46

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL LIMITE COMO FUNDAMENTO DEL CALCULO
"UNA PERSPECTIVA EDUCATIVA"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MATEMATICA

PRESENTA:

MARIA DEL CARMEN SEVILLA ALATORRE

DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. JOSE LUIS NAVARRO URRUTIA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2002

VNIVERSIDAD NACIONAL AVENTMA DE MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: María del Carmen Sevilla Alatorre
FECHA: 19/NOV/02
FIRMA:

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

El Limite como fundamento del Cálculo "Una perspectiva educativa"

realizado por María del Carmen Sevilla Alatorre

con número de cuenta 7714519-0 , quién cubrió los créditos de la carrera de: Matemática

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario	M en C. José Luis Navarro Urrutia
Propietario	Matemático Lorenzo Loreto Cruz Hernandez
Propietario	Matemático José Gabriel Ocampo Márquez
Suplente	Matemática Rita Vázquez Padilla
Suplente	M en C. María de Lourdes Guerrero Zarco

Consejo Departamental de

MATEMATICAS

DEDICATORIA:

A Dios: Por haberme dado la vida, cuidarme y estar a mi lado. en todo momento.

A mi nieto Carlos Esau: Tú haz hecho que mi vida cambie, hay más risas, alegrías, y un gran compromiso de ser mejor cada día (te amo).

A Claudia: Un día pense que seguiría siendo niña; un día pense que crecería y sería grande; un día pense que me casaría y seria madre, pero nunca pense, que en una hija se encontrara tanto, "fuerza", "amor", "ternura", "confianza", "orgullo", "respeto", "amistad", ... "A ti debo el sentir que soy una persona completa" (te amo).

A mi madre: Por haberme educado con amor y dureza y enseñarme que no debo ser del montón sino la mejor (te amo).

A mi padre: Con amor y respeto.

A mis hermanos:
Luis: Por ser inteligente, por la admiración que te tengo, por marcar la pauta a seguir en la Licenciatura, por buscar ser mejor y principalmente por la fortaleza demostrada al estar físicamente en los Cabos y el corazón en el Distrito (te amo).

Raúl: Por tu apoyo en las situaciones más difíciles de mi vida, por sentirme contigo protegida, por tu inteligencia y talento aplicado a la vida, a los negocios y principalmente a la familia (te amo).

Lety: Por tu capacidad de vivir la vida, por la manera en que disfrutas cada instante, por esa búsqueda y ese seguir adelante. Por crecer, compartir, comentar, reír y llorar, situaciones todas que reflejan una vida de estar juntas (te amo).

Ale: Por tu habilidad y destreza en los negocios, por tu capacidad de superación y aprendizaje y por ser la de mayor fortaleza interior, oculta en tu imagen aparentemente frágil (te amo).

Tavo: Por ser inteligente, noble, sentimental, amoroso, impulsivo, distraído y muy trabajador, un todo que describe tu yo interior; ser el hermano menor no fue tu decisión, asumir un papel de protector y defensor de la familia a la partida de los mayores si (te amo).

A mi tía Tere: Por creer en mi, apoyarme, defenderme y principalmente por amarme (la amo).

A mi yerno Carlos: Por el amor demostrado a Claudia y a Esau (te amo).

A mis sobrinos por el profundo amor que les tengo: Danae, Alejandra, Octavio, Barbara Estephani, Itzel Joceline, Eric Eli, Geraldine, Demian, Luis Emiliano, Ivan y Rodrigo.

A mis cuñados: Lucero, Caty, Emilio y Angélica.
A la familia.
A mis amigos.
Adriana: En pocos años hemos compartido mucho: alegrías, ilusiones, lágrimas, planes para la vida y el futuro, gracias, por estar a mi lado te quiero mucho amiga.

Jacobo: Por todo lo que eres y por todo lo que vales como persona, te quiero mucho.

Rafael: Por tu sencillez, inteligencia y dedicación a los estudios, a la familia y a los amigos, te quiero mucho.

Nicolás: Por el proceso de cambio realizado en tú vida, por esa búsqueda continua y por el profundo amor que te tengo.

A Ricardo, Maribel, Anita, Ana María, Minerva, Antigona, Elizabeth, Juan Carlos, José Luis, Chino, Lorenzo, Sonia, Alberto, Antonio, Alfonso, Cinco, Diablo, Elizabeth, Coty, Maritza, Nata, Eva, Yolanda, Lic. Antonio, Arturo, Mariano, Angel, Claudia Margarita, Mónica, Rita, a los trotamundos, Juan, Carmen, Angel, América, Gabriel, Bertha, Sandra, José Nicolás, Cesar, Píli, Lucy, Felix, Carlos, Gerardo, Anatolio, Ignacio, Clemente, Lety, Marina, Lourdes, Rocío, Lauren, Yola, Matus (hola), Cruz Evelia, Rosa Ahide, Toñita, Sra. Esther., las muchachas de la Biblioteca, Ramón; al maestro Xico, Miguel Angel, Pablo, Vielka y a tantos que por alguna extraña razón no puedo recordar en este momento su nombre, gracias por estar conmigo en las distintas etapas de mi vida.

A mis alumnos:
Bernardo: Por darme tantas razones para sentirme orgullosa.
Erika: Por ser tenaz, alegre, pero principalmente por nuestra amistad.
A los muchachos del club de Matemáticas: a los viejos, a los nuevos y a Evangelina, Rubén, Edgar, Karina, Raúl y Ernesto, por el orgullo que siento al pensar en ellos.

A Miguel Angel Garcia por su amor, paciencia impulso y comprensión, te amo.

Al amor: En ti he depositado mi confianza, contigo he crecido y aprendido que se pueden hacer "casi todo" sin lastimar a nadie.

Agradezco a:
José Luis Navarro y a Loreto Cruz:
Por apoyarme, por ser mis maestros y amigos.

INDICE

INTRODUCCIÓN

Muchos son los factores que influyen en la labor del docente en todos los niveles; en el nivel medio superior y en particular en el Cecyt 13 del IPN, no se cuenta con espacios óptimos que permitan generar un ambiente de trabajo, se tiene solo un cubículo de matemáticas donde son impartidas asesorías, además de toma de café y platicas bizantinas; en muy pocas ocasiones se presentan condiciones para realizar una actividad "seria" (según los profesores), y esta es dos o tres reuniones de academia por materia, al semestre, en donde son discutidos los ejercicios que se anexaran a los exámenes y la manera en que estos serán evaluados y si todo sale bien, quizá los Interpolitécnicos y no más.

En este Cecyt lamentablemente no hay un interés por la formación de profesores, y lo que es peor, no hay una preocupación por su propia formación; se piensa que todo lo que necesitan para impartir su cátedra ya se sabe y si no es el caso, con copiar algunos ejemplos, en algún libro, esta salvada la preparación de una clase.

Se hace necesario contar con seminarios en donde puedan ser discutidos materiales de un nivel superior al nivel medio (que son parte necesaria de la formación), así como los temas que deberán ser abordados como parte del desarrollo programático.

Contar con reuniones periódicas en donde puedan ser comentados los problemas de aprendizaje a los que se enfrentan los estudiantes, así como las posibles soluciones y los artículos de investigación, escritos sobre estas problemáticas.

Menos del 10% de los profesores escribe algún material, pero este es escrito para cumplir con el requisito de realizar algo y justificar su tiempo completo; en la mayoría de los casos lo escrito es copia de dos o tres libros, y no existe una aportación real a las problemáticas, ni a la profundidad de los temas.

Muy pocos profesores, menos del 5% se interesan en la historia de las matemáticas o en la lectura de artículos de investigación ¿por qué?.

Un factor más, que influye en esta problemática, es que los profesores no cuentan con una base, la mayoría son interinos y cada semestre tienen que esperar hasta dos meses para poder recibir su salario, y otros un poco más afortunados, cuentan con horas de base que van de 9 a 19 horas en propiedad que si perciben un pago quincenal, pero que no deja de ser un salario muy bajo.

Con esta situación tan desalentadora, sin embargo, debe haber propuestas, cuyo propósito sea el de mejorar la situación prevaleciente, "al menos en el aspecto académico".

El objetivo de este trabajo de tesis es mostrar algunos elementos que pudieran ser parte complementaria, de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral; y que se encuentran inmersas en nuestro desarrollo; así como una propuesta de enseñanza del concepto de límite, y su aplicación.

Para hacer el planteamiento y desarrollo del **capítulo I** fue considerada la pregunta **¿cuál es el conocimiento que tienen los profesores de bachillerato de la Historia de las Matemáticas?** Su intencionalidad es mostrar los antecedentes históricos, que rodean a la invención del cálculo. Se ha incluido aquí a los precursores del cálculo, Newton y Leibniz, con su intuición y fe en la validez universal de lo que los sentidos nos transmiten respecto al movimiento y a los diagramas geométricos; a más de matemáticos posteriores como son Simpson, L'Hôpital, Taylor, Euler, profuso creador de fórmulas y artificios. D'Alembert quien fundo y construyo el cálculo sobre la teoría de los límites. Lagrange, y la culminación del formalismo. Gauss y su exposición rigurosa sobre convergencias de series infinitas. Cauchy quien define el concepto de límite y reduce la convergencia de series infinitas, la continuidad, la derivada y la integral de una función, a este concepto. Fourier, que hace notar la falta de claridad de conceptos, como número real, función arbitraria y continuidad. Riemann y su concepto de la integral. Laplace con su obra sobre mecánica celeste. La teoría de variable compleja iniciada por Cauchy. Y finalmente Weierstrass alcanzando la perfección clásica del análisis riguroso.

Se plantea una segunda pregunta, a saber: **¿cual es el conocimiento matemático de los profesores que imparten las materias de matemáticas, necesarias en este nivel?**
Es bien sabido que un número considerable de profesores, se limita a preparan sus clases (como meros recetarios), determinando la profundidad de los conceptos, con los pocos libros con que cuenta el nivel medio superior, olvidando que se tiene mejores opciones para el aprendizaje y profundidad de los propios conceptos.
En esta búsqueda, se hizo la pregunta **¿Cuál es el instrumento con el que se aprende o aprendió Cálculo?** El **capítulo II,**. Aborda esta inquietud.
Desde siglos pasados se han escrito libros de texto, ensayos y artículos especializados de la materia.
Los principales escritores (entre 1696-1917) fueron L'Hôpital, Lacroix, Cauchy, Cournot, Goursat, Osgood, Sonnet, Ranville, Woods y Binley.

En la enseñanza media superior existe una problemática más y es el total desconocimiento (en la mayoría de los profesores), de artículos de investigación sobre las problemáticas existentes, de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, en el salón de clases, por lo que se plantea la pregunta **¿En que esta basada la enseñanza del Cálculo?** En el **capítulo III**, se observa, que la enseñanza del cálculo ha estado basada en el principio tradicional, el maestro es un transmisor de los conocimientos y el alumno es un receptor de ellos, provocando una fase de crisis, **¿Que se ha hecho ante esta situación de crisis en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo?** Se hace necesario un análisis de la situación actual, por lo que, son mencionadas aquí las diferentes alternativas y enfoques de análisis: El sociocultural; El epistemológico; El Psicopedagógico, La capacitación de profesores; y el acervo bibliográfico, así como el conocimiento, de las propuestas alternativas que plantea Estados Unidos y Francia.

Con el conocimiento de la problemática y las propuestas alternativas y recursos que presenta tanto la reforma estadounidense, como la reforma francesa, presentamos una propuesta desde nuestra perspectiva en el **Capítulo IV**, Esta propuesta es planteada por la problemática existente en nuestros estudiantes; **¿Que estrategia de enseñanza debe seguirse para que los estudiantes de un primer curso de cálculo diferencial e integral asimilen el concepto límite de una función y puedan considerar y efectuar como un detalle algorítmico el cálculo del límite?**

El objetivo de la innovación es: el alumno evaluará el límite de una función y describirá completamente la situación geométrica de este concepto en cada caso.
Se proponen ejemplos, utilizando funciones (lineales, cuadráticas), polinomiales, seccionadas y racionales con raíces racionales e irracionales, en los que pueda observarse la definición de este concepto.

Los ejemplos seleccionados, sus características funcionales y su observación geométrica están en el **Capítulo V**, su intencionalidad es generar en el estudiante intuición y visión geométrica.

En el **capítulo VI** se ha efectuado el calculo de límites en dos vertientes:

1) de manera intuitiva por la observación de las alternativas gráficas, haciendo la generalización correcta del resultado aún sin el dominio de la formalización.
2) y la prueba formal de algunos de los límites (que en términos del nivel medio superior, son muchos más, de los que quizá sea considerado, en las clases normales)

Este trabajo de tesis cuenta con cuatro secciones más, las **conclusiones** donde se comenta los logros y fracasos de la innovación y **tres anexos** cuyo contenido es la presentación de algunos teoremas anexo I, así como los exámenes departamentales anexo II y exámenes informales anexo III.

CAPÍTULO I
Aspecto histórico del Cálculo.

Dentro de los programas del nivel medio superior, se encuentran materias que hacen un estudio cuidadoso de la Historia Universal y de México, considerándolas necesarias para la formación integral de los estudiantes, sin embargo, estas materias, no tienen un vínculo con las materias de nuestra disciplina, peor aún, se detecta, un notable abandono de la Historia de la Matemática, necesaria, en muchos de los casos, para desarrollar en los estudiantes una posición motivacional y actutudinal hacia las matemáticas.

La matemática y la astronomía han ejercido una gran atracción en el ser humano, desde su aparición. Se tienen evidencias arqueológicas acerca de los avances matemáticos de las culturas antiguas, como por ejemplo, los chinos, los egipcios, los mesopotamios, los mayas, etc. y otras más desaparecidas hace miles de años.(**5.** Bell)

Según se ha podido establecer, estas culturas lograron varios niveles de precisión en la determinación del año solar, las órbitas de la Luna y de Venus, además de sus sorprendentes conocimientos matemáticos, sobresaliendo de ellos los logros de los mayas, quienes tuvieron un calendario solar comparable al actual y un interesante sistema para calcular eclipses. (**3.** Bourbaki)

La historia de la humanidad se inicia con los trabajos de los griegos antiguos, unos diez siglos antes de nuestra era, los documentos logrados por este maravilloso pueblo nos muestran un alto grado de refinamiento en todas las áreas del conocimiento humano, las artes y el deporte. (**8.** Freudental)

Fueron tres los problemas fundamentales que los sabios de la antigüedad habían propuesto y que resumían una serie de situaciones de enorme profundidad. La civilización intentó resolver estos problemas durante muchos siglos:

1. **El conocimiento del sistema solar**, el entendimiento de las órbitas de los planetas, para así, poder predecir sus diversas posiciones en momentos dados.

2. **La determinación de la tangente a una curva dada**. Este problema está asociado a la velocidad instantánea de objetos móviles y al conocimiento de los máximos y los mínimos de una curva.

3. **La cuadratura de curvas dadas**. En el lenguaje moderno, esto se refiere a obtener el área encerrada por alguna o algunas curvas. Este problema también está asociado a recorridos de objetos móviles.

Los tres problemas están profundamente relacionados entre sí como se sabe en la actualidad, de hecho la resolución de los tres fue simultánea. (**12.** Laubenbacher)

Entre las figuras científicas que se destacaron en la Grecia antigua de esa época y que son conocidos por sus aportaciones se encuentran: Pitágoras de Samos, Platón, Aristarco de Samos, Euclides, Apolonio, Eratóstenes, Ptolomeo, Eudoxio, Diofanto, Xenón, Thales de Mileto, etc.

Pitágoras fundó lo que fue probablemente la primera universidad de la historia unos seis siglos antes de nuestra era, una de sus contribuciones más importantes fué la ley de los intervalos musicales. Este documento, el primero de la fisica-matemática reveló una interdependencia inesperada entre el número, el espacio y la armonía. La idea pitagórica de fundamentar las leyes de la naturaleza con base en la matemática ha constituido el principal avance científico. (2. Bochner)

El método de exhausión de Eudoxio para calcular áreas, volúmenes y longitudes fue explotado brillantemente por Arquímedes y varios más, y nos proporciona una buena aproximación al área de un círculo a partir de inscribir y circunscribir polígonos regulares, además de constituir un interesante antecedente de los conceptos formales del cálculo. .(5. Bell)

Arquímedes logró la construcción de la tangente a la espiral que lleva su nombre, aplicó la matemática a la mecánica y prácticamente creó la hidrostática y la estática a partir de su ley de la flotación de los cuerpos y su formulación de la teoría de las palancas.

Euclides también encontró fórmulas para determinar volúmenes de pirámides utilizando el mismo método. Sus Elementos fueron los cimientos de la geometría plana y a partir de esto se exploró la posibilidad de crear nuevas geometrías, lo que se logró unos dos mil años después.

Eratóstenes, a quien de inmediato se relaciona con su criba para calcular números primos, fue el primero en dar una medida de la circunferencia de la tierra. Considerando los más recientes avances científicos, es posible decir que sus cálculos fueron de gran precisión para los conocimientos de la época. (7. Escohotano)

El trabajo de las Cónicas de Apolonio, caracterizando a la elipse, la parábola, la circunferencia y a la hipérbola fue de vital importancia para los descubrimientos que habían de darse unos dos mil años después, en el siglo XVII.

Poco después, en el siglo II después de Cristo se publica el famoso libro Almagesto de Ptolomeo, desarrollando antecedentes de la trigonometría y proponiendo la teoría geocéntrica, la cual perdura hasta el siglo XVII.

Las ideas de Ptolomeo prevalecen muchos siglos y hay un lento desarrollo de muchos conceptos matemáticos gracias a los esfuerzos de los hindúes, los árabes, y los italianos, entre otros. En esta etapa se generan y afirman muchos conceptos del álgebra, la trigonometría y la geometría. .(5. Bell)

A finales del siglo XV y principios del XVI, aparece la obra de Copérnico, en la que se expone su teoría heliocéntrica; los primeros viajes interoceánicos que llevan a los europeos a América; la edición de importantes libros de matemáticas como el Ars Magna de Cardano y los trabajos de Stevinus en los que se resumen todos los conocimientos científicos de la época; el alemán J. Kepler publica sus trabajos sobre astronomía en donde da a conocer sus tres famosas leyes del movimiento planetario, la primera de las cuales indica que la órbita que describe un planeta es una elipse, uno de cuyos focos es el sol. (**2.** Bochner)

Las otras dos leyes de Kepler igualmente importantes, forman, junto con la primera el cimiento de la astronomía actual y nos indican los tiempos de los recorridos y las relaciones entre todas las órbitas. Sus otros trabajos son también de gran profundidad, destaca su Dioptrice, en donde se fundamenta el estudio de las lentes y la construcción de su propio telescopio a partir de estos descubrimientos. (**12.** Laubenbacher)

El italiano Galileo, contemporáneo de Kepler, construyó y perfeccionó también su telescopio con el cual descubrió que la luna tenía accidentes geográficos, las fases de Venus, los satélites de Júpiter, etc., además dio forma matemática a las relaciones entre la distancia, la velocidad, la aceleración y otros entes físicos, dándoles un lugar privilegiado en su dinámica racional.(**9.** Freebury)

Otros personajes excepcionales de esos años fueron los franceses Pascal y Fermat quienes trabajaron en las probabilidades, la geometria y se aproximaron a los métodos del Cálculo que habría de inventar Newton unos años después.

En 1637, la aparición de la Geometria Analitica en la obra de Descartes y 1687 fechas que señalan el espacio en el cual nacen las matemáticas modernas, con la aparición de los principia de Newton. (**4.** Cooney)

Fueron Newton (inglés, 1642-1727) y Leibniz (alemán, 1646-1716) quienes demostraron independientemente y de manera casi simultánea el famoso Teorema Fundamental del Cálculo, dando solución a numerosos problemas y sentado las bases para la creación de nuevas áreas de la matemática, hasta hacia poco, insospechadas.(**6.** Edwards)

Poco después, el cálculo era conocido por un selecto grupo de matemáticos europeos, quienes junto con los creadores del Cálculo lograron resolver una importante cantidad de problemas, cuya solución se había buscado por cientos de años. (**10.** Kline)

En el trabajo del inglés Newton se expone el Cálculo y varias interesantes aplicaciones a los fenómenos celestes, efectuó una excelente aplicación del nuevo método al sistema de los cielos y englobó las leyes de Kepler estableciendo el conocimiento del sistema solar. (**15.** Perero)

El Cálculo expuesto en "Los Principia" es la matemática que hacía falta para el estudio del movimiento y las razones de cambio. De inmediato un selecto grupo de matemáticos y científicos europeos se enfilaron hacia el dominio de la novedosa y extraña, metodología (así llamada en ese tiempo). Destacan las aplicaciones hechas por Huygens, Barrow, Los Bernoulli, (una familia suiza de por lo menos ocho matemáticos de primera fila), Taylor, Euler, L'Hôspital y muchos más, entre ellos Halley, a quien se le asocia con un bello cometa y los propios trabajos de Newton y Leibniz. (**13.** Ronald)

Muchos problemas que tenían siglos sin solución fueron resueltos por diversos caminos a partir del Cálculo y en los siguientes tres siglos fueron descubiertos tres planetas, uno por siglo, mediante cálculos newtonianos, ya que en la época de Newton, como ahora, solamente eran visibles seis planetas. (**11.** Kline)

Debido a su gran éxito en los problemas celestes, al cálculo se le empezó a enfocar a los problemas de la física de la tierra y se inició un cuidadoso estudio de sus bases teóricas para, con mayor detenimiento, perfeccionar sus detalles, hasta conseguir cimientos brillantes y consistentes. .(**5.** Bell)

El obispo de Berkeley en 1734 en su Analyst: or, a discourse advessed to an infidel mathematician. Wherein it is examined whether the object, principles and inferences of modern analysys are more distintly mysteries and point of faith, expuso las falacias presentadas en el trabajo de Newton sobre las fluxiones y sobre las razones primeras y definitivas haciendo una crítica bien fundada sustentando que al sustituir $x + 0$ en lugar de x en x^n y hacer que en el paso final desapareciera cero, para obtener la fluxión de x^n es un cambio de hipótesis: "porque al decir que el incremento no vale nada, la suposición de que los elementos valían algo o de que había elementos queda destruida y sin embargo, se tiene una consecuencia de aquella suposición, es decir una expresión obtenida en virtud de la misma. Sin embargo aunque sus críticas fueron acertadas, no fueron tomadas en serio. (**11.** Kline)

En los siglos que siguieron a la muerte de Newton, muchos matemáticos y científicos hicieron aportaciones muy impresionantes al Cálculo; de esta nueva época sobresale una cantidad impresionante de fórmulas y soluciones para los más diversos problemas, surgen nuevas áreas de la matemática como las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, el análisis matemático real y complejo, el análisis armónico clásico, etc. (**12.** Laubenbacher)

Surgen también nuevos problemas, nuevas maneras de abordar los clásicos, se unifican conocimientos aparentemente dispersos, en fin hay una creación impresionante de conocimiento matemático y científico.

