



01190  
JUN 2000  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO



DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERÍA

NUEVAS METODOLOGÍAS EN LA ESTIMACIÓN DE AVENIDAS DE  
DISEÑO

**T E S I S**

PRESENTADA A LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA  
FACULTAD DE INGENIERÍA POR:

**ALDO IVÁN RAMÍREZ OROZCO**

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

DIRECTOR DE TESIS  
**DR. ÁLVARO A. ALDAMA RODRIGUEZ**

275397

Ciudad Universitaria, D. F., 2000



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

La tesis denominada "Nuevas metodologías en la estimación de avenidas de diseño" propone un nuevo enfoque para la determinación de eventos para el diseño de obras hidráulicas. Se han desarrollado aplicaciones específicas para el caso del diseño de vasos de almacenamiento y para el de obras hidráulicas ubicadas en redes de ríos.

La investigación se basa en el concepto del periodo de retorno conjunto, el cual es una medida de la seguridad hidrológica de las obras utilizando un enfoque multivariado.

Para el caso de vasos de almacenamiento, el método propuesto evita la arbitrariedad en la asignación del volumen de la avenida, el cual tiene un efecto importante sobre el vaso. En este caso, se obtiene la solución más desfavorable para el vaso en particular, el cual se involucra por lo tanto en el proceso de estimación de la avenida de diseño.

En el caso de obras hidráulicas ubicadas en redes de ríos, el método considera las características de cada obra en particular y garantiza la obtención del evento de diseño que produce los efectos más desfavorables sobre la obra para el periodo de retorno considerado.

A partir de los resultados obtenidos en los ejemplos de aplicación de la nueva metodología, incluidos en la tesis, se recomienda ampliamente la aplicación de estas nuevas metodologías en la solución de diversos problemas de diseño hidrológico.

LOS DATOS ASENTADOS EN ESTE DOCUMENTO CONCUERDAN FIELMENTE CON LOS REALES Y QUEDO ENTERADO QUE, EN CASO DE CUALQUIER DISCREPANCIA, QUEDARÁ SUSPENDIDO EL TRÁMITE DEL EXAMEN

Fecha de solicitud: 25/02/2000

## **New methodologies for design flood estimation**

Aldo Iván Ramírez Orozco

### *Abstract*

The research entitled "New methodologies for design flood estimation" proposes a new approach for the determination of the events for the design of several hydraulic works. Specific applications for the case of reservoirs and works located in river networks have been developed.

The research is based on the concept of the joint return period, which is defined in terms of the joint probability of exceedance and is a measure of the hydrologic security of the hydraulic work.

In the case of reservoirs, the proposed method avoids the arbitrary assignation of the design flood volume, which has been demonstrated to have an important effect on the reservoir behavior. The solution of the problem provides the most unfavorable condition for the specific work to be design. With this, the work is involved in the process of the design flood estimation.

In the case of works located in river networks, the proposed method considers the characteristics of the specific work to be design or revised and provides the most unfavorable condition as well.

The results of the application examples, which are included in the paper, suggests that the application of the new methods is strongly recommended in the solution of hydrologic design problems.

A Violeta, Bárbara Andrea e Iván,  
recordándoles que *si se quiere, se puede*.

A mis padres, con respeto y amor. Este logro es  
también su logro.

Un profundo agradecimiento al Dr. Álvaro A. Aldama Rodríguez, por su valiosa guía y su sincera amistad.

Gracias al Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, en especial al Dr. Javier Aparicio Mijares y al CONACYT por el gran apoyo recibido.

# Indice

1. Introducción	
Antecedentes	1
Revisión de la literatura y estado del arte	1
Objetivo del trabajo	12
Organización del trabajo	12
2. Teoría estadística y análisis de frecuencias conjunto	
Algunos conceptos básicos de probabilidad	14
Distribuciones de probabilidad	15
Funciones de distribución de probabilidad multivariadas	17
Funciones multivariadas de valores extremos	17
Estimación de parámetros de las funciones de distribución de valores extremos	25
Funciones de distribución con poblaciones mezcladas	32
Análisis de frecuencias conjunto	38
3. Estimación de avenidas para el diseño de vasos	
Independencia funcional entre los parámetros que describen una avenidas	45
Parametrización de hidrogramas	53
Tránsito de avenidas en vasos	58
Solución analítica aproximada de la ecuación de tránsito en vasos	60
Análisis de sensibilidad de los parámetros del hidrograma de entrada en la respuesta de vasos de almacenamiento	71
Análisis de frecuencias conjunto en la revisión o diseño de presas	72
Aplicación a la revisión de la avenida de diseño de la presa “El Infiernillo”	75
Aplicación a la revisión de la avenida de diseño de la presa “Huites”	80
Algunas conclusiones de la metodología	84
4. Estimación de avenidas de diseño en obras ubicadas en redes de ríos	86
Análisis de frecuencias conjunto	89
Ejemplo de aplicación	90
Algunas conclusiones de la metodología	99
5. Conclusiones y recomendaciones	102
6. Bibliografía y referencias	104
Apéndice A	
Apéndice B	
Apéndice C	

## Índice de figuras

Figura 3.1.	Hidrogramas de escurrimiento directo	46
Figura 3.2.	Modelo de una cuenca grande	47
Figura 3.3.	Nomenclatura para la “analogía de difusión”	47
Figura 3.4.	Hidrograma en la salida de la cuenca (Curva S)	49
Figura 3.5.	Nomenclatura para el tránsito de avenidas en vasos	58
Figura 3.6.	Curva elevaciones - capacidades de un vaso de almacenamiento	60
Figura 3.7.	Hidrograma triangular de entrada	65
Figura 3.8.	Hidrograma triangular adimensional de entrada	65
Figura 3.9.	Características de la presa “El Molinito”, Sonora	68
Figura 3.10.	Hidrograma de entrada a la presa “El Molinito”, Sonora	68
Figura 3.11.	Hidrograma adimensional de entrada al vaso	69
Figura 3.12.	Evolución de los almacenamientos. Presa “El Molinito”, Son.	69
Figura 3.13.	Evolución de los almacenamientos. Presa “El Molinito”, Son. (Detalle)	70
Figura 3.14.	Avenida de diseño para “El Infiernillo”, T = 10,000 años	78
Figura 3.15.	Avenida de diseño para “Huites”, T = 10,000 años	84
Figura 4.1.	Red hidrográfica del sistema Papaloapan	86
Figura 4.2.	Nomenclatura utilizada en la red de $n$ ríos	87
Figura 4.3.	Obra dentro de una red de ríos	88
Figura 4.4.	Red simplificada del sistema Papaloapan	91
Figura 4.5.	Obras de protección en proyecto	93
Figura 4.6.	Envolvente de elevaciones máximas de la superficie libre del agua para el bordo 1.	100
Figura 4.7.	Envolvente de elevaciones máximas de la superficie libre del agua para el bordo 2.	100

## Índice de tablas

Tabla 2.1.	Contenido teórico para el caso bivariado	31
Tabla 2.2.	Contenido teórico para el caso trivariado	31
Tabla 3.1.	Hidrograma adimensional del USSCS	54
Tabla 3.2.	Valor de $\varepsilon$ para diferentes embalses	67
Tabla 3.3.	Resultados de la aplicación. Presa “El Molinito”, Sonora	70
Tabla 3.4.	Resumen de algunos estudios hidrológicos relacionados con la presa “El Infiernillo”	75
Tabla 3.5.	Datos de la presa “El Infiernillo”	76
Tabla 3.6.	Avenidas máximas anuales registradas en la presa “El Infiernillo”	78
Tabla 3.7.	Combinaciones de entrada para la presa “El Infiernillo”	79
Tabla 3.8.	Elevaciones máximas para diferentes periodos de retorno. Presa “El Infiernillo”	80
Tabla 3.9.	Datos generales de la presa “Huites”	81
Tabla 3.10.	Avenidas máximas anuales registradas en la presa “Huites”	82
Tabla 3.11.	Combinaciones de entrada para el caso de la presa “Huites”	83
Tabla 3.12.	Elevaciones máximas para diferentes periodos de retorno. Presa “Huites”.	84
Tabla 4.1.	Gastos máximos anuales	92
Tabla 4.2.	Avenidas máximas históricas	93
Tabla 4.3.	Vectores considerados en el ejemplo	98

*La vida es el arte de obtener suficientes conclusiones a partir de insuficientes premisas*

**Samuel Butler**

## Introducción

### Antecedentes

El proceso de evaluación del posible impacto de los eventos hidrológicos en una estructura hidráulica y la selección de las dimensiones y políticas de operación para su correcto funcionamiento se conoce en general como “diseño hidrológico”.

En particular, el término “estimación de avenidas de diseño” se refiere a la obtención de la o las características del hidrograma de avenida que se utilizará para diseñar la obra hidráulica por construir. Alternativamente, el proceso se puede seguir con el fin de evaluar la bondad del diseño de obras existentes.

En pocas palabras, se puede decir que el diseño de cualquier estructura hidráulica debe basarse en una determinada “avenida de diseño”, la cual, en la mayoría de los casos, se estima con base en un cierto riesgo hidrológico aceptado. Dicho riesgo puede ser tomado en cuenta por ejemplo, a través del denominado “periodo de retorno” el cual posee una clara definición probabilista. Existen sin embargo algunas metodologías para estimar avenidas de diseño que carecen de base probabilista.

Es evidente que, independientemente del enfoque seguido, el fin perseguido en el proceso de estimación de la avenida de diseño es determinar, de la mejor manera posible, las características de tal evento.

El análisis y la estimación de avenidas de diseño han sido tema de numerosas investigaciones y muchos autores en el campo de la hidrología. Las revistas especializadas se encuentran llenas de artículos que presentan nuevos métodos para mejorar el diseño de las obras hidráulicas, estimar el error de los modelos existentes y otros temas relacionados con el diseño hidrológico. De acuerdo con Linsley (1986) algunos son trabajos innovadores y efectivamente avanzan la frontera de la hidrología y otros son sólo ejercicios matemáticos. Sin embargo, a pesar de tantos esfuerzos, los hidrólogos no se han podido poner de acuerdo en cuál enfoque es el indicado para la determinación de avenidas para el diseño de nuevas obras o la revisión de obras existentes. En resumen, hay algo que queda claro, la estimación de avenidas de diseño es un problema en extremo difícil que no ha sido resuelto a satisfacción de todos y para el cual el planteamiento de mejores métodos de aplicación práctica es conveniente.

### Revisión de la literatura y estado del arte

Las metodologías existentes para la estimación de avenidas de diseño son muy variadas en enfoque conceptual y en complejidad. Uno de los principales factores que propician la elección de algún procedimiento a aplicar es la calidad y cantidad de información disponible en el sitio y/o la región en donde se ubicará la obra. El tamaño de las cuencas y el nivel de riesgo hidrológico aceptado en el diseño son otros factores que intervienen usualmente en la decisión del enfoque a seguir.

En la hidrología de avenidas, las cuencas pequeñas se modelan usualmente con enfoques empíricos muy simples, como por ejemplo, la fórmula racional (Mylvaney, 1851). Si las cuencas son de tamaño medio, es común usar modelos conceptuales agregados, como el método del hidrograma unitario (Sherman, 1932). Sin embargo para las cuencas grandes, las variaciones espaciales y temporales de lluvia y escurrimiento, requieren el uso de formulaciones más complejas y usualmente distribuidas, como por ejemplo, los modelos de cuenca.

La estimación de la avenida de diseño de una obra involucra la definición del nivel de riesgo que es aceptable para el diseñador. Esto implica la asociación de dicha avenida con una probabilidad de excedencia y, por tanto, con un periodo de retorno.

En efecto, en general se reconoce que la severidad de las avenidas debe medirse en términos de probabilidades de excedencia (Linsley, 1986; Dawdy y Lettenmaier, 1987; Kirby y Moss, 1987; Beard, 1990), razón por la cual el enfoque probabilista es sin duda la opción de estimación de eventos más utilizado en el mundo.

La aplicación de métodos estadísticos basados en hidrometría implica disponer de mediciones de caudal con periodos de registro relativamente largos en los sitios (o cerca de éstos) en los cuales se proyectan las obras. Sin embargo, en la actualidad, estos métodos sirven también de apoyo para el desarrollo de modelos regionales, aplicables a cuencas no aforadas o con periodos cortos de registro histórico (Kirby y Moss, 1987).

Desde el punto de vista más general, los métodos para la estimación de avenidas se pueden dividir en métodos con enfoque hidrometeorológico y métodos con enfoque hidrométrico. Los primeros se basan en datos de precipitación y en la modelación del proceso lluvia – escurrimiento, mientras los segundos aprovechan la información histórica de avenidas en el sitio específico o la región en donde se ubicará la obra, pudiendo o no tomar en cuenta la información de precipitaciones. Al grupo de métodos comprendidos dentro del segundo enfoque se le conoce con el nombre genérico de análisis de frecuencia de avenidas.

Muchas discusiones se han suscitado acerca de la pertinencia y conveniencia de la aplicación de uno u otro enfoque y la verdad es que todos los métodos disponibles ofrecen ciertas ventajas y también pueden contener severas deficiencias. A continuación se consigna una breve discusión de los diferentes métodos encontrados en la literatura enfatizando las ventajas y desventajas de cada formulación.

### *Fórmulas empíricas y el método racional*

Los primeros métodos que se comentan son los concernientes al uso de fórmulas empíricas del tipo envolventes, como las de Creager y Lowry (McCuen, 1998) y Crippen (Crippen, 1982) y el método racional (Mylvaney, 1851; Hromadka y Whitley, 1994). En estos métodos el gasto pico del hidrograma se estima en función del área de drenaje y, en ocasiones, alguna característica general de la lluvia. Estos métodos se emplean generalmente para obtener estimados preliminares y burdos del gasto de diseño. Sin embargo, el método racional por ejemplo, incorporando datos de precipitación con base probabilista, es muy utilizado en la estimación de eventos para el diseño de obras hidráulicas pequeñas (Linsley, 1986).

Dado que el interés de este trabajo se centra en metodologías aplicables a la estimación de avenidas para el diseño de obras de mayor envergadura, los métodos descritos en este párrafo no son considerados en el ámbito del presente documento.

### *Enfoque hidrometeorológico*

En opinión de muchos hidrólogos los registros de precipitación son más abundantes y menos susceptibles a los cambios en la cuenca que los de escurrimiento. Esto nos conduce a comentar el primer enfoque importante en la determinación y pronóstico de avenidas: los métodos con base hidrometeorológica.

Este enfoque es muy utilizado en muchas partes del mundo. Es el método más usado por la mayoría de las agencias gubernamentales de los Estados Unidos para la estimación de eventos para el diseño de estructuras de alto riesgo, como lo son por ejemplo las grandes presas cuya falla es intolerable. En este caso, el método inicia con la estimación de la denominada Precipitación Máxima Probable (PMP) (Linsley *et al.* 1975). La PMP está definida por la Organización Meteorológica Mundial (OMM) como: "Teóricamente, la mayor lámina de precipitación para una duración dada que es físicamente posible considerando un área dada de tormenta, en una ubicación geográfica particular y en un tiempo del año específico" (OMM, 1986). Con esto, la PMP es un límite superior de la cantidad de agua que puede precipitarse sobre una región determinada en una época dada del tiempo. Algunos han intentado hacer más claro el concepto de la PMP argumentando que, virtualmente, no hay riesgo de que ésta sea excedida (Wang, 1984). Sin embargo, el conocimiento actual de los mecanismos de generación de tormentas no permite la evaluación precisa de una lluvia con esas características. La verdad es que la PMP no tiene una base probabilista y por lo tanto no puede asignársele un periodo de retorno.

Muchos artículos se han escrito acerca de la aplicación y experiencias con los métodos de estimación de la PMP con fines de estimación de eventos de diseño (Wang, 1984; Wang y Jawed, 1986; Wang y Revell, 1983; Newton, 1983, entre otros).

Para propósitos del diseño de obras, la PMP debe transformarse en la denominada Creciente o Avenida Máxima Probable (AMP) a través de un modelo lluvia – escurrimiento. La AMP, según la definición del Cuerpo de Ingenieros de los Estados Unidos (1979) es "la avenida que se puede esperar de la combinación más severa de condiciones meteorológicas e hidrológicas críticas que son razonablemente posibles en una determinada región". La frase "razonablemente posible" introduce una gran subjetividad en el concepto de la AMP y permite al usuario una gran flexibilidad en su aplicación, aunque también constituye su mayor debilidad (Wang y Revell, 1983).

Por otro lado y desgraciadamente, los métodos para el cálculo de la AMP no están estandarizados (Dawdy y Lettenmaier, 1987). Es más, es bien sabido que el proceso de transformación de lluvia en escurrimiento es uno de los problemas más complejos en la hidrología y su modelación continúa siendo cuestionada. Sólo por mencionar algunos de los factores más importantes que se ven implicados en el proceso lluvia – escurrimiento, se puede citar que, entre otros, las variaciones espaciales y temporales de la lluvia, las características del suelo y el uso del mismo, la cobertura vegetal, la función de pérdidas y las condiciones antecedentes de humedad de la cuenca mantienen interrelaciones importantes que proporcionan gran complejidad al fenómeno. Las grandes cuencas

inducen una complejidad adicional, ya que éstas deben dividirse en subcuencas y no existe un método sistemático para combinar los diversos factores y eventos que se requieren para el cálculo de la AMP en la salida de la cuenca (Bouvard, 1988; Wang y Jawed, 1986).

De hecho, se ha demostrado que, dada la información y los modelos disponibles en la actualidad, los modelos lluvia – escurrimiento no funcionan bien en condiciones extremas (Beven 1989; Naef, 1981). Esto puede ser, en parte, porque los parámetros de los modelos se calibran para condiciones medias (no extremas) (Bouvard, 1988). Shalaby (1994) ha presentado evidencia cuantitativa que indica que la estimación errónea de los parámetros de un modelo lluvia – escurrimiento ha producido errores del 42% en la estimación de la AMP.

Entre los métodos para la transformación lluvia – escurrimiento se encuentran los modelos simples, como el hidrograma unitario y el de cascada de Nash, entre otros; los modelos conceptuales como el Stanford (Crawford, 1966) y el de Sacramento (Burnash, 1973) y los modelos con base física. Comentarios acerca de la aplicabilidad de los diferentes métodos se pueden consultar en Naef (1981), mientras que las ventajas de los métodos con base física se consignan en Shen et al (1990). En general, se acepta que el proceso lluvia – escurrimiento puede modelarse con conceptos simples bajo condiciones promedio, más sin embargo, bajo condiciones extraordinarias o grandes extrapolaciones, la modelación es muy compleja y la obtención de resultados aceptables es casi “cuestión de suerte” (Naef, 1981).

Por estas razones, parece indudable que la transformación lluvia – escurrimiento es el punto más débil de los métodos de estimación con enfoque hidrometeorológico. De hecho, Bouvard (1988) menciona que el cálculo de la AMP esta más ligada a los métodos computacionales que a la realidad física del problema.

Una cuestión que ha generado inquietud y mucho esfuerzo por parte de los hidrólogos consiste en la estimación de una probabilidad de excedencia de la AMP (Dawdy y Lettenmaier, 1987). Ya que generalmente el proceso de transformación de PMP a AMP es determinista, no hay posibilidad de asignar un periodo de retorno a esta última. Aunque muchos hidrólogos se oponen a dar una base probabilista a la AMP, existen diversos estudios en los cuales se intenta asignarle un periodo de retorno (por ej. Shalaby, 1994; OWDC, 1986; Fontaine, 1989; Kennedy y Hart, 1984; Newton, 1983, Kovacs, 1984). La mayoría de éstos proponen el uso de extrapolaciones de curvas de frecuencia y el uso de métodos de probabilidad conjunta. Sin embargo, el enfoque usual incluye la asignación de la probabilidad con base en la experiencia personal. Las primeras ideas en este sentido, plantearon tratar la relación lluvia – escurrimiento como un proceso lineal y por lo tanto asignaron periodos de retorno idénticos tanto a la lluvia como al escurrimiento generado por ésta. Sin embargo, existe evidencia de que el proceso es altamente no lineal, como lo muestran por ejemplo, los datos generados por los eventos extraordinarios suscitados en la costa chica de Chiapas en septiembre de 1998. Durante esos eventos, lluvias con periodos de retorno de alrededor de 100 años, generaron escurrimientos con periodos de retorno de cerca de 10,000 años (IMTA, 1998).

De acuerdo con diferentes autores, la AMP posee periodos de retorno de entre 10,000 años (Kovacs, 1984) y 10,000,000 años (Newton, 1983), aunque un promedio razonable (para los datos de la costa Atlántica de los Estados Unidos) podría ser de 600,000 años (Shalaby, 1994).

Es indudable que la interpretación probabilista de la AMP permitiría llevar a cabo estudios de riesgo y análisis económicos (Bao *et al*, 1987; Linsley, 1986; Reséndiz-Carrillo y Lave, 1987; Shuzheng, 1984; entre otros), los cuales resultan indispensables en el diseño de nuevas obras.

Por otro lado, Guillot (1979) ha presentado un método de estimación de eventos de diseño basado en datos de precipitación. El método, designado como GRADEX, considera que el concepto de la PMP no tiene importancia práctica, la cual atribuyen solamente al gradiente de las lluvias extremas, al ser éstas ajustadas a distribuciones Gumbel. El método ha sido aplicado a la estimación de avenidas para el diseño de presas (Bouvard, 1994). Los autores concluyen que GRADEX es de fácil aplicación y es un método que puede aplicarse como complemento a otras formulaciones.

También es posible, en el contexto del enfoque hidrometeorológico, llevar a cabo un análisis estadístico de datos de precipitación, ajustarlos a una distribución de probabilidad y generar una tormenta de diseño para un periodo de retorno dado vía extrapolación. Dicha tormenta también se puede transformar en una avenida de diseño mediante el uso de algún modelo lluvia – escurrimiento. No obstante, dado que el proceso lluvia – escurrimiento es altamente no lineal, no existe garantía de que los periodos de retorno de la tormenta de diseño y de la avenida de diseño coincidirán.

Por otro lado, la densidad de estaciones pluviométricas o pluviográficas no es suficiente para la aplicación de métodos basados en el enfoque hidrometeorológico en muchos países del mundo, incluido el nuestro. En efecto, en las condiciones óptimas de operación de la red de estaciones con pluviómetro o pluviógrafo, el territorio nacional cuenta con un promedio de una estación por cada 400 km<sup>2</sup> aproximadamente. Según las recomendaciones emitidas por la OMM (1970), la densidad mínima requerida es de una estación de medición por cada 600 a 900 km<sup>2</sup> para el caso de terrenos planos en zonas tropicales y de una estación por cada 100 a 250 km<sup>2</sup> en terrenos montañosos en zonas tropicales. Estas recomendaciones fueron obtenidas desde un punto de vista hidrometeorológico, a fin de que la red de monitoreo capture razonablemente la variabilidad espacial de la lluvia, y tomando en cuenta también la densidad media de población en el mundo. Ya que nuestro país es predominantemente montañoso, la densidad de estaciones pluviométricas no cumple con las recomendaciones mínimas de la OMM.

Si a la baja densidad de nuestra red de medición se aúna el hecho de que la gran mayoría de las estaciones tienen sólo mediciones acumuladas diarias de la precipitación, se concluye que la aplicación exclusiva de métodos con enfoque hidrometeorológico en nuestro país es muy cuestionable.

De acuerdo con lo expuesto, resulta deseable mejorar los métodos para la determinación de la probabilidad de excedencia del evento de diseño de las estructuras hidráulicas, lo cual nos lleva a la revisión de las técnicas con base hidrométrica.

Existe la opinión de que una combinación adecuada de la información de los métodos con base hidrometeorológica y los que tienen una base hidrométrica podría ser una alternativa para el mejoramiento de estimados de eventos de diseño.

## *Enfoque hidrométrico*

El primer intento exitoso en la interpretación de las avenidas en términos de probabilidad de ocurrencia fue realizado por Fuller (1914) quien usó una distribución de probabilidad normal. Por su parte, Hazen (1913) y Foster (1924) usaron la distribución lognormal y Pearson respectivamente. En 1930, Hazen propuso la transformación logarítmica de los gastos para poder aproximarlos con distribuciones insesgadas, por lo cual se considera el pionero del análisis de frecuencias en hidrología. Los trabajos de Gumbel (1958, 1960a, 1960b, 1962, 1964, 1967), sin duda alguna, dieron gran impulso a este campo.

En el análisis de frecuencias de avenidas se realiza una descripción probabilista de la ocurrencia de los gastos máximos anuales (Chow, 1964; Kirby y Moss, 1987, entre otros) por medio de una función de distribución, a la cual se le determinan sus parámetros utilizando la información histórica disponible, que se considera como una muestra aleatoria. El proceso de determinación de los parámetros de la distribución se conoce comúnmente como “ajuste de la distribución”.

Desde sus inicios y hasta la fecha, en el análisis de frecuencias se ha mantenido la misma pregunta fundamental: ¿Cuál es la distribución de probabilidad que ajusta mejor a los datos?. Al respecto, se ha desarrollado un gran esfuerzo en el planteamiento de nuevas distribuciones y nuevos métodos para la determinación de parámetros. Es indudable que un gran número de factores se ven involucrados en la selección adecuada de una distribución. Al respecto Cunnane (1985) presenta una excelente discusión de éstos.

Entre las distribuciones más utilizadas en el análisis de frecuencias se encuentran principalmente la lognormal, Pearson III, log-Pearson III, Gumbel, Wakeby, Weibull y general de valores extremos (GVE). Todas las distribuciones anteriores corresponden a la consideración de que la muestra provenga de una sola población.

Por otro lado, desde su trabajo en 1930, Hazen reconoció la presencia frecuente de una mezcla de componentes o “poblaciones”, razón por la cual se han propuesto distribuciones de dos poblaciones o de varios componentes (González, 1970, Rossi *et al*, 1984; Singh y Sinclair, 1972; Waylen y Woo, 1982, entre otros).

Recientemente, se ha intentado mejorar la descripción probabilista de las avenidas mediante el análisis específico de *outliers* o la integración de información histórica o paleo – información (por ejemplo, Stedinger, 1986; Sutcliffe, 1987; Cohn y Stedinger, 1987; Bardsley, 1989, Hirsch, 1987; Hirsch y Stedinger, 1987; Hosking y Wallis, 1986 y 1986b; Wall et al, 1987; Baker, 1987; Ikebuchi y Takasao, 1992; Frances et al, 1994). Esto constituye, sin lugar a dudas, un campo con un enorme potencial.

Otro campo del análisis de frecuencias de avenidas que ha tenido gran aplicación lo constituyen los métodos conocidos con el nombre genérico de “análisis regional”. El análisis regional tiene dos metas básicamente, la reducción de los errores de estimación y muestreo en un sitio específico (mejoramiento de estimados) y el análisis de frecuencias en sitios no aforados. Cunnane (1988) realizó un trabajo excelente de recopilación y crítica en el cual ha identificado doce categorías de métodos regionales. Entre los procedimientos regionales más usados se encuentran el método de la avenida índice (Dalrymple, 1960) y los enfoques de regresión múltiple (Benson, 1982). Más

recientemente, se han utilizado técnicas con enfoques multivariados para el análisis regional (Cunnane, 1988). Raynal (1985) y Escalante (1991, 1996) han aplicado la teoría de funciones bivariadas y trivariadas para mejorar los estimados de avenidas con buenos resultados. En este sentido, parece ser que los métodos de análisis regional con base en la aplicación de distribuciones de probabilidad y técnicas multivariadas ofrecen grandes perspectivas (Diaz-Granados y Beeb, 1988; Fiorentino, 1985; Smith, 1989, Raynal, 1985; Escalante, 1991).

Tradicionalmente, el término avenida de diseño se ha tomado como sinónimo de “gasto pico de diseño”, en el sentido en que los métodos consideran que éste es el parámetro más importante (o el único) que caracteriza a un hidrograma. Esto aplica para la mayoría de los trabajos mencionados previamente. Existen revisiones muy amplias del análisis de gastos pico en la modelación de avenidas (por ej. Cunnane, 1987). En estos métodos, la avenida y por lo tanto el riesgo hidrológico quedan representados en forma limitada.

En opinión de McCuen (1998) y Bouvard (1988), el gasto máximo es una variable de diseño aceptable solamente cuando la variación temporal del almacenamiento de la cuenca no es un factor importante en el proceso de generación del escurrimiento. Este hecho solo se cumple en cuencas pequeñas de respuesta rápida.

La mayoría de los hidrólogos concuerdan en que, aunque el gasto pico sea quizás la característica más importante de las avenidas, éstas se presentan como fenómenos multivariados que están caracterizados por otros parámetros además del gasto máximo del hidrograma. En la mayoría de las aplicaciones, la información acerca del volumen de escurrimiento de la avenida, su duración, tiempo pico y la forma del hidrograma son esenciales para la toma de una decisión correcta. De hecho, se ha reconocido que en ocasiones, especialmente cuando el almacenamiento es importante, el volumen de la avenida es tan importante (o incluso más) que el gasto pico de la misma (Bergmann y Sackl, 1985; Bouvard, 1988; Hiemstra y Francis, 1981). No hay duda de que poder asociar un periodo de retorno a la avenida completa sería de gran valor para el diseñador. Pilgrim (1986) y McCuen (1998) reconocen la importancia de la descripción completa de una avenida de diseño. Sin embargo, esta aseveración trae consigo otras complicaciones, ya que el problema de asignar una probabilidad de excedencia y por lo tanto un periodo de retorno al evento de diseño se vuelve más complejo al pasar del análisis probabilista del gasto pico solamente al análisis probabilista de todo el hidrograma.

A partir de 1970, se inician los trabajos relacionados con la implicación de más de una característica de la avenida. Entre estos esfuerzos se pueden definir claramente tres grupos. El primer grupo de trabajos trata a la modelación de avenidas como un proceso estocástico en el cual se consideran generalmente el gasto pico del hidrograma y su duración a través de series de duración parcial (por ej. Todorovic y Zelenhasic, 1970; Todorovic, 1971; Todorovic y Woolhiser, 1972; Gupta *et al*, 1976; Todorovic, 1978; Correia, 1987). Algunos han atacado el problema como un fenómeno de agrupamiento o *clustering* (Kavvas, 1982; Kavvas *et al*, 1983 por ejemplo), o por el principio de máxima entropía (Krstanovic y Singh, 1987). En la mayoría de estos enfoques se llega a la determinación de las funciones de distribución de las características consideradas por medio de técnicas de probabilidad conjunta o distribuciones derivadas. Las técnicas basadas en procesos estocásticos son extremadamente laboriosas, sobre todo por la naturaleza repetitiva de los cálculos y ciertamente no han sido explotadas debidamente. El potencial de estos métodos así como los basados en el análisis bayesiano (Kuczera, 1982; Russel, 1982) no debería ignorarse,

sobre todo con la capacidad de cómputo que se tiene en la actualidad. No obstante, su complicada aplicación ha evitado que sean incorporados a la práctica del diseño ingenieril.

El segundo grupo está formado por todos aquellos métodos basados en el planteamiento de relaciones entre diversas características de la avenida. En este sentido, varios trabajos plantean relaciones empíricas entre gasto pico y volumen de escurrimiento mediante expresiones logarítmicas a través del uso de gastos estandarizados (por ej. Rogers, 1980; Singh y Aminian, 1986; Hawkins y Pole, 1989; Molfino y Cruise, 1990; Balocki y Burges, 1994) o de relaciones de reducción en el gasto (NERC, 1975; Bacchi et al, 1992). A este respecto puede decirse que los métodos basados en relaciones gasto – volumen emplean una formulación débil, ya que el fenómeno de correlación espuria es notorio en ella; además de que la estandarización podría hacer parecer buenos a los datos malos (Molfino y Cruise, 1990). Aunque sea posible plantear las relaciones gasto - volumen aún con pocos datos, la aplicación y verificación de estas formulaciones se ha realizado con datos de cuencas muy pequeñas y de latitudes norte, lo cual limita su aplicabilidad general. En cuanto a los métodos basados en curvas de reducción, el procedimiento del NERC se ha convertido en casi un estándar en Inglaterra. Sin embargo, la inclusión del concepto de riesgo (a través del periodo de retorno) resulta muy artificial, ya que las bases del método llevan a que las curvas de reducción pueden considerarse independientes del periodo de retorno (NERC, 1975), de modo que éste sólo puede tomarse en cuenta en el cálculo del gasto medio máximo anual. De hecho, NERC recomienda el procedimiento para la estimación de eventos con periodos de retorno menores a 100 años. Por último, los procedimientos disponibles no proporcionan en forma explícita el volumen de la avenidas sino sólo su gasto pico y duración por lo cual el volumen se estima en forma arbitraria a través de la asignación de una forma específica. Por las razones expuestas la aplicación de métodos basados en relaciones gasto – volumen a la estimación de avenidas de diseño de obras de gran envergadura resulta cuestionable.

El tercer y último grupo de métodos que intentan describir a las avenidas en forma multiparamétrica está formado por una serie de planteamientos en los cuales se incluye la descripción probabilista multivariada de los hidrogramas a través de funciones de distribución en varias dimensiones (Hiemstra y Francis, 1981; Ashkar y Rousselle, 1982; Bergmann y Sackl, 1985; Pegram y Deacon, 1992; Gutiérrez y Aldama, 1990; Escalante, 1996; Goel *et al.* 1998). A excepción del trabajo de Ashkar y Rousselle (1982), los demás autores plantean el uso de funciones bivariadas. La distribución normal, después de algún proceso de estandarización, se ha utilizado en varios trabajos (Hiemstra y Francis, 1981 y Pegram y Deacon, 1992; Goel *et al.* 1998), así como la distribución exponencial (Ashkar y Rousselle, 1982), la log-normal (Hiemstra y Francis, 1981), y las distribuciones de valores extremos (Gutiérrez y Aldama, 1990; Escalante, 1996). Gran parte de los trabajos se han desarrollado bajo la consideración de independencia estadística entre las variables aleatorias (Ashkar, 1982; Gutiérrez y Aldama, 1990) la cual se ha demostrado (Ramírez, 1997) no es la alternativa más desfavorable.

La importancia de la caracterización probabilista multivariada es innegable, ya que es el hidrograma completo y no sólo el gasto pico el que se utiliza para el diseño de las estructuras. Por esta razón, los enfoques multivariados cobran especial interés en la aplicación práctica; sin embargo, su consideración induce un problema adicional. Es evidente que cuando se caracteriza un hidrograma por medio de varios parámetros, un valor fijo de la probabilidad de excedencia (conjunta en este caso) de dichos parámetros puede corresponder a muchos y diferentes hidrogramas. Es decir, para un mismo periodo de retorno puede existir una infinidad de avenidas

las cuales producirán distintos efectos sobre la estructura por diseñar. La asignación de una probabilidad de excedencia a toda la avenida es un problema que no ha sido completamente resuelto a pesar de los trabajos realizados en este campo.

Un aspecto notable es que los métodos existentes de estimación de avenidas de diseño no están directamente asociados con el tipo de obra para cuyo diseño se está determinando el evento. Por ejemplo, la avenida para el diseño de un canal de desvío o un bordo longitudinal de protección se estima de la misma manera que la avenida para el diseño de una presa. Si el periodo de retorno de diseño es el mismo en ambos casos, las avenidas obtenidas resultarán idénticas. Es decir, el tipo de obra bajo estudio no se ve involucrada de ninguna forma en el proceso de estimación de la avenida de diseño. La oportunidad de poder implicar a la obra en este proceso se vería acrecentada si se utiliza una descripción multivariada de la avenida. Es obvio que el comportamiento de las obras hidráulicas no es el mismo ante diferentes eventos. Entonces también es razonable pensar que la respuesta de algunas obras será más sensible a variaciones en el gasto pico del hidrograma que en el volumen de escurrimiento, o viceversa. Así para algunas obras, sería más desfavorable que el evento de diseño fuera más bien esbelto pero alto, mientras que para otras podría ser bajo pero extendido, por ejemplo. El hecho de que exista una infinidad de avenidas para un mismo periodo de retorno sugiere la posibilidad de incorporar las características de la obra en el proceso de selección del evento de diseño.

#### *Algunos comentarios acerca de los métodos de estimación de avenidas*

De acuerdo con la revisión bibliográfica en el tema y el análisis de los trabajos realizados hasta el momento, se desprenden las siguientes observaciones.

1. Los métodos basados en enfoques hidrometeorológicos proporcionan el hidrograma completo de diseño pero no son la opción más recomendable cuando no existe una densidad apropiada de estaciones para la medición de la precipitación. La falta de datos en la cantidad y calidad adecuada y la complejidad de la modelación del proceso lluvia – escurrimiento pueden ocasionar errores significativos en la estimación de avenidas de diseño.
2. Los métodos con enfoque hidrométrico representan una alternativa atractiva. Los métodos de análisis regional pueden ser empleados para completar registros de periodos cortos e incluso generar datos de escurrimiento en cuencas no aforadas.
3. En el marco del análisis de frecuencias de avenidas, el camino a seguir se dirige hacia la caracterización multiparamétrica de las avenidas de diseño mediante la aplicación de distribuciones de probabilidad multivariadas.
4. De acuerdo con la naturaleza de las variables involucradas en el proceso de estimación de avenidas de diseño, a saber, gastos y volúmenes máximos anuales básicamente, la aplicación de funciones de distribución mutivariadas de valores extremos parece ser viable.
5. Es necesario involucrar a las características de la obra en el proceso de estimación de su propio evento de diseño a fin de tomar en cuenta su comportamiento con respecto a diversos parámetros que describen la avenida.

6. Es recomendable asignar probabilidades de excedencia o periodos de retorno a las variables que efectivamente dictan el dimensionamiento o diseño final de las obras, a fin de establecer niveles de riesgo acordes con la realidad. Tal es el caso de la altura de la cortina de una presa, cuyo valor está directamente dictado por la elevación máxima que alcanza la superficie del agua al transitar la avenida por el vaso, y no tanto por el hidrograma de entrada en sí.

Con base en lo anterior y en la experiencia recopilada por la práctica común en nuestro país, resulta claro que existe la necesidad del desarrollo de nuevos procedimientos de estimación de avenidas de diseño que tengan base física y que involucren a otros parámetros de la avenida además del ya conocido gasto pico.

Ya que en este trabajo se contempla la estimación de avenidas para el diseño de vasos de almacenamiento y de obras hidráulicas ubicadas en redes de ríos, a continuación se incluye un sucinto análisis bibliográfico sobre estos temas específicos.

#### *Estimación de avenidas en vasos. Estado del arte*

Como se expuso anteriormente, la estimación de avenidas de diseño de presas basada en el enfoque hidrométrico se realiza a través del análisis de frecuencias de avenidas de gastos máximos anuales. La práctica más usual en nuestro país consiste en obtener el gasto pico de diseño por medio de extrapolaciones de una cierta función de distribución, la cual se determina mediante un proceso de ajuste utilizando el registro histórico de gastos máximos anuales, para el periodo de retorno elegido. El hidrograma de la avenida se obtiene con procedimientos sintéticos o bien “mayorando” la avenida máxima registrada (Domínguez *et al*, 1980). Este procedimiento introduce, además de la incertidumbre asociada con la extrapolación, errores adicionales al construir el hidrograma de diseño en forma arbitraria.

Aún cuando no hay trabajos específicos relacionados con la estimación de avenidas para el diseño de vasos, existen algunos esfuerzos para la simplificación o comprensión del proceso de ingreso y tránsito de una avenida dentro de un embalse. Se ha planteado también trabajar con ecuaciones de tránsito adimensionales (Akan, 1989 y 1990; Kessler y Diskin, 1991; McEnroe, 1992; Basha 1994 y 1995). En temas de interés para este trabajo, Basha (1994) plantea la obtención de una solución analítica aproximada para el caso de una embalse de área constante y vertedor libre. Basha (1995) generalizó la solución para presas rompe picos proporcionando ecuaciones simples de diseño.

Un aspecto importante que no se toca en los métodos existentes es el hecho de que las variables involucradas en la determinación del evento de diseño no son necesariamente las más importantes para un diseño en particular desde el punto de vista físico. Por ejemplo, si se considera el diseño de una presa se sabe que la variable que define el dimensionamiento definitivo de la cortina es la elevación máxima que alcanza la superficie libre del agua dentro del vaso o alternativamente el almacenamiento máximo. Resultaría entonces recomendable que la probabilidad de excedencia o bien el periodo de retorno estuviera referido a dicha variable (elevación máxima o almacenamiento) más que al gasto pico de la avenida de entrada. En otras palabras, sería mejor que la variable aleatoria en el análisis de frecuencias fuera dicha elevación máxima, ya que no se puede asegurar que un gasto pico con periodo de retorno de 10,000 años genere una elevación máxima del agua dentro del vaso con el mismo periodo de retorno.

Con esta idea, habrá estructuras en las cuales el parámetro más importante sea algún volumen, elevación o gasto de salida, mas que el gasto pico de la avenida de entrada. Un aspecto importante que es necesario destacar, es que la función mediante la cual el gasto máximo del hidrograma de entrada o éste y alguna otra característica de la avenida se transforman en la variable que se debe tomar en forma efectiva para el diseño no es trivial. En el diseño del vaso de almacenamiento, dicha función de transferencia esta dada por el proceso de tránsito de la avenida por el embalse lo cual complica la solución del problema.

### *Estimación de avenidas en redes de ríos. Estado del arte*

Las estructuras hidráulicas como presas y bordos se ubican frecuentemente cerca de la confluencia de dos o más corrientes naturales. Sin embargo, también es muy común que no se disponga de información aguas abajo de dicha confluencia. En el mejor de los casos, es posible que existan estaciones hidrométricas en sitios aguas arriba de la confluencia, es decir sobre las corrientes individuales. Al respecto se han propuesto algunos enfoques para la modelación de avenidas aguas abajo de una confluencia utilizando la información de registros históricos de los ríos antes de la misma. Linsley y Franzini (1972) tratan a las avenidas aguas debajo de la confluencia de dos ríos sólo para los casos en que se observa una completa dependencia o una total independencia entre los registros. Asimismo, Salas (1980) propone la atención del problema en la confluencia de dos ríos a través de un método estadístico no paramétrico pero considerando también dependencia o independencia totales. Gumbel (1961a) propuso por su parte, el uso de una nueva variable aleatoria dada por la suma o la diferencia de valores extremos independientes. Raynal (1985, 1990), en su trabajo de distribuciones bivariadas de valores extremos y sus aplicaciones, se refiere al caso en el cual no se tiene una completa dependencia ni una total independencia y propone el modelado de la suma de las dos variables aleatorias a través de una integral de convolución y una función de densidad bivariada. Escalante (1991) extendió la investigación de Raynal al caso trivariado. Sin embargo, estas aportaciones no se aplican a la modelación de avenidas aguas debajo de confluencias de ríos, sino al mejoramiento de estimados en un análisis regional.

Parece entonces, que el problema de la determinación de probabilidades de ocurrencia de avenidas aguas abajo de confluencias no ha sido investigado completamente. A este respecto, se desprende también que la aplicación de distribuciones multivariadas de valores extremos representa una excelente alternativa.

Resulta deseable disponer de una técnica de análisis de frecuencias “conjunto” que pueda tomar en cuenta los registros de estaciones ubicadas en las corrientes aguas arriba de la confluencia de dos o más ríos. En un caso ideal, las características de la obra por diseñar deben ser tomadas en cuenta de alguna forma en el proceso. Parece lógico pensar que en este caso, también existe una infinidad de combinaciones de avenidas en los ríos individuales que generan una avenida, aguas abajo de la confluencia, con una misma probabilidad de ser excedida. Por esta razón, se debe involucrar un proceso de optimización a fin de elegir la combinación que genere los efectos más desfavorables sobre la estructura en estudio.

El planteamiento del enfoque multivariado al problema estimación de avenidas de diseño en presas y obras ubicadas en redes de ríos resalta la necesidad de revisar los avances sobre el tema de funciones de distribución de valores extremos en más de una dimensión. Las distribuciones univariadas de valores extremos se han usado ampliamente para describir la ocurrencia de gastos

máximos anuales (por ej., Gumbel, 1941, 1944, 1945). NERC (1975) ofrece procedimientos para la aplicación de las tres distribuciones de valores extremos conocidas. La base de la teoría de valores extremos es el trabajo de Fisher y Tippett (1928), así como las investigaciones de Frechét (1927), Von Mises (1936) y Gnedenko (1943). Gumbel (1958, 1960a, 1960b, 1961b, 1962, 1964 y 1967) propuso distribuciones bivariadas y algunos conceptos de la extensión multivariada. Clarke (1980) introdujo la extensión bivariada de la función de distribución gamma mientras Tiago de Oliveira (1975a, 1975b, 1982) realizó importantes contribuciones a la teoría general bivariada. Raynal (1985) trabajó con las funciones bivariadas con marginales Gumbel y general de valores extremos (GVE) cuya extensión trivariada se presenta en Escalante (1991). Algunos trabajos adicionales relacionados con el tema son los de Galambos (1978, 1984), Castillo (1988), Takahashi (1987, 1988), Joe (1990), Marshall y Olkin (1988), Pickands III (1981), Sarkar (1987), Smith *et al.* (1990), Tawn (1988 y 1990), Coles y Tawn (1991) y Daoji (1995).

Como resumen de la revisión de la literatura y el estado del arte en el tema resulta plenamente justificado el planteamiento de nuevos métodos en la estimación de avenidas de diseño, tanto en el caso de vasos de almacenamiento como en el de redes de ríos.

## **Objetivo del trabajo**

El objetivo de la tesis doctoral se desprende en forma directa de los antecedentes y la revisión bibliográfica y consiste en el planteamiento de un nuevo enfoque en la estimación de avenidas para el diseño de obras hidráulicas específicas. El enfoque planteado se aplicará a dos casos de suma importancia en nuestro país: los vasos de almacenamiento con capacidad de control de avenidas y las obras ubicadas en redes de ríos.

En los métodos propuestos se considera, en lo posible, una descripción multiparamétrica de las avenidas y se incorporan las características de las obras en estudio en el proceso de determinación de su propio evento de diseño. Dichos métodos tendrán base física y correspondencia con los requerimientos reales del diseño de obras hidráulicas.

Las dos metodologías que se han integrado tienen como base el denominado análisis de frecuencias conjunto, el cual se ha desarrollado completamente en este trabajo y tiene una enorme aplicación potencial.

## **Organización del trabajo**

El sustento teórico y el desarrollo del llamado ‘análisis de frecuencias conjunto’ se presenta en el capítulo 2 del trabajo. En éste se incluye además una revisión de la teoría estadística multivariada de valores extremos y el desarrollo de un nuevo método de estimación de los parámetros del modelo logístico de Gumbel. También se incluyen las bases para la construcción y el uso de funciones multivariadas de valores extremos con marginales de dos poblaciones.

La aplicación al caso del diseño de la capacidad de control de avenidas de los vasos se introduce en el capítulo 3. Este capítulo incluye algunos desarrollos previos requeridos en el proceso y que por sí solos representan resultados muy interesantes en la hidrología de vasos. En primer lugar, se presenta una justificación teórica de manejar los parámetros más importantes de un hidrograma

como variables aleatorias. Enseguida se presenta una solución analítica aproximada de la ecuación de tránsito de avenidas en vasos para posteriormente desarrollar la parametrización de hidrogramas mediante interpolantes hermitianos. Se incluye la aplicación de la solución analítica aproximada a un caso real y luego se procede a la realización de un análisis de sensibilidad de los parámetros del hidrograma de entrada en la respuesta de vasos. Una vez establecida la mejor manera de considerar el problema del diseño de vasos, se presenta la metodología completa para la estimación de avenidas. Aquí se han incluido dos ejemplo ilustrativos del método propuesto.

En el capítulo 4 se presenta la metodología aplicada al caso de estimación de eventos para el diseño de obras ubicadas en redes de ríos, la cual se ha ilustrado con un ejemplo completo.

Finalmente, se establecen las conclusiones generales del trabajo así como las líneas de investigación que de éste se desprenden, emitiendo las recomendaciones pertinentes.

*Vemos . . . que la teoría de probabilidades es, en el fondo, sólo el sentido común reducido a cálculos; nos hace apreciar con exactitud lo que las mentes razonable sienten por una especie de instinto, en ocasiones sin ser capaces de entenderlo . . .  
Es sorprendente que esta ciencia, que se originó en la consideración de los juegos de azar, se haya convertido en el objeto más importante del conocimiento humano*

Pierre Simon de Laplace

## Teoría estadística y análisis de frecuencias conjunto

En este capítulo, se presenta la base estadística sobre la cual se desarrolla el denominado “análisis de frecuencias conjunto”, siendo este último el concepto básico para el planteamiento de los nuevos enfoques para la estimación de avenidas de diseño.

Aún cuando el objetivo principal de este capítulo es presentar la teoría de funciones de distribución de probabilidad multivariadas de valores extremos así como las aportaciones de este trabajo a la misma, resulta conveniente recordar algunos conceptos básicos de la teoría de las probabilidades, los cuales servirán para los planteamientos posteriores.

### Algunos conceptos básicos de probabilidad

El concepto de probabilidad se apoya en las hipótesis de que el espacio de eventos  $S$  es finito y que los eventos elementales del espacio  $S$  son igualmente posibles. Como es sabido, la probabilidad de que ocurra un cierto evento está entre cero y uno siendo estos extremos los casos de un evento imposible y uno seguro, respectivamente.

Si  $A$  y  $B$  son conjuntos de eventos elementales en  $S$ , es posible asociar dos nuevos eventos dados por las condiciones "tanto  $A$  como  $B$  ocurren" y "o bien  $A$ , o bien  $B$ , o bien ambos ocurren". En el primer caso el nuevo evento contiene todos los eventos elementales que son comunes a  $A$  y  $B$  y lo llamamos intersección de eventos; en el segundo caso el nuevo evento contiene todos los puntos muestrales, con la excepción de los que no pertenecen a  $A$  ni a  $B$  y lo llamamos unión de eventos. Si dos eventos no pueden ocurrir simultáneamente, se dice que son mutuamente excluyentes y se cumple que  $A \cap B = \emptyset$

Existen dos leyes básicas para la determinación de las probabilidades de eventos resultantes de la unión y la intersección de eventos elementales y son conocidas como las leyes de adición y multiplicación de probabilidades, las cuales se generalizan para el caso de  $n$  eventos como se indica a continuación.

#### *Ley de adición de probabilidades*

La generalización de esta ley ha sido referida como la fórmula de inclusión - exclusión en algunos textos (Castillo, 1988; Kendall y Stuart, 1963, 1967; Mood et al, 1974).

Sean  $E_1, E_2, \dots, E_n$ ,  $n$  eventos arbitrarios. Entonces la fórmula de inclusión - exclusión resulta (Castillo, 1988):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap E_{i_3}) - \dots + (-1)^{n+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_n}) \quad (2.1)$$

llamando

$$S_{k,n} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_k}) \quad (2.2)$$

y recordando que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n E'_i\right)$$

donde  $E'_i$  es el evento complementario a  $E_i$ . Se puede expresar también que:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n E'_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i S_{i,n} \quad (2.3)$$

donde  $S_{0,n} = 1$ .

### *Ley de multiplicación de probabilidades*

La generalización de la ley de multiplicación de probabilidades para  $n$  eventos denominados  $E_i$ , está dada por la siguiente expresión, válida para  $n \geq 2$ :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) = \prod_{i=1}^n P\left(E_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} E_j\right) \quad (2.4)$$

en donde  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  es la probabilidad condicional de  $B$  dado que haya ocurrido  $A$ .

Para el caso de  $n$  eventos estadísticamente independientes  $E_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  se cumple que:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) = \prod_{i=1}^n P(E_i) \quad (2.5)$$

### **Distribuciones de probabilidad**

La distribución de probabilidad acumulada o simplemente función de distribución se representa por  $F(x)$  y es la probabilidad del evento en el cual la variable aleatoria  $x$  tome cualquier valor igual o menor que un cierto valor dado de  $x$ , digamos  $x$ . Es decir, para una variable aleatoria continua se tendrá:

$$F(x) = P(x \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

donde  $f(x)$  es la función de densidad de probabilidad, la cual no representa una probabilidad pero sí una medida de la "intensidad" de ésta en el punto  $x$ .  $F(x)$  es monótonamente no decreciente y cumple con  $0 \leq F(x) \leq 1$ . Asimismo se cumple que:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

En la modelación de algunos fenómenos es necesario conocer el comportamiento simultáneo de dos o más variables aleatorias, por lo cual es común manejar el concepto de probabilidad conjunta.

Consideremos que se tienen  $n$  variables aleatorias de interés en el mismo espacio. Entonces la probabilidad de un evento tal que  $x_1 \leq x_1, x_2 \leq x_2, \dots, x_n \leq x_n$  se denota por:

$$P(x_1 \leq x_1, x_2 \leq x_2, \dots, x_n \leq x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

donde  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es la función de distribución de probabilidades conjunta multivariada mientras que  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es la función de densidad correspondiente. Igualmente, a  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  le corresponde una cierta función de distribución acumulada que se denota  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , la cual está definida de una manera única y es monótonamente no decreciente en cada dirección  $x_i$ .

Las funciones de densidad y de distribución acumulada están relacionadas por:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

por lo cual se cumple

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Cuando todas las variables excepto  $x_i$  tienden a un límite infinito,  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tenderá a un límite  $F_i(x_i)$ , que es precisamente la distribución marginal de  $x_i$  es decir:

$$F_i(x_i) = F(+\infty, \dots, +\infty, x_i, +\infty, \dots, +\infty)$$

Si  $n-k$  variables aleatorias tienden al infinito, el límite de  $F$  define una distribución marginal  $k$ -dimensional de las restantes  $k$  variables. Evidentemente una distribución conjunta  $n$ -variada debe cumplir con los axiomas básicos de la probabilidad, es decir:  $0 \leq F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1$ ;  $F(+\infty, \dots, +\infty) = 1$  y  $F(x_1, +\infty, \dots, +\infty) = F(+\infty, x_2, \dots, +\infty) = F(+\infty, +\infty, \dots, +\infty, x_n) = F(x_1, +\infty, \dots, +\infty, x_n) = F(+\infty, +\infty, \dots, +\infty, x_n) = 0$ .

La ley de multiplicación de probabilidades indica que si las  $n$  variables aleatorias son estadísticamente independientes su función de distribución de probabilidad y, por tanto, su función de densidad de probabilidad cumple con:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2) \dots F_n(x_n)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2)\dots f_n(x_n) \quad (2.6)$$

donde  $F_i(x_i)$  es la distribución marginal de  $x_i$ , y  $f_i(x_i)$  es la correspondiente densidad marginal de  $x_i$ .

En la práctica, la independencia estadística de las variables aleatorias es una propiedad que puede ser atribuida por el ingeniero al suponer que éstas no se encuentran relacionadas de ninguna manera (Benjamin y Cornell, 1970).

El concepto de independencia es usualmente muy importante para aplicar con éxito la teoría de las probabilidades. Desde un punto de vista práctico el análisis de muchos modelos probabilísticos sería muy complejo si no se adoptase el supuesto de independencia de ciertas variables aleatorias en situaciones claves. Sin embargo, aunque la consideración de independencia estadística entre los eventos implica una simplificación en el análisis, este hecho puede no corresponder a la realidad física del fenómeno. Por esta razón, la consideración de independencia debe analizarse en forma detallada para los eventos involucrados en un problema específico.

