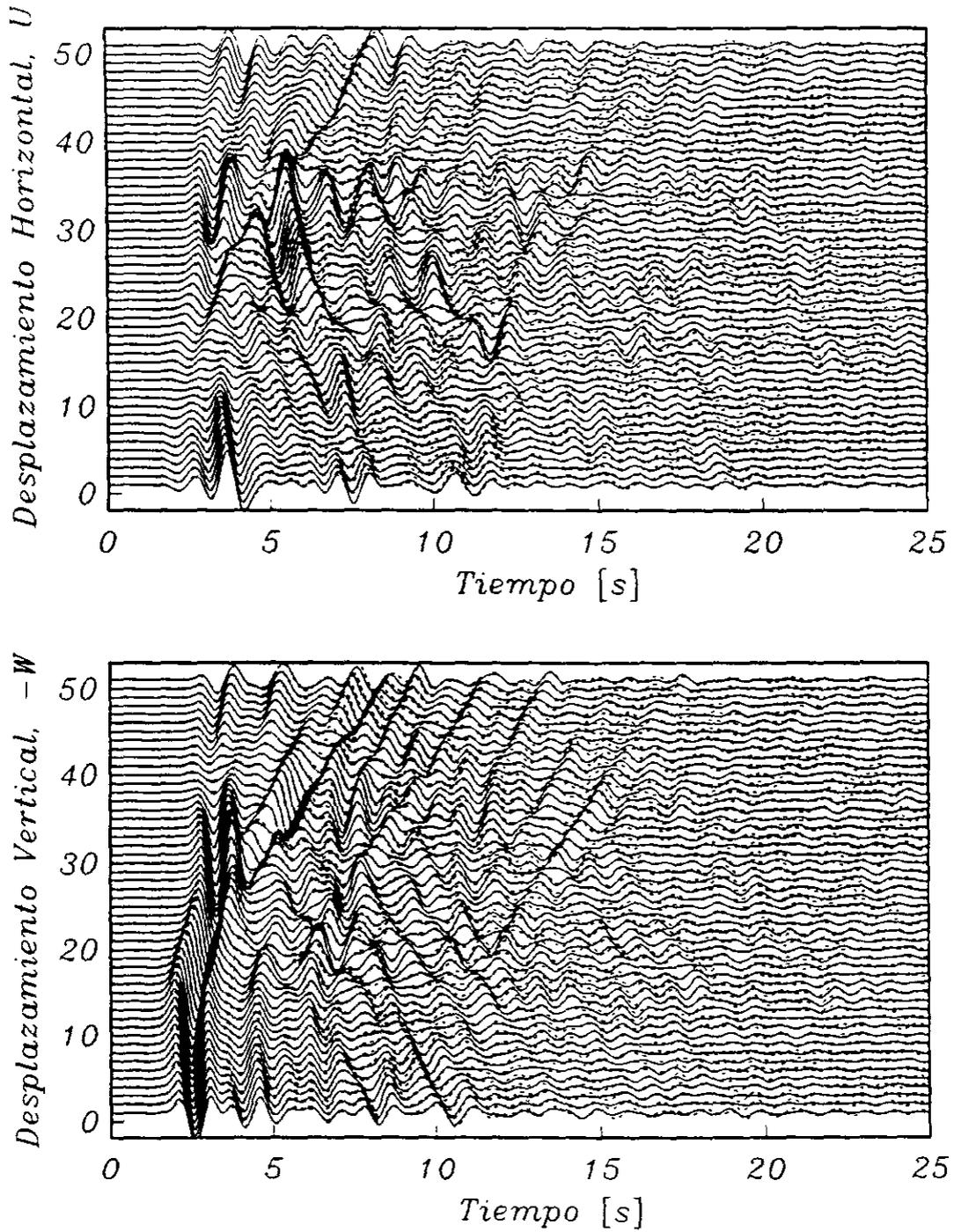


Figura 4.14 *Sintéticos obtenidos por el modelo de la figura 4.13. La línea continua corresponde a la simulación con el IBEM, mientras que la línea punteada corresponde al cálculo con el SEM. El acuerdo entre las dos soluciones numéricas es bueno, sobretodo en los primeros seis segundos.*

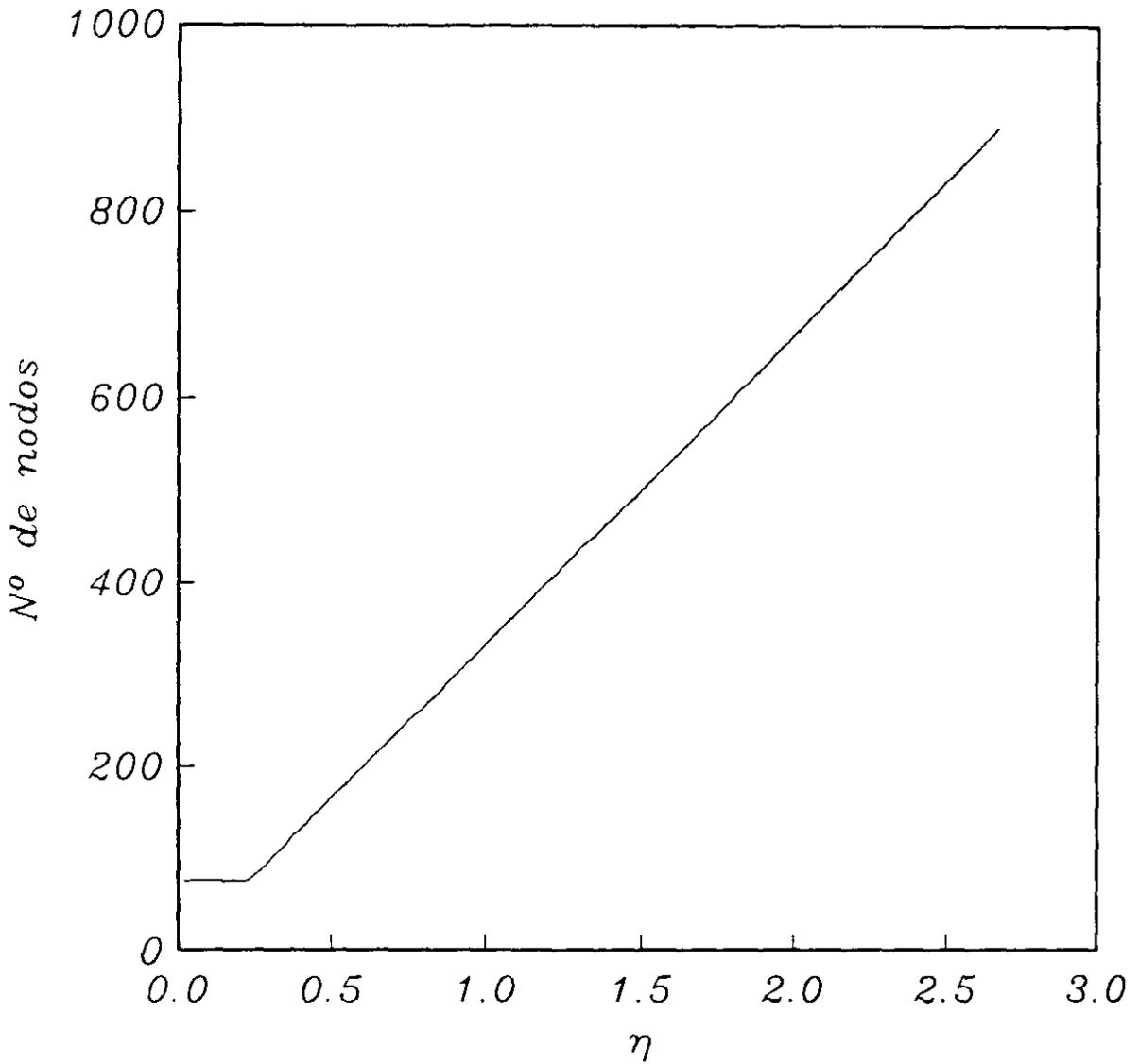


Figura 4.15 Frecuencia adimensional versus número de ecuaciones, o de nodos, del sistema lineal. El número de incógnitas aumenta casi linealmente con la frecuencia.



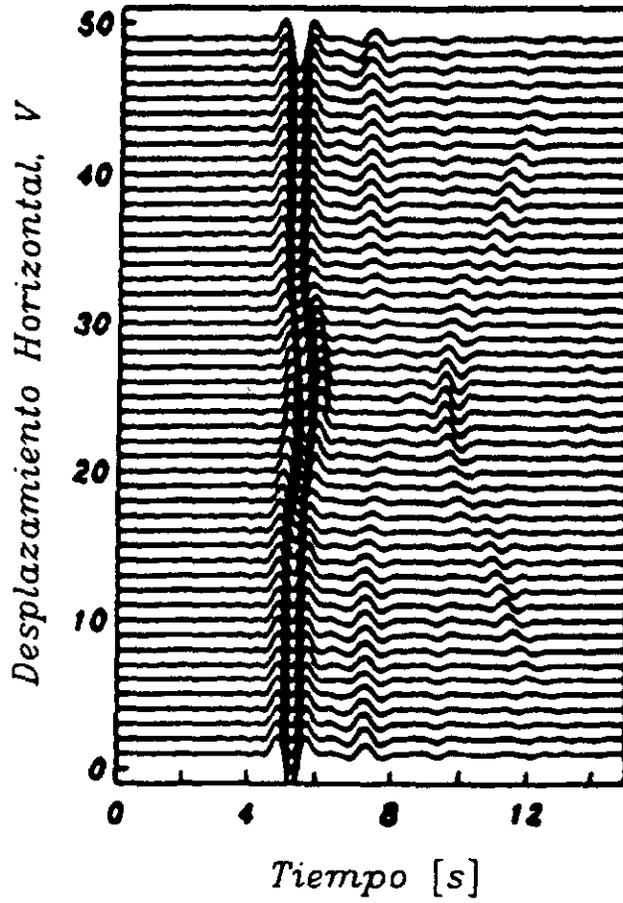


Figura 4.18 Sismogramas sintéticos obtenidos excitando el modelo de la figura 4.17 con ondas SH (ángulo de incidencia de  $0^\circ$ ).

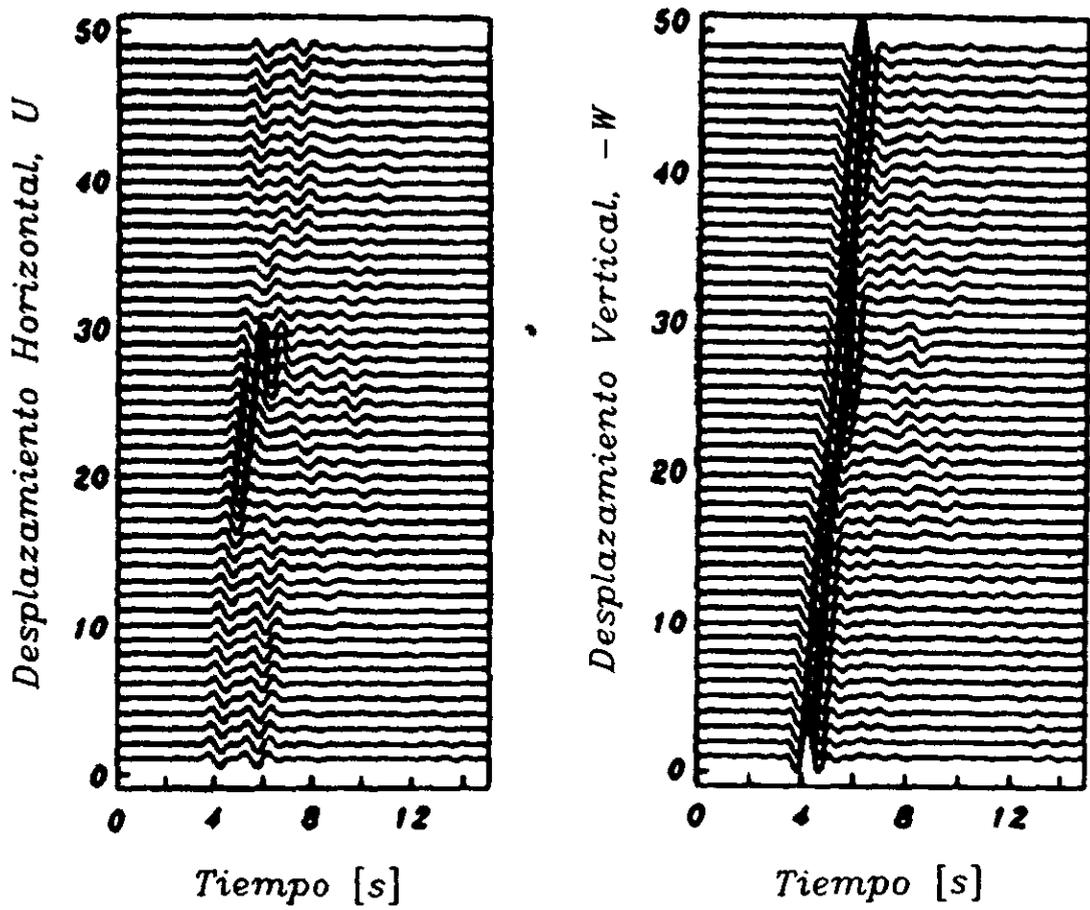


Figura 4.19 Sismogramas sintéticos obtenidos excitando el modelo de la figura 4.17 con ondas P (ángulo de incidencia de  $30^\circ$ ).

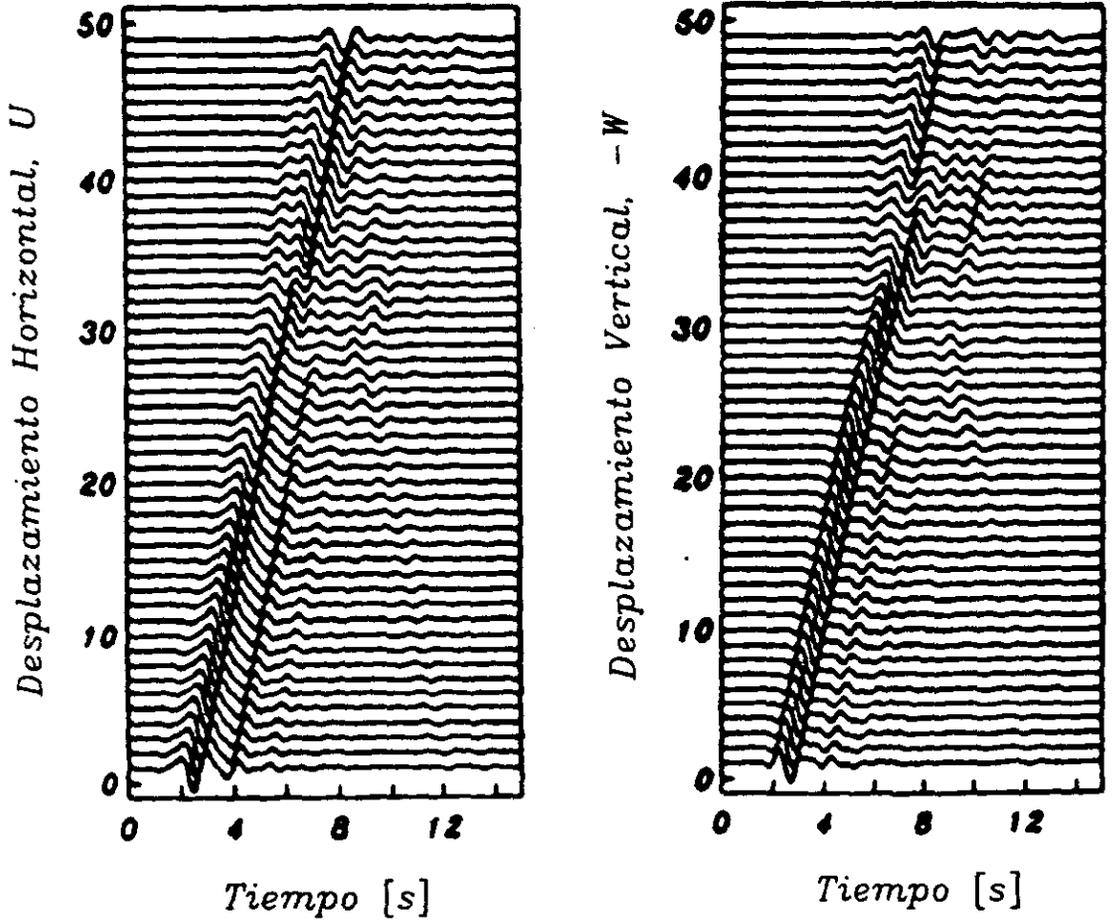


Figura 4.20 Sismogramas sintéticos obtenidos excitando el modelo de la figura 4.17 con ondas SV (ángulo de incidencia de  $60^\circ$ ).

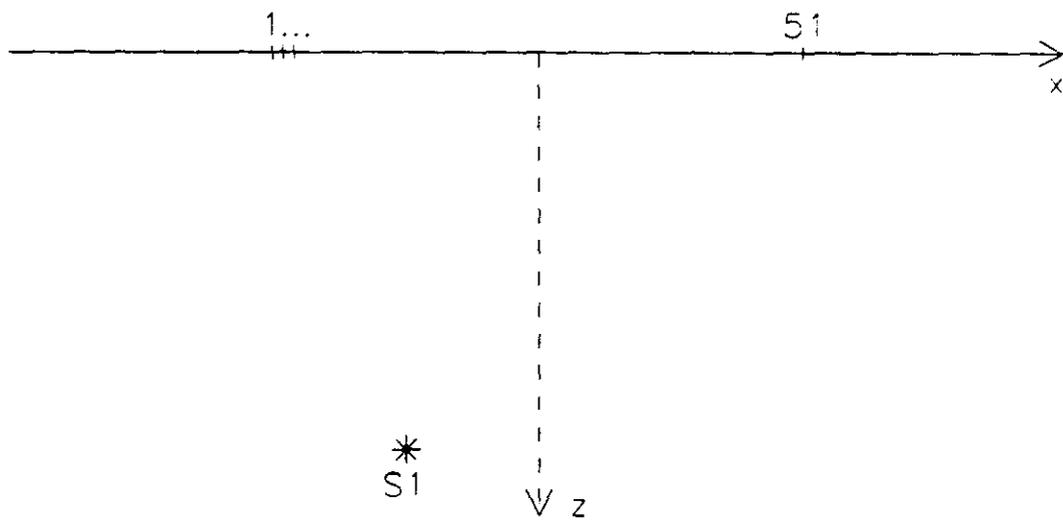


Figura 4.21 *Semiespacio elástico excitado por la línea de dilatación profunda S1. Se calcula la respuesta en superficie libre en 51 estaciones.*

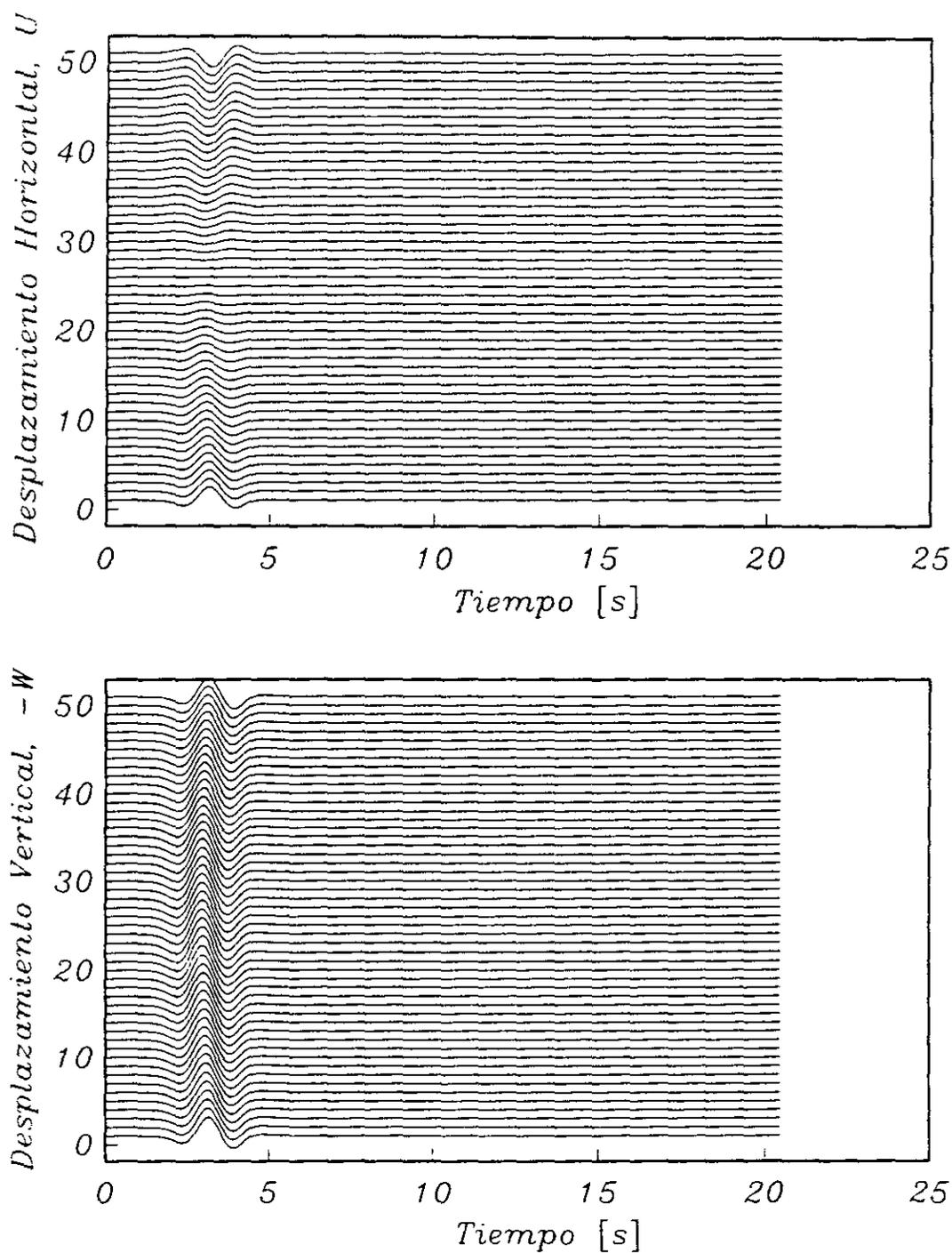


Figura 4.22 Respuesta en superficie calculada por el modelo ilustrado en la figura 4.21, con  $\beta = 1.5$  km/s,  $\nu = 0.3333$  y  $\rho = 2$  gr/cm<sup>3</sup>. El movimiento es asociado a la onda directa, no se aprecia propagación de ondas superficiales.

