105

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"ESTRUCTURA INTERTEMPORAL DE TASAS DE INTERÉS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

MARCO ANTONIO RUIZ OLVERA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FAUSTO MEMBRILLO HERNÁNDEZ

2002

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Marco Antonio Ruiz Olvera
FECHA: 19/11/03
FIRMA:

UNIVERSIDAD NACIONAL AVENMA DE MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Estructura Intertemporal de Tasas de Interés"

realizado por Marco Antonio Ruiz Olvera

con número de cuenta 9219118-9 **, quién cubrió los créditos de la carrera de:** Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. FAUSTO MEMBRILLO HERNANDEZ	
Propietario	M. en A.P. MA. DEL PILAR ALONSO REYES	
Propietario	DRA. MA. ASUNCION BEGOÑA FERNANDEZ FERNANDEZ	Begoña Fernández
Suplente	DR. FRANCISCO VENEGAS MARTINEZ	
Suplente	M. en C. JOSE ANTONIO FLORES DIAZ	

Consejo Departamental de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

M. en C. JOSE ANTONIO FLORES DIAZ

A MI FAMILIA

Mi impluso, mi principio y mi fin.

A MIS PADRES

Sabiendo que jamás existirá una forma de agradecer en esta vida de lucha y superación constante, deseo expresarles que mis ideales, esfuerzos y logros han sido también suyos y constituyen el legado más grande que pudiera recibir.

A MI HERMANO

Por su comprensión, apoyo constante y por formar parte de mi vida.

A MIS TÍOS ENRIQUE, YOLANDA, EVA Y LAZLO

Por su ejemplo, apoyo, comprensión y ese inmenso cariño.

A MI ABUELA

Por todo el cariño y apoyo que siempre he recibido

A MI ASESOR DE TESIS

Dr. Fausto Membrillo Hernández

Por su ejemplo, interés y dedicación así como por todas sus enseñanzas.

Al Dr. Francisco Venegas Martínez

Por todo su apoyo e impulso para la realización de este trabajo.

A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

Gracias por abrirme sus puertas y darme la mejor formación profesional posible.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN:

EL PRINCIPIO DEL NO ARBITRAJE Y LA ESTRUCTURA INTERTEMPORAL:

Existen conceptos tales como las tasas spot, las tasas forward y la curva de rendimiento de bonos que se venden a la par, todas estos conceptos son centrales en el análisis de la curva de rendimiento y de la estructura intertemporal. Pero a pesar de la importancia estos conceptos en el análisis de los instrumentos de deuda, no toman en cuenta los factores que determinan los rendimientos.

Además estas tasas no proporcionan un marco para la valuación de los instrumentos de deuda tales como los bonos corporativos y los derivados sobre estos mismos.

DETERMINANTES DE LAS TASAS DE INTERÉS:

Un cierto número de factores determinan las tasas de interés. Se pudiera pensar a las tasas de interés como un modelo sencillo, entonces se concebiría que ellas consisten de dos partes, la primera se derivaría del sector real de la economía y sus factores importantes, serían por ejemplo, la propensión de los inversionistas al ahorro, la productividad de la economía y el desempleo. La segunda parte se derivaría del sector monetario de la economía, y sus factores importantes serían ,la cantidad de dinero circulando en la economía, las políticas monetarias del banco central y los aspectos inflacionarios.

Como primera instancia se analiza el sector real de la economía, una parte importante de este sector es la propensión de los inversionistas al ahorro y el conjunto de oportunidades a las cuales tienen acceso los inversionistas.

LA AVERSIÓN AL RIESGO POR PARTE DE LOS INVERSIONISTAS:

En los modelos económicos donde se analiza la voluntad del inversionista para aceptar el riesgo, el concepto de función de utilidad se utiliza casi siempre. En su forma mas simple se podría decir que ,un inversionista que es adverso al riesgo prefiere tener más riqueza con menor riesgo, por lo que, cada unidad adicional de riqueza provee un menor incremento de utilidad. Un inversionista que es neutral al riesgo, prefiere más riqueza con menor riesgo pero en este caso, cada unidad adicional de riqueza provee una unidad constante de utilidad. Un inversionista que es amante del riesgo, también prefiere más riqueza pero, cada unidad adicional de riqueza provee un mayor incremento adicional en la utilidad con un mayor riesgo.

El concepto de funciones de utilidad, permite formalizar la relación entre riesgo y rendimiento. Y en particular esto es importante en la determinación de los cupones. Cuando los inversionistas compran instrumentos de inversión ellos están ahorrando, y al hacerlo están posponiendo un consumo actual teniendo la esperanza de incrementar el consumo futuro. Este intercambio implica que las futuras distribuciones de los flujos de efectivo en las instrumentos de inversión serán evaluadas por los consumidores usando sus utilidades marginales para analizar el consumo actual y el futuro.

TASA REAL DE INTERÉS:

Enfoquémonos en los determinantes de la tasa real de interés. En una economía sin oportunidades de obtener ni de hacer un préstamo, la tasa real de interés es determinada por las oportunidades de inversión y las preferencias de los inversionistas por el ahorro o el consumo.

Se asume que un inversionista tiene en la fecha 0 una riqueza Wo, si invierte parte de su riqueza, este es capaz de transformar la riqueza actual en una riqueza futura, y esta a su vez en un consumo futuro. Entonces si el inversionista coloca una cierta inversión I, consume Wo - I en la fecha 0 y es capaz de hacer un consumo igual a F(I) en la fecha 1, donde F(I) es la producción asociada con la inversión de I unidades en la fecha 0, entonces el nivel óptimo de inversión es determinado por lo propenso que es un inversionista al ahorro; entre mayor sea la paciencia del inversionista, más será ahorrado para invertirlo en un consumo futuro.

Sí $U(c_0, c_1)$ es la función de utilidad para consumos actuales y futuros, estos denotados por c_0 y c_1 respectivamente, entonces la decisión óptima de inversión aparecería de la siguiente manera:

$$\max_{c_0, c1} U(c_0, c_1)$$

sujeta a

$$c_0 = Wo - I$$

y

$$c1 = F(I)$$

La estrategia óptima de inversión I* está dada por:

$$f'(I) = \frac{\frac{\partial U}{\partial c_0}}{\frac{\partial U}{\partial c_1}} = \frac{dc_1}{dc_2}$$

Note que la tasa marginal de rendimiento de la inversión dF(I) es igual a la tasa marginal de substitución entre el consumo actual y el futuro. Entonces las oportunidades de inversión y la tendencia al ahorro interactuán para determinar el nivel óptimo de inversión. Cuando se puede hablar de certeza, la tasa marginal de rendimiento debe ser también la tasa real de rendimiento 1+R. De lo anterior dos relaciones intuitivas emergen:

- Entre más productivo sea el conjunto de oportunidades de inversión, mayor será la tasa real de interés.
- Entre más grande sea la tendencia para ahorrar, más baja será la tasa real de interés.

Una de las características importantes de este análisis es que las decisiones de inversión y de consumo están fuertemente atadas debido a que la inversión en el conjunto de oportunidades de producción es la única manera de ahorrar.

Pero ,¿Que pasaría si oportunidades para obtener y hacer préstamos sin riesgo se permitieran como una opción adicional al conjunto de oportunidades de inversión en producción?

Nótese que el bienestar del inversionista se ha mejorado en está nueva situación ya que el consumo puede ser transferido de una fecha a otra de dos maneras distintas.

Además de poder usar la tecnología disponible para producir, el inversionista también puede hacer o recibir préstamos a una tasa R.

En esta nueva situación se puede pensar que el inversionista está haciendo una inversión I en la tecnología parar producir de tal forma que:

$$F'(I) = 1+R.$$

Con la disminución de los rendimientos marginales a una cierta escala, la inversión puede ser traída a un nivel donde los rendimientos marginales son exactamente igual que una tasa sin riesgo. El valor presente de lo invertido (Wo - I , F'(I)) está dado por:

$$VP = Wo - I + \frac{f(I)}{1+R}$$

Ahora el inversionista puede escoger cualquier par de objetos de consumo que satisfagan (c_0, c_1):

$$VP = c_0 + \frac{c_1}{1+R}$$

En otras palabras cualquier par de objetos de consumo tiene el mismo valor presente, si el valor presente de estos puede ser consumido por el inversionista, el par específico de objetos dependerá de la elección del inversionista. Una importante característica de este análisis es que la decisión óptima de inversión I* es independiente de la decisión de consumo. Este resultado es conocido como el resultado de separación de Fisher.

Nótese que la tasa real de rendimiento depende de un cierto número de factores , tales como, los ahorros y la productividad (tasa marginal de rendimiento) de la economía. En general, se puede denotar la tasa de interés real como R(x) donde x es un vector de factores que podrián influenciar la tasa real de interés.

Cabe mencionar que mientras las tasas de interés reales cambian a través del tiempo dependiendo de la evolución de factores relevantes a estas, la volatilidad de las tasas de interés reales es generalmente baja.

TASAS DE INTERÉS NOMINALES:

Mientras que la tasa real de interés es un importante concepto económico, en muchos mercados se centran en la tasa de interés nominal, esto debido al hecho de que la mayoría de las transacciones económicas ocurren en términos de la moneda local, esta tasa para la moneda local es de gran importancia para los inversionistas en el mercado de capitales. La tasa nominal de interés difiere de la tasa real debido a la inflación.

El riesgo de inflación es primeramente debido al hecho de que el precio futuro de un artículo que esta denominado en moneda local podría diferir de su precio actual. Muchos factores tales como oferta y la demanda del dinero influyen a la inflación. Denotando a P(y) como el nivel del precio donde y es el vector de factores que podrían depende de ambos factores (x,y). En general ambos factores pueden estar correlacionados el uno con el otro y las propiedades de sus correlaciones podrían ser importantes en la determinación de la tasa de interés nomina[1].

También es posible que algunos de los factores de x también sean factores de y; entonces se tendría que factores que influyen la tasa real también podrían tener efectos sobre la tasa nominal y viceversa.

Una interacción de este tipo fue sugerida por Mundell (1963), quien afirmaba que un incremento en el riesgo inflacionario podría hacer que los instrumentos financieros denominados con tasas nominales perdieran su valor y por lo tanto esto forzaría a los inversionistas a ahorrar más para así compensar la perdida de valor de sus ahorros debido al incremento en la inflación.

Intuitivamente se espera que los factores que determinan el nivel del precio induzcan mucha más volatilidad en las tasas nominales que los factores que determinan las tasas reales de interés.

La relación entre las tasas reales y las nominales se conoce como el efecto Fisher y ha sido el centro de mucho del trabajo empírico realizado alrededor de las tasas de interés. La premisa básica detrás de esta relación es la noción de que el inversionista requerirá de una compensación por el riesgo inflacionario para así mantener los instrumentos cuyos rendimientos son basados en tasas nominales.

Suponga que, el nivel del precio en el fecha t es p_t y en la fecha T>t será $\tilde{p}_T$. Entonces la tasa de inflación entre las fechas t y T está definida de la siguiente manera:

$$\tilde{\pi} = \frac{\tilde{p}_T}{p_t} - 1$$

Nótese que el nivel del precio en la fecha T es incierto. Y como consecuencia la tasa de inflación también es incierta.

Por ejemplo el poseedor de un cete en la fecha t tendrà un rendimiento nominal de:

$$r_t = \frac{10}{b_t} - 1$$

Donde b_t es el precio nominal del cete en la fecha t. El precio real del cete en la fecha t es $\frac{b_t}{p_t}$ y el valor real por lo invertido, que se va ha recibir en la fecha T es $\frac{10}{p_t}$

Entonces la tasa real de rendimiento $\tilde{R}_t$ es:

$$\tilde{R}_t = \frac{\frac{10}{p_T}}{\frac{b_t}{p_t}} - 1$$

Recordando que $1+\tilde{\pi} = \frac{p_T}{p_t}$ y que $1+r_t = \frac{10}{b_t}$ nosotros podemos obtener la tasa real de rendimiento de la siguiente manera:

$$1+ r_t = (1+\tilde{R}_t) * (1+\tilde{\pi}_t).$$

La tasa de inflación dependiente del nivel del precio en la fecha T introduce un elemento de incertidumbre en la tasa real de rendimiento. Al reescribir la ecuación anterior y simplificándola se tiene:

$$1 + r_t = 1 + \tilde{R}_t + \tilde{\pi}_t + \tilde{R}_t \tilde{\pi}_t$$

Tomando su valor esperado, se obtiene la relación entre la tasa nominal de interés y el valor esperado de la tasa real de interés:

$$r_t = E[\tilde{R}_t] + E[\tilde{\pi}_t] + E[\tilde{R}_t \tilde{\pi}_t]$$

Recordando que la esperanza del producto de dos variables aleatorias es la suma del producto de sus esperanzas con la covarianza de estas mismas tenemos que:

$$E[\tilde{R}_t \tilde{\pi}_t] = E[\tilde{R}_t] E[\tilde{\pi}_t] + COV[\tilde{R}_t \tilde{\pi}_t]$$

Usando la fórmula anterior y simplificando se obtiene:

$$E_t[R_t] = \frac{r_t - E_t[\tilde{\pi}_t] - COV[R_t \pi_t]}{1 + E_t[\pi_t]}$$

Nótese que la tasa real de rendimiento esperada asociada con la tendencia de un instrumento con tasa nominal, como un cete, depende de la covarianza entre la tasa real de rendimiento y la tasa de inflación.

Ignorando los efectos de segundo orden, se puede escribir:

$$E_t[R_t] = r_t - E_t[\pi_t]$$

Este es el efecto de Fisher el cual relaciona tasas nominales de interés, tasas reales esperadas y la tasa de inflación esperada. Nótese que sí las tasas reales no varían demasiado entonces los cambios en la tasa de inflación esperada son completamente asimilados por los cambios en las tasas nominales de interés. Pero si los cambios en la tasa esperada de inflación afectan a la actividad real tal, como las inversiones, estos también podrían afectar las tasas reales.

Considerando los efectos de los impuestos en la relación de Fisher, mencionamos a Darby (1975) sugirió que los efectos de los impuestos(ignorando los efectos de segundo orden) modificarían la relación de la siguiente manera:

$$E_t[R_t] = r_t * (1-\tau) - E_t[\pi_t]$$

Donde τ es el impuesto. La clave de los efectos de los impuestos bajo la teoría de Darby es que, la tasa nominal se vuelve más elástica a un cambio dado en la tasa real.

Se hicieron muchas pruebas a través del tiempo para comprobar si el efecto de Fisher realmente se daba en la realidad. Dos publicaciones han sido de gran importancia la de Fama(1975) y la de Fama y Gibbons(1982).

Fama (1975)prueba la presencia del efecto de Fisher, mediante una regresión que involucra la tasa nominal de interés y a la tasa de inflación:

$$\pi_t = a_0 + a_1 r_t + \varepsilon_t$$

Donde π_t es la tasa de inflación ,r_t es la tasa nominal de interés, y ε es el error en la regresión. Fama empieza con la ecuación de Fisher $E_t[R_t] = r_t - E_t[\pi_t]$ pero el asume que las tasas reales son constantes. Luego entonces la tasa de inflación π_t debe de ser la inflación esperada $E_t[\pi_t]$ más una cierta cantidad de ruido, ε_t .

Nòtese que bajo el efecto de Fisher el coeficiente de la tasa nominal r_t el cual es a_1 debería ser igual a 1. Adicionalmente a_0 debería ser negativo. Fama comprueba estas dos hipótesis y encuentra que el efecto de Fisher no puede ser descartado.

En una publicación posterior Fama y Gibbons (1982) encuentran evidencias de que las tasas reales fluctúan con los niveles de la actividad real en la economía.

1. DESARROLLO TEORICO DE LA ESTRUCTURA DEL PLAZO DE LAS TASAS DE INTERÉS
(The term structure of interest rates.)

Cuando se habla de modelos como el CAPM (capital asset pricing model) o el APT (arbitrage pricing theory) es porque se está interesado en la relación que existe entre el riesgo de un instrumento y la tasa de rendimiento que este provee a los inversionistas en general. Y a esta relación se le puede llamar "la estructura del riesgo de las tasas de interés".

Pero de lo que estará hablando en este trabajo es de la estructura del plazo de las tasas de interés(la estructura de los rendimientos de las tasas de interés durante un cierto plazo) o como también se le podría llamar "la relación entre el plazo de vencimiento de un instrumento, en este caso un bono, y su rendimiento al vencimiento de este mismo plazo".

Considerando que el rendimiento al final del plazo o rendimiento a la madurez de este instrumento es la tasa promedio de rendimiento que un inversionista obtendría ,si este se quedará con el bono, desde el momento de su adquisición y hasta su fecha de vencimiento, considerando además que no hubiese problemas de ninguna índole en el pago de los cupones o rendimientos prometidos.

El plazo a la madurez es el número de días o años que transcurren hasta el último pago o cupón prometido.

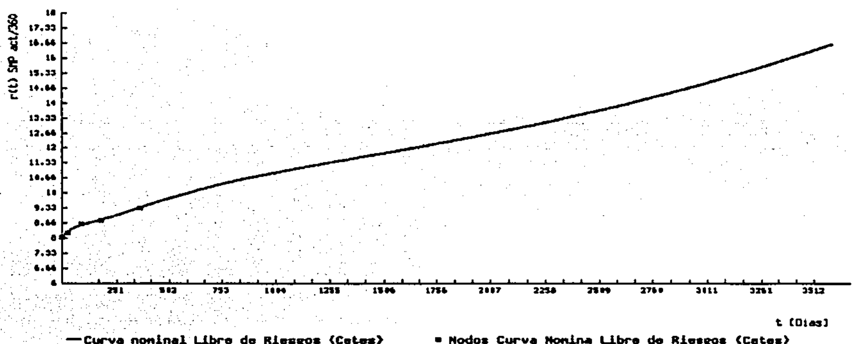
1.1 LA NATURALEZA E HISTORIA DE LA ESTRUCTURA DEL PLAZO:

La estructura del plazo de las tasas de interés usualmente es graficada para bonos con una cierta calidad uniforme con respecto a su riesgo implícito y con respecto a su gravamen fiscal. La estructura del plazo de las tasas de interés es graficada para una cierta fecha en el tiempo, siendo que cada punto de la gráfica muestra el rendimiento a la madurez y el plazo a la madurez para un cierto bono.

Entonces se tiene que la gráfica de la estructura del plazo de las tasas de interés representa la relación entre el rendimiento a la madurez y el plazo de madurez.

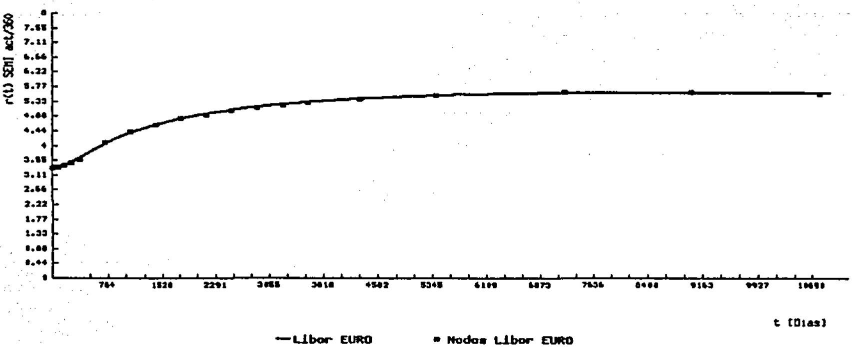
La forma de la estructura del plazo cambia dramáticamente con el transcurso del tiempo.

México D.F., a 11 de Febrero de 2002



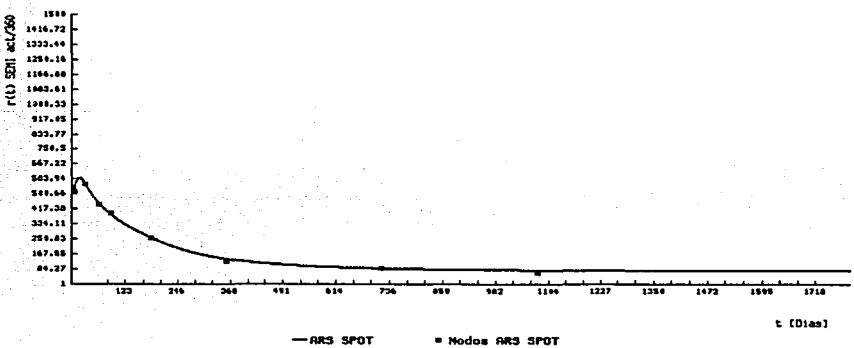
Generalmente o casi siempre, la curva de la estructura al plazo de las tasas de interés tiende a ser creciente a través del tiempo y esto se da porque los rendimientos a largo plazo casi siempre son más altos que los rendimientos a corto plazo en cualquier instrumento.

México D.F., a 11 de Febrero de 2002



Pero no es imposible que la curva de la estructura del plazo de las tasas de interés sea decreciente ya que esto se puede deber a:

México D.F., a 11 de Febrero de 2002



- Lo que se podría llamar liquidity premiums en los rendimientos esperados de un cierto tipo de bono(cupones).
- Simplemente puede reflejar el hecho de que el mercado por una cierta razón anticipa la tendencia hacia arriba del nivel general de las tasas de interés de un cierto periodo.
- Las grandes expectativas del mercado entorno a las bajas en las tasas de interés ,lo cual provocaría que los precios de los instrumentos a largo plazo se incrementaran.

1.2 METODOS PARA CALCULAR EL RENDIMIENTO A LA MADUREZ:

El rendimiento a la madurez es, la tasa de rendimiento anual promedio, prometida durante la vida del bono. Existen tres métodos para calcular la tasa de rendimiento anual promedio, y cada uno de ellos tiene sus propias afirmaciones acerca de lo que se hace con las ganancias que se obtienen a lo largo de la inversión.

LA MEDIA ARITMETICA DEL RENDIMIENTO A LA MADUREZ:

Con este método, primero se estiman las tasas de rendimiento anuales esperadas, que producirá el bono durante cada uno de sus años de vigencia. Sí el interés es pagado al final de cada año, la tasa de rendimiento, en cualquier año, es igual a la suma de los intereses pagados anualmente y el cambio de precio del bono en el transcurso del año ,todo esto dividido por el precio de mercado del bono al principio del año.

Para obtener la media aritmética del rendimiento a la madurez se suman los rendimiento esperados del bono de cada uno de sus años venideros y se dividen entre la duración del plazo del bono.

La media aritmética del rendimiento a la madurez asume que el valor nominal del bono se mantiene constante a través del tiempo. Esto es que al final de cada año cualquier rendimiento obtenido se mantiene al margen. Si se tiene una pérdida al final del año, se restaurará a su valor nominal original añadiendo nuevos fondos a este.

Dada la característica anterior, se concluye que la media aritmética del rendimiento a la madurez, provee el porcentaje anual promedio esperado de incremento en el capital invertido en el bono.

MEDIA GEOMÈTRICA DEL RENDIMIENTO A LA MADUREZ:

Para calcular la media geométrica del rendimiento a la madurez, se le suma 1.00 a los a los futuros rendimientos anuales esperados de un bono. Por ejemplo si una persona esperara un rendimiento anual del 15%, esta tendrá que sumarle 1 al rendimiento de 15%, es decir, 1.15. Después de haberle sumado 1 a todos los rendimientos esperados, estos se mutiplican entre sí y al producto se le saca la raíz n-ésima, donde n es el plazo de madurez del bono.

Después de lo anterior a la raíz n-ésima del producto se le resta 1 y el valor obtenido es la media geométrica del rendimiento a la madurez de un bono.

La media geométrica del rendimiento a la madurez asume que se reinvierten todos los rendimientos obtenidos del bono, en el bono mismo.

A médida que el interés es recibido, esto es reinvertido en comprar más parte del bono. Obviamente ni se realizan ganancias de capital ni tampoco se restauran pérdidas de capital.

La media geométrica de rendimiento a la madurez proporciona el incremento porcentual promedio en la riqueza durante la vigencia del bono.

EL RENDIMIENTO A LA MADUREZ INTERNO:

Para calcular el rendimiento a la madurez interno, se encuentra una tasa de descuento, que podrá descontar todos los flujos de efectivo asociados con el bono y obtener un valor presente igual al precio de mercado del bono en ese momento.

Los flujos de efectivo son, por supuesto, los intereses pagados sobre el principal o valor nominal y el valor nominal mismo.

El rendimiento a la madurez interno asume que a medida que los pagos por interés son recibidos, estos pueden ser reinvertidos en el mercado a una tasa de interés la cual siempre será igual a la tasa de rendimiento a la madurez interno, está expectativa es correcta si la tasa de interés puede esperarse que se mantenga en el nivel presente.

Si se espera una caída en las tasas de interés, el rendimiento a la madurez interno es una sobre estimación del verdadero incremento porcentual promedio en la riqueza que se puede esperar durante la vigencia del bono .

El rendimiento a la madurez interno asume que los pagos de interés recibidos en un futuro serán reinvertidos a las tasas de interés del presente.

1.3 UNA PEQUEÑA INTRODUCCIÒN A LAS TRES TEORIAS SOBRE LA ESTRUCTURA DEL PLAZO:

Existen tres posibles factores afectando la forma de la estructura al plazo:

1) Las expectaciones del mercado, en lo que respecto a la tendencia que seguirán las tasas de interés.

2) La posible presencia de los "liquidity premiums" en los rendimientos esperados de los bonos.

3) La ineficiencia del mercado o lo que es lo mismo, los posibles impedimentos que podrían sufrir los flujos de fondos de los largos plazos del mercado, a los cortos plazos de este.

Existen tres teorías importantes sobre la estructura al plazo y en cada una de estas teorías uno de los tres factores anteriores es el centro de ellas.

La teoría de las expectativas del mercado: Establece que la estructura al plazo se ve influenciada exclusivamente por el factor de las expectaciones del mercado o en otras palabras por la dirección futura de las tasas de interés. Para esta teoría el rendimiento a la madurez de un bono de 5 años debe de ser simplemente el promedio de los rendimientos a la madurez esperados en bonos de 1 año de vigencia por los próximos 5 años.

La teoría de la preferencia por la liquidez: Establece que la forma de la curva de la estructura al plazo se ve afectada por los liquidity premiums. Siendo que un liquidity premium es un tipo de premio por el riesgo que se corre. Esto es, si los inversionistas no conciben los bonos de largo plazo como perfectos substitutos de los bonos de corto plazo entonces ellos requerirán diferentes rendimientos por parte de ellos en intervalos de tiempo comunes. Esta teoría también establece que la forma de la curva de la estructura al plazo no solo es afectada por las expectaciones del mercado entorno a las futuras tasas de interés sino que también se ve afectada por la naturaleza de los liquidity premiums entre bonos de corto y largo plazo.

<u>La teoría de la segmentación de los mercados:</u>

Esta teoría es consistente con la noción de ineficiencia de mercados entorno a la valuación de bonos. La teoría también menciona que cada sector de una cierta madurez del mercado de bonos puede parecer que esta segmentado de los otros sectores de madurez. Y la segmentación es en el sentido de que existen impedimentos para el flujo de capital de un segmento a otro. Cada segmento del mercado de bonos se dice que estará habitado por un cierto número de inversionistas los cuales sienten que ellos deben invertir su capital en ciertos bonos de cierta madurez.

La estructura al plazo cambiará de forma dependiendo de la dirección en la cual los fondos vayan.

1.4 LA TEORÍA DE LAS EXPECTACIONES DEL MERCADO DE LA ESTRUCTURA AL PLAZO DE LAS TASAS DE INTERÉS:

Bajo la teoría de las expectaciones del mercado, la estructura al plazo de las tasas de interés está determinada por las expectaciones que el mercado tenga con respecto a las tasas de interés futuras. Y cuando se hable de las futuras tasas de interés que espera el mercado se estarìa refiriendo a los rendimientos a la madurez esperados de bonos a un año. El intervalo de un año que se ha mencionado en este caso es totalmente arbitrario ya que podrían manejar plazos de meses si se quisiera.

