7
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIAS DE CLASIFICACION DE LOS R-MODULOS INYECTIVOS NO SINGULARES EN UN ANILLO R

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

GARCIA ZAGAL JOSE CRUZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE RIOS MONTES

274163

MEXICO D.F. 1999

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

TEORIAS DE CLASIFICACION DE LOS R-MODULOS INYECTIVOS NO SINGULARES EN UN ANILLO R

realizado por GARCIA ZAGAL JOSE CRUZ

con número de cuenta 9455890-8, pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	José Ríos M. Dr. JOSE RIOS MONTES
Propietario	Dr. EMILIO LLUIS RIERA
Propietario	Dr. FRANCISCO RAGGI CARDENAS
Suplente	Hugo A. Rincón M. Dr. HUGO ALBERTO RINCON MEJIA
Suplente	M.en C. ALEJANDRO ALVARADO GARCIA

Consejo Departamental de

MAT. JULIO CESAR GUEVARA BRAVO

Agradecimientos.

Con este trabajo quiero agradecer a todas las personas que de alguna forma me han apoyado.

A mi familia.

*Quiero agradecer a mis padres **Cruz y Virginia**, el apoyo brindado y el haber estado siempre cerca de mi. Decirles que los quiero mucho y espero haber correspondido su confianza.*
*A mis hermanos **Manuel, Norma, Hector, Raúl y Carlos**, por su confianza y cariño.*
*A mis tios **Benjamin y Senaida.***
*A mis abuelitas **Luz y Catalina** por haberme querido siempre.*
*Muy en especial quiero agradecerle a mi cuñado **Antonio** y a mi hermana **Norma** el tener a tres hermosisimás nenas **Arely, Brenda y Tania.** Quiero dedicarles a ellas en especial este trabajo. Para ellas con mucho cariño de su tio **Cruz.***

A mis profesores.

*A **José Ríos**, por haber tenido la paciencia y tolerancia, ya que sin sus obsérvaciones no me huibiera sido posible terminar este trabajo.*

*A los Drs. **Emilio Lluis, Francisco Raggi, Hugo Rincón y Alejandro Alvarado.** Por sus comentarios y aportaciones, así como el haber revisado y corregido este trabajo.*

A mis amigos y compañeros.

A todos mis compañeros quiero agradecerles su amistad brindada durante los años que llevo de conocerlos.
*A **Moises, Erwin, Ulises, Mayam, Gerardo, Luis, Alejandro, Daniel**, etc....el haber compartido conmigo y motivarme para concluir mis estudios.*
*A mis compañeros de bachillerato **José, Ulises, Miguel, Gustavo, Edgar, Mary**, por todos los reventones vividos con ellos y los grandes conciertos a los que fuimo.*
*A mis amigos **Javier, Gabriel, Domingo, Carlos, Fernando, Laura**, por ser mis amigos de toda la vida.*
*Muy en especial a **Javier** por haber organizado las "tertulias" en el pulpo los lunes, martes,..., y los reventones de fines de semana con **Francisco**, Horacio's, **Mario, Mayra, Carlos, Alicia, Paola, Mariana, Martha, Erik, Misha, Vicente, Lorenzo, Lorena, Ramadan, Adriana, Evgenia**, etc.....*

Quiero agradecer a la Universidad Nacional Autonoma de México por toda la formación que me dio y al Instituto de Matemáticas por la beca de lugar y todo el apoyo recibido para realizar este trabajo.

Índice General

INTRODUCCIÓN

En este trabajo, se dará una clasificación de los R-módulos inyectivos no singulares sobre un anillo R, la cual (en el Capítulo 6) será comparada con una clasificación que dan Goodearl y Boyle ([8]). Está clasificación nos permite descomponer a los R-módulos inyectivos y no singulares, como producto directo de módulos Discretos, Continuos, Molecularmente Continuos y Sin Fondo. (por lo cual se considerará que el lector está familiarizado, con la Teoría General de Módulos y algunos de los resultados, de esta teoría sólo se enunciaran) El trabajo está estructurado de la siguiente manera, en el Capítulo 1, se dan definiciones de los módulos no singulares y los módulos esencialmente cerrados y se establece parte de la notación a utilizar posteriormente.

En el Capítulo 2, se dan una serie de resultados técnicos, los cuales son de gran utilidad, en el desarrollo posterior del presente trabajo, en el Capítulo 3, se da una relación de equivalencia entre los módulos no singulares: $A \propto B$ si y solamente si, A está contenida en la cápsula inyectiva de una suma directa de copias de B y B está contenido en la cápsula inyectiva de una suma directa de copias de A. Lo cual permite descomponer la clase de los módulos no singulares en clases de equivalencia (a dichas clases las llamaremos clases del tipo pequeño). El conjunto de estas clases de equivalencia para los R-módulos no singulares se denota por $\Xi(R)$. Después extendemos dicha relación a un orden parcial entre las clases de equivalencia y resulta que $\Xi(R)$, junto con el orden parcial, es una Retícula Booleana Completa. En el Capítulo se da la descomposición de un R-módulo inyectivo y no singular M, como el producto directo de R-módulos $M = C \oplus D = (A \oplus B) \oplus D$, con C continuo, D discreto, A molecularmente continuo y

B sin fondo.

En el Capítulo 4 se dan condiciones a ciertas Categorías de anillos y de retículas Booleanas, para las que resulta que Ξ es un funtor contravariante. En el Capítulo 5 se muestra, que la retícula asociada a un anillo R, ($\Xi(R)$, la que se da en el Capítulo 3) es isomorfa a una retícula de ideales invariantes y esencialmente cerrados del anillo R. Finalmente, en el Capítulo 6, se da la comparación entre la descomposición dada en el Capítulo 3, de un R-módulo inyectivo no singular, y la descomposición de un R-módulo inyectivo no singular dada por Goodearl en ([7]), y se dan ejemplos que permiten ver que dichas descomposiciones no coinciden.

El presente trabajo está basado en el artículo **Torsion Free Modules** de **John Dauns**, publicado en Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol. CLIV (1989).

Notación.

La Categoría de los R-módulos izquierdos sera denotada por $\mathbf{R-Mód}$, y salvo que se especifique lo contrario, todos los R-módulos seran R-módulos izquierdos unitarios.

Si N es un submódulo de un módulo M, simplemente escribiremos $N \leq M$. Al conjunto de los submódulos de un módulo M lo denotaremos $\mathrm{Sub}_R(M)$. Diremos que un submódulo N de M es esencial en M, si cada vez que estemos en la situación de que $H \cap N = \{0\}$ para $H \leq M$, entonces $H = \{0\}$, y escribiremos $N \leq_e M$ cuando N sea un submódulo esencial de M.

Dado $A, B \in \mathbf{R-Mód}$, se define la traza de B en A, como el submódulo de A generado por todas las imágenes de los morfismos de B en A, y la denotaremos por $\mathbf{tr}_B(A) = \mathrm{tr}_B A = \sum \{f(B) \mid f \in \mathbf{Hom}_R(B, A)\}$. Definimos el rechazo de A en B como $\mathbf{rej}_A(B) = \mathrm{rej}_A B = \cap \{Ker(h) \mid h \in \mathbf{Hom}_R(B, A)\}$, donde $Ker(h)$ denota el núcleo del morfismo h.

La cápsula inyectiva de un R-módulo izquierdo M la denotaremos por $\mathbf{E}(M)$ o $\mathbf{E}M$. Los morfismos de R-módulos o de Anillos serán escritos $f : M \longrightarrow N$ si es que f es un morfismo de M en N (para $M, N \in \mathbf{R-Mód}$, ó M, N anillos). La relación de isomorfismo entre anillos, módulos ó retículas sera denotada por el simbolo " $\cong$ ".

Capítulo 1

MÓDULOS ESENCIALMENTE CERRADOS Y MÓDULOS NO SINGULARES.

En este Capítulo se darán algunas de las propiedades de los módulos no singulares y los módulos esencialmente cerrados. También se establece parte de la notación que se utilizará en los capítulos posteriores.

Primeramente daremos las definiciones de lo que entenderemos por el anulador de un elemento de un módulo. Si $M \in \mathbf{R-Mód}$, y $K \in \mathbf{Sub}_R M$, definimos para un elemento $m \in M$, el *Anulador* de m, como $\mathbf{An}(m) = \{r \in R \mid rm = 0\}$. $\mathbf{An}(m)$ es un ideal izquierdo del anillo R. Denotamos $\mathbf{An}(m + K) = (K : m) = \{r \in R \mid rm \in K\}$.

Para un subconjunto $T \subseteq M$ se define el anulador de T por:

$\mathbf{An}(T) = \{r \in R \mid rt = 0 \ \forall t \in T\} = \bigcap\limits_{t \in T} \mathbf{An}(t)$.

El submódulo singular de un R-módulo izquierdo M esta definido como el conjunto de elementos del módulo que tienen anulador esencial en el anillo, y se denota $\mathbf{Z}(M) = \mathbf{Z}M = \{m \in M \mid \mathbf{An}(m) \leq_e R\}$.

Una primera observación es que $\mathbf{Z}(M)$ efectivamente es un submódulo de M. Obsérvese que $\mathbf{Z}(R) \cdot M \subseteq M$.

El segundo submódulo singular de M está definido de la siguiente manera $\mathbf{Z}_2(M)$ $= \mathbf{Z}_2M \leq M$ es el único submódulo de M para el cual se cumple $\mathbf{Z}[M/\mathbf{Z}(M)] = \mathbf{Z}_2(M)/\mathbf{Z}(M)$.

Diremos que $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, es de *torsión* si $\mathbf{Z}_2(M) = M$ y que M es *no singular* si $\mathbf{Z}(M) = \{0\}$.

Para $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, y $N \in \mathbf{Sub}_R M$, diremos que K es un *complemento relativo* de N en M, si K es máximo con respecto a la propiedad $N \cap K = \{0\}$. Tales submódulos de M existen en virtud del *Lema* de *Zorn*.

Como primera observación, notemos que si $M = K \oplus N$, entonces K es un complemento relativo para N en M y N es un complemento relativo para K en M.

Por ejemplo, si F es un *campo* y $M = F \oplus F$. con $N = F \oplus \{0\}$ entonces para cualquier, $0 \neq x \in F$ el subespacio $F(1,x)$ es un complemento relativo para N en M.

Si F es un campo infinito, esto nos da un ejemplo para el que N tiene una infinidad de complementos relativos en M.

PROPOSICIÓN 1.1

Sea $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, y $N \in \mathbf{Sub}_R M$ con K un complemento relativo para N en M, entonces se tiene que $K \oplus N \leq_e M$.

Demostración.

Dado que $N \cap K = \{0\}$ se tiene que $K + N = K \oplus N$. Además $K \oplus N$ es un submódulo de M. Supongamos ahora que $L \leq M$ tal que $(K \oplus N) \cap L = \{0\}$, (por demostrar que $L = \{0\}$). Como $(K \oplus N) \cap L = \{0\}$ entonces la suma de L con $K \oplus N$ es directa. Es decir $L + (K \oplus N) = L \oplus (K \oplus N) = (L \oplus K) \oplus N$ de donde se tiene que $N \cap (L \oplus K) = \{0\}$. Por la maximalidad de K, tenemos $L \oplus K = K$, así $L = \{0\}$, por lo tanto $K \oplus N \leq_e M$ ■.

El resultado anterior se puede resumir de la siguiente manera: Todo submódulo de un R-módulo izquierdo M es sumando directo de un submódulo esencial de M.

Si $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, diremos que $N \leq M$ es *esencialmente cerrado* en M, si N no tiene extensiones esenciales propias dentro de M esto es, si la única solución a la relación $N \leq_e L \leq M$ es $N = L$. Por ejemplo, $\{0\}, M$ son esencialmente cerrados para cualquier $M \in \mathbf{R-Mód}$. También todo sumando directo de un R-módulo es un submódulo esencialmente cerrado del módulo.

PROPOSICIÓN 1.2

Si $M \in \mathbf{R-Mód}$, y $N \leq M$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) N es esencialmente cerrado (abreviatura *e.c.*) en M.

b) N es un complemento relativo para alguna $L \leq M$.

c) Si L es un complemento relativo para N en M, entonces N es un complemento relativo para L en M.

d) Si $N \leq L \leq_e M$, entonces $L/N \leq_e M/N$.

Demostración:

a)$\Rightarrow$d) Sea K/N un submódulo de M/N tal que $(K/N) \cap (L/N) = \{0\}$, así que $K \cap L = N$. Puesto que $L \leq_e M$ se tiene que $L \cap K \leq_e K \cap M \leq M$, de donde $N \leq_e K$ y como N es (e.c.), tenemos que $N = K$. Por lo tanto $K/N = \{0\}$.

d)$\Rightarrow$c) Dado que $N \cap L = \{0\}$, por el lema de Zorn, N puede extenderse a un complemento relativo N' para L en M, probaremos que $N = N'$. Por la ley modular $(L \oplus N) \cap N' = N + (L \cap N') = N$, de donde tenemos que $[(L \oplus N)/N] \cap [N'/N] = \{0\}$. Por la Proposición 1.1, tenemos $L \oplus N \leq_e M$ y por la hipótesis $(L \oplus N)/N \leq_e M/N$. Por lo tanto $N'/N = \{0\}$. Por lo tanto $N = N'$.

c)$\Rightarrow$b) Es inmediato.

b)$\Rightarrow$a) Supongamos que $N \leq_e N' \leq M$, por demostrar que $N = N'$. Dado que $(N' \cap L) \cap N = L \cap N = \{0\}$ (por hipótesis), se tiene que $N' \cap L = \{0\}$, y por la maximalidad de N concluimos que $N = N'$. Por lo tanto N es (e.c.) $\blacksquare$.

PROPOSICIÓN 1.3

Sean $M \in \mathbf{R-Mód}$, y $N, L \in \mathbf{Sub}_R M$ con $N \leq L$. Si N es esencialmente cerrado en L y L es esencialmente cerrado en M, entonces N es esencialmente cerrado en M.

Demostración:

Supongamos que N es esencial en $W \leq M$. Por lo cual se tiene que $L \leq_e L+W \leq M$, y como L es (e.c.) en M, se tiene que $L = L + W$. Por lo cual $W \leq L$. Por lo tanto N es esencial en $W \leq L$. Por lo tanto $N = W$ ■.

Ejemplo

La familia de los submódulos esencialmente cerrados de un módulo M no es cerrada bajo intersecciones.

Sea $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, $N = R(1,0)$ y $L = (1,\bar{1})$. Como N es sumando directo de M, entonces N es (e.c.) en M. Observemos que $C = L \oplus R(1,\bar{1})$ por lo que L es (e.c.) en M. Ahora $N \cap L = R(2,0)$ y $N \cap L \leq_e N$, $N \cap L \leq_e L$, y sin embargo $N \cap L$ no es (e.c.) ni en N, ni en L, ni en M.

PROPOSICIÓN 1.4

Sean $M, K \in$ **R – Mód**, con $\mathbf{Z}(M) \leq K \leq M$. Para $x \in M$, se tiene que:

$$K \leq_e K + Rx \Longleftrightarrow (K : x) \leq_e R.$$

Demostración:

$\Rightarrow]$ Sea I un ideal izquierdo de R, tal que $(K : x) \cap I = \{0\}$, afirmamos que $I = \{0\}$. Si $Ix \neq 0$, entonces por hipótesis $Ix \cap K \neq \{0\}$, de donde existe $\alpha \in I$ tal que $0 \neq \alpha x$ con $\alpha x \in K$, lo cual no puede ser cierto ya que $0 \neq \alpha x \in K \Rightarrow \alpha \in (K : x)$ y $0 \neq \alpha \in I$, de donde $0 \neq \alpha \in (K : x) \cap I = \{0\}$. Por lo tanto $Ix = \{0\}$, así $I \subseteq (K : x)$, por lo que $I = (K : x) \cap I = \{0\}$.

$\Leftarrow]$ Sea $k + \alpha x \in (K + Rx) - \{0\}$, y sea $I = (K : x)$, entonces $I \leq_e R$. Si para alguna $a \in I$, $a(k + \alpha x) = ak + a\alpha x \neq 0$, entonces existe un múltiplo escalar de $k + \alpha x$ distinto de cero en K. Si $a(k + \alpha x) = 0$ para todo $a \in I$, entonces $I \subseteq \mathbf{An}(k + \alpha x)$, por lo tanto $\mathbf{An}(k + \alpha x) \leq_e R$, por lo que $k + \alpha x \in Z(M) \leq K$ ■.

LEMA 1.1

Si M es un R-módulo izquierdo, tal que $\mathbf{Z}(M) \leq K \leq M$, con $\mathbf{Z}(M/K) = \overline{K}/K$, entonces:

$$M/\overline{K} = \{y \in M \mid \exists\, t \in R; Rty \neq \{0\}, Rty \cap K = \{0\}\}\,.$$

Demostración:

Primero veamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & M/\overline{K} \cong \left(\frac{M/K}{\overline{K}/K}\right) & \\
K \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[u] & M/K \\
K \arrow[r] & \overline{K} \arrow[r] \arrow[u] & \overline{K}/K \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Por definición $\overline{K} = \{m + K \in M/K \mid (K : m) \leq_e R\} =$
$\{m + K \in M/K \mid (K : m + K) \leq_e R\} =$
$\{m + K \in M/K \mid \{r \in R \mid rm \in K\} \leq_e R\}\,.$

Ahora sea $Y = \{y \in M \mid \exists\, t \in R : Rty \neq \{0\}\,, Rty \cap K = \{0\}\}$, queremos probar que $Y = M/\overline{K}$.

$\supseteq]$ Supongamos que $Y \nsubseteq M/\overline{K}$, es decir que existe $y \in \left(Y \cap \overline{K}\right)$, con $y \neq 0$ (pues $Rty \neq \{0\}$) como $K \leq_e \overline{K}$, entonces $(K : y) \leq_e R$, por la Proposición 1.4 se tiene, $K \leq_e K + Ry$, pero también $(K : ty) \leq_e R, \forall\, t \in R$, entonces $K \leq_e K + Rty$. Como $y \in Y$ entonces, hay un $t_0 \in R$ tal que $Rt_0y \neq \{0\}$. Por lo anterior $K \leq_e K + Rt_0y \Rightarrow K \cap Rt_0y \neq \{0\}$, lo cual contradice la hipótesis y por tanto $Y \subseteq M/\overline{K}$.

$\subseteq]$ Sea $0 \neq y \in M/\overline{K}$, entonces K no es esencial en $K + Ry$ (por definición de $\overline{K}$), por lo tanto $K \neq K \oplus R(k + ay)$ para algún $0 \neq k + ay \in K + Ry$. Dado que $k + ay \notin K$ y $\mathbf{Z}(M) \leq K$, entonces $\mathrm{An}(k + ay) \lneq_e R$. Por la Proposición 1.1, $\mathbf{An}\,(k + ay) \oplus B \leq R$, para algún $\{0\} \neq B \leq R$. Como $K \cap R(k + ay) = \{0\}$, entonces $\mathbf{An}(k + aya) = \{r \in R \mid r(k + ay) = 0\} = \{r \in R \mid r(ay) \in K\} = (K : ay)$. Por lo tanto $(K : ay) \cap B = \{0\}$.

Afirmación: $Bay \cap K = \{0\}$, pues si $Bay \cap K \neq \{0\}$, entonces $\exists b \in B, 0 \neq b$ tal que $bay \in K$, entonces $0 \neq b \in (K : ay) \cap B = \{0\}$, lo que no es posible. Por lo tanto

$Bay \cap K = \{0\}$, en particular $\mathbf{An}(ay) \cap B = \{0\}$, así se tiene que $\{0\} \neq B \cong Bay$. Si $t = ba$ para $0 \neq b \in B \Rightarrow \{0\} \neq Rty$, $Rty \cap K = Rbay \cap K \cong Ray \cap K = \{0\}$, por lo tanto $y \in Y$, por lo que $M/\overline{K} \subseteq Y$ ■.

PROPOSICIÓN 1.5

Si $M \in \mathbf{R-Mód}$, con $\mathbf{Z}(M) \leq K \leq M$. y $\overline{K}/K = \mathbf{Z}(M/K)$, entonces se cumplen las siguientes condiciones:

1) $\overline{K} = \{x \in M \mid (K:x) \leq_e R\} = \{x \in M \mid K \leq_e K + Rx\}$.

2) $\overline{K}$ es el submódulo más pequeño que es esencialmente cerrado en M y que contiene a K. Consecuentemente $K \leq_e \overline{K}$.

3) $\mathbf{Z}(M/\overline{K}) = \{0\}$.

4) $\overline{K} = \cap \{C \in \mathrm{Sub}_R M \mid K \leq C,\ C \text{ esencialmente cerrado}\}$.

5) $K = \{0\} \Longleftrightarrow \overline{K} = \{0\}$.

6) Si $K \trianglelefteq R$ es decir que K es un ideal bilateral de R con $\mathbf{Z}(R) \leq K$, entonces $\overline{K} \trianglelefteq R$.

Demostración:

1) Por definición de $\overline{K} = \{m + K \in M/K \mid (K:m) \leq_e R\} =$
$\{m + K \in M/K \mid \{r \in R \mid rm \in K\} \leq_e R\} = \{m \in M \mid (K:m) \leq_e R\} =$
$\{x \in M \mid K \leq_e K + Rx\}$. La última desigualdad se da por la Proposición 1.4.

2) Es claro que $K \leq_e \overline{K}$, ahora veremos que $\overline{K}$ es (e.c.) en M. Supongamos que existe $H \leq M$ tal que $K \leq \overline{K} \leq_e H$. Por demostrar que $\overline{K} = H$, si $\overline{K} \neq H$ entonces existe $y \in H$ tal que $y \notin K$, y por el Lema 1.1, se tiene que existe $t \in R$ tal que $Rty \neq \{0\}$, y $Rty \cap K = \{0\}$, como $K \leq_e H$, y $Rty \subseteq H$, entonces $Rty = \{0\}$, por lo tanto $H = \overline{K}$. Ahora supongamos que existe $H \leq M$ talque $K \leq H$, H (e.c.) en M y con $\overline{K} \supseteq H$, así pues tenemos que $K \leq_e \overline{K}$, $K \leq_e H \leq \overline{K}$, lo que implica $H \leq_e \overline{K}$, de donde como H es (e.c.) en M, se tiene que $\overline{K} = H$.

3) Dado que $\mathbf{Z}(M) \leq K \leq \overline{K}$ entonces aplicamos la Proposición 1.4, a $\overline{K}$ en lugar de K y si $x + \overline{K} \in \mathbf{Z}(M/\overline{K})$, luego $(K:x) \leq_e R \Leftrightarrow \overline{K} \leq_e \overline{K} + Rx \leq M$, además $x + \overline{K} \in \mathbf{Z}(M/K)$ y como $\overline{K}$ es (e.c.) entonces $x \in \overline{K}$. Por lo tanto $\mathbf{Z}(M/\overline{K}) = \{0\}$.

4) Basta probar que si C es un submódulo de M (e.c.) y $K \leq C$, entonces $\overline{K} \leq C$, así si

$x \in \overline{K}$ por 1) $(K : x) \leq_e R$ pero $(K : x) = \{r \in R \mid rx \in K \leq C\} \subseteq \{r \in R \mid rx \in C\} = (C : x)$, por lo que $(C : x) \leq_e R$, por la Proposición 1.4, $C \leq_e C + Rx \leq M$, pero como C es (e.c.) en M se tiene que $x \in C$.

5) $\Leftarrow]$ Si $\overline{K} = \{0\}$, y $K \leq \overline{K}$ entonces $K = \{0\}$.

$\Rightarrow]$ Si $K = \{0\}$ entonces $\overline{K} = \{x \in M \mid \{0\} \leq_e Rx \Leftrightarrow Rx = \{0\} \Leftrightarrow x = 0\}$, por lo que $\overline{K} = \{0\}$.

6) Basta probar que $\overline{K}$ es un ideal derecho de R. Sea $t \in \overline{K}$ y $b \in R$, necesitamos probar que $tb \in \overline{K}$.

Afirmamos que $(K : t) \leq (K : tb)$, pues si $r \in (K : t)$ entonces $rtb \in Kb \leq K$ por ser K ideal derecho de R y $rt \in K$ por lo anterior $r \in (K : tb)$, por lo tanto $(K : t) \leq (K : tb)$ y $(K : t) \leq_e R$, pues $t \in K$. Por lo tanto $(K : tb) \leq_e \overline{K}$, así $tb \in \overline{K}$ ■.

DEFINICIÓN : Si $M \in$ **R** $-$ **Mód** con $K \leq M$, definimos $\overline{K}$ sólo cuando $\mathbf{Z}M \subseteq K$ como el único submódulo de M tal que $\mathbf{Z}(M/K) = \overline{K}/K$. Al módulo $\overline{K}$ se le llama la *cerradura esencial* de K en M.

COROLARIO 1.1

Sea $M \in$ **R** $-$ **Mód**, supongamos que $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$, es un conjunto de submódulos esencialmente cerrados de M, tales que $\mathbf{Z}(M) \leq C_\alpha \leq M$, entonces:

a) $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \leq M$ es un submódulo (e.c.) de M.

b) Si C_α es inyectivo para toda $\alpha \in I$, entonces $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ es inyectivo.

Demostración:

Sabemos que $C_\alpha = \overline{C}_\alpha$ para toda $\alpha \in I$, por lo cual $\bigcap_{\alpha \in I} \overline{C}_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \subseteq \overline{\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha}$.

Afirmación: $\overline{\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha} \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} \overline{C}_\alpha$. Si $x \in \overline{\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha}$ por la Proposición 1.5, parte 1), tenemos que $(\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha : x) \leq_e R$, pero

$(\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha : x) = \{r \in R \mid rx \in \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha\} = \{r \in R \mid rx \in C_\alpha \ \forall\, \alpha \in I\} =$

$\bigcap_{\alpha \in I} \{r \in R \mid rx \in C_\alpha\} = \bigcap_{\alpha \in I} (C_\alpha : x)$. Por lo tanto $\bigcap_{\alpha \in I} (C_\alpha : x) \leq_e R$.

Afirmación: $(C_\alpha : x) \leq_e R \ \forall \alpha \in I$, pues si no fuera el caso existiría $\beta \in I$, y $0 \neq B \leq R$ tal que $B \cap (C_\beta : x) = \{0\}$, de donde $(\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha : x) \cap B \subseteq (C_\beta : x) \cap B = \{0\}$, lo cual no es posible pues $(\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha : x) \leq_e R$, por lo tanto $(C_\alpha : x) \leq_e R$ para toda $\alpha \in I$, y por lo tanto $x \in \overline{C}_\alpha$ para toda $\alpha \in I$, y así $x \in \bigcap_{\alpha\in I} \overline{C}_\alpha$, de donde se tiene $\bigcap_{\alpha\in I} \overline{C}_\alpha = \overline{\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha}$, y por la Proposición 1.5, parte 3), concluimos que $\overline{\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha}$ es esencialmente cerrado, por lo tanto $\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha$ es (e.c.) en M.

b) De un resultado de la Teoría general de Módulos ([1]) Si $E, M \in$ R − Mód, $M \leq E$ con E inyectivo y M que no tenga extensiones esenciales propias dentro de E, entonces M es inyectivo, Así por a) tenemos que $\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha$ es esencialmente cerrado en M como $\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha$ ya no tiene extensiones esenciales propias dentro de M, y $\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha \subsetneq C_\alpha$ para toda $\alpha \in I$ con C_α inyectivo por el resultado tenemos $\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha$, es inyectivo en M ■.

El siguiente Corolario nos da algunas propiedades de $\mathrm{Z}(M)$, $\mathrm{Z}_2(M)$.