En 1807 Fourier enunció en su obra sobre calor, llamada por Lord Kelvin "Un poema matemático", su teorema, que dice que una función totalmente arbitraria puede ser representada mediante una serie trigonométrica. (**8.** Freudental)

Tuvo objeciones por parte de Lagrange, Laplace y Legendre, quienes indicaron que hacía falta rigor en el trabajo. Euler en 1754 ya había encontrado en un problema de mecánica celeste los coeficientes de Fourier, ahora muy usados en física-matemática.

Debido a este estimulo, durante la segunda década del siglo XIX, se crea una nueva época de la matemática que reconstruye con la base del límite, a la derivada, a la integral, a la continuidad, etc. e intenta proporcionar rigor a todos los conceptos de la matemática para delinearlos como hoy los conocemos. El teorema de Fourier y las lecciones de Cauchy de 1821 coinciden con este hecho. (**8.** Freudental)

En 1781 el planeta **Urano** fue descubierto por William Herchel con un telescopio de fabricación casera y teniendo en cuenta las leyes de Kepler, la órvita de Urano fue calculada a partir de pocas observaciones. (**1.** Apostol).

En 1845 un estudiante (de bachillerato) de la Universidad de Cambridge, John Couch Adams plantea la posibilidad y existencia de otro planeta, suponiendo valida la ley de gravitación de Newton e instó al Real Observatorio de Greenwhich a buscar el planeta, sin éxito; casi de manera simultanea Jean Joseph Leverrier realizó un cálculo parecido, y pidió al jefe del observatorio de Berlín, que confirmara la predicción calculada, encontrándose el nuevo planeta **Neptuno**, casi en la posición calculada. (**1.** Apostol).

El teorema de Fourier fue demostrado con condiciones muy rigurosas por Dirichlet en 1829. Al estudiar Riemann las condiciones bajo las cuales el teorema es cierto llegó a su conocida definición de integral y sus investigaciones sobre variable compleja partieron de las series de Fourier y de la teoría del Potencial, que en buena parte había sido elaborada por Lagrange, Laplace y Legrende, entre otros. (**13.** Ronald)

Riemann, en 1854, observó la posibilidad de geometrizar toda la física-matemática y las observaciones de Weierstrass en 1875 sobre series de Fourier hicieron posible casi toda aplicación del teorema a la física y en general a la ciencia y a la tecnología. (**4.** Cooney)

Con los trabajos de Weierstrass se inició una etapa en la cual el rigor justifica los procedimientos formales de Newton. Los números y todos los conceptos del Cálculo, tales como función, derivada, integral. (**4.** Cooney)

Las sucesivas ampliaciones, la mayor profundidad lograda y el rigor impuesto al cálculo, entre otras cosas hicieron posible la aparición de nuevas teorías científicas, tales como la Mecánica Cuántica y la Relatividad. (**3.** Bourbaki)

A comienzos del siglo XIX, la matemática se hizo completamente independiente de la mecánica y de la física general, sin embargo, y a pesar de que la relación entre matemática y mecánica parecía agotada, otro tipo de relación estaba empezando a desarrollarse, la física teórica se apoderaba de una teoría matemática que aparentemente podía ser considerada prefabricada para esa ocasión, esta teoría es el "análisis tensorial" este no fue una rama nueva de la matemática sino una nueva variación sobre el estudio de los invariantes diferenciales asociados en principio a una geometría rimanniana. Sin embargo Gregorio Ricci trató de facilitar la búsqueda de propiedades geométricas y la expresión de leyes físicas en forma invariante bajo cambios del sistema de coordenadas, desarrollo sus planteamientos y elaboró un sistema de notación completo para la teoría que llamo "cálculo diferencial absoluto". Presento la primera exposición sistemática de su método en un artículo publicado en 1892, aplicándolo a algunos problemas de geometría diferencial y de física.(**2.** Bochner)

Nueve años después a invitación de Klein, Gregorio Ricci en colaboración con su famoso discípulo Tullio Levi-Civita, pubilcaron un artículo llamado "Métodos de Cálculo Diferencial Absoluto" ofreciendo una formulación más definitiva de ese cálculo, esta publicación, se realizó en una revista que leían los matemáticos de todas las nacionalidades, sin embargo produjo muy pocos efectos. Algunos geómetras se dieron cuanta del nuevo cálculo, Grossmann de Zurich, lo domino y se lo enseño a Einstein, este descubrió que allí estaba el providencial aparato para sus proyectos. Einstein le dio el nombre de "análisis tensorial" en 1916. (**10.** Kline)

En 1905, Albert Einstein, publicó en Annalen der Physic tres artículos que hicieron época:

El primero Sobre el Movimiento Browniano, en donde se muestra que el movimiento observado por el escocés Brown un siglo antes puede ser modelable por ecuaciones.
El segundo: Sobre el efecto fotoeléctrico, le valió el premio Nobel.
El tercero le ganó definitivamente el respeto de todas las generaciones posteriores: Sobre la electro-dinámica de los cuerpos en movimiento.

La Teoría de la Relatividad requirió de la matemática teórica de Riemann. (**11.** Kline)

La primera guerra mundial ofreció la oportunidad de probar los armamentos recientemente diseñados con la tecnología del nuevo siglo y se observó un impresionante despliegue de estudios matemáticos, científicos, tecnológicos y estratégicos por parte de todos los contendientes. (**4.** Cooney)

La ampliación del propio Einstein a Teoría de la Relatividad General también necesitó de bastante matemática pura y muy pronto ofreció frutos tecnológicos. La mecánica celeste y la teoría de la luz de Newton fueron ampliadas. A partir de esto se crea el rayo láser, pero también se fabrica la primera bomba atómica, entre otras cosas. (**11.** Kline)

La primera computadora fue concluida en 1945, recién terminada la segunda guerra mundial y fue creada para resolver las ecuaciones diferenciales que definían las trayectorias de los proyectiles. Desde entonces se vive un proceso de miniaturización de sus componentes lo que dio lugar a que en 1980 apareciera en el mercado la micro-computadora, la cual en muy poco tiempo se ha apoderado del control de todas las actividades educativas, industriales, deportivas, artísticas y por supuesto científicas.

A fines de este segundo milenio asombra la capacidad de tratamiento y almacenamiento de datos, comunicación, velocidad, precisión y transportabilidad de estas nuevas creaciones. No es posible concebir al mundo actual sin ellas.

La tecnología asociada a la computación requiere de una de las más impresionantes estructuras matemáticas. El camino que sigue la computación está relacionado con la solución de las ecuaciones diferenciales, pero en el transcurso de su desarrollo ha dejado bastantes aplicaciones prácticas, además de impulsar nuevas áreas de la matemática, tales como el análisis numérico que nos ayuda a detectar la factibilidad de los resultados proporcionados por las computadoras y las super-calculadoras. (**10.** Kline)

A pesar de que muchos matemáticos plantean el destierro de los infinitésimos de Laibniz, se penso que era posible plantear una teoría consistente, basada en los infinitésimos (Bois-Reymond, Otto Stolz, Félix Klein). En 1960 Abraham Robinson crea un nuevo sistema, llamado **análisis no estándar**, introduciendo los números **hiperreales**, los cuales incluyen los números reales y los infinitésimos, define a los infinitésimos como: un número infinitésimo positivo es un número menor que cualquier número real ordinario positivo, pero mayor que cero, de la misma manera: un número infinitésimo negativo ordinario es mayor que cualquier número real negativo, pero menor que cero, además introduce nuevos números infinitos, que son los recíprocos de los infinitésimos. Todo número hiperreal finito r es de la forma $x + \alpha$, en donde x es un número real ordinario y α es un infinitésimo. Lo importante es que con este sistema de números hiperreales se puede dar precisión a un enfoque del cálculo que anteriormente habia sido rechazado como poco claro e incluso absurdo. El análisis no estándar, fue bien aceptado por los físicos ya que estos seguían utilizado los infinitésimos por conveniencia, así que se cuenta con muchas aplicaciones a esta materia, existe aplicación también a la probabilidad, a la Teoría Económica etc. (**12.** Laubenbacher)

La observación de la caída de la manzana por parte de Newton que desencadenó las ideas de la Gravitación Universal fue retomada para fabricar una nave que, saliendo de nuestra atmósfera, surcara el espacio guiada por las estrellas como antaño, para depositar a un hombre en la luna en la sexta década del siglo XX.

Los esfuerzos que se invirtieron en esta empresa muy pronto fueron capitalizados con la colocación de satélites artificiales con enorme capacidad de comunicación.

Estos satélites y las computadoras son importantes elementos de comunicación y de progreso, desafortunadamente también conforman el núcleo de una estrategia militar más ofensiva que defensiva.

BIBLIOGRAFÍA

1. Apostol, T, 2001, Calculus, Reverté, S.A.

2. Bochner Salomon "El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia" Alianza Editorial, S. A. Madrid, 1991

3. Bourbaki, Nicolas. "Elementos de Historia de las Matemáticas". Alianza Universidad. Madrid, España.

4. Cooney P. Miriam, "Celebrating Women in Mathematics and Science", National Counciel of Teachers of Mathematics Restor, Virginia 1906.

5. Bell, E.T. Historia de las matemáticas, Fondo de Cultura económica.

6. Edwards, C. H. 1937. The Historical Development of Calculus. Springer-Verlag, New York.

7. Escohotado Antonio, Principios Matemáticos de la Filosofía Natural, Isaac Newton. Altaya, 1987.

8. Freudental Hans, "Las Matemáticas en la vida cotidiana". Biblioteca para el hombre actual. Ediciones Guadarrama. Madrid, España.

9. Freebury H. A. "A History of Mathematics " New York The Macmillan Company. United States of America.

10. Kline M. "El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días", Volumen III, Alianza Editorial, S. A. Madrid, 1992.

11. Kline, M 1985, Matemáticas, la perdida de la certidumbre, Siglo XXI de españa editores S.A.

12. Laubenbacher R, Pengelley, D., 1999, Mathematical Expeditions Chronicles by the Explorers.

13. Ronald Calinger, "Vita Mathematica. Historical Researches and Integration With Teaching. The Mathematical" Association of America. Oxford, 1703.

14. Rowe E David, McCleary John, "The History of Modern Matematics", volume I. Academic Press, San Diego California 1988.

15. Perero, Mariano. "Historia e Historias de Matemáticas" Grupo Editorial Iberoamericana. México.

CAPÍTULO II
Los libros de Cálculo.

Introducción

En estos textos se puede observar como las ideas y definiciones han ido evolucionando.
La enseñanza del Cálculo se introdujo a nivel bachillerato y se implanta una sistematización del uso del libro de texto.
La manera de abordar los temas se ve impactada fuertemente por dos episodios destacados, el primero con la reforma francesa, modificando la estructuración teórica del contenido de los textos, aparecen cambios de imagen y funcionamiento del Cálculo escolar y se introduce el uso de los cuantificadores lógicos de manera vigorosa. Uno de los libros representativos de esta etapa es Tall (1986). El segundo episodio aparece en 1987 la de los estadounidenses, "La tecnología para la enseñanza", movilizando las jerarquías de su argumentación discursiva y se desarrollan nuevos textos. Estos acercamientos modifican las tradiciones o entidades de un texto tales como definiciones, teoremas, pruebas, ejemplos o ejercicios, en la misma medida en que las técnicas afectan las prácticas sociales (Calculadoras y paquetes computacionales). Dentro de los libros representativos de este episodio se encuentra el Demana (1992); el libro de Callahan (1993); el libro Purcell y Varberg (1993).

No solo fueron escritos libros de Texto, sino artículos de Cálculo presentados en revistas, entre estas se destacan: La revista American Matthematical Monthly publicada en 1894; en 1902 se publica On limits; en 1958 en pleno movimiento de reforma, se presenta el artículo Bringing Calculus up to date de M. Munroe.

En la actualidad existen muchas revistas especializadas en las cuales son presentados artículos de investigación en cálculo con un análisis riguroso y las revistas con carácter educativo, en México tenemos a la "Relime", Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa y la Serie Antologías publicadas por CINVESTAV, entre otras.
El orden en el que están presentados los libros, es por la fecha en que fueron escritos.

Desarrollo

El Cálculo es un producto cultural; es el antecedente indispensable de nuevas y diversas ramas de la matemática y de las ciencias. A partir del Cálculo se han revisado los fundamentos de la matemática y se han articulado un gran cúmulo de extensiones a otras ramas del saber contemporáneo.

La enseñanza del Cálculo en cada una de sus épocas históricas, produjo conocimiento y el libro se constituye como un objeto de apoyo del saber, imponiendo una distribución y jerarquía de conocimientos formando intelectualmente tanto a los alumnos como a los profesores; además de contribuir a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas.

Haremos un rápido recorrido de los principales libros que fueron escritos para ser utilizados como texto en la enseñanza del Cálculo. Es interesante observar en cada caso la evolución de la definición de los principales conceptos que conforman el cálculo

1. En 1696 se publica el primer libro de cálculo titulado ANALYSE DES INFINIMENT PETITS POUR L´INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES, escrito por el marques de L´Hôpital, en donde aparece la definición de *variables* como *aquellas cantidades que aumentan o disminuyen continuamente*, y la definición de *constantes* como *aquellas magnitudes que permanecen iguales en tanto otras cambian*.

Otra definición que aparece es la de *diferencial* como *parte infinitamente pequeña de cantidad variable que aumenta o disminuye*.

Además cuenta con dos suposiciones;
Primero: *Dos cantidades son iguales si no difieren entre ellas en el sentido usual o difieren entre ellas en una cantidad infinitamente pequeña*.

Segundo: *Una línea curva puede ser considerada como una poligonal con una infinidad de lados, todos infinitamente pequeños*.

2. En 1715 se publica la segunda edición del libro ANALYSE DES INFINIMENT PETITS FOUR L´INTELLIGENCE DES LIGNES COUBES, escrito por el marques de L´Hôpital; en la sección IX, llamada SOLUTION DE QUELQUES PROBLÉMES QUI DÉPENDENT DES MÉTHODES PRÉCÉDENTES, da una proposición que en notación funcional, sería:

si $f(A)=0, g(A)=0$ ¿Cual es la ordenada de $\left(\frac{f}{g}\right)$ en $x=A$?

$$f'(A)=\frac{f(A+dx)-f(A)}{dx}$$
$$g'(A)=\frac{g(A+dx)-g(A)}{dx}$$

entonces $f(A+dx)=f'(A)dx+f(A)$ y

$$g(A+dx)=g'(A)dx+g(A)$$ así

$$\frac{f(A+dx)}{g(A+dx)}=\frac{f'(A)dx+f(A)}{g'(A)dx+g(A)}$$

$$\frac{f'(A)dx}{g'(A)dx}=\frac{f'(A)}{g'(A)}$$

que sería el equivalente actual tomando: $f, g \in C$

$$\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to A} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL por Lacroix en París en el año de 1797. En este libro se encuentra la definición de función: para expresar una cantidad que depende de otra, *se dice que la primera es función de la otra; aunque sea imposible expresar algebraicamente la relación que guardan.*

4. En 1821 Cauchy escribe el libro COURSE D'ANALYSE, en este libro se encuentran algunos aspectos interesantes.

En su segunda lección llamada *sobre límites y continuidad*; se define al límite como: *Cuando los valores sucesivos que se atribuyen a la misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, eventualmente diferente de este en tan poco como se quiera, este valor fijo es llamado el límite de todos los otros.*

En una tercera lección llamada *Derivada de funciones de una variable*; define a la derivada: *Cuando la función $y = f(x)$ es continua entre dos límites dados de la variable x, y una asignación de valores entre esos límites a la variable, un Δx es infinitesimal si $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f(x)$ donde $f(x)$ es continua en x, si $f(x+h) - f(x)$ decrece infinitamente cuando lo hace h. Entonces $f'(x)$ es el límite cundo la h decrece infinitamente siempre que tal límite existe, es decir:*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En su cuarta lección, *Diferenciales de funciones de una variable*, se define:

Sea $y' = f(x)$ una función de la variable independiente x; sea h un infinitesimal y k una cantidad finita, α cantidad infinita, tenemos que:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+k\alpha) - f(x)}{k\alpha}$$

de donde se concluye que:

$$\frac{f(x+k\alpha) - f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} k$$

El lado izquierdo de la ecuación converge cuando la variable α tiende a cero, así, la diferencial de $f(x)$ es $f'(x)\,k$.

Con la fundación de la L'Ecole Polytechnique en Francia, se fortalece el proceso de matematización de la ingeniería, se favorece el establecimiento de la figura profesional del matemático y se concede la alta jerarquía de lo analítico a la matemática.

5. En 1841 como respuesta al programa de Cauchy de la fundamentación del Cálculo aparece el texto de Coumot, el cual es partidario de una aproximación teórica empírica y retomaba algunos de los elementos propuestos por Lacroix (1787), reuniendo así el Introduction analysis infinitorum de Euler y la Théorie des fonctions analytique de Lagrange. De donde toma como objeto de estudio a las funciones y fundamenta los principios del Cálculo infinitesimal.

Cournot plantea que las funciones (matemáticas o empíricas) disponen de ciertas propiedades generales que son de gran importancia para la interpretación de fenómenos naturales. Señala además la conveniencia de tratar a las funciones en sus representaciones múltiples, tablas de valores, gráficas, enunciados, o fórmulas algebraicas. Comenta también que el lector ya había visto una aplicación muy importante de este principio, en la manera de usar las diferencias proporcionales anexas a la tabla de logaritmos.

6. En 1904 fue publicado el libro A COURSE IN MATHEMATICAL ANALYSIS VOLUMEN I, por Goursat; donde se define a la función: *Cuando dos cantidades variables están relacionadas de tal forma que el valor de una de ellas dependa del valor de la otra. Se dice que están una en función de la otra.*

Y se define el *límite*: *Cuando dos valores sucesivos de una variable* x *se aproximan más y más a una constante* a *de tal forma que el valor absoluto de la diferencia* $x-a$ *, finalmente se haga y permanezca menor que cualquier número preasignado, la constante* a *es llamada el límite de la variable* x.

Definición de *continuidad*: $f(x)$ *es continua para* $x = x_0$, *si correspondiente a cada número positivo* ε *, no importa que tan pequeño, podemos encontrar un número positivo, tal que* $|f(x_0+h)-f(x_0)| \langle \varepsilon$ *para cualquier valor de* h *menor en el valor absoluto.*

Si f *es continua en* (a,b) *y* N *es el valor entre* $f(a)$ *y* $f(b)$ *, entonces la ecuación* $f(x)=N$ *tiene al menos una solución. Si* f *es continua en un cerrado* $[a,b]$ *entonces alcanza su máximo y su mínimo.*

Sea $f(x)$ *una función continua, entonces los dos términos del cociente* $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *se aproximan a cero simultáneamente cuando el valor de* h *se aproxima a cero.* A esto le llama la derivada de la función $f(x)$.

También se asienta que: Si $f(x)$ *es derivable en* x_0 *, entonces es continua en* x_0*. El recíproco no es cierto y da como ejemplos:* $f(x) = x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

7. En 1908 se publica el libro llamado A FIRST COURSE IN THE DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS escrito por Osgood, donde se define a la función: *Se dice que* y *es función de* x*, si, cuando* x *está dado,* y *está determinado;*

A más de la *Pendiente de una curva*: *Sea* P_1 *con las coordenadas* (x_0, y_0)*, un punto arbitrario sobre esta curva, y sea* $P^*(x', y')$*, un segundo punto, pasando una secante por* P_1 *y* P^**, cuando* P^* *se aproxima a* P_1*, la secante sobre* P_1 *se aproxima a la tangente como su límite, su pendiente se aproxima a la pendiente de la tangente.*

8. En 1909 Sonnet escribió el libro PREMIERS ELEMENTS DU CALCUL INFINITESIMAL.

En las nociones preliminares define al cálculo diferencial como la parte de las matemáticas que trata de las variaciones infinitamente pequeñas de las funciones.

Una función y *se dice función de otra variable* x *si* y *varia con* x.

Una cantidad se dice infinitamente pequeña cuando tiende a cero.

Hay un α *infinitamente pequeño.*

Si $\frac{\beta}{\alpha}$ *tiende a* k *(finito)* β *es infinitamente pequeño de primer orden.*

Si $\frac{\beta}{\alpha}$ *tiende a* $k\alpha^n$*,* β *es un infinitamente pequeño de* $(n+1)$ *orden.*

f se dice continua , si Δx *se hace pequeño entonces* Δy *se hace menos que cualquier cantidad dada.*

$$dy = f(x+dx) - f(x)$$

$$f'(x) = lim\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

cuando Δx *tiende a cero.*

$$El\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

Cuando ε *tiende a cero al mismo tiempo que* Δx.

Si se reemplaza Δx, Δy por dx, dy tendremos que ε es infinitamente pequeño,
y $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.
la diferencial $dy = f'(x)dx$ y $f'(x)$ es el coeficiente diferencial.

9. En 1916 Ranville escribió el libro DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS. donde se define el límite: *Sea $f(x)$ una función de x y sea a una constante. Si hay un número tal que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon >$ 0 (arbitrariamente pequeño) $\exists \delta$, tal que para hacer $|f(x) - L| < \varepsilon$ es suficiente que x satisfaga $|x - a| < \delta$, $x \neq a$.*
también nos presenta el límite por la derecha y el límite por la izquierda.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ *así como* $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Se define una función continua en un punto esto es: *Una función es continua en $x = a$ si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $f(a)$ *exista*
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ *exista*
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si alguna de estas tres condiciones no se cumple, f es discontinua en $x = a$.

La derivada de y con respecto a x es el límite de la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx. se aproxima a cero
La derivada es designada por el símbolo $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

Para obtener la derivada de cualquier función:

1. Reemplace x por $x + \Delta x$ y y por $y + \Delta y$

(1) $y = f(x)$,

(2) $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

2. Por substracción de $y + \Delta y - y = f(x + \Delta x) - f(x)$ tenemos:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

3. divida por Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

4. Determine el límite cuando Δx se aproxima a cero.

10. En 1917 Woods, Binley escribió el libro ANALITIC GEOMETRY AND CALCULUS, Definiéndose el límite como: *Una variable se dice que se aproxima a una constante como límite, cuando, bajo la ley que gobierna el cambio del valor de la variable y la constante se hace y permanece menor que cualquier cantidad que se puede dar, sin importar que tan pequeña sea.*

En lo referente a continuidad, una función es llamada *función continua de una variable* x *cuando el incremento de* y *se aproxima a cero, cuando el incremento de* x *se aproxima a cero.*

En derivada: *Cuando* y *es continua, la derivada de* y *respecto de* x *es el límite de la razón del incremento de* y *y el incremento de* x *se aproxima a cero. La derivada es expresada por el símbolo* $\frac{dy}{dx}$ *o, si* y *es expresada por* $f(x)$*, la derivada será expresada por* $f'(x)$ *así, si* $y = f(x)$ *entonces:*

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La enseñanza del Cálculo se introdujo a finales del siglo XIX en el nivel bachillerato así como el uso sistemático del libro de texto. Recientemente la enseñanza del Cálculo ha tenido dos episodios destacados, el primero con la reforma francesa de la enseñanza de la matemática moderna modificando la estructuración teórica del contenido de los textos y por otro lado la más reciente de los estadounidenses de la tecnología para la enseñanza, movilizando las jerarquías de su argumentación discursiva.