### **Funciones de distribución de probabilidad multivariadas**

Entre las funciones de densidad y distribución de probabilidad multivariadas más conocidas y aplicadas se encuentran la función normal y la función log-normal, las cuales están dadas por formas multivariadas explícitas (Yevjevich, 1982). Cabe adicionar que en la literatura se pueden encontrar las formas bivariadas de varias distribuciones; sin embargo, las extensiones multivariadas no son comunes. En este sentido, Johnson y Kotz (1972) han realizado una importante labor de recopilación de las funciones continuas multivariadas.

### **Funciones multivariadas de valores extremos**

Las distribuciones de valores extremos han sido ampliamente utilizadas para el ajuste de la distribución de eventos hidrológicos extremos, como por ejemplo los gastos máximos de un río o las lluvias máximas, desde su introducción en este campo por Gumbel (1954). Por esta razón y debido a la naturaleza de los fenómenos que se pretenden modelar en este trabajo, se establecerán mayores detalles acerca de las propiedades de estas distribuciones.

Sea  $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) \in \mathfrak{R}^k$  un vector aleatorio  $n$ -dimensional con función de distribución:

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv P(x^{(1)} \leq x_1, x^{(2)} \leq x_2, \dots, x^{(n)} \leq x_n)$$

Sean también  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  vectores (independientes) en  $\mathfrak{R}^k$ .

La teoría de valores extremos se basa en las llamadas “estadísticas de orden”, las cuales tienen su origen en las propiedades que poseen las muestras de variables aleatorias cuando éstas son ordenadas de acuerdo con algún criterio. En particular, si la muestra es ordenada de mayor a menor (de acuerdo con el valor de las variables aleatorias), existen dos casos de particular interés, los cuales están dados precisamente por los extremos de dicho ordenamiento. Es decir,

$$Z_n^{(j)} = \text{máx} (x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(n)})$$

$$L_n^{(j)} = \text{mín} (x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(n)})$$

Estos dos casos dan lugar a la teoría de valores máximos y mínimos, lo que se conoce con el nombre genérico de “teoría de valores extremos”, la cual tiene un papel esencial en nuestra aplicación. En particular, nuestro interés se encuentra en el extremo superior del ordenamiento, por lo cual de aquí en adelante nos referiremos exclusivamente a la teoría de valores máximos.

De acuerdo con lo anterior, es posible introducir la notación  $\mathbf{Z}_n = (Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}, \dots, Z_n^{(k)})$ . Entonces, el vector  $\mathbf{Z}_n$  es el correspondiente a los máximos valores de los vectores aleatorios.

La existencia de las distribuciones de valores extremos, se basa en el cumplimiento del llamado “postulado de estabilidad”, el cual es una extensión del teorema del límite central dentro de la teoría de los valores extremos. Este teorema fue establecido primeramente por Fisher y Tippet (1928) y probado después de una forma general por Gnedenko (1943). El postulado de estabilidad se expresa de la forma siguiente (Galambos, 1978).

“Supongamos que existen secuencias  $\mathbf{a}_n = (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \dots, a_n^{(k)})$  y  $\mathbf{b}_n = (b_n^{(1)}, b_n^{(2)}, \dots, b_n^{(k)})$  de vectores (no aleatorios) tales que para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$ ,  $b_n^{(j)} > 0$ , y que la función de distribución  $F^n(a_n^{(1)} + b_n^{(1)} Z_1, \dots, a_n^{(k)} + b_n^{(k)} Z_k)$  del vector normalizado  $(\mathbf{Z}_n - \mathbf{a}_n) / \mathbf{b}_n$  converge débilmente a una función de distribución  $H(Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$ , cuyas marginales univariadas  $H_j(Z_j)$ ,  $1 \leq j \leq k$  son no degeneradas. En este proceso, las operaciones se llevan a cabo componente a componente. Tal función de distribución multivariada  $H(Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$  se llama función de distribución de valores extremos (para máximos en este caso)”.

La convergencia débil, también llamada convergencia en distribución se define de la forma siguiente. Sea  $\{F_n(x)\}$  una secuencia de funciones de distribución de probabilidad que depende de  $n$ , siendo este un entero positivo. Si  $F(x)$  es una función de distribución y si  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$  para cada punto  $x$  en el que  $F(x)$  es continua, entonces  $F_n(x)$  converge en distribución o débilmente a  $F(x)$  (Hogg y Craig, 1978).

Por otro lado, una distribución  $F(x)$  se denomina degenerada si tiene una probabilidad de 1 concentrada en un solo punto (Hogg y Craig, 1978).

Dentro de los hallazgos principales en la teoría de los valores extremos se ha encontrado que para el cumplimiento del postulado de estabilidad, las distribuciones marginales univariadas deben ser algunas de los siguientes tipos (Gumbel, 1958):

Tipo I. Distribución Gumbel o Doble exponencial

$$F_1(x) = \exp(-\exp(-x)) \quad -\infty < x < \infty \quad (2.7)$$

Tipo II. Distribución Fréchet

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \exp(-x^{-\alpha}) \quad x > 0, \alpha > 0 \\ F_2(x) &= 0 \quad x \leq 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Tipo III. Distribución Weibull

$$\begin{aligned} F_3(x) &= \exp[-(-x)^\alpha] \quad x \leq 0, \alpha > 0 \\ F_3(x) &= 1 \quad x > 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

En las expresiones (2.7) a (2.9),  $x$  es una variable estandarizada o normalizada (adimensional).

Estos tres tipos se conocen también como las distribuciones de la primera, segunda y tercera asíntota o tipo respectivamente.

Entre éstas se ha encontrado que la distribución Weibull o de valores extremos Tipo III es aplicable a problemas de valores mínimos más que máximos de las variables aleatorias (Herbert, 1981). También es frecuente, que la distribución Gumbel o de valores extremos Tipo I represente en forma convincente la distribución de valores máximos de escurrimientos, lluvias y otros fenómenos meteorológicos (Galambos, 1978).

Algunas distribuciones univariadas se han desarrollado a partir de soluciones particulares del postulado de estabilidad, el cual debe satisfacerse en cualquier distribución de extremos.

Jenkinson (1955), obtuvo la solución general de la ecuación funcional que deben satisfacer los valores extremos (postulado de estabilidad), tal y como habían establecido Fisher y Tippett. La solución fue designada por autores posteriores a él como "Distribución General de Valores Extremos" y conocida comúnmente como GVE. La función de distribución está dada por:

$$F(x) = \exp \left\{ - \left[ 1 - \frac{(x-u)}{\delta} k \right]^{1/k} \right\} \quad (2.10)$$

donde:

$u$  es un parámetro de ubicación

$\delta$  es un parámetro de escala, ( $\delta > 0$ )

$k$  es un parámetro de forma

La distribución GVE representa directamente las distribuciones de valores extremos Tipos II y III, mientras que la distribución Tipo I resulta de una condición límite. Efectivamente, cada tipo

de distribución está caracterizado por el valor del parámetro de forma como se demuestra a continuación.

Cuando se tiene  $k \rightarrow 0$ , se obtiene la distribución Gumbel o de valores extremos Tipo I.

Para  $k \rightarrow 0$ , se tiene que:

$$F_1(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \exp\left\{-\left[-\left(\frac{x-u}{\delta}\right)k\right]^{1/k}\right\}$$

Llamando  $\tilde{x} = \frac{x-u}{\delta}$  se puede escribir que:

$$F_1(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \exp\left\{-\left[-k\tilde{x}\right]^{1/k}\right\}$$

lo que resulta en:

$$F_1(x) = \exp(-\exp(-\tilde{x}))$$

La distribución Fréchet o de valores extremos Tipo II, se obtiene cuando el parámetro de forma es negativo ( $k < 0$ ).

En este caso, cuando  $k < 0$ , se puede introducir la variable  $\alpha = -\frac{1}{k}$ , por lo que se puede escribir:

$$F_2(x) = \exp\left\{-\left[\frac{\tilde{x} + \alpha}{\alpha}\right]^{-\alpha}\right\}, \text{ con } \alpha > 0.$$

lo que con el cambio de variable  $\tilde{x}_2 = \frac{\tilde{x} + \alpha}{\alpha}$ , conduce a:

$$F_2(x) = \exp\left\{-\tilde{x}_2^{-\alpha}\right\}$$

Finalmente, la distribución Weibull o de valores extremos Tipo III, se alcanza cuando el parámetro de forma es positivo ( $k > 0$ ).

Aquí, se puede introducir la variable  $\alpha = \frac{1}{k}$ , lo que sustituido en la función GVE produce:

$$F_3(x) = \exp\left\{-\left[-\frac{x-\alpha}{\alpha}\right]^\alpha\right\}, \text{ con } \alpha > 0$$

si se llama  $\tilde{x}_3 = \frac{x-\alpha}{\alpha}$ , finalmente se obtiene:

$$F_3(x) = \exp\left\{-\left(\tilde{x}_3\right)^\alpha\right\}$$

Galambos (1978) establece también que para que una distribución multivariada sea de valores extremos es necesario pero no suficiente que las distribuciones marginales sean de valores extremos. Por otro lado, se tiene que  $F(\mathbf{x})$  determina en forma única a todas las marginales, sin embargo lo contrario no es verdadero, ya que existen varias posibilidades de  $F(\mathbf{x})$  para marginales dadas  $F_j(x)$ ,  $1 \leq j \leq k$ , aunque no existe una completa libertad en la elección de  $F(\mathbf{x})$ . Entre las condiciones más importantes se encuentran las siguientes.

*Fronteras de Fréchet (Fréchet, 1927).*

Sea  $F(\mathbf{x})$  una función de distribución  $k$ -dimensional con marginales  $F_j(x)$ ,  $1 \leq j \leq k$ . Entonces, para todas las  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , se cumple que:

$$\max\left(0, \sum_{j=1}^k F_j(x_j) - k + 1\right) \leq F(x_1, \dots, x_k) \leq \min(F_1(x_1), \dots, F_k(x_k)) \quad (2.11)$$

Aunque para  $k$  grande, la frontera inferior tiende a ser trivial, en el caso bivariado ( $k = 2$ ) ésta es una guía útil en la construcción de distribuciones bivariadas con marginales dadas (Galambos, 1978).

*Condición de Galambos (Galambos, 1984).*

Otra propiedad que deben satisfacer de las distribuciones multivariadas de valores extremos es la presentada por Galambos (1984), introducida previamente por Tiago de Oliveira (1962, 1963), y que consiste en la desigualdad siguiente:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) \geq F_1(x_1)F_2(x_2)\dots F_k(x_k) \quad (2.12)$$

La expresión (2.12) indica que la función de distribución conjunta multivariada es siempre mayor o igual que la función de distribución correspondiente al caso en que se cumple la independencia estadística entre las variables.

Algunos autores han estudiado con mayor detalle el caso especial de las distribuciones bivariadas de valores extremos y han extendido sus hallazgos a funciones multivariadas, como por ejemplo Tiago de Oliveira (1962, 1963), Gumbel (1960a), Marshall y Olkin y Mardia (Galambos, 1978).

Se han propuesto varios modelos bivariados entre los que destacan la distribución Morgenstern, la Gumbel tipo I y Gumbel tipo II, la Marshall y Olkin y la Mardia (Castillo, 1988).

Gumbel (1962) demostró que existen tres posibles funciones para distribuciones bivariadas de valores extremos para máximos, a saber:

1. Tipo Gumbel-Gumbel, en donde las dos funciones marginales son Gumbel.
2. Tipo Gumbel-GVE, en donde una de las funciones marginales es Gumbel y la otra es general de valores extremos.
3. Tipo GVE-GVE, en donde ambas funciones marginales son tipo GVE.

Escalante (1994) ha desarrollado algunas extensiones trivariadas de los modelos, dando lugar a lo que él mismo ha denominado distribuciones VET111, VET112, VET122 y VET222. En su nomenclatura, 1 y 2 representan el uso de distribuciones marginales del tipo Gumbel y General de Valores Extremos respectivamente.

Los modelos para la construcción de funciones multivariadas de valores extremos, pueden clasificarse en dos clases, los diferenciables y los no diferenciables (Raynal, 1985).

Los resultados obtenidos por Tiago de Oliveira (1962, 1963) y Gumbel y Mustafi (1967) consideran explícitamente, para el caso bivariado, dos posibles funciones de distribución de probabilidades diferenciables:

El modelo mixto:

$$F_{12}(x_1, x_2) = F_1(x_1) F_2(x_2) \exp \left\{ \alpha \left[ \frac{1}{-\ln F_1(x_1)} + \frac{1}{-\ln F_2(x_2)} \right]^{-1} \right\} \quad (2.13)$$

y el modelo logístico:

$$F_{12}(x_1, x_2) = \exp \left( - \left\{ [-\ln F_1(x_1)]^m + [-\ln F_2(x_2)]^m \right\}^{\frac{1}{m}} \right) \quad (2.14)$$

donde  $F_1(x_1)$  y  $F_2(x_2)$  son alguna de las tres posibles distribuciones marginales mencionadas anteriormente. El segundo modelo recibe dicho nombre ya que la diferencia entre dos marginales Gumbel reducidas sigue la distribución logística, mientras que el modelo mixto tiene una función de dependencia (Castillo, 1988), que resulta de una mezcla de funciones para los casos de independencia y completa dependencia cuando las marginales son Gumbel (Tiago de Oliveira, 1982).

En las expresiones anteriores  $x_i$  es una variable estandarizada y  $\alpha$  y  $m$  son parámetros de asociación restringidos a  $0 \leq \alpha \leq 1$  y  $m \geq 1$ . Los casos con  $\alpha = 0$  y  $m = 1$  corresponden al hecho de que  $x_1$  y  $x_2$  sean estadísticamente independientes, de tal forma que las expresiones

(2.13) y (2.14) se simplifican llevando a que la función de distribución es el producto de las distribuciones marginales.

En el caso bivariado, los parámetros de asociación se encuentran relacionados con el coeficiente de correlación lineal entre las variables aleatorias y resultan estar dados por las expresiones que se presentan a continuación.

Para el modelo mixto (Tiago de Oliveira, 1962):

$$\rho = \frac{6}{\pi^2} \left[ \arccos \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]^2 \quad (2.15)$$

Para el modelo logístico (Gumbel et al, 1967):

$$\rho = 1 - \frac{1}{m^2} \quad (2.16)$$

en donde como es sabido, el coeficiente de correlación lineal está definido como:

$$\rho = \frac{\text{Cov}(x_1, x_2)}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}} \quad (2.17)$$

donde  $\text{Cov}(x_1, x_2)$  es la covarianza entre  $x_1, x_2$  y  $\sigma_u$  es la desviación estándar de  $u$ .

Resulta evidente que los casos  $\alpha = 1$  y  $m = \infty$  corresponden a la completa dependencia entre las variables ( $\rho = 1$ ).

Las relaciones analíticas entre el coeficiente de correlación lineal y el parámetro de asociación para modelos en más de dos dimensiones no se conocen.

Raynal (1985) estudió con cierto detalle el modelo mixto y el logístico y llegó a establecer que el modelo logístico es el más apropiado para la aplicación en problemas de análisis de frecuencias debido a su mayor flexibilidad. Por otro lado, Tiago de Oliveira (1982) establece que cuando las muestras son muy pequeñas ambos modelos pueden funcionar bien, pero afirma que el modelo logístico “admite alternativas que pueden estar lejos de la independencia”. Para el modelo mixto, establece “ las variaciones pequeñas del coeficiente de correlación muestran que la desviación de la independencia es muy pequeña y por lo tanto difícil de detectar”.

Con estos antecedentes, parece apropiado utilizar en los desarrollos de este trabajo el modelo logístico, razón por la cual se mencionan características y detalles adicionales acerca de éste.

La extensión multivariada del modelo logístico ha sido establecida por Gumbel (1960b) como:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; m) = \exp \left( - \left\{ [-\ln F_1(x_1)]^m + [-\ln F_2(x_2)]^m + \dots + [-\ln F_n(x_n)]^m \right\}^{1/m} \right) \quad (2.18)$$

donde  $F_i(x_i)$  es la distribución marginal de  $x_i$  y  $m$  es el parámetro de asociación ( $m \geq 1$ )

En forma general se tiene que si  $m = 1$ , lo que indica independencia estadística, se cumple que:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; 1) = F_1(x_1)F_2(x_2) \dots F_n(x_n)$$

Para  $m \rightarrow \infty$ ,  $\rho \rightarrow 1$ , que representa el caso de dependencia total, la función de distribución multivariada es:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; \infty) = \min[F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)] \quad (2.19)$$

lo cual ha sido demostrado por Johnson y Kotz (1972).

Cuando las distribuciones marginales tienen una distribución de valores extremos tipo I (Gumbel), el modelo logístico general proporciona la distribución multivariada de valores extremos Gumbel, la que en forma explícita es:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp \left\{ - \left[ \exp \left( -m \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) + \exp \left( -m \frac{x_2 - u_2}{\alpha_2} \right) + \dots + \exp \left( -m \frac{x_n - u_n}{\alpha_n} \right) \right]^{1/m} \right\} \quad (2.20)$$

donde  $u_1, u_2, \dots, u_n$  y  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  son los parámetros de ubicación y escala para la estandarización de la variable aleatoria.

Las formas bivariada y trivariada de este modelo son ampliamente conocidas y han sido usadas con fines hidrológicos (Raynal, 1985 y 1990; Escalante, 1991 y 1996). Las funciones de densidad para estos modelos son respectivamente:

Función de densidad bivariada Gumbel (función biGumbel)

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \exp \left( -m \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) \exp \left( -m \frac{x_2 - u_2}{\alpha_2} \right) \left[ \exp \left( -m \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) + \exp \left( -m \frac{x_2 - u_2}{\alpha_2} \right) \right]^{1/m - 2} \{ m - 1 + \left[ \exp \left( -m \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) + \exp \left( -m \frac{x_2 - u_2}{\alpha_2} \right) \right]^{1/m} \} \exp \left\{ - \left[ \exp \left( -m \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) + \exp \left( -m \frac{x_2 - u_2}{\alpha_2} \right) \right]^{1/m} \right\} \quad (2.21)$$

Función de densidad trivariada Gumbel (función triGumbel)

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{e^A e^B e^C}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \exp(-E^{1/m}) \{2m^2 - 3m + 1\} E^{1/m-3} + (3m - 3) E^{2/m-3} + E^{3/m-3} \quad (2.22)$$

donde:

$$A = -m \left( \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) \quad B = -m \left( \frac{x_2 - u_2}{\alpha_2} \right) \quad C = -m \left( \frac{x_3 - u_3}{\alpha_3} \right)$$

$$E = \exp A + \exp B + \exp C \quad (2.23)$$

### Estimación de parámetros de las funciones de distribución de valores extremos

Ya que las funciones de densidad y distribución de probabilidad generadas por las extensiones multivariadas de los modelos de valores extremos son muy complejas, la estimación de los parámetros de la distribución por el método de los momentos resulta muy laboriosa. Una excelente alternativa es la utilización de la metodología de la máxima verosimilitud.

El método de la máxima verosimilitud genera estimados consistentes de los parámetros que describen la distribución, lo cual no se encuentra fácilmente en otros métodos de estimación (Hogg et al, 1978).

Es conveniente recordar que un estimador  $\hat{\theta}_n$  es consistente para el parámetro  $\theta$  si (Mendenhall et al. 1994):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\hat{\theta}_n - \theta \leq \varepsilon) = 1$$

donde el subíndice  $n$  implica que el estimador se ha obtenido a partir de una muestra de tamaño  $n$  y  $\varepsilon$  es un número positivo arbitrario. En otras palabras podemos decir que un estimador es consistente si éste se aproxima cada vez más al valor real del parámetro a medida que la muestra a partir del cual se calcula crece en tamaño.

La función de verosimilitud de  $n$  variables aleatorias está definida como la densidad conjunta de las  $n$  variables y es una función de los parámetros. Es decir, si los vectores  $\mathbf{x}_1 = \{x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}\}^T$ ,  $\mathbf{x}_2 = \{x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}\}^T$ , ...,  $\mathbf{x}_k = \{x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}\}^T$  representan una muestra aleatoria de tamaño  $k$  de una densidad  $n$ -variada  $f$ , la función de verosimilitud correspondiente es (Mood et al, 1974):

$$L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^k f(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}) \quad (2.24)$$

donde  $\boldsymbol{\theta}$  es el vector de los parámetros.

El máximo de  $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$  ocurre en el mismo punto que el máximo de  $LL(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ , la función logarítmica de verosimilitud, la cual, en este caso, es más fácil de manejar que  $L$ . La función logarítmica de verosimilitud se puede escribir entonces como:

$$LL(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \sum_{i=1}^k \ln f(x_i; \theta)$$

Se dice entonces que los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de la distribución multivariada son aquellos valores para los cuales se maximiza la función de verosimilitud o la función logarítmica de verosimilitud. La maximización puede realizarse con cualquier algoritmo de optimización como por ejemplo el planteado por Rosenbrock (1960) para el caso de múltiples variables con restricciones.

Para la distribución biGumbel, la función logarítmica de verosimilitud resulta (Raynal, 1985):

$$\begin{aligned}
 LL(x_1, x_2, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2; m) = & -n(\ln \alpha_1 + \ln \alpha_2) + \sum_{i=1}^n -m \left( \frac{x_{1i} - u_1}{\alpha_1} \right) - m \left( \frac{x_{2i} - u_2}{\alpha_2} \right) + \\
 & \ln \left( \exp \left( -m \left( \frac{x_{1i} - u_1}{\alpha_1} \right) \right) + \exp \left( -m \left( \frac{x_{2i} - u_2}{\alpha_2} \right) \right) \right)^{-1/2} + \\
 & \ln \left[ m - 1 + \left( \exp \left( -m \left( \frac{x_{1i} - u_1}{\alpha_1} \right) \right) + \exp \left( -m \left( \frac{x_{2i} - u_2}{\alpha_2} \right) \right) \right)^{\frac{1}{m}} \right] - \quad (2.25) \\
 & \left( \exp \left( -m \left( \frac{x_{1i} - u_1}{\alpha_1} \right) \right) + \exp \left( -m \left( \frac{x_{2i} - u_2}{\alpha_2} \right) \right) \right)^{\frac{1}{m}}
 \end{aligned}$$

Para el caso de la distribución triGumbel se tiene que:

$$\begin{aligned}
 LL(x_1, x_2, x_3; \theta) = & -[\ln \alpha_1 + \ln \alpha_2 + \ln \alpha_3] \sum_{i=1}^k A B C (-E^{1/m}) \ln \{ (2m^2 - 3m + 1) E^{1/m-3} + \\
 & (3m - 3) E^{2/m-3} + E^{3/m-3} \} \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

donde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $E$  están dadas por las expresiones (2.23).

En el caso en que las muestras tengan diferentes periodos de registro, el procedimiento de estimación de los parámetros por máxima verosimilitud presenta algunas variantes. Los detalles de estas metodologías pueden consultarse en Raynal (1985) para el caso bivariado y en Escalante

(1991) para el caso trivariado. Extensiones para los casos de mayores dimensiones no son del conocimiento del autor.

Como se mencionó, el parámetro  $m$  representa el grado de asociación entre las variables aleatorias pudiendo variar desde  $m = 1$ , para el caso de completa independencia, hasta el caso  $m \rightarrow \infty$  para la condición de dependencia total.

Para el caso bivariado, el parámetro de asociación  $m$  puede estimarse a partir del coeficiente de correlación, según la expresión (2.16) o bien mediante su relación con la desviación estándar de las diferencias reducidas de las variables aleatorias (Gumbel et al, 1967). Sin embargo, hasta donde se sabe, no existen relaciones explícitas para la estimación de  $m$  para funciones en más de dos dimensiones. Escalante (1991), por ejemplo, selecciona un valor predefinido para este parámetro al trabajar las funciones trivariadas.

Ahora bien, con respecto a la estimación de los parámetros de estas distribuciones podemos establecer lo siguiente. Supongamos que todos los parámetros de ubicación, escala y asociación se incluyen en la función de verosimilitud, la cual deberá maximizarse para la estimación de tales parámetros.

Si se consideran valores arbitrarios, pero fijos, de los parámetros de ubicación y escala y además, para el caso bivariado, se introduce la notación:

$$x'_{1i} = \frac{x_{1i} - u_1}{\alpha_1}, \quad x'_{2i} = \frac{x_{2i} - u_2}{\alpha_2}, \quad K_1 = -n(\ln \alpha_1 + \ln \alpha_2)$$

se puede escribir:

$$LL(x_1, x_2, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, m) = K_1 + \sum_{i=1}^n -m x_{1i} - m x_{2i} + \ln (\exp (-m x_{1i}) + \exp (-m x_{2i}))^{-1/2} +$$

$$\ln \left[ m - 1 + (\exp (-m x_{1i}) + \exp (-m x_{2i}))^{\frac{1}{m}} \right] - (\exp (-m x_{1i}) + \exp (-m x_{2i}))^{\frac{1}{m}}$$

Resulta claro que para  $m \rightarrow \infty$ , se tiene que  $\exp (-m x_{1i}) \rightarrow 0$  y  $\exp (-m x_{2i}) \rightarrow 0$ , por lo cual muchos términos desaparecen, persistiendo sin embargo, los términos en los cuales  $m$  es un coeficiente. Con esto se tiene que  $L \rightarrow \infty$  y también  $LL \rightarrow \infty$ . Este breve análisis establece que, necesariamente, la maximización de la función de verosimilitud conducirá a  $m = \infty$ . El caso trivariado obedece, desde luego, al mismo procedimiento.

Por otro lado, ya que el parámetro  $m$  representa una medida de la posible dependencia entre las variables, resulta razonable plantear su estimación a partir de la muestra de las variables aleatorias. Por estas razones, el parámetro de asociación quedará excluido del proceso de optimización de la función de verosimilitud.

En vista de que no se dispone de método alguno para estimar el parámetro de asociación del modelo logístico para el caso multivariado general con marginales Gumbel, se ha desarrollado aquí un nuevo procedimiento. Este método es una extensión del procedimiento denominado "método basado en el contenido de los cuadrantes" presentado por Gumbel y Mustafi (1967), el cual ha sido aplicado al caso bivariado solamente. A continuación se presentan las bases teóricas del método propuesto.

La extensión multivariada del modelo logístico planteada por Gumbel (1960) está dada por la ecuación (2.18) como :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; m) = \exp\left(-\left\{[-\ln F_1(x_1)]^m + [-\ln F_2(x_2)]^m + \dots + [-\ln F_n(x_n)]^m\right\}^{\frac{1}{m}}\right)$$

la cual es una función de distribución de probabilidad estable con distribuciones marginales  $F_i(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

El parámetro  $m$  cumple con  $1 < m < \infty$ , mientras la condición de Galambos (ec. 2.12) establece que:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; m) \geq F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n) \equiv F(x_1, x_2, \dots, x_n; 1) \quad (2.27)$$

Si se considera que las distribuciones marginales siguen funciones Gumbel (primera asíntota o de valores extremos tipo I, Gumbel, 1958) se tiene que:

$$F_i(x_i) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x_i - u_i}{\alpha_i}\right)\right] \quad (2.28)$$

Al introducir las variables estandarizadas (reducidas) según la transformación lineal

$$\bar{x}_i = \frac{x_i - u_i}{\alpha_i} \quad (2.29)$$

las funciones de probabilidad de valores extremos Gumbel para las marginales pueden simplificarse como:

$$F(\bar{x}_1) = \exp[-\exp(-\bar{x}_1)]$$

$$F(\bar{x}_2) = \exp[-\exp(-\bar{x}_2)]$$

⋮

$$F(\bar{x}_n) = \exp[-\exp(-\bar{x}_n)]$$

y no contienen ningún parámetro. Por lo tanto, la función multivariada puede escribirse como:

$$F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; m) = \exp[-(e^{-m\bar{x}_1} + e^{-m\bar{x}_2} + \dots + e^{-m\bar{x}_n})^{1/m}] \quad (2.30)$$

la cual sólo contiene a  $m$  como parámetro desconocido.

Considérese ahora, el punto fijo dado por las medianas de las distribuciones marginales, denotadas por  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  y las cuales están dadas, por definición, como:

$$F(\bar{x}_i) = e^{-m\bar{x}_i} = 0.50$$

de donde se obtiene que:  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_n = 0.36651292..$

Las expresiones  $\bar{x}_i = \bar{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  definen rectas en dos dimensiones, planos en tres dimensiones e hiperplanos en cuatro y más dimensiones. Dichas rectas, planos e hiperplanos dividen el espacio  $n$ -dimensional en  $2^n$  regiones. De esta manera, para  $n = 2$  se tienen 4 cuadrantes, para  $n = 3$ , se tienen 8 octantes y así sucesivamente.

Ya que las medianas son iguales, los valores de las distribuciones marginales correspondientes a ellas también lo serán y la probabilidad  $F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  o  $F(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_1)$  a lo largo de la diagonal, será una potencia de la función de probabilidad marginal, resultando que la probabilidad de no excedencia del punto fijo es:

$$F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; m) = [\exp\{-\exp(-\bar{x})\}]^{n/m} = 2^{-n/m} \quad (2.31)$$

habiendo sustituido  $\bar{x} = 0.36651292..$

Ya que  $F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; m) = P(\bar{x}_1 < \bar{x}_1, \bar{x}_2 < \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n < \bar{x}_n)$ , ésta será entonces, la probabilidad correspondiente a una de las  $2^n$  regiones descritas anteriormente, la cual se designa como la primera porción. A la probabilidad teórica correspondiente a cada porción se le llama "contenido teórico" de acuerdo con la nomenclatura utilizada por Gumbel y Mustafi (1967) en el método original.

Asimismo, aprovechando las propiedades del punto fijo dado por las medianas y la fórmula de inclusión - exclusión (ecuaciones 2.1 a 2.3), la cual es la generalización de la ley de adición de probabilidades, se obtiene la expresión para la probabilidad de excedencia de la mediana en las  $n$  direcciones,  $P(\bar{x}_1 \geq \bar{x}_1, \bar{x}_2 \geq \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \geq \bar{x}_n)$  la cual se designa como  $G(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ . La demostración se presenta a continuación.

Sean los eventos  $E_i = \{\bar{x}_i \leq \bar{x}_i\}$  y sus correspondientes eventos complementarios  $E'_i = \{\bar{x}_i > \bar{x}_i\}$ . La función de distribución (de no excedencia) puede escribirse como:

$$F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = P(\bar{x}_1 < \bar{x}_1, \bar{x}_2 < \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n < \bar{x}_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right)$$

mientras que la función de excedencia está dada por:

$$G(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \equiv P(\bar{x}_1 \geq \bar{x}_1, \bar{x}_2 \geq \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \geq \bar{x}_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n E'_i\right)$$

De acuerdo con la expresión (2.3), Castillo (1988) y Galambos (1978), se tiene que:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n E'_i\right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k S_{k,n} = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k S_{k,n}$$

en donde se puede recordar que  $S_{0,n} = 1$ .

Galambos (1978) establece y demuestra que existe una relación para  $S$  que permite simplificar el cálculo de las probabilidades. Tal expresión, la cual presenta también Castillo (1988), está dada por:

$$S_{k,n} = \binom{n}{k} P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \binom{n}{k} P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right)$$

Recordando que:

$$F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right)$$

se puede escribir:

$$S_{k,n} = \binom{n}{k} F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

siendo  $\binom{n}{k}$  el coeficiente binomial.

Con esto

$$G(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

lo que de acuerdo con las propiedades del punto dado por las medianas, resulta finalmente en:

$$G(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; m) \equiv P(\bar{x}_1 \geq \bar{x}_1, \bar{x}_2 \geq \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \geq \bar{x}_n) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^{-k/n} \quad (2.32)$$

Cabe señalar que esta expresión general para la probabilidad de excedencia conjunta del punto definido por las medianas es una aportación original presentada en este trabajo.

Utilizando las expresiones (2.31) y (2.32) se pueden obtener los contenidos teóricos de la totalidad de las porciones. Por supuesto se debe cumplir que el contenido teórico en las porciones a ambos lados del punto mediano en las  $n$  dimensiones debe ser 0.50.

Como ejemplo, las tablas 2.1 y 2.2 muestran los contenidos teóricos de las porciones para el caso bivariado y trivariado respectivamente.

Cuadrante	Descripción	Contenido Teórico
1	$x_1 < \bar{x}, x_2 < \bar{x}$	$2^{-2^{1/m}}$
2	$x_1 < \bar{x}, x_2 > \bar{x}$	$\frac{1}{2} - 2^{-2^{1/m}}$
3	$x_1 > \bar{x}, x_2 > \bar{x}$	$2^{-2^{1/m}}$
4	$x_1 > \bar{x}, x_2 < \bar{x}$	$\frac{1}{2} - 2^{-2^{1/m}}$

Tabla 2.1. Contenido teórico para el caso bivariado

Octante	Descripción	Contenido Teórico
1	$x_1 < \bar{x}, x_2 < \bar{x}, x_3 < \bar{x}$	$2^{-3^{1/m}}$
2	$x_1 < \bar{x}, x_2 > \bar{x}, x_3 < \bar{x}$	$2^{-2^{1/m}} - 2^{-3^{1/m}}$
3	$x_1 > \bar{x}, x_2 > \bar{x}, x_3 < \bar{x}$	$\frac{1}{2} - 2\left(2^{-2^{1/m}}\right) + 2^{-3^{1/m}}$
4	$x_1 > \bar{x}, x_2 < \bar{x}, x_3 < \bar{x}$	$2^{-2^{1/m}} - 2^{-3^{1/m}}$
5	$x_1 < \bar{x}, x_2 < \bar{x}, x_3 > \bar{x}$	$2^{-2^{1/m}} - 2^{-3^{1/m}}$
6	$x_1 < \bar{x}, x_2 > \bar{x}, x_3 > \bar{x}$	$\frac{1}{2} - 2\left(2^{-2^{1/m}}\right) + 2^{-3^{1/m}}$
7	$x_1 > \bar{x}, x_2 > \bar{x}, x_3 > \bar{x}$	$-\frac{1}{2} + 3\left(2^{-2^{1/m}}\right) - 2^{-3^{1/m}}$
8	$x_1 > \bar{x}, x_2 < \bar{x}, x_3 > \bar{x}$	$\frac{1}{2} - 2\left(2^{-2^{1/m}}\right) + 2^{-3^{1/m}}$

Tabla 2.2. Contenido teórico para el caso trivariado

Obviamente en todos los casos se debe cumplir que  $\sum_{i=1}^{2^n} C_i = 1$ , donde  $C_i$  es el contenido teórico de la porción  $i$ .

Sean ahora  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$  las frecuencias relativas observadas en las porciones 1, 2,  $\dots$ ,  $n$  respectivamente. Estas frecuencias observadas se obtienen directamente de la muestra multivariada.

El método de estimación propuesto en este trabajo consiste en igualar el contenido teórico de cada porción con su correspondiente frecuencia relativa observada. Este proceso permite obtener  $2^n$  estimados del parámetro  $m$  (en general diferentes). Un sólo valor del parámetro de asociación se puede obtener minimizando el error cuadrático de estimación, el cual está definido por:

$$EE = \sum_{i=1}^{2^n} (C_i - \mathcal{F}_i)^2 \quad (2.33)$$

donde  $n$  es el número de variables involucradas en el análisis.

Ya que la distribución conjunta multivariada no se conoce al inicio del cálculo, no es posible conocer tampoco las distribuciones marginales y las variables reducidas. Por esta razón, se propone aquí el procedimiento de estimación iterativo descrito a continuación. Se pueden estimar valores iniciales para los parámetros de escala y forma de las distribuciones marginales mediante el ajuste de distribuciones Gumbel univariadas a los datos registrados. Con esto se puede construir la función multivariada y determinar el primer estimado del parámetro de asociación  $m$ ; una vez conocido  $m$  es posible caracterizar la función multivariada, calcular las medianas y las frecuencias relativas observadas en cada porción y determinar un nuevo valor del parámetro  $m$ . El proceso iterativo terminará cuando se obtenga el mismo valor del parámetro  $m$  en dos cálculos consecutivos. En cada iteración, se propone utilizar el método de la máxima verosimilitud para la estimación de los parámetros de escala y forma de la distribución. Al final del proceso se dispondrá de la función multivariada completamente caracterizada.

La condición  $1 \leq m \leq \infty$  impone ciertas restricciones en los valores de las frecuencias teóricas de las porciones. Por ejemplo en el caso bivariado se tiene que:

$$\begin{aligned} 0.125 \leq C_1 \leq 0.50 & & 0 \leq C_2 \leq 0.375 \\ 0.125 \leq C_3 \leq 0.50 & & 0 \leq C_4 \leq 0.375 \end{aligned}$$

Mientras que para el caso trivariado se tendrá que:

$$\begin{aligned} 0.125 \leq C_1 \leq 0.50, \quad 0 \leq C_2 \leq 0.125, \quad 0 \leq C_3 \leq 0.125, \quad 0 \leq C_4 \leq 0.125 \\ 0 \leq C_5 \leq 0.125, \quad 0 \leq C_6 \leq 0.125, \quad 0.125 \leq C_7 \leq 0.50, \quad 0 \leq C_8 \leq 0.125 \end{aligned}$$

si  $\mathcal{F}$  cae fuera de estos intervalos en alguna porción, dicha porción no podrá ser utilizada en la estimación del parámetro de asociación  $m$ .

### **Funciones de distribución con poblaciones mezcladas**

En la mayoría de los análisis de frecuencias se considera que los datos provienen de una sola población básica. Sin embargo, en hidrología por ejemplo, es muy frecuente encontrar que los fenómenos son el resultado de factores causantes distintos. Este hecho fue reconocido por Hazen (1930) quién planteó la existencia de poblaciones mezcladas en las muestras de datos y por tanto, en el análisis de frecuencias. En estos casos, la distribución de la variable aleatoria es una combinación de dos o más distribuciones básicas.

La presencia de poblaciones mezcladas puede producirse principalmente en sitios donde sea factible tener eventos de naturaleza distinta. En el caso de escurrimientos, éstos podrían ser producidos por lluvias o bien por deshielos, o quizás por convección normal o bien por ciclones y huracanes.

Por las razones anteriores, se presentan a continuación algunas consideraciones sobre el uso de funciones de probabilidad de poblaciones mezcladas en el caso multivariado.

Si  $f_i(x)$  para  $i = 1, 2, \dots, r$  representan funciones de densidad de probabilidad (fdp) y  $\lambda_i$  para  $i=1, 2, \dots, r$  son factores de ponderación cumpliendo con  $\lambda_i \geq 0$  y  $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$ , entonces se tendrá que:

$$f_x(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i(x_i) \quad (2.34a)$$

es una fdp denominada 'distribución mezclada' ya que está compuesta de una mezcla de  $f_i(x)$ . Resulta obvio que, en la distribución mezclada, los eventos pertenecientes a las diferentes poblaciones son mutuamente excluyentes.

Los parámetros  $\lambda_i$  pueden tomarse como la probabilidad de que la variable aleatoria pertenezca a la distribución de probabilidad  $f_i(x)$ , donde  $f_i(x)$  es la distribución de probabilidad de  $x$  dado que ésta pertenece a la  $i$ -ésima distribución.

La distribución acumulada de  $x$  está dada por consiguiente como:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x \sum_{i=1}^r \lambda_i f_i(t) dt = \sum_{i=1}^r \lambda_i \int_{-\infty}^x f_i(t) dt \quad (2.34b)$$

La función de distribución de probabilidad así construida puede aplicarse en situaciones donde se identifiquen dos o más causas distintas para los eventos. Por ejemplo, en el caso de la presencia de dos poblaciones digamos escurrimientos producidos por tormentas convectivas y otros generados por tormentas ciclónicas, las avenidas máximas producidas por convección pueden describirse a través de  $f_1(x)$  mientras las generadas por ciclones lo harán mediante  $f_2(x)$ . Si  $\lambda_1$  es la proporción o probabilidad de las avenidas generadas por tormentas convectivas y  $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$  es la proporción de tormentas ciclónicas, entonces las ecuaciones (2.34a) y (2.34b) describirán la densidad y distribución mezclada de probabilidades de las avenidas máximas respectivamente.

En México, el principal modelo para la construcción de funciones de probabilidad para poblaciones mezcladas, es el desarrollado por González Villarreal (1970). Para el caso de dos poblaciones, el modelo está dado por:

$$F(q) = F_1(q)[p + (1-p)F_2(q)] \quad (2.35)$$

donde:

$q$  es la variable aleatoria, gasto en este caso,  
 $F_1(q)$  es la FDP asociada a la población 1,  
 $F_2(q)$  es la FDP asociada con la población 2,  
 $F(q)$  es la FDP de la mezcla de poblaciones y  
 $p$  es la probabilidad de que la variable pertenezca a la población 1.

En su forma más difundida, se acepta que ambas poblaciones siguen distribuciones del tipo Gumbel (valores extremos tipo I), con lo cual la distribución mezclada resulta:

$$F(x) = \exp\left[-e^{-(x-u_1)/\alpha_1}\right] \left\{ p + (1-p) \exp\left[-e^{(x-u_2)/\alpha_2}\right] \right\} \quad (2.36)$$

donde:

$x$  es la variable aleatoria de la distribución. González desarrolló esta distribución utilizando a los gastos máximos anuales como variables aleatorias,  
 $u_1, u_2$  son los parámetros de ubicación asociados con las poblaciones 1 y 2 respectivamente,  
 $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son los parámetros de escala asociados con las poblaciones 1 y 2 respectivamente,  
 $p$  es la probabilidad de que  $x$  pertenezca a la población 1,  
 $F_1(x)$  y  $F_2(x)$  son las FDP de las poblaciones 1 y 2, y  
 $F(x)$  es la FDP de la mezcla de las poblaciones.

Con la formulación (2.35), González intentó tomar en cuenta la posibilidad de haber considerado a un evento como perteneciente a la población 1 cuando realmente corresponde a la población 2. Por esta razón, existe una diferencia entre las construcciones (2.34) (para  $r = 2$ ) y (2.35), la cual esta dada por:

$$F_E(x) - F_G(x) = (1-p)[F_1(x)F_2(x) - F_2(x)] \quad (2.37)$$

donde  $F_E(x)$  y  $F_G(x)$  son las formulaciones para el caso de eventos mutuamente excluyentes (2.34) y la propuesta por González respectivamente.

Es evidente que para el caso  $p = 1$ , las dos formulaciones coinciden, pero a medida que el grado de segregación del fenómeno aumenta, las formulaciones pueden arrojar resultados muy distintos.

La distribución mezclada propuesta por González presenta una clara inconsistencia, ya que para el caso en que  $p = 0$ , es decir, que toda la muestra provenga de la población 2, se tiene que  $F(x) = F_1(x) F_2(x)$ , lo cual carece de sentido.

Al introducir el concepto del periodo de retorno en las expresiones (2.34) y (2.35) se puede establecer que para un gasto dado,  $T_E \geq T_G$ , lo cual también implica que, para un periodo de retorno dado, la formulación propuesta por González Villarreal genera gastos mayores que la correspondiente a eventos excluyentes. Para fines de diseño, esta sobrestimación parece no ser un problema grave, sin embargo, la utilización de la distribución Gumbel propuesta por González puede conducir a un sobrediseño sistemático de las obras.

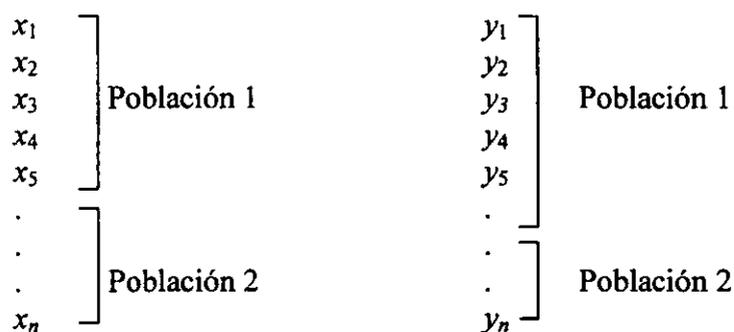
Aunque la idea de González es valiosa, con respecto a la presencia de eventos ciclónicos y no ciclónicos, las herramientas actuales de pronóstico y rastreo de ciclones tropicales nos permiten

garantizar la certeza en la segregación de la muestra, por lo cual no sería necesario considerar una cierta probabilidad de error en tal separación.

El resultado de la discusión anterior nos conduce a afirmar que la construcción de distribuciones con poblaciones mezcladas debe realizarse con base en la expresión (2.34). Naturalmente, este hecho se toma en cuenta para el establecimiento de las funciones multivariadas de valores extremos en las cuales se utilizan distribuciones marginales de poblaciones mezcladas.

El concepto de las funciones de distribución con poblaciones mezcladas puede extenderse al caso multivariado, sin embargo, la construcción de funciones de distribución multivariadas de valores extremos con marginales de dos poblaciones por ejemplo, no se encuentra completamente documentada. Escalante (1998) plantea la construcción de una función multivariada en la cual las distribuciones marginales son distribuciones Gumbel mixta (doble Gumbel). En su trabajo, Escalante utiliza la formulación correspondiente a eventos excluyentes y plantea la estimación de los parámetros en forma general. Dentro de estas mismas ideas, se presenta a continuación un análisis del comportamiento general de estas funciones.

Para establecer las condiciones de construcción de las FDPs multivariadas con poblaciones mezcladas, considérese en principio el caso bivariado y supóngase que se desea ajustar las variables aleatorias  $x$ ,  $y$  a una función de densidad o distribución conjunta  $f(x, y)$  o  $F(x, y)$ . Si existe evidencia de la existencia de poblaciones mezcladas, la muestra de datos puede segregarse de la forma siguiente:



Entonces, las funciones  $F(x)$  y  $F(y)$  podrán ajustarse a distribuciones de dos poblaciones. Si ambas marginales son del tipo I de valores extremos o Gumbel, se tendrá que:

$$F(x) = \exp\left[-e^{-(x-a_1)/c_1}\right] p_x + (1-p_x) \exp\left[-e^{(x-a_2)/c_2}\right]$$

$$F(y) = \exp\left[-e^{-(y-a_3)/c_3}\right] p_y + (1-p_y) \exp\left[-e^{(y-a_4)/c_4}\right]$$

La construcción de la función conjunta bivariada puede realizarse a partir de la extensión del modelo logístico propuesto por Gumbel (1960b) dada por (2.18), como:

$$F(x, y; m) = \exp\left(-\left\{ [-\ln F(x)]^m + [-\ln F(y)]^m \right\}^{\frac{1}{m}}\right)$$

donde  $m$  es un parámetro de asociación.

Introduciendo las variables estandarizadas:

$$x_1 = \frac{x+a1}{c1}, x_2 = \frac{x+a2}{c2}, y_1 = \frac{y+a3}{c3}, y_2 = \frac{y+a4}{c4}$$

Para que  $F(x,y)$  sea una FDP adecuada, en primer lugar se tiene que cumplir con los axiomas básicos de la probabilidad. A saber:

- 1) Si  $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty$ , entonces:  $x_1 \rightarrow -\infty, x_2 \rightarrow -\infty$  y además  $y_1 \rightarrow -\infty, y_2 \rightarrow -\infty$ , por lo que  $\ln F(x) \rightarrow \infty$  y también  $\ln F(y) \rightarrow \infty$  y por lo tanto  $F(x,y) \rightarrow 0$ . Por lo tanto se cumple que  $F(-\infty, -\infty) = 0$ , lo cual es adecuado para una PDF bivariada.
- 2) De igual forma se tiene que si  $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ , entonces:  $x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow \infty$  y además  $y_1 \rightarrow \infty, y_2 \rightarrow \infty$ , lo cual resulta en  $\ln F(x) \rightarrow 0$  y también  $\ln F(y) \rightarrow 0$ , lo cual produce:  $F(\infty, \infty) = 1$ , lo que también cumple con los axiomas básicos.
- 3) Para valores crecientes de  $x, y$ , la función debe ser monotónicamente creciente.

Para demostrar esto, tomemos por ejemplo  $\xi = x+\delta$  y  $\tau = y+\delta$ , lo cual produce las variables estandarizadas siguientes:

$$\frac{x+\delta+a1}{c1} = \tilde{x}_1 \text{ con } \tilde{x}_1 > x_1$$

$$\frac{x+\delta+a2}{c2} = \tilde{x}_2 \text{ con } \tilde{x}_2 > x_2$$

$$\frac{y+\delta+a3}{c3} = \tilde{y}_1 \text{ con } \tilde{y}_1 > y_1$$

$$y_2 = \frac{y+\delta+a4}{c4} = \tilde{y}_2 \text{ con } \tilde{y}_2 > y_2$$

por lo que se tendrá que:

$$\ln F(\xi) = \ln \left[ e^{-e^{-\tilde{x}_1}} p_x + (1 - p_x) e^{-e^{-\tilde{x}_2}} \right]$$

$$\ln F(\tau) = \ln \left[ e^{-e^{-\tilde{y}_1}} p_y + (1 - p_y) e^{-e^{-\tilde{y}_2}} \right]$$

lo cual produce que  $\ln F(\xi) < \ln F(x)$  para cualquier  $\delta > 0$ . En forma similar se obtiene que  $\ln F(\tau) < \ln F(y)$ .

De acuerdo con esto y comparando  $F(x, y)$  con  $F(\xi, \tau)$  se tiene que:

$$F(x, y) = \exp\left\{-\left[(-\ln F(x))^m + (-\ln F(y))^m\right]^{1/m}\right\}$$

$$F(\xi, \tau) = \exp\left\{-\left[(-\ln F(\xi))^m + (-\ln F(\tau))^m\right]^{1/m}\right\}$$

y como se cumple que  $\ln(\bullet) \leq 0$  y también  $-\ln(\bullet) \geq 0$  entonces se puede afirmar que:

$$F(x, y) \leq F(\xi, \tau)$$

lo cual muestra que la función es monotonícamente creciente.

Por otro lado, Galambos (1978) establece que la selección del modelo logístico de Gumbel para la construcción de la función multivariada garantiza el cumplimiento de las fronteras de Fréchet.

Finalmente, la desigualdad presentada por Galambos (1984) se debe también cumplir.

$$F(x, y) \geq F(x) F(y)$$

Supongamos inicialmente que  $F(x) F(y) > F(x, y)$ . El cual sabemos que corresponde al caso de independencia estadística entre las variables y es válido para  $m = 1$ , por lo cual:

$$F(x, y; 1) = \exp\left(-\left\{\left[-\ln F(x)\right]^m + \left[-\ln F(y)\right]^m\right\}^{1/m}\right) = F(x) F(y)$$

Entonces,  $F(x) F(y) > F(x, y) = F(x) F(y)$  es una igualdad que no tiene sentido y no podrá ser cumplida de ninguna manera, por lo cual, la hipótesis  $F(x) F(y) > F(x, y)$  no puede ser válida, obteniendo entonces que la desigualdad de Galambos se cumple.

De esta manera se demuestra que las funciones de distribución multivariadas con marginales Gumbel de dos poblaciones son distribuciones adecuadas y pueden utilizarse en la descripción probabilística de eventos conjuntos.

Para el caso bivariado, por ejemplo, la función de distribución obtenida, designada aquí como función Bigumbel Doble, contiene hasta 11 parámetros a saber: parámetro de asociación entre variables  $m$ , proporción de separación entre poblaciones de la primera variable,  $p_1$ ; proporción de separación entre poblaciones de la segunda variable,  $p_2$ , parámetros de ubicación y escala de las cuatro subpoblaciones,  $a_1, c_1, a_2, c_2, a_3, c_3, a_4$  y  $c_4$ . Las expresiones aplicables a este caso se presentan en el apéndice A de este trabajo.

Para la estimación de los parámetros o ajuste de la distribución se puede la forma siguiente. El parámetro de asociación puede continuar siendo estimado por la expresión (2.18) como:

$$m = \frac{1}{1-p}$$

Si se conocen con seguridad los eventos que han sido generados por las diferentes poblaciones, los parámetros de separación de poblaciones,  $p_1$  y  $p_2$  pueden obtenerse directamente de la muestra a partir de:

$$p_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{\text{número de eventos favorables a la población 1 en la variable 1}}{\text{Número de eventos totales}}$$

$$p_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{\text{número de eventos favorables a la población 1 en la variable 2}}{\text{Número de eventos totales}}$$

En forma alterna, estos parámetros pueden incluirse en la función de verosimilitud.

De esta forma la función queda descrita hasta por diez parámetros, los cuales pueden obtenerse con el método de la máxima verosimilitud.

Para el caso de distribuciones en más de dos dimensiones, los cálculos son análogos, llegando al final al establecimiento de las distribuciones o densidades completamente descritas. Los casos en mayores dimensiones cumplen de igual forma con las condiciones preestablecidas para que sean FDP o FDP adecuadas.

Se concluye entonces que las FDP multivariadas, formadas por marginales de dos poblaciones cumplen con todos los requisitos de las funciones de probabilidad, por lo cual son de potencial aplicación en problemas de hidrología superficial.

### **Análisis de frecuencias conjunto**

La naturaleza aleatoria de las variables hidrológicas ha sido reconocida por siglos, y el campo de la hidrología fue, por lo tanto, de las primeras áreas de la ingeniería en utilizar conceptos de estadística y probabilidad para el análisis de los fenómenos naturales. El análisis de frecuencias en hidrología es una técnica para la estimación de las probabilidades de ocurrencia o excedencia de eventos futuros generalmente asociados con el diseño de alguna obra hidráulica.

El análisis de frecuencias en hidrología se basa en el tratamiento probabilístico de los registros existentes, razón por la cual es muy susceptible a la cantidad y la calidad de los datos. Algunos hidrólogos concuerdan en que cuando se tienen registros menores a 10 años, cualquier tipo de análisis de frecuencias debería evitarse (Viessman et al, 1977).

El ajuste de distribuciones de probabilidad a las series de datos históricos (registro disponible) es el método más común para el análisis de frecuencias. Con esto, la magnitud de los eventos se determina a partir de la línea de mejor ajuste (que es la distribución considerada). La probabilidad

de ocurrencia de los eventos se toma en cuenta a través del denominado “periodo de retorno” el cual esta definido en forma probabilista.

El periodo de retorno ( $T$ ) corresponde al tiempo promedio transcurrido entre ocurrencias de un evento de magnitud dada o uno de magnitud mayor (Haan, 1986) y está definido como el inverso de la probabilidad de excedencia, es decir:

$$T = \frac{1}{P(x \geq x)} \quad (2.39)$$

o bien como:

$$T = \frac{1}{1 - P(x \leq x)} = \frac{1}{1 - F(x)} \quad (2.40)$$

A partir de la expresión (2.40), la determinación de eventos para diferentes periodos de retorno, una vez que se ha elegido una función de distribución de probabilidad, es prácticamente directa, ya que para un  $T$  dado, se calcula  $F(x)$  y con la FDP considerada se determina el valor de la variable aleatoria.

En el análisis de frecuencias tradicional, el periodo de retorno esta relacionado con una sola variable, el gasto máximo por ejemplo. Sin embargo, cuando más de una variable aleatoria se encuentra involucrada en el estudio, se debe considerar una extensión del concepto del periodo de retorno, dando lugar a lo que hemos denominado aquí “periodo de retorno conjunto”. Este último es la base del “análisis de frecuencias conjunto”, el cual describe el comportamiento simultáneo de varias variables aleatorias. Por ejemplo, Goel *et al.* (1998) reconocen la existencia de un periodo de retorno asociado con la ocurrencia o excedencia de varias combinaciones de eventos.