COROLARIO 1.2

Si $M \in$ R − Mód, entonces se cumplen las siguientes condiciones:

a) $\mathrm{Z}(M) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Z}_2(M) = \{0\}$;

b) $\mathrm{Z}_2(R) \cdot M \subseteq \mathrm{Z}_2(M)$;

c) $\mathrm{Z}(M) = \{0\} \Longrightarrow \mathrm{Z}_2(R) \cdot M = \{0\}$;

d) $\mathrm{Z}[M / \mathrm{Z}_2(M)] = \{0\}$;

e) $\mathrm{Z}(M) \leq_e \mathrm{Z}_2(M)$;

f) $\mathrm{Z}_2(M)$, es el más pequeño submódulo esencialmente cerrado de M que contiene a $\mathrm{Z}(M)$, y $\mathrm{E}(\mathrm{Z}M) = \mathrm{E}(\mathrm{Z}_2(M)) = \mathrm{Z}_2(\mathrm{E}(M))$;

g) $\mathrm{Z}_2(R)$, es el más pequeño ideal bilateral de R que contiene a $\mathrm{Z}(R)$, la notación para los ideales bilaterales de un anillo R. será $I \trianglelefteq R$.

Demostración:

a) $\Rightarrow]$ Si $\mathrm{Z}(M) = \{0\}$, por definición $\mathrm{Z}_2(M) = \mathrm{Z}(M/\mathrm{Z}(M)) \cong \mathrm{Z}(M) = \{0\}$.

$\Leftarrow]$ Pues $\mathrm{Z}(M) \leq \mathrm{Z}_2(M) = \{0\}$.

b) $\mathrm{Z}_2(R) \cdot M = \{a_1x_1 + ... + a_nx_n \mid a_i \in \mathrm{Z}_2R,\ x_i \in M,\ n \in \mathbb{N}\}$. Como $(\mathrm{Z}R : a_i) \leq_e R$, es claro que $(\mathrm{Z}(M) : a_ix_i) \leq_e R$, para $i = 1, ..., n$. Pues $(\mathrm{Z}R : a_i)a_ix_i \subseteq \mathrm{Z}R \cdot M \subseteq \mathrm{Z}(M)$. Como una intersección finita de submódulos esenciales es esencial, tenemos que:

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} (\mathrm{Z}(M) : a_i x_i) \leq_e R$ y $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (\mathrm{Z}(M) : a_i x_i) \subseteq (\mathrm{Z}(M) : a_1 x_1 + ... + a_n x_n) \leq R$,
por lo que $(\mathrm{Z}(M) : a_1 x_1 + ... + a_n x_n) \leq_e R$.

c) Por b) $\mathrm{Z}_2(R) \cdot M \subseteq \mathrm{Z}_2(M) = \{0\}$ (la última igualdad es por 1)). Por tanto $\mathrm{Z}_2(R) \cdot M = \{0\}$.

d) Reemplazando $\mathrm{Z}(M)$ por K, en 3) de la Proposición 1.5, tenemos que $\{0\} = \mathrm{Z}(M/\overline{K}) = \mathrm{Z}(M/\mathrm{Z}_2(M))$, pues $(\overline{K}/K) = (\overline{K}/\mathrm{Z}(M)) = \mathrm{Z}(M/\mathrm{Z}(M))$. Por lo tanto $\overline{K} = \mathrm{Z}_2(M)$.

e) Es inmediato de la Proposición anterior reemplazando $\mathrm{Z}(M)$ por K.

f) Sabemos que si $N \leq_e M$, entonces $\mathbf{E}N = \mathbf{E}M$. Por tanto, como $\mathbf{Z}M \leq_e \mathbf{Z}_2 M$, tenemos que $\mathbf{E}(\mathbf{Z}M) = \mathbf{E}(\mathbf{Z}_2 M)$. Luego $\mathbf{E}(\mathbf{Z}_2 M)$ es inyectivo y $\mathbf{E}(\mathbf{Z}_2 M) \leq_e \mathrm{Z}_2(\mathbf{E}M)$, por lo que $\mathbf{E}(\mathbf{Z}_2(M)) = \mathbf{E}(\mathrm{Z}(M)) = \mathrm{Z}_2(\mathbf{E}(M))$.

g) Es inmediato ■.

COROLARIO 1.3

Supóngase que un submódulo $N \leq M$, para $M \in \mathrm{R} - \text{Mód}$ satisface las siguientes condiciones:

i) $\mathrm{Z}(M/N) = \{0\}$;

ii) $N \cap \mathrm{Z}(M) \leq_e N$,

entonces $N = \mathrm{Z}_2(M)$

Demostración:

$x \in \mathrm{Z}(M) \Rightarrow \mathbf{An}(x) \leq_e R$, y $\mathbf{An}(x) \leq (N : x) \leq R$, por tanto $(N : x) \leq_e R$. Como $\mathrm{Z}(M/N) = \{0\}$, entonces $x \in N$, por lo que $\mathrm{Z}(M) \leq N$. Por otro lado, $N = \overline{N}$: por ii) $\mathrm{Z}(M) = N \cap \mathrm{Z}(M) \leq_e N$ y por f) del Corolario 1.2, tenemos que $\mathrm{Z}_2(M)$ es el más pequeño submódulo (e.c.) de M que contiene a $\mathrm{Z}(M)$ así $\mathrm{Z}(M) \leq_e N$, y $\mathrm{Z}(M) \leq_e \mathrm{Z}_2(M)$, además $\mathrm{Z}_2(M) \leq N = \overline{N}$, por tanto $\mathrm{Z}_2(M) \leq_e N$, como $\mathrm{Z}_2(M)$ es el submódulo esencial más pequeño que contiene a $\mathrm{Z}(M)$, entonces $N = \mathrm{Z}_2(M)$ ■.

Algunas de las propiedades concernientes a las Imágenes y Núcleos de morfismos entre módulos son dadas en los siguientes lemas. El hecho de que la imagen inversa de un submódulo esencial es también un submódulo esencial será utilizado en dichos lemas.

LEMA 1.2

Supóngase que $L \leq_e M$, con $N, M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, y sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo de R-módulos con $\mathbf{Z}(N) \subseteq f(L)$, entonces

i) $f(L) \leq_e f(M)$;

ii) Si $C \leq N$, es un submódulo (e.c.) de N con $f(L) \subseteq C$, entonces $f(M) \subseteq C$;

iii) Si $\mathbf{Z}(N) = \{0\}$, entonces $Ker(f) \leq M$ es (e.c.) en M y $\mathbf{Z}_2(M) \subseteq Ker(f)$.

Demostración:

i) Sea $f(x) \in f(M), f(x)$ distinto de cero, por lo que $x \neq 0$. Como $L \leq_e M$, entonces $I = (L : x) \leq_e R$, así $Ix \subseteq L$, por lo que $f(Ix) \subseteq f(L)$. Si $If(x) \neq \{0\}$, ya acabamos, pues $0 \neq rf(x) \in f(L)$ para alguna $r \in I$. Si $If(x) = \{0\}$, entonces $f(x)$ tiene anulador esencial en el anillo, por lo que $0 \neq f(x) \in \mathbf{Z}(N) \subseteq f(L)$.

ii) Sabemos que $\mathbf{Z}(N) \subseteq f(L)$ sea pues $f(x) \in f(M)$. Afirmamos que $f(x) \in C$. Como $f(L) \leq_e f(M)$, entonces $(f(L) : f(x)) \leq_e R$, y $f(L) \leq_e f(L) + Rf(x)$.

Por lo tanto $f(x) \in \overline{f(L)} = \bigcap_{\alpha} \{C_\alpha \leq N \mid C_\alpha \text{ es (e.c.)}, f(L) \subseteq C_\alpha\} \leq C$. Por lo tanto $f(x) \in C$.

iii) Si $Kerf \lneqq_e \overline{K} \leq M$, y $x \in \overline{K}$, entonces $(Kerf : x) \leq_e R$, pero $(Kerf : x) = \{r \in R \mid rf(x) = 0\} = \mathbf{An}(f(x))$. Por tanto $f(x) \in \mathbf{Z}(N) = \{0\}$, así que $f(x) = 0$, por lo que $x \in Ker(f)$. Por lo tanto $Ker(f) = \overline{K}$ es (e.c.) en M.

Ahora afirmamos que $\mathbf{Z}(M) \subseteq Ker(f)$, pues si $x \in \mathbf{Z}(M)$, entonces $\mathbf{An}(x) \leq_e R$, y como $\mathbf{An}(x) \subseteq \mathbf{An}(f(x))$, entonces $\mathbf{An}(f(x)) \leq_e R$. Por lo tanto $f(x) \in \mathbf{Z}(N) = \{0\}$, así que $x \in Ker(f)$. Por lo tanto, la afirmación se cumple.

Como $Ker(f)$ es (e.c.), $\mathbf{Z}(M) \subseteq Ker(f)$ y $\mathbf{Z}_2(M)$ es el más pequeño de los submódulos esencialmente cerrados de M, que contiene a $\mathbf{Z}(M)$ tenemos que $\mathbf{Z}_2(M) \subseteq Ker(f)$ ■.

COROLARIO 1.4

Supóngase que $M, N \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$ y $H \leq N$ es tal que $f : \mathbf{E}(M) \longrightarrow N$ es un morfismo de R-módulos con $\mathbf{Z}N \subseteq f(M)$ y $f(M) \cap H = \{0\}$, entonces $f(\mathbf{E}M) \cap H = \{0\}$.

Demostración:

Consideremos la inclusión $i : M \longrightarrow \mathrm{E}(M)$. i es un monomorfismo esencial por lo que $M \leq_e \mathrm{E}(M)$. Por el Lema 1.2, parte i), se tiene que $f(M) \leq_e f(\mathrm{E}(M))$, por lo que si $f(\mathrm{E}(M)) \cap H \neq \{0\}$ entonces existe $0 \neq f(x) \in f(\mathrm{E}(M)) \cap H$, para alguna $x \in \mathrm{E}(M)$. Por la esencialidad de $f(M)$ en $f(\mathrm{E}(M))$ existe $r \in R$ tal que $rf(x) \neq 0$ y $rf(x) \in f(M)$. Pero $rf(x) \in H$ de donde se sigue que $0 \neq f(x) \in f(M) \cap H$, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto $f(\mathrm{E}(M)) \cap H = \{0\}$ ■.

COROLARIO 1.5

Sean $M, N \in \mathrm{R}-\mathbf{Mód}$ tal que M es inyectivo y no singular, entonces:

$$\mathbf{tr}_M(N) \leq_e \mathbf{tr}_M(\mathrm{E}(N)).$$

COROLARIO 1.6

Si $\mathrm{Z}(M) \leq K \lneqq M$, para $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$ y K es un submódulo invariante de M, entonces $\overline{K} \leq M$ es también un submódulo invariante de M.

Demostración:

Sea $f \in \mathbf{End}_R(M)$. Probaremos que $f(\overline{K}) \subseteq \overline{K}$. Tomemos $0 \neq f(x) \in f(\overline{K})$, como $x \in \overline{K} \Rightarrow (K : x) \leq_e R$, basta probar que $(K : f(x)) \leq_e R$.

Afirmación: $(K : x) \subseteq (K : f(x))$.

Si $r \in (K : x)$ entonces $rx \in K$. Como K es invariante, entonces $f(rx) \in K$. De donde $rf(x) = f(rx) \in \overline{K}$. Por lo tanto $r \in (K : f(x))$, por lo tanto $(K : f(x)) \leq_e R$. Por lo tanto $f(x) \in \overline{K}$ ■.

Capítulo 2

REPRESENTACIÓN DE TRAZAS.

El principal objetivo de este Capítulo es el de establecer, algunas de las propiedaes de los R-módulos izquiedos inyectivos y no singulares con respecto a la traza de un par de R-módulos, y dar una descomposicion de un R-módulo inyectivo no singular A, como suma directa de la cápsula inyectiva de la traza de B en A, con el rechazo de A en la cápsula inyectiva de B, para B un módulo no singular (Corolario 2.3).

LEMA 2.1

Sean $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, y $A \leq_e B \leq M$, $A' \leq_e B' \leq M$, y $\{0\} \neq A \cap A'$, entonces $A \cap A' \leq_e B \cap B'$.

Demostración:

Sea $N \leq B \cap B'$, $N \neq \{0\}$, dado que $A \leq_e B$ se tiene que $N \cap A \neq \{0\}$. Como $A' \leq_e B'$ tenemos que $(N \cap A) \cap A' \neq \{0\}$ ■.

TEOREMA 2.1

Sean $A, B \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, $\mathrm{Z}(B) = \{0\}$, supóngase que $\{0\} \neq V \leq \mathbf{tr}_A(\mathbf{E}(B))$, entonces existen $0 \neq a \in A$, y $0 \neq b \in B$, tal que $Ra \cong Rb \leq V$. Por lo tanto $\mathbf{An}(a) = \mathbf{An}(b)$.

Demostración:

Sea $0 \neq \beta \in V$, entonces $\beta = g_1(a_1) + ... + g_n(a_n)$, con $a_i \in A$, $g_i \in \mathbf{Hom}_R(A, \mathbf{E}(B))$, **para todo** $i \in \{1, ..., n\}$.

Afirmación: Podemos elegir a $0 \neq \beta \in V \cap B$, con $\beta = g_i(a_i)$, para alguna $a_i \in A$, y $g_i \in \mathbf{Hom}_R(A, \mathbf{E}(B))$.

Ahora demostraremos la afirmación. Como $\mathbf{E}(V) \leq \mathbf{E}(B)$, entonces $\mathrm{E}(B) = \mathbf{E}(V) \oplus Q$, con $Q \leq \mathbf{E}(B)$, (pues todo módulo inyectivo es sumando directo de cada módulo que lo contiene). Sea $f : \mathbf{E}(B) \longrightarrow \mathbf{E}(V) \oplus Q$, la proyección en $\mathbf{E}(V)$ seguida de la inclusión en $\mathbf{E}(B)$. Así $\beta \in V \leq \mathbf{E}(V)$, con $f(\beta) = \beta \neq 0$. Por otro lado $0 \neq \beta = f(g_1(a_1)) + ... + f(g_n(a_n))$, por tanto $f(g_i(a_i)) \neq 0$ para alguna $i \in \{1, ..., n\}$, y por la esencialidad de B en $\mathbf{E}(B)$ podemos escojer a $0 \neq \beta = f(g_i(a_i)) \in V \cap B$. Ahora por la inyectividad de $\mathbf{E}(B)$, g_i se puede extender a $\widehat{g_i} : \mathbf{E}(A) \longrightarrow \mathbf{E}(B)$, tal que $\widehat{g_i} \mid_A = g_i$.

Por el Corolario 1.2, se tiene que $\mathrm{Z}_2(B) = \{0\}$, por el Lema 1.2, parte iii), $Ker(f\widehat{g_i})$ es (e.c.) en $\mathbf{E}(A)$. Por lo tanto $Ker(f\widehat{g_i})$ es inyectivo, por lo que $\mathbf{E}(A) = W \oplus Ker(f\widehat{g_i})$, para algún $W \leq \mathbf{E}(A)$. De este modo $a_i = w + z$ para algun $0 \neq w \in W$, y $z \in Ker(f\widehat{g_i})$. Dado que $A \leq_e \mathbf{E}(A)$, entonces hay un $r \in R$, con $0 \neq rw \in A$. Así pues, sea $0 \neq a = rw \in A \cap W$, de donde $r\beta = r(fg_i)(a_i) = f(g_i(r(w+z))) = f\widehat{g_i}(rw+rz) = f\widehat{g_i}(rw) + f\widehat{g_i}(rz) = f\widehat{g_i}(a)$, pues $z \in Ker(f\widehat{g_i})$. De este modo tenemos que $0 \neq r\beta = f\widehat{g_i}(a)$ es distinto de cero, pues $\mathbf{E}(A) = W \oplus Ker(f\widehat{g_i})$, y como $f\widehat{g_i}$ es un monomorfismo restringido a W y $a \in A \cap W$, tenemos que $f\widehat{g_i}(a) \neq 0$. Por lo tanto si $b = r\beta$, tenemos que $\mathbf{An}(b) = \mathbf{An}(a)$. Por lo tanto $Ra \cong Rb \leq V \cap B \leq V$ ■.

COROLARIO 2.1

Sean $A, B \in \mathbf{R-Mód}$, $\mathbf{Z}(B) = \{0\}$. Para un subconjunto $S \subseteq A \times B$, definimos: $S_B = \{Rb \mid \text{existe } a \in A \text{ tal que } (a, b) \in S\}$, entonces existe un subconjunto S de $A \times B$ que satisface las siguientes condiciones:

a) El conjunto transpuesto de S constituye una función.

b) Para toda $(a, b) \in S$, $\mathbf{An}(a) = \mathbf{An}(b)$, por tanto $Ra \cong Rb$.

c) $S_B = \oplus \{Rb \mid \text{existe } a \in A \text{ tal que } (a, b) \in S\}$.

d) $S_B \leq_e \mathbf{tr}_A(\mathbf{E}(B))$.

Demostración:

Sea $\mathcal{L} = \{S \subseteq A \times B \mid S \text{ satisface las condiciones a),b) y c)}\}$. Como primera observación tenemos que $\mathcal{L} \neq \phi$, pues por el Teorema anterior, existen $0 \neq a \in A, 0 \neq b \in B$, tales que $Ra \cong Rb$, por lo que $S_0 = \{(a,b)\}$, satisface las condiciones a),b) y c).

La condición de que el conjunto transpuesto de S_0 es una función se cumple ya que S_0 tiene sólo a un elemento. Una segunda observación es que $\mathcal{L}$ junto con la relación de inclusión $(\mathcal{L}, \subseteq)$ constituye un conjunto parcialmente ordenado. Una siguiente observación es que $(\mathcal{L}, \subseteq)$ satisface las hipótesis del Lema de Zorn. A continuación probaremos este hecho. Sea $C = \{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ para algún conjunto de índices I, una cadena de elementos de $\mathcal{L}$. Probaremos que C está acotada superiormente por $S = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$, con $S_\alpha \in \mathcal{L}$. Es claro que S es una cota superior para C, por lo que sólo resta probar que $S \in \mathcal{L}$.

a) se cumple ya que si $(a_1, b), (a_2, b) \in S$, entonces $(a_1, b) \in S_\alpha, (a_2, b) \in S_\beta$ para algún $\alpha, \beta \in I$. Como C es una cadena tenemos que $S_\alpha \subseteq S_\beta$ ó $S_\alpha \supseteq S_\beta$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $S_\alpha \subseteq S_\beta$, por lo que $(a_1, b), (a_2, b) \in S_\beta$ y como el conjunto transpuesto de S_β es una función tenemos que $a_1 = a_2$. Por lo tanto el conjunto transpuesto de S es una función.

Ahora como $(a,b) \in S \Rightarrow (a,b) \in S_\alpha$ para algún $\alpha \in I$, tenemos que $Ra \cong Rb$, lo que implica que S satisface la condición b).

Para ver que S satisface la condición c) tenemos que probar que:

$$S_B = \oplus \{Rb \mid (a,b) \in S\}.$$

Sea pues $0 = r_1 b_1 + ... + r_n b_n$, una combinación lineal igual a cero con elementos de S_B. Sabemos que hay un β tal que $b_i \in S_\beta$ para todo $i = 1, ..., n$. Así $0 = r_1 b_1 + ... + r_n b_n \in (S_\beta)_B = \oplus \{Rb \mid (a,b) \in S_\beta\}$, lo que implica que,

$$0 = r_1 = r_2 = ... = r_n. \text{ Por lo tanto } S_B = \oplus \{Rb \mid (a,b) \in S\}.$$

Por lo tanto $(\mathcal{L}, \subseteq)$ tiene máximos.

Sea $\overline{S}$ uno de tales máximos de $(\mathcal{L}, \subseteq)$. Es claro que $\overline{S}$ cumple a),b) y c), por lo que para probar el Corolario sólo resta probar d) es decir que $\overline{S_B} \leq_e \mathbf{tr}_A(\mathbf{E}(B))$. Por el Teorema 2.1, se tiene que si $\{0\} \neq V \leq \mathbf{tr}_A(\mathbf{E}(B))$, entonces existen $0 \neq a \in A, 0 \neq b \in B$ tales que

$Ra \cong Rb$. Si $(a,b) \in \overline{S}$, entonces $b \in \overline{S_B} \cap V \neq \{0\}$, de donde se tiene el resultado. Si no hay una pareja $(a_j, b) \in \overline{S}$, entonces $\overline{S} \cup \{(a_j, b)\} \in \mathcal{L}$, lo cual contradice la maximalidad de $\overline{S}$, por lo tanto siempre hay una pareja $(a,b) \in \overline{S}$, y por tanto $\overline{S_B} \cap V \neq \{0\}$, por tanto $\overline{S_B} \leq_e \mathbf{tr}_A(\mathrm{E}(B))$, lo cual concluye la prueba del Corolario ■.

Una version muy utilizada posteriormente al Corolario anterior queda establecida en el siguiente Corolario.

COROLARIO 2.2

Sea $B \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$. Consideramos a R como módulo izquierdo, entonces resulta que para el subconjunto S de $R \times B$, (el del Corolario 2.1) se tiene que $S_B \leq_e B$.

Demostración:

Por el Corolario anterior tenemos que $S_B \leq_e \mathbf{tr}_{_RR}(\mathrm{E}(B))$, así pues para cada elemento b en B no cero definimos $f : R \to \mathrm{E}(B)$ dado por $f(1_R) = b$, de este modo $f \in \mathbf{Hom}_R(R, \mathrm{E}(B))$, y como $Rb = f(R) \neq \{0\}$, se tiene que $Rb \cap S_B \neq \{0\}$. Por lo tanto existe $0 \neq rb$ con $rb \in S_B$, y por tanto $S_B \leq_e B$ ■.

El siguiente Corolario es de una importancia tracendental en los posteriores Capítulos, en dicho Corolario se tomará B como $R/\mathbf{Z}_2(R)$.

COROLARIO 2.3

Sean $A, B \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, A, B no singulares, entonces se satisfacen las siguientes condiciónes:

i) $\mathrm{E}(B) = \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)) \oplus \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathrm{E}(B))$, es una suma directa de submódulos invariantes de $\mathrm{E}(B)$, en partícular.

ii) Si $\mathrm{E}(B) = \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)) \oplus Q$, entonces $\mathbf{tr}_{\mathbf{E}(A)}(Q) = \{0\}$ y $Q = \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathrm{E}(B))$ es único.

iii) $\mathbf{Hom}_R\left[\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)), \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathrm{E}(B))\right] = \{0\}$.

Demostración:

Una primera observación es que $\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)) = \mathbf{E}(\mathbf{tr}_{\mathbf{E}(A)}\mathbf{E}(B))$, lo cual se sigue del hecho de que $\mathbf{tr}_A(\mathbf{E}(B)) \leq_e \mathbf{tr}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B))$, (Corolario 1.5).

Afirmación 1:

$\mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B))$ es inyectivo.

Para probar está afirmación tenemos que $\mathbf{rej}_{\mathbf{E}A}\mathbf{E}B = \cap\{Kerh \mid h \in \mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}B, \mathbf{E}A)\}$ y por el Lema 1.2, tenemos que $Ker(h) \subseteq \mathbf{E}(B)$ es (e.c.), pues $\mathbf{Z}(\mathbf{E}(B)) = \{0\}$, por lo tanto $Ker(h)$ es inyectivo pues ya no tiene extensiones esenciales dentro de $\mathbf{E}(B)$, por lo que $Ker(h)$ es (e.c.), e inyectivo.

Por el Colorario 1.1, tenemos que $\cap\{Ker(h) \mid h \in \mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}B, \mathbf{E}A)\} = \mathbf{rej}_{\mathbf{E}A}(\mathbf{E}B)$, es inyectivo, lo cual prueba la afirmación 1.

Afirmación 2:

$\mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B))$, y $\mathbf{tr}_A(\mathbf{E}(B))$ son submódulos invariantes en $\mathbf{E}(B)$.

Sea $f \in \mathbf{End}_R(\mathbf{E}(B))$, y $x \in \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B))$, para probar que $\mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B))$ es invariante basta probar que $f(x) \in \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B))$. Pero si $h \in \mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}(B), \mathbf{E}(A))$ entonces tenemos que la composición de morfismos $(h \circ f) \in \mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}(B), \mathbf{E}(A))$, y con $x \in \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B))$ se tiene que $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = 0$, por lo tanto $f(x) \in \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B))$.

Nuevamente sea $f \in \mathbf{End}_R(\mathbf{E}B)$, y $x \in \mathbf{tr}_A(\mathbf{E}(B))$, probaremos que $f(x) \in \mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B))$. Pero x es de la forma $x = g_1(a_1) + ... + g_n(a_n)$ con $g_i \in \mathbf{Hom}_R(A, \mathbf{E}(B))$, $a_i \in A$, a continuación observamos que $(f \circ g_i)$ es un morfismo de A en $\mathbf{E}(B)$ para toda $i = 1, ..., n$, y tenemos que $f(x) = (f \circ g_1)(a_1) + ... + (f \circ g_n)(a_n)$, con $(f \circ g_i)(a_i) \in \mathbf{E}(B)$, y por lo tanto $f(x) \in \mathbf{E}(B)$.

Entonces $\mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B))$, y $\mathbf{tr}_A(\mathbf{E}(B))$ son submódulos invariantes en $\mathbf{E}(B)$.

Afirmación 3:

$\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)) \leq \mathbf{E}(B)$, es un submódulo invariante.

Nuevamente sea $f \in \mathbf{End}_R(\mathbf{E}B)$. Por las afirmaciones 1 y 2 tenemos que $f(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)) \subseteq \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B))$. Por el Lema 1.2, parte ii), tenemos que $f(\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}B)) \subseteq \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B))$, pues $\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B))$ es (e.c.) en $\mathbf{E}(B)$.

Ahora vemos que $\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)) \leq \mathbf{E}(B)$, por lo que $\mathbf{E}(B) = \mathbf{E}(\mathbf{tr}_{\mathbf{E}(B)}(A)) \oplus Q$, con $Q \leq \mathbf{E}(B)$.

Afirmación 4:

$\mathbf{tr}_{\mathbf{E}(A)}(Q) \subseteq Q \cap \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)) = Q \cap \mathbf{E}(\mathbf{tr}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B))) = \{0\}$.

Es claro que $\mathbf{tr}_{\mathbf{E}(A)}(Q) \leq Q$, por lo que $\mathbf{tr}_{\mathbf{E}(A)}(Q) \subseteq \mathbf{tr}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B)) \subseteq \mathbf{E}(\mathbf{tr}_{\mathbf{E}(A)}\mathbf{E}(B)) = \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B))$, por lo tanto tenemos que la afirmación es cierta, de donde concluimos que.

$\mathbf{tr}_{\mathbf{E}(A)}Q = \sum\{f(\mathbf{E}A) \mid f \in \mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}A, Q)\} = \{0\}$. Por lo tanto $\mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}A, Q) = \{0\}$.

Como $\mathbf{E}(A)$ y Q son no singulares e inyectivos, entonces $\mathbf{Hom}_R(Q, \mathbf{E}(A)) = \{0\}$, Q es no singular pues $\mathbf{Z}(Q) = Q \cap \mathbf{Z}(\mathbf{E}(B)) = Q \cap \{0\} = \{0\}$, y como un sumando directo de un módulo inyectivo es inyectivo, se tiene que Q es inyectivo. Ahora consideramos la siguiente sucesión exacta en $\mathbf{R}-\mathbf{Mód}$:

$$O \to \mathbf{Z}(Q) \to Q \to Q/\mathbf{Z}(Q) \to 0$$

Por ser Q inyectivo la anterior sucesión induce la siguiente sucesión exacta aplicando el funtor $\mathbf{Hom}_R(\_\_, \mathbf{E}(A))$:

$$0 \to \mathbf{Hom}_R((Q/\mathbf{Z}Q) = Q, \mathbf{E}A) \to \mathbf{Hom}_R(Q, \mathbf{E}A) \to \mathbf{Hom}_R(\mathbf{Z}Q, \mathbf{E}A) \to 0$$

De donde la anterior sucesión queda $0 \to \mathbf{Hom}_R(Q, \mathbf{E}(A)) \to 0$, y por ser exacta, tenemos que $\mathbf{Hom}_R(Q, \mathbf{E}(A)) = \{0\}$. Por lo tanto $Q \subseteq \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B))$.