Una característica distintiva de la teoría de las expectaciones del mercado es que para un periodo de tiempo dado, el mercado espera recibir las mismas tasas de rendimiento en todos los bonos, sin importar su plazo de madurez, entonces podríamos decir que el rendimiento a la madurez de un bono de n-años sería lo mismo que el promedio de rendimientos a la madurez de bonos de 1-año, durante n-años. Claro que la relación entre el rendimiento de un bono de n-años y los futuros rendimientos de bonos a un año solo se mantiene bajo la teoría de las expectaciones del mercado.

El mercado requeriría la misma tasa de rendimiento para un bono a 3-años que la que requeriría a un bono de 1-año si los quisiera ver como substitutos perfectos, por substitutos perfectos se entiende que estos existirán siempre y cuando haya una perfecta certeza de los rendimientos futuros en las tasas de interés o si los inversionistas son neutrales al riesgo ó si el riesgo asociado con la incertidumbre en las futuras tasas de interés puede ser diversificado. Todas las anteriores son condiciones bajo las cuales no habrá risk premiums asociados a los plazos de los distintos bonos y sus rendimientos. Por lo cual la teoría de las expectaciones del mercado se mantendrá.

Si las condiciones antes mencionadas no se mantienen, entonces podría esperar diferenciales en las tasas esperadas de rendimiento ó que surgieran los risk premiums para los diferentes plazos de madurez de los bonos. En el contexto de la estructura al plazo de las tasas de interés, los "risk premiums" son llamados "liquidity premiums", y son el punto focal de la llamada teoría de la liquidez preferida.

1.5 ANÀLISIS DE LA CURVA DE RENDIMIENTO:

Se le llama curva de rendimiento, a la curva obtenida de graficar el rendimiento a la madurez en sus distintos plazos a través del tiempo o contraponiendo el rendimiento a la madurez con una medida del riesgo. Tal medida podría ser la duración modificada para instrumentos de deuda de un cierto segmento del mercado.

Con la incorporación de las distintas expectativas de los diversos participantes del mercado, la forma de la curva de rendimiento captura y sintetiza los costos de los créditos para préstamos de diversos plazos. Por lo tanto la forma de la curva de rendimiento es de gran importancia para los negociadores de los mercados financieros.

Si tomamos en cuenta que medidas de riesgo como la duración y la convexidad sólo son válidas cuando los movimientos en la curva de rendimiento son paralelos y cuando decimos que los movimientos son paralelos se espera que, todos los rendimientos se incrementan o se decrementan exactamente en un mismo monto.

Nótese que cuando el rendimiento a la madurez de un T-Bill de 3 meses se incrementa de 4.5% a un 5.5%, el rendimiento a la madurez de un T-Bond de 30 años también se incrementa de un 13% a un 14%, con lo que tenemos que ambos instrumentos se experimentan un incremento de 100 puntos base en sus rendimientos.

En particular en México son de gran importancia los instrumentos de deuda de corto plazo debido a las características particulares del sistema financiero mexicano y a la economía dentro de la cual se encuentra inmerso.

Ahora para comprender mejor el comportamiento de la curva de rendimiento necesitamos estudiar y comprender otros factores que afectan este comportamiento de manera directa o indirecta, aislada o en conjunto, para lo cual, en primer lugar, daremos un vistazo a los conceptos de volatilidad de largo y corto plazo, los cuales pueden dar valiosa información en cuanto a los patrones que el comportamiento de la curva puede seguir.

VOLATILIDAD DE CORTO Y LARGO PLAZO:

La volatilidad mide la variabilidad de las tasas de interés relativa a su nivel promedio esperado. Hablando de una manera muy general la volatilidad mide el grado de variación de cualquier variable alrededor de su media. Por lo cual tenemos que, dada una serie de datos u observaciones históricas, nosotros podemos estimar su volatilidad. Es razonable intuir que el grado de variación ó volatilidad y la media de las tasas de interés cambien con el transcurso del tiempo y al mismo tiempo que los determinantes económicos que afectan las tasas de interés.

Los niveles de las tasas de interés y su volatilidad pueden sistemáticamente incorporar los cambios en los factores que las están afectando a ellas mismas. Y como consecuencia de esto, las series de tiempo de tasas de interés pueden exhibir un efecto sistemático. Los procedimientos usados para calcular la volatilidad varían significantemente en sus niveles de sofisticación.

El método tradicional para el cálculo de la volatilidad, primero, selecciona una cantidad predeterminada de información histórica de una cierta frecuencia (diaria, semanal ,mensual, etc.) y después calcula la desviación estándar de la serie. Después esto es anualizado y reportado como la volatilidad estimada. El siguiente nivel de sofisticación, asigna diferentes pesos a diferentes observaciones históricas.

En mercados donde existe una alta liquidez y donde las transacciones ocurren en cualquier día, los precios intradìa o los altos o bajos precios pueden ser usados para estimar la volatilidad.

EL concepto de volatilidad implícita, donde las volatilidades estimadas son obtenidas usando el precio de un derivado o un marco para la valuación de estos, son también usados en las finanzas actuales.

1.6 LOS PROVEEDORES DE PRECIOS:

Los proveedores de precios se crearon con la finalidad de resolver los problemas de valuación que el Mercado Financiero Mexicano tenía. Esto debido a que en la Bolsa Mexicana de Valores (B.M.V) se encargaban de realizar la valuación de manera diaria a través de su área de estadística, utilizando una metodología sin bases financieras, la cual, provocaba errores en la valuación de los instrumentos del mercado. Esto mismo provocaba que los participantes del mercado presentaran sus respectivas quejas al no estar de acuerdo con la metodología utilizada. Por lo cual se resolvió crear la figura del Proveedor de precios, el cual, es una empresa de servicios, la cual, debe proveer de una valuación confiable a sus clientes utilizando metodología que el mismo da a conocer al público en general. Actualmente es un requisito de las autoridades financieras estar con alguno de los proveedores de precios ya que estos se consideran como referencias oficiales en la valuación de instrumentos financieros.

1.7 Planteamiento general de la necesidad de construir de una curva de precios en finanzas:

- En finanzas el concepto más importante es el valor del dinero en el tiempo.
- La curva de precios es el instrumento por el cual podemos conocer el descuento que debemos aplicar al dinero dependiendo del tiempo que debemos esperar para recibirlo.

Su construcción consiste en definir un conjunto de puntos que relacionen el tiempo de maduración con el factor de descuento a aplicar en el precio de un bono que paga al vencimiento una cantidad <u>cierta</u> de dinero. Por convención esta curva está referenciada a recibir $1.00 en el tiempo t, que puede ser cualquier día a partir de hoy y hasta dentro de varios años.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:

Construir la curva de precios no es un problema trivial, ya que además de impedir el arbitraje con otros instrumentos que existen en el mercado debe cumplir una serie de requisitos que permitan que los resultados que de ella se deriven tengan sentido económico.

1.8 PROBLEMAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA CURVA:

La construcción de la curva de precios permite conocer cual es el precio de cualquier bono tomando como referencia su vencimiento. Este precio debe ser tal que impida el realizar arbitraje con otros bonos que existen en el mercado.

Construir dicha curva no es un problema trivial, ya que además de pasar por los puntos de mercado, la curva debe cumplir con una serie de requisitos que permitan que los resultados que de ella se deriven tengan sentido económico, tales como las tasas forward, y los rendimientos de los bonos cupón cero.

Requisitos principales de la Curva:

- Tiene que pasar por los puntos de mercado.
- Tiene que ser la más suave posible, entendiendo por suave aquella que presente la menor curvatura o quiebres.
- Tiene que ser diferenciable hasta el tercer orden, con el fin de la curva de tasas forwards instantáneas sea derivable (y suave).

Existen diversas metodologìas de construcción de curvas de precios, en esta exposición se muestran las más aceptadas.

1.9 LA INFORMACIÓN DISPONIBLE:

La información necesaria para calcular las curvas de precios son los hechos (precios o tasas) de algunos cetes. El precio de un cete con cierta madurez no está fijo durante el día puede variar incluso varias veces. Debido a esto, la curva de precios dependerá del instante de tiempo en que se tome la muestra de precios.

La diferencia de los modelos de no arbitraje y de los de valuación " al final del día" dependen en gran medida del tiempo en el cual se toman los precios de mercado. Los modelos de no arbitraje construyen una curva de precios basándose en los precios de los bonos en un momento dado de tiempo; de ahí que a lo largo del día podamos encontrar distintas curvas de precios.

Por su parte, los modelos de valuación " al final del día" toman un promedio de los precios de los bonos a lo largo del día, aplicando una ponderación dependiendo de los montos operados.

2. DESARROLLO MATEMÁTICO DE LA HIPÓTESIS DE LA ESTRUCTURA INTERTEMPORAL:

Un gran número de hipótesis entorno a la estructura intertemporal de las tasas de interés han sido desarrolladas. Todas ellas tratan de relacionar las tasas de interés de los bonos con cupón cero de diferentes plazos con las tasas forward, las tasas spot esperadas etc.

La primera de las hipótesis que se revisa brevemente es:

La hipótesis de las expectaciones:

Existen muchas versiones de esta, una versión dice que las actuales tasas forward son buenos predictores de las futuras tasas spot. Sea $f_t(k, k+1)$ la tasa forward en la fecha t, para un préstamo de un periodo entre dos futuras fechas k y $k+1$. Sea R_K la tasa spot desconocida para un periodo en la fecha k. Entonces la hipótesis de las expectaciones dice que:

$$f_t(k, k+1) = E_t\left[R^{*}{}_k\right]$$

Por lo tanto la tasa forward $f_t(k, k+1)$ es el valor esperado de la tasa spot de un periodo R_K en la fecha k.

Otra versión dice que el rendimiento garantizado que uno recibe durante el intervalo [t, T] por mantener un bono por un periodo (T-t)debe ser igual al rendimiento esperado de una serie de bonos de un periodo ,esto es:

$$\frac{1}{b(t,T)} = E_t\left[(1+r_t)(1+r_{t+1})..(1+r_{T-1})\right]$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior representa el rendimiento asociado con la retención del bonos hasta su madurez. El lado derecho de la ecuación es el rendimiento esperado asociado con la serie de bonos de un periodo de la fecha t a la fecha T, con futuras tasas de rendimiento variantes.$\{r_S\}$.

Y otra versión de está hipótesis establece lo anterior pero en términos de los rendimientos. En esta versión el rendimiento a la madurez de un bono en la fecha t esta especificada en el lado izquierdo de la ecuación siguiente. (Promedio Geométrico)

$$\left[\frac{1}{b(t,T)}\right]^{\frac{1}{T-t}} = E_t\left[\{(1+r_t)(1+r_{t+1})...(1+r_{T-1})\}^{\frac{1}{T-t}}\right]$$

La hipótesis de los "liquidity premiums":

La hipótesis de los "liquidity premiums"dice que las tasas "forward" actuales difieren de las futuras tasas spot por una cantidad conocida como "liquidity premiums".

$f_t(k,k+1)=E_t\left[R_k^*\right]+\pi_t(k,k+1)$

Por lo tanto la tasa "forward" $f_t(k,k+1)$ es el valor esperado de la futura tasa spot de un periodo que se ha llamado R_K en la fecha k más el "liquidity premiums", el cual, depende de el plazo del préstamo. El concepto que se maneja en está hipótesis es el de que las personas que reciben los préstamos preferirán un préstamo a largo plazo, para evadir futuras incertidumbres en el ingreso de capitales. Por otra parte, las personas que otorgan los préstamos preferirán otorgarlos por un corto plazo plazo. Más adelante los especuladores romperían con este mito ya que conseguirían préstamos a corto plazo y ellos los harían a largo plazo la compensación recibida serían los "liquidity premiums".

La hipótesis de los mercados segmentados:

La hipótesis de los mercados segmentados dice que los diferentes plazos de madurez representan diferentes mercados con sus propias fuerzas de oferta y demanda. Modigliani y Sutch (1967) propusieron la teoría de un habitat preferido ,en donde los inversionistas tienen plazo preferido y sólo cambiarían de plazo si se les ofreciera un premium. Como Cox, Ingersoll, y Ross lo han sugerido ,la teoría del habitat preferido puede ser vista como un caso especial de la hipótesis de la liquidez preferida, en la cual ,el habitat preferido son los bonos de corto plazo, y los bonos de largo plazo solo son mantenidos si estos ofrecen liquidity premiums.

La hipótesis de las expectaciones locales:

La hipótesis de las expectaciones locales(LEH) dice que todos los bonos proveen la misma tasa de rendimiento esperada en periodos de corto plazo. Tenemos que (LEH) es la única hipótesis que es libre de arbitraje. Formalmente se escribe la hipótesis de la siguiente manera:

$$\frac{E_t\left[b(t+1,T)\right]}{b(t,T)}=1+r_t$$

La tasa de rendimiento esperada durante el periodo [t, t+1] de un bono que tiene fecha de madurez T es igual al rendimiento de un periodo r_t de un bono en una fecha t y que tiene una fecha de madurez t+1.

Y como (LEH) es consistente con el no-arbitraje entonces se presenta una definición formal del no-arbitraje, que se usará en la teoría y los modelos de la estructura intertemporal que veremos más adelante y en donde se verá la importancia del (LEH) para poder desarrollarlos al máximo.

2.1 EL CONCEPTO DEL NO-ARBITRAJE:

El principio del no arbitraje dice que dos prefectos substitutos que son libremente negociados tienen que venderse a un mismo precio, en la ausencia de fricciones (tales como costos por transacciones, restricciones en las ventas en corto, impuestos etc.). A este sencillo concepto también se le ha llamado "absence of free lunch", o "the law of one price". En el contexto de los mercados de los instrumentos de deuda este concepto tiene una enorme relevancia.

Cuando se hace la valuación de bonos de distintos plazos y provisiones contractuales, se debe asegurar que no hay oportunidades de arbitraje. En otras palabras, no debe existir en ningún caso alguna combinación de bonos que puedan ser usados para replicar flujos de efectivo de algún otro bono a un costo menor. Dando un primer vistazo podría parecer que no existen substitutos prefectos que sean negociados simultáneamente y por lo tanto uno podría concluir que este concepto es de limitada validez. Pero como serà demostrado más adelante, usando ciertas estrategias específicas es posible crear prefectos substitutos. También se podrían replicar los pagos de opciones sobre bonos, intercambiando el subyacente(bono) e inclusive pedir prestado o otorgar un préstamo de dinero en base a los mercados overnight.

El concepto de los precios de estado:

Considere un arreglo simple donde, en la fecha t=0 un bono es vendido a un precio P. Y en una fecha t=1, puede o venderse a uP con una probabilidad q o venderse a dP con una probabilidad 1-q. Se denomina el precio del bono uP en la fecha t=1 como "etapa alta" y el precio del bono dP como "etapa baja".

```
        uP
       /
    P
      \
        dP
  t=0   t=1
```

Se asume que u>1+R>d donde R es una tasa de interés sin riesgo.
Ahora definamos r=1+R. El rendimiento esperado de este bono es definido como :

$$E(R)=\frac{quP+(1-q)dP}{P}=qu+(1-q)d$$

De la misma manera ,se puede calcular la varianza del rendimiento en el bono:

$$\sigma^2(R)=\left[q\{u-E(R)\}^2+(1-q)\{d-E(R)\}^2\right]$$

Esta expresión de la varianza del rendimiento del bono puede ser simplificada a:

$$\sigma^2(R)=[q(1-q)](u-d)^2$$

La volatilidad del rendimiento puede ser obtenida sacando la raíz cuadrada:

$$\sigma(R)=[q(1-q)]^{\frac{1}{2}}(u-d)$$

Como se ha asumido manejar un instrumento sin riesgo este instrumento proporcionará la siguiente distribución de pagos:

```
      r
     /
  1
     \
      r
t=0  t=1
```

Considere un instrumento que paga un dólar en la fecha t=1 en la "etapa alta" y nada en la "etapa baja". Denominaremos a este instrumento, instrumento primitivo 1. Se deja que su precio en la fecha 0 este denotado por π_u. Ahora consideremos otro instrumento que paga un dólar en la fecha t=1 en la "etapa baja" y nada en la "etapa alta". Dejemos que su precio en la fecha 0 este denotado por π_d. Nosotros llamaremos este instrumento primitivo 2.

Los pagos del bono pueden ser replicados usando instrumentos primitivos siguiendo la estrategia de la siguiente tabla.

Se tiene la capacidad de replicar con exactitud los flujos de efectivo del bono en la fecha t=1, en ambas etapas la "alta" y la "baja", comprando uP del instrumento primitivo 1 y dP del instrumento primitivo 2. Este portafolio del instrumento primitivo 1 y del instrumento primitivo 2 crea un perfecto substituto para el bono. Y estos subtitutos deben venderse por el mismo precio.

VALUACIÓN DE BONOS:

TRANSACCIÓN EN LA FECHA 0	INVERSIÓN EN LA FECHA 0	FLUJO DE EFECTIVO EN LA FECHA 1 EN LA ETAPA ALTA	FLUJO DE EFECTIVO EN LA FECHA 1 EN LA ETAPA BAJA
COMPRA DEL BONO	P	UP	DP
COMPRA DE uP UNIDADES DEL INSTRUMENTO PRIMITIVO 1	$\pi_u uP$	UP	0
COMPRA DE dP UNIDADES DEL INSTRUMENTO PRIMITIVO 2	$\pi_d dP$	0	DP

Entonces en la fecha 0 se debe tener:

$$P = \pi_u uP + \pi_d dP$$

Cancelando la P y simplificando tenemos que:

$$\pi_u u + \pi_d d = 1$$

Nótese que al comprar una unidad del instrumento primitivo 1 y una unidad del instrumento primitivo 2, podemos obtener un dólar en la fecha t=1, no importando la etapa que ocurra. El valor presente de este dólar en la fecha 0 es $\frac{1}{r}$

Por lo tanto se tiene :

$$\pi_u + \pi_d = \frac{1}{r}$$

Ahora resolviendo las dos ecuaciones anteriores se obtienen los precios de los instrumentos primitivos 1 y 2(también conocidos como precios de estado):

$$\pi_u = \frac{r-d}{r(u-d)}$$

$$\pi_d = \frac{u-r}{r(u-d)}$$

Ejemplo 1) Cálculo de los precios de estado:

Sea P=100 u =1.04, R=0.02, y d=0.96. Esto lleva a la siguiente evolución de los precios del bono:

```
      104
      /
  100
      \
      96
t=0   t=1
```

Se asume que la probabilidad de un movimiento ascendente es q=0.5 y la probabilidad de un movimiento descendente es 1-q=0.5.

Entonces se puede calcular los precios de estado $\pi_u y \pi_d$ respectivamente.

$$\pi_u = \frac{1.02-.96}{[1.02*(1.04-.96)]} = 0.7352$$

$$\pi_d = \frac{1.04-1.02}{[1.02*(1.04-.96)]} = 0.245$$

Valuación del bono 1:

La siguiente tabla ilustra como los instrumentos primitivos pueden ser usados para replicar exactamente los flujos de efectivo del bono 1. El valor total de los instrumentos primitivos que se necesita para replicar el bono es :
0.7352*104+0.245*96=100

TRANSACCIÓN EN LA FECHA 0	INVERSIÓN EN LA FECHA 0	FLUJO DE EFECTIVO EN LA FECHA 1 EN LA ETAPA ALTA	FLUJO DE EFECTIVO EN LA FECHA 1 EN LA ETAPA BAJA
COMPRA DEL BONO	P	104	96
COMPRA DE 104 UNIDADES DEL INSTRUMENTO PRIMITIVO 1	0.7352*104	104	0
COMPRA DE Dp=96 UNIDADES DEL INSTRUMENTO PRIMITIVO 2	0.245*96	0	96

Nótese que esto es precisamente igual al valor del bono. Y lo que representan los instrumentos primitivos 1 y 2 es el valor presente de recibir un dólar en la fecha 1,contingente a la ocurrencia de una cierta etapa. Los precios de estos instrumentos (precios de estado) son fundamentales en la valuación de otras instrumentos.

Valuación del bono 2:

Se pueden usar los precios de los instrumentos primitivos para valuar cualquier bono disponible y que se este negociando en el mercado.
Considere el siguiente ejemplo del bono 2, con la siguiente distribución de precios:

```
      102.5
      /
   P
      \
       98
t=0   t=1
```

¿ Cual es el precio P de este bono? El precio del bono 2 es la suma de:
-El valor presente de 102.5 en la "etapa alta"

$$\pi_u * 102.5 = 0.7352 * 102.5 = 75.3676$$

-Y del valor presente de 98 en la " etapa baja"

$$\pi_d * 98 = 0.245 * 98 = 24.0196$$

Sumando los valores presentes se tiene que:

75.36764699+24.01960782=99.38725481

Entonces el bono 2 se debe vender a 99.3872 para ser consistente con la valuación del bono 1.

El no-arbitraje y la dinámica de los precios de los bonos:

Si al bono 1 y al bono 2 se les asignan precios para evitar las posibilidades de arbitraje, entonces la evolución de los precios de los bonos deben satisfacer ciertas condiciones:

El rendimiento esperado en el bono 1 es :

$$\frac{q * 104 + (1-q) * 96}{100} = 1$$

El rendimiento esperado del bono 2 es:

$$\frac{q * 102.5 + (1-q) * 98}{99.3852} = 1.0087$$

Note que los rendimientos esperados de los bonos 1 y 2 difieren. ¿Esto significa que los bonos están incorrectamente valuados? Para responder la pregunta anterior de que a pesar que los rendimientos esperados de los bonos difieran estos están correctamente valuados, se calcula para cada bono su precio de riesgo en el mercado.

$$\phi_b = \frac{E(R_b) - r}{\sigma_b}$$

Donde $E(R_b)$ es el rendimiento esperado del bono b y σ_b es la volatilidad de los rendimientos en el bono b.

El precio de mercado del riesgo del bono 1:

Calculando el precio de mercado del riesgo del bono 1 se tiene que: El rendimiento esperado del bono 1 es :

$$E(R_1) = \frac{[quP + (1-q)dP]}{P} = qu + (1-q)d = 1$$

La volatilidad de los rendimientos del bono 1 es:

$$\sigma_1 = [q(1-q)(u-d)^2]^{\frac{1}{2}} = 0.04$$

Entonces el precio de mercado del riesgo para el bono 1 es:

$$\phi_1 = \frac{1-1.02}{0.04} = -0.5$$

El precio de mercado del riesgo del bono 2:

Note que en la "etapa alta " el precio del bono es 102.5. Su precio en la fecha 0 es 99.38725881. Esto significa que el factor de la "etapa alta" $u = \frac{102.5}{99.3872} = 1.0313$

El precio del bono en la "etapa baja" es 98. Entonces el factor de la "etapa baja" es $d = \frac{98}{99.3872} = 0.9860$, entonces la tasa esperada de rendimiento del bono 2 es :

$$E(R_2) = \frac{[quP + (1-q)dP]}{P} = qu + (1-q)d = 1.0087$$

La volatilidad de los rendimientos del bono 2 son:

$$\sigma_1 = [q(1-q)(u-d^2)]^{\frac{1}{2}} = 0.0226$$

Entonces el precio de mercado del riesgo del bono 2 es :

$$\phi_2 = \frac{1.0087 - 1.02}{0.02263} = -0.4991$$

Por lo tanto se ve por las ecuaciones y que los precios de mercado del riesgo de los bonos 1 y 2 son los mismos En otras palabras los precios de los bonos deben desarrollarse de tal manera que se pueda asegurar lo siguiente:

$$\phi_1 = \frac{E(R_1) - r}{\sigma_1} = \phi_2 = \frac{E(R_2) - r}{\sigma_{21}}$$

Esta es una regla general en los mercados de capitales sin arbitraje.

La relación entre los precios estáticos y el no -arbitraje:

Usando los precios estáticos el valor del bono 2 es 99.38725881. ¿Como es que se sabe que no existe oportunidad de arbitraje entre el bono 1 y el bono 2 ? Para verificar esto simplemente se considera una estrategia de un portafolio sencillo que replique los flujos de efectivo del bono 2 usando el bono 1 y un instrumento sin riesgo que provea un rendimiento del 2% .

Replicando el bono 2 con el bono 1:

Note que el costo de este portafolio es exactamente igual al de el precio del bono 2 ,cuyos flujos de efectivo se esta tratando de replicar:
Antes de replicar el bono 2 con el bono 1 se debe efectuar una serie de cálculos previos los cuales se explicara y justificara su razón de ser. Primero como calcular el número de bonos 1 a comprar y el monto de dinero a prestar en la fecha t=0. En la fecha t=0 se compra Δ unidades del bono 1 y se coloca B pesos en una cuenta de banco que genera una tasa de interés de 1+R.

La razón de estas transacciones es muy simple, ya que para poder replicar el bono 2, parece razonable el adquirir una posición larga con respecto al bono 1 esto debido a que se espera que el precio del bono 1 suba, cuando el precio del bono 2 suba y viceversa .

¿Porque se hace un préstamo de dinero? Primero note que el bono 2 es menos volátil que el bono 1. Cuando el precio del bono 1 sube a 104, el precio del bono 2 sube solo a 102.5. Y similarmente cuando el precio del bono 1 baja a 96, el precio del bono 2 baja solamente a 98. Para conseguir esta menor fluctuación, se coloca el dinero en una cuenta de banco. Entonces se tiene que la inversión total I en esta estrategia:

$$I = \Delta * 100 + B$$

En la fecha 1 en la "etapa alta",el potafolio tiene un valor de :

$$I_U = \Delta * 104 + B * 1.02$$

Se prefiere que el valor de este portafolio fuera exactamente igual al valor del bono 2. Por lo tanto igualamos de la siguiente manera:

$$I_U = \Delta * 104 + B * 1.02 = 102.5$$

El valor del portafolio en la fecha 1 en la "etapa baja" es:

$$I_d = \Delta * 96 * B * 1.02$$

Esta igualdad debería replicar con exactitud el valor del bono 2 en la "etapa baja". Por lo tanto tendríamos:

$$I_d = \Delta * 96 * B * 1.02 = 98$$

Resolviendo las dos últimas ecuaciones se obtiene $\Delta = \frac{2.25}{4}$ y $B = \frac{44}{1.02}$

Usando estos valores en la ecuación $I = \Delta * 100 + B$ se obtiene una inversión I=99.3872

Obtenidos los valores anteriores, pasamos a replicar el bono 2 con el bono 1. En la fecha 0, se compran unidades del bono $\Delta = \frac{2.25}{4}$ 1 y se pide $I = 99.3872$ al 2%.

Como se sabe la inversión total en este portafolio es de I=99.3872

Note que el costo de este portafolio es exactamente igual al precio del bono 2, cuyos flujos de efectivo se esta tratando de replicar.

Ahora considere los pagos de está estrategia. En la "etapa alta" en la fecha t=1, el valor del portafolio es :

- 2.25/4 unidades del bono 1, lo cual tiene un valor de:

  (2.25/4)(104)=$58.5.

- El dinero otorgado en préstamo tiene un valor de :(44/1.02)(1.02)=$44.
- Así que el monto total en la "etapa alta" es de : 58.5 + 44 = 102.5.

Este es precisamente el valor del bono 2 en la "etapa alta".

En la "etapa baja" ,en la fecha t=1, el valor de este portafolios :

- 2.25/4 unidades del bono 1 ,lo cual tiene un valor de: (2.25/4)(96) =$54.
- El dinero otorgado en préstamo tiene un valor de :(44/1.02)(1.02) =$44.
- Así que el monto total en la "etapa baja" es de : 54 + 44 =98.