Sea los eventos  $E_i = P(x_i \geq x_i)$  correspondientes a la probabilidad de excedencia de cada una de las  $i$  variables aleatorias, donde  $i = 1, 2, \dots, n$ . Entonces, de acuerdo con la definición, la generalización natural del concepto de periodo de retorno, considerando la ocurrencia conjunta de los eventos, es:

$$T_{1,2,\dots,n} = \frac{1}{E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n}$$

o bien como:

$$T_{1,2,\dots,n} = \frac{1}{P(x_1 \geq x_1, x_2 \geq x_2, \dots, x_n \geq x_n)}$$

En forma particular, el caso bivariado ha sido expresado, sin generalización alguna por Goel et al (1998) como:

$$T_{1,2,\dots,n} = \frac{1}{1 - F(x_1) - F(x_2) + F(x_1, x_2)}$$

donde  $F(x_1)$  y  $F(x_2)$  son las distribuciones marginales de las variables aleatorias.

En este trabajo se ha desarrollado la generalización de este caso, lo cual se presenta a continuación.

Nótese que  $P(x_1 \geq x_1, x_2 \geq x_2, \dots, x_n \geq x_n)$  corresponde a la probabilidad de la intersección de los eventos elementales  $E_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ , de tal forma que la extensión al caso  $n$ -dimensional de la expresión para el periodo de retorno conjunto se puede realizar mediante el uso de la fórmula de inclusión - exclusión presentada anteriormente (2.3), la cual indica que:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i S_{i,n} \quad (2.41)$$

donde:

$S_{k,n} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(E'_{i_1} \cap E'_{i_2} \cap \dots \cap E'_{i_k})$ , siendo los eventos  $E'_i$  los eventos complementarios a  $E_i$ , recordando además que  $S_{0,n} = 1$ . La expresión anterior es válida para  $n \geq 2$ .

De esta forma, el periodo de retorno conjunto esta dado por:

$$T_{1,2,\dots,n} = \frac{1}{\sum_{i=0}^n (-1)^i S_{i,n}} \quad (2.42)$$

o bien en forma explícita en función de las FDPs marginales y conjuntas como:

$$T_{1,2,\dots,n} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n F_i(x_i) + \sum_{i_1 < i_2 \leq n} F_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) - \dots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} F_{i_1 i_2 \dots i_n}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})} \quad (2.43)$$

como ejemplo, los casos bivariado y trivariado conducen respectivamente a:

$$T_{1,2} = \frac{1}{1 - F(x_1) - F(x_2) + F(x_1, x_2)} \quad (2.44)$$

$$T_{1,2,3} = \frac{1}{1 - F(x_1) - F(x_2) - F(x_3) + F(x_1, x_2) + F(x_1, x_3) + F(x_2, x_3) - F(x_1, x_2, x_3)} \quad (2.45)$$

los cuales proporcionan los periodos de retorno conjuntos correspondientes a la excedencia conjunta de las variables aleatorias en función de las distribuciones marginales y conjuntas.

La expresión (2.43) puede también obtenerse mediante la relación entre la función de distribución acumulada  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $P(x_1 \geq x_1, x_2 \geq x_2, \dots, x_n \geq x_n) = G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  conocida también como función complementaria (*survival function* en inglés), la cual según Castillo (1988) está dada por:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i S_{i,n} + (-1)^n G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Si se asocian periodos de retorno individuales a las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , los cuales se pueden calcular a partir de sus distribuciones marginales univariadas  $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$  respectivamente y a los que llamamos  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , se tendrá que:

$$T = \frac{1}{1 - F_i(x_i)}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.46)$$

Las desigualdades aplicables a las distribuciones de valores extremos permiten obtener relaciones interesantes. Por un lado las fronteras de Fréchet (2.11) conducen a:

Frontera inferior:  $T_{1,2,\dots,n} \geq 1$

Frontera superior:  $T_{1,2,\dots,n} \geq \max[T_1, T_2, \dots, T_n]$

Aunque la frontera inferior conduce a un resultado trivial, la frontera superior indica que el periodo de retorno conjunto será siempre mayor o igual al máximo de los periodos individuales.

Por otro lado, la desigualdad 2.12 nos lleva a que:

$$T_{1,2,\dots,n} \leq T_{1,2,\dots,n}^* \quad (2.47)$$

en donde  $T_{1,2,\dots,n}^*$  corresponde al periodo de retorno conjunto correspondiente al caso en el que las variables aleatorias sean estadísticamente independientes. La condición de independencia, la cual se puede expresar como  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1)F(x_2)\dots F(x_n)$ , sustituida en la ecuación 2.43 conduce a:

$$T_{1,2,\dots,n}^* = T_1 T_2 \dots T_n \quad (2.48)$$

Las expresiones (2.47) y (2.48) indican que la independencia estadística entre las variables representa la condición menos desfavorable para un periodo de retorno dado. Este es un resultado importante, ya que como se había comentado brevemente, la mayoría de los análisis estadísticos se basan en la hipótesis de independencia estadística.

El caso de completa dependencia, descrito por Johnson *et al* (1972) como:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min[F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)]$$

indica que:

$$T_{1,2,\dots,n} = \frac{1}{1 - F_M(x_M)}$$

donde:

$$F_M(x_M) = \max[F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)]$$

Ahora bien, cuando los eventos son completamente dependientes, uno no puede ocurrir sin la ocurrencia de los otros, por lo tanto la probabilidad de excedencia conjunta es igual a la probabilidad de excedencia de uno cualquiera de los eventos ya que todas estas probabilidades tendrán el mismo valor, por lo cual se cumple que:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1) = F(x_2) = \dots = F(x_n)$$

lo que sustituido en la ecuación (2.43) conduce a:

$$T_{1,2,\dots,n} = T_1 = T_2 = \dots = T_n \quad (2.49)$$

De acuerdo con las expresiones (2.48) y (2.49) se concluye que para un periodo de retorno dado, la dependencia total entre las variables aleatorias representa la condición más desfavorable para los efectos de diseño.

Sin embargo, la aplicación de esta condición en todos los casos llevaría al sobrediseño sistemático de las obras. Es evidente que en el caso general no se presenta una total dependencia entre los eventos por lo que la consideración de una dependencia parcial, a través de la ecuación (2.43) parece razonable.

Según la expresión (2.43), resulta interesante notar que para un periodo de retorno  $T_{1,2,\dots,n}$  dado, puede existir un número infinito de juegos de valores de las variables aleatorias  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tales que satisfacen dicha relación.

Este hecho, que en principio parece una debilidad del enfoque propuesto como análisis de frecuencias conjunto se torna de hecho en una de sus principales ventajas.

Al existir un número infinito de eventos posibles para un periodo de retorno dado, la propuesta de atención para la obtención de un solo evento con probabilidad de excedencia conocida consiste en el planteamiento de una solución mediante un proceso de optimización. Es evidente que las diferentes combinaciones de valores de las variables aleatorias  $x_1, x_2, \dots, x_n$  producen efectos distintos sobre la obra para la cual se está estimando el evento de diseño o revisión. Necesariamente una de dichas combinaciones, denominadas de aquí en adelante "vectores

solución del problema” producirá el efecto más desfavorable sobre la estructura u obra particular bajo estudio.

Por un lado, este enfoque de solución permite tomar en cuenta el hecho de que obras no son igualmente susceptibles a las variaciones de todas las variables aleatorias involucradas en el fenómeno natural. Así por ejemplo, si las variables aleatorias representan diferentes características de un mismo evento, el método permite determinar cuál evento en particular genera los efectos más desfavorables en el comportamiento de la obra. Por otro lado, el método también permite involucrar las características de la obra particular bajo estudio en el proceso de estimación de su propio evento de diseño. Es decir, con este proceso, aunque el periodo de retorno de diseño y la ubicación del sitio de proyecto no varíen, la avenida resultante dependerá de la obra en particular bajo estudio, generándose así, en general, diferentes eventos de diseño para diferentes obras.

En este procedimiento se dispone además de la flexibilidad en la construcción de la función objetivo del proceso de optimización, la cual podría tomar en cuenta además de las características propias de la obra en cuestión, los aspectos económicos, ambientales o de alguna otra índole.

El enfoque presentado, que en general puede aplicarse al análisis de frecuencias de cualquier caso en el que participen más de una variable aleatoria, deberá sin embargo, analizarse para cada caso en particular. En este trabajo se presenta la aplicación del procedimiento a la determinación de avenidas para el diseño de vasos de almacenamiento y a la estimación de avenidas de diseño en obras ubicadas en redes de ríos.

En la primera aplicación, la estimación de una avenida para el diseño o revisión de vasos de almacenamiento se realiza mediante la consideración de diversas características del hidrograma. De esta forma, las variables aleatorias corresponden a los propios parámetros que describen un solo evento. Si la avenida se describe por  $k$  parámetros, el problema se puede resolver mediante una extensión  $k$ -variada del análisis de frecuencias.

En el segundo de los casos, como se podrá ver en forma detallada, las variables aleatorias corresponden a los gastos máximos anuales registrados en los ríos individuales antes de cualquier confluencia, con lo cual una red de  $k$  ríos individuales puede ser modelada mediante una análisis de frecuencias  $k$ -variado.

*No hay rama de las matemáticas, por más abstracta que sea,  
que no se aplique algún día a los fenómenos del mundo real*

Lobachevski

## Estimación de avenidas para el diseño de vasos

El hombre, desde el inicio de la historia, ha construido barreras sobre los ríos para almacenar, controlar o derivar el agua. El lago artificial que se crea aguas arriba de dicha barrera, llamada cortina, se denomina "vaso de almacenamiento". Cualquiera que sea el tamaño o capacidad de un vaso o el uso final del agua, la función principal de éste es regular el escurrimiento. Ahora bien, además de retener el agua para su uso posterior, es común que el vaso tenga cierta capacidad para el control de las avenidas extraordinarias generadas en el río.

Para prevenir que la cortina de una presa sea sobrepasada, se diseñan estructuras de desfogue para el desalojo del exceso de agua, a las cuales llamamos 'obras de excedencia'. Estas estructuras son esenciales para el funcionamiento y seguridad de la presa y en muchas ocasiones son estructuras separadas de la cortina. Las obras de excedencia están formadas generalmente por vertedores de cresta libre o vertedores controlados.

Para el diseño hidrológico de vasos, el cual entenderemos de aquí en adelante como sinónimo de diseño de las obras de excedencia y capacidad de control de avenidas, es necesario conocer la evolución del flujo en el tiempo. El proceso para la determinación de la evolución del almacenamiento y las elevaciones de la superficie libre del agua en un vaso, dado un hidrograma de avenida a la entrada del mismo, se conoce como 'tránsito de avenidas en vasos'. Es evidente que el proceso de tránsito depende de las características y tipo de obra de excedencias, así como de su política de operación.

La estimación de avenidas para el diseño de vasos consiste en la determinación de las características del hidrograma de entrada al vaso, de tal forma que dicha avenida tenga una probabilidad de ser igualada o excedida, igual al inverso del periodo de retorno utilizado para el diseño. En la forma más practicada, una vez definido el periodo de retorno de diseño, el gasto pico (y sólo éste), se estima a partir de extrapolación, utilizando para esto una función de distribución de probabilidad ajustada a los datos históricos.

Según se ha comentado, una descripción completa de un hidrograma para fines de diseño debe incluir, por lo menos, la caracterización probabilista de sus parámetros más importantes. De este modo, sería posible asociar un periodo de retorno al hidrograma completo, empleando el marco teórico que ha sido planteado en el capítulo anterior. No obstante, es necesario primeramente demostrar que se justifica teóricamente caracterizar probabilistamente un hidrograma a través de tales parámetros principales.

En este trabajo se ha seleccionado la siguiente terna para parametrizar un hidrograma: gasto pico, volumen de escurrimiento y tiempo pico. Desde el punto de vista probabilista, dicha terna debe llenar el espacio tridimensional si es que los parámetros en cuestión han de ser empleados como variables aleatorias en un espacio de eventos de tres dimensiones. Este asunto se analiza en forma detallada en este capítulo.

Por otra parte, la caracterización de un hidrograma de diseño en función de sus parámetros principales no basta para conocer la evolución en el tiempo de los gastos de entrada a un vaso,

información indispensable para efectuar el tránsito de la avenida y determinar la capacidad de control de avenidas y las dimensiones de la obra de excedencias. Por tal motivo, en este capítulo se aborda también el problema de definir relaciones funcionales del tipo gasto – tiempo (parametrizaciones) de un hidrograma a partir de sus parámetros más importantes.

Posteriormente, en el trabajo se presenta la aplicación del análisis de frecuencias conjunto al caso del diseño de la capacidad de control de presas. El proceso se ha llevado al punto en el que se dispone de un método para determinar el hidrograma de diseño, descrito por más de un parámetro, para un periodo de retorno dado y un vaso en particular. Con el objeto de determinar el hidrograma que produce los efectos más desfavorables sobre el vaso, se plantea un problema de optimización no lineal. La solución de este problema permite involucrar las características de la obra por diseñar en la selección del evento de diseño.

Con el objetivo final de plantear el método completo de estimación, se presentan algunos desarrollos requeridos en el proceso de cálculo. En primer lugar, se presenta la demostración de la independencia funcional de los parámetros principales de un hidrograma. Después se establece una solución analítica aproximada de la ecuación de tránsito de avenidas en vasos, así como una propuesta para la parametrización de hidrogramas mediante el uso de interpolantes Hermitianos.

Estos dos desarrollos han permitido llevar a cabo un análisis de sensibilidad de los parámetros del hidrograma de entrada a un vaso, sobre el comportamiento del mismo. Finalmente, se establece la metodología para la estimación de avenidas en vasos con base en el análisis de frecuencias conjunto. También se han incluido dos casos de estudio, ambos concernientes a la revisión de las condiciones de diseño de presas existentes. Para tal efecto, se han seleccionado las presas “El Infiernillo” en Michoacán y “Luis Donald Colosio”, mejor conocida como Huites en Sinaloa.

### **Independencia funcional entre los parámetros que describen una avenida**

Evidentemente, los tres parámetros más importantes que caracterizan un hidrograma de escurrimiento directo son su gasto pico,  $Q_p$ , su tiempo pico,  $t_p$  y su volumen,  $V$  (figura 3.1).

Dado que un hidrograma representa la respuesta de una cuenca a un estímulo de una tormenta, es válido preguntarse si es apropiado manejar a  $Q_p$ ,  $t_p$  y  $V$  como variables aleatorias en un espacio de eventos tridimensional. La respuesta a esta interrogante será positiva si los valores posibles de dichas variables llenan el espacio tridimensional (con la única salvedad de que, por realizabilidad física, sean no negativos). Lo anterior es equivalente a la independencia funcional (que no debe confundirse con la independencia estadística) de  $Q_p$ ,  $t_p$  y  $V$ . Por tanto, a continuación se presenta la demostración de dicha independencia, empleando el modelo de “metacanal” propuesto por Snell y Sivalpan (1995) para representar la relación lluvia – escurrimiento. Dicho modelo se basa en el empleo de la analogía de difusión en donde la celeridad y la difusividad se consideran parámetros efectivos de la cuenca.

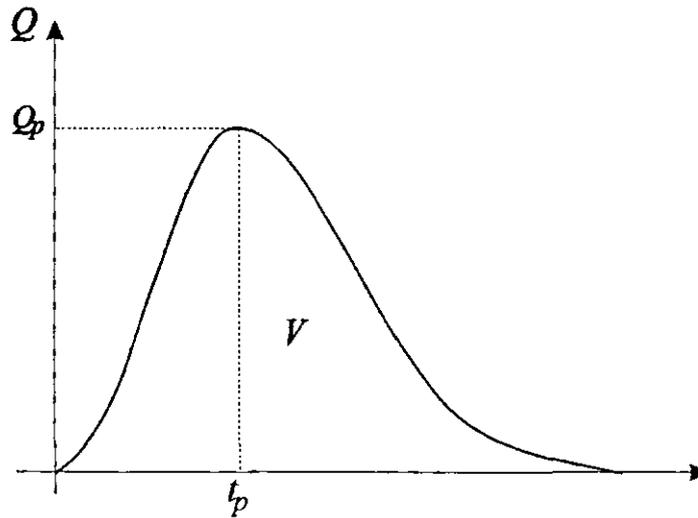


Figura 3.1. Hidrograma de escurrimiento directo

Con referencia en la figura 3.2, considérese el hidrograma de escurrimiento directo caracterizado por  $Q_p$ ,  $t_p$  y  $V$ , generado en la salida de una cuenca por una tormenta elemental caracterizada por una intensidad de lluvia  $i$ , una duración  $d$ , precipitándose sobre un área  $A$  y situada a una distancia (efectiva)  $L$  de la propia salida de la cuenca. En este caso, el proceso lluvia – escurrimiento puede expresarse como:

$$\begin{aligned} Q_p &= Q_p(i, d, A, L) \\ V &= V(i, d, A, L) \\ t_p &= t_p(i, d, A, L) \end{aligned} \quad (3.1)$$

En forma simplificada se puede considerar que el escurrimiento en el cauce generado por la tormenta elemental puede modelarse por medio de la “analogía de difusión” (Ponce, 1989), la cual emplea la ecuación de advección - difusión que puede ser escrita como:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + U \frac{\partial Q}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

siendo  $Q$  es gasto que escurre por el metacanal que representa a la cuenca;  $t$  el tiempo;  $x$  la coordenada espacial;  $U$ , la celeridad y  $\alpha$ , la difusividad de la onda de avenida, las cuales en este contexto, se consideran parámetros efectivos de la cuenca (Snell y Sivalpan, 1995).

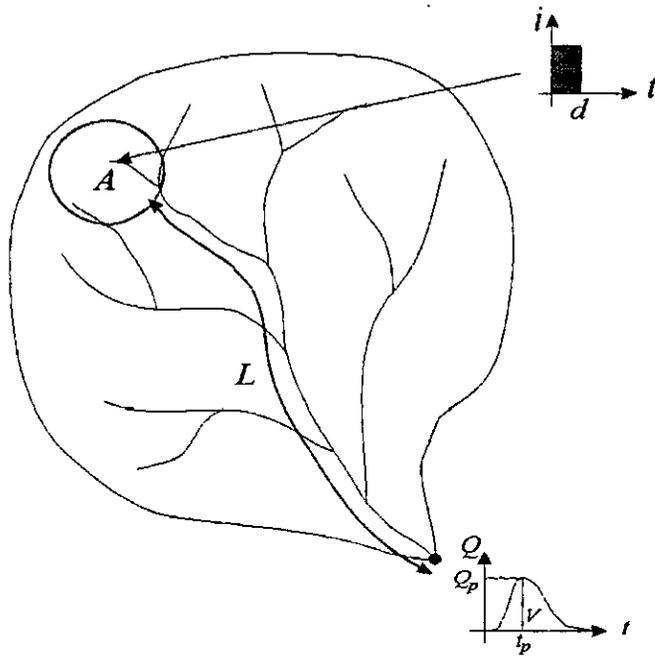


Figura 3.2. Modelo de una cuenca grande

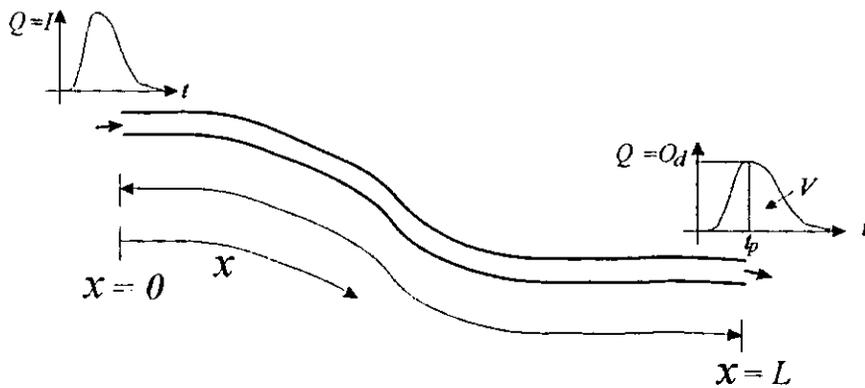


Figura 3.3. Nomenclatura para la “analogía de difusión”

Introduciendo las variables adimensionales

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{U}{L}t, \quad Q^* = \frac{Q}{f i A}$$

donde  $f$  es el factor de reducción por infiltración, es posible obtener la ecuación adimensional de advección – difusión siguiente:

$$\frac{\partial Q^*}{\partial t^*} + \frac{\partial Q^*}{\partial x^*} = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 Q^*}{\partial x^{*2}} \quad (3.2)$$

en donde  $P = \frac{UL}{\alpha}$  es el llamado número de Péclet.

Para el caso de una tormenta elemental con intensidad  $i$  y una duración infinita, el hidrograma de ingreso al cauce estará dado por:

$$\begin{aligned} Q(0,t) &= I(t) = f i A, & t \geq 0 \\ Q^*(0,t^*) &= I^*(t^*) = 1, & t^* \geq 0 \end{aligned}$$

La solución de la ecuación (3.2) se simplifica al considerar una metacanal de longitud infinita (lo cual representaría físicamente un punto muy alejado de la salida de la cuenca). Posteriormente se evaluará el gasto en el metacanal en el punto de salida de la cuenca, que corresponde a  $x = L$  (figura 3.3).

En este caso, la ecuación adimensional de advección – difusión (3.2) estará sujeta a las condiciones iniciales y de frontera siguientes:

$$\begin{aligned} Q^*(x^*,0) &= 0 \\ Q^*(0,t^*) &= 1 \\ Q^*(\infty,t^*) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

La solución del problema (3.2) y (3.3) es:

$$Q^*(x^*,t^*) = 1 - \frac{e^{-P/2 x^*}}{2} \left\{ e^{P/2 x^*} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{P^{1/2} x^* + t^*}{t^{*1/2}} \right) - 1 \right] + e^{-P/2 x^*} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{P^{1/2} x^* - t^*}{t^{*1/2}} \right) + 1 \right] \right\} \quad (3.4)$$

En  $x^*=1$ , la expresión anterior proporciona el gasto adimensional de salida de la cuenca:

$$O_{\infty}^*(t^*) \equiv Q^*(1,t^*) = 1 - \frac{e^{-P/2}}{2} \left\{ e^{P/2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{P^{1/2} 1 + t^*}{t^{*1/2}} \right) - 1 \right] + e^{-P/2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{P^{1/2} 1 - t^*}{t^{*1/2}} \right) + 1 \right] \right\} \quad (3.5)$$

el cual corresponde a un gasto de salida dimensional (en  $x = L$ ) de:

$$O_{\infty}(t) \equiv f i A \left\{ 1 - \frac{e^{-UL/2\alpha}}{2} \left[ e^{UL/2\alpha} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{L+Ut}{2 \alpha t} \right) - 1 \right] + e^{-UL/2\alpha} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{L-Ut}{2 \alpha t} \right) + 1 \right] \right] \right\} \quad (3.6)$$

De la ecuación anterior se observa que:

$$\frac{dO_{\infty}}{dt} = \frac{f i A}{2 \cdot \pi \alpha t^3} e^{-\frac{(L-Ut)^2}{4\alpha t}}$$

por lo que:

$$\frac{dO_{\infty}}{dt} > 0 \text{ para } 0 < t < \infty \text{ y}$$

$$\frac{dO_{\infty}}{dt} = 0 \text{ para } t = 0, t = \infty$$

cumpléndose además que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} O_{\infty}(t) = f i A$$

por lo cual se concluye que la expresión (3.6) proporciona lo que conocemos como curva S (Ponce, 1989) del escurrimiento en el punto de salida de la cuenca (Figura 3.4).

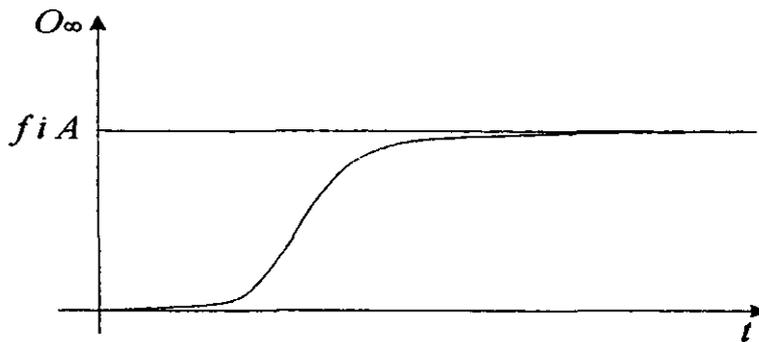


Figura 3.4 Hidrograma en la salida de la cuenca (Curva S)

De acuerdo con lo anterior, el caso de una tormenta elemental de duración finita  $d$ , cuyo gasto de ingreso queda representado por:

$$I(t) = f i A, \quad 0 \leq t \leq d$$

$$I(t) = 0, \quad d < t$$

o bien, en el caso adimensional por:

$$I^*(t^*) = 1, \quad 0 \leq t^* \leq \gamma$$

$$I^*(t^*) = 0, \quad \gamma < t^*$$

$$\text{con } \gamma = \frac{U}{L} d$$

puede ser tratado a partir de la expresión (3.6) como la diferencia de dos curvas S con un desfase de una duración  $d$ , de tal forma que el gasto descargado en la salida de la cuenca sería:

$$O_d(t) = O_{\infty}(t) - \mathcal{U}(t-d)O_{\infty}(t-d)$$

donde  $\mathcal{U}(t-d)$  es la función escalón de Heaviside.

La ecuación anterior es una expresión del principio de superposición, que es válido en el caso bajo estudio, al tratarse de un problema lineal con coeficientes constantes.

De esta forma, se tiene en forma explícita que:

Para  $0 \leq t \leq d$ :

$$O_d(t) = f i A \left\{ 1 - \frac{e^{UL/2\alpha}}{2} \left[ e^{UL/2\alpha} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{L+Ut}{2\sqrt{\alpha t}} \right) - 1 \right] + e^{-UL/2\alpha} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{L-Ut}{2\sqrt{\alpha t}} \right) + 1 \right] \right] \right\} \quad (3.7)$$

Para  $t > d$ :

$$O_d(t) = \frac{f i A}{2} e^{UL/2\alpha} \left\{ e^{UL/2\alpha} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{L+U(t-d)}{2\sqrt{\alpha(t-d)}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{L+Ut}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right] + e^{-UL/2\alpha} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{L-U(t-d)}{2\sqrt{\alpha(t-d)}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{L-Ut}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right] \right\} \quad (3.8)$$

La condición de pico puede obtenerse, a partir de

$$\frac{dO_d}{dt} = 0$$

que es válida en  $t = t_p$  y la cual conduce a la ecuación implícita para el tiempo pico  $t_p$  siguiente:

$$t_p \exp \left\{ -\frac{L^2 + U^2(t_p - d)^2}{6\alpha(t_p - d)} \right\} = (t_p - d) \exp \left\{ -\frac{L^2 + U^2 t_p}{6\alpha t_p} \right\}$$

la cual tiene solución para  $t_p > d$ . La consideración  $t_p < d$ , a fin de utilizar la expresión (3.7) para obtener la condición de pico conduce a una ecuación sin solución.

Con esto, el gasto pico del hidrograma de salida de la cuenca está dado por (figura 3.3):

$$Q_p = O_d(t_p) = \frac{f i A}{2} e^{UL/2\alpha} \left\{ e^{UL/2\alpha} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{L+U(t_p - d)}{2\sqrt{\alpha(t_p - d)}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{L+Ut_p}{2\sqrt{\alpha t_p}} \right) \right] + e^{-UL/2\alpha} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{L-U(t_p - d)}{2\sqrt{\alpha(t_p - d)}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{L-Ut_p}{2\sqrt{\alpha t_p}} \right) \right] \right\} \quad (3.9)$$

mientras que el volumen total escurrido corresponde a  $V = f i A d$ .

Ahora bien, si  $Q_p$ ,  $V$  y  $t_p$  fueran funcionalmente dependientes, debería existir una función  $F$  tal que  $F(Q_p, V, t_p) \equiv 0$  en alguna región del espacio  $(Q_p, V, t_p)$ . Entonces, también debería cumplirse que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial i} &= \frac{\partial F}{\partial Q_p} \frac{\partial Q_p}{\partial i} + \frac{\partial F}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial i} + \frac{\partial F}{\partial t_p} \frac{\partial t_p}{\partial i} \equiv 0 \\
\frac{\partial F}{\partial A} &= \frac{\partial F}{\partial Q_p} \frac{\partial Q_p}{\partial A} + \frac{\partial F}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial A} + \frac{\partial F}{\partial t_p} \frac{\partial t_p}{\partial A} \equiv 0 \\
\frac{\partial F}{\partial d} &= \frac{\partial F}{\partial Q_p} \frac{\partial Q_p}{\partial d} + \frac{\partial F}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial d} + \frac{\partial F}{\partial t_p} \frac{\partial t_p}{\partial d} \equiv 0 \\
\frac{\partial F}{\partial L} &= \frac{\partial F}{\partial Q_p} \frac{\partial Q_p}{\partial L} + \frac{\partial F}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial L} + \frac{\partial F}{\partial t_p} \frac{\partial t_p}{\partial L} \equiv 0
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

Las ecuaciones (3.10) definen cuatro sistemas homogéneos en  $\frac{\partial F}{\partial Q_p}, \frac{\partial F}{\partial V}, \frac{\partial F}{\partial t_p}$ , los cuales poseen soluciones no triviales sí y sólo sí:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(Q_p, V, t_p)}{\partial(i, A, d)} &\equiv 0 \\
\frac{\partial(Q_p, V, t_p)}{\partial(A, d, L)} &\equiv 0 \\
\frac{\partial(Q_p, V, t_p)}{\partial(i, d, L)} &\equiv 0 \\
\frac{\partial(Q_p, V, t_p)}{\partial(L, i, A)} &\equiv 0
\end{aligned}
\tag{3.11}$$

Ahora bien, de acuerdo con las expresiones (3.7 a 3.10), se cumple que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(Q_p, V, t_p)}{\partial(i, A, d)} &= 0 \\
\frac{\partial(Q_p, V, t_p)}{\partial(L, i, A)} &= 0,
\end{aligned}$$

Sin embargo resulta que:

$$\frac{\partial(Q_p, V, t_p)}{\partial(A, d, L)} = -\frac{2fiAt_p(t_p - d)}{(L^2 + 6\alpha_p)(t_p - d) + L^2t_p} \left\{ \frac{fiAL}{2\sqrt{\pi\alpha}(t_p - d)} \exp\left[-\frac{(L - U(t_p - d))^2}{4\alpha(t_p - d)}\right] - Q_p \right\}$$

$$-\frac{t_p f^2 i^2 A U e^{UL/\alpha}}{2\alpha} \left\{ 1 - \frac{(t_p - d)[L^2 + U^2 t_p(t_p - d)]}{(L^2 + 6\alpha_p)(t_p - d) + L^2 t_p} \right\} \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{L + U(t_p - d)}{2\sqrt{\alpha}(t_p - d)}\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{L + Ut_p}{2\sqrt{\alpha_p}}\right] \right\} \neq 0$$

$$\frac{\partial(Q_p, V, t_p)}{\partial(d, L, i)} = -\frac{2LfAt_p(t_p - d)}{(L^2 + 6\alpha_p)(t_p - d) + L^2t_p} \left\{ \frac{fiAdL}{2\sqrt{\pi\alpha}(t_p - d)} \exp\left[-\frac{(L - U(t_p - d))^2}{4\alpha(t_p - d)}\right] + Q_p \right\}$$

$$-\frac{t_p f^2 i A^2 U e^{UL/2\alpha}}{2\alpha} \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{L + U(t_p - d)}{2\sqrt{\alpha}(t_p - d)}\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{L + Ut_p}{2\sqrt{\alpha_p}}\right] \right\} \neq 0$$

Con este resultado, es evidente que  $Q_p$ ,  $V$  y  $t_p$  son funcionalmente independientes.

Ahora bien, el análisis anterior se llevó a cabo bajo la suposición de la existencia de una tormenta elemental y empleando el modelo simplificado del metacanal para representar el proceso lluvia – escurrimiento. En la naturaleza, las tormentas y el proceso lluvia – escurrimiento son mucho más complejos.

Tal y como se ha establecido en las expresiones (3.1), si aceptamos que una tormenta puede ser descrita por su intensidad  $i$ , su duración  $d$ , y su área de cobertura  $A$  y una distancia característica  $L$  del punto de salida de la cuenca, es posible analizar la complejidad del proceso lluvia – escurrimiento de la forma siguiente.

Consideremos en inicio una tormenta con parámetros fijos, pero arbitrarios,  $i$ ,  $d$ ,  $A$ . De esta forma, a partir de las expresiones (3.1) es posible escribir que:

$$Q_p = Q_p(V, t_p, L)$$

En este proceso general, en el cual no hay condicionantes en el tamaño de la cuenca, para valores arbitrarios de  $V$  y  $t_p$  se tiene un parámetro libre  $L$  mediante el cual es posible llenar el espacio de eventos de los gastos pico.

En el caso de una tormenta con  $i$ ,  $d$  dados pero con diferente cobertura  $A$ , el proceso puede escribirse como:

$$Q_p = Q_p(V, t_p, A, L)$$

la cual es una relación con dos parámetros libres, lo cual ratifica la conclusión de que las variables que caracterizan el hidrograma llenan el espacio de eventos.

En el caso de una tormenta compleja con un hietograma compuesto de  $n$  impulsos de precipitación de duración  $d$  pero con distintas intensidades  $i$ , el proceso lluvia – escurrimiento deberá describirse al menos como:

$$Q_p = Q_p(i_1, i_2, \dots, i_n, d, A, L)$$

$$t_p = t_p(i_1, i_2, \dots, i_n, d, A, L)$$

$$V = V(i_1, i_2, \dots, i_n, d, A, L)$$

de tal forma que el gasto pico puede expresarse como:

$$Q_p = Q_p(V, t_p, i_1, i_2, \dots, i_n, d, A, L)$$

La expresión anterior contiene un número superior de parámetros libres, los cuales pueden elegirse de tal forma que se llene en espacio de eventos.

Asimismo, para el caso de  $m$  tormentas complejas medidas en  $n$  intervalos de duración  $d$  pero en ubicaciones distintas y con diferentes coberturas se tendrá que:

$$Q_p = Q_p(V, t_p, i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, \dots, i_n^{(1)}, \dots, i_1^{(m)}, i_2^{(m)}, \dots, i_n^{(m)}, d, A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}, L^{(1)}, L^{(2)}, \dots, L^{(m)})$$

de tal forma que la relación lluvia – escurrimiento contiene al menos  $n \times m$  parámetros libres, lo cual nuevamente apoya la conclusión.

Por otro lado, Bradley *et al* (1992) demuestra que a mayor complejidad de la relación lluvia – escurrimiento, mayor es la dispersión en la respuesta de la cuenca a un estímulo de precipitación, digamos en gráficas del tipo  $Q_p$  vs  $V$ . De esta forma tal parece que la independendencia funcional entre los parámetros que describen al hidrograma es más evidente.

Por las razones antes expuestas se desprende que las variables gasto pico, volumen de escurrimiento y tiempo pico de un hidrograma pueden ser tratadas como variables aleatorias en el análisis de frecuencias conjunto que se propone en este trabajo.

### Parametrización de hidrogramas

Si bien un hidrograma puede caracterizarse a través de su gasto pico, tiempo pico y su volumen, el conocimiento de  $Q_p$ ,  $t_p$  y  $V$  no basta para determinar los efectos que una avenida que ingresa al vaso producen en éste. En efecto, para propósitos de diseño, es necesario transitar la avenida por el vaso, lo cual supone el conocimiento del hidrograma en la forma de una relación funcional gasto – tiempo. Esto motiva el desarrollo de relaciones funcionales del tipo:

$$Q(t; Q_p, V, t_p) \tag{3.12}$$

en donde  $Q$  representa el gasto y tiene el papel de la variable dependiente;  $t$  tiene el papel de variable independiente y  $Q_p$ ,  $t_p$  y  $V$  son parámetros de la función.

El proceso de plantear ecuaciones como la expresada en (3.12) se conoce como “parametrización de hidrogramas”.

La parametrización de hidrogramas se puede realizar de diferentes formas. Existen por ejemplo el hidrograma adimensional del Servicio de Conservación de Suelos de Estados Unidos (USSCS, por sus siglas en inglés, Mockus, 1957), el hidrograma senoidal (Henderson, 1966) y el hidrograma Pearson o gamma (Horn, 1987) entre otros.

A continuación se ofrece una breve descripción de estas parametrizaciones, las cuales son las más utilizadas en la hidrología de avenidas.

#### *Hidrograma del USSCS*

Uno de los métodos disponibles y más usados para la construcción de hidrogramas unitarios sintéticos es el propuesto por el Servicio de Conservación de Suelos de los Estados Unidos (Mockus, 1957). La forma de este hidrograma se determina en términos del tiempo adimensional,  $t/t_p$ , y el gasto adimensional,  $q/q_p$ .

En la tabla 3.1 se presentan los valores de algunas ordenadas de este hidrograma.

$t/t_p$	$q/q_p$
0.00	0.0000
0.50	0.4318
1.00	1.0000
1.50	0.6630
2.00	0.2634
2.50	0.0790
3.00	0.0199
3.50	0.0044
4.00	0.0009
4.50	0.0002

Tabla 3.1. Hidrograma adimensional del USSCS

Cabe señalar que ya que el hidrograma del USSCS se define solo por el tiempo pico y el gasto pico, el volumen de escurrimiento no es un parámetro independiente y por lo tanto se asigna en forma arbitraria.

### Hidrograma Pearson

Horn parametrizó el hidrograma del USSCS a través de una función gamma o Pearson, la cual puede expresarse como (Ponce, 1989):

$$Q = Q_p \left( \frac{t}{t_p} \right)^{t_p/(t_g - t_p)} e^{-(t/t_p)^{t_p/(t_g - t_p)}} \quad (3.13)$$

para  $t \in [0, \infty)$  y  $Q = 0$  para otros tiempos. En la ecuación (3.13),  $t_g$  es el tiempo al centroide del hidrograma. Evidentemente, se tiene que  $t_b \rightarrow \infty$  para el hidrograma así formado.

La ecuación (3.13) se puede integrar, obteniéndose la siguiente expresión para el volumen:

$$V = \int_0^{\infty} Q(t) dt = Q_p e^{t_p/(t_g - t_p)} \left( \frac{t_g - t_p}{t_p} \right)^{t_p/(t_g - t_p)} (t_g - t_p) \Gamma \left( 1 + \frac{t_p}{t_g - t_p} \right) \quad (3.14)$$

Cuando  $Q_p$ ,  $t_p$  y  $V$  son conocidos, (3.14) representa una ecuación trascendental para  $t_g$ , la cual se puede resolver en forma numérica. El proceso de solución es laborioso en vista de la complejidad de la relación funcional representada por dicha ecuación.

### Hidrograma senoidal

Propuesto por Henderson (1966) para estudiar algunos aspectos del tránsito de avenidas en vasos, el hidrograma descrito por una función senoidal se expresa como:

$$Q = Q_p \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} \frac{t}{t_p} \right) \quad (3.15)$$

para  $t \in [0, 2t_p]$ , y  $Q = 0$  para otros tiempos. Para este caso, se tiene que  $t_b = 2t_p$ . El volumen se obtiene integrando (3.15) y está dado por:

$$V = \frac{4}{\pi} Q_p t_p \quad (3.16)$$

De acuerdo con estas expresiones el hidrograma senoidal queda completamente definido con sólo dos parámetros, a saber  $Q_p$  y  $t_p$ , ya que el volumen no es un parámetro independiente de ellos, asignándose por lo tanto en forma arbitraria.

Como resumen de los procedimientos para la parametrización de hidrogramas antes presentadas se puede concluir que:

- 1) Los hidrogramas USSCS y senoidal no preservan el volumen especificado (si éste es un dato) en la triada de parámetros  $(Q_p, t_p, V)$  que pueden considerarse como los más importantes de una avenida. Ambos hidrogramas se definen exclusivamente a través del gasto pico y el tiempo pico solamente.
- 2) El hidrograma Pearson o gamma permite preservar la triada  $(Q_p, t_p, V)$ , sin embargo, su aplicación es tediosa ya que la relación que existe entre el tiempo al centroide del hidrograma  $(t_g)$  y la propia triada es complicada y dificulta la obtención del primero a fin de preservar un volumen especificado.

En vista de las observaciones anteriores, se consideró adecuado plantear una nueva parametrización de hidrogramas, caracterizados por los mismos tres parámetros más importantes. Esto se logró mediante la aplicación de polinomios de Hermite de orden impar, los cuales fueron introducidos por Aldama y Ramírez (1998). En el Apéndice B se presentan las bases teóricas de la parametrización propuesta, así como dos ejemplos de aplicación. Cabe señalar aquí, en forma breve, que los hidrogramas triparamétricos Hermitianos, como han sido llamados por los autores, presentan varias ventajas, como lo es la existencia de derivadas continuas hasta de cierto orden, un volumen de escurrimiento constante no importando el grado del polinomio utilizado y una gran facilidad de manejo.

Los autores eligieron como los tres parámetros más representativos del hidrograma al gasto pico  $Q_p$ , al tiempo pico  $t_p$  y volumen de escurrimiento  $V$ . Esta triada puede reemplazarse en forma alterna por la triada gasto pico, tiempo pico y tiempo base  $(t_b)$ , la cual genera una parametrización más simple.

Como ejemplo, los hidrogramas triparamétricos Hermitianos de órdenes 1, 3 y 5 están dados por las siguientes expresiones:

$$Q_1(t; Q_p, t_p, t_b) = \begin{cases} Q_p \frac{t}{t_p}; t \in [0, t_p] \\ Q_p \left( 1 - \frac{t - t_p}{t_b - t_p} \right); t \in [t_p, t_b] \\ 0; t \in (-\infty, 0) \cup (t_b, \infty) \end{cases}$$

$$Q_3(t; Q_p, t_p, t_b) = \begin{cases} Q_p \left[ 3 \left( \frac{t}{t_p} \right)^2 - 2 \left( \frac{t}{t_p} \right)^3 \right]; t \in [0, t_p] \\ Q_p \left[ 1 - 3 \left( \frac{t-t_p}{t_b-t_p} \right)^2 + 2 \left( \frac{t-t_p}{t_b-t_p} \right)^3 \right]; t \in [t_p, t_b] \\ 0; t \in (-\infty, 0) \cup (t_b, \infty) \end{cases}$$

$$Q_5(t; Q_p, t_p, t_b) = \begin{cases} Q_p \left[ 10 \left( \frac{t}{t_p} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_p} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_p} \right)^5 \right]; t \in [0, t_p] \\ Q_p \left[ 1 - 10 \left( \frac{t-t_p}{t_b-t_p} \right)^3 + 15 \left( \frac{t-t_p}{t_b-t_p} \right)^4 - 6 \left( \frac{t-t_p}{t_b-t_p} \right)^5 \right]; t \in [t_p, t_b] \\ 0; t \in (-\infty, 0) \cup (t_b, \infty) \end{cases}$$

De hecho, como se observa, el hidrograma triangular es el primer miembro de la familia de hidrogramas triparamétricos Hermitianos. La forma general de estos hidrogramas puede consultarse en la referencia citada previamente.

De acuerdo con una de las propiedades de la parametrización, todos estos hidrogramas poseen un volumen de escurrimiento  $V = \frac{Q_p t_b}{2}$  (ver Apéndice B)

El hidrograma triparamétrico Hermitiano (HTH) más sencillo que posee continuidad de primeras derivadas y tiene una forma curvilínea cercana a la natural es el hidrograma de tercer orden. Por estas razones, se concluye que, en las aplicaciones prácticas, el uso del HTH de tercer orden es recomendable cuando no exista mayor información acerca de la respuesta característica de la cuenca en estudio.

Ahora bien, es de todos los hidrólogos conocido que la forma de los hidrogramas depende de las características de la cuenca y de la o las tormentas que los producen. De esta manera, se puede pensar que el hidrograma representa la respuesta de la cuenca ante un estímulo de lluvia. Resulta evidente que lo que se busca es reproducir las condiciones reales lo mejor posible. Entonces, es recomendable utilizar la parametrización que represente lo mejor posible a las avenidas generadas en la cuenca, de acuerdo con los datos históricos.

## Tránsito de avenidas en vasos

El tránsito de avenidas en vasos constituye, sin duda alguna, el problema más simple del tránsito de avenidas. La velocidad del flujo que entra a un vaso de gran capacidad es muy baja y la superficie libre del agua en él puede considerarse prácticamente horizontal en todo momento. Consecuentemente, tanto el volumen almacenado como la descarga pueden expresarse en función del nivel en el vaso.

El tránsito de avenidas en vasos se basa en la ecuación diferencial del almacenamiento, la que a su vez tiene origen en el principio de conservación de masa. En su forma más simple, la ecuación diferencial de almacenamiento en un vaso se puede escribir como, Ponce (1989):

$$I - O = \frac{dS}{dt} \quad (3.17)$$

donde:

$I$  es el gasto de entrada al vaso

$O$  es el gasto de salida del vaso

$S$  es el volumen almacenado dentro del vaso y

$t$  es el tiempo

La ecuación (3.17) establece que cualquier diferencia entre el gasto de entrada y el flujo de salida se balancea con un cambio del almacenamiento en el tiempo (Figura 3.5).

En una aplicación típica del tránsito de avenidas por un vaso, se conocen el hidrograma de entrada ( $I$ ), el gasto de salida inicial ( $O_0$ ) y el almacenamiento inicial ( $S_0$ ), además de las características físicas del vaso y la política de operación y características de la obra de excedencias. El objetivo del tránsito es, por lo tanto, la determinación del hidrograma de salida para esas condiciones.

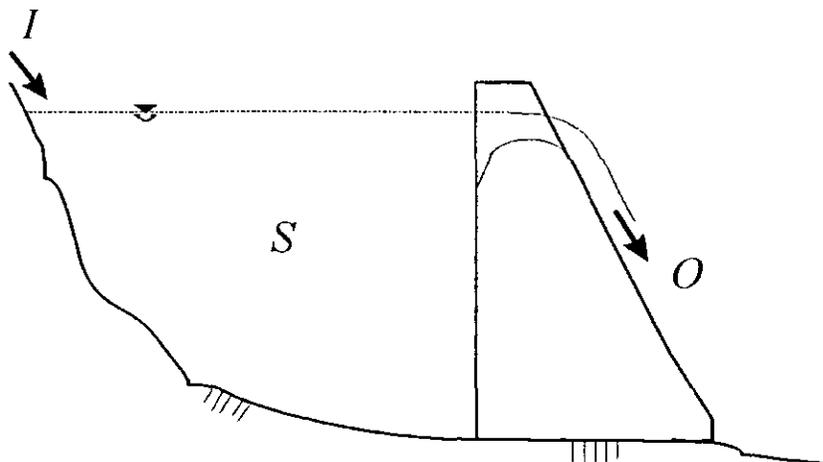


Figura 3.5. Nomenclatura para el tránsito de avenidas en vasos

La ecuación (3.17) se soluciona en forma usual mediante la inclusión de una ecuación de descarga, la cual generalmente puede expresarse en función de la carga hidráulica (elevación de la superficie libre del agua en el vaso). Por ejemplo, una fórmula general para el gasto de salida es (Ponce, 1988)  $O = C_d ZH^\alpha$ , donde  $O$  es el gasto de salida;  $C_d$  es un coeficiente de descarga;  $Z$  es una variable que representa el área de la sección transversal (de un conducto cerrado) o la longitud de la cresta vertedora (en el caso de un vertedor);  $H$  es la carga hidráulica; y  $\alpha$  es un exponente. Es muy común también encontrar que el gasto de salida de un vertedor con descarga libre puede expresarse como:

$$O = \mu L \sqrt{2g} H^{3/2}$$

en donde  $O$  es el gasto de salida;  $\mu$ , un coeficiente de descarga adimensional;  $L$ , la longitud de la cresta vertedora y  $H$ , la carga hidráulica.

Muchos vasos de almacenamiento tienen algún tipo de control de la descarga, siendo el caso más común el correspondiente al gasto de salida regulado por vertedores de compuertas. En este caso, el gasto de salida está determinado tanto por las condiciones hidráulicas como por las reglas o políticas de operación de las obras de control. Las políticas de operación pueden ser variables en el tiempo y en general están definidas de acuerdo con el o los usos del agua almacenada (hidroeléctrico, abastecimiento, navegación, etc.). En teoría, las salidas de un vaso con un vertedor con compuertas están determinadas por políticas preestablecidas, las cuales se basan además en el nivel y almacenamiento que se tengan, el hidrograma de entrada y los requerimientos aguas abajo del embalse.

Si se realizan las modificaciones y consideraciones pertinentes en el término correspondiente al gasto de salida, la ecuación diferencial del almacenamiento (3.17) puede seguir utilizándose.

Para la solución del problema de tránsito en vasos, la ecuación (3.17) se complementa con la relación entre el volumen almacenado dentro del mismo y la elevación de la superficie libre del agua en el mismo. Esta relación, que depende de las características batimétricas del sitio, permite intercambiar al almacenamiento y la elevación como variables en el proceso de tránsito y representa una expresión indispensable para determinar la operación de las obras de excedencia.

Aunque la ecuación de tránsito parezca sencilla, no tiene una solución analítica conocida para un hidrograma de entrada arbitrario, razón por la cual se utiliza frecuentemente el enfoque numérico para su solución.

Los métodos numéricos disponibles actualmente son muy eficientes y no requieren mucho tiempo de proceso computacional. Sin embargo, la conveniencia de contar con una solución analítica de la ecuación de tránsito se pone de manifiesto cuando se desea avanzar en la comprensión del fenómeno o se pretende plantear nuevos métodos para la determinación de eventos para el diseño de embalses.

Mediante una solución analítica se obtiene, de manera explícita, la relación entre las características del hidrograma de entrada al vaso y los almacenamientos y elevaciones en el mismo además de las características del hidrograma de salida.

Por estas razones se ha desarrollado una solución analítica aproximada de la ecuación (3.17) con base en un enfoque perturbatorio, la cual se presenta a continuación.

### Solución analítica aproximada de la ecuación de tránsito de avenidas en vasos

Para el desarrollo de una solución analítica aproximada resulta conveniente como primer paso, encontrar la versión adimensional de la ecuación diferencial del almacenamiento (3.17).

Supóngase que la relación de elevaciones - capacidades para el vaso (Ver figura 3.6) sigue una función de potencia dada por:

$$\frac{S - S_c}{S_m - S_c} = \left( \frac{h - h_c}{h_m - h_c} \right)^\alpha$$

donde

$h_m$  es un estimado de la elevación máxima en el vaso

$h_c$  es la elevación a la cresta vertedora o una elevación de referencia (usualmente el NAMO)

$S_m$  es el almacenamiento correspondiente al nivel  $h_m$

$S_c$  es el almacenamiento al nivel  $h_c$

$\alpha$  es un exponente de ajuste

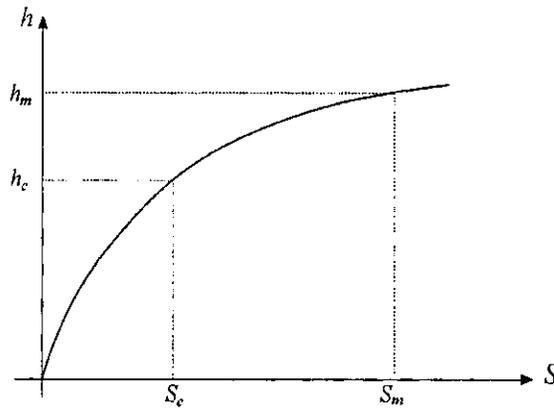


Figura 3.6. Curva elevaciones - capacidades de un vaso de almacenamiento

Si se considera, para fines de diseño, que el almacenamiento inicial coincide con  $S_c$ , una forma sencilla de estimar a priori  $S_m$  es la siguiente:  $S_m = S_c + V$ , lo cual representa una cota superior del almacenamiento en el vaso, correspondiente al caso de descarga nula.

Si llamamos  $\beta=1/\alpha$  se tiene que:

$$\frac{h - h_c}{h_m - h_c} = \left( \frac{S - S_c}{S_m - S_c} \right)^\beta \quad (3.18)$$

La representación de la relación elevaciones - capacidades del vaso de acuerdo con la ecuación (3.18) es una buena descripción de la realidad como se podrá comprobar posteriormente.

Por otro lado, la ley de descarga libre de un vertedor está dada por:

$$O = \mu L \cdot \overline{2g} (h - h_c)^{3/2} \quad (3.19)$$

Las escalas características de la adimensionalización están dadas por:

Escala de almacenamientos:	$S_e = S_m - S_c$
Escala de gastos:	$Q_e = \mu L \cdot \overline{2g} (h_m - h_c)^{3/2}$
Escala de elevaciones:	$h_e = h_m - h_c$
Escala de tiempos:	$t_e = \frac{S_e}{Q_e}$

De forma que, introduciendo las variables adimensionales (denotadas con asteriscos) siguientes:

$$S^* = \frac{S - S_c}{S_e}, \quad h^* = \frac{h - h_c}{h_e}, \quad I^* = \frac{I}{Q_e}, \quad t^* = \frac{t}{t_e} = \frac{Q_e t}{S_e}$$

la ecuación de elevaciones – capacidades (ec. 3.18) se reduce a:

$$h^* = S^{*\beta} \quad (3.20)$$

mientras que la ecuación (3.19) resulta:

$$O = \mu L \cdot \overline{2g} [h_e S^{*\beta}]^{3/2}$$

En el caso particular en el que  $\beta = 2/3$ , el problema se linealiza resultando la ecuación de continuidad linealizada adimensional:

$$\frac{dS^*}{dt^*} = I^* - S^* \quad (3.21)$$

Si se considera que, en la realidad,  $\alpha$  es muy cercano a  $3/2$ , con lo cual  $\beta$  sería muy cercano a  $2/3$ , se puede tomar  $\beta = \frac{2}{3} + \delta$ , en donde  $\delta \ll 1$ . Si llamamos  $\varepsilon = \frac{3}{2}\delta$ , se obtiene la ecuación adimensional general de continuidad para el tránsito de avenidas en vasos:

$$\frac{dS^*}{dt^*} + S^{*1+\varepsilon} = I^* \quad (3.22)$$

en donde  $I^* = I^*(t)$  y  $S^* = S^*(t; \varepsilon)$  y  $\varepsilon \ll 1$ .

En este mismo sentido, otras ecuaciones adimensionales han sido obtenidas por Akan (1989, 1990) y Kessler *et al* (1991) y utilizadas por Basha (1995). Dichas ecuaciones han sido utilizadas en la solución de problemas de tránsito en vasos de retención (presas rompepicos) básicamente.