De todo lo anterior tenemos que para probar i) y ii), basta probar que $\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)) \cap \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B)) = \{0\}$, lo que es una consecuencia inmediata de iii), por lo que para terminar de demostrar el corolario sólo resta probar iii).

Prueba de iii) Si no fuera el caso de que $\mathbf{Hom}_R\left[\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)), \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B))\right] = \{0\}$, entonces existe $0 \neq f \in \left[\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)), \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B))\right]$. Por el Lema 1.2, parte iii), tenemos que $Ker(f) \subseteq \mathbf{E}(\mathbf{tr}_{\mathbf{E}(B)}(A))$, lo que implica $\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)) = Ker(f) \oplus T$, para algún $T \leq \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B))$. Si $x \in T$ entonces $f(x) \neq 0$, con $f(x) \in \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B))$, por lo que $\mathbf{An}(x) = \mathbf{An}(f(x))$ pues f restringido a T ($f\mid_T$) es un monomorfismo, de donde $Rx \cong Ry$, $y = f(x)$.

Por la esencialidad de $\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)$ en $\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B))$, se tiene que existe $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in \mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)$ con $f(rx) \neq 0$, y $\mathbf{An}(rx) = \mathbf{An}(f(rx))$. Así si $rx = \alpha$, $f(rx) = \beta$

entonces $R\alpha \cong R\beta$, y por el Teorema 2.1 aplicado a $R\beta \leq \mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)$ se sigue que, existen $0 \neq a \in A, 0 \neq b \in B$, tales que $Ra \cong Rb \cong R\beta$, con $\mathbf{An}(a) = \mathbf{An}(b)$, de donde se tiene que $\mathbf{An}(a) = \mathbf{An}(s\beta)$ para algún $s \in R$. Por lo tanto $\mathbf{An}(a) = \mathbf{An}(s\beta) = \mathbf{An}(s\alpha)$, de este modo tenemos que definiendo el morfismo $s\alpha \to a$, éste se extiende a un morfismo de $\mathbf{E}(B) \to \mathbf{E}(A)$, por la inyectividad de $\mathbf{E}(B)$, lo que no es posible pues $s\alpha \in \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B))$. Por lo tanto $\left[\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)), \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}(\mathbf{E}(B))\right] = \{0\}$, lo que concluye la prueba de i), ii) y iii) ■.

Capítulo 3

TEOREMAS DE ESTRUCTURA.

En este Capítulo se dará una relación de orden, en la Clase de los módulos inyectivos no singulares que dará pie a una relación de equivalencia, que permitirá dar una partición de los R-módulos inyectivos no singulares en clases de equivalencia, las que resultan bien portadas, respecto de los teoremas técnicos que se dieron en el capítulo anterior.

Además veremos que la colección de las clases de equivalencia constituyen una Retícula Booleana Completa. Así mismo se dará un teorema de estructura, que nos permitirá descomponer cada módulo inyectivo no singular en suma directa de un módulo continuo y un módulo discreto. Esto nos servirá para dar una descomposición de la retícula formada por las clases de equivalencia.

Sea $\mathbf{C}_Z = \{A \in \mathbf{R} - \mathbf{Mód} \mid \mathrm{Z}(A) = \{0\}\}$, la clase de todos los R-módulos izquierdos no singulares.

Definimos la relación $A \propto C$, para $A, C \in \mathbf{C}_Z$, como sigue:

$A \propto C \Longleftrightarrow A$ se puede sumergir en la cápsula inyectiva de una suma directa de copias de C.

Es decir que $A \rightarrowtail \mathrm{E}(\bigoplus_{\alpha \in I} C) = \mathrm{E}(C^{(I)})$, para algún conjunto de índices I.

Definición: Diremos que un conjunto X, junto con una relación "$\backsim$" es un casi−orden si:

"$\backsim$" es reflexiva y transitiva con respecto a los elementos de X.

Lema 3.1

$(\mathbf{C}_Z, \propto)$ es un casi-orden.

Demostración:

Primero probaremos que " $\propto$ " es reflexiva. Sea $A \in \mathbf{C}_Z$, entonces tenemos que $A \subseteq \mathbf{E}(A)$. Por lo tanto $A \propto A$.

Ahora veamos que " $\propto$ " es transitiva, sean $A, B, C \in \mathbf{C}_Z$ tal que $A \propto B$, y $B \propto C$. Por hipótesis $A \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_{\beta \in J} B)$, $B \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_{\beta \in K} C)$, de donde $B \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_{\beta \in K} C) \Rightarrow \bigoplus_{\alpha \in J} B \subseteq \bigoplus_{\alpha \in J} (\mathbf{E}(\bigoplus_{\beta \in K} C)) \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_{\alpha \in J} (\bigoplus_{\beta \in K} C))$, la ultima contención se da por un resultado de la Teoría general de Módulos que dice que la suma directa de cápsulas inyectivas de módulos, está contenida en la cápsula inyectiva de la suma de los módulos. De este modo tenemos $A \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_{\beta \in J} B) \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_{\alpha \in J} (\bigoplus_{\beta \in K} C))$. Por lo tanto $A \propto C$ $\blacksquare$.

Con base en lo anterior definimos la siguiente relación en $\mathbf{C}_Z$, sean $A, B \in \mathbf{C}_Z$, diremos que $A \sim B \iff A \propto B$, y $B \propto A$. Por la misma definición se tiene que " $\sim$ " es de equivalencia.

Para $A \in \mathbf{C}_Z$, denotaremos la clase de equivalencia de A por $[A] = \{B \in \mathbf{C}_Z \mid A \sim B\}$, a tales clases de equivalencia las llamaremos Clases del Tipo pequeño.

Denotaremos $\Xi(R) = \{[A], [B], ...\}$ a la clase de todas las clases de equivalencia del tipo pequeño $[A], [B], ...$ para un anillo R. Ahora definimos una relación para las clases en $\Xi(R)$. Si $[A], [B] \in \Xi(R)$, diremos que $[A] \leq [B] \iff A \propto B$, para algunos (equivalentemente para todos) $A \in [A]$,y $B \in [B]$. Una primera afirmación es que $(\Xi(R), \leq)$, es una clase parcialmente ordenada.

Demostración (de la Afirmación): Que " $\leq$ " es reflexiva, es inmediato.

Probemos que " $\leq$ " es anti-simétrica, por demostrar $[A] \leq [B]$, y $[B] \leq [A] \Rightarrow [A] = [B]$.

$\subseteq]$ Sea $C \in [A]$, entonces $C \propto B$, para todo $B \in [B]$, y $B \in [B]$, implica que $B \propto A$, para todo $A \in [A]$, de donde se tiene que $C \in [B]$, la otra contención es análoga y por lo tanto $[A] = [B]$. También que " $\leq$ " es transitiva se sigue de lo anterior.

Otras observaciones son las siguientes $[A] = [\mathbf{E}A]$, también $0 = [0] \leq [A]$, para toda

$[A] \in \Xi(R)$, y si $A \leq_e B \Rightarrow [A] \leq [B]$.

Como un paréntesis mencionaremos que la clase parcialmente ordenada $(\Xi(R), \leq)$ induce una retícula. Dicha retícula, abusando un poco de la notación, la llamaremos $\Xi(R)$. Para $[A], [B] \in \Xi(R)$. Denotaremos $[A] \wedge [B] = \inf \{[A], [B]\}$, y $[A] \vee [B] = \sup \{[A], [B]\}$ al ínfimo y al supremo de $\{[A], [B]\}$ en $\Xi(R)$ respectivamente. Más adelante veremos que $\Xi(R)$ es un conjunto el siguiente lema nos servirá para más adelante poder garantizar que $\Xi(R)$ es una retícula completa.

LEMA 3.2

Si $\{[A_\gamma] \mid \gamma \in \Gamma\}$ es un conjunto, entonces se cumple:

i) $\bigvee_\gamma [A_\gamma] = [\bigoplus_\gamma (A_\gamma)]$;

ii) Existe $\bigwedge_\gamma [A_\gamma] \in \Xi(R)$

Demostración:

i) Por definición, $\sup \{[A_\gamma] \mid \gamma \in \Gamma\} = \bigvee_\gamma [A_\gamma]$, además $[A] \leq [B] \Rightarrow [A] \vee [B] = [B]$, para $[A], [B] \in \Xi(R)$, de este modo primero probaremos que $[A_\gamma] \leq [\bigoplus_\gamma (A_\gamma)]$, para toda $\gamma \in \Gamma$. Sea $A_\gamma \in [A_\gamma]$ y obsérvamos que $A_\gamma \subseteq \bigoplus_\gamma (A_\gamma) \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_\gamma (A_\gamma))$, por lo tanto $A_\gamma \propto \bigoplus_\gamma (A_\gamma)$.

Ahora si existe $[L] \in \Xi(R)$ tal que $[A_\gamma] \leq [L]$ para todo $\gamma \in \Gamma$, entonces $A_\gamma \propto L$, para $A_\gamma \in [A_\gamma]$, $L \in [L]$, por lo que $A_\gamma \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_{I_\gamma} L)$ para todo $\gamma \in \Gamma$, y para algún conjunto de índices I_γ. De lo anterior tenemos $(\bigoplus_\gamma (A_\gamma)) \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_\gamma (\bigoplus_{I_\gamma} (L)))$, por tanto $[\bigoplus_\gamma (A_\gamma)] \leq L$. Por lo tanto $[\bigoplus_\gamma (A_\gamma)]$. es la mínima cota superior del conjunto $\{[A_\gamma] \mid \gamma \in \Gamma\}$, de donde concluímos la primera parte del Lema.

ii) Sea S la siguiente clase: $S = \{[B] \in \Xi(R) \mid [B] \leq [A_\gamma], \forall\, \gamma \in \Gamma\}$.

Observamos que cada $[B] \in S$ es de la forma $[B] = [C]$, donde $C \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_\gamma A_\gamma)$, por lo cual S es un conjunto. Como $[0] \in S$, entonces $S \neq \phi$. Por i), $\sup S$ existe, dado que $\sup S = \bigvee_{\beta \in J} [S_\beta] = [\bigoplus_{\beta \in J} S_\beta]$, para algún conjunto J. Como $[S_\beta] \leq [A_\gamma]$, $\forall\, \gamma \in \Gamma$, entonces $S_\beta \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_{I_\beta} A_\gamma)$, para cualesquiera representantes de $[S_\beta]$, y $[A_\gamma]$, entonces $(\bigoplus_\beta S_\beta) \subseteq \bigoplus_\gamma (\mathbf{E}(\bigoplus_{I_\beta} A_\gamma) \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_\gamma (\mathbf{E}(\bigoplus_{I_\beta} A_\gamma)))$. Por lo tanto $\sup S \leq [A_\gamma]$ para todo $\gamma \in \Gamma$, y por definición, $\sup S$ resulta la mayor cota inferior del conjunto $\{[A_\gamma] \mid \gamma \in \Gamma\}$.

Es decir, $\sup S = \bigwedge\limits_{\gamma} [A_\gamma]$, y por lo tanto $\bigwedge\limits_{\gamma} [A_\gamma]$ existe ■.

LEMA 3.3

Sean $A, B \in \mathbf{R-Mód}$, $\mathbf{Z}(B) = \mathbf{Z}(A) = \{0\}$, A inyectivo con $C \subsetneq \mathbf{E}(A^{(I)})$, para algún conjunto de índices I, entonces $C \subseteq \mathbf{E}[(\mathbf{tr}_C A)^{(I)}]$. En particular si $[C] \leq [A]$, entonces $[C] \leq [\mathbf{tr}_C A]$.

Demostración:

Sea $\pi_i : A^{(I)} \to A$, la i-ésima proyección, y sea $\rho_i : A^{(I)} \cap C \to \mathbf{tr}_C(A)$, la restricción y correstricción (donde la correstriccion es restringir a la imagen) de π_i.

El morfismo ρ_i se puede correstringir a $\mathbf{tr}_C(A)$, pues ρ_i se puede extender a un morfismo $\widehat{\rho_i}$ de C en A, pues A es inyectivo.

$C \cap A^{(I)} \xrightarrow{i} A^{(I)} \xrightarrow{\pi_i} A$

$$\begin{array}{ccc} C \cap A^{(I)} & \xrightarrow{\rho_i} & A \\ \downarrow & \nearrow_{\widehat{\rho_i}} & \\ C & & \end{array}$$

Esto nos permite extender a un morfismo ρ entre:

$$\rho : C \cap A^{(I)} \longrightarrow (\mathbf{tr}_C A)^{(I)} \text{ dado por.}$$
$$x_i \longrightarrow \widehat{\rho_i(x_i)} \text{ tal que:}$$

$\widehat{\rho_i(x_i)}(j) = \delta_{i,j}\rho_i(x_j)$. De este modo vemos que ρ así definida es monomorfismo: pues si $x \in Ker(\rho)$, entonces $\rho(x) = 0$, de donde $\widehat{\rho_i(x_i)}(j) = \delta_{ij}\rho_i(x_j) = 0$, para toda $i \in I$. Por lo tanto $x_i = 0$ para toda $i \in I$. Por lo tanto $x = 0$.

Luego Afirmamos que $C \cap A^{(I)} \leq_e C$.

Para demostrar esta afirmación tomamos $0 \neq x \in C$, entonces $0 \neq x \in \mathbf{E}(A^{(I)})$ y como $A^{(I)} \leq_e \mathbf{E}(A^{(I)})$, se tiene que existe $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in C \cap A^{(I)}$. Por (*) y la inyectividad de $\mathbf{E}((\mathbf{tr}_C A)^{(I)})$, se tiene que ρ se extiende a un monomorfismo $\bar{\rho} : C \longrightarrow \mathbf{E}((\mathbf{tr}_C A)^{(I)})$.

(*) Si $f : L \to M$ es un monomorfismo esencial y $h \circ f$ es monomorfismo. Entonces h es monomorfismo.

Para probar esto, consideremos $h : M \longrightarrow K$, como $\{0\} = Ker(h \circ f) = (Im(L) \cong L) \cap Ker(h)$. Por la esencialidad de L, se tiene que h es monomorfismo ■.

LEMA 3.4

Si $A, B \in$ R − Mód, A, B inyectivos y no singulares. Entonces se cumple:

i) $[\mathbf{tr}_B A] = [\mathbf{tr}_A B]$;

ii) $[\mathbf{tr}_A B] \leq [A]$.

Demostración:

i) Sean $S \subsetneq A \times B$, y S_B como en el Corolario 2.2, y $(a, b) \in S$ arbitrario. Así tenemos que $Rb \cong Ra$

Obsérvémos que podemos identificar a Ra con un submódulo de $\mathbf{tr}_B(A)$. Estó es claro observando el siguiente diagrama utilizado la inyectividad de A:

$$\begin{tikzcd} Ra \arrow[r, "1_A|_{Ra}"] \arrow[d, "\cong"'] & A \\ Rb \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Donde h es la extención de $Rb \cong Ra$ en $\dot{A}$. De esté modo tenemos una inclusión natural.

$$\bigoplus_{(a,b)\in S} Ra \xrightarrow{inc.} \bigoplus_{(a,b)\in S} \mathbf{tr}_B(A).$$

Del mismo modo tenemos una inclusión natural de:

$$\bigoplus_{(a,b)\in S} Rb \xrightarrow{i} \mathbf{tr}_A(B).$$

Así pues en el siguiente diagrama todas las flechas (exepto la punteada) son las inclusiones naturales correpondientes. Por tanto monomorfismos, además el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & b \cdots\cdots \longrightarrow a & & & \\ \bigoplus_{(a,b)\in S} Rb & \longrightarrow & \bigoplus_{(a,b)\in S} Ra & \xrightarrow{inc.} & \bigoplus_{(a,b)\in S} \mathbf{tr}_B(A). \\ \downarrow i & & & & \downarrow \\ \mathbf{tr}_A(B) & \cdots\cdots\cdots & \overset{\varphi}{\cdots} & \cdots\cdots\longrightarrow & \mathbf{E}(\bigoplus_{(a,b)\in S} \mathbf{tr}_B(A)) \end{array}$$

Donde $\varphi \circ i$ es el igual a aplicar las inclusiónes:

$$\bigoplus_{(a,b)\in S} Rb \rightarrow \bigoplus_{(a,b)\in S} Ra \xrightarrow{inc.} \bigoplus_{(a,b)\in S} \mathbf{tr}_B(A) \rightarrow \mathbf{E}(\bigoplus_{(a,b)\in S} \mathbf{tr}_B(A)).$$

El morfismo φ existe por la inyectividad de $\mathbf{E}(\bigoplus_{(a,b)\in S} \mathbf{tr}_B(A))$.

Ahora tenemos un monomorfismo de $\bigoplus_{(a,b)\in S} R \longrightarrow \mathbf{E}(\bigoplus_{(a,b)\in S} \mathbf{tr}_B(A))$ que es la composición de las inclusiónes:

$$\bigoplus_{(a,b)\in S} Rb \rightarrow \bigoplus_{(a,b)\in S} Ra \xrightarrow{inc.} \bigoplus_{(a,b)\in S} \mathbf{tr}_B(A) \rightarrow \mathbf{E}(\bigoplus_{(a,b)\in S} \mathbf{tr}_B(A)).$$

Por el Corolario 2.2, tenemos que $\bigoplus_{(a,b)\in S} Rb = S_B \leq_e \mathbf{tr}_B A$, por lo que $\varphi \circ i$ es un monomorfismo con i monomorfismo esencial. por (*) de la demostración del Lema 3.3, se tiene que φ es monomorfismo. Por lo tanto $\mathbf{tr}_A B \leq \mathbf{E}(\bigoplus_{(a,b)\in S} (\mathbf{tr}_B A))$. Por lo tanto $[\mathbf{tr}_A B] \leq [\mathbf{tr}_B A]$. De manera similar se prueba que $[\mathbf{tr}_B A] \leq [\mathbf{tr}_A B]$. Por lo tanto $[\mathbf{tr}_B A] = [\mathbf{tr}_A B]$.

ii) Sabemos que $\mathbf{tr}_B A \leq A \leq \mathbf{E}(A)$, lo que implica que $[\mathbf{tr}_B A] \leq [A]$, por i), se tiene que $[\mathbf{tr}_B A] = [\mathbf{tr}_A B] \leq [A]$ ■.

COROLARIO 3.1

Sean $A, C \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, A, C inyectivos y no singulares, si $[C] \leq [A]$, entonces $[C] = [\mathbf{tr}_C A]$.

Demostración:

Por el Lema 3.3, $[C] \leq [\mathbf{tr}_C A]$. Por el Lema 3.4, $[\mathbf{tr}_C A] \leq [C]$, de donde se tiene el resultado ■.

LEMA 3.5

Para $A, B, C \in \mathbf{R-Mód}$, A, B, C, inyectivos y no singulares si $[C] \leq [A]$, entonces $\mathbf{tr}_C B \leq \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A B)$, por lo que en particular $[\mathbf{tr}_C B] \leq [\mathbf{tr}_A B]$.

Demostración:

Por hipótesis, $C \subseteq \mathbf{E}(A^{(I)})$, para algún conjunto de índices I. Es suficiente mostrar que si $h \in \mathbf{Hom}_R(C, B)$, entonces $h(C) \subseteq \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A B) \subseteq B$. Así pues, observemos los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{i} & \mathbf{E}(A^{(I)}) \\ h \searrow & & \swarrow \widehat{h} \\ & B & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C \cap A^{(I)} & \xrightarrow{i} & A^{(I)} \\ h\mid_{C \cap A^{(I)}} \searrow & & \swarrow \widehat{h}\mid_{A^{(I)}} \\ & B & \end{array}$$

Por la inyectividad de B tenemos que existe $\widehat{h} : \mathbf{E}(A^{(I)}) \longrightarrow B$, tal que $\widehat{h}\mid_C = h$. Ahora consideremos las restricciones de h y $\widehat{h}$, como en el segundo diagrama, de este modo tenemos $h(C \cap A^{(I)}) \subseteq \mathbf{tr}_A B$. Por el Lema 1.2, i) y el hecho de que $C \cap A^{(I)} \leq_e C$, se sigue que $h(C \cap A^{(I)}) \leq_e h(C)$, por lo que:

$$\begin{array}{ccc} h(C \cap A^{(I)}) & \longrightarrow & h(C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{tr}_A(B) & \longrightarrow & \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A(B)) \end{array}$$

Por lo tanto $h(C) \subseteq \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A B)$ ■.

COROLARIO 3.2

Si $B \in \mathbf{R-Mód}$, es no singular e inyectivo, entonces el mapeo:

$\mathbf{tr}_{(\_)}(B) : \Xi(R) \longrightarrow \Xi(R)$, dado por:

$\mathbf{tr}_{(\_)}(B)([A]) = [\mathbf{tr}_A(B)]$ para $[A] \in \Xi(R)$, y A cualquier representante de $[A]$, es un mapeo que preserva el orden.

Demostración:

Sean pues $[C], [A] \in \Xi(R)$, tal que $[C] \leq [A]$, por el Lema anterior se tiene que $\mathbf{tr}_{(\_)}(B)([C]) = [\mathbf{tr}_C B] \leq [\mathbf{tr}_A B] = \mathbf{tr}_{(\_)}(B)([A])$ ■.

LEMA 3.6

Sean $A, B \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, inyectivos y no singulares, entonces se tiene que:

i) $[A] \wedge [B] = [\mathbf{tr}_A B] = [\mathbf{tr}_B A]$, en particular ;

ii) $[A] \wedge [B] = [\{0\}] = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{Hom}_R(A, B) = \{0\}$.

Demostración:

Por el Lema 3.4 parte i), $[\mathbf{tr}_A B] = [\mathbf{tr}_B A]$, y $[\mathbf{tr}_A B] \leq [B]$, $[\mathbf{tr}_A B] \leq [A]$, (la última desigualdad es por el Lema 3.4 parte ii)), entonces es claro que $[\mathbf{tr}_A B]$ es una cota inferior para $\{[A], [B]\}$. Afirmamos que es la máxima cota inferior.

Sea $[C] \in \Xi(R)$ una cota inferior para $\{[A], [B]\}$, como $[C] = [EC]$, por el Corolario 3.1, se tiene que $[C] \leq [\mathbf{tr}_C B]$.......(1).

Como $[C] \leq [A]$, y $\mathbf{tr}_{(\_)}(B)$ es un mapeo que preserva el orden (Corolario 3.2), se tiene que $[\mathbf{tr}_C B] \leq [\mathbf{tr}_A B]$.......(2).

De este modo por las desigualdades (1) y (2) tenemos $[C] \leq [\mathbf{tr}_A B]$, lo que implica que $[A] \wedge [B] = [\mathbf{tr}_B A] = [\mathbf{tr}_A B]$.

La prueba de ii) es inmediata de el último corolario del Capítulo 2 y de las definiciones ■.

LEMA 3.7

Sean $A, B, C \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, no singulares e inyectivos, entonces se cumplen las siguientes condiciones:

i) $\mathbf{tr}_A(B \oplus C) = (\mathbf{tr}_A B) \oplus (\mathbf{tr}_A C)$;

ii) $[A] \wedge ([B] \vee [C]) = ([A] \wedge [B]) \vee ([A] \wedge [C])$.

Demostración:

i) Sea $x \in \mathbf{tr}_A(B \oplus C)$, entonces $x = f_1(a_1) + ... + f_n(a_n)$, con $f_i \in \mathbf{Hom}_R(A, B \oplus C)$ y $a_i \in A$. Como $f_i(a_i) \in B \oplus C$ para toda $i = 1, ..., n$, entonces $f_i(a_i) = b_i + c_i$, para algunos $b_i \in B$, $c_i \in C$ (únicos), de este modo tenemos que $x = \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} c_i$. Considerando el siguiente diagrama :

$$\begin{array}{c} C \xleftarrow{\pi_C} B \oplus C \xrightarrow{\pi_B} B \\ \uparrow f_i \\ A \end{array}$$

Tenemos que $b_i = \pi_B f_i(a_i)$, y $c_i = \pi_C f_i(a_i)$. Por lo que:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \pi_B f_i(a_i) + \sum_{i=1}^{n} \pi_C f_i(a_i).$$

Con $\sum_{i=1}^{n} \pi_B f_i(a_i) \in \mathbf{tr}_A B$, $\sum_{i=1}^{n} \pi_C f_i(a_i) \in \mathbf{tr}_A C$, por lo tanto $x \in (\mathbf{tr}_A B) \oplus (\mathbf{tr}_A C)$. Por lo que $\mathbf{tr}_A\,(B \oplus C) \subseteq (\mathbf{tr}_A B) \oplus (\mathbf{tr}_A C)$.

Para probar la otra contención, tomamos $x \in (\mathbf{tr}_A B) \oplus (\mathbf{tr}_A C)$, entonces $x = h_1(a_1) + \ldots + h_n(a_n) + g_1(a'_1) + \ldots + g_m(a'_m)$, con $h_i \in \mathbf{Hom}_R(A, B)$, $g_i \in \mathbf{Hom}_R(A, C)$, y $a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_m \in A$.

Como antes, observemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "i_C"] & B \oplus C & B \arrow[l, "i_B"'] \\
& A \arrow[ul, "g_i"] \arrow[ur, "h_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Así $x = [i_B h_1(a_1) + \ldots + i_B h_n(a_n)] + [i_C g_1(a'_1) + \ldots + i_C g_m(a'_m)]$. Con $[i_B h_1(a_1) + \ldots + i_B h_n(a_n)] \in \mathbf{tr}_A\,(B \oplus C)$, y $[i_C g_1(a'_1) + \ldots + i_C g_m(a'_m)] \in \mathbf{tr}_A\,(B \oplus C)$. Por lo tanto $x \in \mathbf{tr}_A\,(B \oplus C)$.

ii) Por el Lema 3.2 y Lema 3.6, tenemos $[A] \wedge ([B] \vee [C]) = [A] \wedge [B \oplus C] = [\mathbf{tr}_A\,(B \oplus C)] = [\mathbf{tr}_A B \oplus \mathbf{tr}_A C]$, por otro lado $([A] \wedge [B]) \vee ([A] \wedge [C]) = [\mathbf{tr}_A B] \vee [\mathbf{tr}_A C] = [\mathbf{tr}_B A \oplus \mathbf{tr}_C A]$ ■.

LEMA 3.8

Si $B \in$ R − Mód es no singular y $\widetilde{R} = R/\mathbf{Z}_2(R)$, entonces se cumplen :

i) $[B] = \left[\mathbf{tr}_B \mathrm{E}(\widetilde{R})\right]$;

ii) $[B] \leq \left[\widetilde{R}\right]$.

Demostración:

Por el Corolario 1.5, $\mathbf{tr}_B \mathbf{E}(\widetilde{R}) \leq_e \mathbf{tr}_{\mathbf{E}(B)} \mathbf{E}(\widetilde{R})$, por lo cual $[\mathbf{tr}_B \mathbf{E}(\widetilde{R})] = [\mathbf{tr}_{\mathbf{E}(R)} \mathbf{E}(\widetilde{R})]$.

Dado que R tiene identidad, entonces se cumplen las siguientes identidades: $(\mathbf{tr}_{\mathrm{E}\widetilde{R}}B) = \mathrm{E}(B) = \mathbf{tr}_{\mathrm{E}(\widetilde{R})}\mathrm{E}(B)$, por el Lema 3.6, $[B] = [\mathbf{tr}_{\mathrm{E}(\widetilde{R})}\mathrm{E}(B)] = [\mathbf{tr}_{\mathrm{E}(B)}\mathrm{E}(\widetilde{R})] = [\mathbf{tr}_B\mathrm{E}(\widetilde{R})]$, por lo tanto $[B] = [\mathbf{tr}_{\mathrm{E}(B)}\mathrm{E}(\widetilde{R})] \leq [\mathrm{E}(\widetilde{R})] = [\widetilde{R}]$ ■.