En los años sesentas del siglo XX, la reforma francesa de la matemática moderna generó cambios de imagen y funcionamiento del Cálculo escolar y por ende en los entonces nuevos libros de texto, existiendo una anticipación al estudio propiamente del Cálculo, el de sus fundamentos y se introdujo el uso de los cuantificadores lógicos de manera vigorosa. Así como la adopción de una nueva estructura axiomática que abarca por igual tanto a los números reales como a los conceptos tradicionales mas fundamentales: función, límite, derivada e integral.
Otro cambio fue la seriación de los cursos de Cálculo, se abandono al acostumbrado crecimiento gradual en el número de variables reales (una, dos y tres variables), y cambio el estudio del Cálculo de las funciones reales de una variable real al de funciones de $\Re^n$ en $\Re^n$. Produciéndose cambios en el programa de los cursos de Álgebra Lineal dando en este una introducción temprana, entre el curso básico de Cálculo y el intermedio, en tanto que a las Ecuaciones Diferenciales, se les condenó a un abandono didáctico.

El Cálculo se tornó entonces, el antecedente del Análisis Matemático Clásico y ya no más, como el compañero irremplazable de las Ecuaciones Diferenciales. Esta desarticulación ahondó el principio en el tratamiento de los conceptos comunes al Cálculo y a las Ecuaciones Diferenciales, como es el caso de la integral, la diferencial o la continuidad.

Otro de los efectos se manifestó en el surgimiento de una nueva estratificación de saberes socialmente aceptada, en donde las aplicaciones o los acercamientos puramente simbólicos, numéricos o visuales son considerados como entes de menor valía.

11. Tall (1986), (En su libro) retoma las propuestas presentadas por Cournot, esto es: Las funciones matemáticas, que tienen ciertas propiedades generales, permitan la interpretación de fenómenos naturales, así como el uso de tablas de valores, gráficas y enunciados o fórmulas algebraicas.

Por su parte la reestructuración estadounidense, a partir de 1987, desarrolla nuevos textos articulados en buena parte al desarrollo de la tecnología. Estos acercamientos modifican las tradiciones o entidades de un texto tales como definiciones, teoremas, pruebas, ejemplos o ejercicios, en la misma medida en que las técnicas afectan las prácticas sociales.

12. En el libro de Demana (1992) se definen y distinguen los términos Graph y The Graph de una función en términos del aspecto que tiene la componente visual de la información que aparece en una pantalla de cristal liquido de una supercalculadora.

13. Como ejemplo en el libro de Callahan (1993) la pendiente de la gráfica en un punto (se refiere a la pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto), se define así: La pendiente de la gráfica en un punto es el límite de la pendiente vista desde un microscopio en el punto, cuando el campo de visión se encoge hacia cero.

14. En el libro de Purcell y Varberg (1993) Se define al cálculo como el estudio de los límites. Presentan un ejemplo y de manera intuitiva definen el límite; *(significado intuitivo de límite) Decir que* $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *significa que cuando x está cerca, pero difiere de c, f(x) está cerca de L.* Continúan con una serie de ejemplos que resaltan la parte algorítmica, sin embargo, estos ejemplos tienen características interesantes, tienen discontinuidad de punto y discontinuidad de salto. Presentan ejemplos en donde hacen cálculos con la calculadora y hacen algunas advertencias sobre su uso (*Las calculadoras pueden desorientarnos).* Define límites por derecha e izquierda, y posterior mente presentan la definición a la que llaman *Significado preciso de límite con* ε y δ . La continuidad de las funciones es presentada posteriormente a la teoría de límites.

Aunque este proceso de modificación en la presentación de argumentos en los textos permite introducir, de manera temprana, temas que hasta hace poco estaban mucho más al interior de los textos, la noción misma de derivada e Integral sigue siendo la de Riemann y la derivada se conserva como la insinuada por D'Alambert y definida por Cauchy, con un poco más de ejemplos numéricos, gráficos y analíticos. No solo fueron escritos libros de Texto, sino artículos de Cálculo presentados en revistas.

En la revista American Matthematical Monthly (1894-1994) se escribe sobre el tratamiento de la matemática escolar teniendo una influencia en los libros de texto de Cálculo estadounidenses. En los dos primeros volúmenes publicados en 1894. Aparece un artículo de título Application of the new education to the differential and integral calculus de Fletcher Durell. En donde se presenta un método de enseñanza de la matemática, new education; el propósito del estudiante en cada nuevo avance es comenzar con el objetivo concreto, algo con el cual el pueda ver y retomar y tal vez hacer y avanzar o proceder a las abstracciones, únicamente por el interés y beneficio de las ventajas realizadas.

El dibujar, precede a la geometría formal y el observar y dibujar las curvas precede a la geometría analítica, en el curso de la discusión fue remarcado que el mapa de curvas podría ser hecho como un medio para el entendimiento de las nociones fundamentales en el Cálculo Diferencial e Integral. En seguida presenta ejemplos de su uso. "La diferenciación puede ser ahora provisionalmente definida como el método de encontrar la pendiente de una curva por el método diferencial".

Anota también que este se extiende de manera natural a la variable compleja. Finalmente comenta que éste nuevo método concuerda con aquel de ir de lo conocido a lo desconocido por pasos continuos y sobre el entendimiento de los estudiantes dice: "La idea de pendiente es ya firmemente establecida en la mente del estudiante de geometría Analítica".

En 1902 se publica On limits en donde por vez primera en la revista aparece el símbolo de límite. En 1958, se presenta el artículo Bringing Calculus up to date de M. Munroe acerca de la modernización de los cursos de Cálculo para no graduados. En seguida de este se publican una serie de artículos para obtener δ en función de la ε en el usual tratamiento de límites y continuidad para diferentes funciones elementales. Esto se vio reflejado en los textos de entonces, que planteaban ejercicios y casos particulares de distintos teoremas de Cálculo, para practicar la aritmética del ε, una tarea casi algorítmica. En los noventas aparecen ya los nuevos acercamientos apoyados en la supercalculadora.

15. Stewart, J. "Calculus Single variable" Escrito en 1985. En la presentación de los temas, así como, en los e-jercicios propuestos. El contexto gráfico esta ampliamente manifiesto. La gráficas están diseñadas con la utilización de Software para computadoras, así como de calculadoras graficadoras. Contiene un capitulo completo (capitulo 0) para los antecedentes; EL capitulo 1 es el de límites y razones de cambio. La definición de límite: *Nosotros escribimos* $\lim_{n \to a} f(x) = L$ *y decimos "El límite de f(x), cuando* $x \to a$, *es igual a L" si nosotros podemos hacer los valores de f(x) arbitrariamente cercanos a L (tan cerca como nosotros queramos) tomando x suficientemente cercanos al valor* ***a***

pero no igual a a. Se define los limites laterales, se calculan límites usando las leyes de los límites y se mencionan algunos teoremas (sin demostración). Contiene un apartado para la presentación de la definición con ε y δ.

16. El Cálculo de Kitchen escrito en 1985, España; el libro está enfocado en el análisis riguroso. En el capitulo de límites, se presenta la definición de función argumentando que este concepto es fundamental para la noción de límite y para todas las matemáticas. Asi como las operaciones con funciones, define a las sucesiones y al concepto de límite para sucesiones y presenta dos definiciones provisionales:

1. *Se dice que una sucesión α tiene **límite** A **si y solo si** se puede conseguir que el término n-ésimo α_n de la sucesión este tan próximo a A como deseamos tomando n suficientemente grande.*

2. *Considere a los términos de una sucesión α_n como aproximaciones de **a** un número. Decimos que A es el límite de α_n tomando n suficientemente grande, podemos lograr que el error $|\alpha_n - A|$ de la aproximación sea menor que cualquier tolerancia $\varepsilon > 0$ preestablecida.*

Finalmente presenta la definición:

*Sea α_n una sucesión de números reales. Decimos que A es el **límite** de α_n **si y solo si** para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que la desigualdad $|\alpha_n - A| < \varepsilon$ se cumple para todo número entero n > N. Si A es el límite de α_n, indicaremos esto escribiendo $\lim \alpha = A$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = A$ o $\alpha_n \to A$. Decimos también que α_n **converge** a A o hacia A.*

Hace demostraciones de los teorema sobre límites y define el límite de una función de una variable, dejando a la continuidad como un punto posterior.

17. En 1985 Zill, D. Escribió "Calculus with Analytic Geometry"

Se define intuitivamente al límite: *Si f(x) puede aproximarse arbitrariamente a un número finito L, tomando a x suficientemente cercano pero distinito de un número **a**, tanto por el lado derecho como por el izquierdo, entonces* $\lim_{n\to a} f(x) = L$ **y**

Afirma: *La existencia del límite de una función f en **a** no depende de si f está realmente definida en **a**, sino solamente de si f esta definida para x cerca de a.* Presenta teoremas acerca de límites y en algunos casos hace las demostraciones. Esta presente, una sección de continuidad de las funciones, en un punto **a** y en un intervalo, así como la definición formal de límite: *Supóngase que una función f definida en un intervalo abierto que contiene el número **a**, excepto posiblemente en el propio **a**. Entonces* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *significa que para toda* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *siempre que* $0 < |x - a| < \delta$.

BIBLIOGRAFIA:

Acuña S, C. (1993) " ¿Qué hay de riguroso en lo formal y que de formal en lo riguroso?" Apuntes para un marco teórico. Memorias de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre la formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.

Apostol, T, 2001, Calculus, Reverté, S.A.

Kitchen, J,W. 1986. "Cálculo" . México: Mc Graw-Hill.

Kleiner, Israel. 1991. "Rigor and proof in Mathematics": A Historical Perspective. Artículo tomado de Mathematics Magazine Vol. 64, No. 5.

Stewart, J. (1985) "Calculus Single variable" Estados Unidos de América: Library of Congress Cataloging-in-Publication Data.

Szabo, Arpád. "La transformación de las matemáticas en la ciencia educativa y los orígenes de su fundamentación sobre definiciones y axiomas". Scipta Mathematica. Vol. XXVII, Nos. 1 y 2.

Zill, D. G. (1987). "Cálculo con Geometría Analítica". México: Grupo Editorial Iberoamérica.

CAPÍTULO III
Conceptos básicos sobre enseñanza del Cálculo.

La enseñanza del Cálculo entra en una fase de crisis, debido en parte a que el aprendizaje acumulado proporciona muy poca garantía de resultados adecuados.

Surge entonces la necesidad de analizar la situación actual para tener una visión general.
Los enfoques de análisis son:

1. Sociocultural (a quien va dirigido).

2. Epistemológico (posibles contenidos a enseñar). El conocimiento del surgimiento y el desarrollo del Cálculo, el problema al que responde y la manera en que ha alcanzado su actual estructuración.

3. Psicopedagógico. Como estructurar, secuenciar y transmitir dicho contenido con la finalidad de apropiarse de las ideas fundamentales.

4. Capacitación de profesores. En donde puedan ser analizados los aspectos anteriores.

5. Acervo bibliográfico.

La enseñanza tradicional, en particular la universitaria tiende, a centrarse en la parte algorítmica del Cálculo y a evaluar las competencias adquiridas en este dominio, es decir, lo que hacen mejor.

¿Que se ha hecho ante esta situación de crisis en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo?

Ha habido una genuina preocupación por modificar la didáctica tradicional del Cálculo.

El esquema tradicional del Cálculo se basa en la justificación de muchos de los fenómenos de otras áreas del conocimiento y de cómo estos pueden ser modelados de manera abstracta. Los profesores buscan modelos de otras áreas donde los elementos del cálculo expliquen fenómenos particulares. Esta metodología no ha tenido el éxito esperado.

Otro modelo es que la enseñanza del Cálculo por sí mismo tiene sentido, ya que una enseñanza así ayuda a la formación del estudiante a lograr un buen razonamiento lógico formal, haciendo énfasis en el aspecto algebraico.

El tercer aspecto es el de la enseñanza tradicional. El posible error de esta enseñanza es el de emisión (profesor) y no de recepción (alumno). La responsabilidad del profesor es hacer asequible lo que esta enseñando a sus alumnos.

Muchos cursos de Cálculo se reducen a meros recetarios, también existen los llamados Análisis *diluidos*, los cuales no dejan la preparación deseada. El problema actual de la enseñanza del cálculo no es como hacer para que los estudiantes mal preparados se apropien del discurso didáctico, sino que el discurso no esta en concordancia con los objetos del curso.

En 1987 en Los Estados Unidos, de 600,000 estudiantes de cálculo, solo el 46% aprobó curso. La alarma provocada por esta estimación creció al observarse que aún cuando muchos estudiantes acreditaron el curso, no lograban efectuar aplicaciones en diversas áreas de su propio interés.

Uno de los principales objetivos de los cursos es enseñar a pensar y esto no se había logrado.

Ante esta situación, en ese mismo año, 1987, comienza el movimiento de *Reforma del Cálculo* apoyado por organizaciones como la National Science Foundation surgiendo proyectos individuales e institucionales con el objeto de elaborar propuestas viables para abatir la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo.

Era de esperarse que este movimiento tendría sus repercusiones en nuestro país ya que seleccionamos y estructuramos los contenidos del curso del Cálculo con la influencia y tendencia extranjera.

Veamos algunos de los aspectos de esta Reforma:

1. Una característica común a la mayoria de estos proyectos es el uso de la tecnología (computadoras y super-calculadoras) con la finalidad no solamente de hacer más eficiente el uso de los algoritmos, sino como recurso para que los estudiantes aprendan conceptos.

2. Involucrar a los alumnos en proyectos de investigación generando un mejor aprendizaje y no con la solución de cientos de ejercicios que no demandan esfuerzo mental alguno. (Pocos proyectos proponen la reestructuración substancial de los contenidos a enseñar en Cálculo donde la tecnologia es algo más que una simple herramienta para enseñar en los cursos tradicionales de Cálculo y esto permite presentar a los contenidos en un orden totalmente diferente al acostumbrado.)

3. Fomentar el trabajo en equipo, proporcionando así el aprendizaje cooperativo.

4. Un rediseño de los contenidos a enseñar enfatizando lo conceptual más que lo algorítmico, ya que este puede ser suplido con el recurso tecnológico.

5. Fomentar en los estudiantes el uso correcto de la expresión escrita.

Antigue M. (1995) *señala que la mayoría de las propuestas de renovación del Cálculo en Estados Unidos no toman en cuenta la didáctica de las matemáticas*, entendida como la ciencia que estudia los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos particularmente en situación escolar y, que tiene como objetivo intervenir en el sistema educativo de manera benéfica proponiendo condiciones para que el funcionamiento del sistema didáctico favorezca en los alumnos una apropiación de los saberes matemáticos. Su tarea es la de diseñar situaciones didácticas es decir, establecer y controlar relaciones entre las componentes del sistema didáctico (saberes, profesores, alumnos).

La nueva perspectiva del trabajo didáctico es contrastar puntos de vista revisando las creencias acerca de como aprenden los alumnos.

Es necesario mejorar el interés de los estudiantes por aprender teniendo como herramienta indispensable al Cálculo para lograr un nivel científico adecuado.

La *Reforma del Cálculo en Francia*, conocida también como *Didáctica de las matemáticas* por su parte considera *la manera* en *que los estudiantes proceden en su intento para aprender y usar la matemática*. Este novedoso enfoque nace en los años sesenta del siglo XX en el contexto de las llamadas *matemáticas modernas* y se desarrolla en diversas instituciones (IREM, INRP) y en ciertas universidades (París, Burdeos, Estrasburgo, después Lyon, Marsella y otras).

Desde 1980 se confrontan además en seminarios regulares publicando artículos y libros diversos.

Algunos puntos a destacar son:

1. Se intenta construir una racionalidad de los fenómenos que cubren las relaciones de Enseñanza Aprendizaje.

2. Visión general de la matemática en Francia desde el punto de vista del usuario (no enfoque teórico).

3. Historia y fundamentos de la didáctica de las matemáticas en Francia.

4. La didáctica se encuentra en el curso de diferentes campos científicos en los cuales se encuentran sus fundamentos.

5. La psicología cognitiva sirve de hipótesis a los procesos de aprendizaje, la construcción de conocimientos y la interacción constante del sujeto con el objeto. La didáctica también toma en cuenta los trabajos recientes sobre la memoria.

6. Epistemología. Su aportación es la noción de obstáculo didáctico desarrollado por Bachellard en *La formación del espíritu científico*.

7. En los aspectos sociales del aprendizaje se pueden citar los trabajos de psicología social de la escuela de Ginegra (Doise, Mugny, Perret, Clermont, Schauber, Leoni) proporcionando información para un mejor análisis del aprendizaje en situación escolar.

8. El objetivo de la enseñanza es la apropiación individual de conocimientos.

9. La lingüística está ligada al aspecto lógico de las matemáticas, en la relación conceptualización - formalización. Los trabajos sobre la lectura permiten analizar ciertas dificultades en la resolución de problemas (Vergnaud).

10.Trabajos de tipo Psicoanalítico. Su objetivo es estudiar las representaciones que los maestros tienen de la matemática y de su enseñanza.

El objetivo formal de estudio de la didáctica de las matemáticas se puede describir como:

Estudio de los procesos de transmisión y adquisición de saberes proponiendo condiciones para que el funcionamiento del sistema didáctico asegure la construcción de un saber susceptible de evaluación y funcionalidad que permita resolver problemas y plantear verdaderas interrogantes.

La didáctica se centra en:

1. Saber, saber sabio, saber del maestro, saber de los programas, saber que se convierte en objeto de enseñanza.

2. El alumno.

3. El profesor.

4. Y en las relaciones que generan entre ellos.

En este sentido la didáctica ha desarrollado conocimientos en dos direcciones.

1. La puesta en evidencia en regularidades a nivel funcionamiento cognitivo del sujeto en sus aprendizajes escolares.

2. La noción de transposición didáctica es el proceso por el cual el saber científico se convierte en conocimiento a enseñar y después en objeto de enseñanza (Chevallard).

3. Gerard Vergnaud. Introdujo la noción de campo conceptual: Problemas tratados con conceptos o procedimientos de diferentes tipos.

Los conceptos matemáticos pueden ser considerados desde varios puntos de vista complementarios:

1. Su carácter de instrumento al estudiar su funcionamiento en los diversos problemas que permiten resolver.

2. Carácter de objetos. Dialéctica instrumento - objeto destacada por Régine Douady, papel importante en la construcción de situaciones de aprendizaje: el concepto desempeña el papel de instrumento implícito en la resolución de un problema para caer en objeto de saber constituido. Los dominios de los conceptos pueden ser geométrico, numérico o gráfico, provocando desequilibrios cognitivos en los alumnos. (El estudiante no puede pasar de un contexto a otro)

3. El progreso en el conocimiento resulta de procesos dinámicos que hacen intervenir fenómenos de regularización: Adaptación, asimilación y desequilibrio - reequilibración.

4. No hay acumulación progresiva de saberes, sino reorganización permanente de conocimientos; los nuevos saberes son integrados al saber anterior.

5. La actividad matemática consiste con frecuencia en la elaboración de la estrategia de un procedimiento, permitiendo anticipar el resultado de una acción aún no realizada sobre la cual se dispone la información.

6 La didáctica de las matemáticas se dedica a estudiar también las concepciones del sujeto que aprende, la clase de problemas que dan sentido a un conjunto para el alumno, el conjunto de significados que es capaz de asociar (imagen mental, expresión simbólica), los instrumentos, teoremas, algoritmos, que es capaz de poner en marcha.

7. Para la didáctica lo que interesa es el estudio de las condiciones en las cuales se construye el conocimiento con el fin de optimizarlas, controlarlas y reproducirlas.

8. El maestro puede fijar hipótesis sobre las concepciones de un alumno tomando en cuenta que un error no es ausencia de conocimientos, sino el testimonio de un conocimiento erróneo que tuvo un ambiente de validez.

9. La apropiación de los conceptos se ha facilitado con frecuencia por el conflicto socio-cognitivo, esto es, al formular sus procedimientos, definirlos y justificarlos, el alumno afinará su concepción de la noción considerada en el problema, y es ahí donde aparecerán diferentes niveles de prueba:

a) Pragmáticas, fundadas sobre la razón y la experiencia.

b) Intelectuales, fundadas sobre un razonamiento.

La didáctica se interesa igualmente por las representaciones que el profesor tiene de las concepciones del alumno y por la interpretación que el profesor hace de ellas por esto, establece clases de estrategia de aprendizaje:

Modelo Formativo.

Comunicación de saber a los alumnos. El maestro muestra las nociones, las introduce y proporciona los ejemplos. El alumno escucha, imita, se entrena, aplica. El saber es dado de manera acabada ya construido.

Los problemas son presentados al final del recorrido con fines de evaluación, estos métodos son llamados dogmáticos o magisteriales.

Modelo Iniciativo.

Conocer las necesidades del alumno y su entorno. El maestro escucha al alumno, le ayuda a utilizar fuentes de información, responde a sus preguntas. El alumno busca, organiza, estudia, trabajando de manera automática en un fichero. El problema es concreto, ocasional.

Modelo Aproximativo.

Centrado en la construcción del saber por el alumno. El maestro propone y organiza una serie de situaciones jugando con una serie de restricciones, maneja la comunicación en clase y da elementos convencionales del saber. El alumno intenta, busca, hace hipótesis, propone soluciones, las confronta con sus compañeros, las defiende. El saber es considerado con su propia lógica. El problema es el medio de aprendizaje.

La construcción de situaciones didácticas constituye un verdadero reto. Estas deben presentar un verdadero problema para los alumnos, pero al mismo tiempo deben ser comprendidos por ellos. Deben permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores y contener su propia validación, esto es, que el alumno pueda controlar su solución.

La *Ingeniería Didáctica* es una parte importante de este proceso. Su nombre proviene de comparar la actitud hacia la tarea didáctica con la de un ingeniero, quien para llevar a cabo un proyecto, debe apoyarse en el conocimiento científico del área, aceptar la verificación científica, pero al mismo tiempo, tiene que trabajar con objetos que son mucho más complejos que los objetivos simplificados de la ciencia.

Esta metodología sugiere análisis preliminares:

a) Análisis epistemológico del contenido escolar involucrado, identificar él grado de dificultad que tiene que ver con el concepto matemático (este no tiene que ver con el profesor, ni con el alumno, sino que ha sido difícil para la humanidad, que ha costado mucho tiempo asimilarlo).
Existe la necesidad de recurrir a la historia de los conceptos, indagar sobre el ambiente en el que se desarrollaron.

b) Análisis de la didáctica actual con el cual se podrá tener una descripción completa de las distintas situaciones de corte académico que rodea a los cursos. (Libros de texto, profesores, programas de estudio, exámenes, seriaciones).

c) Análisis cognitivo. Relaciones entre los distintos estilos cognitivos de los estudiantes con diferentes acercamientos a los fenómenos físicos. Las creencias que los estudiantes tienen sobre la matemática y la física ya que estas norman las actividades de los estudiantes ante tareas que involucran dicho conocimiento.