Aunque la idea fundamental es análoga a la desarrollada en este trabajo, las escalas características del este problema son distintas generando por lo tanto ecuaciones adimensionales diferentes. Así por ejemplo, la ecuación de Akan (1989), usada posteriormente por Basha (1995) resulta:

$$\frac{dS^*}{dt^*} + R S^{*a} = I^*$$

donde:

$$S^* = \frac{S}{I_p - t_p}; \quad t^* = \frac{t}{t_p}; \quad I^* = \frac{I}{I_p}; \quad O^* = \frac{O}{I_p}; \quad R = \frac{K}{I_p} \left[ \frac{I_p t_p}{A} \right]^a; \quad a = \frac{d}{b}$$

usando  $S = A h^b$  como ecuación de almacenamientos, siendo  $A$  y  $b$  constantes y la ecuación  $O = K h^d$  como ley de descargas del vertedor, con  $K$  y  $d$  constantes

Además, en las expresiones anteriores se tiene que  $S$  es el almacenamiento;  $t$ , el tiempo;  $I$ , el gasto de entrada;  $O$ , el gasto de salida;  $t_p$ , el tiempo pico del hidrograma de entrada y  $I_p$ , el gasto pico del hidrograma de entrada.

Se debe notar, sin embargo, que la adimensionalización propuesta en este trabajo conduce a una ecuación más simple en la cual no se ven involucradas explícitamente las características del pico del hidrograma.

Quitando los asteriscos para simplificar la notación, la ecuación adimensional del tránsito es:

$$\frac{dS}{dt} + S^{1+\varepsilon} = I(t); \quad \varepsilon \ll 1 \quad (3.23)$$

Supongamos que la ecuación (3.23) está sujeta a la condición inicial  $S = \delta_0$ , con  $\delta_0 = O(1)$ . Si el vertedor es de descarga libre y para los fines de diseño del volumen de superalmacenamiento (volumen de control de avenidas) se tendrá claramente que  $\delta_0 = 0$ , pero si existe un vertedor con descarga controlada se puede tener cualquier valor dentro de un rango determinado.

La forma y naturaleza de la ecuación (3.23) sugieren expresar  $S^{1+\varepsilon}$  como  $S e^{\varepsilon \ln S}$ , de tal forma que utilizando una expansión en serie de Taylor para  $e^{\varepsilon \ln S}$ , esta ecuación resulta:

$$\frac{dS}{dt} + S + \varepsilon S \ln S + \frac{\varepsilon^2}{2} S \ln^2 S + O(\varepsilon^3) = I(t) \quad (3.24)$$

en donde  $O(\cdot)$  es el símbolo de orden.

Con un enfoque perturbatorio, la solución de la ecuación (3.24) resulta estar dada por una expansión del tipo (Nayfeh, 1980):

$$S(t;\varepsilon) = S_0(t) + \varepsilon S_1(t) + \varepsilon^2 S_2(t) + O(\varepsilon^3) \quad (3.25)$$

donde  $S_0(t)$ ,  $S_1(t)$  y  $S_2(t)$  son funciones por determinar.

Aceptando (3.25) como solución, se tiene que:

$$\ln S = \ln S_0 + \varepsilon \frac{S_1}{S_0} + O(\varepsilon^2) \quad (3.26)$$

Sustituyendo (3.25) y (3.26) en (3.24) y agrupando términos en  $\varepsilon$  se obtiene:

$$\frac{dS_0}{dt} + S_0 - I(t) + \varepsilon \left( \frac{dS_1}{dt} + S_1 + S_0 \ln S_0 \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{dS_2}{dt} + S_2 + S_1 + S_1 \ln S_0 + \frac{S_0 \ln^2 S_0}{2} \right) + O(\varepsilon^3) = 0$$

El principio de la teoría de los métodos perturbatorios indica que al ser  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeño, todos y cada uno de los coeficientes de las diferentes potencias de éste deben ser iguales e idénticos a cero. Con esto, se generan tres ecuaciones ordinarias denominadas usualmente problemas de orden  $\varepsilon$ , a saber:

Problema de orden  $O(\varepsilon^0)$ :

$$\frac{dS_0}{dt} + S_0 = I(t) \quad (3.27)$$

Problema de orden  $O(\varepsilon)$ :

$$\frac{dS_1}{dt} + S_1 = -S_0 \ln S_0 \quad (3.28)$$

Problema de orden  $O(\varepsilon^2)$ :

$$\frac{dS_2}{dt} + S_2 = -S_1 - S_1 \ln S_0 - \frac{S_0}{2} \ln^2 S_0 \quad (3.29)$$

Las condiciones iniciales para la solución son  $S_0(0) = S_0$ ,  $S_1(0) = 0$ ,  $S_2(0) = 0$ , ya que de acuerdo con la teoría de los métodos perturbatorios, las condiciones iniciales son tomadas por la solución de orden cero ( $O(\varepsilon^0)$ ).

La solución de estos tres problemas produce expresiones para  $S_0(t)$ ,  $S_1(t)$  y  $S_2(t)$ , las cuales, según la ecuación (3.25), proporcionan la solución completa del problema.

Las soluciones generales de los problemas (3.27) a (3.29), introduciendo la notación:

$$A(t) = \int_0^t e^{\eta} I(\eta) d\eta$$

resultan:

$$S_0(t) = [\Delta_0 + A(t)]e^{-t} \quad (3.30)$$

$$S_1(t) = -e^{-t} \int_0^t [\Delta_0 + A(\tau)] \{-\tau + \ln[\Delta_0 + A(\tau)]\} d\tau \quad (3.31)$$

$$S_2(t) = -e^{-t} \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} [S_0 + A(\tau)] \{-\tau + \ln[S_0 + A(\tau)]\}^2 - \int_0^{\tau} [S_0 + A(\tau')] \{-\tau' + \ln[S_0 + A(\tau')]\} d\tau' (1 - \tau + \ln[S_0 + A(\tau)]) \right\} d\tau \quad (3.32)$$

Las ecuaciones 3.31 y 3.32 se pueden escribir en forma alterna como:

$$S_1(t) = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} S_0(\tau) \ln S_0(\tau) d\tau \quad (3.31')$$

$$S_2(t) = -e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \left\{ \frac{1}{2} S_0(\tau) \ln^2 S_0(\tau) + S_1(\tau) [1 + \ln S_0(\tau)] \right\} d\tau \quad (3.32')$$

Las ecuaciones (3.30) a (3.32) proporcionan a través de (3.25) una solución analítica hasta de segundo orden del problema del tránsito de avenidas en vasos. La función  $I(t)$  corresponde a la avenida arbitraria de entrada y  $S(t)$  es la función que proporciona la evolución en el tiempo de los volúmenes almacenados dentro del vaso.

Una vez que se ha resuelto el problema adimensional, bastará regresar al problema dimensional mediante las escalas introducidas previamente.

Es evidente que la obtención de expresiones explícitas para  $S(t)$  dependerá de la complejidad de la función  $I(t)$  y por lo tanto de la naturaleza del hidrograma de entrada.

Para el caso de un hidrograma triangular de entrada que constituye el HTH de orden cero como el mostrado en la figura 3.7, es posible encontrar expresiones para  $S(t)$  en función de cuadraturas. Los resultados de este análisis se resumen a continuación.

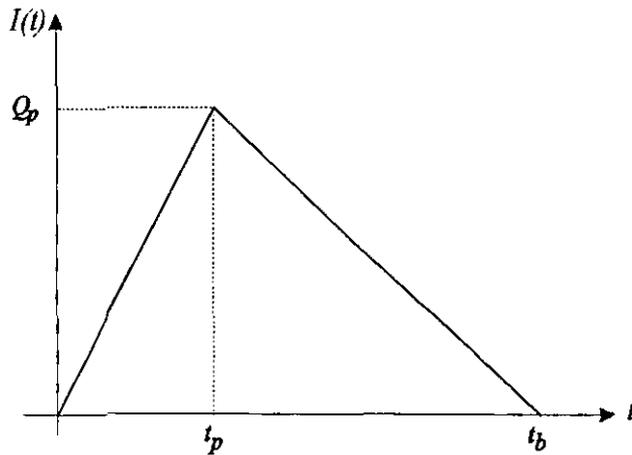


Figura 3.7. Hidrograma triangular de entrada

Con base en la figura 3.7 y siendo  $Q_p$  el gasto pico,  $t_p$  el tiempo pico y  $t_b$  el tiempo base, el volumen de escurrimiento para el hidrograma será evidentemente  $V = (Q_p t_b) / 2$ .

Este hidrograma debe adimensionalizarse de acuerdo con lo siguiente. El gasto pico adimensional es  $\xi = Q_p / Q_e$ , siendo  $Q_e$  la escala de gastos; el tiempo pico adimensional es  $\gamma = t_p / t_e = S_e t_p / Q_e$ , con  $t_e$  la escala de tiempos y  $S_e$  la escala de almacenamientos. Considerando que el volumen de escurrimiento adimensional está dado por  $\sigma = V / S_e$ , el tiempo base adimensional es por lo tanto  $t_b = 2\sigma / \xi$ . El correspondiente hidrograma adimensional está dado en la figura 3.8.

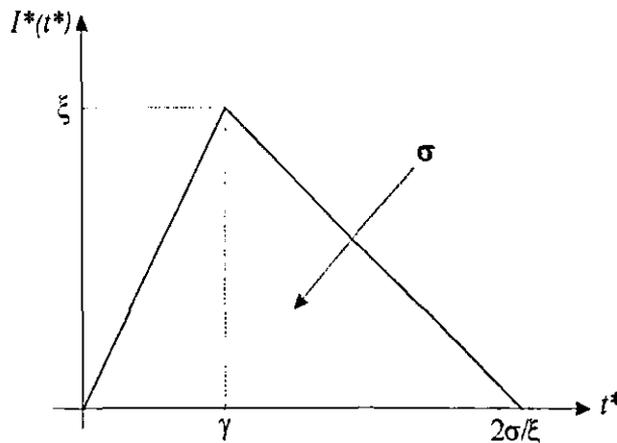


Figura 3.8. Hidrograma triangular adimensional de entrada

El hidrograma de entrada queda entonces descrito por.  $I^*(t^*) = \frac{\xi}{\gamma} t^*$ , para  $0 \leq t^* \leq \gamma$ ,  $I^*(t^*) = \xi \left( \frac{2\sigma - \xi t^*}{2\sigma - \xi \gamma} \right)$ , para  $\gamma \leq t^* \leq \frac{2\sigma}{\xi}$  y  $I^*(t^*) = 0$ , para  $t^* \geq \frac{2\sigma}{\xi}$ .

La solución obtenida para este caso es:

Para  $0 \leq t^* \leq \gamma$  :

$$\begin{aligned}
S(t, \varepsilon) = & \left[ S_0 + \frac{\xi}{\gamma} \{e^{\gamma} (t-1) + 1\} \right] e^{-t} \\
& - \varepsilon e^{-t} \int_0^t \left[ S_0 + \frac{\xi}{\gamma} \{e^{\tau} (\tau - 1) + 1\} \right] \left\{ -\tau + \ln \left[ S_0 + \frac{\xi}{\gamma} \{e^{\tau} (\tau - 1) + 1\} \right] \right\} d\tau \\
& - \varepsilon^2 e^{-t} \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} \left[ S_0 + \frac{\xi}{\gamma} \{e^{\tau} (\tau - 1) + 1\} \right] \left\{ -\tau + \ln \left[ S_0 + \frac{\xi}{\gamma} \{e^{\tau} (\tau - 1) + 1\} \right] \right\}^2 \right. \\
& \left. - \int_0^{\tau} \left[ S_0 + \frac{\xi}{\gamma} \{e^{\tau'} (\tau' - 1) + 1\} \right] \left\{ -\tau' + \ln \left[ S_0 + \frac{\xi}{\gamma} \{e^{\tau'} (\tau' - 1) + 1\} \right] \right\} d\tau' \right. \\
& \left. \cdot \left( 1 - \tau + \ln \left[ S_0 + \frac{\xi}{\gamma} \{e^{\tau} (\tau - 1) + 1\} \right] \right) \right\} d\tau
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Para  $\gamma \leq t^* \leq \frac{2\sigma}{\xi}$  :

$$\begin{aligned}
S(t, \varepsilon) = & \left[ S_0 + \{m_1 + m_2 [e^{\gamma} - m_5] - m_3 [e^{\gamma} (t-1) - m_4]\} \right] e^{-t} \\
& - \varepsilon e^{-t} \int_0^t \left[ S_0 + \{m_1 + m_2 [e^{\tau} - m_5] - m_3 [e^{\tau} (\tau - 1) - m_4]\} \right. \\
& \left. \{ -\tau + \ln [S_0 + \{m_1 + m_2 [e^{\tau} - m_5] - m_3 [e^{\tau} (\tau - 1) - m_4]\} ] \} \right] d\tau \\
& - \varepsilon^2 e^{-t} \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} \left[ S_0 + \{m_1 + m_2 [e^{\tau} - m_5] - m_3 [e^{\tau} (\tau - 1) - m_4]\} \right. \right. \\
& \left. \left. \{ -\tau + \ln [S_0 + \{m_1 + m_2 [e^{\tau} - m_5] - m_3 [e^{\tau} (\tau - 1) - m_4]\} ] \} \right\}^2 \right. \\
& \left. - \int_0^{\tau} \left[ S_0 + \{m_1 + m_2 [e^{\tau'} - m_5] - m_3 [e^{\tau'} (\tau' - 1) - m_4]\} \right. \right. \\
& \left. \left. \{ -\tau' + \ln [S_0 + \{m_1 + m_2 [e^{\tau'} - m_5] - m_3 [e^{\tau'} (\tau' - 1) - m_4]\} ] \} \right\} d\tau' \right. \\
& \left. \left( 1 - \tau + \ln [S_0 + \{m_1 + m_2 [e^{\tau} - m_5] - m_3 [e^{\tau} (\tau - 1) - m_4]\} ] \right) \right\} d\tau
\end{aligned} \tag{3.34}$$

donde:

$$\begin{aligned}
m_1 = \frac{\xi}{\gamma} [e^{\gamma} (\gamma - 1) + 1], \quad m_2 = \frac{2\sigma\xi}{2\sigma - \gamma\xi}, \quad m_3 = \frac{\xi^2}{2\sigma - \gamma\xi} \\
m_4 = e^{\gamma} (\gamma - 1), \quad m_5 = e^{\gamma}
\end{aligned}$$

para  $t^* > \frac{2\sigma}{\gamma}$  :

$$S(t > tb; \varepsilon) = \frac{1}{\left[ \varepsilon \left( t - \frac{2\sigma}{\xi} + \frac{1}{S_b^\varepsilon} \right) \right]^{\frac{1}{\varepsilon}}} \quad (3.35)$$

donde:  $S_b = S\left(\frac{2\sigma}{\xi}, \varepsilon\right)$

Las ecuaciones 3.33 a 3.35 proporcionan una solución cerrada al problema del tránsito de avenidas triangulares y pueden tomarse para el análisis posterior del comportamiento general de los vasos.

Asimismo, es posible determinar una solución del mismo tipo para el HTH de orden tres.

### Aplicación de la solución analítica aproximada

Para determinar si el parámetro  $\varepsilon$  es realmente pequeño como para satisfacer la hipótesis de  $\varepsilon \ll 1$ , se realizaron ajustes de la ecuación de elevaciones - capacidades (ecuación 3.18) para diferentes vasos de almacenamiento. El resumen de resultados obtenidos para algunos casos se muestra en la tabla 3.2. Se observa que la hipótesis se ve cumplida para algunas presas, aunque no claramente para otras. La presa "El Molinito" por ejemplo, genera  $\varepsilon = 0.237587$ .

Embalse	Valor Absoluto de $\varepsilon$
Huites	0.059296
El Infiernillo	0.071361
Villa Victoria	0.105881
Trigomil	0.135581
Abelardo L. Rodríguez	0.192250
El Molinito	0.237587

Tabla 3.2. Valor de  $\varepsilon$  para diferentes embalses

Con el objeto de evaluar la bondad de la solución analítica aproximada desarrollada para el caso de un hidrograma triangular de entrada, ésta se aplicó al caso particular de la Presa "El Molinito". La utilización de esta presa permite determinar si la solución presentada funciona bien para valores no claramente pequeños del factor  $\varepsilon$ . Si la solución se comporta bien para este caso, es evidente que funcionará aún mejor para aquellos casos con valores más pequeños de  $\varepsilon$ .

La presa "El Molinito" tiene como única obra de excedencias un vertedor de descarga libre. Los datos del vaso y el hidrograma de diseño parametrizado con forma triangular se presentan en las figuras 3.9 y 3.10. Para este embalse se tiene que el parámetro  $\varepsilon$  es igual a 0.237587.

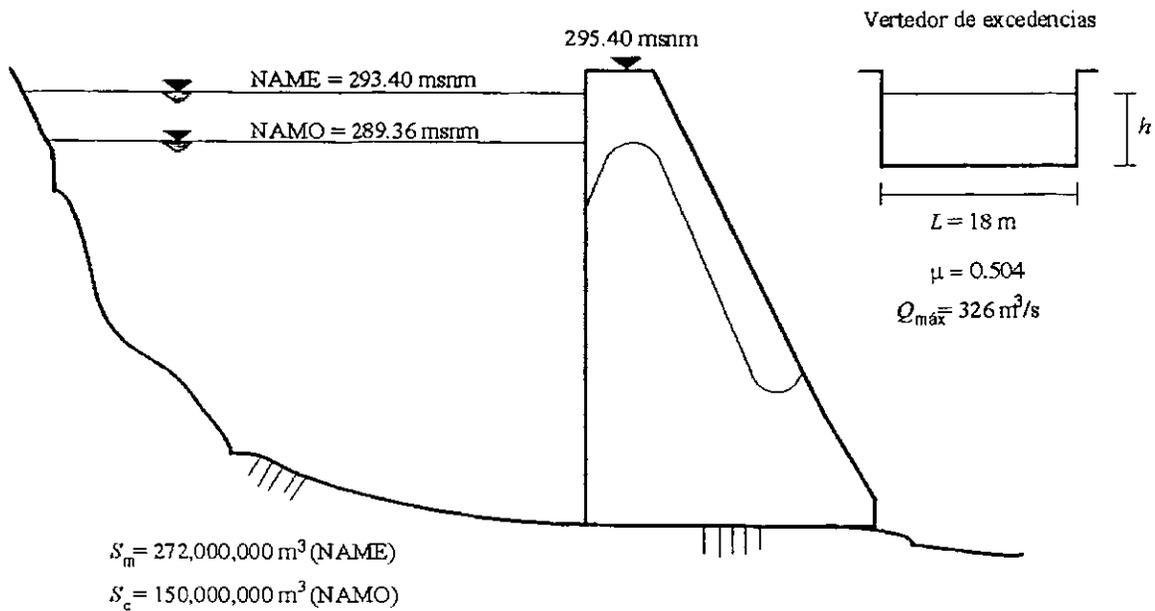


Figura 3.9. Características de la presa “El Molinito”, Sonora.

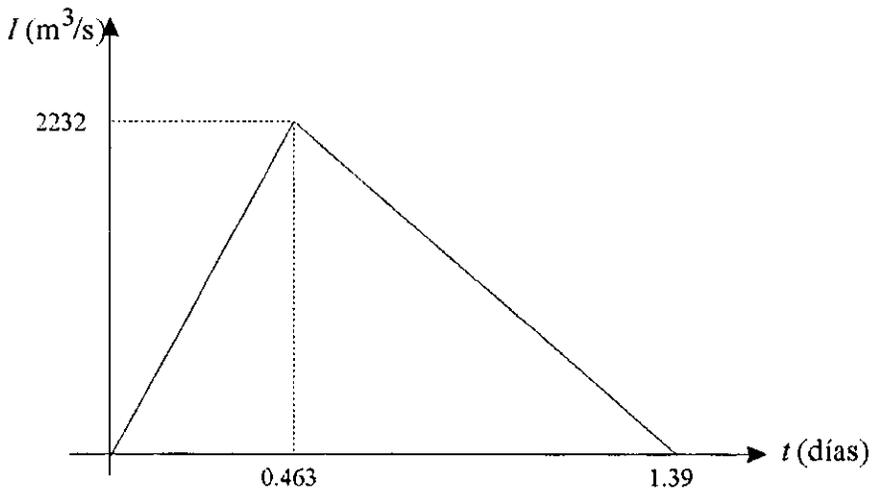


Figura 3.10. Hidrograma de entrada a la presa “El Molinito”, Sonora

Ya que en este caso se trata de un caso de revisión, la escala de almacenamientos se puede calcular a partir de los datos del vaso, tomando  $S_m$  igual al almacenamiento al NAME. De esta manera las escalas de almacenamientos, gastos, elevaciones y tiempos resultan ser respectivamente:  $S_e = 122 \times 10^6 \text{ m}^3$ ,  $Q_e = 326 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $h_e = 4.04 \text{ m}$  y  $t_e = 373882 \text{ s}$ . Según estas escalas, el hidrograma de entrada adimensional resulta ser el mostrado en la figura 3.11

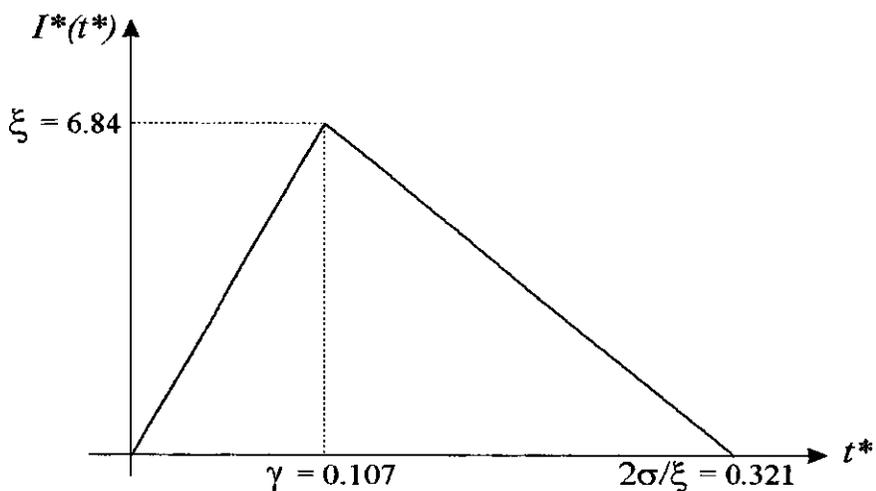


Figura 3.11. Hidrograma adimensional de entrada al vaso.

Se obtuvieron las soluciones de orden cero, uno y dos de acuerdo con las expresiones (3.33) a (3.35) así como la solución numérica por medio de la aplicación del método de Runge – Kutta de cuarto orden (RK-4) a la ecuación diferencial original. Esta solución fue tomada como referencia para evaluar el comportamiento de las diferentes soluciones perturbatorias.

La evolución de los almacenamientos para las distintas soluciones se muestra en la figura 3.12. Como se observa, la diferencia entre las soluciones de orden uno y dos es inapreciable. En la figura 3.13 se muestra un acercamiento del intervalo de tiempo en que se presenta el almacenamiento máximo.

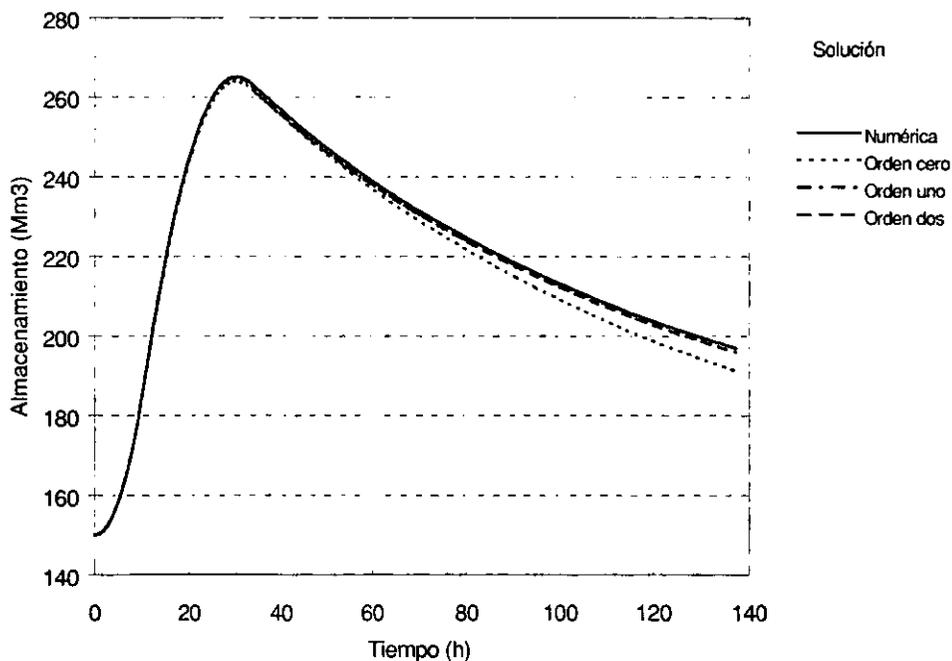


Figura 3.12. Evolución de los almacenamientos. Presa “El Molinito”, Sonora.

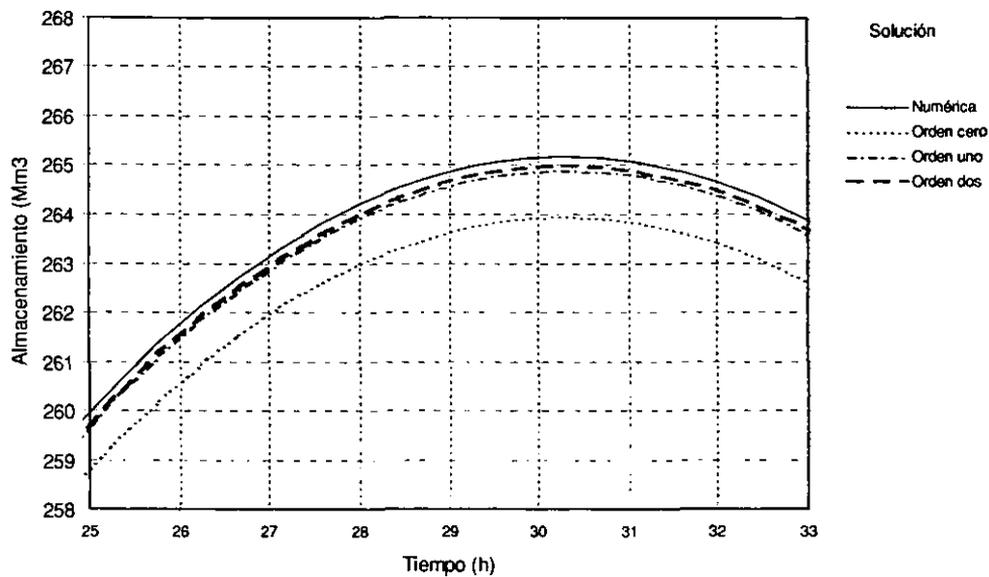


Figura 3.13. Evolución de los almacenamientos. Presa “El Molinito”, Sonora (Detalle).

Los almacenamientos máximos, así como la desviación con respecto a la solución numérica, considerada como “verdadera”, y el error medio hasta el tiempo base del hidrograma de entrada se muestran en la tabla 3.3.

Método aplicado	Almacenamiento Máximo (Millones de m <sup>3</sup> )	Desviación con respecto a RK-4 (%)	Error Medio en $t=1.321$ días (%)
Numérica RK-4	265.16	0.00	-
Perturbatorio de Orden Cero	263.96	0.46	0.60
Perturbatorio de Orden Uno	264.89	0.10	0.18
Perturbatorio de Orden Dos	264.98	0.07	0.20

Tabla 3.3. Resultados de la aplicación. Presa “El Molinto”, Sonora.

De acuerdo con los resultados se observa que aún la solución de orden cero, la cual corresponde al problema no perturbado (problema linealizado) es una buena solución del tránsito. Sin embargo, el comportamiento de la solución de orden uno es más adecuado y por lo tanto representa una mejor opción. Se puede concluir que para la determinación del volumen máximo almacenado en el vaso y por consiguiente el nivel máximo alcanzado dentro del mismo, la aplicación de la solución de orden uno es suficiente.

Ya que en el ejemplo de aplicación el parámetro  $\epsilon$  presenta un valor relativamente alto, comparado con los valores encontrados en la muestra de embalses analizada, es de esperarse, con base en la estructura de la solución propuesta, que en los casos en que  $\epsilon$  tenga un valor menor, las soluciones

perturbatorias de los diversos órdenes serán más aproximadas a la solución numérica obtenida por el método RK-4 y por ende a la realidad.

Se ha desarrollado en esta parte del trabajo, un método analítico aproximado para la solución del tránsito de avenidas en vasos con un enfoque perturbatorio. Si bien, la solución obtenida no es completamente explícita, ésta es una solución cerrada del problema y representa una base para estudios futuros acerca del comportamiento de vasos ante avenidas arbitrarias.

En particular, la solución obtenida permite, en primera instancia, llevar a cabo un análisis para determinar la sensibilidad de los parámetros que describen al hidrograma de entrada (los mismos utilizados en la parametrización de la avenida) en la respuesta del vaso. Los principales resultados de dicho análisis se presentan a continuación y mayores detallados del mismo pueden consultarse en el Apéndice C.

### **Análisis de sensibilidad de los parámetros del hidrograma de entrada en la respuesta de vasos de almacenamiento.**

Con la solución analítica aproximada dada por las ecuaciones (3.25) y (3.33) a (3.35) resulta factible llevar a cabo un análisis de la sensibilidad de los parámetros del hidrograma de entrada en la respuesta de un vaso.

El análisis de sensibilidad ha permitido determinar cuales parámetros del hidrograma tienen más importancia en la respuesta considerada en el vaso. Es evidente que el fin de este análisis es poder simplificar la caracterización de una avenida, es decir, reducir el número de parámetros que la describen, si esto es posible.

En el Apéndice C se presentan los resultados obtenidos de tal análisis. La conclusión de éste es que en una caracterización multivariada del hidrograma de ingreso a una presa, el tiempo pico puede elegirse en forma arbitraria sin gran riesgo de error. Además, parece existir una gran importancia del volumen de escurrimiento del hidrograma, tanto como o incluso más que la del propio gasto pico, en el comportamiento del vaso ante la avenida.

El resultado anterior es afortunado, ya que mientras que el gasto pico,  $Q_p$  y el volumen de escurrimiento,  $V$  tienen claramente el carácter de variables aleatorias extremas, el tiempo pico  $t_p$  no lo posee.

De acuerdo con el resultado del análisis es posible reducir el análisis de frecuencias conjunto a uno basado en términos de  $Q_p$  y  $V$ .

Dada la insensibilidad de la respuesta del vaso a variaciones en  $t_p$ , la determinación del valor de este parámetro puede efectuarse de acuerdo con la fórmula siguiente, frecuentemente empleada en la construcción de hidrogramas sintéticos (Ponce, 1989):

$$t_p = \frac{t_b}{3} = \frac{2V}{3Q_p} \quad (3.36)$$

## Análisis de frecuencias conjunto en la revisión o diseño de presas

La metodología tradicional para la estimación de avenidas para el diseño o revisión de la capacidad de control y las obras de excedencia de vasos consiste en la realización de un análisis de frecuencias univariado convencional utilizando como variable aleatoria para el análisis al gasto pico del hidrograma solamente. Esto implica que sólo podemos hablar del periodo de retorno del gasto pico y no del periodo del retorno del hidrograma completo. De esta forma, la probabilidad de excedencia no corresponde a toda la avenida sino solamente a su única característica considerada.

Se propone entonces, atender este problema de estimación mediante la aplicación del análisis de frecuencias conjunto presentado en el capítulo 2 de este trabajo. El nuevo enfoque permitirá asignar un periodo de retorno al hidrograma completo de una avenida y no sólo al gasto pico.

De acuerdo con lo visto anteriormente es posible emplear la distribución bivariada:

$$F(Q_p, V) \equiv P(q < Q_p, v < V) \quad (3.37)$$

para plantear el análisis de frecuencias conjunto de las avenidas máximas anuales.

En la expresión (3.37)  $q$  y  $v$  representan variables asociadas con el gasto pico y en volumen respectivamente, y  $Q_p$  y  $V$  son valores específicos de estas variables. En este caso, el periodo de retorno conjunto está dado por el inverso de la probabilidad de excedencia conjunta. Es decir:

$$T_{q,v} = \frac{1}{P(q \geq Q_p \cap v \geq V)}$$

o bien a través de las funciones de distribución de probabilidad acumulada (FDP) de gastos y volúmenes como:

$$T_{q,v} = \frac{1}{1 - F_q(Q_p) - F_v(V) + F(Q_p, V)} \quad (3.38)$$

donde:

$T_{q,v}$  es el periodo de retorno conjunto de gastos pico y volúmenes de escurrimiento,

$F_q(Q_p) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{q,v}(Q_p, V) dV$  es la función de distribución marginal de gastos pico,

$F_v(V) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{q,v}(Q_p, V) dQ_p$  es la función de distribución marginal de volúmenes de escurrimiento y

$F_{q,v}(Q_p, V)$  es la función de distribución conjunta bivariada entre las dos variables aleatorias.

En el problema de diseño de una presa, es precisamente el valor de  $T_{q,v}$  el que se encuentra prefijado.

Con base en la ecuación 3.38, debe notarse que el conocimiento de la función conjunta  $F_{q,v}(Q_p, V)$ , no sólo permite la determinación del periodo de retorno conjunto, sino también de los periodos de retorno individuales de gasto y volumen de escurrimiento, ya que:

$$T_q = \frac{1}{1 - F_q(Q_p)} \quad (3.39)$$

$$T_v = \frac{1}{1 - F_v(V)} \quad (3.40)$$

La ecuación (3.38) no tiene solución única para un  $T_{q,v}$  dado en términos de los valores de  $Q_p$  y  $V$ , sino que existe una infinidad de pares de valores de estas variables que produce el mismo periodo de retorno. Lo anterior implica que existe una infinidad de hidrogramas parametrizados en términos de  $Q_p$  y  $V$  que poseen el mismo periodo de retorno  $T_{q,v}$ .

Es evidente que cada uno de estos hidrogramas, al ser transitado por el vaso, produce un efecto diferente en el almacenamiento. Por lo tanto, resulta necesario determinar cuál de esos hidrogramas produce el efecto más desfavorable sobre la presa a diseñar o revisar.

Ya que el nivel máximo alcanzado dentro del vaso es el parámetro que dicta el dimensionamiento tanto de la cortina como de la obra de excedencias, resulta razonable elegir la combinación de gasto pico y volumen de escurrimiento tal que ésta genere la máxima elevación de la superficie libre del agua dentro del vaso. El problema puede, por lo tanto, plantearse en la forma dada a continuación.

Sea  $Z_m = Z_m(Q_p, V)$  la máxima elevación de la superficie libre que se alcanza en el vaso una vez que el hidrograma de avenida (caracterizado por  $Q_p, V$ ) es transitado por el mismo. Entonces, la determinación de la avenida de diseño para un vaso dado resulta de la solución del siguiente problema de optimización no lineal con restricciones:

$$\begin{aligned} & \text{Máx } Z_m = Z_m(Q_p, V) \\ & (Q_p, V) \\ \text{Sujeto a:} & \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$T_{q,v} = \frac{1}{1 - F_q(Q_p) - F_v(V) + F(Q_p, V)}$$

$$Q_p > 0, V > 0$$

Es notorio que la función objetivo del problema de estimación no es explícita sino que está dada por el proceso de tránsito de la avenida de entrada por el vaso. Con esto, las características del vaso en cuestión se ven involucradas en el proceso de selección de su propio evento de diseño.

Para resolver el problema planteado, la función de distribución de probabilidad conjunta bivariada  $F_{q,v}(Q_p, V)$  debe determinarse previamente. El ajuste de la distribución se puede realizar de acuerdo con los procedimientos indicados en el capítulo 2 de este trabajo.

La definición del hidrograma de diseño completo puede obtenerse mediante el procedimiento de parametrización más adecuado para la cuenca en estudio. En principio, se pueden probar diferentes parametrizaciones aplicándolas a las avenidas máximas históricas a fin de determinar, para una cuenca en particular, la forma de hidrograma que más conviene. De esta manera se estarán tomando en cuenta las características propias de la cuenca así como la forma en que ésta afecta al escurrimiento.

A falta de datos históricos de avenidas completas, se pueden utilizar la parametrización triparamétrica Hermitiana y la parametrización Pearson que son las que preservan el gasto pico y el volumen de escurrimiento del hidrograma y presentan una forma curvilínea aproximada a la encontrada en las avenidas reales.

El procedimiento propuesto permite tomar en cuenta que algunas presas son más sensibles al volumen de escurrimiento de la avenida de entrada que al gasto pico de ésta, o viceversa, lo cual resulta de valor práctico. Este método para la estimación de eventos de diseño puede aplicarse también en estudios de revisión del diseño de presas existentes para evaluar sus seguridad hidrológica y la bondad de su diseño.

Los pasos generales de aplicación del método propuesto se establecen a continuación:

1. Con los registros de gastos pico y volúmenes de escurrimiento se construye la función de distribución conjunta bivariada  $F_{q,v}(Q_p, V)$  de acuerdo con los procedimientos establecidos previamente.
2. Se debe disponer de la información del vaso, tal como la curva elevaciones – capacidades, la ecuación de descarga y la política de operación de los vertedores de excedencias, así como cualquier otra información para poder llevar a cabo el tránsito de avenidas en el vaso.
3. Con base en un análisis de riesgo hidrológico se selecciona el periodo de retorno para el diseño o revisión de la presa  $T_{q,v}$ .
4. Se elige un par de valores de gasto pico y volumen de escurrimiento, tales que cumplan con la ecuación (3.38) para el  $T_{q,v}$  dado.
5. Con el par de valores, gasto pico y volumen, se construye el hidrograma completo mediante el uso de la parametrización que mejor describa la forma general de las avenidas en la cuenca. Lo anterior puede hacerse seleccionando la parametrización que implique el menor error

cuadrático de ajuste a los hidrogramas de avenidas máximas anuales registrados históricamente. A falta de datos históricos se recomienda el uso del hidrograma triparamétrico Hermitiano de tercer orden. Ya que el tiempo pico no se encuentra involucrado directamente en la descripción probabilista del hidrograma y está demostrado que no tiene mucha influencia sobre la respuesta del vaso, éste puede estimarse mediante la relación práctica  $t_p = t_b / 3$ , o bien  $t_p = 2 V / (3 Q_p)$ .

6. El hidrograma obtenido se transita por el vaso, empleando la curva de elevaciones – capacidades y las reglas de operación de la obra de excedencias. El proceso de tránsito genera como resultados el almacenamiento y elevación máximos en el vaso, así como el gasto máximo descargado por la obra de excedencias.
7. Se elige un nuevo par  $(Q_p, V)$  tal que se siga cumpliendo la condición (3.38) y se repiten los pasos 4 a 6 tantas veces como sea necesario a fin de encontrar el par de valores (vector solución) que maximice la función objetivo  $Z_m$ .
8. Una vez determinada la solución, es posible calcular los periodos de retorno del gasto pico y el volumen de escurrimiento en forma individual a través de las ecuaciones 3.39 y 3.40.

Alternativamente y con fines de comparación, es posible proceder a la solución del problema mediante el método tradicional. En éste se deberá ajustar una FDP apropiada al registro de gastos máximos anuales, extrapolando para el periodo de retorno elegido. Posteriormente, la avenida completa se puede construir con un proceso de mayoración de la avenida máxima histórica o alguna avenida de referencia. El hidrograma obtenido se transita por el vaso obteniendo así las características de almacenamiento y elevación máximas en el vaso, así como el gasto máximo descargado por el vertedor de excedencias.

Con el fin de presentar y evaluar la metodología descrita, ésta se aplicó a dos casos reales consistentes en la revisión de las avenidas de diseño de las presas “El Infiernillo” en Michoacán y “Luis Donaldo Colosio” (Huites), en Sinaloa.

### Aplicación a la revisión de la avenida de diseño de la Presa “El Infiernillo”

La presa “El Infiernillo” se encuentra en operación desde 1965 y ya que en el tiempo de su diseño no se disponía de registros de escurrimiento, se recurrió a su dimensionamiento mediante la estimación del gasto pico de la avenida a partir de la envolvente de Creager. El gasto estimado por este medio fue de 38 777 m<sup>3</sup>/s. Por esta razón, la seguridad hidrológica de la presa ha sido cuestionada en varias ocasiones llevando esto a la realización de diversos estudios de revisión de la avenida de diseño (Marengo, 1994). Los resultados de algunos estudios se presentan en la tabla 3.4.

Estudio	Gasto Pico de la avenida (m <sup>3</sup> /s)	Volumen de la avenida (Mm <sup>3</sup> )
1979	45,550	10,332
1982 (Probabilístico)	69,278	11,163
1982 (AMP, CFE)	32,953	11,032
1984 (SARH)	32,200	12,480

Tabla 3.4. Resumen de algunos estudios hidrológicos relacionados con la presa “El Infiernillo”

Con base en una estimación de la avenida máxima probable (AMP) llevada a cabo en 1982 y la aplicación de análisis de frecuencias convencional se decidió sobrelevar la cortina y las obras accesorias en 4.00 m. Con esto, se estableció el nivel de aguas máximas extraordinarias (NAME) en 180.40 msnm y se modificaron también las políticas de operación de los vertedores. Por su parte, el nivel de aguas máximas ordinarias (NAMO) en época de avenidas se estableció en 165 msnm. Los datos generales de la presa se presentan en la tabla 3.5.

Característica	
Área de la cuenca	108,000 km <sup>2</sup>
Gasto máximo registrado	25,200 m <sup>3</sup> /s
Gasto máximo de salida por el vertedor	13,800 m <sup>3</sup> /s
<b>Capacidades antes de sobrelevaciones</b>	
Capacidad al NAME	12,000 Mm <sup>3</sup>
Capacidad útil	7,090 Mm <sup>3</sup>
Capacidad de control de avenida	2,660 Mm <sup>3</sup>
Capacidad muerta	2,250 Mm <sup>3</sup>
<b>Niveles antes de sobrelevaciones</b>	
NAME	176.40 m
NAMO	169.00 m
NAMINO	140.00 m
<b>Datos de la operación actual</b>	
NAME	180.40 m
NAMO	165.00 m
Elevación de la corona	184.00 m

Tabla 3.5. Datos generales de la presa "El Infiernillo"

La presa "El Infiernillo" se localiza en una región donde se ha detectado la presencia de tormentas tanto de origen convectivo como ciclónico por lo cual resulta conveniente el uso de una función de probabilidad de poblaciones mezcladas en la descripción probabilista de las avenidas. Es decir, la función conjunta bivariada se construirá con funciones de distribución marginal tipo Gumbel mezcladas (Gumbel mixta en este caso). Con esto se tiene que:

$$F_q(Q_p) = p_q \exp\left[-\exp\left(-\frac{Q_p - a_1}{c_1}\right)\right] + (1 - p_q) \exp\left[-\exp\left(-\frac{Q_p - a_2}{c_2}\right)\right] \quad (3.42)$$

$$F_v(V) = p_v \exp\left[-\exp\left(-\frac{V - a_3}{c_3}\right)\right] + (1 - p_v) \exp\left[-\exp\left(-\frac{V - a_4}{c_4}\right)\right] \quad (3.43)$$

siendo la construcción de la función bivariada la correspondiente al modelo logístico de Gumbel (ecuación 2.18) presentado en el capítulo 2 de este trabajo, la cual a partir de este momento se denomina distribución bivariada Gumbel mixta.

$$F_{q,v}(Q_p, V) = \exp\left(-\left\{\left[-\ln F_q(Q_p)\right]^m + \left[-\ln F_v(V)\right]^m\right\}^{\frac{1}{m}}\right) \quad (3.45)$$

En las expresiones (3.42) y (3.43),  $p_q$  representa la probabilidad de que el gasto máximo anual de la avenida pertenezca a la población de gastos producidos por tormentas convectivas,  $p_v$  la probabilidad de que el volumen de la avenida pertenezca a la población de volúmenes generados por tormentas convectivas,  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  son los parámetros de ubicación del modelo,  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$  son los parámetros de escala del mismo y  $m$  es el parámetro de asociación.

El ajuste (estimación de los parámetros) del modelo bivariado se realiza mediante los procedimientos delineados en este trabajo. Para este proceso se utilizó la información histórica de gastos máximos y sus correspondientes volúmenes de escurrimiento de las avenidas registradas para “El Infiernillo”. Esta información se presenta en la tabla 3.6.

De acuerdo con esa información, el valor del parámetro de asociación del modelo bivariado, calculado a partir de la expresión (2.16) resulta  $m = 1.505$ , mientras los parámetros de ubicación, escala y segregación, calculados con el método de la máxima verosimilitud son:

Parámetros de ubicación:	Parámetros de escala
$a_1 = 3385 \text{ m}^3/\text{s}$	$c_1 = 1103 \text{ m}^3/\text{s}$
$a_2 = 11203 \text{ m}^3/\text{s}$	$c_2 = 6551 \text{ m}^3/\text{s}$
$a_3 = 1744 \times 10^6 \text{ m}^3$	$c_3 = 998 \times 10^6 \text{ m}^3$
$a_4 = 4931 \times 10^6 \text{ m}^3$	$c_4 = 1336 \times 10^6 \text{ m}^3$
Parámetro de segregación de gastos	$p_q = 0.8189$
Parámetro de segregación de volúmenes	$p_v = 0.8124$

#### *Revisión para un periodo de retorno $T = 10,000$ años*

El análisis de frecuencias convencional (univariado) genera una avenida de diseño con gasto pico  $Q_p = 60060 \text{ m}^3/\text{s}$  (estimado mediante la función de distribución Gumbel mixta) para el periodo de retorno  $T_{q,v} = 10000$  años previamente fijado. El hidrograma completo se ha construido por mayoración de la avenida máxima histórica (ocurrida en 1967). Este proceso asigna a la avenida un volumen  $V = 12400 \text{ Mm}^3$  en forma totalmente arbitraria. Cuando el hidrograma se transita por el vaso, utilizando la curva actual de elevaciones – capacidades y la política de operación de vertedores vigente, la superficie libre del agua alcanza una elevación de 183.00 m. En las condiciones actuales, esta elevación deja un bordo libre de 1.00 m a la corona. Con este análisis, se puede pensar que “El Infiernillo” es segura hidrológicamente hablando, aunque el NAME se ve sobrepasado en 2.60 m.

Sin embargo, la aplicación del método propuesto en este trabajo genera el hidrograma de diseño mostrado en la figura 3.14. El periodo de retorno conjunto de la avenida es, de acuerdo con el nivel de riesgo de la revisión, también  $T_{q,v} = 10000$  años. El hidrograma se ha construido con interpolantes Hermitianos de tercer orden y el volumen del mismo no se ha seleccionado en forma arbitraria sino cumpliendo con la condición del periodo de retorno conjunto. La parametrización

empleada es la que mejor ajusta, según el criterio del mínimo error cuadrático, a los hidrogramas históricos de las avenidas máximas anuales registradas.

Año	Gasto pico instantáneo (m <sup>3</sup> /s)	Volumen escurrido (Mm <sup>3</sup> )
1955	11000.0	3785
1956	2588.6	921
1957	1635.0	457
1958	4671.0	8472
1959	3379.0	566
1960	3110.0	2163
1961	3352.0	3071
1962	3686.0	5419
1963	3100.0	1313
1964	3588.2	2216
1965	5874.2	2462
1966	2502.7	1874
1967	25200.0	7621
1968	3647.2	825
1969	9046.3	4390
1970	4963.2	4723
1971	6209.7	3049
1972	3753.3	2383
1973	7993.6	4758
1974	3155.1	2062
1975	5618.9	5133
1976	22150.0	4442
1977	5168.4	1582
1978	5166.2	2641
1979	2957.2	1905

Tabla 3.6 Avenidas máximas anuales registradas en El Infiernillo.

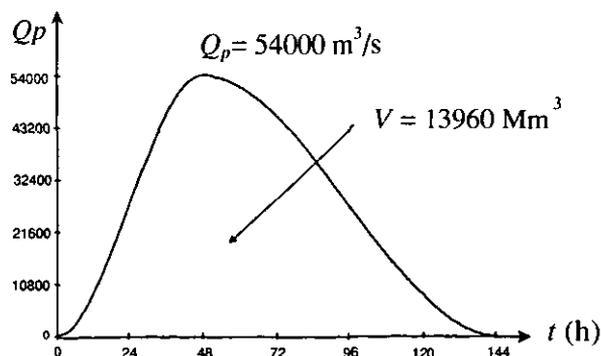


Figura 3.14 Avenida de diseño para “El Infiernillo”, T = 10000 años

Las combinaciones posibles del hidrograma de entrada para el periodo de retorno considerado se muestran en la tabla 3.7. En este caso, la combinación que produce los efectos más desfavorables en el vaso es la formada por un gasto máximo  $Q_p = 54000 \text{ m}^3/\text{s}$  y un volumen de escurrimiento  $V = 13960 \text{ Mm}^3$ , los cuales poseen 10000 años como periodo de retorno conjunto. Los periodos de retorno de gasto y volumen en forma individual, calculados con las expresiones 3.39 y 3.40, son  $T = 3800$  años y  $T = 4507$  años respectivamente. Esta avenida, al ser transitada por el vaso produce una elevación máxima de la superficie libre del agua de 186.73 m la cual sobrepasa a la corona de la cortina en 2.73 m.

No.	Gasto q	Volumen v	Fq(q)	Tq	Fv(v)	Tv	F(q,v)	Tq,v
1	0	15020	0.0007	1	0.9999	10002	0.0007	10002
2	500	15020	0.0011	1	0.9999	10002	0.0011	10002
3	1000	15020	0.0017	1	0.9999	10002	0.0017	10002
4	5000	15011	0.6635	3	0.9999	9935	0.6635	10001
5	10000	14999	0.8713	8	0.9999	9846	0.8713	9997
6	20000	14979	0.9584	24	0.9999	9699	0.9584	10003
7	30000	14928	0.9900	100	0.9999	9334	0.9900	9997
8	40000	14804	0.9978	451	0.9999	8503	0.9978	10003
9	42000	14760	0.9984	611	0.9999	8226	0.9983	10003
10	44000	14704	0.9988	828	0.9999	7887	0.9988	9999
11	46000	14633	0.9991	1122	0.9999	7477	0.9991	9999
12	48000	14540	0.9993	1522	0.9999	6972	0.9993	9999
13	50000	14414	0.9995	2065	0.9998	6342	0.9995	10001
14	51000	14333	0.9996	2405	0.9998	5967	0.9995	10002
15	52000	14234	0.9996	2801	0.9998	5539	0.9996	9999
16	53000	14113	0.9997	3262	0.9998	5057	0.9996	10000
17	54000	13960	0.9997	3800	0.9998	4507	0.9996	10000
18	55000	13761	0.9998	4426	0.9997	3880	0.9996	10000
19	56000	13491	0.9998	5155	0.9997	3167	0.9996	9999
20	57000	13105	0.9998	6005	0.9996	2368	0.9995	10000
21	58000	12503	0.9999	6995	0.9993	1504	0.9993	10001
22	59000	11404	0.9999	8148	0.9985	657	0.9985	10000
23	60000	8235	0.9999	9492	0.9836	61	0.9836	10000
24	60100	7390	0.9999	9638	0.9696	33	0.9696	10000
25	60200	6080	0.9999	9786	0.9248	13	0.9248	10000
26	60300	3230	0.9999	9936	0.6536	3	0.6536	10000
27	60342	0	0.9999	10000	0.0026	1	0.0026	10000

Tabla 3.7. Combinaciones de entrada para "El Infiernillo"

De acuerdo con los valores de los periodos individuales es evidente que el vaso de “El Infiernillo” es ligeramente más sensible al volumen de las avenidas que al gasto pico de las mismas.

En forma clara, con los resultados obtenidos, la seguridad hidrológica de la m presa para un periodo de retorno de 10000 años está en duda.

Se realizaron cálculos adicionales para otros periodos de retorno de la avenida de entrada. El resumen de resultados se muestra en la tabla 3.8

$T_{q,v}$ (años)	$Z_m$ (m)
50	173.64
100	175.45
500	179.27
750	180.40 (NAME)
1000	181.07
3200	184.00 (Corona)
5000	185.27
10000	186.73
40000	189.70

Tabla 3.8. Elevaciones máximas para diferentes periodos de retorno. Presa “El Infiernillo”

De acuerdo con estos resultados, el diseño actual de la Presa “El Infiernillo” es hidrológicamente segura para un periodo de retorno de sólo 750 años (al NAME) y de 3200 años si se considera invasión total del bordo libre. Resulta evidente, que el Infiernillo es una presa menos segura de los que se piensa.

Adicionalmente, se puede recordar que el riesgo hidrológico de falla esta dado por:

$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^N$$

donde

$T$  es el periodo de retorno y

$N$  es el número de años de vida útil de la presa

Con base en esta expresión se puede decir que, considerando una vida útil de 50 años, el riesgo de falla actual de la presa es del 6.45%, mientras que el riesgo para un  $T=10,000$  años es de sólo el 0.50%. Por esta razón, se puede afirmar que “El Infiernillo” es 13 veces más insegura.

### Aplicación a la revisión de la avenida de diseño de la Presa “Huites”

La presa “Luis Donaldo Colosio” mejor conocida como “Huites” es la última de las grandes presas construidas en México. En operación desde 1994, la presa fue diseñada con una avenida obtenida mediante el análisis de frecuencias convencional de gastos utilizando para ello un registro histórico de 49 años. La forma del hidrograma de diseño se obtuvo al mayorar la avenida histórica de 1990.

Curiosamente la avenida máxima histórica se presentó en 1960 pero no fue utilizada en el análisis debido a que la mayoración de la avenida de 1990 produjo un mayor volumen, así que éste fue asignado de manera completamente arbitraria.

El análisis convencional llevó al dimensionamiento definitivo de la obra, la cual tiene los datos mostrados en la tabla 3.9. Asimismo, los registros históricos de gastos y volúmenes se presentan en la tabla 3.10.

Característica	
Área de la cuenca	26,020 km <sup>2</sup>
Gasto máximo registrado	1265,000 m <sup>3</sup> /s
Gasto máximo de salida por el vertedor	22,445 m <sup>3</sup> /s
<b>Capacidades</b>	
Capacidad al NAME	4,568 Mm <sup>3</sup>
Capacidad útil	2,408 Mm <sup>3</sup>
Capacidad de conservación	1,102 Mm <sup>3</sup>
Capacidad de control de avenida	558 Mm <sup>3</sup>
Capacidad muerta	500 Mm <sup>3</sup>
<b>Niveles</b>	
NAME	290.00 msnm
NAMO	270.00 msnm
Elevación de la corona	290.75 msnm

Tabla 3.9. Datos generales de la presa “Huites”

De la misma forma que “El Infiernillo”, “Huites” se encuentra en una zona en la cual la presencia de dos poblaciones en la muestra de datos es evidente. Por esta razón, se ha utilizado también la distribución biGumbel doble en la aplicación. Los parámetros de la distribución resultaron:

Parámetros de ubicación:

$$a_1 = 1604.57 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_2 = 6669.27 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$a_3 = 531.94 \times 10^6 \text{ m}^3$$

$$a_4 = 1324.47 \times 10^6 \text{ m}^3$$

Parámetros de escala

$$c_1 = 740.66 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$c_2 = 3071.53 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$c_3 = 304.02 \times 10^6 \text{ m}^3$$

$$c_4 = 728.61 \times 10^6 \text{ m}^3$$

Parámetro de segregación de gastos.

$$p_q = 0.7618$$

Parámetro de segregación de volúmenes

$$p_v = 0.8101$$

Parámetro de asociación

$$m = 1.6021$$

*Revisión para un periodo de retorno  $T = 10\,000$  años*

El análisis de frecuencias tradicional se repitió, resultando un gasto pico de 30,000 m<sup>3</sup>/s y generando un hidrograma completo mediante la mayoración de la avenida de 1990. Este procedimiento asignó un volumen de escurrimiento al hidrograma de 5240 Mm<sup>3</sup>. El tránsito de esta avenida produce una elevación máxima de la superficie del agua dentro del vaso  $Z_m = 289.37$  msnm. Ante este resultado el NAME de “Huites” parece adecuado.

