

45

3
ley



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

**“APLICACION DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO AL
ANALISIS DE SUBSISTEMAS QUE FORMAN PARTE
DE UN SISTEMA ESTRUCTURAL”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO CIVIL
PRESENTA

BENJAMIN ARCOS REYES

MEXICO, D. F.

1999

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACION

DISCONTINUA



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCION
FING/DCTG/SEAC/UTTT/075/98

Señor
BENJAMIN ARCOS REYES
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor **DR. JOSE ALBERTO ESCOBAR SANCHEZ**, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de **INGENIERO CIVIL**.

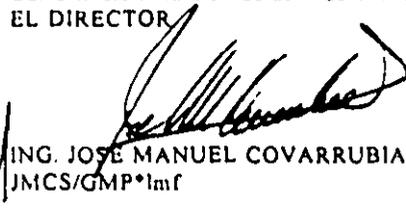
"APLICACION DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO AL ANALISIS DE SUBSISTEMAS QUE FORMAN PARTE DE UN SISTEMA ESTRUCTURAL"

- INTRODUCCION**
- I. ANTECEDENTES**
 - II. OBJETIVOS**
 - III. EL METODO DEL ELEMENTO FINITO**
 - IV. OPCIONES DE MODELADO DE SUBSISTEMAS ESTRUCTURALES EN SAP90**
 - V. CASOS ESTUDIADOS**
 - VI. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS**

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cd. Universitaria a 29 de abril de 1998.
EL DIRECTOR


ING. JOSE MANUEL COVARRUBIAS SOLIS
JMCS/GMP*Imf

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. José Alberto Escobar Sánchez,

por su invaluable y definitiva participación al haber guiado la consecución de este trabajo.

Al Dr. Roberto Gómez Martínez,

por su valiosa aportación en el logro de esta Tesis y permitirme robar, en vano, parte de su tiempo en la revisión de la misma.

A mis padres Benjamín Arcos y Rosa Ma. Reyes,

por permitirme el lujo de que lo sean; por su inquebrantable apoyo y su decisivo ejemplo, por su fortaleza y entusiasmo, y por el regalo de la vida misma, que son la mejor herencia que se puede recibir.

A mis hermanos Sandra y Armando,

que han permitido hacer todo esto menos difícil y más agradable con el milagro de su compañía.

A mis amigos y compañeros de la Facultad de Ingeniería,

por haber subido a este tren que es hasta ahora mi proyecto de vida y porque sólo ellos saben cuán difíciles y gratificantes, y vivibles, han sido todos estos años.

**APLICACIÓN DEL MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO
AL ANÁLISIS DE SUBSISTEMAS QUE FORMAN PARTE
DE UN SISTEMA ESTRUCTURAL**

INDICE

Introducción	1
1. Antecedentes	2
1.1 Sistemas y subsistemas estructurales	
1.2 Problema del análisis estructural por subsistemas	
1.3 Ventajas e importancia del análisis estructural por subsistemas	
2. Objetivo	8
3. El método del elemento finito	9
3.1 Fundamentos matemáticos	
3.2 Aplicaciones del método del elemento finito a la ingeniería	
3.2.1 Aplicaciones en la ingeniería civil	
4. Opciones de modelado de subsistemas estructurales en SAP90	20
4.1 Sistemas estructurales apoyados en resortes	
4.1.1 Interpretación de los resultados del análisis con resortes como condición de frontera	
4.2 Sistemas estructurales con desplazamientos impuestos	
4.2.1 Interpretación de los resultados del análisis con desplazamientos impuestos como condición de frontera	
5. Casos estudiados	32
5.1 Descripción de las estructuras estudiadas y su modelado con elementos finitos	
5.1.1 Viga aislada	
5.1.2 Marco en el espacio	
5.1.3 Elemento estructural tipo de un puente de tridilosa	
5.2 Resultados	
5.2.1 Viga aislada	
5.2.2 Marco en el espacio	
5.2.3 Elemento estructural tipo de un puente de tridilosa	
5.3 Modelo para el estudio de cimentaciones	
5.3.1 Modelo de cimentación rígida sobre apoyos elásticos	
5.3.2 Resultados del modelo de cimentación rígida sobre apoyos elásticos	
6. Conclusiones y comentarios finales	55
Apéndice 1	58
Referencias	61
Tablas	
Figuras	

INTRODUCCIÓN

La búsqueda de soluciones que la ingeniería civil debe emprender para satisfacer las necesidades más frecuentes y apremiantes de la sociedad, le llevan a considerar un gran número de posibilidades que den respuesta a las situaciones que se le presentan. Dichas soluciones serán evaluadas posteriormente a la luz de su factibilidad constructiva y económica, de tal forma que la opción seleccionada responda de manera integral a las causas que la originaron.

La ingeniería estructural no es ajena a este tipo de situaciones, por lo que para cumplir con su cometido debe considerar todas las alternativas que sean ingenierilmente razonables. Este hecho obliga a desarrollar herramientas que faciliten el proceso de creación de una estructura, desde su concepción, análisis, diseño y construcción. Un sistema estructural puede ser descartado por cuestiones económicas, del proceso constructivo o porque no resuelve satisfactoriamente el problema que lo motivó, sin embargo, no puede ser descalificado por no contar con herramientas adecuadas para su análisis.

En este trabajo se presenta un estudio sobre el uso de subsistemas estructurales como un medio para conocer el comportamiento general de una estructura principal. Esto es particularmente útil si el análisis de la estructura resulta complejo por cualquier circunstancia; siempre será más sencillo entender un todo a través del estudio de sus componentes. Para ello es necesario considerar a los subsistemas de manera aislada, pero tomando en cuenta las condiciones en que se encuentra en su estado original.

La teoría para relacionar el comportamiento estructural de los subsistemas con las circunstancias de su entorno es presentada en este trabajo. También se presenta un resumen acerca del método del elemento finito como la herramienta con la cual es posible llevar a cabo este análisis por subsistemas. Los casos estudiados considerando estas ideas, tanto del área estructural como en geotecnia, ofrecen un panorama sobre la aplicación de este tipo de análisis.

Finalmente, se concluye acerca de la validez de la subestructuración como un recurso para analizar sistemas estructurales y se comenta sobre la efectividad de las opciones de modelado de esos sistemas así como de la aplicación del método del elemento finito.

1. Antecedentes

Para poder comprender el uso del análisis por subsistemas en el estudio del comportamiento de estructuras más complejas, primero es necesario dejar en claro lo que es una estructura y una subestructura. En este capítulo se presenta esta distinción además de otra información que ayuda a comprender mejor la relación entre ellas y la importancia que tiene cada subestructura en la respuesta general del sistema completo. Se presentan también algunos ejemplos de sistemas y subsistemas estructurales.

1.1 Sistemas y subsistemas estructurales

Se entiende como sistema estructural al conjunto ordenado de elementos estructurales con ciertas características geométricas y propiedades mecánicas cuyo objetivo es resistir las fuerzas a las que va a estar sometido, sin colapso o mal comportamiento.

La etapa de estructuración es fundamental en el proceso de diseño estructural, ya que es aquí donde se selecciona el sistema estructural con el cual se espera dar respuesta a la necesidad de resistir las sollicitaciones de carga. La definición del sistema estructural involucra decidir sobre los materiales de los que va a estar constituida la estructura, la forma global de ésta, el arreglo de sus elementos constitutivos y el método constructivo más apropiado para ejecutar la estructura concebida. Una vez que se ha elegido un sistema estructural, es posible optimar la configuración geométrica y las dimensiones de los distintos elementos que lo constituyen mediante la adopción de algún criterio de optimación.

Las características estructurales más importantes de un sistema, desde el punto de vista de su respuesta ante las cargas que lo van a solicitar, son su resistencia, rigidez y ductilidad. El sistema debe poder resistir de manera eficiente las diversas condiciones de carga a las que puede estar sometido y poseer rigidez suficiente para las diferentes direcciones en que las cargas pueden actuar. Conviene que posea ductilidad, en el sentido de que no baste que se alcance un estado límite de resistencia en una sola sección para ocasionar el colapso brusco de la estructura (falla frágil), sino que ésta posea capacidad para deformarse sosteniendo su carga máxima y, de preferencia, posea una reserva de capacidad antes del colapso (falla dúctil). Para ello, se puede aprovechar la hiperestaticidad del sistema, ya que mientras mayor sea el número de elementos redun-

dantes en la estructura, mayor es el número de secciones individuales que tienen que llegar a su máxima capacidad antes de que se forme un mecanismo de colapso (ref. 1).

En términos generales es posible definir algunos modelos idealizados de sistemas estructurales. Un *sistema en serie* es el que está formado por elementos conectados de manera que las cargas se transmiten sucesivamente de uno a otro y basta la falla de uno solo de ellos para producir el colapso del sistema (fig. 1.1).