COROLARIO 3.3

Si $A \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$ es no singular, entonces existe un submódulo $Q \leq \widetilde{R} = R/\mathrm{Z}_2(R)$, tal que $[A] \vee [Q] = [\widetilde{R}]$, y $[A] \wedge [Q] = [\{0\}] = 0$.

Demostración:

Por el Corolario 2.3, podemos descomponer a $\mathrm{E}(\widetilde{R}) = \mathrm{E}(\mathbf{tr}_A\mathrm{E}(\widetilde{R})) \oplus \mathbf{rej}_{\mathrm{E}(A)}\mathrm{E}(\widetilde{R})$, por el Lema 3.8, tenemos que $[A] = [\mathbf{tr}_A\mathrm{E}\left(\widetilde{R}\right)]$. Sea $Q = \mathbf{rej}_{\mathrm{E}(A)}\mathrm{E}(\widetilde{R})$, es claro que Q así definido cumple las condiciones del corolario ■.

COROLARIO 3.4

Si R es un anillo, entonces $\left\langle \Xi(R), \leq, \vee, \wedge, 0, 1 = [\widetilde{R}] \right\rangle$, es una retícula Booleana completa.

DEFINICIÓN

Para un R-módulo no singular A, su clase de equivalencia $[A] \in \Xi(R)$.

Definimos $[A]^C \in \Xi(R)$ como $[A]^C = [Q]$, donde Q es como en el Corolario 3.3. Además por la prueba del Corolario 2.3 Q, es único. A $[A]^C$ le llamaremos el complemento de $[A]$ en $\Xi(R)$. También $[A]^C = [\widetilde{R} \cap Q] = [\mathbf{rej}_{\mathrm{E}(A)}\mathrm{E}(\widetilde{R})] = [\mathbf{rej}_{\mathrm{E}(A)}\widetilde{R}]$. Para probar la última igualdad, basta probar que $\mathbf{rej}_{\mathrm{E}(A)}\widetilde{R} \leq_e \mathbf{rej}_{\mathrm{E}(A)}\mathrm{E}(\widetilde{R})$.

Sea pues $\{0\} \neq h \in \mathbf{rej}_{\mathrm{E}(A)}\mathrm{E}(\widetilde{R})$. Por la esencialidad de $\widetilde{R}$ en $\mathrm{E}(\widetilde{R})$, existe $r \in R$ tal que $0 \neq rh \in \widetilde{R}$. Ahora sea $g \in \mathbf{Hom}_R(\widetilde{R}, \mathrm{E}(A))$, por la inyectividad de $\mathrm{E}(A)$ y la no singularidad de $\widetilde{R}$, se tiene que existe un único morfismo $\widehat{g} \in \mathbf{Hom}_R(\mathrm{E}(\widetilde{R}), \mathrm{E}(A))$, tal que $\widehat{g}\mid_{\widetilde{R}} = g$, por lo tanto $g(rh) = \widehat{g}(rh) = r\widehat{g}(h) = r0 = 0$, por lo cual $rh \in Ker(g)$, y como g fue arbitrario tenemos que $rh \in \mathbf{rej}_{\mathrm{E}(A)}\widetilde{R}$, lo que termina la prueba.

DEFINICIONES

a) Si $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, diremos que M es uniforme, si cada vez que $\{0\} \neq H, \{0\} \neq$

K, $H, K \in \mathbf{Sub}_R(M)$, se tiene que $H \cap K \neq \{0\}$. Equivalentemente, si todo submódulo no cero de M es esencial en M.

Por ejemplo, el anillo de los números enteros visto como módulo sobre si mismo es uniforme.

b) Un R-módulo izquierdo M es discreto si M contiene esencialmente una suma directa de submódulos uniformes, es decir $\bigoplus_{\alpha \in I} U_\alpha \leq_e M$, para algún conjunto de índices I y U_α uniforme para todo $\alpha \in I$. De esta definición es claro que todo módulo uniforme es discreto.

c) Diremos que un R-módulo izquierdo M es *continuo*, si M no contiene submódulos uniformes.

Por ejemplo, si $\mathbb{Z}_2$ es el grupo de las congruencias en los enteros módulo 2. Es decir $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, y χ_0 es el cardinal de los números naturales.

Consideremos a $\mathbb{Z}_2^{\chi_0}$ y $\mathbb{Z}_2^{(\chi_0)}$. El producto directo externo y la suma directa externa de χ_0 copias de $\mathbb{Z}_2$ respectivamente.

Sea $M = \mathbb{Z}_2^{\chi_0}/\mathbb{Z}_2^{(\chi_0)}$. Así M es un $\mathbb{Z}-$módulo continuo.

De aquí en adelante $A, B, C,$ y D representaran R-módulos izquierdos no singulares. Diremos que A es *molecularmente continuo*, si A es continuo y para cada submódulo $\{0\} \neq B \leq A$, B contiene un submódulo $\{0\} \neq C \leq B$, tal que $[C] \in \Xi(R)$ es un *átomo*. Al R-módulo C se le llamara *átomo continuo*. Diremos que un R-módulo B es *sin fondo* ó *interminable* si B no tiene submódulos que sean átomos continuos.

Nota

Como $\Xi(R)$ es una retícula booleana completa, entonces las definiciones anteriores tienen sentido. Los átomos en una retícula son los elementos no cero mínimos (los que se encuentran en el primer nivel de la retícula). Es decir que un átomo en una retícula ya no tiene ningún elemento no cero de la retícula por debajo de él. Análogamente en una retícula puede haber coátomos que son los elementos máximos propios de la retícula. Puede haber retículas que cuales, no tengan átomos, ni coátomos.

Por ejemplo :

a) Si $\mathbb{Z}$ es el anillo de los enteros y $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \left\{ \left[\frac{m}{p^k}\right] \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \mid p^k \nmid m, \quad p \text{ primo y } k \in \mathbb{N} \right\}$, en ([1]) y ([11]) se prueba que la retícula de submódulos de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ visto como $\mathbb{Z}-$módulo izquierdo es la siguiente:

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} \ldots\ldots\ldots \geq \mathbb{Z}_{p^n} \geq \mathbb{Z}_{p^{n-1}} \geq \ldots\ldots \geq \mathbb{Z}_p \geq 0.$$

Entonces en está retícula hay un sólo átomo $\mathbb{Z}_p$ y no hay ningún coátomo.

b) Ahora tomemos $\mathbb{Z}_{(p)} = \{(a/b) \in \mathbb{Q} | \ \ p \nmid b\}$. En ([1]) se prueba que la retícula de ideales de $\mathbb{Z}_{(p)}$ está dada por:

$$\mathbb{Z}_{(p)} \geq p\mathbb{Z}_{(p)} \geq p^2\mathbb{Z}_{(p)} \geq \ldots. \geq p^n\mathbb{Z}_{(p)} \geq \ldots \geq 0.$$

En esta retícula no hay ningún átomo, pero sí un coátomo: a saber, $p\mathbb{Z}_{(p)}$.

En este punto también mencionaremos que a una retícula Booleana $\langle L, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ se le puede asociar un anillo booleano L mediante las operaciones siguientes: si $x, y \in L$, entonces i) $x \cdot y = x \wedge y$, y ii) $x + y =$ el complemento relativo de $x \wedge y$ en el intervalo $[0, x \vee y]$.

Análogamente, a un anillo booleano L se le asocia una retícula booleana L cuyas operaciones de retícula son: i) $\inf\{x,y\} = x \wedge y = x \cdot y$, y ii) $\sup\{x,y\} = x \vee y = x + y + (x \cdot y)$. Por el Corolario 3.4, tenemos que $\Xi(R)$ es una retícula booleana completa, y por lo antes mencionado nos referiremos a $\Xi(R)$ ya sea como retícula, o como anillo.

Definamos ahora las siguientes Subclases de $\Xi(R)$;

$\Xi_C(R) = \{[C] \mid C \text{ es continuo}\} = \Xi_C$, si el anillo es fijo.

$\Xi_D(R) = \{[D] \mid D \text{ es discreto}\} = \Xi_D.$

$\Xi_{CA}(R) = \{[A] \mid A$ es molecularmente continuo (abreviatura m.c.)$\} = \Xi_{CA}.$

$\Xi_{CB}(R) = \{[B] \mid B \text{ es sin fondo}\} = \Xi_B$.

Si $N \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, diremos que N es comprimible, si dado $0 \neq H \leq N$, entonces H tiene un submódulo isomorfo a N.

PROPOSICIÓN 3.I

Si $M \in$ **R – Mód** es inyectivo y no singular, entonces se satisface lo siguiente:

i) $M = C \oplus D = A \oplus B \oplus D$, con C continuo, D discreto, A molecularmente continuo, B sin fondo.

ii) Si $M = A' \oplus B' \oplus D'$, con D' discreto, A' (m.c.), B' sin fondo, entonces $A = A', B = B', D = D'$.

iii) A, B, C y D, son submódulos invariantes de M.

iv) $A = \mathrm{E}(\oplus \{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\})$, donde todos los A_γ son átomos continuos.

Demostración:

Primeramente probaremos algunos lemas técnicos.

LEMA 3.I.1

Sean $M, N \in$ **R – Mód**, ambos no singulares, y $H \leq_e N$, si $f, g \in \mathbf{Hom}_R(N, M)$, tal que $f \mid_H = g \mid_H$, entonces $f = g$.

Demostración:

Consideremos la siguiente sucesión exacta de R-módulos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{i} & N & \xrightarrow{\pi} & N/H & \longrightarrow & 0 \\ & 0 = & f-g \searrow & & f \downarrow g & & \swarrow \varphi & & \\ & & & & M & & & & \end{array}$$

Como $(f-g)(H) = \{0\}$, entonces existe un único $\varphi : N/H \longrightarrow M$ tal que $(f-g) = \varphi\pi$, pero N/H es singular y M es no singular, por lo tanto $\varphi = 0$, por lo tanto $(f-g) = 0$, por lo cual $f = g$.

Lema 3.I.2

Sean $M \in$ **R – Mód** inyectivo y no singular, $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia independiente máxima de submódulos uniformes de M, y $E = \mathrm{E}(\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha)$, entonces:

i) E contiene a todos los submódulos uniformes de M.

ii) $E = \mathrm{E}(\sum \{U \mid U \leq M,\ U \text{ uniforme.}\})$

iii) E es invariante en M.

Demostración:

i) Sea $U \leq M$, U uniforme, afirmamos que $E \cap U \neq 0$, pues de caso contrario se contradiría la maximalidad de la familia independiente, por lo tanto $\mathbf{E}(E \cap U) \subseteq E$ pero $\mathbf{E}(E \cap U) = \mathbf{E}(U)$, como $\mathbf{E}(U)$ es única en M, pues por la no singularidad de U, y el hecho de que no hay morfismos distintos de cero entre los módulos singulares y los no singulares.

Pues si $\mathbf{E}(U)$ y $\widehat{U}$, fueran dos cápsulas inyectivas de U en M, entonces existe f un morfismo de $\mathbf{E}(U)$ en $\widehat{U}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}(U) & \xrightarrow{f} & \widehat{U} \\ \uparrow & & \uparrow \\ U & \xrightarrow{Id_U} & U \end{array}$$

Por el Lema anterior se tiene que la identidad $(i_{\mathbf{E}(U)})$ de $\mathbf{E}(U)$ en M, es igual a $i_{\widehat{U}} \circ f$, donde $i_{\widehat{U}}$ es la identidad de $\widehat{U}$ en M. Por lo tanto, para toda $x \in \mathbf{E}(U)$, $x = i_{\mathbf{E}(U)}(x) = i_{\widehat{U}}(f(x)) = f(x)$. por lo tanto f es la identidad. Por lo tanto $\mathbf{E}(U)$ es única.

ii) Por i), $\sum \{U \mid U \leq M,\ U \text{ uniforme.}\} \subseteq E = \mathbf{E}(\underset{\alpha \in I}{\oplus} M_\alpha) \subseteq \sum\{U \mid U \leq M,\ U$ uniforme$\}$.

iii) Afirmamos que si U es uniforme y $f \in \mathbf{End}_R(M)$, entonces $f(U) \subseteq E$. Si $f(U) \neq \{0\}$, entonces $f(U) \cong U / Ker(f \mid_U)$. Si $Ker(f \mid_U) \neq \{0\}$, como $Ker(f \mid_U) \leq_e U$, entonces $U / Ker(f \mid_U) \cong f(U)$ es de singular, lo cual es imposible pues M es no singular. Por lo tanto $Ker(f \mid_U) = \{0\}$, por lo tanto $f(U) \cong U$, y por i) de este lema se obtiene el resultado.

Además por la demostración anterior como E es invariante, más aún E esta caracterizado por $E = \mathbf{tr}_E(M)$. Por el Corolario 2.3, $\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}(\mathbf{tr}_E(M)) \oplus \mathbf{rej}_E(M)$, con $\mathbf{tr}_E(M), \mathbf{rej}_E(M)$ submódulos invariantes de M, ademas como $E = \mathbf{tr}_E(M)$ es invariante tenemos que $\mathbf{E}(\mathbf{tr}_E(M)) = \mathbf{tr}_E(M)$, y así $M = \mathbf{tr}_M(E) \oplus Q$, entonces $\mathbf{tr}_Q M = \{0\}$, con $Q = \mathbf{rej}_E(M)$.

LEMA 3.I.3

Sea $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, M no singular e inyectivo. Si $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia independiente máxima de submódulos de M, los cuales son átomos continuos, si $E = \mathbf{E}(\bigoplus_{\Gamma} A_\gamma)$, entonces se satisface lo siguiente.

i) E contiene a todos los átomos continuos de M.

ii) $E = (\sum\{A \mid A \leq M,$ con A un átomo continuo$\})$

iii) E es un submódulo invariante de M.

Demostración:

i) Sea $A \leq M$, tal que A es un átomo continuo, consideramos $N = E \cap \mathbf{E}(A)$, como $\mathbf{E}(A)$ es un átomo continuo entonces $N \neq \{0\}$, (pues en caso contrario se contradiría la maximalidad de la familia $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$) así como $\mathbf{E}(N) \subseteq \mathbf{E}(A)$, y por el Corolario 2.3, tenemos que $\mathbf{E}(A) = \mathbf{E}(N) \oplus K$, para algún $K \leq \mathbf{E}(A)$. Si $K \neq \{0\}$ entonces K es un átomo continuo con $K \cap E = \{0\}$, lo cual contradice el hecho de que la familia $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es máxima, por lo tanto $K = \{0\}$, por lo que $A \subseteq \mathbf{E}(A) = \mathbf{E}(N) \subseteq E$.

ii) Sabemos que $\sum\{A \mid A \leq M,$ con A átomo continuo$\} \subseteq E$, por lo tanto $\mathbf{E}(\sum\{A \mid A \leq M,$ con A átomo continuo$\}) \subseteq E$, por definición de E, $E \subseteq \mathbf{E}(\sum\{A \mid A \leq M,$ con A átomo continuo$\})$, lo cual termina la prueba de ii).

iii) Afirmamos que si A es un átomo continuo, $A \leq M$, y $f \in \mathbf{End}_R(M)$, entonces $f(A) \subseteq E$. Para probar esto nos ponemos en la situación, y como $f(A) \subseteq M$, tenemos que $\mathbf{Z}(f(A)) = \{0\}$, por lo que $Ker(f)\mid_A$ es un submódulo esencialmente cerrado de A (Lema 1.2, parte iii)), y por lo tanto es inyectivo, por lo que A se puede descomponer como $A = Ker(f)\mid_A \oplus H$, donde $H \cong f(A)$, De aquí se sigue que tanto H como $f(A)$ son átomos continuos, y por i), $f(A) \subseteq E$. Del mismo modo que en el Lema 3.I.1, y Lema 3.I.2, tenemos que E está determinado por $E = \mathbf{tr}_E(M) = \mathbf{E}(\mathbf{tr}_E(M))$, y $\mathbf{E}(M) = M = \mathbf{E}(\mathbf{tr}_E(M)) \oplus \mathbf{rej}_E M$, y si $M = \mathbf{tr}_E(M) \oplus Q$, entonces $\mathbf{tr}_Q M = \{0\}$, y $Q = \mathbf{rej}_E M$.

Demostración de la Proposición 3.I

Sea $\mathcal{L} = \left\{ \{M_\alpha\}_{\alpha\in I} \mid M_\alpha \leq M,\ M_\alpha \text{ uniforme, para toda } \alpha, \text{ y } \sum_{\alpha\in I} M_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in I} M_\alpha \right\}$. Si

$\mathcal{L} = \phi$, entonces M es continuo (ver más adelante la descomposición de M). Si $\mathcal{L} \neq \phi$, entonces definimos la siguiente relación en $\mathcal{L}$:

Diremos que dos familias $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{M_\beta\}_{\beta\in J}$ en $\mathcal{L}$ estan " $\preceq$ " relacionadas $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I} \preceq \{M_\beta\}_{\beta\in J}$, si y solo si $I \subseteq J$. Afirmamos que $(\mathcal{L}, \preceq)$, es un conjunto parcialmente ordenado.

Reflexividad. Como todo conjunto es un subconjunto de sí mismo se tiene que si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I} \in \mathcal{L}$, entonces $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I} \preceq \{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Antisimetría. Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{M_\beta\}_{\beta\in J} \in \mathcal{L}$, son tales que $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I} \preceq \{M_\beta\}_{\beta\in J}$ y $\{M_\beta\}_{\beta\in J} \preceq \{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$, entonces $I \subseteq J$, y $J \subseteq I$, lo cual implica que el conjunto I es igual al conjunto J, por tanto $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I} = \{M_\beta\}_{\beta\in J}$.

Transitividad. Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}, \{M_\beta\}_{\beta\in J}, \{M_\gamma\}_{\gamma\in K} \in \mathcal{L}$, son tales que $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I} \preceq \{M_\beta\}_{\beta\in J}$ y $\{M_\beta\}_{\beta\in J} \preceq \{M_\gamma\}_{\gamma\in K}$, entonces $I \subseteq J$, $J \subseteq K$ de donde se tiene $I \subseteq K$, por lo tanto $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I} \preceq \{M_\gamma\}_{\gamma\in K}$.

Ahora afirmamos que $(\mathcal{L}, \preceq)$ satisface las hipótesis del Lema de Zorn.

Sea $\mathcal{C}$ una cadena de familias en £, $\mathcal{C} = \left\{\{M_\alpha\}_{\alpha\in I_k}\right\}_{k\in J}$. Sea $I = \bigcup_{k\in J} I_k$, es claro que la familia $\widetilde{M} = \{M_\beta\}_{\beta\in I}$ es una cota para $\mathcal{C}$, por lo cual sólo resta probar que $\widetilde{M} \in \mathcal{C}$, lo cual es consecuencia de que todas las subsumas de elementos de $\widetilde{M}$ son sumas directas. Por lo cual $\mathcal{C}$ tiene máximos. Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in L}$ uno de tales máximos.

De este modo elegimos $D = \mathbf{E}(\bigoplus_{\alpha\in L} M_\alpha)$. Como D es la extensión esencial de una suma directa de submódulos uniformes de M, entonces D es discreto e inyectivo, por lo que M se descompone como $M = D \oplus C$, para algún $C \leq M$, C continuo e inyectivo. Por las condiciónes i) y iii) de Lema 3.1.2, se tiene que $D = \mathbf{tr}_M D$ y $C = \mathbf{rej}_D M$, son submódulos invariantes de M.

Ahora sea:

$\mathcal{G} = \{\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \mid A_\gamma \leq C,\ A_\gamma$ átomo continuo, y $\sum_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\}$.

Si $\mathcal{G} = \phi$, entonces C es sin fondo.

Si $\mathcal{G} \neq \phi$, entonces definimos la siguiente relación en los elementos de $\mathcal{G}$, diremos que $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ esta relacionado con $\{A_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ ($\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \preceq \{A_\delta\}_{\delta\in\Delta}$), si y solo si $\Gamma \subseteq \Delta$. Afirmamos que $(\mathcal{G}, \preceq)$, es un conjunto parcialmente ordenado, que satisface las hipótesis del lema de Zorn.(La demostración de este hecho es análoga a la prueba anterior).

De este modo, $\mathcal{G}$ tiene máximos. Sea $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ uno de tales máximos, y consideremos $A = \mathbf{E}(\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \leq C$. Por la inyectividad de C y de A, tenemos que a C lo podemos descomponer como $C = A \oplus B$, para algún $B \leq C$, B sin fondo y por construcción, A molecularmente continuo. Por la parte iii) del Lema 3.I.3, tenemos que tanto A como B son invariantes y de hecho $A = \mathbf{tr}_A C$, $B = \mathbf{rej}_A C$..

Por todo lo anterior tenemos que a M lo podemos descomponer como $M = C \oplus D$ con $C = A \oplus B$, C continuo, D discreto, A molecularmente continuo y B sin fondo lo cual prueba i) iii) y iv) de la Proposición 3.I.

Para probar ii) supongamos que $M = (A' \oplus B') \oplus D'$ con A' (m.c.), D' discreto, $A' \oplus B'$ continuo y B' sin fondo. Por el Lema 3.I.2, $D = \mathbf{E}(\sum\{U \mid U \leq M,\ U \text{ uniforme}\}$ por lo que $D \supseteq D'$. Como C' es continuo entonces $D = \mathbf{E}(\sum\{U \mid U \leq M,\ U \text{ uniforme}\} \subseteq D'$, por tanto $D = D'$. Además $M = D \oplus C'$, implica que $C' = \mathbf{rej}_D M = C$. Del mismo modo se prueba que $A = A'$ y que $B = B'$ ■.

TEOREMA 3.1

Sea R un anillo con identidad, $\mathbf{Z}_2(R) \subseteq R$ el segundo submódulo singular del anillo, $\widetilde{R} = R/\mathbf{Z}_2(R)$. Si $\Xi(R)$ es la retícula que se le asocia al anillo, entonces se cumple :

i) $\Xi(R)$ es un conjunto.

ii) $\Xi(R)$ es una retícula booleana completa, con elemento mayor $[\widetilde{R}]$

iii) $\Xi(R)$ es el producto directo de subretículas convexas $\Xi(R) = \Xi_C(R) \oplus \Xi_D(R)$, (y completas) $\Xi_C(R), \Xi_D(R) \subseteq \Xi(R)$, es decir $\Xi_C(R) \cap \Xi_D(R) = 0$; y cada elemento en $[M] \in \Xi(R)$ esta dado de forma única como $[M] = [C] \vee [D]$, donde $[C] \in \Xi_C(R)$ y $[D] \in \Xi_D(R)$.

Más aún, $[C] \vee [D] \leq [C'] \vee [D'] \Longleftrightarrow [C] \leq [C']$ y $[D] \leq [D']$, con $[C'] \in \Xi_C(R)$ y $[D'] \in \Xi_D(R)$.

iv) $\Xi_C(R) = \Xi_{CA}(R) \oplus \Xi_{CB}(R)$ es una retícula que es producto directo de las subretículas convexas y completas $\Xi_{CA}(R), \Xi_{CB}(R) \subseteq \Xi(R)$. Más aún $\Xi(R) = (\Xi_D(R) \oplus \Xi_{CA}(R)) \oplus \Xi_{CB}(R)$ es una descomposición de la retícula $\Xi(R)$, donde $\Xi_D(R) \oplus \Xi_{CA}(R)$

es atómica y $\Xi_{CB}(R)$ es sin átomos.

v) En particular, $\Xi_D(R), \Xi_C(R), \Xi_{CA}(R), \Xi_{CB}(R)$, son retículas booleanas completas (que pueden ser triviales con 0=1).

Demostración:

Por el Lema 3.8, i), es inmediato.

ii) La prueba de esto es por el Corolario 3.4.

iii) Si $[M] = [\mathbf{E}M] \in \Xi(R)$, entonces por el teorema anterior $\mathbf{E}(M) = D \oplus C$ con $C = A \oplus B$, con D discreto, C continuo, A (m.c.), y B sin fondo, de donde $[M] = [C \oplus D] = [C] \vee [D]$, con $[C] \in \Xi_C(R)$ y $[D] \in \Xi_D(R)$, además trivialmente $\Xi_C(R)$ $\cap \Xi_D(R) = \{[0]\}$. Probaremos ahora la última afirmación de iii).

$\Rightarrow]$ Como $[D] \vee [C] \leq [D'] \vee [C'] = [\mathbf{E}C'] \vee [\mathbf{E}D']$, entonces $[D \oplus C] \leq [\mathbf{E}D' \oplus \mathbf{E}C']$, así $D \oplus C \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_I (\mathbf{E}(D') \oplus \mathbf{E}(C')))$, de donde tenemos que:
$D \oplus C \subseteq \mathbf{E}((\bigoplus_I \mathbf{E}D') \oplus (\bigoplus_I \mathbf{E}C')) = \mathbf{E}(\bigoplus_I \mathbf{E}D') \oplus \mathbf{E}(\bigoplus_I \mathbf{E}C')$, (por un resultado de la Teoría general de módulos [1]. La cápsula inyectiva de una suma finita de módulos es igual a la suma de las cápsulas inyectivas de cada sumando) y como D es discreto entonces $D \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_I D')$, y por ser C continuo $C \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_I C')$, por tanto $[D] \leq [D']$, $[C] \leq [C']$.

$\Leftarrow]$ es inmediato

iv) Es inmediata de iii) y de la descomposición para módulos inyectivos, que se dio en la proposición anterior.

v) Primero probaremos que $\Xi_D(R)$ es una subretícula booleana completa y convexa de $\Xi(R)$. Como una primera observación tenemos que si $[D] \in \Xi_D(R)$, y $[M] \in \Xi(R)$, es tal que $[M] \leq [D]$, entonces $[M] \in \Xi_D(R)$. Para probar esto sin pérdida de generalidad podemos suponer que tanto D como M son módulos inyectivos, y por el teorema anterior tenemos que $[M] = [C \oplus D_1]$, con C continuo y D_1 discreto, de donde $[M] = [C] \vee [D_1] \leq [0] \vee [D]$, y por iii) de este teorema se tiene que $[C] \leq [0]$ y $[D_1] \leq [D]$, de donde se observa que $C = \{0\}$, por lo tanto $[M] \in \Xi_D(R)$.

Ahora probaremos que $\Xi_D(R)$ es completa, para ello primero veremos que $\Xi_D(R)$ es cerrada bajo ínfimos y supremos. Sean $[D_0], [D_1] \in \Xi_D(R)$, $[D_0] \vee [D_1] = [D_0 \oplus D_1]$. Afirmamos que $D_0 \oplus D_1$ es discreto, y para probar esto tenemos por hipótesis que D_0 y D_1 contienen esencialmente sendas sumas directas de módulos uniformes. Es decir $\bigoplus_{\alpha \in I} U_\alpha \leq_e D_0$ y $\bigoplus_{\beta \in J} \widehat{U}_\beta \leq_e D_1$, donde $\{U_\alpha\}, \left\{\widehat{U}_\beta\right\}$ son familias de submódulos de D_0 y D_1 respectivamente. Así es claro que $((\bigoplus_{\alpha \in I} U_\alpha) \oplus (\bigoplus_{\beta \in J} \widehat{U}_\beta)) \leq_e D_0 \oplus D_1$. Por lo tanto $[D_0] \vee [D_1] \in \Xi_D(R)$. De esta misma prueba se puede ver que los supremos de familias arbitraras en $\Xi_D(R)$ están en $\Xi_D(R)$. Veamos ahora que $\Xi_D(R)$ es cerrada bajo ínfimos, pero esto es claro pues $[D_0] \wedge [D_1] \leq [D_0] \in \Xi_D(R)$ y por la observación previa tenemos que $[D_0] \wedge [D_1] \in \Xi_D(R)$. Por lo tanto $\Xi_D(R)$ es una retícula booleana completa.