Numerosos trabajos se centran sobre la ingeniería didáctica, cuyo propósito es dar situaciones de aprendizaje destinadas a asegurar de manera controlada la emergencia de conceptos matemáticos en el contexto escolar.

BIBILIOGRAFIA

Alanis R, J. La reforma del Cálculo en los E.U.A. (1994). ITESM, Campus Monterrey.

Artigue, M. (1992). "Didactic Engineering". Recherche en Didactique des Mathematique. pp 41-66.

Chevallard, Y. Bosch, M. Gascón J. (1997). "Estudiar matemáticas". SEP. Biblioteca para la actualización del maestro.

Douady, R. "Juegos de marcos y didáctica herramienta objeto". Lecturas en didáctica de las matemáticas. (1993) . Escuela Francesa. Cinvestav, México.

Turcker, T. W. (1990). "Priming the Calculus Pump: Innovations and Resources". Mathematical Association of America.

Turcker, T. W. (1995). "Assessing Calculus Reform Efforts". Mathematical Association of America.

Vega, M Introducción a la Psicología Cognitiva. México: Alianza Editorial Mexicana.

Vergnaud, G. "Teoría de los campos conceptuales". CNRS y Université René Descartes. Lecturas en didáctica de las matemáticas. (1993) . Escuela Francesa. Cinvestav, México.

CAPITULO IV
PROPUESTA

El caso a analizar es el de la enseñanza del concepto de límite de una función..

Este tema está presente en los cursos de cálculo diferencial del bachillerato en nuestro país, de tal manera que hay un amplio sector de estudiantes y profesores involucrados en él.

Recordemos alguna de los resultados publicados al respecto

¿Qué está pasando con los estudiantes que acreditan el curso de cálculo? Numerosas investigaciones revelan de manera clara que "frente a las dificultades encontradas, la enseñanza tradicional y en particular la enseñanza universitaria, aún cuando tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia la competencia adquirida en este dominio. Este fenómeno se convierte en un círculo vicioso: para tener niveles aceptables de éxito se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto a su vez, es considerado por los estudiantes como lo esencial ya que es lo que se evalúa" (Artigue, 1995).

Es común que los estudiantes que se consideran calificados puedan calcular el límite de una función, pero en su gran mayoria no tienen claro lo que esto significa. Esto último se deduce de entrevistas informales con alumnos y de sencillos exámenes (anexo III) aplicados a quienes ya dominan ese tema.

Para alumnos no calificados la situación es más grave, pues ni queda establecido el concepto ni pueden efectuar el desarrollo algorítmico que esto trae consigo.

Lo ideal es que, en primer lugar el concepto resulte comprensible para todos los alumnos y en segundo lugar, puedan profundizar en el tema y que el trabajo formal para calcular límites se vuelva mas bien un detalle de tipo algebraico o trigonométrico y que no sea como hasta ahora la esencia misma del tema.

Una primera variable es el nivel de conocimientos y dominio de los cursos anteriores, pues aunque hayan tomado y aprobado los cursos de matemáticas anteriores a éste en la misma escuela y de manera reciente, no puede deducirse de esto una alta homogeneidad.

Como una segunda variable puede considerarse el nivel de motivación que cada alumno tiene, pues de esto depende el grado de compromiso con que asumirá el reto de aprender una materia novedosa y que tiene el prestigio de ser lo más difícil en matemáticas del nivel medio superior.

Una tercera variable es la cantidad y calidad de la bibliografía con que se cuenta en el lugar de experimentación.

El problema a resolver puede delimitarse de la siguiente manera:

¿Que estrategia de enseñanza debe de seguirse para que los estudiantes de un primer curso de cálculo diferencial e integral asimilen el concepto de límite de una función y puedan considerar y efectuar como un detalle algorítmico el cálculo de un límite?

ESTRATEGIA

La idea general es conocer con bastante profundidad el concepto a enseñar, observar que aspectos, respecto de los antecedentes no tenemos gran influencia, evaluar lo que la enseñanza tradicional ha logrado y a partir de esto y teniendo en cuenta el medio ambiente del estudiante, proponer situaciones didácticas en las que se haga entendible el concepto en cuestión.

Parece ser que ésta metodología es la más adecuada habida cuenta de que se trata de la enseñanza de un concepto técnico muy teórico, delicado y fundamental en el curso.

Según se muestra, la manera de proceder requiere de una estrategia, con el pleno conocimiento del concepto, del material humano, es decir, de los estudiantes con quienes se cuenta y de la estructura a construir.

Dentro de este marco se sugiere como una estrategia para resolver nuestro problema un plan que contemple los aspectos siguientes como puntos básicos:

1. *La homogeneidad de los conocimientos previos puede salvarse, considerando que es conveniente efectuar un curso autocontenido,* es decir, que los conceptos que se presenten a lo largo del mismo puedan ser definidos en ese momento y si son antecedentes que sean revisados o repasados con la intención de preparar el terreno para la adquisición de nuevos conocimientos.

2. *Un intenso repaso geométrico (funciones polinomiales, racionales, seccionadas) de estos antecedentes constituye la base esencial del curso que se pretende tratar.* Debe de pensarse en todo el curso, aunque en realidad en este primer intento nos centraremos en el límite.
3. *Debe de sensibilizarse a los alumnos en el sentido de que en realidad no hay mayor dificultad en este curso respecto de todos los del nivel medio superior y que depende de la actitud positiva con que se decida aprender y aprobar el curso.* Es necesario que eviten ser influidos en sentido negativo por profesores, familiares, amigos y compañeros.

Una rápida revisión de los libros de texto de cálculo actualmente en uso en este nivel y en el primer año de la Universidad, nos hace notar que el límite se presenta de manera informal y después se procede a definir formalmente, haciendo énfasis en el cálculo de límites propiamente y después en la justificación rigurosa de algunos casos, presentándose con posterioridad el concepto de Continuidad.

Sucede que en muchos casos el concepto no queda cimentado y gran parte de los estudiantes, incluso algunos muy bien calificados, se concretan a desarrollar los algoritmos y a repetir las formalizaciones enseñadas, pero no tienen claro lo que están haciendo.

En este contexto, El aspecto geométrico de la situación ayuda notablemente a la comprensión buscada. Parece ser que una introducción intuitiva, pero muy geométrica logra que el alumno se percate y se interese por este concepto desde antes de la definición formal. Esta es la idea central.

La estrategia se basa en mostrar ejemplos variando ligeramente las definiciones informales y posteriormente variando la definición rigurosa también ligeramente para lograr el fin buscado: La comprensión del concepto de límite de una función.

Se presenta en primer lugar el concepto de continuidad, luego el concepto de límite, una definición formal y se concluye con la formalización de los ejemplos vistos inicialmente.

Esta estrategia se percibe totalmente factible, pues no requiere de instalaciones tecnológicas, sino de un cuidadoso desarrollo y estudio de graficación por parte del profesor.

También es conveniente observar que los ritmos académicos no varían prácticamente, pues se respetan los tiempos de aplicación de exámenes, el curriculum y su orden, de tal manera que se trata de una situación académica interna y no afectará a la administración.

La estructura interna de los exámenes si sufrirá un cambio pues este medio es uno de los que permitirán evaluar a la innovación.

Se pretende la implantación de esta estrategia de manera doméstica antes de intentar su generalización a toda una institución. En este sentido se aplicó el experimento con tres grupos a mi cargo.

ESTRUCTURA

1. Se hablara de manera breve de la epistemología del concepto elegido, con el fin de que se tenga presente y que se pueda comentar con los alumnos, creemos que es factible a final de curso, cuando haya la madurez adecuada.

2. Es muy importante efectuar un intenso repaso de gráficas, como se comentó antes, este repaso debe hacerse en el orden siguiente:

1. Funciones lineales
2. Funciones cuadráticas
3. Funciones seccionadas (lineales y cuadráticas).
4. Funciones racionales (con discontinuidad de punto).
5. Funciones racionales (con asíntotas)
6. Funciones Polinomiales (con raíces racionales)
7. Funciones Polinomiales (con raíces irracionales)

Aquí hay que resaltar los conceptos de dominio, coordenadas al origen, raíces, comportamiento asintótico de la función y coordenadas de la discontinuidad de punto.

3. Se define vecindad de radio *r* con centro en el punto *a*, al intervalo abierto de números reales comprendido entre *a-r* y *a+r* : (*a-r*, *a+r*).

4. Se define a una función continua en un punto *a*, si dada una vecindad "pequeña", la gráfica de la función *no se corta* en *a*.

5. Se describen la situaciones geométricas siguientes:

1. Continuidad en a
2. Discontinuidad de punto en a
3. Discontinuidad de salto en a
4. Discontinuidad asintótica en a

6. Se ejemplifica a través de los ejercicios efectuados de manera previa en el punto anterior. Se observa que en algunos casos es posible "continuizar" la función.

7. Se define Límite como la ordenada que corresponde a la abscisa *a* para que la función sea continua.

8. Se efectúan las observaciones siguientes y se ejemplifica nuevamente utilizando los ejemplos iniciales:

1. Si f(x) es continua en a, entonces L existe y es f(a).
2. Si f(x) tiene una discontinuidad de punto en a, entonces L existe y es la ordenada del punto faltante. A esta discontinuidad se le llama Removible.
3. En los demás casos L no existe. La discontinuidad se llama Esencial.

9. Se define a L como el Límite de una función en *a* si dada ε positiva, existe δ positiva, tal que, si x pertenece a la vecindad de radio δ alrededor de *a*, sin que x sea *a*, entonces su imagen pertenece a la vecindad de radio ε de L.

Esta definición puede ejemplificarse utilizando funciones lineales y cuadráticas, seccionadas y racionales, como las vistas en el repaso previo.

10. Algunos aspectos que resaltan en esta manera de tratar el concepto son:

1. De manera tradicional se procede efectuando primero la definición de límite, los ejemplos y después se introduce el concepto de continuidad. Aquí se está efectuando al revés.
2. La geometría de la situación permite observar e intuir el resultado correcto aún sin el dominio de la formalización.
3. Es posible formalizar estos conceptos, pero tratándose de un primer curso de cálculo, sólo se hace para un corto número de funciones, que en todo caso es mayor al que se efectúa de manera tradicional.
4. Hay un fuerte e intencional repaso de conceptos muy básicos, que debe de aprovecharse para homogeneizar el nivel previo de los estudiantes.
5. Se allana el paso a la abstracción posterior que de este concepto se hace.
6. No es común que se trate del desarrollo histórico de los conceptos de la materia aunque esto es de gran conveniencia. Se hará gradualmente durante el desarrollo del curso.

IMPLANTACIÓN

No se requiere de requisitos académicos especiales por parte de un alumno para que participe en este experimento, por lo que no se hace una selección de ningún tipo, sino que se ha tomado a los grupos que me corresponde como profesora de la materia. (Los alumnos seleccionados para este estudio pertenecen al nivel medio, Cecyt 13 RFM, cuarto semestre.).

Como se comentó antes, esta innovación se pretende probar de manera estrictamente local, es decir en a lo más tres grupos de este nivel, por lo que no se requerirá la capacitación de profesores (es conveniente trabajar con más de un grupo, con la finalidad de observar el desarrollo y la acepción a este material, además de que cada grupo tiene una manera diferente de trabajar).

Por otra parte, se ha considerado, que de momento *no será necesario hacer saber a los alumnos de esta situación*, pues estamos situados en el principio del curso y la estrategia es solamente en un tema, lo cual pasará desapercibido para ellos.

Ha sido conveniente hacerlo del conocimiento del Coordinador de la Academia de Matemáticas, y del Jefe de Área Básica, así como del subdirector académico, para que se eviten malos entendidos y se logre un apoyo en la evaluación de la estrategia. Esta será la única difusión del proyecto.

<u>Justificación</u>: El beneficiario directo es el alumno participante en el experimento, y a largo plazo se beneficiará a todos los estudiantes que estudien cálculo de esta manera.

Objetivo: El alumno evaluará el límite de una función y describirá completamente la situación geométrica de este concepto en cada caso. Propondrá ejemplos, utilizando funciones lineales, cuadráticas, seccionadas y racionales, en los que pueda observarse la definición de este concepto.

La estrategia de ejecución de este proyecto se ha detallado antes, sólo faltaría anexar los ejemplos, pues las definiciones ya se han presentado.
Para evaluar a la innovación se rediseñará el examen que los demás grupos, los no contemplados en el experimento, efectúen. Además se efectuarán entrevistas informales al término del curso con el fin de conocer sus puntos de vista sobre el tema específico.

Dada la brevedad con que se realiza el experimento, el seguimiento es prácticamente sencillo. Estamos hablando de dos semanas de clase a razón de una hora diaria, es decir, 10 horas de clase.

OBSERVACIONES

En grupos pequeños, del orden de 15 a 20 alumnos, es posible obtener una retroalimentación mas intensa y proporcionar mayor atención a los alumnos, se les conoce con mayor rapidez y es posible lograr una mayor identificación con ellos.

Cuando los grupos son en promedio de 35 alumnos, es posible seguir un plan que a la vez permita la participación de los estudiantes y el trabajo en equipo para efectuar ejercicios, tal vez estos sean los grupos mas manejables desde varios puntos de vista: La administración del curso, las evaluaciones, su interacción alumno-profesor, alumno-alumno, la retroalimentación no es tan complicada, la cantidad, calidad y dosificación de ejercicios, el ritmo de avance, participaciones, etc.

Los grupos donde fue aplicada la innovación cuentan con un promedio de 50 alumnos; las evaluaciones, su interacción alumno-profesor, alumno-alumno, la retroalimentación es más complicada, las participaciones se reducen, sin embargo la cantidad, calidad y dosificación de ejercicios se mantiene, el ritmo de avance es un poco más lento.

Si el grupo tiene 80 ó más estudiantes, la administración del curso se complica, sin embargo, la facilidad de contar con asistentes podría suavizar éste hecho, de manera personal no he tenido nunca un curso con estas características, de tal manera que lo que percibo puede no ser tan real, aun cuando se haya revisado bibliografía sobre esto. Es posible que en general la retroalimentación disminuya mas de lo que se piense, es mas difícil conocer a los alumnos personalmente y por lo tanto de conocer sus aspiraciones personales, sus dificultades con la materia, sus dudas. Es posible que el profesor se mantenga así alejado de sus alumnos.

La clase deberá prepararse de una manera diferente, con mas cuidado, pues será muy complicado resaltar algunos aspectos, la dificultad para apreciar la escritura en los pizarrones se pueden superar, con la proyección de acetatos o de material generado por computadora, debe de ser un poco complicado enriquecer los ejemplos obtenidos por la participación espontánea de los alumnos. La clase se acerca más a lo que sería una conferencia y los alumnos tendrán que esforzarse por volverse mas autónomos.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1995) "La enseñanza en los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos". Ingeniería didáctica en educación matemática. Artigue, M., Douady, R., Grupo Editorial Iberoamericana.

Newton. (1985). Gale E. Christianson. Ed. Salvat.

Newton. (1992). García J. Adrián. Ed. Castell S.A.

Historia de las matemáticas. (1985). E.T. Bell. Ed. F.C.E.

Struik. D.J. A Source Book in Mathematics 1200-1800. (1990). Ed Princeton

Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev. La matemática, su contenido, métodos y significado, (1985). Ed. Alianza Editorial

CAPITULO V
PRIMERA ETAPA, DESARROLLO DE LA IMPLEMENTACIÓN

En este capitulo, se anexan los ejemplos planteados como apoyo al desarrollo de la innovación. La importancia del material y ejercicios seleccionados es fundamental.

I. FUNCIONES POLINOMIALES

Regla de Descartes

Si las raíces de un polinomio de grado n son reales, podemos saber cuantas de estas son positivas, observando cuantos cambios de signo se encuentran en los elementos de este, las otras raíces serán negativas hasta completar el grado del polinomio.

Para saber cuantas raíces son negativas basta con substituir x por -x en el polinomio de grado n y nuevamente observar cuantos cambios de signo hay en los elementos del polinomio.

Ejemplo 1.

Sea $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$

En este polinomio tenemos dos cambios de signo de $2x^3$ a $-4x^2$ y de $-10x$ a 12 por lo tanto se que hay dos raíces positivas y una negativa; y como

$a_0 = 12, a_n = 2,$ y p/12 y q/2

$\therefore$ El conjunto de los factores de a_0 es $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

y el conjunto de los factores de a_n es $\{\pm 1, \pm 2\}$

p asume los valores de los factores de a_0 y *q* asume el de los factores de a_n.

Las posibles raíces racionales están en el conjunto siguiente formado por todas las posibles divisiones de *p* entre *q*:

que son estas $\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm \frac{3}{2}, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

$\therefore$ para que un número x_0 sea raíz de $p(x)$ debe ocurrir que $p(x_0) = 0$, o bien, por el Teorema del Residuo, el residuo que se obtiene de dividir $p(x)$ entre $x - x_0$ debe de ser cero.

Necesitamos encontrar números que satisfagan a esta condición.

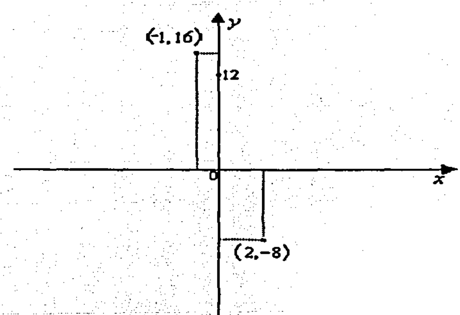
Obsérvese que es relativamente fácil probar que en $\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm \frac{3}{2}, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ se encuentran las raíces, evaluando directamente, se tiene:

$p(-1) = 16$, $p(2) = -8$, pero $\Rightarrow$ existe un cambio de signo

La gráfica pasa por $(-1,16)$ y por $(2,-8)$, además, la ordenada al origen es 12. Por el Teorema del Valor Intermedio, existe una raíz real entre $x = -1$ y $x = 2$. Más aún, esta raíz real Está entre $x = 0$ y $x = 2$. Ya que:

$$\begin{cases} P(0) = 12 \\ P(2) = -8 \end{cases}$$

ya que f es continua



Nos sentimos tentados a probar con $x = 1$, para lograr la primera raíz.

y en efecto, $p(1) = 0$.

Ahora, por el Teorema del Factor, se tiene que $(x-1)$ en un factor de $p(x)$.

Por lo cual $f(x) = (x-1)[\quad ? \quad]$

Para descubrir al factor faltante debemos de efectuar una división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -4 & -10 & 12 & \underline{1} \\ 0 & 2 & -2 & -12 & \\ \hline 2 & -2 & -12 & 0 & \end{array}$$

Por lo que $p(x) = (x-1)[2x^2 - 2x - 12]$.

Este último factor cuadrático puede a su vez factorizarse con facilidad.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x - 12 &= 2(x^2 - x - 6) \\ &= 2(x-3)(x+2) \end{aligned}$$

De manera que

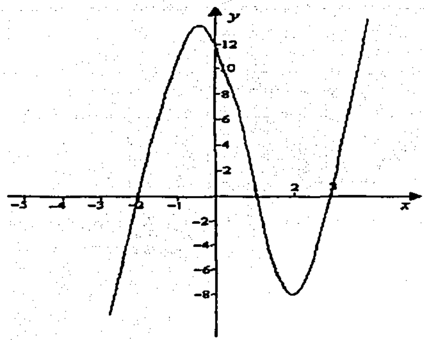
$$p(x) = 2(x+2)(x-1)(x-3).$$

Aquí hemos utilizado la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Las tres raíces del polinomio son $x_1 = -2, x_2 = 1$ y $x_3 = 3$.

La gráfica (n impar, $a_n > 0$). Observe que –2, -1 y 3 si están en el conjunto factible $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

Como puede observar, todas las raíces son simples o de multiplicidad 1 pues todas son distintas, por lo que la gráfica cruza al eje X en cada raíz.



Por lo tanto en esta gráfica se puede observar que el dominio de la función es todos los reales, como ya se había indicado las raíces son: $x_1 = -2, x_2 = 1$ y $x_3 = 3.$, la ordenada al origen es (0,12).

La estrategia para graficar funciones polinomiales puede resumirse de la manera siguiente:

Dado un polinomio de grado n tengo que bajar el grado asta que el polinomio este totalmente factorizado si las raíces son todas reales o que sea un polinomio irreducible cuadrático.

1. El Teorema Fundamental del Álgebra nos dice el número de raíces de una función o polinomio
2. Por el criterio de la Raíz Racional debemos de calcular a los factores (p) de a_0 y a los factores (q) de a_n y el conjunto de ***posibles raíces racionales*** lo forman los cocientes de la forma $\frac{p}{q}$.

3. Se calcula $p(x_0)$ para cada $x_0 = \frac{p}{q}$ hasta encontrar a una raíz racional, es decir, hasta que $p(x_0) = 0$. Se puede usar la división sintética.

4. Se factoriza a $p(x)$ utilizando la división sintética:

$$p(x) = (x - x_0)g(x).$$

x_0 es una raíz y $g(x)$ es una polinomial de un grado menor que $p(x)$.

5. Se repiten los pasos anteriores, ahora con $g(x)$, y así sucesivamente, reduciendo repetidamente el grado del polinomio restante hasta llegar a una ecuación de segundo grado que es una parábola, cuyas dos raíces son las últimas faltantes.

6. Conociendo n y a_n se procede a ubicar a la gráfica para saber cómo graficarla. La multiplicidad de las raíces reales debe ayudar a la construcción de la gráfica. Las raíces complejas no pueden graficarse en el eje X, así es que se grafican fuera, estas son simétricas y conjugadas.

7. Si cambio x $\rightarrow$ (–x) , observo que tengo un nuevo polinomio y verifico el número de cambios de signo, y el número de cambios en el signo es el número de raíces negativas de mi polinomio original. :

$$2(-x)^3 - 4(-x)^2 - 10(-x) + 12 = 0$$

$-2x^3 - 4x^2 + 10x + 12 = 0$ hay un cambio de signo

$\therefore$ tengo una raíz real negativa.

Ejemplo 2.

$$p(x) = -4x^5 - 20x^4 - 25x^3 + 10x^2 + 20x - 8$$

$$\begin{cases} \begin{matrix} n = 5 \\ \text{(impar)} \end{matrix} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{cases} \\ \\ a_n = -4 \rightarrow \underset{(a_n < 0)}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\} \\ \\ a_0 = -8 \rightarrow p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\} \\ \text{Ordenada al origen } (0,-8) \end{cases}$$

Factorización total:

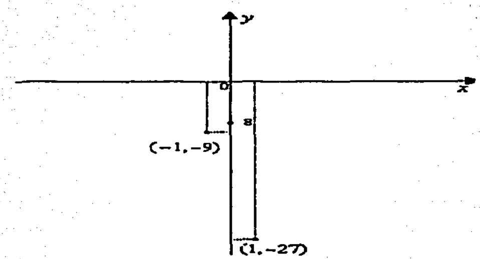
$$f(x) = -4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

Posibles raíces racionales: $\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}\}$

Probemos:

$f(-1) = -9$
$f(1) = -27$

Aún no podemos atrevernos a decir nada acerca de la gráfica.



