01164 / 2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA

"Operación óptima de un sistema de presas en cascada. Aplicación al sistema del río Grijalva"

PRESENTA

Claudia Contreras Cruz

TESIS

Para obtener el grado de Maestro

en Ingeniería Hidráulica

Ciudad Universitaria

Diciembre ~~1999~~

1999

Agradecimientos:

A mi *familia* que siempre estuvo a mi lado, apoyándome en todo momento.

Al Dr. Ramón Domínguez Mora por proporcionarme su tiempo, atención, conocimientos y experiencia para la realización de este trabajo; así como su guía acertada durante mis estudios de posgrado y mi formación profesional.

Al Instituto de Ingeniería de la UNAM, por las facilidades otorgadas para el desarrollo de esta tesis.

Y a toda la gente que de alguna manera participó en este trabajo con sus comentarios, recomendaciones y entusiasmo hacia mi investigación.

Indice.

		Página
1	Introducción	4
1.1	Generalidades	5
1.2	Objetivos	6
2	Antecedentes	11
2.1	Sistemas de aprovechamiento hidráulico	11
2.1.1	Análisis de sistemas de aprovechamiento hidráulico	12
2.2	Métodos de optimación	14
2.2.1	Ventajas y desventajas entre algunos métodos de optimación	15
2.2.1.1	Programación Lineal	16
2.2.1.2	Programación No Lineal	17
2.2.1.3	Programación Dinámica	18
2.3	Programación Lineal	19
2.3.1	Teoría de la Programación Lineal	20
2.3.2	Definiciones básicas	20
2.3.3	Suposiciones de la Programación Lineal	21
2.3.4	Análisis	22
2.3.5	Planteamiento de un problema de la Programación Lineal	25
2.3.6	Terminología para las soluciones del modelo	28
2.3.7	Geometría del método Símplex	29
2.3.8	Terminología	29
2.3.9	Características del método Símplex	32
2.3.9.1	Otros métodos de solución de la Programación Lineal	33
2.4	Programación No Lineal	34
2.4.1	Teoría de la Programación No Lineal	34
2.4.2	Programación convexa	35
2.4.3	Condiciones de Kuhn-Tucker	36

2.4.4 Procedimiento de búsqueda unidimensional para el problema no restringido de una sola variable 38
2.4.5 Procedimiento de búsqueda del gradiente para el problema no restringido de variables múltiples 40

2.5 Programación Dinámica 45
2.5.1 Teoría y características de los problemas de Programación Dinámica 46

2.6 Programación Dinámica Determinística 48
2.6.1 Ejemplo 49

2.7 Programación Dinámica Estocástica o Probabilistica 53
2.7.1 Ventajas y desventajas de la Programación Dinámica 55

3 Descripción Hidrológica del río Grijalva 58

3.1 Descripción del sistema de presas del río Grijalva 58

3.2 Características de las presas del río Grijalva 61
3.2.1 Datos de la Planta hidroeléctrica Angostura 62
3.2.2 Datos de la Planta hidroeléctrica Chicoasén. 63
3.2.3 Datos de la Planta hidroeléctrica Malpaso 63
3.2.4 Datos de la Planta hidroeléctrica Peñitas 64

4 Desarrollo del modelo de optimación 66

4.1 Planteamiento de la problemática 66

4.2 Beneficios y costos generados 66
4.2.1 Beneficios 67
4.2.2 Costos 67

4.3 Funcionamiento de una presa de almacenamiento 69

4.4 Programación Dinámica Estocástica aplicada a la operación de presas de almacenamiento 71

4.5 Algoritmo de solución 76

4.6 Matriz de transición 78

4.7 Aplicación de la Programación Dinámica Estocástica al problema de dos presas en serie 80

4.8 Algoritmo de solución para un sistema de presas en serie 84

4.9 Simulación del funcionamiento de un sistema de presas 86

5 Aplicación de la metodología de la Programación Dinámica 88

5.1 Generalidades 88

5.2 Función objetivo 89

5.3 Análisis estadístico de los volúmenes de ingreso a un sistema de presas en serie 96

5.4 Proceso de optimación 100

5.5 Proceso de simulación de un sistema de presas en serie 107

6 Conclusiones 112

7 Bibliografía 114

1. Introducción

El agua es un recurso natural renovable esencial para el consumo humano, y también es empleado para la generación de corriente eléctrica. Sin embargo, aun cuando se trata de un recurso valioso, puede causar daños sustanciales al presentarse en grandes cantidades.

Los volúmenes de agua que fluyen por un río varían ampliamente con el tiempo, por esta razón los proyectos de abastecimiento de agua, riego o hidroeléctricos que extraen directamente el agua de una corriente, pueden no satisfacer la demanda de los usuarios durante los períodos de sequía o no proteger las actividades que se desarrollan, durante los períodos de grandes escurrimientos.

Uno de los objetivos de una presa es regular los escurrimientos naturales para adecuar el régimen de las extracciones a los requerimientos de la demanda, para ello, se almacenan temporalmente los excesos de agua generados durante los períodos de avenidas para luego utilizarlos en los períodos de estiaje; otro objetivo es controlar las avenidas para que los gastos de salida no sean excesivos.

En la fase de operación de una presa, el problema consiste en determinar una política que indique el volumen de agua disponible en un momento dado para satisfacer la demanda, previendo además las condiciones futuras en lo que respecta a volúmenes de ingreso y demanda.

Cuando se conoce *a priori*, a lo largo de la vida útil de la obra, tanto las demandas como los volúmenes de ingreso, determinar una política de operación adecuada es más o menos sencillo. Sin embargo, cuando se considera el carácter aleatorio de los volúmenes de ingreso al vaso, el cálculo se complica, ya que una misma política en algunas ocasiones no podrá satisfacer la demanda (principalmente cuando la presa esté vacía y al inicio de una época de estiaje) y en otras dispondrá de mucha más agua que la necesaria (por ejemplo, cuando la presa esté llena al inicio de una época de avenidas).

Hay muchas formas de operar una presa, unas mejores que otras. Sin embargo existirá una o algunas que se prefieran sobre todas las demás al considerar los criterios de utilidad, como pueden ser: la que menos veces provoque déficit, la que maximice los beneficios económicos o la que menos agua desperdicie.

1.1 Generalidades

Al diseñar obras hidráulicas se revisa el funcionamiento del sistema frente a diversas opciones de configuración del mismo, seleccionando aquella que este más cerca de los objetivos propuestos y con el menor costo asociado. Es posible que durante la vida útil de las obras, se vean modificadas las condiciones inicialmente consideradas de funcionamiento, demanda, climatológicas e inclusive las del tipo político y social, en estos casos es necesario revisar y modificar de la mejor forma; no llevar a cabo estas acciones puede redituar en bajos rendimientos, paralelamente con algunas otras consecuencias negativas.

En términos generales, el mal manejo de un sistema hidráulico conlleva a un bajo aprovechamiento de una cuenca superficial, por lo que es necesario implantar una "**política de operación**" que permita obtener los beneficios económicos y sociales.

Considerando el caso de una presa hidroeléctrica, cualitativamente, su **política óptima de operación** será aquella que no desperdicia agua tirándola por el vertedor de excedencias y que garantice, tanto en época de estiaje como de avenidas el agua y la carga suficiente para generar energía eléctrica. Si la presa hidroeléctrica se utiliza además para el control de avenidas, es decir proteger las zonas aguas abajo del vaso contra inundaciones, la **política de operación óptima** se modifica para considerar que el gasto de descarga no provoque daños aguas abajo y mantenga niveles bajos de almacenamiento para regular las grandes avenidas. Nótese que ambos objetivos se contraponen, ya que para efectos de generación se prefiere tener el embalse en niveles altos, mientras que por razones de control de avenidas conviene que los niveles estén bajos.

Resumiendo, la **política de operación óptima** de una presa para generación de corriente eléctrica y control de avenidas, indica la cantidad de agua a utilizar en cada momento, de tal forma que se logre maximizar la energía generada y minimizar los daños por inundación aguas abajo de la presa

Se dice que una **política de operación óptima** es factible cuando todas y cada una de las decisiones que la componen pueden llevarse a cabo. Además, bajo este término se engloban los lineamientos a seguir en el manejo de un sistema hidráulico, simple o complicado, de acuerdo con las denominadas variables de estado (p. e. el nivel de almacenamiento en una presa o en un acuífero) y las variables decisión (p. e. un volumen de extracción) incluidas en el proceso.

Para obtener la **política de operación óptima**, puede procederse por iteraciones, considerando que si las características estadísticas no cambian de una iteración a otra se conforma un proceso de Markov, el cual tiene un comportamiento asintótico al límite, lo cual quiere decir que después de un número finito de ciclos (iteraciones), el beneficio esperado en cada ciclo es constante e igual a todos los demás). Por lo tanto, si el beneficio máximo esperado que se obtiene en una iteración es semejante al de la anterior, el proceso empieza a estabilizarse y la **política de operación óptima** correspondiente ya no cambia, ver Tadeo (1990).

1.2 Objetivos

Los objetivos básicos que se pretenden cubrir en el desarrollo de esta tesis son los siguientes:

- Enmarcar dentro de la ingeniería de sistemas, los problemas de operación de un sistema de aprovechamientos hidráulicos, en este caso se tratará un sistema hidráulico constituido por varias presas en serie.

- Describir el procedimiento para obtener las políticas de operación óptima, bajo el esquema de la Programación Dinámica Estocástica tanto en una presa de almacenamiento individual como en un sistema de presas en serie.

- Desarrollar e implantar la herramienta de cómputo indispensable para abordar y resolver problemas del tipo mencionado.

Para cubrir los objetivos propuestos se han desarrollado 6 capítulos, cuyo contenido general es el siguiente:

Capítulo 2.

Los métodos de optimación constituyen una herramienta fundamental para el análisis de sistemas de recursos hidráulicos. En este capítulo se describen algunos métodos de optimación y sus bases teóricas, aplicaciones, limitaciones, ventajas y desventajas; métodos que se utilizan para determinar el control óptimo. Entre estas técnicas se encuentran: la Programación Lineal, la Programación No Lineal y la Programación Dinámica.

Los problemas que se resuelven utilizando la Programación Lineal son muy importantes, por dos razones; primero, existen muchos problemas importantes de decisión que se relacionan con la asignación de recursos limitados, donde se busca obtener los mejores resultados; segundo, existen métodos de computación que permiten resolver problemas de Programación Lineal con una gran cantidad de variables y que involucran numerosas restricciones, con una computadora sencilla.

Mientras tanto, en la Programación No Lineal, la función a optimizar es no lineal de varias variables.

La Programación Dinámica es una técnica matemática de optimación que divide el problema, esto es, lo descompone en otros nuevos problemas, cada uno con algunas decisiones, concatenadas en forma secuencial, cuya solución es equivalente a la del problema original. Aquí, lo que se busca es resolver la última etapa y usar dichos resultados para resolver la penúltima etapa y así sucesivamente.

También existe, la *Programación Dinámica Determinística*, la cual se aplica a problemas donde el *estado* en la siguiente *etapa* está completamente determinado por el *estado* y la *política de decisión* en la *etapa actual*; mientras que la *Programación Dinámica Estocástica o Probabilística* trata de un proceso *estocástico* de decisión con un cierto numero de etapas donde el estado en la siguiente etapa *no* está determinado por el estado y la política de decisión de la etapa actual.

Capítulo 3.

Se describen las características del sistema de presas del río Grijalva, el cual por su caudal es el segundo en importancia en México y el más importante en el país desde el punto de vista del aprovechamiento hidroeléctrico.

Se mencionan las áreas, las características físicas y los datos de cada una de las plantas hidroeléctricas de las diferentes presas del sistema del río Grijalva.

Capítulo 4.

Se plantea el modelo de optimación.

Las metodologías para obtener las políticas de operación de una presa requieren de una ***función de beneficios*** que refleje las ganancias derivadas de la entrega de agua, este inciso se centra en la forma de determinar dicha función, considerando beneficios y costos generados.

Se establece la ecuación de continuidad que rige el funcionamiento de una presa de almacenamiento y asimismo se desarrolla la teoría de la Programación Dinámica Estocástica correspondiente, para determinar sus políticas de operación óptima.

Para definir las políticas de operación óptima se desarrolla un algoritmo de solución.

Por otro lado, se establece la metodología de la Programación Dinámica Estocástica para resolver el problema de definir las políticas de operación óptima de dos presas en serie, cuyo funcionamiento es gobernado por la ecuación de continuidad, que definirá el comportamiento hidráulico de cada presa.

El problema de presas en serie se aborda con el esquema de la Programación Dinámica Estocástica, donde el algoritmo de solución a emplear considera que la operación de las presas no es independiente, puesto que el volumen de extracción en la primera presa depende del volumen almacenado y de la etapa que tenga la segunda presa.

Capítulo 5.

Se aplica la metodología de la Programación Dinámica Estocástica a un conjunto de presas en serie, el algoritmo de esta técnica de optimación se codifica para determinar las políticas de operación óptima de un sistema de presas en serie. Se elige el sistema de presas del conjunto hidroeléctrico del río Grijalva cuya generación representa el 41.8% de la capacidad hidroeléctrica de México.

Se definen las funciones objetivo de las presas con mayor capacidad de regulación, en este caso Angostura y Malpaso, estas funciones consideran costos o penalizaciones por derrames y déficits.

Se realizan análisis estadísticos de los volúmenes de ingreso de las presas en serie. Se obtienen los estados de cada presa, según la capacidad útil de cada una. Para aplicar el algoritmo es necesario primero definir las etapas, para lo cual se analizan 31 años de registros de volúmenes mensuales históricos.

Por otro lado, se consideran la magnitud de los escurrimientos y el volumen útil de cada presa, y después de varios intentos de agrupación, se decide analizar dos intervalos de discretización uno de $\Delta V = 600x10^6 m^3$ y otro de $\Delta V = 450x10^6 m^3$.

Después de efectuar el análisis estadístico para formar las etapas, se calculan las probabilidades asociadas a los volúmenes de ingreso y entonces a cada etapa del año se le determina su política de extracciones óptima.

A continuación, se establece el volumen que demandara cada etapa y se fija el numero máximo de posibles extracciones de cada etapa, pero este valor puede sufrir modificaciones, de acuerdo con los resultados obtenidos en el proceso de simulación, donde se aprecia el efecto de la política obtenida.

Así pues, utilizando los modelos de optimación y simulación se determinan las políticas de operación del conjunto de presas en serie que definirán los volúmenes que deben ser turbinados cada mes y se evaluarán los beneficios.

De manera general se puede decir que la política óptima calculada para operar en forma conjunta las presas, mostrará si la extracción en cada una de ellas era una función que dependía del almacenamiento inicial en ambas y de la etapa misma.

Por otro parte, para tener una visión más clara y explícita de las consecuencias derivadas de las políticas de operación obtenidas en el proceso de optimación, las cuales dictan las posibles extracciones a efectuar, es necesario simular el funcionamiento de las dos presas en serie, con 31 años de ingresos históricos de escurrimientos, de 1959 a 1989.

Se utiliza un programa de computo, el cual simulara el funcionamiento del sistema en cuestión, escrito en lenguaje Fortran, el cual lee un archivo que contiene los volúmenes de ingreso registrados, se usa la ecuación de continuidad, el volumen almacenado en cada presa y se interpola bilinealmente si es necesario para obtener el volumen de extracción que dicta la política de operación.

Finalmente en el capítulo 6 se consignan las conclusiones y recomendaciones derivadas de este trabajo.

2. Antecedentes

2.1 Sistemas de aprovechamiento hidráulico

Se define a un sistema de aprovechamiento hidráulico como la intervención del hombre encaminada hacia el óptimo uso de los recursos hidráulicos disponibles, con objeto de satisfacer las necesidades de usuarios en materia de aguas.

Un ejemplo muy simple de un sistema de aprovechamiento hidráulico lo constituye un canal para desviar las aguas de un río con objeto de regar un campo de cultivos. Más complicado es un sistema de presas, canales y pozos de extracción de aguas subterráneas, construido para abastecer de agua potable a una población urbana; inclusive puede pensarse en un sistema de aprovechamientos hidráulicos con objetivos múltiples, que contemple además de la generación hidroeléctrica, al riego agrícola.

2.1.1 Análisis de sistemas de aprovechamiento hidráulico

En este trabajo, el sistema de presas del río Grijalva contempla únicamente la generación de energía hidroeléctrica y no se considero la idea de utilizar los recursos hidráulicos de este sistema con objetivos múltiples, como la producción de alimentos, a través de la práctica del riego, esto debido a la complejidad del sistema y dado que el sistema del Grijalva solo se utiliza para generación y control de avenidas.

Descrita la problemática, es necesaria una herramienta técnica que permita abordarla y determinar la mejor solución considerando aquellos componentes del sistema cuyo comportamiento sea estudiado con detalle por las diversas ramas de la ciencia.

En la gran mayoría de los casos, sobre todo en sistemas complicados, se hace necesario tomar en cuenta las distintas interrelaciones entre los componentes y los distintos problemas interdisciplinarios.

El propósito central del análisis de sistemas de aprovechamientos es contribuir en la toma de decisiones y resolver los problemas que de esta se derivan; por ejemplo en muchos casos es necesario el mejoramiento de las normas en la generación de la información requerida.

A continuación se describen los pasos que contempla el análisis de sistemas, haciendo énfasis en los aprovechamientos hidráulicos.

a) Identificación de componentes

Se establecen los componentes del sistema de aprovechamientos hidráulicos a analizar. Si se considera un sistema de presas en serie desde el punto de vista oferta-demanda; la oferta se constituye por los almacenamientos de agua formados por las cortinas de las presas; el rubro demanda corresponde a la zona de riego, urbana o industrial a la cual servirá el sistema. En términos generales los elementos del sistema, la oferta y la demanda se ajustan en tiempo y espacio de acuerdo con las denominadas "medidas de diseño", las que se refieren a las capacidades de los componentes.

b) Identificación de objetivos

Establecer claramente los objetivos técnicos, sociales, políticos, económicos o de otra índole que estén relacionados con el sistema. Es así como en aprovechamientos hidráulicos, muchas veces se requiere maximizar las ganancias económicas esperadas del funcionamiento del sistema; cabe mencionar que en ocasiones este objetivo va en contra de algunos de tipo político o social.

c) Generación de opciones

Valorar los posibles resultados que se tendrían en caso de implantar cada una de las opciones generadas en el paso anterior.

Para cubrir esta fase es necesario utilizar técnicas de simulación que reflejen la tendencia de las variables frente a la opción de solución. Es así como en una presa de almacenamiento es indispensable simular su posible funcionamiento, tomando en cuenta una política de operación generada.

d) Presentación de resultados y toma de decisiones

Seleccionar y evaluar la acción a seguir, esto es, efectuar la toma de decisiones. En el caso que ocupa esta tesis, se refiere a seleccionar la mejor política de operación del sistema que cubra los objetivos preestablecidos, los cuales, desde el punto de vista técnico, pueden ser: surtir de la mejor manera posible los volúmenes demandados, tener una preservación adecuada de los recursos; establecer los niveles máximos y mínimos de extracción, definiendo de esta manera la capacidad efectiva del almacenamiento, sobre la cual deberá planearse una regulación adecuada.

Es importante comprender que las técnicas de análisis de sistemas de recursos hidráulicos, no proporcionan la respuesta a todos los problemas, existen algunos de gran escala donde es difícil aplicar métodos de optimación, en estos casos los resultados pueden ser engañosos o mal interpretados.

2.2 Métodos de optimación

Los métodos matemáticos de optimación suelen clasificarse en términos del tipo de función objetivo que manejan, es decir, continuas o discretas, sujetas a restricciones o irrestrictas, para casos determinísticos o estocásticos, lineales o no lineales. En general, estos son los criterios de tratamiento con que estos temas se presentan en la ya abundante literatura especializada.

Tradicionalmente, las técnicas de optimación se reducían al problema del "mejor ajuste", en parte debido a los costos, en términos de tiempo y esfuerzo, y también a la tendencia, producto de la incapacidad física, de manipular problemas con un número muy alto de variables. En la actualidad, existen dos corrientes metodológicas bien definidas para resolver problemas de esta forma, cada una de las cuales considera tanto aspectos relacionados con la eficacia de los procesos de solución, como con la adecuación del criterio empleado en la solución. Cada una de estas corrientes se puede identificar de acuerdo con la finalidad que caracteriza al problema de optimación, esto es:

1- El diseño y solución óptima de problemas estáticos; por ejemplo: los problemas del área de la Programación Lineal, o bien los métodos de optimación de funciones no lineales.

2- El comportamiento óptimo de sistemas dinámicos con información, ya sea de tipo determinístico o estocástico, como en los casos de la Programación Dinámica o el cálculo de variaciones basado en el principio de Pontryagin.

En la teoría clásica de optimación se tratan problemas en los que, para ciertas condiciones iniciales, al definir el valor de las variables independientes (variables de decisión o control) se determina una sola solución (trayectoria) del sistema. Sin embargo, existen sistemas en los que al definir el valor de las variables de decisión (o simplemente, el control), no se define una sola trayectoria factible, sino un conjunto. Esto se debe, a que dentro del sistema existen variables aleatorias (de disturbio) que no pueden controlarse y provocan dicha indeterminación.

Cuando la ley de probabilidades de las variables de disturbio queda definida al especificar el control, se dice que el sistema es probabilístico o estocástico.

Enseguida se mencionarán algunas limitaciones, ventajas y desventajas de algunas técnicas de Optimación, por ejemplo, el cálculo de variaciones tiene la desventaja de que la mayor parte de la teoría supone una función objetivo cuadrática y continua, lo cual no siempre es representativo de la realidad. En contraste, la Programación Dinámica tiene como ventaja su fácil aplicación, la función objetivo y sus restricciones pueden ser discontinuas y no lineales, pero tiene la desventaja de que los requerimientos de memoria y tiempo de cómputo pueden ser muy grandes.

2.2.1 Ventajas y desventajas entre algunos métodos de optimación

Como los escurrimientos son aleatorios y una presa en ocasiones, no puede construirse tan grande como para satisfacer cualquier demanda, es necesario decidir, en cada momento, cuánta agua debe extraerse por la obra de toma para satisfacer la demanda; las reglas con las que se toman estas decisiones se conocen como políticas de operación y definen cuánta agua debe extraerse, almacenarse y asignarse para su posterior uso, en cada época del año, en función del volumen almacenado y del ingreso registrado en la etapa anterior, para obtener a largo plazo, por ejemplo los beneficios máximos por generación de energía eléctrica y que se logre un buen aprovechamiento de la presa.

Para hacer lo anterior, se considera que en el vaso se dispone de un volumen útil, entre el NAMINO y el NAMO, que se destina a satisfacer la demanda de agua y otro volumen, denominado superalmacenamiento, que sirve a regular las avenidas.

De acuerdo a lo anterior, se reafirma que el análisis de las políticas de operación en una presa a largo plazo es muy importante, debido a que condicionan los niveles del agua en la presa al inicio de las avenidas y los daños que estas pueden llegar a causar, ver Domínguez (1989).

A continuación se hablará de algunos de los métodos utilizados para definir tales políticas, según el caso que sea estudiado y se mencionarán algunas de sus limitaciones, ventajas y desventajas.

2.2.1.1 Programación Lineal

Los matemáticos y otros investigadores han desarrollado un conjunto de teorías y de métodos analíticos, para resolver problemas para la planificación de actividades o la determinación del mejor plan de acción para realizar los objetivos dados dentro de una situación donde los recursos son limitados; estos métodos son conocidos bajo el nombre de "Programación Lineal", su definición matemática es simple, y consiste en hacer el análisis de problemas dentro de los cuales se intenta maximizar o minimizar algún objetivo lineal, donde este es una representación matemática de la meta total establecida en términos de las variables de decisión, satisfaciendo un conjunto de desigualdades lineales o *restricciones estructurales* y *no negativas*, una para cada variable de decisión, ver Dorfman et Co. (1962).

A esta programación también se le denomina un subconjunto de un área mayor de los procedimientos matemáticos de optimización, denominado programación matemática, aun cuando la aplicación de estos métodos a menudo requieren del empleo de la computadora, ninguno está relacionado con la "programación" con computadora, ambas se relacionan con la estructuración de un conjunto óptimo de decisiones.

Esta programación es muy útil y se aplica a resolver problemas de decisiones secuenciales, se ha usado con bastante éxito dentro de las industrias militar y del petróleo, mientras los sectores de servicios y público de la economía aplican estos métodos en forma creciente.

Las restricciones estructurales reflejan aspectos tales como limitaciones en recursos y otras identificadas en forma explícita en el enunciado del problema, por ejemplo, maximizar utilidades, minimizar costos, etc.

Cuando un modelo de Programación Lineal se establece en términos de dos variables de decisión, el problema se resuelve por procedimientos prácticos como los de solución gráfica, obteniendo un conjunto solución para un sistema de desigualdades lineales, ellos proporcionan un magnífico cuadro visual de referencia y resulta extremadamente útil para comprender la posible solución.

Sin embargo, muchas aplicaciones reales de la Programación Lineal contienen más de dos variables y los procedimientos prácticos como los métodos gráficos no pueden emplearse, entonces se utiliza la técnica de solución más popular, el *método símplex*, este procedimiento algebraico complejo da la solución de los sistemas de ecuaciones simultáneas, donde se pretende optimizar una función objetivo, siendo un proceso *iterativo* en el que se identifica una solución factible, esto se ha seguido investigando para ver si existe una solución mejor. Por "mejor" debe entenderse la medida en la que se puede perfeccionar el valor de la función objetivo. Si se identifica una mejor solución, la investigación se reanuda. La generación de cada solución sucesiva precisa de la solución de un sistema de ecuaciones lineales. La búsqueda continúa hasta que en la función objetivo ya no sea posible encontrar una mejora adicional. Una característica importante del método símplex es que *garantiza que cada solución sucesiva será factible, y que el valor de la función objetivo será por lo menos tan aceptable como el valor en la solución anterior*, ver Budnick (1981)

En un problema general de Programación Lineal, la solución puede tomar cualesquier valor y si se necesitan enteros, se deben utilizar métodos especiales. Excepto cuando las variables toman grandes valores (quizá de centenas) el redondeo de los valores de la solución al entero más cercano no producirá la mejor solución en enteros y por el contrario, puede estar muy lejano del óptimo, ver Ackoff-Sasieni (1982).

Para determinar las políticas de operación en el caso de una presa se pueden utilizar las técnicas de la Programación Lineal, (sobre todo para casos donde se restringe la probabilidad de que ocurran determinados eventos indeseables). En estas políticas se supone que para cada etapa, se establece una demanda que debe satisfacerse siempre que sea posible; las extracciones son mayores solo cuando se sobrepasa el nivel máximo de operación y menores solo cuando no existe disponibilidad; se puede utilizar esta técnica con Probabilidades Restringidas. Si, por otra parte, se imponen restricciones a las probabilidades de situaciones indeseables (déficit, derrame, etc.) puede formularse un problema de programación lineal. Logrando convertir una restricción, establecida en términos probabilísticos, en una equivalente, establecida en forma determinística, ver Domínguez (1989).

2.2.1.2 Programación No Lineal

Si las restricciones o la función objetivo no son lineales, se dice que se tiene un problema de Programación No Lineal, ver Ackoff-Sasieni (1982).

La Programación No Lineal se puede aplicar a problemas de probabilidad restringida relajando los requisitos de linearidad, ver Domínguez (1989).

Si en cierto problema desaparece la linealidad, lo cual priva de disponer de métodos cómodos con soluciones prácticas. Sin embargo, la programación no lineal conserva una cierta importancia práctica y los matemáticos poseen los medios de cambiar la dificultad, ver Dorfman et Co. (1962).