Como $\vee$ y $\wedge$ son cerrados en $\Xi_D(R)$ se tiene que $\Xi_D(R)$ hereda de $\Xi(R)$ la propiedad de ser distributiva, por lo que sólo resta probar que $\Xi_D(R)$ es complementada. Sea $[D'] \in \Xi_D(R)$ como $\Xi_D(R)$ tiene elemento mayor llamemosle $\left[{}_D\widetilde{R}\right]$ y como $\Xi(R)$ es complementada, entonces existe $[D']^C \in \Xi(R)$, tal que $[D'] \vee [D']^C = \left[\widetilde{R}\right]$ y $[D'] \wedge [D']^C = [0]$, de este modo definimos el complemento de $[D']$ en $\Xi_D(R)$ como $[{}_D D']^C = [D']^C \wedge \left[{}_D\widetilde{R}\right]$ y afirmamos que éste así definido resulta ser el complemento de $[D']$. Por la pura definición de $[{}_D D']^C$ y la observación hecha al principio de esta prueba, es claro que $[{}_D D']^C \in \Xi_D(R)$, ahora veamos que $[{}_D D']^C \vee [D'] = ([D']^C \wedge [{}_D\widetilde{R}]) \vee [D'] \doteq$

$([D']^C \vee [D']) \wedge ([{}_D\widetilde{R}] \vee [D']) = [\widetilde{R}] \wedge [{}_D\widetilde{R}] = [{}_D\widetilde{R}]$, y por otro lado $[{}_D D']^C \wedge [D'] = [D'] \wedge ([D']^C \wedge [{}_D\widetilde{R}]) = ([D'] \wedge [D']^C) \wedge [{}_D\widetilde{R}] = [0] \wedge [{}_D\widetilde{R}] = [0]$, por lo tanto $\Xi_D(R)$ es una retícula booleana completa y convexa.

(*) Si $[A], [B]$ y $[C] \in \Xi(R)$. Entonces $([A] \wedge [B]) \vee [C] = ([A] \vee [C]) \wedge ([B] \vee [C])$.

Prueba. $([A] \wedge [B]) \vee [C] = [\mathbf{tr}_B A] \vee [C]$.

y por otro lado $([A] \vee [C]) \wedge ([B] \vee [C]) = [\mathbf{tr}_{A \oplus C} B \oplus C] = [\mathbf{tr}_B A] \vee [\mathbf{tr}_C A] \vee [\mathbf{tr}_B C] \vee [\mathbf{tr}_C C] = [\mathbf{tr}_B A] \vee [C]$.

Ahora probaremos que $\Xi_C(R)$ es una retícula booleana completa y convexa. Como una primera observación tenemos que si $[C] \in \Xi_C(R)$ y $[M] \in \Xi(R)$ es tal que $[M] \leq [C]$, entonces $[M] \in \Xi_C(R)$, para probar esto tenemos que por la proposición anterior $[M] = [C_1 \oplus D]$ con C_1 continuo y D discreto, de donde $[M] = [C_1 \oplus D] \leq [C] \vee [0]$ y por iii) de este teorema tenemos que $[C_1] \leq [C]$ y $[D] \leq [0]$, por lo tanto $D = \{0\}$, lo cual implica que $[M] = [C_1] \in \Xi(R)$.

Para probar que $\Xi_C(R)$ es Completa tomamos $[C_0], [C_1] \in \Xi_C(R)$ y tenemos que probar que $[C_0] \vee [C_1]$ y $[C_0] \wedge [C_1] \in \Xi_C(R)$, pero $[C_0] \vee [C_1] = [C_0 \oplus C_1]$, Afirmamos que $C_0 \oplus C_1$ es un módulo continuo, supongamos que no es el caso, por lo que existe $H \leq C_0 \oplus C_1$ tal que H es uniforme, y sea $i : H \longrightarrow C_0 \oplus C_1$ la inclusión y $\pi : C_0 \oplus C_1 \longrightarrow C_1$ la proyección en C_1 consideremos ahora a $f = \pi i : H \longrightarrow C_1$, afirmamos que $f(H)$ es un submódulo uniforme de C_1. Para probar esto tomamos un submódulo N no cero de $f(H)$ y probaremos que $N \leq_e f(H)$. Sea $0 \neq f(x) \in f(H)$, con $x \in H$, sabemos que la imagen inversa $f^{-1}(N)$ es un submódulo de H, y como H es uniforme se tiene que existe $r \in R$ tal que $0 \neq rx \in f^{-1}(N)$, así $0 \neq f(rx) \in N$ (por construcción de f), por tanto $f(H)$ es un submódulo uniforme de C_1, lo cual no es posible pues C_1 es continuo, por lo tanto $C_0 \oplus C_1$ es continuo, por tanto $[C_0] \vee [C_1] \in \Xi_C(R)$. De la observación hecha al principio de este párrafo se tiene que $[C_0] \wedge [C_1] \in \Xi_C(R)$, por tanto $\Xi_C(R)$ es convexa. Que es completa se sigue de la prueba de que $[C_0] \vee [C_1] \in \Xi_C(R)$.

Sólo nos resta probar que $\Xi_C(R)$ es complementada. Sea $[_C\widetilde{R}]$ el elemento mayor de $\Xi_C(R)$, definimos para $[C'] \in \Xi_C(R)$ a $[_C C']^C = [C']^C \wedge [_C\widetilde{R}]$, donde $[C']^C$ es el complemento de $[C']$ en $\Xi(R)$, Afirmamos que $[_C C']^C$ así definido es el complemento de $[C']$ en $\Xi_C(R)$, por la definición de $[_C C']^C$ es claro que está en $\Xi_C(R)$, y además se cumple $[_C C']^C \vee [C'] = ([C']^C \wedge [_C\widetilde{R}]) \vee [C'] \overset{por\ (*)}{=} ([C']^C \vee [C']) \wedge ([_C\widetilde{R}] \vee [C']) = [\widetilde{R}] \wedge [_C\widetilde{R}]$
$= [_C\widetilde{R}]$. Por otro lado $[C'] \wedge [_C C']^C = ([C'] \wedge [C']^C) \wedge [_C\widetilde{R}] = [0] \wedge [_C\widetilde{R}] = [0]$. Por lo tanto $\Xi_C(R)$ es una retícula booleana completa y convexa.

La prueba de que $\Xi_{CA}(R)$ y $\Xi_{CB}(R)$, son retículas booleanas completas y convexas se sigue de las pruebas anteriores, lo cual finaliza la prueba de v) ■.

COROLARIO I (al Teorema 3.1)

i) Sea $U \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, U no singular, uniforme, entonces $[U]$ es un átomo en $\Xi(R)$.

ii) Si $N \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, es continuo, no singular y comprimible, entonces $[N]$ es un átomo en $\Xi(R)$.

Demostración:

ii) Sea $[M] \in \Xi(R)$ tal que $[M] \leq [N]$, como N es comprimible para $0 \neq x \in N$, se tiene que $N \cong H \leq Rx$, por tanto $[N] = [Rx]$. De este modo tenemos que $M \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_I Rx)$. Sea $K = M \cap (\bigoplus_I Rx) \neq \{0\}$, sea $0 \neq y \in K$, entonces $y = r_1x + ... + r_nx$, con $r_i \in R$ si $ry = 0$, entonces $r(r_ix) = 0$ para toda $i = 1...n$, por tanto $\mathbf{An}(y) \subseteq \mathbf{An}(r_ix)$ para toda $i = 1...n$, si $\mathbf{An}(y) \subsetneq \mathbf{An}(r_1x)$, entonces existe $\alpha \in R$ tal que $\alpha y \neq 0$ y $\alpha(r_1x) = 0$. Si $\mathbf{An}(\alpha y) = \mathbf{An}(\alpha r_1x)$, entonces $N \subseteq R\alpha r_1x \cong R\alpha y$, por lo tanto $[N] \leq [R\alpha y] \leq [M]$, por lo tanto $[N] = [M]$. Si $\mathbf{An}(\alpha y) \neq \mathbf{An}(\alpha r_1x)$, entonces $\alpha y = \alpha r_2 + ... + \alpha r_n$, de donde si $\mathbf{An}(\alpha y) \subsetneq \mathbf{An}(\alpha r_2x)$, entonces existe $\beta \in R$ tal que $\beta(\alpha y) \neq 0$ y $\beta(\alpha r_2x) = 0$. Por lo que si $\mathbf{An}(\beta\alpha y) = \mathbf{An}(\beta\alpha r_2x)$ entonces se concluye como arriba. Continuando de este modo se tiene que existen $\gamma, \delta \in R$ tales que $\mathbf{An}(\gamma y) = \mathbf{An}(\delta x)$, por lo que $R\gamma y \cong R\delta x$, por lo cual $[N] \leq [R\gamma y] \leq [M]$, por lo tanto $[N] = [M]$, por lo tanto $[N]$ es un átomo en $\Xi(R)$. También observemos que $[N] \in \Xi_{CA}(R)$.

i) Como en la prueba anterior U es uniforme, entonces $Rx \leq_e U$, para todo $0 \neq x \in U$, por lo que $[U] = [Rx]$, si existe $[M] \in \Xi(R)$ tal que $[M] \leq [Rx] = [U]$, entonces $M \subseteq \mathbf{E}(\bigoplus_I Rx)$, si $K = M \cap (\bigoplus_I Rx)$, y como en la prueba anterior se tiene que existen $\alpha, \beta \in R$, con $[R\alpha y] = [R\beta x]$, para $0 \neq y \in K$, por lo cual $[U] \leq [M]$, por lo tanto $[U] = [M]$, por lo que $[U]$ es un átomo en $\Xi(R)$. También observemos que $[U] \in \Xi_D(R)$ ■.

Definimos ahora $\mathbf{X}_D = \{\tau \mid \tau = [U], \text{ con } U \text{ uniforme}\}$ el conjunto de todos los tipos determinados por los R-módulos no singulares y uniformes U, donde un tipo en $\Xi(R)$ es el conjunto de todos los R-módulos que tienen la misma clase de equivalencia. Consideremos la retícula usual $\mathcal{H}(R) = \langle \mathcal{P}(\mathbf{X}_D), \cap, \cup, \setminus, \mathbf{X}_D, \phi \rangle$, de todos los subconjuntos de $\mathbf{X}_D$.

También definimos $\mathbf{X}_{CA} = \{\rho \mid \rho = [A], \text{ con } A \text{ un átomo continuo}\}$, el conjunto de todos los tipos determinados por los R-módulos no singulares A, los que son átomos continuos. Consideraremos la retícula usual $\mathcal{K}(R) = \langle \mathcal{P}(\mathbf{X}_{CA}), \cap, \cup, \setminus, \mathbf{X}_{CA}, \phi \rangle$ de todos los subconjuntos de $\mathbf{X}_{CA}$.

COROLARIO II (al Teorema 3.1).

i) Existe un homomorfismo suprayectivo de retículas booleanas $\Xi(R) \xrightarrow{\Psi_D} \mathcal{H}(R)$, cuya restricción a $\Xi_D(R)$ es un isomorfismo de retículas.

ii) Existe un homomorfismo suprayectivo de retículas booleanas $\Xi(R) \xrightarrow{\Psi_{CA}} \mathcal{K}(R)$, cuya restricción a $\Xi_{CA}(R)$ es un isomorfismo de retículas.

Demostración.

i) Sea $\Psi_D : \Xi(R) = \Xi_C(R) \oplus \Xi_D(R) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{X}_D)$, dado por ;

$\Psi_D([A]) = \{\tau \in \mathbf{X}_D \mid \text{ existe } \{0\} \neq U \leq A,\ [U] \in \tau\}$. para $[A] \in \Xi(R)$.

Afirmación Ψ_D así definido es un homomorfismo suprayectivo de retículas.

Lo que tenemos que mostrar es que si $[A], [B] \in \Xi(R)$, entonces $\Psi_D([A] \vee [B]) = \Psi_D([A]) \cup \Psi_D([B])$, y $\Psi_D([A] \wedge [B]) = \Psi_D([A]) \cap \Psi_D([B])$. Para ello tenemos que $\Psi_D([A] \vee [B]) = \Psi_D([A \oplus B]) = \{\tau \in \mathbf{X}_D \mid \text{ existe } \{0\} \neq U \leq A \oplus B,\ [U] \in \tau\}$ como U es uniforme y $U \leq A \oplus B$, entonces $U \leq A$ ó $U \leq B$, de donde se sigue que:

$\Psi_D([A] \vee [B]) =$

$$\{\tau \in \mathbf{X}_D \mid \text{ existe } \{0\} \neq U \leq A,\ [U] \in \tau\} \cup \{\tau \in \mathbf{X}_D \mid \text{ existe } \{0\} \neq U \leq A,\ [U] \in \tau\} =$$

$\Psi_D([A]) \cup \Psi_D([B])$.

Ahora probaremos que:

$\Psi_D([A] \wedge [B]) = \Psi_D([\mathbf{tr}_A B]) = \Psi_D([\mathbf{tr}_B A]) = \Psi_D([A]) \cap \Psi_D([B])$.

$\subseteq]$ Si $\tau \in \Psi_D([A] \wedge [B])$, entonces existe U un R-módulo no singular, tal que $[U] \in \tau$, y $U \leq \mathbf{tr}_A B$, $U \leq \mathbf{tr}_B A$, de donde $U \leq A$, y $U \leq B$, por lo tanto $\tau \in \Psi_D([A]) \cap \Psi_D([B])$.

$\supseteq]$ Sea $\tau \in \Psi_D([A]) \cap \Psi_D([B])$, entonces existe un R-módulo U tal que $[U] \in \tau$, y $U \leq A$, $U \leq B$, además podemos suponer que A es inyectivo, por lo cual U es un submódulo de la traza de B en A, es decir $U \leq \mathbf{tr}_A B$, por lo tanto $\tau \in \Psi_D([A] \wedge [B])$. Por lo tanto Ψ_D es un homomorfismo de retículas.

Probaremos Ψ_D es suprayectivo, sea $\tau \in X_D$, entonces $\tau = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \iota_\gamma$ es decir τ es la unión de todos los tipos que están por debajo de él. Sea $[A] = \bigvee_{\alpha\in\Gamma} [U_\gamma]$, donde $[U_\gamma] = \iota_\gamma$, de este modo es claro que $[A] \in \Xi(R)$, y $\Psi_D([A]) = \tau$, por lo tanto Ψ_D es suprayectiva. De la pura definición de $\mathcal{H}(R)$, tenemos que la restricción de Ψ_D a $\Xi_D(R)$ es un isomorfismo de retículas.

ii) Sea $\Psi_{CA} : \Xi(R) \longrightarrow \mathcal{P}(X_{CA})$, dado por:

$\Psi_{CA}([A]) = \{\sigma \in X_{CA} \mid \text{ existe } 0 \neq N \leq A, \text{ con } [N] = \sigma\}$ para $[A] \in \Xi(R)$.

Afirmación: Ψ_{CA} así definido es un homomorfismo suprayectivo de retículas.

Para probar esto, sean $[A], [B] \in \Xi(R)$, así.

$$\Psi_{CA}([A] \vee [B]) = \{\sigma \in X_{CA} \mid \text{ existe } 0 \neq N \leq A \oplus B, \text{ con } [N] = \sigma\}.$$

$\subseteq]$ Sea $\sigma \in \Psi_{CA}([A] \vee [B])$, como $N \leq A \oplus B$, y N es un átomo continuo tenemos que $N \leq A$, ó $N \leq B$, pues $N \cap A \subseteq N$, por lo que $[N \cap A] \leq [N]$ de donde $[N \cap A] = [0]$, ó $[N \cap A] = [N]$. Si $[N \cap A] = [0]$, entonces $N \cap A = \{0\}$, por lo que $N \leq B$, y si $[N \cap A] = [N] \leq [A]$, se tiene que $N \leq A$. Por lo tanto $\sigma \in \Psi_{CA}([A]) \cup \Psi_{CA}([B])$.

$\supseteq]$ Es inmediato.

Ahora $\Psi_{CA}([A] \wedge [B]) = \Psi_{CA}([\mathbf{tr}_A B]) = \Psi_{CA}([\mathbf{tr}_B A])$, tenemos que probar que:

$$\Psi_{CA}([A] \wedge [B]) = \Psi_{CA}([A]) \cap \Psi_{CA}([B]).$$

$\subseteq]$ Es inmediata.

$\supseteq]$ Sea $\sigma \in \Psi_{CA}([A]) \cap \Psi_{CA}([B])$, entonces existe N un R-módulo no singular tal que $N \leq A$, $N \leq B$ con $[N] = \sigma$. Como podemos suponer que A es inyectivo tenemos que $N \leq \mathbf{tr}_B A$, por tanto se tiene que $\sigma \in \Psi_{CA}([\mathbf{tr}_B A])$. La prueba de que Ψ_{CA} es un homomorfismo suprayectivo, es similar a la prueba de que Ψ_D es un homomorfismo suprayectivo.

Además es claro que la restricción de Ψ_{CA} a $\Xi_{CA}(R)$, es un isomorfismo de retículas.

De este modo tenemos que los homomorfismos suprayectivos de retículas Ψ_D, Ψ_{CA} inducen un isomorfismo de retículas $\Psi : \Xi_D(R) \oplus \Xi_{CA}(R) \longrightarrow \mathcal{P}(X_D) \cup \mathcal{P}(X_{CA})$ ■.

COROLARIO III (al Teorema 3.1):

Sean $A, B \in \mathbf{R} - \mathbf{Mód}$, $\mathbf{Z}(A) = \{0\} = \mathbf{Z}(B)$, A, B inyectivos. Si $[A] + [B]$ denota la suma de clases en el anillo booleano asociado a la retícula booleana $\Xi(R)$, entonces se cumple:

i) $[A] + [B] = [\mathbf{rej}_B A \oplus \mathbf{rej}_A B]$.

ii) El complemento relativo de $[A] \wedge [B]$ en $[B]$ es $[B] \wedge ([A] \wedge [B])^C = [\mathbf{rej}_A B]$, es decir $[B] = [\mathbf{tr}_A B] \vee [\mathbf{rej}_A B]$, con $[\mathbf{tr}_A B] \wedge [\mathbf{rej}_A B] = [0]$.

iii) En particular, si $[A] \lneqq [B]$, entonces existen $\{0\} \neq P \lneqq B$, $\{0\} \neq Q \lneqq B$, tales que $[B] = [P] \vee [Q]$, $[P] \wedge [Q] = [0]$, y $[P] = [A]$.

Demostración:

i) Como $\Xi(R)$ es una retícula booleana completa, entonces ([9]) $\Xi(R)$ tiene automáticamente asociado un anillo booleano ($\Xi(R), +, \cdot$) que llamaremos también $\Xi(R)$. Las operaciones del anillo booleano asociado son las siguientes:

Si $[A], [B] \in \Xi(R)$.

$[A] + [B]$ es el complemento relativo de $[A] \wedge [B]$ en el intervalo $[[0], [A] \vee [B]]$, y

$[A] \cdot [B] = [A] \wedge [B]$

Por el Corolario 2.3 tenemos que, $[A] = [\mathbf{tr}_B A] \vee [\mathbf{rej}_B A]$ y $[B] = [\mathbf{tr}_A B] \vee [\mathbf{rej}_A B]$, por lo cual $[A] \vee [B] = [\mathbf{tr}_B A] \vee [\mathbf{rej}_B A] \vee [\mathbf{tr}_A B] \vee [\mathbf{rej}_A B] = [\mathbf{tr}_A B] \vee [\mathbf{rej}_B A] \vee [\mathbf{rej}_A B]$. Ahora veamos que $[\mathbf{rej}_B A] \vee [\mathbf{rej}_A B]$ es el complemento relativo de $[A] \wedge [B]$ en $[[0], [A] \vee [B]]$, pero esto es facil pues $([A] \wedge [B]) \vee [\mathbf{rej}_B A] \vee [\mathbf{rej}_A B] = [\mathbf{tr}_A B] \vee [\mathbf{rej}_B A] \vee [\mathbf{rej}_A B] = [A] \vee [B]$. Por otro lado $([A] \wedge [B]) \wedge ([\mathbf{rej}_B A] \vee [\mathbf{rej}_A B]) = [\mathbf{tr}_A B] \wedge ([\mathbf{rej}_B A] \vee [\mathbf{rej}_A B]) = ([\mathbf{tr}_A B] = [\mathbf{tr}_B A] \wedge [\mathbf{rej}_B A]) \vee ([\mathbf{tr}_A B] \wedge [\mathbf{rej}_A B] = [0]$, la última igualdad se da por el Corolario 2.3. Por lo tanto $[A] + [B] = [\mathbf{rej}_A B \oplus \mathbf{rej}_B A]$.

ii) Basta probar que a) $[\mathbf{rej}_A B] \vee ([A] \wedge [B]) = [B]$, y b) $[\mathbf{rej}_A B] \wedge ([A] \wedge [B]) = [0]$. Pero $[\mathbf{rej}_A B] \vee ([A] \wedge [B]) = [\mathbf{rej}_A B] \vee [\mathbf{tr}_A B] = [B]$, (la última igualdad es por el Corolario 2.3) y $[\mathbf{rej}_A B] \wedge ([A] \wedge [B]) = [\mathbf{rej}_A B] \wedge [\mathbf{tr}_A B] = [0]$, (también esta igualdad se da por el Corolario 2.3 y por el Lema 3.6).

iii) Sea $P = \mathbf{tr}_A B \leq B$, y $Q = \mathbf{rej}_A B \leq B$, como $[P] = [\mathbf{tr}_A B] = [\mathbf{tr}_B A] \leq [A] \lneqq [B]$, se tiene que $[P] \lneqq [B]$, por el Corolario 2.3, sabemos que $[B] = [P] \vee [Q]$ y $[P] \wedge [Q] = [0]$. Luego $[P] = [\mathbf{tr}_A B] = [A] \wedge [B] = [A]$, pues $[A] \lneqq [B]$, esto termina la prueba ■.

COROLARIO IV (al Teorema 3.1)

Supóngase que $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ es una familia de submódulos de un R-módulo no singular C, entonces se cumple.

i) $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} [A_\gamma] = [\sum_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma]$;

ii) En particular, si todo A_γ es del mismo tipo $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subseteq [A]$, para algún $[A] \in \Xi(R)$, entonces también $\sum_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in [A]$.

Demostración.

Primeramente probaremos dos observaciones.

Observación 1.

Si $B = \langle B, \vee, \wedge \rangle$ es una retícula booleana completa, entonces B satisface la ley distributiva para supremos infinitos, es decir $x \wedge (\vee \{x_i \mid i \in I\}) = \bigvee_{i \in I} (x \wedge x_i)$ para un conjunto de índices I, y para $x, x_i \in B$.

Demostración. Como $x \wedge x_i \leq x$, y $x \wedge x_i \leq x_i$ para todo $i \in I$, entonces $x \wedge x_i \leq \bigvee_{i \in I} x_i$, por tanto $x \wedge x_i \leq x \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i)$ para todo $i \in I$, por lo tanto tenemos que $x \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i)$ es una cota superior para $T = \{x \wedge x_i \mid i \in I\}$, y sea u una cota superior para T, de este modo $x \wedge x_i \leq u$ para toda $i \in I$, luego observamos que $x_i = x_i \wedge (x \vee x^c) = (x_i \wedge x) \vee (x_i \wedge x^c) \leq u \vee x^c$, por lo tanto $x \wedge (\vee \{x_i \mid i \in I\}) \leq x \wedge (u \vee x^c) = (x \wedge u) \vee (x \wedge x^c) = x \wedge u \leq u$, por lo tanto $x \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i)$ es la mínima cota superior para T por lo que $x \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I} (x \wedge x_i)$

.

Observación 2. Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de submódulos de un R-módulo M, tal que $\mathbf{Hom}_R(M_\alpha, \mathbf{E}(Q)) = \{0\}$, para todo M_α, y $Q \in \mathbf{R} - \mathbf{Mód}$, entonces:

$$\mathbf{Hom}_R(\sum_\alpha M_\alpha, \mathbf{E}(Q)) = \{0\}.$$

Demostración.

Como $\mathbf{Hom}_R(M_\alpha, \mathbf{E}(Q)) = \{0\}$, entonces,

$\prod\limits_{\alpha}(\mathbf{Hom}_R(M_\alpha, \mathbf{E}(Q))) = \{0\}$ y por un resultado de la Teoría General de Módulos ([1]) tenemos que:

$$\prod_{\alpha}(\mathbf{Hom}_R(M_\alpha, \mathbf{E}(Q))) \cong \mathbf{Hom}_R(\bigoplus_{\alpha} M_\alpha, \mathbf{E}(Q)) = \{0\}\,.$$

Por otro lado, el epimorfismo natural $\bigoplus\limits_{\alpha} M_\alpha \xrightarrow{f} \sum\limits_{\alpha} M_\alpha \longrightarrow 0$ induce un monomorfismo.

$0 \longrightarrow \mathbf{Hom}_R(\sum\limits_{\alpha} M_\alpha, \mathbf{E}(Q)) \xrightarrow{f_*} \mathbf{Hom}_R(\bigoplus\limits_{\alpha} M_\alpha, \mathbf{E}(Q)) = \{0\}$, de lo cual se obtiene el resultado.

Demostración del Corolario IV. Claramente, $\bigvee\limits_{\gamma}[A_\gamma] \leq [\sum\limits_{\gamma} A_\gamma]$, y supongamos que $\bigvee\limits_{\gamma}[A_\gamma] \lneqq [\sum\limits_{\gamma} A_\gamma]$.

Por el Corolario anterior iii) existe $\{0\} \neq P \leq \sum\limits_{\gamma} A_\gamma$, $\{0\} \neq Q \leq \sum\limits_{\gamma} A_\gamma$, tal que $[P] = \bigvee\limits_{\gamma}[A_\gamma]$, con $[P] \vee [Q] = [\sum\limits_{\gamma} A_\gamma]$ y $[P] \wedge [Q] = \bigvee\limits_{\gamma}[A_\gamma] \wedge [Q] = [0]$, por la observación 1 se tiene que $[Q] \wedge (\bigvee\limits_{\gamma}[A_\gamma]) = \bigvee\limits_{\gamma}([Q] \wedge [A_\gamma]) = [0]$, de donde se tiene que $[Q] \wedge [A_\gamma] = [0]$ para toda $\gamma \in \Gamma$, por lo tanto $\mathbf{Hom}_R(A_\gamma, \mathbf{E}(Q)) = \{0\}$. Por la observación 2 se tiene que $\mathbf{Hom}_R(\sum\limits_{\gamma} A_\gamma, \mathbf{E}(Q)) = \{0\}$, por lo tanto $Q = \{0\}$, por tanto $\bigvee\limits_{\gamma}[A_\gamma] = [\sum\limits_{\gamma} A_\gamma]$ ■.

COROLARIO V (al Teorema 3.1).

Sea $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, no singular. Para cada $\alpha \leq [M] \in \Xi(R)$, existe un submódulo M_α de M tal que :

a) $M_\alpha \leq M$ con. i) $[M_\alpha] = \alpha$, y ii) para todo $N \leq M$ con $[N] \leq \alpha$, entonces $N \leq M_\alpha$.

b) Por lo que M_α es el más grande submódulo (único) de M del tipo α.

Con $M_\alpha = \overline{M_\alpha} \leq M$, $\mathbf{E}(M_\alpha) \leq \mathbf{E}(M)$ y $M_\alpha \leq M$ es invariante.

c) Para Tipos $\alpha, \beta \leq [M]$, las siguientes condiciones son equivalentes.

i) $\alpha \wedge \beta = 0$.

ii) $M_\alpha \cap M_\beta = \{0\}$.

iii) $\mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}(M_\alpha), \mathbf{E}(M_\beta)) = \{0\}$.