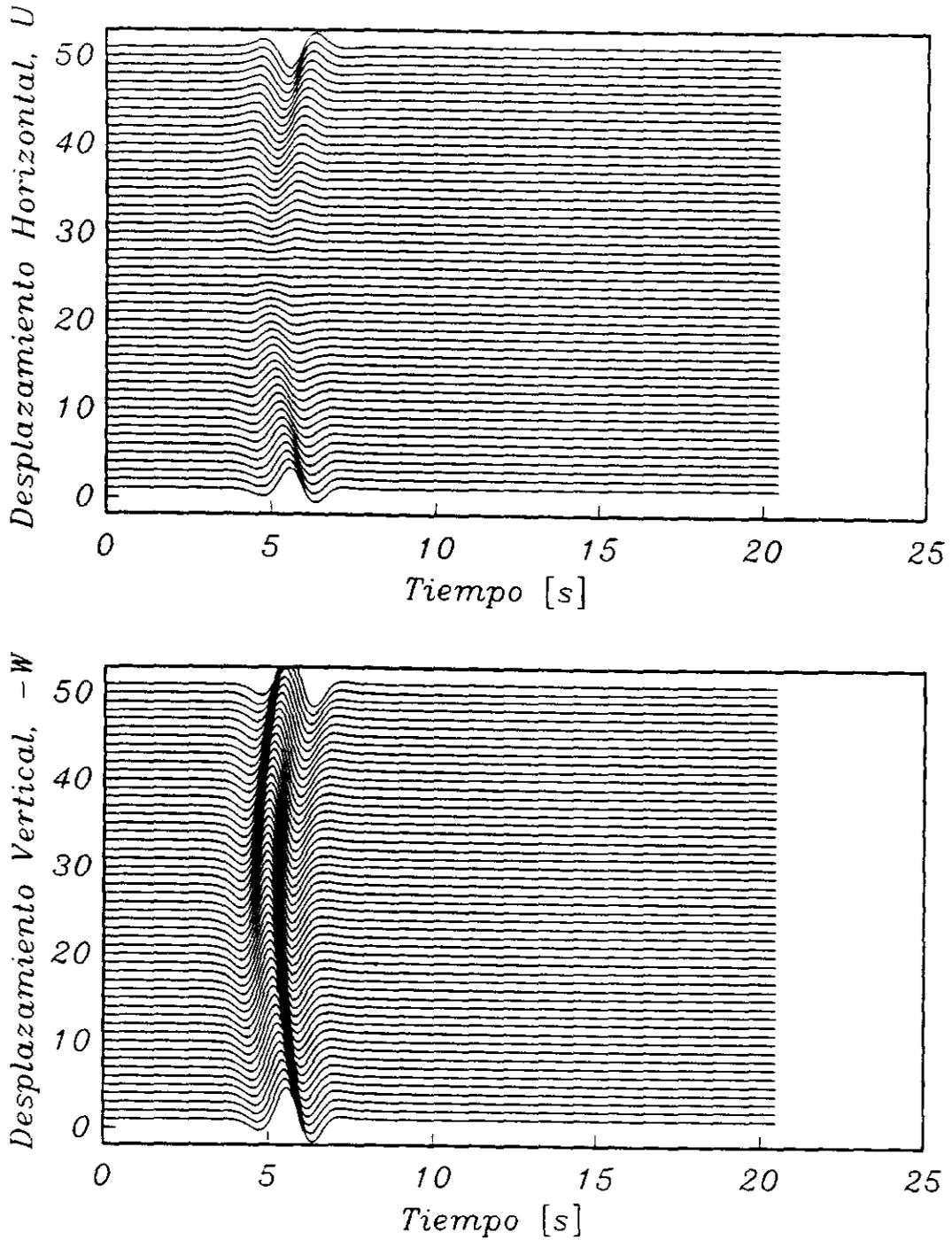


Figura 4.23 Respuesta en superficie calculada por el modelo ilustrado en la figura 4.21, con  $\beta = 0.5$  km/s,  $\nu = 0.3333$  y  $\rho = 1$  gr/cm<sup>3</sup>. El patrón de respuesta es el mismo de la figura anterior, pero amplitudes y tiempos de propagación varían según los nuevos parámetros elásticos.

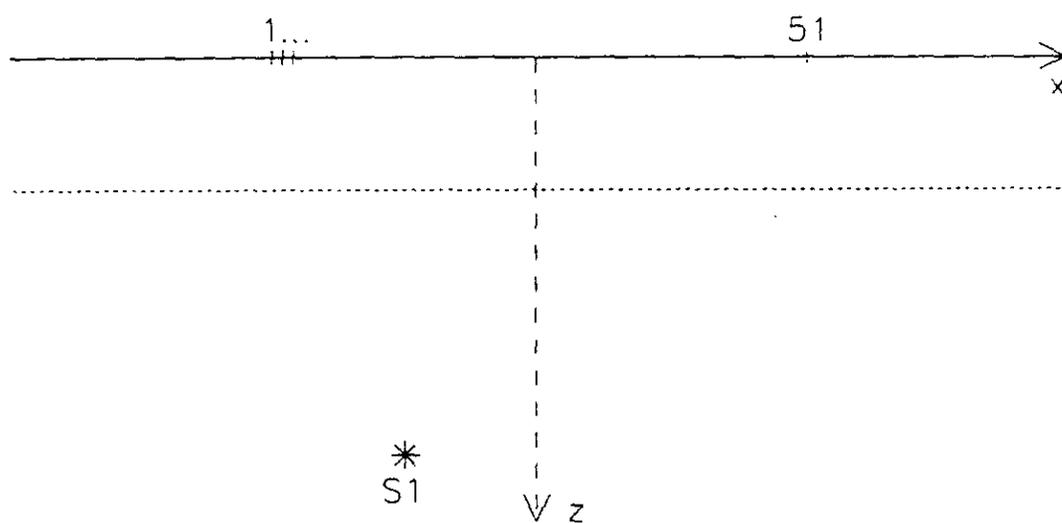


Figura 4.24 El semiespacio en que está colocada la fuente subyace a una capa plana con diferentes propiedades mecánicas. Se indica la posición de la fuente  $S1$  y de las 51 estaciones.

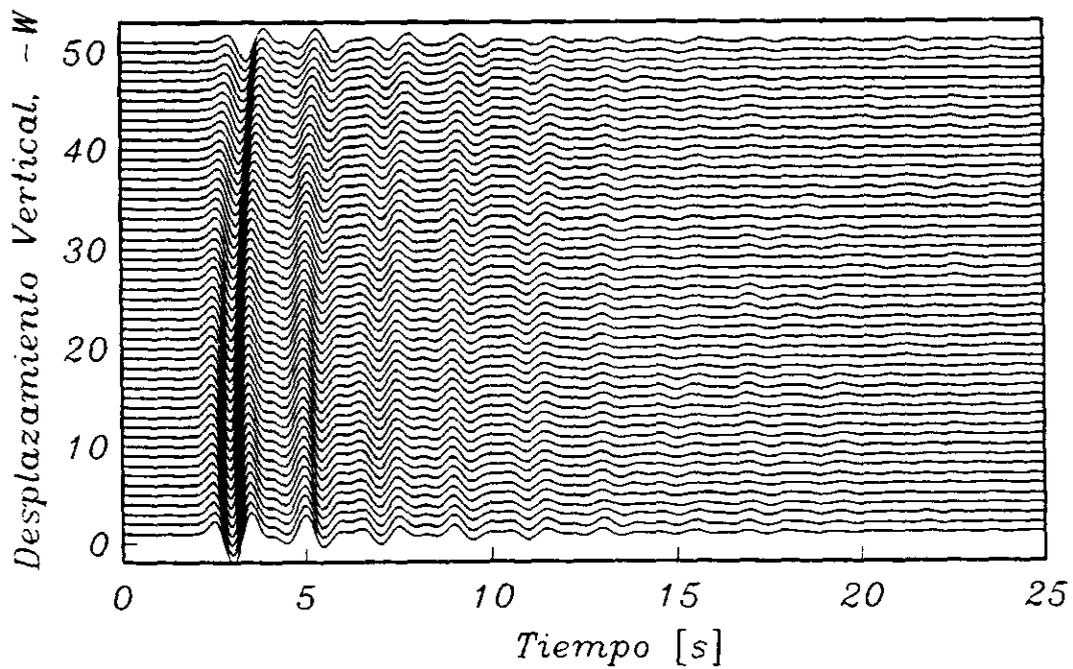
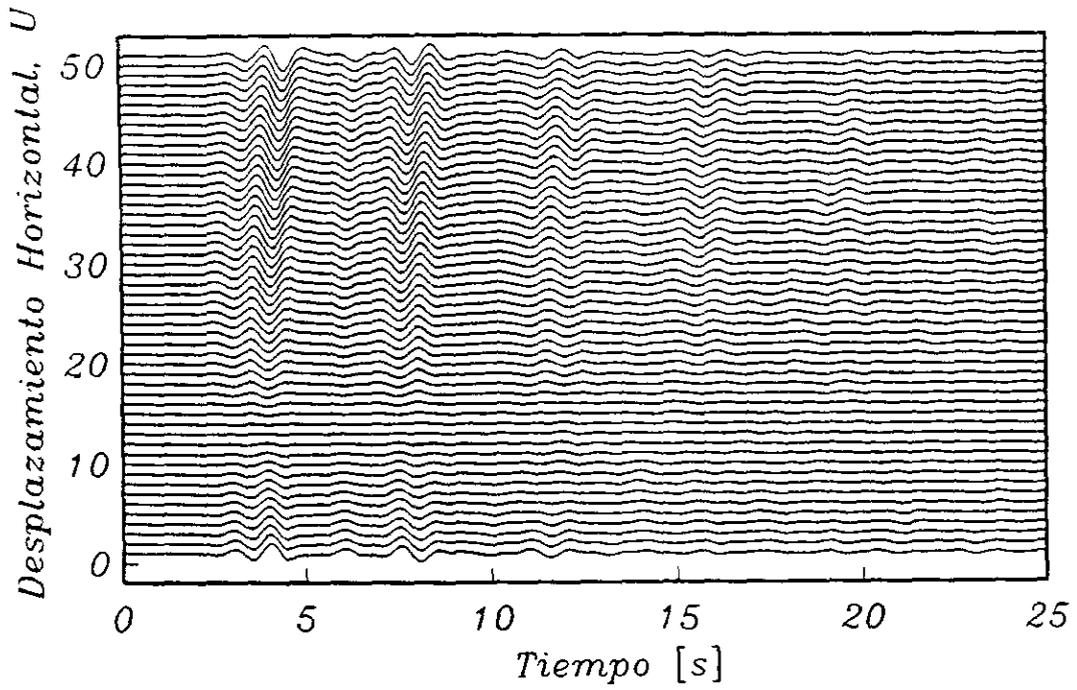


Figura 4.25 Respuesta en superficie calculada por el modelo de la figura 4.24. Al arribo directo, siguen los rebotes de las ondas entre interfaz con el semiespacio y superficie libre. Después de cada rebote disminuye la energía de las ondas que se propagan en el estrato.

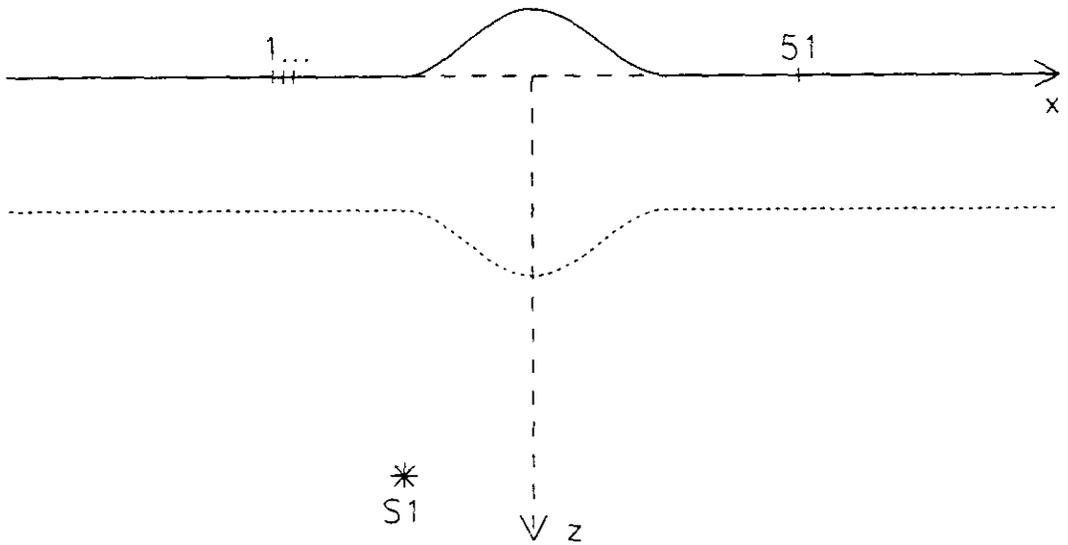


Figura 4.26 Capa irregular (en su topografía y en la interfaz con el semiespacio) excitada por la fuente profunda  $S1$ . Se estudia la respuesta en 51 estaciones colocadas en superficie libre.

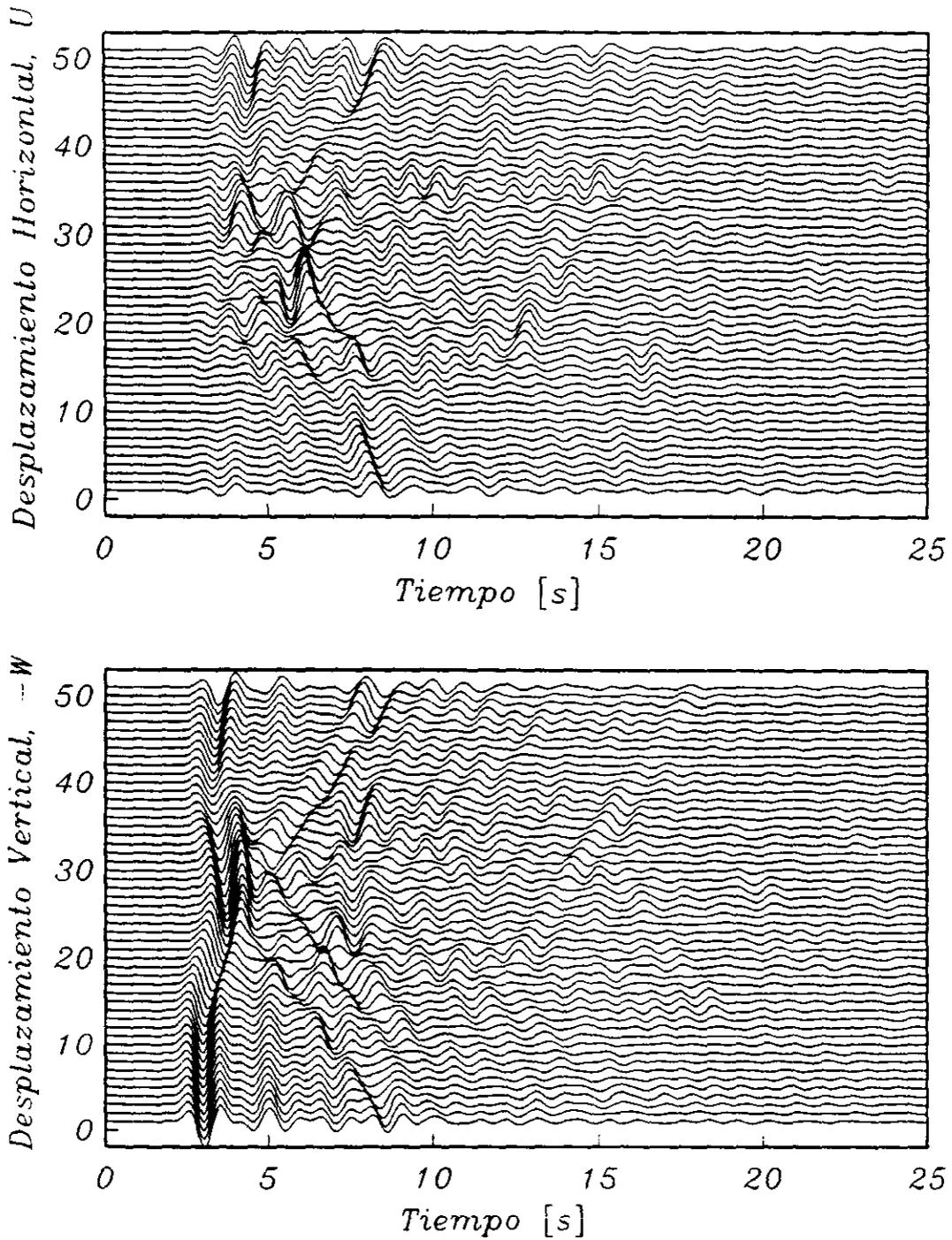


Figura 4.27 Respuesta del modelo de figura 4.26. La amplificación del movimiento horizontal en las estaciones centrales del arreglo es por lo menos dos veces la amplificación estimada por el modelo de la figura 4.21.

# Capítulo 5

## Fronteras absorbentes

### 5.1 Introducción

Usando algunas técnicas numéricas (por ejemplo diferencias finitas, métodos espectrales, elementos finitos y de frontera) se precisa definir un modelo de dimensiones finitas, mientras que al estudiar problemas de propagación de ondas sísmicas es común encontrar modelos de semiespacios o de capas. En estos casos, hay que definir una frontera artificial entre la región analizada y el espacio exterior. Frecuentemente, la cuidadosa representación de dicho límite es crucial para el éxito de la simulación numérica. La condición de frontera ficticia tiene que propagar hacia el interior del dominio la excitación proveniente del semiespacio. Por otro lado, tiene que propagar hacia el exterior del dominio las ondas reflejadas, difractadas y generadas por eventuales fuentes internas. La condición ideal corresponde a una frontera transparente, pero también una frontera absorbente resulta ser adecuada. Lo importante es que no se generen ondas espurias, reflejadas por las fronteras ficticias del modelo. En efecto, estas ondas contaminarían la solución, empeorando la calidad de los resultados.