Continuemos

$f(-2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2$

Podemos efectuar una factorización.

-4	-20	-25	10	20	-8	-2
0	8	24	2	-24	8	
-4	-12	-1	12	-4	0	

El cociente es $g(x) = -4x^4 - 12x^3 - x^2 + 12x - 4$. De $g(x)$ debemos obtener las 4 raíces faltantes, para ello procedemos nuevamente como al principio.

Para $g(x)$ no es conveniente probar con $x=-1$, ni con $x=1$, puesto que ninguno de estos números será raíz, sin embargo es posible que $x=-2$ vuelva a ser raíz.

En efecto, $g(-2)=0$

Factorizando nuevamente se tiene $g(x)=(x+2)[-4x^3-4x^2+7x-2]$

$h(x)=-4x^3-4x^2+7x-2$ se obtiene de efectuar la división

$$\begin{array}{rrrrr|l} -4 & -12 & -1 & 12 & -4 & \underline{-2} \\ 0 & 8 & 8 & -14 & 4 & \\ \hline -4 & -4 & 7 & -2 & 0 & \end{array}$$

Nada perdemos con seguir probando con $x=-2$.

$h(-2)=0$ también.

Ahora $h(x)=(x+2)(-4x^2+4x-1)$.

Del factor cuadrático saldrán las últimas dos raíces. Podemos factorizar en este punto, si fuera inmediatamente posible (y en este caso lo es), o bien completar cuadrados, lo cual haremos.

$$0=-4x^2+4x-1=-4\left(x^2-x+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right)-1+4\left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$
$$0=-4\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2$$
$$0=\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2$$
$$x_4=\tfrac{1}{2},\ x_5=\tfrac{1}{2}$$

La factorización total de la polinomial es $f(x)=-4(x+2)^3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

El ejemplo se concluye al realizar la gráfica. Coloquemos las raíces y la ordenada al origen en el plano cartesiano.

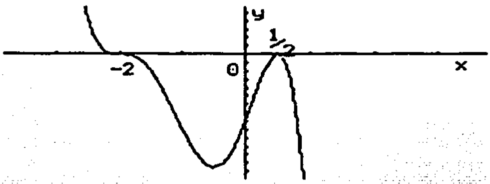
$x=-2$ es una raíz de multiplicidad tres (puesto que aparece tres veces), por lo que la gráfica cruzará al eje x en $x=-2$, una sola vez.

Análogamente, $x=\frac{1}{2}$ es raíz de multiplicidad dos y la gráfica rebotará suavemente en ese punto.

La gráfica , se inicia de una manera decreciente en el extremo superior izquierdo del plano, así es que tocará y cruzará en primer lugar al eje X en $x = -2$ puesto que este punto corresponde a la raíz que está a la izquierda de todas.

Además, de alguna manera debe cruzar al eje Y en $y = -8$, puesto que es la imagen del punto $x = 0$, es decir, (0, -8) es la ordenada al origen.

Entre $x = -2$ y $x = \frac{1}{2}$ la gráfica de la función debe dar la vuelta en algún punto x_0 y entonces se vuelve creciente a partir de ese punto, para después tocar al eje X en $x = \frac{1}{2}$ en donde tocara suavemente para continuar su trayectoria de manera decreciente.



Obsérvese que en $x = \frac{1}{2}$ hay un máximo para la función, desafortunadamente no sabemos para qué punto x_0 la función tiene un mínimo. x_0 no es una raíz de la función.

Finalmente esta función tiene como dominio todos los reales, la coordenada al origen es (0,8), las raíces como ya mencionamos son: $x = -2$ de multiplicidad 3 y $x = \frac{1}{2}$ de multiplicidad 2.

FUNCIONES RACIONALES

Ejemplo 3

$$f(x) = \frac{-4x^3 - 12x^2 + 52x + 60}{2x + 10}$$

En primer lugar determinaremos el dominio de la función

$D_f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq -5\}$

Es probable que haya una discontinuidad de punto ¿cómo saberlo?

Supongamos por un momento que no sabemos factorizar el numerador. De lo que estamos seguros es que $x = -5$ es una raíz del denominador.

Consideremos a $x = -5$ como un "Candidato a discontinuidad de punto"

Sea $p(x) = -4x^3 - 12x^2 + 52x + 60$. Como $p(-5) = 0$, entonces $(x + 5)$ es un factor de $p(x)$

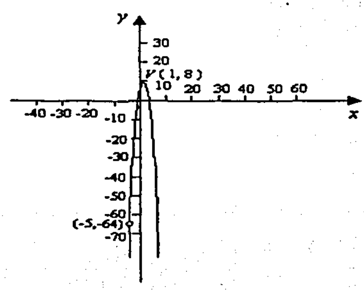
¿por qué?

La división sintética nos ayuda a factorizar $p(x)$:

$$\begin{array}{rrrr|l} -4 & -12 & 52 & 60 & \underline{-5} \\ 0 & 20 & -40 & -60 & \\ \hline -4 & 8 & 12 & 0 & \end{array}$$

Así, $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$; excepto en $x = -5$.

La gráfica se realiza de inmediato, se trata de una "cuasi parábola", de una parábola defectuosa" patológica", cuyas raíces son -1 y 3, cuyo vértice es $(1,8)$ y cuya discontinuidad de punto está en (-5,-64).



En resumen: la función tiene dominio $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq -5\}$, la ordenada al origen en (0,6), las raíces del polinomio son $x = -1$ y $x = 3$.

Ejemplo 4.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 10x + 12}{-x^2 - 2x + 3}$$

La factorización del denominador es: $q(x) = -(x+3)(x-1)$

$D_f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq -3, x \neq 1\}$

Los candidatos a discontinuidad de punto son:

$x_1 = -3$, $\quad p(x_1) = 0$

$x_2 = 1$, $\quad p(x_2) \neq 0$

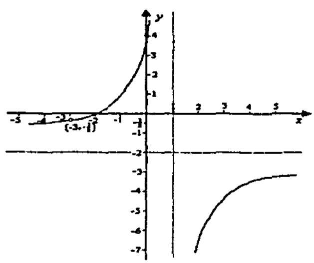
En $x = -3$ existe una discontinuidad de punto, por lo que debe existir en el numerador un factor coincidente $(x+3)$, de hecho

$$f(x) = \frac{2x^2 + 10x + 12}{-x^2 - 2x + 3} = \frac{2(x+3)(x+2)}{-(x+3)(x-1)}$$

$$= \frac{2x+4}{-x+1}\text{; excepto en } x = -3.$$

En $x = 1$ hay una asíntota vertical. La asíntota horizontal ha estado a la vista desde el inicio del ejercicio y es $y = -2$, como puede verse a continuación:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 10x + 12}{-x^2 - 2x + 3} = \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{10x}{x^2} + \frac{12}{x^2}}{\frac{-x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \frac{2 + \frac{10}{x} + \frac{12}{x^2}}{-1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}$$



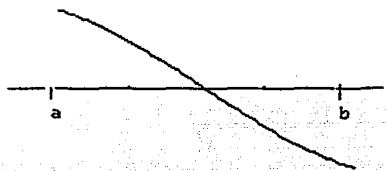
Dominio: $(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,\infty)$, también este dominio puede escribirse como $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq -3 \ y \ x \neq 1\}$ la imagen de la función es: $(-\infty,-2)\cup\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$, que puede ser escrita también como $I_f = \left\{y \in \mathbf{R} : y \neq -2 \ y \ y \neq -\frac{1}{2}\right\}$, la raíz de la función en $x = -2$.

III. RAICES IRRACIONALES DE FUNCIONES POLINOMIALES

Dada la función f(x) = 0,

Sea $x \in I$, f(x) = 0 encontrar el intervalo $[a, b]$ tal que f(a) f(b) < 0,

donde se encuentra la raíz de la función.



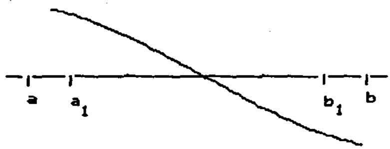
Esto es, encontrar el intervalo que tengan signos distintos, entonces existe $x^* \in (a,b)$ tal que $f(x^*) = 0$

Un primer método que puede ayudar a encontrar esa solución buscada es el **Método de Bissección**, sea el intervalo cerrado $[a, b]$, tomar el punto medio, esto es, $x = \dfrac{a+b}{2}$ y evalúo f(x) de tal manera que:

a) f(a) f(x) < 0

b) f(x) f(b) < 0, f(x) = 0

entonces, asignar $a = a_1$, $x = b_1$



Como se puede observar en la gráfica el nuevo intervalo sigue conteniendo a la solución, sin embargo el intervalo es más pequeño, tome nuevamente al punto medio, $x = \frac{a_1 + b_1}{2}$ y repita el procedimiento; existen ventajas en la utilización de este método ya que este es un método seguro;

$[a_1, b_1] \subset [a, b]$

$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$

observemos que la longitud del intervalo va disminuyendo de tal manera que:
la longitud de $[a_1, b_1] = \dfrac{b-a}{2}$, al repetir el método,

la longitud de $[a_2, b_2] = \dfrac{b-a}{2^2}$,

la longitud de $[a_n, b_n] = \dfrac{b-a}{2^n}$

$\dfrac{b-a}{2^n}$, n $\rightarrow$ 0 cuando n $\rightarrow \infty$

o bien tengo una sucesión

$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b_1$

esta sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada por arriba entonces converge a x^*.

$\{b_n\}$ es también una sucesión creciente y acotada pero, por abajo entonces converge a x^*.

Sin embargo, este método tiene sus desventajas, es lento.
Además, ¿Cómo paro esta secuencia?, ¿En que momento?
Existen criterios de paro; a saber

a) $|a_n , a_{n-1}| < \varepsilon$ tiene una tolerancia, uno mismo define en que momento se va a parar por ejemplo puede ser en la quinta cifra, esto es 10^{-5}

b) $|f(a_n)| < \varepsilon$, Esta se aplica si las diferencias son muy pequeñas.

c) $\left|\frac{a_n - a_{n-1}}{|a_n|}\right| < \varepsilon$, con $a_n \neq 0$, este criterio de paro es considerado el mejor porque verifica el error relativo (que es el error más significativo de los errores de aproximación)

Ejemplo 5:

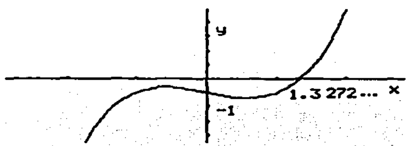
Encontrar las raíces de la función

$f(x) = x^3 - x - 1$

Método de bisección

N	a_n	B_n	x	f(x)
1	1	2	1.5	0.875
2	1	1.5	1.25	-0.2968
3	1.25	1.5	1.375	0.2246
4	1.25	1.375	1.3125	-0.05151
5	1.3125	1.375	1.34375	0.0826
6	1.3125	1.34375	1.328125	0.0145759
7	1.3125	1.328125	1.3203125	-0.019750
8	1.328125	1.34375	1.32421875	-0.00212
9	1.3242185	1.34375	1.33398425	0.0398
10	1.3242185	1.33398425	1.3290805	0.018680362
11	1.3242185	1.3290805	1.3266495	-0.002521558
12	1.3266495	1.3290805	1.327865	0.013460373
13	1.3266495	1.32725725	1.32725725	0.010854717

Después de 13 iteraciones podemos ver que x_{13} = 1.32725725 aproxima a la raíz x con un error de $|1.32725725 - 1.327865| = 0.00060775$



Esta función tiene como dominio todos los reales o $D_f = \{x \in \mathbf{R}\}$, la ordenada al origen es (0,-1), la raíz es x_{13} = 1.32725725 con un margen de error de 0.00060775.

Otro método utilizado es el **Método Iterativo**:
Si f(x) = 0, para encontrar la solución, tome a la función de la siguiente manera:

$\underbrace{x + f(x)}_{g(x)} = x \Rightarrow$ sea g(x) = x (encontrar la solución de x es encontrar el punto

donde g(x) = x

Ejemplo 6 :

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

$f(1) = -5$
$f(2) = 14$

Al tomar f(x) y buscar si tiene alguna solución podemos observar que hay un cambio de signo en la sustitución de los valores 1 y 2 en la ecuación f(x), por lo que se sabe que hay una solución, sea x^* el punto solución.

Generamos una serie de ecuaciones alternativas que permitan encontrar la solución de la ecuación.

Llamaremos a estas ecuaciones g_i con i desde 1 hasta 5, por lo que las funciones serán: g_1, g_2, g_3, g_4, g_5

La función $g_1(x)$ se obtiene restando a x la función f(x) e igualando la expresión a x.

A x le resto $x^3 + 4x^2 - 10$

$\Rightarrow g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10 = x$

La segunda función se obtiene despejando de la ecuación x, en $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$, de la forma siguiente :

$x^3 = -4x^2 + 10$ dividiendo entre x tenemos $x^2 = -4x + \frac{10}{x}$; despejando el cuadrado,

$x = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{\frac{1}{2}}$, por lo que la función es:

$$\Rightarrow \quad g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{\frac{1}{2}} = x$$

La tercera función se obtiene despejando de la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$, la x^2 de tal manera que obtengamos:

$4x^2 = 10 - x^3$ y despejando nuevamente tenemos:

$x = \frac{1}{2}\left(10 - x^3\right)^{\frac{1}{2}}$, por lo que:

$$\Rightarrow \quad g_3(x) = \frac{1}{2}\left(10 - x^3\right)^{\frac{1}{2}} = x$$

La cuarta función se obtiene de la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ de tal manera que al agrupar y factorizar, tengamos:

$x^2(x + 4) - 10 = 0$ despejando,

$x = \left(\frac{10}{4 + x}\right)^{\frac{1}{2}}$ por lo que;

$$\Rightarrow \quad g_4(x) = \left(\frac{10}{4 + x}\right)^{\frac{1}{2}} = x$$

La quinta función se obtiene de considerar a la función dividida entre su derivada $-\frac{f(x)}{f'(x)}$, sumada a x, esto es:

$$\Rightarrow \quad g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x} = x$$

Después de haber hecho algunos despejes y agrupaciones las 5 g_i obtenidas son :

$g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10 = x$

$g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{\frac{1}{2}} = x$

$g_3(x) = \frac{1}{2}\left(10 - x^3\right)^{\frac{1}{2}} = x$

$g_4(x) = \left(\frac{10}{4 + x}\right)^{\frac{1}{2}} = x$

$$g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x} = x$$

La observación de estas 5 alternativas pueden ayudarnos a encontrar la solución de la ecuación.

Iniciamos con la sustitución del punto medio entre 1 y 2 que son los valores donde encontramos un cambio de signo; a saber 1.5, este valor se sustituye en la ecuación g_1;
El valor obtenido, se sustituye nuevamente en la ecuación g_1, obteniendo un nuevo resultado;
Se sigue este procedimiento hasta que el valor de la solución se obtenga; o en su defecto, no tenga sentido, como es el caso de g_1, ver tabla.
Se repite el mismo proceso de sustitución iterativa del punto medio 1.5 para cada uno de los gi, este proceso nos permite encontrar en algunos casos la solución a la ecuación.

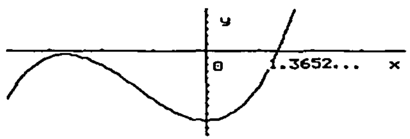
MÉTODO ITERATIVO

sus de 1.5	g1	g2	g3	g4	g5
1	-0.875	0.81649658	1.28695377	1.34839972	1.37333333
2	6.73242188	2.99690881	1.4025408	1.367376372	1.36526201
3	-469.720012		1.34545837	1.364957015	1.36523001
4	102754555		1.37517025	1.365264748	1.365230013
5	-1.0849E+24		1.36009419	1.365225594	
6	1.2771E+72		1.36784697	1.365230576	
7	-2.083E+216		1.363887	1.365229942	
8			1.36591673	1.365230022	
9			1.36487822	1.365230012	
10			1.36541006	1.365230014	
11			1.36513782	1.365230013	
12			1.36527721		
13			1.36520585		
14			1.36524238		
15			1.36522368		
16			1.36523326		
17			1.36522835		
18			1.36523086		
19			1.36522958		
20			1.36523024		
21			1.3652299		
22			1.36523007		
23			1.36522998		
24			1.36523003		
25			1.36523001		
26			1.36523002		
27			1.36523001		
28			1.36523001		

Podemos observar en esta tabla por medio del método iterativo, que en las dos primeras funciones, g_1 y g_2 (ver pag 50) los valores obtenidos no permiten ver la solución de la ecuación;

En el caso de la función g_3 (ver pag 50), el método es satisfactorio pero el proceso es largo, se necesitaron 28 cálculos para llegar al resultado aproximado con 8 dígitos; en g_4 (ver pag 50) se utilizaron 11 iteraciones para obtener el resultado con 9 dígitos; y finalmente en la función g_5 (ver pag 50) solo fueron necesarios 4 iteraciones para poder obtener el resultado;

Este fue el método más rápido, como se muestra en la tabla; en los tres casos la rapidez con la que fue encontrada la solución no fue la misma, sin embargo la utilización del método g_5 (ver pag 50) no será representativa para los estudiantes ya que en este momento no existe el conocimiento de la derivada.



Esta función tiene $D_f = \{x \in \mathbf{R}\}$, la ordenada al origen es (0,-10),la raíz de la función es 1.36523001.

Ejemplo 7:

$f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$

$f(1) = -1$
$f(2) = 19$

por lo que se sabe que hay una solución entre 1 y 2 sea x^* el punto solución.
La función g_1, se obtiene de despejar x^4, esto es:

de $x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$

$x^4 = -2x^2 + x + 3$

$x = \sqrt[4]{3 + x - 2x^2}$

$\Rightarrow \; g_1(x) = \sqrt[4]{3 + x - 2x^2} = x$

La función g_2 , se obtiene despejando x^2, es decir:

de $x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$

$2x^2 = -x^4 + x + 3$

$x = \sqrt{\dfrac{-x^4 + x + 3}{2}}$

$\Rightarrow \; g_2(x) = \sqrt{\dfrac{-x^4 + x + 3}{2}} = x$

La función g_3, se obtiene agrupando y despejando de la siguiente manera:
En la ecuación $x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$,

$x^2(x^2 + 2) - (x + 3) = 0$

$x^2(x^2 + 2) = (x + 3)$

$x^2 = \dfrac{x + 3}{x^2 + 2}$

$x = \sqrt{\dfrac{x + 3}{x^2 + 2}}$

$$\Rightarrow g_3(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2+2}} = x$$

La función g_4 se obtiene de la forma: $x + \dfrac{-f(x)}{f'(x)} = x$

$$\Rightarrow g_4(x) = x - \frac{x^4 + 2x^2 - x - 3}{4x^3 + 4x - 1} = x$$

Después de haber hecho algunos despejes y agrupaciones las cuatro g_i obtenemos :

$$g_1(x) = \sqrt{3 + x - 2x^2} = x$$

$$g_2(x) = \sqrt{\frac{-x^4 + x + 3}{2}} = x$$

$$g_3(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2+2}} = x$$

$$g_4(x) = x - \frac{x^4 + 2x^2 - x - 3}{4x^3 + 4x - 1} = x$$

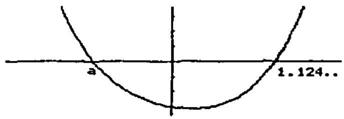
La observación de estas 4 funciones pueden ayudarnos a encontrar la solución de la ecuación.

El punto medio entre 1 y 2 que son los valores donde encontramos un cambio de signo; es 1.5, este valor se sustituye en la ecuación g_1; al valor obtenido, se sustituye nuevamente en la ecuación g_1, obteniendo un nuevo resultado; se sigue este procedimiento hasta que el valor de la solución sea obtenido; o en su defecto, no tenga sentido, como es el caso de g_1, ver tabla.
Se repite el mismo proceso de sustitución iterativa del punto medio 1.5 para cada uno de los gi, este proceso nos permite encontrar en algunos casos la solución a la ecuación.

METODO ITERATIVO

	g1	g2	g3	g4
1	0	2.18660696	1.028991511	1.22635135
2	1.31607401	3.74479362	1.1476804	1.13387877
3	0.96074112	10.0847103	1.118198121	1.12422128
4	1.20590165	71.9592101	1.125608634	1.12412304
5	1.06727708	3661.49448	1.123750227	1.12412303
6	1.15653731	9479856.65	1.124216563	1.12412303
7	1.10323146	6.3546E+13	1.124099562	
8	1.1366155	2.8554E+27	1.124128918	
9	1.1162994	5.7651E+54	1.124121552	
10	1.1288855	2.35E+109	1.1241234	
11	1.12117281		1.124122937	
12	1.12593106		1.124123053	
13	1.12300763		1.124123024	
14	1.12480834		1.124123031	
15	1.12370091		1.124123029	
16	1.12438263		1.12412303	
17	1.12396322		1.12412303	
18	1.12422135			
19	1.12406252			
20	1.12416026			
21	1.12410012			
22	1.12413713			
23	1.12411435			
24	1.12412837			
25	1.12411974			
26	1.12412505			
27	1.12412179			
28	1.1241238			
29	1.12412256			
30	1.12412332			
31	1.12412285			
32	1.12412314			
33	1.12412296			
34	1.12412307			
35	1.124123			
36	1.12412305			
37	1.12412302			
38	1.12412304			
39	1.12412303			
40	1.12412303			

Podemos observar en esta tabla por medio del método iterativo, que en la función g_2 los valores obtenidos no permiten ver la solución de la ecuación; en el caso de la función g_1, el método es satisfactorio pero el proceso es largo, se necesitaron 40 cálculos para llegar al resultado aproximado con 8 dígitos; en g_3 (ver pag 53)se utilizaron 17 iteraciones para obtener el resultado con 8 dígitos; y finalmente en la función g_4 (ver pag 53)solo fueron necesarios 6 iteraciones para poder obtener el resultado, este fue el método más rápido, como se muestra en la tabla; en los tres casos g_1, g_3 y g_4, (ver pag 53) la rapidez con la que fue encontrada la solución no fue la misma.



Esta función tiene $D_f = \{x \in \mathbf{R}\}$, la ordenada al origen es (0,-3), la raíz de la función es x=1.12412303, la raíz "a" de la gráfica, se puede calcular por el método iterativo, por lo que a=0.87605.

Se puede notar que para una sola función f (x) hay muchas g_i

$g[a, b] \to [a, b]$ para que sea continua

$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$ aplicando nuevamente

.
.
.