2.2.1.3 Programación Dinámica

El método de optimación de la Programación Dinámica se escoge por la flexibilidad y facilidad de su aplicación, analiza problemas no lineales, donde las variables se manejan en secuencia, este método es muy poderoso, esencialmente, si se tienen que tomar k decisiones secuenciales se pueden ordenar los cálculos de manera que, en lugar de tener un problema con k variables se tengan k problemas con una variable, ver Ackoff-Sasieni (1982).

Una de las razones por la cual comúnmente no se usa el método de la Programación Dinámica sucede cuando se trata de sistemas estocásticos, ya que el modelo propuesto por ser de tipo iterativo, involucra una gran cantidad de cálculos y memoria requeridos, por lo que se emplea una computadora y aún así, es necesario hacer algunas adaptaciones al método para desarrollar un algoritmo eficiente, tanto en el aspecto del número de operaciones, memoria necesaria y tiempo de proceso, para reducir sensiblemente las limitaciones y hacer factible su utilización.

Con respecto a reducir sensiblemente la memoria requerida para la matriz de transición, esto se logra haciendo la subdivisión de estados y decisiones igual y uniforme. En el caso de una presa, $q_{n,k}(i,j)$ es la probabilidad de pasar del estado i al j durante una etapa n, dada una extracción k. Con la anterior variable designada se hace una simplificación que permite evitar el cálculo y almacenamiento de memoria de elementos repetidos de la matriz de transición, si se utiliza un solo tamaño de discretización ΔV para los estados y decisiones.

La Programación Dinámica se puede encontrar en sus distintos desarrollos como programación dinámica determinística, programación dinámica estocástica, programación dinámica incremental, etc.

La Programación Dinámica se utiliza para estudiar la operación de una presa, sobre todo para definir sus políticas de operación, con una función objetivo discontinua que tome en cuenta la energía generada así como los costos por déficit y derrame; considerando estados, etapas dentro del año e ingresos aleatorios caracterizados por funciones de distribución no condicionadas, que tomen en cuenta la dependencia entre los ingresos de etapas sucesivas.

Los llamados modelos de programación matemática constituyen la herramienta fundamental para el análisis de sistemas de recursos hidráulicos; a continuación, se describen las características de algunos métodos para determinar el control óptimo; entre ellos se encuentran: la Programación Lineal, la Programación No Lineal y la Programación Dinámica, ver Rebolledo (1990).

2.3 Programación Lineal

Los problemas de Programación Lineal son muy importantes, por dos razones. Primero, permiten abordar muchos problemas de decisión, como los que se relacionan con la asignación de recursos limitados para obtener los mejores resultados posibles. Segundo, existen métodos de computación que permiten resolver problemas con miles de variables y que involucran centenas de restricciones, con una computadora sencilla, ver Edley (1978).

Esta técnica es utilizada en aprovechamientos hidráulicos fundamentalmente en problemas de asignación de recursos escasos, su concepción facilitó el desarrollo de otras técnicas como la Teoría de Redes, la Programación Entera y la Programación No Lineal.

Existen aplicaciones de las Técnicas de Programación Lineal con probabilidades restringidas, para determinar políticas de operación en presas de almacenamiento, que establecen restricciones que eviten situaciones no deseables, ver Domínguez (1989); otro caso para el cual es aplicable este concepto es el desbordamiento de la cortina de una presa, ver Joeres.

2.3.1 Teoría de la Programación Lineal

En un problema de Programación Lineal se desean seleccionar valores no negativos de las variables que maximicen (o minimicen) una función lineal, conforme a una o más restricciones lineales del tipo de desigualdad, igualdad o ambas.

2.3.2 Definiciones básicas

Considérese el siguiente problema de Programación Lineal.

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Minimizar} & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\textit{Sujeta a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

Aquí $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ es la *función objetivo* (o función criterio) que debe minimizarse y se denotará por Z. Los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son los *coeficientes de costo* (conocidos) y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las *variables de decisión* (variables, o niveles de actividad) que deben determinarse. La desigualdad $\sum_{j}^{n} = a_{ij}x_j \geq b_i$ denota la $i-$ésima *restricción*. Los coeficientes a_{ij} para $i = 1, 2, \ldots, m,$ $j = 1, 2, \ldots, n$ se llaman los *coeficientes tecnológicos*. Estos coeficientes tecnológicos forman la *matriz de restricciones* **A** siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Al vector columna cuya i-ésimo componente es b_i se le llama el *vector del lado derecho*, representa los requerimientos mínimos que deben satisfacerse. Las restricciones $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ son las *restricciones de no negatividad*. Un conjunto de valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ que satisface todas las restricciones se llama un *punto factible* o *vector factible*. El conjunto de todos esos puntos se llama *región factible* o *espacio factible*.

Usando la terminología anterior, el problema de Programación Lineal se puede enunciar como sigue: entre todos los vectores factibles, encuéntrese aquel que minimiza (o maximiza) la función objetivo.

2.3.3 Suposiciones de la Programación Lineal

Para representar un problema de optimación, como un Programa Lineal se requiere que se cumplan varias suposiciones que a continuación se explican.

1. *Proporcionalidad*. Dada una variable x_j su contribución al costo total es $c_j x_j$ y su contribución a la i-ésima restricción es $a_{ij} x_j$. Esto significa que si, por ejemplo, se dobla el valor x_j entonces se dobla su contribución al costo total y a cada una de las restricciones.

2. *Aditividad*. Esta suposición garantiza que el costo total es la suma de los costos individuales, y que la contribución total a la i-ésima restricción es la suma de las contribuciones individuales de cada actividad.

3. *Divisibilidad.* Esta suposición asegura que las variables de decisión se pueden dividir en cualquier nivel fraccional, de modo que se permiten valores no enteros para las variables de decisión.

Para resumir un problema de optimación se puede escribir como un programa lineal sólo si se cumplen las suposiciones anteriores. Esto excluye casos en los que existen economías de escala; por ejemplo, cuando el costo unitario decrece al aumentar la cantidad producida. En estos casos se debe recurrir a programas no lineales. También debe observarse que los parámetros c_j , a_{ij} y b_i deben ser conocidos o estimados.

2.3.4 Análisis

A continuación se presentan tres propiedades claves de las soluciones factibles en vértices que constituyen los principios fundamentales del método símplex. La primera propiedad relaciona estas soluciones con las soluciones óptimas.

Propiedad 1.

a) Si existe exactamente una solución óptima, entonces *debe* ser una solución factible en un vértice.

b) Si se tienen soluciones óptimas múltiples, entonces al menos dos *deben* ser soluciones factibles en vértices adyacentes

La propiedad 1 es un tanto intuitiva desde un punto de vista geométrico. Para *cualquier* problema que tenga sólo una solución óptima, siempre es posible mover la recta (hiperplano) de la función objetivo hasta que sólo toque un punto (la solución óptima) en un vértice de la región factible.

El punto de vista algebraico que sigue aclara también por qué debe cumplirse la propiedad en el caso a). Denótese por Z^* el valor de la función objetivo para la solución óptima única. Considérese ahora las implicaciones si esta solución no es una solución factible en un vértice. Por definición, debe estar sobre un segmento rectilíneo que una a otras dos soluciones factibles, es decir, es un promedio ponderado de estas otras dos soluciones factibles. Denótense por $\alpha(0 \prec \alpha \prec 1)$ y $(1-\alpha)$ los pesos de estas soluciones y sean Z_1 y Z_2 sus valores de la función objetivo, donde $Z^* = \alpha \cdot Z_1 + (1-\alpha)Z_2$. Como la suma de estos pesos es 1, las únicas posibilidades para la forma en que $Z, Z_1 \ y \ Z_2$ están relacionadas son:

1) $Z^* = Z_1 = Z_2$, 2) $Z_1 \prec Z^* \prec Z_2$ y 3) $Z_1 \succ Z^* \succ Z_2$

La primera posibilidad implica que las otras dos soluciones factibles también son óptimas, de modo que son soluciones óptimas múltiples. Las dos últimas posibilidades implican que la solución original en realidad no es óptima. La conclusión resultante es que es imposible tener una sola solución óptima que no sea una solución factible en un vértice.

La propiedad 1 simplifica en gran parte la búsqueda de una solución óptima, ya que sólo es necesario considerar soluciones factibles en vértices. La magnitud de esta simplificación la hace resaltar la propiedad 2.

Propiedad 2

Sólo existe un número *finito* de soluciones factibles en vértices.
Para ver por qué, en general, el número es finito, recuérdese que cada solución factible en un vértice es la solución simultánea de un sistema de n ecuaciones extraídas de las $(m+n)$ ecuaciones de las fronteras de las restricciones. El número de combinaciones diferentes de $(m+n)$ ecuaciones tomadas n a la vez es

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!},$$

que es un número finito. Este número, a su vez, es una *cota superior* para el número de soluciones factibles en vértices.

La propiedad 2 sugiere que sólo puede obtenerse una solución óptima por enumeración exhaustiva, es decir, hallar y comparar todas las soluciones factibles en vértices. Desafortunadamente hay números finitos que (para todos los fines prácticos) pueden considerarse infinitos. Por ejemplo, un problema de Programación Lineal más bien pequeño, con sólo m=50 y n=50, ¡tendría $(100!)/(50!) \approx 10^{29}$ sistemas de ecuaciones por resolver! En contraste, el método símplex sólo requeriría examinar aproximadamente 100 soluciones factibles en vértices para un problema de esta magnitud. Se puede obtener este tremendo ahorro de trabajo debido a la propiedad 3.

Propiedad 3.

Si una solución factible en un vértice es mejor (según lo mide Z) que todas sus soluciones factibles en vértices *adyacentes*, entonces es mejor que todas las demás soluciones factibles en vértices (es decir, es *óptima*).

La razón básica por la que la propiedad 3 también se cumple para problemas más grandes es que la región factible siempre tiene la propiedad de ser *convexa.*

La propiedad 3 proporciona un criterio conveniente para determinar si una solución factible en un vértice es óptima, sin tener que enumerar todas las soluciones posibles. El método símplex explota este hecho, examinando sólo algunas de las soluciones factibles en vértices que se vean prometedoras y deteniéndose tan pronto como una de ellas pase esta prueba de optimación. En particular, repetidamente (iterativamente) se mueve de la solución factible en un vértice, en curso, hacia una solución factible en un vértice adyacente que sea mejor (lo cual puede realizarse de manera muy eficiente) hasta que la solución actual tenga alguna solución factible, en un vértice adyacente, que sea mejor. Enseguida se resume el procedimiento que emplea el método símplex.

Los conceptos expresados en los párrafos anteriores pueden visualizarse en las siguientes figuras en dos dimensiones (es decir $n = 2$).

El problema es elegir los valores de x_1 y x_2 a fin de

$$\text{Maximizar} \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

Sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0 \text{ y } x_2 \geq 0$$

Este problema tiene dos variables de decisión y únicamente dos "dimensiones", de modo que puede usarse un procedimiento gráfico para resolverlo. Este procedimiento comprende la construcción de una gráfica bidimensional, con x_1 y x_2 como ejes. El primer paso es identificar los valores de (x_1, x_2) permitidos por las restricciones. Se realiza esto trazando las rectas que deben limitar el intervalo de valores permisibles. Para empezar, nótese que las restricciones de no negatividad $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ requieren que (x_1, x_2) se encuentren en el lado positivo de los ejes. A continuación, obsérvese que la restricción $x_1 \leq 4$ significa que (x_1, x_2) no puede estar a la derecha de la recta $x_1 = 4$. En la ***figura 2.1*** se muestran estos resultados, en donde el área sombreada contiene los únicos valores de (x_1, x_2) que todavía son permitidos.

En una forma semejante se agregaría la recta $2x_2 = 12$ a la frontera de la región permisible. La restricción final $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ requiere que se sitúen los puntos (x_1, x_2) tales que $3x_1 + 2x_2 = 18$ (otra recta) para completar la frontera. (Nótese que los puntos tales que $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ son aquellos que se encuentran debajo de la recta $3x_1 + 2x_2 = 18$, de modo que esta es la recta límite más allá de la cual deja de cumplirse la desigualdad). En la ***figura 2.2*** se muestra la región resultante de los valores permisibles de (x_1, x_2).

El paso final es seleccionar el punto de esta región que maximice el valor de $Z = 3x_1 + 5x_2$. Este paso se vuelve automático después de un poco de práctica; para descubrir su base, resulta instructivo proceder por tanteos. Inténtese, por ejemplo, $Z = 10 = 3x_1 + 5x_2$ para ver si existen valores de (x_1, x_2) en la región permisible que proporcionen un valor Z tan grande como 10.

Trazando la recta $3x_1 + 5x_2 = 10$ se ve que existen muchos puntos de esta recta que se encuentran dentro de la región (véase la ***figura 2.3***). Por lo tanto, inténtese un valor mayor de Z, digamos, por ejemplo, $Z = 20 = 3x_1 + 5x_2$. Una vez más, un segmento de la recta $3x_1 + 5x_2 = 20$ está dentro de la región, de modo que el valor máximo permisible de Z debe ser al menos 20. Nótese que esta recta que proporciona un valor mayor de Z está más arriba y más alejada del origen que la primera y que las dos son paralelas. Por consiguiente, este procedimiento por tanteos no es nada más que trazar una familia de rectas paralelas que contengan al menos un punto de la región permisible y seleccionar aquella que se encuentre más alejada del origen (en la dirección de los valores crecientes de Z). Esta recta pasa por el punto (2,6), como se indica en la ***figura 2.3***, de modo que la ecuación es $3x_1 + 5x_2 = 3(2) + 5(6) = 36 = Z$. De donde la solución deseada es $x_1 = 2, \quad x_2 = 6$

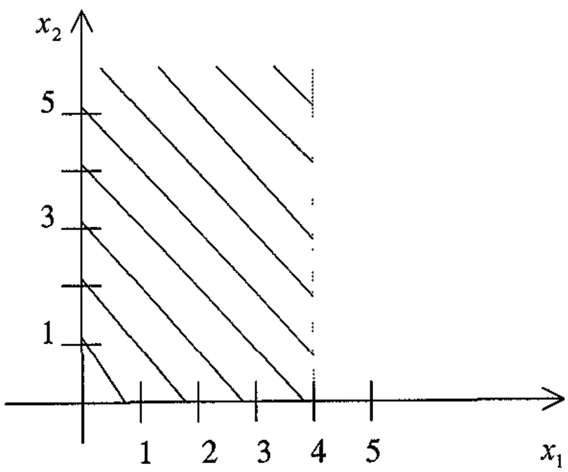


figura 2.1 El área sombreada muestra los valores de (x_1, x_2) permitidos por $x_1 \geq 0$

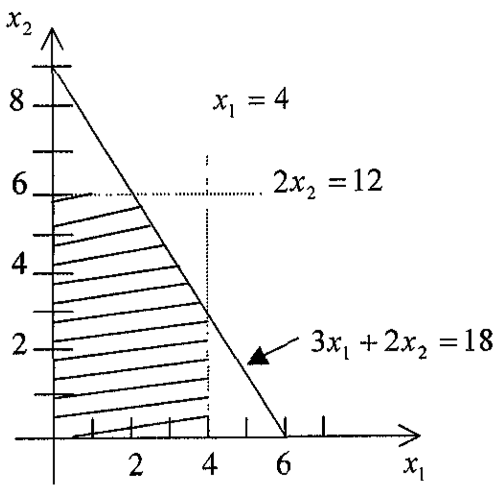


figura 2.2 El área sombreada muestra los valores permisibles de (x_1, x_2)

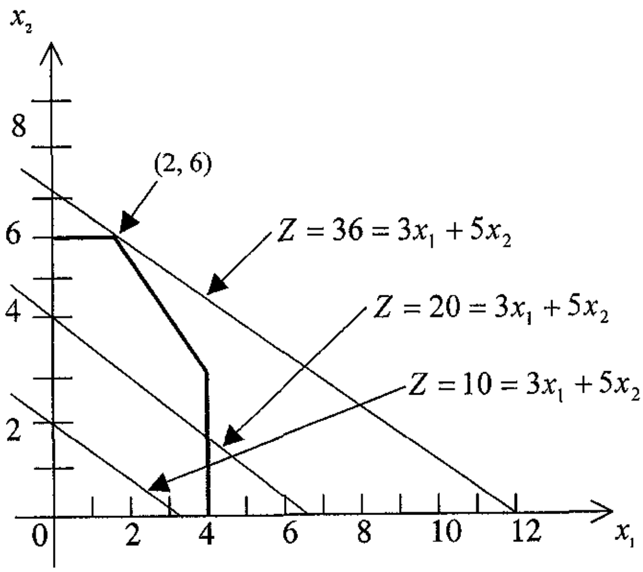


figura 2.3 Valor de (x_1, x_2) que maximiza $3x_1 + 5x_2$

2.3.6 Terminología para las soluciones del modelo

Es posible que se tenga la costumbre de reservar el término **solución** para nombrar la respuesta final a un problema, pero la convención en Programación Lineal (y sus extensiones) es un tanto diferente. Aquí, *cualquier* especificación de valores para las variables de decisión $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llama solución, sin importar si es una elección deseable, o incluso admisible. Entonces se identifican los diferentes tipos de soluciones usando un adjetivo apropiado, como se verá a continuación.

Una **solución factible** es una solución para la que se satisfacen *todas* las restricciones.

En el ejemplo, las soluciones factibles son los puntos dentro o sobre la frontera del área sombreada (a veces llamada región factible) de la ***figura 2.2***. Por tanto, (2, 3) y (4, 1) son soluciones factibles, pero (-1, 3) y (4, 4) son soluciones *no factibles*.

Dado que existen soluciones factibles, la meta de la Programación Lineal es hallar aquella que sea la "mejor", medida por el valor de la función objetivo en el modelo.

Una **solución óptima** es una solución factible que tiene el valor más favorable de la función objetivo.

Por valor más favorable se entiende el valor mayor o menor, dependiendo de sí el objetivo es maximización o minimización. Así entonces, una solución óptima maximiza/minimiza la función objetivo sobre la región factible completa.

Con frecuencia, un problema tendrá sólo una solución óptima. Éste fue el caso en el ejemplo, en el que sólo la solución $(x_1, x_2) = (2, 6)$ es óptima.

La tercera posibilidad es que un problema no tenga soluciones óptimas. Esto ocurre únicamente si: 1) no tiene soluciones posibles, o bien, 2) las restricciones no evitan el crecimiento del valor de la función objetivo (Z) indefinidamente, en la dirección favorable (positiva o negativa). Por ejemplo, se tendría este último caso si se eliminaran las dos últimas restricciones funcionales en el ejemplo.

2.3.7 Geometría del método Símplex

Se tratarán aquí los principios geométricos fundamentales del método símplex, utilizando la solución gráfica para el ejemplo anterior con el fin de ilustrar los conceptos generales. Así entonces se analizan las variables de decisión $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para cualquier problema de programación lineal, al mismo tiempo que se ilustra en dos dimensiones con las variables de decisión $(x_1,\ x_2)$ para el ejemplo anterior; en la ***figura 2.2*** se han hecho resaltar las cinco rectas de restricción y sus puntos de intersección, en virtud de que constituyen las claves para el análisis.

Se comenzará por introducir cierta terminología básica, ver Hillier (1982).

2.3.8 Terminología

Las soluciones óptimas deben estar sobre la frontera de la región factible y, en efecto, esta es una propiedad general. Como "frontera" es un concepto geométrico, las dos primeras definiciones aclaran en qué forma se identifica algebraicamente la frontera de la región factible.

> La **ecuación de la frontera** para cualquier restricción se obtiene reemplazando su signo
>
> $\leq,\ =,\ \geq$ por un signo de $=$.

Por tanto, las ecuaciones de la frontera para las cinco restricciones del ejemplo son las ecuaciones dadas para las cinco rectas de la ***figura 2.2***. En general, la forma de la ecuación de la frontera para una restricción es $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$, para las restricciones funcionales, y $x_j = 0$, para las de no negatividad. Estas ecuaciones definen una forma geométrica "plana" (llamada *hiperplano*) en el espacio n-adimensional, análoga a la recta del espacio bidimensional y al plano del tridimensional.

La **frontera** de la región factible consta de aquellas soluciones factibles que satisfacen una o más de las ecuaciones de la frontera de las restricciones (es decir, que se encuentran sobre uno o más de los hiperplanos frontera).

Probablemente, no se habrá notado en el ejemplo que la solución óptima (2, 6) no sólo estaba sobre la frontera de la región factible sino que también en uno de los vértices de esa región. Esto no es coincidencia, como se verá más adelante, por lo que primero se deben definir cuáles son estos vértices en el espacio n-dimensional.

Una **solución factible en un vértice** es una solución factible que no está sobre segmento rectilíneo *alguno* que una a *otras* dos soluciones factibles.

Así en el ejemplo (0, 0), (0, 6), (2, 6), (4, 3) y (4, 0) son soluciones factibles en un vértice. Sin embargo, éstas son las únicas soluciones factibles en vértices.

Por ejemplo, la solución (2, 3) está sobre el segmento rectilíneo entre muchos pares de soluciones factibles, tal como (1, 4) y (3, 2), y la solución (0, 5) está sobre el segmento rectilíneo entre pares como (0, 3) y (0, 6).

Con n variables de decisión $(n \succ 3)$, esta definición no es muy conveniente para identificar las soluciones factibles en vértices. Por lo tanto, es más útil identificarlas algebraicamente. En el ejemplo, cada solución factible en un vértice se encuentra en la intersección de dos $(n = 2)$ rectas de restricción; es decir, es la *solución simultánea* de un sistema de dos ecuaciones de la frontera de las restricciones.

Análogamente, para cualquier problema de programación lineal, cada solución factible en un vértice se encuentra en la intersección de n fronteras de restricciones; es decir, es la *solución simultánea* de un sistema de n ecuaciones de la frontera de las restricciones. Empero, esto no equivale a decir que *todo* conjunto de n ecuaciones de la frontera, elegidas de entre las $(n+m)$ restricciones proporciona una solución factible en un vértice. En particular, la solución simultánea para tal sistema de ecuaciones podría violar una o más de las otras m restricciones, en cuyo caso se trata de una solución *no factible* en un vértice.

Además, un sistema de n ecuaciones de la frontera de las restricciones podría no tener solución en lo absoluto. En el ejemplo esto ocurre dos veces con los pares de ecuaciones 1) $x_1 = 0$ y $x_1 = 4$; 2) $x_2 = 0$ y $2x_2 = 12$. La posibilidad final es que un sistema tenga soluciones múltiples, debido la presencia de ecuaciones redundantes.

Sólo se necesita una definición más para identificar agrupamientos convenientes de soluciones factibles en vértices para el método símplex.

Se dice que dos soluciones factibles en vértices son **adyacentes** si el segmento rectilíneo que las une está sobre (una arista de) la frontera de la región factible.

Así entonces, en el ejemplo, los pares de soluciones factibles en vértices que son adyacentes son (0, 0) y (0, 6); (0, 6) y (2, 6); (2, 6) y (4, 3); (4, 3) y (4, 0); y finalmente, (4, 0) y (0, 0). Nótese que, en cada caso, sólo *una* de las ecuaciones de definición es diferente para soluciones en vértices adyacentes.

Se aplican estas mismas conclusiones cuando $(n \succ 2)$. Recuérdese que una solución factible en un vértice está en la intersección de n fronteras de restricción. Supóngase que se elimina una de estas fronteras de restricción (ecuaciones de definición). La intersección de las restantes $(n-1)$ fronteras de restricción es una *recta*. Un *segmento* de esta recta se encuentra sobre la frontera de la región factible, y el resto de la recta no la admiten las otras restricciones. (El término técnico usado en la definición anterior para un segmento rectilíneo de este tipo es el de **arista)**. Supóngase ahora que nos alejamos de la solución factible en un vértice, en la dirección factible, a lo largo de esta recta, hasta que se llega a la *primera* frontera de restricción (ecuación de definición) nueva. Este nuevo punto es una solución factible en un vértice *adyacente*. El moverse más allá de ella, a lo largo de la recta, hasta otras fronteras de restricción nuevas sólo conduciría a soluciones *no factibles* en vértices. Por tanto, una solución factible en un vértice tiene únicamente n soluciones factibles en vértices adyacentes, a cada una de las cuales se llega en la forma que acaba de describirse, eliminando una de n ecuaciones de definición para esta solución y reemplazándola por la nueva ecuación de definición apropiada.

2.3.9 Características del método Símplex

Paso de iniciación. Pártase de una solución factible en un vértice.

Paso iterativo. Muévase hacia una solución factible en un vértice adyacente que sea mejor. (Repítase este paso tantas veces como se necesite).

Regla de detención. Deténgase cuando la solución factible en un vértice, actual, sea mejor que todas sus soluciones factibles en vértices adyacentes.

Ésta es la esencia del método símplex, aun cuando una descripción completa especifica una manera conveniente de elegir la nueva solución, tanto en el paso de inicialización como en los pasos iterativos.

Al final, el método símplex debe hallar una solución óptima para todo problema de programación lineal que tenga una (o más). Las razones por las que se puede garantizar lo anterior son las siguientes: Primera, en virtud de las propiedades 1 y 3, se tiene una solución óptima que es una solución factible en un vértice, pero la regla de detención nunca suspende al algoritmo hasta que se llega a una solución de este tipo y, en tal caso, siempre lo detiene.

Segunda, como el paso iterativo siempre hace que uno se mueva hacia una mejor solución factible en un vértice, de modo que el valor de la función objetivo se va mejorando continuamente, el algoritmo nunca puede repetir una solución factible en un vértice que ya haya examinado en una iteración previa. Por tanto, continúa buscando *nuevas* soluciones factibles en vértices, hasta que se encuentra una solución óptima, de donde, el número de iteraciones debe ser menor que el número de soluciones factibles en vértices.

Tercera, debido a la propiedad 2, el número de soluciones factibles en vértices es finito. Por lo tanto, el método símplex debe hallar una solución óptima en un número *finito* de iteraciones.

Con anterioridad se hizo el comentario de que el solo hecho de ser finito no es muy alentador. La clave real del éxito del método símplex es que requiere únicamente un número relativamente pequeño de iteraciones. No puede ofrecerse prueba matemática alguna para este hecho, sólo los resultados consecuentes de más de dos décadas de resolver problemas reales.

2.3.9.1 Otros métodos de solución de la Programación Lineal

En este trabajo se utiliza la Programación Lineal con el método símplex, debido a su facilidad para usarse, tanto gráficamente como algebraicamente.

Dentro de la Programación Lineal existen otros métodos de solución como el Primal, el Dual, etc. En algunos casos es conveniente plantear el problema Dual o Primal para facilitar la solución del problema.

A continuación se mencionarán algunas propiedades de dualidad del Primal y del Dual.

Una solución factible es aquella en la cual la función objetivo alcanza su meta, es decir su mínimo o máximo, y a esta solución se le llama solución factible óptima. Pero, si una o más variables básicas de una solución básica es (son) igual(es) a cero, se dice que es una solución básica degenerada.

1) El dual del dual es el primal

2) Si ambos problemas, primal y dual son no degenerados y tienen soluciones factibles, entonces los 2 problemas tienen solución óptima y los valores óptimos de las correspondientes funciones objetivo son iguales

3) Si uno de los problemas no tiene solución factible, entonces ambos problemas no tienen solución óptima.

4) Si uno resuelve por el método símplex uno de los problemas, en lo que respecta a 2) uno puede ver, en la tabla óptima, la solución óptima del otro problema. Para esto y 1) uno debe resolver "el más fácil"

En este caso, la función a optimizar es no lineal de varias variables. Resolver el problema no resulta sencillo, ya que la mayoría de los métodos conducen a óptimos locales y no globales. El enfoque más utilizado parte de la base de una revisión del entorno de una solución propuesta, moviéndose entonces en la dirección que presenta mayor decrecimiento de la función objetivo y estableciendo originalmente un tamaño de paso que puede ser modificado posteriormente, ver Hillier (1982).