En un problema 1-D, las tracciones normales (o tangenciales) son proporcionales a la velocidad normal (o tangencial) de la partícula. Lysmer y Kuhlemeyer (1969) exploraron el uso de esta condición en 2-D usando dos amortiguadores viscosos, uno normal y uno tangencial en cada punto de la frontera convexa. La solución propuesta es fácil de implantar en el dominio espacio-tiempo, así como espacio-frecuencia, y logra reproducir suficientemente bien las condiciones de irradiación al infinito; sin embargo es correcta sólo para incidencia normal. En efecto, Clayton y Engquist (1977) ilustraron que tracciones y velocidades en 2-D y 3-D no dependen linealmente una de las otras. La ecuación que las relaciona no puede ser manejada fácilmente, pero su signo permite diferenciar entre ondas que entran o salen del dominio. Con una expansión en serie se obtienen algunas expresiones útiles para fines prácticos y válidas para ondas que viajan en dirección casi normal a la superficie. Para incidencia normal las condiciones de frontera propuestas por Clayton y Engquist corresponden a la solución exacta y coinciden con las de Lysmer y Kuhlemeyer. Clayton y Engquist proponen que, cuando haya una información *a priori* sobre la dirección de las ondas, se desarrolle en serie alrededor de esa dirección. A partir

de esta idea Higdon (1990) elaboró una condición de frontera exacta para un grupo de ángulos de incidencia. Se trata de un producto de operadores diferenciales lineales aplicado al campo de desplazamiento en el dominio espacio-tiempo. Cada operador permite cancelar las reflexiones para un ángulo de incidencia. La condición de absorción para toda onda homogénea implica el uso de un número infinito de operadores, pero Higdon (1990) sugiere que una cuidadosa selección de un par de operadores lleva a muy buenos resultados. Peng y Toksoz (1994) minimizan la amplitud de las ondas reflejadas en la frontera introduciendo oportunos coeficientes en su esquema de diferencias finitas. La condición de frontera es del todo empírica; sin embargo resulta más eficiente que la condición de Higdon (Peng y Toksoz, 1994; Peng y Toksoz, 1995). Smith (1974) propuso aplicar iterativamente condiciones de frontera libre y rígida, para promediar luego los resultados y cancelar las reflexiones espurias. Esta idea resultó aplicable sólo para problemas 2-D escalares y bajo condiciones muy restrictivas. Muy pocos trabajos han enfrentado el problema de ondas inhomogéneas. Al respecto se puede leer algo en los artículos de Lysmer y Kuhlemeyer (1969), Lysmer y Waas (1972) y Higdon (1994). Una revisión completa de las contribuciones en el campo de fronteras absorbentes se encuentra en Turkel (1983), Kausel y Tassoulas (1981), Kausel (1988) y Givoli (1991). A pesar de los avances en el tema, como el desarrollo de soluciones exactas (por ejemplo la de Keller y Givoli, 1989), de esquemas originales y de mejoras a las formulaciones anteriormente mencionadas, muchas veces se usan simples *trucos* computacionales. Ejemplos de estos artificios son las fórmulas de Stacey (1988) y bandas laterales con amortiguamiento creciente hasta alcanzar factores de calidad casi nulos.

La idea que inspiró el desarrollo del trabajo que se presenta aquí (ver también Sánchez-Sesma y Vai, 1998) se puede encontrar en Kausel (1992), donde se presenta la matriz de rigidez del semiespacio como absorbedor perfecto. A partir de esta concepción se llegó a una condición de frontera transparente que parece original. Se encontró una forma analítica cerrada para la absorción de ondas homogéneas, mientras que las ondas inhomogéneas requieren tratamiento numérico. En este capítulo se ilustran las bases teóricas, algunos detalles computacionales y un pequeño ejemplo de aplicación. En las conclusiones se hace énfasis sobre las perspectivas para continuar esta línea de investigación.

## 5.2 Desplazamiento, esfuerzo y rigidez

En un medio elástico homogéneo e isótropo, el campo de desplazamiento asociado a ondas *SH* satisface la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (5.1)$$

donde  $\beta$  es un parámetro real, puesto que en este capítulo no se considera amortiguamiento. Se hace notar que, a pesar de esta condición, el desarrollo aquí presentado es del todo general. El objetivo es el estudio de condiciones de frontera, condiciones locales en el espacio, por ello es irrelevante tomar o no en cuenta la pérdida de energía asociada a

fenómenos de propagación. Al expandir la solución de la ecuación 5.1 en ondas planas, se escribe

$$v(x, z; t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} v(k; \omega) e^{i\omega t} e^{-ikx - i\eta z(k; \omega)} dk d\omega, \quad (5.2)$$

donde  $k^2 + \eta^2 = \omega^2/\beta^2$  y  $\text{Im}(\eta) \leq 0$ .

El campo de desplazamiento en la ecuación 5.2, transformado al dominio número de onda-frecuencia, es

$$v(k; \omega) = v_0(k; \omega) e^{-i\eta(k; \omega)z}. \quad (5.3)$$

Las tracciones asociadas, evaluadas en el plano  $z = 0$  con vector normal en sentido negativo del eje  $z$  (Fig. 5.1), son

$$t_v|_{z=0} = \mu \left[ -\frac{\partial v}{\partial z} \right]_{z=0} = i\mu\eta v|_{z=0} = K v|_{z=0} = K v_0(k; \omega), \quad (5.4)$$

donde  $K$  es la rigidez, según la interpretación sugerida por Kausel (1992). En forma explícita la rigidez se escribe

$$K = K_R + iK_I = i\mu\eta = i\beta\rho|\omega| \sqrt{1 - \frac{k^2}{\omega^2/\beta^2}}, \quad (5.5)$$

la condición sobre la parte imaginaria del número de onda vertical se traduce en la desigualdad  $\text{Re}(K) \geq 0$ . La representación de  $K$  con curvas de nivel se ilustra en la figura 5.2, mientras que en las figuras 5.3a, b y c se representan diferentes cortes de esa superficie. A lo largo de las rectas  $k = \pm\omega/\beta$  la rigidez es nula, dichos lugares geométricos son la intersección entre los dominios en que están definidas parte real y parte imaginaria de  $K$ . El máximo de  $K_I$  crece monótonicamente con la frecuencia, mientras que  $K_R$  crece con  $|k|$  (Fig. 5.3a y b). A frecuencia fija la parte imaginaria de la rigidez presenta forma elíptica, la parte real define dos ramas hiperbólicas asintóticas a  $K = \mu|k|$  (Fig. 5.3c).

Para obtener la rigidez en el dominio espacio-frecuencia es necesario antitransformar la expresión de la ecuación 5.5

$$K(x; \omega) = \frac{i\beta\rho|\omega|}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 - \frac{k^2}{\omega^2/\beta^2}} e^{-ikx} dk \quad (5.6)$$

$$= \frac{i\beta\rho|\omega|}{\pi} \int_0^{\infty} \sqrt{1 - \frac{k^2}{\omega^2/\beta^2}} \cos kx dk. \quad (5.7)$$

Las tracciones correspondientes se calculan como

$$t_v(x, 0; \omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} K(\xi; \omega) v_0(k; \omega) e^{-ik[x-\xi]} dk d\xi, \quad (5.8)$$

donde, debido al cambio de dominio, el producto en la ecuación 5.4 se transforma en convolución.

### 5.3 Límite estático

Para frecuencia nula, o sea en el caso estático, se obtiene

$$K(x; 0) = \frac{\rho\beta^2\pi}{\Delta^2x} \left[ \frac{\sin \pi x/\Delta x}{\pi x/\Delta x} - \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \pi x/2\Delta x}{\pi x/2\Delta x} \right)^2 \right], \quad (5.9)$$

donde  $\Delta x$  es el paso de discretización. La rigidez en  $x = 0$  se calcula como límite de la ecuación 5.9

$$K(0; 0) = \frac{\rho\beta^2\pi}{2\Delta^2x}. \quad (5.10)$$

La integral que define la antitransformada (Ecn. 5.7) no convergería si fuera calculada de cero a infinito, pero el hecho de tratar numéricamente un dominio discreto modifica el límite superior de integración de infinito a un número de onda máximo. La discretización en la variable espacial  $x$ , limita naturalmente el ancho de banda del número de onda horizontal hasta  $\pm\pi/\Delta x$ , por lo que la transformada espacial de Fourier converge.

### 5.4 Ondas homogéneas

Se considere una onda plana homogénea con ángulo de incidencia  $\theta$  (Fig. 5.4). En este caso  $k = (\omega/\beta) \sin \theta \leq \omega/\beta$ . Aquí se presentan los resultados para  $\omega \geq 0$ , pero igualmente se podría seguir un desarrollo más general. La rigidez está dada por

$$K = iK_I = i\omega\rho\beta \cos \theta. \quad (5.11)$$

Se hace notar que, para ángulo de incidencia fijo, una distribución adecuada de amortiguadores viscosos reproduce la condición de frontera exacta.

Para incidencia vertical ( $k = 0$ ), la rigidez resulta ser igual a  $i\omega\rho\beta$ . Este operador, antitransformado al dominio espacio-tiempo, lleva a

$$t_y(x, z; t) = \rho\beta \frac{\partial v(x, z; t)}{\partial t}, \quad (5.12)$$

que es la condición de frontera de Lysmer y Kuhlemeyer (1969). Si  $k$  es pequeño, la raíz en la ecuación 5.5 se puede expandir en serie obteniendo

$$K \cong i\omega\rho\beta \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{\omega^2/\beta^2} \right) = i\omega\rho\beta \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right), \quad (5.13)$$

que, en el artículo de Clayton y Engquist (1977), se denomina condición A2 y se propone para absorber ondas con incidencia casi vertical.

Transformando la rigidez al dominio espacio-frecuencia según la ecuación 5.7 se encuentra la forma analítica cerrada

$$K_I(x; \omega) = \frac{1}{2} \omega\rho\beta \frac{J_1 \left( \frac{\omega|x|}{\beta} \right)}{|x|}, \quad (5.14)$$

donde  $J_1$  es la función de Bessel de orden 1 (Fig. 5.5). Cabe señalar que el intervalo de integración no va de cero a infinito, sino de cero a  $\omega/\beta$ , ya que  $K_I$  es nula para números de ondas mayores. La rigidez en  $x = 0$  se calcula como límite de la ecuación 5.14

$$K(0; \omega) = \frac{i\rho\omega^2}{4}. \quad (5.15)$$

Para el cálculo de las tracciones se resuelve la ecuación 5.8, que lleva a un caso especial de las integrales discontinuas de Weber-Schafheitlin (Abramowitz y Stegun, 1970). La integral es nula para  $k > \omega/\beta$ , como era de esperarse por consistencia ( $K_I$  es nulo en ese rango de números de onda), mientras que para  $k \leq \omega/\beta$  resulta

$$t_y(0, 0; \omega) = iv_0(k; \omega)\omega\rho\beta\sqrt{1 - \frac{k_0^2}{\omega^2/\beta^2}} = iv_0(k; \omega)\omega\rho\beta \cos \theta. \quad (5.16)$$

La ecuación 5.16 es la expresión exacta de las tracciones calculadas en el origen del sistema de referencia y asociadas a una onda plana homogénea. Al resolver numéricamente la integral de la ecuación 5.8, no es necesario extender el intervalo de integración de menos a más infinito. En efecto, tomando el segundo cero de  $K_I$ , o sea de la función de Bessel, se encuentra que la contribución principal es a lo largo de una longitud de onda alrededor del punto de interés (Fig. 5.5).

En la mayoría de los trabajos sobre condiciones de frontera se estima la validez de las formulas propuestas calculando los correspondientes coeficientes de reflexión y transmisión y confrontandolos con los exactos. Las tracciones deducidas a partir de la convolución entre rigidez y campo de desplazamiento son exactas (Ecn. 5.16), entonces los coeficientes de reflexión y transmisión también son exactos.

## 5.5 Ondas inhomogéneas

La parte real de la rigidez, asociada a ondas inhomogéneas, requiere tratamiento numérico. La inversa formal de  $K_R$ , según la ecuación 5.7, no existe, sin embargo su cálculo numérico converge. Como en el caso del límite estático, la discretización espacial del dominio acota el intervalo de número de onda. Las ecuaciones 5.7 (con rango de integración entre  $\omega/\beta$  y  $\pi/\Delta x$ ) y 5.8 siguen siendo válidas, aún si no presentan solución analítica en forma cerrada. La figura 5.6 ilustra la forma de  $K_R(x; \omega)$ .

## 5.6 Tratamiento numérico

En las secciones 5.4 y 5.5 se calculó la rigidez a partir de la ecuación 5.7. Se dividió el intervalo de integración en dos subintervalos, de 0 a  $\omega/\beta$  y de  $\omega/\beta$  a  $\pi/\Delta x$ , separando las contribuciones de las ondas homogéneas e inhomogéneas y obteniendo disjuntamente la parte imaginaria y real de  $K$ . Otro procedimiento se desarrolla a partir de la ecuación 5.6, usando la transformada rápida de Fourier (FFT). En la figura 5.7 se ilustra la rigidez

calculada con FFT para diferentes frecuencias, la FFT da directamente tanto parte real como imaginaria. En la figura 5.8a y b se presenta la comparación entre la solución analítica (Ecn. 5.9 y 5.10) y la numérica (con FFT) para el caso estático. En la figura 5.9a y b se superponen  $K_I$  analítico (Ecn. 5.14 y Ecn. 5.15) y numérico (con FFT). Todas las gráficas muestran un acuerdo excelente. Si la longitud total discretizada en  $x$  ( $2L$ ) es menor que la longitud de onda  $\lambda$ , el uso de la FFT no permite reproducir las oscilaciones de la función  $J_1$ , sino lleva a  $K_I$  constante (Fig. 5.10a). Si  $2L > \lambda$ , por pequeño que sea  $2L$ , la aproximación numérica es muy buena (Fig. 5.10b), sin embargo es oportuno calcular  $K_I$  por lo menos hasta el segundo cero de  $J_1$ . Las variaciones de  $\Delta x$ , cuando  $2L$  (o sea  $\Delta k$ ) es fijo, no parecen ser muy significativas (Fig. 5.10c). Cambiar el paso de discretización permite ganar o perder detalle, pero no hay diferencia substancial en el error, cuyos máximos son asociados a valores muy pequeños de  $K_I$  y  $J_1$ . Por supuesto, siempre hay que garantizar que el paso de discretización espacial permita barrer el dominio entero en que están definidas las ondas homogéneas.

Para el cálculo de las tracciones en  $x = 0$ , la integral 5.8 se simplifica. Las tracciones se confrontan con su correspondiente resultado exacto (Ecn. 5.16) para incidencia de ondas homogéneas e inhomogéneas (Fig. 5.11 de a a d). Considerando ondas homogéneas (a, b y c), el cálculo de las tracciones con transformada rápida de Fourier es muy preciso para cualquier ángulo de incidencia ( $\theta$ ) que se considere. Los resultados numéricos presentan parte real no nula oscilante sin patrón fijo, sin embargo los valores de  $Re(t_y)$  son muy pequeños, comparados con los de  $Im(t_y)$ , y el error es despreciable. Al aumentar  $\theta$  es necesario aumentar  $2L$  (o sea disminuir  $\Delta k$ ), para mantener cierto grado de precisión. Las variaciones de  $\Delta x$  no son significativas, siempre y cuando sea  $k_{max} \geq \omega/\beta$ . Por otro lado, las tracciones asociadas a ondas inhomogéneas resultan ser muy sensibles a variaciones de  $\Delta x$ , siendo éste el parámetro clave para la confiabilidad del resultado.

En fin, se presenta otro método para el tratamiento numérico de la rigidez. El IBEM, aplicado a una frontera libre plana, sugiere una interesante relación entre la función de Green y la rigidez. Considerando como solución de referencia únicamente a la onda incidente, teniendo como incógnita al campo reflejado y al difractado, y discretizando las ecuaciones integrales, se obtiene

$$\mathbf{v} = \mathbf{G}\phi, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\phi, \quad (5.18)$$

donde  $\mathbf{T} = 1/2 \mathbf{I}$ , ya que la frontera es plana. Resulta entonces

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{G}\mathbf{t} \quad (5.19)$$

o

$$\mathbf{K}^{-1} = 2\mathbf{G}, \quad (5.20)$$

donde ahora  $\mathbf{K}$  es una matriz de rigidez cuya estructura se gráfica en la figura 5.12. Un caso de comparación para los renglones centrales de las dos matrices ( $\mathbf{K}$  estimada con

FFT versus  $G$  calculada a partir de la función de Green) se ilustra en la figura 5.13. La función de Green para el desplazamiento inducido por una onda  $SH$  en un medio elástico homogéneo y isótropo es

$$G = \frac{-1}{4\rho\beta^2} H_0^{(2)} \left( \frac{\omega r}{\beta} \right) = \frac{-1}{4\rho\beta^2} \left[ Y_0 \left( \frac{\omega r}{\beta} \right) + iJ_0 \left( \frac{\omega r}{\beta} \right) \right] \quad (5.21)$$

y los esfuerzos correspondientes, escalados por  $2\rho\beta^2/r$ , son

$$\frac{2\rho\beta^2}{r} \rho\beta^2 \frac{\partial G}{\partial r} = \frac{2\rho\beta^2}{r} \frac{1}{4\beta} \left[ Y_1 \left( \frac{\omega r}{\beta} \right) + iJ_1 \left( \frac{\omega r}{\beta} \right) \right] \quad (5.22)$$

$$= \frac{\rho\beta^2\omega}{2r} Y_1 \left( \frac{\omega r}{\beta} \right) + iK_I. \quad (5.23)$$

La parte imaginaria del segundo término de la ecuación 5.22 reproduce explícitamente  $K_I$  (Ecn. 5.14). Con las gráficas de la figura 5.14 (a y b) se ilustra el significado de la parte real. La función de Green es definida para un medio continuo e infinito, por consiguiente también la  $Y_1$  se refiere a ese medio. En realidad se está operando sobre un dominio discreto,  $K_R$  se puede ver como la realización discreta de  $Y_1$ . Mientras que los valores de  $K_I$  son insensibles a variaciones de  $\Delta x$ , los valores absolutos de  $K_R$  aumentan disminuyendo  $\Delta x$ . En condiciones límites, cuando  $\Delta x$  tiende a cero, la rigidez tiende a infinito. Para dar un desplazamiento unitario a un segmento de longitud ideal nula y mantener fijos los demás, se necesita un esfuerzo infinito.

## 5.7 Un ejemplo de aplicación

Para evaluar la eficiencia de la condición de frontera ilustrada en este capítulo, se propuso un pequeño ejemplo de aplicación. Se consideró un medio infinito elástico homogéneo e isótropo, en el que está localizada una fuente lineal de ondas  $SH$  rodeada por una frontera cilíndrica no coaxial (Fig. 5.15). Para este tipo de excitación, el campo de desplazamiento y las tracciones en la frontera se expresan de forma analítica cerrada

$$v = H_0^{(2)} \left( \frac{\omega}{\beta} R \right), \quad (5.24)$$

$$t_y = \mu \frac{\omega}{\beta} H_1^{(1)} \left( \frac{\omega}{\beta} R \right) \left( \frac{a - b \cos \theta}{R} \right), \quad (5.25)$$

donde  $R$  es la distancia entre fuente y estación,  $a$  es el radio de la frontera circular,  $b$  es la distancia de la fuente desde el origen,  $\theta$  es el ángulo entre un vector del origen a la estación y el eje  $x$ . Las tracciones numéricas se calcularon proyectando una porción de la circunferencia sobre la tangente por el punto de observación, el segmento de integración es

aproximadamente de un par de longitudes de onda. Bajo estas hipótesis y considerando sólo ondas homogéneas, la ecuación 5.16 nos lleva a

$$t_y \approx i\mu \frac{\omega}{2\beta} \int_{-A}^A \frac{J_1\left(\frac{\omega}{\beta} a \tan \alpha\right)}{a \tan \alpha} v(\alpha) \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha. \quad (5.26)$$

En esta ecuación,  $2A$  es la longitud del segmento de integración, que depende de la frecuencia en estudio;  $v$  es el campo de desplazamiento analítico calculado con la ecuación 5.24 donde  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta - \alpha)}$ . En la figura 5.16 se presenta la comparación entre solución exacta y numérica cuando  $\beta/\alpha$  es unitario,  $b/a = 0.8$  y la estación se encuentra a  $45^\circ$  del eje  $x$  (medidos en sentido antihorario). A pesar de las numerosas simplificaciones adoptadas, el acuerdo entre las dos soluciones es excelente. En baja frecuencia la proyección de un arco de circunferencia sobre una recta da una aproximación muy burda, sin embargo el error no es muy grande. Para frecuencias medianas y grandes, el error es mucho menor.

## 5.8 Conclusiones

Se ha presentado una nueva condición para simular fronteras transparentes. Para ondas planas homogéneas en el dominio espacio-frecuencia, se ha llegado a una forma analítica cerrada, mientras que para ondas inhomogéneas la solución de las ecuaciones tiene que ser numérica. La FFT resulta ser una poderosa herramienta para la implantación de las expresiones ilustradas.

Para superar la fase de estudio preliminar procede una validación más rigurosa y la extensión al dominio espacio-tiempo, así como al caso  $P$ - $SV$ . Antes que todo se necesita elaborar un criterio para la selección de longitud y paso de discretización óptimos. Se precisa entender las relaciones entre la rigidez y la función de Green, con las implicaciones debidas a la discretización de la frontera. Con base en estos resultados se podrán estudiar sistemas sencillos, similares al ilustrado en la sección anterior, o bien combinar la formulación actual con métodos numéricos en frecuencia (FEM o IBEM). Los primeros desarrollos matemáticos para la extensión de las condiciones de frontera en el dominio del tiempo condujeron a formulas muy similares a aquellas presentadas por Peng y Toksoz (1994). Esta línea de investigación permitirá la combinación de las nuevas condiciones de frontera con los métodos numéricos en el tiempo (diferencias finitas en particular). Lo que procede para desarrollar el álgebra correspondiente al caso  $P$ - $SV$  es tomar la matriz de rigidez para el caso vectorial (Kausel, 1992) y seguir un procedimiento similar al utilizado para ondas  $SH$ .