$x_{n+1} = g(x_n)$

tenemos la sucesión $\{x_n\} \to x^*$ punto fijo de g

$x_{n+1} - x_n$

$x_{n+1} = g(x_n)$

Sucesión

$\{x_n\} \to x^*$

$x_{n+1} - x^* = g(x_n) - g(x^*)$

$$\left|\frac{g(x_n) - g(x^*)}{x_n - x^*}\right|(x_n - x^*)$$

$$|g'(\xi)|\ |x_n - x^*|$$

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \mathbf{K}\ |x_n - x^*|$$

$$|x_n - x^*| \leq \mathbf{K}\ |x_{n-1} - x^*|$$

$$|x_{n-1} - x^*| \leq \mathbf{K}\ |x_{n-2} - x^*|$$

entonces:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \mathbf{K}|x_n - x^*| \leq \mathbf{K}^2|x_{n-1} - x^*| \leq \mathbf{K}^3\ |x_{n-2} - x^*| \leq \ldots \leq \mathbf{K}^{n+1}|x_0 - x^*|$$

con x_0 arbitraria, $x_0 \neq 0$

si $|x_{n+1} - x^*| \leq |x_n - x^*|$

si K < 1

el trabajo de convergencia va sobre K no sobre x_0

$$g[a, b] \rightarrow [a, b]$$

$$g'(x) \leq K < 1$$

g_3, tiene a la sucesión $\{a_n\} \rightarrow x^*$

g_4, tiene a la sucesión $\{b_n\} \rightarrow x^*$

g_5, tiene a la sucesión $\{c_n\} \rightarrow x^*$

Necesito encontrar cual es el criterio más fuerte.

$\lim\limits_{x \to \infty} |e_n + 1|$ donde e_n es el error,

$$\lim_{x \to \infty} |e_n + 1| = \left|x_{n+1} - x^*\right| = \text{cte.}$$

$$= |e_n|^\alpha = \left|x_n - x^*\right|^\alpha$$

entonces la sucesión $\{x_n\}$ tiene rapidez de convergencia α

si $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\dfrac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*}\right| = cte$

y tengo dos casos:

a) $\alpha = 1 \Rightarrow$ Método lineal

b) $\alpha = 2 \Rightarrow$ Método cuadrático

Demostración:

Método de punto fijo $\Rightarrow$ convergencia lineal

$f(x) = f(x^*) + f\,'(x^*)\,(x - x^*)$

$g(x) = g(x^*) + g\,'(x^*)\,(x - x^*)$ es lineal

$x_{n+1} = x^* + g\,'(x^*)\,(x_n - x^*)$

$x_{n+1} - x^* = g'(x^*)\,(x_n - x^*)$

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = g'(x^*)\,(x_n - x^*)$$

$$\left|\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*}\right| = |g'(x^*)| = \text{cte.}$$

$|g'(x^*)| < 1$ cada vez más cerca

$$\left|\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*}\right| < 1$$

Esta es una convergencia lineal porque la saque de una ecuación lineal, $g(x) = g(x^*) + g'(x^*)\,(x - x^*)$ l.q.d.

Lo mismo hago para una cuadrática.

si

$$\frac{g''(\xi)\,(x - x^*)^2}{2!}$$

$$g(x_n) = g(x^*) + g'(x^*)\,(x_n - x^*) + \frac{g''(\xi)\,(x_n - x^*)^2}{2!}$$

$$x_{n+1} - x^* = g'(x^*)\,(x_n - x^*) + \frac{g''(\xi)\,(x_n - x^*)^2}{2!}$$

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{g''(x^*)\,(x_n - x^*)^2}{(x_n - x^*)^2} + \frac{g''(\xi)}{2!}$$

para que sea cuadrada $g'(x^*) = 0$, casi cero

$$\left|\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2}\right| = \left|\frac{g''(\xi)}{2!}\right| = cte$$

$$\left|\frac{x_{n+1} - x^*}{\left(x_n - x^*\right)^2}\right| = \left|\frac{g''(\xi)}{2!}\right| < 1$$

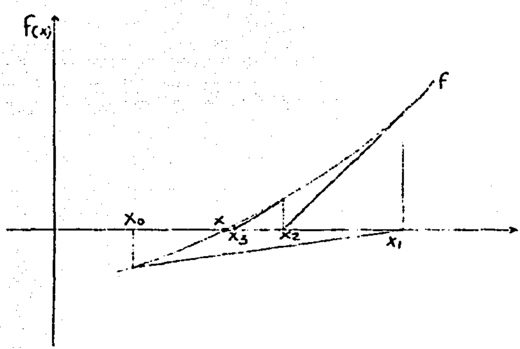
basta que sea convergente por ser menor de 1.

Pero quien llega más rápido y cual es la k más cercana a cero, donde la derivada sea $g'(x^*)$ = casi cero, muy cercana a cero.

Método de Newton,
Uno de los métodos numéricos más conocidos y poderosos para la resolución del problema de búsqueda de raíces
La técnica consiste en derivar como una técnica simple para obtener una convergencia más rápida

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{g(x)}$$

La siguiente gráfica ilustra como se obtienen las aproximaciones usando tangentes sucesivas.



Utilicemos la ecuación de la recta en su forma punto pendiente,

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad \text{punto en } (x_0, y_0)$$

si y = 0, entonces

$$0 - y_0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) \quad \text{donde corta al eje de las x}$$

$$\frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 - x_0$$

$$x_0 + \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$$

$$g(x_0) = x_1$$

lo cual garantiza que la fórmula de Newton esta deducida.

Algo que faltaria por demostrar es que cuadrática es mejor que lineal; es necesario trabajar lineal contra cuadrática.

Luego probaremos que Newton es lineal o cuadrática para tener ocho cifras exactas.

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e_n}{e_{n-1}}\right|^{\alpha}$. donde α es la rapidez de convergencia

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e_n}{e_{n-1}}\right|^{1} = 0.75$$

indica que $\left|\frac{e_n}{e_{n-1}}\right|^{1} \cong 0.75$

$$|e_n| \cong 0.75|e_{n-1}|$$

$$|e_{n-1}| \cong 0.75|e_{n-2}|$$

$$|e_{n-2}| \cong 0.75|e_{n-3}|$$

$$\Rightarrow \quad |e_n| \cong 0.75|e_{n-1}| \cong (0.75)^2|e_{n-2}| \cong (0.75)^3|e_{n-3}| \ldots$$

$$\therefore |e_n| \cong (0.75)^n|e_0|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}\right|^{2} = 0.75$$

$$\left|\frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}\right|^2 \cong 0.75$$

$$|\beta_n| \cong 0.75|\beta_{n-1}|^2$$

$$|\beta_{n-1}| \cong 0.75|\beta_{n-2}|^2$$

$$|\beta_{n-2}| \cong 0.75|\beta_{n-3}|^2$$

$$|\beta_n| \cong 0.75|\beta_{n-1}|^2 \cong (0.75)(\ |\beta_{n-2}|^2\ )^2 \cong (0.75)^3|\beta_{n-2}|^4 \cong$$

$$\cong (0.75)^3(\ (0.75)|\beta_{n-3}|^2\ )^4 \cong (0.75)^7|\beta_{n-3}|^8 \ldots$$

$$\therefore |\beta_n| \cong (0.75)^{2^{n-1}}|\beta_0|^{2^n}$$

$$|e_n| \cong (0.75)^n|e_0| < 10^{-8}$$

$$|\beta_n| \cong (0.75)^{2^{n-1}}|\beta_0|^{2^n} < 10^{-8}$$

$(0.75)^n\left(\frac{1}{2}\right) < 10^{-8}$ aplicando logaritmo se tiene

$$\log\left(\ (0.75)^n\left(\frac{1}{2}\right)\ \right) < \log\ 10^{-8}$$

$$\log(0.75)^n + \log\left(\frac{1}{2}\right) < \log\ 10^{-8}$$

$$n\log(0.75) + \log\left(\frac{1}{2}\right) < -8\ \log\ 10$$

$n \log(0.75) + \log 1 - \log 2 < -8 \log 10$

$n \log(0.75) - \log 2 < -8 \log 10$

$n \log(0.75) < \log 2 - 8$

$$n > \frac{\log(2) - 8}{\log(0.75)} = 61.6219614$$

aproximadamente 62 cifras

$n \geq 62$ cifras.

$$|\beta_n| \cong (0.75)^{2^{n-1}} |\beta_0|^{2^n} < 10^{-8}$$

$$(0.75)^{-1} (0.75)^{2^n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} < 10^{-8}$$

$$(0.75)^{-1} (0.375)^{2^n} < 10^{-8}$$

$$\log\left((0.75)^{-1} (0.375)^{2^n} \right) < \log 10^{-8}$$

$$\log (0.75)^{-1} + \log(0.375)^{2^n} < -8 \log 10$$

$$-\log(0.75) + 2^n \log(0.375) < -8$$

$$2^n \log(0.375) < -8 + \log(0.75)$$

$$2^n > \frac{\log(0.75) - 8}{\log(0.375)}$$

$2^n > 19.07$

19 iteraciones

$2^n > 19$

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$

$2^3 = 8$

$2^4 = 16$

$2^5 = 32$ pero

$2^n > 19$

$2^5 > 19$

con 5 iteraciones

$1 \rightarrow 1$

$2 \rightarrow 2$

$3 \rightarrow 4$

$4 \rightarrow 8$

$5 \rightarrow 16$ tendrá 16 cifras exactas.

Los inconvenientes de Newton son que la derivada debe ser distinta de cero, ya que:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{con } f'(x_n) \neq 0$$

Utilizando pendiente entre dos puntos:

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Necesito tener aproximación a la derivada.

dos pasos

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$ no es Newton, no tiene convergencia cuadrática.

Método de la secante:

Este método es un método de dos pasos

Ya que necesita x_{n-1} y x_n

Para poder conocer x_{n+1}

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

IV. FUNCIONES SECCIONADAS

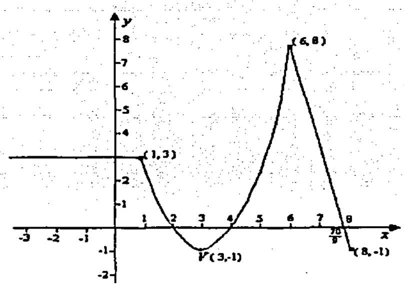
Ejemplo 8.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & ;(-\infty,1) \\ x^2 - 6x + 8 & ;(1,6] \\ -\frac{9}{2}x + 35 & ;(6,8) \end{cases}$$

La primera sección es una constante, una recta horizontal cuya ordenada al origen es 3. No tiene extremo izquierdo, y su extremo derecho es $(1,3)$ abierto.

La segunda sección es una parábola cuyo vértice es $(3,-1)$, y cuyas raíces son $x_1 = 2, x_2 = 4$. Su extremo izquierdo es $(1,3)$ abierto y su extremo derecho es $(6,8)$ cerrado.

La tercera sección es una recta decreciente con raíz en $x = \frac{70}{9}$, su extremo izquierdo es $(6,8)$ abierto y su extremo derecho es $(8,-1)$ abierto también.



Nótese que el extremo derecho de la primera sección, el punto $(1,3)$ coincide con el extremo izquierdo de la segunda sección y que el extremo derecho de la segunda, el $(6,8)$ coincide con el extremo izquierdo de la tercera.

Las secciones que coinciden en el punto $(1,3)$ tienen a este extremo abierto, por lo que este punto es abierto y no pertenece a la gráfica.

Pero en las secciones que coinciden en el punto $(6,8)$, para la parábola el extremo es cerrado y para la recta es abierto. Ante situaciones de este tipo, a estos puntos los consideramos cerrados. Así es que el punto $(6,8)$ sí pertenece a la gráfica de la función.

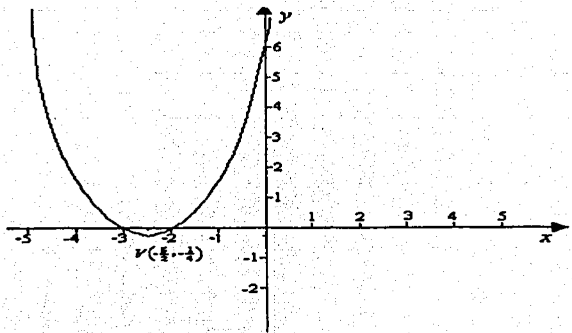
Es necesario insistir en este punto, que no debe de causamos confusión alguna el uso ambiguo de $(6,8)$, por una parte es el punto de abscisa 6 y de ordenada 8, y por otra parte es el intervalo $6 < x < 8$. ***El significado de la notación depende del contexto preciso en el que se encuentre***.

Finalmente resaltemos los conceptos: la función tiene D_f es $(-\infty,8)$, la ordenada al origen esta en (0,3), las raíces son $x = 2$, $x = 4$, $x = \frac{70}{9}$.

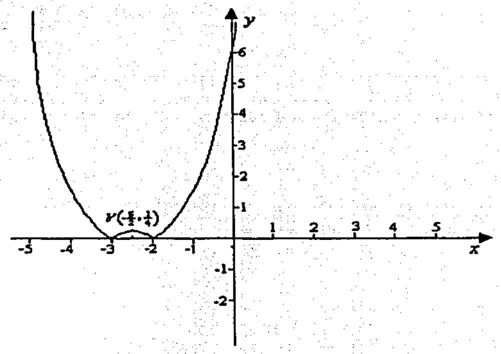
Ejemplo 9.

$$f(x) = -\left|x^2 + 5x + 6\right|$$

Se gráfica $g(x) = x^2 + 5x + 6$

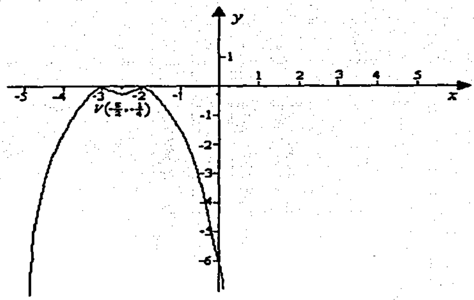


Después se grafica $h(x) = |x^2 + 5x + 6|$



Y finalmente, una reflexión respecto del eje x nos proporciona a la gráfica requerida.

$f(x) = -|x^2 + 5x + 6|$



Los elementos de esta gráfica son:
Esta función tiene $D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$, la ordenada al origen es (0,-6),las raíces de la función son $x = -3$, $x = -2$.

Coordenadas al origen: $(-3,0), (-2,0), (0,-6)$
Dominio: $(-\infty, \infty)$ Imagen: $(-\infty, 0]$

BIBLIOGRAFÍA

Allgower E.L. and Georg K., Numerical Continuation Methods: An Introduction, Springer, Berlin, 1990.

Apostol, T. Calculus Volumen I, 1967 United States of America ed. Wiley International Edition

Burden, R y Faires, J.D. Análisis numérico 1985 México, ed Grupo Editoral Iberoamericana.

Conte S. D. De Boor, Elementary Numerical Analysis, 3rd ed Mc Graw- Hill, Auckland, 1981.

Fletcher, R. Practical Methods of Optimización, 2nd ed., Wiley, New York 1987.

Kitchen, J. Cálculo 1986 España México ed McGraw Hill de México S:A de C.V.

Neumaier A. Introduction to Numerical Analysis. Cambridge

Spivak, M. Cálculo infinitesimal México ed Reverté, S.A

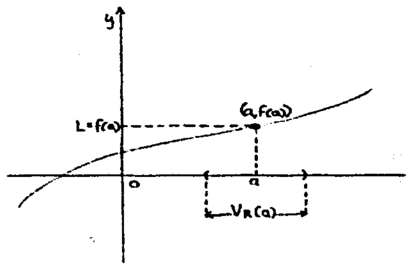
Stewart, J. (1985) "Calculus Single variable" Estados Unidos de América: Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

Zill, D. G. (1987). "Cálculo con Geometría Analítica". México: Grupo Editorial Iberoamérica.

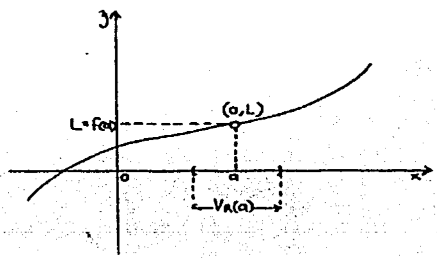
CAPITULO VI
SEGUNDA ETAPA DE LA IMPLEMENTACIÓN

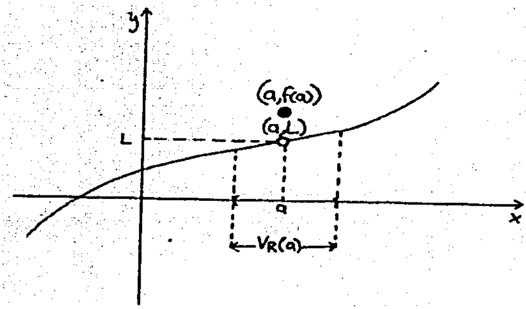
En este capitulo haremos una revisión de la continuidad o discontinuidad de las funciones, en los ejemplos vistos en el capitulo V, retomamos los comentarios y la definición de límite, así como el cálculo de algunos límites.

Recordemos que en el capitulo IV en la sección de **Estructura** se hablo de resaltar los conceptos de dominio coordenadas al origen, raíces comportamiento asintótico de la función y coordenadas de la discontinuidad de punto en a, discontinuidad de salto en a y discontinuidad asintótica en a.
Se dice que el límite es la <u>ordenada</u> que corresponde a la <u>abscisa</u> a cuando la función sea continua, esto es:
Si $f(x)$ es continua en a, entonces L existe y es $f(a)$; L es único; notación: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.



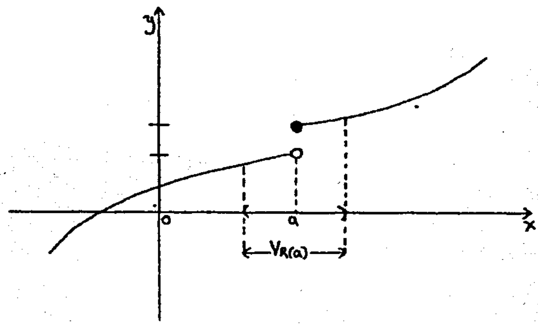
Si la función tiene una discontinuidad de punto en a, entonces L existe y es la ordenada del punto faltante. Discontinuidad Removible. $\lim_{x \to a} f(x) = L$

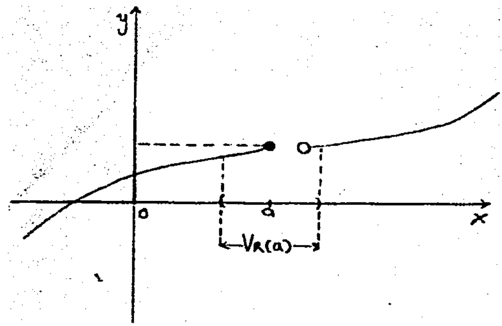




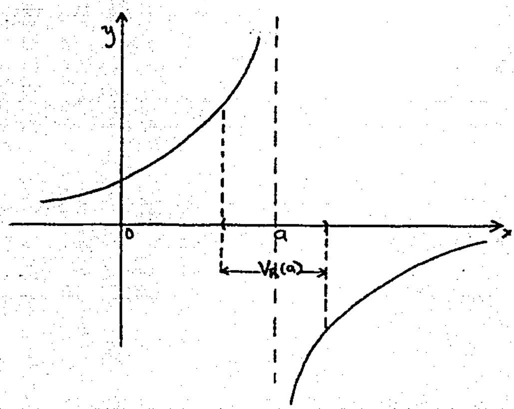
Si la discontinuidad es de salto en a o de asíntota en a, L no existe. La discontinuidad se llama esencial.

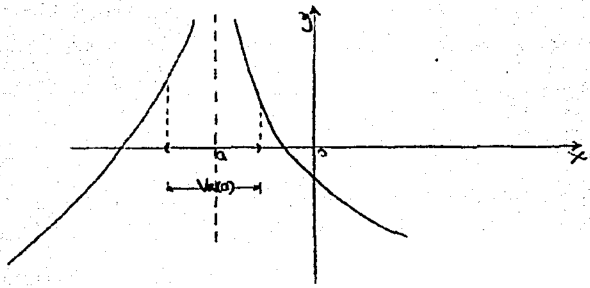
$\lim_{x \to a} f(x)$ no existe



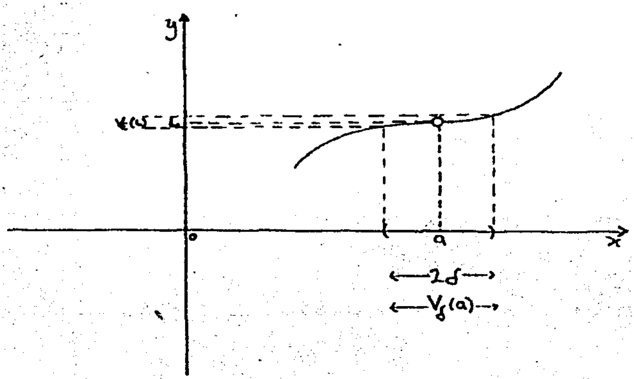


Discontinuidad de asíntota



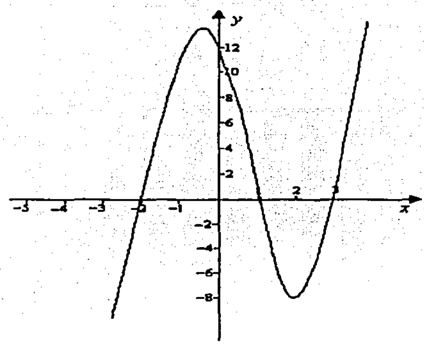


Se define a L como el límite de una función en a si dada ε positiva, existe δ positiva, tal que, si x pertenece a la vecindad de radio δ alrededor de a, sin que x sea a, entonces su imagen pertenece a la vecindad de radio ε de L.



Ejemplo 1.

Dada $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$



En esta gráfica se puede observar que el $D_f = \{x \in \mathbf{R}\}$, las raíces son: $x_1 = -2, x_2 = 1$ y $x_3 = 3.$, la ordenada al origen es (0,12) y la función es continua para cualquier punto **a** ya que si tomo una vecindad de radio R con centro en el punto **a**, al intervalo abierto de números reales comprendido entre $a - R$ y $a + R$: $(a - R, a + R)$.