En la aplicación del método propuesto en este trabajo, se utilizó la parametrización Pearson o gamma para la construcción de los hidrogramas completos de entrada, debido a que ésta fue la que mejor se ajustó a los hidrogramas de las avenidas máximas anuales registradas. Las combinaciones de entrada para el periodo de retorno considerado se muestran en la tabla 3.11. La combinación de gasto pico y volumen de escurrimiento de  $Q_p = 29,000 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $V = 5,979 \text{ Mm}^3$  respectivamente es la que produce los efectos más desfavorables para un periodo de retorno  $T_{q,v} = 10000$  años. Esta combinación genera una elevación máxima en el vaso de  $Z_m = 290.58 \text{ msnm}$ , la cual sobrepasa el NAME en 0.58 m. Los periodos de retorno asociados con el gasto y el volumen resultan de  $T_q = 6034$  años y  $T_v = 3135$  años respectivamente. La avenida de diseño se presenta en la figura 3.15.

Estos resultados indican que el vaso “Huites” es más sensible al gasto pico que al volumen de escurrimiento de las avenidas.

Al igual que en el caso de “El Infiernillo”, la presa “Huites” no resulta hidrológicamente segura para el periodo de retorno de 10,000 años.

Año	Gasto $\text{m}^3/\text{s}$	Volumen $\text{Mm}^3$	Año	Gasto $\text{m}^3/\text{s}$	Volumen $\text{Mm}^3$
1941	2085	458	1967	2506	593
1942	2531	1302	1968	1534	1706
1943	14376	1928	1969	1508	837
1944	2580	871	1970	1558	1001
1945	1499	684	1971	2200	905
1946	1165	720	1972	2225	442
1947	1127	435	1973	7960	1250
1948	3215	344	1974	3790	607
1949	10000	2966	1975	1095	1768
1950	3229	644	1976	2677	565
1951	6777	111	1977	1135	601
1952	1266	474	1978	4790	1245
1953	1025	163	1979	6860	986
1954	955	596	1980	1496	1076
1955	4780	787	1981	4828	992
1956	696	513	1982	2450	351
1957	593	69	1983	8275	1625
1958	3010	740	1984	5580	1258
1959	1908	352	1985	3585	1092
1960	15000	1842	1986	1349	1185
1961	1396	689	1987	1429	766
1962	1620	437	1988	1866	683
1963	2702	885	1989	1868	428
1964	1319	384	1990	11558	2930
1965	1944	305	1991	2563	653
1966	2420	2716	1992	2025	601

Tabla 3.10. Avenidas máximas anuales registradas en Huites.

Cálculos adicionales para otros periodos de retorno y sus correspondientes resultados se presentan en la tabla 3.14.

No.	Gasto q	Volumen v	Fq(q)	Tq	Fv(v)	Tv	F(q,v)	Tq,v
1	0	6825	0.0002	1	0.9999	10000	0.0002	10005
2	5000	6822	0.7966	5	0.9999	9964	0.7966	10011
3	6000	6821	0.8285	6	0.9999	9950	0.8285	10005
4	7000	6820	0.8583	7	0.9999	9936	0.8583	10002
5	8000	6819	0.8862	9	0.9999	9923	0.8862	10000
6	9000	6818	0.9109	11	0.9999	9909	0.9109	10002
7	10000	6817	0.9317	15	0.9999	9896	0.9317	10008
8	11000	6815	0.9484	19	0.9999	9868	0.9484	10005
9	12000	6813	0.9615	26	0.9999	9841	0.9615	10008
10	13000	6810	0.9715	35	0.9999	9801	0.9715	10004
11	14000	6807	0.9791	48	0.9999	9761	0.9791	10008
12	15000	6803	0.9847	65	0.9999	9707	0.9847	10009
13	16000	6798	0.9889	90	0.9999	9641	0.9888	10009
14	17000	6792	0.9919	123	0.9999	9562	0.9919	10012
15	18000	6784	0.9941	170	0.9999	9458	0.9941	10009
16	19000	6774	0.9957	235	0.9999	9329	0.9957	10005
17	20000	6762	0.9969	324	0.9999	9176	0.9969	10007
18	21000	6747	0.9978	448	0.9999	8989	0.9978	10012
19	22000	6727	0.9984	620	0.9999	8746	0.9984	10009
20	23000	6701	0.9988	857	0.9999	8440	0.9988	10006
21	24000	6667	0.9992	1187	0.9999	8055	0.9991	10008
22	25000	6620	0.9994	1642	0.9999	7552	0.9994	10003
23	26000	6554	0.9996	2274	0.9999	6898	0.9995	10002
24	27000	6455	0.9997	3148	0.9998	6022	0.9996	10002
25	28000	6293	0.9998	4358	0.9998	4822	0.9997	10006
26	28500	6165	0.9998	5128	0.9998	4045	0.9997	10000
27	29000	5979	0.9998	6034	0.9997	3135	0.9996	10001
28	29500	5678	0.9999	7101	0.9995	2075	0.9995	10002
29	30000	5086	0.9999	8356	0.9989	922	0.9989	10000
30	30500	2450	0.9999	9832	0.9620	26	0.9620	10000
31	30552	0	0.9999	10000	0.0030	1	0.0030	10000

Tabla 3.11. Combinaciones de entrada para el caso de la presa Huites

De acuerdo con los resultados obtenidos, el diseño actual indica que la presa "Huites" es hidrológicamente segura para un periodo de retorno de 7000 años (al NAME) y de 10,000 años si se considera invasión total del bordo libre hasta la corona.

De la misma forma que en la revisión anterior, al tomar una vida útil de 50 años, se tiene que el riesgo de falla de la presa "Huites" es del 0.71 % mientras que, para el periodo de retorno original de  $T = 10000$  años, el riesgo hidrológico es de sólo 0.50%

De esta forma, se puede afirmar que la presa “Huites”, está sujeta a un riesgo de falla 1.42 veces mayor que el que se piensa.

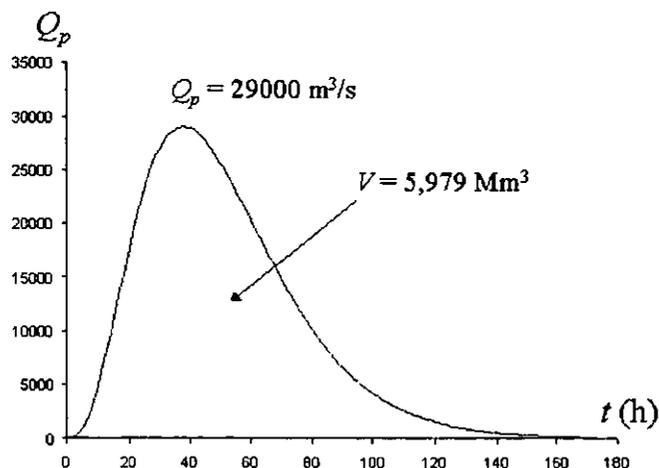


Figura 3.15. Avenida de diseño. Presa “Huites”.  $T = 10,000$  años

$T_{q,v}$ (años)	$Z_m$ (m)
50	279.44
100	282.05
285	284.28
500	285.38
1000	286.42
5000	289.33
7000	290.00 (NAME)
10000	290.58
10400	290.75 (Corona)

Tabla 3.12. Elevaciones máximas para diferentes periodos de retorno. Presa “Huites”

### Algunas conclusiones de la metodología

Con estos ejemplos se puede concluir que la metodología desarrollada para el diseño o revisión de vasos de almacenamiento presenta varias ventajas. En primer lugar, el uso de un hidrograma descrito por dos parámetros evita la arbitrariedad en la selección del volumen de escurrimiento de la avenida además del gasto pico. El volumen de la avenida se elige de acuerdo con el criterio del análisis de frecuencias conjunto. El evento de diseño resultante para un periodo de retorno dado se

obtiene como la solución de un problema de optimización, de tal forma que se asegura que se está obteniendo la condición más desfavorable para el nivel de riesgo aceptado. El proceso de optimización permite además que las características de la obra participen en la estimación del evento de diseño. De esta manera, la avenida de diseño será particular de la obra bajo estudio.

En los dos ejemplos presentados, se obtienen resultados interesantes. En el caso de la presa “El Infiernillo” se ha determinado que el riesgo de falla durante su vida útil es 13 veces mayor que el se cree. Este resultado indica que, aún con la sobrelevación de la corona y reducción del nivel de conservación, “El Infiernillo” es una presa insegura para  $T = 10,000$  años.

En el caso de la presa “Huites”, el diseño actual, aunque un poco escaso, resulta mejor librado, La presa está sujeta a un riesgo de falla en su vida útil ligeramente mayor que el correspondiente a un periodo de retorno de 10,000 años. De cualquier forma, la presa “Huites” es más insegura de lo que se cree.

Con los resultados de estos ejemplos, es evidente que el establecimiento de un programa para la revisión hidrológica de las presas existentes es muy necesario.

*¿Cómo puede ser que las matemáticas, un producto del pensamiento humano,  
independiente de la experiencia, se adapten tan admirablemente  
a los objetos de la realidad?*

Albert Einstein

## Estimación de avenidas de diseño en obras ubicadas en redes de ríos

En la hidrología de superficie, frecuentemente, la región dentro de la cual se construirán obras de control de avenidas se ubica en una red de ríos. Tal es el caso de las obras situadas en “llanuras de inundación” de ríos importantes en las que comúnmente se llevan a cabo diversas acciones estructurales para el control de las crecientes. En nuestro país, esta situación se encuentra en forma clara en las cuencas bajas de los ríos Papaloapan, Grijalva y Pánuco y en menor grado en el río Balsas. Como ejemplo, en la figura 4.1 se aprecia la red hidrográfica del sistema Papaloapan ubicada en el sureste de la República Mexicana.



Figura 4.1. Red hidrográfica del sistema Papaloapan

La estimación de eventos para el diseño de obras ubicadas en redes de ríos no puede realizarse, en la mayoría de los casos, mediante el análisis de frecuencias convencional, el cual se basa en el tratamiento probabilístico de registros de escurrimiento univariados (generalmente gastos máximos) en el sitio donde se pretende proyectar la obra hidráulica. En el caso de las llanuras de inundación, las pendientes de los cauces son generalmente pequeñas por lo cual la capacidad hidráulica de los mismos es limitada. En avenidas extraordinarias es frecuente que los escurrimientos en la cuenca sobrepasen la capacidad de los cauces provocando el desborde lateral hacia las zonas adyacentes generando regiones de inundación temporal denominadas “lagunas de inundación”.

Por esta razón, la posibilidad de contar con registros de escurrimiento confiables en las partes bajas de la cuenca se ve limitada, ya que éstos serán confiables solamente en los casos en los que el flujo ocurra dentro de la sección de control del cauce, lo cual necesariamente sucede en épocas de bajo escurrimiento. Una vez que se inicia el desborde por la falta de capacidad del tramo, las mediciones, si es que éstas se pueden realizar, no corresponderían a las magnitudes reales. Por esto, para eventos de gran magnitud no se dispone de mediciones adecuadas aún cuando existan estaciones hidrométricas en las llanuras de inundación de las redes hidrográficas.

Con base en los comentarios anteriores, la aplicación del análisis de frecuencias convencional en el sitio de la obra, si este se encuentra en la planicie, es prácticamente imposible.

Una alternativa para la atención de este problema podría ser el complemento de los registros en el sitio utilizando información medida en la parte media o alta de la cuenca. La información en las estaciones podría ser transferida al sitio en estudio mediante algún modelo de tránsito. Sin embargo, es frecuente que, para eventos extraordinarios, no se cuente con registros confiables de hidrogramas completos, sino sólo de su gasto pico, estimado a través de una curva de elevaciones – gastos o del método de sección – pendiente.

La generación sintética de los registros faltantes es otra alternativa. Sin embargo, ésta no es recomendable ya que el registro confiable está formado exclusivamente por eventos pequeños (que no han desbordado), por lo cual el modelo de generación sintética no podrá tomar en cuenta los gastos extremos, los cuales son precisamente los eventos de interés para los fines de diseño.

Con estos antecedentes, parece razonable y justificado utilizar la información de los escurrimientos en sitios en los cuales se tenga confianza en los registros, mediante un análisis de frecuencias conjunto. Este enfoque de atención es el que se presenta a continuación utilizando el planteamiento general del análisis de frecuencias conjunto multivariado.

Considérese una red de ríos, como la mostrada en la figura 4.2, en la cual las corrientes mantienen una cierta topología, quizás compleja pero definida, de tal forma que en algún punto se tiene la confluencia de todas ellas. Llamemos estación  $i$  al sitio en el cual se tienen registros históricos del río  $i$  y asociemos los datos  $Q_i$  a la serie de gastos máximos anuales registrados en dicha estación.

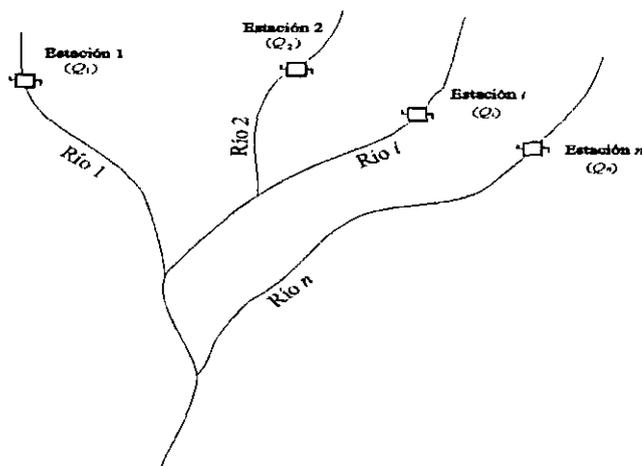


Figura 4.2 Nomenclatura utilizada en la red de  $n$  ríos

Supongamos ahora que se tiene proyectada una cierta obra hidráulica o estructura en algún sitio o tramo de la red hidrográfica. Esta obra podrá ser por ejemplo un bordo longitudinal de protección, un bordo perimetral o un desvío lateral. En este tipo de obras se tienen capacidades de almacenamiento pequeñas por lo que son principalmente sensibles al gasto pico de una avenida. Por tanto, para esta aplicación basta caracterizar las avenidas registradas en las estaciones hidrométricas  $1, 2, \dots, n$ , por su gasto pico.

Consideremos por ejemplo, el bordo longitudinal A para la protección de una zona susceptible a la inundación por el desborde del río (figura 4.3). Si en el sitio de construcción de la obra existiera información hidrométrica de gastos máximos anuales, un análisis de frecuencias convencional proporcionaría el gasto pico del hidrograma de diseño para distintos periodos de retorno, con lo cual se dispondría de la información requerida para el diseño de la obra. Sin embargo, por las razones antes expuestas es común que dicha información no exista o no sea confiable, por lo que elegimos la aplicación de un método que utilice la información de las estaciones  $i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) ubicadas en la parte alta o media alta de la cuenca.

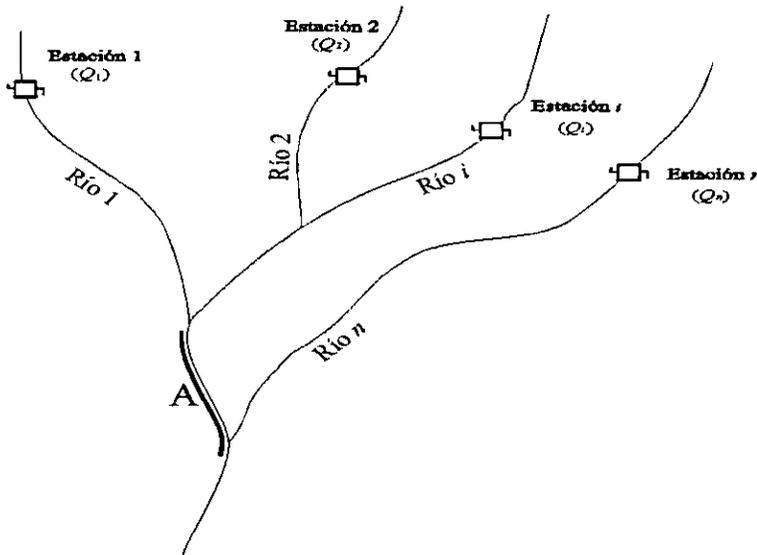


Figura 4.3. Obra ubicada dentro de una red de ríos.

Ahora bien, al utilizar los registros de las estaciones  $i$ , la pregunta que surge en forma inmediata en el proceso de diseño es: ¿Cuáles deben ser las características de los eventos presentados en los sitios de las estaciones hidrométricas tales que, al ser combinados, generen el evento con el periodo de retorno requerido en el sitio de la obra? O bien, en forma alterna como ¿Cómo se relaciona el periodo de retorno del evento de diseño en el sitio de la obra, con los periodos de retorno de los eventos correspondientes en los sitios en los cuales existen registros?

La respuesta a estas preguntas se realiza a través del planteamiento del análisis de frecuencias conjunto multivariado, en el cual los gastos  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  son considerados como las variables aleatorias y tratados de acuerdo con la teoría establecida en el capítulo 2 a través del periodo de retorno conjunto. El enfoque de solución se detalla a continuación.

## Análisis de frecuencias conjunto

Considérese que en las estaciones hidrométricas  $i=1, 2, \dots, n$  se dispone de los registros correspondientes a los gastos máximos anuales  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ . El periodo de retorno conjunto, definido según (2.43) y que está asociado con el evento  $q_1 > Q_1, q_2 > Q_2, \dots, q_n > Q_n$  esta dado por:

$$T_{1,2,\dots,n} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n F_i(Q_i) + \sum_{i \leq i_1 < i_2 \leq n} F_{i_1, i_2}(Q_{i_1}, Q_{i_2}) - \dots + (-1)^n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} F_{i_1, i_2, \dots, i_n}(Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots, Q_{i_n})} \quad (4.1)$$

Como se mencionó en el capítulo 2, existe una infinidad de juegos de valores  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  que satisfacen la ecuación (4.1) para un  $T_{1,2,\dots,n}$  dado. Cada vector puede traducirse en hidrogramas completos en las corrientes individuales, por ejemplo, a partir de procesos de mayoración de las avenidas máximas históricas en cada sitio en particular. En principio, podría emplearse una metodología similar a la planteada en el capítulo 3 para construir hidrogramas de diseño parametrizados en términos de gasto pico y su volumen. No obstante, desde el punto de vista de la función de distribución de probabilidad multivariada que resultaría, lo anterior implicaría duplicar la dimensionalidad del problema. Adicionalmente, cuando el número de tributarios de la red es grande, multiplicar el número de variables de diseño por dos, reduce la significancia de la muestra histórica considerablemente. En todo caso, como se especificó anteriormente, el tipo de obras de interés para esta aplicación son principalmente sensibles al gasto pico.

Los hidrogramas, transitados por la red de ríos bajo estudio, producirán un cierto efecto en el o los sitios de las obras. Cada combinación de gastos en las  $n$  corrientes individuales, es decir cada vector tratado arrojará un resultado de la o las variable de interés en el sitio estudiado.

Es evidente que, en general, se tendrá un vector tal que produce el efecto más desfavorable sobre la obra por diseñar. Este será precisamente el vector que soluciona el problema de estimación.

Como ejemplo, para el diseño de bordos longitudinales de protección, resulta obvio pensar que la característica más importante es la elevación máxima que alcanza la superficie libre del agua en una sección dada. Entonces para el diseño del bordo en una determinada sección, el vector solución elegido será el que produzca la mayor elevación de la superficie libre del agua en ese sitio. Evidentemente esa elevación corresponderá a la elevación mínima requerida por la corona del bordo en cuestión.

Es conveniente comentar que dada la flexibilidad planteada en la solución del problema de estimación, se puede elegir la función objetivo a optimizar de acuerdo con la naturaleza específica del problema que se este atendiendo. De esta manera, se podría maximizar o minimizar alguna función de la elevación de la superficie libre y no solamente dicha elevación. Ya que en general, no se puede disponer en forma explícita de la función objetivo, debe recurrirse a métodos numéricos de optimización con restricciones.

El procedimiento permite por lo tanto, obtener la condición más desfavorable para una obra específica y para el periodo de retorno elegido y también, al final del cálculo, se habrá obtenido el hidrograma y periodo de retorno en cada una de las corrientes que forman la red de ríos. Es decir, los eventos en los  $n$  ríos individuales no son elegidos arbitrariamente sino que se seleccionan con el criterio conjunto del análisis de frecuencias.

Finalmente, es importante comentar que para la realización de análisis estadísticos multivariados aplicados en la hidrología es recomendable que las estaciones involucradas tengan un comportamiento homogéneo en su frecuencias de avenidas. Resulta entonces deseable que los registros cumplan con alguna prueba de homogeneidad regional, como por ejemplo la prueba de Langbein, propuesta por Dalrymple (1960). Si los registros en las estaciones propician la falta de homogeneidad, el análisis multivariado resulta poco confiable.

### **Ejemplo de aplicación**

El río Papaloapan se encuentra en la región hidrológica No. 28 ubicada en el sureste de la República Mexicana. La red hidrográfica del río Papaloapan, cuya longitud es de 314 km aproximadamente, está formada por los ríos Tonto, Valle Nacional, Obispo, Tesechoacán y San Juan Evangelista entre los más importantes, además de otros afluentes menores como los ríos Lauchapan y Amapa. La cuenca cubre una superficie cercana a los 47000 km<sup>2</sup> y mantiene la topología mostrada en la figura 4.1.

En la parte final de su recorrido el río Papaloapan cruza la planicie costera formando un amplio sistema de lagunas y llanuras de inundación. La región se ve afectada con frecuencia por fenómenos meteorológicos diversos que producen altas precipitaciones, generando avenidas extraordinarias en el río. En muchas ocasiones, la capacidad de los cauces se ve excedida generándose así el desbordamiento hacia las zonas adyacentes.

Este problema, que representa una amenaza latente para los habitantes de la planicie, ha sido atendido mediante la realización de diversos estudios y la construcción de obras de infraestructura.

Es cuestión de estudios, el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA) retomó recientemente el modelo de simulación del tránsito de avenidas por la llanura de inundación del río Papaloapan, implementado originalmente por la Comisión del Plan Nacional Hidráulico (CPNH) en 1977. El modelo se reprogramó y calibró con las condiciones actuales y el código fue denominado PAPAL. PAPAL considera el efecto de almacenamiento temporal en las lagunas de inundación mediante un modelo unidimensional con posibilidad de transferencia de masa lateral por medio de una función tipo vertedor.

El modelo PAPAL, que fue desarrollado para facilitar el estudio de las obras de protección y otras acciones de control en la cuenca, requiere como datos de entrada, los hidrogramas de avenida en las estaciones hidrométricas ubicadas en el "piamonte" y proporciona como resultados los gastos y elevaciones de la superficie libre del agua en cualquier parte de la red de ríos.

Con objeto de poder ejemplificar el uso de la metodología propuesta en este trabajo, la red hidrográfica del sistema Papaloapan se simplificó de la siguiente manera:

1. Los ríos Lauchapan, Amapa y Obispo aportan, en forma individual, menos del 3% del escurrimiento medio anual en el río Papaloapan y se excluyeron de la red.
2. Después de la construcción de la Presa Temascal (Presidente Miguel Alemán), el río Tonto quedó completamente controlado, modificando su régimen de escurrimiento. Con esto, se consideró que el gasto en el río Tonto corresponde al gasto descargado por la planta hidroeléctrica, el cual es aproximadamente constante e igual a  $300 \text{ m}^3/\text{s}$ .
3. Los demás escurrimientos se toman en cuenta al considerar la red formada por los ríos Tesechoacán, San Juan Evangelista y el propio Papaloapan.

La red simplificada se muestra en la figura 4.4. Con estas simplificaciones, el problema del sistema Papaloapan se reduce a un análisis de frecuencias trivariado, llevado a cabo con la información de gastos en las estaciones hidrométricas Tuxtepec, sobre el río Papaloapan; Azueta, sobre el río Tesechoacan y Cuatotolapan, sobre el río San Juan Evangelista.



Figura 4.4 Red simplificada del sistema Papaloapan

Los datos de gastos máximos anuales de las estaciones hidrométricas consideradas para este ejemplo son: Tuxtepec, de 1961 a 1981; Azueta, de 1948 a 1991 y Cuatotolapan, de 1948 a 1992 y se muestran resumidos en la tabla 4.1. Asimismo, la tabla 4.2 muestra las avenidas máximas históricas registradas en cada una de las estaciones.

Año	Gastos Máximos Anuales (m <sup>3</sup> /s)			Año	Gastos Máximos Anuales (m <sup>3</sup> /s)		
	Tuxtepec	Azueta	Cuatotolapan		Tuxtepec	Azueta	Cuatotolapan
1948		630	519	1971	2535	960	773
1949		702	641	1972	3310	970	723
1950		750	652	1973	5220	1593	2100
1951		974	763	1974	4830	2093	2076
1952		1320	854	1975	5120	1952	1907
1953		942	598	1976	3060	1480	795
1954		1240	678	1977	1700	740	553
1955		9151	990	1978	2810	160	2184
1956		947	738	1979	4450	986	784
1957		705	710	1980	3339	1805	1709
1958		1023	943	1981	6145	1738	1326
1959		725	610	1982		1367	856
1960		1270	1190	1983		1321	1400
1961	4235	975	875	1984		1202	1443
1962	2750	735	681	1985		1090	-
1963	2562	750	1232	1986		1198	-
1964	3340	741	626	1987		1594	-
1965	3015	770	693	1988		1905	1714
1966	3263	722	1188	1989		1697	1804
1967	2780	733	608	1990		1072	-
1968	3002	1320	1224	1991		2088	1158
1969	4669	1404	4165	1992			1616
1970	3038	906	1000				

Tabla 4.1. Gastos Máximos Anuales

Según la prueba de Langbein (Dalrymple, 1960), las tres estaciones pertenecen a una región hidrológicamente homogénea y sus datos pueden utilizarse en análisis regionales y conjuntos.

Considérese ahora el problema mostrado en la figura 4.5. Por un lado, se pretende rescatar una zona al Este de los ríos San Juan y Papaloapan, la cual podría utilizarse para la ganadería o las prácticas agrícolas propias de la región. Para esto se considera adecuado el diseño y construcción de un bordo longitudinal de protección (bordo 1) sobre la margen derecha de los ríos citados.

Por otra parte, el poblado de Tlacotalpan, ubicado aguas abajo de la confluencia de los ríos Papaloapan y San Juan Evangelista, se ve frecuentemente afectado por las inundaciones debidas al desborde de dichos ríos. Por esto, una segunda obra consiste en la sobrelevación del bordo longitudinal de protección existente (bordo 2).

Tiempo (h)	Gastos Medios Diarios (m <sup>3</sup> /s)			Tiempo (h)	Gastos Medios Diarios (m <sup>3</sup> /s)		
	Tuxtepec	Azueta	Cuatotolapan		Tuxtepec	Azueta	Cuatotolapan
0	987	174	1082	384	2642	302	1085
24	911	158	1018	408	1807	263	1008
48	923	149	1003	432	1413	253	896
72	757	144	997	456	1185	425	765
96	714	146	1043	480	1042	1099	660
120	660	142	1237	504	969	1936	606
144	760	129	1499	528	981	1321	548
168	931	122	1604	552	825	889	535
192	1732	115	1794	576	714	767	548
216	4208	110	2080	600	639	721	529
240	5184	116	2380	6024	588	703	528
264	4502	115	3295	648	553	548	560
288	3819	104	4015	672	529	440	567
312	4768	129	2764	696	503	490	545
336	5451	258	1703	720	454	756	525
360	4478	318	1260				

Tabla 4.2. Avenidas máximas históricas

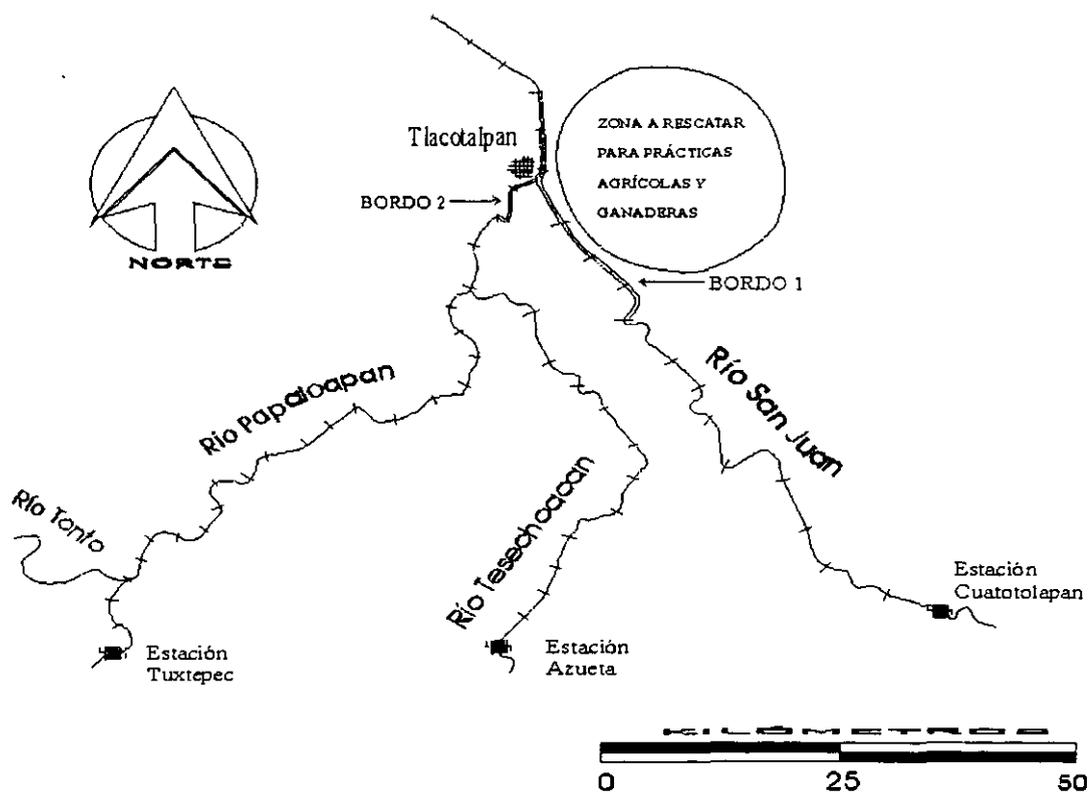


Figura 4.5. Obras de protección en proyecto

Se estima que con la construcción de estas obras se logrará el objetivo de rescate y protección de dichas zonas.

Un sencillo análisis de riesgo hidrológico, si se acepta que existe un 25% de probabilidad de que la avenida de diseño sea igualada o excedida en los 30 años de su vida útil, conduce a considerar un periodo de retorno de diseño  $T = 100$  años.

Ya que la red simplificada corresponde al caso trivariado, el periodo de retorno conjunto esta dado, según la expresión (4.1), por:

$$T_{1,2,3} = \frac{1}{1 - F_1(Q_1) - F_2(Q_2) - F_3(Q_3) + F_{1,2}(Q_1, Q_2) + F_{1,3}(Q_1, Q_3) + F_{2,3}(Q_2, Q_3) - F_{1,2,3}(Q_1, Q_2, Q_3)} \quad (4.2)$$

por lo que es necesario determinar la función de distribución conjunta trivariada  $F(Q_1, Q_2, Q_3)$ .

#### *Ajuste de la función de distribución conjunta trivariada*

Ya que para este caso no es evidente la presencia de poblaciones mezcladas en el registro de gastos máximos, se ha elegido el modelo logístico de Gumbel con marginales tipo Gumbel o de valores extremos tipo I, como la función de distribución conjunta. Se tiene entonces que:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \exp \left\{ - \left[ \exp\left(-m \frac{x_1 - u_1}{a_1}\right) + \exp\left(-m \frac{x_2 - u_2}{a_2}\right) + \exp\left(-m \frac{x_3 - u_3}{a_3}\right) \right]^{\frac{1}{m}} \right\} \quad (4.3)$$

es la función utilizada, la cual ha sido denominada "función TriGumbel", donde:

$u_1, u_2, u_3$  son los parámetros de ubicación del modelo,  
 $a_1, a_2, a_3$  son los parámetros de escala del modelo trivariado y  
 $m$  es el parámetro de asociación.

El parámetro de asociación se calcula aplicando el método basado en el contenido de los octantes presentado en el capítulo 2. Después de seis iteraciones se obtuvo un valor  $m=1.8334$ . Con esto, los seis parámetros restantes pueden obtenerse por el método de la máxima verosimilitud. En este caso, la función logarítmica de verosimilitud se maximizó por medio del algoritmo de Rosenbrock (1960), desarrollándose para este fin un programa de cómputo basado en las rutinas presentadas por Kuester y Mize (1973).

Si llamamos  $Q_1$  a los gastos presentados en la estación Tuxtepec,  $Q_2$  a los correspondientes a la estación Azueta y  $Q_3$  a los registrados en la estación Cuatotolapan se tiene que los valores de los parámetros de la función TriGumbel, que maximizan la función logarítmica de verosimilitud y que constituyen por lo tanto el mejor ajuste resultan ser:

Parámetros de ubicación:

$$\begin{aligned}u_1 &= 5457.73 \text{ m}^3/\text{s} \\u_2 &= 1729.28 \text{ m}^3/\text{s} \\u_3 &= 669.49 \text{ m}^3/\text{s}\end{aligned}$$

Parámetros de escala:

$$\begin{aligned}a_1 &= 1871.25 \text{ m}^3/\text{s} \\a_2 &= 770.14 \text{ m}^3/\text{s} \\a_3 &= 1427.93 \text{ m}^3/\text{s}\end{aligned}$$

Parámetro de asociación:

$$m = 1.8334$$

Una vez determinada la función trivariada, las funciones marginales en una y dos variables pueden obtenerse como:

$$F_1(Q_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{1,2,3}(Q_1, Q_2, Q_3) dQ_2 dQ_3$$

$$F_2(Q_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{1,2,3}(Q_1, Q_2, Q_3) dQ_1 dQ_3$$

$$F_3(Q_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{1,2,3}(Q_1, Q_2, Q_3) dQ_1 dQ_2$$

$$F_{1,2}(Q_1, Q_2) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{1,2,3}(Q_1, Q_2, Q_3) dQ_3$$

$$F_{1,3}(Q_1, Q_3) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{1,2,3}(Q_1, Q_2, Q_3) dQ_2$$

$$F_{2,3}(Q_2, Q_3) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{1,2,3}(Q_1, Q_2, Q_3) dQ_1$$

con lo cual la expresión para el periodo de retorno conjunto  $T_{1,2,3}$  queda completamente caracterizada.

Adicionalmente, los periodos de retorno asociados con los eventos en las corrientes individuales están dados por las siguientes expresiones (4.4):

$$T_1 = \frac{1}{1 - F_1(Q_1)}$$

$$T_2 = \frac{1}{1 - F_2(Q_2)}$$

$$T_3 = \frac{1}{1 - F_3(Q_3)}$$

### Planteamiento de la función objetivo

Debido a la naturaleza de las obras por diseñar, el parámetro de mayor importancia corresponde al tirante o elevación de la superficie libre del agua que se alcanza en los tramos involucrados del río en estudio, ya que ésta indicará la elevación mínima requerida por la corona de los bordos.

Ya que los bordos se extienden por varios kilómetros, resultaría adecuado determinar las elevaciones máximas esperadas, para el periodo de retorno de diseño, a lo largo de los mismos. Por esta razón, aprovechando la discretización espacial de los ríos en el modelo PAPAL, el cual considera tramos de entre 5 y 10 km, se puede plantear la obtención de la envolvente de elevaciones máximas para los tramos involucrados en el bordo bajo estudio.

Ya que se tienen en sí dos obras distintas (bordo 1 y bordo 2), es conveniente tratar a éstas por separado a fin de encontrar la condición más desfavorable para cada una.

Con esto, la función objetivo a considerar esta dada por lo tanto por:

$$\Phi_i = \int_{L_i} h(s) ds \quad (4.5)$$

donde:

$\Phi_i$  es la función características de la solución para el bordo  $i$

$L_i$  es la longitud del bordo  $i$  (medida a lo largo del propio bordo)

$h(s)$  es la elevación máxima de la superficie libre del agua (en cada tramo de la longitud  $L_i$ )

$s$  es la coordenada curvilínea a lo largo del bordo.

$i$  es el bordo en estudio ( $i = 1, 2$ )

Ya que se busca la solución más desfavorable para un  $T_{1,2,3}$  dado, la solución al problema estará dada por el vector solución  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  que genere la máxima elevación de la superficie libre del agua, con lo que se obtendrá la elevación mínima requerida en los bordos mediante la simple adición de un bordo libre.

Con lo anterior, el planteamiento de solución de problema se resume como:

Para cada bordo  $i$  ( $i = 1, 2$ )

$$\text{máx } \Phi_i$$

Sujeto a:

$$T_{1,2,3} = \frac{1}{1 - F_1(Q_1) - F_2(Q_2) - F_3(Q_3) + F_{1,2}(Q_1, Q_2) + F_{1,3}(Q_1, Q_3) + F_{2,3}(Q_2, Q_3) - F_{1,2,3}(Q_1, Q_2, Q_3)}$$

$$Q_1 > 0$$

$$Q_2 > 0$$

$$Q_3 > 0$$

Para la solución del problema de optimización se puede seguir el proceso descrito a continuación:

1. Se elige un vector de gastos máximos  $(Q_1, Q_2, Q_3)$  tal que se satisfaga la identidad (4.2) para el  $T_{1,2,3}$  dado. Para este caso  $T_{1,2,3} = 100$  años. La elección del vector se puede realizar fijando un valor para dos de los gastos y luego calculando el tercero de ellos a partir de la ecuación 4.2.
2. Con el vector, se construyen los hidrogramas de entrada a la red. Si no se tiene mayor información se puede utilizar un proceso de mayoración de las avenidas máximas históricas. Para este ejemplo se han utilizado las avenidas máximas históricas registradas en la tabla 4.2.
3. Se simula el tránsito de los hidrogramas construidos en el paso 2 por la red de ríos. Para esto se ha utilizado el modelo PAPAL obteniendo los limnogramas en los tramos de interés.
4. Se calcula la función objetivo  $\Phi$  para cada bordo
5. Se elige otro vector de tal forma que se siga cumpliendo la igualdad 4.2.
6. Los pasos 2 a 5 se repiten tantas veces como sea necesario a fin de determinar los máximos de las funciones  $\Phi$  para cada bordo.

El hidrograma determinado a partir del vector solución que maximice la función objetivo  $\Phi_i$  corresponderán a la avenida de diseño del bordo  $i$ .

En este ejemplo se probaron 60 vectores  $(Q_1, Q_2, Q_3)$ , los cuales se consignan en la tabla 4.3. Como se observa todas las combinaciones probadas corresponden a un periodo de retorno de 100 años.

Los vectores solución que presentan los máximos valores de las funciones objetivos y que por lo tanto corresponden a las condiciones más desfavorables para el diseño son.

Bordo 1:

$$Q_1 = 11500 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_2 = 3500 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_3 = 6908 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Phi = 339.92 \times 10^3 \text{ m}^2$$

De acuerdo con las expresiones (4.4), estos datos corresponden a eventos con periodos de retorno  $T_1 = 26$  años,  $T_2 = 10$  años,  $T_3 = 80$  años en las estaciones Tuxtepec (río Papaloapan), Azueta (río Tesechoacán) y Cuatotolapan (río San Juan).

PARAMETROS FUNCION

U1= 5457.73      U2= 1729.28      U3= 669.49

a1= 1871.25      a2= 770.14      a3= 1427.93

m= 1.8334

Corrida	Vectores										
X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	F(X <sub>1</sub> )	F(X <sub>2</sub> )	F(X <sub>3</sub> )	F(X <sub>1</sub> ,X <sub>2</sub> )	F(X <sub>1</sub> ,X <sub>3</sub> )	F(X <sub>2</sub> ,X <sub>3</sub> )	F(X <sub>1</sub> ,X <sub>2</sub> ,X <sub>3</sub> )	T (Años)	
1	0	5000	5834	0.0000	0.9858	0.9735	0.0000	0.0000	0.9693	0.0000	100.0
2	1500	5271	0	0.0003	0.9900	0.2023	0.0003	0.0002	0.2023	0.0002	100.0
3	2000	2500	7210	0.0018	0.6924	0.9898	0.0017	0.0018	0.6922	0.0017	100.0
4	2000	5000	5834	0.0018	0.9858	0.9735	0.0018	0.0018	0.9693	0.0018	100.0
5	2500	2000	7227	0.0078	0.4948	0.9899	0.0072	0.0078	0.4947	0.0072	100.0
6	2500	5000	5834	0.0078	0.9858	0.9735	0.0078	0.0078	0.9693	0.0078	100.0
7	3000	2500	7210	0.0243	0.6924	0.9898	0.0236	0.0243	0.6922	0.0236	100.0
8	3000	5000	5834	0.0243	0.9858	0.9735	0.0243	0.0243	0.9693	0.0243	100.0
9	3500	2500	7210	0.0580	0.6924	0.9898	0.0560	0.0580	0.6922	0.0560	100.0
10	3500	5000	5834	0.0580	0.9858	0.9735	0.0580	0.0580	0.9693	0.0580	100.0
11	4000	2500	7210	0.1131	0.6924	0.9898	0.1081	0.1131	0.6922	0.1081	100.0
12	4000	5000	5834	0.1131	0.9858	0.9735	0.1131	0.1131	0.9693	0.1131	100.0
13	4500	2500	7210	0.1886	0.6924	0.9898	0.1783	0.1885	0.6922	0.1783	100.0
14	4500	5000	5834	0.1886	0.9858	0.9735	0.1885	0.1885	0.9693	0.1884	100.0
15	5000	2500	7210	0.2788	0.6924	0.9898	0.2601	0.2788	0.6922	0.2601	100.0
16	5000	5000	5834	0.2788	0.9858	0.9735	0.2788	0.2787	0.9693	0.2786	100.0
17	5500	2500	7210	0.3762	0.6924	0.9898	0.3453	0.3761	0.6922	0.3453	100.0
18	5500	5000	5834	0.3762	0.9858	0.9735	0.3761	0.3759	0.9693	0.3758	100.0
19	6000	2500	7208	0.4731	0.6924	0.9898	0.4260	0.4730	0.6922	0.4260	100.0
20	6000	5000	5834	0.4731	0.9858	0.9735	0.4730	0.4727	0.9693	0.4725	100.0
21	6500	2500	7206	0.5639	0.6924	0.9898	0.4967	0.5638	0.6922	0.4966	100.0
22	6500	5000	5834	0.5639	0.9858	0.9735	0.5637	0.5632	0.9693	0.5630	100.0
23	7000	2500	7203	0.6449	0.6924	0.9898	0.5542	0.6448	0.6922	0.5541	100.0
24	7000	5000	5836	0.6449	0.9858	0.9735	0.6447	0.6440	0.9693	0.6437	100.0
25	7500	2500	7197	0.7148	0.6924	0.9897	0.5983	0.7146	0.6922	0.5982	100.0
26	7500	5000	5836	0.7148	0.9858	0.9735	0.7144	0.7135	0.9693	0.7131	100.0
27	8000	2500	7188	0.7734	0.6924	0.9896	0.6302	0.7730	0.6922	0.6300	100.0
28	8000	5000	5834	0.7734	0.9858	0.9735	0.7728	0.7716	0.9693	0.7711	100.0
29	8500	2500	7176	0.8214	0.6924	0.9896	0.6522	0.8210	0.6922	0.6521	100.0
30	8500	5000	5830	0.8214	0.9858	0.9734	0.8207	0.8191	0.9692	0.8184	100.0
31	9000	2500	7158	0.8602	0.6924	0.9894	0.6669	0.8596	0.6922	0.6667	100.0
32	9000	5000	5826	0.8602	0.9858	0.9733	0.8592	0.8572	0.9692	0.8563	100.0
33	9500	3000	7126	0.8911	0.8253	0.9892	0.7945	0.8904	0.8248	0.7941	100.0
34	9500	5000	5818	0.8911	0.9858	0.9732	0.8899	0.8872	0.9690	0.8860	100.0
35	10000	3000	7097	0.9155	0.8253	0.9890	0.8057	0.9145	0.8248	0.8053	100.0
36	10000	5000	5795	0.9155	0.9858	0.9728	0.9140	0.9104	0.9686	0.9090	100.0
37	10500	3000	7057	0.9347	0.8253	0.9887	0.8130	0.9334	0.8248	0.8126	100.0
38	10500	3500	7035	0.9347	0.9045	0.9885	0.8830	0.9333	0.9036	0.8822	100.0

Corrida	Vectores			F(X <sub>1</sub> )	F(X <sub>2</sub> )	F(X <sub>3</sub> )	F(X <sub>1</sub> ,X <sub>2</sub> )	F(X <sub>1</sub> ,X <sub>3</sub> )	F(X <sub>2</sub> ,X <sub>3</sub> )	F(X <sub>1</sub> ,X <sub>2</sub> ,X <sub>3</sub> )	T (Años)
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>								
39	10500	5000	5760	0.9347	0.9858	0.9721	0.9327	0.9280	0.9681	0.9262	100.0
40	11000	3000	7000	0.9496	0.8253	0.9882	0.8176	0.9478	0.8247	0.8171	100.0
41	11000	3500	6984	0.9496	0.9045	0.9881	0.8908	0.9478	0.9035	0.8899	100.0
42	11000	4000	6915	0.9496	0.9489	0.9875	0.9268	0.9476	0.9470	0.9254	100.0
43	11000	5000	5680	0.9496	0.9858	0.9705	0.9471	0.9405	0.9666	0.9384	100.0
44	11500	3000	6920	0.9612	0.8253	0.9875	0.8206	0.9587	0.8247	0.8200	100.0
45	11500	3500	6908	0.9612	0.9045	0.9874	0.8959	0.9587	0.9034	0.8949	100.0
46	11500	5000	5500	0.9612	0.9858	0.9666	0.9581	0.9476	0.9631	0.9452	100.0
47	12000	3500	6792	0.9701	0.9045	0.9864	0.8992	0.9666	0.9032	0.8979	100.0
48	12000	4000	6742	0.9701	0.9489	0.9859	0.9397	0.9663	0.9465	0.9376	100.0
49	12000	5000	4955	0.9701	0.9858	0.9515	0.9663	0.9419	0.9489	0.9397	100.0
50	12500	500	6623	0.9771	0.0072	0.9847	0.0072	0.9717	0.0072	0.0072	100.0
51	12500	3500	6612	0.9771	0.9045	0.9845	0.9012	0.9717	0.9029	0.8996	100.0
52	12500	4000	6562	0.9771	0.9489	0.9840	0.9431	0.9713	0.9459	0.9404	100.0
53	12500	4500	6320	0.9771	0.9730	0.9811	0.9637	0.9695	0.9662	0.9582	100.0
54	13000	500	6312	0.9824	0.0072	0.9810	0.0072	0.9734	0.0072	0.0072	100.0
55	13000	3000	6310	0.9824	0.8253	0.9809	0.8242	0.9733	0.8240	0.8229	100.0
56	13000	4000	6236	0.9824	0.9489	0.9799	0.9453	0.9726	0.9444	0.9410	100.0
57	13000	4500	5875	0.9824	0.9730	0.9742	0.9670	0.9680	0.9617	0.9571	100.0
58	13500	3500	5625	0.9865	0.9045	0.9694	0.9033	0.9659	0.8989	0.8977	100.0
59	13500	4000	5459	0.9865	0.9489	0.9657	0.9467	0.9625	0.9372	0.9354	100.0
60	14000	2500	2650	0.9896	0.6924	0.7789	0.6922	0.7786	0.6330	0.6328	100.0

Tabla 4.3. Vectores considerados en el ejemplo

Bordo 2:

$$Q_1 = 13000 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_2 = 4000 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_3 = 6236 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Phi = 70.22 \times 10^3 \text{ m}^2$$

lo que corresponde a eventos con periodos de retorno  $T_1 = 57$  años,  $T_2 = 20$  años,  $T_3 = 50$  años en los ríos Papaloapan, Tesechoacán y San Juan.

Las envolventes de elevaciones máximas de la superficie libre del agua se muestran en las figuras 4.6 y 4.7 para los bordos 1 y 2 respectivamente.

### Algunas conclusiones de la metodología

Debemos notar que en la solución provista, los eventos en las corrientes individuales no son elegidos previamente sino que son parte de los resultados que ofrece el procedimiento de cálculo. El método permite obtener la estimación más desfavorable para el diseño de la obra (con los datos históricos y el periodo de retorno dado) bajo la consideración de dependencia parcial entre los eventos ocurridos en las corrientes individuales.

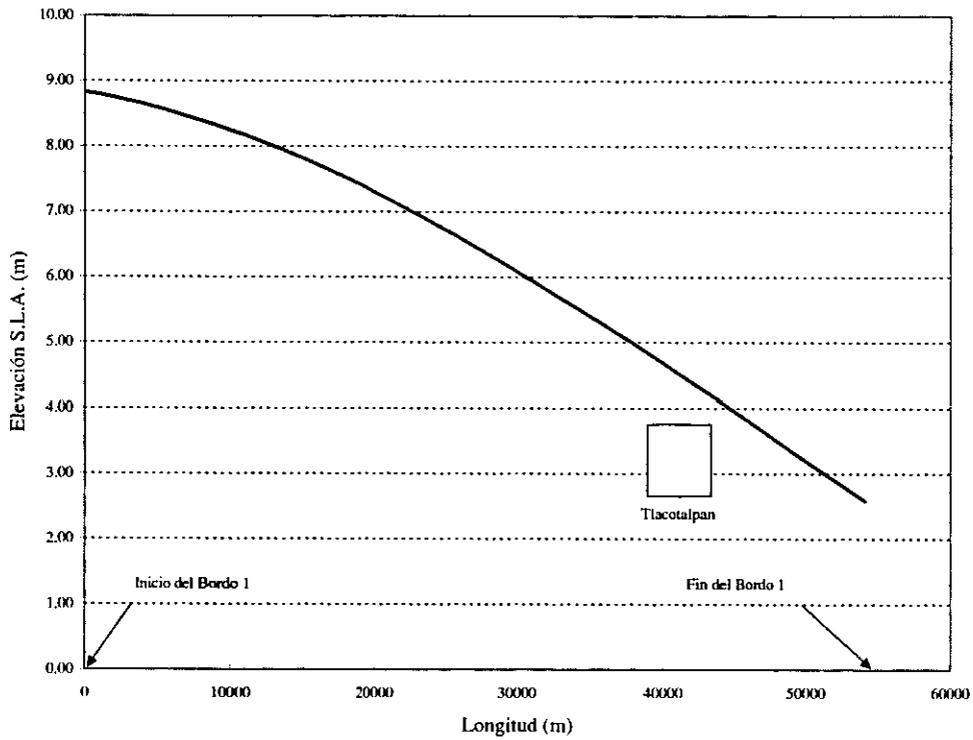


Figura 4.6. Envoltura de elevaciones máximas de la superficie libre del agua para el bordo 1

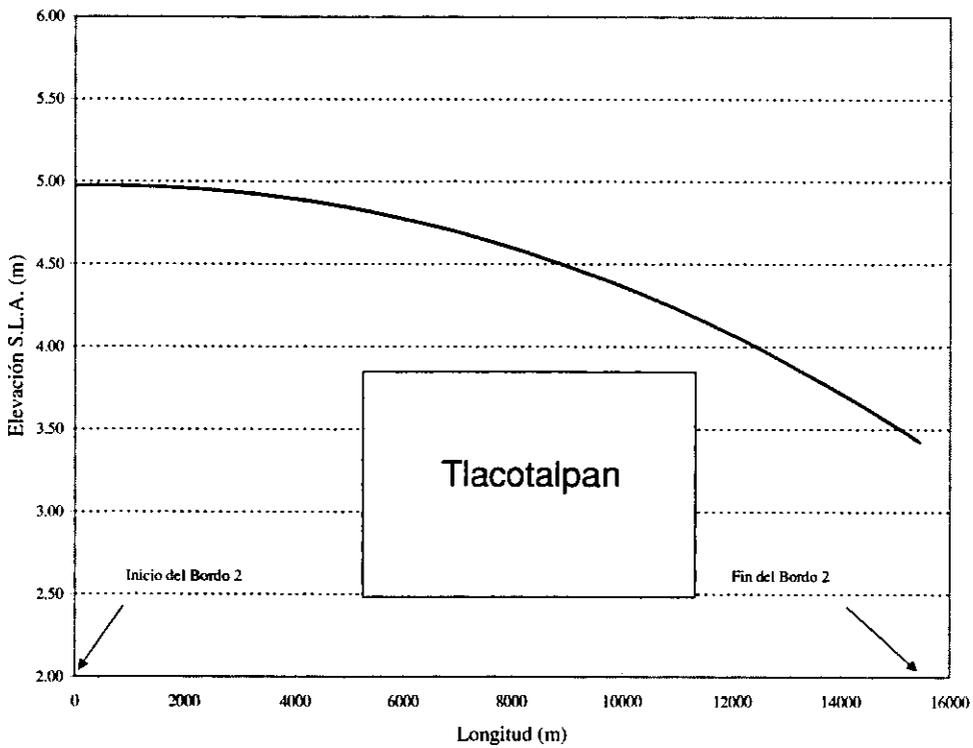


Figura 4.7. Envoltura de elevaciones máximas de la superficie libre del agua para el bordo 2

Adicionalmente, el procedimiento permite involucrar las características de la obra en el proceso de estimación de su propio evento de diseño. En este caso, se observa claramente que las avenidas de diseño son diferentes para cada una de las dos obras consideradas aún cuando el periodo de retorno de diseño es el mismo. Para el cálculo presentado, la ubicación de los bordos es la característica que los hace diferentes, sin embargo, en otro caso puede ser por ejemplo el tipo de obra y no su localización lo que establezca la diferencia.

El enfoque de atención de las redes de ríos tiene, por supuesto, aplicaciones potenciales en otras áreas de la hidráulica. Por ejemplo, un sistema de drenaje o alcantarillado pluvial basado en canales o tuberías puede analizarse de la misma forma que una red hidrográfica, utilizando por supuesto un modelo que simule el escurrimiento por la red y planteando la función objetivo del proceso de optimización en forma adecuada.

*No sé lo que parezca ante el mundo, pero para mí, me parece que solo he sido un niño jugando en la playa que ha encontrado un guijarro más liso o una concha más bonita que lo normal, mientras el inmenso océano de la verdad yace completamente sin descubrir enfrente de mí.*

Isaac Newton, poco antes de su muerte

## Conclusiones y recomendaciones

En este trabajo se ha introducido un nuevo enfoque en la estimación de avenidas para el diseño de obras hidráulicas específicas. El nuevo enfoque está basado en el denominado “análisis de frecuencias conjunto”, el cual da origen al concepto fundamental del periodo de retorno conjunto manejado en las dos aplicaciones propuestas en el documento.