Demostración:

a) Tomamos cualquier representante A del tipo α, y consideramos al conjunto $M_\alpha = M \cap \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A \mathbf{E}(M))$ de este modo tenemos que $M_\alpha \leq M$, con $[M_\alpha] \leq [A]$. Por el Corolario

2.3, tenemos que $\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(M)) \oplus \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}M$, por lo cual $[M] = [M_\alpha] \vee [M_{\alpha^c \wedge [M]}] = [M_\alpha] \vee [\mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}M]$, y con $[M_\alpha] \leq [A] \leq [M_\alpha] \vee [\mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}M]$. Por lo que $[A] = \alpha = [M_\alpha]$.

b) Como $[M_\alpha] = [\mathbf{E}(M_\alpha)]$, se tiene que $[M_\alpha] \geq [\mathbf{E}(M_\alpha)]$ y por a) de este Corolario $\mathbf{E}(M_\alpha) \leq M_\alpha$, por lo tanto $M_\alpha = \mathbf{E}(M_\alpha)$. Por lo tanto $M_\alpha \leq M$ es esencialmente cerrado. Ahora probaremos que M_α es un submódulo invariante de M. Sea $f \in \mathbf{End}_R(M)$, y consideremos $[M_\alpha] \wedge [f(M_\alpha)] = [\mathbf{tr}_{M_\alpha} f(M_\alpha)] \leq [M_\alpha]$, pero el mismo morfismo $f \in \mathbf{Hom}_R(M_\alpha, f(M_\alpha))$, pues es la restricción de f a un submódulo de M. Por lo tanto $f(M_\alpha) \subseteq \mathbf{tr}_{M_\alpha} f(M_\alpha) \leq f(M_\alpha)$. Por lo tanto $[f(M_\alpha)] \leq [M_\alpha]$, y por a) de este Corolario se tiene que $f(M_\alpha) \leq M_\alpha$.

c) i)$\Rightarrow$ii) Si $\alpha, \beta \in [M]$, entonces existen (por el inciso a)) M_α, M_β submódulos de M tales que $[M_\alpha] = \alpha$ y $[M_\beta] = \beta$. Por hipótesis $[M_\alpha] \wedge [M_\beta] = [0]$, lo que implica que $\mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}(M_\alpha), \mathbf{E}(M_\beta)) = \{0\}$. Afirmamos que $\mathbf{E}(M_\alpha) \cap \mathbf{E}(M_\beta) = \{0\}$. Pues si no fuera el caso la inclusion $i : \mathbf{E}(M_\alpha) \cap \mathbf{E}(M_\beta) \longrightarrow \mathbf{E}(M_\alpha)$ y la inyectividad de $\mathbf{E}(M_\alpha)$ extendería a un morfismo no cero entre $\mathbf{E}(M_\alpha)$ y $\mathbf{E}(M_\beta)$, lo que no es posible, por lo que $\mathbf{E}(M_\alpha) \cap \mathbf{E}(M_\beta) = \{0\}$, de donde se tiene que $M_\alpha \cap M_\beta = \{0\}$.

ii)$\Rightarrow$iii) Como $[M_\alpha] \wedge [M_\beta] = [\mathbf{tr}_{M_\beta} M_\alpha] \leq [M_\beta]$, y $[M_\alpha] \wedge [M_\beta] = [\mathbf{tr}_{M_\beta} M_\alpha] \leq [M_\alpha]$ por a) se tiene que $\mathbf{tr}_{M_\beta} M_\alpha \leq M_\beta$, y $\mathbf{tr}_{M_\alpha} M_\beta \leq M_\alpha$, por lo tanto $\mathbf{tr}_{M_\beta} M_\alpha \subseteq M_\alpha \cap M_\beta = \{0\}$ por hipótesis, por tanto $[\mathbf{tr}_{M_\beta} M_\alpha] = [0]$, por tanto $\mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}(M_\beta), \mathbf{E}(M_\alpha)) = \{0\}$.

iii)$\Rightarrow$i) $\mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}(M_\alpha), \mathbf{E}(M_\beta)) = \{0\} \Leftrightarrow [\mathbf{E}(M_\alpha)] \wedge [\mathbf{E}(M_\beta)] = [0] \Rightarrow \alpha \wedge \beta = [0]$ ■.

COROLARIO VI (al Teorema 3.1)

Sea $M \in \mathbf{R}-$ **Mód** no singular y un tipo α en $\Xi(R)$, con $\alpha \leq [M]$.

Si $M_\alpha \leq M$ es el submódulo de M (el del Corolario anterior), y $\Gamma \subseteq \Xi(R)$ con elementos, son no cero y ajenos por parejas, de tal forma que $\sup\Gamma = [M]$, entonces existe una descomposición de $\mathbf{E}(M)$ de la siguiente manera:

i) $\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}(\oplus\{M_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\})$

ii) Si $\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}(\oplus\{N_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\})$ con $[N_\gamma] = \gamma$, y $N_\gamma \leq \overline{N_\gamma} \leq M$. Entonces $N_\gamma = M_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Demostración:

i) Sea $\Gamma = \{\gamma \in \Xi(R) \mid \gamma \leq [M]$ y M_γ es un submódulo máximo de $M\}$, de este modo es claro que $\sup\Gamma = [\oplus \{M_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}] = [\mathrm{E}(\oplus \{M_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\})] = [M]$. Por el Corolario previo se tiene i). También es claro que Γ es ajeno por parejas.

ii) Por el Corolario previo, si tenemos las dos descomposiciones descritas en ii) como $[N_\gamma] = \gamma \leq [M_\gamma]$, entonces $N_\gamma \leq M_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$, y del mismo modo $[N_\gamma] \geq \gamma = [M_\gamma]$, lo que implica que $M_\gamma \leq N_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Por lo tanto $N_\gamma = M_\gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$ ■.

Capítulo 4

EL FUNTOR Ξ.

El principal objetivo de este Capítulo es el de mostrar que Ξ es un funtor contravariante (ver [1]) de una cierta categoría de anillos $\mathcal{U}$ en una cierta categoría de anillos booleanos, o equivalentemente de retículas booleanas $\mathcal{B}$.

Primeramente daremos la notación necesaria, así como algunas definiciones que nos seran útiles.

DEFINICIÓN 4.1.

Los objetos de $\mathcal{U}$ serán anillos $R, S, T, ...$, con identidad, los morfismos serán:

a) Homomorfismos de anillos que preservan la identidad $\psi : R \longrightarrow S$, que son además.

b) Homomorfismos suprayectivos y tales que

c) Sus núcleos sean ideales esencialmente cerrados.

Es decir, por simplicidad siempre nos encontraramos en la siguiente situación: $Ker(\psi) = I$, con I un ideal esencialmente cerrado en R; siempre $S = R/I$ y ψ será la proyeccion natural.

Si N es un S-módulo y ψ es como en la Definición 4.1, entonces N_ψ denotará el R-módulo inducido por el morfismo de anillos ψ. Basta definir a rn como $rn = \psi(r)n$, para $r \in R$ y $n \in N$.

Los submódulos singulares y cápsulas inyectivas con respecto al anillo S serán denotadas por ${}^S\mathrm{Z}$, ${}^S\mathrm{Z}_2$, ${}_S\mathrm{E}$. Para un R-módulo izquierdo ${}_RM$, ${}_R\mathrm{L}(M)$ denotará a el conjunto de todos los submódulos esenciales de M. De la misma manera quedará definido ${}_S\mathbf{L}(N)$ para un anillo S y ${}_SN \in \mathbf{S-Mód}$.

Como vimos en el capítulo anterior a cada anillo S, le asociamos la retícula $\Xi(S)$. De este modo los elementos de $\Xi(S)$ serán denotados por ${}_S[N]$, en el caso de que $N \in \mathbf{S-Mód}$, y ${}^S\mathrm{Z}(N) = \{0\}$.

Los siguientes resultados serán utilizados repetidamente posteriormente, aunque ninguno de ellos requiera que $I \leq R$ sea un ideal esencialmente cerrado de R.

RESULTADOS.

1) El conjunto de los S-submódulos de un S-módulo N coincide con el conjunto de los R-submódulos de N_ψ.

2) En particular, ${}_S\mathbf{L}(N) =_R \mathbf{L}(N_\psi)$.

3) Si $P, Q \in \mathbf{S-Mód}$, entonces $\mathbf{Hom}_R(P_\psi, Q_\psi) = \mathbf{Hom}_S(P, Q)$.

4) ${}_S\mathbf{E}(N) = \{x \in_R \mathbf{E}(N_\psi) \mid Ix = \{0\}.\}$.

5) Sean $A \leq B$, para $B \in \mathbf{R-Mód}$. A es un submódulo esencialmente cerrado B de si y sólo si, para todo $L \leq_e B$, se tiene que $(A + L)/A \leq_e B/A$.

Demostración.

1) Es inmediato de las definiciones dadas.

2) $\subseteq]$ Si $H \in_S \mathbf{L}(N)$,entonces $H_\psi \leq N_\psi$, sea $0 \neq x \in N_\psi$, entonces por hipótesis existe $s \in S$ tal que $0 \neq sx \in N$, pero $s = \psi(r)$ para algun $r \in R$, por lo tanto $0 \neq sx = \psi(r)x = rx \in H_\psi$.

$\supseteq]$ Es similar a la anterior.

3) Afirmamos que si $\alpha \in \mathbf{Hom}_S(P, Q)$, entonces $\alpha(rp) = r\alpha(p)$ para toda $r \in R$, y $p \in P \iff \alpha(sp) = s\alpha(p)$ para toda $s \in S$.

$\Rightarrow]$ $\alpha(sp) = \alpha(\psi(r)p) = \alpha(rp) = r\alpha(p) = \psi(r)\alpha(p) = s\alpha(p)$, donde $s = \psi(r)$.

$\Leftarrow]$ $\alpha(rp) = \alpha(\psi(r)p) = \alpha(sp) = s\alpha(p) = \psi(r)\alpha(p) = r\alpha(p)$, donde $s = \psi(r)$. Por lo que $\mathbf{Hom}_R(P_\psi, Q_\psi) = \mathbf{Hom}_S(P, Q)$.

4) Llamémosle $H =_S \mathbf{E}(N) = \{x \in_R \mathbf{E}(N_\psi) \mid Ix = \{0\}\}$, como $\psi(IN) = \psi(I)N = 0N = \{0\}$, por tanto $N \subseteq H$, y como $H \subseteq \mathbf{E}(N)$ se tiene que $N \leq_e H$ como R-módulo.

Como los módulos esenciales son los mismos, se tiene que $N \leq_e H$, como S-módulo, por lo que H es un S-módulo.

Por lo tanto sólo falta probar que H es inyectivo. Para ello tomamos un ideal $J \leq S$, y un morfismo $f : J \longrightarrow H$. Como $H \subseteq \mathbf{E}(N_\psi)$, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & J & \xrightarrow{i} & S \\ & & f\downarrow & \swarrow & \downarrow\psi \\ 0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{i} & \mathbf{E}(N_\psi) \end{array}$$

De este modo es claro que f se extiende a un morfismo $\overline{f} : S \longrightarrow H$ Por lo tanto H es inyectivo.

5) Es una consecuencia inmediata de d), en la Proposicion 1.2.

Conclusiones.

Usando 2) y 5) de los resultados anteriores, mostraremos que los morfismos de $\mathcal{U}$, definida como en el inicio del capítulo, son cerrados bajo la composición de morfismos y por lo tanto $\mathcal{U}$ es efectivamente una categoría.

Primero probaremos que $\langle \mathcal{U}, \mathbf{Hom}_R(\_,\_)\rangle$ es cerrada bajo la composición de morfismos, de este modo sean $R, S, T \in \mathcal{U}$, y morfismos de anillos $\psi : R \longrightarrow S$, y $\alpha : S \longrightarrow T$ con $S = R/Ker(\psi)$, $T = S/Ker(\alpha)$, con $Ker(\psi)$ esencialmente cerrado en R, y $Ker(\alpha)$ esencialmente cerrado en S, es claro que $\alpha\psi : R \longrightarrow T$ es un epimorfismo y que $T = R/Ker(\alpha\psi)$. Por lo cual solo nos resta probar que $Ker(\alpha\psi)$ es un ideal esencialmente cerrado en R. Para ello por el resultado 5) tenemos que $Ker(\alpha\psi)$ es esencialmente cerrado en $R \Leftrightarrow$ Para todo $L \in_R \mathbf{L}(R)$, se tiene que $(Ker(\alpha\psi)+L)/Ker(\alpha\psi) \leq_e T$ pero por el resultado 2) ${}_T\mathbf{L}(T) =_S \mathbf{L}(S_\alpha) =_R \mathbf{L}(R_{\alpha\psi})$ de este modo se tiene que $L \in_T \mathbf{L}(T)$, por lo que se obtiene el resultado.

El resto de la prueba de que $\mathcal{U}$ es una categoría se sigue de la definición de $\mathcal{U}$.

LEMA 4.1.

Para $\psi : R \longrightarrow S$, con $Ker(\psi)$ un ideal esencialmente cerrado de R y $S = R/Ker(\psi)$, $N \in \mathbf{S-Mód}$, y N_ψ el R-módulo inducido por ψ, entonces se satisface lo siguiente:

i) ${}^S\mathbf{Z}(N) = {}^R\mathbf{Z}(N_\psi)$;

ii) ${}^S\mathbf{Z}_2(N) = {}^R\mathbf{Z}_2(N_\psi)$.

Demostración:

i) Primero por el resultado 2) se tiene que ${}_R\mathrm{L}(S_\psi) =_S \mathrm{L}(S)$, en particular dado $I \leq R$ un ideal esencialmente cerrado de R y por el resultado 2) se tiene que para $n \in N$, $\mathbf{An}(n) \leq_e R \Leftrightarrow (\mathbf{An}(n)/I) \leq_e R/I \Leftrightarrow (\mathbf{An}(n)/I) \in_S \mathrm{L}(S)$, por lo cual $\mathbf{An}(n) \leq_e S$. Una repetición del mismo argumento con N remplazándolo por $N/{}^S\mathrm{Z}(N)$ prueba ii) ■.

OBSERVACION 4.1

Si $[{}_SP] \leq [{}_SQ]$ en $\Xi(S)$, entonces $[P_\psi] \leq [Q_\psi]$ en $\Xi(R)$.

Demostración.

Por hipótesis $P \subseteq_S \mathbf{E}(\bigoplus_J Q)$, por el resultado 4), $({}_S\mathbf{E}(\bigoplus_J Q))_\psi \subseteq \mathbf{E}((\bigoplus_J Q)_\psi)$, por lo tanto $P_\psi \subseteq_R \mathbf{E}((\bigoplus_J Q)_\psi) = \mathbf{E}(\bigoplus_J Q_\psi)$, por lo que $[P_\psi] \leq [Q_\psi]$. Por lo tanto la asignación $\psi^*([{}_SN]) = [N_\psi]$ es independiente del representante, por lo que $\psi^* : \Xi(S) \longrightarrow \Xi(R)$ está bien definida.

La siguiente definición de alguna manera es dual a las condiciones a), b), y c) de la definición de la categoría $\mathcal{U}$ dada al inicio del capítulo.

DEFINICIÒN 4.2

Los objetos de $\mathcal{B}$ son retículas booleanas completas $L_1, L_2, \ldots\ldots$ incluyendo la retícula trivial con $0 = 1$ y cuyos morfismos $\Psi : L_1 \longrightarrow L_2$ son :

a) Morfismos de retículas que preservan el cero ($\Psi(0) = 0$) los que son además

b) Morfismos inyectivos, y con

c) imágenes convexas $\Psi(L_1) \subseteq L_2$.

Una primera observación a esta Definición es el hecho de que $\mathcal{B}$ con los morfismos así definidos es una categoría.

Algunas consecuencias inmediatas de la definición anterior son las siguientes:

CONSECUENCIAS.

1) Si $B = \Psi(L_1)$, y $f = \Psi(1_{L_1})$, y para $b \in B$, con $b^c \in L_2$ el complemento de b en L_2 y 1_{L_1} el elemento máyor de L_1. Definimos $b^* = b^c \wedge f$, el complemento de b en B, entonces Ψ preserva ínfimos y supremos arbitrarios.

Demostración:

Sea una familia de elementos en L_1, $\{x_i \mid i \in I\}$, con $x_i \in L_1$. Lo que debemos mostrar para que Ψ preserve supremos arbitrarios, es que $\Psi(\vee\{x_i \mid i \in I\}) = \bigvee_{i\in I} \Psi(x_i)$, pero $\Psi(x_i) \leq \Psi(\vee\{x_i \mid i \in I\})$ para toda $i \in I$, por lo tanto $\bigvee_{i\in I} \Psi(x_i) \leq \Psi(\vee\{x_i \mid i \in I\})$.

Sea $u \in L_2$ tal que $\Psi(x_i) \leq u$, para toda $i \in I$.

Caso 1. Si $u \in \Psi(L_1)$, entonces $u = \Psi(y)$ para algún $y \in L_1$. Como $x_i \leq y$ para toda i, se tiene que $x_i = x_i \wedge y$, por lo que $\Psi(x_i) = \Psi(x_i \wedge y) = \Psi(x_i) \wedge \Psi(y)$ para toda $i \in I$. De este modo tenemos que $\bigvee_{i\in I}(x_i) \leq y \Rightarrow \Psi(\bigvee_{i\in I}(x_i)) \leq \Psi(y) = u$, por lo tanto $\Psi(\bigvee_{i\in I}(x_i))$ es la mínima cota superior para $\{\Psi(x_i) \mid i \in I\}$, por lo tanto $\bigvee_{i\in I} \Psi(x_i) = \Psi(\bigvee_{i\in I}(x_i))$.
Caso 2. Si $u \notin \Psi(L_1)$, entonces le aplicamos el caso 1 a $u \wedge f \leq u$, con $u \wedge f \in \Psi(L_1)$.

La prueba de que Ψ preserva ínfimos arbitrarios es análoga a la prueba anterior. Además de aquí se sigue que L_2 es el producto de anillos booleanos.

$$L_2 = (f \cdot L_2) \times ((1 - f) \cdot L_2)$$

2) $\langle B, \vee, \wedge, *, f, 0\rangle$ es una retícula booleana.

Demostración:

Por la conclusión 1) tenemos que B es una retícula completa. La ley distributiva se cumple en B pues si $\Psi(x), \Psi(y)$ y $\Psi(z) \in B$, entonces.

$$\Psi(x) \wedge (\Psi(y) \vee \Psi(z)) = \Psi(x) \wedge (\Psi(y \vee z)) = \Psi(x \wedge (y \vee z)) =$$
$$\Psi((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) = \Psi(x \wedge y) \vee \Psi(x \wedge z) = (\Psi(x) \wedge \Psi(y)) \vee (\Psi(x) \wedge \Psi(z)).$$

Si $b \in B$, y b^* es el complemento de b como se definio antes, entonces $b \vee b^* = b \vee (b^c \wedge f) = (b \vee b^c) \vee (b \wedge f) = 1_{L_2} \wedge f = f$, y $b \wedge b^* = b \wedge (b^c \wedge f) = (b \wedge b^c) \wedge f = 0 \wedge f = 0$. Por lo tanto $\langle B, \vee, \wedge, *, f, 0\rangle$ es una retícula booleana.

3) i) $L_2 = B \oplus (1-f)L_2$ es el producto directo de ideales del anillo booleano.

Esto se da pues el anillo L_2 es un anillo booleano y tanto f como $1-f$ son idempotentes centrales.

ii) Si $\langle B, [+], \cdot, f, 0\rangle$ es el anillo booleano asociado a la retícula booleana $\langle B, \vee, \wedge, *, f, 0\rangle$, entonces las dos estructuras definidas por i) y ii), coinciden en el mismo conjunto B.

Demostración:

Tanto como B como en L_2, el producto de $a, b \in B$ esta dado por $a \cdot b = a \wedge b$, y la suma está definida de la siguiente manera:

$a + b = (a \vee b) \wedge (a \wedge b)^c$ en L_2.

$a\,[+]\,b = (a \vee b) \wedge (a \wedge b)^*$ en B.

Además sabemos que $a = a \wedge f$ y $b = b \wedge f$, con $(a \wedge b)^* = (a \wedge b)^c \wedge f$, por lo que $a + b = ((a \wedge f) \vee (b \wedge f)) \wedge (a \wedge b)^c = (f \wedge (a \vee b)) \wedge (a \wedge b)^c = (a \vee b) \wedge (a \wedge b)^* = a\,[+]\,b$.

Por tanto $a + b = a\,[+]\,b$ en B.

iii) La correstricción de Ψ a su imagen B induce un isomorfismo (que preserva complemento) de retículas booleanas, $\Psi : \langle L_1, \vee, \wedge, ^c, 1, 0\rangle \longrightarrow \langle B, \vee, \wedge, *, f, 0\rangle$, por lo cual Ψ induce un isomorfismo de anillos booleanos, por lo tanto $L_1 \cong B$

Demostración:

Es claro lo de los isomorfismos por lo cual sólo probaremos que Ψ preserva complementos. Lo que tenemos que probar es que para $x \in L_1$, $\Psi(x') = (\Psi(x))^*$ donde x' es el complemento de x en L_1. Dado que $1_{L_2} = \Psi(x) \vee (\Psi(x))^c \in L_2$, para 1_{L_2} el elemento mayor de L_2. Se sigue de las leyes distributivas y de que $\Psi(x) \leq f$ lo siguiente:

$$f = f \wedge 1 = \Psi(x) \vee (f \wedge (\Psi(x)^c))$$

Substituyendo en la fórmula anterior, tenemos que $\Psi(x') = \Psi(x') \wedge f$, y como además $\Psi(x') \wedge \Psi(x) = 0$ tenemos $\Psi(x') = \Psi(x') \wedge (f \wedge (\Psi(x)^c) \leq (\Psi(x))^*$.

Recíprocamente $f = \Psi(x) \vee \Psi(x')$, como $(\Psi(x))^c \wedge \Psi(x) = 0$, se tiene que $(\Psi(x))^* = (\Psi(x))^c \wedge f = (\Psi(x))^c \wedge \Psi(x') \leq \Psi(x')$. Por lo tanto $\Psi(x') = (\Psi(x))^*$ ■.

LEMA 4.2

Si R es un anillo y $S = R/Ker(\psi)$, donde $\psi : R \longrightarrow S$ es un morfismo de anillos con $Ker(\psi)$ un ideal esencialmente cerrado de R, y ψ^* es el morfismo de la Observación 4.1, entonces $\psi^* \in \mathbf{Hom}(\Xi(S), \Xi(R))$, es decir, ψ^* es un morfismo en la categoría $\mathcal{B}$.

Demostración:

a) Es claro que $\psi^*([0]) = [0]$.

b) Es inmediato de la Observación 4.1 que ψ^* es un morfismo inyectivo.

c) Lo que necesitamos probar es que si $[A] \in \Xi(R)$, y es tal que $[A] \leq \psi^*([{}_SQ])$, entonces $[A] = \psi^*([{}_SL])$, para algún $[L] \in \Xi(S)$. Pero esto se da pues por hipótesis $A \subseteq \mathbf{E}(N_\psi)$ donde $N_\psi = \bigoplus_\Gamma Q$, para algun conjunto de índices Γ. Dado que $A \cap N_\psi \leq_e A$, entonces $[A] = [A \cap N_\psi]$. Como $A \cap N$ es un S-submódulo de N y $\mathbf{Z}(A \cap N) = \{0\}$, entonces $[A \cap N] \in \Xi(S)$ es tal que $\psi^*({}_S[A \cap N]) = [(A \cap N)_\psi] = [A \cap N_\psi] = [A]$. Por lo tanto $\psi^*(\Xi(S))$ es una retícula convexa, por lo tanto si $B = \psi^*(\Xi(S)) \subseteq \Xi(R)$ entonces la correstricción de ψ^* a B es un mapeo biyectivo, que preserva el orden y cuya inversa también preserva el orden. Como B es una subretícula tenemos que $\psi^* : \Xi(S) \longrightarrow B$ es un isomorfismo de retículas ■.

PROPOSICIÓN 4.1

Para $S = R/I$, donde I es un ideal (e.c.) del anillo R, si $K = I + \mathbf{Z}(R)$,y $\overline{K}$ es tal que $\overline{K}/K = \mathbf{Z}(R/K)$, entonces $\overline{K}$ es un ideal de R y $\mathbf{Z}_2({}_SS) = \overline{K}/I$.

Demostración:

Como $\mathbf{Z}(R) \subseteq K \leq_e \overline{K}$ y K es un ideal bilateral de R, por la Proposición 1.5, inciso 6) tenemos que $\overline{K}$ es un ideal de R. Ahora como I es (e.c.) por el resultado 5) de este capítulo se tiene que $(K + I)/I \leq_e R/I$, de donde se sigue que $K/I \leq_e R/I$, por lo tanto $K/I \leq_e \overline{K}/I$. Además por la definición de K, $K/I \subseteq \mathbf{Z}(R/I)$. Por lo tanto $(\overline{K}/I) \cap \mathbf{Z}(R/I) \leq_e \overline{K}/I$. Por el Lema 4.1, se tiene que $\mathbf{Z}(R/I) =_S \mathbf{Z}(R/I)$. Además ${}_R\mathbf{L}(\overline{K}/I) =_S \mathbf{L}(\overline{K}/I)$, por lo que de lo anterior se tiene $(\overline{K}/I) \cap \mathbf{Z}(R/I) \leq_e \overline{K}/I$. Por la proposición 1.1, 3) tenemos $\mathbf{Z}(R/\overline{K}) = 0$, y por el Lema 4.1 tenemos $0 = \mathbf{Z}(R/\overline{K}) =_S \mathbf{Z}(R/\overline{K}) =_S \mathbf{Z}((R/I)/(\overline{K}/I))$. Finalmente usando el Corloario 1.3

aplicado a $\overline{K}/I \leq R/I$, se obtiene el resultado deseado ■.

TEOREMA 4.1

Sea $\mathcal{U}$ la Categoría de anillos de la Definición 4.1 y $\mathcal{B}$ la Categoría de retículas booleanas de la Definición 4.2, y si $\psi : R \longrightarrow S = R/I$ es un morfismo arbitraro en $\mathcal{U}$, tomamos $K = I + \mathrm{Z}(R)$, y $\overline{K}$ como en el Lema anterior. Definimos $\Xi(\psi) = \psi^* : \Xi(S) \longrightarrow \Xi(R)$ como el mapeo de la Observación 4.1. Si $f = \psi^*([S/\mathrm{Z}_2(_SS)])$ y $B = \psi^*(\Xi(S))$, entonces:

i) $\Xi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un funtor contravariante. En particular $\psi^* : \Xi(S) \longrightarrow \Xi(R)$ es un morfismo de retículas que es monomorfismo que preserva el cero y supremos e ínfimos arbitrarios.

ii) $B \subseteq \Xi(R)$ es una subretícula convexa y completa, y la correstricción:

$\psi^* : \Xi(S) \longrightarrow B$ es un isomorfismo de retículas.

iii) $\mathrm{Z}_2(_SS) = \overline{K}/I$, y $\psi^*(1_{\Xi(S)}) = f = [R/\overline{K}]$.

iv) $\Xi_D : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{B}$, es un subfuntor de Ξ, donde $\Xi_D(\psi^*)$ es la restricción y correstricción de ψ^* a $\psi^* : \Xi_D(S) \longrightarrow \Xi_D(R)$. Similarmente también, $\Xi_C, \Xi_{CA}, \Xi_{CB}$, son subfuntores del funtor Ξ.

Demostración:

i) Sean $\varkappa : R \longrightarrow S$, $\sigma : S \longrightarrow T$, morfismos de la categoría $\mathcal{U}$. Así, $\sigma\varkappa : R \longrightarrow T$ también es un morfismo de la categoría $\mathcal{U}$. Tenemos que $\Xi(\sigma\varkappa) = \psi^*(\sigma\varkappa) = \psi^*(\varkappa)\psi^*(\sigma) = \Xi(\varkappa)\Xi(\sigma) : T \longrightarrow R$.

Por otro lado, $\Xi(id_R) = id_R^* : \Xi(R) \longrightarrow \Xi(R)$, que aplicado a $[M] \in \Xi(R)$ da $id_R^*([M]) = [M]$. Por lo tanto $\Xi(id_R) = id_{\Xi(R)}$.

ii) Es una consecuencia del Lema 4.2.

iii) Es inmediato de la Proposición 4.1.

iv) Es claro ■.