Al observar la gráfica de la función podemos calcular de manera inmediata los siguientes límites:

$\lim_{x \to 0} f(x) = 12$ $\qquad$ $\lim_{x \to -2} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$

Sin embargo podemos tomar alguno de los límites y resolverlo por medio de la definición:

i.e. Probar que $\lim_{x \to 1} \left(2x^3 - 4x^2 - 10x + 12\right) = 0$

Hagamos algunos cálculos

Dado $\varepsilon > 0$ tenemos que exhibir un $\delta > 0$ tal que $\left| \left(2x^3 - 4x^2 - 10x + 12\right) - 0 \right| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - 1| < \delta$ Observe que $\left| \left(2x^3 - 4x^2 - 10x + 12\right) - 0 \right| = \left| 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 \right| = 2|x - 1||x - 3||x + 2|$, puesto que el factor se puede hacer tan pequeño como se desee basta con acotar los factores $|x - 3|$ y $|x + 2|$ tomando $\delta \leq 1$ entonces $|x - 1| < \delta$, los factores $|x - 3|$ y $|x + 2|$ serán siempre menores que 4 si x > 0, por lo que $|x - 3| < |x + 2|$ y como:

$|x - 1| < 1$

$\Rightarrow -1 < x - 1 < 1$

$\Rightarrow 0 < x < 2$

$\Rightarrow 2 < x + 2 < 4$

$\Rightarrow |x + 2| < 4$

$\Rightarrow \left| 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 \right| < 8|x - 1|$

supongamos ahora que se satisface la desigualdad $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{8}$ tendremos entonces que $\left| \left(2x^3 - 4x^2 - 10x + 12\right) - 0 \right| < \varepsilon$ como se deseaba de aquí que basta con tomar a δ como el menor entre 1 y $\dfrac{\varepsilon}{8}$, por lo que ahora podemos dar la demostración formal:

Sea $\varepsilon > 0$ dado, tomemos $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{8}\right)$ y supóngase que

$0 < |x - 1| < \delta$. Como en particular $|x - 1| < 1$, tenemos que

$\left| 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 \right| < 8|x - 1|$

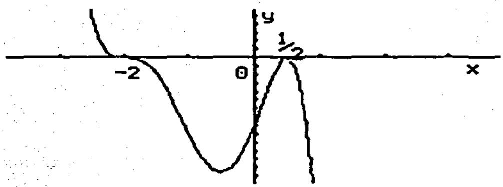
Pero sabemos que $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{8}$ por lo que

$$\left| 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 \right| < 8 \cdot \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon$$

$$\left| 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 \right| < \varepsilon$$

Ejemplo 2.

$$p(x) = -4x^5 - 20x^4 - 25x^3 + 10x^2 + 20x - 8$$



Esta función tiene $D_f = \{x \in \mathbf{R}\}$, la coordenada al origen es (0,8), las raíces son: $x = -2$ de multiplicidad 3 y $x = \frac{1}{2}$ de multiplicidad 2 además de ser continua. La gráfica de la función nos permite ver de manera inmediata el valor de los límites deseados:

$$\lim_{x \to -2} p(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0} p(x) = -8$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} p(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -1} p(x) = -9$$

Si tomamos al límite:

$\lim_{x \to 1/2} p(x) = 0$ y lo probamos por medio de la definición y previo a ello hacemos algunos cálculos,

en $\lim_{x \to 1/2} \left(-4x^5 - 20x^4 - 25x^3 + 10x^2 + 20x - 8\right) = 0$

tenemos:

Dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\left| \left(-4x^5 - 20x^4 - 25x^3 + 10x^2 + 20x - 8\right) - 0 \right| < \varepsilon$ siempre que $0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta$.

Observe que $\left| \left(-4x^5 - 20x^4 - 25x^3 + 10x^2 + 20x - 8\right) \right|$

al factorizar tenemos:

$$|x + 2| \left| -4x^4 - 12x^3 - x^2 + 12x - 4 \right|$$

$$|x + 2| \left|x - \frac{1}{2}\right| \left| -4x^3 - 14x^2 - 8x + 8 \right|$$

$$|x + 2| |x + 2| \left|x - \frac{1}{2}\right| \left| -4x^2 - 6x + 4 \right|$$

$$|x + 2| |x + 2| \left|x - \frac{1}{2}\right| \left|x - \frac{1}{2}\right| \left| -4x - 8 \right|$$

$$|x + 2| |x + 2| |x + 2| \left|x - \frac{1}{2}\right| \left|x - \frac{1}{2}\right| \left| -4 \right|$$

pero cuando x > 0, $|x + 2| > \left|x - \frac{1}{2}\right|$

$\left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta$, y $\delta \leq 1$

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < x - \frac{1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} < x + 2 < \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow |x + 2| < \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \ -4x^5 - 20x^4 - 25x^3 + 10x^2 + 20x - 8 \ \right| < \frac{7}{2}\left|x - \frac{1}{2}\right|$$

supongamos ahora que se satisface la desigualdad $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{7/2}$

$\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{2\varepsilon}{7}$ **tendremos entonces que**

$$\left| \left(-4x^5 - 20x^4 - 25x^3 + 10x^2 + 20x - 8\right) \right| < \varepsilon$$

ahora tomemos a δ **como el menor entre 1 y** $\frac{2\varepsilon}{7}$**; la demostración formal es:**

Sea $\varepsilon > 0$ **dado, tomemos** $\delta = \min\left(1, \frac{2\varepsilon}{7}\right)$ **y supóngase que**

$0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta$**. Como en particular** $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 1$**, tenemos que**

$$\left| \left(-4x^5 - 20x^4 - 25x^3 + 10x^2 + 20x - 8\right) \right| < \left(\frac{2\varepsilon}{7}\right)$$

Pero sabemos que $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{2\varepsilon}{7}$ por lo que

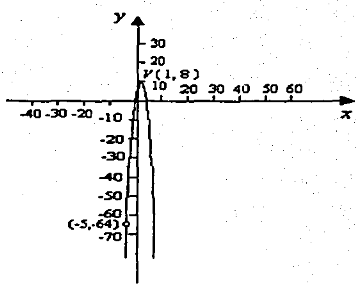
$$\left|\left(-4x^5 - 20x^4 - 25x^3 + 10x^2 + 20x - 8\right)\right| < \left(\frac{7}{2}\right)\left|x - \frac{1}{2}\right|$$

$$\left|\left(-4x^5 - 20x^4 - 25x^3 + 10x^2 + 20x - 8\right)\right| < \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{2\varepsilon}{7}\right)$$

$$\left|\left(-4x^5 - 20x^4 - 25x^3 + 10x^2 + 20x - 8\right)\right| < \varepsilon$$

Ejemplo 3.

$$f(x) = \frac{-4x^3 - 12x^2 + 52x + 60}{2x + 10}$$



La función tiene dominio $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq -5\}$, la ordenada al origen se encuentra en (0,6), las raíces del polinomio son $x = -1$ y $x = 3$, la función tiene una discontinuidad de punto en (-5,-64).

En esta función que esta representada gráficamente podemos observar los valores que serán asignados a los límites:

$\lim_{x \to -5} f(x) = -64$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0} f(x) = 6$

$\lim_{x \to -1} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$

Tomemos alguno de los límites anteriores digamos:

$\lim\limits_{x \to -5} f(x) = -64$ y probémoslo por medio de la definición:

es decir:

probar que $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{-4x^3 - 12x^2 + 52x + 60}{2x + 10} = -64$

Haciendo algunos cálculos

Dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\left| \dfrac{-4x^3 - 12x^2 + 52x + 60}{2x + 10} - (-64) \right| < \varepsilon$

siempre que $0 < |x + 5| < \delta$

$$\left| \frac{-4x^3 - 12x^2 + 52x + 60}{2x + 10} - (-64) \right|$$

$$\left| \frac{-4x^3 - 12x^2 + 52x + 60}{2x + 10} + 64 \right|$$

$$\left| \frac{-4x^3 - 12x^2 + 52x + 60 + 64(2x + 10)}{2x + 10} \right|$$

$$\left| \frac{-4x^3 - 12x^2 + 52x + 60 + 128x + 640}{2x + 10} \right|$$

$$\left| \frac{-4x^3 - 12x^2 + 180x + 700}{2x + 10} \right|$$

$$\left| \frac{-4x^3 - 12x^2 + 180x + 700}{2(x + 5)} \right|$$

$$\left| \frac{-2x^3 - 6x^2 + 90x + 350}{x + 5} \right|$$

$$\left| \frac{-2(x+5)(x+7)(x+5)}{x+5} \right|$$

$$|-2(x+7)(x+5)|$$

$$|-2||x+7||x+5|$$

puesto que el factor se puede hacer tan pequeño como se desee basta con acotar el factor $|x+7|$, tomando $\delta \leq 1$ entonces $|x+5| < \delta$, si $x > 0$, como:

$$|x+7| = |\ x+5+2\ |$$

$$\leq |x+5| + |2|$$

$$< 1 + 2 = 3$$

que es equivalente a:

supongamos ahora que se satisface la desigualdad $|x+5| < \dfrac{\varepsilon}{6}$

tendremos entonces que $\left| \dfrac{-4x^3 - 12x^2 + 52x + 60}{2x+10} - (-64) \right| < \varepsilon$

como se deseaba de aquí que basta con tomar a δ como el menor entre 1 y $\dfrac{\varepsilon}{6}$, por lo que ahora la demostración formal:

Sea $\varepsilon > 0$ dado, tomemos $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{6}\right)$ y supóngase que

$0 < |x+5| < \delta$. **Como en particular $|x+5| < 1$, tenemos que**

$$\left| \frac{-4x^3 - 12x^2 + 52x + 60}{2x+10} \right| < 2|x+7||x+5|$$

$$\left| \frac{-4x^3 - 12x^2 + 52x + 60}{2x+10} \right| < 2(3)|x+5|$$

$$\left| \frac{-4x^3 - 12x^2 + 52x + 60}{2x+10} \right| < 6|x+5|$$

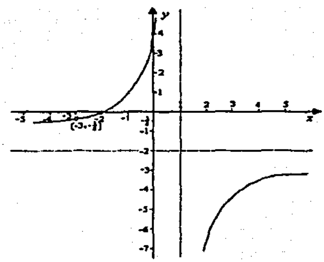
Pero sabemos que $|x + 5| < \frac{\varepsilon}{6}$ por lo que

$$\left|\frac{-4x^3 - 12x^2 + 52x + 60}{2x + 10}\right| < 6\left(\frac{\varepsilon}{6}\right) = \varepsilon$$

$$\left|\frac{-4x^3 - 12x^2 + 52x + 60}{2x + 10}\right| < \varepsilon$$

Ejemplo 4

$$f(x) = \frac{2x^2 + 10x + 12}{-x^2 - 2x + 3}$$



Dominio: $(-\infty,-3) \cup (-3,1) \cup (1,\infty)$, también este dominio puede escribirse como $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq -3 \ y \ x \neq 1\}$ la imagen de la función es: $(-\infty,-2) \cup \left(-2,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},\infty\right)$, que puede ser escrita también como $I_f = \left\{y \in \mathbf{R} : y \neq -2 \ y \ y \neq -\frac{1}{2}\right\}$, la raíz de la función en $x = -2$,

Discontinuidad de punto: $\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$ Discontinuidad de asíntota: $x = 1$

En la gráfica de la función podemos observar porque uno de los límites no existe y cual es el valor de los otros:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -2} f(x) = -8$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \textit{no existe} \qquad \lim_{x \to -3} f(x) = -\frac{1}{2}$$

Como ya ha sido presentado anteriormente se hace conveniente probar por medio de la definición alguno de los límites, sea en este caso:

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 + 10x + 12}{-x^2 - 2x + 3} = -\frac{1}{2}$$

si hacemos cálculos:

Dado $\varepsilon > 0$ **tenemos que exhibir un** $\delta > 0$ **tal que**

$$\left| \frac{2x^2 + 10x + 12}{-x^2 - 2x + 3} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x + 3| < \delta$$

$$\left| \frac{2x^2 + 10x + 12}{-x^2 - 2x + 3} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right|$$

$$\left| \frac{2x^2 + 10x + 12}{-x^2 - 2x + 3} + \frac{1}{2} \right|$$

$$\left| \frac{2(2x^2 + 10x + 12) + (-x^2 - 2x + 3)}{2(-x^2 - 2x + 3)} \right|$$

$$\left| \frac{3x^2 + 18x + 27}{2(-x^2 - 2x + 3)} \right|$$

$$\left| \frac{3(x^2 + 6x + 9)}{-2(x^2 + 2x - 3)} \right|$$

$$\left| -\frac{3}{2} \right| \left| \frac{(x + 3)^2}{(x + 3)(x - 1)} \right|$$

$$\left| -\frac{3}{2} \right| \left| \frac{(x + 3)}{(x - 1)} \right|$$

$$\frac{3}{2}\left|\frac{1}{x-1}\right||x+3|$$

puesto que el factor se puede hacer tan pequeño como se desee basta con acotar el factor $\left|\frac{1}{x-1}\right|$

que es difícil pero:

$$|3| = |3 + x - x|$$

$$\leq |3 + x| + |-x|$$

$$= |x + 3| + |x|$$

$$= |x + 3| + |x - 1 + 1|$$

$$\leq |x + 3| + |x - 1| + |1|$$

$$|3| \leq |x + 3| + |x - 1| + |1|$$

$$|3| - |1| \leq |x + 3| + |x - 1|$$

$$2 \leq |x + 3| + |x - 1|$$

$$2 - |x + 3| \leq |x - 1|$$

entonces:

tomando $\delta \leq 1$ y como $|x + 3| < \delta$, si $x > 0$

$$2 - |x + 3| \leq |x - 1|$$

$$2 - 1 \leq |x - 1|$$

$$1 \leq |x - 1|$$

entonces, como $|x - 1| > 0$:

$$\frac{1}{|x - 1|} \leq 1$$

entonces:

$$\left|\frac{2x^2 + 10x + 12}{-x^2 - 2x + 3}\right| < \frac{3}{2}|x + 3|$$

supongamos ahora que se satisface la desigualdad $|x + 3| < \frac{2\varepsilon}{3}$ tendremos entonces que $\left|\frac{2x^2 + 10x + 12}{-x^2 - 2x + 3} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon$ como se deseaba de aquí que basta con tomar a δ como el menor entre **1** y $\frac{2\varepsilon}{3}$, por lo que ahora la demostración formal:

Sea $\varepsilon > 0$ dado, tomemos $\delta = \min\left(1, \frac{2\varepsilon}{3}\right)$ y supóngase que

$0 < |x + 3| < \delta$. Como en particular $|x + 3| < 1$, tenemos que

$$\left|\frac{2x^2 + 10x + 12}{-x^2 - 2x + 3}\right| < \frac{3}{2}\left|\frac{1}{x - 1}\right||x + 3|$$

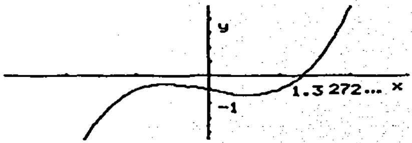
$$\left|\frac{2x^2 + 10x + 12}{-x^2 - 2x + 3}\right| < \frac{3}{2}|x + 3|$$

Pero sabemos que $|x + 3| < \frac{2\varepsilon}{3}$ por lo que

$$\left|\frac{2x^2 + 10x + 12}{-x^2 - 2x + 3}\right| < \frac{3}{2}\left(\frac{2\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

$$\left|\frac{2x^2 + 10x + 12}{-x^2 - 2x + 3}\right| < \varepsilon$$

Ejemplo 5:
$f(x) = x^3 - x - 1$



Esta función tiene como dominio todos los reales o $D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$, la ordenada al origen es (0,-1), la raíz es $x_{13} = 1.32725725$ con un margen de error de 0.00060775, la función es continua.

La observación de la gráfica de la función indica que los límites pedidos tienen como resultado:

$$\lim_{x \to 1.32725725} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = -1$$
$$\lim_{x \to -1} f(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = -1$$

Probar el resultado de alguno de ellos:

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 - x - 1\right) = -1$$

por medio de la definición probaremos este límite:

dado $\varepsilon > 0$, tenemos que exhibir un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - 0| < \delta$

$$\left|\left(x^3 - x - 1\right) - (-1)\right| < \varepsilon$$

Observe que

$$\left|\left(x^3 - x - 1\right) + 1\right| = \left|x^3 - x\right|$$

$$|x|\left|x^2 - 1\right|$$

$$|x|\,|x - 1|\,|x + 1|$$

puesto que el factor se puede hacer tan pequeño como se desee basta con acotar los factores $|x - 1|$ y $|x + 1|$ tomando $\delta \le 1$ entonces $|x| < \delta$, los factores $|x - 1|$ y $|x + 1|$ serán siempre menores que 2 si x > 0, por lo que $|x - 1| < |x + 1|$ y como:

$$|x| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < x < 1$$

$$\Rightarrow 1 < x + 1 < 2$$

$$\Rightarrow |x + 1| < 2$$

$$\Rightarrow \left| \; x^3 - x - 1 \; \right| < 2|x|$$

supongamos ahora que se satisface la desigualdad $|x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

tendremos entonces que $\left| \; \left(x^3 - x - 1\right) - (-1) \; \right| < \varepsilon$ como se deseaba de aquí que basta con tomar a δ como el menor entre 1 y $\dfrac{\varepsilon}{2}$, por lo que ahora podemos dar la demostración formal:

Sea $\varepsilon > 0$ dado, tomemos $\delta = \min\left(1 , \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ y supóngase que

$0 < |x| < \delta$. Como en particular $|x| < 1$, tenemos que

$$\left|x^3 - x - 1 \; \right| < 2|x|$$

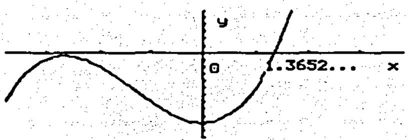
Pero sabemos que $|x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ por lo que

$$\left| \; x^3 - x - 1 \; \right| < 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

$$\left| \; x^3 - x - 1 \; \right| < \varepsilon$$

Ejemplo 6 :

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$



Esta función tiene $D_f = \{x \in \mathbf{R}\}$, la ordenada al origen es (0,-10),la raíz de la función es 1.36523001; la función es continua.

En este ejemplo se han seleccionado los siguientes cuatro límites que son resueltos de manera inmediata por la observación de la gráfica:

$$\lim_{x \to 1.365223001} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = -10$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -7 \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = 14$$

Calculemos por medio de la definición:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -5$$

es decir, probemos que:

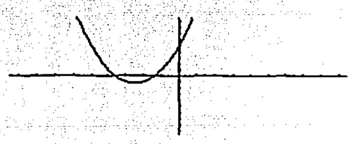
$$\lim_{x \to 1} x^3 + 4x^2 - 10 = -5$$

haciendo cálculos

Dado $\varepsilon > 0$ exhibir un $\delta > 0$ tal que $\left| \left(x^3 + 4x^2 - 10\right) - (-5) \right| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - 1| < \delta$.

Observe que $\left|\left(x^3 + 4x^2 - 10\right) + 5 \right| = \left| x^3 + 4x^2 - 10 + 5 \right| =$ $\left| x^3 + 4x^2 - 5 \right| = |x - 1|\left| x^2 + 5x + 5 \right|$

en $x^2 + 5x + 5$ no hay raíces racionales, las raíces son irracionales



como puede observarse en la gráfica hay dos raíces irracionales entre $f(-4) = 1$ y $f(-3) = -1$ y por el método iterativo sabemos que la raíz esta en $x = -3.62245$, la segunda raíz irracional esta entre $f(-2) = -1$ $f(-1) = 1$, por el método iterativo la raíz esta en $x = -1.35204$

por lo tanto la factorización es $|x - 1| \left| x + 3.62245 \right| \left| x + 1.35204 \right|$, puesto que el factor se puede hacer tan pequeño como se desee basta con acotar los factores $\left| x + 3.62245 \right|$ y $\left| x + 1.35204 \right|$ tomando $\delta \leq 1$ entonces $|x - 1| < \delta$, los factores $\left| x + 3.62245 \right|$ y $\left| x + 1.35204 \right|$ serán siempre menores que 5.62245, si x > 0, entonces $\left| x + 1.35204 \right| < \left| x + 3.62245 \right|$ y como:

$$|x - 1| < \delta,$$

$$|x - 1| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < x - 1 < 1$$

$$\Rightarrow 0 < x < 2$$

$$\Rightarrow 3.62245 < x + 3.62245 < 5.62245$$

$$\Rightarrow \left| x + 3.62245 \right| < 5.62245$$

$$\Rightarrow \left| x^3 + 4x^2 - 10 \right| < 5.62245 \quad |x - 1|$$

supongamos ahora que se satisface la desigualdad $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{5.62245}$ tendremos entonces que $\left| \left(x^3 + 4x^2 - 10\right) - (-5) \right| < \varepsilon$ como se deseaba de aquí que basta con tomar a δ como el menor entre 1 y $\dfrac{\varepsilon}{5.62245}$, por lo tanto la demostración formal es:

Sea $\varepsilon > 0$ dado, tomemos $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{5.62245}\right)$ y supóngase que

$0 < |x - 1| < \delta$. Como en particular $|x - 1| < 1$, tenemos que

$$\left| x^3 + 4x^2 - 10 \right| < 5.62245\,|x - 1|$$

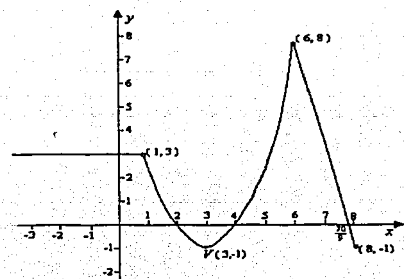
Pero sabemos que $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{5.62245}$ por lo que

$$\left| x^3 + 4x^2 - 10 \right| < 5.62245\left(\frac{\varepsilon}{5.62245}\right) = \varepsilon$$

$$\left| x^3 + 4x^2 - 10 \right| < \varepsilon$$

Ejemplo 7.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & ; (-\infty,1) \\ x^2 - 6x + 8 & ; (1,6] \\ -\frac{9}{2}x + 35 & ; (6,8) \end{cases}$$



Finalmente resaltemos los conceptos: la función tiene D_f *es* $(-\infty,8)$, la ordenada al origen esta en (0,3), las raíces son $x = 2$, $x = 4$, $x = \dfrac{70}{9}$; la función tiene una discontinuidad de punto en (1,3).