Note que este es precisamente el valor del bono 2 en la "etapa baja".

Así, este potafolio ha replicado los flujos de efectivo del bono 2 en la fecha 2, en ambas etapas la alta y la baja. Y por lo tanto se ha creado un perfecto substituto, este debe ser vendido exactamente por el mismo precio que el bono 2. La inversión en este portafolio como se mostró anteriormente debe ser de 99.387255. Y por lo tanto es su precio.

Con esto hemos verificado un principio muy importante : Siempre que se pueda encontrar precios de estado y siempre que se pueda valuar instrumentos con los precios estado, entonces el procedimiento de valuación está libre de arbitraje.

Duffie (1992) provee una demostración general en la cual muestra que no existe el arbitraje sí y sólo sí existen los precios estado.

2.2 VALUACIÓN CON RIESGO NEUTRAL:

En un mundo donde los inversionistas prefieren ser neutrales al riesgo, ellos estarían satisfechos con un rendimiento esperado igual a una tasa de rendimiento sin riesgo alguno. Lo cual lleva a la siguiente pregunta ¿Existirá una cierta probabilidad p bajo la cual el bono 1 y el bono 2 provean sólo la tasa libre de riesgo.

Para el bono 1 esto significaría:

$$\frac{uP^* p + dP^*(1-p)}{P} = r$$

Resolviendo se tendría que:

$$p = \frac{r-d}{u-d}$$

Nótese que está probabilidad neutral al riesgo p puede ser escrita en términos del precio estado π_u como sigue:

$$p = \pi_u * r$$

De una manera similar se puede podemos escribir: $1 - p = \pi_d * r$

Para el bono 1 se obtiene: p=0.75

y por lo tanto: 1-P=0.25

Note que se usan probabilidades neutrales al riesgo para calcular el rendimiento esperado del bono 2 se obtiene:

$$\frac{102.5 * p + 98 * (1-p)}{99.3872} = 1.02$$

Todo esto lo que indica es que todos los bonos son valuados con el objetivo de que provean una tasa libre de riesgo bajo una probabilidad neutral al riesgo.

Se puede describir el proceso de valuación de la siguiente manera:

1) El precio del bono 1 está dado por : $P = \pi_u uP + \pi_d dP$

2) Usando la relación entre p, π_u,1-p y d podemos reescribir el precio de la siguiente forma :

$$p = \frac{puP + (1-p)dP}{r}$$

3) Pero $puP + (1-p)dP$ es el valor esperado del precio del bono en la fecha t=1 y donde la esperanza es tomada con respecto a la probabilidad neutral al riesgo p, entonces se puede escribir la fórmula de valuación de la siguiente manera:

$$p = \frac{E_p[\tilde{P}]}{r}$$

Donde $E_p[\ ]$ es el operador esperanza con respecto a la probabilidad neutral al riesgo p.

Esto da un procedimiento muy simple de valuación:

Primero ,se calcula la probabilidad neutral al riesgo p.

Después se calculan los futuros flujos de efectivo esperados, bajo la probabilidad neutral al riesgo.

Finalmente ,se descuenta el valor esperado a la tasa libre de riesgo para calcular el precio del instrumento. Se menciona también que esta regla de valuación es especialmente conveniente para valuar instrumentos por las técnicas de simulación de Monte Carlo.

2.3 DINÁMICAS DE LOS PRECIOS DE LOS BONOS Y LAS TASAS DE INTERÉS:

El proceso de valuación utilizado previamente puede ser generalizado fácilmente para así transformarlo en un proceso de muchos periodos de tiempo. Como una extensión consideremos la versión de tres fechas del proceso anterior.

```
               u2P
             /
        uP
     /       \
P               udP
     \       /
        dP
             \
               d2P
t=0    t=1    t=2
```

Note que el número de precios posibles de un bono se incrementa linealmente con el tiempo ,en la fecha 0, sólo hay un precio , en la fecha 1, existen 2 posibles precios, (uP y dP) y en la fecha 2 , existen 3 posibles precios (u^2P, udP y d^2P).

Este proceso es conocido como proceso binomial y ha sido estudiado extensivamente por Cox , Ross y Rubinstein (1979).

Considere un bono en la fecha t . Consideremos una fecha lejana T tal que T>t,

Se puede subdividir el plazo del bono en n intervalos de tiempo, definiendo la longitud de cada subintervalo de la siguiente manera $h = \frac{(T-t)}{n}$. Considere una tasa anualizada y libre de riesgo 1+R; su posición en los intervalos de tiempo será regida por la relación:

$$(1+\hat{R}) = (1+R)^{\frac{T-t}{n}}$$

Cox ,Ross, and Rubinstein (1979) optaron por: $u = \frac{1}{d} = e^{\sigma\sqrt{\frac{T-t}{n}}}$

Donde σ es la volatilidad de los rendimientos del subyacente ,T-t es el tiempo hasta la fecha final en años, n es el número de intervalos de tiempo en el cual se divide el plazo de vencimiento. Ellos definieron la probabilidad q como $q = 0.5 + 0.5\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T-t}{n}}$ donde μ es la tasa de rendimiento esperada del subyacente.

Entonces conforme $n \to \infty$ puede mostrarse que el precio del bono subyacente P sigue un proceso que puede ser descrito de la siguiente manera:

$$\frac{dP}{p} = \mu dt + \sigma dz$$

Donde dz está normalmente distribuida con media 0 y varianza igual a dt.

El precio del bono P_T en la fecha final es una variable aleatoria y sus propiedades son resumidas por su media y su varianza de la siguiente forma:

$$E\left[\ln\left(\frac{P_T}{P_t}\right)\right]=\mu(T-t)$$

y

$$\sigma^2=\left[\ln\left(\frac{P_T}{P_t}\right)\right]=\sigma^2(T-t)$$

En otras palabras , los futuros precios de los bonos se distribuyen lognormalmente. Esta no es una característica deseable, ya que, a medida que los bonos se acercan a su fecha de vencimiento, su precio debería converger hacia un valor a la par y este simple requisito no es cumplido por este proceso.

En la práctica, este proceso es empleado en la industria sólo en aplicaciones específicas , donde la convergencia hacia un valor a la par no es un problema serio. Este sería el caso de un bono con largo plazo de madurez, es bien sabido que existen procesos los cuales convergen hacia un valor a la par, pero el proceso especificado anteriormente, es un límite de tiempo continuo de un proceso binomial de tiempo discreto. Procesos similares han sido definidos para las tasas de interés los cuales se mencionaràn más adelante.
La obtención de los precios de los bonos resalta una caraterística importante en la valuación de los instrumentos: La distribución de probabilidad original no es relevante .
Se puede cambiar la medida de probabilidad original por una medida de probabilidad neutral al riesgo, entonces teniendo la medida de probabilidad neutral al riesgo se puede tomar el valor esperado del bono y descontarlo a la tasa libre de riesgo.

VALUACIÓN DE LA CURVA DE RENDIMIENTO:

El proceso binomial que se han usado para describir los precios de los bonos tambien puede ser aplicado a las tasas de interés. Rendelman and Barter (1980) aplicaron el proceso a la modelación del comportamiento de las tasas de interés .

El Proceso Binomial:

Se ilustrarà el proceso en el contexto de un modelo de un sólo factor en el cual la tasa nominal de interés sigue un proceso binomial.

Considere un proceso binomial simple para la tasa spot.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & u^2 r(t) \\
 & & & / & \\
 & & ur(t) & & \\
 & / & & \backslash & \\
r(t) & & & & udr(t) \\
 & \backslash & & / & \\
 & & dr(t) & & \\
 & & & \backslash & \\
 & & & & d^2 r(t) \\
t=0 & & t=1 & & t=2
\end{array}
$$

Este proceso es mostrado por un modelo de tiempo discreto de Rendelman y Bartter (1980).Nosotros asumiremos que la probabilidad de un movimiento hacia arriba es q y que la probabilidad de un movimiento hacia abajo es 1-q, sin importar el nivel de la tasa spot de interés.

Considere un bono con cupón cero ,el cual pagará un dólar en la fecha 2:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & 1 \\
 & & & / & \\
 & & b^u(1,2) & & \\
 & / & & \backslash & \\
b(0,2) & & & & 1 \\
 & \backslash & & / & \\
 & & b^d(1,2) & & \\
 & & & \backslash & \\
 & & & & 1 \\
t=0 & & t=1 & & t=2
\end{array}
$$

Recuerde que LEH, la cual fue descrita anteriormente ,dice que el rendimiento esperado sobre un periodo en cualquier bono deberá ser el mismo que el de la tasa de un periodo que prevalezca en ese momento del tiempo.

$$\frac{1}{b^{u}(1,2)}=1+ur(t)$$
$$\frac{1}{b^{d}(1,2)}=1+dr(t)$$

Por lo tanto basándonos en LEH, en la fecha t=1 las siguientes 2 condiciones se cumplen:

$$\frac{1}{b^{u}(1,2)}=1+ur(t)$$
y
$$\frac{1}{b^{d}(1,2)}=1+dr(t)$$

Estas condiciones dicen que el rendimiento en la fecha 1del poseedor de un bono de un periodo es igual a la tasa de un periodo en ese nodo. Como consecuencia ,podemos reescribir las dos ecuaciones anteriores para obtener la distribución de los precios de el bono.

$$b^{u}(1,2)=\frac{1}{1+ur(t)}$$
y
$$b^{d}(1,2)=\frac{1}{1+dr(t)}$$

Trabajando con flujos de efectivo conocidos en la fecha 2, se determina el precio del bono en la fecha 1.

Por lo tanto se procede de manera recursiva hasta la fecha t=0. Y por LEH tenemos que:

$$\frac{q*b^{u}(1,2)+(1-q)*b^{d}(1,2)}{b(0,2)}=1+r(t)$$

Reordenando la ecuación de arriba y resolviendo para encontrar el precio del bono en la fecha 0 se obtiene:

$$b(0,2)=\frac{q*b^{u}(1,2)+(1-q)*b^{d}(1,2)}{1+r(t)}$$

Nótese que se puede expandir este procedimiento para cualquier fecha en el futuro y calcular los rendimientos de los bonos cupón cero en la fecha 0 en el siguiente orden b(0,1),b(0,2),b(0,3),.......b(0,n). Además en cada fecha futura s en el árbol binomial de tasas spot ,se pueden obtener la distribución completa de la curva de rendimiento. La habilidad para obtener la distribución completa de los precios de los bonos cupón cero es de gran importancia en la valuación de los derivados sobre tasas de interés. Lo expresado anteriormente será ilustrado con el siguiente ejemplo.

Ejemplo :

Dados, la tasa actual de un periodo la cual es 9%, el factor que indica un movimiento hacia arriba u=1.25, el factor que indica un movimiento hacia abajo d=0.80, la probabilidad de un movimiento hacia arriba *q=0.5 y la evolución de tasas de un periodo que se muestra a continuación .Determinar la estructura intertemporal de las tasas de interés en la fecha t=0 para los plazos T = 1,2,3 y 4. *Se supone q=0.5 para facilitar este ejemplo.

```
                        18.531%
                       /
               14.625%
              /       \
       11.50%          11.50%
      /      \        /
9.0%          9.0%
      \      /        \
       7.0%            7.0%
            \         /
              5.40%
                      \
                        4.120%
 t=0    t=1    t=2     t=3
```

Primero, se comienza obteniendo el precio de un bono de un sólo periodo. En estos bonos se asume un pago de un peso en la fecha t=1 sin importar la situación que ocurra. Por lo tanto el precio en la fecha t=0 es $b(0,1)=\frac{1}{1+0.09}=0.9174$ Esto se muestra en el siguiente árbol binomial:

```
         1
        /
0.9174311
        \
         1
t=0     t=1
```

El rendimiento de un bono de un periodo en la fecha t=0 es 9.0%.

Ahora se calcula el valor de un bono de dos periodos, en la fecha t=1 en el nodo superior, el valor del bono es $\frac{1}{(1+0.115)}=0.8968$. En la fecha t=1 en el nodo inferior, el valor del bono es $\frac{1}{(1+0.07)}=0.9345$. Ahora que se tienen los precios del bono en la fecha t=1, se puede retroceder a la fecha t=0 . En la fecha t=0 ,el valor esperado del bono es (0.8968609*0.5+0.9345794*0.5).

El valor descontado del precio esperado del bono:

$$b(0,2)=\frac{(0.8968*0.5+0.9345*0.5)}{1.09}=0.8401$$

El rendimiento a la madurez de un bono de dos periodos se calcula como sigue:

$$0.8401 = \frac{1}{(1+y_2)^2} \Rightarrow y_2 = .091017 = 9.1017\%$$

La evolución del bono de dos periodos es la siguiente:

```
                 1
                /
      0.8968609
     /          \
0.84011          1
     \          /
      0.9345794
                \
                 1
t=0    t=1    t=2
```

Ahora, se procede a valuar un bono de tres periodos. En la fecha t=2, en el nodo superior, el valor del bono es $b^{uu}(2,3) = \frac{1}{(1+0.1462)} = 0.8724$, en el nodo intermedio, el valor del bono es $b^{ud}(2,3) = \frac{1}{(1+0.09)} = 0.9174$,en el nodo inferior, el valor del bono es

$$b^{dd}(2,3) = \frac{1}{(1+0.054)} = 0.9487$$

Ahora que se han determinado los precios de los bonos en la fecha t=2, retrocedemos a la fecha t=1. En el nodo superior en la fecha t=1, el valor del bono es el valor esperado del bono en la fecha 2, descontado por la tasa de un periodo indicada en el nodo superior en la fecha 1. Esto se puede escribir como:

$$b^{u}(1,3) = \frac{[0.5 * 0.8724 + 0.5 * 0.9174]}{(1+0.115)} = 0.8026$$

De una manera similar, se puede determinar el precio del bono en la fecha t=1,en el nodo inferior, de la siguiente forma:

$$b^{d}(1,3) = \frac{[0.5 * 0.9174 + 0.5 * 0.9487]}{(1+0.07)} = 0.872$$

Ahora se retrocede hasta t=0 y se determina el valor de un bono de tres periodos de la siguiente manera:

$$b(0,3) = \frac{[0.5 * 0.8026 + 0.5 * 0.872]}{(1+0.09)} = 0.7681$$

El rendimiento a la madurez de bono de tres periodos se calcula como sigue:

$$0.7681 = \frac{1}{(1+y_3)^3} \Rightarrow y_3 = 9.1881\%$$

La evolución mostrada es la siguiente:

```
                      1
                    /
                0.87241
              /        \
      0.8026192         1
     /         \       /
0.76819      0.91743
     \         /       \
      0.87205           1
              \        /
                0.94876
                       \
                         1
t=0    t=1    t=2     t=3
```

La estructura intertemporal de tasas de interés que se han calculado se muestra en la siguiente tabla:

MADUREZ DEL BONO (Número de periodos)	PRECIO DEL BONO	RENDIMIENTO A LA MADUREZ
1	0.9174	9.0%
2	0.8401	9.1017%
3	0.7681	9.1881%

Además de poder determinar la estructura intertemporal de las tasas de interés , también se tiene información sobre la futura distribución de los rendimientos. Por ejemplo, se podría responder a la siguiente pregunta ¿ Cual es la distribución de los rendimientos de 2 periodos en la fecha 1 (un periodo más)? Para responder está pregunta se necesita determinar $b^u(1,3) y b^d(1,3)$. Los cuales ya se han determinado, por lo tanto se tiene que : $b^u(1,3) = 0.8026 y b^d = (1,3) = 0.872$

Los rendimientos de 2 periodos en la fecha 1 pueden ser determinados como:

$$0.8026 = \frac{1}{(1+y_2^u)^2} \Rightarrow y_2^u = 11.6208\%$$

De la misma manera:

$$0.8702 = \frac{1}{(1+y_2^d)^2} \Rightarrow y_2^d = 7.0848\%$$

De una manera similar al análisis de la dinámica de los precios de los bonos, se puede determinar el límite de tiempo continuo del proceso binomial que siguen las tasas de interés.

Como se muestra este es un proceso lognormal:

$$dr = r[\mu dt + \sigma dz]$$

La distribución final para ıas tasas de interés en cualquier tiempo T es lognormal. Es decir su media y su varianza son:

$$E\left[\ln\left(\frac{r_T}{r_t}\right)\right] = \mu(T-t)$$

y

$$\sigma^2\left[\ln\left(\frac{r_T}{r_t}\right)\right] = \sigma^2(T-t)$$

Mientras que el modelo asegura que el precio del bono converge hacia un valor a la par en su madurez este proceso es insatisfactorio ya que asume una distribución lognormal en cualquier fecha futura T.

Está distribución lo que significa es que las tasas de interés pueden alcanzar niveles muy altos en el futuro. Note que la probabilidad de un movimiento hacia arriba o hacia abajo es independiente del nivel de las tasas de interés.

Empíricamente, pareciera ser que las tasas de interés tienden a un cierto nivel promedio (una cierta media variable) de las tasas de interés. Se mostrarà un proceso de tasas de interés el cual tiende a revertirse hacia la media del nivel de las tasas de interés, en este proceso ,la tasas de interés tiende a acercarse hacia un valor central, pero al mismo tiempo se propaga aleatoriamente alrededor de este valor central.

2.4 PROCESO DE REVERSIÓN HACIA LA MEDIA PARA TASAS DE INTERÉS:

Aquí se presenta un simple proceso de tiempo discreto en el cual la probabilidad de un movimiento hacia arriba o hacia abajo depende del nivel de las tasas de interés.

Asumamos que las tasas de corto plazo siguen el proceso estocástico que se especifica a continuación:

límite superior

$$r_{t+2} = r_t + 2\delta$$

/

$$r_{t+1} = r_t + \delta$$

/ \

r_t $$r_{t+2} = r_t$$

\ /

$$r_{t+1} = r_t - \delta$$

\

$$r_{t+2} = r_t - 2\delta$$

t t+1 t+2 límite inferior r=0

Las probabilidades asociadas con cada nodo son dependientes de la tasas de interés en estos nodos, estas son especificadas como sigue:

$$q[r_t] = 1 - \frac{r_t}{2\mu}$$

y

$$1 - q[r_t] = \frac{r_t}{2\mu}$$

Cuando la tasa de interés alcanza el límite superior, la probabilidad de que baje es 1 y viceversa. Este proceso tiene un límite superior e inferior en 0 y 2μ, respectivamente.

Los intereses deben evolucionar dentro de estas fronteras. En el proceso especificado arriba, δ representa la cantidad que puede variar la tasas de corto plazo si sube o baja en un periodo (t,t+1). Dependiendo de como se dividan los intervalos de tiempo, la opción de δ variará. Este proceso permite cierta flexibilidad. Ya que ,escogiendo un parámetro μ razonable, tanto en escenarios incremento o decremento de tasas de interés, estos pueden ser modelados de acuerdo a nuestras expectativas.

Cuando $r_t = \mu$ la probabilidad de un alza es igual a la probabilidad de una baja en las tasas. Por otra parte sí $r_t \langle \mu$ la probabilidad de una alza es superior a la de una baja indicando que se espera una alza en las tasas y viceversa sí $r_t \rangle \mu$.

Sabiendo lo anterior se puede ver al parámetro μ como la media a largo plazo de las tasas de interés. Por lo tanto el nivel de la tasa de interés actual de corto plazo con respecto a la media de largo plazo es de gran interés para la valuación de bonos.

Otra característica de gran interés es que tan rápido se espera que las tasas de corto plazo se aproximen al valor medio de largo plazo. El parámetro δ puede ser interpretado como la velocidad de ajuste. Cuando δ es grande la tasas de interés de corto plazo r_t se aproxima rápidamente a la media de largo plazo y viceversa.

La posibilidad de escoger a δ , μ y r_t provee flexibilidad en el modelaje de diferentes escenarios. El proceso de tasas de interés que se ha escogido tiene una función de distribución estable. Y puede mostrarse que la media y la varianza de este proceso (conforme el número n de movimientos en las tasas de interés se acerca al infinito) estan dadas por μ y $\frac{\delta\mu}{2}$ respectivamente Por lo tanto, mediante la estimación de la media y la varianza usando datos reales del proceso de las tasas de interés, es posible identificar los parámetros ,los cuales pueden ser usados para generara un árbol de tasas de interés. Para ilustrar lo anteriormente dicho se provee el siguiente ejemplo:

Asumiendo que la tasa actual de interés de un periodo es 11%, que el parámetro $\delta = 1\%$ y $\mu = 12\%$. Determinar la estructura intertemporal de las tasas de interés en la fecha t=0.

La evolución de las tasas de interés de un periodo es la siguiente:

```
                    14%
                   /
              13%
             /    \
        12%         12%
       /   \       /
  11%        11%
       \   /       \
        10%         10%
           \       /
              9%
                   \
                    8%
t=0    t=1    t=2    t=3
```

A diferencia del proceso binomial las probabilidades cambian en cada nodo, por lo cual no se deben perder de vista el siguiente árbol muestra la evolución de las probabilidades a través del tiempo.

```
                    0.458
                   /
              0.442
             /     \
        0.5          0.5
       /    \       /
  0.583        0.583
       \      /     \
        0.625        0.625
             \      /
              0.667
                   \
                    0.708
t=0    t=1    t=2    t=3
```

Note que la probabilidad es exactamente 0.5 cuando la tasa de interés es igual 12%, esto debido a que es la media de largo plazo. Sí las tasas están por debajo de 12% la probabilidad de una alza se incrementa por arriba de 0.5 y viceversa.

Como en el caso del proceso binomial primero se calcula el precio de un bono de un sólo periodo .Este bono paga un peso en la fecha t=1 no importando lo que ocurra.

Por lo tanto su precio en la fecha t=0 es $b(0,1)=\frac{1}{(1+0.11)}=0.9$ como se muestra a continuación:

```
        1
       /
  0.9
       \
        1
t=0    t=1
```

El rendimiento de un bono de un periodo en la fecha t=0 es 11%

Ahora se procede a valuar un bono de 2 periodos. En la fecha t=1, en el nodo superior, el valor del bono es $\frac{1}{1+0.12}=0.8928$, En la fecha t=1, en el nodo inferior, el valor del bono es $\frac{1}{1+0.1}=0.909$. Ahora que tenemos los precios del bono para la fecha t=1,podemos retroceder a la fecha t=0 y calcular el precio de un bono de 2 periodos en la fecha t=0.En la fecha t=0 ,el valor esperado del bono es (0.892857*0.583+0.90909*0.4170)

El valor descontado del precio esperado es

:

$$b(0,2)=\frac{[0.8928*0.583+0.909*0.417]}{1.11}=0.8104$$

El rendimiento a la madurez de un bono de 2 periodos es calculado como:

$$0.8104=\frac{1}{(1+y_2)^2}\Rightarrow y_2=11.0786\%$$

La evolución del bono de 2 periodos es la siguiente:

```
                1
              /
         0.892857
       /       \
0.8104739       1
       \       /
         0.90909
              \
                1

t=0     t=1    t=2
```

2.5 OBJETIVO PRINCIPAL DE LOS MODELOS DE ESTRUCTURA INTERTEMPORAL DE TASAS:

Su objetivo principal consiste en construir un modelo de curva de rendimiento ó modelo de estructura intertemporal. Y un modelo de estructura intertemporal es un modelo que describe el comportamiento probabilístico de las tasas de interés.
Un modelo de estructura intertemporal es más complicado que un modelo que describe el comportamiento de los precios de las acciones. Esto es porque el modelo de estructura intertemporal tiene que tomar en cuenta movimientos en toda la curva y los modelos de acciones solamente toman en cuenta una sola variable.

Como veremos existen dos tipos principales de modelos para tasas:

1. Modelos de Equilibrio.
2. Modelos de No-Arbitraje.

Y su diferencia principal es la siguiente:

1. En un Modelo de Equilibrio La estructura intertemporal de tasas real es el resultado de este modelo.
2. en un Modelo de No-Arbitraje la estructura intertemporal real es un insumo. De este modelo.

2.6 INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS DE EQUILIBRIO:

Los modelos de equilibrio usualmente parten de supuestos sobre variables económicas y derivan en un proceso para la tasa libre de riesgo de corto plazo r. Entonces estos exploran las implicaciones que estos procesos tiene para los precios de los bonos y de las opciones. La tasa de corto plazo r al tiempo t, es la tasa que aplica a un periodo infinitesimal de tiempo al tiempo t. Y a esta tasa se le conoce como tasa instantánea de rendimiento. Es importante enfatizar que, no es el proceso de r en la realidad el que importa. Esto porque, los precios de los bonos, los precios de las opciones, los precios de otros derivados, sólo dependen del proceso seguido por r en un mundo de riesgo neutral.

Por lo que tendríamos que el valor de un derivado sobre tasa de interés que provee un pago f_T al tiempo T sería el siguiente:

$$\hat{E}\left[e^{-\bar{r}(T-t)} f_T\right]$$

donde $\bar{r}$ es el valor promedio de r en el intervalo entre t y T, y $\hat{E}$ denota el valor esperado en un mundo de riesgo-neutral.

Por lo tanto definimos $P(t,T)$ como el precio al tiempo t de un bono que paga \$1 en T. (un Cete por ejemplo)

$$P(t,T) = \hat{E}\left[e^{-\bar{r}(T-t)}\right]$$

Sí $R(t,T)$ es el interés compuesto de manera continua al tiempo t por un periodo T-t entonces:

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

Por lo que

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t,T)$$

Y por la ecuación inicial tendríamos que:

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln \hat{E}\left[e^{-\bar{r}(T-t)}\right]$$

Esta ecuación nos permite obtener en cualquier momento y a partir del valor de r en ese momento, la estructura intertemporal de tasas junto con el proceso de riesgo neutral que sigue r. Lo que nos muestra que una vez que hemos definido completamente el proceso para r, hemos definido todo sobre la estructura intertemporal inicial y como puede evolucionar en un futuro.

2.7 MODELOS DE UN SOLO FACTOR

En los modelos de un solo factor, el proceso para r sólo considera una sola fuente riesgo. Usualmente la tasa de corto plazo es descrita en un mundo de riesgo neutral utilizando un proceso de Ito que tiene la siguiente forma:

$$dr = m(r)dt + s(r)dz$$

El "dirft" y la desviación estándar instantáneas m y s respectivamente son considerados funciones de r pero a la vez independientes del tiempo. La elección de un solo factor no es tan restrictiva como pudiese parecer. Ya que, un modelo de un solo factor implica que todas la tasas de interés se mueven en la misma dirección en un periodo corto de tiempo pero todas ellas se mueven en la misma proporción. Por lo que, no asume que la estructura intertemporal tenga siempre la misma forma.
Los siguientes son modelos de equilibrio de un solo factor:

1. $m(r) = \mu r, s(r) = \sigma r$ (Rendleman and Barter)
2. $m(r) = a(b - r), s(r) = \sigma$ (Vasicek)
3. $m(r) = a(b - r), s(r) = \sigma \quad r$ (Cox, Ingersoll and Ross)

2.8 PROCESO DE REVERSIÓN A LA MEDIA EN MODELOS DE ESTRUCTURA INTERTEMPORAL.

Una diferencia importante entre el comportamiento de los precios de las acciones y las tasas de interés, es que, las tasas de interés tienen ciclos recurrentes hacia un nivel promedio. A este fenómeno se le conoce como proceso de reversión hacia la media.
Existen argumentos económicos contundentes p ara demostrar la existencia de el proceso de reversión a la media. Un ejemplo sencillo podría ser, cuando las tasas de interés son altas, la economía tiende a desacelerarse y la demanda por fondos disminuye. Y como resultado de esto las tasas bajan. Cuando las tasas son bajas la demanda por fondos tiende a aumentar y como resultado las tasas suben.