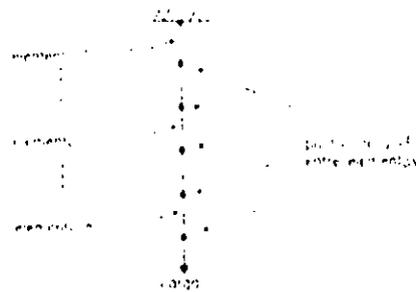


Figura 1.1 Sistema en serie

La probabilidad de que un sistema en serie falle o llegue al colapso crece proporcionalmente con el número de elementos que lo componen. Esta probabilidad de falla es un parámetro mediante el cual se relacionan las cargas aplicadas sobre un elemento y su resistencia, de tal forma que pueda evaluarse si ésta última es suficiente para impedir el colapso del elemento. Dichas relaciones entre carga y resistencia pueden ser expresadas de distintas maneras según las necesidades que se tengan. Este parámetro es principalmente utilizado en la determinación de los diversos factores de carga y resistencia que se incluyen en los códigos de construcción, apoyándose su cálculo en pruebas experimentales y en el uso de las teorías de probabilidad y estadística.

Por otro lado, un *sistema en paralelo* está formado por elementos conectados de manera que la capacidad del sistema es la suma de las resistencias individuales de cada uno de ellos (fig. 1.2). Si el modo de falla de cada elemento es frágil, cuando se alcanza la resistencia del elemento más débil este pierde totalmente su capacidad de carga y, a menos que los elementos restantes sean capaces de soportar entre todos la carga que antes tomaba el elemento que falló, el sistema llega al colapso. Cuando el número de elementos no es muy grande, la carga adicional que se redistribuye a cada elemento debido a la falla de uno de ellos puede ser elevada y la probabilidad de que falle inme-

diatamente otro elemento podría ser alta. Si la falla de los elementos estructurales es dúctil, cuando uno de ellos llega a su resistencia, no falla bruscamente sino que mantiene la misma capacidad de carga y de allí en adelante el resto de los elementos debe repartirse cualquier carga adicional. De esta manera, la capacidad de carga del sistema es la suma de las resistencias de los elementos individuales y la falla se presenta cuando todos los elementos han llegado a su máxima capacidad de carga (ref. 1).

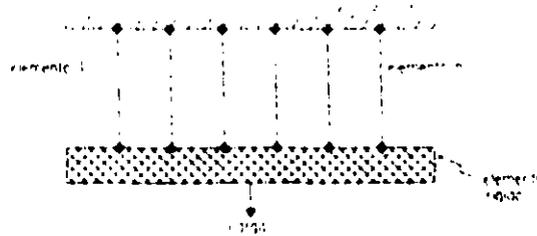


Figura 1.2 Sistema en paralelo

Debido a su funcionalidad, entre los sistemas básicos de estructuración existen varios tipos de sistemas estructurales, tales como marcos, armaduras, arcos, sistemas de piso, muros, etc. También se cuenta con sistemas más complejos cuya concepción obedece a diferentes requerimientos por satisfacer, por ejemplo, para soportar cargas de magnitud extraordinaria, por cuestiones del entorno físico, por motivos arquitectónicos o por consideraciones de tipo económico. De esta manera se cuenta con sistemas como los de contraventeo, estructuras tubo en tubo, las estructuras espaciales o tridimensionales (tridilosas), los cascarones, las estructuras colgantes o atirantadas y otros. Sin embargo, es posible clasificar todos estos sistemas estructurales en grupos específicos de estructuras más simples, lo cual permitirá visualizar más claramente la composición de los sistemas estructurales a base de subestructuras.

En primer lugar, se tienen los *sistemas formados por barras*; con arreglos de barras pueden formarse esquemas estructurales muy diversos, de los cuales puede hacerse una primera subdivisión entre arreglos triangulares, tipo armadura, y arreglos tipo marco. También es posible diferenciar entre los sistemas bidimensionales, o aquéllos que pueden considerarse compuestos por subsistemas bidimensionales factibles de analizarse en forma independiente, y los sistemas que sólo pueden analizarse como tridimensionales.

Los *sistemas a base de placas*, se forman mediante arreglos de placas verticales (muros) y horizontales (losas) y en general se denominan de *tipo cajón*. Para el funcionamiento en cajón se requiere que la losa forme un diafragma horizontal que tenga alta rigidez en su plano, de manera que las cargas laterales se puedan transmitir a los muros, cuya disposición como elementos verticales en dos direcciones ortogonales proporciona una enorme ventaja. Finalmente, las fuerzas horizontales y verticales se transmiten a la cimentación por medio de fuerzas axiales y cortantes en los muros. El modo de trabajo de un sistema tipo cajón es claramente tridimensional y con frecuencia no se presta a ser dividido en subsistemas bidimensionales, especialmente cuando los muros no son placas rectangulares separadas, sino que tienen geometrías irregulares formando en algunas ocasiones secciones de tipo tubular.

Como último punto, se tiene que en la mayoría de las construcciones, y principalmente en los edificios, pueden identificarse dos subsistemas estructurales acerca de los cuales pueden tomarse algunas decisiones independientes, relativas a la solución más conveniente, antes de proceder al análisis de la estructura completa. Estos subsistemas son el horizontal o de los sistemas de piso, y el vertical o de los elementos de soporte. El estudio de estos sistemas no puede separarse, ya que su trabajo en conjunto es el que determina su comportamiento y eficiencia, especialmente en lo que se refiere a las cargas laterales (ref. 1).

1.2 Problema del análisis estructural por subsistemas

Como se ha visto, la selección de un sistema estructural obedece a diversos factores y la decisión respecto a la opción adecuada no es única, sino que se puede contar con un gran número de posibilidades. La adopción de algún criterio de estructuración obligará a elegir la más conveniente. Sin embargo, en caso de que algún sistema en específico no satisfaga completamente las expectativas que se han trazado, aún es posible recurrir a otras opciones que consideren la acción conjunta de dos o más sistemas estructurales diferentes, pudiéndose erigir cada uno en un subsistema. De hecho, de manera general se puede afirmar que todos los elementos que componen un sistema, por más simple que éste sea, son subestructuras en todo el sentido de la palabra. La posibilidad de recurrir al uso de los subsistemas estructurales o subestructuras representa una ventaja importante en todo el proceso de realización de una estructura. Por lo que

Antecedentes

se refiere al proceso de diseño, la estructuración puede iniciarse planteando un sistema estructural conveniente que puede ser optimado siguiendo algún criterio preestablecido y apoyado por programas de cómputo. Para acelerar este proceso de optimación conviene dividir el sistema en subestructuras buscando su configuración óptima de forma sucesiva.

Existen innumerables sistemas estructurales que pueden formarse con combinaciones de los elementos que se han descrito. La forma de trabajar con ellos implica considerar las respuestas individuales de cada uno para identificar la respuesta total que se obtendrá del sistema. No debe perderse de vista que prácticamente todos los sistemas estructurales son tridimensionales y que su descomposición en subsistemas planos tiende a ignorar la interacción entre ellos y el comportamiento de conjunto. En particular, pueden ser importantes los momentos torsionantes que se generan entre un sistema plano y los ortogonales que se conectan a éste, así como las solicitaciones que pueden presentarse por la asimetría en planta de la estructura (ref. 1).

En la etapa de análisis, que es la que aquí se discutirá más ampliamente, la subestructuración se presenta como una alternativa para simplificar el análisis estructural de sistemas complejos. También se puede recurrir a este artificio cuando se desea conocer respuestas individuales de elementos específicos de una estructura principal.

El proceso de *subestructuración* se refiere a visualizar a una estructura de gran tamaño y número de grados de libertad, como un ensamble de estructuras de tamaño menor y obviamente con menos grados de libertad. Esta subestructuración permite al analista considerar únicamente los grados de libertad de su interés.

Las subestructuras definidas (que en la literatura de los elementos finitos suelen ser llamadas *super elementos*), son analizadas de manera independiente y posteriormente combinados sus resultados para obtener una solución total, (ref. 2). Las propiedades geométricas y mecánicas de cada subestructura son consideradas en los puntos que se encuentran en las fronteras de cada subsistema. Al ser analizado cada uno, se trasladan hacia él los efectos de los otros subsistemas. Esto lleva a enunciar un concepto desarrollado a la luz del análisis por subsistemas que es el de la *condensación de los grados de libertad* de una estructura, esta idea se refiere a considerar únicamente los grados de libertad que son de interés. Para el caso del análisis por subestructuras, son de particular interés los puntos que se encuentran en la frontera de cada subsistema, por lo que se

Antecedentes

puede utilizar el proceso de condensación para "eliminar" los grados de libertad que tiene cada subestructura interior.

Para que cada subsistema sea representativo de la parte de la estructura de la cual se extrae, es necesario que sea analizado considerando los efectos de las otras subestructuras. Por ello, las condiciones en su frontera merecen especial atención puesto que permitirán que las respuestas obtenidas del análisis hecho en la subestructura aislada, se asemejen a los resultados que para ese subsistema se generen en el sistema principal. Sobre la manera de considerar esos efectos de frontera en un análisis mediante el método del elemento finito, es el enfoque principal del presente trabajo.

1.3 Ventajas e importancia del análisis estructural por subsistemas

Las principales ventajas del análisis estructural por subsistemas se refieren al manejo que puede hacerse de las herramientas del mismo. Es más sencillo tratar con matrices de orden menor, pero además de eso, también es cierto que con la respuesta obtenida a partir de un subsistema se puede plantear más eficientemente la solución a un problema de estructuración y llegar a una respuesta óptima.

Se puede aprovechar también la posibilidad de tener varias subestructuras de la misma forma y bajo las mismas condiciones de frontera o de carga, o por lo menos similares. Debido a que el planteamiento de la matriz de rigidez puede generalizarse con modificaciones pequeñas, se pueden ensamblar después todas esas matrices y generar más fácilmente la matriz general del sistema estructural.