El concepto del periodo de retorno conjunto, establecido mediante una extensión de la definición original como el inverso de la probabilidad de excedencia conjunta de dos o más variables aleatorias, permite tal flexibilidad que el enfoque puede aplicarse a la solución de diversos problemas en la hidrología de avenidas. En este trabajo, se han presentado los casos del diseño hidrológico de vasos y de obras ubicadas en redes de ríos. Estos casos se han elegido ya que se considera requieren de atención frecuente en nuestro país.

Aún cuando en México no quedan muchos sitios adecuados para la construcción de grandes presas, la construcción de presas medianas y pequeñas y la revisión de la seguridad hidrológica de las obras existentes es un hecho cuya importancia no se puede soslayar. La existencia de registros de escurrimiento con periodos mayores a los utilizados en los diseños originales de las presas es una oportunidad que debemos aprovechar para determinar el verdadero grado de seguridad de nuestras cortinas.

El método para la estimación de avenidas para el diseño o revisión de presas se basa en una caracterización probabilista bivariada de los hidrogramas. El gasto pico y el volumen de escurrimiento de la avenida son determinados mediante el análisis de frecuencias conjunto por lo cual se asigna un periodo de retorno a toda la avenida y no solo al gasto máximo de la misma. Este proceso evita la arbitrariedad en la asignación del volumen, el cual se ha demostrado tiene grandes efectos en la respuesta del vaso.

Un procedimiento de optimización garantiza la selección del par de valores que describen la avenida ( $Q$ ,  $V$ ), tales que producen el efecto más desfavorable en el vaso para un nivel de riesgo en particular. En el proceso de optimización, las características del vaso y su política de operación se ven implicadas directamente, por lo cual la estimación de la avenida de diseño se realiza para cada obra en particular. La metodología permite tomar en cuenta además que unos vasos son más sensibles al volumen de la avenida que al gasto pico de la misma o viceversa.

La metodología, aplicada en este trabajo a dos casos reales de revisión, muestra que las presas podrían ser más inseguras de lo que parecen (de acuerdo con el enfoque tradicional).

El enfoque conjunto aplicado al caso de presas parece indicar que es necesario cambiar la filosofía en cuanto a la asignación del riesgo aceptado (periodo de retorno de diseño).

Por otro lado, el diseño y construcción de obras ubicadas en redes de ríos es necesario en las zonas de planicie que frecuentemente se ven inundadas. En éstas, es frecuente la existencia de estaciones hidrométricas en los afluentes individuales pero no aguas debajo de las confluencias. La metodología propuesta permite utilizar los registros de tales estaciones mediante la consideración de dependencia parcial en los mismos.

El procedimiento, que considera las características de cada obra en particular, garantiza por medio de un proceso de optimización la selección del evento que produce los efectos más desfavorables para el nivel de riesgo hidrológico aceptado (periodo de retorno de diseño). Para el caso de redes de ríos, el análisis de frecuencias conjunto considera a los gastos en los diferentes afluentes como las variables aleatorias que se emplean para construir una función de distribución de probabilidad multivariada .

De los métodos desarrollados y las aplicaciones prácticas presentadas se desprenden además algunas recomendaciones particulares, a saber:

1. La revisión de la seguridad hidrológica de todas las presas mexicanas es una acción urgente.
2. La aplicación del enfoque tradicional en la estimación de avenidas de diseño debe realizarse con extremo cuidado, ya que se ha demostrado que la asignación arbitraria de otras características de la avenida además del gasto pico puede llevar a severos errores.
3. Tanto en el caso de vasos como en el de obras ubicadas en redes de ríos, la aplicación de las metodologías propuestas resulta recomendable ya que proporciona al diseñador una herramienta adicional para la toma de decisiones.

Por último, este trabajo abre un gran abanico de nuevas líneas de investigación entre las cuales se destacan:

- a. Búsqueda de distribuciones de valores extremos que describan mejor el comportamiento conjunto de las variables hidrológicas así como sus correspondientes métodos de estimación de parámetros.
- b. Incorporación de un proceso de optimización de las políticas de operación de presas en época de avenidas en el proceso de estimación de eventos de diseño.
- c. Establecimiento o adaptación de políticas de operación de presas para la disminución del riesgo de falla de una presa.
- d. Generación de hidrogramas de diseño con datos de precipitación utilizando funciones multivariadas.
- e. Diseño de redes de alcantarillado con un enfoque multivariado.

Como se observa, el enfoque propuesto plantea una nueva mística en la hidrología de avenidas y con él se vislumbra un gran campo de aplicación e investigación en el tema.

*El gran libro de la naturaleza yace abierto ante nuestros ojos y la verdadera filosofía está escrita en él . . . Pero no podemos leerlo a menos que primero aprendamos el lenguaje y los símbolos en los que está escrito . . . Está escrito en el lenguaje de las matemáticas*

Galileo Galilei

## Bibliografía y referencias

Akan, A. O. (1989), "Detention pond sizing for multiple return periods", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 115, No. 5

Akan, A. O. (1990), "Single-outlet detention-pond analysis and design", *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, Vol. 116, No. 4

Aldama, A., Ramírez A. (1998), "Parametrización de hidrogramas mediante interpolantes Hermitianos", *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. XIII, No. 3

Allen, M.B., Herrera, I., Pinder, G. (1988), "Numerical Modeling in Science and Engineering", John Wiley and Sons, New York.

Aparicio, F. J., (1992), "Fundamentos de hidrología de superficie", Limusa, México

Ashkar, F. Rousselle, J. (1982), "A multivariate statistical analysis of flood magnitude, duration and volume" en Singh, V.P. (editor) *Statistical analysis of rainfall and runoff, International Symposium on rainfall and runoff modeling*, Mississippi, E. U.

Bacchi, B., Brath, A., Kottegoda, N.T. (1992), "Analysis of the relationship between flood peaks and flood volumes based on crossing properties of river processes", *Water Resources Research*, Vol. 28, No. 10

Basha, H. A. (1994), "Nonlinear reservoir routing: particular analytical solution", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 120, No. 5

Basha, H. A. (1995), "Routing equations for detention reservoirs", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 121, No. 12

Baker, V. R., (1987), "Paleoflood hydrology and extraordinary flood events", *Journal of Hydrology* No. 96

Balocki, J., Burges, S. J. (1994), "Relationships between n-day flood volumes for infrequent large floods", *Journal of Water Resources Planning and Management*, Vol. 120, No. 6

BANDAS (1997), "Banco de datos de aguas superficiales", CNA, IMTA.

Bao, Y., Tung, Y. K., Hasfurther, V. R. (1987), "Evaluation of uncertainty in flood magnitude estimator of annual expected damage costs of hydraulic structures", *Water Resources Research*, Vol. 11

Bardsley, W. E., (1989), "Using historical data in non-parametric flood estimation", *Journal of Hydrology*, No. 108

- Benjamin J. R., C. A. Cornell (1970) *"Probability, statistics and decision for civil engineers"*, McGraw Hill
- Benson, M.A., (1982), "Factors influencing the occurrence of floods in a humid region of diverse terrain", *U.S.G.S. Water Supply Papers* 1580-B.
- Beard, L. R. (1990), "Practical determination of hypothetical floods", *Journal of Water Resources Planning and Management*, Vol. 116, No. 3
- Bergmann, H., Sackl, B. (1985), "Two dimensional frequency analysis of flood water flows and its application in water management", *International Association for Hydraulics Research*, 21st Congress, Melbourne, Australia.
- Beven, K. (1989), "Changing ideas in hydrology – the case of physically based models", *Journal of Hydrology*, No. 105
- Bouvard, M. (1988), "Design flood and operational flood control", General Report on Q. 63, *Proc. XVI Congress of the ICOLD*, San Francisco, 1988.
- Bouvard, M. (1994), "Les crues de projet des barrages: Methode du GRADEX", *Barrages & Reservoirs. Bulletin du Comité Français des Grands Barrages*.
- Bradley, A. A., Potter, K. W. (1992), "Flood frequency analysis of simulated flows", *Water Resources Research*, Vol. 28, No. 9.
- Brunk, H.D, (1979), *"Introducción a la estadística matemática"*, Ed. Trillas
- Bureau of Reclamation (1987), *"Design of small dams"*, United States Department of the Interior. Water Resources Technical Publication, 3rd. Ed.
- Burnash, J. (1973), *"A generalized streamflow simulation system"*, Joint Federal-State River Forecast Center.
- Castillo, E. (1988), *"Extreme value theory in engineering"*, Academic Press
- Clarke, R.T. (1980), "Bivariate gamma distributions for extending annual streamflow records from precipitation: some large sample results", *Water Resources Research*, Vol. 16, No. 5
- Cohn, T. A., Stedinger, J. R., (1987), "Use of historical information in a maximum-likelihood framework", *Journal of Hydrology*, No. 96
- Coles, S. G., Tawn J. A. (1991), "Modeling multivariate extreme events", *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B., No. 53
- Correia, F. N. (1987), "Multivariate partial duration series in flood risk analysis", *Hydrologic Frequency Modelling*, V.P. Singh, ed. Reidel Dordrecht, The Netherlands

Crawford, N. H. (1966), "Digital simulation in hydrology", *Stanford watershed model IV*", Department of Civil Engineering, Stanford University, Technical Report No. 39

Crippen, J. R. (1982), "Envelope curves for extreme flood events", *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 108 No. HY10

Chou, Y.L. (1969), "Statistical analysis with business and economic applications", Holt, Rinehart and Winston Inc.

Chow, V. T. (1964), "Handbook of applied hydrology", McGraw-Hill.

Cunnane, C., (1985). "Factors affecting choice of distribution for flood series", *Hydrological Sciences Journal*, No. 30

Cunnane, C., (1988) "Methods and merits of regional flood frequency analysis", *Journal of hydrology*, No. 100

Dalrymple, T. (1960), "Flood frequency analysis", *U.S.G.S. Water Supply Papers* 1543-A.

Daoji, S. (1995), "Moment estimation for multivariate extreme value distribution", *Applied Mathematics, Journal of the Chinese Universities*, Vol. 10

Dawdy, D. R., Lettenmaier, D. P. (1987), "Initiative for risk-based flood design", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 113, No. 8

Diaper, N. R., Smth, H. (1966), "Applied regression analysis", John Wiley & Sons, Inc.

Diaz-Granados, M., Beeb, A. (1988) "Análisis regional de frecuencias usando momentos ponderados con probabilidad", XIII Congreso Latinoamericano de Hidraulica. Bogotá, Colombia.

Dominguez, R., Fuentes, O., Franco, V. (1980). *Manual de Diseño de Obras Civiles*. Hidrotécnica, Capítulo A.1.10. Avenidas de diseño. Comisión Federal de Electricidad, México.

Feluch, W. (1995), "Non parametric estimation of multivariate density and non parametric regression", en *Novel approaches to uncertainty*, Varsovia.

Einmahl, J.H.T., L. De Haan, X. Huang (1993), "Estimating a mutidimensional extreme value distribution", *Journal of Multivariate Analysis* No. 47

Escalante, C. (1991), "Distribuciones trivariadas de valores extremos y sus aplicaciones en hidrología", Tesis doctoral, DEPMI, UNAM, México.

Escalante, C. (1996), "Estimación conjunta de gasto pico y volumen total de avenidas", XVII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Guayaquil, Ecuador.

- Escalante, C. (1998), "Multivariate extreme value distributions with mixed Gumbel marginals", *Journal of the American Water Resources Association*, Vol. 34, No. 2
- Escalante, C (1998), "Multivariate estimation of extreme flood hydrographs", *Hydrological Science and Technology Journal*, No. 14
- Fenton, J. D. (1992), "Reservoir routing", *Hydrological Sciences Journal*, 37(3).
- Fisher, R. A., Tippett L. H. C. (1928), "Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample", *Proc. of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 24, Part 2
- Fiorentino M., Versace, P., Rossi, F. (1985), "Regional flood frequency estimation using the two-component extreme value distribution. *Hydrological Sciences Journal*, No. 30, 1
- Fontaine, T. A. (1989), "Estimating probabilities of extreme rainfalls", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 115, No. 11
- Foster, H.A. (1924). "Theoretical frequency curves and their applications to engineering problems", *Transactions, ASCE*, Vol. 87
- Frances F., Salas J. D., Boes, D. C. (1994), "Flood frequency analysis with systematic and historical or paleoflood data based on the two-parameter general extreme value models", *Water Resources Research*, Vol. 30, No. 6
- Fréchet, M. (1927), "Sur la loi de probabilité de l'écart maximum", *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*. Cracovie, Vol. 6
- Fuller, W. E. (1914), "Flood flows", *Transactions ASCE*, Vol. 77
- Galambos, J. (1978), "*The asymptotic theory of extreme order statistics*", Wiley & Sons
- Galambos, J. (1984), "A new bound on multivariate extreme value distributions", *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eotvos Sect. Math.* No. 27, 1984
- Gnedenko, B. U. (1943), "Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire", *Ann. Math.* Vol. 44
- Goel, N.K., Seth, S. M., Chandra, S. (1998), "Multivariate modeling of flood flows", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 124, No. 2
- González, F. J. (1970), "*Contribución al análisis de frecuencias de valores extremos de los gastos máximos en un río*", Pub. 277, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- Guillot, P. (1979), "Evaluation des crues extrêmes dans les regions de faibles précipitations", *The Hydrology of Areas of Low Precipitation*. Proceedings of the Canberra Symposium, IAHS, Publications No. 128

- Gumbel E. J., (1941), "The return period of flood flows", *Annals of the Mathematical Statistics*, Vol. 12
- Gumbel E. J., (1944), "On the plotting of flood discharges", *Transactions of the AGU*, Vol. 25
- Gumbel E. J., (1945), "Flood estimated by probability methods", *Engineering News Records*, Vol.134
- Gumbel E. J., (1958), "*Statistics of extremes*", Columbia University Press, Irvington N.Y.
- Gumbel, E. J. (1960a), "Bivariate exponential distributions", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 55
- Gumbel, E.J. (1960b), "Distributions de valeurs extremes en plusieurs dimensions", *Publications de L'Institute de Statistique*, Vol. 9, Paris.
- Gumbel, E. J. (1961a), "Sommes et differences de valeurs extremes independantes", *Comptes Rendus Academie des Sciences*, Vol. 253
- Gumbel, E. J. (1961b), "Bivariate logistic distributions", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 56
- Gumbel, E. J. (1962), "Statistical theory of extreme values", Chap. 6, *Contributions to order statistics*, Sarhan & Greenberg Ed., Wiley & Sons
- Gumbel, E.J., Goldstein, N. (1964) "Analysis of empiric bivariate distributions", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 59
- Gumbel, E. J., Mustafi, C. K. (1967), "Some analytical properties of bivariate extremal distributions", *American Statistical Association*, Vol. 62
- Gupta, V. K., Duckstein, L., Pebbles, R. W. (1976) "On the joint distribution of the largest flood and its time of occurrence", *Water Resources Research*, Vol. 12, No. 2
- Gutiérrez O., Aldama A.(1990), "*Una nueva metodología para estimar las avenidas de diseño*", XIV Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Montevideo, Uruguay.
- Hawkins, R.H, Pole, R.A. (1989), "Standardization of peak-volume transformations", *Water Resources Bulletin*, Vol. 25, No. 3
- Hazen, A. (1914), "Discussion on Flood Flows by W. E. Fuller", *Transactions ASCE*, Vol. 77
- Hazen, A. (1930), "*Flood flows*", Wiley, New York.
- Henderson, F.M. (1966), "*Open Channel Flow*", Macmillan, New York.
- Hiemstra, A. V., Francis, D.M. (1981), "Run hydrographs for prediction of flood hydrographs", *Journal of the Hydraulics Division, ASCE* Vol. 107, No. HY6

- Hirsch, R. M., Stedinger, J. R. (1987), "Plotting positions for historical floods and their precision", *Water Resources Research*, Vol. 23
- Hirsch, R. M. (1987), "Probability plotting position formulas for flood records with historical information", *Journal of Hydrology*, Vol. 96
- Hoel, P. G., Port, S. C., Stone, C. J. (1971), *"Introduction to statistical theory"* Houghton Mifflin Company
- Horn, D. R. (1987), "Graphic Estimation of Peak Flow Reduction in Reservoirs", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 113, No. 11
- Hosking, J. R. M., Wallis, J. R. (1986), "Paleoflood hydrology and flood frequency analysis", *Water Resources Research*, Vol. 22
- Hosking, J. R. M., Wallis, J. R. (1986b), "The value of historical data in flood frequency analysis", *Water Resources Research*, Vol. 22
- Horton, R. E. (1913), "Frequency recurrence of Hudson River flows", *U. S. Weather Bureau Bulletin Z*
- Hogg, R.V., Craig, A. T. (1978) *"Introduction to mathematical statistics"*, Macmillan Pub.
- Hromadka, T. V., Whitley, R. J. (1994), "The rational method for peak flow rate estimation", *Water Resources Bulletin*, Vol. 30, No. 6
- Husler, J., Reiss, D. (1987), *"Extreme value theory"*, Lectures notes in statistics No. 51. Proceedings Oberwolfach, Ed. Springer Verlag
- Ikebuchi, S., Takasao, T. (1992), "Effect of adding the historical flood data to the systematic data on design flood", *Proceedings of the Sixth IAHR International Symposium*, Taipei.
- IMTA (1998), *"Las inundaciones de septiembre de 1990 en la Costa Chica de Chiapas"*, Informe interno del Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.
- James, P. S. (1972), *"Applied multivariate analysis"*, Univ. of Chicago, Series in quantitative method for decision-making.
- Joe, H. (1990), "Families of min-stable multivariate exponential and multivariate extreme distributions", *Statistics and Probability Letters*.
- Johnson, M. E. (1987), *"Multivariate statistical methods"*, John Wiley & Sons
- Johnson, N.L., Kotz, S. (1972), *"Distributions in statistics: Continuous multivariate distributions"*, John Wiley & Sons, Inc.

- Kavvas, M. L. (1982), "Stochastic trigger model for flood peaks: 1. Development of the model", *Water Resources Research* Vol. 18, No. 2
- Kavvas, M. L., Cervantes, J. E., Delleur, J. W., (1983), "A cluster model for flood analysis", *Water Resources Research* Vol. 19, No. 1
- Kendall, M. G., Stuart, A. (1973), "*The advanced theory of statistics*", Vol. 2. Inference and relationship, Griffin & Company, London
- Kennedy M. R, Hart, T. L., (1984), "The estimation of probable maximum precipitation in Australia" *Civil engineering Transactions*, Institute of Engineers, Australia CE 26.
- Kessler, A., Diskin, M. H. (1991), "The efficiency function of detention reservoirs in urban drainage systems", *Water Resources Research* Vol. 27, No. 3
- Kinnison, R. R. (1985), "*Applied extreme value statistics*", Batelle Press
- Kirby W. H., Moss, M. E. (1987), "Summary of flood frequency analysis in the United States", *Journal of Hydrology* No. 96
- Kite, G. W. (1988), "*Frequency and risk analyses in hydrology*", Water Resources Publication, Littleton, Colorado.
- Kovacs, Z. P., (1984), "*Problems in the estimation of maximum flood peaks*". Technical Report No. TR119. Department of Water Affairs, Pretoria South Africa
- Krstanovic, P. F., Singh, V. P. (1987), "A multivariate stochastic flood analysis using entropy", *Hydrologic Frequency Modelling*, V.P. Singh, ed. Reidel Dordrecht, The Netherlands
- Kuczera, G. (1982), "Combining site-specific and regional information, an empirical Bayes approach", *Water Resources Research*, Vol. 18, No. 2
- Ledford, A., Tawn, J. A. (1996), "Statistics for near independence in multivariate extremes", *Biometrika*, Vol. 83, No. 1
- Linsley, R. K., Franzini, J. B. (1972), "*Water resources engineering*", McGraw-Hill
- Linsley, R. K., Kohler, M. A., Paulhus, J. L. (1975), "*Hydrology for engineers*", McGraw-Hill
- Linsley, R. K. (1986), "Flood estimates: how good are they", *Water Resources Research*, Vol. 22, No.9
- Marshall, A. W., I. Olkin (1988), "Families of multivariate distributions", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 83, No. 403
- McCuen, R. (1998), "*Hydrologic analysis and design*", 2<sup>nd</sup> ed. Prentice Hall, New Jersey.

McEnroe, B. M. (1992), "Preliminary sizing of detention reservoirs to reduce peak discharges", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 118, No. 11

Mendenhall, W, Wackeri, D., Scheaffer, R. (1994), "*Estadística matemática con aplicaciones*", Grupo Editorial Iberoamericana.

Mockus, V. (1957), "*Use of storm and watershed characteristics in syntetic unit hydrograph analysis and application*", U.S. Soil Conservation Service

Molfino, M. E., Cruise, J. F. (1990), "An additional analysis of peak-volume relations and standardization procedures", *Water Resources Bulletin*, Vol. 26, No. 4

Mulvaney, T. J. (1851), "On the use of self-registering rain and flood gages", *Making observations of the relation of rainfall and flood discharges in a given catchment*, Proc. Inst. Civil Eng. Ireland, Vol. 4. Dublin

Naef, F. (1981), "Can we model del rainfall-runoff process today?", *Hydrological Sciences Bulletin*, Vol. 26, No. 3

National Research Council (1985), "*Safety of dams: flood and earthquake criteria*", Academic Press

Nayfeh, A. H. (1980), "*Introduction to perturbation techniques*", Wiley & Sons, New York

NERC, (1975), "*Flood Studies Report*", Volume I. "Estimation of flood volumes over different durations", Hydrological studies. Natural Environment Research Council, London

Newton, D. W, (1983), "Realistic assessment of maximum flood potentials", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE. No. 109

Office of Water Data Coordination (OWDC), (1986), "*Feasibility of assigning a probability to the probable maximum flood*" Hydrology Subcommittee of Interagency Advisory Committee on Water Data, Washington, D. C.

OMM (1970), "*Guide to hydrometeorological practices*", World Meteorological Organization, No. 168, Tech. Paper 82, Geneva

Pegram, S., Deacon, P. (1992), "Extreme flood hydrographs of chosen probability" *Proceedings of the International Symposium on Dams and Extreme Floods*. International Commission of Large Dams. Granada, España.

Pickands, J. III. (1981), "Multivariate extreme value distributions", *Bulletin of the International Statistical Institute*, No. 49

Pilgrim, D. H. (1986), "Bridging the gap between flood research and design practice", *Water Resources Research*, Vol. 22, No. 9

- Ponce V. M. (1989), "*Engineering Hydrology: Principles and Practices*", Prentice Hall, Englewoods Cliffs
- Ramirez O., A. I. (1995), "*Estimación de avenidas en redes de ríos*". Tesis para obtener el grado de Maestro en Ingeniería, DEPI UNAM.
- Raynal V., J. A. (1985) "*Bivariate extreme value distributions applied to flood frequency analysis*", Ph. D. Dissertation. Colorado State University, Ft. Collins, Colorado, U.S.A.
- Raynal, J. A., Salas, J. D. (1987), "Multivariate extreme value distributions in hydrological analyses", *Proceedings of the Rome Symposium*, Roma
- Raynal V., J. A. (1990), "Análisis de gastos máximos aguas abajo de la confluencia de ríos", *Revista Ingeniería Hidráulica en México*, enero - abril 1990.
- Reinus, E. (1982), "Statistical flood flow estimation", *Nordic Hydrology*, Vol. 13
- Reinus, E. (1989), "Statistical estimation of extreme flood flows using confidence intervals", *WaterPower and Dam Construction*.
- Reiss, R. D., Thomas, M. (1997), "*Statistical Analysis of Extreme Values*", Birkhäuser Verlag, Boston
- Resendiz-Carrillo, D., Lave, L. (1987), "Optimizing spillway capacity with an estimated distribution of floods", *Water Resources Research* No. 11
- Rogers, W. F. (1980), "A practical model for linear and non linear runoff", *Journal of Hydrology*, No. 46
- Rosenbrock, H. H. (1960), "An automatic method for finding the greatest or least value of a function", *Computer Journal*, Vol. 3.
- Rossi, F., Fiorentino M., Versace, P. (1984), "Two-component extreme value distribution for flood frequency analysis", *Water Resources Research*, No. 20.
- Russel, S. O. (1982), "Flood probability estimation", *Proc. Soc. Civ. Eng.* 108 (HY1)
- Salas, J. D. (1980), "Transfer of information to improve estimates of flood frequencies", Chapter 17 in *Hydrology for transportation engineers*", Ed. T. G. Sanders, U.S. Dept. of Transportation.
- Sarkar, S. (1987), "A continuous bivariate exponential distributions", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 82
- Shalaby, A. (1994), "Estimating probable maximum flood probabilities", *Water Resources Bulletin*, Vol. 30, No. 2
- Shen, H. W., Koch, G. J., Obeysekera, J. T. B. (1990), "Physically based flood features and frequencies", *Journal of Hydraulics Engineering*, Vol. 116, No. 4

Sherman, L. K. (1932), "Stream flow from rainfall by the unit-graph method", *Eng. News Record*, Vol. 108

Shuzheng, C. (1985), "A general formula for calculating the probability of failure of water projects and its potential applications", *Journal of Hydrology*, No. 80

Singh, V.P., Aminian, H. (1986), "An empirical relation between volume and peak of direct runoff", *Water Resources Bulletin*, Vol. 22, No. 5

Singh, V. P. (ed), (1986), "Application of frequency and risk in water resources", *Proc. Of the International Symposium on Flood Frequency and Risk Analysis*, Baton Rouge, Louisiana

Singh, K.P, Sinclair R.A. (1972) "Two distribution method for flood frequency analysis", *Journal of Hydraulics Division, ASCE*, No. 98

Smith, J. A. (1989), "Regional flood frequency analysis using extreme order statistics of the annual peak record", *Water Resources Research*, Vol. 25, No. 2

Smith, R.L., Tawn, J. A., Yuen, H. K. (1990), "Statistics of multivariate extremes", *International Statistical Review* No. 58, International Statistical Institute.

Snell, J., Sivapalan M. (1995), "Application of the meta-channel concept: construction of the meta-channel hydraulic geometry for a natural catchment", *Hydrological Processes*, Vol. 9.

Stedinger, J. R. (1986), "Flood frequency analysis with historical and paleoflood information", *Water Resources Research*, Vol. 22

Sutcliffe, J. V. (1987), "The use of historical records in flood frequency analysis", *Journal of Hydrology*, No. 96.

Takahashi, R. (1987), "Some properties of the multivariate extreme value distributions and multivariate tail equivalence", *Ann. Inst. Statist. Math.* No. 39

Takahashi, R. (1988), "Characterizations of a multivariate extreme value distribution", *Advances on Applied Probability*, Vol. 20

Tawn, J. A. (1988), "Bivariate extreme value theory: Models and estimation", *Biometrika*, No. 75

Tawn, J. A., (1990), "Modeling multivariate extreme value distributions", *Biometrika*, No. 77

Tiago de Oliveira, J. (1975a), "Bivariate extremes: Extensions", Proc. of the 40<sup>th</sup> session. *Bulletin of the International Statistical Institute*, Vol. 46, Book 2.

Tiago de Oliveira, J. (1975b), "Bivariate and multivariate extreme distributions", *Statistical distributions in scientific work*, Vol. 1, G. P. Patil et al editors, D reidel Publishing Company.

Tiago de Oliveira, J. (1962, 1963), "Structure theory of bivariate extremes", *Estudios de estadística y econometría*, Vol. III

Tiago de Oliveira, J. (1982), "*Bivariate extremes: models and statistical decision*", Technical report No. 14, Center of Stochastic Processes, Department of Statistics, Univ. of North Carolina at Chapel Hill.

Todorovic, P., Zelenhasic, E. (1970), "A stochastic model for flood analysis", *Water Resources Research* Vol. 6, No. 6

Todorovic, P. (1971), "On extreme problems in hydrology" *Joint Statistics Meeting*, Am. Statistics Assoc. and Inst. of Math. Statistics, Colorado State Univ, Fort Collins, Colorado.

Todorovic, P., Rousselle, J. (1971), "Some problems of flood analysis", *Water Resources Research*, Vol. 7, No. 5

Todorovic, P., Woolhiser, D. A (1972), "On the time when extreme flood occurs", *Water Resources Research*, Vol. 8, No. 6

Todorovic, P. (1978), "Stochastic models of floods", *Water Resources Research*, Vol. 14, No. 2

Todorovic, P. (1982), "Stochastic modeling of floods", en "*Statistical Analysis of Rainfall and Runoff*", V. P. Singh, Ed. Water Resources Publications.

U.S. Corps of Engineers (1979), "*National program for inspection of non-federal dams*", ER 1110-1-106, Apendix D, Washington, D.C.

Von Mises, R. (1936), "La distribution de la plus grande de n valeurs", *Rev. Math. De L'Union Interbalkanique.*, No. 1, Athens

Wall, D. J., Kibler, D. F., Hastings, M. E. (1987), "Use of historic flood information in estimating flood peaks on ungaged watersheds", *Water Resources Bulletin*, Vol., 23, No. 5

Wang, B. H. (1984), "Estimation of probable maximum precipitation: Case studies", *Journal of Hydraulic Engineering*, No. 110

Wang, B. H., Jawed, K. (1986), "Transformation of PMP to PMF: Case studies", *Journal of Hydraulic Engineering*, No. 110

Wang, B. H., Revell, R. W. (1983), "Conservatism of probable maximum flood estimates", *Journal of Hydraulic Engineering*, No. 109

Waylen, P., Woo M. (1982), "Prediction of annual floods generated by mixed processes", *Water Resources Research*, No. 18

Winkler, R.L., Hays, W. L. (1975), "*Statistics: Probability, Inference and Decision*". Holt, Rinehart and Winston Inc.

World Meteorological Organization (1986), "*Manual for estimating of the probable maximum precipitation*", Geneva, Switzerland.

*El álgebra es generosa, frecuentemente da mucho más de lo que se le pregunta*

D'Alembert

## APÉNDICE

# A

### Distribución bivariada Gumbel Doble (BiGumbel Doble)

Sea la función de distribución de probabilidad conjunta entre las variables aleatorias  $x, y$ , dada por la extensión bivariada del modelo logístico de Gumbel (1960b) siguiente:

$$F(x, y) = \exp\left\{\left[(-\ln F(x))^m + (-\ln F(y))^m\right]^{1/m}\right\} \quad (\text{A.1})$$

donde  $m$  es un parámetro de asociación.

Si las distribuciones marginales siguen funciones del tipo de valores extremos tipo I (Gumbel) en una mezcla de dos poblaciones como las siguientes:

$$F(x) = \exp\left\{-\exp\left[-\frac{x+a_1}{c_1}\right]\right\} p_x + \exp\left\{-\exp\left[-\frac{x+a_2}{c_2}\right]\right\} (1-p_x) \quad (\text{A.2})$$

$$F(y) = \exp\left\{-\exp\left[-\frac{y+a_3}{c_3}\right]\right\} p_y + \exp\left\{-\exp\left[-\frac{y+a_4}{c_4}\right]\right\} (1-p_y) \quad (\text{A.3})$$

la función  $F(x,y)$  se conoce como función de distribución BiGumbel Doble.

La correspondiente función de densidad  $f(x,y)$  está dada por:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$$

Introduciendo la siguiente notación:

$$\tilde{x}_1 = \frac{x+a_1}{c_1} \quad \tilde{x}_2 = \frac{x+a_2}{c_2} \quad \tilde{y}_1 = \frac{y+a_3}{c_3} \quad \tilde{y}_2 = \frac{y+a_4}{c_4}$$

$$M = c_1.c_2.c_3.c_4.$$

$$k_1 = a_1.c_2.c_3.c_4. \quad k_2 = a_2.c_1.c_3.c_4. \quad k_3 = a_3.c_1.c_2.c_4. \quad k_4 = a_4.c_1.c_2.c_3$$

$$k_5 = c_1.c_3.c_4 \quad k_6 = c_2.c_3.c_4 \quad k_7 = c_1.c_2.c_3 \quad k_8 = c_1.c_2.c_4$$

$$N = -\ln \left\{ \exp \left[ -\exp \left( -\frac{x+a_1}{c_1} \right) \right] p_x + \exp \left[ -\exp \left( -\frac{x+a_2}{c_2} \right) \right] (1-p_x) \right\}$$

$$P = -\ln \left\{ \exp \left[ -\exp \left( -\frac{y+a_3}{c_3} \right) \right] p_y + \exp \left[ -\exp \left( -\frac{y+a_4}{c_4} \right) \right] (1-p_y) \right\}$$

$$Q = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 x + k_6 x + k_7 y + k_8 y$$

$$R = -c_1 \exp \left( \frac{a_1 + c_1 \exp(-\tilde{x}_1) + x}{c_1} \right) (p_x - 1) + c_2 \exp \left( \frac{a_2 + c_2 \exp(-\tilde{x}_2) + x}{c_2} \right) p_x$$

$$S = -c_3 \exp \left( \frac{a_3 + c_3 \exp(-\tilde{y}_1) + y}{c_3} \right) (p_y - 1) + c_4 \exp \left( \frac{a_4 + c_4 \exp(-\tilde{y}_2) + y}{c_4} \right) p_y$$

$$T = -\exp[\exp(-\tilde{x}_1)] + (\exp[\exp(-\tilde{x}_1)] - \exp[\exp(-\tilde{x}_2)]) p_x$$

$$U = -\exp[\exp(-\tilde{y}_1)] + (\exp[\exp(-\tilde{y}_1)] - \exp[\exp(-\tilde{y}_2)]) p_y$$

la función de densidad puede escribirse como:

$$f(x, y) = \frac{RSN^{m-1}P^{m-1}}{MTU} \exp\left[-\frac{Q}{M} + (N^m + P^m)^{1/m}\right] \left[M - 1 + (N^m + P^m)^{1/m}\right] (N^m + P^m)^{\frac{1}{m}-2} \quad (A.4)$$

Esta expresión puede utilizarse para la estimación de los parámetros a través del método de la máxima verosimilitud.

*He resuelto retirarme de la geometría abstracta, es decir, de la consideración de preguntas que sólo sirven para ejercitar la mente. Esto lo hago para estudiar otro tipo de geometría, aquella que tiene por objeto la explicación de los fenómenos de la naturaleza.*

Descartes

## **APÉNDICE**

# **B**

### **Parametrización de hidrogramas mediante interpolantes Hermitianos**

La parametrización de hidrogramas resulta útil en la definición de avenidas de diseño, por lo que diversas opciones de parametrización han sido propuestas en la literatura. No obstante, éstas exhiben ciertas limitaciones que restringen su aplicación en la representación de hidrogramas naturales. Esto ha motivado al desarrollo de una parametrización polinomial basada en el empleo de interpolantes Hermitianos, cuyas principales propiedades son la continuidad de derivadas hasta de cierto orden y la invariancia de volumen. Dichas propiedades se demuestran en este artículo. También se presentan dos ejemplos de aplicación en los cuales se ha utilizado el procedimiento propuesto para definir la forma de un hidrograma unitario generado sintéticamente y para la representación de un hidrograma real de un solo pico.

## Introducción

En diversos estudios relacionados con la hidrología de avenidas, es común que surja la necesidad de parametrizar hidrogramas, con el objeto de reducir el número de variables involucradas en su descripción. En este sentido, Hiemstra y Francis (1981) y Gutiérrez y Aldama (1990) han reconocido la importancia de parametrizar hidrogramas de diseño, con el objeto de eliminar la arbitrariedad en la selección de su forma, y respectivamente han recomendado el empleo de funciones de Pearson y funciones triangulares. Por otra parte, Henderson (1966) ha parametrizado hidrogramas de entrada a almacenamientos en términos de una función senoidal, con el objeto de estudiar ciertos aspectos del tránsito de avenidas a través de vasos de almacenamiento. Finalmente, en la caracterización de hidrogramas unitarios generados en forma sintética, es común el empleo del hidrograma triangular (Ponce, 1989) o del hidrograma propuesto por el Servicio de Conservación de Suelos de los Estados Unidos de América (USSCS, por sus siglas en inglés), que ha sido parametrizado a través de una función Pearson por Horn (1987).

Las parametrizaciones antes mencionadas, si bien han resultado útiles, tienen diferentes limitaciones. El hidrograma triangular, debido a que su primera derivada no es continua en el pico, y el hidrograma senoidal, debido a su simetría, no son representaciones realistas de hidrogramas que ocurren en la naturaleza. Por otro lado, para el caso de los hidrogramas Pearson, la obtención de expresiones simples que relacionen los parámetros que los caracterizan (por ejemplo, volumen, tiempo base y gasto pico) no es tarea fácil. Estas observaciones han motivado a desarrollar una parametrización polinomial de hidrogramas que posee diversas propiedades notables, entre las cuales está una relación muy sencilla entre volumen, tiempo base y gasto pico, lo cual resulta conveniente para la representación de hidrogramas naturales. Dicha parametrización, así como la demostración de sus propiedades, se presentan a continuación.

## Hidrogramas triparamétricos hermitianos

Al parametrizar un hidrograma, es deseable que el número de parámetros involucrados en su caracterización sea el mínimo indispensable. Evidentemente, para fines de diseño, los parámetros más importantes para la caracterización de un hidrograma son el gasto pico,  $Q_p$ , el tiempo pico,  $t_p$ , y el volumen de escurrimiento directo,  $V$ . Dado que un hidrograma representa la relación funcional entre gasto y tiempo,  $Q = Q(t)$ , es más sencillo desarrollar una parametrización en términos de  $Q_p$ ,  $t_p$  y el tiempo base,  $t_b$ . De ahí que sea conveniente que exista una relación sencilla entre  $Q_p$ ,  $t_b$  y  $V$ .

La parametrización de hidrogramas de escurrimiento directo a través de la triada  $p = (Q_p, t_p, t_b)$  puede efectuarse a través de polinomios de grado impar como sigue:

$$\begin{aligned}
Q_{2n+1}(t; \mathbf{p}) &\equiv Q_{2n+1}(t) = Q_p \left[ a_0^{(2n+1)} + a_1^{(2n+1)} \frac{t}{t_p} + \dots + a_{2n+1}^{(2n+1)} \left( \frac{t}{t_p} \right)^{2n+1} \right] \\
&\equiv Q_p \sum_{k=0}^{2n+1} a_k^{(2n+1)} \left( \frac{t}{t_p} \right)^k ; t \in [0, t_p]
\end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
Q_{2n+1}(t; \mathbf{p}) &\equiv Q_{2n+1}(t) = Q_p \left[ b_0^{(2n+1)} + b_1^{(2n+1)} \frac{t-t_p}{t_b-t_p} + \dots + b_{2n+1}^{(2n+1)} \left( \frac{t-t_p}{t_b-t_p} \right)^{2n+1} \right]; \\
&\equiv Q_p \sum_{k=0}^{2n+1} b_k^{(2n+1)} \left( \frac{t-t_p}{t_b-t_p} \right)^k ; t \in [t_p, t_b]
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$$Q_{2n+1}(t; \mathbf{p}) \equiv Q_{2n+1}(t) = 0; t \in (-\infty, 0) \cup (t_b, \infty) \tag{B.3}$$

donde  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $(2n+1)$  representa el grado del polinomio y los  $2n+2$  coeficientes  $a_k^{(2n+1)}$  ( $k = 0, 1, \dots, 2n+1$ ) se calculan a partir de las  $2n+2$  condiciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned}
Q_{2n+1}(0) &= 0 \\
Q'_{2n+1}(0) &= 0 \\
&\vdots \\
Q^{(n)}_{2n+1}(0) &= 0
\end{aligned} \right\} \tag{B.4}$$

$$\left. \begin{aligned}
Q_{2n+1}(t_p) &= Q_p \\
Q'_{2n+1}(t_p) &= 0 \\
&\vdots \\
Q^{(n)}_{2n+1}(t_p) &= 0
\end{aligned} \right\} \tag{B.5}$$

mientras que los  $2n+2$  coeficientes  $b_k^{(2n+1)}$  ( $k = 0, 1, \dots, 2n+1$ ) se determinan a partir de las  $2n+2$  condiciones dadas por (B.5) y por:

$$\left. \begin{aligned}
Q_{2n+1}(t_b) &= 0 \\
Q'_{2n+1}(t_b) &= 0 \\
&\vdots \\
Q^{(n)}_{2n+1}(t_b) &= 0
\end{aligned} \right\} \tag{B.6}$$

Como puede observarse, de las condiciones (B.4)-(B.6), la parametrización polinomial de hidrogramas dada por las expresiones (B.1)-(B.3) posee derivadas continuas hasta de orden  $n$

en los puntos  $t = 0$ ,  $t = t_p$  y  $t = t_b$ . Esto es una característica conveniente, en términos de su potencialidad para representar hidrogramas naturales, ya que en general, el régimen de escurrimientos de una corriente natural no cambia drásticamente en forma instantánea. En la recesión de una avenida por ejemplo, es de esperar que el escurrimiento disminuya paulatinamente, lo cual implica variaciones pequeñas en los gastos.

De (B.1) y (B.4), es evidente que

$$a_k^{(2n+1)} = 0 \text{ para } k = 0, 1, \dots, n \quad (\text{B.7})$$

Por tanto, la ecuación (B.1) se simplifica a la expresión

$$Q_{2n+1}(t) = Q_p \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k^{(2n+1)} \left( \frac{t}{t_p} \right)^k ; t \in [0, t_p] \quad (\text{B.8})$$

cuyos coeficientes  $a_k^{(2n+1)}$  ( $k = n+1, n+2, \dots, 2n+1$ ) se determinan al resolver el sistema de ecuaciones que resulta de combinar (B.5) con (B.8).

De manera similar, de (B.2) y (B.5) se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} b_0^{(2n+1)} &= 1 \\ b_k^{(2n+1)} &= 0; k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.9})$$

de modo que la ecuación (2) se convierte en:

$$Q_{2n+1}(t) = Q_p \left[ 1 + \sum_{k=n+1}^{2n+1} b_k^{(2n+1)} \left( \frac{t - t_p}{t_b - t_p} \right)^k \right]; t \in [t_p, t_b] \quad (\text{B.10})$$

donde los coeficientes  $b_k^{(2n+1)}$  ( $k = n+1, n+2, \dots, 2n+1$ ) se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones que resulta de combinar (B.6) con (B.10).

En vista de que las condiciones (B.3)-(B.6) especifican la continuidad de  $Q_{2n+1}(t)$  y de sus derivadas hasta de orden  $n$ , los hidrogramas (B.8) y (B.10) están expresados en términos de interpolantes Hermitianos, del tipo utilizado en los métodos de colocación (véase, por ejemplo, Allen *et al.*, 1988). Por tal motivo, de aquí en adelante se utilizará la siguiente

**Definición.** Se denomina hidrograma triparamétrico Hermitiano de orden  $2n+1$  a  $Q_{2n+1}(t)$ , expresado según (B.3), (B.8) y (B.10). ■

A continuación se muestran, como ejemplo, los hidrogramas triparamétricos Hermitianos de órdenes 1, 3 y 5:

$$Q_1(t; Q_p, t_p, t_b) = \begin{cases} Q_p \frac{t}{t_p}; & t \in [0, t_p] \\ Q_p \left(1 - \frac{t-t_p}{t_b-t_p}\right); & t \in [t_p, t_b] \\ 0; & t \in (-\infty, 0) \cup (t_b, \infty) \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

$$Q_2(t; Q_p, t_p, t_b) = \begin{cases} Q_p \left[3\left(\frac{t}{t_p}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{t_p}\right)^3\right]; & t \in [0, t_p] \\ Q_p \left[1 - 3\left(\frac{t-t_p}{t_b-t_p}\right)^2 + 2\left(\frac{t-t_p}{t_b-t_p}\right)^3\right]; & t \in [t_p, t_b] \\ 0; & t \in (-\infty, 0) \cup (t_b, \infty) \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

$$Q_3(t; Q_p, t_p, t_b) = \begin{cases} Q_p \left[10\left(\frac{t}{t_p}\right)^3 - 15\left(\frac{t}{t_p}\right)^4 + 6\left(\frac{t}{t_p}\right)^5\right]; & t \in [0, t_p] \\ Q_p \left[1 - 10\left(\frac{t-t_p}{t_b-t_p}\right)^3 + 15\left(\frac{t-t_p}{t_b-t_p}\right)^4 - 6\left(\frac{t-t_p}{t_b-t_p}\right)^5\right]; & t \in [t_p, t_b] \\ 0; & t \in (-\infty, 0) \cup (t_b, \infty) \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Conforme a (B.11), el hidrograma triangular es un miembro de la familia de hidrogramas triparamétricos Hermitianos. A pesar de que, como antes se había señalado, dicho hidrograma tiene el inconveniente de exhibir una discontinuidad en su primera derivada en el pico, el resto de los miembros de la familia poseen derivadas continuas en ese punto.

Los hidrogramas expresados por (B.11)-(B.13) se muestran gráficamente en las figuras B.1 a B.3, para el caso particular de una relación  $t_p/t_b=1/3$ . Estos hidrogramas podrían generarse, desde luego, para cualquier valor de dicha relación.

En la tabla B.1 se consignan valores del hidrograma triparamétrico Hermitiano adimensional de orden 3 para algunas relaciones  $t_p/t_b$ .

Relación $t/t_p$	Relación $t_p/t_b$		
	$1/3$	$1/4$	$1/5$
0.0	0.000	0.000	0.000
0.1	0.028	0.028	0.028
0.2	0.104	0.104	0.104
0.3	0.216	0.216	0.216
0.4	0.352	0.352	0.352
0.5	0.500	0.500	0.500
0.6	0.648	0.648	0.648
0.7	0.784	0.784	0.784
0.8	0.896	0.896	0.896
0.9	0.972	0.972	0.972
1.0	1.000	1.000	1.000
1.2	0.972	0.987	0.993
1.4	0.896	0.951	0.972
1.6	0.784	0.896	0.939
1.8	0.648	0.825	0.896
2.0	0.500	0.741	0.843
2.2	0.352	0.648	0.784
2.4	0.216	0.550	0.718
2.6	0.104	0.450	0.648
2.8	0.028	0.352	0.575
3.0	0.000	0.259	0.500
3.2		0.175	0.425
3.4		0.104	0.352
3.6		0.049	0.282
3.8		0.013	0.216
4.0		0.000	0.156
4.2			0.104
4.4			0.061
4.6			0.028
4.8			0.007
5.0			0.000

Tabla B.1. Ordenadas  $Q/Q_p$  de los hidrogramas tripamétricos Hermitianos de orden tres

### Formas canónicas adimensionales

Una propiedad interesante que posee cualquier hidrograma tripamétrico Hermitiano es que las curvas que los definen en los intervalos  $[0, t_p]$  y  $[t_p, t_b]$  tienen la misma forma adimensional, bajo escalamiento, rotación y traslación apropiados.

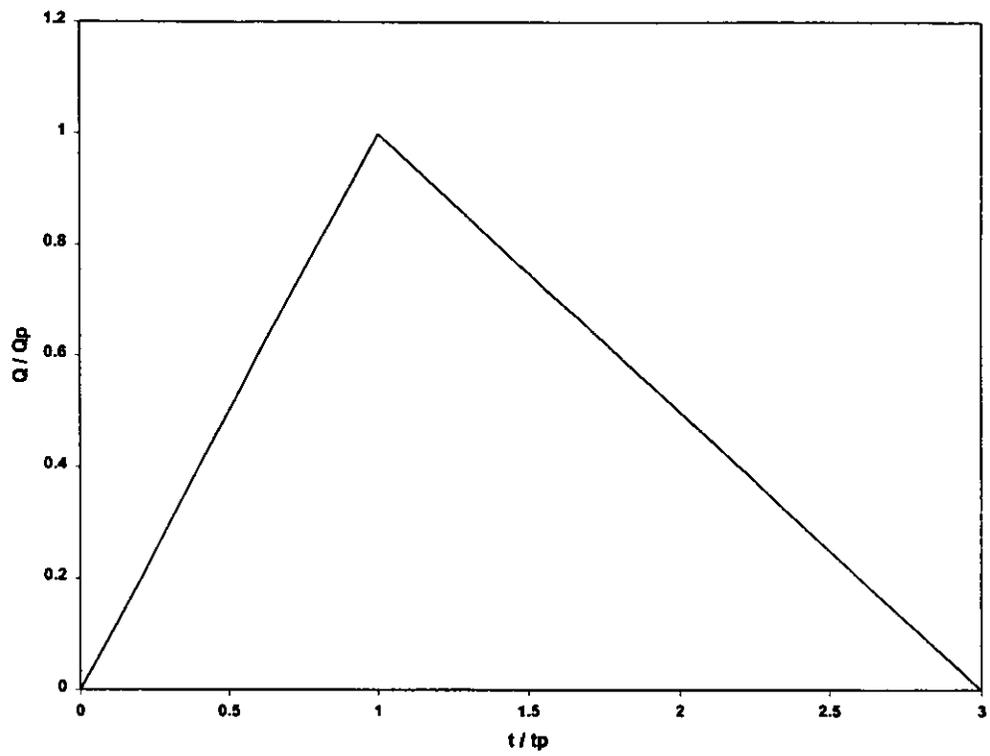


Figura B.1. Hidrograma triparamétrico Hermitiano de orden uno

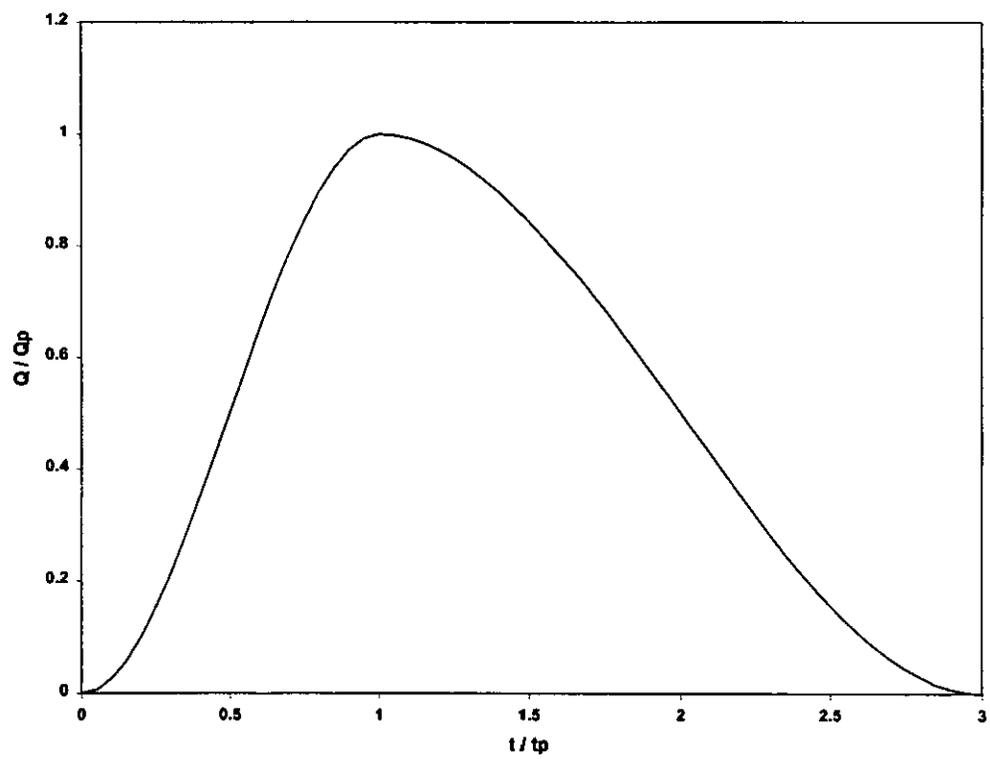


Figura B.2. Hidrograma triparamétrico Hermitiano de orden tres

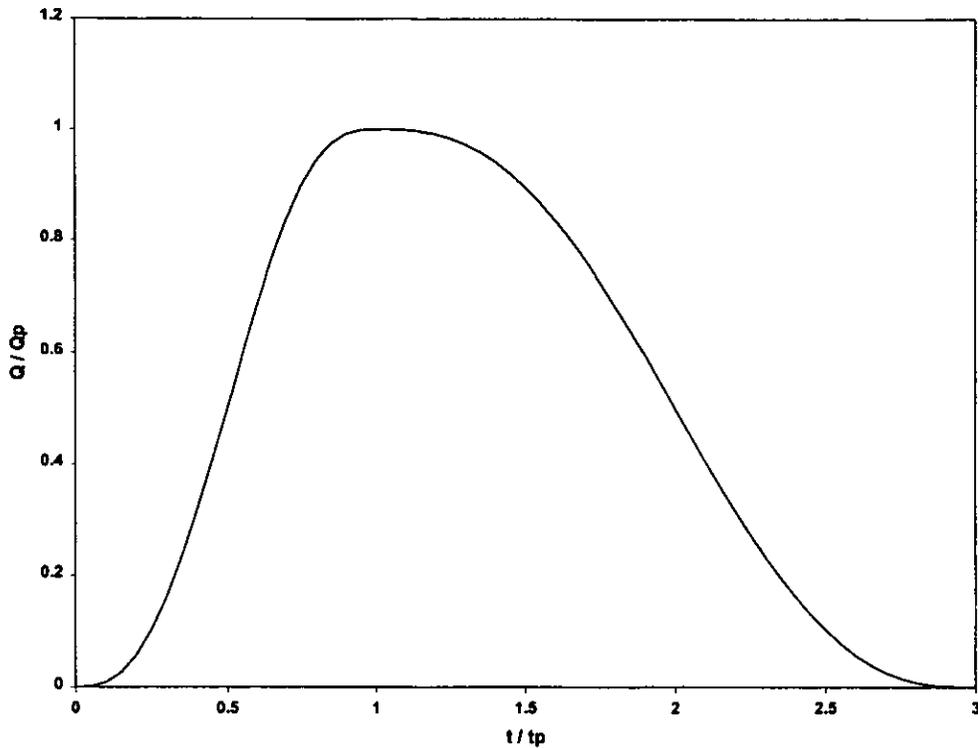


Figura B.3. . Hidrograma triparamétrico Hermitiano de orden tres

**Proposición 1.** Las expresiones (B.8) y (B.10), que definen al hidrograma triparamétrico Hermitiano de orden  $2n + 1$  (para  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) poseen la misma forma adimensional canónica.

**Demostración.** En el caso de la ecuación (B.8), sean

$$\tilde{Q}_{2n+1} = \frac{Q_{2n+1}}{Q_p} \quad (\text{B.14})$$

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_p} \quad (\text{B.15})$$

el gasto adimensional y el tiempo adimensional, para el intervalo  $[0, t_p)$ , respectivamente. Entonces, la versión adimensional de (B.8) puede escribirse como:

$$\tilde{Q}_{2n+1}(\tilde{t}) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k^{(2n+1)} \tilde{t}^k ; \tilde{t} \in [0, 1] \quad (\text{B.16})$$

cuyos coeficientes se determinan requiriendo que se satisfaga la versión adimensional de (B.5), esto es:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Q}_{2n+1}(1) &= 1 \\ \tilde{Q}_{2n+1}^{(k)}(1) &= 0; k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.17})$$

La ecuación (B.16) define la forma adimensional canónica del hidrograma triparamétrico hermitiano de orden  $2n+1$ , en el intervalo  $[0, t_p]$ .