Se hace notar una interesante conexión con los problemas de mecánica de la fractura. En esta disciplina se acostumbra imponer una dislocación y calcular el campo de esfuerzo correspondiente por medio de ecuaciones integrales bastante complicadas. En la formulación aquí presentada se ilustra una relación lineal entre esfuerzos y desplazamientos, resolviendo naturalmente el problema.

## 5.9 Figuras

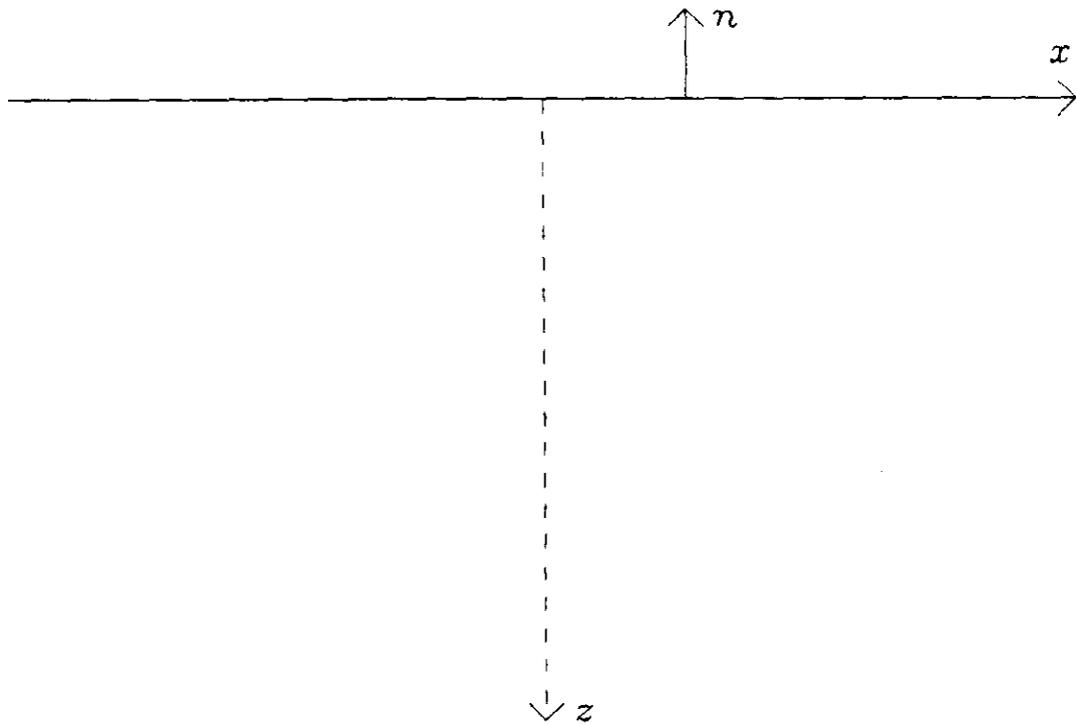


Figura 5.1 Sistema de referencia asociado a una frontera plana. La frontera está colocada en  $z=0$  y la normal a ella asociada tiene sentido opuesto al sentido del eje  $z$ .

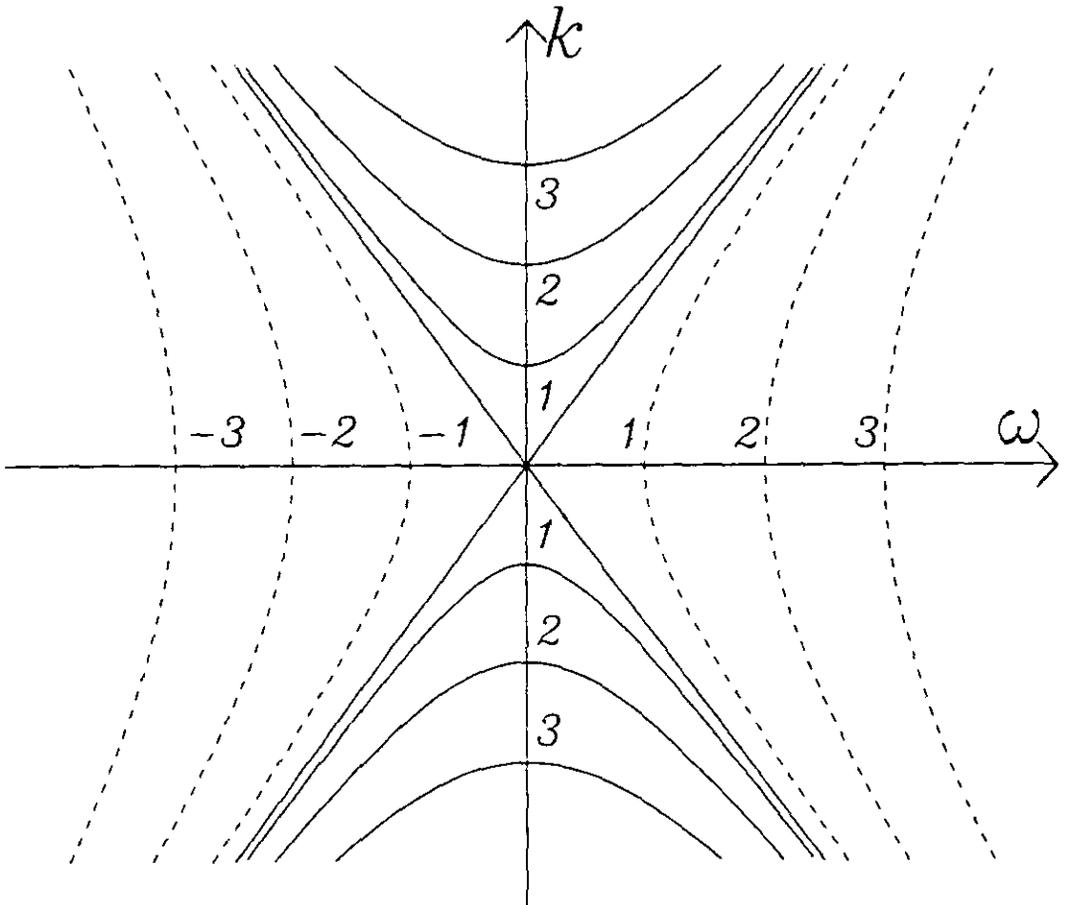


Figura 5.2 La superficie  $K(k; \omega)$  se puede representar en el plano  $k - \omega$  por medio de curvas de nivel. La parte real de  $K$  se dibuja con línea continua, mientras que la línea punteada corresponde a la parte imaginaria de la rigidez.  $K_R$  y  $K_I$  están definidos en dominios distintos que se intersectan a lo largo de las rectas  $k = \pm \omega / \beta$ .

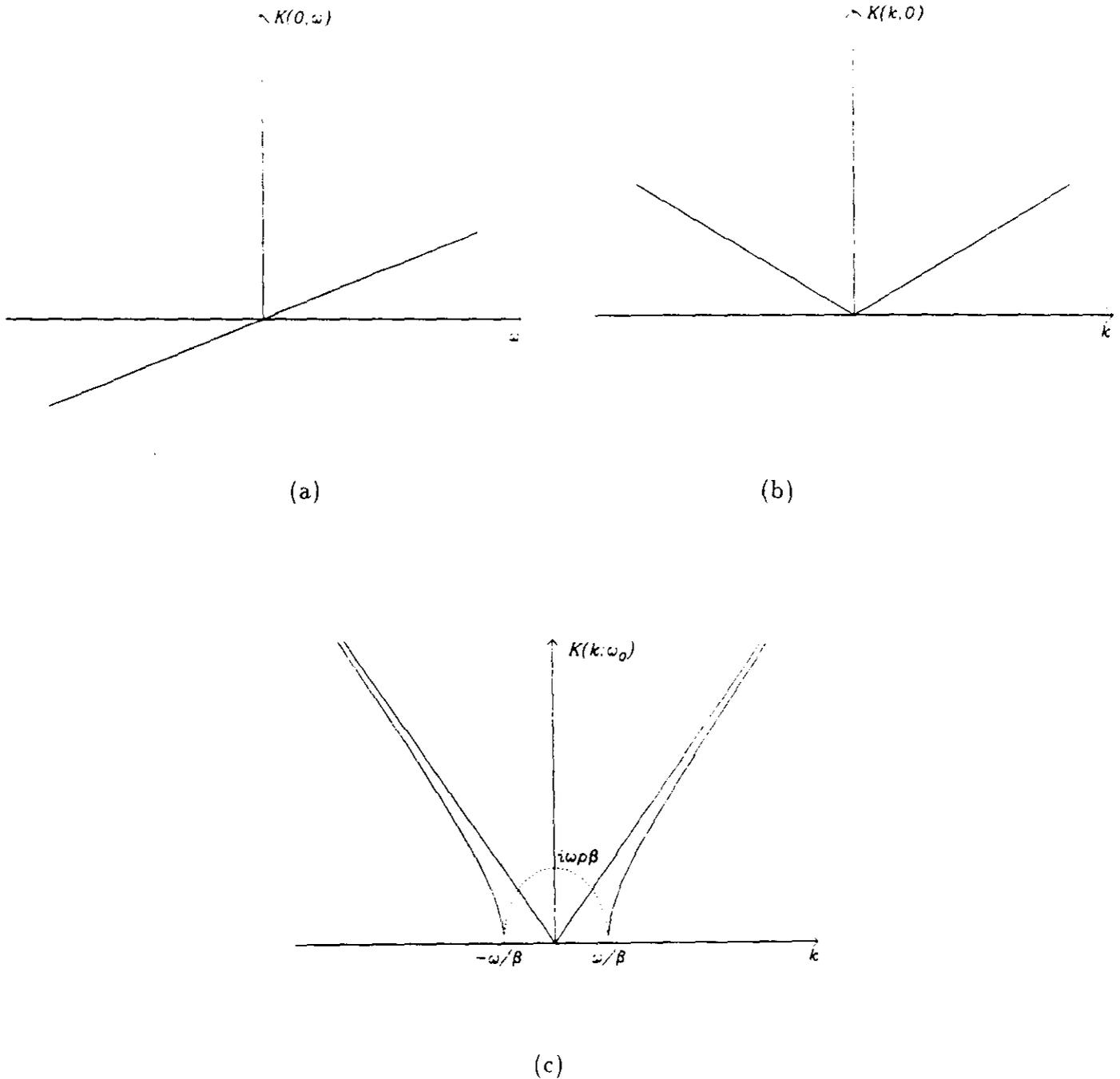


Figura 5.3 Cortes de la figura 5.2 para número de onda nulo (a), para frecuencia nula (b) y para frecuencia fija (c). (a) La rigidez es imaginaria y aumenta linealmente con la frecuencia definiendo la recta  $K = i\omega\rho\beta$ . (b) En el caso límite estático la rigidez es real y crece con el módulo del número de onda ( $K = \mu|k|$ ). (c) De acuerdo con la notación de figura 5.2, línea punteada y continua representan parte imaginaria y real respectivamente. Las asíntotas de las ramas hiperbólicas también se dibujan con línea continua.

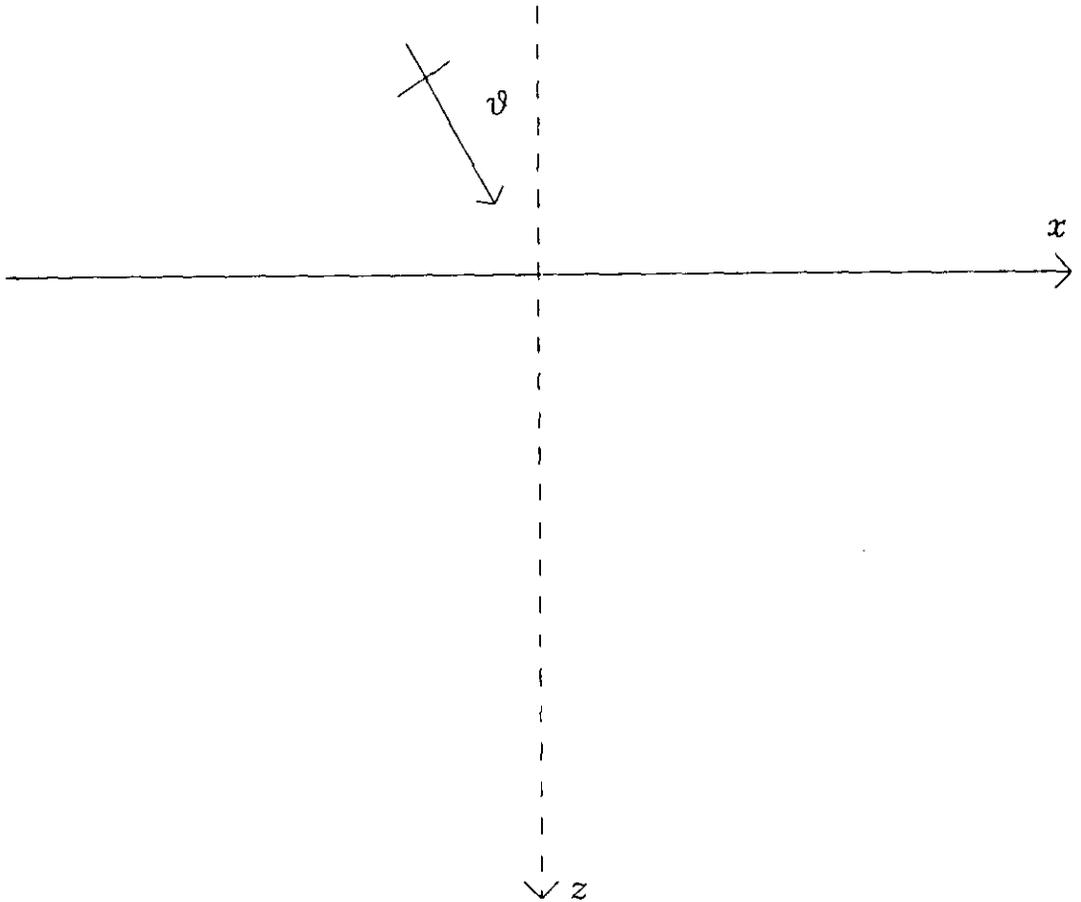


Figura 5.4 Una onda plana homogénea SH, representada por su rayo, incide con ángulo  $\theta$  sobre una frontera plana en  $z = 0$ .

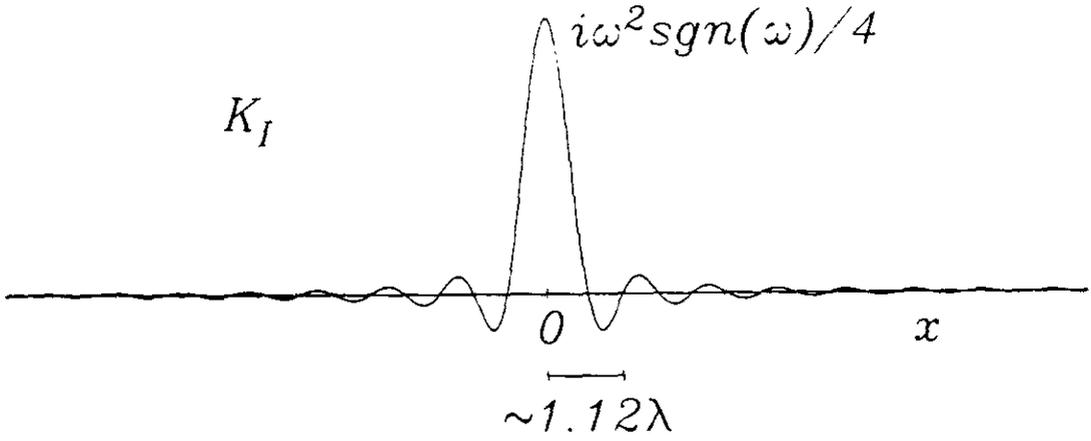


Figura 5.5 Croquis de la parte imaginaria de la rigidez.  $K_I$  es la función de Bessel  $J_1$  escalada por un factor dependiente de la frecuencia. La función decrece rápidamente y oscila alrededor del cero, los valores mayores se encuentran en un rango de una longitud de onda (para  $x > 0$ ).

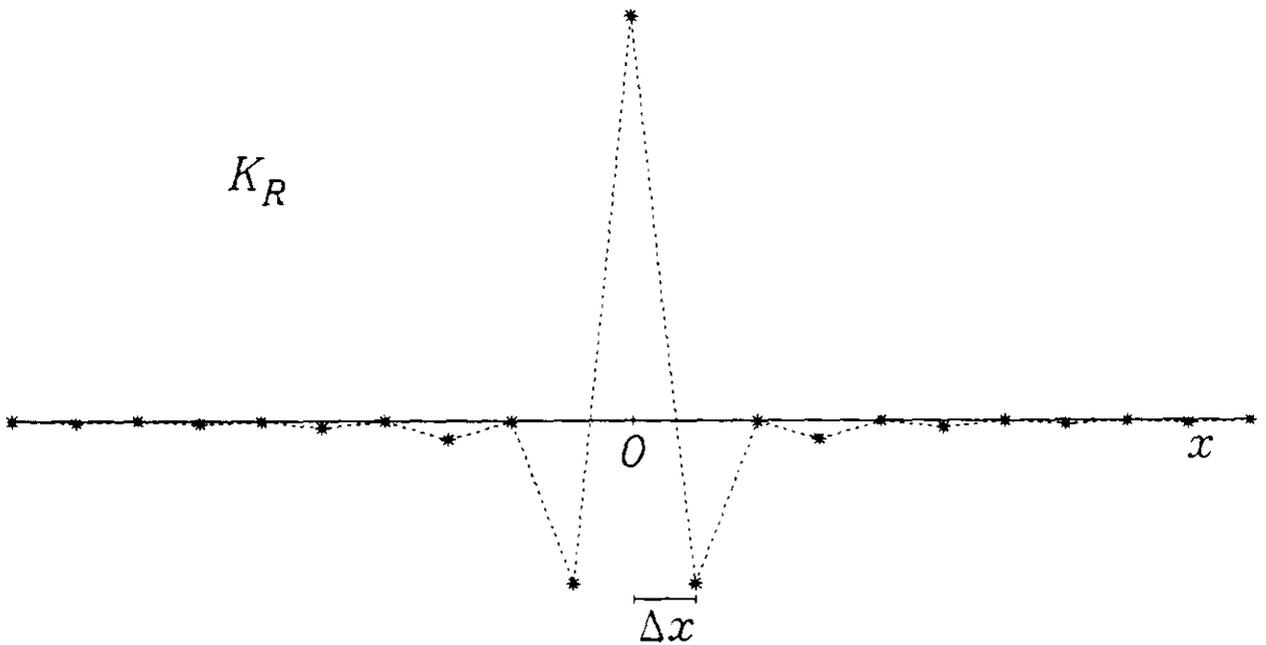


Figura 5.6 Croquis de la parte real de la rigidez. La función es discreta y su cálculo es posible sólo debido a la discretización de la frontera. Se marcan con asteriscos los puntos en los cuales está definida la función, la línea punteada evidencia la secuencia.

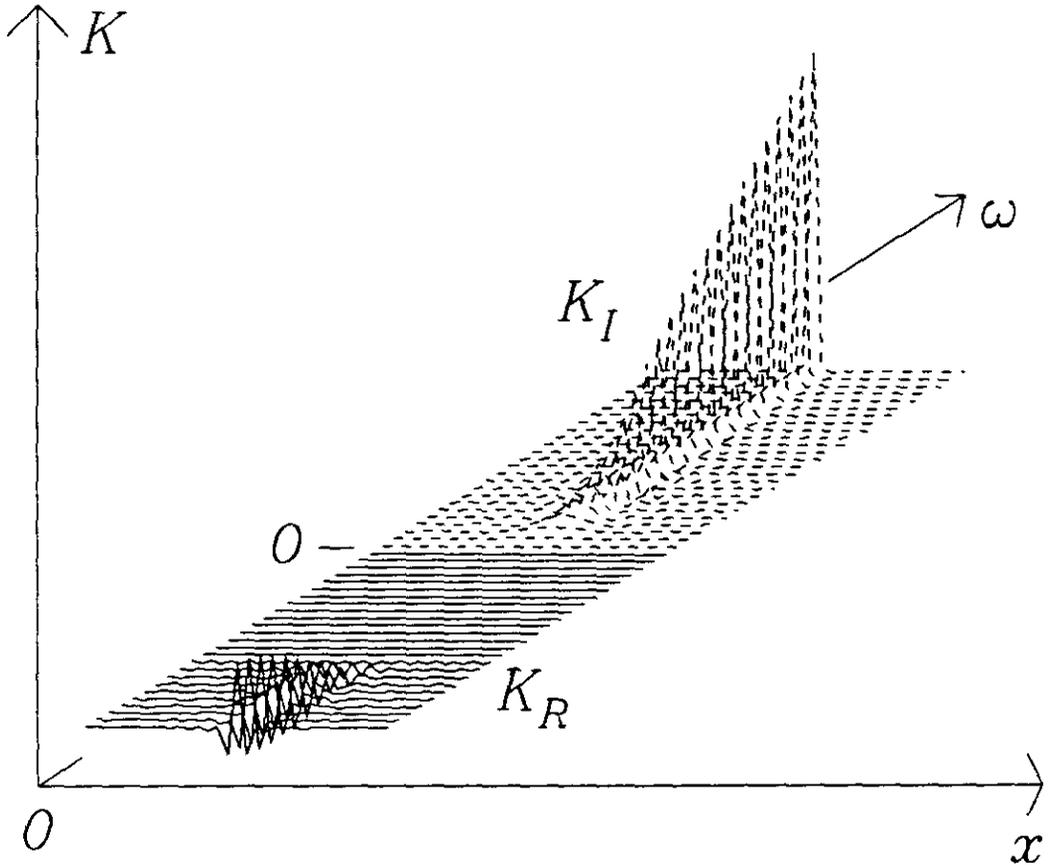


Figura 5.7 Parte real e imaginaria de la rigidez en el dominio espacio-frecuencia. Mientras que el máximo de la parte real decrece, el máximo de la parte imaginaria crece con la frecuencia.