La mayoría de los métodos desarrollados para buscar la solución a estos problemas, se basan en la selección de una dirección de avance por etapa, para posteriormente simplificar la búsqueda a una sola dimensión.

Esta metodología es muy aplicable en la Hidráulica, particularmente en los problemas relacionados con las redes de distribución de agua potable y en los ajustes de funciones de distribución de probabilidad a datos de gastos fluviales o precipitaciones.

2.4.1 Teoría de la Programación No Lineal

En forma general, el problema de Programación No Lineal es encontrar $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para

$$\text{Maximizar } f(x)$$

$$\text{sujeta a } g_i(x) \leq b_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad \text{y} \quad x \geq 0$$

Donde $f(x)$ y las $g_i(x)$ son funciones dadas de n variables de decisión.

No se dispone de algoritmo alguno que resuelva *todos* los problemas específicos que se ajustan a este formato; sin embargo, se han hecho progresos sustanciales para algunos casos especiales importantes de este problema, haciendo diversas suposiciones acerca de estas funciones, y la investigación continúa en forma muy activa.

2.4.2 Programación convexa

El problema de *programación convexa* es el caso especial del problema de programación no lineal en el que $f(x)$ es una función *cóncava* y todas las $g_i(x)$ son funciones *convexas*. Estas suposiciones simplifican mucho el problema. La convexidad de las funciones $g_i(x)$ implica que el conjunto de soluciones factibles es un *conjunto convexo*. Esta propiedad y la concavidad de $f(x)$ implican que cualquier *óptimo local* es también un *óptimo global*; esto es, cualquier solución factible que maximiza $f(x)$ sobre las soluciones factibles en su vecindad inmediata, también maximiza a $f(x)$ sobre el conjunto completo de soluciones factibles. Por lo tanto, en lugar de tener que encontrar y comparar un número grande (tal vez infinito) de óptimos locales, sólo es necesario encontrar un óptimo local y, en consecuencia, global.

Para evitar complicaciones excesivas, se adoptaran las suposiciones de que todas las funciones son diferenciables.

Se ha desarrollado un número considerable de algoritmos para programación no lineal convexa. La mayor parte usa algún tipo de *procedimiento de búsqueda* para encontrar una sucesión de soluciones que lleven a una solución óptima. Es característico que se hagan ajustes que permitan al procedimiento de búsqueda enfocarse sobre una versión *no restringida* del problema, durante la parte principal de cada iteración. Por lo tanto, con el objeto de exponer las bases para describir uno de los algoritmos, se presentarán los procedimientos de búsqueda para *problemas no restringidos*, en donde el objetivo es simplemente maximizar una función cóncava $f(x)$. Como puede verse en la ***Tabla 2.1***, esta presentación comienza con el familiar problema *unidimensional* de maximizar una función de *una sola* variable, después se considera una función de *varias* variables antes de pasar al problema general de programación convexa.

Tabla 2.1

Problema	*Condiciones necesarias y suficientes para la Optimación*	*Procedimiento de solución*
No restringido unidimensional	$\frac{df(x)}{dx} = 0$	Procedimiento de búsqueda unidimensional
No restringido multidimensional	$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0, (j = 1, 2, \ldots, n)$	Procedimiento de búsqueda del gradiente
Programación convexa general	Condiciones de Kuhn-Tucker	Algoritmos basados en el procedimiento de búsqueda del gradiente, etc.

2.4.3 Condiciones de Kuhn-Tucker

Antes de considerar los algoritmos, es necesario aprender a reconocer una *solución óptima* para un problema de programación no lineal. A continuación se dan las llamadas condiciones de Kuhn-Tucker, que describen este tipo de soluciones.

Supóngase que $f(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ son funciones *diferenciables* que satisfacen ciertas condiciones de regularidad. Entonces $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ puede ser una solución *óptima* para el problema de programación no lineal sólo si existen m números, $u_1, u_2, \ldots, u_m$, tales que se satisfacen *todas* las condiciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 1. \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} u_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0 \\ 2. \quad x_j^* \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} u_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) = 0 \end{array}\right\} \quad en\ x_j = x_j^*,\ para\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\left.\begin{array}{ll} 3. & g_i(\mathbf{x}^*) - b_i \leq 0 \\ 4. & u_i\left(g_i(\mathbf{x}^*) - b_i\right) = 0 \end{array}\right\} \textit{para } i = 1, 2, \ldots, m$$

5. $x_j^* \geq 0, \quad \textit{para } j = 1, 2, \ldots, n$
6. $u_i \geq 0, \quad \textit{para } i = 1, 2, \ldots, m$

Es usual que se haga referencia a estas condiciones como las *condiciones de Kuhn-Tucker*. Las u_i son parecidas a las *variables duales* de la programación lineal y tienen una interpretación económica comparable. (Sin embargo, las u_i en realidad surgen en la deducción matemática como multiplicadores de Lagrange generalizados). Las condiciones (3) y (5) no hacen más que ayudar a asegurar la factibilidad de la solución. Las otras condiciones eliminan a la mayor parte de las soluciones factibles como posibles candidatos para ser una solución óptima. No obstante, debe hacerse notar que la satisfacción de estas condiciones no garantiza que la solución sea óptima. Al igual que la condición análoga para una función no restringida de que sus derivadas parciales sean cero, estas condiciones sólo son *necesarias*, y no *suficientes*, para la Optimación. De cualquier manera, igual que antes, si se satisfacen ciertas condiciones adicionales se vuelven suficientes para garantizar la Optimación. Kuhn y Tucker suministraron la siguiente extensión del teorema.

Corolario. Supóngase que $f(\mathbf{x})$ es una *función cóncava* y que $g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})$ son *funciones convexas* que satisfacen las condiciones de regularidad. Entonces $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ es una *solución óptima* si y sólo si se satisfacen *todas* las condiciones del teorema.

2.4.4 Procedimiento de búsqueda unidimensional para el problema no restringido de una sola variable

Considérese el problema de maximizar una función cóncava $f(x)$ cuando no existen restricciones para los valores factibles de la variable única x.

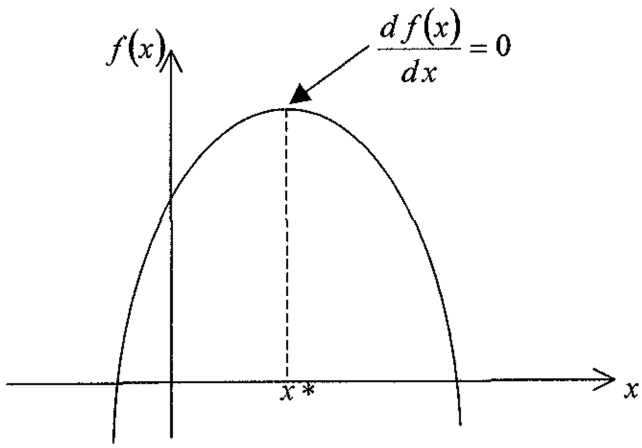


figura 2.4. El problema no restringido unidimensional

Como se observa en la ***figura 2.4,*** en principio, es posible resolver este tipo de problema igualando la primera derivada a cero y resolviendo la ecuación que resulta para el valor óptimo de x, denotado por x^*. (El que la función sea cóncava implica que la segunda derivada es negativa). Sin embargo, si $f(x)$ no es una función particularmente sencilla, puede que no sea posible resolver esta ecuación *analíticamente*. Si éste es el caso, el *procedimiento de búsqueda unidimensional* proporciona una manera directa de resolver el problema *numéricamente*.

La idea implícita en el procedimiento de búsqueda unidimensional es muy intuitiva, a saber: que el que la *pendiente* (derivada) sea positiva o negativa en una *solución tentativa* indica en forma definitiva si es necesario incrementar o disminuir esta solución para acercarse a una solución óptima. Así, si la derivada evaluada en un valor particular de x *es positiva*, entonces x^* debe ser mayor que x y por lo tanto x se convierte en una *cota inferior* para las soluciones tentativas que necesitan considerarse en adelante. Por el contrario, si la derivada es *negativa*, entonces x^* debe ser *menor* que x y donde x se convertiría en una *cota superior*. Por lo tanto, una vez identificados los dos tipos de cotas, cada nueva solución tentativa seleccionada entre las cotas actuales proporciona una nueva cota *más cerrada* de un tipo, haciendo la búsqueda más reducida. Mientras se use una regla razonable para seleccionar cada solución tentativa en esta forma, la *sucesión* resultante de soluciones tentativas debe *converger* a x^*. En la práctica, esto significa continuar la sucesión hasta que la distancia entre las cotas sea lo suficientemente pequeña para que la siguiente solución tentativa deba estar dentro de una *tolerancia del error* preespecificada de x^*

Enseguida se resume este proceso completo, usando la notación

x' solución tentativa actual
$\underline{x}$ cota inferior actual para x^*
x cota superior actual para x^*
$\in$ tolerancia del error para x^*

Aunque existen varias reglas razonables para seleccionar cada nueva solución tentativa, la que se usa enseguida es la **regla del punto medio** (tradicionalmente llamada *plan de búsqueda de Bolzano*), que sólo dice que se seleccione el *punto medio* entre las dos cotas actuales.

Resumen del procedimiento de búsqueda unidimensional

Paso de inicialización. Selecciónese $\in$. Encuéntrese una $\underline{x}$ y una $\bar{x}$ iniciales por inspección (o encontrando respectivamente cualquier valor de x en el que la derivada sea positiva y luego negativa). Selecciónese una solución tentativa inicial.

$$x' = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}$$

Paso iterativo 1. Evalúese $\frac{df(x)}{dx}$ en $x = x'$

2. Si $\frac{df(x)}{dx} \geq 0$, hágase $\underline{x} = x'$

3. Si $\frac{df(x)}{dx} \leq 0$, hágase $\bar{x} = x'$

4. Selecciónese una nueva $x' = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}$

Regla de detención. Si $(\bar{x} - \underline{x}) \leq 2 \cdot \in$, y por lo tanto x, debe estar dentro del $\in$ de x^*, deténgase. De otra manera, regrésese al paso iterativo.

Cuando el cálculo de las derivadas en forma analítica es difícil, puede utilizarse el algoritmo de Fibonacci.

2.4.5 Procedimiento de búsqueda del gradiente para el problema no restringido de variables múltiples

Ahora considérese el problema de maximizar una función cóncava $f(x)$ de variables *múltiples* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, en donde todavía no se tienen restricciones para los valores factibles. ¿Cómo puede extenderse el procedimiento anterior de búsqueda *unidimensional* a un problema *multidimensional*? Antes, se usó el valor de la derivada *ordinaria* para seleccionar una de *dos* direcciones posibles (incrementar o disminuir x) en la que había que pasar de la solución tentativa actual a la siguiente.

La meta era alcanzar finalmente un punto en el que la derivada fuera (en esencia) *cero.* Ahora existen *innumerables* direcciones posibles en las cuales moverse, que corresponden a las *tasas proporcionales* posibles a las que las respectivas variables pueden cambiarse. La meta es alcanzar finalmente un punto en el que todas las derivadas parciales sean (en esencia) *cero.* Por lo tanto, la extensión del procedimiento anterior requiere el uso de los valores de las derivadas *parciales* para seleccionar la dirección específica en la cual moverse. Esto implica el uso del *gradiente* de la función objetivo, como se describirá enseguida.

Dada la suposición de que la función objetivo $f(x)$ es diferenciable, resulta que posee un *gradiente* denotado por $\nabla f(x)$ en cada x. En particular, el **gradiente** en un punto específico $x = x'$ es el *vector* cuyos elementos son las *derivadas parciales* respectivas evaluadas en $x = x'$, de manera que

$$\nabla f(x') = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \text{ en } x = x'$$

El significado del gradiente es que el cambio (infinitesimal) en x que *maximiza* la tasa a la que $f(x)$ aumenta es el cambio que es *proporcional* a $\nabla f(x)$. Para expresar esta idea geométricamente, la "dirección" del gradiente, $\nabla f(x')$ se interpreta como la *dirección* del segmento rectilíneo dirigido (flecha) que va del origen $(0, 0, 0)$ al punto $\left(\partial f / \partial x_1,\ \partial f / \partial x_2, \ldots, \partial f / \partial x_n\right)$, en donde $\partial f / \partial f_j$ se evalúa en $x_j = x'_j$. Por lo tanto, se puede decir que la tasa a la que aumenta $f(x)$ se maximiza si los cambios (infinitesimales) en x se hacen en la *dirección* del gradiente $\nabla f(x)$. Como el objetivo es hallar la solución factible que *maximiza* $f(x)$ parecería adecuado intentar moverse en la dirección del gradiente tanto como sea posible.

Como el problema actual *no* tiene restricciones, esta interpretación del gradiente sugiere que un *procedimiento de búsqueda* eficiente debe continuar moviéndose en la dirección del gradiente, hasta que se alcance (en esencia) una solución óptima x^* donde $\nabla f(x^*) = 0$. Sin embargo, en general no sería práctico cambiar x *continuamente* en la dirección $\nabla f(x)$, ya que requeriría una *reevaluación* continua de las $\partial f / \partial f_j$ y cambiar la dirección de la trayectoria. Por lo tanto, un procedimiento mejor es continuar moviéndose en una dirección *fija*, desde la solución tentativa actual, sin detenerse hasta que $f(x)$ deje de aumentar. Este punto de detención sería la siguiente solución tentativa, de manera que entonces se calcularía de nuevo el gradiente para determinar la nueva dirección en la cual moverse. Con este enfoque, cada *iteración* comprende un cambio en la solución tentativa *actual* x como sigue:

Hágase $x' = x' + t \cdot \nabla f(x)$

Donde t^* es el valor positivo de t que *maximiza* $f(x' + t \cdot \nabla f(x'))$; esto es,

$$f(x' + t \cdot \nabla f(x')) = \max_{t \geq 0} f(x' + t \cdot \nabla f(x'))$$

Las iteraciones de este **procedimiento de búsqueda del gradiente** continuarían hasta que $\nabla f(x) = 0$ dentro de una pequeña tolerancia de error $\in$, es decir, hasta que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right| \leq \in \text{ para toda } j = 1, 2, \ldots, n$$

Casi siempre, la parte más difícil de este procedimiento es encontrar a t^*, el valor de t que maximiza f en la dirección del gradiente, en cada iteración. Como x y $\nabla f(x)$ tienen valores fijos para la maximización y $f(x)$ es cóncava, este problema debe concebirse como una maximización de una función *cóncava* de una *sola variable* t. Por lo tanto, puede resolverse por el *procedimiento de búsqueda unidimensional* tal como el que acaba de describirse (excepto que la cota inferior inicial para t *debe* ser no negativa, debido a la restricción $t \geq 0$. En forma alternativa, si f es *una* función simple, debe ser posible obtener una solución analítica, igualando a cero la derivada con respecto a t y resolviendo.

Resumen del procedimiento de búsqueda del gradiente

Paso de inicialización. Seleccionar $\in$ y cualquier solución tentativa inicial x. Pásese primero a la regla de detención.

Paso iterativo 1. Úsese el procedimiento de búsqueda unidimensional (o Cálculo) para encontrar $t = t^*$ que maximice $f\left(x'+t\cdot\nabla f\left(x'\right)\right)$ sobre $t \geq 0$.

2. Hágase $x' = x'+t\cdot\nabla f\ \left(x'\right)$. Pásese entonces a la regla de detención.

Regla de detención. Evalúese $\nabla f(x')$ en $x = x'$. Compruebe si

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right| \leq \in \text{ para toda } j = 1, 2, \ldots, n$$

Si es así, deténgase con la x actual como la aproximación deseada de una solución óptima x^* De otra manera, pásese al paso iterativo.

El procedimiento de búsqueda del gradiente por lo común *zigzaguea*, en lugar de moverse en línea recta hasta la solución óptima. Se han desarrollado algunas modificaciones del procedimiento que *aceleran* el movimiento hacia lo óptimo, tomando en cuenta este comportamiento típico.

Si $f(x)$ *no* fuera una función *cóncava*, el procedimiento de búsqueda del gradiente todavía convergería a un máximo *local*. Para este caso, el único cambio en la descripción del procedimiento es que t^* Ahora correspondería al *primer máximo local* de $f\left(x+t\cdot\nabla f\left(x\right)\right)$ para valores positivos de t

Si, por el contrario, el objetivo fuera *minimizar* $f(x)$, un cambio en el procedimiento sería moverse en la dirección *opuesta* del gradiente en cada iteración. En otras palabras, la regla para obtener el siguiente punto ahora sería

Hágase $x' = x' - t \cdot \nabla f(x')$

El único otro cambio es que ahora t^* sería el valor positivo de t que *minimiza* $f(x' - t \cdot \nabla f(x'))$; esto es,

$$f(x' - t \cdot \nabla f(x')) = \min_{t \geq 0} f(x' - t \cdot \nabla f(x'))$$

(Esta es la forma del procedimiento de búsqueda del gradiente que se usará para el algoritmo de programación convexa).

Se ha descrito el procedimiento de búsqueda del gradiente bajo la suposición de que el problema de Optimación *no* tiene restricciones. Este es el *único* caso para el que está diseñado, así que *no* es aplicable *directamente* a la *programación convexa general*, en donde las restricciones son una parte importante del problema. Sin embargo, como se mencionó al principio de la sección, se han desarrollado varios algoritmos que *adaptan* el procedimiento de diferentes maneras para tomar en cuenta las restricciones. Por ejemplo, se aplica el procedimiento (sin modificación) a una *sucesión* de problemas de minimización *no restringidos*, en donde la sucesión resultante de soluciones óptimas *converge* a una solución óptima para el problema de programación convexa.

La Programación Dinámica es una técnica matemática de optimación que divide el problema en N etapas de decisión, esto es, descompone el problema original en N nuevos problemas, cada uno con pocas decisiones, concatenadas en forma secuencial, cuya solución es equivalente a la del problema original. A grandes rasgos, lo que se busca es resolver la última etapa y usar dichos resultados para resolver la penúltima etapa y así sucesivamente.

Se requiere un cierto grado de ingenio y de visión de la estructura general de los problemas de programación dinámica, a fin de reconocer cuándo un problema se puede resolver mediante procedimientos de esta programación y cómo se haría.

Por fortuna, la Programación Dinámica proporciona grandes ahorros computacionales en comparación con la enumeración exhaustiva para encontrar la mejor combinación de decisiones, en especial cuando se trata de problemas grandes, y reduce drásticamente los requerimientos de cálculo respecto a la evaluación directa. Por ejemplo, si un ejemplo tiene 10 etapas con 10 estados y 10 decisiones posibles en cada etapa, la enumeración exhaustiva tendría que considerar hasta 10^{10} combinaciones, mientras que la Programación Dinámica necesita hacer cuando mucho 10^{3} cálculos (10 para cada estado en cada etapa).

El término programación tiene el significado de una planeación de actividades, de entre las cuales se determinan aquellas que producen la mejor solución o que optimizan el problema. El término Dinámica se debe al tipo de problemas en que tuvo sus primeras aplicaciones esta técnica, en los que la variable tiempo indicaba el paso de una etapa a otra.

Las aplicaciones de la Programación Dinámica son muy amplias y comprenden áreas tan diferentes como la química, la electrónica, la ingeniería industrial, de control y aerodinámica, además de la investigación de operaciones, las matemáticas y la economía. Algunos problemas específicos resueltos con programación dinámica son los de transporte, inventario, ascenso mínimo para aviones o proyectiles, trayectorias de satélites, control realimentado, predicción lineal, reemplazo de equipo, planificación de gastos de publicidad, distribución del esfuerzo de ventas y programación de la producción.

La Programación Dinámica es un método matemático desarrollado por R. Bellman, para determinar el control óptimo factible de un sistema empleando un concepto llamado, principio de optimación, que dice:

Principio de optimación. Una política óptima tiene la propiedad de que, independientemente de cual sea el estado y las decisiones iniciales tomadas para llegar a un estado particular en una etapa particular, las decisiones restantes deben constituir una política óptima para abandonar el estado resultante de la primera decisión.

Para aplicar este principio, comiéncese con la última etapa de un proceso de n etapas y determínese para cada estado la *mejor política para abandonar ese estado y completar el proceso,* considerando que todas las etapas precedentes se han concluido. Después continúese a lo largo del proceso, etapa por etapa. En cada etapa, determínese la mejor política para abandonar cada estado y concluir el proceso, considerando que todas las etapas precedentes han sido concluidas y empleando los resultados ya obtenidos para la etapa subsecuente.

2.5.1 Teoría y características de los problemas de Programación Dinámica

A continuación se presentarán y estudiarán estas características básicas que distinguen a los problemas de programación dinámica.

1. El problema se puede dividir en varias **etapas**, cada una de las cuales requiere una **política de decisión** de acuerdo con cierto criterio.

2. Cada etapa tiene un cierto número de **estados** asociados a ella. En general, los estados son las distintas *condiciones posibles* en las que se puede encontrar el sistema en cada etapa del problema. El número de estados puede ser *finito* o *infinito*.

3. El efecto de la política de decisión en cada etapa es *transformar el estado actual que se examina, en un estado asociado con la siguiente etapa* (en ocasiones de acuerdo con una distribución de probabilidad).

4. La red establecida consiste de columnas formadas de nodos, donde cada columna corresponde a una etapa y en cada política de decisión se cambia de etapa o sea que se avanza de columna. El procedimiento de solución está diseñado para encontrar una **política óptima** para el problema completo, es decir, una receta para las decisiones de la política óptima en cada etapa para *cada* uno de los estados posibles.

5. Dado el estado actual, una *política óptima para las etapas restantes es independiente* de la política adoptada en *etapas anteriores.* En general, en los problemas de Programación Dinámica, el conocimiento del estado actual del sistema expresa toda la información sobre su comportamiento anterior, y esta información es necesaria para determinar la política óptima de ahí en adelante.

6. El procedimiento de solución se inicia al encontrar la *política óptima para la última etapa*, la cual prescribe la política óptima de decisión para *cada* etapa.

7. Dentro de las características propias de la solución del problema se tiene que el método de solución principia encontrando la política óptima para cada uno de los estados de la última etapa y se define una **relación recursiva** que identifica la política óptima para la etapa n, dada la política óptima para la etapa $(n+1)$

Entonces, para encontrar la *política óptima de decisión* cuando se comienza en el estado s de la etapa n se necesita encontrar el valor de x_n que dé un mínimo. El costo mínimo correspondiente se obtiene si se usa este valor de x_n y después se sigue la política óptima cuando el proceso se encuentra en el estado x_n de la etapa $(n+1)$

La forma precisa de la relación recursiva difiere de un problema a otro, pero se usará una notación análoga a la introducida en la sección anterior. Así, sea x_n (variable o vector) la variable de decisión en la etapa n $(n=1, 2, \ldots, N)$. Sea $f_n(s, x_n)$ el valor de la función objetivo que debe maximizarse (o minimizarse), dado que el sistema se encuentra en el estado s en la etapa n y se elige x_n. Sea $f_n^*(s)$ el valor máximo o mínimo de $f_n(s, x_n)$ sobre todos los valores posibles de x_n. La relación recursiva siempre tendrá la forma

$$f_n^*(s)=\max_{x_n}\{f_n(s,x_n)\} \quad \text{o} \quad f_n^*(s)=\min_{x_n}\{f_n(s,x_n)\}$$

en donde $f_n(s,x_n)$ se escribiría en términos de s, x_n, $f_{n_{n+1}}^*(\cdot)$ y tal vez alguna medida de eficiencia (o ineficiencia) de x_n para la primera etapa.

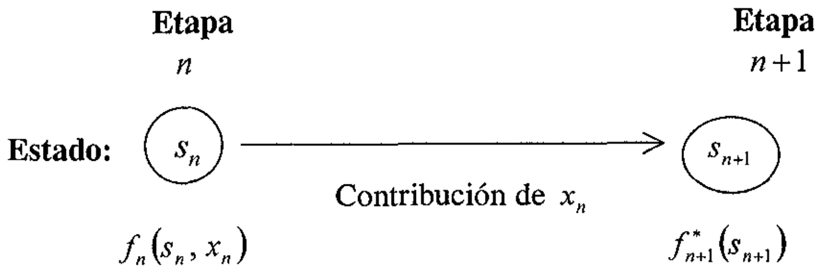
8. Cuando se usa esta relación recursiva, el procedimiento de solución se mueve *hacia atrás*, es decir el método de solución es recorrer la red de atrás hacia adelante, pasando por las diferentes etapas, encontrando en cada etapa la política óptima y la función de costo correspondiente a cada estado, continuando así sucesivamente hasta determinar la política óptima a partir de la etapa *inicial*.

2.6 Programación Dinámica Determinística

Esta sección profundiza sobre el enfoque de Programación Dinámica a los problemas *determinísticos*, en donde el *estado* en la siguiente *etapa* está completamente determinado por el *estado* y la *política de decisión* de la *etapa actual*. El caso *probabilístico* en el que existe una distribución de probabilidad para lo que puede ser el siguiente estado, se analizará en la sección siguiente, ver Joeres.

La Programación Dinámica Determinística se puede describir en forma de diagrama como se hace en la ***figura 2.5***. En una etapa n el proceso se encontrará en algún estado s_n. Al tomar la decisión x_n se mueve a algún estado s_{n+1} en la etapa $(n+1)$. El valor de la función objetivo para la política óptima de ese punto en adelante se calculó previamente como $f_{n+1}^*(s_{n+1})$. La política de decisión también hace una contribución a la función objetivo. Al combinar estas dos cantidades en la forma apropiada se obtiene el valor de la función objetivo $f_n(s_n,x_n)$ comenzando en una etapa n

figura 2.5 Estructura básica para la Programación Dinámica Determinística.



La Optimación respecto a x_n proporciona entonces $f^*_n(s_n) = f_n(s_n, x^*_n)$. Una vez que se encontraron x^*_n y $f^*_n(s_n)$ para cada posible valor s_n, el procedimiento de solución se mueve hacia atrás una etapa.

Una manera de clasificar los problemas de Programación Dinámica es por la *forma de la función objetivo*. Por ejemplo, el objetivo puede ser *minimizar* la *suma* de las contribuciones de cada una de las etapas individuales, o *maximizar* esa suma, o bien minimizar el *producto* de los términos, etc. Otra clasificación se puede hacer en términos de la naturaleza del *conjunto de estados* en las respectivas etapas. En particular, los estados s_n pueden estar representados por una variable de estado *discreta*, o por una variable de estado *continua*, o tal vez se requiera un *vector* de estado (más de una variable).

2.6.1 Ejemplo

El Consejo Mundial de la Salud se dedica a mejorar el cuidado de la salud en los países subdesarrollados del mundo. Ahora cuenta con cinco *equipos médicos* para asignar entre tres de esos países a fin de mejorar su cuidado médico, su educación sanitaria y sus programas de entrenamiento. Por consiguiente, el Consejo necesita determinar cuántos equipos (si resulta conveniente) asignar a cada uno de estos países para maximizar la efectividad total de los cinco equipos. La medida de efectividad que se está usando es *los años de vida adicionales del hombre*. (Para un país particular, esta medida es igual a la *esperanza incrementada de vida* del país, en años, multiplicada por su población). La ***Tabla 2.2*** da los años de vida adicional posible en función del número de equipos médicos.

Tabla 2.2 Datos para el Consejo Mundial de Salud

Número de equipos médicos	*Miles de años de vida adicionales del hombre*		
	País		
	1	2	3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130

Solución.