2.9 INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS DE NO ARBITRAJE

Una desventaja de los modelos de equilibrio es que estos no se ajustan automáticamente a la estructura intertemporal de tasas real. Mediante la selección cuidadosa de los parámetros estos modelos pueden tratar de ajustarse a la realidad. Pero generalmente el Ajuste alcanzado no es exacto y los errores son significativos.
Un ejemplo de esto podría ser que un operador no puede tener confianza en el precio de la opción de un bono sí el subyacente no está correctamente valuado y esto porque un error del 1% en el precio del bono puede llevar a un error del 25% en el precio de la opción. Estos modelos están diseñados para ser totalmente consistentes con la estructura intertemporal real. En ellos se asuma que la estructura intertemporal depende de un solo factor y se indica como los resultados pueden ser extendidos a muchos factores.

Podríamos definir los siguientes factores que son necesarios para los modelos de no arbitraje de la siguiente manera:

$P(t,T)$ El precio en el tiempo t, de un bono cupón cero.

Ω_t El vector de los valores presentes y pasados que las tasas y los precios de los bonos han tenido en el tiempo t y que son relevantes en el cálculo del precio del bono y de su volatilidad.

$v(t,T,\Omega_t)$ La volatilidad de $P(t,T)$.

$f(t,T_1,T_2)$ La tasa "forward" en el tiempo t que se observa entre el periodo T1 y T2.

$F(t,T)$ La tasa "forward" instantánea observada en el tiempo t para un contrato que madura en el tiempo T.

$r(t)$ La tasa de corto plazo libre de riesgo en el tiempo t.

$dz(t)$ Proceso Weiner que afecta la estructura y sus movimientos.

La variable $F(t,T)$ es el límite de $f(t,T_1,T_2+\Delta t)$ cuando Δt tiende a cero.

Por lo tanto es importante tener en cuenta todos estos conceptos y teorías de carácter económico-financiero de manera que se pueda analizar y plantear de manera correcta un modelo de estructura intertemporal de tasas acorde a las características del Mercado Financiero Mexicano y acorde con la evolución de las necesidades y los instrumentos financieros de los mercados financieros en general.

3 METODOLOGÍAS APLICADAS EN AL ACTUALIDAD
3.1 Metodología del Banco de México (Marca a Mercado Constante)

1) INTRODUCCIÓN.

MARCA A MERCADO:

La curva de precios de los cetes es la curva de rendimiento libre de riesgo crédito en pesos, y es la base para valuar otros tipos de bonos y derivados en el mercado nacional. Para su construcción existen diversas metodologías ; en este documento se hablará de tres tipos de metodologías: Valuación Libre de arbitraje , marca mercado contable y El método de Nelson-Siegel . Se explicarán sus características e implicaciones de estás para los proveedores de precios reciente mente autorizados por la CNBV. Finalmente se mencionarán algunas líneas de investigación metodológicas.

La correcta valuación de un instrumento financiero depende entre otros factores, de la exactitud con la que se pueda conocer el valor presente de los flujos de efectivo que arrojará. Para esto, se necesita conocer los factores de descuento, obtenidos generalmente de la curva de precios.

El hecho de ajustar una curva a las distintas cotizaciones que se dieron a lo largo del día impide que la curva generada sea consistente con los puntos de mercado, ya que de cierta manera está ajustando promedios de dichas cotizaciones. Además nada asegura que la curva cumpla con los criterio financieros, tales como ausencia de las tasas forward negativas.

Esta es la metodología que el Banco de México utiliza para valuar a precios de mercado , los Certificados de la Tesorería de la Federación (Cetes), que mantiene en posición propia.

Con esta metodología se calcula una curva de tasas de interés expresada en rendimiento. Para ello se lleva a cabo una estimación no paramétrica del valor esperado de la tasa de rendimiento de cada uno de los Cetes que están en circulación. Esta curva se obtiene con base en los niveles observados en el mercado, incluyéndose el resultado de la subasta primaria, las operaciones de mercado abierto en directo realizadas por el Banco de México, las operaciones en directo entre instituciones de crédito con dichos títulos, así como la tasa ponderada de fondeo gubernamental publicada diariamente por el Banco Central .

Antes de describir la metodología es necesario introducir la siguiente notación y definiciones.

Sea:

n : Número de Cetes con distinto plazo, operados el día en que se realizo la valuación.

d_j : Plazo a vencimiento del Cete j operado, expresado en días naturales. Donde j, es un índice que varía de 1 hasta n.

R_{ij} : Tasa de rendimiento observada en la operación numero i, con el Cete j. Donde i, es un índice que varía sobre el número de operaciones realizadas para cada j.

rj : Tasa de rendimiento homologada y ponderada sobre todas la operaciones i,que involucren al Cete j. El factor de ponderación está determinado por el volumen de cada operación.

r_d^* : Tasa de rendimiento estimada para un Cete con plazo de vencimiento d.

P_d^* : Precio estimado de valuación de un Cete cuyo plazo a vencimiento es d.

r^f : Tasa de fondeo a un día para los títulos.

$K(z)=(2\pi)^{-1/2}e^{-z^2}$: Función Kernel que se utilizará en la estimación no paramétrica . Donde z denota al argumento de la función.

$h_d = 50\left(1-e^{-0.05d}\right)$: "Ancho de Banda" que se utilizará en la estimación no paramétrica, para el plaza a vencimiento d.

2) INFORMACIÓN DEL MERCADO

Para realizar la valuación de los Cetes, a precio de mercado, se obtiene información diaria del mercado, la cual es enviada electrónicamente al Banco de México por las siguientes casas de corretaje: Enlaces Pebron, Eurobrokers, Remate Electrónico, Servicios de Integración Financiera, además de la información enviada por el Instituto para el Depósito de Valores (Indeval).

Dichas casas de corretaje envían al Banco de México la fecha de concertación, la fecha de liquidación, los volúmenes y las tasas que se aplican a todas las operaciones realizadas, en directo y en reporto con títulos gubernamentales a través de ellas. Cabe señalar que en el presente cálculo sólo se consideran las operaciones en directo cuya fecha de liquidación sea mismo día, 24 48, 72 y 96 horas. Por esta razón y para poder hacer comparables las tasas de rendimiento es necesario determinar una tasa de interés a 24 horas por medio de la cual se puedan homologar las tasas de rendimiento de las operaciones con liquidación a 24, 48, 72 y 96 horas con las operaciones mismo día.

En términos algebraicos se reduce al siguiente cálculo, si denotamos R_{ij}, la tasa de rendimiento a homologar; m al plazo en número de días entre la fecha de vencimiento del título y la fecha de concertación; l como el número de días entre la fecha de liquidación y la fecha de concertación de la operación; y r^f, como la tasa de rendimiento a 24 horas. La tasa de rendimiento homologada, r_{ij}^h, será aquella que satisfaga la siguiente relación:

$$\left(1+r_{ij}^h\frac{m}{360}\right)=\left(1+r^f\frac{l}{360}\right)\left(1+R_{ij}\frac{m-l}{360}\right) \qquad (1)$$

Una vez homologadas las tasas, se procede a obtener tasas ponderadas para cada uno de los distintos plazos operados. Para esto último se utiliza como factor de ponderación el volumen de operación, V_{ij}. De esta forma se obtiene una tasa representativa para cada plazo operado, de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$r_j = \sum_i r_{ij}^h V_{ij} \quad \sum_i V_{ij} \qquad (2)$$

3) FORMULA NO PARAMETRICA

En esta sección se presenta la fórmula empleada para estimar, de forma no paramétrica, el valor esperado de la tasa de rendimiento de cada uno de los cetes vigentes en el mercado. Para ello se toman como base las tasas de rendimiento homologadas y ponderadas determinadas en la sección anterior.

El cálculo consiste en aproximar el valor esperado de una tasa de rendimiento para cada plazo de operación específico d, por la siguiente fórmula:

$$r_d^* = \sum_{j=1}^{n} r_j K\left[h_d^{-1}(d_j - d)\right] \quad \sum_{j=1}^{n} K\left[h_d^{-1}(d_j - d)\right] \qquad (3)$$

Donde

$$K\left[h_d^{-1}(d_j - d)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(h_d^{-1}(d_j - d))}$$

y

$$h_d = 50\left(1 - e^{-0.05d}\right)$$

Aplicando la ecuación (3) se obtiene una estimación para cada plazo, de las tasas de rendimiento de los Cetes. Esta última se basa en un promedio ponderado de todas las tasas observadas en el mercado. Donde las ponderaciones están dadas por factores que dependen de que tan distantes, en el plazo, estén las observaciones de mercado con respecto al plazo para el cual se está realizando la estimación. Una vez estimadas lasa tasas de rendimiento para cada Cete vigente, se calcula los precios correspondientes utilizando la siguiente relación:

$$p_d^* = 10 \left(1 + r_d^* \frac{d}{360}\right)$$

1 La información necesaria para llevar a cabo la valuación de los instrumentos es obtenida diariamente de las siguientes fuentes: Enlaces Pebron, EuroBrokers, Remate Electrónico, SIF e Indeval.

2 En caso de no existir hechos en el mercado, el Banco de México considerará para el cálculo posturas informativas de los precios de estos títulos, que a su juicio considere representativas de las condiciones del mercado.

3 Ver sección 2, para la descripción del proceso de homologación de tasas.

4 La tasa de fondeo a un día es la Tasa Ponderada de Fondeo Gubernamental calculada diariamente por el Banco de México, expresada en rendimiento.

Básicamente el funcionamiento de la metodología se puede resumir de la siguiente forma:

- En base a los distintos precios de los bonos a un determinado plazo, se realiza un promedio ponderado por el monto.
- Una vez que se han obtenido estos puntos de mercado ponderados se trata de ajustar

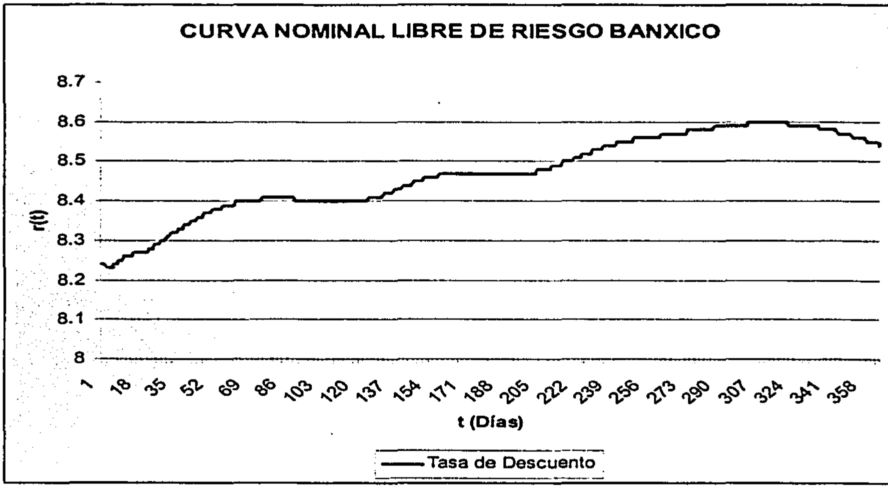
Instrumento	Venc.	Plazo	Precio	Tasa de Desc	Tasa de Rend
B	020214	3	9.993138	8.23	8.24
B	020221	10	9.977077	8.25	8.27
B	020228	17	9.960963	8.27	8.30
B	020307	24	9.944805	8.28	8.33
B	020314	31	9.928496	8.30	8.36
B	020320	37	9.914418	8.33	8.40
B	020327	44	9.897928	8.35	8.44
B	020404	52	9.879048	8.37	8.48
B	020411	59	9.862530	8.39	8.50
B	020418	66	9.846037	8.40	8.53
B	020425	73	9.829588	8.40	8.55
B	020502	80	9.813194	8.41	8.57
B	020509	87	9.796857	8.41	8.58
B	020516	94	9.780571	8.40	8.59
B	020530	108	9.748053	8.40	8.62
B	020613	122	9.715289	8.40	8.65
B	020627	136	9.681822	8.42	8.70
B	020711	150	9.647820	8.45	8.76
B	020725	164	9.614188	8.47	8.81
B	020808	178	9.581227	8.47	8.84
B	020905	206	9.514931	8.48	8.91
B	021031	262	9.376607	8.57	9.14
B	021226	318	9.240643	8.60	9.30

Fuentes: Consar, Enlaces Prebon, Eurobrokers, Remate Electrónico, SIF-Garban Intercapital, Indeval y Banco de México.

Curva de Tasas 11 de Febrero de 2002

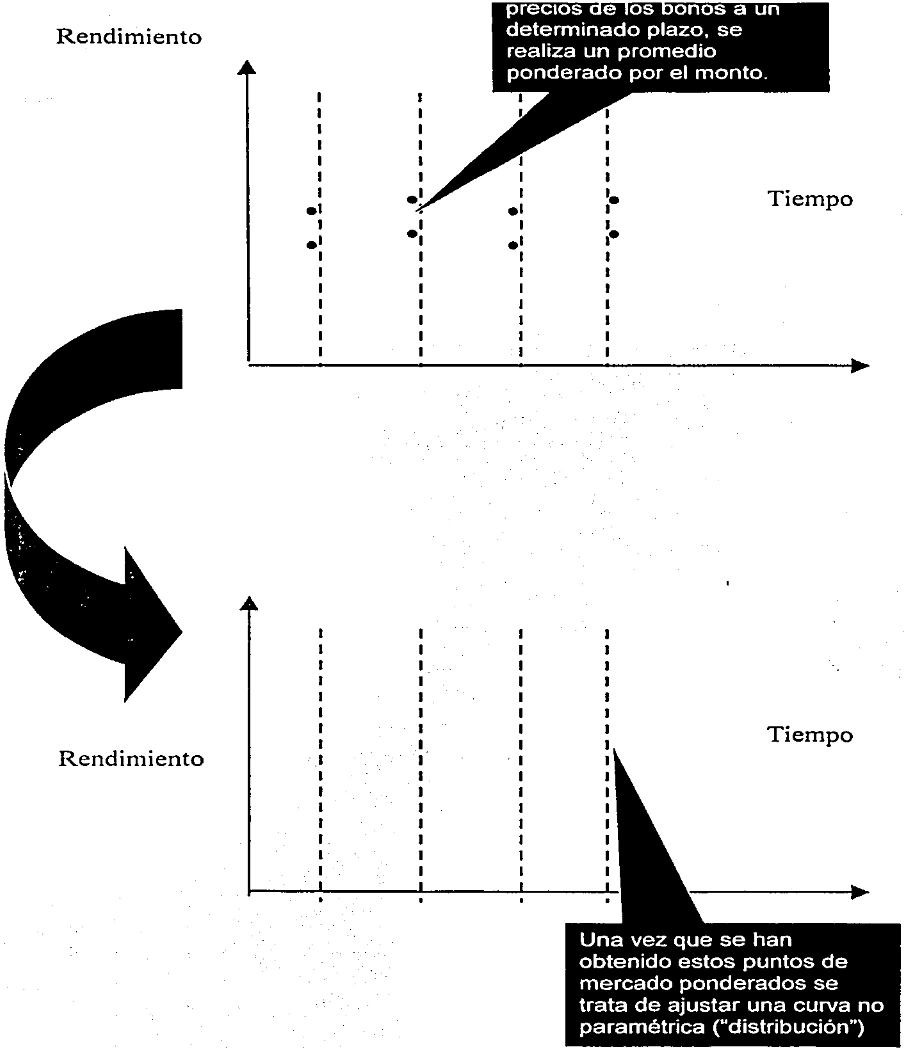
Estos precios fueron determinados utilizando la metodología descrita en el método de valuación y los precios reportados por las siguientes casas de corretaje:
-Consar
-Enlaces Prebon
-Eurobrokers

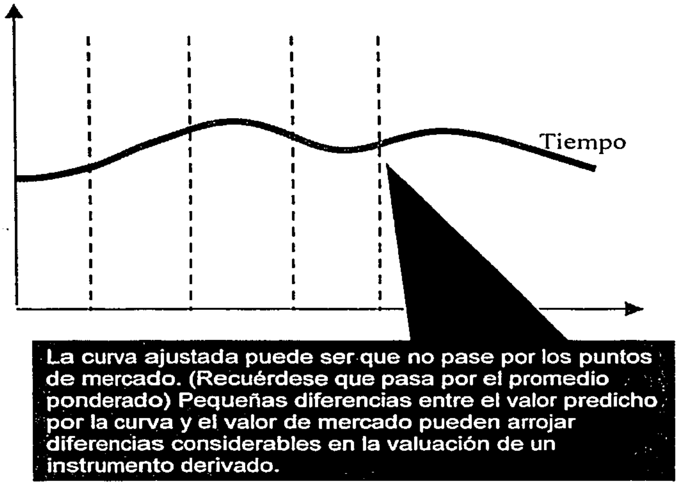
-Remate Electrónico
-SIF-Garban Intercapital
-Indeval
-Banco de México

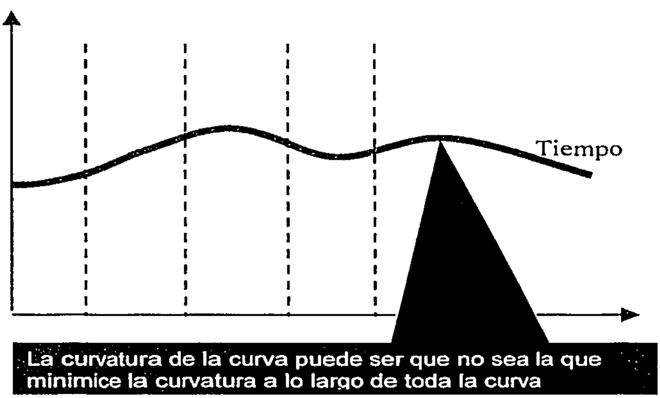


Problemas que genera:

- La curva ajustada puede ser que no pase por los puntos de mercado. (Recuérdese que pasa por el promedio ponderado) Pequeñas diferencias entre el valor predicho por la curva y el valor de mercado pueden arrojar diferencias considerables en la valuación de un instrumento derivado.
- La curva ajustada puede ser que no pase por los puntos de mercado. Más aún, cualquier valuación de algún instrumento derivado de esta curva puede estar muy alejada de la valuación correcta.
- La curvatura de la curva puede ser que no sea la que minimice la curvatura a lo largo de toda la curva.
- Además, la curva de tasas forward tenderá a ser volátil, particularmente en la parte derecha de la curva, en algunas ocasiones en tal medida que sea inutilizable.


precios de los bonos a un
determinado plazo, se
realiza un promedio
ponderado por el monto.
Rendimiento
Tiempo
Tiempo
Rendimiento
Una vez que se han
obtenido estos puntos de
mercado ponderados se
trata de ajustar una curva no
paramétrica ("distribución")


Tiempo
Tiempo
La curva ajustada puede ser que no pase por los puntos de mercado. (Recuérdese que pasa por el promedio ponderado) Pequeñas diferencias entre el valor predicho por la curva y el valor de mercado pueden arrojar diferencias considerables en la valuación de un instrumento derivado.


Tiempo
La curvatura de la curva puede ser que no sea la que minimice la curvatura a lo largo de toda la curva

Una vez descrito el método de valuación se pueden extraer las siguientes características:

- Este método no es una representación puntual de las tasas de mercado en un momento dado de tiempo; por el contrario refleja la información de las distintas cotizaciones que se dieron a lo largo del día.

Lo anterior trae consigo algunas consecuencias importantes:

- La curva generada no será consistente en ningún momento del día con los puntos de mercado.
- Esta curva no cumple con el criterio de máximo suavizamiento inclusive, las tasas forward de ellas derivadas pueden ser financieramente inválidas.
- Muestra muy bien cuales fueron las tasas predominantes a lo largo del día, no sólo en un momento dado del tiempo, lo cual permite al final del día tener una mejor sensibilidad del mercado.

3.2 METODOLOGÍA DE NELSON-SIEGEL(Exposición y justificación): CASO BMV:

3.2.1Metodología anterior de la Bolsa Mexicana de Valores

INFORMACIÓN REQUERIDA:

1) El conjunto de la información estadística se deriva de las operaciones realizadas dentro y fuera de Bolsa, que son reportados diariamente a la BMV.

2) La información que se utiliza para la estimación de precios integra operaciones de contado y de reporto con liquidación mismo día y liquidación 24 horas y 48 horas realizadas con cetes.

3) Esta información comprende lo siguiente:

- Tipo de operación: de contado o reporto.
- Tipo de liquidación : mismo día ,24 horas o 48 horas.
- Volumen operado (número de títulos).
- Serie (AA MM DD).
- Para las operaciones de contado : la tasa de descuento.
- Para las operaciones de reporto:
- los días del reporto.
- la tasa premio.
- la tasa de descuento de entrada.

METODOLOGÍA PARA LA ESTIMACIÓN DE LOS PRECIOS:

1)Formar los bloques de operaciones y obtener los días plazo.

- Para las operaciones de contado :

  DP = Serie - Fecha de valuación.

- Para las operaciones de reporto:
- Para los reportos de tipo "R" (cuando se consideran los días del reporto y la tasa premio) :

  DP = Días del reporto.

- Para los reportos de tipo "T" (cuando se considera la tasa de descuento de entrada):

  DP = Serie - Fecha de valuación.

2)La tasa premio es convertida a tasa de descuento mediante la siguiente fórmula:

$$TD = \frac{1}{\frac{1}{TP} + \frac{DP}{36000}}$$

donde:

- TD es la tasa de descuento, en porcentaje.
- TP es la tasa premio, en porcentaje.
- DP son los días del reporto.

3)Determinar el plazo mínimo pactado de las operaciones con liquidación mismo día tanto de las operaciones en directo como las de reportos (los de tipo "R").Este plazo mínimo puede ser:

- de un día, cuando el día siguiente de la operación pactada sea hábil.
- de dos días, cuando el día siguiente sea inhábil y el posterior hábil.
- de tres días, cuando la operación se pactó en viernes siendo el lunes el siguiente día hábil o cuando los siguientes dos días sean inhábiles.
- mayor de tres días, cuando un fin de semana es seguido o antecedido por días feriados.

4)Se calcula una tasa promedio ponderada (por el volumen) de las operaciones con liquidación mismo día efectuadas en este plazo mínimo .Está tasa se denotará con TDmin.

5)Se ajustan los días del reporte de las operaciones de reporto con liquidación mayor al mismo día del siguiente modo:

Tipo de liquidación	Añadirle a los días del reporte
24 horas	El número de días hasta el siguiente día hábil (m1).
48 horas	El número de días hasta el segundo día hábil siguiente (m2).

6) La equivalencia de las operaciones de 24 y 48 horas tanto de reportos como de contado a mismo día se realiza mediante la siguiente fórmula:

$$TD^{MD} = \left[1-\left(1-TD^{24k} * \frac{DP-m_k}{36000}\right)*\left(1-TD_{MIN} * \frac{m_k}{36000}\right)\right]*\frac{36000}{DP}$$

donde:

- TD^{MD} es la tasa de descuento con liquidación mismo día.
- TD^{24k}es la tasa de descuento de las operaciones con liquidación 24 y 48 horas considerando k= 1 y 2 respectivamente.
- TD_{MIN}es la tasas de descuento correspondiente al plazo mínimo.
- DP son los días plazo de la operación (para el caso de los reportos tipo "R" será los días del reporte ajustado).
- m_K es el número de días hasta el primer y segundo día hábil siguiente considerando k= 1 y 2 respectivamente.

7)Se integran las tasas de descuento (TD) de las operaciones de contado y de reporto y se ordenan por días plazo. Para cada día plazo se obtiene la Tasa de Descuento Promedio de Mercado(TDM) siendo el ponderador el volumen correspondiente, es decir:

$$TDM = \sum_i TD_i * V_i \;\; \sum_i V_i$$

donde el índice i recorre las operaciones con idéntico días plazo.

8)Se calculan los Precios Promedio de Mercado (PPM) para cada día plazo, mediante:

$$PPM = 10 * \left[1 - \frac{TDM * DP}{36000} \right]$$

9)La estimación de la estructura intertemporal de precios se realiza considerando lo siguiente:

MODELO: $p(t) = 10 * \left[1 - \left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3\right)t\right]$ (1)

FUNCIÓN OBJETIVO: $\min_{\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3} \sum_{i=1}^{n} [PPM_i - p(t_i)]^2 \cdot \overline{V_i} + \left(0.2 \sum_{i=1}^{n} \overline{V_i}\right) r'_{(t=t_E)}{}^2$ (2)

donde:

- n es el número de días plazo operados.
- t_i es el i-ésimo día plazo operado, anualizado (t_i=DP_i /360).
- PPM_i es el precio promedio de mercado para el plazo i.
- $p(t_i)$es el precio estimado para el plazo i.
- V_i es el volumen asociado al plazo i.
- r es la función tasa de descuento:
- r' es la derivada de r :
- t_E es el último día plazo estimado, es igual a 2.
- $\beta_0, \beta_1, \beta_2, y \beta_3$ son los parámetros por determinar.

RESTRICCIÓN:

$$\beta_0 = \beta_0 \equiv \left(\sum_{i=1}^{5} TDM_i * \overline{V_i} \right) \sum_{i=1}^{5} \overline{V_i} \quad (3)$$

donde:

- TDM_i es la tasa de descuento promedio de mercado para el plazo i, en fracción de la unidad.

Los parámetros $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ se obtienen mediante la solución matricial del sistema de ecuaciones lineales generadas por las condiciones de primer orden.

10)Una vez calculados los parámetros betas, queda determinado el polinomio de cuarto grado que define la función de precios estimados para los días plazo de 1 hasta 720,mediante:

$$PPE_j = 10 * \left[1 - \left(\beta_0 + \beta_1 t_1 + \beta_2 t_j^2 + \beta_3 t_j^3\right)t_j\right]$$

donde:

- PPE_j es el precio promedio estimado ; j=1,2,......,720.
- t_j son los días plazo anualizado (t_j=DP_j /360).
- $\beta_1, \beta_2 y \beta_3$ son los parámetros estimados a partir de la minimización de la función objetivo.
- β_0 es el parámetro que se calcula como se señala en la restricción (3).

11) Las Tasas de Descuento Promedio Estimadas se obtienen con la expresión :

$$TDE = \left(\frac{10 - PPE}{10} \right) * \left(\frac{36000}{DP} \right)$$

donde:

- TDE es la tasa de descuento promedio estimada, en porcentaje.
- PPE es el precio promedio estimado.
- DP son los días plazo (de 1 hasta 720 días).

DESARROLLO ALGEBRAICO DEL MÉTODO BMV-BANIXCO PARA LA VALUACIÓN DE CETES.

MODELO: $p(t) = 10 * \left[1 - \left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3\right)t\right]$

FUNCIÓN OBJETIVO: $\min_{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3} \sum_{i=1}^{n} [PPM_i - p(t_i)]^2 \cdot \overline{V_i} + \left(0.2 \sum_{i=1}^{n} \overline{V_i}\right) r'_{(t=t_E)}{}^2$

donde:

$p(t_i)$= Precio estimado.

n= Número de días plazo operados.

t_i=i-ésimo día plazo operado, anualizado.

PPM_i=Precio promedio del mercado.

V_i= Volumen

r= Función tasa de descuento: $\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$

r'= Derivada de r : $\beta_1 + 2\beta_2 t + 3\beta_3 t^2$

t_E = Último día plazo estimado.

$\beta_0, \beta_1, \beta_2 y \beta_3$ son los parámetros por determinar.

RESTRICCIÓN: $\beta_0 = \beta_0 \equiv \left(\sum_{i=1}^{5} TDM_i * \overline{V_i}\right) \sum_{i=1}^{5} \overline{V_i}$

donde:

DP_i=Días plazo.