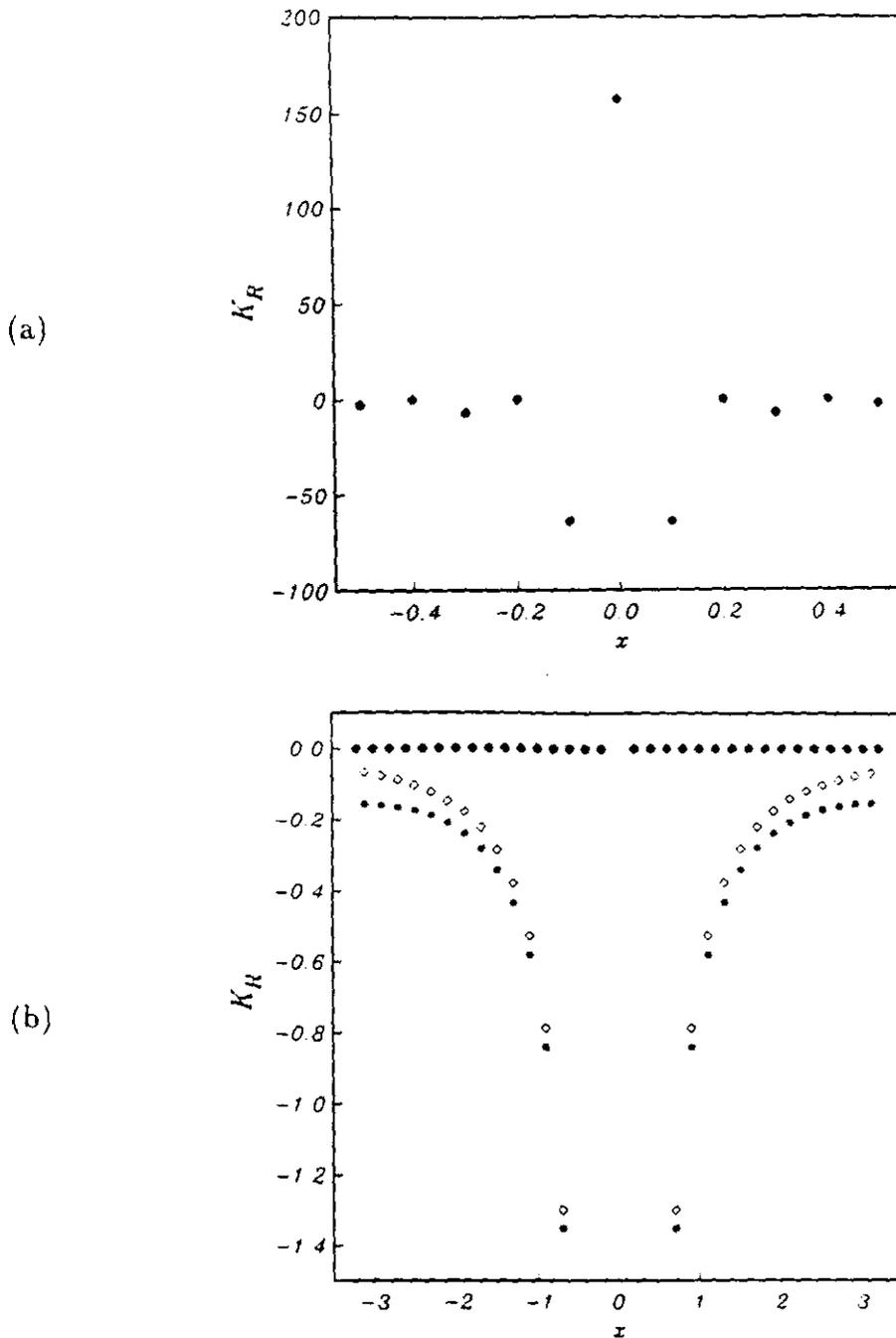


Figura 5.8 Se compara la rigidez estática exacta (rombos) con  $K$  calculada numéricamente (asteriscos). Debido a la diferencia entre los valores de la parte central y extrema, se presenta la comparación por diferentes rangos espaciales (a y b, respectivamente). El ejemplo se calculó sobre una longitud en  $x$  de 6.4 unidades, con paso de discretización 0.1. En la parte central el acuerdo es excelente. La solución degenera hacia los bordes, pero el error no es significativo (verse la diferencia de escala en los valores de  $K_R$ ).

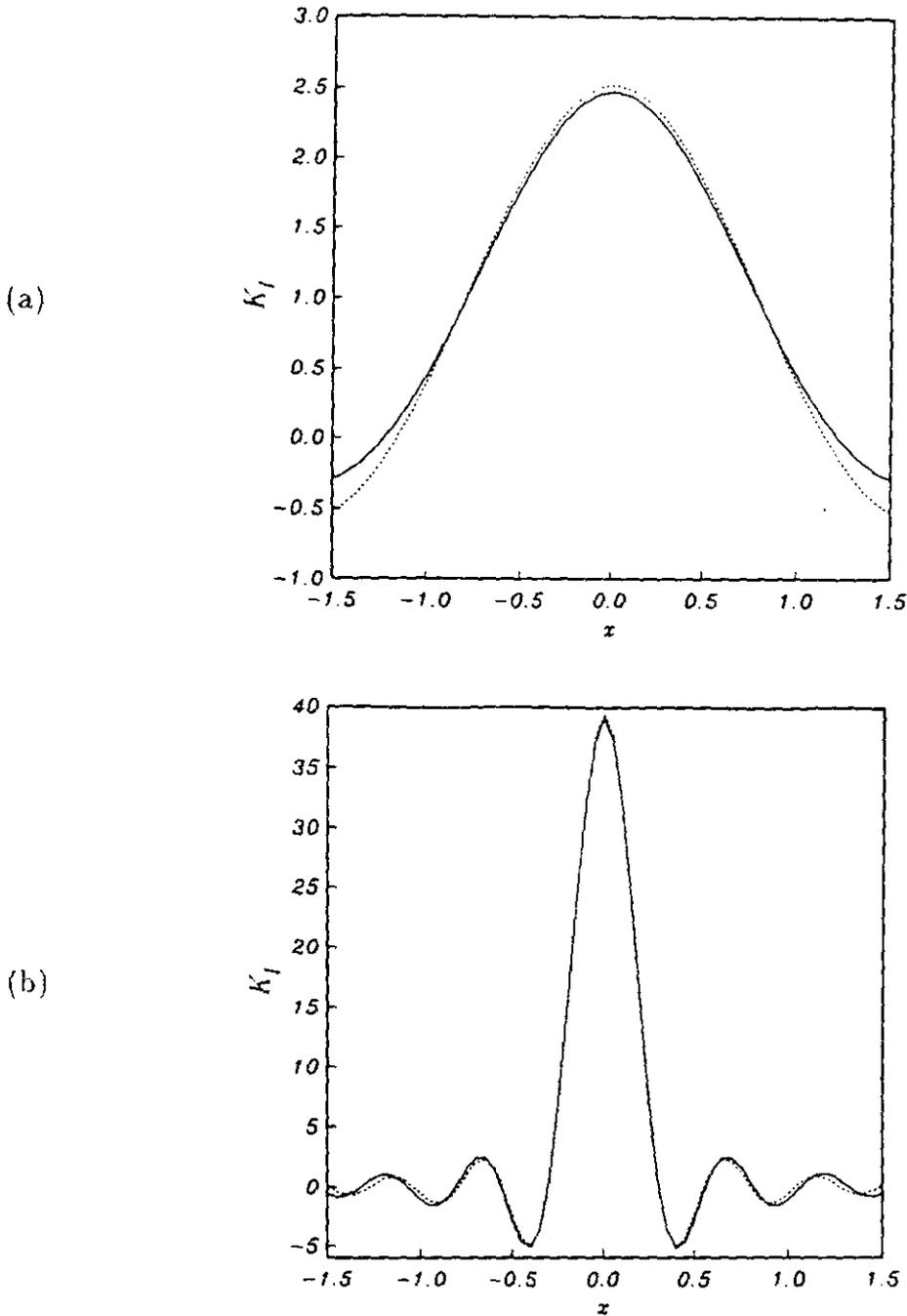


Figura 5.9 Se comparan las partes imaginarias de la rigidez calculada a partir de su forma analítica (línea continua) y con FFT (línea punteada). El ejemplo presentado se calculó sobre una longitud total en  $x$  de 3.2 unidades, con un paso de discretización de 0.05 y por una frecuencia de 0.5 Hz (a) y 2 Hz (b). La transformada rápida de Fourier resulta ser una poderosa herramienta para la determinación de  $K$ .

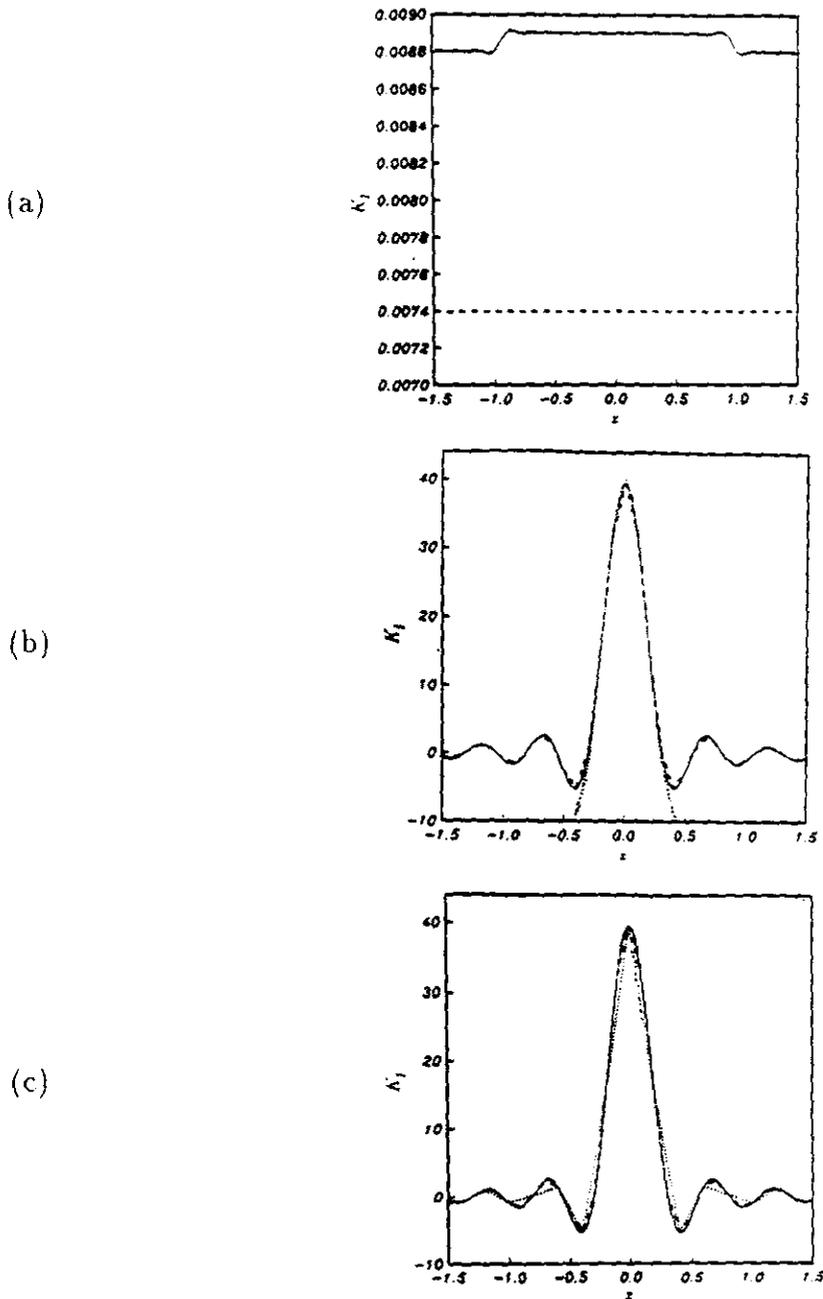


Figura 5.10 Estudio paramétrico preliminar para el cálculo de  $K_I$  con la transformada rápida de Fourier. En todas las gráficas, correspondientes a los casos en seguida enlistados, la solución analítica se representa con línea continua. (a)  $2L = 25.6$ ,  $\Delta x = 0.1$ ,  $f = 0.003$  Hz. No es posible reproducir las oscilaciones de  $J_1$  si  $2L$  es menor de una longitud de onda. (b)  $2L = 0.8$  (línea punteada),  $2L = 25.6$  (línea de raya),  $\Delta x = 0.1$ ,  $f = 2$  Hz. Aun con un número muy reducido de elementos se puede alcanzar una excelente aproximación de la función de Bessel en su parte central. (c)  $2L = 12.8$ ,  $\Delta x = 0.05$  (encimado sobre la solución exacta),  $\Delta x = 0.1$  (línea de raya),  $\Delta x = 0.2$  (línea punteada),  $f = 2$  Hz. Al variar del paso de discretización se pierde o se gana definición en  $x$ .

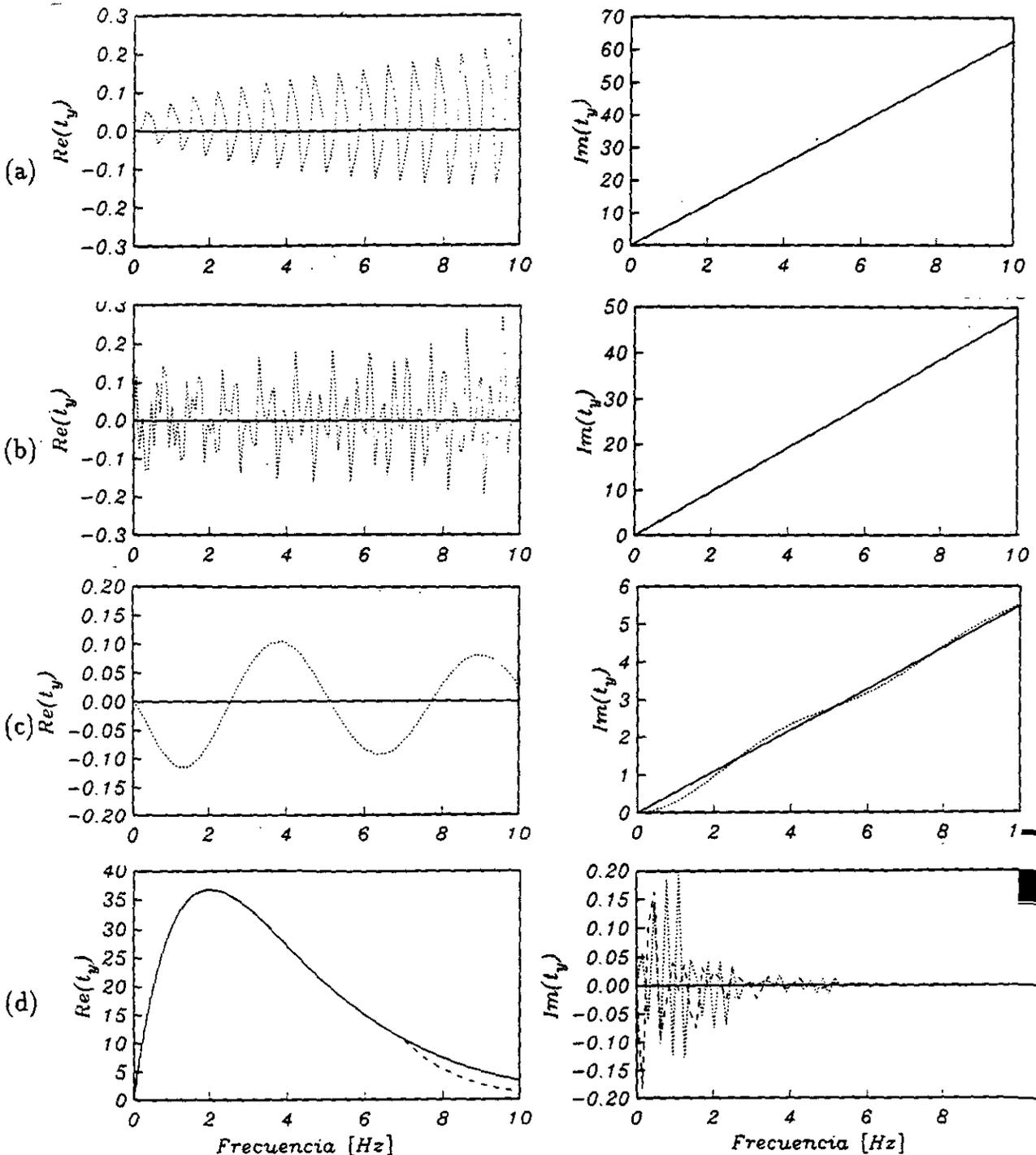


Figura 5.11 — Comparación entre tracciones analíticas (línea continua) y numéricas (línea punteada). Se ilustra la parte real ( $Re(t_y)$ ) así como la imaginaria ( $Im(t_y)$ ). Las tracciones son calculadas en  $x = 0$  por un número de onda fijo y al variar de la frecuencia. En seguida se detallan los parámetros de cada ejemplo. (a)  $\theta = 0^\circ$ ,  $2L = 3.2$ ,  $\Delta x = 0.05$ . (b)  $\theta = 40^\circ$ ,  $2L = 6.4$ ,  $\Delta x = 0.05$ . (c)  $\theta = 85^\circ$ ,  $2L = 102.4$ ,  $\Delta x = 0.05$ . (d)  $2L = 0.768$  y  $\Delta x = 0.006$  (línea punteada);  $2L = 1.152$  y  $\Delta x = 0.009$  (línea de rayas);  $k\beta/\omega = 8$ . La línea punteada se encima perfectamente a la línea continua en  $Re(t_y)$ , mientras que el rango de validez para el ejemplo graficado con línea de raya es desde 0 hasta 7 Hz.