Observando la gráfica calcula los límites siguientes:

$\lim_{x \to 4} f(x) = 0$ $\lim_{x \to 6} f(x) = 8$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 0$ $\lim_{x \to 8} f(x) = -1$

Tomemos alguno de los límites y resolvamos por medio de la definición

Probar que $\lim_{x \to 6} f(x) = 8$

Para esta función compuesta el valor de x para el cual hay que calcular el límite esta en $x^2 - 5x + 8$

Hagamos algunos cálculos

Dado $\varepsilon > 0$ **tenemos que dar un** $\delta > 0$ **tal que** $\left| (x^2 - 6x + 8) - 8 \right| < \varepsilon$ **siempre que** $0 < \left| x - 6 \right| < \delta$ **Observe que:**

$\left| (x^2 - 6x + 8) - 8 \right| = \left| x^2 - 6x \right|$

$= |x| \left| x - 6 \right|$, **tomando** $\delta \le 1$ **entonces** $|x - 6| < \delta$, **como:**

$\left| x - 6 \right| < 1$

$\Rightarrow -1 < x - 6 < 1$

$\Rightarrow 5 < x < 7$

$\Rightarrow |x| < 7$

$\Rightarrow \left| x^2 - 6x + 8 \right| < 7 \left| x - 6 \right|$

supongamos ahora que se satisface la desigualdad $\left| x - 6 \right| < \dfrac{\varepsilon}{7}$ **tendremos entonces que** $\left| (x^2 - 6x + 8) - 8 \right| < \varepsilon$ **como se deseaba de aquí que basta con tomar a** δ **como el menor entre 1 y** $\dfrac{\varepsilon}{7}$**, por lo que ahora podemos dar la demostración formal:**

Sea $\varepsilon > 0$ **dado, tomemos** $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{7}\right)$ **y supóngase que**

$0 < |x - 6| < \delta$. Como en particular $|x - 6| < 1$, tenemos que

$$\left| x^2 - 6x + 8 \right| < 7|x - 6|$$

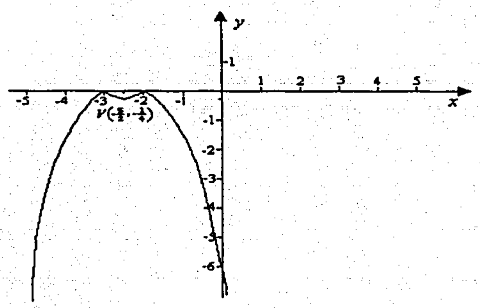
Pero sabemos que $|x - 6| < \dfrac{\varepsilon}{7}$ por lo que

$$\left| x^2 - 6x + 8 \right| < 7\left(\frac{\varepsilon}{7}\right) = \varepsilon$$

$$\left| x^2 - 6x + 8 \right| < \varepsilon$$

Ejemplo 8

$$f(x) = -\left| x^2 + 5x + 6 \right|$$



Los elementos de esta gráfica son:
$D_f = \{x \in \mathbf{R}\}$, la ordenada al origen es (0,-6),las raices de la función son $x = -3$, $x = -2$; la función es continua.
Coordenadas al origen: $(-3,0)$, $(-2,0)$, $(0,-6)$
Dominio: $(-\infty, \infty)$ Imagen: $(-\infty, 0]$

La gráfica de la función ha sido un poco complicada, sin embargo el cálculo de los límites <u>no</u>, ya que se conoce a la curva.

$$\lim_{x \to -3} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -2} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\frac{5}{2}} f(x) = -\frac{1}{4} \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = -6$$

Probar que $\lim_{x \to -\frac{5}{2}} f(x) = -\frac{1}{4}$ por medio de la definición:

Calculemos lo siguiente:

Dado $\varepsilon > 0$ tenemos que dar un $\delta > 0$ tal que $\left| -\left|x^2 + 5x + 6\right| - \left(-\frac{1}{4}\right) \right| < \varepsilon$ siempre que $0 < \left|x + \frac{5}{2}\right| < \delta$

Observe que:

$$\left| -\left|x^2 + .5x + 6\right| + \left(\frac{1}{4}\right) \right|$$

$$\left| -\left|x^2 + 5x + 6\right| + \left(\frac{1}{4}\right) \right| \text{cuando } \left(x^2 + 5x + 6\right) < 0$$

tenemos:

$$\left| x^2 + 5x + 6 \right| = -\left(x^2 + 5x + 6\right)$$

entonces se tiene

$$\left| +\left(x^2 + 5x + 6\right) + \frac{1}{4} \right|$$

$$\left| x^2 + 5x + \frac{25}{4} \right|$$

$$\left| x + \frac{5}{2} \right| \left| x + \frac{5}{2} \right|$$

tomando $\delta \leq 1$ entonces $\left| x + \frac{5}{2} \right| < \delta$, como:

$$\left| x + \frac{5}{2} \right| < 1$$

$$\Rightarrow \left| \, - \left| x^2 + 5x + 6 \right| \, \right| < \left| x + \frac{5}{2} \right|$$

supongamos ahora que se satisface la desigualdad $\left| x + \frac{5}{2} \right| < \varepsilon$

tendremos entonces que $\left| \left(x^2 + 5x + 6\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) \right| < \varepsilon$ como se deseaba de aquí que basta con tomar a δ como el menor entre 1 y ε, por lo que ahora podemos dar la demostración formal:

Sea $\varepsilon > 0$ dado, tomemos $\delta = \min(1, \varepsilon)$ y supóngase que

$0 < \left| x + \frac{5}{2} \right| < \delta$. Como en particular $\left| x + \frac{5}{2} \right| < 1$, tenemos que

$$\left| \, - \left|x^2 + 5x + 6\right| \, \right| < \left| x + \frac{5}{2} \right|$$

Pero sabemos que $\left| x + \frac{5}{2} \right| < \varepsilon$ por lo que

$$\left| \, - \left| x^2 + 5x + 6 \right| \, \right| < \varepsilon$$

BIBLIOGRAFIA

Apostol, T, 2001, Calculus, México ed Reverté, S.A.

Kitchen, J. Cálculo 1986 España México ed McGraw Hill de México S:A de C.V.

Spivak, M. Cálculo infinitesimal México ed Reverté, S.A.

Stewart, J. (1985) "Calculus Single variable" Estados Unidos de América: Library of Congress Cataloging-in-Publication Data.

Zill, D. G. (1987). "Cálculo con Geometría Analítica". México: Grupo Editorial Iberoamérica.

CONCLUSIONES

Dentro del desarrollo realizado en el salón de clase, con la modalidad de trabajar en un contexto más geométrico, se puede destacar la aceptación de los estudiantes, aunque causo un poco de inquietud, ello pudo ser notado porque algunos estudiantes (3 o 4) preguntaban que cuando entraríamos en materia, ya que los otros grupos estaban revisando otras cosas, por lo que fue necesario comentar, que ya estabamos dentro de los temas y que nuestro enfoque cambiaba un poco.

El trabajo cotidiano de la clase fue enriquecido con comentarios sobre los aspectos históricos que rodearon a la creación y desarrollo del cálculo; les fue solicitadas, tres tareas referentes a estos aspectos históricos, con la ayuda del Internet; entre el 12% y el 15% se interesaron por seguir investigando a los precursores del cálculo, por lo que al inicio de cada clase utilizábamos 5 o 10 minutos para comentar lo encontrado. Los temas más gustados fueron los inherentes a la astronomía, y su relación con la apertura del mercado.

Los resultados obtenidos en la implantación de la propuesta son muy alentadores, el 40% de los estudiantes, llevaron a cabo el desarrollo del cálculo del concepto de límite, por medio de la definición, con algunos errores en el uso de las propiedades de valor absoluto; el 15 % de los alumnos, no les fue posible realizar la aplicación de la definición, pero hicieron una descripción, con sus propias palabras, del desarrollo de la aplicación de la definición de límite, por la carencia de herramientas algebraicas; el resto de los estudiantes no pudieron resolverlos.

En lo referente al ejercicio gráfico del concepto de límite, los alumnos pudieron contestarlo en un 65%.

Se propone reforzar el contexto gráfico en tercer semestre, con la intensión de contar con una visión sobre las funciones y relaciones utilizadas en cuarto semestre; de la misma manera se propone hacer mención de aquellas características de las funciones al trabajar la extensión de la curva (Dominio y Rango).

Así mismo se hace manifiesta la necesidad de contar con materiales complementarios de álgebra en un segundo y tercer semestre, (lo ideal sería en todos los semestres), esto permitirá al alumno seguir madurando el manejo de las herramientas necesarias para el cálculo.

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

1. Alanis R, J. La reforma del Cálculo en los E.U.A. (1994). ITESM, Campus Monterrey.

2. Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev. La matemática, su contenido, métodos y significado, (1985). Ed. Alianza Editorial

3. Allgower E.L. and Georg K., Numerical Continuation Methods: An Introduction, Springer, Berlin, 1990.

4. Apostol, T, 2001, Calculus, Reverté, S.A.

5. Artigue, M. (1992). "Didactic Engineering". Recherche en Didactique des Mathematique. pp 41-66.

6. Artigue, M. (1995) "La enseñanza en los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos". Ingeniería didáctica en educación matemática. Artigue, M., Douady, R., Grupo Editorial Iberoamericana.

7. Bell, E.T. Historia de las matemáticas, Fondo de Cultura económica.

8. Bochner Salomon "El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia" Alianza Editorial, S. A. Madrid, 1991

9. Bourbaki, Nicolas. "Elementos de Historia de las Matemáticas". Alianza Universidad. Madrid, España.

10. Burden, R y Faires, J.D. Análisis numérico 1985 México, ed Grupo Editoral Iberoamericana.

11. Chevallard, Y. Bosch, M Gascón J. (1997). "Estudiar matemáticas" SEP. Biblioteca para la actualización del maestro.

12. Cárdenas, H. Chevallard, Y. Bosch, M. Gascón J. (1997). "Estudiar matemáticas". SEP. Biblioteca para la actualización del maestro.

13. Conte S. D. De Boor, Elementary Numerical Analysis, 3rd ed Mc Graw- Hill, Auckland, 1981.

14. Cooney P. Miriam, "Celebrating Women in Mathematics and Science", National Counciel of Teachers of Mathematics Restor, Virginia 1906.

15. Douady, R. "Juegos de marcos y didáctica herramienta objeto". Lecturas en didáctica de las matemáticas. (1993) . Escuela Francesa. Cinvestav, México.

16. Edwards, C. H. 1937. The Historical Development of Calculus. Springer-Verlag, New York.

17. Escohotado Antonio, Principios Matemáticos de la Filosofía Natural, Isaac Newton. Altaya, 1987.

18. Fletcher, R. Practical Methods of Optimización, 2nd ed., Wiley, New York 1987.

19. Freebury H. A. "A History of Mathematics " New York The Macmillan Company. United States of America.

20. Freudental Hans, "Las Matemáticas en la vida cotidiana". Biblioteca para el hombre actual. Ediciones Guadarrama. Madrid, España.

21. Kitchen, J, W. 1986. "Cálculo" . México: Mc Graw-Hill.

22. Kleiner, Israel. 1991. "Rigor and proof in Mathematics": A Historical Perspective. Artículo tomado de Mathematics Magazine Vol. 64, No. 5.

23. Kline M. "El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días", Volumen III, Alianza Editorial, S. A. Madrid, 1992.

24. Kline, M 1985, Matemáticas, la perdida de la certidumbre, Siglo XXI de españa editores S.A.

25. Laubenbacher R, Pengelley, D., 1999, Mathematical Expeditions Chronicles by the Explorers.

26. Neumaier A. Introduction to Numerical Analysis. Cambridge
Newton. (1985). Gale E. Christianson. Ed. Salvat.

27. Newton. (1985) Gale E Christianson. Ed. Salvat

28. Newton. (1992). García J. Adrián. Ed. Castell S.A.

29. Ronald Calinger, "Vita Mathematica. Historical Researches and Integration With Teaching. The Mathematical" Association of America. Oxford, 1703.

30. Rowe E David, McCleary John, "The History of Modern Matematics", volume I. Academic Press, San Diego California 1988.

31. Perero, Mariano. "Historia e Historias de Matemáticas" Grupo Editorial Iberoamericana. México.

32. Stewart, J. (1985) "Calculus Single variable" Estados Unidos de América: Library of Congress Cataloging-in-Publication Data.

33. Struik. D.J. A Source Book in Mathematics 1200-1800. (1990). Ed Princeton

34. Szabo, Arpád. "La transformación de las matemáticas en la ciencia educativa y los orígenes de su fundamentación sobre definiciones y axiomas". Scipta Mathematica. Vol. XXVII, Nos. 1 y 2.

35. Turcker, T. W. (1995). "Assessing Calculus Reform Efforts". Mathematical Association of America.

36. Turcker, T. W. (1990). "Priming the Calculus Pump: Innovations and Resources". Mathematical Association of America.

37. Vega, M Introducción a la Psicología Cognitiva. México: Alianza Editorial Mexicana.

38. Vergnaud, G. "Teoría de los campos conceptuales". CNRS y Université René Descartes. Lecturas en didáctica de las matemáticas. (1993) . Escuela Francesa. Cinvestav, México.

39. Zill, D. G. (1987). "Cálculo con Geometría Analítica". México: Grupo Editorial Iberoamérica

Anexo I

En este anexo se encuentran algunos teoremas complementarios a los materiales presentados en el capitulo V

Teorema de la raíz racional

Dado un polinomio de la forma:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \in Z[x]$$

donde los a_i son los coeficientes de p_n se desea encontrar las raíces del polinomio, $x_0 = \frac{p}{q}$, será raíz, si $\begin{matrix} p|a_0 \\ q|a_n \end{matrix}$

demostración:

$$p_n\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2} \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

multiplicando por q^n y simplificando tenemos:

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

la cual es una ecuación homogénea de grado n.

Al observar a esta ecuación se encuentran dos características:
la primera; es la existencia un factor común "p"

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$$

la segunda; es la existencia de otro factor común "q"

$$q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) = -a_n p^n$$

si además, a la raíz se le pide que esté en su mínima expresión, esto es:

$\mathbf{x} = \dfrac{p}{q}$ $\qquad (p, q) = 1$ **primos**

$\Rightarrow$ **p no divide a q** **o** **q no divide a p**

si dividimos a la primera ecuación entre p y a la segunda ecuación entre q se puede observar, que lo que esta entre paréntesis es un entero :

$$\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + a_{n-2} p^{n-3} q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} \right) = -\frac{a_0 q^n}{p}$$

$$\Rightarrow p | a_0 q^n$$

$$\Rightarrow p | a_0 \quad \text{o} \quad p | q^n$$

$$\Downarrow$$

$$p | q$$

contradicción

$$\Rightarrow p | a_0$$

$$\left(a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} \right) = -\frac{a_n p^n}{q}$$

$$q | a_n p^n$$

$$q | a_n \quad \text{o} \quad q | p^n$$

$$\Downarrow$$

$$q | p$$

Contradicción

$$q | a_n$$

sabemos ahora que la raíz es de la forma $\dfrac{p}{q}$**, con** p **y** q **divisores de** a_0 **y** a_n **respectivamente** $\therefore$ **se puede usar división sintética para demostrar que es cero y por lo tanto es raíz, i.e. tenemos que** $\quad \mathbf{x_0} = \dfrac{p}{q} \quad$ **entonces** $\quad \mathbf{p(x_0) = 0}$

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & x_0 \;\; a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \\
a_0 & & a_n\,x_0 & b_{n-1}\,x_0 & \dots & \\
\hline
 & \underbrace{a_n}_{b_n} & \underbrace{a_n x_0 + a_{n-1}}_{b_{n-1}} & \underbrace{b_{n-1}x_0 + a_{n-2}}_{b_{n-2}} & & 0
\end{array}
$$

esta estructura sirve para observar el teorema del factor, El cual dice que:

$$(x - x_0) \quad \left[b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + b_{n-2}x^{n-3} + \ldots\right] =$$

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a$$

Teorema fundamental del álgebra

Si P es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces $P(x) = 0$ tiene cuando menos una raíz. (En los números complejos)

Teorema del residuo

El residuo de la división de $f(x)$ entre $x - a$ es igual a $f(a)$
Demostración:

$$f(x) = (x - a) \quad q(x) + r$$

$$f(a) = (a - a) \quad q(a) + r = r$$

Corolario1: a es raíz de $f(x) \Leftrightarrow x - a \mid f(x)$

Corolario2: $x - a \mid f(x) - f(a)$

Corolario 3: $x - a \mid f(x)\,g(x) \Rightarrow x - a \mid f(x)$ o $x - a \mid g(x)$

Teorema del Factor:

Un polinomio $P(x)$ de grado $n > 0$ con coeficientes complejos. Existen n números complejos, $a_1, \ldots, a_n$ no necesariamente diferentes dos a dos, y un complejo c tales que $p(x) = c(x - a_1)\ldots(x - a_n)$.

Demostración por inducción:

Si $n = 1$ se tiene

$$p(x) = a_0 + a_1 x = a_1\left(x - \left(- a_1^{-1} a_0\right)\right)$$

Supóngase que todo polinomio de grado n se puede factorizar como se afirma en el teorema y considérese un polinomio $p(x)$ de grado $n + 1$, $p(x)$ a y $p(x) = (x - a)\, q(x)$,

Por el corolario 1 del teorema del residuo. Por la hipótesis de inducción

$q(x) = c(x - a_1)\ldots(x - a_n)$ de donde, tomando $a_{n+1} = a$,

$$p(x) = c(x - a_1)\ldots(x - a_{n+1})$$

como se quería demostrar

Teorema del valor intermedio

Si $f \in C[a, b]$ y K es un número cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe c en (a, b) tal que $f(c) = K$.

BIBLIOGRAFIA

Burden, R y Faires, J.D. Análisis numérico 1985 México, ed Grupo Editoral Iberoamericana.

Cárdenas, H., Lluis, E., Raggi, F., Tómas, F. Algebra Superior, 1978 ed Trillas México.

Anexo II

En este anexo se incluye el examen departamental, que fue aplicado a Los alumnos de cuarto semestre, así como el examen departamental aplicado a los alumnos que trabajaron con la propuesta.

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
DEMS DIV DE EVAL Y SEG DEL PEA
CECyT 13 "RICARDO FLORES MAGÓN"
FECHA DE APLICACIÓN
TIEMPO DE APLICACIÓN: 120 Minutos

DEPARTAMENTO PEDAGÓGICO
EXAMEN PRIMER PARCIAL TIPO A
MATERIA: CÁLCULO DIFERENCIAL.
SEMESTRE CUARTO 2001-2002 "B"

ALUMNO (A):________________________BOLETA:____________GRUPO:______

PUNTAJE TOTAL   **EVALUACIÓN CONTINUA**   **CALIFICACIÓN DEFINITIVA**

REVISIÓN DEL ALUMNO:

Instrucciones Generales:
Resuelve los siguientes ejercicios en forma ordenada y con lápiz, simplifica los resultados y enmarca el resultado final con pluma. Se califica procedimiento y resultado, con la salvedad de que el resultado sin procedimiento no se toma en cuenta, se permite el uso de calculadora sin préstamo durante el examen.

1. Resuelve la siguiente desigualdad y determine el intervalo solución

$|-5x + 3| < 2$

(10 puntos)

2. Determine el dominio, rango y traze la gráfica de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x}{x-3}$$

(10 puntos)

3. Con base en las siguientes funciones dadas, realiza las operaciones de diferencia, cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ y composición de las siguientes funciones:

$f(x) = x^2 + x - 6$ $g(x) = x + 3$

(15 puntos)

4. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2}{h}$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 1}$

d) $\lim_{x \to 4} \frac{x - 2}{x - 4}$

(20 puntos)

5. Calcule la derivada de la siguiente función, usando la regla general:

$y = 3x^2 + 12x - 3$

(15 puntos)

Valor del examen 70 puntos.
Evaluación continua 30 puntos

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
DEMS DIV DE EVAL Y SEG DEL PEA
CECyT 13 "RICARDO FLORES MAGÓN"
FECHA DE APLICACIÓN
TIEMPO DE APLICACIÓN: 120 Minutos

DEPARTAMENTO PEDAGÓGICO
EXAMEN PRIMER PARCIAL TIPO A
MATERIA: CÁLCULO DIFERENCIAL.
SEMESTRE CUARTO 2001-2002 "B"

....

ALUMNO (A):______________________________BOLETA:______________GRUPO:______

PUNTAJE TOTAL **EVALUACIÓN CONTINUA** **CALIFICACIÓN DEFINITIVA**

REVISIÓN DEL ALUMNO:

Instrucciones Generales:
Resuelve los siguientes ejercicios en forma ordenada y con lápiz, simplifica los resultados y enmarca el resultado final con pluma. Se califica procedimiento y resultado, con la salvedad de que el resultado sin procedimiento no se toma en cuenta, se permite el uso de calculadora sin préstamo durante el examen.

....

1. Resuelve la siguiente desigualdad y determine el intervalo solución

$$|-5x+3| < 2$$

(10 puntos)

2. Determine el dominio, rango y traze la gráfica de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x}{x-3}$$

(10 puntos)

3. Con base en las siguientes funciones dadas, realiza las operaciones de diferencia, cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ y composición de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^2 + x - 6 \qquad g(x) = x + 3$$

(15 puntos)

4. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^2}{h}$

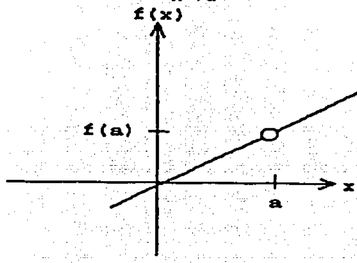
(10 puntos)

5. Probar por medio de la definición de límite:

$$\lim_{x \to 1}(x^4 + 2x^2 - x - 2) = 0$$

(15 puntos)

6. Observe la gráfica e indique cual es el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$



(10 puntos)

Valor del examen 70 puntos.
Evaluación continua 30 puntos

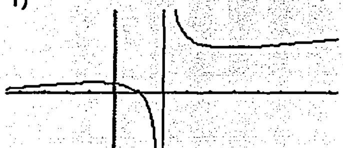
Anexo III

La siguiente situación se trabajo con los estudiantes que ya dominan el tema.
Grupo______________

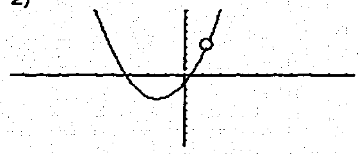
Indica tres situaciones de tu vida cotidiana que tengan límite.

Observa las siguientes gráficas e indica si las funciones son continuas o discontinuas, y de ser este el caso que tipo de discontinuidad tienen:

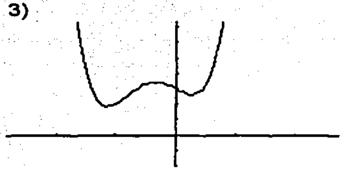
1)



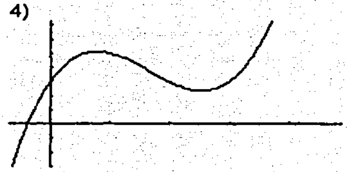
2)



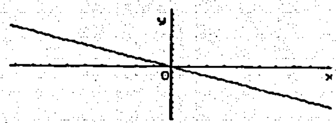
3)



4)



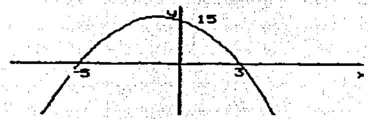
Observa las gráficas y calcula los límites que se piden:



$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) =$



$\lim_{x \to \infty} g(x) =$

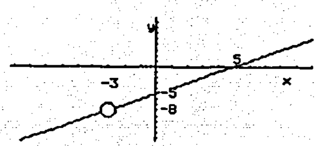
$\lim_{x \to -\infty} g(x) =$

$\lim_{x \to 3} g(x) =$

$\lim_{x \to 3} f(x) =$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) =$



$\lim_{x \to \infty} g(x) =$

$\lim_{x \to -3^+} g(x) =$

$\lim_{x \to -3^-} g(x) =$

Calcula los siguientes límites

$\lim_{x \to 1} (x^2 + 5x + 3) =$

$\lim_{x \to 4} \frac{x + 3}{x - 8} =$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x - 15}{x^2 + x + 3} =$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 3} =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x + 4}{x - 2} =$$