Este problema requiere tomar tres *decisiones interrelacionadas*, a saber, cuántos equipos médicos asignar a cada uno de los tres países. Por lo tanto, aún cuando no se tiene una secuencia fija, estos tres países pueden considerarse como las tres *etapas* en un planteamiento de programación dinámica. Las variables de decisión $x_n(n = 1, 2, 3)$ serían el número de equipos por asignar a la etapa (país) n

Es posible que no sea fácil la identificación de los *estados*. Para determinar esto, deben plantearse preguntas como las siguientes: ¿Qué es lo que cambia de una etapa a la siguiente? Dado que se han tomado las decisiones en las etapas previas, ¿Cómo puede describirse la condición de la situación en la etapa actual? ¿Qué información acerca del estado actual de las cosas se necesita para determinar la política óptima de aquí en adelante? Sobre estas bases, una elección apropiada para el "estado del sistema" es el *número de equipos médicos que todavía quedan disponibles para ser asignados* (es decir, el número que no haya sido ya asignado en las etapas previas).

Sea $p_i(x_i)$ la medida de la efectividad de asignar x_i equipos médicos al país i, como se da en la ***Tabla 2.2***. Así, el objetivo es elegir x_1, x_2, x_3, de modo que

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^{3} p_i(x_i),$$

$$\text{sujeta a } \sum_{i=1}^{3} x_i = 5 \text{ y los } x_i \text{ son enteros no negativos.}$$

Usando la notación para $f_n(s_n, x_n)$, se tiene

$$f_n(s, x_n) = p_n(x_n) + \text{máx} \sum_{i=n+1}^{3} p_i(x_i)$$

$$\text{tal que } \sum_{i=n}^{3} x_i = s,$$

las x_i son enteros no negativos,

para $n = 1, 2, 3$. Además $f_n^*(s) = \underset{x_n=0,1,\ldots,s}{\text{máx}} f_n(s, x_n)$

Por lo tanto $f_n(s, x_n) = p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s - x_n)$

(con f_4^* definida como cero). Estas relaciones básicas se resumen en la ***figura 2.6***. Como consecuencia, la *relación recursiva* que conecta a las funciones f_1^*, f_2^* *y* f_3^* para este problema es $f_n^*(s) = \underset{x_n=0,1,\ldots,s}{\text{máx}} \{p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s - x_n)\}$, para $n = 1, 2$. Para la última etapa $(n = 3)$, $f_3^*(s) = \underset{x_n=0,1,\ldots,s}{\text{máx}} p_3(x_3)$

Enseguida se dan los cálculos resultantes de la Programación Dinámica, empezando con la última etapa $(n = 3)$ y retrocediendo hasta la primera etapa $n = 1$:

$n = 3$

s	$f_3^*(s)$	x_3^*
0	0	0
1	50	1
2	70	2
3	80	3
4	100	4
5	130	5

figura 2.6 Estructura básica para el problema del Consejo Mundial de la Salud.

Etapa n **Etapa** $n+1$

Estado: $(s) \xrightarrow[p_n(x_n)]{} (s - x_n)$

$$f_n(s_n, x_n) = \\ = p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s - x_n)$$

$$f_{n+1}^*(s - x_n)$$

$n = 2$

s \ x_2	$f_2(s, x_2) = p_2(x_2) + f_3^*(s - x_2)$: 0	1	2	3	4	5	$f_2^*(s)$	x_2^*
0	0						0	0
1	50	20					50	0
2	70	70	45				70	0, 1
3	80	90	95	75			95	2
4	100	100	115	125	110		125	3
5	130	120	125	145	160	150	160	4

$n=1$

$s \setminus x_1$	$f_1(s,x_1)=p_1(x_1)+f_2^*(s-x_1)$						$f_1^*(s)$	x_1^*
	0	1	2	3	4	5		
5	160	170	165	160	155	120	170	1

Así entonces, la solución óptima tiene $x_1^*=1$, lo cual hace s=5-1=4 para n=2, de modo que $x_2^*=3$, lo cual hace s=4-3=1 para n=3, de donde $x_3^*=1$. Puesto que $f_1^*(5)=170$, esta asignación (1,3,1) de los equipos médicos a los tres países proporcionará una estimación total de 170000 *años de vida adicional del hombre*, que es al menos 5000 más que para cualquier otra asignación.

2.7 Programación Dinámica Estocástica o Probabilística

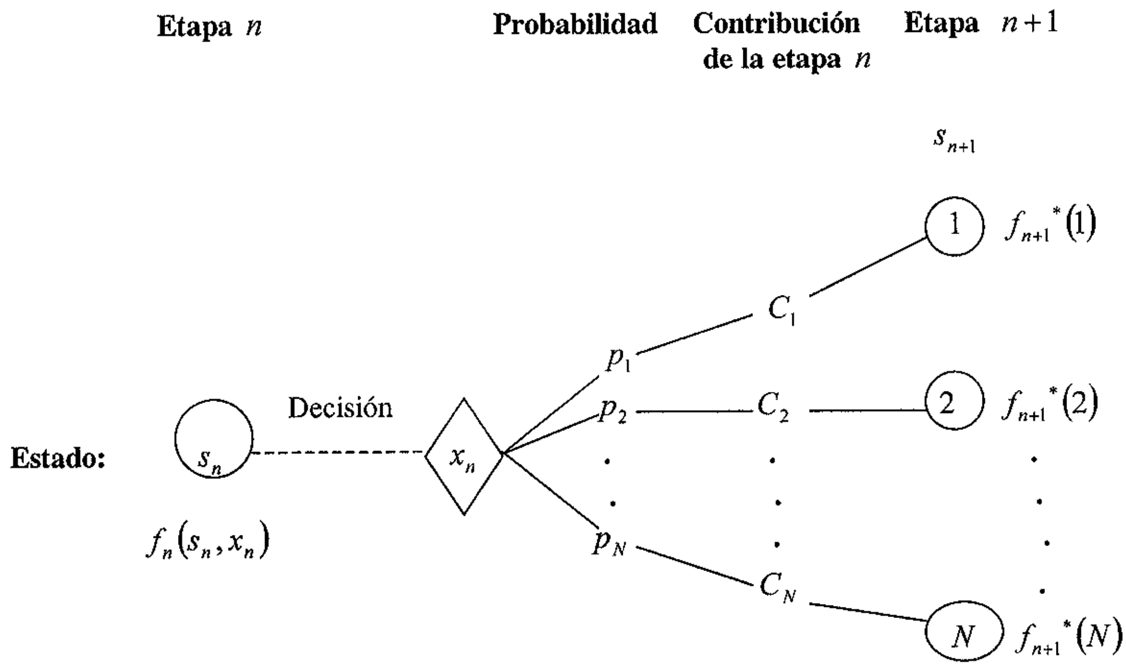
Un proceso de decisión de n etapas es *estocástico*, si el rendimiento asociado con al menos una decisión del proceso es aleatorio. Esta aleatoriedad generalmente se presenta en una de dos formas: o los estados son determinados exclusivamente por las decisiones, pero los rendimientos asociados con uno o más de los estados son inciertos, o los rendimientos son determinados exclusivamente por los estados, pero los estados que se presentan a partir de una o más de las decisiones son inciertos.

La Programación Dinámica *Probabilística* difiere de la Determinística en que el estado en la siguiente etapa *no* está completamente determinado por el estado y la política de decisión de la etapa actual.

Si las distribuciones probabilísticas que rigen a los eventos aleatorios son conocidas y si el número de etapas y el número de estados son finitos, entonces el enfoque de Programación Dinámica es útil para optimizar un proceso de decisión estocástica de n etapas. El procedimiento general es optimizar el valor esperado del rendimiento. En aquellos casos en que la aleatoriedad ocurre exclusivamente en los rendimientos asociados con los estados y no en los estados que se presentan a partir de las decisiones, este procedimiento tiene el efecto de transformar un proceso estocástico en uno determinístico.

En el segundo caso, existe una *distribución de probabilidad* para determinar cuál será el estado en la siguiente etapa. Sin embargo, esta distribución de probabilidad sí queda bien determinada por el estado y la política de decisión en la etapa actual. En la ***figura 2.7*** se describe la estructura básica que resulta en los problemas de Programación Dinámica Probabilística; en ella N denota el número de estados posibles en la etapa $n+1$; $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$ es la distribución de probabilidad para el estado que ocurrirá, dado el estado s_n y la decisión x_n en una etapa n; C_i es la contribución a la función objetivo que se obtiene de una etapa n si resulta que el estado es i.

figura 2.7 Estructura básica para la Programación Dinámica Probabilística.



Cuando se expande la ***figura 2.7*** para incluir todos los estados y las decisiones posibles en todas las etapas, se obtiene lo que con frecuencia se conoce como **árbol de decisión**. Si este árbol de decisión no es muy grande, proporciona una forma útil de resumir las distintas posibilidades que se tienen.

Debido a la estructura probabilística, la relación entre $f_n(s_n,\ x_n)$ y $f^*_{n+1}(s_{n+1})$ necesariamente es más complicada que para el caso determinístico. La forma exacta de esta relación dependerá de la forma global de la función objetivo. Para ilustrar esto, supóngase que el objetivo es *minimizar* la *suma esperada* de las contribuciones de las etapas individuales. En este caso, $f_n(s_n, x_n)$ representa la suma esperada mínima de una etapa n en adelante, *dado* que en la etapa n, el estado es s_n y la política de decisión es x_n. En consecuencia,

$$f_n(s_n, x_n) = \sum_{i=1}^{N} p_i \left[C_i + f^*_{n+1}(i)\right],$$

$$\text{con } f^*_{n+1}(s_{n+1}) = \min_{x_{n+1}} f_{n+1}(s_{n+1}, x_{n+1}),$$

donde la minimización se toma sobre todos los valores *factibles* de x_{n+1}.

La Programación Dinámica es una técnica muy útil para tomar una *sucesión de decisiones interrelacionadas*. Requiere la formulación de una *relación recursiva* apropiada para cada problema individual.

2.7.1 Ventajas y desventajas de la Programación Dinámica

Destacar las ventajas y limitaciones del uso de la Programación Dinámica para obtener políticas de operación en presas, depende en gran medida de las dimensiones de cada problema particular. Aplicando este método al caso de presas, la magnitud de las operaciones que toma la solución del problema estará dada por las siguientes relaciones, desde el punto de vista de la dimensionalidad, considérense los casos siguientes.

Con Programación Dinámica Determinística, es decir, suponiendo conocidos los escurrimientos de entrada, la cantidad de alternativas analizadas es de una por cada nivel inicial, una por cada opción de extracción, y una por cada nivel final y un conjunto de las mismas por cada etapa considerada, o sea:

$$NS \cdot NK \cdot M, \text{ alternativas}$$

donde

NS número total de estados
NK número total de alternativas de extracción
M número total de etapas en el año consideradas

Para una presa, dividida en 10 estados, el análisis de 12 etapas, para el caso determinístico, implica evaluar y comparar

a) Con el método directo: $10 * 10 * 1 * \cdots * 10 = 10^{12}$ = un billón de alternativas

b) Utilizando la Programación Dinámica se requiere evaluar y comparar 100 alternativas en la primera etapa, 100 en la 2ª.,.., etc. Hasta un total de: $12 * 100 = 1200$ alternativas

Si se analizan dos presas en cascada, la extracción en cada presa debe ser función del almacenamiento inicial en ambas, por lo que, suponiendo que la capacidad útil de cada presa se divide en 10 partes, el número de estados resulta igual a 100. En tal caso, el análisis implica evaluar:

a) Con el método directo: $100^{12} = 10^{24}$ alternativas

b) Con Programación Dinámica: $12 * 100^2 = 120{,}000$ alternativas

En general, para el caso determínistico, es necesario evaluar

a) Con el método directo: $(NS)^{NE}$

b) Con Programación Dinámica: $(NS)^2 * NE$

Si se analiza ahora el caso estocástico, se observa que por cada alternativa de extracción y cada estado inicial es necesario considerar todos los estados finales j factibles, calcular la probabilidad de transición y valuar el beneficio correspondiente, de tal forma que se requiere evaluar, lo que a continuación se explica.

Con Programación Dinámica Estocástica, considerando la función de densidad de probabilidad de los escurrimientos, se debe considerar, en adición a las del inciso anterior, que por cada alternativa de extracción, se revisan adicionalmente las probabilidades de llegar a cada uno de los estados finales, por lo tanto se analizan:

$$(NS)^3 \cdot NK \cdot M \text{ , alternativas}$$

c) Con Programación Dinámica Estocástica: $(NS)^3 * NE$

Por lo que, para el caso de dos presas en cascada, por ejemplo, se requeriría el cálculo de $12 * (100)^3 = 12$ millones de alternativas.

La principal diferencia entre los resultados del modelo Determinístico y Estocástico es que al resolver al N-ésima ecuación recursiva no se puede trazar la política óptima en los siguientes períodos, ya que los escurrimientos (variable aleatoria) son desconocidos: sin embargo, dado que la distribución de probabilidad de la variable aleatoria es periódica (se tiene la misma probabilidad de escurrimiento mensual cada año) se puede obtener una política de operación estacionaria para aplicarse cada año sobre un horizonte de planeación completo, ver Tadeo (1990).

El análisis anterior trata de mostrar como la Programación Dinámica reduce drásticamente los requerimientos de cálculo respecto a la evaluación directa. Se observa también que, dado que los ingresos son aleatorios, la situación real implica el uso de programación dinámica estocástica, siendo un gran auxiliar, sobre todo en problemas complejos, cuyo uso para más de una presa implica simplificaciones en los cálculos, cuyos resultados deben analizarse y complementarse con estudios adicionales, ver Domínguez (1989).

3. Descripción Hidrológica del río Grijalva

Por su caudal el río Grijalva es el segundo en importancia en México, nace en el cerro de los Cuchumatanes, Guatemala, siendo su origen dos arroyos (el Santo Domingo y el Cuilco) que al juntarse en tierras chiapanecas forman el río Chejel, al recorrer los municipios de Comitán y La Libertad hasta La Angostura se denomina río de Chiapa, hasta Chicoasén, pasando por Chiapa de Corzo y cerca de Tuxtla Gutiérrez, inclusive el cañón de El Sumidero; enseguida se le nombra río Mezcalapa y al transitar en el Estado de Tabasco toma el nombre de río Grijalva hasta su desembocadura en el Golfo de México. Este caudaloso río fue descubierto en 1518 por don Juan de Grijalva. La cuenca del río Grijalva se muestra en la ***figura 3.1***, ver Mellanes (1982).

3.1 Descripción del sistema de presas del río Grijalva

El río Grijalva es el más importante en el país desde el punto de vista del aprovechamiento hidroeléctrico; en el se encuentran las presas La Angostura, Chicoasén, Malpaso y Peñitas mencionadas de aguas arriba hacia aguas abajo y sus correspondientes plantas hidroeléctricas. Ver ***figura 3.2***, ver Torres (1980).

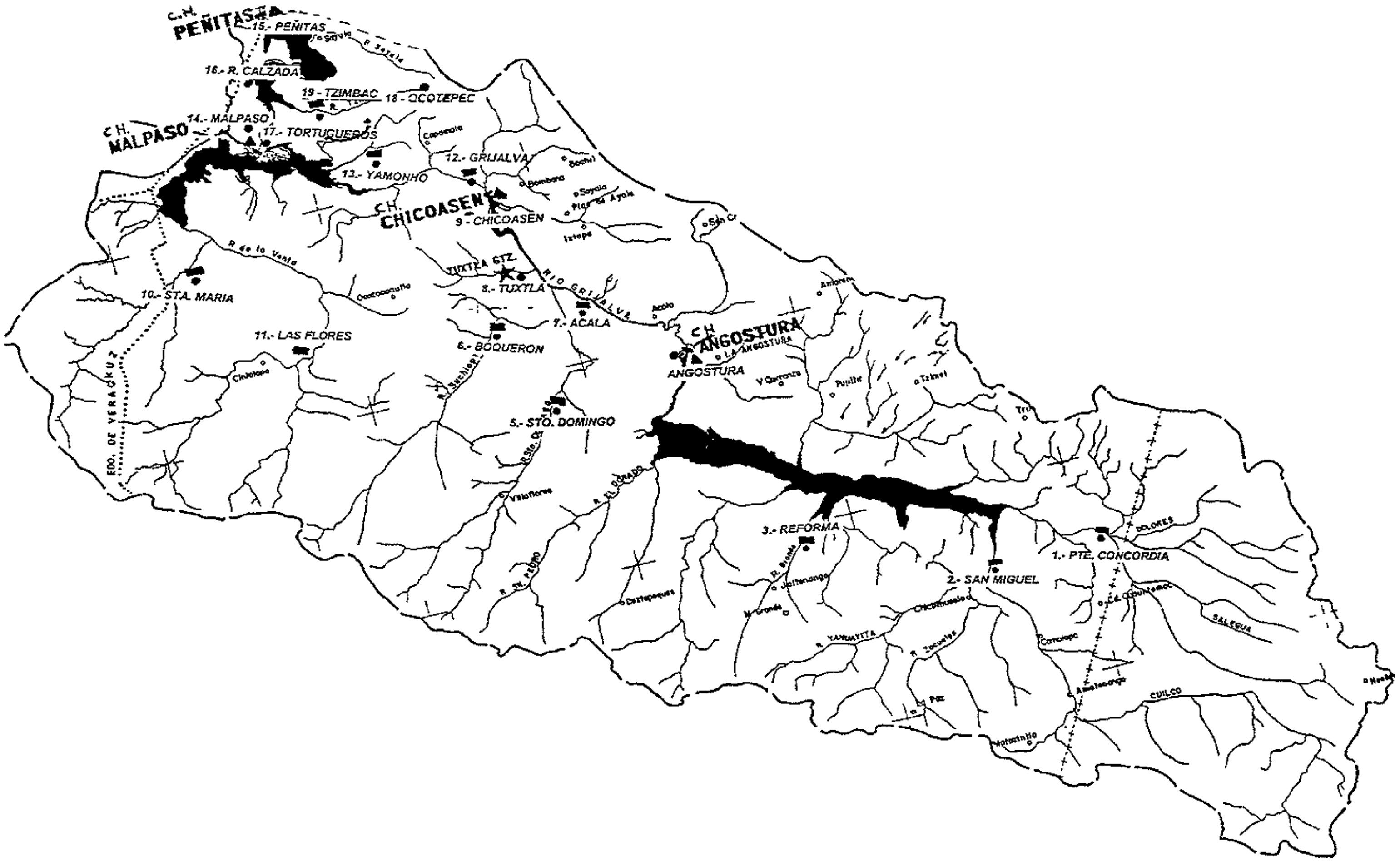
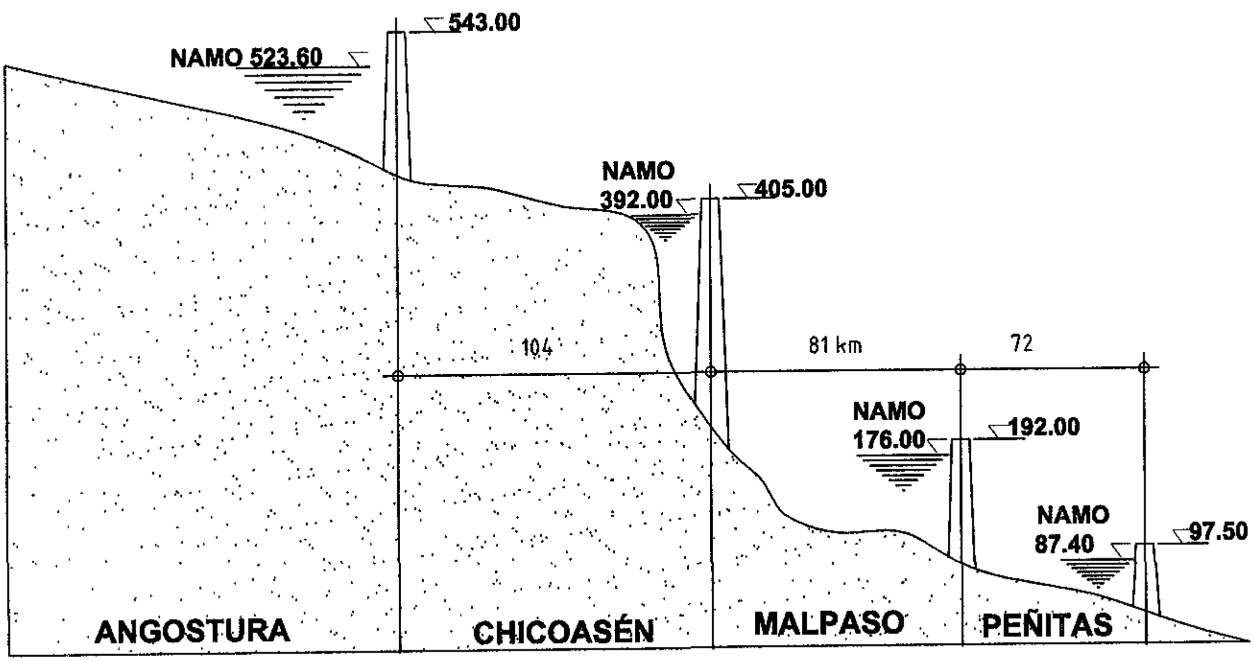


figura 3.1 **Cuenca del río Grijalva, hasta la presa Peñitas.**

fig. 3.2 APROVECHAMIENTO HIDROELÉCTRICO DEL RÍO GRIJALVA



El régimen de escurrimientos de este río ha venido evolucionando a causa de la construcción de las presas de almacenamiento: Malpaso o Nezahualcóyotl, en 1964; Angostura en 1974; Chicoasén en 1979 y finalmente Peñitas en 1987.

3.2 Características de las presas del río Grijalva

Para Angostura se considera toda el área del Grijalva situada aguas arriba de la presa de 18,099 km^2

Para Chicoasén, el área comprendida entre dicha presa y la de Angostura es de 7,194 km^2

Para Malpaso se considera toda la cuenca comprendida entre Angostura y Malpaso de 15,641 km^2, debido a que se consideró despreciable la regulación de las avenidas de Chicoasén.

Para Peñitas, el área situada aguas arriba del sitio de esta presa y aguas abajo de Malpaso es de 1,402 km^2

Las áreas así definidas constituyen la cuenca propia de cada presa.

La capacidad de las presas destinada a la regulación de avenidas, que suma más de $6x10^9$ m^3, influye determinantemente en el régimen de escurrimientos de la planicie costera de Tabasco y ha permitido disminuir notablemente los escurrimientos máximos que se descargan aguas abajo de Peñitas, de tal forma que esta capacidad de regulación constituye una herramienta muy importante para el control de las inundaciones en la planicie.

Para analizar el sistema de presas del río Grijalva se hicieron las siguientes consideraciones:

Se toma en cuenta que Chicoasén y Peñitas operan con poca variación en los niveles medios mensuales de sus vasos, debido a que su volumen útil es muy pequeño y el intervalo de análisis para la operación a largo plazo (un mes) implica el manejo de volúmenes de ingreso a las presas y de extracción por las turbinas bastante mayores que su volumen útil. En estas condiciones, se busca desarrollar una metodología que permita definir los volúmenes de extracción mensual en Angostura y Malpaso, en función del estado en cada presa al inicio del mes, tomando en cuenta la energía generada en las 4 presas.

En la práctica, Angostura actúa como almacenamiento para Chicoasén y Malpaso para Peñitas, de tal forma que la política de operación para las dos presas pequeñas se reduce a tratar de turbinar los volúmenes que ingresen sin modificar el nivel del agua en el vaso.

3.2.1 Datos de la Planta hidroeléctrica Angostura

Localización: La presa Angostura se encuentra en la cuenca del río Grijalva, Chiapas, a 55 km de la población de Tuxtla Gutiérrez, ubicada entre los meridianos 91° 30' y 94° 30' de longitud Oeste y los paralelos 14° 30' y 19° de latitud Norte.

Datos de la Cuenca. Volumen medio anual escurrido $9.7x10^9 m^3$ a 270 km de longitud hasta la Angostura. Precipitación promedio anual 1,379 mm. Evaporación media anual neta en el vaso, $55x10^6\ m^3$ con el agua a la elevación 523 msnm. Temperatura en la estación Arco de Piedra próxima a la Angostura $28.8°C$ y $20.6°\ C$, máxima y mínima, respectivamente.

Elevación inicial en el vaso	533.0	msnm
Volumen almacenado inicial	$15{,}549.20x10^6$	m^3
Potencia instalada	9000.0	MWh
Gasto de diseño	1170	m^3/s
Carga bruta de diseño	94	m
Máximo volumen mensual turbinable	$3074.76x10^6$	m^3
Valor de K en la ecuación $P = K \cdot Q \cdot H$	0.00818	

Generación: La casa de máquinas es subterránea con 100 m de longitud, 20 m de ancho y 35 m de altura. Las características de la planta son: 3 turbinas tipo Francis con potencia de 253,800 H.P. y 3 generadores con eje vertical.

3.2.2 Datos de la Planta hidroeléctrica Chicoasén

Chicoasén se encuentra en la parte baja del río Grijalva, su planta hidroeléctrica subterránea aloja ocho grupos, cada uno está formado por una turbina Francis de eje vertical de 416,000 CV de potencia, ver Torres (1980).

3.2.3 Datos de la Planta hidroeléctrica Malpaso

Localización: La cortina de la Presa Netzahualcóyotl, construida por la Comisión del Grijalva, SRH, está en la cuenca del río Grijalva, ubicada esta última entre los meridianos 91° 30' y 94° 30' de longitud Oeste y los paralelos 14° 30' y 19° de latitud Norte.

Datos de la Cuenca: La cuenca ocupa una área de 32,540 km^2. La precipitación anual es de 3,950 mm y la evaporación anual de 1,230 mm. Las temperaturas máxima, media y mínima son $37°C$, $26°C$ y $13°C$, respectivamente.

Generación: La casa de máquinas es subterránea con seis unidades, cuatro pozos de oscilación, dos túneles de desfogue y una subestación elevadora. La obra de toma se ubica en la margen derecha de la cortina y se opera mediante 6 compuertas rodantes de 4.8 x 8.2 m que alimentan cuatro turbinas tipo Francis de eje vertical, con potencia de 240,000 HP c/u. La casa de máquinas tiene las siguientes dimensiones: 120 m de longitud, 20 m de ancho y 30 m de altura. La subestación está ubicada en la margen derecha a la elevación 192.0 msnm. Dos líneas de transmisión de 691 km de longitud, transportan la energía hasta la Ciudad de México a 400 KV.

No se instalaron válvulas de admisión a las turbinas, ni fue necesaria la construcción de pozos de oscilación, ver C. F. E. (1969).

3.2.4 Datos de la Planta hidroeléctrica Peñitas

Nivel de la corona	99.00 msnm
Name	93.50 msnm
Nivel máximo de operación (Namo)	87.40 msnm
Nivel mínimo de operación (Namino)	85.00 msnm
Nivel medio de desfogue (Namino)	53.00 msnm
Número de unidades	4
Potencia por cada unidad	105.00 MW

Tabla 3.1

Otros datos de las plantas hidroeléctricas

Presa	*Angostura*	*Chicoasén*	*Malpaso*	*Peñitas*
Número de unidades	5	5	6	4
Capacidad instalada (MW)	920	10	1080	500
Generación media anual (GWh)	1149.4	5580	3200	1819
Eficiencia media (%)	90.60	90.00	85.30	94.20
Carga de diseño (m)	94	180	85	32.1

Las características físicas básicas del sistema de presas del río Grijalva se presentan en la ***Tabla 3.2***, ver Domínguez et Co. (1993).