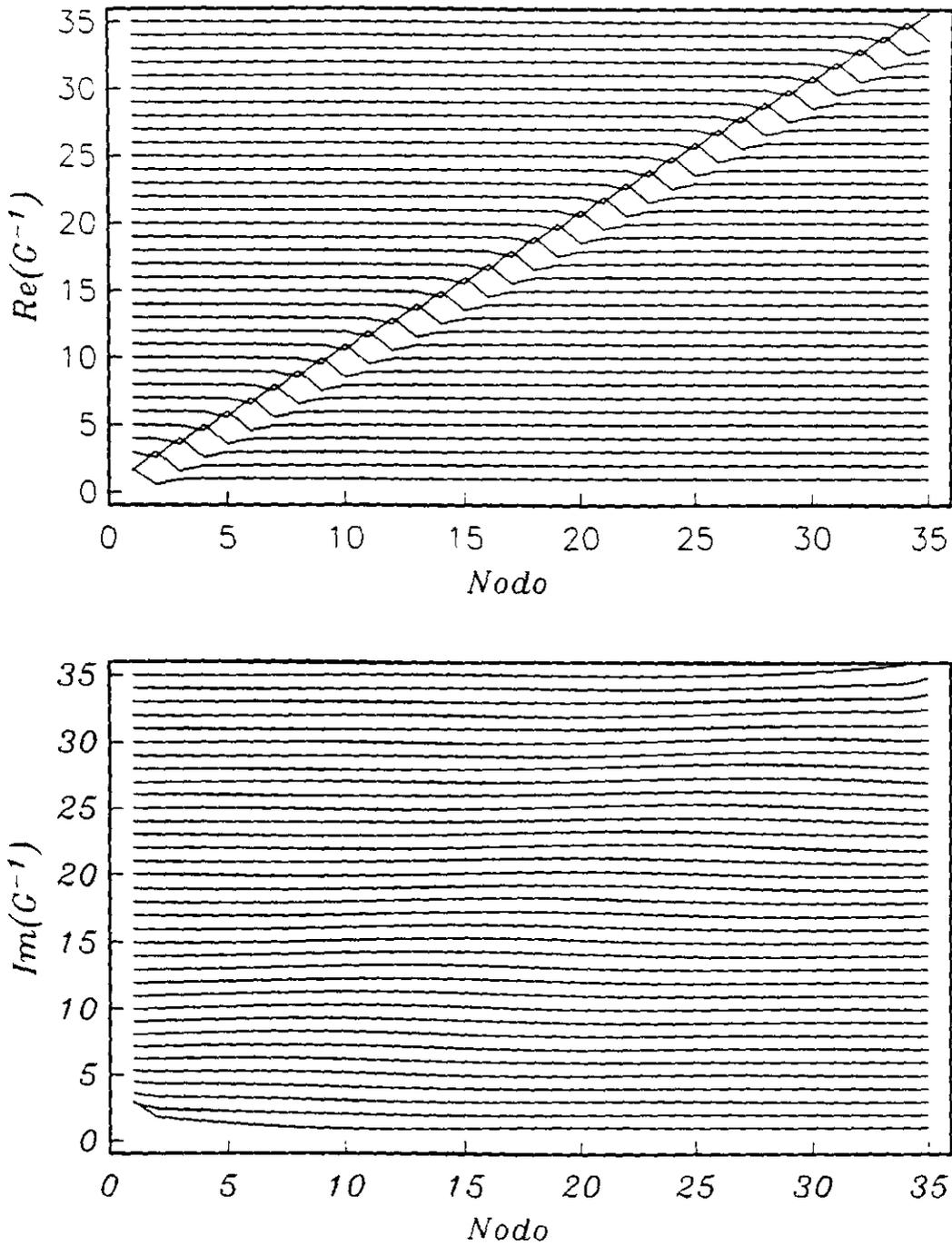


Figura 5.12 Estructura de la matriz de rigidez correspondiente a una frontera plana.  $Re(G^{-1})$  es su parte real, mientras que  $Im(G^{-1})$  es la imaginaria. En ordenada se indica el número de renglón, en abscisa el número de nodo. Cada nodo es el punto medio de un segmento de discretización. El renglón  $i$  da la distribución de esfuerzos cuando el elemento  $i$  sufre un desplazamiento unitario. La parte imaginaria enseña un pequeño efecto de borde. La matriz se calculó discretizando en 35 segmentos una longitud total de 2 unidades y considerando una frecuencia de 1 Hz.

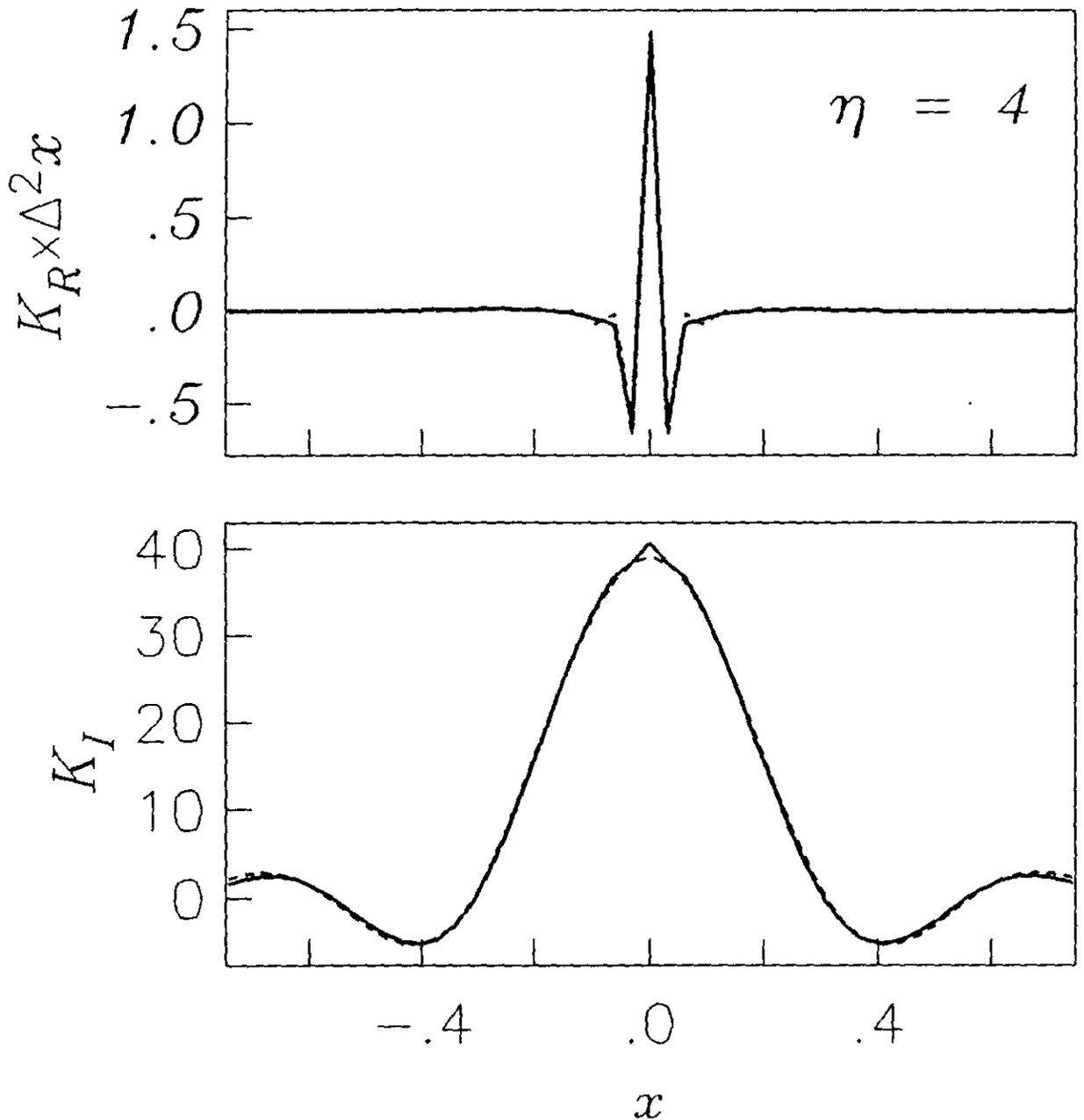


Figura 5.13 La rigidez calculada con el método de elementos de frontera (línea punteada) enseña un excelente acuerdo con  $K$  calculado por medio de la FFT (línea continua). El ejemplo aquí graficado se calculó por una frecuencia de 2 Hz.

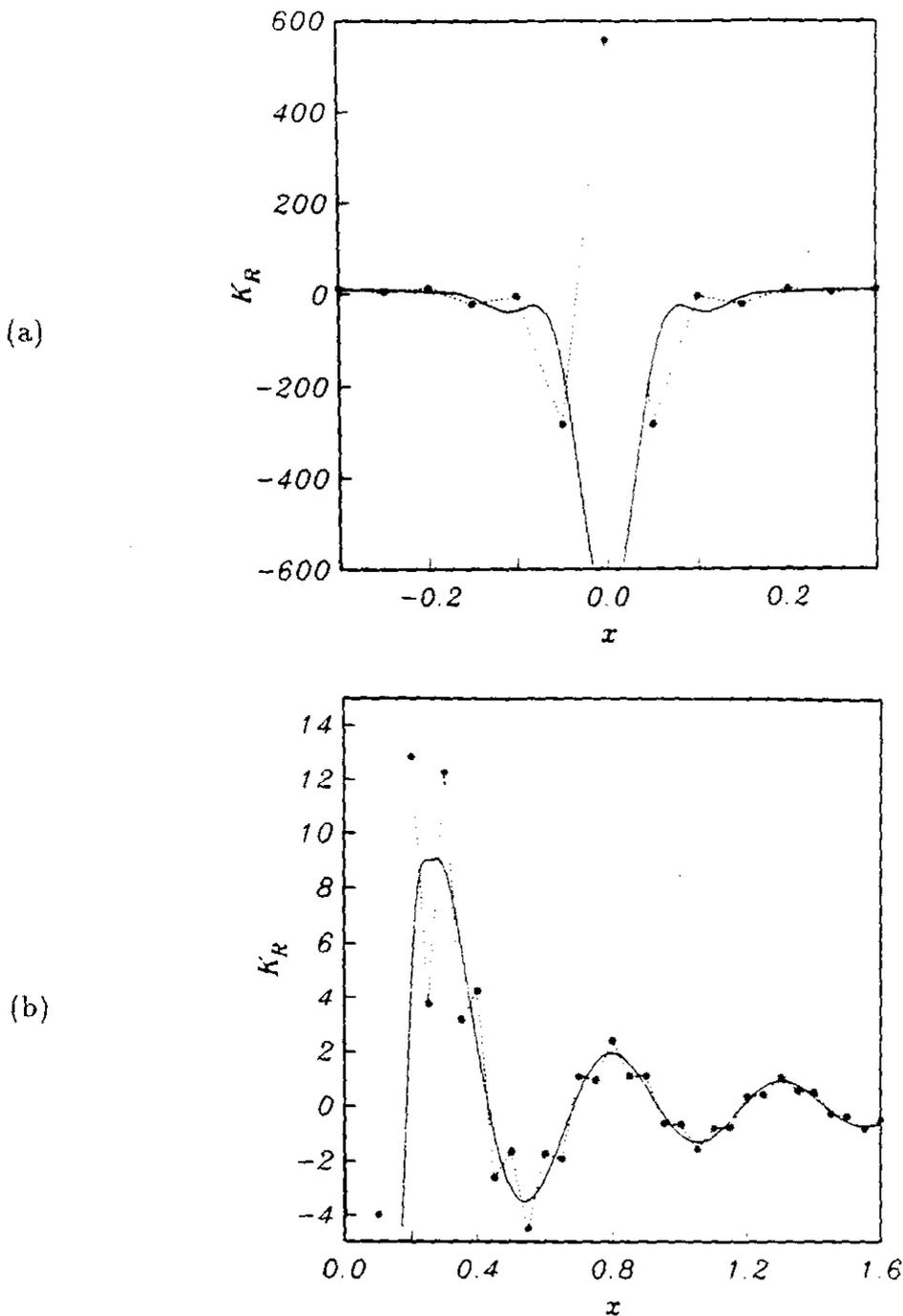


Figura 5.14 Comparación entre  $Y_1$  (línea continua) y  $K_R$  (línea punteada).  $K_R$  oscila alrededor de  $Y_1$ . Debido a la diferencia de escala en los valores de  $J_1$  se seleccionaron dos intervalos espaciales  $-0.3 \leq x \leq 0.3$  (a) y  $0 \leq x \leq 1.6$  (b). La línea continua representa  $Y_1$ , mientras que  $K_R$  se dibuja con el mismo estilo adoptado en la figura 5.6. La oscilación de  $Y_1$  en  $x = \pm 0.1$  se debe a imprecisión numérica y es ficticia, un paso de discretización más pequeño también definiría más claramente la cúspide en  $x = \pm 0.3$ .

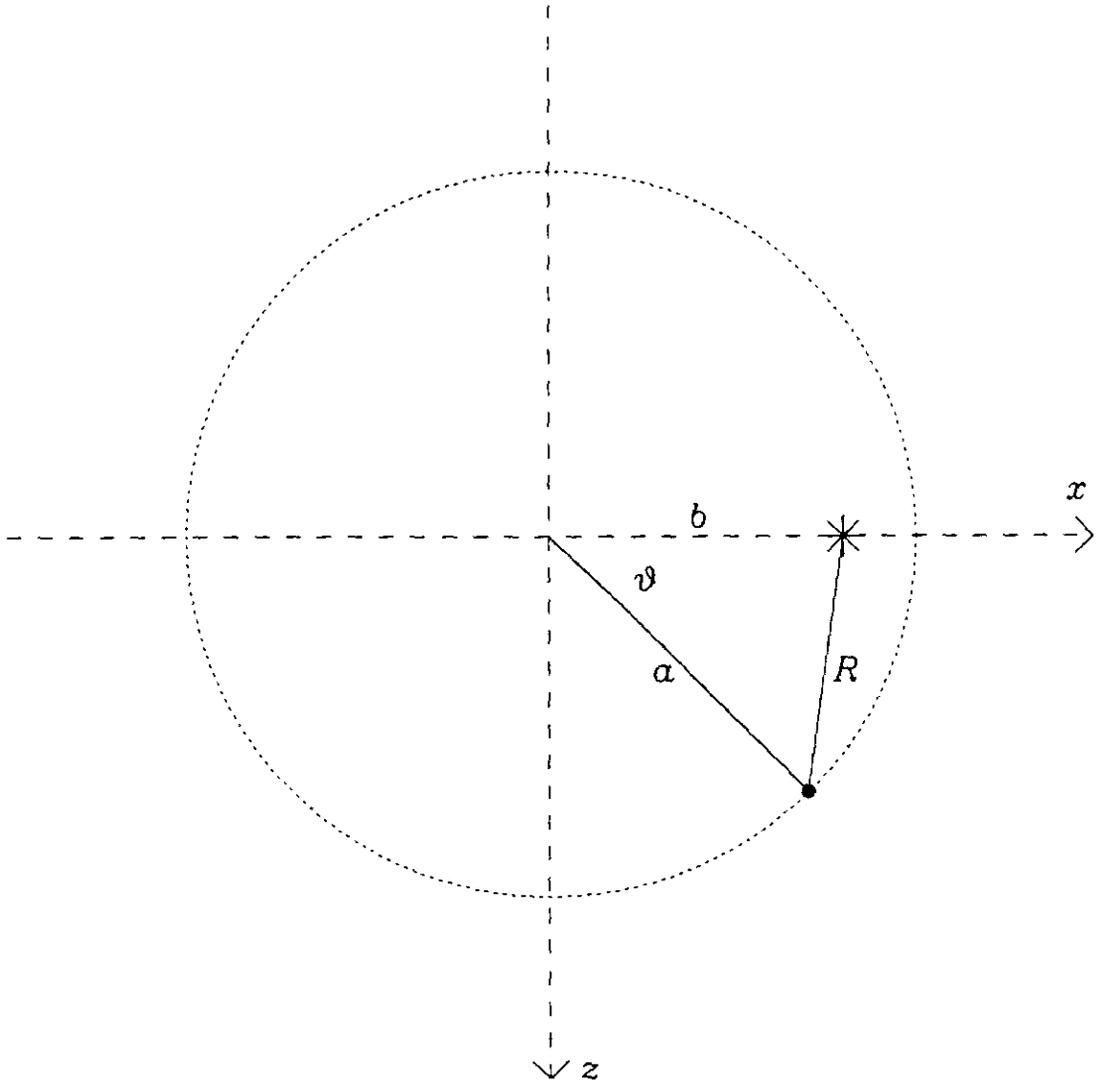


Figura 5.15 Modelo utilizado para validar la condición de frontera absorbente. Una frontera transparente cilíndrica circunscribe una fuente lineal. En la figura se representa el sistema de referencia cartesiano  $(x, z)$ , así como el sistema de coordenadas cilíndricas  $(a, b, R, \theta)$ . La fuente está indicada por un asterisco, mientras que la posición de la estación está marcada por un punto. El eje  $x$  pasa por el centro de la frontera circular y por la fuente.

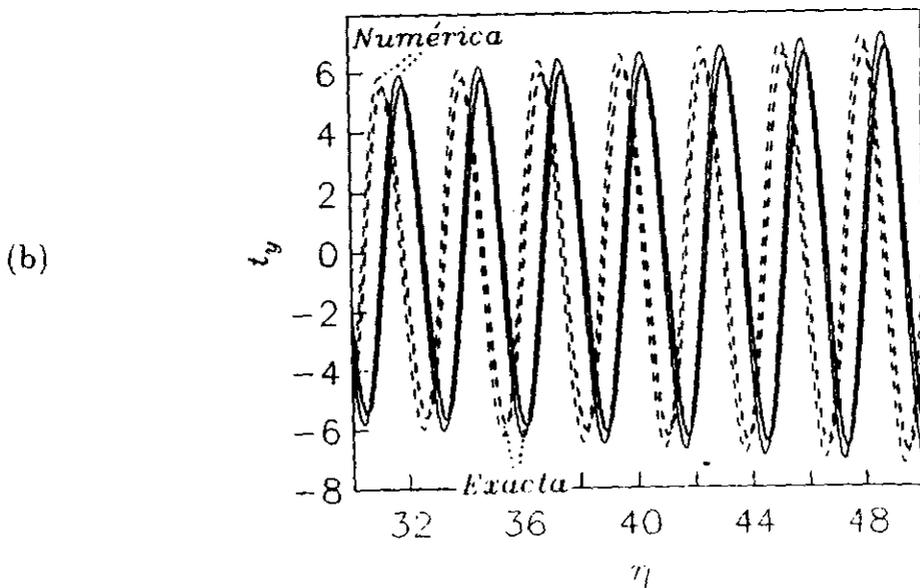
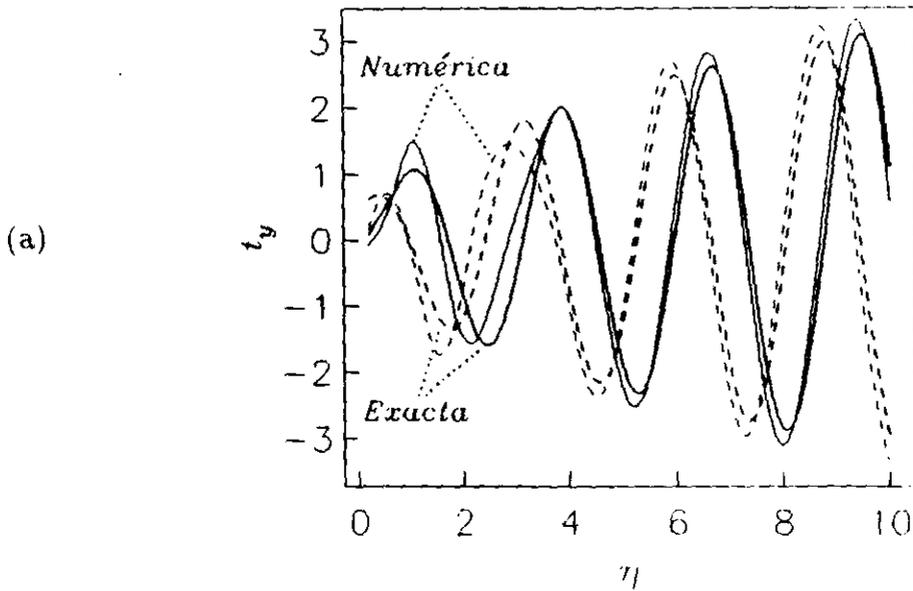


Figura 5.16 Se dibujan las tracciones exactas (trazas oscuras) versus las numéricas (trazas ligeras). La línea continua representa el componente real, la punteada corresponde a la imaginaria. Se presentan dos diferentes rangos de frecuencia normalizada  $\eta$  ( $\eta = 2af/\beta$ , donde  $a$  es el radio de la frontera circular). (a)  $0 \leq \eta \leq 10$ . (b)  $30 \leq \eta \leq 50$ .

# Capítulo 6

## Conclusiones

Se presentaron ejemplos de modelado en medios lineales homogéneos e isótropos. En particular se analizaron y resolvieron sistemas de capas excitados por ondas planas o por fuentes lineales. Los sintéticos obtenidos son de óptima calidad. Una exitosa simulación de problemas en sismología se podría obtener, por un lado, mejorando el algoritmo de escritura y solución del sistema lineal implícito en el IBEM y, por otro lado, implantando fronteras absorbentes que minimicen el tamaño del modelo. Por lo que concierne esta última línea de investigación se ha presentado una novedosa condición de frontera transparente, su base teórica y algunos resultados preliminares. En el dominio espacio-frecuencia la solución es analítica para ondas  $SH$  homogéneas, mientras que las inhomogéneas requieren tratamiento numérico y la FFT resulta ser un poderoso instrumento de cálculo. Lo que procede es una validación más rigurosa, para optimizar los parámetros de cálculo, y la extensión al caso vectorial y al dominio del tiempo. Paralelamente habrá que acoplar las condiciones de frontera a algún método numérico para verificar su eficacia en casos prácticos. Las condiciones de frontera presentadas muestran interesantes analogías con elementos de mecánica de la fractura.