Una ventaja más del análisis estructural por subsistemas es lo que podría llamarse el "manejo administrativo" de la solución del problema de análisis. Esto significa que al dividir un problema grande y complejo en otros de menor tamaño, las subestructuras pueden ser estudiadas simultáneamente por grupos de trabajo diferentes. Las tareas de dichos grupos pueden ser prácticamente independientes unas de otras si la interacción entre subsistemas es tomada en cuenta de manera adecuada. Así, los resultados del análisis por subestructuras pueden ser revisados por separado antes de ser combinados para representar a la estructura completa, (ref. 3).

2. Objetivo

El objetivo principal de este estudio es verificar la posibilidad de realizar un análisis por subestructuras de tal forma que se pueda conocer el comportamiento estructural del subsistema aislado (por simple que éste sea), y su participación en la respuesta de la estructura completa ante un sistema de cargas determinado. Esto implica revisar las condiciones en que ocurre la transferencia de efectos entre la subestructura y el sistema que la contiene, por lo que tal posibilidad será evaluada a partir de los resultados que proporcionen información sobre el comportamiento de la subestructura aislada.

En el presente trabajo resulta de particular importancia el uso de las condiciones de frontera como un medio para realizar el análisis por subestructuras. La evaluación de su efectividad se presenta también como un objetivo a considerar. A partir de los resultados obtenidos se podrá hacer un juicio acerca de su factibilidad como herramienta de análisis y los alcances que pueden tenerse con su aplicación.

Otro de los objetivos que aquí se persiguen es revisar la aplicación del método del elemento finito en el análisis por subsistemas. Lo anterior significa evaluar la representatividad de los distintos modelos elaborados con base en la técnica de elementos finitos. Con dichos modelos se pretende simular las condiciones geométricas y mecánicas de la estructura así como las cargas que sobre ella se aplican. En esta revisión se considera la utilidad de este método en la imposición de las condiciones de frontera usadas para aislar las subestructuras.

3. El método del elemento finito

Se presentan las bases matemáticas del método del elemento finito así como algunas de sus aplicaciones en la ingeniería civil. También se presenta su aplicación a un problema de la ingeniería hidráulica.

3.1 Fundamentos matemáticos

El método del elemento finito ha tenido una deuda pendiente con la ingeniería estructural, ya que ha sido en gran parte gracias a ésta que se han desarrollado muchas de las teorías que lo sustentan. Sin embargo, los alcances del propio método han pagado con creces esa deuda al convertirse en una herramienta poderosa para el análisis de estructuras.

Debido a que en un principio se utilizaron conceptos físicos propios de la ingeniería estructural para establecer los importantes conceptos de discretización y plantear las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad entre los elementos estructurales, no se reconoció al método como un ejemplo del principio de Rayleigh-Ritz y su desarrollo no había otorgado crédito alguno a los analistas numéricos. Fue el perfeccionamiento requerido por el método el que abrió las puertas a una participación más activa por parte de las matemáticas, terminando por proporcionar los fundamentos sólidos que han respaldado su éxito.

El método consiste básicamente en aproximar ciertos valores de una función que se presume es lo suficientemente apropiada para dar solución a una ecuación diferencial que representa matemáticamente un fenómeno físico. La aproximación se realiza mediante una combinación lineal "adecuada" de funciones simples (usualmente polinomios) afectadas por una serie de coeficientes, (ref. 4). La necesidad de obtener aproximaciones con mayor precisión llevó a reconocer que ésta mejoraba sensiblemente al incrementar el grado de los polinomios empleados. Sin embargo, los coeficientes de la combinación lineal (que inicialmente son también incógnitas en el proceso) que se calculaban mediante la solución de un sistema de ecuaciones discretas conservaron siempre su significado puramente físico de acuerdo a la naturaleza del problema que se enfrentara

El método se fundamentó matemáticamente cuando se identificó a esas incógnitas como los coeficientes de una aproximación de Ritz (aproximación del tipo $u \approx \sum q_j \varphi_j$, donde u es la función que se desea calcular, q_j representa los valores conocidos usados para hacer la aproximación, y φ_j son los coeficientes para lograr la combinación lineal) y las ecuaciones discretas se percibieron como las condiciones necesarias para lograr la minimización de una *función potencial* o *función de energía potencial* (ref. 4).

Son muchas las definiciones que podrían enumerarse acerca del método del elemento finito, atendiendo ya sea a su naturaleza (como método numérico), a los objetivos que se persiguen con su uso, al procedimiento empleado, etc. La definición que aquí se presenta consiste en lo siguiente: *El método del elemento finito es un método de aproximación mediante piezas (funciones) adecuadas, en la cual la función aproximada ϕ es formada conectando funciones simples, cada una definida sobre una región pequeña (elemento).*

Un *elemento finito* es una región en el espacio en la cual una función ϕ es interpolada a partir de sus valores nodales en la frontera de la región, de manera tal que la continuidad de ϕ entre los elementos tiende a ser mantenida en el ensamble de éstos (ref. 3).

Dicha función ϕ puede representar, en la mecánica estructural, un campo de desplazamientos que eventualmente interesa ser conocido para analizar una estructura; es por ello que la siguiente justificación matemática se hará tomando como punto de partida un fenómeno de la mecánica de los materiales.

Considérese una barra de sección constante y material elástico homogéneo sujeta a carga axial (fig. 3.1); partiendo de la Ley de Hooke, se tiene la expresión que relaciona los esfuerzos σ que se presentan en un medio continuo, homogéneo, isotrópico y elástico, es decir, ideal, con las deformaciones unitarias ϵ producidas a través de una propiedad mecánica unívoca de cada material como es su módulo de elasticidad E , esto es:

$$\sigma = E\epsilon$$

Por otro lado, tanto esfuerzos como deformaciones unitarias pueden ser expresados en términos de la geometría del material como:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

donde P es la carga axial que provoca el desplazamiento δ en el extremo de la barra, A es el área de la sección transversal donde la carga es aplicada axialmente y L es la longitud del elemento en la dirección en que se presenta el desplazamiento δ (figura 3.1).

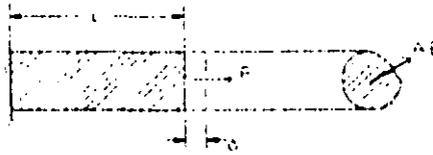


Figura 3.1 Barra sometida a carga axial

Si en la ecuación simplificada de la Ley de Hooke se reemplazan los valores de σ y ε por las expresiones anteriores, se tiene:

$$\frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L} \quad \therefore \quad P = \frac{EA}{L} \delta$$

donde el término $\frac{EA}{L}$ es conocido como la rigidez axial (k_a) de una barra.

De esta forma se llega a: $P = k_a \delta$ que representa la respuesta que tiene cierto material, cuyas características están definidas por su rigidez, ante alguna sollicitación de carga. Los desplazamientos δ suelen expresarse en la literatura como u , por lo que se empleará esa notación.

Al considerar la deformación axial en un sólo extremo de la barra, se ha hecho otra simplificación muy importante que involucra otro término fundamental, el de los grados de libertad (*gdl*) que se comenta a continuación. Los grados de libertad de un punto de una estructura son todas las posibilidades de desplazamiento que tiene ese punto. Una estructura tendrá tantos grados de libertad como coordenadas se requiera conocer para expresar su configuración deformada.

Así, una estructura tendría un número infinito de grados de libertad debido a que tiene un número infinito de puntos materiales con posibilidad de desplazarse, lo cual es evidente considerando a la estructura como un *continua*. Sin embargo, desde la óptica

de aproximación del método del elemento finito no es necesario considerar todos los puntos materiales, sino solamente aquéllos con los cuales se pueda describir la configuración original de la estructura. Así se llega al concepto de discretización, ya que con el modelo de elementos finitos es posible considerar tan sólo un cierto número finito de puntos (nodos).

Volviendo al caso de la barra, hay que tomar en cuenta que toda estructura debe estar en equilibrio, por lo que en el extremo de la barra debe presentarse una fuerza de la misma magnitud y en sentido contrario a la aplicada que también induce una deformación.

Considérese el esquema de la figura 3.2, donde P_1 y P_2 son las cargas externas aplicadas en los extremos de la barra, u_1 y u_2 son los desplazamientos producidos y k_a es la rigidez axial de la barra:

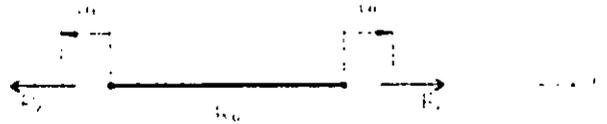


Figura 3.2 Barra con rigidez k_a sometida a carga axial

Si se considera que $P_1 = k_a u_1$, entonces para el sistema de coordenadas indicado se tiene:

$$\begin{aligned} P_1 &= k_a(u_1 - u_2) = k_a u_1 - k_a u_2 \\ -P_2 &= k_a(u_1 - u_2) = k_a u_1 - k_a u_2 \end{aligned}$$

en notación matricial:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

y de manera simplificada: $\{P\} = [K] \{u\}$

donde $[K]$ es la *matriz de rigideces del sistema*. Para este caso, el valor de la matriz de rigideces considerando que corresponde a carga axial es:

$$[K_a] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

En un sentido físico, la j -ésima columna de $[K]$ es el vector de cargas que debe ser aplicado a los grados de libertad de cada nodo para mantener el estado de deformación asociado a un valor unitario del grado de libertad j mientras todos los demás grados de libertad en los nodos son anulados (ref. 3). Existen tres formas de obtener esta matriz:

1. *El método directo*, basado en el razonamiento físico que es el utilizado para el ejemplo mostrado. Se limita a elementos estructurales muy simples, con pocos grados de libertad;

2. *El método variacional*, aplicable a problemas que pueden ser establecidos mediante ciertas expresiones integrales (llamadas funcionales) tal como la empleada para la energía potencial; y

3. *Métodos de residuos pesados*, particularmente aplicables a problemas en los cuales se conoce la ecuación diferencial que le gobierna y no es posible emplear algún principio variacional.