Tabla 3.2

Presa	*Elevación al NAMO* (msnm)	*Capacidad al NAMO* (10^6 m^3)	*Elevación al NAMINO* (msnm)	*Capacidad al NAMINO* (10^6 m^3)	*Gasto de diseño* (m^3/s)	*Nivel medio de desfogue* (msnm)	*Máximo volumen mensual turbinable* (10^6 m^3)
Angostura	533.00	15549.20	500.00	2379.53	1170.00	421.50	3074.76
Chicoasén	394.00	1419.80	380.00	1169.19	933.00	203.00	2160.00
Malpaso	185.00	13119.10	144.00	3055.70	1440.00	84.50	3732.50
Peñitas	87.40	1091.08	85.00	960.99	1596.00	53.00	3860.00

4. Desarrollo del modelo de optimación

4.1 Planteamiento de la problemática

En el estudio de los aprovechamientos hidráulicos, un tópico que ha despertado gran interés es la determinación de políticas de operación en las presas de almacenamiento, para lo cual hay que tomar en cuenta factores determinísticos y estocásticos que intervienen en un problema, señalando los volúmenes de agua que deban ser extraídos y almacenados en las diferentes épocas del año.

4.2 Beneficios y costos generados

Las metodologías para obtener las políticas de operación de una presa requieren de una ***función de beneficios*** que refleje las ganancias derivadas de la entrega de agua. Este inciso se centra en la forma de determinar dicha función.

4.2.1 Beneficios

La mayoría de los métodos existentes para determinar las políticas de operación, se basan en la maximización de los beneficios que pueden ser obtenidos a largo plazo o durante la vida útil de la obra. Dichos beneficios son cuantificables de acuerdo con el uso del agua del embalse (agrícola, urbano, industrial, generación de energía, etc.).

4.2.2 Costos

Los costos o penalizaciones en los que puede incurrirse en la operación de una presa pueden ser de dos tipos:

* Costos por déficit en la entrega prometida

* Costos por derrames de agua

Los primeros corresponden al volumen de agua prometido y no entregado, estos costos deben reflejar las pérdidas monetarias que tienen lugar a consecuencia del déficit en el volumen.

Es normal considerar que de no entregar el volumen de agua prometido, es posible perder no sólo el beneficio que deja de obtenerse, sino además parte de la inversión inicial.

El segundo tipo de costo o penalización consiste en pérdidas derivadas de los volúmenes de agua derramados por el vertedor de la presa; esta penalización está directamente ligada con los posibles daños que puede ocasionar una inundación aguas abajo de la presa; así pues se busca minimizar los daños y garantizar la seguridad de la presa.

Se consideran diferentes costos de penalización por derrame en las presas, ya que puede darse el caso que las zonas de protección sean diferentes en magnitud y uso, en esta situación se asignan mayores o menores costos por derrame en cada presa, dependiendo de la jerarquía e importancia de las obras que requieren su protección.

En muchas situaciones por falta de datos no es posible obtener las funciones de penalización por déficit y derrame, por lo que se tiene como opción entrar a un ajuste progresivo de la política, iniciando con la función de beneficios y suponiendo un costo unitario del déficit y del derrame, multiplicados por los volúmenes deficitarios y derramados, respectivamente, guardando las debidas relaciones de proporción adoptadas en la función de beneficios propuesta. Si al simular la política obtenida, con los datos históricos de ingresos a las presas, se encuentran demasiados casos de déficit o derrame, se incrementa gradualmente el coeficiente de costo correspondiente, hasta obtener resultados satisfactorios de la simulación.

En cualquiera de los casos, el beneficio neto obtenido al entregar un volumen de agua k del almacenamiento de una presa durante una etapa n es:

$$b_{n,k}(\overline{V}) = G_{n,k}(\overline{V}) - C_{D_n}(V_{D_n}) - C_{A_n}(V_{A_n}) \tag{4.1}$$

donde

$G_{n,k}$ Beneficio en una etapa n del año, indica la ganancia obtenida al extraer de una presa un volumen de agua k

C_{D_n} Costo unitario de penalización por un volumen deficitario

C_{A_n} Costo unitario de penalización por un volumen derramado en una presa durante una etapa n

V_{D_n} Volumen deficitario (volumen ofrecido y no entregado) en una etapa n

V_{A_n} Volumen de agua derramado durante una etapa n

En la anterior ecuación $b_{n,k}$ representa un beneficio neto, donde se ha incluido la dependencia del valor del almacenamiento medio en la presa $\overline{V}$ durante una etapa n, ya que en las hidroeléctricas está directamente relacionado con la carga y, por lo tanto, con la energía generada.

Todas las funciones mencionadas en este inciso deben ser univaluadas, es decir, para cada valor de volumen deber ser asignado uno y solo un valor de beneficios o costos.

4.3 Funcionamiento de una presa de almacenamiento

El funcionamiento de una presa se rige por la ecuación de continuidad y considerando un intervalo de tiempo, queda en la forma:

$$\Delta V_n = X_n - K_n \tag{4.2}$$

donde

ΔV_n variación del volumen almacenado en una etapa n
X_n volumen de agua que entra al vaso durante una etapa n
K_n volumen de agua que sale del vaso durante una etapa n

Por otra parte, se tiene la ecuación

$$\Delta V = V_F - V_I \tag{4.3}$$

donde

ΔV variación del volumen almacenado en una etapa n
V_F volumen almacenado en la presa al final de una etapa n
V_I volumen almacenado en la presa al inicio de una etapa n

No se consideran volúmenes de evaporación, de infiltración o de lluvia en la presa. Se igualan las ecuaciones 4.2 y 4.3 y se obtiene:

$$V_F = V_I + X_n - K_n \tag{4.4}$$

En la ecuación 4.4, el volumen de ingreso X_n es aleatorio y se representa con una función de distribución de probabilidades que depende principalmente de la época del año a la que pertenece el intervalo de tiempo, constituye el componente estocástico no controlable del sistema. El volumen almacenado en cualquier tiempo (V_I) define la condición inicial y determina por ello el estado del sistema. La extracción de la presa se designa como (K_n), variable sobre la que se puede actuar y se denomina variable de control o decisión.

El sistema está restringido en los almacenamientos y las extracciones posibles, de tal forma que su intervalo de variación está sujeto a las siguientes relaciones:

$$V_{\text{mín}} \leq V_F \leq V_{\text{máx}}$$
$$K_{\text{mín}} \leq K_n \leq K_{\text{máx}}$$

Las salidas de la presa están constituidas de las descargas por el vertedor y los desfogues que tienen lugar por la obra de toma. Dicho volumen no puede exceder al de máxima descarga de la presa compuesta por la capacidad del vertedor de excedencias (V_v) y de la obra de toma (V_{ot}) según:

$$0 \leq K_n \leq (V_v + V_{ot}) \tag{4.5}$$

Por otro lado, el almacenamiento en la presa debe ser mayor o igual que la capacidad muerta, ubicada por debajo del nivel de la obra de toma (NAMINO) y menor o igual que el volumen almacenado hasta la elevación de la cresta del vertedor (NAMO), esto es, el almacenamiento efectivo es el que constituye la capacidad útil, o sea el volumen que almacena la presa en condiciones normales de operación (V_x) es decir:

$$0 \leq V_x \leq V_u \tag{4.6}$$

Según las condiciones del nivel de almacenamiento, en una presa se pueden presentar dos estados críticos. Uno denominado de superávit o de derrame, en el nivel más alto del embalse; se llega a dicho estado cuando a pesar de la extracción es necesario derramar cierto volumen de agua que excede a la capacidad útil disponible. El volumen derramado durante una etapa n (V_{A_n}) en el estado de superávit se calcula con la expresión:

$$V_{A_n} = \begin{cases} V_u - (V_I + X_n - K_n); & si \quad V_u \succ V_I + X_n - K_n \\ 0 & ; \; si \quad V_u \leq V_I + X_n - K_n \end{cases} \tag{4.7}$$

En la anterior ecuación, el valor de K_n solo incluye la extracción por la obra de toma; por tanto la extracción total de la presa es $(V_{A_n} + K_n)$

El segundo estado crítico es el de déficit y ocurre cuando se requiere extraer mayor volumen que el almacenado en la presa. En este caso existirá un déficit en la entrega del volumen demandado durante una etapa n, (V_{D_n}) dado según la expresión:

$$V_{D_n} = \begin{bmatrix} V_m - (V_I + X_n - K_n); & si \quad V_m \succ V_I + X_n - K_n \\ 0 \qquad ; & si \quad V_m \leq V_I + X_n - K_n \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

V_m Capacidad muerta

4.4 Programación Dinámica Estocástica aplicada a la operación de presas de almacenamiento

En general, la operación de una presa o un sistema de presas debe definirse de tal forma que los beneficios obtenidos a largo plazo (por ejemplo durante la vida útil) sean máximos; en otras palabras, no se busca el máximo beneficio derivado inmediatamente de una determinada decisión, sino más bien, se busca que la suma de los beneficios obtenidos como consecuencia de una secuencia de decisiones sea óptima.

La determinación de políticas de operación óptima en presas de almacenamiento es un caso al que se adapta el método de la Programación Dinámica Estocástica, debido a que la no linealidad de la función objetivo conduce a utilizar con éxito este tipo de técnica, en la cual es necesario definir las decisiones, los estados del sistema y los beneficios, los cuales se presentan secuencialmente en el tiempo. Una característica muy importante de esta programación es que no obtiene una solución estática de la forma $U = f(s)$ sino que ofrece una secuencia de decisiones, $U_t = f(s_t, t)$ para cada situación (estado s) del sistema (presa) y cada etapa (mes o estación t). Así pues, se discretizaron los niveles de almacenamiento de una presa, acotados por la capacidad útil de la misma. Obteniendo un conjunto de decisiones de extracción, correspondientes a cada estado del volumen de almacenamiento discretizado.

El método de la Programación Dinámica Estocástica permite resolver el problema mediante la ecuación recursiva

$$B_n^k(i) = \sum_{j=1}^{NS} \left[b_{n,k}(i,j) + B_{n+1}^*(j) \right] \tag{4.9}$$

donde

$$B_n^*(i) = \text{máx}_k \left[B_n^k(i)\right]$$

$K_n^*(i)$ extracción para la cual $B_n^k(i) = B_n^*(i)$

$\text{máx}_k[\ B_n^k(i)\ ]$ representa la selección de un volumen óptimo de extracción k, que acarrea el máximo beneficio neto acumulado, desde el año final N de la vida útil hasta la etapa $n+1$

Tomando en cuenta el carácter aleatorio de los escurrimientos de entrada a la presa (caso estocástico) y definiéndolos mediante las funciones de densidad de probabilidades $f_n(x)$ la política de extracciones conduce a obtener el beneficio <u>esperado</u> máximo, durante una etapa n con lo cual la ecuación (4.9) se modifica a:

$$B_n^k(i) = \sum_{j=1}^{j=NS}\left[\ q_{n,k}(i,j)\left(b_{n,k}(i,j) + B_{n+1}^*(j)\right)\right] \tag{4.10}$$

donde

$B_n^k(i)$ beneficio neto obtenido del funcionamiento de una presa desde el final de la vida útil hasta una etapa n para un nivel de almacenamiento i extrayendo un volumen k

$b_{n,k}(\mathrm{i},\mathrm{j})$ beneficio en una etapa n cuando se extrae a la presa un volumen k y el nivel de almacenamiento pasa del estado inicial i, al final j

$q_{n,k}(\mathrm{i},\mathrm{j})$ probabilidad de transición del sistema en una etapa n de pasar del estado inicial i, al final j bajo una extracción k. Debido a que el proceso descrito es estacionario, las probabilidades de transición se mantienen constantes en cada período o etapa de la vida útil de la presa, esta consideración implica manejar en cada período que la integra, la misma función de densidad de probabilidad de los escurrimientos

La ecuación anterior corresponde al esquema planteado de la Programación Dinámica Estocástica.

De acuerdo con la ecuación de continuidad, la probabilidad de transición $q_{n,k}(\mathrm{i},\mathrm{j})$ depende solo de una etapa n y del ingreso $x = j - i + k$ es decir:

$$q_{n,k}(i,j) = f_n(j - i + k) \tag{4.11}$$

Para una extracción dada existen $(i \cdot j)$ posibles transiciones del sistema analizado; este hecho permitió hacer referencia a una **matriz de transición de los estados del sistema**, la cual retrata las probabilidades del sistema de alcanzar las condiciones finales (j) dadas las condiciones iniciales (i) y una extracción k. En el mismo caso se encuentran los beneficios obtenidos en las transiciones del sistema, esto es, el paso del sistema desde la condición inicial i, a la final j genera un beneficio que debe ser valuado con base en la expresión 4.1. En la literatura técnica, sobre este tema se hace referencia a este conjunto de valores como **matriz de beneficios.**

Para resolver el problema mediante la ecuación 4.10, se utilizó un esquema simplificado de aproximaciones sucesivas, antes de pasar a su planteamiento fue necesario realizar algunas actividades previas, que se describen a continuación:

a) Discretizar los niveles de almacenamiento de la presa acotados por la capacidad útil (V_u) Es necesario dividir el volumen útil de la presa, seleccionando un incremento de volumen ΔV de tal forma que el número de estados (NS) quedó definido como:

$$NS = \frac{V_u}{\Delta V} \tag{4.12}$$

Utilizando el incremento de volumen antes mencionado se discretizaron las variables que intervienen en la ecuación de continuidad, estableciendo las siguientes variables discretizadas:

Se consideraron valores enteros i ; $i = 1,2,\ldots,NS$ para representar el volumen almacenado al inicio del intervalo Δt. Análogamente, el volumen almacenado al final del intervalo se representó, en forma discreta, por el entero j ; $j = 1,2,\ldots,NS$

b) Discretizar los volúmenes de ingreso a la presa (X_n) tipificados en la función de densidad de probabilidad, para cada uno de los períodos interanuales considerados. Se representaron en forma discreta mediante los enteros x y fueron limitados por un valor máximo NX.

En un período existirá un número de ordenadas de la función de densidad (NQ), dados por:

$$NQ = \frac{X_{\text{máx}}}{\Delta V} \tag{4.13}$$

$X_{\text{máx}}$ volumen máximo de escurrimiento en el período

c) Discretizar los posibles volúmenes de extracción que pueden ser suministrados por la presa en cada período considerado. Esto se realizó tomando en cuenta la capacidad máxima de descarga por la obra de toma (COT) y generando las alternativas de acuerdo con:

$$\mathrm{NK} = \frac{\mathrm{COT}}{\Delta \mathrm{V}} \tag{4.14}$$

En todo momento se trabajó con la misma discretización de volumen ΔV para los estados y las decisiones, este hecho simplificó en gran medida el esquema de solución que se abordó.

Los volúmenes de extracción K_n se representaron en forma discreta, mediante los enteros k y fueron limitados por un valor máximo NK

De esta forma, para incrementos discretos de tamaño ΔV la ecuación de continuidad se expresó mediante la relación:

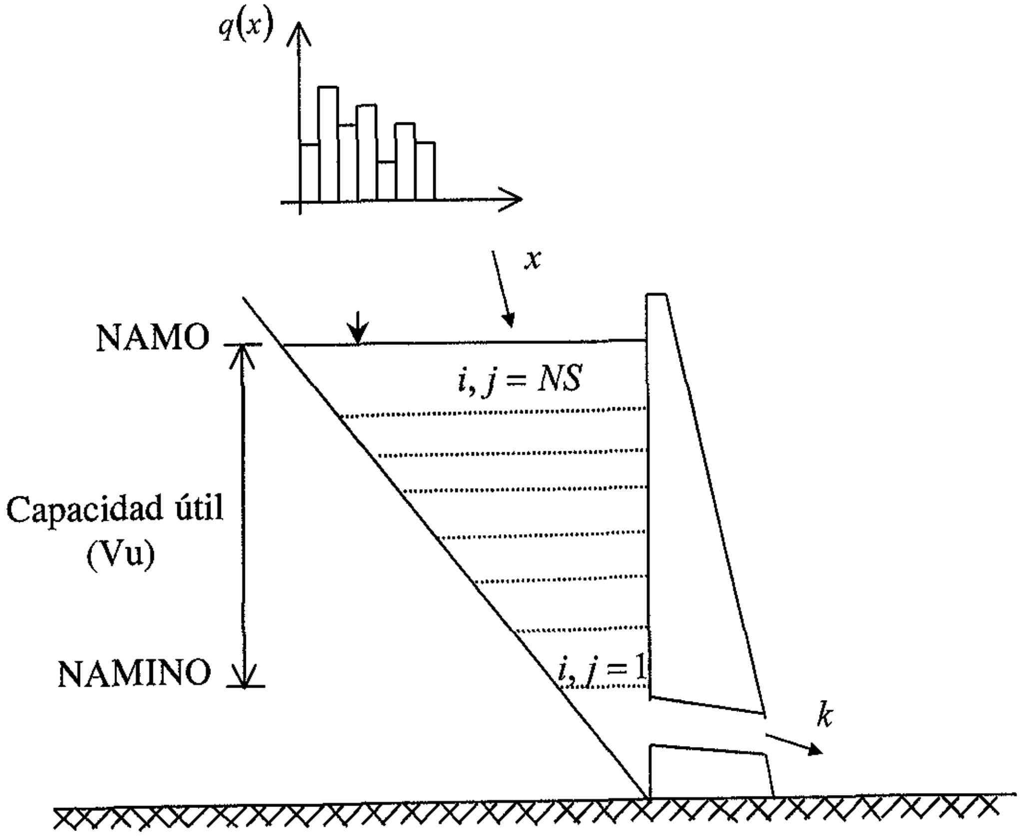
$$j = i + x - k \tag{4.15}$$

sujeta a las restricciones 4.5 y 4.6, afectadas por la discretización de estados resultaron:

$$
\begin{aligned}
&1 \le i \le NS \\
&1 \le j \le NS \\
&0 \le k \le NK \\
&1 \le x \le NX
\end{aligned}
\qquad (4.16)
$$

En la ***figura 4.1*** se representan cada una de las variables discretizadas que intervienen en la ecuación de continuidad, ver Tadeo (1990).

figura 4.1



Para analizar los estados críticos de déficit y superávit, se utilizaron las ecuaciones 4.7 y 4.8 reescritas como:

para el derrame

$$V_a^{\,m} = \begin{bmatrix} i - NS + x - k & ; & si & NS \succ i + x - k \\ 0 & ; & si & NS \leq i + x - k \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

y para el déficit

$$V_d^{\,m} = \begin{bmatrix} k - i - x & ; & si & i + x - k \prec 0 \\ 0 & ; & si & i + x - k \geq 0 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

4.5 Algoritmo de solución

Para encontrar la política de operación $K_n^*(i)$ que hace máxima la ecuación 4.10 se desarrolló un algoritmo con las siguientes características:

a) Con base en las condiciones de estacionaridad del proceso y de discretización de las variables que intervinieron, se realizaron algunas simplificaciones en la expresión 4.10, las cuales redundaron posteriormente en reducir los cálculos. El producto de la probabilidad por el beneficio en la transición es constante a lo largo de todo el proceso de optimación, para cada período interanual n, por lo que se consideró una nueva variable:

$$\Phi_{n,k}(i) = \sum_{j=1}^{NS} q_{n,k}(i,j) \cdot b_{n,k}(i,j) = \sum_{j=1}^{NS} f_n(j - i + k) \cdot b_{n,k}(i,j) \tag{4.19}$$

El valor de la variable Φ se denominó valor **esperado del beneficio inmediato** en una etapa n dada una condición inicial i y una extracción k

El beneficio óptimo total alcanzado en cada nivel de almacenamiento y cada paso en el proceso iterativo (en realidad cada paso corresponde a una etapa) de la Programación Dinámica Estocástica se calcula entonces, como:

$$B_n^k(i) = \Phi_{n,k}(i) + \sum_{j=1}^{NS} q_{n,k}(i,j) \cdot B_{n+1}^*(j)$$

o considerando la ecuación (4.11):

$$B_n^k(i) = \Phi_{n,k}(i) + \sum_{j=1}^{NS} f_n(j-i+k) \cdot B_{n+1}^*(j) \tag{4.20}$$

Los valores $f_n(j-i+k)$ y $\Phi_{n,k}(i)$ dependen de la época del año, por lo que únicamente se calcularon para las N etapas en que se dividió éste. Los restantes términos de la ecuación recursiva 4.20, en cambio, se calcularon para las n etapas de la vida útil, mediante el siguiente procedimiento:

b) Se establecieron los valores iniciales $B_n^k(i) = 0, \; \forall k \;\; y \;\; \forall i$, que fueron asignados arbitrariamente; se utilizó la ecuación recursiva 4.20, considerando un número total de etapas N, esta ecuación fue aplicada en sentido inverso al tiempo presente, iniciando con la última etapa del año (primera en sentido contrario al tiempo), por ejemplo al final de diciembre. A partir de estos valores se calculó el valor esperado de los beneficios correspondientes a diciembre, noviembre, etc., hasta terminar un ciclo anual; los ciclos anuales se repitieron hasta que no cambiasen los incrementos en los beneficios, calculados para cada opción de extracción; de forma que para cada etapa y a cada nivel de almacenamiento discretizado y para cada valor i se repitiese de un ciclo anual al otro. En ese momento se concluyó el cálculo y la política óptima quedó representada con los valores $K_n^*(i)$ correspondientes al último ciclo de cálculo.

La expresión 4.20 indica la presencia de dos componentes que definen una decisión; un beneficio esperado durante una etapa n y un beneficio esperado a largo plazo hasta cubrir la longitud de la vida de la obra.

Por otra parte, fue necesario conocer los estados finales de la transición, según el estado inicial y la extracción; por lo cual se utilizó la ecuación de continuidad 4.4, en la que se introdujo la discretización de los estados de almacenamiento según las expresiones:

$$
\begin{aligned}
V_F &= i \cdot \Delta V + V_m \\
V_I &= j \cdot \Delta V + V_m \\
X_n &= x \cdot \Delta V \\
K_n &= k \cdot \Delta V
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

4.6 Matriz de transición

Los elementos de las matrices de transición para cada alternativa de extracción, se calcularon en el inciso (a), siendo fácilmente deducibles, ya que para un esquema fijo de extracción y niveles de almacenamiento, según la ecuación de continuidad 4.15, el volumen de entrada requerido fue:

$$x = j - i + k \tag{4.22}$$

Valor que tiene asociada la probabilidad $q(x)$ en la función de densidad de probabilidad discretizada. Asignando dicho valor a la probabilidad de transición $q_{n,k}(i,j)$, si el valor de x resultante no existe en la función $q(x)$, esto indicaba que la probabilidad en la transición analizada era cero.

Un caso muy interesante e importante fue la determinación de las probabilidades de alcanzar los estados críticos. En el caso del derrame, en el estado final $j = NS$ si al aplicar la ecuación 4.22 se obtuviese que la presa alcanza dicho estado con un volumen de entrada x, menor que el máximo posible $x_{\text{máx}}$ dentro de la función de densidad de probabilidad, o sea si $x \prec x_{\text{máx}}$; ello indicaba que para el rango de entradas entre ambos valores $(x_{\text{mín}} \le x \le x_{\text{máx}})$, se alcanzaba al finalizar el período del estado del derrame $j = NS$; debiendo asignarse por tanto la suma de las probabilidades de los escurrimientos a la transición estudiada según:

$$q_{n,k}(i, NS) = \sum_{x=q}^{q\ \text{máx}} q(x) \tag{4.23}$$

Los volúmenes que se derraman con cada alternativa de entrada (x) se calcularon con la expresión 4.17, este dato cobró importancia al evaluar el beneficio esperado en la transición ya que para cada x se aplicó la ecuación 4.1 que incluye el conocimiento de dichos volúmenes. El beneficio neto esperado de la transición, en este caso fue también la suma de los productos de las respectivas probabilidades de los escurrimientos por los beneficios particulares que cada uno generó.

Con respecto al estado del déficit, este tiene similitud al de derrame explicado; si al analizar una transición de cualquier estado inicial al estado final de déficit, $j = 0$ la aplicación de la ecuación 4.22 arroja un valor de x mayor que el mínimo que registró la función de densidad de probabilidad de los escurrimientos, $x \succ x_{\text{mín}}$ esto indicó que para entradas menores a la resultante, existiría un déficit en la entrega, por lo cual al calcular la probabilidad de la transición fue necesario asignarle la suma de las correspondientes a los valores incluidos en el intervalo $x_{\text{mín}} \leq x \leq x_{\text{máx}}$ o sea:

$$q_{n,k}(i,0) = \sum_{x=x_{\text{mín}}}^{q} q(x) \tag{4.24}$$

Los volúmenes deficitarios que se presentaron en cada caso se calcularon utilizando la ecuación 4.18; en cuanto a los beneficios esperados de la transición, fueron válidos los comentarios mencionados en el caso anterior.

4.7 *Aplicación de la Programación Dinámica Estocástica al problema de dos presas en serie*

El esquema de la Programación Dinámica Estocástica es una técnica de optimación que permite atacar el problema de optimizar el funcionamiento de presas de almacenamiento con grandes proporciones de agua, que están sujetas a condiciones determinísticas y aleatorias. Con respecto a las restricciones de tipo computacional, en un problema de operación de dos presas de almacenamiento en serie es abordable, sin embargo la metodología puede consumir tiempo de cómputo excesivo para tres o más presas, ya que el número de opciones a analizar crece en forma cúbica.

En este caso el problema estribó en manejar conjuntamente y de la mejor manera el almacenamiento disponible en cada una de las presas, tomando en cuenta las restricciones del funcionamiento impuestas por las dimensiones de las estructuras de descarga o desfogue de las mismas, como son el vertedor de excedencias y la obra u obras de toma.

En cuanto al funcionamiento, la ecuación de continuidad gobierna el comportamiento hidráulico de cada presa. Una política de operación conjunta de dos presas en serie, en la mayoría de los casos implica dependencia probabilística en los escurrimientos de entrada a cada una y dependencia en los niveles de almacenamiento particulares, para tomar la decisión de extracción simultánea al inicio del período. Tomar la decisión más adecuada dependió, entre otros factores, de plantear una estructura de costos acorde con la realidad, que reflejase necesariamente la jerarquía de cada una de las variantes que integran la problemática.

Desde el punto de vista técnico, se persiguió por un lado surtir de la mejor manera posible los volúmenes demandados y por otro lado tener una preservación adecuada de los recursos.

El problema de presas en serie se abordó con el esquema de la Programación Dinámica Estocástica, donde los estados del sistema se conformaron por todas las posibles combinaciones de niveles de almacenamiento en las presas. Las posibles decisiones de extracción del sistema, fueron formadas por el conjunto de pares combinados que indicaron la salida de cada presa de manera simultánea; el conjunto de decisiones se construyó con los volúmenes de extracción de cada embalse, una vez discretizados, siguiendo el procedimiento antes descrito.

Como el sistema que se requirió optimizar consta de dos presas en serie, se pretendió encontrar una política de extracciones $K^*_{l,n}(i_1, i_2)$ que indicase la extracción a efectuarse para el vaso l durante una etapa n en términos de los estados iniciales (i_1, i_2) para hacer máximo el beneficio acumulado a lo largo de las N etapas de operación de las presas.

Dada la similitud que existe con el problema de una sola presa, desarrollado anteriormente; a continuación se plantea la ecuación recursiva final de la Programación Dinámica Estocástica, que aplicada al sistema de dos presas en serie resulta:

$$B_n^{k_1,k_2}(i_1,i_2) = \sum_{j_1=1}^{NS_1}\sum_{j_2=1}^{NS_2} q_{n,k_1}(i_1,j_1)\cdot q_{n,k_1,k_2}(i_2,j_2)\left[\left\{b^1_{n,k_1}(i_1,j_1) + b^2_{n,k_1,k_2}(i_1,j_1,i_2,j_2)\right\} + B^*_{n+1}(j_1,j_2)\right] \quad (4.25)$$

donde

$B_n^{k_1,k_2}(i_1,i_2)$ beneficio neto obtenido del funcionamiento de las presas desde el final de la vida útil, hasta una etapa n en función de las extracciones factibles (k_1,k_2) en términos de los estados iniciales (i_1,i_2)

NS_1 y NS_2 máximos almacenamientos discretizados en cada presa

$q_{n,k_1}(i_1,j_1)$ probabilidad de transición de la presa 1 durante una etapa n, al pasar de un estado inicial i al final j, bajo una extracción k_1. Debido a que el proceso descrito es estacionario, las probabilidades de transición se mantienen constantes en cada etapa de la vida útil de la presa.