TDM_i= Tasa de descuento promedio de mercado, en fracción de la unidad.

PROCEDIMIENTO:

Sustituyendo $p(t_i) y r'_{(t=t_E)}$ en la función objetivo:

$$\min_{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3} \sum \left[PPM_i - 10 + 10\left(\beta_0 t_i + \beta_1 t_i^2 + \beta_2 t_i^3 + \beta_3 t_i^4\right)\right]^2 \cdot \overline{V_i} + \varphi\left[\beta_1 + 2\beta_2 t_E + 3\beta_3 t_E^2\right]^2$$

donde: $\varphi = 0.2 \sum_{i=1}^{n} \overline{V_i}$

Incorporando la restricción β_0 sobre en la función objetivo.

donde: $\beta_0 = \beta_0 \equiv \left(\sum_{i=1}^{5} TDM_i * \overline{V_i}\right) \sum_{i=1}^{5} \overline{V_i}$ y $\varphi = 0.2\sum_{i=1}^{n} \overline{V_i}$

Por las condiciones de primer orden .

β_1 :

$$2\sum\left[PPM_i - 10 + 10(\beta_0 t_i + \beta_1 t_i^2 + \beta_2 t_i^3 + \beta_3 t_i^4)\right]\left[10t_i^2 \overline{V_i}\right] + 2\varphi(\beta_1 + 2\beta_2 t_E + 3\beta_3 t_E^2) = 0$$

β_2 :

$$2\sum\left[PPM_i - 10 + 10(\beta_0 t_i + \beta_1 t_i^2 + \beta_2 t_i^3 + \beta_3 t_i^4)\right]\left[10t_i^3 \overline{V_i}\right] + 2\varphi(\beta_1 + 2\beta_2 t_E + 3\beta_3 t_E^2)\left[2t_E\right] = 0$$

β_3 :

$$2\sum\left[PPM_i - 10 + 10(\beta_0 t_i + \beta_1 t_i^2 + \beta_2 t_i^3 + \beta_3 t_i^4)\right]\left[10t_i^4 \overline{V_i}\right] + 2\varphi(\beta_1 + 2\beta_2 t_E + 3\beta_3 t_E^2)\left[3t^2{}_E\right] = 0$$

Dividiendo las ecuaciones entre 2 y realizando los productos parciales tenemos que:

β_1 :

$$10\sum\left[(PPM_i - 10 + 10\beta_0 t_i)t_i^2 + 10\beta_1 t_i^4 + 10\beta_2 t_i^5 + 10\beta_3 t_i^6\right]\overline{V_i} + \varphi(\beta_1 + 2\beta_2 t_E + 3\beta_3 t_E^2) = 0$$

β_2 :

$$10\sum\left[(PPM_i - 10 + 10\beta_0 t_i)t_i^3 + 10\beta_1 t_i^5 + 10\beta_2 t_i^6 + 10\beta_3 t_i^7\right]\overline{V_i} + 2\varphi(\beta_1 + 2\beta_2 t_E + 3\beta_3 t_E^2)_E = 0$$

β_3 :

$$10\sum\left[(PPM_i - 10 + 10\beta_0 t_i)t_i^4 + 10\beta_1 t_i^6 + 10\beta_2 t_i^7 + 10\beta_3 t_i^8\right]\overline{V_i} + 3\varphi(\beta_1 + 2\beta_2 t_E + 3\beta_3 t_E^2)^2{}_E = 0$$

Continuando con los productos parciales.

β_1 :

$$10\sum\left[(PPM_i - 10 + 10\beta_0 t_i)t_i^2\right]\overline{V_i} + 10\sum\left[10\beta_1 t_i^4\right]\overline{V_i} + 10\sum\left[10\beta_2 t_i^5\right]\overline{V_i} + 10\sum\left[10\beta_3 t_i^6\right]\overline{V_i}$$
$$+ \varphi(\beta_i + 2\beta_2 t_E + 3\beta_3 t_E^2) = 0$$

β_2 :

$$10\sum\left[(PPM_i - 10 + 10\beta_0 t_i)t_i^3\right]\overline{V_i} + 10\sum\left[10\beta_1 t_i^5\right]\overline{V_i} + 10\sum\left[10\beta_2 t_i^6\right]\overline{V_i} + 10\sum\left[10\beta_3 t_i^7\right]\overline{V_i}$$
$$+ 2\varphi t_E\left(\beta_i + 2\beta_2 t_E + 3\beta_3 t_E^2\right) = 0$$

β_3 :

$$10\sum\left[(PPM_i - 10 + 10\beta_0 t_i)t_i^4\right]\overline{V_i} + 10\sum\left[10\beta_1 t_i^6\right]\overline{V_i} + 10\sum\left[10\beta_2 t_i^7\right]\overline{V_i} + 10\sum\left[10\beta_3 t_i^8\right]\overline{V_i}$$
$$+ 3\varphi t^2{}_E\left(\beta_i + 2\beta_2 t_E + 3\beta_3 t_E^2\right) = 0$$

Factorizando términos comunes en los parámetros $\beta_1, \beta_2, y \beta_3$

β_1 :

$$\left[100\sum t_i^4 \cdot \overline{V_i} + \varphi\right]\beta_1 + \left[100\sum t_i^5 \cdot \overline{V_i} + 2\varphi t_E\right]\beta_2 + \left[100\sum t_i^6 \cdot \overline{V_i} + 3\varphi t_E^2\right]\beta_3$$
$$= 10\sum\left[(10 - PPM_i - 10\beta_0 t_i)t_i^2\right]\overline{V_i}$$

β_2 :

$$\left[100\sum t_i^5 \ \overline{V_i} + 2\varphi t_E\right]\beta_1 + \left[100\sum t_i^6 \ \overline{V_i} + 4\varphi t^2{}_E\right]\beta_2 + \left[100\sum t_i^7 \ \overline{V_i} + 6\varphi t_E^3\right]\beta_3$$
$$= 10\sum\left[(10 - PPM_i - 10\beta_0 t_i)t_i^3\right]\overline{V_i}$$

β_3 :

$$\left[100\sum t_i^6 \cdot \overline{V_i} + 3\varphi t^2{}_E\right]\beta_1 + \left[100\sum t_i^7 \ \overline{V_i} + 6\varphi t^3{}_E\right]\beta_2 + \left[100\sum t_i^8 \ \overline{V_i} + 9\varphi t_E^4\right]\beta_3$$
$$= 10\sum\left[(10 - PPM_i - 10\beta_0 t_i)t_i^4\right]\overline{V_i}$$

Expresando la ecuación en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 100\sum t_i^4 \ \overline{V_i} + \varphi & 100\sum t_i^5 \ \overline{V_i} + 2\varphi t_E & 100\sum t_i^6 \ \overline{V_i} + 3\varphi t_E^2 \\ 100\sum t_i^5 \ \overline{V_i} + 2\varphi t_E & 100\sum t_i^6 \ \overline{V_i} + 4\varphi t_E^2 & 100\sum t_i^7 \ \overline{V_i} + 6\varphi t_E^3 \\ 100\sum t_i^6 \ \overline{V_i} + 3\varphi t_E^2 & 100\sum t_i^7 \ \overline{V_i} + 6\varphi t_E^3 & 100\sum t_i^8 \ \overline{V_i} + 9\varphi t_E^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 10\sum\left[10 - PPM_i - 10\beta_0 t_i\right]t_i^2 \cdot \overline{V_i} \\ 10\sum\left[10 - PPM_i - 10\beta_0 t_i\right]t_i^3 \cdot \overline{V_i} \\ 10\sum\left[10 - PPM_i - 10\beta_0 t_i\right]t_i^4 \cdot \overline{V_i} \end{bmatrix}$$

Donde : $\beta_0 = \beta_0 \equiv \left(\sum_{i=1}^{5} TDM_i * \ \overline{V_i}\right) \ \sum_{i=1}^{5} \overline{V_i}$ y $\varphi = 0.2\sum_{i=1}^{n} \overline{V_i}$

La solución matricial es:

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100\sum t_i^4\ \overline{V_i}+\varphi & 100\sum t_i^5\ \overline{V_i}+2\varphi t_E & 100\sum t_i^6\ \overline{V_i}+3\varphi t_E^2\\ 100\sum t_i^5\ \overline{V_i}+2\varphi t_E & 100\sum t_i^6\ \overline{V_i}+4\varphi t_E^2 & 100\sum t_i^7\ \overline{V_i}+6\varphi t_E^3\\ 100\sum t_i^6\ \overline{V_i}+3\varphi t_E^2 & 100\sum t_i^7\ \overline{V_i}+6\varphi t_E^3 & 100\sum t_i^8\ \overline{V_i}+9\varphi t_E^4\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}10\sum[10-PPM_i-10\beta_0 t_i]t_i^2\ \overline{V_i}\\ 10\sum[10-PPM_i-10\beta_0 t_i]t_i^3\ \overline{V_i}\\ 10\sum[10-PPM_i-10\beta_0 t_i]t_i^4\ \overline{V_i}\end{bmatrix}.$$

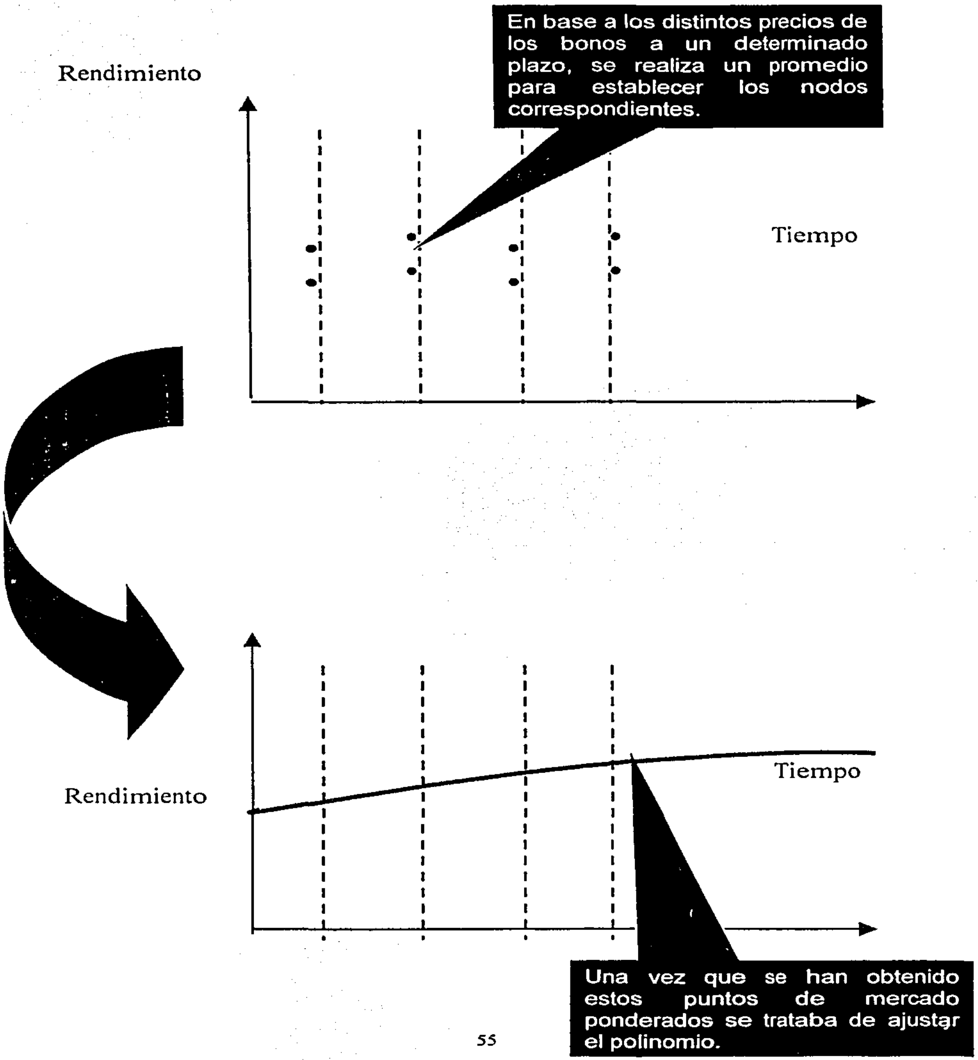
Básicamente el funcionamiento de la metodología se puede resumir de la siguiente forma:

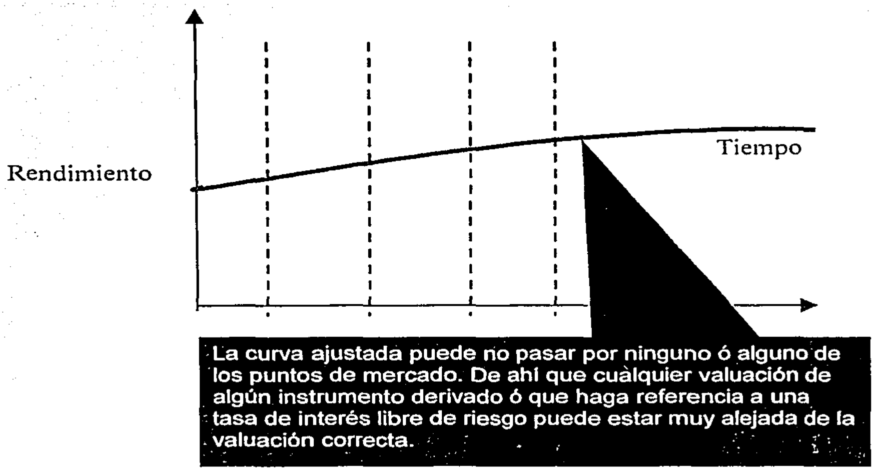
- La bolsa mexicana de valores ajusta un polinomio de cuarto orden a toda la serie de puntos de mercado.En base a los distintos precios de los bonos a un determinado plazo, se realiza un promedio ponderado por el monto. Una vez que se han obtenido estos puntos de mercado ponderados se trata de ajustar un polinomio para TODOS los datos de mercado.

Problemas que genera: La curva ajustada puede no pasar por ninguno de los puntos de mercado. De ahí que cualquier valuación de algún instrumento derivado puede estar muy alejada de la valuación correcta.

- A pesar de las condiciones a las que está sujeto el modelo es bien sabido en matemáticas que cuando a un polinomio de esa naturaleza se le hace tender hacia el infinito, este se comporta de una manera muy irregular, por lo que dependiendo de sus coeficientes y de sus signos este puede tender hacia $(-\infty, \acute{o}, +\infty)$ lo cual no es razonable cuando se quiere lograr una buena aproximación.

- La curva de tasas forward generada a partir de está metodología no es dos veces diferenciable en los puntos de mercado, y por lo tanto no es suave. La primera derivada de la curva de tasas forwards tendrá una discontinuidad en cada punto de mercado.
- Además, la curva de tasas forward tenderá a ser volátil, particularmente en la parte derecha de la curva, en algunas ocasiones en tal medida que sea inutilizable.


En base a los distintos precios de los bonos a un determinado plazo, se realiza un promedio para establecer los nodos correspondientes.
Rendimiento
Tiempo
Rendimiento
Tiempo
Una vez que se han obtenido estos puntos de mercado ponderados se trataba de ajustar el polinomio.


Rendimiento
Tiempo
La curva ajustada puede no pasar por ninguno ó alguno de los puntos de mercado. De ahí que cuàlquier valuación de algún instrumento derivado ó que haga referencia a una tasa de interés libre de riesgo puede estar muy alejada de la valuación correcta.

3.2.2 JUSTIFICACIÓN Y EXPOSICIÓN DEL MODELO DE NELSON- SIEGEL COMO SUBSTITUTO DEL POLINOMIO DE CUARTO GRADO SEGÚN BMV (VALMER).

La primer y más importante limitante del polinomio de cuarto grado es que no tiene ningún fundamento teórico para aplicarse a tasas de interés. El uso de un polinomio para tratar de estimar de la mejor manera los datos reales sin proveer ninguna justificación para la estructura intertemporal de tasas, tal como, un proceso de difusión. Esto debido a que la mayoría de las de las teorías actuales sobre las tasas de interés (Ho and Lee,Vasicek, Nelson-Siegel,Hull-White) están basadas en un proceso de difusión específico de cómo podrían evolucionar a través del tiempo. Por lo tanto y debido a la falta de fundamentos teóricos que justifiquen el uso del polinomio, podemos decir que sus estimaciones realmente no producen resultados realistas y congruentes con un mercado de baja liquidez donde todos los instrumentos gubernamentales tienen un plazo menor a un año. En particular un estudio conducido por Shea (1983,!985) que las estructuras intertemporales producidas por los polinomios tienden a incrementar su pendiente conforme más grande sea la madurez estimar. Lo cual no es realista por lo que esto demuestra que los polinomios tiene grandes limitantes para estimar estructuras intertemporales de largo plazo.
Además la mayoría de los polinomios incluyen por lo menos un término lineal el cual forza los términos de largo plazo a tender a valores muy grande, lo cual hace la extrapolación muy difícil. Y está es una limitación muy importante cuando se quiere valuar instrumento que pagan cupón y el principal a más de un año de la fecha de su valuación. Finalmente el sistema de ecuaciones incrustado en la metodología del polinomio puede ser sobre parametrizada lo cual significa que puede tener más de un máximo y por lo tanto presentar ondulaciones. En general se prefiere una estructura intertemporal monótica debido a que está refleja de manera más eficiente la relación riesgo-rendimiento implícita en la estructura intertemporal de tasas.

EL MODELO DE HO AND LEE:

El modelo de Ho and Lee está basado en el siguiente proceso de difusión:

$$dr = \theta(t)\partial t + \sigma\partial z$$

donde

σ = Es la desviación estándar instantánea de la tasa de corto plazo y la cual se asume constante a través del tiempo.

$\theta(t)$ = Es una función del tiempo escogida para asegurar que el modelo se ajuste a la estructura intertemporal inicial.

Y en donde los precios están dados por:

$$P(t,T) = A(t,T)^{-r(t)(T-t)}$$

donde

$r(t)$ = La tasa de interés de corto plazo.

$$\ln A(t,T) = \ln \frac{P(0,T)}{P(0,t)} - (T-t)\frac{\partial \ln P(0,t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 t(T-t)^2$$

Y

$$\frac{\partial P(0,T)}{\partial t} \approx \frac{\ln P(0,t+\varepsilon) - \ln P(0,t-\varepsilon)}{2 * \varepsilon}$$

Limitaciones del modelo de Ho and Lee:

La crítica más común del modelo Ho and Lee es que da muy poca flexibilidad para escoger la vólatilidad. Todas las tasas spot y las forward se asume que tiene la misma desviación estándar. Además el proceso de difusión no tiene reversión a la media.
Pero la limitación más importante y la más común señalada en este modelo es que, se necesita asumir un cierto nivel de las tasas forward , el cual se cree es aún más difícil aún que predecir la estructura intertemporal actual de las tasas de interés.

MODELO HULL AND WHITE:

Descripción del Modelo Hull and White:

El modelo de Hull and White es una extensión del Vasicek y como es sabido está basado en el siguiente proceso de difusión:

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dz$$

(extensiones de los modelos Ho and Lee y del Vasicek

$$dr = a\left[\frac{\theta(t)}{a} - r\right]dt + \sigma dz$$

respectivamente).

Donde a y σ son constantes. Por lo que el Hull and White puede ser visto como el modelo de Ho and Lee con reversión a la media hacia la tasa a. Y también puede ser asociado con el modelo Vasicek debido a que este modelo se puede considerar un Vasicek pero con proceso de reversión hacia la media que depende del tiempo. Y que es igual a $\theta(t)/a$ con una velocidad a. Esto lo que muestra es que las tasas de interés r en promedio siguen aproximadamente la pendiente inicial de la curva de tasas forward instantáneas. Y cuando estas se desvían de la pendiente de está curva regresan a la tasa promedio a.

De acuerdo con el modelo de Hull and White, los precios de los bonos se definen por:

$$P(t,T)=A(t,T)*\exp^{-B(t,T)*r(t)}$$

donde

$$B(t,T)=\frac{1-\exp^{-a(T-t)}}{a}$$

Y

$$\ln A(t,T)=\ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)}-B(t,T)\partial\frac{\ln P(0,t)}{\partial t}-\frac{1}{4a^3}\sigma^2\left(e^{-aT}\right)$$

Limitaciones del Modelo de Hull and White:

Notemos que:

$$\partial\frac{\ln P(0,t)}{\partial t}\approx\frac{\ln P(0,t+\varepsilon)-\ln P(0,t-\varepsilon)}{2*\varepsilon}$$

Está expresión es la que nos da la aproximación de la pendiente de la estructura intertemporal de tasas ó la curva inicial de las tasas forward instantáneas. En otras palabras ,se debe asumir cual será la curva inicial de las tasas forward instantáneas para poder obtener la estructura intertemporal de tasas. Por lo tanto si no se hace una estimación correcta de cuales serían las tasas forward en un futuro, afectaría de manera importante la forma de la estructura intertemporal de tasas, producida por este modelo. Se considera al modelo de Hull and White es un modelo teóricamente bien fundamentado pero su falla en definir claramente una expresión de cómo evolucionarán las tasas forward a través del tiempo reduce lo práctico del modelo.

EL MODELO DE NELSON-SIEGEL:

El modelo de Nelson-Siege,l según VALMER, se puede considerar una extensión del modelo de Hull and White en el sentido de que también se fundamenta en un proceso similar de difusión cuando un factor de reversión a la media es tomado en cuenta. Sin embargo, opuestamente al modelo de Hull and White, el modelo de Nelson-Siegel claramente define una expresión para la evolución de las tasas forward instantáneas. Además, es un modelo que ha sido probado con éxito en otros mercados como el de los E.U. Por lo tanto se propuso la metodología de extrapolación de Nelson-Siegel para crear una curva nominal de tasas libres de riesgo.

Justificación para el Modelo de Nelson-Siegel:

El primer artículo del Nelson-Siegel fue publicado en el Journal of Business 1987. En este artículo NS explicaron la necesidad de un "parsimonious model" el cual no incluiría un término lineal en su algoritmo, por lo cual proporcionaría mejores estimaciones provenientes de extrapolaciones al final de los vencimientos en la estructura intertemporal de tasas de interés. En otras palabras está metodología fue presentada y enfocada al problema de linealidad presentado por los modelos polinomiales. También podemos decir que el Modelo de Nelson-Siegel puede verse como un subconjunto de la estructura intertemporal producida por el modelo de Hull and

White. Es decir que, la mejor y la principal ventaja que presenta el Modelo de Nelson-Siegel es, que explícitamente propone un función que describe la futura evolución de la tasas forward. Por lo cual, los dos modelos expuestos anteriormente dejaron esa parte sin resolver.

La expresión del Modelo Nelson-Siegel para las tasas Forward:

Nelson-Siegel está basado en la premisa de que, existe un conjunto de ecuaciones diferenciales que generan las curvas de rendimiento típicamente encontradas en los mercados (Monótica, invertida, creciente). El modelo también asume que estas ecuaciones son diferenciables hasta el segundo orden. Y asumiendo que la teoría de las expectaciones se mantiene podemos asumir que las tasas forward que están siendo estimadas, serán las soluciones a estas ecuaciones. En otras palabras, la pendiente de la estructura intertemporal de tasas en diferentes puntos a través del tiempo provee la tasa forward instantánea implícita en el modelo. Hasta aquí esto parece ser consistente con los modelos Hull and White y Ho and Lee. La mayor distinción a comparación de estos modelos es que el NS sugiere un conjunto de ecuaciones para resolver. Principalmente, los autores están proponiendo ecuaciones diferenciales de segundo orden con raíces reales iguales para representar la tasa forward instantánea r con vencimiento m.

$$r(m)=\beta_0+\beta_1 * \exp\left(\frac{-m}{T}\right)+\beta_2 * \left(\frac{m}{T}\right) * \exp\left(\frac{-m}{T}\right)$$

Esta modelo también puede ser visto como una constante más la función de Laguerre la cual sugiere un método para generalizar modelos de alto orden. La función de Laguerre en tiempos polinomiales y un término de decremento exponencial y son una clase de funciones matemáticas de aproximación.

$$Componente1=\beta_0$$

El primer componente de la ecuación para las forward puede ser visto como la contribución del largo plazo. Ya que los otros dos componentes convergirán a cero con forme los vencimientos se incrementen debido a que estos están multiplicados por el término de decremento exponencial.

$$Componente2=\beta_1 * \exp\left(\frac{-m}{T}\right)$$

El segundo componente puede ser visto como la contribución del término de corto plazo. Este componente es muy importante en vencimientos de corto plazo , pero este converge rápidamente a cero conforme los vencimientos se incrementan. Tiene el decaimiento más rápido de todas las funciones.

$$Componente3=\beta_2 * \left(\frac{m}{T}\right) * \exp\left(\frac{-m}{T}\right)$$

Está función también tiene el decaimiento exponencial, pero también está multiplicada por m/T lo cual incrementa los vencimientos. Por lo que está función comienza en cero (cuando m=0) y se incrementa hasta el máximo antes de converger a cero otra vez.

DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE NELSON-SIEGEL:

Para obtener los rendimientos de los bonos cupón cero como una función de los plazos para las raíces iguales , simplemente se integra r() desde cero hasta m y se divide por m.

$$R(m)=\frac{1}{m}*\int_0^m r(m)dx$$

La función resultante es:

$$R(m)=\beta_0+(\beta_1+\beta_2)*\left[1-\exp\left(\frac{-m}{T}\right)\right]*\frac{T}{m}-\beta_2*\exp\left(\frac{-m}{T}\right)$$

Por lo tanto, la curva de tasas spot la cual es definida por el futuro comportamiento de las tasas forward, es completamente definido por los cuatro parámetros, $\beta_0,\beta_1,\beta_2,T$. Prácticamente β_0 es asociado con el largo plazo, $(\beta_0+\beta_1)$ está asociado con la tasa instantánea. Notar que β_1 es usualmente negativa cuando los intereses se incrementan a través del tiempo.

Principales características del Modelo Nelson-Siegel:

- Tasas forward monoticas.
- Curvas humped y sigmoid "S" .
- No permite ondulaciones (wiggles).(polinomios)
- Comportamiento de reversión a la media (hull and White)
- Asymmptotic flattering para tasas de largo plazo.
- Buena predicción (extrapolación).
- Buenos resultados con Treasury bills
- Ayuda a detectar systematic biases en los datos.
- Modela tasas forward a traves del tiempo, no precios. El modelo estima rendimientos no precios.

Propiedades del modelo de Nelson-Siegel:

Valores Límite:

$$R(m)\rightarrow b0cuando\_m\rightarrow 0$$

Esto implica que B0 es la tasa de interés de largo plazo. $R(m)$ converge al valor de largo plazo cuando m se hace más grande.

$$R(m)\rightarrow BO+B1cuando\_m\rightarrow 0$$

Esto implica que $B0+B1$, es la tasa de interés de corto plazo. $R(m)$ converge al valor de corto plazo cuando m se hace más pequeño. También implica que sí B1<0 , entonces los intereses de largo plazo son más altos que los de corto plazo.

ANALISYS DE LA TAU (T):

Tau define la velocidad a la cual B1 y B2 se aproximan a cero. 1/Tau corresponde a la tasas de reversión a la media en el modelo de Hull and White. Cuando Tau se hace más pequeña la reversión hacia la media se incrementa, y los valores de R(M) convergen más rápidamente al término de equilibrio de largo plazo B0. La Tau junto con el parámetro B2 determinan la curvatura de la negociación de corto plazo contra la curvatura de la negociación de largo plazo.