# Referencias

- Abramowitz, M. y I. A. Stegun (1970). *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover Publications, inc.
- Achenbach, J. D. (1975). *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers.
- Aki, K. y K. L. Larner (1970). Surface motion of a layered medium having an irregular interface, due to incident plane *SH* waves. *J. Geophys. Res.* **75**, 933-954.
- Aki, K. y P. G. Richards (1980). *Quantitative seismology, theory and methods*. San Francisco: W. H. Freeman.
- Barcena-Vega, A. (1999). *Influencia de la interacción dinámica suelo-estructura en la confiabilidad de estructuras expuestas a sismos*. Ph. D. thesis, UNAM, México D.F. por presentarse
- Boore, D. M. (1972). Finite difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials. Volume 11 of *Methods in computational physics*, pp. 1-37. New York: Academic Press.
- Bouchon, M. (1981). A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media. *Bull. Seis. Soc. Am.* **71**, 959-971.
- Bouchon, M., M. Campillo, y S. Gaffet (1989). A boundary integral equation-discrete wavenumber representation method to study wave propagation in multilayered media having irregular interfaces. *Geophysics* **54**, 1134-1140.
- Chapman, C. H. y J. A. Orcutt (1985). The computation of body wave synthetic seismograms in laterally homogeneous media. *Reviews of Geophysics* **23**(2), 105-163.
- Chávez-Perez, S. (1993). Modelado sísmico de la Cuenca de México. *Geofísica Internacional* **32**, 111-130.
- Chen, J.-C., J. Lysmer, y H. B. Seed (1981). Analysis of local variations in free field seismic ground motion. Technical report, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley. Report UCB/EERC 81-03.
- Chen, X.-F. (1990). Seismograms synthesis for multilayered media with irregular interfaces by global generalized reflection/transmission matrices method - I. Theory of 2-D *SH* case. *Bull. Seis. Soc. Am.* **80**, 1696-1724.
- Chen, X.-F. (1993). A systematic and efficient method of computing normal modes for multilayered half-space. *Geophys. J. Int.* **115**, 391-409.

- Clayton, R. y B. Engquist (1977). Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. *Bull. Seis. Soc. Am.* **67**, 1529–1540.
- Eringen, A. C. y E. S. Suhubi (1975). *Elastodynamics*. New York: Academic Press.
- Faccioli, E., F. Maggio, R. Paolucci, y A. Quarteroni (1997). 2D and 3D elastic wave propagation by a pseudo-spectral domain decomposition method. *J. Seismology* **1**, 237–251.
- Fryer y Frazer (1984). Seismic waves in stratified anisotropic media. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* **78**, 691–710.
- Garvin, W. W. (1956). Exact transient solution of the buried line source problem. *Proc. R. Soc. London Ser. A* **234**, 528–541.
- Givoli, D. (1991). Non-reflecting boundary conditions: review article. *J. Comput. Phys.* **94**, 1–29.
- Haskell, N. A. (1953). The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bull. Seis. Soc. Am.* **43**, 17–34.
- Higdon, R. L. (1990). Radiation boundary conditions for elastic wave propagation. *SIAM J. Numer. Anal.* **27**, 831–870.
- Higdon, R. L. (1994). Radiation boundary conditions for dispersive waves. *SIAM J. Numer. Anal.* **31**, 64–100.
- Hisada, Y. (1994). An efficient method for computing Green's functions for a layered half-space with sources and receivers at close depths. *Bull. Seis. Soc. Am.* **84**, 1456–1472.
- Hisada, Y. (1995). An efficient method for computing Green's functions for a layered half-space with sources and receivers at close depths (Part 2). *Bull. Seis. Soc. Am.* **85**, 1080–1093.
- Kausel, E. (1988). Local transmitting boundaries. *J. Eng. Mech. - ASCE* **114**, 1011–1027.
- Kausel, E. (1992). Physical interpretation and stability of paraxial boundary conditions. *Bull. Seis. Soc. Am.* **82**, 898–913.
- Kausel, E. y J. Tassoulas (1981). Transmitting boundaries: a closed-form comparison. *Bull. Seis. Soc. Am.* **71**, 143–159.
- Keller, J. B. y D. Givoli (1989). Exact non-reflecting boundary conditions. *J. Comput. Phys.* **82**, 172–192.
- Kennett, B. (1983). *Seismic wave propagation in stratified media*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.
- Komatitsch, D. y J. P. Vilotte (1998). The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2-D and 3-D geological structures. *Bull. Seis. Soc. Am.* **88**, 368–392.

- Komatitsch, D., J. P. Vilotte, R. Vai, J. M. Castillo-Covarrubias, y F. J. Sánchez-Sesma (1999). The Spectral Element method for elastic wave equations: application to 2D and 3D seismic problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.* In press.
- Love, A. E. H. (1944). *A treatise on the mathematical theory of elasticity* (fourth ed.). New York: Dover Publications.
- Luco, J. E. y R. J. Apsel (1983). On the Green's functions for a layered half-space, part 1. *Bull. Seis. Soc. Am.* **73**, 909-929.
- Lysmer, J. y R. L. Kuhlemeyer (1969). Finite dynamic model for infinite media. *J. Eng. Mech. Div. - ASCE* **95**, 859-877.
- Lysmer, J. y G. Waas (1972). Shear waves in plane infinite structures. *J. Eng. Mech. Div. - ASCE* **98**, 85-105.
- Mallick, S. y Frazer (1988). Rapid computation of multioffset vertical seismic profile synthetic seismograms for layered media. *Geophysics* **53**, 479-491.
- Manolis, G. D. y D. E. Beskos (1988). *Boundary Element Methods in Elastodynamics*. London: Unwin Hyman Ltd.
- Moczo, P., E. Bystrický, J. Kristek, J. M. Carcione, y M. Bouchon (1997). Hybrid modeling of *P-SV* seismic motion at inhomogeneous viscoelastic topographic structures. *Bull. Seis. Soc. Am.* **87**, 1305-1323.
- Mooser, F., A. Montiel, y A. Zuñiga (1996). Nuevo mapa geológico de las Cuencas de México, Toluca y Puebla. Technical report, CFE, México D. F., Mexico.
- Nolet, G., R. Sleeman, V. Nijhof, y B. L. N. Kennett (1989). Synthetic reflection seismograms in three dimensions by a locked mode approximation. *Geophysics* **54**, 350-358.
- Nowack, R. y K. Aki (1984). The two-dimensional gaussian beam synthetic method: testing and application. *J. Geophys. Res.* **89**, 7797-7819.
- Ohminato, T. y B. A. Chouet (1997). A free-surface boundary condition for including 3D topography in the finite difference method. *Bull. Seis. Soc. Am.* **87**, 494-515.
- Pedersen, H. A. (1994). *Étude de la diffraction tridimensionnelle des ondes sismiques dans des structures à géométrie bidimensionnelle, développement théorique et applications*. Ph. D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Peng, C. y M. N. Toksoz (1994). An optimal absorbing boundary condition for finite difference modeling of acoustic and elastic wave propagation. *J. Acoust. Soc. Am.* **95**, 733-745.
- Peng, C. y M. N. Toksoz (1995). An optimal absorbing boundary condition for elastic wave modeling. *Geophysics* **60**, 296-301.
- Pérez-Rocha, L. E. (1998). *Respuesta sísmica estructural: efectos de sitio e interacción suelo-estructura (aplicaciones al Valle de México)*. Ph. D. thesis, UNAM, México D.F.

- Reinoso, E., R. Guerrero, y M. Ordaz (1996). Duración del movimiento durante sismos: implicaciones en la degradación estructural. In *Congreso Nacional de Ingeniería Estructural*, Volume 1, Merida, Mexico. Nov 16-19.
- Sánchez-Sesma, F. J. (1996). Strong motion and site effects. In D. E. Beskos and S. A. Anagnostopoulos (Eds.), *Computer Analysis and Design of Earthquake Resistant Structures. A handbook*, pp. 201–239. Southampton: Comp. Mech Publications.
- Sánchez-Sesma, F. J. y M. Campillo (1991). Diffraction of  $P$ ,  $SV$  and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation. *Bull. Seis. Soc. Am.* **81**, 2234–2253.
- Sánchez-Sesma, F. J. y F. Luzón (1996). Can horizontal  $P$  waves be trapped and resonate in a shallow sedimentary basin? *Geophys. J. Int.* **124**, 209–214.
- Sánchez-Sesma, F. J., J. Ramos-Martinez, y M. Campillo (1993). An indirect boundary element method applied to simulate the seismic response of alluvial valleys for incident  $P$ ,  $SV$  and Rayleigh waves. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* **22**, 279–295.
- Sánchez-Sesma, F. J. y E. Rosenblueth (1979). Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident  $SH$  waves. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* **7**, 441–450.
- Sánchez-Sesma, F. J. y R. Vai (1998). Absorbing boundaries in frequency domain. In *The effect of Surface Geology on Seismic Motion. Recent Progress and New Horizon on ESG Study*, Volume 2, pp. 961–966.
- Sánchez-Sesma, F. J., R. Vai, J. Castillo-Covarrubias, y F. Luzon (1995b). Respuesta sísmica de medios estratificados irregulares usando el método indirecto de elementos de frontera: Aplicación al estudio de la influencia de la estructura profunda en la respuesta sísmica de la cuenca de México. In F. Medina, L. A. Delgado, y G. Suarez (Eds.), *La sismología en México: 10 años después del temblor de Michoacán del 19 de septiembre de 1985 ( $M=8.1$ )*, Volume II of *Monografía de la Unión Geofísica Mexicana*, pp. 85–99.
- Sánchez-Sesma, F. J., R. Vai, J. Castillo-Covarrubias, y F. Luzon (1995a). Seismic response of irregularly stratified media using the indirect boundary element method. In A. Cakmak (Ed.), *Soil Dyn. Earth. Eng. VII*, Computational Mech. Pub., pp. 225–233.
- Sánchez-Sesma, F. J., R. Vai, E. Dretta, y V. J. Palencia (1999). Fundamentals of elastic wave propagation studies : the seismic response of alluvial valleys. In E. Kausel y G. Manolis (Eds.), *Wave propagation in earthquake engineering*. Southampton, England: Com. Mec. Publication.
- Seed, H. B. y I. M. Idriss (1970). Soil moduli and damping factors for dynamic response analysis. Technical report, University of California, Berkley. Report EERC 70-10.
- Shapiro, N. M., M. Campillo, A. Paul, S. K. Singh, D. Jongmans, y F. J. Sánchez-Sesma (1997). Surface-wave propagation across the Mexican volcanic belt and the origin of the long-period seismic-wave amplification in the Valley of Mexico. *Geophys. J. Int.* **128**, 151–166.

- Singh, S. K. y M. Ordaz (1993). On the origin of long coda observed in the lake-bed strong-motion records of Mexico City. *Bull. Seis. Soc. Am.* **83**, 1298–1306.
- Singh, S. K., R. Quaas, M. Ordaz, F. Mooser, D. Almora, M. Torres, y R. Vásquez (1995). Is there truly a “hard” rock site in the Valley of Mexico? *Geophys. Res. Lett.* **22**, 481–484.
- Smith, W. D. (1974). A nonreflecting plane boundary for wave propagation problems. *J. Comput. Phys.* **15**, 492–508.
- Stacey, R. (1988). Improved transparent boundary formulations for the elastic wave equation. *Bull. Seis. Soc. Am.* **78**(6), 2089–2097.
- Turkel, E. (1983). Progress in computational physics. *Comput. Fluids* **11**, 121–144.
- Vai, R., J. M. Castillo-Covarrubias, F. J. Sánchez-Sesma, D. Komatitsch, y J. P. Vilotte (1999). Elastic wave propagation in an irregularly layered medium. *Soil Dyn. Earth. Eng.* **18**, 13–20.
- Yokoi, T. y H. Takenaka (1995). Treatment of an infinitely extended free surface for indirect formulation of the boundary element method. *J. Phys. Earth* **43**, 79–103.
- Zeng, Y. y J. G. Anderson (1995). A method for direct computation of the differential seismograms with respect to the velocity change in a layered elastic solid. *Bull. Seis. Soc. Am.* **85**, 300–307.

# Apéndice A

## Funciones de Green del espacio completo

### A.1 Expresión analítica de las funciones de Green

Las funciones de Green (**G** y **T**) son solución de la ecuación de la elastodinámica en un espacio elástico homogéneo e isótropo. **G** y **T** son funciones vectoriales y, cuando el espacio es infinito, se llaman solución fundamental del espacio completo.  $G_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$  y  $T_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$  expresan el desplazamiento en el punto  $\mathbf{x}$  en dirección  $i$  debido a la aplicación de una fuerza unitaria en el punto  $\xi$  en dirección  $j$ .  $T_{ij}$  se puede deducir de  $G_{ij}$  aplicando la ley de Hooke. En seguida se detalla la expresión de las funciones de Green (Sánchez-Sesma y Campillo, 1991).

$$G_{22} = \frac{1}{i4\rho} \frac{H_0^{(2)}(\omega r/\beta)}{\beta^2}, \quad (\text{A.1})$$

$$G_{1s} = A\delta_{1s} - B(2\gamma_l\gamma_s - \delta_{1s}), \quad (\text{A.2})$$

$$T_{22} = \frac{\rho}{2r} D(\omega r/\beta) \gamma_k n_k, \quad (\text{A.3})$$

$$T_{1s} = \frac{\mu}{r} \left\{ \left[ -4B + \lambda \frac{D(\omega r/\alpha)}{2\mu\alpha^2} \right] \gamma_s n_l + \left[ -4B + \frac{D(\omega r/\beta)}{2\beta^2} \right] \times [\gamma_l n_s + \gamma_k n_k \delta_{ls}] \right\} + \frac{\mu}{r} \{ (C + 16B) \gamma_l \gamma_s \gamma_k n_k \}, \quad (\text{A.4})$$

donde

$$A = \frac{1}{i8\rho} \left[ \frac{H_0^{(2)}(\omega r/\alpha)}{\alpha^2} + \frac{H_0^{(2)}(\omega r/\beta)}{\beta^2} \right],$$

$$B = \frac{1}{i8\rho} \left[ \frac{H_2^{(2)}(\omega r/\alpha)}{\alpha^2} - \frac{H_2^{(2)}(\omega r/\beta)}{\beta^2} \right],$$

$$C = \frac{D(\omega r/\alpha)}{\alpha^2} - \frac{D(\omega r/\beta)}{\beta^2},$$

$$D(p) = \frac{i}{2\rho} p H_1^{(2)}(p),$$

$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$ ,  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker,  $\gamma_m = (x_m - \xi_m)/r$ , los subíndices  $l$  y  $s$  toman los valores 1 y 3 mientras que  $k$  varía de 1 a 3,  $H_m^{(2)}(\cdot)$  es la función de Hankel de segunda especie y orden  $m$  ( $H_m^{(2)}(\cdot) = J_m(\cdot) + iY_m(\cdot)$ ). Se hace notar que  $\mathbf{G}_{ij}$  y  $\mathbf{T}_{ij}$  son funciones singulares en el punto de aplicación de la fuerza, es decir en  $\mathbf{x} = \xi$ . La singularidad de  $\mathbf{G}$  es del tipo logarítmico, mientras que la singularidad de  $\mathbf{T}$  es del tipo  $1/r$ .

## A.2 Integración de las funciones de Green

En el método de elementos de frontera el campo de desplazamiento en un medio elástico homogéneo e isótropo se expresa por la ecuación

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_S \phi_j(\xi) G_{ij}(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi, \quad (\text{A.5})$$

donde  $u_i(\mathbf{x})$  es el desplazamiento calculado en  $\mathbf{x}$ ,  $S$  es la frontera del medio y  $\phi_j(\xi)$  una función que describe la densidad de fuerzas en dirección  $j$  calculada en  $\xi$  sobre  $S$ . Ya que la singularidad de  $\mathbf{G}$  es débil, la integral se calcula expandiendo en serie  $\mathbf{G}$  alrededor de  $\mathbf{x}$ . Aplicando la ley de Hooke a la ecuación A.5 se encuentra el campo de esfuerzos

$$t_i(\mathbf{x}) = \text{CPV} \left[ \int_S \phi_j(\xi) T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi \right], \quad (\text{A.6})$$

donde con la notación  $\text{CPV}[\cdot]$  se indica que el integrando presenta una singularidad fuerte en  $\mathbf{x} = \xi$ . Para resolver la integral de  $\mathbf{T}$  sobre  $S$ , se deforma la superficie alrededor de  $\mathbf{x}$  (Fig. A1 c y d) así que  $\mathbf{x}$  y  $\xi$  quedan separados y la singularidad eliminada. Sea  $S$  la superficie original y  $S_p$  la superficie de la parte deformada. La integral sobre  $S$  se calcula como límite cuando la superficie deformada tiende a la original

$$\text{CPV} \left[ \int_S \phi_j(\xi) T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi \right] = \lim_{S_p \rightarrow 0} \left[ \int_{S-S_p} \phi_j T_{ij} dS + \int_{S_p} \phi_j T_{ij} dS \right]. \quad (\text{A.7})$$

Cuando  $\mathbf{x}$  no coincide con  $\xi$  el cálculo de la integral de  $\mathbf{T}$  es directo ( $S_p = 0$ ).  $\mathbf{T}$  es impar y la integral de  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  sobre  $S - S_p$  es nula. Cuando  $S$  es plana en  $\mathbf{x}$ , el límite de la

integral  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  sobre  $S_p$  es  $\pm\phi_i/2$  (el signo es positivo o negativo según si  $\xi$  se acerca a  $\mathbf{x}$  del interior o del exterior del medio, Fig A.1). En conclusión resulta

$$t_i(\mathbf{x}) = \pm\frac{1}{2}\phi_i + \int_S \phi_j(\xi)T_{ij}(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi, \quad (\text{A.8})$$

donde  $\xi \neq \mathbf{x}$ .

A.3 Figuras

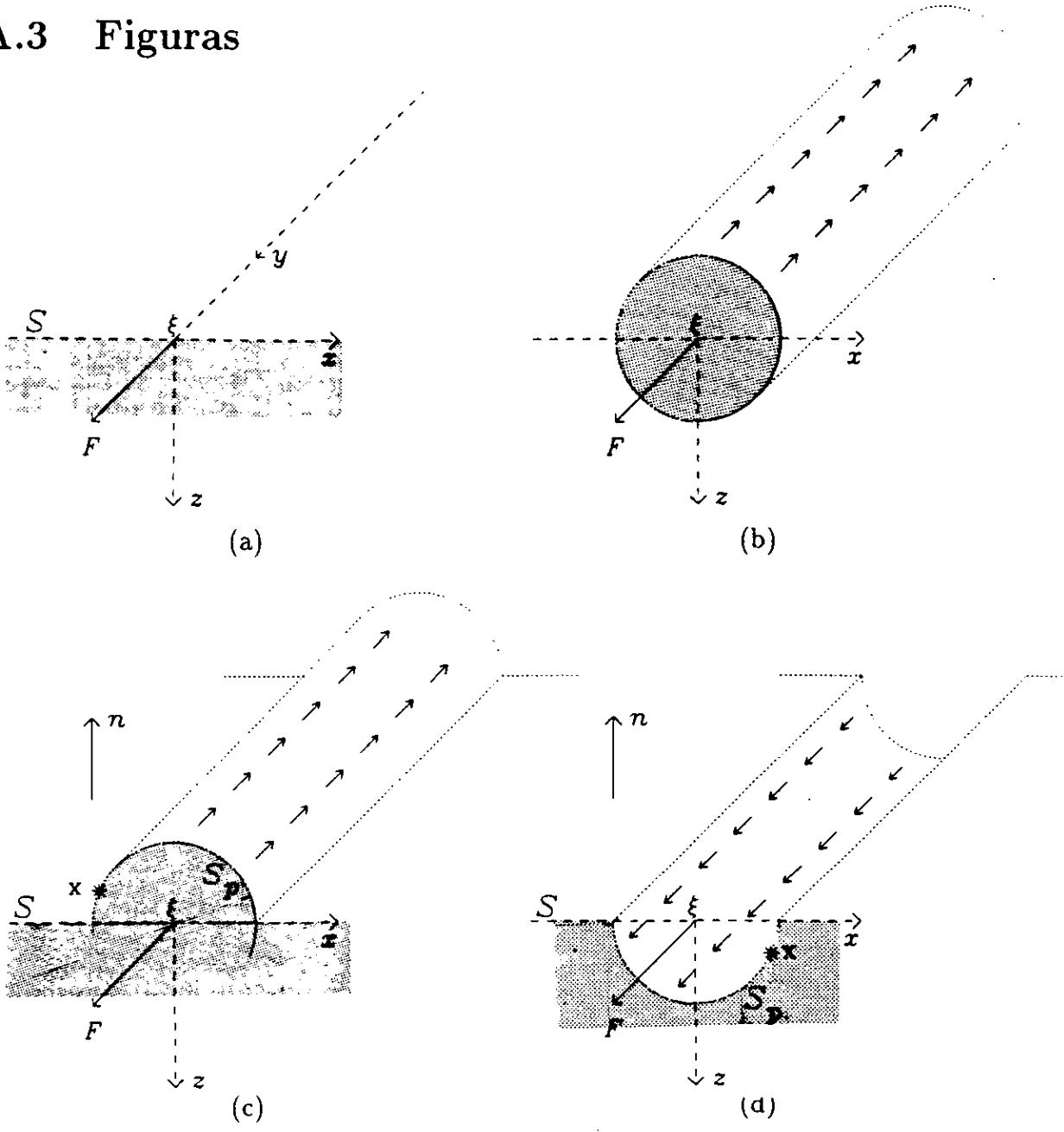


Figura A.1 Fuerza antiplana aplicada a una geometría bidimensional. Las áreas sombreadas marcan las secciones verticales del medio. En el plano  $xz$ , la superficie  $S$  coincide con el eje  $x$ , mientras que  $S_p$  se indica con línea punteada. Con notación del todo personal los ejes se representan con línea de rayas. (a)  $\xi$  es el punto de aplicación de la fuerza,  $z = 0$  es la frontera plana en estudio y  $\mathbf{F} = F\hat{j}$  es la fuerza aplicada en  $\xi$ . (b) Equilibrio de fuerzas a lo largo de un cilindro coaxial con  $\mathbf{F}$  cuando la fuerza es aplicada en un punto del espacio completo. (c, d) Se deforma el medio utilizando un semicilindro coaxial con  $\mathbf{F}$ . En (c) la resultante de las fuerzas sobre la protuberancia es  $\mathbf{R} = -F/2\hat{j}$ .  $\xi$  pertenece al medio y se dice que  $x$  se acerca a  $\xi$  del interior. En (d)  $\mathbf{R} = F/2\hat{j}$ .  $\xi$  no pertenece al medio y se dice que  $x$  se acerca a  $\xi$  del exterior.