$q_{n,k_l,k_2}(i_2,j_2)$ probabilidad de transición de la presa 2 durante una etapa n, al pasar de un estado inicial i al final j, bajo una combinación de extracciones (k_1,k_2).

$b^1_{n,k_1}(i_1, j_1)$ beneficio en una etapa n cuando se extrae a la presa 1 un volumen k_1 y el nivel de almacenamiento pasa de un estado inicial i al final j

$b^2_{n,k_1,k_2}(i_1, j_1, i_2, j_2)$ beneficio por la generación de energía en la presa 2; esta en función del derrame y del déficit, en estos casos se consideraron penalizaciones que se reflejaron en la función objetivo

$B^*_n(i_1, i_2) = \text{máx}_{k_1,k_2}\{B^{k_1,k_2}_n(i_1, i_2)$

$\text{máx}_{k_1,k_2}\{B^{k_1,k_2}_n(i_1, i_2)$ representa la selección del volumen óptimo de extracción que acarrea el máximo beneficio neto acumulado, desde el año final N de la vida útil hasta una etapa $n+1$

$K^*_{l,n}(i_1, i_2)$ extracciones para las cuales $B^{k_1,k_2}_n(i_1, i_2) = B^*_n(i_1, i_2)$, que deberán satisfacer las siguientes condiciones:

Las ecuaciones de continuidad:

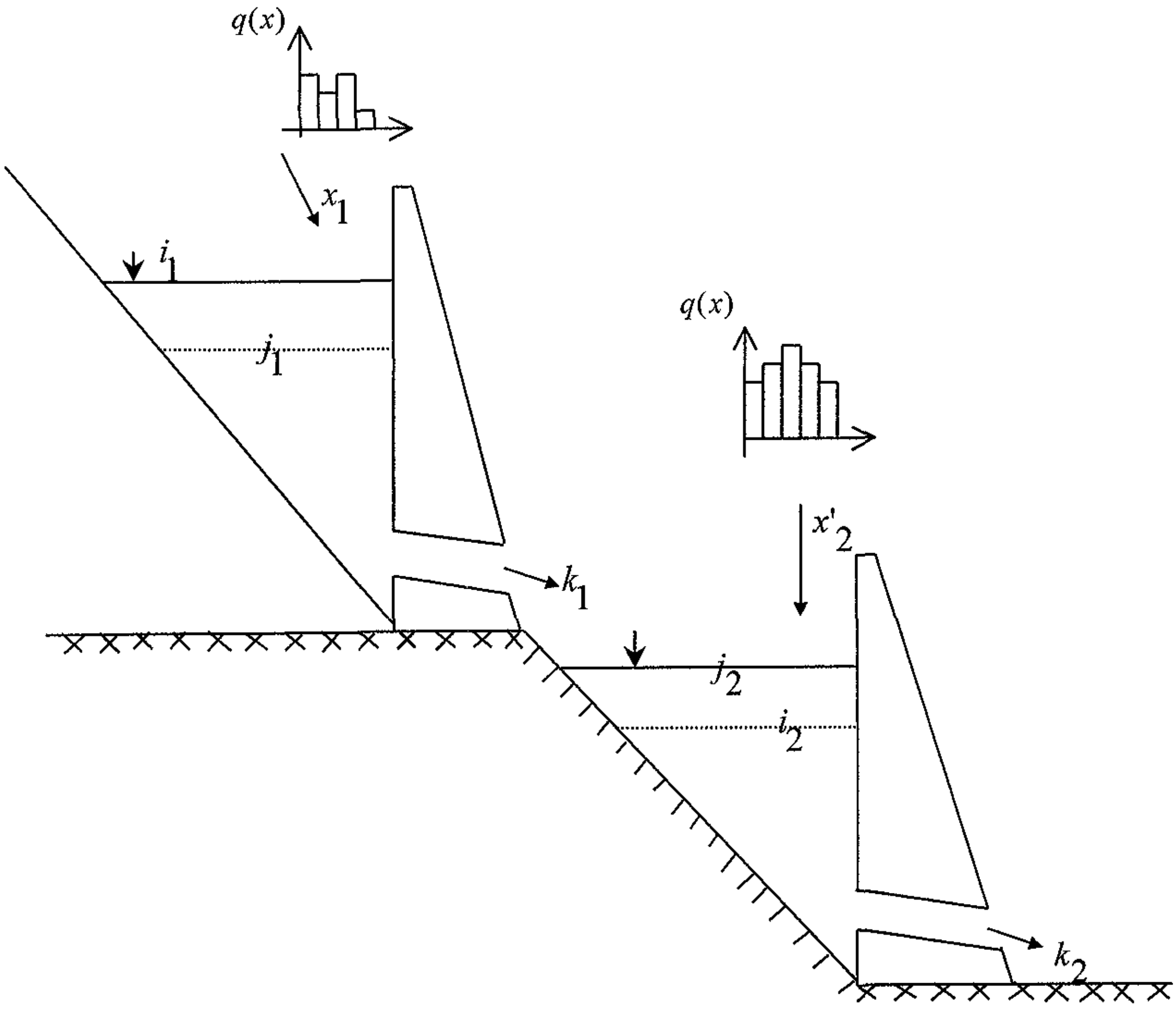
En la presa 1: $j_1 = i_1 + x_1 - k_1$

En la presa 2: $j_2 = i_2 + x_2 - k_2$ siendo

$$\left\{\begin{array}{l} x'_2: \textit{ ingreso por cuenca propia en la presa } 2 \\ x_2 = x'_2 + (k_1 + derr_1); \textit{ cuando hay derrame en la presa } 1 \\ x_2 = x'_2 + (k_1 - def_1); \textit{ cuando hay déficit en la presa } 1 \\ x_2 = x'_2 + k_1; \textit{ cuando no hay derrame, ni déficit en la presa } 1 \end{array}\right\}$$

Las restricciones en cada presa son: $1 \le j_l \le NS_l$ y $0 \le k_l \le NK_l$

figura 4.2



La ***figura 4.2*** muestra las variables que intervienen en las ecuaciones de continuidad en un sistema de dos presas en serie.

El algoritmo de solución empleado para el sistema de presas en serie consideró que la operación de las presas no es independiente. Además, el volumen de extracción en la primera presa depende del volumen almacenado y de la etapa que tenga la segunda presa.

Para encontrar la política de operación $K_{l,n}^{*}(i_1, i_2)$ que hiciese máxima la ecuación 4.25 se desarrolló un algoritmo con las siguientes características:

a) Para evitar cálculos repetidos, la ecuación 4.25 se reorganizó para obtener una expresión simplificada, ya que el producto de la probabilidad por el beneficio en la transición es constante a lo largo de todo el Proceso de optimación, se consideró una nueva variable Φ:

$$\Phi_{n,k_1,k_2}(i_1,i_2)=\sum_{j_1=1}^{NS_1} q_{n,k_1}(i_1,j_1)\cdot b_{n,k_1}^{1}(i_1,j_1)+\sum_{j_2=1}^{NS_2} q_{n,k_1,k_2}(i_2,j_2)\cdot b_{n,k_1,k_2}^{2}(i_1,j_1,i_2,j_2):$$

Valor esperado del beneficio inmediato en una etapa n en función de una combinación de extracciones factibles (k_1, k_2) dadas las condiciones iniciales (i_1, i_2)

Para calcular Φ se utilizaron las probabilidades asociadas a los volúmenes de ingreso de las presas 1 y 2, y los beneficios correspondientes a ambas presas.

De acuerdo con la ecuación de continuidad $j_l = i_l + x_l - k_l$ la probabilidad de transición, $q_{n,k_l}(i_l, j_l)$, depende sólo de una etapa n y del ingreso, $x_l = j_l - i_l + k_l$, es decir:

$$q_{n,k_l}(i_l,j_l)=f_n(x_l)$$

Tomando en cuenta el carácter aleatorio de los ingresos, se les definió mediante funciones de densidad de probabilidad $f_n(x_l)$, ya que el sistema para el cual se pretendió definir las políticas de operación consta de dos vasos cuyo funcionamiento no es independiente, la política de extracciones debió obtener el beneficio esperado máximo, en un horizonte de planeación de n etapas en que se dividió el año, definiendo las condiciones iniciales o sea los estados iniciales (i_1, i_2) y garantizando la convergencia a una política óptima de extracciones.

Entonces, se obtuvo:

$$q_{n,k_l}(i_l, j_l) = f_n(j - i + k) \tag{4.26}$$

La ecuación recursiva de la Programación Dinámica Estocástica resultó:

$$B_n^{k_1,k_2}(i_1,i_2) = \Phi_{n,k_1,k_2}(i_1,i_2) + \sum_{j_1=1}^{NS_1}\sum_{j_2=1}^{NS_2} q_{n,k_1}(i_1,j_1)\cdot q_{n,k_1,k_2}(i_2,j_2)\cdot B_{n+1}^{*}(j_1,j_2) \tag{4.27}$$

donde

Los valores de $q_{n,k_l}(i_l, j_l)$ y de $\Phi_{n,k_1,k_2}(i_1,i_2)$ dependen de la época del año, por lo que se calcularon sólo para las N etapas en que se dividió éste; los restantes términos de la ecuación recursiva 4.27 debieron en cambio calcularse para las n etapas de la vida útil, mediante el procedimiento siguiente:

b) Se utilizó la ecuación recursiva 4.27, considerando un número total de N etapas, iniciando con la última etapa del año (primera en sentido contrario al tiempo), por ejemplo al final de diciembre. A partir de estos valores se calculó el valor esperado de los beneficios correspondientes a diciembre, noviembre, etc., hasta terminar un ciclo anual; se establecieron los valores iniciales $B_n^{*}(j_1, j_2) = 0, \forall\, K_l, i_l; l = 1,2$, que fueron asignados arbitrariamente por lo que los ciclos anuales se repitieron hasta que el incremento en los beneficios para cada (i_1, i_2) se repitiese de un ciclo anual a otro. Al cumplirse esta condición se dio por terminado el cálculo y la política óptima se representó por los valores $K_{l,n}^{*}(i_1,i_2)$ correspondientes al último ciclo del cálculo.

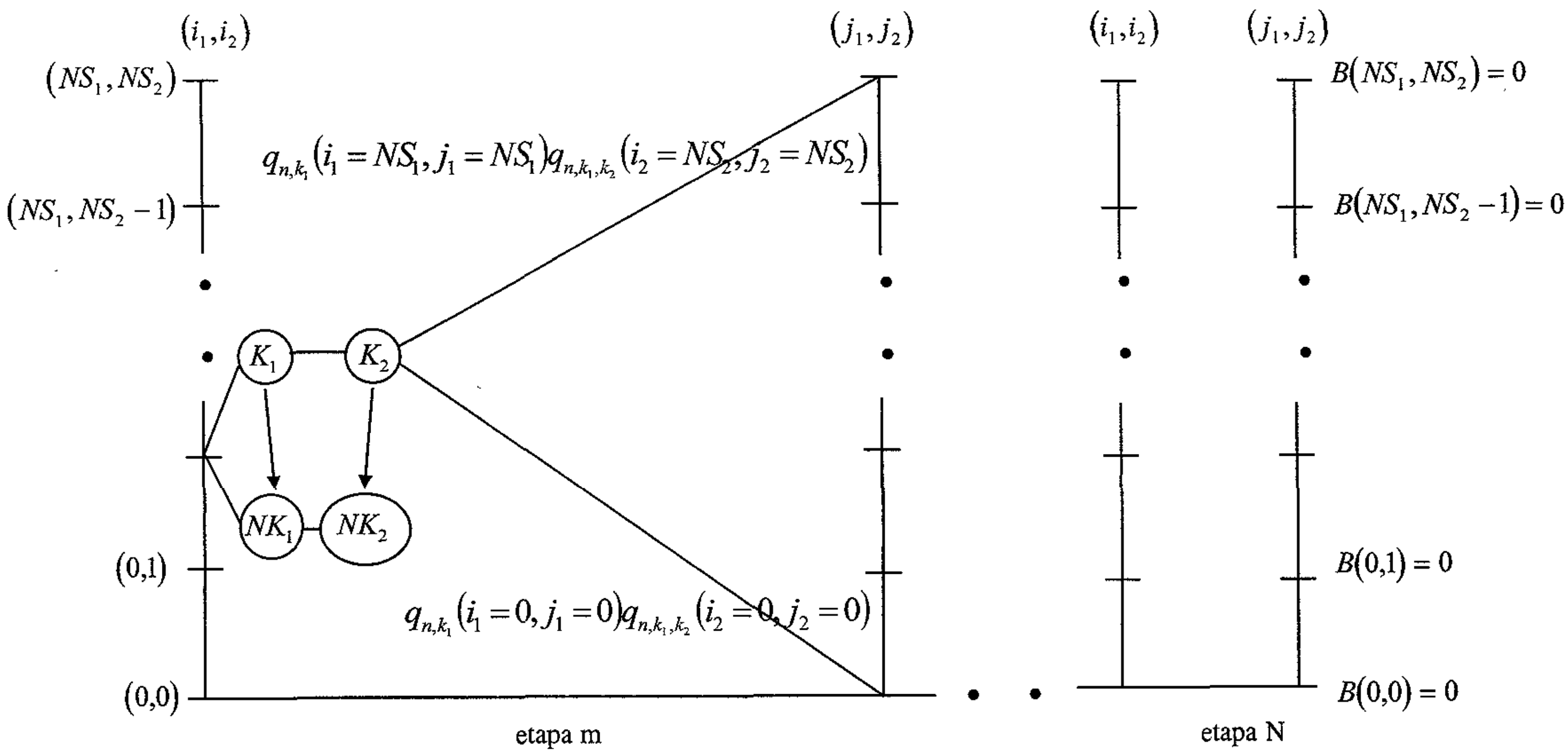
Como puede verse, los beneficios dependen de los niveles medios de almacenamiento alcanzados en cada una de las presas durante una etapa n y del volumen entregado por cada una.

La ***figura 4.3*** esquematiza la aplicación de la Programación Dinámica Estocástica en un sistema de dos presas en serie.

4.9 Simulación del funcionamiento de un sistema de presas

Al utilizar la Programación Dinámica Estocástica, en sistemas de presas se realizan variadas simplificaciones como no considerar la evaporación, los costos de déficit y derrame, etc.; las cuales pueden alejar al modelo de la situación real. Para corregir esta limitación, fue necesario complementar los estudios de optimación con los de simulación, los cuales reflejasen la sensibilidad del sistema frente a la política de operación; esta acción permitió además conocer el nivel deficitario que impondría la política a la ley de demandas particular de cada problema.

figura 4.3 **ESQUEMA DE LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA ESTOCÁSTICA PARA DOS PRESAS EN SERIE**



$k, \ldots\ldots, NK$: Opciones de extracción

$q_{n,k_1}(i_1, j_1)$ y $q_{n,k_1,k_2}(i_2, j_2)$: Probabilidades de transición

5. Aplicación de la metodología de la Programación Dinámica.

5.1 Generalidades

La operación de una presa con ingresos aleatorios puede tratarse como un sistema estocástico, cuyo control óptimo puede determinarse utilizando la Programación Dinámica (método de optimación) el cual se escogió por la flexibilidad y facilidad de su aplicación, el carácter secuencial del problema, ya que posee la ventaja de permitir prácticamente cualquier tipo de función objetivo, la cual puede ser no lineal o incluso discontinua, sin embargo, existen severas restricciones sobre el número de las variables de decisión.

Uno de los inconvenientes de este método son sus requerimientos de memoria y tiempo de cómputo, por lo cual se desarrollo un algoritmo que permite reducir sensiblemente estas limitaciones para hacer factible su utilización.

Una de las razones por la cual comúnmente no se usa el método de la Programación Dinámica, particularmente cuando se aplica a sistemas estocásticos, es por la gran cantidad de cálculos y memoria requeridos. Por esta razón se hicieron algunas adaptaciones al método para desarrollar un algoritmo eficiente tanto en el aspecto del número de operaciones como en el de memoria necesaria.

Para aplicar la metodología descrita en el capítulo anterior, se realizaron algunos análisis para tener en cuenta las peculiaridades de cada presa, los que se describen a continuación.

Además se utilizaron los modelos de optimación y simulación que permiten determinar las políticas de operación, para definir los volúmenes que deben ser turbinados cada mes y así evaluar los beneficios.

El algoritmo de la Programación Dinámica se codificó en dos programas de cómputo escritos en lenguaje Fortran; el primero de ellos calculó los beneficios esperados para cada etapa $\Phi_{n,K_1,K_2}(i_1,i_2)$ y los escribió en archivos (uno para cada etapa), que el segundo programa leía para realizar los cálculos sucesivos hasta cumplir con las condiciones que le permitiesen obtener las políticas mensuales de operación óptima del sistema de presas del río Grijalva. El modelo de la Programación Dinámica desarrollado fue alimentado con las funciones objetivo que definieron la operación óptima a largo plazo, éstas funciones consideraron los beneficios por generación de energía, los daños que causarían los volúmenes derramados y procuraba evitar derrames y déficits.

5.2 Función objetivo

El objetivo al operar cualquier sistema de aprovechamientos hidráulicos está encaminado a obtener el máximo beneficio del sistema durante la vida útil de las obras; este beneficio está condicionado por diversos factores de tipo determinístico y aleatorio.

Entre los factores determinísticos, en el caso de una presa se encuentran sus características físicas y el volumen demandado por sector o sectores usuarios.

El volumen de ingreso a un vaso se considera aleatorio, por esta razón al tomar una decisión cuando la presa se encuentra en un estado inicial dado, el estado resultante puede tomar varios valores, cada uno con cierta probabilidad, según sea el volumen de ingreso. Por este motivo, el beneficio o costo asociado a dicha decisión sólo puede conocerse en valor esperado, el cual se obtiene multiplicando el beneficio correspondiente a cada estado resultante por su probabilidad de ocurrencia y sumando después sobre todos los estados factibles.

El factor aleatorio o estocástico es representado con la función de distribución de probabilidad:

$$F_{X_n}(X) = P(X \le x_n) \tag{5.1}$$

donde

x_n variable aleatoria del volumen de escurrimiento que entra a la presa en una etapa n

Por otra parte, la corriente de beneficios se refiere estrictamente a los generados por la presa como sistema productivo, razón por la cual no deben ser incluidos los costos de construcción, operación y mantenimiento, relacionados directamente con la selección óptima de la capacidad de la presa en las etapas de diseño de la misma.

El problema consiste en determinar los principales aspectos de los que depende un buen o un mal control. Cualitativamente un buen control debe cumplir los siguientes requisitos:

- Ser factible
- Obtener el máximo beneficio por generación
- Minimizar los daños por inundación
- Surtir durante la etapa la energía prometida
- Garantizar la seguridad de la presa

Por otro lado, una vez definido el algoritmo para determinar las políticas de operación óptima del sistema, se seleccionó aquella que hiciese óptimo el funcionamiento de las presas, por lo cual fue necesario establecer una norma que permitiese comparar distintas políticas y decidir cual es la mejor, esta norma de comparación fue la función objetivo. Para definirla, se eligió el sistema de presas que conforman el conjunto hidroeléctrico del río Grijalva, en el sureste de la República Mexicana, cuya capacidad de generación (3,900 MW) representa el 41.8% de la capacidad hidroeléctrica en operación en diciembre de 1995, motivo por el cual es de suma importancia que su funcionamiento sea óptimo.

La operación del conjunto hidroeléctrico de presas del río Grijalva que funcionan en serie no fue fácil de determinar, por lo cual, se consideró adecuado representar el efecto de las presas Chicoasén y Peñitas, que tienen una capacidad de regulación pequeña en las funciones objetivo planteadas para los vasos con mayor capacidad de regulación, en este caso para las presas Angostura y Malpaso, entonces el sistema se trató como un conjunto formado por dos presas en serie, las dos presas más importantes en cuanto a capacidad de regulación.

Para determinar la energía generada (GWh) en una etapa, en función de los valores discretos del estado (i) y de la extracción k se ajustó primero la función:

$$h = c_1 (\Delta V \cdot i)^{c_2} + h_o$$

donde

h diferencia entre el nivel de la superficie del agua y el nivel del NAMINO

c_1 y c_2 constantes de ajuste de la curva elevación sobre el Namino vs Volumen almacenado expresados en forma discreta (adimensionales)

h_o carga cuando el nivel está en el volumen mínimo

Para definir las funciones objetivo de las presas Angostura y Malpaso se analizaron los datos de las curvas Elevaciones-Capacidades de cada presa y a todo aquel valor de elevación (o capacidad) mayor o igual que la elevación (o capacidad) correspondiente al NAMINO se le restó este último para obtener el conjunto de datos al que se aplicaron diversos tipos de ajustes hasta obtener aquel que diera el valor más alto para el coeficiente de correlación, esto llevó a obtener un ajuste de tipo potencial, las ecuaciones de ajuste se muestran en las ***figuras 5.1 y 5.2***.

Curvas de ajuste para las presas.

figura 5.1

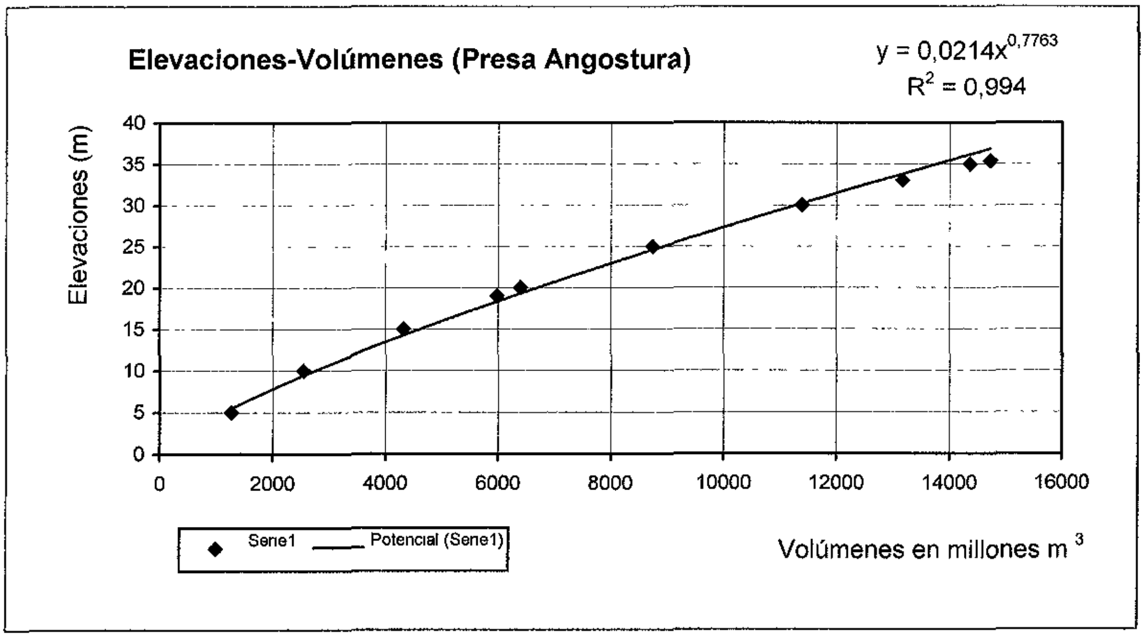
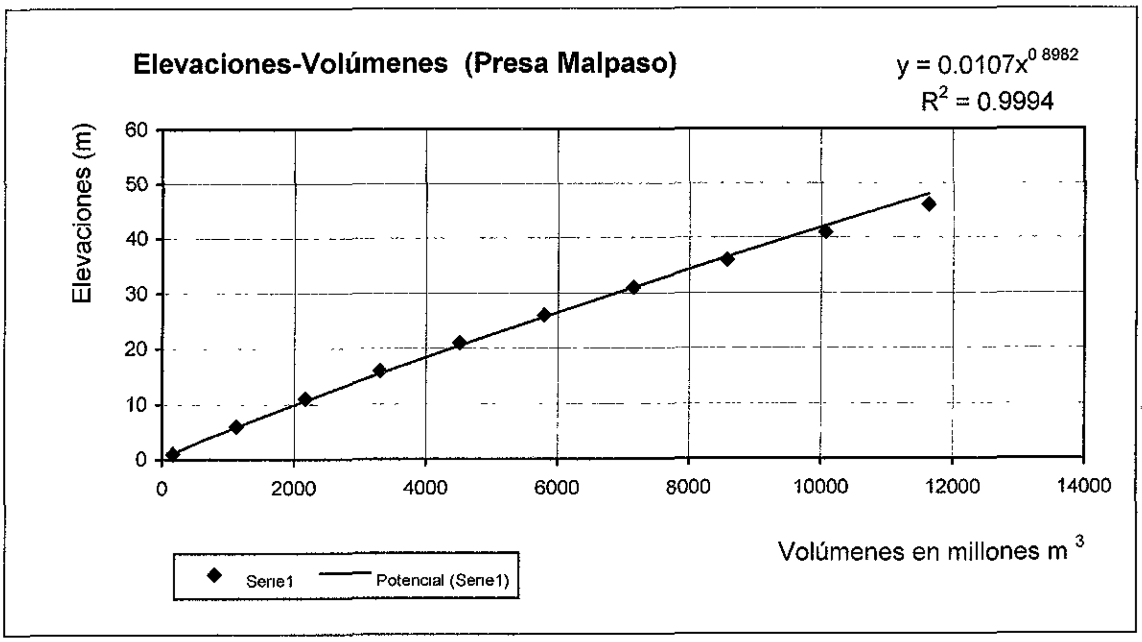


figura 5.2



Los coeficientes c_1 y c_2 fueron constantes y tuvieron los siguientes valores:

a) Para Angostura: $c_1 = 0.0214$, $c_2 = 0.7763$

b) Para Malpaso: $c_1 = 0.0107$, $c_2 = 0.8982$

La función para la presa Angostura fue: $h = 0.0214(\Delta V \cdot i)^{0.7763}$

La función para la presa Malpaso fue: $h = 0.0107(\Delta V \cdot i)^{0.8982}$

Así pues, la carga total se expreso como: $H = cnam + c_1(\Delta V \cdot i)^{c_2}$

cnam Carga al Namino (diferencia entre la elevación del Namino y el Nivel medio de desfogue)

Las cargas totales resultaron ser, para la presa Angostura:

$$H_{Angostura} = [H_{namino} - H_{n\,m\,d}]_{Angostura} + [H_{namo} - H_{n\,m.d}]_{Chicoasén} + 0.0214\left[\Delta V\left(\frac{i_1 + j_1}{2}\right)\right]^{0.7763}$$

para la presa Malpaso:

$$H_{Malpaso} = [H_{namino} - H_{n\,m.d.}]_{Malpaso} + [H_{namo} - H_{n.m\,d}]_{Peñitas} + 0.0107\left[\Delta V\left(\frac{i_2 + j_2}{2}\right)\right]^{0.8982}$$

Y la energía generada se expresó como:

$$E_{gen} = fac \cdot k \cdot \Delta V \cdot H_{presa} \cdot efic \qquad (5.2)$$

siendo

E_{gen} Energía generada (GWh)

fac Factor de conversión de unidades $\left(fac = \frac{9.81}{3600} \right)$

k Valor discreto del volumen turbinado

ΔV Incremento de volumen

$efic$ Eficiencia (fracción)

La energía generada en cada presa se expresó como:

$$E_{gen\,(Angostura)} = fac \cdot k \cdot \Delta V \cdot H_{Angostura} \cdot efic \tag{5.3}$$

$$E_{gen\,(Malpaso)} = fac \cdot k \cdot \Delta V \cdot H_{Malpaso} \cdot efic \tag{5.4}$$

Por otro lado, fue necesario evaluar el Beneficio Neto obtenido por la Generación de Energía; para ello se consideraron tres casos fundamentales como se indica en las siguientes ecuaciones.