COROLARIO 4.1 (al Teorema 4.1)

Si $\psi^* : \Xi(S) \longrightarrow \Xi(R)$ es como en el Teorema 4.1 y la Observación 4.1 y $f = \psi^*(1_{\Xi(S)})$. Consideramos $\psi^*(\Xi(S)) = B = \{q \wedge f \mid q \in \Xi(R)\}$ y $A = \{q \wedge f^c \mid q \in \Xi(R)\}$. Con

$A, B, A \times B$, las retículas booleanas inducidas por la complementación, entonces.

i) $\Xi(R) = A \oplus B$ es la suma directa de las subretículas A, B.

ii) Existe un isomorfismo de retículas booleanas $\lambda : \Xi(R) \longrightarrow A \times B$.

iii) Si $\Xi(R), \Xi(S)$ son vistos como anillos booleanos, entonces A, B son ideales de $\Xi(R)$ y $\Xi(R) = A \oplus B$.

iv) $\psi^* : \Xi(S) \longrightarrow \Xi(R)$ es un morfismo de anillos, con $\Xi(S) \cong B$.

Demostración:

i) Es claro que $A \cap B = \{0\}$, y si $u \in \Xi(R)$ se tiene que $u = (u \wedge f) \vee (u \wedge f^c)$.

ii) Definimos el mapeo $\lambda : \Xi(R) \longrightarrow A \times B$ como $\lambda(q) = (q \wedge f^c, q \wedge f)$. Esté mapeo es un isomorfismo de retículas.

iii) y iv) Se siguen de las Consecuencias 1) ,2) y 3) ■.

COROLARIO 4.2 (al Teorema 3.1 y al Teorema 4.1)

Para un anillo R con 1, existen ideales izquierdos $I_C, I_D \leq R$, tales que:

i) $Z_2(R) \leq_e I_C = I_C^- : Z_2(R) \leq_e I_D = I_D^-$, donde I_D^-, I_C^- denotan la cerradura esencial de I_D, I_C en R respectivamente.

ii) R/I_D es discreto, y R/I_C es continuo, vistos ambos como R-módulos.

iii) I_C, I_D son los únicos y más pequeños ideales de R que cumplen las propiedades i) y ii).

iv) $E(I_C), E(I_D) \leq E(R)$ son submódulos izquierdos invariantes de $E(R)$. En particular, I_C, $I_D \leq R$ son ideales izquierdos de de R invariantes y por lo tanto son ideales bilaterales de R.

v) Los morfismos naturales de anillos $\gamma : R \longrightarrow R/I_C$ y $\delta : R \longrightarrow R/I_D$. inducen por correstricción, isomorfismos de retículas booleanas $\gamma^* : \Xi(R/I_C) \longrightarrow \Xi_C(R)$ y $\delta^* : \Xi(R/I_D) \longrightarrow \Xi_D(R)$.

vi) Más aún, existen I_{CA}, $I_{CB} \leq R$, ideales de R tales que R/I_{CA} es molecularmente continuo y R/I_{CB} es sin fondo, y tales que las condiciones i), ii) y iii) se cumplen para I_{CA}, I_{CB}. Si $\alpha : R \longrightarrow R/I_{CA}$ y $\beta : R \longrightarrow R/I_{CB}$ son los morfismos naturales de anillos, entonces inducen por correstricción, isomorfismos de retículas booleanas

$\alpha^* : \Xi(R/I_{CA}) \longrightarrow \Xi_{CA}(R)$, y $\beta^* : \Xi(R/I_{CB}) \longrightarrow \Xi_{CB}(R)$.

Demostración:

Sea $\{R_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de submódulos uniformes, máxima con la propiedad de que $\sum\limits_{\alpha\in I} R_\alpha = \bigoplus\limits_{\alpha\in I} R_\alpha$. Sean $D = \bigoplus\limits_{\alpha\in I} R_\alpha$ y C un complemento relativo para D en R (ver [1]). De este modo, $Z_2(R) \oplus C \oplus D \leq_e R$. Ahora, sea $\{R_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una familia de ideales izquierdos de R, átomos continuos, la familia máxima con la propiedad $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$. Sean $A = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ y B un complemento relativo para A en C, así $A \oplus B \leq_e C$. Por las construcciones dadas, se tiene que C es continuo, D es discreto, A es molecularmente continuo y B es sin fondo. Consideremos las cerraduras esenciales de los siguientes ideales izquierdos de R.

$$I_D = (Z_2(R) + C)^- \ ; \ I_C = (Z_2(R) + D)^-$$
$$I_{CA} = (Z_2(R) + D + B)^- \ ; \ I_{CB} = (Z_2(R) + D + A)^-$$

Es claro que I_C, I_D, I_{CA}, I_{CB} cumplen con la condición i), entonces por el resultado 5) tenemos que como I_C es (e.c.), entonces $(C \oplus I_C)/I_C \leq_e R/I_C$, por lo tanto R/I_C es no singular y continuo. Por el mismo argumento se tiene que R/I_D es no singular y discreto, R/I_{CA} es no singular y molecularmente continuo y R/I_{CB} es no singular y sin fondo, por lo que se tiene la prueba de ii) y parte de vi).

Luego, si $Z_2(R) \subseteq J = J^- \leq R$ con R/J continuo, entonces $J \cap (Z_2(R) \oplus D) = Z_2(R) \oplus (J \cap D)$. Afirmamos que $J \cap D \leq_e D$, pues de no ser éste el caso se tiene que existe $0 \neq x \in D$ tal que $Rx \cap J = \{0\}$, de donde se tiene que existe un submódulo uniforme, no singular $U \leq D$ con $J + U = J \oplus U$, por lo tanto $U \cong (U + J)/J \leq R/J$ lo cual es una contradicción pues R/J es continuo, por lo que $J \cap D \leq_e D$. Por lo tanto $(Z_2(R) \oplus (J \cap D))^- \subseteq J^- = J$, pero $(Z_2(R) \oplus (J \cap D))^- = (Z_2(R) \oplus D)^-$, por lo tanto $I_C \subseteq J$. Del mismo modo se prueba para I_D, I_{CA}, I_{CB}, lo que termina la prueba de iii) y parte de vi).

Dado que $Z_2(R) \leq R$ es (e.c.), $(D + Z_2(R))/Z_2(R) \leq_e I_C/Z_2(R)$, entonces existe un único isomorfismo natural.

$$\mathbf{Hom}_R(I_C, \mathbf{E}(C)) \cong \mathbf{Hom}_R(I_C/\mathbf{Z}_2(R), \mathbf{E}(C)) \cong \mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}(I_C), \mathbf{E}(C)) = \{0\}$$

Puesto que $\mathbf{E}(R) = \mathbf{E}(I_C) \oplus \mathbf{E}(C)$, y de aquí, se sigue que $\mathbf{E}(I_C)$ es invariante. Del mismo modo que aquí, se prueba que $\mathbf{E}(I_D)$, $\mathbf{E}(I_{CA})$ y $\mathbf{E}(I_{CB})$ son invariantes, lo cual prueba iv) y parte de vi).

Luego por el inciso ii) de este Corolario se tiene que $\psi^*(\Xi(R/I)) \subseteq \Xi_C(R)$, por el Lema 3.8 si τ es un tipo en $\Xi(R)$ digamos $\tau = [J/\mathbf{Z}_2(R)]$, luego como $\mathbf{Z}_2(R) \subseteq J \leq R$, se tiene que $J \cap I_C = \mathbf{Z}_2(R)$, por lo tanto $\tau = [J/J \cap I_C] = [(J+C)/I_C]$, por lo que $\psi^*(\Xi(R/I)) \subseteq \Xi_C(R)$. La parte final de v) y de vi) se prueban de forma análoga ■.

Capítulo 5

LA RETíCULA INVARIANTE DE IDEALES.

El principal objetivo de este Capítulo es el de mostrar que la retícula $\Xi(R)$, puede ser representada de cierta (única) manera como una retícula de ideales del anillo R, la cual denotaremos como $\mathcal{J}(R)$, de tal manera que existe un isomorfismo entre las retículas $\Xi(R)$ y $\mathcal{J}(R)$. En lo siguiente siempre nos encontraremos en la situación de que $\mathbf{Z}_2(R) = \{0\}$, salvo que se diga lo contrario.

Definición:

Si $A \in \mathbf{R} - \mathbf{Mód}$ es no singular, por el Corolario 2.3 tenemos que $\mathbf{E}R = \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R)) \oplus \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}\mathbf{E}(R)$, entonces definimos a los ideales $I_{[A]}$, $C \leq R$ como:

$I_{[A]} = R \cap \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R))$, y $C = R \cap \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}\mathbf{E}(R) = \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}R$.

Como una primera observación tenemos que por el Corolario 1.5, $\mathbf{tr}_A\mathbf{E}R \leq_e \mathbf{tr}_{\mathbf{E}A}\mathbf{E}(R)$ por tanto $\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R)) = \mathbf{E}(\mathbf{tr}_{\mathbf{E}(A)}\mathbf{E}(R))$, por el Corolario 2.3 si $Q \leq \mathbf{E}(R)$ es tal que $\mathbf{E}(R) = \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R)) \oplus Q$, entonces $Q = \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}\mathbf{E}(R)$.

LEMA 5.1

Sea $A \in \mathbf{R} - \mathbf{Mód}$, tal que $I_{[A]}$ es como en la definición anterior, entonces se satisface lo siguiente:

i) $I_{[A]} \leq_e \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R))$, y $C \leq_e \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}R$.

ii) $[I_{[A]}] = [A] \in \Xi(R)$.

iii) $I_{[A]}$, y C son ideales izquierdos esencialmente cerrados de R.

iv) El complemento $[A]^C$ de $[A]$ en $\Xi(R)$ es $[A]^C = [C] = [R/I_{[A]}]$.

v) $\mathbf{E}(I_{[A]})$, $\mathbf{E}(C)$ son ideales izquierdos invariantes de $\mathbf{E}(R)$. En particular $I_{[A]}$, C son ideales izquierdos invariantes de R, por lo tanto $I_{[A]}$, C son ideales bilaterales de R.

Demostración:

i) Es inmediata de las definiciones de $I_{[A]}$, y C.

ii) Por el Lema 3.8 si $[A] \in \Xi(R)$, y $\widetilde{R} = R/\mathrm{Z}_2(R)$, entonces $[A] = [\mathbf{tr}_A\mathbf{E}\widetilde{R}]$, y por el inciso i) de este Lema tenemos que $I_{[A]} \leq_e \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R))$. De esto junto con el hecho de que $\mathrm{Z}_2(R) = \{0\}$, se concluye que $[I_{[A]}] = [\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R))] = [A]$.

iii) Por la Proposición 1.5, tenemos que $I_{[A]}^{-} = \{x \in R \mid (R \cap \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R)) : x) \leq_e R\} \subseteq \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R)) \cap R = I_{[A]}$. Por lo tanto $I_{[A]}^{-} = I_{[A]}$.

Del mismo modo tenemos que $C^{-} = \{x \in R \mid (R \cap \mathbf{rej}_{\mathbf{E}A}R : x) \leq_e R\} \subseteq R \cap \mathbf{rej}_{\mathbf{E}A}R = C$, por lo tanto $C = C^{-}$.

iv) Por el Corolario 3.3, se tiene que si $[A] \in \Xi(R)$, entonces $[A]^C = [\mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}R]$, y por i) de esta prueba $C \leq_e \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}R$, por lo tanto $[C] = [\mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}R] = [A]^C$. Como $I_{[A]}$ es un ideal izquierdo esencialmente cerrado de R, entonces por el resultado 2) del Capítulo 4, se tiene que $(I_{[A]} \oplus C)/I_{[A]} \leq_e R/I_{[A]}$. De donde se sigue que $[(I_{[A]} \oplus C)/I_{[A]}] = [R/I_{[A]}] = [C]$.

v) También por el Corolario 3.3 se tiene que $\mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}(I_{[A]}, \mathbf{E}(C)) = \{0\}$. De donde se tiene que $\mathbf{E}(R) = \mathbf{E}(I_{[A]}) \oplus \mathbf{E}(C)$, por lo tanto $\mathbf{E}(I_{[A]})$ como $\mathbf{E}(C)$ son invariantes como ideales izquierdos (o como módulos izquierdos) ∎.

LEMA 5.2

Si $A \leq R$, es un ideal izquierdo esencialmente cerrado, del anillo R, tal que $\mathbf{E}(A)$ es invariante en $\mathbf{E}(R)$, entonces $A = I_{[A]}$.

Demostración:

Como A es un ideal de R se sigue que $A \subseteq I_{[A]}$. Sea B un complemento relativo para A en $I_{[A]}$ (ver la Proposición 1.1), de este modo tenemos que $A \oplus B \leq_e I_{[A]}$. Dado que $\mathbf{E}(A)$

es invariante en $\mathbf{E}(R)$, entonces necesariamente tenemos que $\mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}(A), \mathbf{E}(B)) = \{0\}$. Por lo tanto $[A] \wedge [B] = [\mathbf{tr}_{\mathbf{E}(A)}\mathbf{E}(B)] = [0]$, y como $[A] \vee [B] = [A \oplus B] = [I_{[A]}] = [A]$, se tiene que $[B] = 0$, de donde $B = \{0\}$. Por lo tanto $A \leq_e I_{[A]}$, y como A es esencialmente cerrado, tenemos que $A = I_{[A]}$ ■.

LEMA 5.3

Sea τ un tipo en $\Xi(R)$, y $A \in \mathbf{R} - \mathbf{Mód}$, $\mathbf{Z}(A) = \{0\}$ tal que $[A] = \tau$, entonces $I_{[A]}$ es el único ideal izquierdo de R máximo con la propiedad de ser del tipo τ.

Demostración:

Supongamos que existe un ideal izquierdo P de R, tal que P es del tipo τ, lo que necesitamos probar es que $P \subseteq I_{[A]}$. Como $[P] = \tau = [A]$, tenemos por hipótesis que $P \subseteq \mathbf{E}(\underset{\Gamma}{\oplus} A)$ para algún conjunto de índices Γ. Sea $0 \neq b \in P$, en vista del hecho que $I_{[A]}$ es (e.c.) en R, y de que $(\underset{\Gamma}{\oplus} A : b) \leq_e R$, para probar que $b \in I_{[A]}$ es suficiente probar que $(\underset{\Gamma}{\oplus} A : b) \subseteq (I_{[A]} : b)$. Sea pues $r \in (\underset{\Gamma}{\oplus} A : b)$, entonces $rb = (a_1 + a_2 + ... + a_n) \in \underset{\Gamma}{\oplus} A$, y observamos que $\mathbf{An}(rb) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbf{An}(a_i) \subseteq \mathbf{An}(a_i)$ para toda $i = 1...n$. Ahora supongamos que $rb \notin I_{[A]}$, es decir que $rb \in R - I_{[A]}$, aplicando el Lema 1.1, reemplazando $y = rb$ y $\overline{K} = I_{[A]}$, tenemos que existe $t \in R$ tal que $Rt(rb) \neq \{0\}$, y $Rt(rb) \cap I_{[A]} = \{0\}$. De donde se sigue que $I_{[A]} \neq I_{[A]} \oplus Rt(rb)$, por lo que $Rt(rb) \subseteq \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}R = C$, luego para cada $j \in \{1...n\}$ el mapeo de $Rt(rb) \longrightarrow Rta_j$ dado por a $t(rb) \longrightarrow ta_j$ está bien definido, y éste a su vez induce un morfismo en $\mathbf{Hom}_R(\mathbf{E}(C), \mathbf{E}(A))$. (por la inyectividad de $\mathbf{E}(A)$ y de $\mathbf{E}(C)$). Por lo tanto tenemos que $ta_j = 0$ para toda $j \in \{1...n\}$, por lo tanto $\mathbf{An}(t(rb)) = \mathbf{An}(a_1) \cap ... \cap \mathbf{An}(ta_n) = R$. Pero como $0 \neq 1_R \in R$, se tiene que $t(rb) = 0$, lo que produce una contradicción, pues antes se vio que $Rt(rb) \neq \{0\}$, por tanto $rb \in I_{[A]}$, es decir $r \in (I_{[A]} : b)$. Por lo que $P \subseteq I_{[A]}$ ■.

COROLARIO 5.1

Sean $A, B \in \mathbf{R} - \mathbf{Mód}$, no singulares, con $[A] \leq [B]$, entonces $I_{[A]} \subseteq I_{[B]}$.

Demostración:

Dado que $I_{[A]}$ e $I_{[B]}$, no dependen de la elección de representantes, podemos elegir A,

B tales que $A \subseteq B$, por lo que $\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R)) \subseteq \mathbf{E}(\mathbf{tr}_B\mathbf{E}(R))$. Por lo tanto $I_{[A]} \subseteq I_{[B]}$ ■.

LEMA 5.3

Sean $A, B \in \mathbf{R}-$ **Mód** no singulares, entonces se satisfacen las siguentes condiciones:

i) $\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R)) \cap \mathbf{E}(\mathbf{tr}_B\mathbf{E}(R)) = \mathbf{E}(\mathbf{tr}_{(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B))}(\mathbf{E}(R))$.

ii) $I_{[A]} \cap I_{[B]} = I_{[A]\wedge[B]}$.

Demostración:

Sea $N = \mathbf{E}(\mathbf{tr}_{(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B))}(\mathbf{E}(R))$. Como $[A] \wedge [B] = [\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)]$, es claro que $I_{[A]\wedge[B]} = R\cap N \subseteq R\cap\mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R))\cap\mathbf{E}(\mathbf{tr}_B\mathbf{E}(R)) = I_{[A]}\cap I_{[B]}$. Por lo tanto tenemos que $I_{[A]\wedge[B]} \subseteq I_{[A]} \cap I_{[B]}$, más aún, como $R \leq_e \mathbf{E}(R)$, y la intersección de módulos no singulares e inyectivos, es inyectivo (ver [6]), se sigue que $N \leq \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R)) \cap \mathbf{E}(\mathbf{tr}_B\mathbf{E}(R))$.

Ahora afirmamos que $N \leq_e \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R)) \cap \mathbf{E}(\mathbf{tr}_B\mathbf{E}(R))$. Para probar esto, sólo es necesario probar que si $0 \neq \eta \in (\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R)) \cap (\mathbf{tr}_B\mathbf{E}(R))$, entonces $(R\eta) \cap N \neq \{0\}$. Pero por el Teorema 2.1, tenemos que existe $0 \neq a \in A$, $0 \neq s_1 \in R$, con $Ra \cong Rs_1 \cong R\eta \neq \{0\}$, y $\mathbf{An}(a) = \mathbf{An}(s_1\eta)$ y $0 \neq s_1\eta \in R$, pero $0 \neq s_1\eta \in \mathbf{tr}_B\mathbf{E}(R)$. Una segunda aplicación del Teorema 2.1, muestra que existen $0 \neq b \in B$, y $s_2 \in R$, tales que $0 \neq s_2(s_1\eta) \in R$, con $\mathbf{An}(b) = \mathbf{An}(s_2(s_1\eta))$, pero entonces $\mathbf{An}(s_2a) = \mathbf{An}(b)$, por lo que $b \in \mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B)$. Por lo tanto, el isomorfismo $Rb \longrightarrow Rs_2(s_1a)$ muestra que $0 \neq s_2(s_1\eta) \in \mathbf{E}(\mathbf{tr}_{(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(B))}(\mathbf{E}(R)) \subseteq N$. Por tanto la afirmación es cierta, y como N es inyectivo se sigue que $N = \mathbf{E}(\mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R)) \cap \mathbf{E}(\mathbf{tr}_B\mathbf{E}(R))$.

ii) Es inmediata de i) ■.

LEMA 5.4

Sean A, $B \in \mathbf{R}-$ **Mód**, no singulares, entonces $I_{[A]\vee[B]} = (I_{[A]} + I_{[B]})^{-}$.

Demostración:

Por el Corolario 5.1 se tiene que $(I_{[A]} + I_{[B]}) \leq I_{[A\oplus B]}$, consideremos un pseudocomplemento G para $(I_{[A]} + I_{[B]})$ en $I_{[A\oplus B]}$. Así $G \leq R$, es tal que $G\oplus(I_{[A]} + I_{[B]}) \leq_e I_{[A\oplus B]}$, de donde $G \subseteq \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}R$, y $G \subseteq \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(B)}R$, de donde $[G] \wedge [A] = 0$, y $[G] \wedge [B] = 0$. Por la ley distributiva tenemos que (*) $0 = ([G] \wedge [A]) \vee ([G] \wedge [B]) = [G] \wedge ([A] \vee [B])$. Ahora, como $[G] \leq [I_{[A]} + I_{[B]}] \leq [A] \vee [B]$, por (*) se tiene que $[G] = 0$, por lo que $G = \{0\}$. Por lo tanto $(I_{[A]} + I_{[B]}) \leq_e I_{[A \oplus B]}$, por lo que $(I_{[A]} + I_{[B]})^- = I_{[A\oplus B]}$ ■.

TEOREMA 5.1

Sea R un anillo con identidad, $\mathbf{Z}_2(R) = \{0\}$. Para cada tipo $[A] \in \Xi(R)$, definimos $I_{[A]} = R \cap \mathbf{E}(\mathbf{tr}_{\mathbf{E}(R)}A)$, y $C = \mathbf{rej}_{\mathbf{E}(A)}R$, entonces se cumple:

1) $I_{[A]}$ es el único ideal izquierdo, esencialmente cerrado de R, máximo con respecto a la propiedad de que $I_{[A]}$ es del tipo $[A]$.

2) Si $\mathcal{J}(R) = \{I_{[A]}, I_{[B]}, ...\}$ es el conjunto de los ideales izquierdos de R, para los cuales A, B, ... son no singulares, entonces $\mathcal{J}(R)$ es precisamente el conjunto de todos los ideales izquierdos J tales que J es esencialmente cerrado y $\mathbf{E}(J) \leq \mathbf{E}(R)$ es un submódulo invariante, en particular $J \leq R$ es también invariante como ideal izquierdo, por tanto J es un ideal bilateral de R.

3) El conjunto $\mathcal{J}(R)$ es una retícula booleana completa y el mapeo:

$\Xi(R) \longrightarrow \mathcal{J}(R)$ dado por $[A] \longrightarrow I_{[A]}$, es un isomorfismo de retículas booleanas, donde $\mathcal{J}(R)$ tiene las siguientes operaciones de retícula:

i) $I_{[A]\wedge[B]} = I_{[A]} \cap I_{[B]}$.

ii) $I_{[A]\vee[B]} = (I_{[A]} + I_{[B]})^-$.

iii) $[A]^C = [I_{[A]}]^C = C = [R/I_{[A]}]$.

Demostración:

1), 2 y 3) Son inmediatas de los lemas y corolarios previos, donde la relación en $\mathcal{J}(R)$ es la contención " $\subseteq$ " ■.

Ahora, $\mathbf{Z}_2(R)$ no necesariamente tiene que ser cero, por lo que el siguiente Corolario se sigue del Resultado 5) del capítulo 4 y del Corolario 1.6.

COROLARIO 5.2

Para un anillo R con identidad , si $\pi : R \longrightarrow R/\mathbf{Z}_2(R)$ es la proyección natural. Definimos $\mathcal{J}'(R) = \{I \leq R \mid \pi(I) \in \mathcal{J}(R/\mathbf{Z}_2(R))\}$, entonces:

1) $\mathcal{J}'(R)$ es exactamente el conjunto de ideales izquierdos, esencialmente cerrados J de R, tal que $\mathbf{Z}_2(R) \subseteq J$, y $\mathbf{E}(J)$ es un R-módulo izquierdo invariante de $\mathbf{E}(R)$. En particular, J es un ideal izquierdo invariante de R, por lo que J es un ideal bilateral de R.

2) Para cada tipo τ en $\Xi(R)$, hay un único $\mathbf{Z}_2(R) \subseteq J \leq R$ ideal izquierdo J de R el cual es máximo con la propiedad de ser del tipo τ. Más aún, $\mathcal{J}'(R)$ es el conjunto de tales ideales J.

3) $\tau \longrightarrow [J/\mathbf{Z}_2(R)]$, es un isomorfismo de retículas booleanas completas, donde J es el ideal de R del inciso dos de este corolario. $\Xi(R) \cong \mathcal{J}'(R)$, donde $\mathcal{J}'(R)$ tiene las siguientes operaciones de retícula, si $J, J_1, J_2 \in \mathcal{J}'(R)$:

i) $J_1 \wedge J_2 = J_1 \cap J_2$.

ii) $J_1 \vee J_2 = (J_1 + J_2)^-$.

iii) $[J/\mathbf{Z}_2(R)]^C = [R/J]$.

COROLARIO 5.3

Sea $\mathcal{J}'(R)$ como en el Corolario anterior, para un módulo no singular A, sea $I_{[A]} \in \mathcal{J}'(R)$, el único elemento que cumple con $[A] = [I_{[A]}/\mathbf{Z}_2(R)]$. Definimos el ideal izquierdo L_A de R como $L_A = \sum \{Rx \mid x \in R, \text{ tal que existe } a \in A \text{ con } (\mathbf{Z}_2(R) : x) = \mathbf{An}(a)\}$, entonces se cumple :

i) $L_A \leq_e I_{[A]}$, por lo que $I_{[A]} = L_A^-$.

ii) Para todo ideal izquierdo I de R, $I \in \mathcal{J}'(R) \Longleftrightarrow$

a) I es un ideal izquierdo de R esencialmente cerrado.

b) Para todo $x \in R$, y para todo $a \in I$, si $(\mathbf{Z}_2(R) : x) = (\mathbf{Z}_2(R) : a)$, entonces se tiene que $x \in I$.

Demostración:

i) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathbf{Z}_2(R) = \{0\}$, y dado que L_A es la suma de ideales izquierdos principales de R, los cuales son isomorfos a algún submódulo cíclico de A, entonces tenemos morfismos de $A \longrightarrow R$, por lo que $L_A \subseteq \mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R) \leq_e I_{[A]}$. Afirmamos que $L_A \leq_e \mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R)$. Sea pues $0 \neq \varepsilon \in \mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R)$, por el Teorema 2.1 se tiene que existen $0 \neq r \in R$, y $0 \neq a \in A$, tales que $0 \neq r\varepsilon = x \in R$, con $\mathbf{An}(x) = \mathbf{An}(a)$, por lo tanto $x \in L_A$, por lo que $0 \neq x = r\varepsilon \in L_A$ por lo tanto $L_A \leq_e \mathbf{tr}_A\mathbf{E}(R) \leq_e I_{[A]}$. Por la Proposición 1.3, se tiene que $L_A \leq_e I_{[A]}$.

ii) $\Rightarrow$a) Es inmediato. ii)$\Rightarrow$b) Sea $x \in R$, y $a \in I$ tal que $\mathbf{An}(a) = \mathbf{An}(x)$, entonces escribimos a $\mathbf{E}(R) = \mathbf{E}(I) \oplus Q$, para algún $Q \leq \mathbf{E}(R)$. Dado que $\mathbf{Hom}_R(Q, \mathrm{E}(I)) = \{0\}$, se tiene que $x \in \mathrm{E}(I) \cap R = I$.

a,b)$\Rightarrow$ii) Sea $A = I$ visto como R-módulo izquierdo. Por hipótesis y por i) se tiene $L_A \subsetneq I$. Por i) y a), $I_{[A]} \subsetneq I$. Por b) y la definición de L_A, los elementos de I son precisamente los generadores de L_A, por lo tanto $I \subsetneq L_A \subsetneq I_{[A]}$. Por lo tanto se tiene que $I = I_{[A]} \in \mathcal{J}'(R)$ ■.

Capítulo 6

APLICACIONES Y EJEMPLOS.

En este Capítulo se dará la solución al problema de encontrar una retícula $\Xi(R)$ con *Cardinal finito* (potencias de 2), así como un ejemplo que sirve para ver por qué en el Capítulo 5 se pidió la cerradura esencial a $I_{[A]} + I_{[B]}$. Asímismo se da un ejemplo sencillo que ilustra la funtorialidad de Ξ.