## Apéndice B

# Cálculo de las soluciones de referencia

### B.1 Incidencia de ondas planas

Para un medio estratificado excitado por ondas planas se calculó la solución de referencia ( $u^{(0)}$ ) con el método de Thompson-Haskell (Aki y Richards, 1980). En Aki y Richards (1980) viene las expresiones de los propagadores para ondas  $SH$  y  $P-SV$ , sin embargo se señala un error de impresión para uno de los coeficientes. Según Sánchez Sesma (Sánchez Sesma, comunicación personal, 1994) el coeficiente  $P_{21}$  del propagador  $P-SV$  debe escribirse

$$P_{21} = -P_{34} = \frac{k\beta^2}{\omega^2} \left[ (k^2 + \nu^2) \frac{\sinh \nu z}{\nu} - 2\gamma \sinh \gamma z \right]. \quad (\text{B.1})$$

La solución de referencia es teóricamente válida en un sistema de capas planas y paralelas, mientras que las ecuaciones integrales requieren la evaluación de  $u^{(0)}$  a lo largo de todas las superficies irregulares (Fig. B1). El cálculo en los puntos A y B (considerados pertenecientes a la capa  $R_i$ ) y en el punto C (considerado perteneciente a la capa  $R_{i+1}$ ) no presenta ninguna dificultad conceptual, en cuanto los puntos se encuentran "adentro" del estrato de referencia. Se nota que A, B y C (considerados pertenecientes a  $R_{i-1}$ ,  $R_{i+1}$  y  $R_i$ , respectivamente) se encuentran "afuera" de los medios de referencia; entonces, se usa una extensión analítica de la solución, o sea se propaga la solución hasta la profundidad real del punto, sin considerar el nivel de referencia. Este *modus operandi* genera una solución potencialmente inestable cuando el punto se encuentra arriba del límite superior del estrato de referencia. En efecto, la expresión analítica de las ondas inhomogéneas presenta decaimiento exponencial de amplitud en el sentido positivo del eje  $z$  y a partir del límite superior del estrato de referencia, porque así tiene que ser para una solución estable de un un sistema de capas planas. Desafortunadamente, a este decaimiento corresponde crecimiento exponencial a partir del mismo límite, pero en el sentido opuesto del eje  $z$ . Por lo tanto, la solución en los puntos A y C siempre es estable, mientras que la solución en B (considerado perteneciente a la capa  $R_{i+1}$ ) puede ser numéricamente indeterminada.

A pesar de los problemas ilustrados, el algoritmo se ha usado con buenos resultados para resolver irregularidades relativamente grandes.

## B.2 Fuente lineal de dilatación

Una línea de dilatación genera ondas cilíndricas longitudinales coaxiales con la fuente. Para desarrollar la expresión de la solución de referencia en un plano perpendicular a la línea de dilatación se parte del campo de desplazamiento estático generado por un centro de dilatación (Love, 1944)

$$u_i = \frac{P}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_i}. \quad (\text{B.2})$$

En el origen del sistema de referencia, se aplican tres fuerzas de magnitud  $P/h$  y dirección y sentido de los ejes. Se generan tres dobles pares aplicando otras tres fuerzas (una en  $(h, 0, 0)$ , una en  $(0, h, 0)$  y una en  $(0, 0, h)$ ) con magnitud  $P/h$  paralelas a los ejes pero de sentido opuesto. Cuando  $h$  tiende a cero mientras que  $P$  permanece constante se reproduce la solución para el centro de dilatación.  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé, parámetros mecánicos del medio;  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  y  $\partial r^{-1}/\partial x_i = -x_i/r^3 = -\gamma/r^2$ . Sea el eje  $x_2$  la línea de dilatación, integrando las contribuciones de la línea en el plano  $x_1x_2$  (Fig. B2) el campo de desplazamiento B.2 se escribe

$$u_i = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_0}{4\pi\rho\alpha^2} \frac{1}{r^2} \gamma_i d\xi = 2 \frac{M_0}{4\pi\rho\alpha^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{r^2} \gamma_i d\xi = 2 \frac{M_0}{4\pi\rho\alpha^2} \frac{x_i}{x_2^2}, \quad (\text{B.3})$$

donde  $M_0$  es el momento por unidad de longitud (equivalente de  $P$ ),  $\rho$  es la densidad del medio,  $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  y  $\xi$  es la distancia entre el punto en examen y el eje  $x_2$ . Por analogía se escribe

$$u_r = \frac{M_0}{2\pi\rho\alpha^2} \frac{1}{r}, \quad (\text{B.4})$$

donde ahora  $r = \sqrt{x_1^2 + x_3^2}$  (Fig. B1).

Pasando al caso dinámico en el dominio de la frecuencia, se expresa el campo de desplazamiento en función de un potencial escalar  $\phi$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}. \quad (\text{B.5})$$

Para  $\phi$  se elige una representación que verifica la ecuación de ondas, escalada por un factor  $C$  desconocido

$$\phi = \frac{C}{i} H_0^{(2)}(qr), \quad (\text{B.6})$$

$$u_r = iCqrH_1^{(2)}(qr) \frac{1}{r}, \quad (\text{B.7})$$

donde  $q = \omega/\alpha$  y  $\omega$  es la frecuencia circular. El coeficiente  $C$  se determina haciendo coincidir solución estática y dinámica cuando  $qr$  tiende a cero. Se nota que  $r$  nunca es nulo, entonces  $qr$  es cero a frecuencia cero. Algebraicamente

$$\frac{M_0}{2\pi\rho\alpha^2} \frac{1}{r} = \lim_{qr \rightarrow 0} u_r = -\frac{2C}{\pi} \frac{1}{r}, \quad (\text{B.8})$$

de donde

$$C = -\frac{M_0}{4\rho\alpha^2}. \quad (\text{B.9})$$

Por lo tanto, en coordenadas cartesianas, se escribe

$$u_i = \frac{M_0}{4i\rho\alpha^2} qr H_1^{(2)}(qr) \frac{1}{r} \gamma_i. \quad (\text{B.10})$$

Aplicando la ley de Hooke y la ecuaciones de de compatibilidad, el campo de esfuerzos correspondiente a los desplazamientos expresados por la ecuación B.10 resulta

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{M_0}{4i\rho\alpha^2} \right) q^2 \left\{ \frac{\lambda + \mu}{\mu} H_0^{(2)}(qr) \delta_{ij} + H_2^{(2)}(qr) [\delta_{ij} - 2\gamma_i \gamma_j] \right\}. \quad (\text{B.11})$$

La solución de referencia expresada por las ecuaciones B.10 y B.11 viene sumada al campo difractado cuando la fuente se encuentra en el medio en estudio. La solución de referencia es nula cuando la fuente no se encuentra en el medio.

## B.3 Figuras

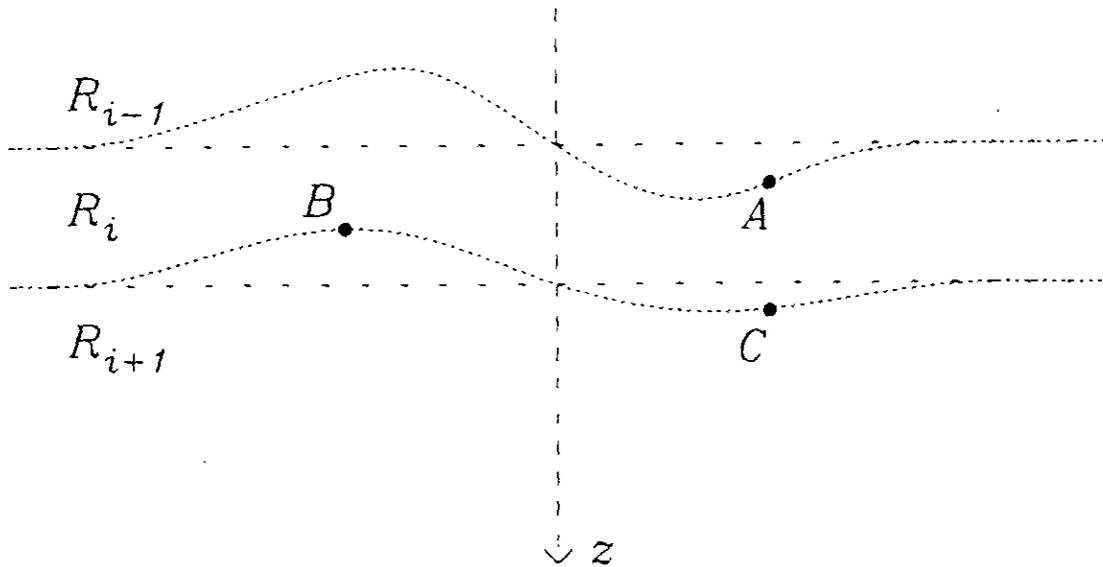


Figura B1 Con línea punteada se dibujan los límites de la capa irregular  $R_i$ , con línea de raya los límites del correspondiente estrato plano de referencia. El cero del eje  $z$  está colocado en superficie libre, frontera del estrato  $R_1$ .

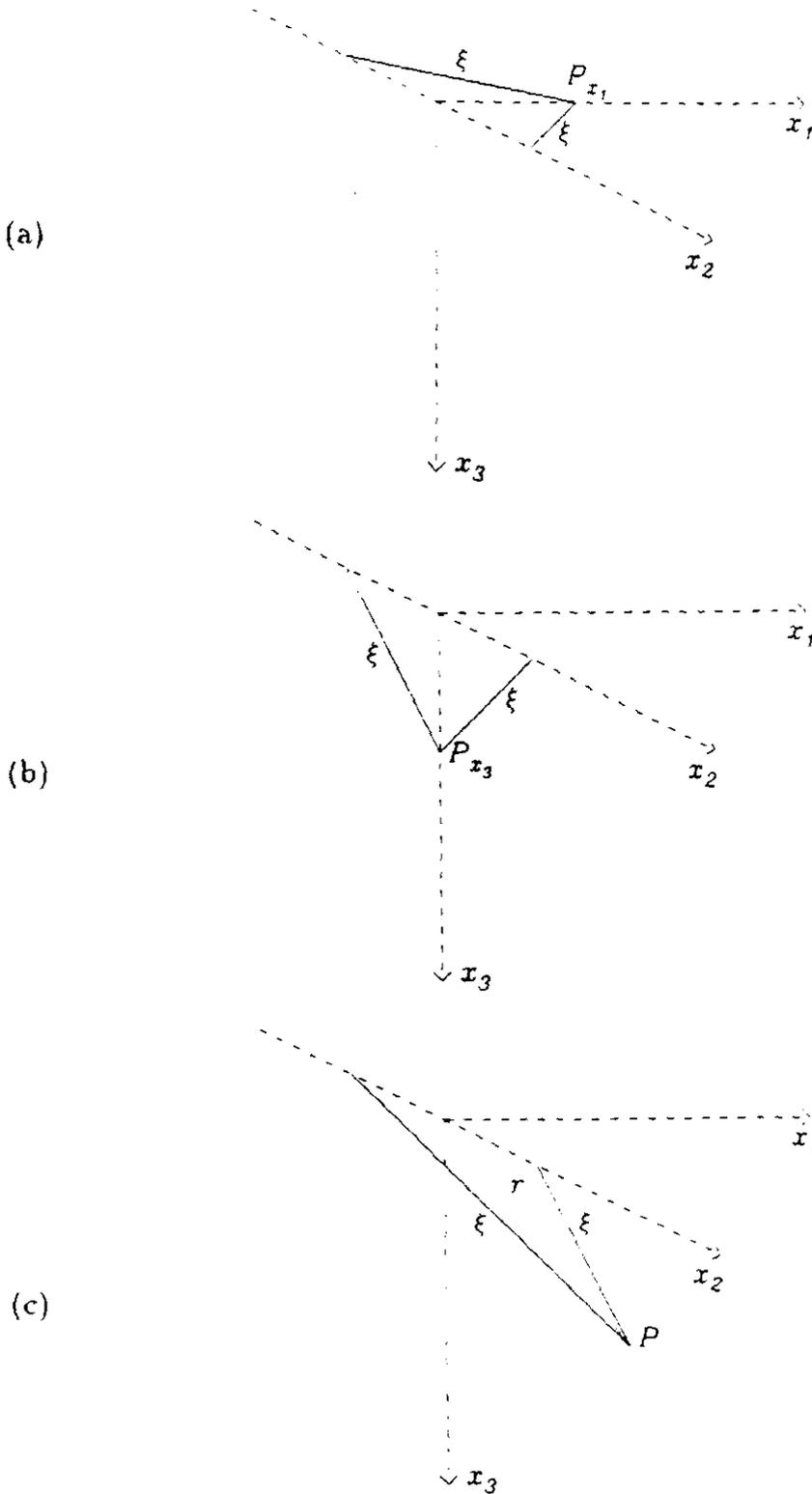


Figura B2 Representación de  $\xi$  para el cálculo de  $u_1$  (a),  $u_3$  (b) y  $u_r$  (c) en  $P$ .  $r$  yace en el plano  $x_1x_3$  mientras que  $x_2$  y  $\xi$  sobresalen.

# Apéndice C

## Pulso de Ricker

### C.1 Expresión analítica de la ondícula

Un pulso de Ricker está definido por las siguientes funciones analíticas

$$r(t) = \left( a^2 - \frac{1}{2} \right) e^{-a^2}, \quad (\text{C.1})$$

$$R(\omega) = -\frac{t_p}{\sqrt{\pi}} b^2 e^{-b^2} e^{-i\omega t_s}, \quad (\text{C.2})$$

donde  $a = \pi(t - t_s)/t_p$ ,  $b = \omega/\omega_p$ ,  $\omega_p = 2\pi f_p = 2\pi/t_p$ .  $t_p$  es el período característico del pulso, la duración de la parte central del pulso es igual a  $\sqrt{6}t_p/\pi$  (Fig. C1).  $t_s$  es un parámetro que trasla el pulso a lo largo del eje de los tiempos (Fig. C1).  $f_p$  es la frecuencia de energía máxima (Fig. C2) y se llama frecuencia característica. Para que la respuesta de un sistema sea significativa, es necesario que la función de transferencia del modelo y el pulso que lo excita presenten energía en el mismo intervalo de frecuencias. El éxito del pulso de Ricker se adscribe a que es elemental identificar el pulso apropiado para excitar un modelo en una determinada frecuencia de resonancia  $f_r$ , en efecto es suficiente tomar  $t_p = 1/f_r$ . Además se tiene un control directo sobre la eficiencia del muestreo confrontando duración del pulso y paso de muestreo en el tiempo (determinado por la frecuencia máxima de la función de transferencia).

## C.2 Figuras

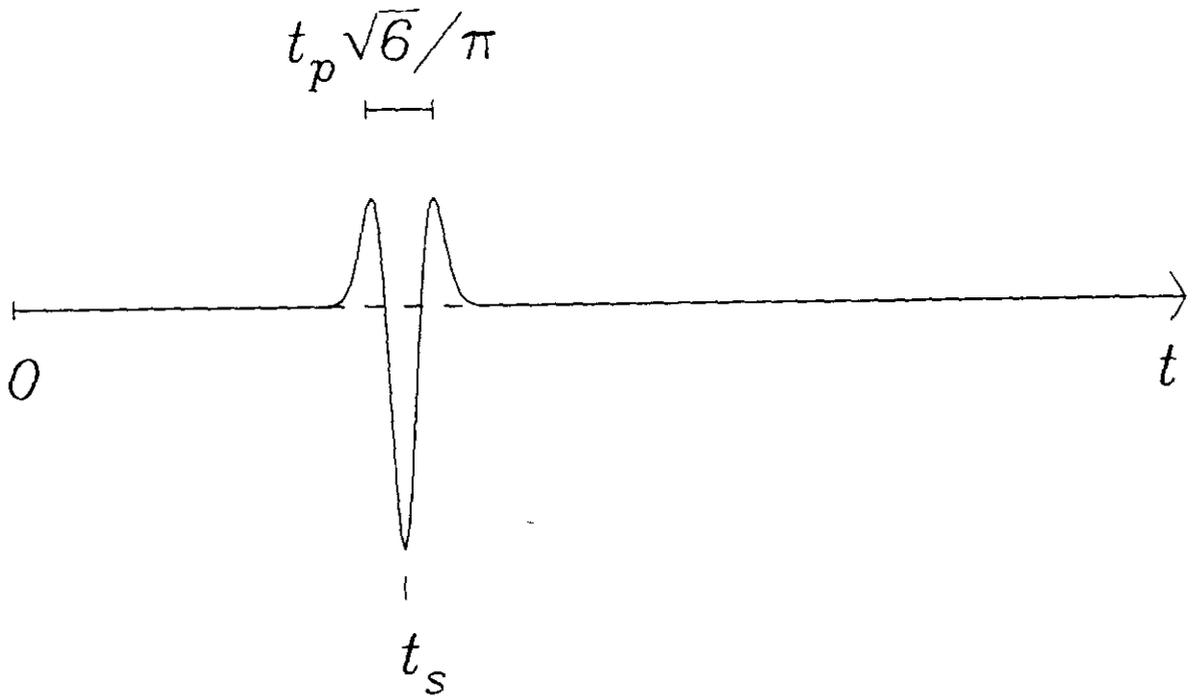


Figura C1 Representación de un pulso de Ricker en el dominio del tiempo. La amplitud máxima se presenta al tiempo  $t_s$ , y el ancho del pulso depende de  $t_p$ .

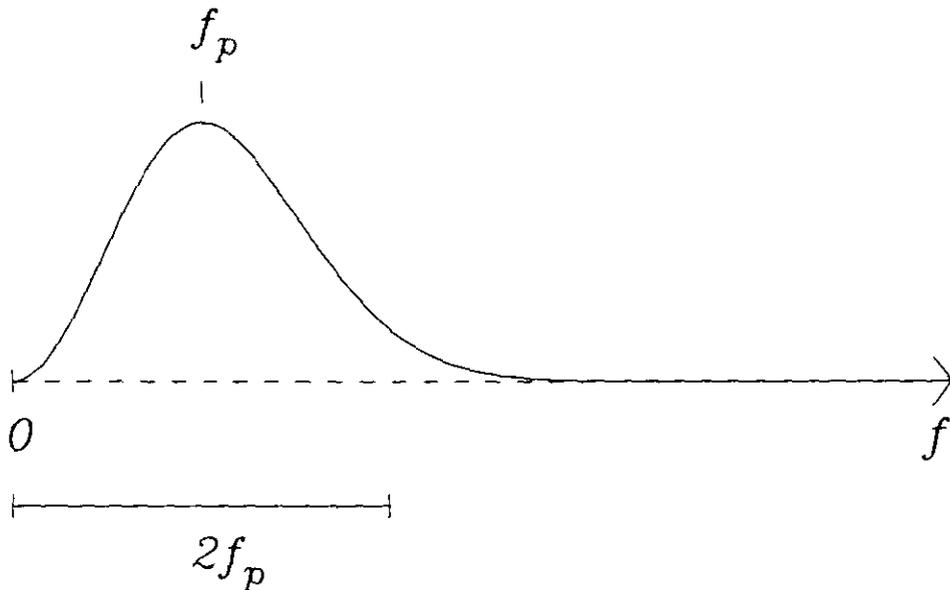


Figura C2 Representación de un pulso de Ricker en el dominio de la frecuencia. El pulso tiene energía no despreciable hasta una frecuencia igual a dos veces la frecuencia de pico, aproximadamente.