- Si se cubre la Demanda se obtiene un Beneficio del 100%.

$$\Rightarrow Beneficio = 100$$

- Si la Energía Generada ≥ Energía Demandada, se puede entregar Energía Secundaria y el Beneficio se incrementa en una proporción ρ (menor que 100).

$$\Rightarrow Beneficio = 100 + \rho \left(\frac{E_{gen}}{E_{dem}} - 1 \right)$$

- Si la Energía Generada $<$ Energía Demandada, es decir no se cubre la Demanda de Energía (caso de déficit), entonces el Beneficio disminuye en una proporción β (mayor que 100).

$$\Rightarrow Beneficio = 100 + \beta\left(\frac{E_{gen}}{E_{dem}} - 1\right)$$

Se utilizaron los valores $\rho = 20$, $\beta = 150$, como se muestra en la siguiente figura:

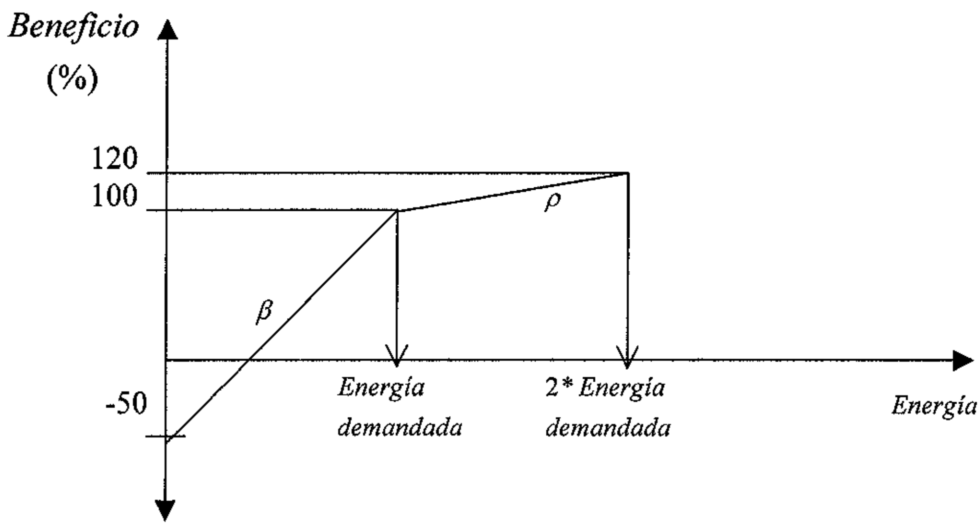


figura 5.3 Evaluación del Beneficio obtenido por Generación de Energía.

Por otra parte, de acuerdo con la ecuación de continuidad $j = i + x - k$ y considerando que los ingresos x_l son aleatorios, para una combinación del estado inicial i_l y de extracción k_l es posible llegar a un estado final j_l que implique un derrame $(j_l \succ NS_l)$ o un déficit $(j_l \prec 1)$; en estos dos casos se consideraron <u>costos o penalizaciones</u> que reflejaron la obtención de menores beneficios, lo que llevó a agregar dos variables más en las ecuaciones 5.3 y 5.4, entonces las funciones objetivo obtenidas fueron:

$$b_{Angostura} = fac \cdot k \cdot \Delta V \cdot H_{Angostura} \cdot efic - \left(def_{Angostura} \cdot kdef_{Angostura}\right) - \left(der_{Angostura} \cdot kder_{Angostura}\right)$$

$$b_{Malpaso} = fac \cdot k \cdot \Delta V \cdot H_{Malpaso} \cdot efic - \left(def_{Malpaso} \cdot kdef_{Malpaso}\right) - \left(der_{Malpaso} \cdot kder_{Malpaso}\right)$$

Las dos situaciones no deseables antes mencionadas, se penalizaron si se presentaban, estableciendo un costo $(kder)$ por cada unidad derramada, o un costo $(kdef)$ por cada unidad deficitaria. Dada la necesidad de garantizar un gasto de entrega mínimo, se afectó con un costo de castigo a la función objetivo, en el caso de no poder cumplirlo, penalización impuesta cuando a pesar de que la política de operación indicase el volumen a turbinar, esto no fuese posible debido a que el vaso no contase con el suficiente volumen almacenado (CASO DE DÉFICIT); estas situaciones ocurren sobre todo como consecuencia del carácter aleatorio de los escurrimientos que ingresan a la presa.

5.3 Análisis estadístico de los volúmenes de ingreso a un sistema de presas en serie

Los ingresos correspondientes a cada época del año se caracterizan estadísticamente mediante su función de distribución de probabilidades, dicha función se puede calcular para cada mes del año, sin embargo, las condiciones de discretización que requiere el método, hicieron necesario un compromiso entre la discretización de los volúmenes, dado por el incremento de volumen que resultó de dividir la capacidad útil en NS partes y la discretización en el tiempo, dada por las etapas en que se dividió el año; la solución del compromiso se logró formando etapas con características estadísticas similares (media y desviación estándar) e incrementos de volumen ΔV

Para discretizar la capacidad útil de las presas en serie, en este caso Angostura y Malpaso, se consideró un solo intervalo de discretización ΔV para las dos presas. Así pues, se obtuvo un cierto número de estados para cada presa, de acuerdo con la capacidad útil de cada una.

Para aplicar el algoritmo fue necesario primero definir las etapas, para ello se analizaron 31 años de registros de volúmenes mensuales históricos con los que se determinó el volumen promedio mensual, para luego dividir el año y formar grupos de meses cuyas medias y desviaciones estándar resultaran del mismo orden de magnitud, cuidando de no asociar meses de poca lluvia con meses de escurrimiento abundante.

Las etapas formadas se muestran en la ***Tabla 5.1***. Por otro lado, considerando la magnitud de los escurrimientos, ***Tabla 5.1*** y el volumen útil de cada presa, ***Tabla 3.1*** del capítulo tres, y después de varios intentos de agrupación, se decidió analizar dos intervalos de discretización. Dividiendo el volumen útil de las presas en intervalos $\Delta V = 600x10^6 m^3$ quedaron definidos 22 estados para la presa Angostura y 16 para la presa Malpaso. Y con $\Delta V = 450x10^6 m^3$ quedaron definidos 29 estados para la presa Angostura y 22 para Malpaso.

Tabla 5.1

Escurrimiento medio mensual en millones de m^3		
Etapa	**Presa: Angostura**	**Presa: Malpaso**
1: noviembre, diciembre	1196.89	1110.98
2: octubre	1891.07	1104.95
3: septiembre	2207.69	1502.20
4: agosto	1396.42	872.46
5: junio, julio	1973.00	1199.52
6: enero,febrero,marzo,abril,mayo	1221.82	1352.58

El algoritmo de la Programación Dinámica requirió que el análisis de las etapas fuese en sentido contrario de avance del tiempo, es decir, seleccionando como etapa inicial la que uno quisiese pero a partir de ella la siguiente etapa debía cumplir con estar integrada por meses anteriores a los meses que componían a la etapa inicial; por ejemplo, si se seleccionaba la etapa uno, formada por los meses de junio y julio, las restantes etapas serían:

- Etapa dos: enero, febrero. marzo, abril, mayo
- Etapa tres: noviembre, diciembre
- Etapa cuatro: octubre
- Etapa cinco: septiembre
- Etapa seis: agosto

En este estudio, la selección de ordenamiento de las etapas fue:

- Etapa uno: noviembre, diciembre
- Etapa dos: octubre
- Etapa tres: septiembre
- Etapa cuatro: agosto
- Etapa cinco: junio, julio
- Etapa seis: enero, febrero, marzo, abril, mayo

Después de efectuado el análisis estadístico para formar las etapas, se calcularon las probabilidades asociadas a los volúmenes de ingreso, estas probabilidades son valores empíricos, es decir no han sufrido ningún tipo de ajuste de alguna función de distribución de probabilidades.

Las probabilidades calculadas para el valor $\Delta V = 450x10^6\ m^3$ se muestran en la ***Tabla 5.2*** y para $\Delta V = 600x10^6\ m^3$ se encuentran en la ***Tabla 5.3***.

Tabla 5.2

$\Delta V = 450$ *millones de* m^3													
i	**Etapa**	**Mes**	**Probabilidades asociadas a los ingresos**										**Vol. Dem. NKi**
1	1	nov	0.000	0.238	0.476	0.190	0.096						12
2		dic	0.065	0.161	0.516	0.258							16
1	2	oct	0.000	0.095	0.143	0.143	0.286	0.238	0.071	0.024			6
2			0.032	0.290	0.355	0.290	0.000	0.033					8
1	3	sep	0.000	0.024	0.167	0.071	0.310	0.190	0.119	0.048	0.048	0.023	6
2			0.032	0.258	0.161	0.194	0.129	0.129	0.065	0.032			8
1	4	ago	0.000	0.238	0.310	0.262	0.071	0.095	0.000	0.024			6
2			0.097	0.548	0.226	0.065	0.032	0.032					8
1	5	jun	0.000	0.024	0.190	0.190	0.333	0.119	0.048	0.071	0.025		12
2		jul	0.097	0.129	0.452	0.226	0.065	0.000	0.031				16
1	6	ene	0.000	0.095	0.571	0.310	0.000	0.000	0.024				30
2		feb	0.032	0.129	0.419	0.290	0.065	0.065					40
		mar											
		abr											
		may											

i=1, Datos correspondientes a la presa Angostura
i=2, Datos correspondientes a la presa Malpaso

Tabla 5.3

$\Delta V = 600$ *millones de* m^3											
I	**Etapa**	**Mes**	**Probabilidades asociadas a los ingresos**								**Vol. Dem. NKi**
1	1	nov	0.048	0.548	0.310	0.095					10
2		dic	0.097	0.581	0.323						12
1	2	oct	0.000	0.214	0.167	0.405	0.190	0.024			5
2			0.194	0.387	0.387	0.000	0.032				6
1	3	sep	0.000	0.119	0.143	0.381	0.214	0.071	0.048	0.024	5
2			0.129	0.323	0.194	0.226	0.097	0.032			6
1	4	ago	0.095	0.333	0.381	0.095	0.071	0.024			5
2			0.226	0.581	0.129	0.032	0.032				6
1	5	jun	0.000	0.119	0.286	0.381	0.119	0.071	0.024		10
2		jul	0.097	0.355	0.452	0.065	0.032				12
1	6	ene	0.024	0.476	0.476	0.000	0.024				25
2		feb	0.032	0.387	0.452	0.097	0.032				30
		mar									
		abr									
		may									
i=1, Datos correspondientes a la presa Angostura i=2, Datos correspondientes a la presa Malpaso											

A continuación, se estableció el volumen que demandaría cada etapa; para ello se expresó el gasto de diseño en intervalos de discretización y este valor se multiplicó por el número de meses que integra cada grupo. Cabe destacar que el valor así obtenido fija el valor máximo NK de la etapa, pero puede sufrir modificaciones, de acuerdo con los resultados obtenidos en el proceso de simulación, donde se apreció el efecto de la política obtenida. Los valores usados en este estudio fueron:

Con $\Delta V = 450x10^6\ m^3$ el valor mensual resultante del volumen demandado NK expresado en ΔV, fue de 6 para la presa Angostura y de 8 para Malpaso.

Con $\Delta V = 600x10^6\ m^3$ el valor mensual resultante del volumen demandado NK expresado en ΔV, fue de 5 para la presa Angostura y de 6 para Malpaso.

Los valores máximos NK para cada presa se encuentran en las primeras columnas del lado derecho, en las ***Tablas 5.2*** y ***5.3***

5.4 Proceso de optimación

Una parte importante en el proceso de optimación es modelar matemáticamente un fenómeno real y escoger una medida de utilidad (función objetivo) que dependa de las variables independientes o controlables del fenómeno.

La modelación adecuada del fenómeno y de la función objetivo es básica para obtener buenos resultados en el uso de los métodos de optimación, ya que estos últimos determinan el valor de las variables controlables que mejor cumplen con la función objetivo. Por lo tanto, si la definición matemática del fenómeno y la función objetivo no reflejan la realidad, los resultados que se obtengan serán poco representativos.

En la teoría clásica de optimación se tratan problemas en los que, para ciertas condiciones iniciales, al definir el valor de las variables independientes (variables de decisión o control) se determina una sola solución (trayectoria) del sistema. Sin embargo, existen sistemas en los que al definir el valor de las variables de decisión (o simplemente, el control), no se define una sola trayectoria factible, sino un conjunto. Esto se debe a que dentro del sistema existen variables aleatorias (de disturbio) que no pueden controlarse y provocan dicha indeterminación.

Para emplear el modelo de optimación propuesto es necesario contar con información respecto a las características generales de la presa o las presas, a los volúmenes de ingreso y a la función objetivo. Además es necesario especificar el número de etapas a considerar en el año, el número de estados en que se subdivide la capacidad útil de la presa y el número de posibles extracciones (variables de decisión) que se tomarán en cuenta.

Una vez que se cuenta con esta información se utiliza el modelo de optimación y se determina la política de operación óptima, la cual tiene para el ingeniero la insensibilidad de los números, ya que al determinarla se hacen simplificaciones que en muchos casos alejan al modelo de la realidad; por este motivo es conveniente utilizar la técnica de la simulación, para conocerse parámetros importantes, por ejemplo: el nivel deficitario, el comportamiento del volumen de evaporación, el número de veces que derrame una presa, los niveles de almacenamiento promedio alcanzados, etc. Así pues, las políticas pueden ser ajustadas o afinadas mediante la técnica de la simulación del funcionamiento del sistema.

Con respecto a $\Delta V = 600x10^6\ m^3$, se probaron diversos valores de $k_{máx}$ para la etapa comprendida por los meses de enero a mayo; en un primer intento se fijaron los valores de extracción máxima multiplicando la demanda de un mes ($5\Delta V$ para Angostura y $6\Delta V$ para Malpaso) por el número de meses que integran la etapa, cinco en este caso, con lo cual resultaron valores de $25\Delta V$ y $30\Delta V$ pero al simular la política obtenida con estas condiciones resultó que la presa Angostura prácticamente operaba a partir del segundo año en niveles muy bajos, cercanos al NAMINO, porque la extracción que la política dictaba era extremadamente alta; esto llevó a descartarla y se buscó entonces reducir los valores de extracción y simular los resultados obtenidos para visualizar su efecto en el comportamiento de las presas. Los valores de extracción máxima con los que se logró que la política obtenida manifestará un buen funcionamiento de los vasos, fueron $10\Delta V$ para Angostura y $12\Delta V$ para Malpaso.

Por otro lado, para el conjunto de presas se estableció una penalización mayor en el caso de déficit puesto que se consideró prioritario entregar la energía en forma continua. Adicionalmente se establecieron restricciones en cuanto a extracción mínima y máxima, con lo que se tuvo flexibilidad para modificar estas cantidades y mejorar la evolución de la cantidad del agua en el vaso.

Cuando se presentaron déficits o derrames en el sistema, los valores de penalización influyeron en la determinación de la política óptima, para determinar estos valores no existe una regla a seguir, por lo que fue necesario hacer diversas pruebas hasta encontrar aquellos valores con los que se obtuviesen los mejores resultados, los valores numéricos que se usaron fueron:

Para el valor de discretización de $\Delta V = 600x10^6\ m^3$ se tiene:

a) Para Angostura: penalización por déficit=10, por derrame=1,000

b) Para Malpaso: penalización por déficit=10, por derrame=3,000

Para el valor de discretización de $\Delta V = 450x10^6\ m^3$ se tiene:

a) Para Angostura: penalización por déficit=10, por derrame=1,000

b) Para Malpaso: penalización por déficit=10, por derrame=10,000

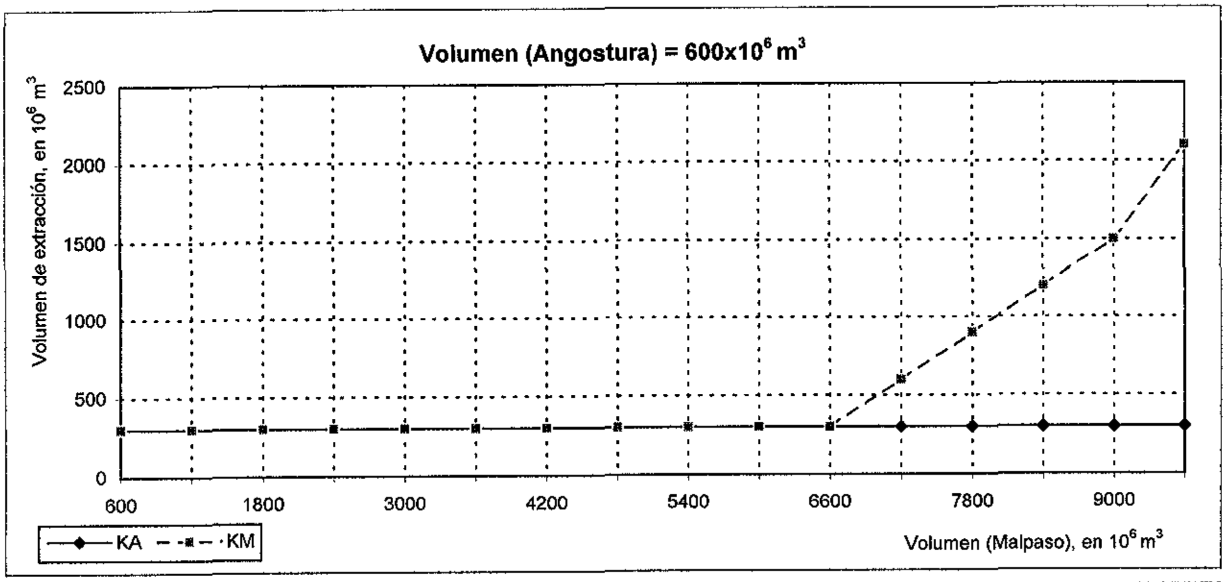
De manera general se puede decir que la política óptima calculada para operar en forma conjunta las presas, mostró que la extracción en cada una de ellas era una función que dependía del almacenamiento inicial en ambas y de la etapa del año, lo que permitió optimizar el funcionamiento del sistema y el aprovechamiento de los ingresos. Además la política obtenida siguió un comportamiento lógico, ya que a mayor volumen almacenado en las presas mayor extracción se obtenía, tratando de cuidar que los estados en ambos vasos no llegasen a condiciones que implicasen derrame o déficit.

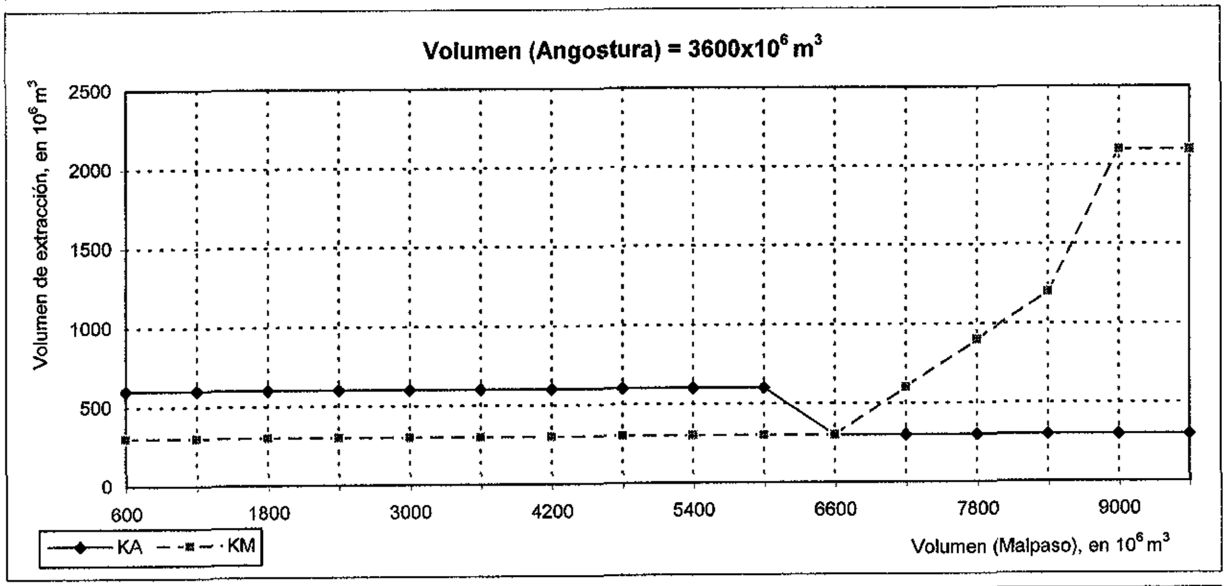
Los resultados obtenidos del programa de optimación para cada período analizado y estado de la presa, fueron el valor discreto en términos del valor ΔV seleccionado, la extracción propuesta, el beneficio acumulado y la probabilidad asociada a cada estado; esto último es importante puesto que fue un indicador de los niveles más probables en el vaso y permitió estimar a priori (antes de realizar la Simulación), si se tendría déficit o derrame.

Las siguientes figuras forman parte del comportamiento de una política calculada, para diversos valores de volumen almacenado en las presas Angostura y Malpaso, en dos diferentes etapas del año. En la ***figura 5.4*** se tienen algunas gráficas de la política de operación para la etapa 1, conformada por los meses de noviembre y diciembre, donde se muestran diversos almacenamientos en la presa Angostura. Mientras que en la ***figura 5.5*** se tienen otras gráficas que conforman la política de operación para la etapa 3, constituida por el mes de septiembre, para diversos almacenamientos en la presa Angostura.

Usando el valor de discretización del volumen útil de $\Delta V = 600x10^6\ m^3$ las políticas de operación determinadas para el conjunto de presas, para dos distintas etapas se muestran en las siguientes tablas. En la ***Tabla 5.4*** se muestra la evolución completa de la política de operación para la etapa 1, compuesta por los meses de noviembre y diciembre, y en la ***Tabla 5.5*** se halla toda la política de operación para la etapa 3, conformada por el mes de septiembre; en estas tablas los resultados son cifras de 4 números, los dos primeros corresponden a la extracción programada para la presa Angostura y los 2 últimos números corresponden a la extracción a realizar en la presa Malpaso, las extracciones están expresadas en términos de ΔV (discretización en incrementos de volumen).

fig. 5.4 Política de operación para la etapa 1, (noviembre y diciembre).





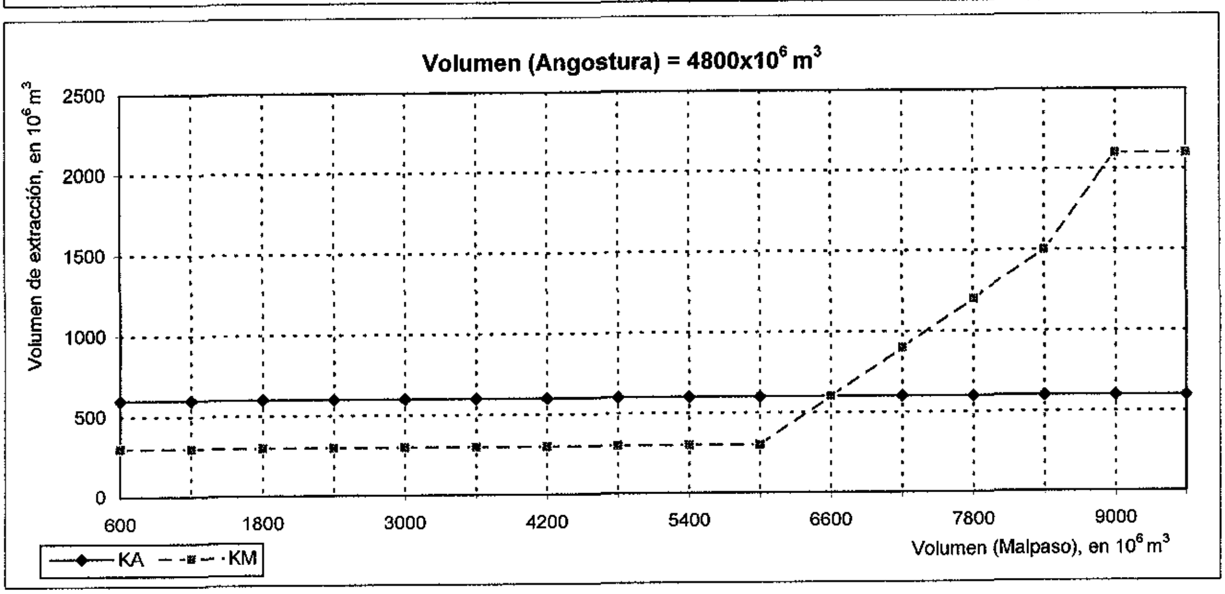
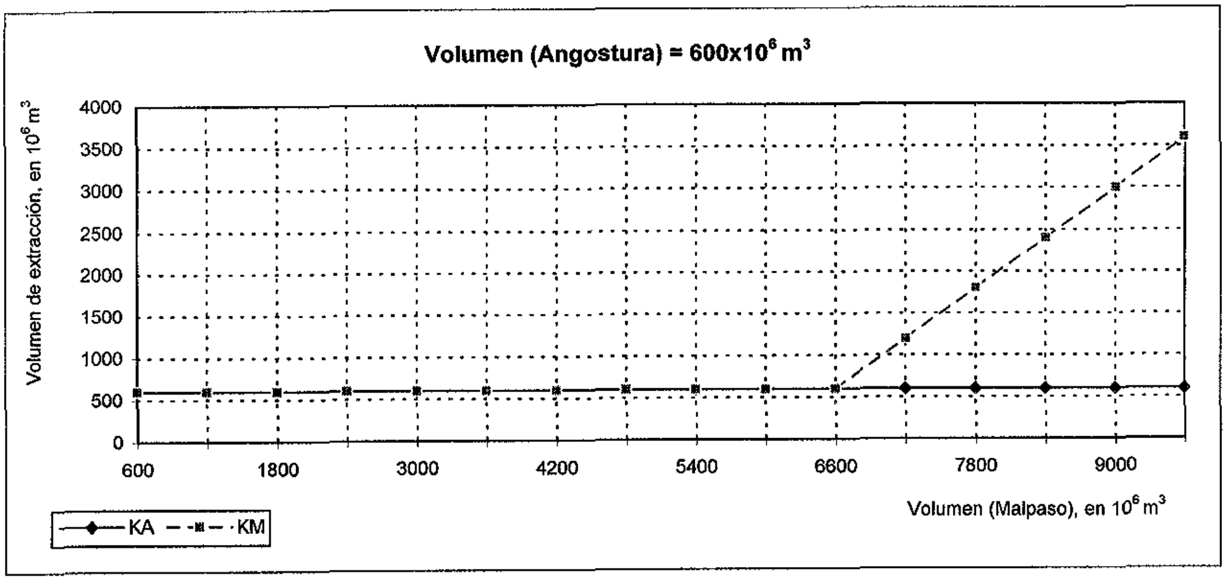
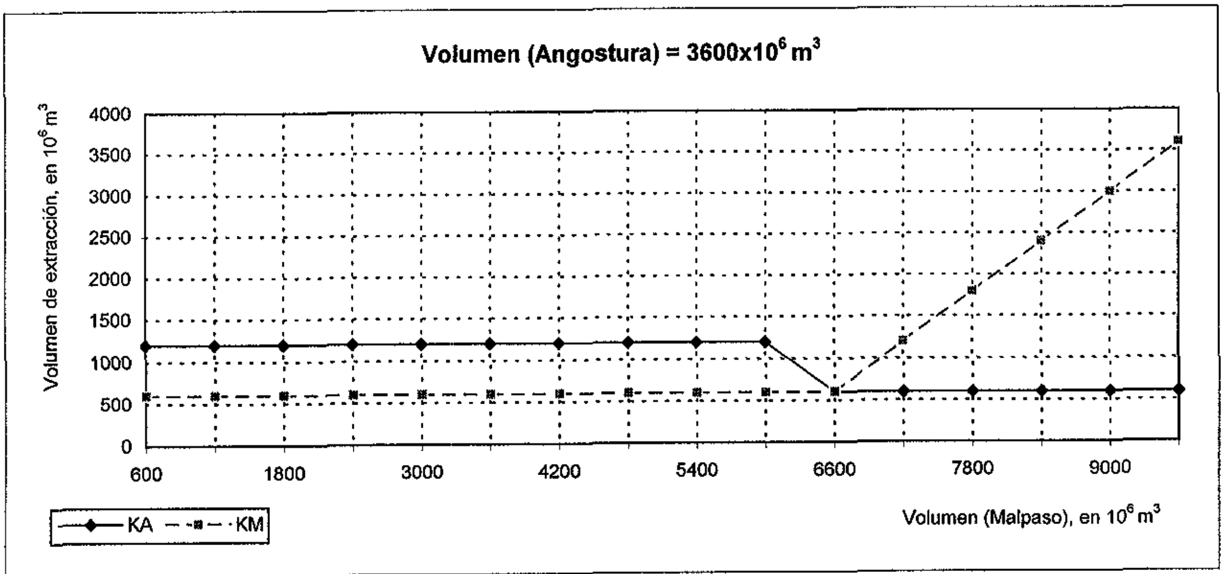


fig. 5.5 Política de operación para la etapa 3, (septiembre).