Limitaciones del Modelo de Nelson-Siegel:

La limitación más importante del Nelson-Siegel es que la casi nunca se ajustará a las observaciones de mercado. De hecho usualmente no se ajusta a las observaciones de mercado de corto plazo. Estas desventajas eventualmente nos llevarán al uso de dos metodologías una llamada polinomial para el corto plazo y el Nelson and Siegel para el largo plazo. En conclusión, la integración de estas dos metodologías no ha sido probada aún.

Implementación del modelo Nelson-Siegel:

En el modelo de Nelson-Siegel $\beta_0, \beta_1, \beta_2, T$ son cuatro variables exógenas. El primer paso para determinar el valor de cada parámetro es definir una Tau que sea consistente con el proceso de reversión a la media que siguen las tasas de interés. En general existe un problema para ajustar la curva en el corto y largo plazo de la estructura intertemporal de tasas. Esto porque Valores pequeños en la Tau provocarán un rápido decaimiento lo que provocará un mejor ajuste en el corto plazo. E inversamente Valores grandes en la Tau producirá un decaimiento lento , lo que propiciará un mejor ajuste en el largo plazo. Como se mencionó antes 1/Tau nos dará la velocidad a la cual los intereses se revierten a la tasa forward implícita en el proceso de difusión. Una vez que la Tau ha sido seleccionada , se resuelven las ecuaciones buscando las betas aplicando una regresión de mínimos cuadrados usando un solo valor de descomposición.

Sin embargo, el proceso que se propone no implica la selección de un parámetro Tau fijo. En lugar de eso se propone ajustar el modelo a múltiples valores de la Tau , donde Tau variaría entre 0 y 200, por incrementos de 5 en 5.Para cada Tau, proponemos el uso de una regresión de mínimos cuadrados para encontrar la que mejor se ajuste a los coeficientes.(las Betas) Y repitiendo el procedimiento sobre un conjunto de valores de Tau produce los valores que mejor se ajustan para las Betas. Teniendo la R-cuadrada como la medida de que también el modelo se ajusta a los datos.

3.3 MODIFICACIONES A LA METODOLOGIA DE GENERACION DE CURVAS VALUACION OPERATIVA Y REFERENCIAS DE MERCADO, S.A. DE C.V.

Con la finalidad de lograr un mejor ajuste de la curva generada diariamente a los nodos operados en el mercado, Valor de Mercado propone una modificación a la metodología actual mediante la adición de nuevos coeficientes que permitan generar puntos de inflexión que reconozcan los movimientos del mercado en el corto plazo, así como, la transformación de tasas compuestas a tasas simples para disminuir el coletazo de la curva en el largo plazo. El sustento matemático se presenta a continuación:

LA EXTENSIÓN SVENSSON DEL MODELO NELSON-SIEGEL Y LA ADICION DE UN CUARTO COEFICIENTE.

La extensión Svensson es un modelo paramétrico que especifica una forma funcional para la Tasa Forward Instantánea, (TTM), la cual es una función del plazo de vencimiento (TTM). Esta forma funcional es la siguiente[1]:

$$f(TTM)_t = \beta_0 + \beta_1\left(e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)}\right) + \beta_2\left(\frac{TTM}{\tau_1}\left(e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)}\right)\right) + \beta_3\left(\frac{TTM}{\tau_2}\left(e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_2}\right)}\right)\right)$$

La motivación original para modelar este método fue el deseo de crear un modelo parsimonioso de la Curva de Interés Forward que pudiera capturar el rango de formas que generalmente son vistas en las curvas de rendimiento: formas corvadas, monótonas y con formas de "S".

El modelo tiene seis parámetros que deben ser estimados: $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2$. Estos parámetros identifican cuatro curvas diferentes, un valor asintótico, la curva general y dos corvas o formas "U", las cuales son combinadas para producir la Curva Forward Instantánea de Svensson dado un período de tiempo.

El impacto de estos parámetros en la forma dentro de la Curva Forward pueden ser descritos de la siguiente manera:

β_0 = Este parámetro, el cual debe ser positivo, es el valor asintótico de $f(TTM)_t$. La curva tenderá hacia ese valor asintótico mientras TTM tienda a infinito.

β_1 = Este parámetro determina el valor inicial (el término a corto plazo) de la curva en términos de desviación de a la asíntota. Éste también define la velocidad básica con la cual la curva tiende hacía su largo plazo. La curva tendrá una pendiente negativa cuando este parámetro es positivo y viceversa. La suma de $\beta_0 y \beta_1$ es la intersección vertical.

β_2 = Este parámetro determina la magnitud y dirección de la corva. Si β_2 es positiva, una corva ocurrirá en τ_1 mientras que si β_2 es negativa, una curva con forma de "U" ocurrirá en este mismo valor.

β_3 = Este parámetro al igual que β_2, determina la magnitud y dirección de la segunda curva.

τ_1 = Este parámetro que deberá ser positivo, especifica la posición de la primer corva o curva con forma de "U".

τ_2 = Este parámetro que deberá ser positivo, especifica la posición de la segunda corva o curva con forma de "U".

[1] $f(TTM)_t$ es el equivalente funcional de $f(t,\tau,T)_{INST}$ con $(\tau - t) \to (T - t) = TTM$

Teniendo especificada la forma funcional del la Tasa Forward Instantánea, la función de la Tasa Cupón Cero se obtiene integrando la anterior. El resultado de esta integración es el siguiente:

$$z(TTM)_t = \beta_0 + \beta_1\left(\frac{1-e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)}}{\frac{TTM}{\tau_1}}\right) + \beta_2\left(\frac{1-e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)}}{\frac{TTM}{\tau_1}} - e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_1}\right)}\right) + \beta_3\left(\frac{1-e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_2}\right)}}{\frac{TTM}{\tau_2}} - e^{-\left(\frac{TTM}{\tau_2}\right)}\right)$$

Es entonces relativamente fácil determinar la función de Descuento a partir de la función de Cupón Cero.

$$disc(TTM)_t = e^{-\left(\frac{z(TTM)_t}{100}(TTM)\right)}$$

Una vez con la forma funcional especificada para la Tasa Forward, permite la determinación de la función del Cupón Cero y por consecuencia la de Descuento.

AJUSTE DEL LARGO PLAZO (Expansión de Taylor)

La curva de Valor de Mercado se presenta en tasas simples, por lo que se realiza un ajuste utilizando la expansión de Taylor cúbica con la finalidad de describir mejor los movimientos de tasas de interés de largo plazo.

La Corrección a la problemática que presentan las curvas de tasas simples cuando estas son llevadas a largo plazo, es una solución matemática con profundo sentido financiero. Esta solución se explicará a continuación.

La curva de CETES (Svensson SMP), al largo plazo muestra un incremento exponencial, llamado "coletazo". Este efecto, se produce debido a que antes de ajustar la curva Nelson-Siegel-Svenson es necesario convertir los nodos de tasas simples a compuestas. Después de ajustar la curva Nelson-Siegel-Svenson a las tasas continuas compuestas se realiza la transformación a tasas simples. Dicha transformación se lleva a cabo despejando r_s de la siguiente igualdad:

1) $e^{\frac{r_c t}{360}} = 1 + \frac{r_s t}{360}$,

2) $r_s = \frac{360}{t}\left(e^{\frac{r_c t}{360}} - 1\right)$,

del mismo modo,

3) $r_c = \frac{360}{t}\ln\left(1 + \frac{r_s t}{360}\right)$.

Donde,
r_s= tasa simple.
r_c= tasa continua, obtenida del modelo de N-S-S.
t= plazo para vencimiento, en días.

El problema radica en dos factores del Mercado Mexicano: la falta de liquidez a largo plazo y las altas tasas de interés. La falta de bursatlidad a largo plazo, evita que cualquier modelo financiero de obtención de tasas se realice correctamente puesto que estos modelos fueron realizados para mercados de alta bursatilidad. En palabras más simples, el no existir el suficiente número de nodos a largo plazo trae como consecuencia que no podamos estabilizar la curva hacia abajo sino hasta el valor del último nodo con que se cuente. Por otra parte las altas tasas de interés conjugado con plazos largos traen consigo un problema matemático que nos hace afirmar que la conversión de tasas de interés simple a compuesta y viceversa mostrada las ecuaciones 1, 2, y 3, no estén completamente correctas. La explicación es la siguiente:

Haciendo una expansión de Taylor de la fórmula de interés continuo compuesto, obtenemos:

4) $$e^{\frac{r_c t}{360}} = 1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{r_s t}{360} + \frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{r_s t}{360}\right)^2 + \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{r_s t}{360}\right)^3 + \frac{1}{4!}\cdot\left(\frac{r_s t}{360}\right)^4 + \ldots,$$

Como es sabido la multiplicación de un número muy pequeño y menor que 1 ($x \to 0$) por si mismo, resulta aún un número más pequeño y más cercano a cero.

Es decir, si

$$\left(\frac{r_s t}{360}\right) \to 0$$

Resulta que

$$\left(\frac{r_s t}{360}\right)^2 \approx 0, \left(\frac{r_s t}{360}\right)^3 \approx 0, \left(\frac{r_s t}{360}\right)^4 \approx 0, \ldots, \left(\frac{r_s t}{360}\right)^n \approx 0$$

Cuando se eleva esta expresión a cualquier potencia mayor que 2, esta expresión es muy similar a cero y podemos eliminar de la ecuación número 4 todos los factores que estén elevados a cualquier potencia mayor a 2, es decir:

$$e^{\frac{r_c t}{360}} = 1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{r_s t}{360} + \frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{r_s t}{360}\right)^2 + \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{r_s t}{360}\right)^3 + \frac{1}{4!}\cdot\left(\frac{r_s t}{360}\right)^4 + \ldots \Rightarrow e^{\frac{r_c t}{360}} = 1 + \frac{r_s t}{360}$$

En el caso mexicano no se puede realizar esta eliminación de factores pues las tasas de interés son muy altas. Para ilustrar esta problemática se realizará el siguiente ejercicio. Si se supone que la tasa de interés en México es de 18% y en EEUU es del

5%, y se observa esta transformación a 5 años los resultados que se obtienen son los siguientes:

México $(0.18*5)^{n}*\left(\frac{1}{n!}\right)$ y,

EEUU $(0.05*5)^{n}*\left(\frac{1}{n!}\right)$,

Donde, n es el valor del exponente (n=1,2,3,4) y n!=(n)*(n-1)*(n-2)*..*(1)

Factor	n	México	EEUU
1er.	1	0.9	0.25
2do.	2	0.405	0.03125
3er.	3	0.1215	0.002604
4to.	4	0.02733	0.000162

Como se puede observar en el caso de EEUU los factores con exponente mayor a 1, que se suman en la transformación tienen un valor insignificante, por lo cual para el caso norteamericano una transformación como el de la ecuación 1, es suficiente para describir sus tasas. Sin embargo, para el caso mexicano los factores no tienden a cero tan rápidamente por lo cual una transformación como la hecha en la ecuación 1, no es suficiente.

Es por esta situación que en Valor de Mercado se dieron a la tarea de realizar las transformaciones de tasa simple a compuesta y viceversa, mediante la expansión de Taylor en la ecuación número 4, pero hasta el 4 término es decir, hasta la 3ª potencia.

En forma matemática lo que realizamos es lo siguiente:

$$e^{\frac{r_c t}{360}} = 1+\frac{r_s t}{360}+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{r_s t}{360}\right)^{2}+\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{r_s t}{360}\right)^{3},$$ Expansión de Taylor;

$$r_c = \frac{360}{t}\ln\left(1+\frac{r_s t}{360}+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{r_s t}{360}\right)^{2}+\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{r_s t}{360}\right)^{3}\right),$$

$$r_s = \frac{360}{t}\cdot\left[\frac{\left[3e^{\left(\frac{r_c t}{360}\right)}-1+\left(9e^{\left(\frac{2r_c t}{360}\right)}-6e^{\left(\frac{r_c t}{360}\right)}+2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}-\left[3e^{\left(\frac{r_c t}{360}\right)}-1+\left(9e^{\left(\frac{2r_c t}{360}\right)}-6e^{\left(\frac{r_c t}{360}\right)}+2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}-1}{\left[3e^{\left(\frac{r_c t}{360}\right)}-1+\left(9e^{\left(\frac{2r_c t}{360}\right)}-6e^{\left(\frac{r_c t}{360}\right)}+2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}}\right]$$

Donde,
r_s= tasa simple.
r_c= tasa continua, obtenida del modelo de N-S-S.
t= plazo para vencimiento, en días

Gracias a esta transformación pudieron proporcionar una mejor descripción del Mercado Mexicano y reducir la volatilidad de sus datos.

AJUSTE DEL CUARTO COEFICIENTE DE LA ECUACION

AJUSTE A 3 TAUS Y 4 BETAS

Anteriormente, la curva Nelson-Siegel-Svensson, tenía el dilema que para obtener un buen ajuste a los nodos del mercado, se debía escoger entre tomar en cuenta la tasa de 1 día con lo cual se estimaba débilmente las tasas a un plazo de un mes aproximadamente, o bien, ignorar el nodo de 1 día con la finalidad de obtener un ajuste en este plazo. La solución a este dilema se propone a continuación.

Es necesario aumentar el número de términos a la ecuación de Nelsen-Siegel-Svensson, de cuatro a cinco términos, es decir, si antes se contaba con tan solo 2 Taus y 3 Betas, ahora, se contará con 3 Taus y 4 Betas.

La fórmula anteriormente empleada es:

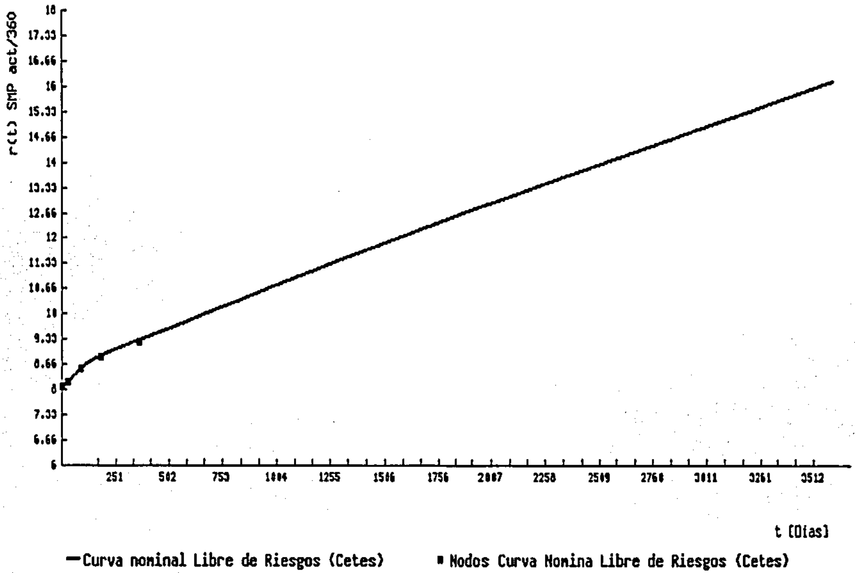
$$R(m)=\beta_0+\beta_1\cdot\left(\frac{\tau_1}{m}\right)\left(1-e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)}\right)+\beta_2\cdot\left(\left(\frac{\tau_1}{m}\right)\cdot\left(1-e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)}\right)-e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)}\right)+\beta_3\cdot\left(\left(\frac{\tau_2}{m}\right)\cdot\left(1-e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)}\right)-e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)}\right)$$

El nuevo modelo que se propone está definido de la siguiente forma:

$$R(m)=\beta_0+\beta_1\cdot\left(\frac{\tau_1}{m}\right)\left(1-e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)}\right)+\beta_2\cdot\left(\left(\frac{\tau_1}{m}\right)\left(1-e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)}\right)-e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)}\right)+\beta_3\cdot\left(\left(\frac{\tau_2}{m}\right)\left(1-e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)}\right)-e^{\left(\frac{-m}{\tau_2}\right)}\right)+\beta_4\cdot\left(\left(\frac{\tau_3}{m}\right)\left(1-e^{\left(\frac{-m}{\tau_3}\right)}\right)-e^{\left(\frac{-m}{\tau_3}\right)}\right)$$

La justificación de β_4, está dada a la necesidad de introducir un punto de inflexión que reúna la tendencia de las tasas a corto plazo con el nodo de 1 día. En esta ecuación los puntos de inflexión están dados por las Taus, y en el caso especifico del termino con β_4, esta inflexión está dada por τ_3, por lo que para llevar a cabo el ajuste de corto plazo τ_3, debe tener un valor pequeño; de hecho τ_3 es la menor de las Taus . Matemáticamente, esto es demostrable al derivar la función con respecto al plazo m e igualando esta derivada a cero. Posteriormente será necesario realizar una segunda derivada para obtener la curvatura de la función.

El resultado que obtenemos con la gráfica con 3 Taus es(Svensson Cúbica 3 Taus), la curvatura inicial ocurre ajustando el corto plazo mientras que en la gráfica que anteriormente se utilizaba (Cetes Anterior) este comportamiento no se da.



El beneficio mayor que se obtiene mediante este ajuste es el reducir la volatilidad que se venía dando en el corto plazo pues cualquier movimiento que realizaba la tasa a 1 día generaba movimientos en las tasas a corto plazo. Con esta nueva modificación el movimiento que genere la tasa a 1 día solo será visto en la curva en ese día.

4 Metodologías Alternas

4.1Modelación del corto plazo (Modelos de no arbitraje)

YIELD CURVE SMOOTHING:

La técnica de Yield Curve Smoothing, es utilizada para extraer, factores de descuento, tasas forward y los rendimientos de los bonos con tasa cero de la información observable del mercado con diferentes plazos de vencimiento, que los plazos necesitados para él análisis.

Adams y Van Deventer (1994) mostraron que la curva de rendimiento con la función de tasas forward más suave posible, consistente con los datos observables, está cercanamente relacionada, pero de manera distinta al enfoque de splines cúbicos utilizados para el smoothing de rendimientos y precios de bonos con cupón cero. Por lo que la curva de rendimiento que produce las tasas forward más suaves posibles, consistentes con los precios de los bonos con cupón cero, tiene una función cuadrática de tasas forward asociada, la cual, se expande entre cada intervalo de datos observables.

Lo cual contrasta con el polinomio cúbico utilizado para aproximar rendimientos ó precios de los bonos con cupón cero, el cual se utiliza en el enfoque del spline cúbico.

1) CUBIC SPLINE YIELD SMOOTHING:

Históricamente el método de splines cúbicos ha sido el preferido para suavizar las curvas de rendimiento (yield smoothing). A pesar de la popularidad del enfoque de splines cúbicos, los participantes del mercado muchas veces han preferido un smoothing lineal de la curva de rendimiento por la sencilla razón de que este método es especialmente fácil de implementar y aplicar.
Sin embargo, sus limitaciones son bien conocidas:

- Las curvas de rendimiento lineales son continuas pero, no son suaves, esto, ya que, en cada punto de mercado ó datos observables, existe un pico en la curva de rendimiento.
- Las curvas de tasas forward que están asociadas a las curvas lineales de rendimiento son lineales y discontinuas en los puntos de mercado.
- La estructura de la curva de rendimiento es irreal, esto debido a que esta es lineal y esto la hace fundamentalmente incompatible con el comportamiento de variables aleatorias tales como, los rendimientos de los bonos con cupón cero y sus precios. Por lo tanto, los parámetros resultantes no son plausibles.

A continuación presentamos cual sería la lógica a seguir para un enfoque que tiene el objetivo de suavizar una curva de rendimiento lineal (linear yield curve smoothing). Para este caso, nosotros modelaríamos el rendimiento y con la siguiente función lineal:

$$y(t) = a_i + b_i t, para, i = 1,2, con, t_{i-1} \leq t \leq t_i$$

Basándose en la ecuación anterior, se tiene que existen cuatro restricciones que deben ser cumplidas. La curva de rendimiento es dividida en dos segmentos. El segmento 1 se expande a través de los vencimientos que están entre 0 y 1 años y el segmento 2 lo hace a través de los vencimientos que están entre 1 y 2 años. Por lo que las cuatro restricciones necesitan que los dos segmentos sean iguales a los datos actuales.

EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS POLINOMIOS CÚBICOS:

Se puede probar matemáticamente que no existe función más suave que se ajuste a los datos observables y que sea continua y dos veces diferenciable en cada punto de mercado que un spline cúbico. Matemáticamente la suavidad de una función está dada por el valor de Z, el cual está dado por la siguiente fórmula:

$$Z = \int_0^T [f''(s)]^2 ds$$

Donde f es la función usada para suavizar los datos observables. Es decir, si Z fuera cero la función sería perfectamente suave. Sí el objetivo del análisis es la curva de rendimiento más suave entonces, un spline cúbico de rendimiento produce la curva de rendimiento más suave, lo mismo pasa para el caso de los precios de los bonos con cupón cero. Cualquier otra función dados estos objetivos, es inferior a los splines cúbicos bajo el criterio de suavización.

USANDO EL CUBIC SPLINE SMOOTHING PARA SUAVIZAR LOS RENDIMIENTOS:

Se asume que se han proporcionado los rendimientos de los bonos con cupón cero $y_0, y_1, ..., y_n consistentes con t_0, t_1, ... t_n$.

Se puede asumir sin pérdida de generalidad que $t_0 = 0$. Se ajusta la función :

$$y_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3$$

al intervalo entre $t_i y t_{i-1}$. Por lo tanto tenemos 4n incógnitas por encontrar.
Esto debido a que necesitamos conocer a, b, c y d para todos los n intervalos entre los n+1 puntos de mercado. Para poder resolver todas la ecuaciones que se acaban de mencionar, se basa en el hecho de que estas ecuaciones deben ajustarse a los puntos de mercado, que su primer derivada debe ser igual en los n-1 puntos de mercado correspondientes a $t_1, t_2, ... t_{n-1}$, y que su segunda derivada también debe ser igual en estos puntos de mercado.

Ahora, tenemos las siguientes ecuaciones las cuales restringen los valores de a, b, c y d, estás son:
n ecuaciones que requieren que los polinomios cúbicos se ajusten a los n puntos de mercado $t_1, t_2, ... t_n$

$$y(t_i) = a_i + b_i t_i + c_i t_i^2 + d_i t_i^3$$

para i desde 1 hasta n.

n ecuaciones que requieren que los polinomios cúbicos se ajusten a los n puntos de mercado $t_0, t_1, \ldots. t_{n-1}$

$$y(t_{i-1}) = a_i + b_i t_{i-1} + c_i t_{i-1}^{\ 2} + d_i t_{i-1}^{\ 3}$$

para i desde 1 hasta n.

n-1 ecuaciones que requieren que la primer derivada de los polinomios cúbicos en cada punto de mercado, los cuales se encuentran en cada extremo de cada uno de estos polinomios, sean iguales entre sí, es decir:

$$b_i + 2c_i t_i + 3d_i t_i^2 - b_{i+1} - 2c_{i+1} t_i - 3d_{i+1} t_i^2 = 0$$

para i desde 1 hasta n-1.

n-1 ecuaciones que requieren que la segunda derivada de los polinomios cúbicos en cada punto de mercado, los cuales se encuentran en cada extremo de cada uno de estos polinomios, sean iguales entre sí, es decir:

$$2c_i + 6d_i t_i - 2c_{i+1} - 6d_{i+1} t_i = 0$$

para i desde 1 hasta n-1.

Esto nos da 4n-2 ecuaciones para resolver con 4n incógnitas. Por lo tanto se necesitan dos ecuaciones más para completar el sistema. La primera ecuación por lo general siempre será escogida de tal forma que la curva de rendimiento sea instantáneamente recta $y''(0) = 0$ en el lado izquierdo de la curva de rendimiento:

$$2c_1 + 6d_1 t_0 = 0$$

El lado derecho de la curva de rendimiento ofrece la oportunidad de imponer otra restricción. Existen dos opciones muy comunes , una puede ser que se considere que la curva de rendimiento es plana $y'(0) = 0$ ó que la curva de rendimiento se considere instantáneamente recta $y''(0) = 0$ para los vencimientos a futuro. Por lo que se puede seleccionar una de las siguientes ecuaciones para completar el sistema:

$$b_n + 2c_n t_n + 3d_n t_n^2 = 0$$

ó

$$2c_n + 6d_n t_n = 0$$

Lo que nos da 4n ecuaciones y 4n incógnitas y todas las ecuaciones son lineales para las incógnitas.

Aunque todo lo hasta aquí expuesto es correcto este método tiene sus limitaciones las cuales resumiremos a continuación.

Empezaremos por recordar que en cada punto de mercado representa un rendimiento de este y que las primeras dos derivadas con respecto a los rendimientos son iguales para cada polinomio que comienza y termina en cada punto de mercado, es decir:

$$y_i(t_i) = y_{i+1}(t_i)$$
$$y'_i(t_i) = y'_{i+1}(t_i)$$
$$y''_i(t_i) = y''_{i+1}(t_i)$$

Considerando el tiempo continuo, la tasa forward continúa $f(t)$ puede ser escrita como:

$$f(t) = y(t) + ty'(t)$$

Escribiendo las derivadas de f en términos de las derivadas de y como sigue:

$$f'(t) = y' + ty''$$
$$f''(t) = y'' + ty'''$$

En cada punto de mercado esto significa que:

$$f_i(t_i) = f_{i+1}(t_i)$$
$$f'_i(t_i) = f'_{i+1}(t_i)$$
$$f''_i(t_i) \neq f''_{i+1}(t_i)$$

La segunda derivada de la curva de tasas forward no será igual en los puntos de mercado ya que se ha restringido y''' ,la cual sería la tercer derivada de la curva de rendimiento, para que sea igual en los puntos de mercado. Y esto lleva a los dos principales problemas asociados con el uso de splines cúbicos para precios ó rendimientos.

- La curva de tasas forward no es dos veces diferenciable en los puntos de mercado , por lo que no es suave. La primer derivada de la curva de tasas forward tendrá picos en sus puntos de mercado.
- Las curvas de tasas forward asociadas con los splines cúbicos basados en la curva de rendimiento tienden a ser volátiles , particularmente en el lado derecho de la curva de rendimiento. Y lo son a tal grado que su uso puede llevarnos a curvas de tasas forward que no son plausibles.

Pero para poder comprender y hacer uso de los resultados prácticos de cualquier método de yield smoothing, se tiene que estar familiarizados con las relaciones de tiempo continuo que existen entre los precios de los bonos con cupón cero, los rendimientos continuamente compuestos de los precios de los bonos con cupón cero (i.e. los rendimiento continuos), y las tasas forward continuas.

Como se sabe el precio de un bono con cuyo cupón es cero puede ser calculado tomando en cuenta su vencimiento y su rendimiento al vencimiento continuamente compuesto a través de la ecuación:

$$P(\tau) = e^{-\tau y(\tau)}$$

También la definición de una tasa forward continua, es menos el porcentaje de cambio en el precio del bono con cupón cero por un cambio infinitamente pequeño en el plazo al vencimiento como es descrito en la fórmula siguiente:

$$f(\tau) = -\frac{\frac{\partial P(\tau)}{\partial \tau}}{P[\tau]}$$

Como P puede ser escrito como función del plazo al vencimiento, por lo tanto la tasa forward también:

$$f(\tau) = -\frac{\frac{\partial\left(e^{-\tau y(\tau)}\right)}{\partial \tau}}{P[\tau]} = y[\tau] + \tau y'[\tau]$$

Finalmente se puede demostrar que P puede ser escrito como función de tasas forward:

$$P[\tau] = e^{-\int_0^\tau f[s]ds}$$

Se pueden usar estas relaciones para derivar información útil de los splines cúbicos de rendimientos. Por ejemplo, sí un spline cúbico de rendimientos ha sido calculado ,entonces el rendimiento continuo en cualquier punto del tiempo está dado por el polinomio cúbico siguiente:

$$y[\tau] = a + b\tau + c\tau^2 + d\tau^3$$

Esto significa que los precios de los bonos con cupón cero pueden ser calculados usando las fórmulas anteriores de la siguiente manera:

$$P[\tau] = e^{-a\tau - b\tau^2 - c\tau^3 - d\tau^4}$$

Finamente las tasas forward continuas pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} f[\tau] &= y + \tau y' \\ &= a + b\tau + c\tau^2 + d\tau^3 + \tau\left(b + 2c\tau + 3d\tau^2\right) \\ &= a + 2b\tau + 3c\tau^2 + 4d\tau^3 \end{aligned}$$

2) CUBIC SPLINE PRICE SMOOTHING:

El mismo procedimiento básico que se utiliza para los rendimientos se utiliza para los precios de los bonos con cupón cero, de los cuales se pueden obtener las curvas de rendimientos suaves.