En el caso del análisis de esfuerzos y en algunos problemas de otras áreas, el método variacional y el método Galerkin de residuos pesados pueden conducir a formulaciones de elementos finitos idénticas. Esto ocurre si para algún fenómeno en particular se cuenta tanto con ecuaciones diferenciales como con principios variacionales que lo representen. Además, para ambos métodos se debe usar la misma función al aproximar una solución que satisfaga la ecuación diferencial y que permita lograr la minimización del funcional, (ref. 3).

La matriz $[K]$ siempre es simétrica y los coeficientes de la diagonal principal, k_{ii} , siempre son positivos y relativamente grandes comparados con los valores que están fuera de la diagonal en la misma fila de la matriz. La simetría puede ser explicada mediante la respuesta que tiene una estructura, en términos de desplazamientos, ante las fuerzas aplicadas; siempre que cualquier estructura muestre una relación lineal entre fuerzas y desplazamientos la matriz será simétrica. El hecho de que los coeficientes de la diagonal sean siempre positivos, significa que si una fuerza cualquiera es aplicada en cierta dirección, no producirá un desplazamiento en la dirección contraria, sino en el sentido de su aplicación, (ref. 5).

La representatividad de la matriz de rigideces del problema físico es tal, que la misma álgebra matricial puede expresar si el problema de equilibrio ha sido correctamente planteado. Uno de los casos que puede presentarse, es cuando $[K]$ resulta ser singular, es decir, no puede encontrarse un vector único de soluciones $\{u\}$ al resolver el problema. Esto sucede cuando la estructura no está apoyada y por lo tanto no es estable, bastando la más ligera carga para desplazarla y que se mueva como un cuerpo rígido.

La matriz $[K]$ también puede obtenerse a partir de la solución de una ecuación diferencial que represente un fenómeno físico. La mejor manera de resolver este tipo de problemas es obtener su solución analítica, sin embargo, en muchos casos esto no es posible debido a la propia complejidad del fenómeno. En dichos casos se puede obtener una solución aproximada mediante algún método numérico. Existen varios procedimientos para obtener la solución numérica de una ecuación diferencial. Entre ellos se cuenta con los métodos variacional y diferencial.

Enfoque variacional. Este enfoque involucra la minimización de un funcional. Un funcional es una expresión integral que implícitamente contiene ecuaciones diferenciales que describen el problema. A partir de la aplicación de ciertos principios variacionales se puede llegar a un sistema de ecuaciones que relaciona las variables del fenómeno estudiado (refs. 3 y 5). Para el caso de la mecánica estructural, el sistema de ecuaciones a que se llega son las ecuaciones de rigidez. Este sistema puede ser escrito en la forma usual $[K] \{u\} = \{P\}$.

El método variacional es la base para muchas formulaciones de elementos finitos, sin embargo, tiene una seria desventaja: no es aplicable a ninguna ecuación diferencial que contenga derivadas de orden impar, (ref. 5).

Enfoque diferencial. Para resolver el problema anterior referente al orden de la ecuación diferencial gobernante, se ha recurrido a otras técnicas de aproximación. Una de ellas es el método de residuos pesados. Al igual que en el método variacional, en este caso también se usan expresiones integrales que involucran una ecuación diferencial que gobierna el problema físico. En este método se sustituye una solución aproximada (usualmente una suma de polinomios multiplicados por un coeficiente indeterminado) en la ecuación diferencial. Dado que no es una solución exacta, la ecuación diferencial no se satisface, resultando de ello un error o residuo que es minimizado con respec-

to a los coeficientes desconocidos en la solución aproximada. Como resultado de dicha minimización se genera un nuevo sistema de ecuaciones que permite obtener los coeficientes que integran la matriz de rigideces del sistema, (refs. 5 y 6). El paso siguiente en la aplicación del método del elemento finito, consiste en resolver el sistema de ecuaciones a que se ha llegado.

Existen varios tipos de elementos finitos; el uso de ellos al modelar una estructura implica seleccionar las funciones con las cuales se aproxima la solución de un problema. Cada elemento finito corresponde a cierto tipo de aproximación y es labor de quien realiza el modelo escoger la mejor opción para representar el fenómeno. Entre estos se tienen: elementos BARRA, VIGA (ambos de dos nodos), elementos TRIANGULARES PLANOS (3 nodos), RECTANGULARES PLANOS (4 nodos), RECTANGULARES SÓLIDOS (8 nodos), etc.

Usando un tipo de formulación diferente, conocida como formulación isoparamétrica (refs. 3 y 6) se han generado también elementos no rectangulares y con lados curvos. Entre estos últimos se tienen los elementos PLACA, MEMBRANA, SÓLIDOS HEXAÉDRICOS, además de los TRIANGULARES Y RECTANGULARES PLANOS con lados curvos. Además de ellos, se tienen elementos finitos para problemas de tipo dinámico, tales como los elementos llamados *de Lagrange*, que pueden ser elementos en dos dimensiones con 6, 8 ó 9 nodos y de geometría triangular o rectangular, (ref. 3).

Los principales criterios para escoger entre un elemento y otro involucran la naturaleza y objetivos del fenómeno. Ya sea para conocer elementos mecánicos, esfuerzos y deformaciones, o bien, frecuencias de vibración en un problema dinámico. Dependiendo de los resultados que se busquen se seleccionará al elemento finito que ayude a modelar cada problema de la mejor manera posible.

También es posible recurrir a la combinación de elementos finitos para lograr una mejor representación. Por ejemplo, en el caso de un miembro sometido a flexotensión o flexocompresión, lo ideal es un elemento finito que considere los efectos de la deformación axial (elemento BARRA) y los debidos a flexión pura (elementos VIGA). Este tipo de formulación se conoce como VIGA-COLUMNA y se tiene incluso un elemento finito especial para ello (ref. 3).

Para los análisis de tipo estructural requeridos en esta tesis se hará uso del programa SAP90 (ref. 7). Este es un programa de propósitos especiales que utiliza la técnica de elementos finitos para realizar análisis estructural. Ha sido desarrollado continuamente desde su nacimiento en 1970 en la Universidad de California por el Profesor Edward L. Wilson y ha ganado prestigio a través de los años entre muchas firmas de ingeniería de todo el mundo. Es posible utilizarlo con equipo de cómputo de prácticamente cualquier tamaño y capacidad. Su biblioteca de elementos finitos contiene elementos VIGA-COLUMNA en tres dimensiones, elementos CASCARÓN en tres dimensiones, elementos PLACA en dos dimensiones y elementos SÓLIDOS en tres dimensiones.

Bajo ciertas condiciones es posible usar también otros elementos finitos a partir de los anteriores, tal es el caso de los elementos TRIANGULARES, elementos BARRA o elementos VIGA. A partir de estos elementos es posible crear distintos modelos para realizar los análisis requeridos, ya sea en dos o tres dimensiones dependiendo de las necesidades que se tengan y de la interpretación que se haga del modelo.

El programa permite realizar análisis con cargas de diferentes tipos y con condiciones de presfuerzo, además de los desplazamientos especificados; también pueden hacerse análisis dinámicos mediante espectros de respuesta de aceleraciones y permite considerar distintas condiciones de apoyo. Pueden realizarse análisis de tipo estático o dinámico y obtener elementos mecánicos, estados de deformaciones, estados de esfuerzos, frecuencias y modos de vibración, etc., (ref. 7).

3.2 Aplicaciones del método del elemento finito a la Ingeniería

Todo diseño en Ingeniería se ve apoyado por un análisis para predecir el funcionamiento de un sistema. Para ello, es necesario calcular un campo, definido como una cantidad (desplazamiento, temperatura, etc.) que varía en función de la posición que se considere dentro del sistema analizado, (ref. 8).

Cualquier campo tiene asociada una función potencial (o función de energía potencial). Los campos se relacionan con los potenciales como sus derivadas con respecto a la posición de un punto de interés. A continuación se presentan algunos ejemplos de campos comúnmente usados en ingeniería y sus potenciales asociados:

Campo	Potencial
Flujo de calor	Temperatura
Esfuerzos mecánicos	Desplazamiento
Campo eléctrico	Voltaje
Campo magnético	Vector de potencial magnético
Velocidad de flujo	Potencial de flujo

El cálculo de los campos y potenciales puede ser realizado con elementos finitos construyendo un modelo numérico del dispositivo o sistema de interés. Todo modelo de elementos finitos o sistema, contiene básicamente la siguiente información:

- 1) geometría del sistema, subdividida en elementos finitos;
- 2) características del material o los materiales de que está hecho;
- 3) condiciones de frontera; y
- 4) excitación (fuerza, corriente eléctrica, flujo inducido de calor, etc.) con la que se pretenda obtener la respuesta del sistema, (ref. 8).