Al combinar (B.16) y (B.17) se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$A^{(n)} \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{f} \quad (\text{B.18})$$

donde

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ (n+1) & (n+2) & (n+3) & \dots & (2n+1) \\ (n+1)n & (n+2)(n+1) & (n+3)(n+2) & \dots & (2n+1)2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n+1)n \dots 2 & (n+2)(n+1) \dots 3 & (n+3)(n+2) \dots 4 & \dots & (2n+1)2n \dots (n+2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{a}^{(n)T} = [a_{n+1}^{(2n+1)} \quad a_{n+2}^{(2n+1)} \quad \dots \quad a_{2n+1}^{(2n+1)}] \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbf{f}^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (\text{B.21})$$

Ahora bien, en el caso de la ecuación (B.10), sean

$$\tilde{Q}_{2n+1} = \frac{Q_p - Q_{2n+1}}{Q_p} \quad (\text{B.22})$$

$$\tilde{t} = \frac{t - t_p}{t_b - t_p} \quad (\text{B.23})$$

el gasto adimensional y el tiempo adimensional para el intervalo  $[t_p, t_b]$ , respectivamente. Entonces, la versión adimensional de (B.10) puede escribirse como:

$$\tilde{Q}_{2n+1}(\tilde{t}) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} c_k^{(2n+1)} \tilde{t}^k; \quad \tilde{t} \in [0, 1] \quad (\text{B.24})$$

donde

$$c_k^{(2n+1)} = -b_k^{(2n+1)} \quad (\text{B.25})$$

Los coeficientes de (B.24) se obtienen al requerir que dicha ecuación satisfaga la versión adimensional de (B.6), esto es

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Q}_{2n+1}(1) &= 1 \\ \tilde{Q}_{2n+1}^{(k)}(1) &= 0; \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.26})$$

La ecuación (B.24) define la forma adimensional canónica del hidrograma triparamétrico Hermitiano de orden  $2n+1$ , en el intervalo  $[t_p, t_b]$ .

La satisfacción simultánea de (B.24) y (B.26) produce el sistema

$$A^{(n)} c^{(n)} = f \quad (\text{B.27})$$

donde  $c^{(n)T} = [c_{n+1}^{(2n+1)} \quad c_{n+2}^{(2n+1)} \quad \dots \quad c_{2n+1}^{(2n+1)}]$ . De (B.19), es evidente que ninguno de los renglones de  $A^{(n)}$  es linealmente dependiente de los demás. Por tanto,  $A^{(n)}$  no es singular y (B.18) tiene solución única. Pero la estructura de (B.18) y (B.27) es la misma, de donde,

$$c_k^{(2n+1)} = a_k^{(2n+1)}; \quad k = n+1, n+2, \dots, 2n+1 \quad (\text{B.28})$$

Esto es, las formas canónicas adimensionales (B.16) (correspondiente a  $t \in [0, t_p]$ ) y (B.24) (correspondiente a  $t \in [t_p, t_b]$ ) son idénticas. ■

La demostración de esta propiedad de los hidrogramas triparamétricos Hermitianos muestra que si se eligen adecuadamente los factores de escalamiento, rotación y traslación, las curvas que los definen en los intervalos  $[0, t_p]$  y  $[t_p, t_b]$  son idénticas en forma adimensional. Esto no quiere decir que la rama de ascenso del hidrograma (dimensional) y su rama de recesión sean iguales, sino que manejadas en forma adimensional apropiada coinciden. Como podrá observarse a continuación las formas canónicas adimensionales servirán como base para demostrar la invariancia del volumen.

**Observación.** En virtud de (B.14) y (B.15):

$$\int_0^{t_p} Q_{2n+1}(t) dt = Q_p t_p \int_0^1 \tilde{Q}_{2n+1}(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (\text{B.29})$$

y, en vista de (B.16), (B.22), (B.23), (B.24) y (B.28):

$$\int_{t_p}^{t_b} Q_{2n+1}(t) dt = Q_p (t_b - t_p) \left[ 1 - \int_0^1 \tilde{Q}_{2n+1}(\tilde{t}) d\tilde{t} \right] \quad (\text{B.30})$$

Por tanto, el volumen de un hidrograma triparamétrico hermitiano de orden  $2n + 1$  está dado por:

$$\begin{aligned}
 V_{2n+1} &= \int_0^{t_b} Q_{2n+1}(t) dt = \int_0^{t_p} Q_{2n+1}(t) dt + \int_{t_p}^{t_b} Q_{2n+1}(t) dt \\
 &= Q_p t_b \left[ 1 - \int_0^1 \tilde{Q}_{2n+1}(\tilde{t}) d\tilde{t} \right] + Q_p t_p \left[ 2 \int_0^1 \tilde{Q}_{2n+1}(\tilde{t}) d\tilde{t} - 1 \right]
 \end{aligned} \tag{B.31}$$

En particular, para  $n = 0$ :

$$\int_0^1 \tilde{Q}_1(\tilde{t}) d\tilde{t} = \frac{1}{2} \tag{B.32}$$

de donde,

$$V_1 = \frac{Q_p t_b}{2} \equiv V \tag{B.33}$$

El resultado anterior simplemente expresa la conocida fórmula para calcular el volumen de un hidrograma triangular. ■

### Invariancia del volumen

Los miembros de la familia de hidrogramas triparamétricos Hermitianos poseen una notable propiedad, en el sentido de que todos ellos tienen el mismo volumen. Esta propiedad se demuestra a continuación.

**Proposición 2.** La integral de la forma canónica adimensional (B.16) (o (B.24)) de los hidrogramas triparamétricos Hermitianos en el intervalo  $[0,1]$  es invariante con respecto a su orden.

**Demostración.** Considérese la transformación de coordenadas  $\tau$  siguiente, compuesta de una traslación del punto  $(1,1)$  al origen y de una rotación de  $\pi$  radianes:

$$\tau : \begin{cases} \hat{Q}_{2n+1} = 1 - \tilde{Q}_{2n+1} \\ \hat{t} = 1 - \tilde{t} \end{cases} \tag{B.34}$$

El efecto que la transformación  $\tau$  tiene sobre la forma canónica adimensional (B.16) se muestra gráficamente en la figura B.4.

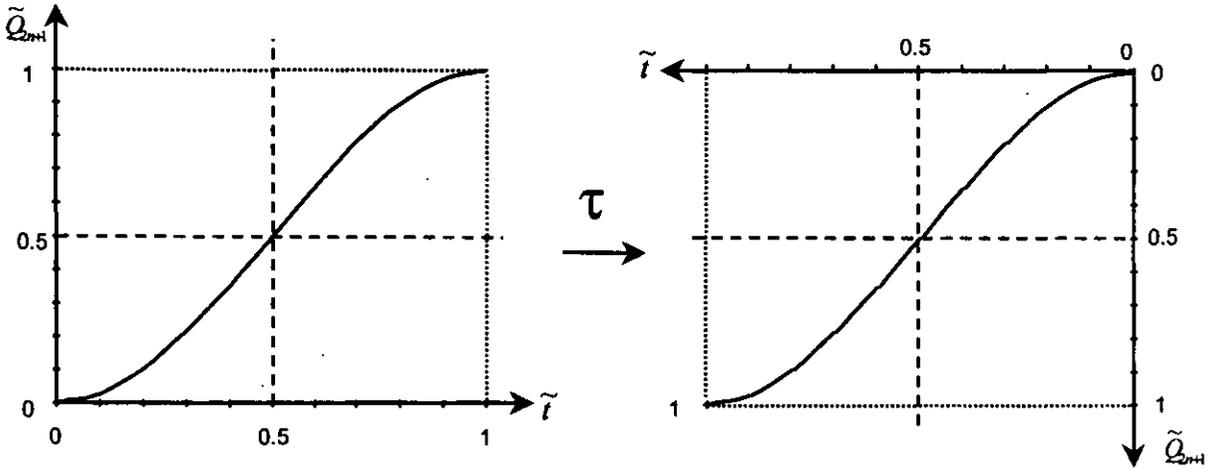


Figura B.4. Transformación sobre la forma canónica adimensional

Ahora bien, resolviendo (B.34) para  $\tilde{Q}_{2n+1}$  y  $\tilde{t}$  se obtiene:

$$\tau^{-1} : \begin{cases} \tilde{Q}_{2n+1} = 1 - \hat{Q}_{2n+1} \\ \tilde{t} = 1 - \hat{t} \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

Al sustituir (B.35) en (B.16) se obtiene una función polinomial del tipo siguiente:

$$\hat{Q}_{2n+1}(\hat{t}) = \sum_{k=0}^{2n+1} d_k^{(2n+1)} \hat{t}^k; \quad \hat{t} \in [0,1] \quad (\text{B.36})$$

En lugar de intentar obtener expresiones explícitas para  $d_k^{(2n+1)}$ , que resulta en manipulaciones algebraicas extremadamente laboriosas, a continuación se presenta un enfoque indirecto de mucho mayor eficacia.

Recuérdese que la forma canónica adimensional (B.16) se construyó de modo que

$$\tilde{Q}_{2n+1}^{(k)}(0) = 0; \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (\text{B.37})$$

La combinación de (B.35) y (B.37) implica que

$$\left. \begin{aligned} \hat{Q}_{2n+1}(1) &= 1 \\ \hat{Q}_{2n+1}^{(k)}(1) &= 0; \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.38})$$

Adicionalmente, al substituir (B.34) en (B.17), se obtiene:

$$\hat{Q}_{2n+1}^{(k)}(0) = 0; k = 0, 1, \dots, n \quad (\text{B.39})$$

Las ecuaciones (B.36) y (B.38) implican que

$$d_k^{(2n+1)} = 0; k = 0, 1, \dots, n \quad (\text{B.40})$$

De donde, (B.36) adopta la forma

$$\hat{Q}_{2n+1}(\hat{t}) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} d_k^{(2n+1)} \hat{t}^k; \hat{t} \in [0, 1] \quad (\text{B.41})$$

Al requerir que (B.41) satisfaga (B.38), se obtiene el sistema

$$A^{(n)} d^{(n)} = f \quad (\text{B.42})$$

donde  $d^{(n)T} = [d_{n+1}^{(2n+1)} \quad d_{n+2}^{(2n+1)} \quad \dots \quad d_{2n+1}^{(2n+1)}]$ . Al comparar (B.18) y (B.42), se concluye que

$$d_k^{(2n+1)} = a_k^{(2n+1)}; k = n+1, n+2, \dots, 2n+1 \quad (\text{B.43})$$

Esto es, la forma canónica adimensional en el espacio  $(\hat{Q}_{2n+1}, \hat{t})$  (dada por (B.36)) es la misma que la correspondiente al espacio  $(\tilde{Q}_{2n+1}, \tilde{t})$  (dada por (B.16)).

Una consecuencia de lo anterior es que la forma canónica adimensional (16) es antisimétrica con respecto a las rectas  $\tilde{t} = \frac{1}{2}, \tilde{Q}_{2n+1} = \frac{1}{2}$ , como se muestra en la figura B.5. Dicha antisimetría y la ecuación (B.32) implican que, de acuerdo con lo mostrado en la ilustración:

$$\int_0^1 \tilde{Q}_{2n+1}(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_0^1 \tilde{Q}_1(\tilde{t}) d\tilde{t} - \alpha + \alpha = \frac{1}{2}; n = 1, 2, \dots \quad (\text{B.44})$$

que demuestra la invariancia propuesta. ■

**Corolario 1.** Todos los hidrogramas triparamétricos Hermitianos poseen el mismo volumen.

En efecto, de (B.31), (B.33) y (B.44),

$$V_{2n+1} = Q_p t_b \left(1 - \frac{1}{2}\right) + Q_p t_p \left[2 \left(\frac{1}{2}\right) - 1\right] = \frac{Q_p t_b}{2} \equiv V; n = 1, 2, \dots \quad (\text{B.45})$$

■

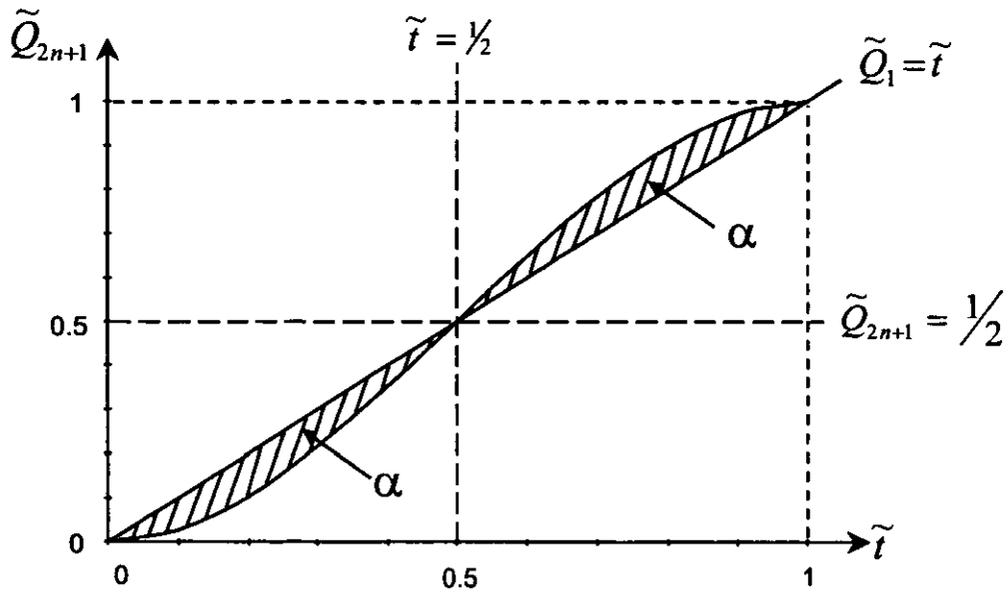


Figura B.5. Antisimetría de la forma canónica adimensional

**Corolario 2.** El tiempo base puede ser substituido por el volumen en la triada de parámetros que caracteriza un hidrograma triparamétrico Hermitiano.

En efecto, de (B.45):

$$t_b = 2 \frac{V}{Q_p} \quad (B.46)$$

De modo que  $Q_{2n+1}$  puede expresarse como:

$$Q_{2n+1} = Q_{2n+1}(t; Q_p, t_p, V) \quad (B.47)$$

■

El hecho de que los hidrogramas triparamétricos Hermitianos posean propiedades tales como formas canónicas adimensionales idénticas bajo transformaciones apropiadas, invariancia de volumen con respecto al orden y derivadas continuas en el inicio, pico y fin del hidrograma no representa limitación alguna para su aplicación, ya que las características de la cuenca bajo estudio se toman en cuenta a través de los valores de los parámetros  $Q_p$ ,  $t_p$  y  $V$ , además de que se tiene la libertad de elegir el orden de los polinomios utilizados en la construcción del hidrograma, lo cual permite tomar en cuenta la forma de las curvas de ascenso y recesión de la avenida. De esta manera, la forma y otras características fisiográficas de la cuenca, además de su tiempo de concentración pueden incorporarse en la determinación de los parámetros y el orden que definen un hidrograma triparamétrico Hermitiano.

## Ejemplos de aplicación

### Ejemplo 1

Considérese la determinación de un hidrograma unitario sintético,  $q = q(t)$ , donde  $q$  representa gasto unitario y  $t$  representa tiempo, a partir de los datos de una cuenca pequeña ubicada en el estado de Morelos, sobre el río Yautepec, afluente del río Amacuzac, abarcando una superficie de  $545 \text{ km}^2$ , hasta la estación hidrométrica Ticumán. La longitud del cauce principal es de  $18 \text{ km}$  y su pendiente media, de  $0.015$ . Se procederá ahora a obtener los parámetros que definen a un hidrograma triangular. A partir de éstos, se determinarán hidrogramas sintéticos con otras formas. Los resultados se resumen en la ilustración 6.

#### a) Hidrograma triangular

Para determinar las características de un hidrograma unitario sintético triangular se ha utilizado el procedimiento propuesto por Mockus (1957), el cual indica que el gasto pico unitario,  $q_p$ , en  $\text{m}^3/\text{mm}$ , está dado por:

$$q_p = \frac{0.555A}{t_b} \quad (\text{B.48})$$

donde  $A$  es el área de la cuenca en  $\text{km}^2$  y  $t_b$ , es el tiempo base del hidrograma en horas. A su vez, el tiempo base se puede aproximar como  $t_b = 3t_p$ , siendo  $t_p$  el tiempo pico del hidrograma. El tiempo pico se calcula como:

$$t_p = \frac{d_e}{2} + t_r \quad (\text{B.49})$$

donde  $d_e$  es la duración en exceso y  $t_r$ , el tiempo de retraso, los cuales pueden estimarse a partir del tiempo de concentración  $t_c$  como  $d_e = t_c$  y  $t_r = 0.60 t_c$ . Por su parte, el tiempo de concentración, en h, puede calcularse con la fórmula de Kirpich (Chow, 1964), como:

$$t_c = 0.000325 \frac{L^{0.77}}{S^{0.385}} \quad (\text{B.50})$$

donde  $L$  y  $S$  son la longitud y pendiente del cauce principal en m y m/m, respectivamente.

Con los datos del ejemplo se obtienen los siguientes resultados:  $d_e = t_c = 3.10 \text{ h}$ ,  $t_r = 1.86 \text{ h}$ ,  $t_p = 3.40 \text{ h}$ ,  $t_b = 10.21 \text{ h}$  y  $q_p = 29.66 \text{ m}^3/\text{s}/\text{mm}$ . A partir de estos últimos dos parámetros es posible calcular el volumen del hidrograma cuyo valor resulta ser  $v = 545,091 \text{ m}^3/\text{mm}$ . En resumen, el hidrograma unitario triangular queda definido por los siguientes parámetros:  $q_p = 29.66 \text{ m}^3/\text{s}/\text{mm}$ ,  $t_p = 3.40 \text{ h}$  y  $v = 545,091 \text{ m}^3/\text{mm}$  (véase la ilustración 6). Esta triada de parámetros también puede ser utilizada para caracterizar hidrogramas unitarios con formas diferentes a la triangular.

### b) Hidrograma del USSCS

Uno de los métodos disponibles para construir hidrogramas unitarios sintéticos es el propuesto por el Servicio de Conservación de Suelos de los Estados Unidos (USSCS, por sus siglas en inglés, Mockus, 1957). La forma de dicho hidrograma se determina en términos del tiempo adimensional,  $t/t_p$ , y el gasto adimensional,  $q/q_p$ . Para el ejemplo se ha utilizado  $q_p=29.66 \text{ m}^3/\text{s}/\text{mm}$  y  $t_p=3.40 \text{ h}$  para formar el hidrograma en estudio (véase la ilustración 6). El volumen no es un parámetro independiente del gasto pico y el tiempo pico en este caso, ya que el hidrograma del USSCS se determina solamente en función de los parámetros  $q_p$  y  $t_p$ . El cálculo del volumen se puede realizar en forma numérica y, para el ejemplo en estudio, resulta ser  $v=499,127 \text{ m}^3/\text{mm}$ , valor que difiere del especificado en la triada de parámetros ( $545,091 \text{ m}^3/\text{mm}$ ).

### c) Hidrograma Pearson

La función Pearson puede utilizarse para describir un hidrograma unitario, por medio de la expresión (Ponce, 1989):

$$q = q_p \left( \frac{t}{t_p} \right)^{t_p/(t_g-t_p)} e^{-(t_p-t)/(t_g-t_p)} \quad (\text{B.51})$$

para  $t \in [0, \infty)$  y  $q=0$  para otros tiempos. En la ecuación (B.51),  $t_g$  es el tiempo al centroide del hidrograma. Evidentemente,  $t_b \rightarrow \infty$  para el hidrograma Pearson dado por (B.51).

La ecuación (B.51) se puede integrar, obteniéndose la siguiente expresión para el volumen:

$$v = \int_0^{\infty} q(t) dt = q_p e^{t_p/(t_g-t_p)} \left( \frac{t_g-t_p}{t_p} \right)^{t_p/(t_g-t_p)} (t_g-t_p) \Gamma \left( 1 + \frac{t_p}{t_g-t_p} \right) \quad (\text{B.52})$$

Cuando  $q_p$ ,  $t_p$  y  $v$  son conocidos, (B.52) representa una ecuación trascendental para  $t_g$ , la cual puede ser resuelta numéricamente. Desafortunadamente, este proceso de solución es un tanto laborioso, en vista de la complejidad de la relación funcional representada por (B.52). Empleando los valores  $q_p=29.66 \text{ m}^3/\text{s}/\text{mm}$ ,  $t_p=3.40 \text{ h}$  y  $v=545,091 \text{ m}^3/\text{mm}$ , en (B.52), se obtiene la solución  $t_g=4.56 \text{ h}$ . El hidrograma Pearson resultante, obtenido de (B.51), se muestra en la figura B.6.

### d) Hidrograma senoidal

Un hidrograma unitario descrito por una función senoidal, se expresa como:

$$q = q_p \operatorname{sen} \left( \frac{\pi t}{2 t_p} \right) \quad (\text{B.53})$$

para  $t \in [0, 2t_p]$ , y  $q=0$  para otros tiempos. Evidentemente, en este caso,  $t_b=2t_p$ . El volumen se obtiene integrando (B.53) y está dado por:

$$v = \frac{4}{\pi} q_p t_p \quad (\text{B.54})$$

Al observar (B.53) y (B.54), se concluye que el hidrograma senoidal queda completamente determinado por los parámetros  $q_p$  y  $t_p$ , ya que el volumen no es un parámetro independiente de ellos. Para el ejemplo en estudio, para  $q_p=29.66 \text{ m}^3/\text{s}/\text{mm}$  y  $t_p=3.40 \text{ h}$ , se obtiene, al aplicar (54),  $v=462,235 \text{ m}^3/\text{mm}$ , valor que difiere del volumen especificado en la triada de parámetros (545,091  $\text{m}^3/\text{mm}$ ). El hidrograma senoidal resultante se muestra en la figura B.6.

#### e) Hidrogramas triparamétricos hermitianos

El hidrograma triparamétrico hermitiano (HTH) de primer orden coincide con el hidrograma triangular y está dado por (B.11). El HTH de tercer orden está definido por (B.12), mientras que el de quinto orden por (B.13). Al aplicar estas expresiones,  $q_p$  se sustituye por  $Q_p$  y debe utilizarse una expresión similar a la ecuación (B.46) para expresar el tiempo base en función del gasto pico unitario y el correspondiente volumen, esto es:  $t_b = 2v / q_p$ . Los hidrogramas resultantes para el ejemplo en estudio, se muestran en la figura B.6.

Los resultados mostrados en la ilustración 6 indican lo siguiente:

1. Los hidrogramas USSCS y senoidal no preservan el volumen especificado en la triada de parámetros  $(q_p, t_p, v)$ , ya que ambos se definen exclusivamente a través del gasto pico y el tiempo pico.
2. El hidrograma Pearson permite preservar la triada de parámetros  $(q_p, t_p, v)$ . No obstante, su aplicación es tediosa, ya que la relación que existe entre el tiempo al centroide,  $t_g$ , y la triada  $(q_p, t_p, v)$  es complicada, lo cual dificulta la obtención de  $t_g$  a fin de que se preserve un volumen especificado.
3. Los hidrogramas triparamétricos hermitianos preservan la triada  $(q_p, t_p, v)$  de manera muy sencilla en vista de la simplicidad de la relación que existe entre el volumen, el gasto pico y el tiempo base para dichos hidrogramas.

#### Ejemplo 2

Considérese el hidrograma aislado de escurrimiento directo mostrado en la figura B.7, registrado en la estación hidrométrica Las Gaviotas, en la cuenca baja del río Grijalva, en mayo de 1970. Con el fin de parametrizar dicho hidrograma, se han aplicado los métodos descritos en el ejemplo 1, con excepción de los asociados con los hidrogramas USSCS y senoidal, ya que éstos no preservan el volumen. Para este caso se tienen los siguientes datos:  $Q_p=359.73 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $t_p=60 \text{ h}$ , y  $V=164.62 \text{ Mm}^3$ . En el caso del hidrograma Pearson, la solución numérica de (B.52) (sustituyendo  $Q_p$  por  $q_p$  y  $V$  por  $v$ ) produce el resultado  $t_g=100 \text{ h}$ . Las parametrizaciones del hidrograma mostrado en la figura B.7 se muestran gráficamente en la figura B.8. Como puede observarse, los hidrogramas triparamétricos hermitianos de órdenes 3 y 5, así como el hidrograma Pearson representan la curva de ascenso del hidrograma registrado, de mucho mejor manera que el hidrograma triangular. La curva de recesión se representa más satisfactoriamente a través de los hidrogramas Pearson y triparamétricos

Hermitianos de órdenes 3 y 5 que a través del hidrograma triangular. No obstante, la utilización del hidrograma Pearson tiene la desventaja de que se requiere la tediosa solución de la ecuación (B.52), a fin de que el volumen especificado sea preservado.

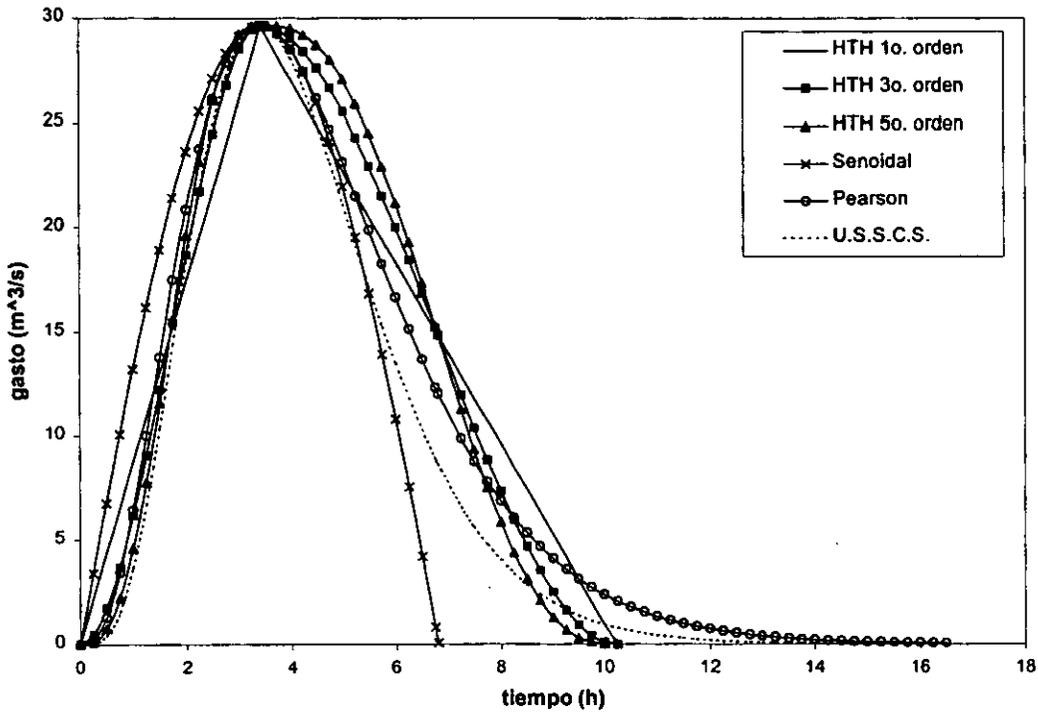


Figura B.6. Hidrogramas sintéticos (ejemplo 1)

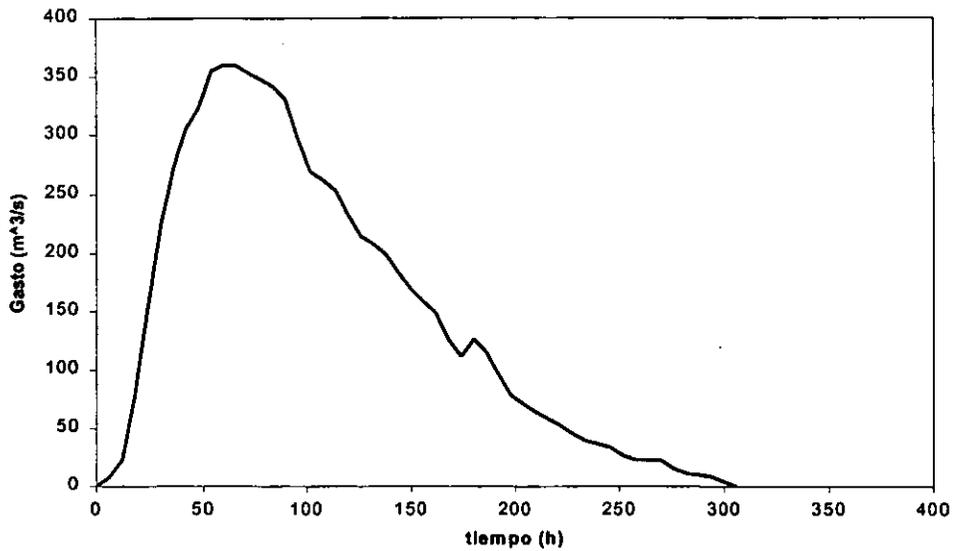


Figura B.7. Hidrograma registrado (ejemplo 2)

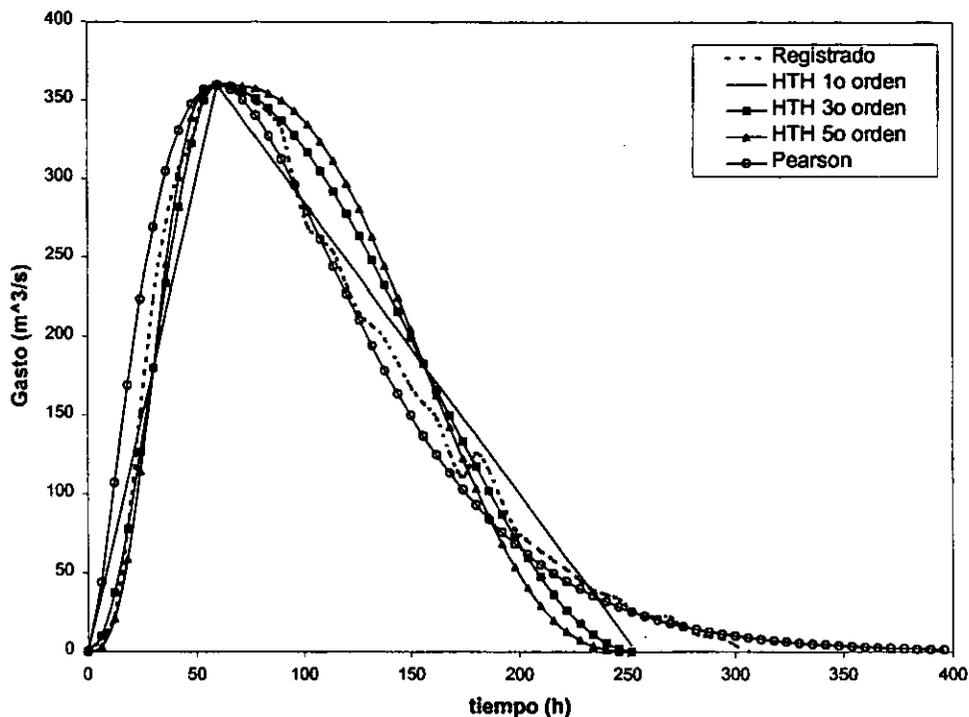


Figura B.8. Comparación entre parametrizaciones (ejemplo 2)

De acuerdo con el comportamiento de los hidrogramas triparamétricos hermitianos de órdenes uno, tres, cinco y superiores, se recomienda, para aplicaciones prácticas, el uso del hidrograma de tercer orden, que resulta de fácil aplicación y presenta ventajas sobre el de primer orden, en el sentido que preserva la continuidad de la primera derivada temporal del gasto al inicio y término del hidrograma, así como en el pico del mismo. En algunos casos, sin embargo, podría resultar mejor la aplicación de hidrogramas de orden superior.

### Comentarios finales

La parametrización de hidrogramas es útil en el contexto de diversos estudios de hidrología de avenidas. En este trabajo se presenta una parametrización polinomial sencilla que posee propiedades atractivas para la representación de hidrogramas naturales de un solo pico. Dicha parametrización se basa en el uso de la triada gasto pico, tiempo pico y volumen, y de interpolantes Hermitianos. Los hidrogramas así construidos se denominan hidrogramas triparamétricos Hermitianos, cuyas propiedades principales son: derivadas continuas hasta de grado  $n$  para un hidrograma de orden  $2n + 1$ , invariancia de volumen con respecto al orden del hidrograma y la existencia de una expresión muy simple que relaciona gasto pico, tiempo base y volumen. Se espera que la parametrización propuesta sea de utilidad en el desarrollo de metodologías para la estimación de avenidas de diseño. En particular, los hidrogramas triparamétricos hermitianos pueden utilizarse para representar hidrogramas naturales de tormentas aisladas registrados en estaciones hidrométricas. Adicionalmente, la metodología

propuesta puede ser empleada para definir la forma de hidrogramas unitarios generados sintéticamente, a través de la estimación del gasto pico y el tiempo de concentración, a partir del cual pueden estimarse el tiempo pico y el tiempo base. Con dos ejemplos numéricos, se ha mostrado que la parametrización propuesta en este trabajo es mejor que la asociada con hidrogramas USSCS y senoidal, dado que éstos sólo pueden preservar el gasto pico y el tiempo pico de un hidrograma (registrado o sintético). Los hidrogramas triparamétricos hermitianos también ofrecen ventajas en relación con los hidrogramas Pearson, ya que la utilización de éstos últimos involucra la tediosa solución de una ecuación trascendental no lineal, a fin de preservar el volumen del hidrograma por representar.

*Para encontrar la verdad es necesario, una vez en el curso de nuestra vida,  
dudar tanto como sea posible de todas las cosas*

Descartes

**APÉNDICE****Análisis de sensibilidad de los parámetros del hidrograma de ingreso a vasos**

## Introducción

Como parte del planteamiento para mejorar el diseño de vasos de almacenamiento se desarrolló una solución analítica aproximada a la ecuación de tránsito de avenidas en vasos, la cual se obtuvo mediante un enfoque perturbatorio. La solución propuesta se puede consultar en el capítulo 4 de este trabajo. Asimismo, se determinó, a partir de la aplicación de la solución a casos reales, que una solución de orden uno es suficiente para las aplicaciones prácticas de diseño, aún cuando se generaron las soluciones para los órdenes cero, uno y dos.

La solución aproximada general toma en cuenta explícitamente la forma del hidrograma mediante la función  $I(t)$  y se cuenta también con formulaciones específicas para el caso de un hidrograma de entrada triangular descrito por tres parámetros; el gasto de pico, el tiempo al pico y el volumen de escurrimiento del mismo.

Al contar con la solución analítica aproximada resulta factible llevar a cabo un análisis de la sensibilidad de los parámetros del hidrograma de entrada en la respuesta del vaso. Este análisis permite determinar cuales parámetros del hidrograma tienen más importancia en la respuesta considerada en el vaso. El fin del análisis es poder simplificar la caracterización de una avenida, es decir, reducir el número de parámetros que la describen, si esto es posible desde un punto de vista práctico. Las bases y los resultados de dicho análisis se presentan en este apéndice.

Los parámetros representativos del hidrograma que se han elegido son el gasto pico, el volumen de escurrimiento y el tiempo al pico.

El análisis se ha desarrollado de tal forma que se pueda apreciar en forma gráfica el comportamiento de una característica del funcionamiento del vaso con respecto a cada uno de los parámetros de la avenida. Se ha determinado que, ya que el fin de la metodología completa es el diseño del vaso, el almacenamiento máximo en éste es una buena característica a considerar en el proceso.

La gráfica del almacenamiento máximo adimensional ( $S_{\text{máx}}$ ) contra cada uno de los parámetros mientras se mantiene a los otros dos parámetros constantes es un indicativo implícito de las variaciones  $\frac{\partial S}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial \sigma}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial \gamma}$  en donde  $\xi$ ,  $\sigma$  y  $\gamma$  son el gasto pico adimensional, el volumen de escurrimiento adimensional y el tiempo al pico adimensional de la avenida de entrada al vaso.

Los valores numéricos de dichas variaciones son efectivamente equiparables ya que se está solucionando el problema en forma adimensional.

Ya que se dispone de una serie de expresiones no explícitas para calcular la evolución de los almacenamientos en el vaso, el análisis se llevó al cabo en forma numérica. Se construyeron gráficas del tipo  $S$  vs  $\xi$  para diversos pares  $\sigma$  y  $\gamma$  constantes. Es posible incluso, a partir de estas gráficas, calcular en forma numérica aproximada valores para la derivada  $\frac{\partial S}{\partial \xi}$ .

Ya que se utilizó la versión adimensional de la ecuación y solución, los resultados que aquí fueron obtenidos no pierden generalidad, aún cuando los cálculos se han realizado con los datos reales de una presa en particular.

Se trabajó con datos reales correspondientes a la presa El Molinito, ubicada en Sonora, México, misma que se utilizó para evaluar la bondad de la solución analítica aproximada en el capítulo 4 de este trabajo. Como se sabe, "El Molinito" presenta un valor  $\epsilon = 0.237587$  y los datos generales del embalse son los mostrados en la figura 3.9.

Solo para brindar información adicional acerca de los valores esperados en las variables adimensionales que describen al hidrograma, la avenida de diseño de la presa se ha simplificado al hidrograma triangular mostrado en la figura (C.1).

Con base en las expresiones 3.30 a 3.32, se procedió a elaborar gráficas con valores numéricos indicativos de la sensibilidad. Se realizaron cálculos para un amplio rango de valores, los cuales son:

El volumen de escurrimiento:	$0.10 \leq \sigma \leq 1.00$ con incrementos de 0.10
El gasto de pico:	$0.50 \leq \xi \leq 6.50$ con incrementos de 0.50
El tiempo al pico:	$0.05 \leq \gamma \leq 2.00$ con incrementos de 0.05

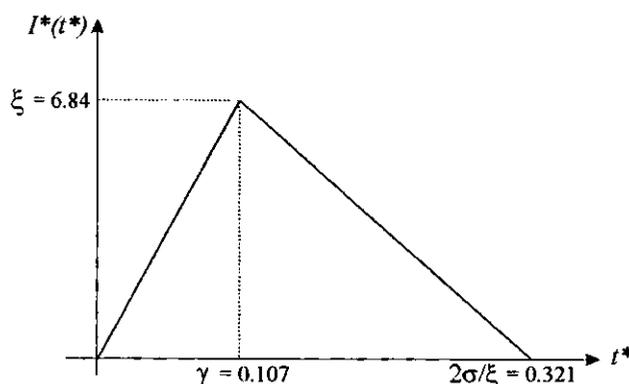


Figura C.1. Avenida adimensional de diseño para la presa “El Molinito”

En todas las corridas se cuidó que  $\gamma < \frac{\sigma}{\xi}$  a fin de simular hidrogramas similares a los encontradas en la realidad.

Se generaron diversas gráficas que muestran la variabilidad del almacenamiento adimensional máximo al variar todos y cada uno de los parámetros.

En las figuras de este apéndice se muestran tres bloques, los cuales obedecen a corridas en las que se ha variado cada uno de los parámetros de la avenida de entrada.

En el primer bloque de ilustraciones se muestra la variación del almacenamiento máximo con respecto a  $\xi$ , el gasto pico adimensional, manteniendo constantes a  $\sigma$  y  $\gamma$ , el volumen de escurrimiento adimensional y el tiempo al pico adimensional. Se puede observar en estas gráficas que para  $\sigma$  pequeño y  $\gamma$  también pequeño, lo cual corresponde a hidrogramas de avenidas con poco volumen de escurrimiento y ramas de ascenso muy pronunciadas, el valor del gasto pico no tiene mucha influencia sobre el valor del almacenamiento máximo en el mismo. Sin embargo a medida que crecen los valores tanto de  $\sigma$  como de  $\gamma$ , el gasto pico juega un papel muy importante en el valor del almacenamiento máximo en el vaso.

De estas gráficas se puede apreciar que el valor de  $\gamma$  no tiene influencia alguna para valores pequeños de  $\sigma$ , digamos hasta  $\sigma = 0.40$  y su contribución a la variabilidad de  $S_{\text{máx}}$  es ligeramente apreciable sólo cuando  $\sigma$  alcanza valores cercanos a la unidad, digamos mayores de 0.80.

Se observa también que la mayor variación de  $S_{\text{máx}}$  se presenta para valores pequeños de  $\xi$ , digamos menores que 2.00, lo cual corresponde a hidrogramas de avenidas con gastos pico moderados pero con volúmenes de escurrimiento importantes, es decir hidrogramas mas bien extendidos. De este primer bloque de gráficas se puede decir que  $\gamma$  no parece tener un gran efecto sobre el comportamiento el vaso a través del  $S_{\text{máx}}$ .

El siguiente bloque de gráficas muestra la variación de  $S_{\text{máx}}$  con respecto al volumen de escurrimiento del hidrograma de entrada,  $\sigma$ . De acuerdo con lo consignado en las gráficas  $S_{\text{máx}}$  muestra una gran variabilidad con  $\sigma$  no importando los valores de  $\xi$  y  $\gamma$ . Se observa ,

sin embargo, que para valores relativamente pequeños de  $\sigma$ , digamos menores de 0.50, la variación de  $S_{\text{máx}}$  es mayor que para valores de  $\sigma > 0.50$ . Se identifica, además, que para valores grandes de  $\gamma$ , digamos  $\gamma > 1.50$ , la variabilidad de  $S_{\text{máx}}$  tiende a disminuir, mientras que para grandes valores de  $\xi$ , digamos  $\xi > 1.00$ , la variación es más pronunciada.

De las gráficas de este segundo bloque se aprecia que el tiempo al pico,  $\gamma$ , no tiene influencia importante en la evolución de  $S_{\text{máx}}$  para valores pequeños de  $\sigma$  y  $\xi$  y solo presenta cierta influencia, aunque no significativa para valores de  $\sigma > 0.8$  y  $\xi > 3.00$ .

Se puede concluir, del análisis de este segundo grupo de gráficas, que el tiempo pico no parece tener una influencia importante en la variación de  $S_{\text{máx}}$ .

Para el tercer bloque de gráficas se consideró la variación del almacenamiento máximo adimensional, ( $S_{\text{máx}}$ ) con respecto al tiempo pico adimensional,  $\gamma$ . A partir de estas gráficas es posible observar claramente que  $S_{\text{máx}}$  no sufre variaciones importantes al modificar el valor de  $\gamma$  en el rango de 0.00 a 2.00. Se puede observar sin embargo, que para valores muy grandes de  $\sigma$  y  $\xi$ , lo cual corresponde a grandes avenidas tanto en gasto pico como en volumen de escurrimiento, el tiempo pico comienza a tener un muy pequeño pero no significativo efecto sobre el almacenamiento máximo en el vaso. Se determina además que las variaciones de  $S_{\text{máx}}$  con respecto a  $\gamma$  ocurren para valores grandes de  $\xi$ , lo cual corresponde a hidrogramas muy altos. Esta variación se ve favorecida cuando se tienen además grandes volúmenes de almacenamiento.

El tercer bloque de gráficas muestra claramente que la influencia de  $\gamma$  (tiempo pico adimensional) es perceptible sólo para valores muy grandes de  $\xi$  y valores moderados de  $\sigma$ . Sin embargo, los valores grandes de  $\xi$  tienen mucha más influencia que  $\gamma$  en la respuesta del vaso ante la avenida.

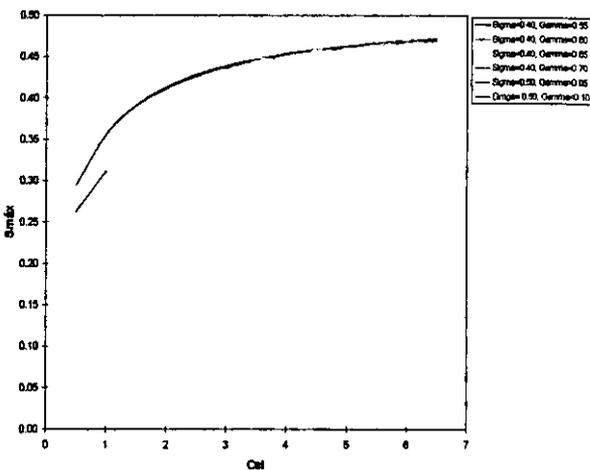
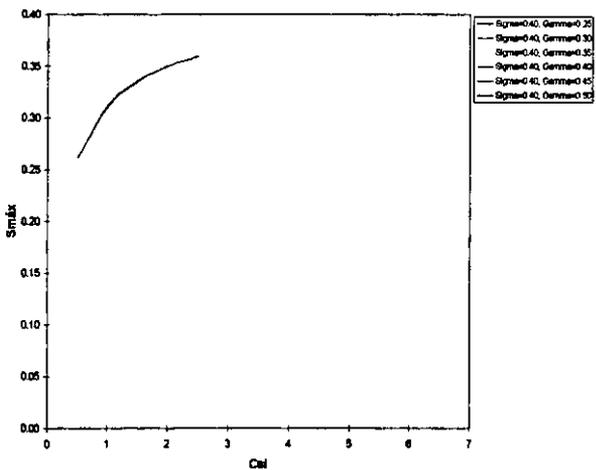
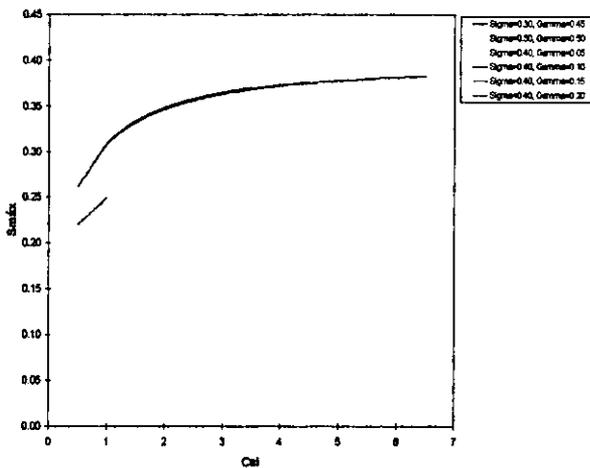
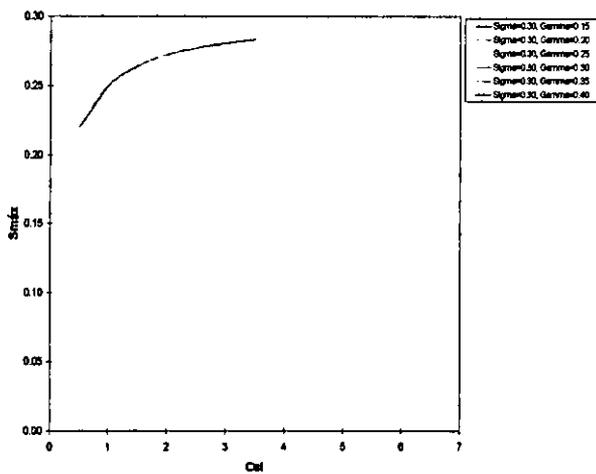
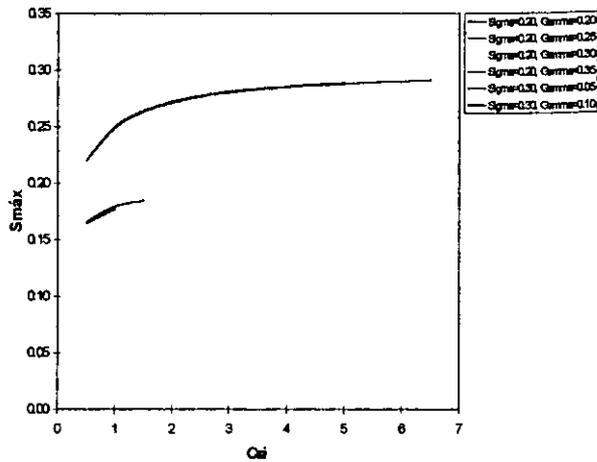
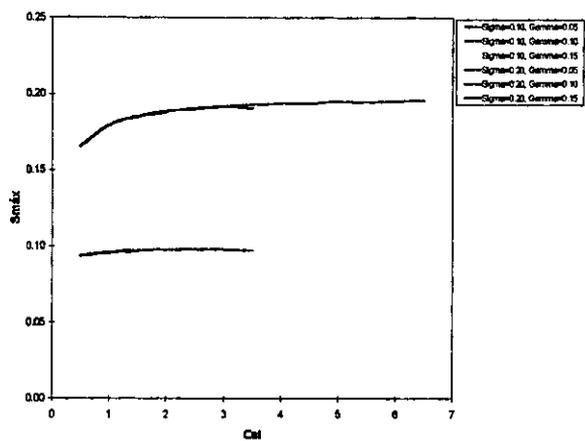
La presencia de gráficas con líneas que se confunden, especialmente en los bloques de gráficas 1 y 2 refuerzan el postulado de que el tiempo pico presenta poca importancia en la respuesta del vaso.

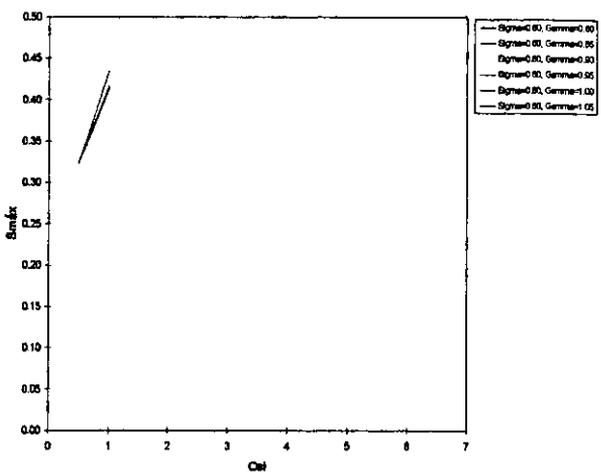
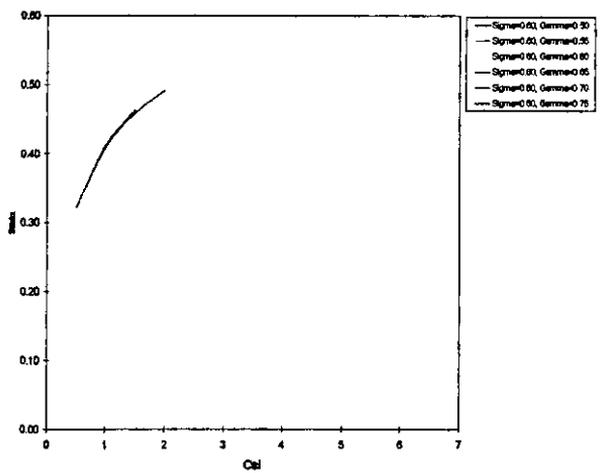
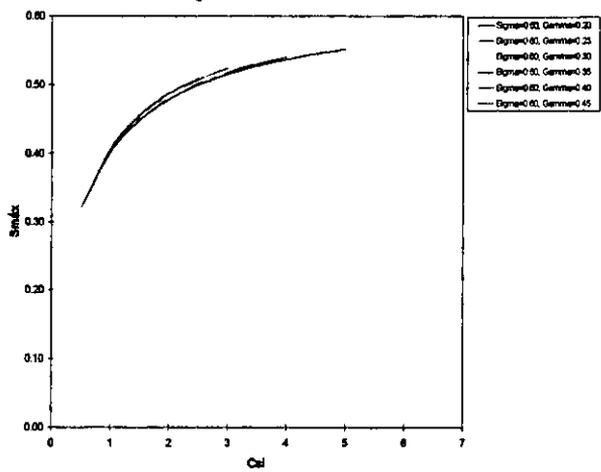
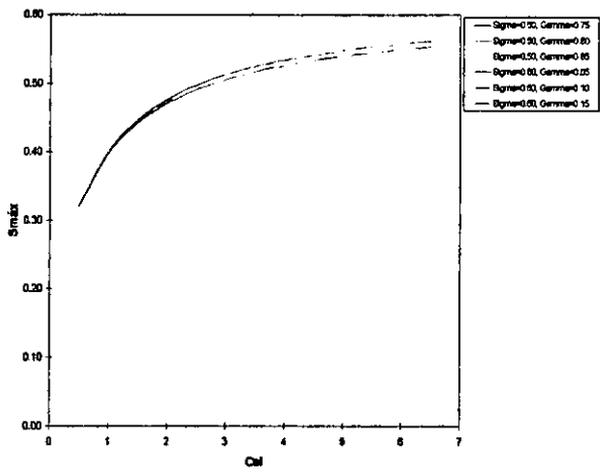
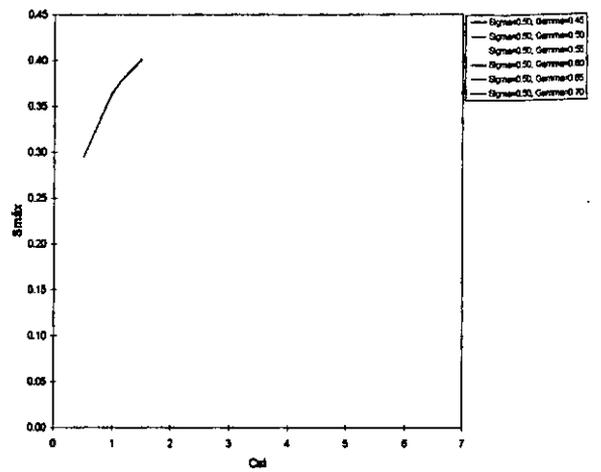
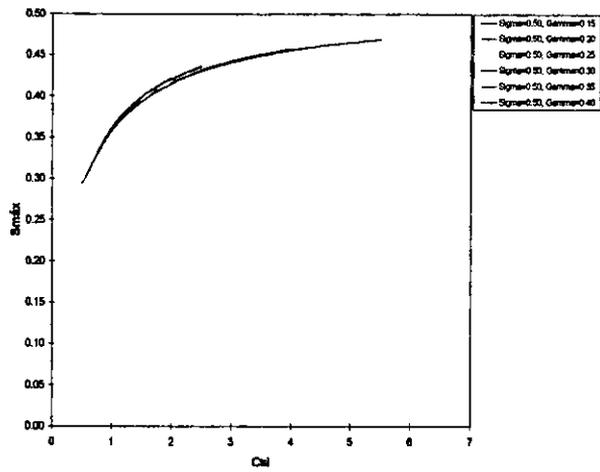
Del análisis de las gráficas, especialmente de las ilustraciones de los bloques 2 y 3, se desprende que el tiempo pico presenta una influencia poco significativa sobre la respuesta del vaso, la cual está descrita por el almacenamiento máximo en el mismo, de tal forma que ésta se puede considerar de importancia nula para los fines prácticos.