4.1.1UTILIZANDO EL MÉTODO DE CUBIC SPLINE SMOOTHING PARA PRECIOS DE BONOS CON CUPÓN CERO:

Se asume que se han proporcionado los precios de los bonos con cupón cero $P[t_0], P[t_1], \ldots, P[t_n] consistentes con t_0, t_1, \ldots, t_n$.

Sin pérdida de generalidad se supone $t_0 = 0$. Se ajusta la función :

$$P_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3$$

al intervalo entre $t_i y t_{i-1}$. Por lo tanto se tienen 4n incógnitas por encontrar. Esto debido a que se necesita conocer a, b, c y d para todos los n intervalos entre los n+1 puntos de mercado. Para poder resolver todas la ecuaciones que acabamos de mencionar, se basa en el hecho de que estas ecuaciones deben ajustarse a los puntos de mercado, que su primer derivada debe ser igual en los n-1 puntos de mercado correspondientes a $t_1, t_2, ...t_{n-1}$, y que su segunda derivada también debe ser igual en estos puntos de mercado.

Ahora, tenemos las siguientes ecuaciones las cuales restringen los valores de a, b, c y d, estás son:

n ecuaciones que requieren que los polinomios cúbicos se ajusten a los n puntos de mercado $t_1, t_2, ...t_n$

$$P(t_i) = a_i + b_i t_i + c_i t_i^2 + d_i t_i^3$$

para i desde 1 hasta n.

n ecuaciones que requieren que los polinomios cúbicos se ajusten a los n puntos de mercado $t_0, t_1, ...t_{n-1}$

$$P(t_{i-1}) = a_i + b_i t_{i-1} + c_i t_{i-1}^2 + d_i t_{i-1}^3$$

para i desde 1 hasta n.

n-1 ecuaciones que requieren que la primer derivada de los polinomios cúbicos en cada punto de mercado, los cuales se encuentran en cada extremo de cada uno de estos polinomios, sean iguales entre sí, es decir:

$$b_i + 2c_i t_i + 3d_i t_i^2 - b_{i+1} - 2c_{i+1} t_i - 3d_{i+1} t_i^2 = 0$$

para i desde 1 hasta n-1.

n-1 ecuaciones que requieren que la segunda derivada de los polinomios cúbicos en cada punto de mercado, los cuales se encuentran en cada extremo de cada uno de estos polinomios, sean iguales entre sí, es decir:

$$2c_i + 6d_i t_i - 2c_{i+1} - 6d_{i+1} t_i = 0$$

para i desde 1 hasta n-1.

Esto nos da 4n-2 ecuaciones para resolver con 4n incógnitas. Por lo tanto se necesitan dos ecuaciones más para completar el sistema. A diferencia del caso de los rendimientos el lado derecho de la curva de precios tiene que ser examinada con gran detenimiento para asegurar nos que los supuestos tengan realmente un significado económico. Por ejemplo si como en el caso de los rendimientos se hace que $P'=0$ en el lado derecho de la curva , esto tiene consecuencias dañinas. La tasa forward continua consistente con el la curva de precios suavizada puede ser escrita como:

$$f(\tau)=-\frac{\frac{\partial P(\tau)}{\partial \tau}}{P[\tau]}$$

Por lo tanto, asumir que P'=0 es equivalente a asumir que la tasa forward también es cero en ese punto de la curva. Por lo que se tiene que rechazar este supuesto como candidato para una de las dos restricciones que nos hacen falta.

Como en el caso de los rendimientos, la primer ecuación usualmente se escoge de tal manera que el rendimiento en el tiempo cero sea igual a una tasa de corto plazo que sea observable. Por lo tanto para poder lograr esto tenemos que:

$$f(t)=\frac{-P(t)}{P(t)}=\frac{b+2ct+3dt^2}{P(t)}$$

$$En,t=0,P=1yf(0)=y(0)\Rightarrow -b_1=y(0)$$

Existen dos opciones que son comunes para la restricción que afecta el lado derecho de la curva de rendimiento, una es que la curva puede ser plana $y'(0)=0$ ó que la curva de rendimiento puede ser instantáneamente recta $P''(0)=0$ para los vencimientos futuros.

La primera de las dos restricciones puede ser derivada de el hecho siguiente:

$$y(t)=\frac{-1}{t}\ln[P(t)]$$

y

$$y'(t)=\frac{1}{t^2}\ln[p]-\frac{1}{tP}\left(b+2ct_n+3dt_n^2\right)$$

Si y' se iguala a cero en el lado derecho de la curva de rendimientos, entonces está restricción puede ser escrita como;

$$\ln[P(t_n)]=-\frac{t_n}{P(t_n)}\left(b+2ct_n+3dt^2{}_n\right)$$

después de haber multiplicado por t^2ambos lados de la ecuación. P es una constante en el lado derecho de la curva de rendimiento, por lo que está ecuación sigue siendo lineal en los parámetros a, b, c y d .

El otro candidato seleccionado es la siguiente ecuación, la cual restringe la segunda derivada P''=0 en el lado derecho de la curva:

$$2c_n+6d_nt_n=0$$

Como en el caso de los rendimientos se puede resolver el sistema de 4n ecuaciones con 4n incógnitas.

4.1.2 PROBLEMAS CON SPLINES CÚBICOS DE PRECIOS.

Los problemas con splines cúbicos de la curva de precios de los bonos con cupón cero son los mismos que en el caso de los rendimientos.

- La curva de tasas forward no es dos veces diferenciable en los puntos de mercado , por lo que no es suave. La primer derivada de la curva de tasas forward tendrá picos en sus puntos de mercado. Esto debido a que no se restringe la tercera derivada de la función de precios para que fuese continua y la segunda derivada de la función de tasas forward depende de la tercera derivada de la función de precios:

$$f(t)=\frac{-P'(t)}{P(t)}$$

$$f'(t)=\frac{-P''(t)}{P(t)}+\frac{P'(t)^2}{P(t)^2}$$

$$f''(t)=\frac{-P'''(t)}{P(t)}+\frac{3P'(t)P''(t)}{P(t)^2}-\frac{2P'(t)^3}{P(t)^3}$$

- Las curvas de tasas forward asociadas con los splines cúbicos basados en la curva de rendimiento tienden a ser volátiles, particularmente en el lado derecho de la curva de rendimiento. Y lo son a tal grado que su uso puede llevar a curvas de tasas forward que no son plausibles.

También se pueden usar los nexos existentes entre los precios de los bonos, los rendimientos continuos y las tasas forward continuas.

$$f(\tau)=-\frac{\frac{\partial P(\tau)}{\partial \tau}}{P[\tau]}$$

Por lo que f puede ser calculada de el spline cúbico de precio usando la siguiente relación.

$$f(t)=\frac{-P(t)}{P(t)}=\frac{-b-2ct-3dt^2}{a+bt+ct^2+dt^3}$$

$$y(t)=\frac{-1}{t}\ln[P(t)]$$

Por consiguiente, el método del Spline Cúbico presenta los dos problemas siguientes:

- La curva de tasas forward generada a partir del spline cúbico no es dos veces diferenciable en los puntos de mercado, y por lo tanto no es suave. La primera derivada de la curva de tasas forwards tendrá una discontinuidad en cada punto de mercado.

- Además, la curva de tasas forward tenderá a ser volátil, particularmente en la parte derecha de la curva, en algunas ocasiones en tal medida que sea inutilizable.

¿Solución a estos problemas?
El método de *Máximo Suavizamiento de la Curva de Tasas Forward*

4.2 MAXIMUM SMOOTHNESS FORWARD RATES:

Introducción:
Adams y Van Deventer en 1994 presentaron una propuesta para remediar los dos problemas presentados por el método de yield smoothing llamado cubic spline smoothing, los cuales son:

- Se buscó obtener una curva de tasas forward la cual fuera continua y dos veces diferenciable.
- Ellos obtuvieron la curva de tal forma que, la curva de tasas forward es la más suave de todas las curvas que son continuas, dos veces diferenciables y que además son consistentes con los datos observados.

Por lo que presentamos el Maximum Smooothness Forward Rates :

Suponemos que existen n puntos de datos observables $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ y n precios observables de bonos cupón cero $P[t_1] \ldots P[t_n]$.
El supuesto principal de esta propuesta es que la curva más suave de tasas forward posible consiste de una función cuádrica de tasas forward, la cual es ajustada entre cada punto observable de datos ó punto de mercado. La propuesta completa y la conclusión de él método de maximum smoothness forward rate puede ser resumida en el siguiente teorema matemático:

TEOREMA:
La estructura intertemporal de tasas forward $f(t), 0 \le t \le T$, que satisfaga el criterio de maximum smoothnes:

$$min \int_0^T [f''(s)]^2 ds$$

y al mismo tiempo se ajuste a los precios observados $P_1, P_2, \ldots P_m$ de los bonos con cupón cero con vencimientos $t_1, t_2, \ldots t_m$ es un spline de cuarto orden dado por:

$$f(t) = e_i t^4 + d_i t^3 + c_i t^2 + b_i t + a_i, para, t_{i-1} \le t \le t_i, i = 1,2,\ldots,m+1$$
$$donde, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T$$

Los coeficientes $a_i, b_i, c_i, d_i\_y\_e_i\_donde\_i = 1,2,\ldots,m+1$ satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$e_i t_i^4 + d_i t_i^3 + c_i t_i^2 + b_i t_i + a_i = e_{i+1} t_i^4 + d_{i+1} t_i^3 + c_{i+1} t_i^2 + b_{i+1} t_i + a_{i+1}, para, i = 1,2,\ldots.,m$$
$$4e_i t_i^3 + 3d_i t_i^2 + 2c_i t_i + b_i = 4e_{i+1} t_i^3 + 3d_{i+1} t_i^2 + 2c_{i+1} t_i + b_{i+1}, para, i = 1,2,\ldots,m$$
$$12e_i t_i^2 + 6d_i t_i + 2c_i = 12e_{i+1} t_i^2 + 6d_{i+1} t_i + 2c_{i+1}, para, i = 1,2,\ldots,m$$
$$24e_i t_i + 6d_i = 24e_{i+1} t_i + 6d_{i+1}, para, i = 1,2,\ldots,m$$

$$\frac{1}{5}e_i\left(t_i^5 - t_{i-1}^5\right) + \frac{1}{4}d_i\left(t_i^4 - t_{i-1}^4\right) + \frac{1}{3}c_i\left(t_i^3 - t_{i-1}^3\right) + \frac{1}{2}b_i\left(t_i^2 - t_{i-1}^2\right) + a_i\left(t_i - t_{i-1}\right)$$
$$= -\log\left[\frac{P_i}{P_{i-1}}\right], para, i = 1,2,\ldots.,m$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA:

Como Schwartz lo expuso en 1989 se puede demostrar que los splines cúbicos producen las "maximum smoothness discount functions or yield" curves sí el spline es aplicado a los precios de los bonos con tasa de descuento o a los rendimientos, respectivamente.

Sea $f(t)$ la función de tasas forward, tal que:

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^T f(s)ds\right) \qquad \text{T1}$$

es el precio de un bono con tasa de descuento el cual vence en t. Por lo que la estructura intertemporal más suave es una función f, la cual posee una derivada continua y que satisface el siguiente problema de optimización:

$$min\int_0^T f''^2(s)ds \qquad \text{T2}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$\int_0^{t_i} f(s)ds = -\log P_i\_Para\_i =,1,2,\ldots\ldots,m. \qquad \text{T3}$$

Donde los $P_i = P(t_i), para, i = 1,2,\ldots..,m$ son los precios de los bonos con tasa de descuento con los vencimientos $0 < t_1 < t_2 < \ldots. < t_m < T$.

Sí integramos dos veces por partes se obtiene la siguiente identidad:

$$\int_0^t f(s)ds = \frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 f''(s)ds + tf(0) + \frac{1}{2}t^2 f'(0) \qquad \text{T4}$$

si definimos

$$
\begin{aligned}
&g(t) = f''(t), 0 \le t \le T \\
&ydefinimos\_la\_función\_indicadora\_como: \\
&u(t) = 1, para, t \ge 0 \\
&u(t) = 0, para, t \le 0
\end{aligned} \qquad \text{T5}
$$

El problema de optimización puede entonces ser escrito como:

$$min \int_0^T g^2(s)ds \qquad \text{T6}$$

sujeto a:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T (t_i - s)^2 u(t_i - s) g(s) ds = -\log P_i - t_i f(0) - \frac{1}{2} t_i^2 f'(0) \\
&Para, i = 1,2,\ldots\ldots, m.
\end{aligned} \qquad \text{T7}
$$

Sea los $\lambda_{8i}, para, i = 1,2,\ldots,m$ los multiplicadores de lagrange correspondientes a las restricciones en la ecuación T7. Por lo tanto el nuevo objetivo sería:

$$minZ[g] = \int_0^T g^2(s)ds$$

$$+\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[\frac{1}{2}\int_0^T (t_i - s)^2 u(t_i - s) g(s) ds = +\log P_i + t_i f(0) + \frac{1}{2} t_i^2 f'(0)\right] \qquad \text{T8}$$

De acuerdo al cálculo de variaciones , sí la función g es una solución de la ecuación T8, entonces:

$$\frac{d}{d\varepsilon} Z[g + \varepsilon h]_{\varepsilon=0} = 0 \qquad \text{T9}$$

para cualquier función h(t) igual a w"(t) donde w(t) es cualquier función que sea, dos veces diferenciable definida en (0,T) con w'(0)=w(0)=0. Entonces obtenemos :

$$\frac{d}{d\varepsilon} Z[g + \varepsilon h]_{\varepsilon=0} = 2\int_0^T \left[g(s) + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (t_i - s)^2 u(t_i - s)\right] h(s) ds$$

Para que esta sea cero para cualquier función h, nosotros se debe tener :

$$g(t) + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (t_i - t)^2 u(t_i - t) = 0 \qquad \text{T10}$$

para todas las t entre 0 y T. Esto significa que:

$$g(t)=12e_it^2+6d_it+2c_i$$
$$para, t_{i-1}<t\leq t_i, i=1,2,....,m+1$$
$$donde$$
$$e_i=-\frac{1}{48}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j \qquad \text{T11 y T12}$$
$$d_i=-\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j t_i$$
$$c_i=-\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j t^2{}_i$$

y definimos $t_0=0, t_{m+1}=T$. Más aún, la ecuación T10 implica que g y g' (y por lo tanto f'' y f''') son continuas. De la ecuación T4 se obtiene:

$$f(t)=e_it^4+d_it^3+c_it^2+b_it+a_i \qquad \text{T13}$$

para $t_{i-1}<t<t_i$, $i=1,2,.....,m+1$. Por otro lado la continuidad de, f, f', f'' y f''' implica que :

$$\begin{aligned} e_it^4+d_it^3+c_it^2+b_it+a_i &= e_{i+1}t^4+d_{i+1}t^3+c_{i+1}t^2+b_{i+1}t+a_{i+1} \\ 4e_it_i^3+3d_it_i^2+2c_it_i+b_i &= 4e_{i+1}t_i^3+3d_{i+1}t_i^2+2c_{i+1}t_i+b_{i+1} \end{aligned} \qquad \text{T14}$$

$$\begin{aligned} &12e_it_i^2+6d_it_i+2c_i=12e_{i+1}t_i^2+6d_{i+1}t_i+2c_{i+1} \\ &24e_it_i^2+6d_i=24e_{i+1}t_i^2+6d_{i+1} \qquad \text{T15} \\ &para, i=1,2,....,m. \end{aligned}$$

Las restricciones en la ecuación T3 se transforman en :

$$a_i(t_i-t_{i-1})+\frac{b_i}{2}(t_i^2-t_{i-1}^2)+\frac{c_i}{3}(t_i^3-t_{i-1}^3)+\frac{d_i}{4}(t_i^4-t_{i-1}^4)+\frac{e_i}{5}(t_i^5-t_{i-1}^5)=-\ln\left[\frac{P(t_i)}{P(t_{i-1})}\right] \qquad \text{T16}$$
$$para, i=1,2,....,m.$$

donde nosotros definimos $P_0=1$. Con lo que se prueba el teorema.

4.3 MÉTODO DE APLICACIÓN CONCRETO DE LA FUNCIÓN DE TASAS FORWARD DE MAXIMUM SMOOTHNESS.

Si tenemos n puntos de datos observables, entonces tendríamos 5n incógnitas. Esto debido que necesitamos encontrar los valores de a,b,c,d y e para cada uno de los n segmentos de la curva de tasas forward.
Por otro lado tenemos las siguientes restricciones que son esenciales para asegurar que los resultados obtenidos sean lo suficientemente razonables, es decir, las tasas forward, los rendimientos y las curvas de precios.

Por lo que, se tiene que:

Son n-1 ecuaciones las cuales requieren que la tasas forward sean iguales en cada punto de mercado:

$$a_i + b_i t_i + c_i t^2{}_i + d_i t_i^3 + e_i t_i^4 - a_{i+1} - b_{i+1} t_i - c_{i+1} t^2{}_i - d_{i+1} t_i^3 - e_{i+1} t_i^4 = 0$$

para cada punto de mercado desde i hasta n-1.

También tenemos n-1 ecuaciones que requieren que la primera derivada de las tasas forward sea igual en cada punto de mercado.

$$b_i + 2c_i t_i + 3d_i t_i^2 + 4e_i t_i^3 - b_{i+1} - 2c_{i+1} t_i - 3d_{i+1} t_i^2 - 4e_{i+1} t_i^3 = 0$$

Se Considera específicamente importante que las segundas derivadas de la curva de tasas forward sea igual en cada punto de mercado para asegurar que la curva sea dos veces diferenciable en cualquier punto de esta.

Tenemos n-1 ecuaciones que requieren que la segunda derivada de las tasas forward sea igual en cada punto de mercado.

$$2c_i + 6d_i t_i + 12e_i t_i^2 - 2c_{i+1} - 6d_{i+1} t_i - 12e_{i+1} t_i^2 = 0$$

Tenemos n-1 ecuaciones que requieren que la tercera derivada de las tasas forward sea igual en cada punto de mercado.

$$6d_i + 24e_i t_i - 6d_{i+1} - 24e_{i+1} t_i = 0$$

Las siguientes restricciones están basadas en el siguiente hecho:

$$P[\tau] = e^{-\int_0^{\tau} f[s]ds}$$

Como se esta usando una función de tasas forward dividida en segmentos cuadráticos y tenemos datos observables entonces podemos escribir:

$$P[t_i] = P[t_{i-1}]e^{-\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(s)ds}$$

Rescribiendo la ecuación y expresándola como función lineal de los parámetros a,b,c,d, esta da el siguiente conjunto de restricciones.

n restricciones que aseguran que las curvas de tasas forward son consistentes con los datos observables.

$$a_i(t_i - t_{i-1}) + \frac{b_i}{2}(t_i^2 - t_{i-1}^2) + \frac{c_i}{3}(t_i^3 - t_{i-1}^3) + \frac{d_i}{4}(t_i^4 - t_{i-1}^4) + \frac{e_i}{5}(t_i^5 - t_{i-1}^5) = -\ln\left[\frac{P(t_i)}{P(t_{i-1})}\right]$$

Para los n puntos observables de datos desde i=1 hasta n, notando que P para $t=t_0$ es 1.

Por lo que hasta ahora se tiene 4(n-1)+n ó 5n-4 ecuaciones. Además se necesita otras dos restricciones de significado económico.:

- Que la curva de tasas forward sea consistente con un rendimiento instantáneo observable y(0), es decir: $a_1 = y(0) = f(0)$
- Que la pendiente de la curva de tasas forward en el lado derecho de la curva de rendimientos sea cero (i.e. f'=0):

$$b_n + 2c_n t_n + 3d_n t^2{}_n + 4e_n t_n^3 = 0$$

Se puede completar el sistema de 5n ecuaciones con 5n incógnitas imponiendo las restricciones adicionales que establezcan que la curva de tasas forward debe ser instantáneamente recta en ambos, tanto el lado derecho como el izquierdo de la curva, tal que:

$$f''(t_0) = 2c_1 + 6d_1 t_0 + 12e_1 t_0^2 = 0$$
$$f''(t_n) = 2c_n + 6d_n t_n + 12e_n t_n^2 = 0$$

Se puede resolver para cada uno de los n conjuntos de a,b,c,d, y e usando el método de inversión de matrices, por lo que cuando se hace uso del enfoque de maximum smoothness de tasas forward necesitamos expresar el precio del bono con cupón cero como una función de un polinomio cuadrático de tasa forward.

$$f(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4$$

Como se tiene que ajustar un polinomio cuadrático sobre cada intervalo entre puntos de mercado, entonces se tiene una función diferente de precio de bonos con cupón cero entre cada punto de mercado. Para el intervalo entre t_i y t_{i-1}, el precio del bono con cupón cero es:

$$P[t] = P[t_{i-1}]e^{-\left[a_i(t_i - t_{i-1}) + \frac{b_i}{2}(t_i^2 - t_{i-1}^2) + \frac{c_i}{3}(t_i^3 - t_{i-1}^3) + \frac{d_i}{4}(t_i^4 - t_{i-1}^4) + \frac{e_i}{5}(t_i^5 - t_{i-1}^5)\right]}$$
$$y\_como$$
$$P[t] = P[t_{i-1}]e^{-\int_{t_{i-1}}^{t} f(s)ds}$$

Por lo que el rendimiento continuo y es escrito como una función de tasas forward de la siguiente manera:

$$y(t) = -\frac{1}{t}\left[\ln P[t_{i-1}] - \left[a_i(t_i - t_{i-1}) + \frac{b_i}{2}(t_i^2 - t_{i-1}^2) + \frac{c_i}{3}(t_i^3 - t_{i-1}^3) + \frac{d_i}{4}(t_i^4 - t_{i-1}^4) + \frac{e_i}{5}(t_i^5 - t_{i-1}^5)\right]\right]$$

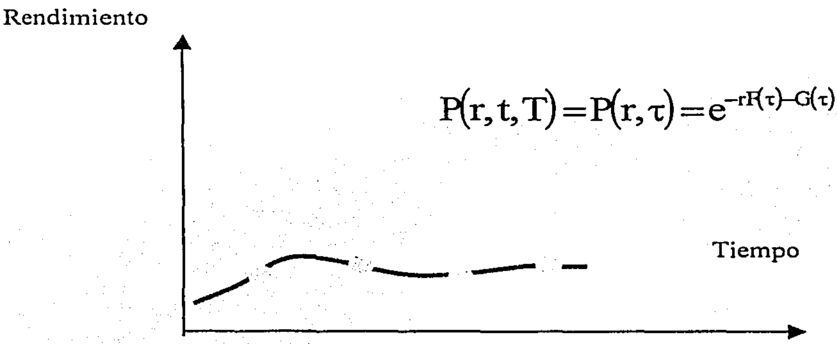
Conclusión de la modelación del corto plazo

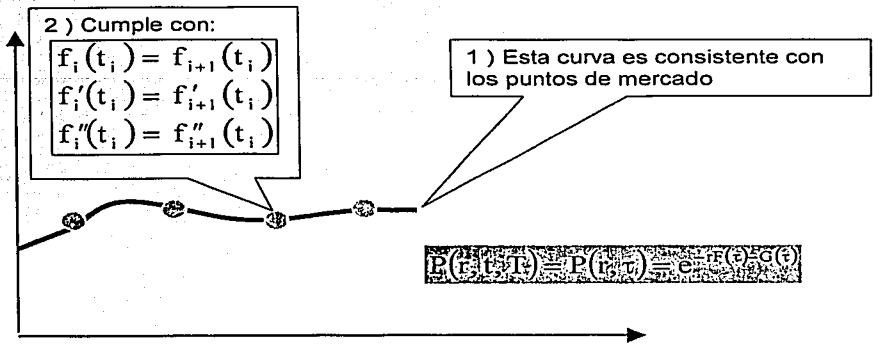
- Con los modelos presentados anteriormente, se puede generar una curva de precios o rendimientos que es consistente con los puntos de mercado y que además cumple con los criterios que validan los resultados financieros que de ella se deriven. Esta curva es consistente con los puntos de mercado

- Además, Van Deventer demostró que es la curva más suave posible de todas las que cumplen estas condiciones !.

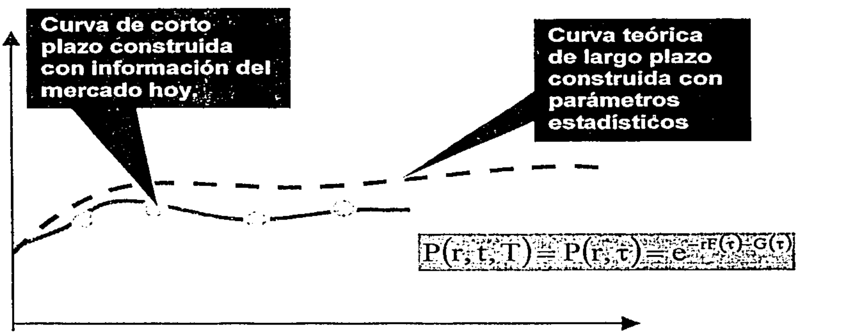
Conclusión de la modelación del corto plazo

- Una vez que el corto plazo está modelado, se debe pasar al largo plazo, en donde generalmente no existen operaciones en el mercado. Es necesario construir una curva de precios teórica de largo plazo, que utilice parámetros estadísticamente inferidos de la historia.
- Para construir la curva de LP se utilizan modelos como el **CIR** y el **Vasicek extendido,** descritos a continuación.





3) Se demostró que es la curva más suave posible de todas las que cumplen estas condiciones !