3.2.1 Aplicaciones en la Ingeniería civil

Si bien es posible construir la teoría de elementos finitos a partir de los conceptos básicos de fuerzas, desplazamientos y rigideces, con el desarrollo logrado en esta teoría y en gran medida gracias al acelerado avance físico de los equipos de cómputo y en los lenguajes de programación que han permitido crear programas específicos basados en el método del elemento finito, los alcances del método se han expandido de manera importante. Tan sólo en el área de la mecánica estructural, ahora pueden abordarse problemas de análisis estático lineal y no lineal, análisis dinámico, de respuestas sísmicas espectrales, pandeo elástico lineal, problemas de valores característicos, etc.

De hecho, es tal la relación existente entre el método del elemento finito y los fenómenos de la ingeniería estructural, que el modelado deja de ser un arreglo por completo abstracto. Al representar sistemas estructurales usando elementos finitos se puede

ilustrar la forma física que tiene la estructura, haciendo más sencilla la descripción del sistema estudiado (ref. 3).

Otras áreas de la ingeniería civil en las que es ampliamente aplicable el método, son la geotecnia y la hidráulica.

En el área de geotecnia, por ejemplo, se puede recurrir al método como una herramienta para estudiar el flujo de agua en medios porosos, lo cual es de suma importancia cuando se diseñan estructuras para retención de agua, tales como cortinas en embalses para presas u otras más simples como tablaestacas o muros de contención. El conocimiento de la distribución de presiones hidrodinámicas en el subsuelo es necesario para conocer las fuerzas que debe resistir la estructura de retención.

En el diseño de cualquier estructura resulta necesario considerar sus condiciones de apoyo. El diseño de la cimentación debe ser capaz de soportar y transmitir las fuerzas hacia el suelo, cuya capacidad se ha tomado en cuenta previamente para seleccionar el tipo de cimentación a emplear. Sin embargo, no debe excluirse la reciprocidad a que obliga el equilibrio entre suelo y estructura, por lo que también han de considerarse los efectos que la respuesta del suelo induce en la cimentación y por ende, en la estructura. Esta interacción puede ser estudiada mediante la técnica de elementos finitos, pudiéndose analizar a la cimentación idealizándola como una viga rígida sobre un suelo homogéneo con comportamiento elástico.

Otras opciones de modelado con elementos finitos permiten realizar este tipo de estudios, considerando que la viga o zapata no es un miembro rígido, sino que acepta deformaciones, y que el suelo no es homogéneo, con lo que la presión del suelo ya no es uniforme. El caso de la viga rígida sobre apoyos elásticos será retomado nuevamente para abundar más sobre las opciones de modelado con resortes.

Por lo que se refiere al área de la hidráulica, se puede usar el método para analizar la respuesta de sistemas de tuberías de conducción por los que transitan gastos generalmente constantes. También se puede utilizar el método para estudiar las condiciones y características de distintos tipos de flujo. Ejemplo de ello, es el problema de un flujo con potencial que se presenta a continuación.

Por facilidad, en muchos de los problemas que se presentan con flujo unidimensional se considera la existencia de una velocidad media representativa en toda la sec-

ción de un conducto. Sin embargo, muchos problemas de flujo requieren un conocimiento más preciso de la distribución de velocidades y presiones, a lo largo de las superficies de frontera de un flujo o de una determinada sección transversal del mismo. El análisis de un flujo bi y tridimensional, basado en la existencia de un potencial de velocidades, proporciona una aproximación más real de la mayor parte de las soluciones.

Un ejemplo de la existencia de potencial en un flujo, lo constituye el de infiltración a través de medios permeables en el que dominan la acción viscosa y una clara irrotacionalidad, (ref. 9). Este fenómeno se presenta, por ejemplo, en el análisis de las infiltraciones a través de la cortina y del terreno de cimentación de una presa de tierra. A partir de este análisis, puede obtenerse información tan importante como el gasto infiltrado a través de la zona de flujo, la influencia del flujo de agua en la estabilidad general de la masa de suelo donde ocurre la infiltración así como la posibilidad de que el agua infiltrada arrastre material sólido, provoque erosiones, etc.

El conocimiento del potencial en cada punto del espacio donde ocurre el flujo permitirá conocer la carga hidráulica que se presenta en esos puntos. Con ello se pueden conocer las presiones hidrostáticas e hidrodinámicas actuantes en la masa de suelo y por lo tanto, calcular las fuerzas de empuje que deberá resistir la estructura y su cimentación.

Mediante ciertos manejos matemáticos puede expresarse una función de potencial que resuelve este problema. Dado que dicha función de energía potencial es una solución de la ecuación de Laplace, puede ser determinada con diversos métodos, ya sean analíticos, numéricos, gráficos o a través de modelos de laboratorio (ref. 9). Entre los métodos numéricos, se cuenta con el método del elemento finito como uno de los más adecuados. Las condiciones de frontera consideradas en cada caso permiten obtener una solución única para cada problema, y por la propia naturaleza del método del elemento finito, estas condiciones de frontera pueden ser tomadas en cuenta de manera más apropiada, incrementando con ello la precisión de los resultados.

La solución de un problema genérico de flujo con potencial usando el método del elemento finito se presenta en el Apéndice 1 de este trabajo.

4. Opciones de modelado de subsistemas estructurales en SAP90

Otro aspecto importante para este estudio es el que se refiere a las condiciones de apoyo en que se encuentran los subsistemas estudiados. A partir de las consideraciones hechas respecto a estos apoyos se construyen las opciones de modelado de los distintos subsistemas estructurales. La teoría sobre ello se presenta en este capítulo así como el enfoque a usar para interpretar los resultados obtenidos del análisis en los distintos modelos.

4.1 Sistemas estructurales apoyados en resortes

Una vez que un sistema estructural ha sido solicitado por un conjunto de cargas de diferente naturaleza y magnitud, se obtendrá su respuesta expresada mediante elementos mecánicos, estado de esfuerzos y estado de deformaciones.

El estado de deformaciones permite conocer la configuración final que alcanza la estructura como resultado de verse sometida a las cargas de servicio, y su estudio es de suma importancia ya que dichas deformaciones, de ser excesivas, pueden conducir a una situación de colapso del sistema completo. De hecho, los límites en cuanto a la magnitud de las deformaciones con respecto a la forma original de la estructura se consideran como estados límite de servicio del sistema estructural en los diversos reglamentos de construcción.

Entre las distintas formas de controlar las deformaciones que pudieran resultar excesivas en una estructura, se cuenta con la posibilidad de incrementar su grado de hiperestaticidad, aumentar su rigidez, emplear sistemas especiales como los contraventeos y puntales, materiales más resistentes, etc.

Para efectos de este análisis mediante subestructuras se considera la alternativa del grado de hiperestaticidad de la estructura de tal forma que pueda hacerse referencia a sus condiciones de apoyo. Cuando se habla de los sistemas de apoyo como medios de conexión entre los diversos sistemas estructurales, su función consiste en otorgar estabilidad interna al subsistema con respecto al sistema principal y transmitir al primero los elementos mecánicos producto de las cargas aplicadas. Debido a las condiciones anteriores, el sistema de apoyo presenta desplazamientos que son resultado de la configu-

ración deformada de la estructura, y al formar parte de ésta, los apoyos forzosamente deben ocupar una posición distinta a la original, la que tenían antes de aplicar las cargas.

En el caso de los sistemas de apoyo que unen a la estructura con su entorno para otorgarle estabilidad al sistema completo, los apoyos evitan el desplazamiento de los grados de libertad de los elementos estructurales; sin embargo, es posible, según las necesidades de funcionamiento, recurrir a algún tipo de apoyo que no limite todas las posibilidades de desplazamiento, sino sólo algunas. De hecho, aun cuando sólo se restrinjan los desplazamientos de ciertos grados de libertad (el total es de 3 traslaciones y 3 giros de manera general para cada apoyo) en un extremo del elemento, esa restricción no es total, aunque por facilidad en el análisis se considera que sí lo es.

Los sistemas de apoyo suelen ser considerados como condiciones de frontera y se distinguen dos tipos generales: las condiciones de frontera *homogéneas*, que son las más comunes y se localizan en sitios donde el movimiento se evita por completo, y las condiciones de frontera *no homogéneas*, que ocurren donde se presentan valores finitos de desplazamientos diferentes de cero (ref. 10), ya sean obligados (desplazamientos impuestos) o permisibles (resortes con rigidez finita).

Entre las condiciones de frontera homogéneas, surgieron las ideas de apoyo libre, articulación, apoyo guiado, nudo elástico y empotramiento (en dos dimensiones) y articulación de rodilla, cojinete, bisagra, junta universal y empotramiento (en tres dimensiones). Sobre ellas se ha construido la teoría del análisis estructural y se ha procurado representar las condiciones de sustentación que se presentarán en una estructura (ref. 11).