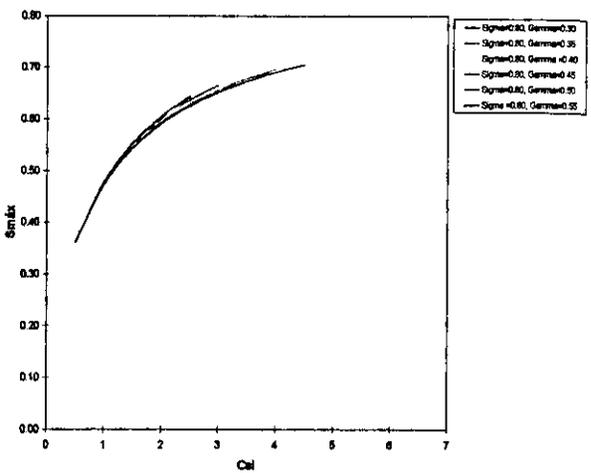
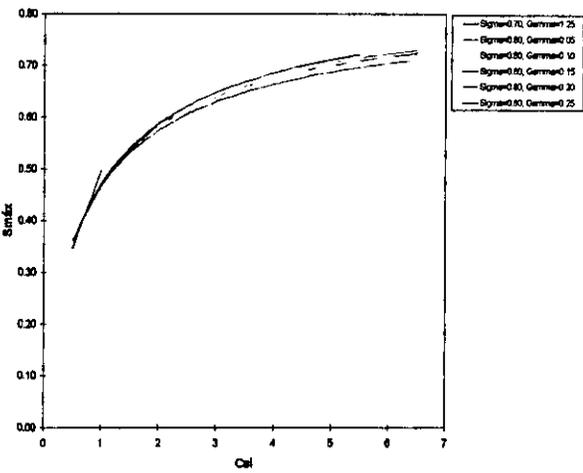
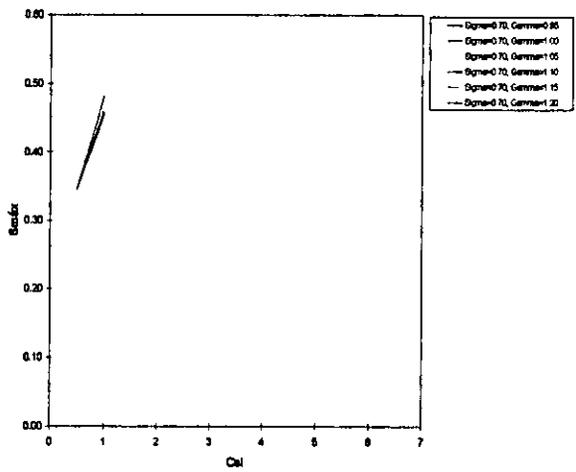
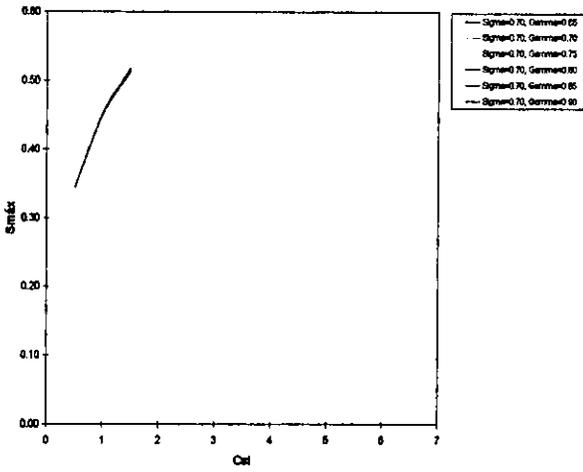
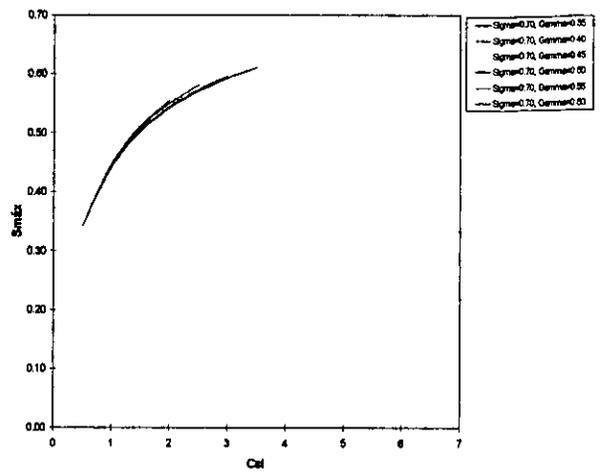
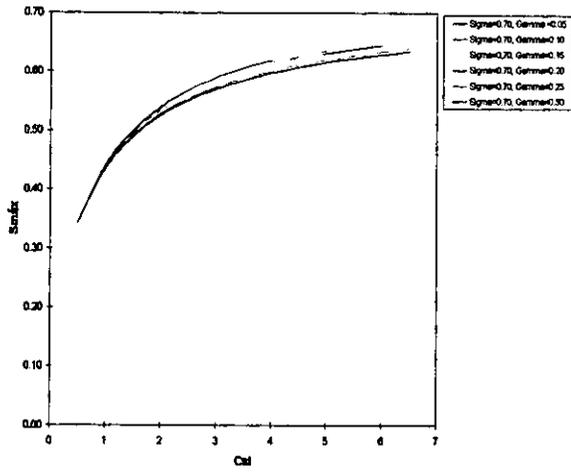
Los resultados del análisis numérico de sensibilidad de vasos a los parámetros del hidrograma de entrada muestran que en una caracterización multivariada del hidrograma, el tiempo al pico puede elegirse arbitrariamente sin gran pérdida de información. Además, parece existir una gran importancia del volumen de escurrimiento en el comportamiento del vaso ante la avenida.

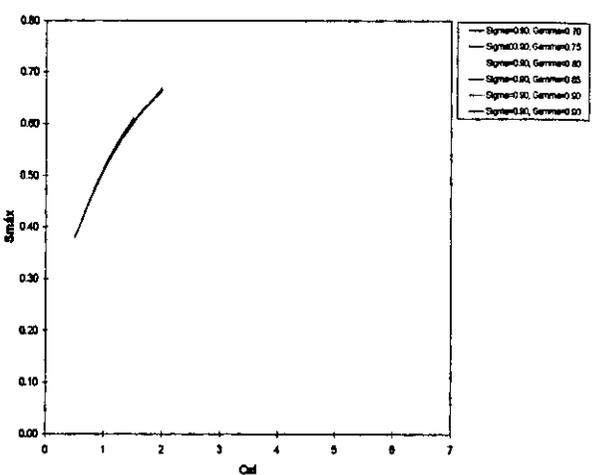
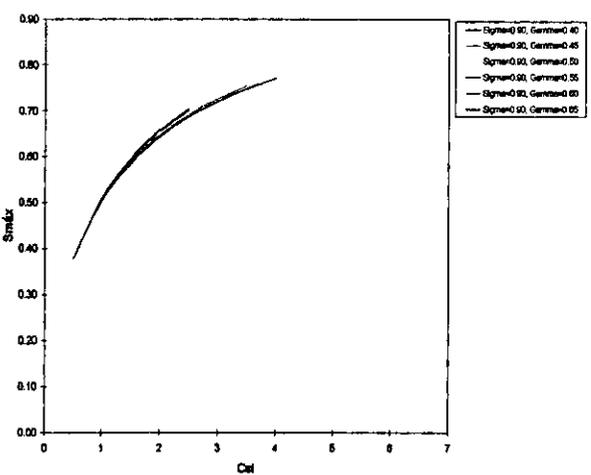
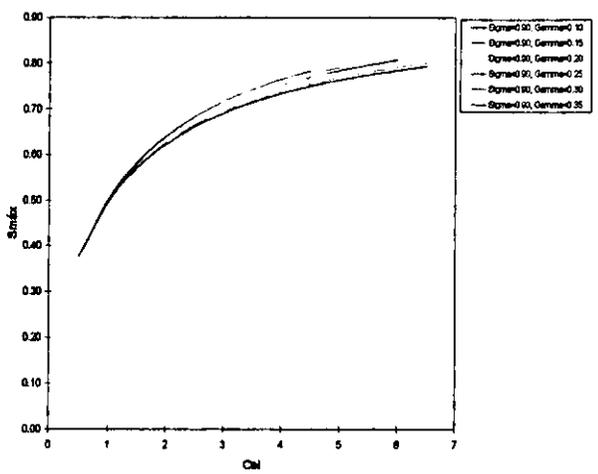
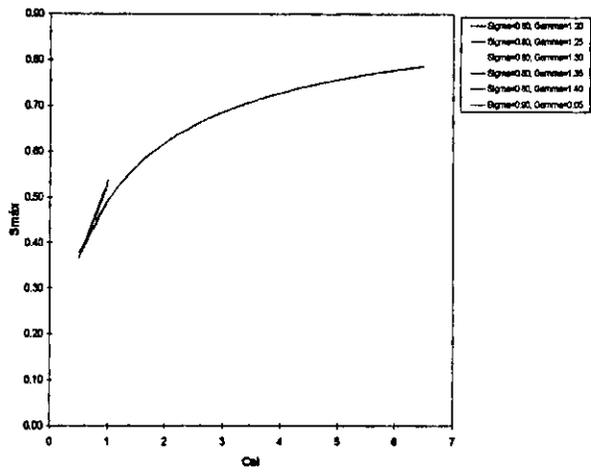
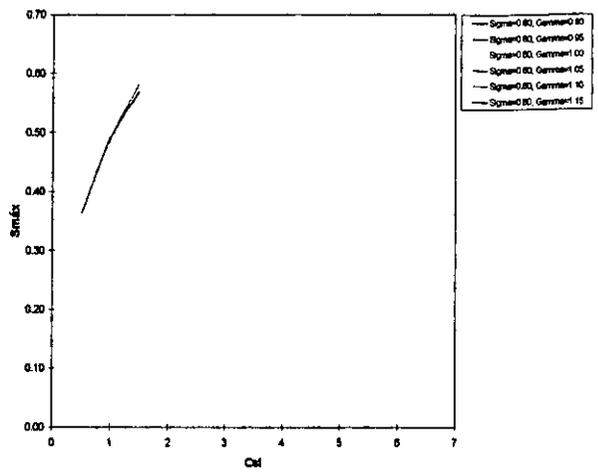
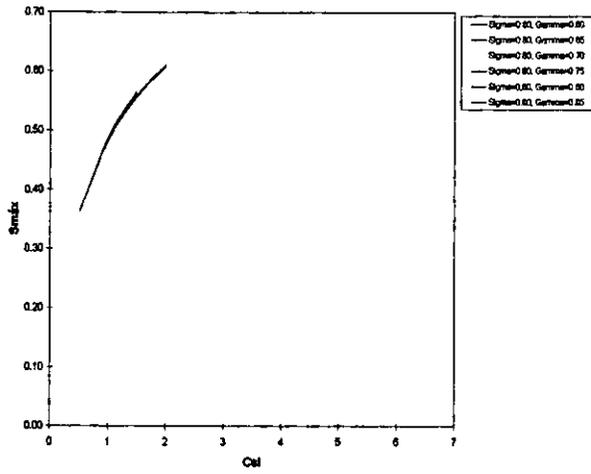
A continuación se presentan las gráficas de variación del almacenamiento máximo adimensional en los tres bloques mencionados.

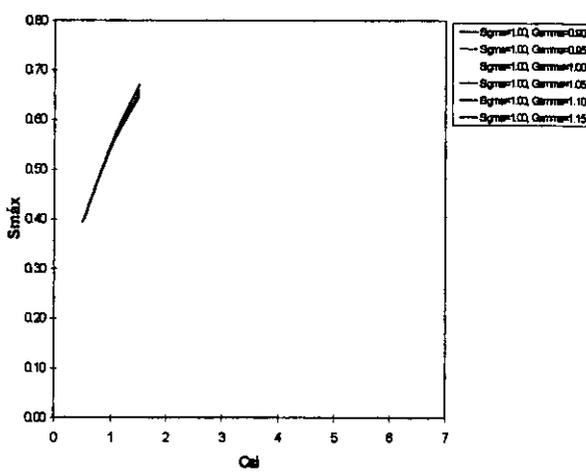
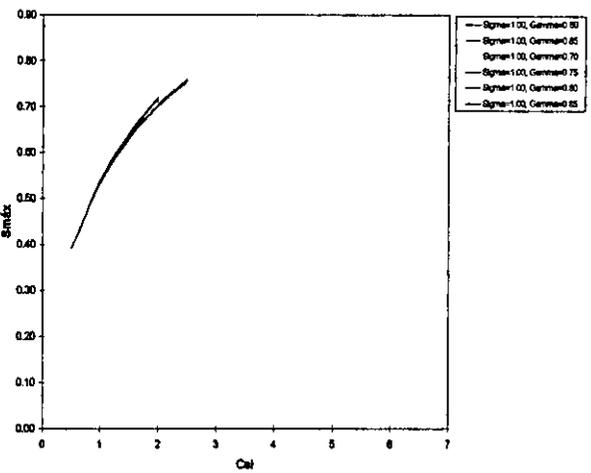
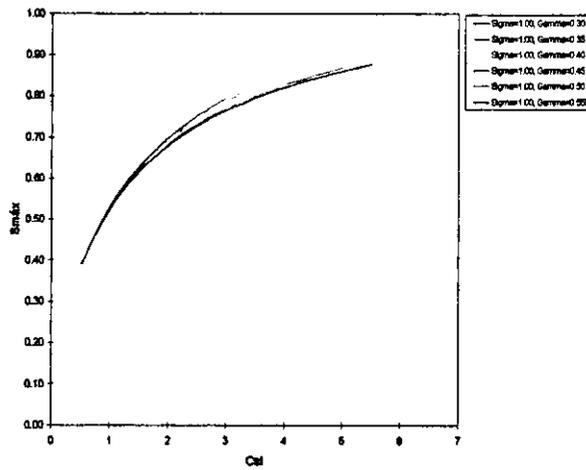
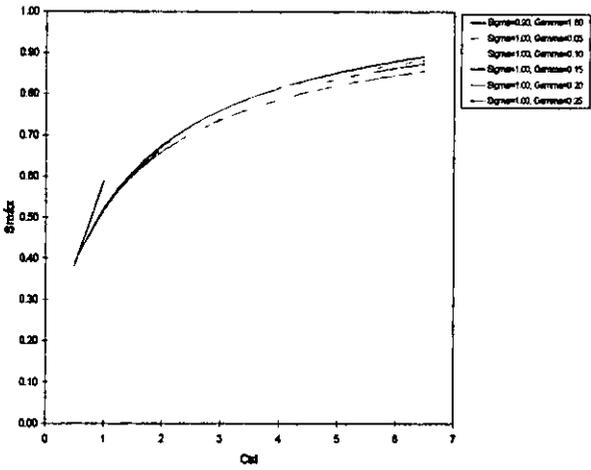
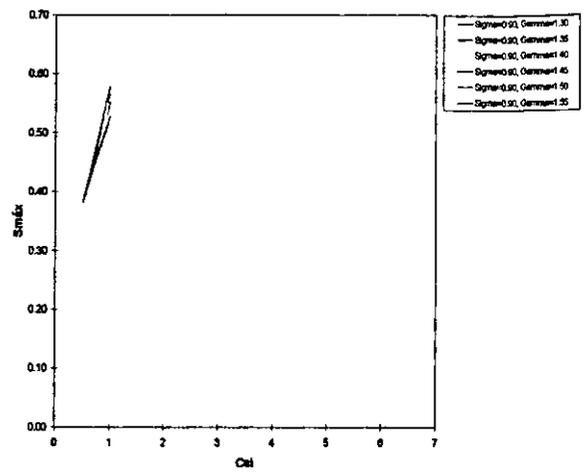
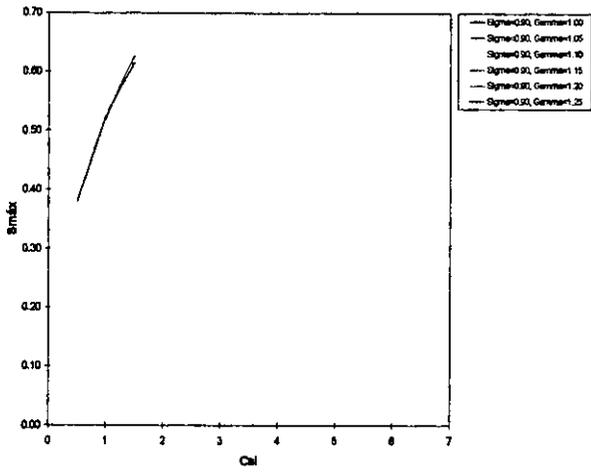
# Bloque 1. Variando el parámetro $\xi$

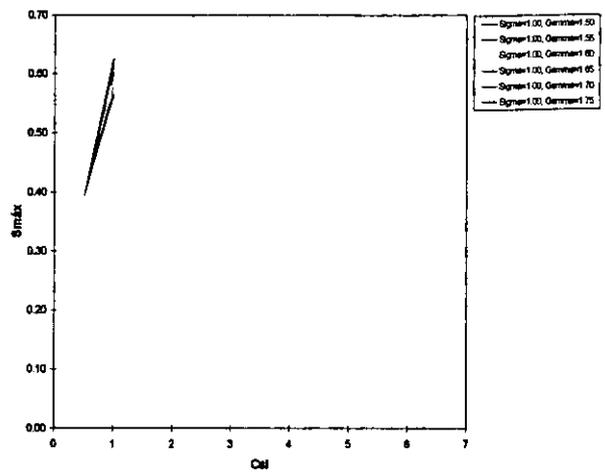
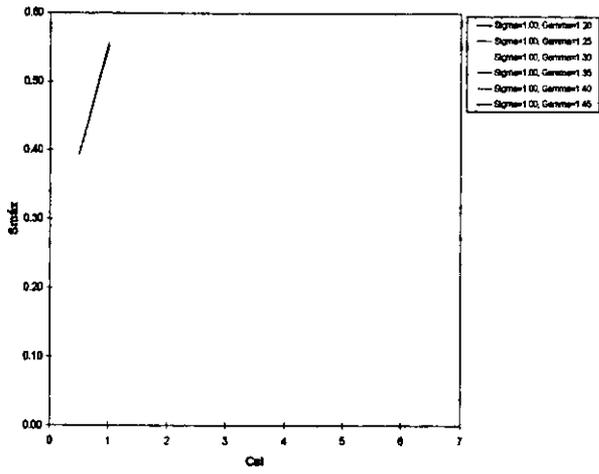




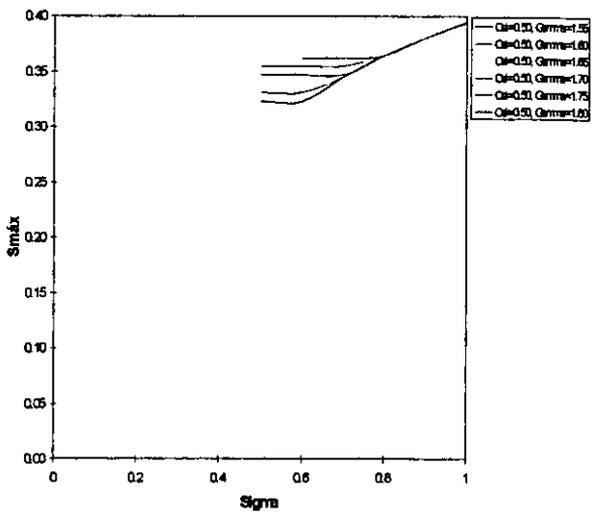
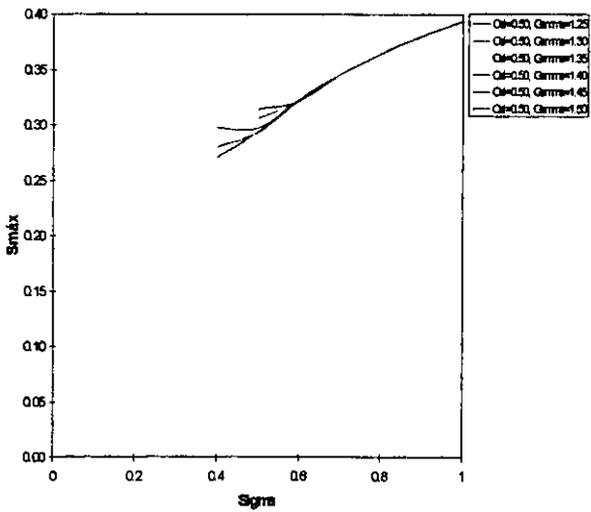
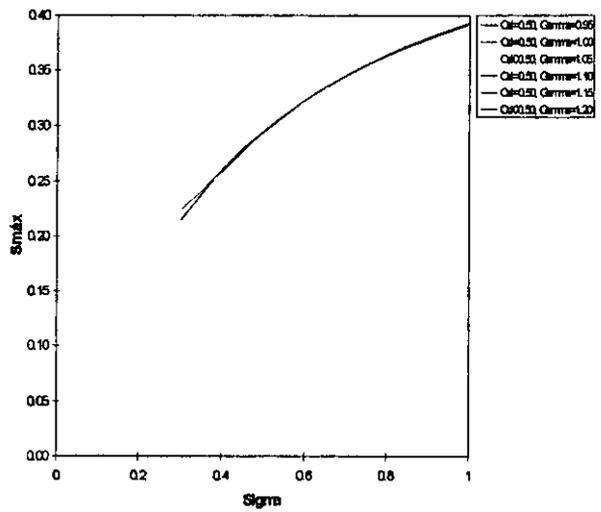
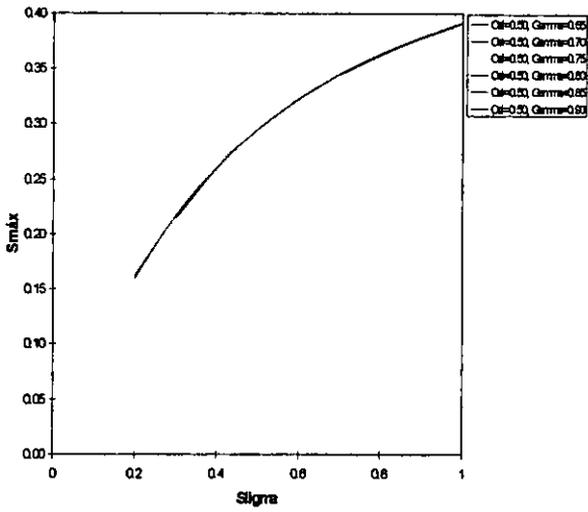
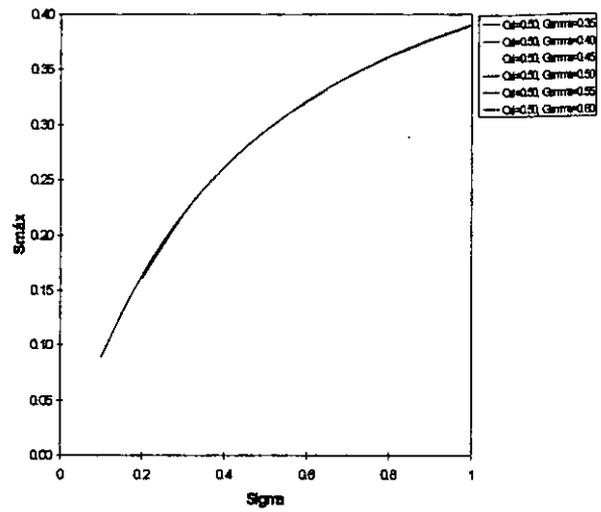
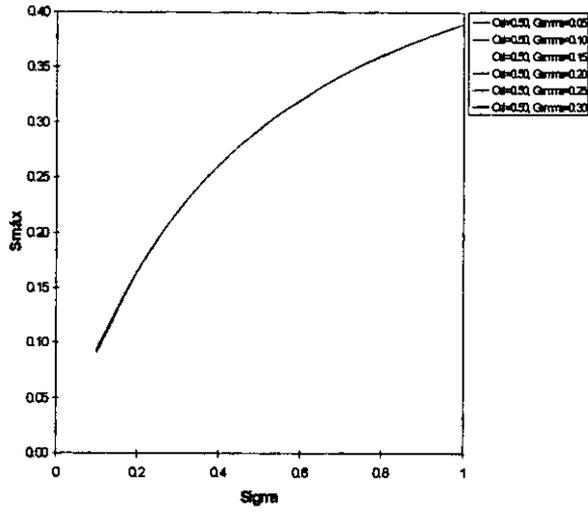


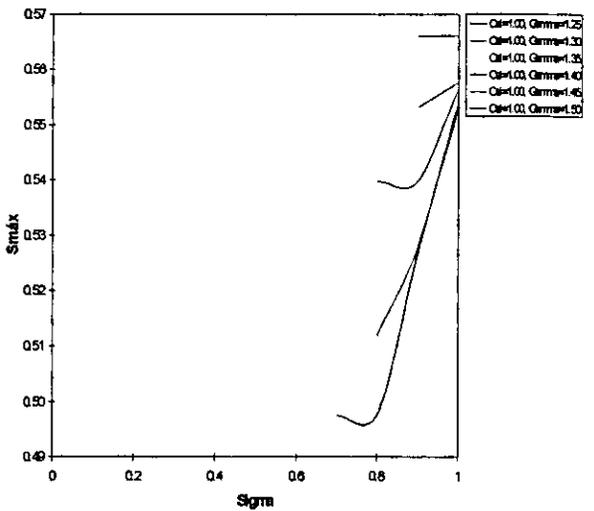
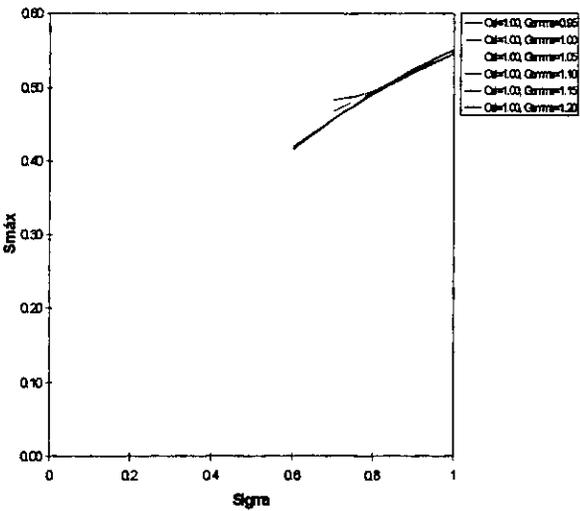
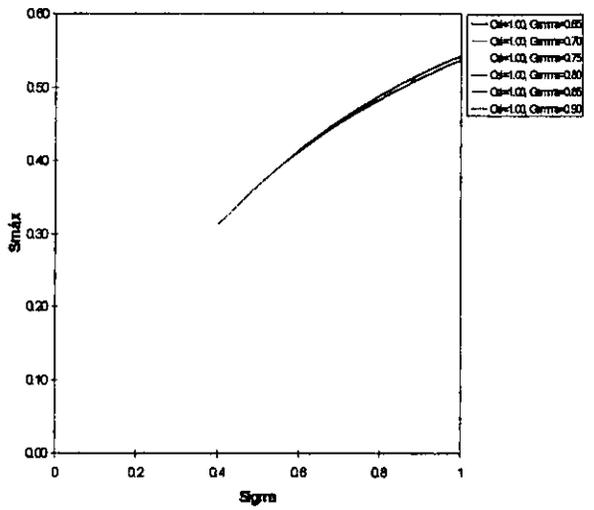
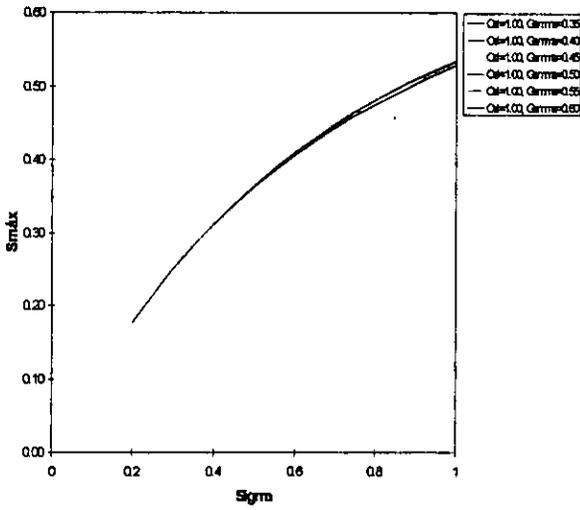
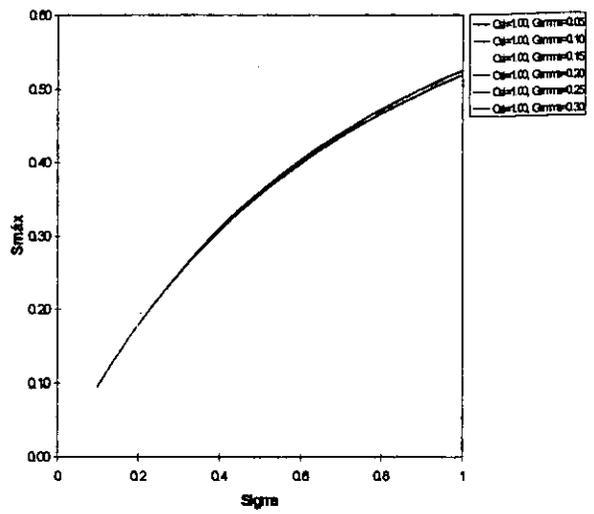
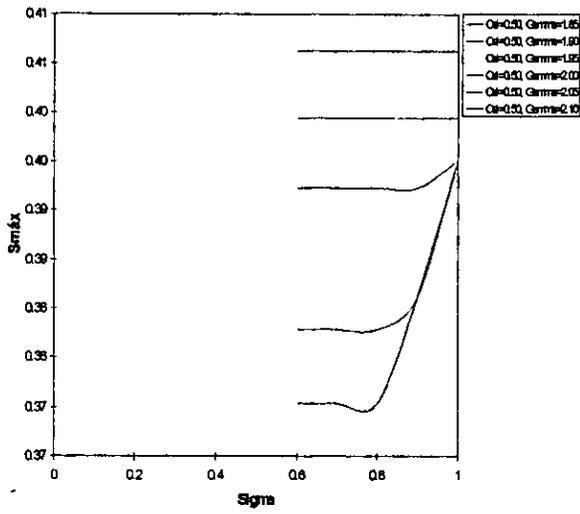


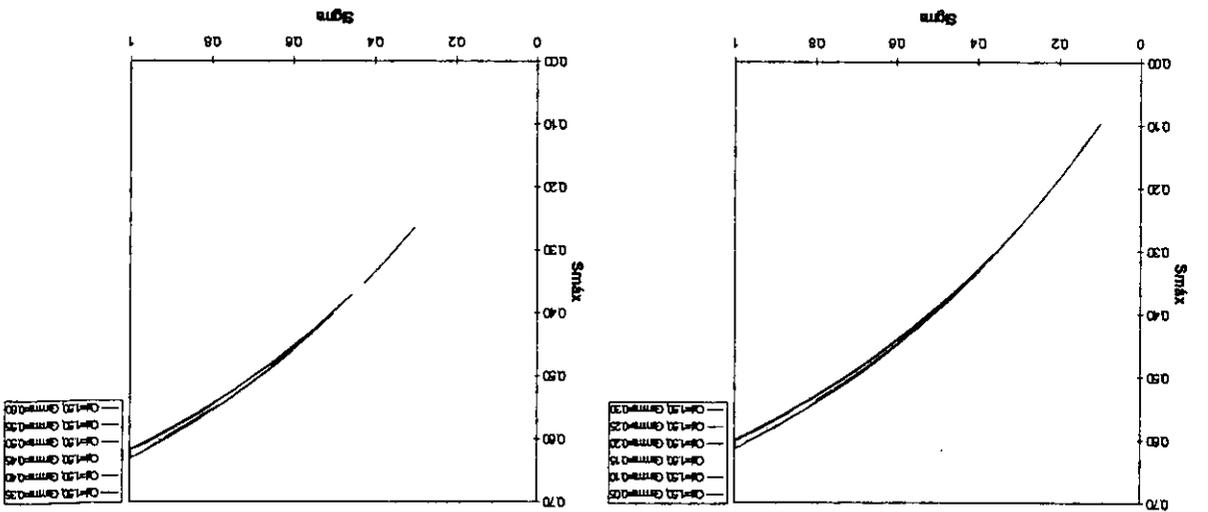
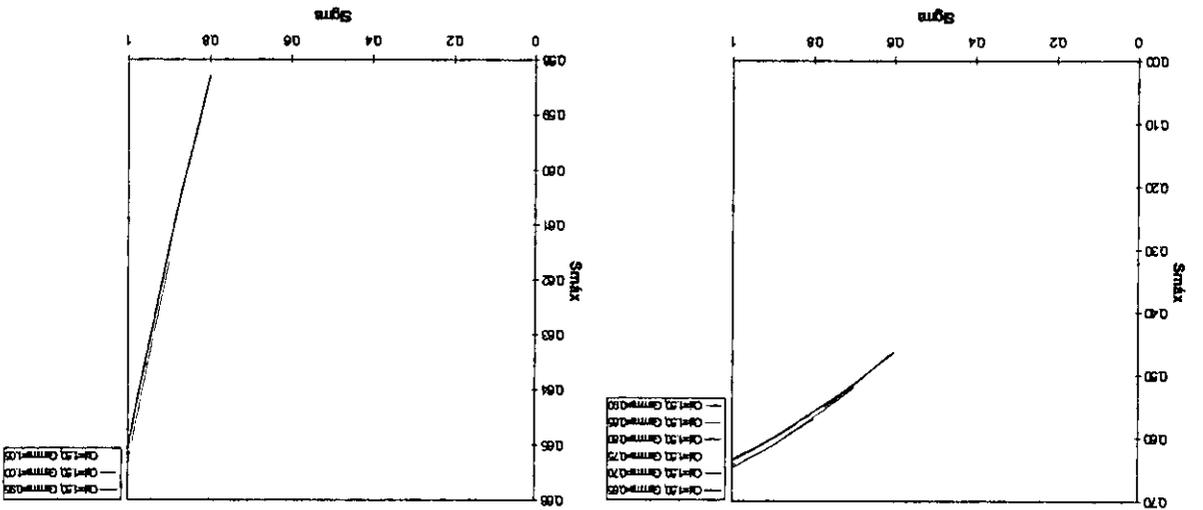
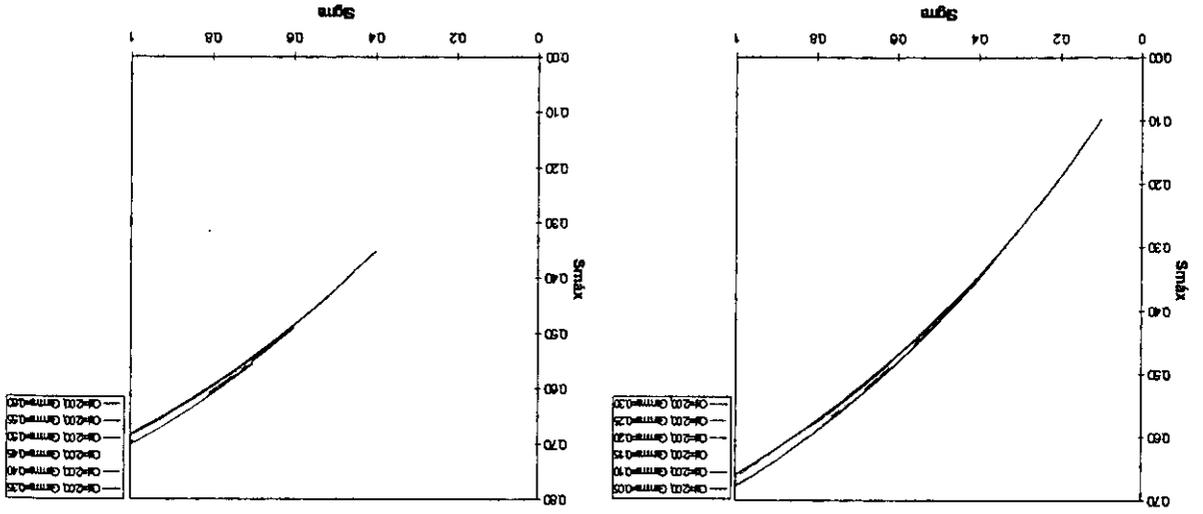


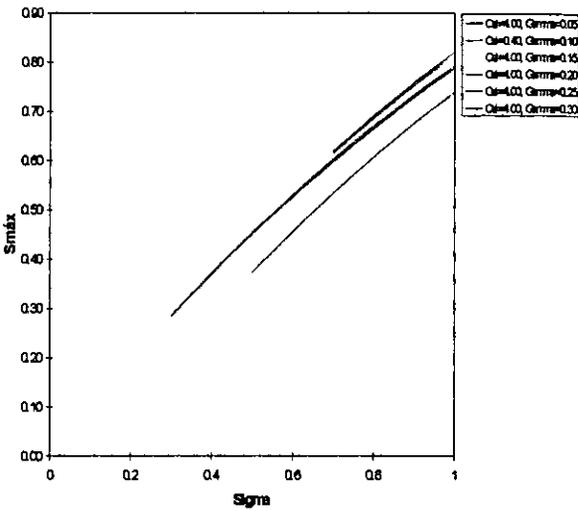
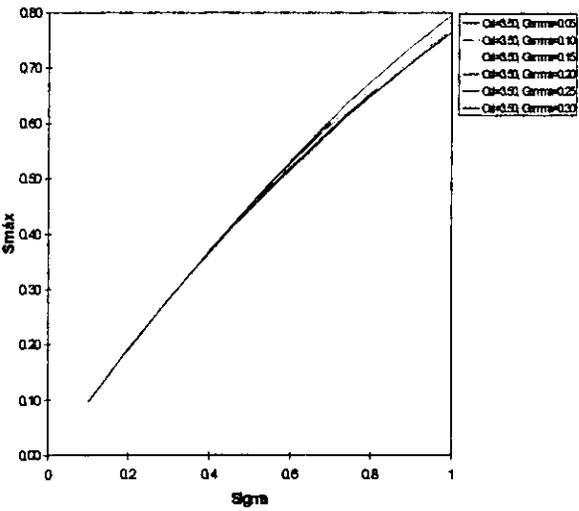
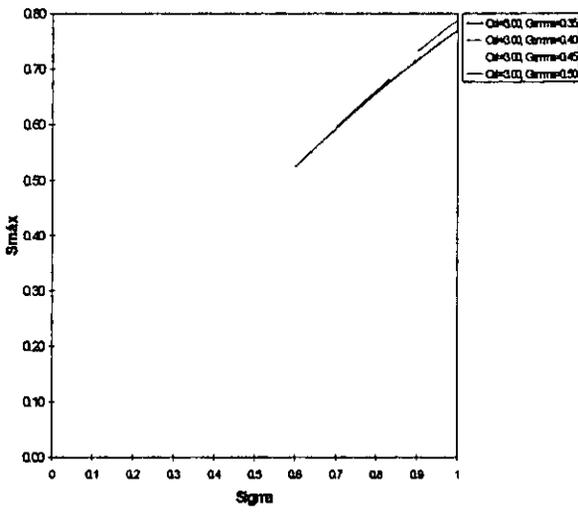
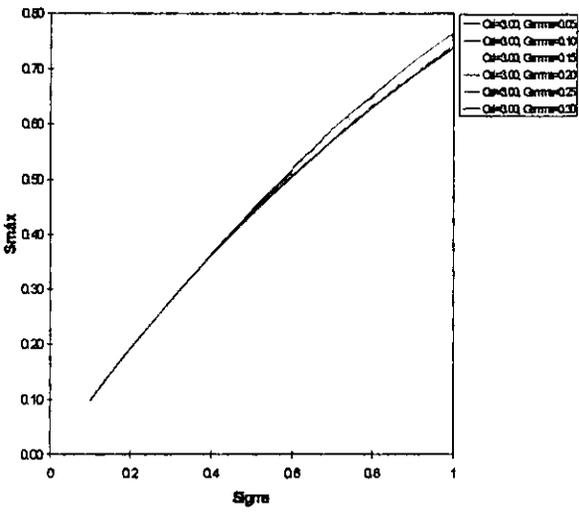
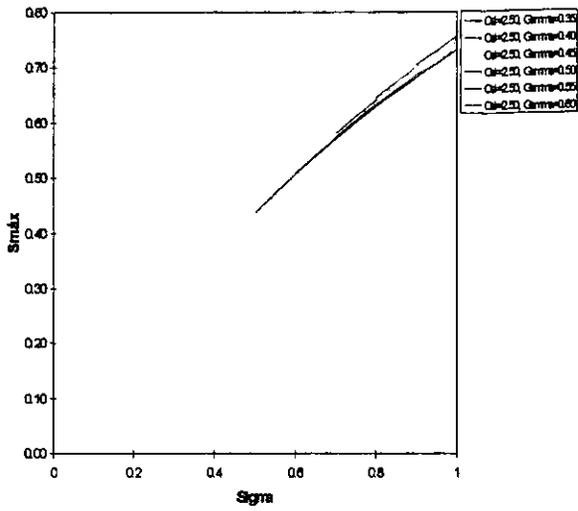
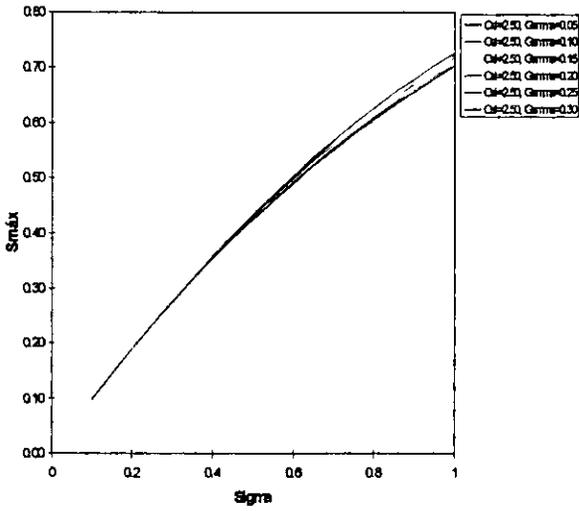


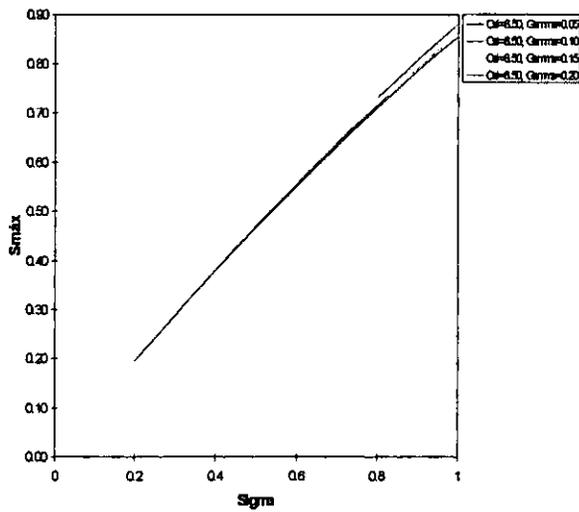
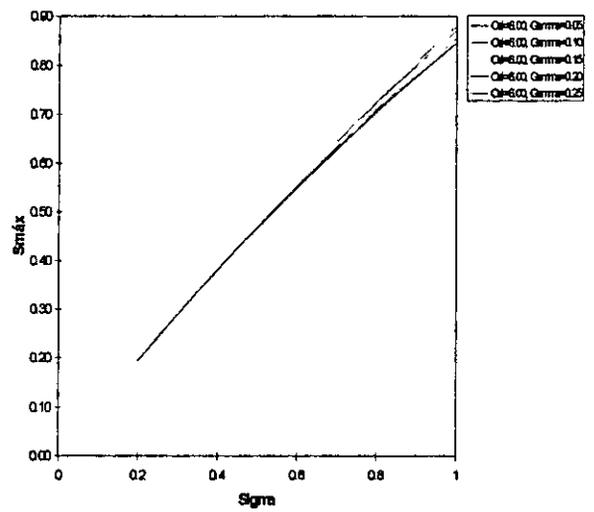
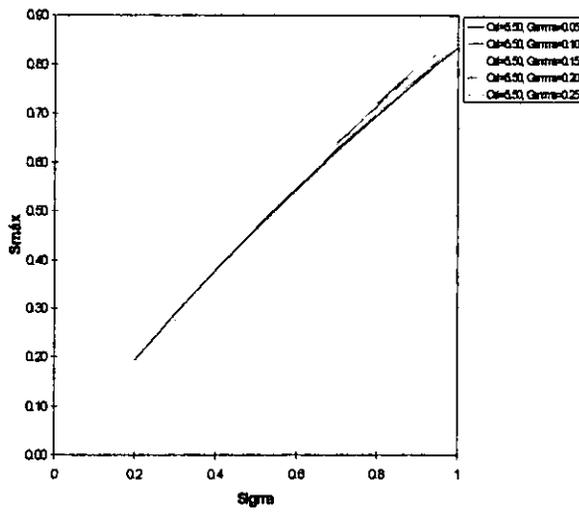
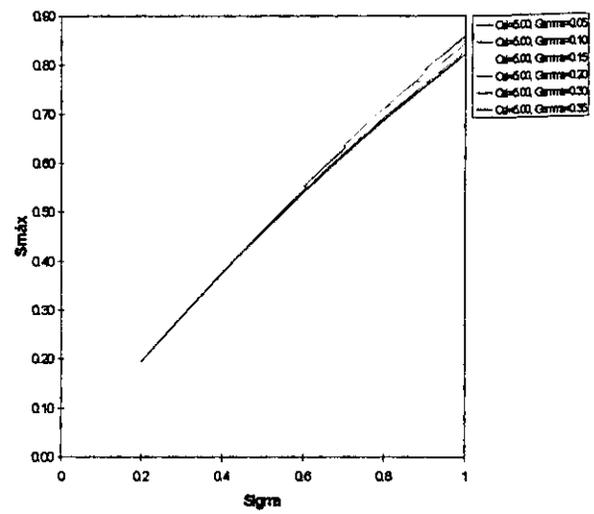
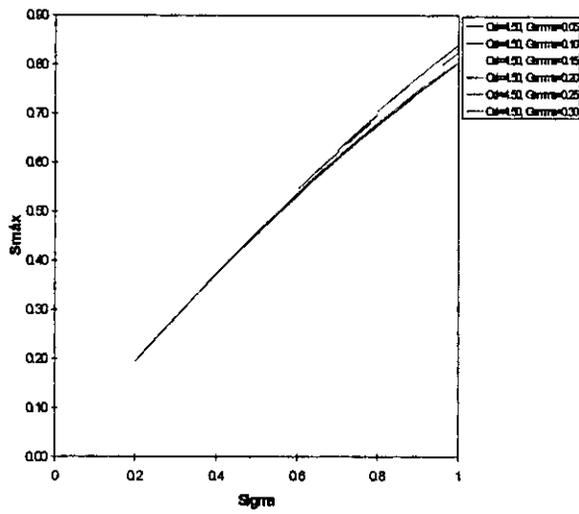
## Bloque 2. Variando el parámetro $\sigma$



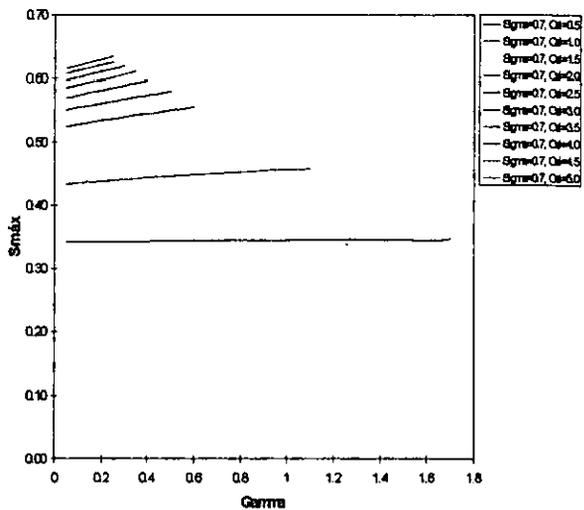
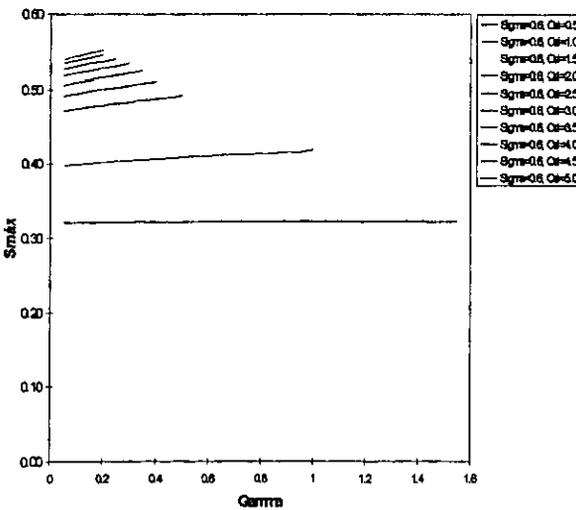
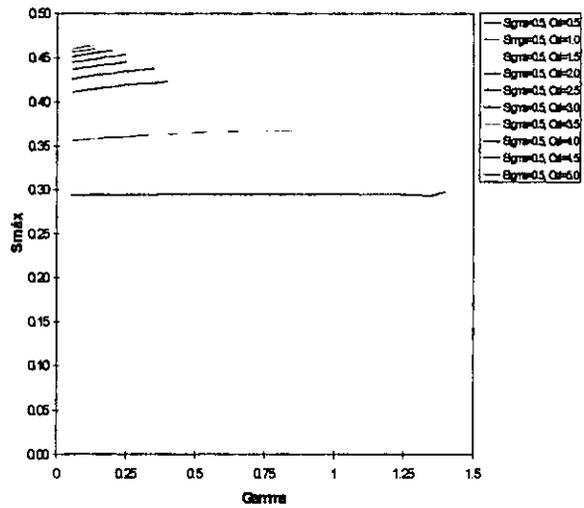
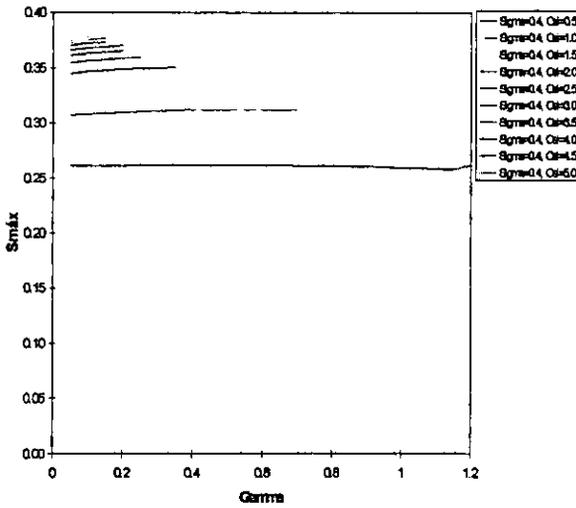
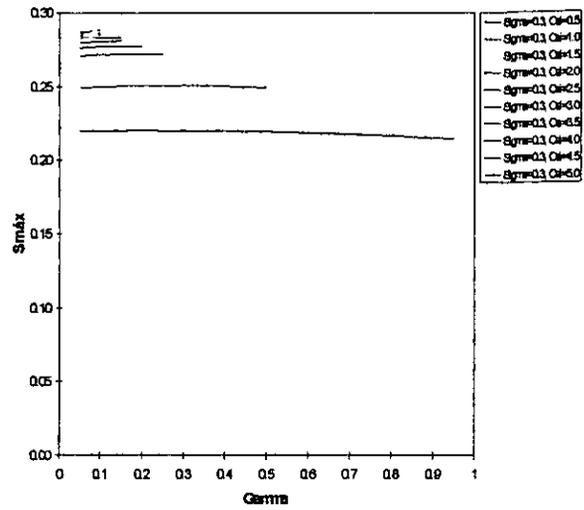
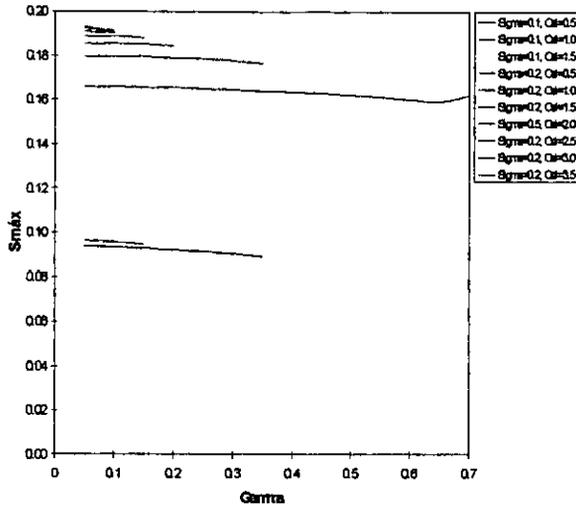


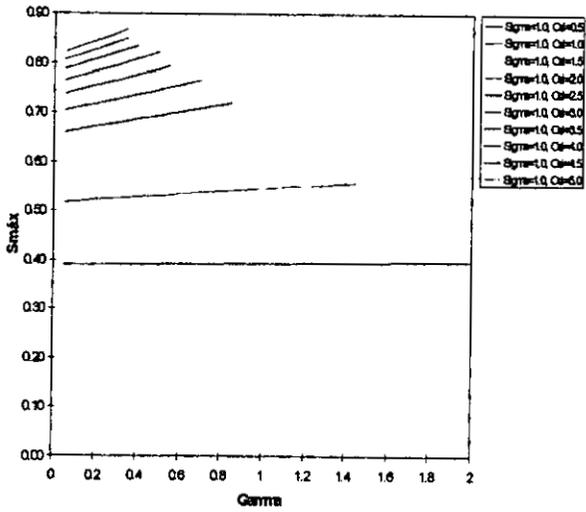
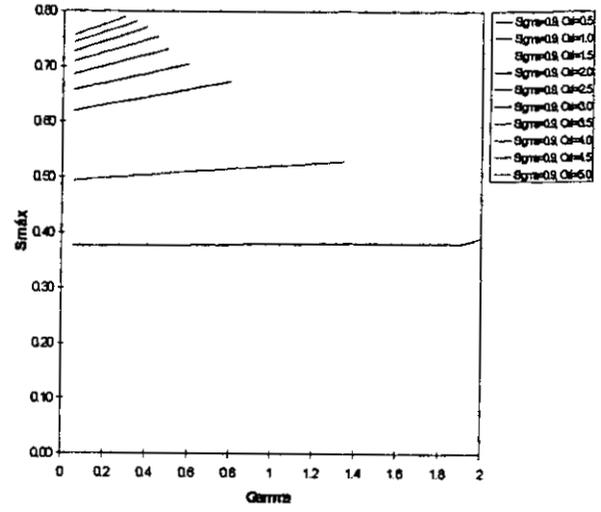
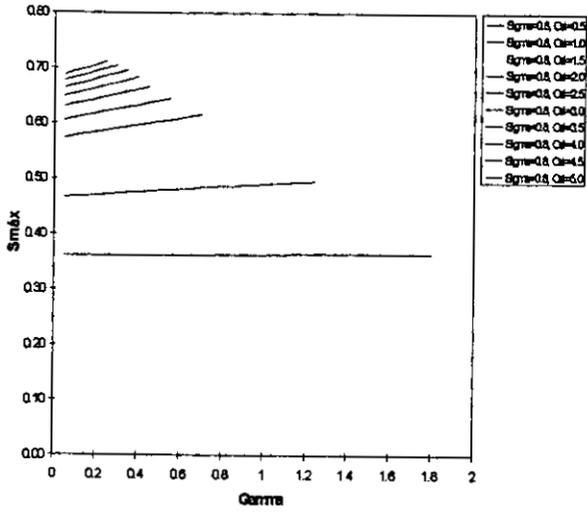






### Bloque 3. Variando el parámetro $\gamma$





*Un científico . . . experimenta en su trabajo la misma impresión que un artista;  
su placer es de la misma magnitud y de la misma naturaleza.*

Henri Poincaré