Algunos de estos ejemplos serán utilizados para mostrar cómo la descomposición de un módulo $\mathrm{E}(M) = D \oplus A \oplus B$ de la proposición 3.I, difiere de la forma de clasificación dada por Goodearl-Boyle ([8])de los módulos inyectivos no singulares en un anillo R, en Tipos ajenos I=$\mathrm{I}_f \cup \mathrm{I}_\infty$, II=$\mathrm{II}_f \cup \mathrm{II}_\infty$ y III. Todos los anillos que consideraremos aquí serán anillos con identidad.

De esta manera, primero daremos algunas definiciones de lo que se entenderá por un anillo del Tipo I, II y III.

DEFINICIONES.

1) Diremos que un anillo R es *regular*, siempre que para cada $x \in R$, exista $y \in R$ tal que $xyx = x$. Por ejemplo, un producto directo de anillos con división es regular. Diremos que un anillo R es auto-inyectivo izquierdo, si como R-módulo izquierdo es inyectivo.

2) Un anillo regular R es *abeliano*, si todo elemento idempotente de R es central. Por ejemplo, un anillo conmutativo regular es abeliano, también un producto directo de anillos con división es un anillo abeliano.

3) Un anillo R es *directamente finito*, si $xy = 1$ implica que $yx = 1$ para cualesquiera $x, y \in R$. Por ejemplo, todo anillo conmutativo es directamente finito. Diremos que un anillo R es directamente infinito, si R no es directamente finito.

4) Si e es un idempotente en un anillo regular R. Entonces e es llamado *idempotente abeliano* (de R), siempre que eRe sea abeliano. Nótese que esto sólo requiere que los idempotentes de eRe sean centrales en eRe y no necesariamente en R. Por ejemplo, si Re es un ideal izquierdo mínimo de R, entonces eRe es un anillo con división y por tanto abeliano. El idempotente e es llamado *idempotente directamente finito* (de R), siempre que el anillo eRe es directamente finito. Dado que todos los anillos regulares abelianos son directamente finitos, entonces todo idempotente abeliano es directamente finito.

5) Sea e un idempotente en un anillo regular, auto-inyectivo izquierdo R. e es *fiel* (en R), si 0 es el único **idempotente central** de R que es ortogonal a e.

6) Se dice que un anillo regular, auto-inyectivo izquierdo R, es del Tipo I, si R contiene un idempotente abeliano fiel. Por ejemplo, todo anillo regular, abeliano y auto-inyectivo izquierdo es del Tipo I.

7) Diremos que un anillo regular, auto-inyectivo izquierdo R, es del Tipo II, si R contiene un idempotente directamente finito y fiel, pero R no contiene idempotentes abelianos no nulos.

8) Un anillo regular, auto inyectivo izquierdo R, es del Tipo III, si R no contiene idempotentes directamente finitos, distintos de cero.

9) Un anillo regular, auto-inyectivo izquierdo R, es puramente infinito, si no contiene idempotentes centrales directamente finitos, distintos de cero.

Por ejemplo, todo anillo del Tipo III, es un anillo puramente infinito. Sin embargo, es posible que anillos de los Tipos I y II sean puramente infinitos. Por ejemplo, si R es el anillo de endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión infinita, nótese (ver [7] pag.111, Teorema 10.2) que R es del Tipo I. Dado que el conjunto de idempotentes centrales de R es $\{0, 1\}$ y R es directamente infinito, se tiene que R es puramente infinito.

10) Un anillo regular, auto-inyectivo izquierdo es del Tipo I_f si es del Tipo I y directamente finito; del Tipo I_∞ si R es del Tipo I y puramente infinito; del Tipo II_f si es del Tipo II y directamente finito; del Tipo II_∞ si R es del Tipo II y puramente infinito.

11) Un dominio de Ore izquierdo es un dominio entero R, tal que dados elementos $a, b \in R$ distintos de cero, se tiene que $Ra \cap Rb \neq \{0\}$.

12) Un R-módulo izquierdo A tiene *dimensión de Goldie finita* si A no contiene familias independientes infinitas de submódulos no cero. Por ejemplo, todo módulo artiniano y todo módulo neteriano son de dimensión de Goldie finita (ver [6]). En particular, un espacio vectorial V sobre un anillo con división D, es de dimensión de Goldie finita si y sólo si la dimension de V sobre D es finita: $[V : D] \lneqq \infty$.

13) Un anillo *totalmente lineal* izquierdo, es el anillo de todas las transformaciones lineales (escritas del lado izquierdo) de un espacio vectorial V sobre un anillo con división, en sí mismo.

14) Un anillo R es un *anillo simple* si los únicos ideales bilaterales de R son $\{0\}$ y R. Por ejemplo, todo anillo con división es simple.

15) Sea $M \in \mathbf{R-Mód}$, no singular e inyectivo, consideremos $T = \mathbf{End}_R(M)$, el cual es un anillo regular y autoinyectivo izquierdo (vease [7]pag.11, Corolario 1.23). Aplicaremos las definiciones de abeliano, directamente finito, puramente finito, Tipos I, I_f, I_∞, II, II_f, II_∞ y III, a M de la siguiente manera: diremos que M tiene la propiedad $(*)$ si y solo si T tiene la propiedad $(*)$.

Resultados.

1) Todo anillo regular auto-inyectivo izquierdo, se descompone de manera única como producto directo de anillos del Tipo I_f, I_∞, II_f, II_∞ y III.

2) Sea $M \in \mathbf{R-Mód}$, no singular e inyectivo. Entonces M se descompone de manera única, como suma directa de submódulos invariantes de los Tipos I_f, I_∞, II_f, II_∞, III.

3) Si R es un dominio, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i) R es un dominio de Ore izquierdo.

ii) ${}_RR$ tiene dimensión de Goldie finita.

OBSERVACION 6.1

a) Si R es un anillo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $R/\mathbf{Z}_2(R)$ no contiene submódulos uniformes.

ii) $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, M discreto, entonces M es de torsión de Goldie.

iii) $\Xi(R) = \Xi_C(R)$.

Demostración.

i)$\Rightarrow$iii) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathbf{Z}_2(R) = \{0\}$. Por la proposición 3.I, tenemos que $\mathbf{E}(R) = D \oplus C$ con D un R-módulo discreto y C un R-módulo continuo. Como R no contiene submódulos uniformes se tiene que $D = \{0\}$, por lo tanto $\mathbf{E}(R) = C$, de donde $\Xi_D(R) = \{0\}$. Por tanto $\Xi(R) = \Xi_D(R)$.

iii)$\Rightarrow$i) Es inmediato.

ii)$\Rightarrow$iii) Sea $M \in \mathbf{R}-\mathbf{Mód}$, M discreto, por hipótesis se tiene que $\mathbf{Z}_2(M) = M$ y por el Corolario 1.2, $\mathbf{Z}(M) = \{0\} \Leftrightarrow \mathbf{Z}_2(M) = \{0\}$. Por lo que $\mathbf{Z}(M) \neq \{0\}$, por lo tanto $\Xi(R) = \Xi_C(R)$.

iii)$\Rightarrow$ii) Por el Corolario 1.2 se tiene que $\mathbf{Z}_2 M \neq \{0\}$, por ser M discreto $\mathbf{Z}(M/\mathbf{Z}_2M) = \{0\}$ de donde $M/\mathbf{Z}_2(M) \subseteq M/\mathbf{Z}(M)$ y como $\mathbf{Z}(M) \subseteq \mathbf{Z}_2(M)$ se tiene que $\mathbf{Z}_2(M) = M$ por lo tanto M es de torsión de Goldie.

b) Si R es un anillo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $R/\mathbf{Z}_2(R)$ contiene esencialmente a una suma directa de submódulos uniformes.

ii) Todo módulo continuo es de torsión de Goldie.

iii) $\Xi(R) = \Xi_D(R)$.

Demostración:

Es similar a la prueba de a).

c) Si $\Xi(R)$ es átomica, entonces $\Xi_{CB}(R) = \{0\}$

d) Consecuentemente si $\Xi(R) = \{0, 1\}$, entonces necesariamente se cumple que $\Xi(R) = \Xi_{CA}(R)$, ó $\Xi(R) = \Xi_D(R)$ ■.

EJEMPLO 6.1

Para un anillo R tal que $R/\mathbf{Z}_2(R)$ es un Dominio, se sigue que $\Xi(R) = \{0,1\}$ y una de las dos siguientes condiciones que son mutuamente excluyentes.

1) $\Xi(R) = \Xi_{CA}(R)$ y $R/\mathbf{Z}_2(R)$ es molecularmente continuo.

2) $\Xi(R) = \Xi_D(R)$ y $R/\mathbf{Z}_2(R)$ es un dominio de Ore izquierdo.

Demostración.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mathbf{Z}_2(R) = \{0\}$. Como ${}_RR$ es comprimible (por ser R dominio entero), entonces $[R] = 1 \in \Xi(R) = \{0,1\}$, de donde $\Xi_{CB}(R) = \{0\}$. Por (ver [5] pag. 6. Teorema 2.7), tenemos que $\mathbf{E}(R) = C \oplus D$ con C continuo, D discreto y ambos ideales bilaterales de $\mathbf{E}(R)$ con $DC = CD = \{0\}$. Como $\Xi(R) = \{0,1\}$ se tiene que:

i) Si $D = \{0\}$, entonces $\Xi(R) = \Xi_{CA}(R)$ de donde se concluye 1).

ii) Si $C = \{0\}$, entonces por (ver [5] pag.8, Corolario 2.10), se tiene que

$\mathbf{E}(R) \cong \mathbf{Hom}_D(V,V)$, donde $V =_D V$ es un espacio vectorial izquierdo, sobre un anillo con división D, y $\mathbf{E}(R)$ actúa de el lado izquierdo de V. Si $[V : D] = 1$, entonces 2) se cumple, por el Resultado 3) y la Definición 12). Si $[V : D] \geq 2$, dado que $R \leq_e \mathbf{E}({}_RR)$, el anillo R contiene una proyección ρ de V en un subespacio unidimensional de V. Sea $0 \neq \xi \in \mathbf{E}(R)$, con $\xi V \subseteq \mathbf{An}(\rho)$. Entonces $\xi\rho = 0$. Dado que $(R : \xi) \leq_e R$, existe un $0 \neq q \in (R : \xi)\xi \subseteq R$. Pero $\rho q = 0$, contradice el hecho de que R es un dominio entero. Por tanto R es un dominio de Ore ■.

EJEMPLO 6.2

Consideremos el anillo de matrices de tamaño $n \times n$, con coeficientes en un anillo con división D que denotaremos $M_n(D)$, entonces $\Xi(M_n(D)) = \Xi_D(M_n(D)) = \{0,1\}$.

Demostración.

Usaremos el siguiente resultado de la Teoría general de Módulos (ver [1]).

Si R es un anillo simple, entonces el anillo de matrices de tamaño $n \times n$, con coeficientes en R es un anillo simple.

De donde se tiene que $M_n(D)$ es simple, por lo que $M_n(D)$ no tiene ideales bilaterales propios. Por tanto el Corolario 5.2 y el hecho de que $M_n(D)$ es un R-módulo discreto, garantizan que $\Xi(M_n(D)) = \Xi_D(M_n(D)) = \{0,1\}$. Además, (ver [7] pag. 121, teo. 10.24), se tiene que $M_n(D)$ es un R-Módulo izquierdo del Tipo I_f ■.

El siguiente ejemplo muestra que no existe un R-módulo M del Tipo I_f, de tal manera que $[M]$ sea precisamente la clase de todos los R-módulos del Tipo I_f.

EJEMPLO 6.3

a) Sea U un R-Módulo uniforme, inyectivo y no singular y consideremos $M = \mathbf{E}(\bigoplus_{i=1}^{\infty} U)$ y $T = \mathbf{End}_R(M)$ (el caso más simple es cuando $R = U = F$ con F un campo, en cuyo caso $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} F$, y $T = \mathbf{Hom}_R(M, M)$ es el anillo de todas las transformaciones lineales de M en M, escritas de el lado izquierdo del espacio vectorial de dimensión numerable M.).

Así $T \cong \mathbf{Hom}_R(V, V)$ es el anillo de todas las transformaciones lineales, escritas del lado izquierdo, de un espacio vectorial ${}_DV$, sobre un anillo con división D, que en este caso es $D = \mathbf{End}_R(U)$ (ver [4] pag.82-84, 5.5 (iii) y 5.6), por ([8] pag. 33, Teorema 5.4) ó ([7] pag.111, Proposición 10.2). El anillo T es del Tipo I. Los únicos idempotentes centrales de T son $\{0,1\}$. Es claro que 1 es un idempotente directamente finito (ver [8] pag. 46) ó por definición 3) de este capítulo. De hecho, el anillo T es puramente infinito (ver [8]), por lo que T es del tipo I_∞. Por la definición 15) de este capítulo, M es del Tipo I_∞. De este modo como $\mathbf{End}_R(V) = T$ es abeliano (ver [8] pag.12) y directamente finito (ver [8] pag. 16), entonces U es del Tipo I_f. Por la definición 15) de este capítulo, también M es del Tipo I_f y de aqui se tiene que $\mathrm{I}_f \cap \mathrm{I}_\infty = \phi$, pero $[U] = [M] \in \Xi(R)$.

b) Sea Θ un ordinal inicial límite (infinito), y Δ un anillo con división. Denotaremos $MCF_{\Theta\times\Theta}(\Delta)$ el anillo de todas las matrices de tamaño $\Theta \times \Theta$ de columna finita. en ([1]) se prueba que la retícula de ideales de $MCF_{\Theta\times\Theta}(\Delta)$ es una cadena, por lo que el zoclo de $MCF_{\Theta\times\Theta}(\Delta)$, consta de las matrices que tienen sólo un número finito de entradas no cero. Por lo que si R es un anillo con $Soc(MCF_{\Theta\times\Theta}(\Delta)) \subseteq R \subseteq MCF_{\Theta\times\Theta}(\Delta)$ y tal que $1 \in R$, entonces $\Xi(R) = \Xi_D(R) = \{0,1\}$.

Dada una retícula Booleana (ver [10]), se prueba que existe una única completación de la retícula a una retícula booleana completa.

El siguente resultado nos sirve para dar un ejemplo de una clase de anillos $R \subseteq \Lambda$ para los cuales, sus retículas $\mathcal{J}(R)$ y $\mathcal{J}(\Lambda)$ pueden encontrarse explícitamente, donde $\mathcal{J}(R)$ y $\mathcal{J}(\Lambda)$ son las retículas del Capitulo 5. La prueba de este resultado sale de los alcances de este trabajo.

TEOREMA 6.1

Si R es un anillo booleano y Λ es la completación de R, entonces $\Xi(R) = \Lambda$.

COROLARIO 6.1

Si Λ_D es una retícula Booleana completa, atómica y Λ_{CB} es una retícula Booleana completa sin átomos, entonces:

i) $\Xi(\Lambda_D) = \Xi_D(\Lambda_D)$

ii) $\Xi(\Lambda_{CB}) = \Xi_{CB}(\Lambda_{CB})$.

Demostración:

i) Si $X_D \subseteq \Lambda_D$ es el conjunto de todos los átomos de Λ_D, entonces Λ_D es isomorfo al conjunto de partes de X_D (que denotaremos $\mathcal{P}(X_D)$), pero el conjunto potencia de X_D es un módulo discreto sobre sí mismo, de donde $Soc(\mathcal{P}(X_D))$ es esencial en $\mathcal{P}(X_D)$, por lo tanto $\Xi(\mathcal{P}(X_D)) = \Xi_D(\Lambda_D)$.

ii) Se sigue de la definición de R-módulo sin fondo ∎.

El siguiente ejemplo, da una clase de módulos sin fondo, inyectivos, los cuales en ([8]), son clasificados dentro del Tipo I_f.

EJEMPLO 6.4

Sea S un anillo Booleano, se muestra que su única completación, puede ser determinada mediante los siguientes tres pasos:

i) R es la completación de Dedekind-MacNeille de S (Si $a, b \in S$ con $ab = a$, entonces $a \leq b$)

ii) R es la $S-$cápsula inyectiva de S.

iii) R es el anillo máximo de cocientes de S.

Más aún, R es autoinyectivo, no singular y booleano. Ahora bien, si S es sin átomos, entonces R es sin átomos. Dado que $\mathrm{End}_R(R) = R$ es conmutativo, entonces ${}_RR$ es del Tipo I_f (es del Tipo I pues R es regular, autoinyectivo, abeliano y $1 \in R$, y es del Tipo I_f pues si $x, y \in R$ tal que $xy = 1$, entonces $yx = 1$ pues R es conmutativo). Por el teorema 6.1 se tiene que $\Xi(R) = \Xi_{CB}(R)$.

PROPOSICIÓN 6.1

Para un conjunto de anillos no singulares $\{S_x \mid x \in \mathrm{X}\}$ supóngase que:

$\bigoplus_{x\in \mathrm{X}} S_x \subseteq R \subseteq \prod_{x\in \mathrm{X}} S_x = T$, con R un anillo con 1, entonces:

i) $\Xi(R) = \prod_{x\in \mathrm{X}} \Xi(S_x)$.

ii) Si reemplazamos en i) a Ξ por Ξ_D, Ξ_C, Ξ_{CA}, Ξ_{CB} se sigue cumpliendo i).

Demostración:

Sea $e_x = (\ldots\ldots, 0.1, 0, \ldots\ldots) \in R$, donde e_x tiene ceros en todas sus coordenadas, exepto en la coordenada x-esima, en la cual tiene al 1 de S_x. Definimos $\mathbf{Q}(S_x) = \mathbf{E}(S_xe_x)$. Se sigue de la hipótesis, que el anillo $\mathbf{Q}(S_x)$ es la S_x-capsula inyectiva de S_x, por [[7] pag 116, 4.14 y 4.15] se tiene que $\mathbf{E}(R) = \mathbf{E}(\prod_{x\in \mathrm{X}} S_x) = \prod_{x\in \mathrm{X}} \mathbf{E}(S_x) = \mathbf{E}(T)$ son no singulares; también $\bigoplus_{x\in \mathrm{X}} \mathbf{E}(S_x) \subseteq \mathbf{E}(R)$ por lo cual, en la hipótesis podemos suponer que $R = \mathbf{E}(R) = \prod_{x\in \mathrm{X}} S_x$ donde $S_x = \mathbf{E}(S_x)$.

Ahora tomamos $L \in \mathcal{J}(R) \cong \Xi(R)$, es decir L es un ideal invariante, y esencialmente cerrado de R. Para $x \in$X la invarianza de L en R junto con $\bigoplus_{x\in \mathrm{X}} S_x \subseteq R$, garantiza que la proyección $Le_x \leq S_xe_x$ es invariante y como ideal izquierdo es esencialmente cerrado en $S_x \cong S_xe_x$.

La función $\Phi : \Xi(R) \longrightarrow \prod_{x\in \mathrm{X}} \Xi(S_x)$ dada por $\Phi(L) = \{[Le_x] \mid x \in X\}$ para $L \in \mathcal{J}(R) \cong \Xi(R)$, es claro que Φ así definida es un homomorfismo de retículas, que preserva el cero y la identidad. Para mostrar que Φ es suprayectivo, tomamos $(L_x)_{x\in \mathrm{X}} \in \prod_{x\in \mathrm{X}} \Xi(S_x)$, con $L_x \in \mathcal{J}(S_x)$ para toda x, sea K la cerradura esencial de $\bigoplus_{x\in \mathrm{X}} L_x$ en R, con $\bigoplus_{x\in \mathrm{X}} L_x \leq_e K \leq R$ (K existe pues R es no singular.

Afirmamos que K es invariante. Para probar esto tomamos $f \in \mathbf{End}_R(K, R)$, así la restricción de f a cada S_x induce un S_x-morfismo de L_x en S_x, de aqui se tiene que como L_x es invariante en S_x, entonces $f(L_x) \subseteq L_x$. Ahora tenemos que $f(\bigoplus_{x\in X} L_x) \subseteq K$. De aquí se sigue que como $\bigoplus_{x\in X} L_x \leq_e K$, por el Corolario 1.5, $f(\bigoplus_{x\in X} L_x) \subseteq f(K)$, dado que K es esencialmente cerrado, que $f(K) \subseteq K$. Por tanto K es invariante. Sabemos que $\bigoplus_{x\in X} L_x \leq_e K$, por lo que $Ke_x \cap (\bigoplus_{x\in X} L_x) \leq_e Ke_x \cap K$, de donde $L_x \leq_e Ke_x$. Por lo tanto L_x es un S_x-submódulo esencial en Ke_x. Dado que $L_x \in \mathcal{J}(S_x) \cong \Xi(S_x)$, L_x es esencialmente cerrado en S_x. Por lo tanto $L_x = Ke_x$ para toda $x \in X$. Así $\Phi(K) = (Ke_x)_{x\in X} = (L_x)_{x\in X}$, por tanto Φ es suprayectiva.

ii) Se sigue de el hecho de que $(\bigoplus_{x\in X} S_x) \leq_e R$ ■.

COROLARIO 6.2

Si $R_1, ..., R_n$ son anillos (los cuales no necesariamente son no singulares) entonces $\Xi(R_1 \oplus ...... \oplus R_n) = \Xi(R_1) \oplus .... \oplus \Xi(R_n)$.

EJEMPLO 6.5

i) Sea $\{S_x\}_{x\in X}$ un conjunto de anillos no singulares con $\Xi(S_x) = \Xi_{CA}(S_x) = \{0, 1\}$ como en el Ejemplo 6.1, para $R = \prod_{x\in X} S_x$, por la Proposición anterior:

$\Xi(R) = \Xi_{CA}(R) \cong \prod_{x\in X} \Xi(S_x) = \prod_{x\in X} \{0, 1\} = \mathcal{P}(X)$

ii) Similarmente tomamos S_x como en el Ejemplo 6.2, entonces

$\Xi(R) = \Xi_D(R) \cong \prod_{x\in X} \Xi(S_x) = \prod_{x\in X} \{0, 1\} = \mathcal{P}(X)$.

EJEMPLO 6.6

Dadas retículas booleanas Λ_{CB} sin átomos y Λ_{CA}, Λ_D atómicas, el problema de mostrar que existe un anillo R con $\Xi_{CB}(R) = \Lambda_{CB}$, $\Xi_{CA}(R) = \Lambda_{CA}$ y $\Xi_D(R) = \Lambda_D$, queda resuelto por los ejemplos anteriores. En particular si R es un anillo con $\Xi(R) = \{0, 1\}$, entonces $\Xi(\bigoplus_n R) \cong \mathcal{P}(\{1, ..., n\})$ es una retícula booleana completa con 2^n elementos. Por lo que el problema de dar una retícula finita, queda resuelto.

EJEMPLO 6.7

Para un anillo con división Δ, y un conjunto X. Sea $R = \Delta^{X} = \prod_{x \in X} \Delta$ el producto directo de $|X|$ cópias de Δ (el cual es no singular). Escribimos X como una union ajena de subconjuntos de X, es decir X=Y$\cup$Z con Y$\cap$Z=ϕ. Consideramos la función característica de Z, y la denotamos como $\mathcal{X}_Z$, ahora si $I = \mathcal{X}_Z R$, entonces I es un ideal bilateral de R, donde $I = \{(x)_\alpha \mid \alpha \in X, \text{ pero } \alpha \notin Y\}$.

Ahora afirmamos que I es esencialmente cerrado en R. Supongamos que no es el caso y que N ideal de R es la cerradura esencial de I en R, consideramos a $S = R/I$ y $\varphi : R \longrightarrow S$ la proyección natural en I, sea $\varphi^* : \Xi(S) \longrightarrow \Xi(R)$ el morfismo de retículas, dado en el Capítulo 4, como Δ es no singular tenemos que $\Xi(\Delta) = \{0, 1\}$ y además por la no singularidad de R tenemos $\Xi(R) = \Xi_D(R) = \mathcal{P}(X)$. Del mismo modo $\Xi(S) = \mathcal{P}(Y)$. Ahora como $S = \Delta^Y \subseteq \Delta^X$ (esto se da pues $\Delta^Y = \mathcal{X}_Y \Delta^X$). Así un elemento de $\Xi(S)$ está unicamente determinado en la forma $[\mathcal{X}_Q(S)]$ donde $\mathcal{X}_Q \in \Delta^Y \subseteq \Delta^X$ con $Q \subseteq Y$. Dado que $\mathcal{X}_Q(S) = \mathcal{X}_Q(R)$ se tiene que $\varphi^*([\mathcal{X}_Q(S)]) = [\mathcal{X}_Q(R)]$, por que es claro que φ^* es un monomorfismo de retículas. De este modo tenemos que φ^* es la inclusión natural de los conjuntos potencia $\mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(Z) \times \mathcal{P}(Y)$, aunque los complementos en $\mathcal{P}(Y)$ difieren de los complementos en $\mathcal{P}(X)$.

EJEMPLO 6.8

El siguiente ejemplo muestra, por qué en la definición de $I_D = (\mathbf{Z}_2(R) + C)^-$ (del Capítulo 4) se pide la cerradura esencial. Es decir, daremos un ejemplo de un ideal I de un anillo R, tal que I es un ideal izquierdo esencialmente cerrado de R pero que cumple que $I \cap \mathbf{Z}_2(R) = \{0\}$, con $I \oplus \mathbf{Z}_2(R)$ no necesariamente esencialmente cerrado. Este ejemplo también muestra que para un anillo de torsión S, $\Xi(S) = \{0\}$ es una retícula degenerada con $0 = 1$.

Sea $\mathbb{Z}$ el anillo de los números enteros, y $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Si e_{ij} es la matriz de tamaño 2×2, la cual tiene al 1 de $\mathbb{Z}$ en la entrada ij y cero en las demás entradas, consideramos a $R = e_{11}\mathbb{Z} + e_{21}(\bar{2}\mathbb{Z}_4) + e_{22}\mathbb{Z}_4$. Así R es un anillo con 1, con $\mathbf{Z}(R) = e_{21}(\bar{2}\mathbb{Z}_4) + e_{22}(\bar{2}\mathbb{Z}_4)$ esencial en $\mathbf{Z}_2(R) = e_{21}(\bar{2}\mathbb{Z}_4) + e_{22}\mathbb{Z}_4$. Si consideramos

$I = e_{11}2\mathbb{Z}$, notemos que I es un ideal bilateral de R. Además I es esencialmente cerrado, pues I es máximo con la propiedad de que $I \cap Z_2(R) = \{0\}$. Dado que $I \oplus Z_2(R) \leq_e R$, entonces $(I \oplus Z_2(R))^{-} = R$, por tanto $I \oplus Z_2(R)$ no es esencialmente cerrado en R. Haciendo $\Xi(R/I) = \{0\}$, que es una retícula degenerada y R/I es de torsión.

Bibliografía

[1] F.W. Anderson and K.R, Fuller, *Rings and Categories of Modules*, New York: Springer-Verlag (1973).

[2] J.Dauns, *Torsion Free Modules.* Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol. CLIV.

[3] J. Dauns, *Uniform modules and complements*, Houston J. Math., 6 (1980).

[4] J. Dauns, *Sums of uniform modules*, in:*Advances in Non – Commutative Ring Theory* (P.J. Fleury, Ed.) Pag. 68-87, Lecture notes in Math., #951, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1981).

[5] J. Dauns, *Uniform Dimensions and subdirect products*, Pac. J. Math. 126 (1985) pag. 1-19.

[6] K,R. Goodearl, *Ring Theory*, Marcel Dekker, New York (1976).

[7] K.R. Goodearl, *Von Neumann Regular Rings*, Pitman, London (1979).

[8] K.R. Goodearl and A.K. Boyle, *Dimension Theory for nonsingular injective modules*, Amer. Math. Soc. Memoir #116, Providence, R.I. (1976).

[9] G. Grätzer, *General Lattice Theory*, Academic Press, New york (1978).

[10] P.Halmos, *Lectures on Boolean Algebras*, Math. Studies #1, D.Van Nostrand Co.,Princeton, N.J. (1963).

[11] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers (1991).