Dichas restricciones nunca son absolutas, lo cual se explicará con dos casos extremos. Para el primero supóngase que se tiene un elemento estructural conectado a otro que le impide moverse por completo, para todos sus grados de libertad, en el extremo por el cual se unen, tal como una viga unida a un muro o una columna a un piso (estructuras en *cantilever*). Se considera que el muro o el piso tienen un efecto sobre la viga o la columna tal que el empotramiento es prácticamente perfecto y puede considerarse que al comparar la rigidez del elemento estructural con la rigidez del sistema de apoyo, ésta es lo suficientemente grande para idealizarla como *infinita*. Para el segundo caso supóngase lo contrario, es decir, que el sistema de apoyo en uno de los extremos del elemento estructural no impide que sus grados de libertad se desplacen, en dicho

caso se considera que la rigidez del sistema de apoyo es tan baja en relación con la del elemento que puede suponerse como nula.

Ambos casos son idealizaciones que no pueden ser reproducidos en la realidad, esto es, son modelos que no representan las condiciones que se presentan en la práctica real, donde no existen empotramientos perfectos ni apoyos nulos, sino casos intermedios que merecen ser estudiados; es aquí donde surgen los sistemas apoyados en resortes. Para el caso de la relación entre las rigideces de elementos que se conectan y forman parte de la misma estructura general, como es el caso de la unión viga-columna por ejemplo, es más evidente que la rigidez que proporciona cada uno al comportamiento del otro tiene un cierto valor finito.

En un análisis normal se considera que los apoyos con que suelen idealizarse las condiciones de sustentación de una estructura, impiden por completo cualquier desplazamiento de los grados de libertad, lo cual nunca es completamente cierto, ya que permiten desplazamientos pequeños, casi inapreciables a simple vista pero existen y, de hecho, el mismo apoyo sufre deformaciones propias.

La idea de utilizar resortes como elementos de apoyo para los sistemas estructurales tiene como finalidad representar el comportamiento antes descrito, es decir, no se anulan los desplazamientos de la estructura en los apoyos, ni se ignoran las deformaciones que se presentan en éstos, sino que se utilizan resortes capaces de sufrir deformaciones y de permitir desplazamientos en los nudos de la estructura con los cuales se conectan para los grados de libertad considerados.

Para el caso de las subestructuras que se analizan por separado de su estructura original, los resortes tienen la finalidad de servir como apoyo para el elemento aislado, pero al igual que en el caso anterior, su rigidez es un indicador de las condiciones a que se ve sometida la subestructura al formar parte de la estructura original, y que no pueden excluirse al hacer el análisis independiente. La rigidez que se asigne a los resortes en este caso, será la necesaria para evitar que en la subestructura analizada por separado se presenten deformaciones mayores a las permitidas por la interacción de la subestructura con el medio que la rodea dentro de la estructura principal.

Cabe recordar que en análisis lineal el resorte se considera como modelo analógico para representar un cuerpo de Hooke. La introducción de los resortes en el análisis

estructural permite considerar que el desplazamiento en el nodo i de un elemento estructural no sea nulo.

Para incluir los resortes dentro del análisis estructural, considérese el caso de una barra sometida a carga axial (fig. 4.1). La barra es de un material elástico ideal y la carga axial aplicada en el nodo 2 es constante. Considerando que la barra tiene un módulo de elasticidad E , el área de su sección es A y su longitud es L , entonces su rigidez axial (k_h) está dada por: $k_h = EA/L$. Supóngase que como sistema de apoyo se encuentra conectada a un resorte con rigidez k en uno de sus extremos y que se presentan los desplazamientos indicados en los nodos:

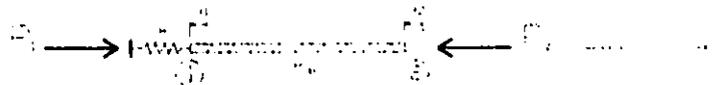


Figura 4.1 Barra apoyada en resorte sometida a carga axial

Por equilibrio de fuerzas en la dirección x , se tiene que $P_1 = P_2$, donde P_2 es la carga aplicada y P_1 es la reacción en el apoyo.

El planteamiento matricial del sistema de ecuaciones es:

$$k_h \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ -P_2 \end{Bmatrix}$$

Debido a la condición de equilibrio de fuerzas, se pueden eliminar los subíndices y utilizar como nomenclatura un término único llamado P . Para poder resolver el sistema de ecuaciones anterior es necesario fijar alguno de los desplazamientos. La condición de estabilidad obligaría a anular el desplazamiento del nodo 1 por encontrarse ahí el apoyo, sin embargo, dado que ahora se cuenta en ese lugar con un resorte se le asignará a dicho nodo un desplazamiento diferente de cero que depende de la rigidez propia del resorte y de la carga que soporta. Si el resorte tiene una cierta rigidez k , entonces el desplazamiento en el nodo 1 está dado por la expresión $u_1 = P/k$. Sustituyendo esta última expresión en el sistema matricial de ecuaciones, se tiene:

$$k_h \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -P/k \\ -u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ -P \end{Bmatrix}$$

del cual se obtiene que:

$$-k_b \frac{P}{k} + k_b u_2 = P$$

y despejando el desplazamiento en el nodo 2 se llega a:

$$u_2 = \frac{k_b \frac{P}{k} + P}{k_b} = \frac{P}{k} + \frac{P}{k_b} = P \underbrace{\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k_b} \right)}_{\frac{1}{k_e}}$$

donde el término $\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k_b}$ es la rigidez equivalente que integra la de la barra y la del resorte. Esto significa que la resistencia a que el nodo 2 se desplace es proporcionada tanto por la barra como por el apoyo, que en este caso es el resorte, el cual también sufre deformaciones debidas a la acción de la fuerza (y que equivale al desplazamiento sufrido por el nodo 1).

En lo que se refiere a la asignación de las rigideces en los resortes, es necesario distinguir entre las dos formas de sistemas de apoyo antes mencionadas, que son, por un lado, el sistema de apoyo que conecta a la estructura completa con su entorno, y por otro, los apoyos que se usan para soportar las subestructuras, y que, por lo tanto, sirven como unión entre elementos estructurales (y por ende entre subestructuras contiguas).

El primer caso se refiere, de manera general, a la relación que existe entre la estructura completa y el medio que la sostiene, como sería, por ejemplo, el suelo donde está apoyada. Para ello, es necesario considerar la interacción suelo-estructura que influye en su comportamiento a partir de las condiciones de la cimentación. Esto obliga a que la rigidez de los resortes a emplear dependa de factores como: el tipo de suelo, la carga que soporta, los asentamientos presentados, las características de la cimentación, etc. Todo ello se resume en la obtención de lo que en geotecnia se conoce como *Módulo* o *Coefficiente de reacción*, (ref. 12), cuya obtención y características se presentarán de manera más detallada en el siguiente capítulo.

Para el segundo caso, el valor de las rigideces dependerá principalmente de la respuesta estructural que presente el sistema. Para su cálculo se requiere conocer la configuración deformada de la estructura; esto se hace a través de los desplazamientos

presentados en los extremos de los elementos que se analizarán con resortes y para todos los grados de libertad que se quieran considerar. Se necesita conocer también las fuerzas y momentos que son aplicados en esos mismos extremos y que son los que dan lugar, principalmente, a las deformaciones finales (es decir, se excluyen las deformaciones debidas a efectos de temperatura, defectos constructivos, etc.). Estas fuerzas y momentos pueden ser conocidas mediante los diagramas de elementos mecánicos obtenidos del mismo análisis que se realizó para conocer las deformaciones.

Dependiendo del tipo de problema se considerarán tantos grados de libertad como sean necesarios para describir completamente el comportamiento de un elemento estructural (3 para un problema en el plano y 6 en el espacio). Para el caso más general, que es este último, se tiene un elemento mecánico asociado a cada uno de los grados de libertad.

Dado que los elementos mecánicos obtenidos indican la magnitud de las fuerzas que se presentan en las secciones del elemento estructural, y que se conocen los desplazamientos de todos los grados de libertad considerados, para obtener las rigideces bastará con dividir las fuerzas y momentos entre los traslados y giros correspondientes, obteniendo para cada grado de libertad la rigidez respectiva que se asocia con un resorte colocado en la sección donde se mide la magnitud de los elementos mecánicos. Ejemplos de este procedimiento se presentan en el capítulo siguiente.

4.1.1 Interpretación de los resultados del análisis con resortes como condición de frontera

Para realizar el análisis con subsistemas es fundamental que el elemento a analizar se encuentre en condiciones similares a las de apoyo y cargas que tenía como parte del sistema completo. Al hacer el modelo de la subestructura con resortes, se debe asignar a estos una rigidez tal que los desplazamientos que se produzcan en los nodos permitan al subsistema comportarse del mismo modo que lo haría formando parte de la estructura completa. Dado que los resortes son sistemas de apoyo, es de esperarse que en ellos se presenten reacciones que produzcan elementos mecánicos en la estructura que sustentan.

Al formar parte de la estructura original, los subsistemas responden a la acción de las cargas a través de elementos mecánicos; esos elementos mecánicos constituyen por sí mismos las cargas que se aplican al subsistema aislado. De esta manera se tiene un sistema de cargas completo (o sistema de cargas interno) con el cual se puede analizar la subestructura de interés, sabiendo que dichas solicitaciones tienen correspondencia directa con el sistema de cargas externo para el cual se ha concebido el sistema estructural general. La acción de los resortes constituye entonces el medio por el cual se logra la correspondencia entre el sistema original y el subsistema aislado.