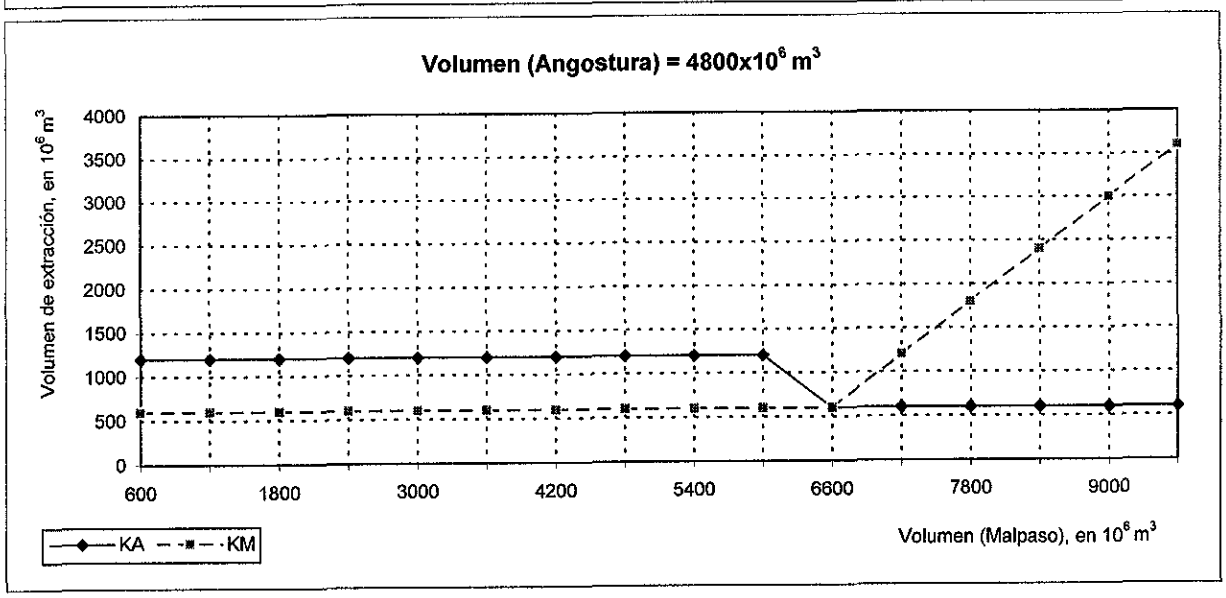


Tabla 5.4 **Política de operación para la etapa 1, (noviembre y diciembre).**

		Volumen en Malpaso															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Volumen en Angostura	1	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0102	0103	0104	0105	0107
	2	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0102	0103	0104	0105	0107
	3	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0101	0102	0103	0104	0105	0207
	4	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0101	0102	0103	0104	0105	0207
	5	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0101	0102	0103	0104	0107	0107
	6	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0101	0102	0103	0104	0107	0107
	7	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0202	0203	0204	0205	0207	0207
	8	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0202	0203	0204	0205	0207	0207
	9	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0202	0203	0204	0205	0206	0207
	10	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0302	0303	0304	0305	0306	0307	0309
	11	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0302	0303	0304	0305	0306	0307	0309
	12	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0302	0303	0304	0305	0306	0307	0309
	13	0401	0401	0401	0401	0401	0401	0401	0401	0402	0403	0404	0405	0406	0407	0409	0409
	14	0701	0701	0701	0401	0401	0401	0401	0401	0402	0403	0404	0405	0406	0407	0409	0409
	15	0801	0801	0801	0401	0401	0401	0401	0401	0402	0403	0404	0405	0406	0407	0409	0409
	16	0801	0801	0801	0801	0501	0401	0401	0401	0402	0403	0404	0405	0406	0408	0509	0812
	17	0801	0801	0801	0501	0501	0501	0501	0502	0503	0504	0505	0506	0507	0508	0509	0812
	18	0901	0901	0601	0601	0601	0601	0602	0603	0604	0605	0606	0607	0608	0609	0610	0612
	19	1001	1001	0601	0601	0601	0601	0602	0603	0604	0605	0606	0607	0608	0609	0610	1012
	20	1001	0701	0701	0701	0701	0702	0703	0704	0705	0706	0707	0708	0709	0710	0711	1012
	21	1001	0801	0801	0801	0802	0803	0804	0805	0806	0807	0808	1012	1012	1012	1012	1012
	22	1001	0801	0801	0802	0803	1007	1008	1009	1010	1011	1012	1012	1012	1012	1012	1012

Tabla 5.5 **Política de operación para la etapa 3, (septiembre).**

Volumen en Angostura	Volumen en Malpaso 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0102	0103	0104	0105	0106
2	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0101	0102	0103	0104	0105	0106
3	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0101	0102	0103	0104	0105	0106
4	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0101	0102	0103	0104	0105	0106
5	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0101	0102	0103	0104	0105	0106
6	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0101	0102	0103	0104	0105	0106
7	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0101	0102	0103	0104	0105	0106
8	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0201	0101	0102	0103	0104	0105	0106
9	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0201	0101	0102	0103	0104	0105	0106
10	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0201	0101	0102	0103	0104	0105	0106
11	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0201	0101	0102	0103	0104	0105	0106
12	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0301	0201	0101	0102	0103	0104	0105	0106
13	0401	0401	0401	0401	0401	0401	0401	0401	0301	0201	0202	0203	0204	0205	0206	0106
14	0401	0401	0401	0401	0401	0401	0401	0401	0301	0302	0303	0304	0305	0306	0106	0106
15	0401	0401	0401	0401	0401	0401	0401	0401	0402	0402	0102	0102	0103	0104	0105	0106
16	0401	0501	0501	0501	0401	0401	0401	0401	0301	0201	0101	0102	0103	0104	0105	0106
17	0501	0501	0501	0501	0501	0501	0501	0401	0301	0201	0101	0102	0103	0104	0105	0106
18	0501	0501	0501	0501	0501	0501	0501	0401	0301	0201	0202	0203	0204	0205	0206	0106
19	0501	0501	0501	0501	0501	0501	0501	0401	0301	0302	0303	0304	0305	0306	0206	0206
20	0501	0501	0501	0501	0501	0501	0501	0401	0402	0403	0404	0405	0406	0306	0306	0306
21	0501	0501	0501	0501	0501	0501	0501	0502	0503	0504	0505	0506	0406	0406	0406	0306
22	0501	0501	0501	0501	0501	0501	0502	0503	0504	0505	0506	0506	0506	0506	0406	0406

Por otro parte, para visualizar las consecuencias derivadas de las políticas de operación obtenidas en el proceso de optimación, las cuales dictan las posibles extracciones a efectuar, fue necesario simular el funcionamiento de las dos presas en serie, con 31 años de ingresos históricos de escurrimientos, de 1959 a 1989.

Se utilizo un programa de simulación elaborado en lenguaje Fortran, el cual leía un archivo que contenía los volúmenes de ingreso registrados. Para obtener el volumen de extracción que dictaba la política de operación se uso la ecuación de continuidad, el volumen almacenado en cada presa y se interpoló bilinealmente si era necesario

El análisis de los resultados de la simulación condujo a los siguientes comentarios:

Con el valor de discretización de 600 $x10^6\ m^3$*, se obtuvo:*

La presa Angostura no presentó derrames en los 31 años simulados.

El almacenamiento mínimo en el vaso fue de 5205.99 $x10^6\ m^3$, en junio de 1974.

Malpaso presentó derrames en varios años: en enero y noviembre de 1959 con 54.42 $x10^6\ m^3$ y 255.27 $x10^6\ m^3$, respectivamente; en octubre de 1965 con 727.81 $x10^6\ m^3$; en septiembre y octubre de 1970 con 586.79 $x10^6\ m^3$ y 211.41 $x10^6\ m^3$, respectivamente. Y en octubre de 1987 se presentó un derrame de 295.83 $x10^6\ m^3$. Estos cuatro años totalizaron 2131.51 $x10^6\ m^3$.

El almacenamiento mínimo registrado en la presa de Malpaso fue de 5873.64 $x10^6\ m^3$ y se presentó en septiembre de 1968.

No se presentaron déficits en el sistema durante los 372 meses simulados.

Con el valor de discretización de 450 $x10^6$ m^3, se obtuvo:

La presa Angostura no presentó derrames en los 31 años simulados.

El almacenamiento mínimo en el vaso fue de 5158.19 $x10^6$ m^3 y se presentó en julio de 1974.

Malpaso tuvo varios años con derrames: en enero y octubre de 1959 con 24.42 $x10^6$ m^3 y 9.56 $x10^6$ m^3, respectivamente; en octubre de 1965 con 622.56 $x10^6$ m^3; en septiembre y octubre de 1970 con 609.27 $x10^6$ m^3 y 885.41 $x10^6$ m^3, respectivamente. Y en octubre de 1987 se presentó un derrame de 698.64 $x10^6$ m^3. Estos cuatro años totalizaron 2849.85 $x10^6$ m^3.

El almacenamiento mínimo registrado en la presa Malpaso fue de 6120.81 $x10^6$ m^3 y se presentó en septiembre de 1984.

No se tuvieron déficits en el sistema durante los 372 meses simulados.

La ***Tabla 5.6*** presenta un resumen de los derrames ocurridos en el sistema; la primera columna indica la fecha en la que se presentó el derrame; para la segunda y tercera columnas, el volumen de discretización es $\Delta V = 600 x 10^6$ m^3, la segunda columna indica la magnitud del derrame en unidades de volumen derramado y la tercera columna muestra la magnitud del derrame en unidades de gasto medio derramado; mientras tanto, la cuarta y quinta columnas corresponden a un volumen de discretización de $\Delta V = 450 x 10^6$ m^3, la cuarta columna indica lo mismo que la segunda columna y la quinta columna indica lo mismo que la tercera columna.

Tabla 5.6

Derrames ocurridos en la presa Malpaso				
	$\Delta V = 600x10^6\ m^3$		$\Delta V = 450x10^6\ m^3$	
Fecha	*Volumen Derramado* $(10^6 m^3)$	*Gasto Derramado* (m^3/s)	*Volumen Derramado* $(10^6 m^3)$	*Gasto Derramado* (m^3/s)
Ene-59	54.42	20.07	24.42	9.29
Nov-59	255.27	97.13	9.56	3.63
Oct-65	727.81	276.94	622.56	236.89
Sep-70	586.79	233.28	609.27	231.83
Oct-70	211.41	80.44	885.41	336.91
Oct-87	295.83	112.56	698.64	265.84
Total	2,131.51	136.74	2,849.85	180.72

La ***figura 5.6*** muestra dos gráficas, cada una con su correspondiente incremento de volumen ΔV; las dos gráficas tienen un mismo volumen almacenado en la presa Angostura y muestran las variaciones del volumen almacenado en la presa Malpaso.

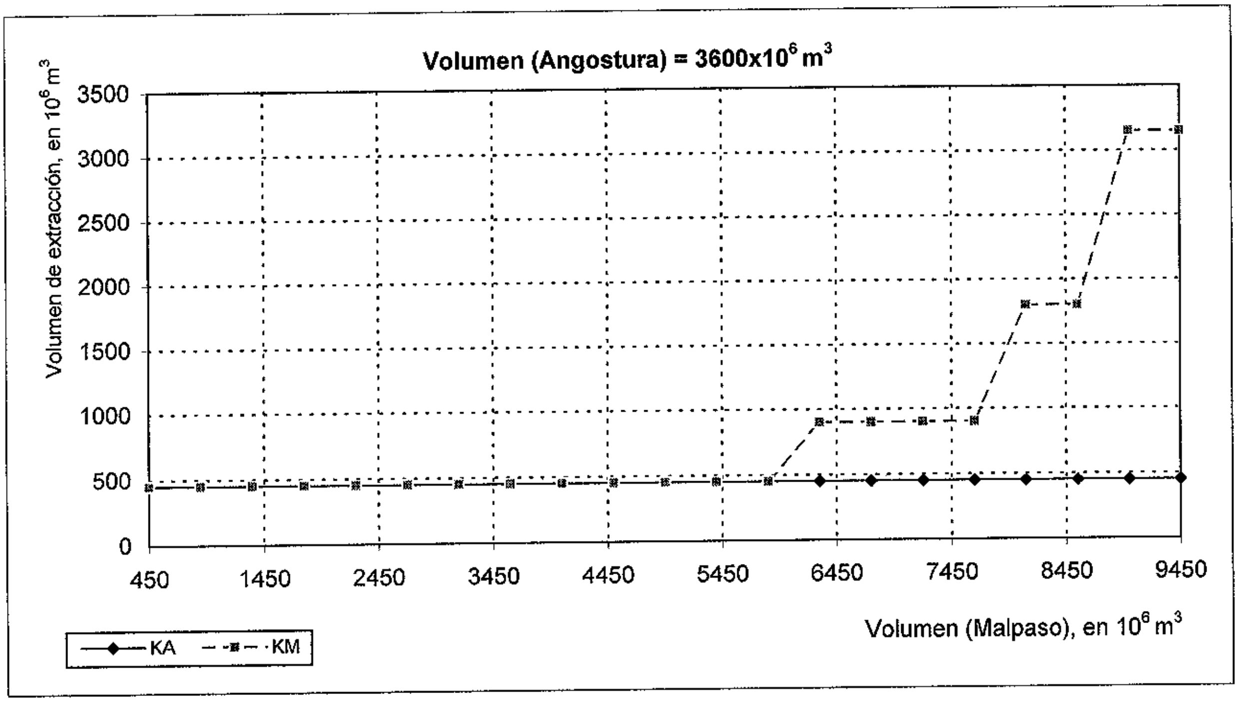
Se notan algunas variaciones entre estas dos gráficas. Se observa que para $\Delta V = 600\,x10^6\ m^3$, los resultados que se obtienen son ligeramente mejores, que para $\Delta V = 450\,x10^6\ m^3$.

Con respecto a la gráfica con $\Delta V = 450\,x10^6\,m^3$, al inicio la presa Angostura tiene un volumen almacenado de $3600\,x10^6\,m^3$. Y la extracción en las presas Angostura y Malpaso es de $450\,x10^6\,m^3$, esta extracción se mantiene constante conforme aumenta el volumen almacenado en la presa Malpaso, esto sucede hasta el valor de $5850\,x10^6\,m^3$, donde las anteriores condiciones cambian, y la extracción de $450\,x10^6\,m^3$ en la presa Angostura se mantiene constante, mientras que el almacenamiento en Malpaso sigue creciendo y su extracción aumenta poco a poco.

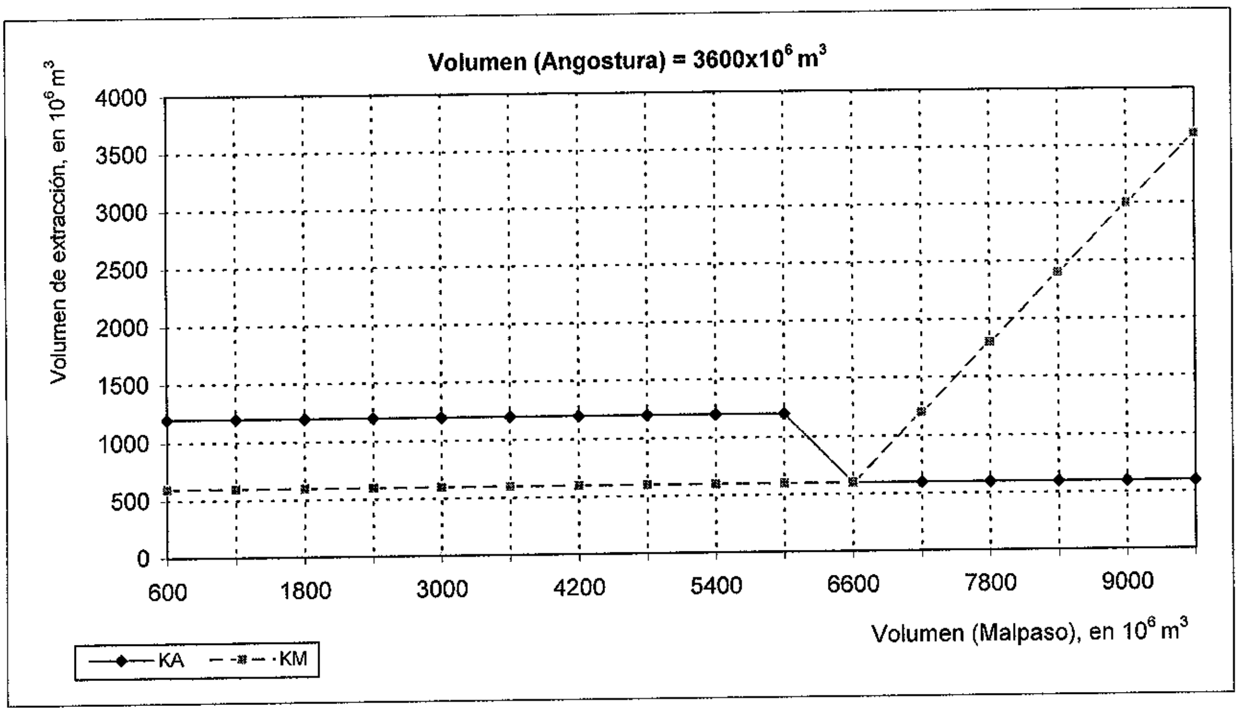
Con respecto a la gráfica con $\Delta V = 600\,x10^6\,m^3$, al comienzo la presa Angostura tiene un volumen almacenado de $3600\,x10^6\,m^3$ y su extracción es de $1200\,x10^6\,m^3$, este volumen se mantiene constante, hasta el volumen de $6000\,x10^6\,m^3$, después de este valor la extracción de la presa Angostura se decrementa en un valor $600\,x10^6\,m^3$, esta extracción se mantiene constante mientras que el volumen almacenado en la presa Malpaso se incrementa. Mientras tanto, al inicio, la presa Malpaso extrae un volumen constante de $600\,x10^6\,m^3$, después el volumen almacenado comienza a aumentar, esto sucede hasta el volumen de $6600\,x10^6\,m^3$, en este valor las condiciones anteriores cambian y la extracción de la presa Malpaso se incrementa presentando una pendiente constante.

figura 5.6 **Política de operación para la etapa 3, (septiembre).**

$\Delta V = 450x10^6 m^3$



$\Delta V = 600x10^6 m^3$



6. Conclusiones

En el desarrollo de este trabajo se ha hecho especial énfasis en el planteamiento de la función objetivo, en la reducción de los requerimientos de memoria y en el tiempo de cómputo del método de Programación Dinámica. Esto se debe a que la aplicación de los métodos de optimación para establecer las políticas de operación de presas que pueden encontrarse en la literatura no es inmediata, sino que es necesario efectuar una serie de estudios y cálculos que permitan adecuar los métodos generales a las condiciones particulares, aprovechando sus ventajas y reduciendo sus limitaciones.

El modelo de optimación desarrollado permite considerar una función objetivo tan complicada como sea necesario para representar la realidad y además, gracias al algoritmo desarrollado que hace posible efectuar un análisis fino en cuanto a número de estados y etapas, sin que por ello sea necesario utilizar una cantidad excesiva de memoria.

Recomendación con respecto a la aplicación de la metodología: la selección del módulo de discretización es muy importante, en general se debe subdividir la capacidad útil de la presa en cuando menos 20 estados de almacenamiento, tratando de que la función de densidad de probabilidad discreta cuente con al menos dos o tres barras de entradas.

Para el caso de un sistema de presas en cascada, se hace necesario considerar en la función de densidad de probabilidad de escurrimientos de la presa ubicada aguas abajo, las condiciones que imponen las posibles descargas por la obra de toma y por el vertedor de la presa ubicada aguas arriba.

La política óptima determinada para operar el conjunto de presas del sistema hidroeléctrico del río Grijalva presenta un comportamiento lógico. De manera general, durante las épocas de escurrimiento abundante si la presa uno (Angostura) se encuentra en estados altos y la presa dos (Malpaso) tiene poco almacenamiento, el volumen de extracción más alto se debe efectuar en la presa que mayor almacenamiento tiene y en la presa dos efectuar la extracción mínima requerida, manteniendo este comportamiento hasta que la presa dos incremente paulatinamente su almacenamiento, permitiendo que a partir de ese momento se pueda disminuir la extracción en la presa uno y aumentar el volumen de extracción en la presa dos. Es decir, la política pide que en los meses en los que se presentan escurrimientos abundantes las extracciones que se lleven a cabo en las presas cumplan con extraer la mayor cantidad de agua permisible y así evitar en lo posible los derrames.

Si en época de estiaje la presa Angostura se encuentra prácticamente llena (estados 19, 20, 21 y 22) y Malpaso tiene poco almacenamiento (estados 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7), la política pide efectuar una extracción máxima de $1100 x10^6 m^3$ en Angostura y para estados bajos de Malpaso pide se extraigan $90 x10^6 m^3$ y se incremente este valor paulatinamente hasta llegar a un máximo de $1400 x10^6 m^3$.

Inicialmente, se usaron valores iguales para penalizar los casos de déficit y derrame en las dos presas pero al simular el comportamiento del sistema con la política así calculada se observó que Malpaso derramaba en casi todos los meses de los 31 años y como los volúmenes que se descarguen por los vertedores de Angostura y Malpaso tendrán que derramarse, probablemente sin aprovechamiento y provocarían inundaciones en la planicie de Tabasco, por el vertedor de Peñitas, se incrementó el valor del coeficiente de penalización en los casos en que Malpaso derrame, buscando que la política de operación de las presas con mayor capacidad de regulación cumplan con disminuir su probabilidad de ocurrencia. Con los cambios efectuados, Malpaso mejoró notablemente su funcionamiento, aunque en ninguna de las simulaciones que se realizaron en este trabajo se logró que la presa Malpaso no presentara derrames.

Una opción por analizar para tratar de disminuir los derrames presentados en la presa Malpaso sería estudiar las condiciones en las cuales la presa derrama y ver si el volumen de extracción que la política dicta puede sufrir modificaciones, de tal forma que si la suma del volumen demandado por la política y el volumen derramado no excede el volumen máximo turbinable, se extraiga este nuevo valor para evitar el derrame. Es decir, la política de operación calculada es la óptima pero en la simulación del funcionamiento del sistema se pueden establecer condicionantes para minimizar al máximo los casos de derrame o déficit que podrían presentarse en el sistema.

Esta búsqueda de optimizar al máximo el funcionamiento del sistema, tiene como objetivo establecer las mejores condiciones para analizar si es necesario hacer modificaciones en el sistema actual de presas, específicamente estudiar con más detalle la alternativa de sobreelevar la presa Malpaso y así tener una norma con la cual decidir si es necesario efectuar cambios y comparar los beneficios que se tendrían.

Por otro lado, después de haber obtenido las políticas de operación óptima del sistema de presas, se hubiera podido proceder a generar registros hidrológicos, llamados también sintéticos, los cuales tienen las mismas características estadísticas que los históricos y por lo tanto la misma probabilidad de ocurrir, con la ventaja que de estos últimos se pueden generar tantos como sean necesarios para lograr una simulación adecuada. Generados los registros sintéticos, se les aplicarían las políticas de operación obtenidas y se simularía el funcionamiento del sistema, el realizar esto sería de gran ayuda para predecir lo que posiblemente sucedería dentro de algunos años.

7. Bibliografía

1) Edley Wainright Martín, Jr. "Programación Lineal". Editorial "El Ateneo". México, 1978.

2) Domínguez Mora Ramón. "Metodología de selección de una Política de Operación conjunta de una presa y su vertedor". Facultad de Ingeniería-UNAM, 1989. Tesis Doctoral.

3) Joeres, E. F. "The use of chance-contrains in reservoir design and management"

4) Larios Malanche Raul. "Modelo de Programación Dinámica Estocástica para Optimizar la Operación de presas". Facultad de Ingeniería-UNAM, 1985. Tesis de licenciatura.

5) Hillier F., Lieberman G. J. "Introducción a la investigación de Operaciones". Editorial McGraw-Hill, 1982. México, D. F.

6) Tadeo Rebolledo S. Roberto. "Operación Óptima de un Sistema Hidráulico formado por dos presas en paralelo". Facultad de Ingeniería-UNAM, 1990. Tesis de maestría.

7) Domínguez M. R., "Políticas de Operación Mensual del Sistema de presas del río Grijalva". Informe del Instituto de Ingeniería, UNAM. Enero de 1988.

8) Domínguez M. R. Y Co. "Operación Integral del Sistema Hidroeléctrico del río Grijalva". Informe del Instituto de Ingeniería, UNAM. Julio de 1993.

9) Experiencias en proyectos hidroeléctricos. Comisión Federal de Electricidad, México. Agosto de 1969.

10) Torres Herrera F. "Obras hidráulicas". Editorial Limusa, México, D. F., 1980.

11) Flores Ibarra Carlos. "Desarrollo de un Modelo para definir Políticas, de Operación Óptima de una presa". Facultad de Ingeniería-UNAM, 1985. Tesis de maestría.

12) Bazaraa Mokhtar S. y Jarvis John J. "Programación Lineal y Flujo de redes". Editorial Limusa. México, 1984.

13) Domínguez M. R., Mendoza R. R., "Determinación de Políticas de Operación Mensual para el funcionamiento de la Presa Aguamilpa". Informe del Instituto de Ingeniería, UNAM. Julio de 1992.

14) Mellanes C. Elíseo. "Historia de Chiapas". Libro de texto Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, 1982.

15) Díaz V. Javier Arturo. "Procesos Markovianos discretos aplicados a Sistemas de Recursos Hidráulicos". Facultad de Ingeniería-UNAM, 1980. Tesis de maestría.

16) Dorfman Robert, Samuelson Paul A., Solow. Robert M. "Programmation linéaire et gestion économique". Editorial Dunod. Paris, 1962.

17) Budnick Frank S. "Matemáticas aplicadas".Editorial McGraw-Hill. México, 1981.

18) Ackoff-Sasieni. "Fundamentos de investigación de operaciones" Editorial Limusa. México, 1982.