Para construir la curva de LP se utilizan modelos como el CIR y el Vasicek extendido, descritos a continuación

4.4 Metodologías alternas

4.4.1Modelación del largo plazo (Modelos de equilibrio)

El modelo Vasicek

Vasicek (1977) propuso un modelo en el cual se asume que la tasa de interés tiene volatilidad constante σ, y la tasa de interés de corto plazo exhibe un "retorno a la media". Su función es permitir la existencia de ciclos de tasas de interés.
El proceso neutral al riesgo para **r** en este modelo es:
Si r > μ entonces dr tenderá a ser negativo; por lo tanto r disminuye.
Si r < μ entonces dr tenderá a ser positivo; por lo tanto r aumenta.
En este modelo los s precios de los bonos tienen la siguiente forma funcional $P(r,t,T)=P(r,\tau)=e^{-rF(\tau)-G(\tau)}$
donde F y G son funciones desconocidas de $\tau = T-t$. Sí esta ecuación es correcta podremos obtener soluciones para F y G. Sabiendo que :

$$P_r = -FP$$
$$P_{rr} = F^2 P$$
$$P_t = (-rF_t - G_t)P$$

Sustituyendo las derivadas del precio del bono con cupón cero en la ecuación diferencial parcial y reordenando sabemos que la siguiente relación se debe mantener.

$$r[\alpha F - F_t - 1] + \left[\frac{1}{2}F^2\sigma^2 - F(\alpha\mu + \lambda\sigma) - G_t\right] = 0$$

Está relación debe mantenerse para todos los valores de r por lo que el coeficiente de r debe ser cero:

$$\alpha F - F_t - 1 = 0$$

Se puede resolver esta ecuación diferencial parcial re-expresàndola hasta obtener:

$$\frac{\alpha F_t}{1-\alpha F} = -\alpha$$
$$\frac{\alpha F_t}{1-\alpha F} = -\alpha$$

Ahora se calcula la integral para ambos lados de la igualdad, tal que:

$$\int^{T} \frac{\alpha F_t(s,T)}{1-\alpha F(s,T)} ds = -\int^{T} \alpha ds$$

Evaluando las integrales resulta la siguiente relación:

$$\ln[1-\alpha F(t,T)] = -\alpha(T-t)$$

Calculando la exponencial de ambos lados, se obtiene F:

$$F(t,T) = F(\tau) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha\tau}\right)$$

Para determinar el valor de la función G, se debe resolver la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{1}{2}F^2\sigma^2 - F(\alpha\mu + \lambda\sigma) - G_t = 0$$

$$ó$$

$$G_t = \frac{1}{2}F^2\sigma^2 - F(\alpha\mu + \lambda\sigma)$$

Por lo que debemos calcular lo siguiente:

$$\int_t^T F(s,T)ds = \frac{1}{\alpha}[\tau - F(\tau)]$$

$$\int y\_también$$

$$\int_t^T F^2(s,T)ds = \frac{1}{\alpha^2}[\tau - F(\tau)] - \frac{F^2(\tau)}{2\alpha}$$

Se puede tomar la integral de ambos lados de la ecuación anterior para obtener G:

$$\int_t^T G_s(s,T)ds = \int_t^T\left[\frac{1}{2}F(s,T)^2\sigma^2 - F(s,T)(\alpha\mu + \lambda\sigma)\right]ds$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2\left[\frac{1}{\alpha^2}(\tau - F(\tau)) - \frac{F^2(\tau)}{2\alpha}\right] - \frac{\alpha\mu + \lambda\sigma}{\alpha}[\tau - F(\tau)]$$

$$= \left[\frac{\sigma^2}{2\alpha^2} - \mu - \frac{\lambda\sigma}{\alpha}\right][\tau - F(\tau)] - \frac{\sigma^2}{4\alpha}F^2(\tau)$$

como

$$\int_t^T G_s(s,T)ds = G(T,T) - G(t,T)$$

Y como G(T,T) debe ser igual a cero para la condición de frontera P(T,T)=1, entonces:

$$G(t,T) = G(\tau) = \left[\mu + \frac{\lambda\sigma}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right][\tau - F(\tau)] + \frac{\sigma^2}{4\alpha}F^2(\tau)$$

esto significa que el valor de un bono con cupón cero en el Vasiceck es:

$$P(r,t,T) = \exp\left[-rF(\tau) - \left(\mu + \frac{\lambda\sigma}{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right)[\tau - F(\tau)] - \frac{\sigma^2 F^2(\tau)}{4\alpha}\right]$$

El rendimiento al vencimiento de un bono con cupón cero en el Vasicek se puede escribir como:

$$y(\tau) = -\frac{1}{\tau}\ln[P(\tau)] = -\frac{1}{\tau}[-rF(\tau) - G(\tau)] = \frac{F(\tau)}{\tau}r + \frac{G(\tau)}{\tau}$$

El modelo Cox, Ingersoll, Ross (CIR)

Cox, Ingersoll y Ross propusieron un modelo en el cual las tasas de interés siempre son no negativas.[1] El proceso neutral al riesgo para r en este modelo es:

$$dr(t) = (a - br(t))dt + \sigma\cdot\sqrt{r(t)}dW_{(t)}$$

Como puede observarse, este proceso tiene la misma tendencia de reversión a la media que el modelo de Vasicek, con la diferencia que la desviación estándar es proporcional a $\sqrt{r}$. Esto significa que conforme la tasa de interés de corto plazo se incrementa, su desviación estándar se incrementa.

En este modelo los precios de los bonos tienen la misma forma general que el modelo de Vasicek, es decir:

$$P(r,\tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}$$

En donde A y B están dados por:

$$B(t,T) = \frac{2\cdot\left(e^{\gamma\cdot(T-t)} - 1\right)}{(\gamma + a)\cdot\left(e^{\gamma\cdot(T-t)} - 1\right) + 2\gamma}$$

$$A(t,T) = \left[\frac{2\gamma\cdot\left(e^{\gamma\cdot(T-t)(a+\gamma)}\right)}{(\gamma + a)\cdot\left(e^{\gamma\cdot(T-t)} - 1\right) + 2\gamma}\right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}}$$

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$$

$$P(r,\tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}$$

Resultados:

- Las curvas de rendimientos (yield curves) pueden ser de pendiente positiva, pendiente negativa o mostrar una pequeña joroba.
- La tasa de largo plazo R(t) es linealmente dependiente de r(t). Esto significa que el valor de r(t) determina el nivel de los parámetros estructurales al tiempo t.
- La forma general de los parámetros estructurales al tiempo t es independiente de r() pero dependiente de t.

Problema: La curva de LP **no ajusta** los datos de mercado del corto plazo

4.5 PROPUESTA

El modelo Hull & White (Vasicek extendido)

Hull y White lograron eliminar la distancia que había entre la curva observada y la curva teórica de largo plazo. Esto se logró "extendiendo" la curva teórica por medio de un término "ajuste" $\theta(t)$ para que pasara por los datos de mercado.

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dz$$

Donde el término de extención se puede obtener de la curva de forwards observada : El

$$\theta(T) = F_T(0,T) + a \cdot F(0,T) + \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2aT}\right)$$

tener una curva teórica que pase por los puntos de mercado es indispensable, si se quieren evitar errores en la valuación y cobertura de derivados.

De esta manera, la ecuación diferencial parcial que expresa los precios queda dada por:

$$P_r\left[\alpha(\mu - r) + \lambda(t)\sigma - \alpha r\right] + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma^2 + P_t - rP = 0$$ Si se define:

$$\theta(t) = \alpha\mu + \lambda(t)\sigma$$

Se puede expresar

$P_r\left[\theta(t) - \alpha r\right] + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma^2 + P_t - rP = 0$ Podemos simplificar la ecuación diferencial de la siguiente manera:

$$P_r\left[\theta(t) - \alpha r\right] + \frac{1}{2}P_{rr}\sigma^2 + P_t - rP = 0$$

Por lo que se puede asumir que el precio de los bonos con cupón cero toma la forma siguiente:

$$P(r,t,T) = P(r,\tau) = e^{-rF(\tau)-G(\tau)}$$

Como en el Vasicek se sabe que la siguiente relación se debe mantener:

$$r\left[\alpha F - F_t - 1\right] + \left[\frac{1}{2}F^2\sigma^2 - F\theta(t) - G_t\right] = 0$$

También se sabe que:

$$F(t,T) = F(\tau) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha\tau}\right)$$

Ahora se debe resolver para G dada la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2}F^2\sigma^2 - F\theta(t) - G_t = 0$$

ó

$$G_t = \frac{1}{2}F^2\sigma^2 - F\theta(t)$$

La solución a esta ecuación es:

$$P(r,t,T)=P(r,\tau)=e^{-rF(\tau)-G(\tau)}$$ Donde:

$$F(t,T)=F(\tau)=\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha\tau}\right)$$

$$G(t,T)=\int_t^T F(s,T)\theta(s)ds-\frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\left[\tau-F(\tau)\right]+\frac{\sigma^2}{4\alpha}F^2(t)$$

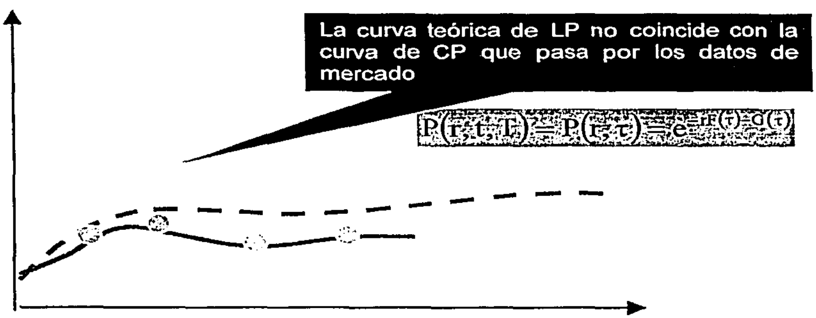
Calibración del modelo

Este modelo es muy utilizado en los mercados financieros debido a su bondad de ajuste, de lo cual ya se ha hablado anteriormente, y además, debido a que su calibración es relativamente sencilla. Los parámetros que se deben calibrar son:

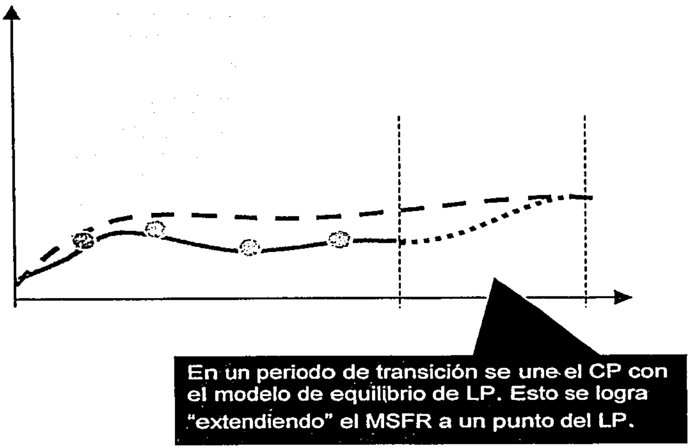
- σ Volatilidad del precio de los bonos.
- α Factor de "retorno a la media".

La calibración se realiza siguiendo alguno de los siguientes criterios:

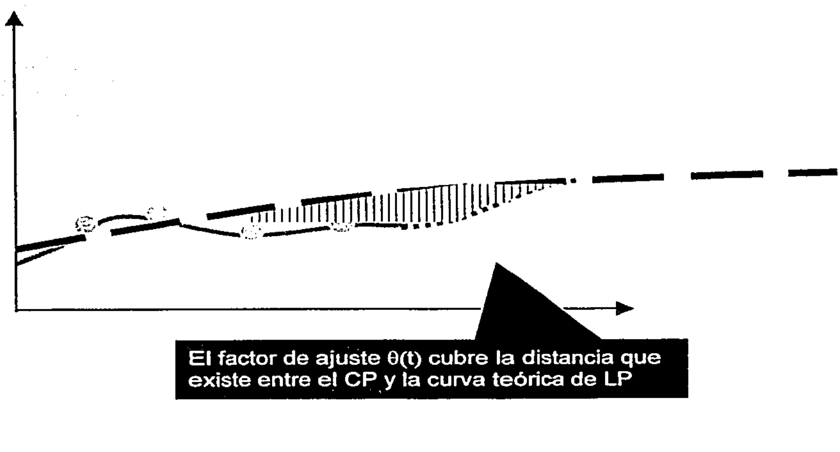
- Calibrar σ y α de manera que el modelo concuerde con el precio de instrumentos derivados existentes en el mercado.
- Calibrar σ y α de manera de reducir el tamaño del factor de ajuste q (t)
- Calibrar σ y α estadísticamente, tomando para ello la historia de los precios de los bonos de corto plazo.

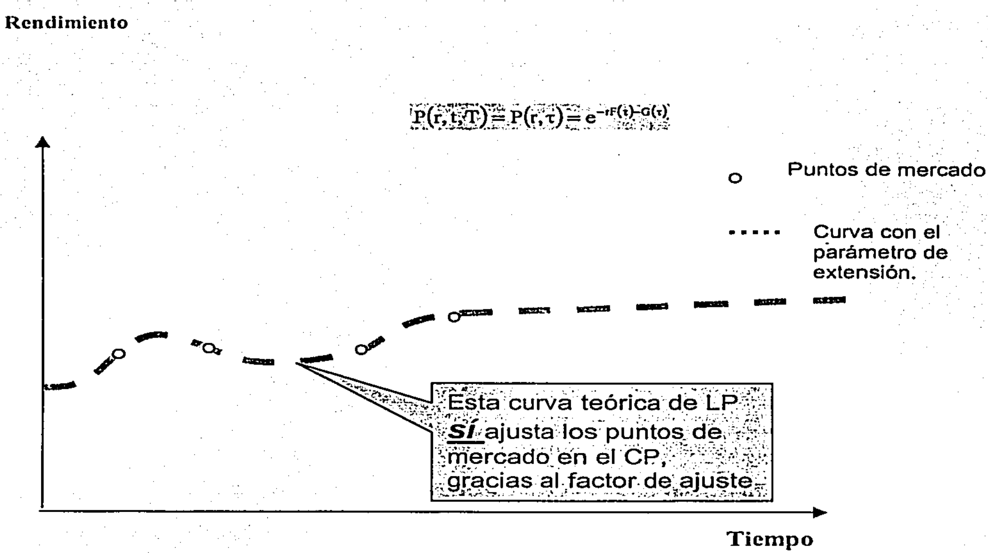


$$P(r,t,T)=P(r,\tau)=e^{-rB(\tau)-G(\tau)}$$



$$P(r,t,T)=P(r,\tau)=e^{-rB(\tau)-G(\tau)}$$




Rendimiento
$P(r,t,T) = P(r,\tau) = e^{-rF(\tau)-G(\tau)}$
Puntos de mercado
Curva con el parámetro de extensión.
Esta curva teórica de LP ***sí*** ajusta los puntos de mercado en el CP, gracias al factor de ajuste.
Tiempo

4.6 ALGUNAS NOTAS FINALES SOBRE EL VASICEK Y CIR

- **Se han desarrollado una gran número de modelos derivados del modelo de Vasicek,** cada uno con sus ventajas y desventajas propias.

- **Los de la familia Vasicek tienen como su fortaleza su facilidad de adaptación.** La naturaleza gaussiana de las tasas de interés implica que un amplio rango de soluciones puedan ser aplicadas a la valuación de instrumentos. Sin embargo, **presentan como desventaja que las tasas de interés, a niveles muy bajos, pueden llegar a ser negativas*.** Esto es evidencia que debieran considerarse más de un factor en el modelaje.

- **La modelación con dos o más factores no ha resultado práctica hasta el momento;** Existen artículos reportando su aplicación en el mercado Canadiense y el Australiano con muy buenos resultados.

- **El modelo Cox, Ingersoll y Ross ha sido muy popular sobre todo en el ambiente académico;** esto se debe en parte a que el artículo original ha circulado desde 1977, a pesar de que fue publicado hasta 1985.El CIR presenta la ventaja que **no permite tasas de interés negativas,** ya que vincula altas tasas de volatilidad a altos niveles de tasas de interés, y baja volatilidad a bajas tasas.

- Hull y White (1990) se percataron que la versión extendida del **CIR no logra un buen ajuste en casos en los cuales se tengan tasas forward negativas.**

- Black (1995) mostró que este problema **puede ser corregido utilizando MSFR en lugar de un spline lineal o cúbico.**

- Flasaker (1993) mostró un problema muy serio en la implementación práctica del CIR: **la enorme dificultad de estimar los parámetros, dado que pueden existir muchos óptimos locales.**

- Pearson y Sun (1994) implementaron una versión de dos factores del CIR para modelar las tasas de interés nominales y mostraron que el **CIR fracasó en proveer una buena descripción del mercado de deuda de EEUU.**

4.7 Conclusiones

•La curva de precios es un instrumento muy utilizado en la valuación de proyectos de inversión, ya que provee el factor descuento a aplicar a un flujo de efectivo dependiendo del tiempo transcurrido.
•Existen diversas metodologías utilizadas en su construcción; en esta presentación se mostraron las más comunes. Dentro de éstas, destaca la técnica del *Máximo Suavizamiento de la Curva de Tasas Forward,* ya que cumple con los siguientes requisitos:

- La curva generada tiene que pasar por los puntos de mercado.
- La curva generada tiene que ser la más suave posible, entendiendo por suave aquella que presente la menor curvatura o quiebres.
- La curva tiene que ser diferenciable hasta el tercer orden, con el fin de que la curva de tasas forwards sean suaves.
- Una vez que se ha generado la curva de corto plazo, es necesario construir la curva teórica de largo plazo, la cual generalmente no ajusta a los puntos de mercado.

•Para resolver este problema se define un *factor de extensión,* el cual permite que la curva de LP se ajuste a los puntos de mercado. Esta técnica es la descrita en el modelo de Hull y White.

•Es muy importante contar con una teórica consistente con los puntos de mercado, ya que nos permite valuar un gran número de instrumentos financieros, tales como opciones.

•Pequeñas diferencias en la valuación de bonos, repercute en grandes diferencias en la valuación de opciones.

•Las técnicas del Spline Cúbico y el MSFR son los más utilizados en los mercados financieros, inclusive por los sistemas Bloomberg, Kamakura, QRM, etc.

México, D.F., a 26 de julio de 2000.
CIRCULAR 12-40
ASUNTO: VALUACION DE VALORES, DOCUMENTOS E INSTRUMENTOS FINANCIEROS.

A LAS SOCIEDADES OPERADORAS DE SOCIEDADES DE INVERSION Y A LAS SOCIEDADES DE INVERSION COMUNES Y EN INSTRUMENTOS DE DEUDA:

La Comisión Nacional Bancaria y de Valores con fundamento en los artículos 13, primer párrafo, 36, 39, primer párrafo y fracción I de la Ley de Sociedades de Inversión, 4, fracciones III a V, XXXVI y XXXVII, 16, fracción I y 19 de la Ley de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores, y

C O N S I D E R A N D O

Que en los criterios de contabilidad dados a conocer a esas sociedades operadoras y sociedades de inversión, se establece la obligación de registrar a valor razonable los valores, documentos e instrumentos financieros que formen parte de su cartera y portafolios de inversión;

Que para realizar el citado registro, esas sociedades operadoras y sociedades de inversión han venido utilizando el vector de precios cuya estimación y difusión actualmente se lleva a cabo por la Bolsa Mexicana de Valores, S.A. de C.V., el cual contiene el conjunto de precios actualizados para valuación de los valores de renta variable e instrumentos de deuda;

Que conforme a la experiencia internacional los precios para valuación utilizados por instituciones financieras son proporcionados por especialistas, cuya actividad consiste en calcular y suministrar precios para valuar carteras de valores, y

Que una vez establecido el marco normativo aplicable a los proveedores de precios, conforme al cual algunos se han constituido, se estima pertinente prever que esas sociedades operadoras y sociedades de inversión utilicen exclusivamente precios actualizados para valuación de sus valores, documentos e instrumentos financieros, provistos por tales especialistas, ha resuelto emitir las siguientes disposiciones de carácter general:

2.

CIRCULAR 12-40

PRIMERA.- Las sociedades operadoras y sociedades de inversión comunes y en instrumentos de deuda, deberán valuar diariamente los valores, documentos e instrumentos financieros que formen parte de su cartera y portafolios de inversión, utilizando precios actualizados para valuación proporcionados por proveedores de precios.

Para fines de registro contable, las sociedades operadoras y sociedades de inversión comunes y en instrumentos de deuda, considerarán como valor razonable de los citados valores, documentos e instrumentos financieros, el precio actualizado para valuación que corresponda.

SEGUNDA.- El consejo de administración de cada sociedad operadora y sociedad de inversión común y en instrumentos de deuda, deberá aprobar la contratación de un solo proveedor de precios para los efectos de la presente Circular.

En ningún caso podrá llevarse a cabo la citada contratación por plazos menores de un año; sin embargo, las sociedades operadoras y sociedades de inversión comunes y en instrumentos de deuda, podrán sustituir al proveedor de precios por plazos iguales, en el evento de que la Comisión Nacional Bancaria y de Valores ejerza la facultad de veto referida en la disposición tercera de la presente Circular o bien, cuando se actualice alguno de los supuestos de rescisión por incumplimiento del contrato celebrado con el proveedor de precios de que se trate.

El proveedor de precios de la totalidad de las sociedades de inversión operadas por una misma entidad financiera o por entidades que formen parte de un grupo financiero, deberá ser el mismo y podrá ser distinto de aquél contratado para dichas entidades.

TERCERA.- Las sociedades operadoras y sociedades de inversión comunes y en instrumentos de deuda, deberán notificar por escrito a la Comisión Nacional Bancaria y de Valores la contratación del proveedor de precios, dentro de los diez días hábiles siguientes a la celebración del contrato respectivo.

La Comisión Nacional Bancaria y de Valores tendrá la facultad de veto respecto de la designación hecha por las mencionadas sociedades en favor de algún proveedor de precios, cuando a su juicio exista conflicto de interés.

CUARTA.- Las sociedades operadoras y sociedades de inversión comunes y en instrumentos de deuda, reconocerán las modificaciones de precios actualizados para valuación que, en su caso, les sean dadas a conocer por su proveedor de precios, procediendo en consecuencia a efectuar en su contabilidad los registros correspondientes.

3.

CIRCULAR 12-40

T R A N S I T O R I A S

PRIMERA.- La presente Circular entrará en vigor el 2 de octubre de 2000, excepto por lo que se refiere a las disposiciones segunda y tercera, cuya vigencia iniciará a partir del 1 de agosto de 2000.

SEGUNDA.- A la entrada en vigor de esta Circular queda sin efectos la disposición octava de la Circular 12-16, conforme a lo establecido en las disposiciones primera y sexta transitorias de la Circular 12-22 y tercera transitoria de la Circular 12-22 Bis 8, y se derogan las disposiciones décima primera, numeral 2 y décima quinta de la citada Circular 12-22.

A t e n t a m e n t e,

COMISION NACIONAL BANCARIA Y DE VALORES

Eduardo Fernández García

Presidente

CIRCULAR 10-241

ASUNTO: VALUACION DE VALORES, DOCUMENTOS E INSTRUMENTOS FINANCIEROS.

A LAS CASAS DE BOLSA:

La Comisión Nacional Bancaria y de Valores con fundamento en los artículos 25, segundo párrafo, 26 Bis y 26 Bis 7 de la Ley del Mercado de Valores, 4, fracciones III a V, XXXVI y XXXVII, 16, fracción I y 19 de la Ley de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores, y

C O N S I D E R A N D O

Que en los criterios de contabilidad dados a conocer a esas casas de bolsa, se establece la obligación de registrar a valor razonable los valores, documentos e instrumentos financieros que formen parte de su cartera y portafolios de inversión;

Que para realizar el citado registro, esas casas de bolsa han venido utilizando el vector de precios cuya estimación y difusión actualmente se lleva a cabo por la Bolsa Mexicana de Valores, S.A. de C.V., el cual contiene el conjunto de precios actualizados para valuación de los valores de renta variable e instrumentos de deuda;

Que conforme a la experiencia internacional los precios para valuación utilizados por instituciones financieras son proporcionados por especialistas, cuya actividad consiste en calcular y suministrar precios para valuar carteras de valores, y

Que una vez establecido el marco normativo aplicable a los proveedores de precios, conforme al cual algunos se han constituido, se estima pertinente prever que esas casas de bolsa utilicen exclusivamente precios actualizados para valuación de sus valores, documentos e instrumentos financieros, provistos por tales especialistas, ha resuelto emitir las siguientes disposiciones de carácter general:

PRIMERA.- Las casas de bolsa deberán valuar diariamente los valores, documentos e instrumentos financieros que formen parte de su cartera y portafolios de inversión, utilizando precios actualizados para valuación proporcionados por proveedores de precios.

Para fines de registro contable, las casas de bolsa considerarán como valor razonable de los citados valores, documentos e instrumentos financieros, el precio actualizado para valuación que corresponda.

SEGUNDA.- El consejo de administración de cada casa de bolsa, deberá aprobar la contratación de un solo proveedor de precios para los efectos de la presente Circular.

En ningún caso podrá llevarse a cabo la citada contratación por plazos menores de un año; sin embargo, las casas de bolsa podrán sustituir al proveedor de precios por plazos iguales, en el evento de que la Comisión Nacional Bancaria y de Valores ejerza la facultad de veto referida en la disposición tercera de la presente Circular o bien, cuando se actualice alguno de los supuestos de rescisión por incumplimiento del contrato celebrado con el proveedor de precios de que se trate.

Tratándose de casas de bolsa que formen parte de grupos financieros, el proveedor de precios deberá ser el mismo que el contratado para las demás entidades integrantes del grupo, excepto para el caso de sociedades de inversión en que podrá contratarse otro proveedor de precios, siempre que sea el mismo para la totalidad de las sociedades de inversión operadas por entidades de un grupo financiero.

TERCERA.- Las casas de bolsa deberán notificar por escrito a la Comisión Nacional Bancaria y de Valores la contratación del proveedor de precios, dentro de los diez días hábiles siguientes a la celebración del contrato respectivo.

La Comisión Nacional Bancaria y de Valores tendrá la facultad de veto respecto de la designación hecha por las casas de bolsa en favor de algún proveedor de precios, cuando a su juicio exista conflicto de interés.

CUARTA.- Las casas de bolsa reconocerán las modificaciones de precios actualizados para valuación que, en su caso, les sean dadas a conocer por su proveedor de precios, procediendo en consecuencia a efectuar en su contabilidad los registros correspondientes.

TRANSITORIAS

PRIMERA.- La presente Circular entrará en vigor el 2 de octubre de 2000, excepto por lo que se refiere a las disposiciones segunda y tercera, cuya vigencia iniciará a partir del 1 de agosto de 2000.

SEGUNDA.- A la entrada en vigor de la presente Circular se derogan las disposiciones primera, fracciones I y V a VIII, y quinta a décima de la Circular 10-215 de fecha 4 de marzo de 1997.

A t e n t a m e n t e,

COMISION NACIONAL BANCARIA Y DE VALORES

Eduardo Fernández García

Presidente

Bibligrafía:

John C. Hull,(1997),Options, futures, and other derivatives, Upper Saddle River, NJ Prentice Hall.

John Hull and Alan White, (1996),Hull-White on derivatives : a compilation of articles John Hull and Alan White, London : Risk Publications.

Suresh M. Sundaresan, (1997), Fixed income markets and their derivatives Suresh M. Sundaresan , Cincinnati, Ohio : South-Western College Pub.

Dennis G. Uyemura, Donald R. Van Deventer , (1993), Financial risk management in banking : the theory & application of asset & liability management, Chicago : Bankers Pub. Co. : Probus Pub. Co.

Satyajit Das, (1998), Risk management and financial derivatives : a guide to the mathematics, Basingstoke : Macmillan.

Tomas Björk , (1998), Arbitrage theory in continuous time, Oxford ; New York : Oxford University Press.

Paul Wilmott, Sam Howison, Jeff Dewynne , (1999) The mathematics of financial derivatives : a student introduction, Cambridge, U.K. ; New York : Cambridge University Press.

Paul Wilmott , (1998), Derivatives : the theory and practice of financial engineering, Chichester, West Sussex, England ; New York : J. Wiley.

Les Clewlow and Chris Strickland , (1998), Implementing derivatives models, Chichester ; New York : Wiley.

Marek Musiela, Marek Rutkowski , (1997), Martingale methods in financial modelling , Berlin ; New York : Springer.

David G. Luenberger , (1998), Investment science, New York : Oxford University Press.

Paul Wilmott , (2000), Paul Wilmott on quantitative finance, Chichester, West Sussex, England ; New York : John Wiley.

Jonathan E. Ingersoll, Jr, (1987), Theory of financial decision making / Jonathan E. Ingersoll, Jr, Totowa, N.J. : Rowman & Littlefield.

Robert C. Merton Foreword by Paul A. Samuelson , (1992), Continuos-time finance, Cambridge : Blackwell .