Para obtener los elementos mecánicos con que se solicitará a la subestructura es necesario realizar el análisis estructural completo del sistema original, y cabría entonces preguntarse: ¿para qué realizar un estudio adicional si con el método tradicional ya se conocen las respuestas que suelen ser de interés general?. Esto es válido cuando se trata de estructuras cuya complejidad no es muy grande, o que a pesar de ser complicadas su uso continuo permite entender mejor su comportamiento; ejemplos de ello pueden ser las armaduras tipo, los sistemas de contraventeo en X, los marcos planos reticulares, o las estructuras hechas a base de elementos prefabricados. No así cuando la estructura a emplear presenta una complejidad mayor, o bien, cuando su novedad implica la realización de pruebas menos convencionales para conocer su respuesta y actuar en consecuencia respecto a proponer distintas alternativas. De este último caso se presenta un ejemplo práctico más adelante, donde se muestra el análisis de una "piña" (una subestructura espacial metálica) en un puente de tridilosa.

El hecho de realizar un análisis estructural con resultados producidos por un análisis previo de la misma estructura, pudiera parecer repetitivo y hasta inútil si no se enfoca desde un punto de vista que permita comprender los objetivos que se persiguen con ello.

Para el caso de la interacción suelo-estructura, se puede usar la idea de los resortes cuando se analizan cimentaciones para las cuales se desea tomar en cuenta su rigidez a flexión. Esto puede hacerse considerando a la zapata como una viga sobre una cimentación elástica y usando la solución de Winkler (ref. 12), la cual propone que la cimentación se vea como una "cama de resortes" y resolver el problema con las ideas básicas del análisis estructural de piezas hiperestáticas. Esto puede convertirse en un análisis iterativo debido a la incertidumbre en cuanto a las rigideces asignadas a los re-

sortes. También puede usarse el método del elemento finito con la ventaja de que es mucho más general que la solución de Winkler

Otra aplicación de los resortes con rigidez finita es la que se refiere al estudio de la dinámica de sistemas suelo-estructura. Esto es particularmente útil cuando la flexibilidad del suelo da lugar a deformaciones importantes, tal es el caso de los suelos altamente compresibles en algunas zonas de la ciudad de México. Para representar esa flexibilidad, es posible recurrir a resortes traslacionales y rotacionales con rigideces equivalentes, (ref. 13).

Los efectos de la interacción suelo-estructura son más perceptibles en el cálculo del período fundamental de vibración del sistema. Al realizar el análisis sísmico espectral de la estructura, la variación en su período fundamental conduce a lecturas diferentes en la aceleración de diseño para ese modo. Dichas variaciones son consideradas por el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal. En sus Normas Técnicas Complementarias para diseño por Sismo (NTDS), se propone incrementar el valor del período fundamental de vibración y los desplazamientos calculados en la estructura como una forma de aproximar los efectos de su interacción con el suelo (ref. 14). Para ello, se proporcionan un conjunto de expresiones matemáticas que involucran las características de la estructura y de la cimentación además de los coeficientes de rigidez equivalentes que representan la restricción que el suelo bajo una estructura opone a los movimientos de ésta (ref. 13). Sobre estos coeficientes de rigidez se comentará en el siguiente capítulo.

4.2 Sistemas estructurales con desplazamientos impuestos

Otra forma de condición de frontera no homogénea que puede usarse para el análisis de subestructuras, es la que se refiere a la imposición de desplazamientos diferentes de cero en los nodos que forman parte del "sistema de apoyo" de la estructura o de la subestructura. Esta falsa denominación es tal, en virtud de que al imponer estos desplazamientos se acepta que no constituyen sistemas de apoyo propiamente dichos (como condiciones de frontera homogéneas), sino que, al igual que en el caso de los resortes, se considera que los apoyos permiten ciertos desplazamientos.

En el caso de los nodos que conectan a la estructura con el suelo, los desplazamientos impuestos pueden ser utilizados para representar hundimientos específicos que

podiera esperarse que sucedieran por alguna condición crítica en especial. El efecto que tengan esos hundimientos en el comportamiento de la estructura, puede ser estudiado mediante el análisis con la imposición de los desplazamientos, y con ello, tener elementos para evaluar la necesidad de colocar algún dispositivo que controle ese hundimiento, o bien, hacer las modificaciones necesarias en el diseño de la superestructura o de la cimentación para que los efectos del hundimiento no las dañen de manera significativa.

En un análisis normal, los resultados esperados son los elementos mecánicos y los desplazamientos que se originan con base en el sistema de cargas que está actuando; a partir de dichos elementos mecánicos, es posible conocer un estado de esfuerzos a que se ven sometidos los elementos que forman la estructura. Esos esfuerzos permitirán decidir si los miembros son adecuados para resistir las cargas que se aplican.

Al imponer un conjunto de desplazamientos a un sistema estructural, se pretende generar en éste un estado de esfuerzos a consecuencia de la alteración en la configuración original de la estructura. Con la deformación del sistema mediante los desplazamientos impuestos, se le obliga a reaccionar buscando nuevamente el equilibrio de fuerzas internas, lo que permite calcular nuevamente un estado de esfuerzos asociado a los desplazamientos impuestos. Si dichos desplazamientos corresponden a una condición particular de carga, se logra que la subestructura responda como si estuviera sujeta a las cargas originales, de esta forma, se logra tener un modelo útil para analizar la subestructura al considerar el sistema de cargas en la imposición de los desplazamientos.

Al imponer los desplazamientos, es importante que no se pierda de vista la necesidad de que la subestructura responda como si estuviera sujeta a las cargas originales, por lo que la magnitud y dirección de esos desplazamientos adquiere particular importancia en el análisis por subestructuras. Supóngase que se tiene un marco plano formado por dos columnas y una trabe que las liga; si se aplica una fuerza horizontal en el plano del marco, en éste se presentarán una serie de elementos mecánicos y desplazamientos. Si la trabe fuese lo suficientemente rígida para despreciar su deformación axial, se le podría considerar como un cuerpo rígido, y por lo tanto, los desplazamientos horizontales de sus nodos extremos serían idénticos. Cabe mencionar que la deformación axial en la trabe se presenta una vez que las columnas no pueden deformarse más en flexión ante la carga horizontal, por lo que la magnitud de los desplazamientos es de gran importancia para llevar la trabe a su condición de trabajo real.

Al analizar la trabe como una subestructura aislada del marco principal usando la imposición de los desplazamientos, se debe asignar a los nodos extremos los mismos desplazamientos que resultaron del análisis inicial. Con la condición anterior se tendría que ésta no se deforma axialmente sino que se traslada, ya que el movimiento de los nodos extremos es idéntico debido a la propia rigidez axial de la trabe.

La asignación de desplazamientos debe realizarse evitando los traslados como cuerpo rígido de los sistemas que se estudian. En caso de que alguno de los nodos extremos corresponda a un nodo de apoyo probablemente tendrá un valor nulo de desplazamiento, lo cual permanecerá invariable en los análisis subsecuentes. Sin embargo, en otros casos quizá se tenga que recurrir a algún artificio extra como puede ser el de anular ciertos desplazamientos de grados de libertad en nodos diferentes a los de apoyo y permitir otros de tal forma que se logre deformar a la estructura.

A continuación se explicará el uso de desplazamientos impuestos en el análisis estructural. Supóngase, de manera similar al caso de los resortes, que se tiene una estructura en *cantilever* sujeta a carga axial, la barra es de un material elástico, su rigidez axial es k_b y en el extremo donde originalmente está apoyada se impone un cierto desplazamiento $u_1 = \delta$, tal y como se muestra en la figura 4.2.

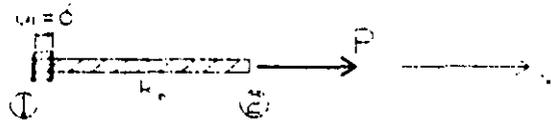


Figura 4.2 Barra sometida a carga axial con desplazamiento impuesto

Para el sistema de referencia indicado, el sistema de ecuaciones de equilibrio puede escribirse de la siguiente forma:

$$k_b \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

sustituyendo en el sistema de ecuaciones anterior los valores conocidos de desplazamiento impuesto $u_1 = \delta$ y de la fuerza actuante $F_2 = P$, se reescribe la ecuación matricial

como:

$$k_b \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ P \end{Bmatrix}$$

que al ser desarrollado conduce a:

$$\begin{aligned}k_b \delta - k_b u_2 &= F_1 \\ -k_b \delta + k_b u_2 &= P\end{aligned}$$

despejando de la segunda de las ecuaciones anteriores el desplazamiento en el nodo 2, se llega a:

$$k_b u_2 = P + k_b \delta$$

o bien:

$$u_2 = \frac{P}{k_b} + \delta$$

de donde se desprende que para el comportamiento ante carga axial de una barra con rigidez k_b , los desplazamientos resultantes de la barra dependen de la condición de frontera asignada (la magnitud del desplazamiento impuesto) y de las características del elemento estructural (el desplazamiento propio del nodo 2 permitido por la barra de rigidez k_b), su magnitud, evidentemente involucra también a la carga.

4.2.1 Interpretación de los resultados del análisis con desplazamientos impuestos como condición de frontera

En el caso de este tipo de modelado estructural a base de desplazamientos impuestos como condiciones de frontera, los resultados esperados son principalmente los elementos mecánicos y los esfuerzos generados. Dado que los desplazamientos en cada uno de los grados de libertad de la estructura son impuestos previamente, no puede obtenerse información adicional de ellos. En cuanto a los grados de libertad no considerados como condiciones de frontera no homogéneas, sí pueden usarse los desplazamientos generados en el análisis estructural del sistema.

Al deformar la estructura mediante posiciones obligadas en ciertos nodos, se impone una configuración nueva que arrastrará a los grados de libertad que no están restringidos en los nodos restantes. Además de poder usar esto como un medio para verificar la representatividad del modelo empleado también permite conocer más a fondo el comportamiento de algunos elementos internos de la subestructura.

Una vez que se han impuesto los desplazamientos en los nodos del subsistema ya no se aceptan modificaciones en ellos. Esto se debe a que corresponden a deformaciones en la estructura principal causados por el sistema de cargas original. Dado que

los desplazamientos generados en la estructura principal ya no se modificarán salvo que se cambien las cargas o las características de ésta, tampoco se puede aceptar que los desplazamientos usados para modelar la subestructura se vean alterados a consecuencia de la excitación impuesta en esta última.

Al imponer los desplazamientos, los grados de libertad se restringen para impedir otros cambios en la posición de los nodos a que se asocian. Esto se puede interpretar, en cierta forma, como una transformación que se produce de condiciones de frontera no homogéneas a condiciones de frontera homogéneas. Lo anterior significa que los nodos donde se impusieron los desplazamientos se convierten ahora en nodos o puntos de apoyo (con desplazamiento nulo posterior al desplazamiento impuesto). Así, es posible calcular reacciones asociadas a esos nodos y elementos mecánicos en los elementos estructurales conectados a ellos.

Dado que con la imposición de desplazamientos se pretende modelar una estructura que represente lo más fielmente posible el comportamiento del prototipo a estudiar, puede esperarse que los elementos mecánicos generados con esta condición de frontera sean muy parecidos a los obtenidos en el análisis con el sistema de cargas original. Esta similitud permite, por un lado, verificar la representatividad del modelo, y por otro, tener cierta seguridad de que los resultados obtenidos en ciertos elementos de la estructura, cuyo análisis no fue hecho con rigurosidad en un estudio previo, son confiables para elaborar juicios posteriores acerca de su respuesta estructural.

Las deformaciones registradas en cualquier elemento de la estructura, permiten también verificar si la estructura, con las características geométricas y mecánicas que posee, es altamente deformable o lo suficientemente rígida para resistir ciertas solicitudes. Un valor significativo en cuanto al desplazamiento relativo entre dos nodos consecutivos para un elemento en particular, pone en evidencia la falta de rigidez de ese elemento.

5. Casos estudiados

En este capítulo se presenta el análisis de diversos casos de la ingeniería estructural y de geotecnia. Para cada caso se describen el problema, su modelo con elementos finitos y se hacen comentarios sobre los resultados obtenidos.

5.1 Descripción de las estructuras estudiadas y su modelado con elementos finitos

Partiendo del hecho de que una subestructura abarca desde el más sencillo de los miembros estructurales que la forman hasta la estructura completa, las opciones de condiciones de frontera aquí explicadas pueden ejemplificarse con distintos modelos de elementos finitos donde se involucran tanto la estructura principal como sus respectivas subestructuras.

De hecho, esta alternativa nació a partir de un caso específico: el estudio del comportamiento estructural de los elementos tipo de un puente de tridilosa. La dificultad de modelar con mayor precisión los elementos tipo (conocidos como "piñas") para formar el modelo del puente con elementos finitos y posteriormente hacer el análisis con un programa de computadora, llevó a considerar la posibilidad de evaluar el comportamiento de la piña aislándola de su entorno para mejorar el modelo y ejecutarlo imponiendo las condiciones de frontera que representen los efectos del entorno en la respuesta estructural de la piña. Este ejemplo se explicará adelante con más detalle mostrando el uso que se hizo de las condiciones de frontera.

En primer lugar se mostrará dicha aplicación mediante ejemplos del análisis de dos subestructuras, una viga y un marco tridimensional. Para los fines que se persiguen, es necesario definir una estructura principal que contenga al subsistema y seleccionar un sistema de cargas. Dado que aquí se pretende mostrar una variación en el análisis estructural y se excluyen estudios referentes a calidades y/o respuestas del material usado, puede recurrirse a cualquier estructura con cualquier sistema de cargas.

Una vez analizado el modelo de la subestructura se compararán los resultados obtenidos con aquellos originados en el modelo primario, la interpretación de dichos resultados se basará en el nivel de similitud que se pueda presentar entre ambos estados

de desplazamientos y elementos mecánicos. Posteriormente se lleva a cabo la evaluación de la efectividad de ambas condiciones de frontera.

Cabe aclarar que para las descripciones siguientes, el análisis y la interpretación de resultados, se usará el sistema gravitacional de unidades (o sistema técnico) empleando centímetros (cm) para las longitudes y toneladas (t) para las fuerzas. Para facilitar la lectura de este capítulo, las figuras y tablas correspondientes se presentan en la parte final de este trabajo.

5.1.1 Modelo de viga

Considérese como estructura original un marco plano al cual se le aplica un sistema de cargas (fig. 5.1). Para analizar el marco, se creó una malla de elementos finitos para representar la estructura (fig. 5.2). En este caso se recurrió a la superposición de dos tipos de elementos finitos: los elementos BARRA y los elementos VIGA dado el comportamiento esperado de la estructura. En vista de que en este modelo hay fuerzas transversales a los miembros del marco y también cargas a lo largo de sus ejes longitudinales, es de esperarse que los elementos se vean sometidos a una combinación de los fenómenos de carga axial y flexión (flexotensión o flexocompresión).

Posteriormente se plantea un nuevo modelo que representa a la viga aislada del marco a la cual se le han impuesto las condiciones de frontera no homogéneas correspondientes, ya sea desplazamientos o resortes.

En primer lugar, se estudiará el efecto de los resortes como condiciones de frontera no homogéneas. Una vez conocidos tanto desplazamientos como elementos mecánicos, estos últimos se interpretan como un sistema de cargas en cada sección del elemento estructural, lo que incluye también los extremos de los miembros, es decir, en las secciones contiguas a los nodos cuyos desplazamientos son completamente conocidos. Por equilibrio, los elementos mecánicos en las secciones adyacentes a los nodos son también fuerzas sobre éstos, por lo que se cuenta con los elementos necesarios para calcular las rigideces que se asociarán a los resortes en los nodos del nuevo modelo de viga aislada. Dichas rigideces se calcularán como el cociente entre el elemento mecánico y el desplazamiento correspondiente (tabla 5.1, Resultados del análisis para el modelo de viga original) para cada grado de libertad considerado (tabla 5.2)

Con las rigideces antes calculadas, se puede preparar el nuevo modelo estructural en el que solamente se tiene la viga aislada apoyada en sus extremos en resortes, los cuales representan la rigidez del sistema de apoyo proporcionado en el modelo previo por las columnas.

Por último, para estudiar el efecto de los desplazamientos como condición de frontera no homogénea se crea otro modelo estructural muy parecido al usado para los resortes, sólo que en este caso se impondrán desplazamientos en los grados de libertad de los nodos extremos de la viga.

5.1.2 Marco en el espacio

Se realiza el análisis de una estructura tridimensional (fig. 5.3). En este ejemplo se combinan dos artificios que pretenden facilitar el proceso de análisis. Uno de ellos, a diferencia del otro, ampliamente verificado y usado. El primero consiste en la traslación de un problema en el espacio a un análisis en el plano. El segundo es la idea aquí expuesta de revisar un sistema a partir de sus subsistemas más simples. Para este caso, como en el de la viga, es necesario definir una estructura y extraer de ella alguna de sus subestructuras. La subestructura seleccionada, puede ser aquella cuyos miembros se encuentren ubicados todos en un mismo plano, lo cual daría la pauta para realizar su análisis con los métodos tradicionales para esa condición.

Aquí se presentará una situación como la anterior. Se define al sistema principal como la estructura tridimensional hecha a base de marcos. Como subestructuras se seleccionan dos sistemas que forman la estructura, uno de ellos es también una estructura tridimensional y el otro uno de los marcos planos. En la figura 5.4 puede verse el modelo de la estructura original.

Para este ejemplo también se deben crear los modelos adicionales que permitirán conocer la efectividad de la imposición de condiciones de frontera no homogéneas en el análisis de las subestructuras.

Con los resultados de la tabla 5.3 (Resultados del análisis para el modelo de marco tridimensional original) se calculan las rigideces que se asociarán a los resortes que se coloquen en el nodo a partir del cual se define la subestructura de interés. En este ejemplo se tienen 6 grados de libertad por nodo. Para el nuevo modelo con resortes se

prescindirá de los elementos 6 y 7 (fig. 5.4), es decir, aquellos que forman el marco paralelo al plano XY (fig. 5.3). El nuevo modelo de elementos finitos que representa a la subestructura seleccionada (a la cual se le llamará *subestructura 1*) se muestra en la figura 5.5. El nodo en el cual se colocarán los resortes es el identificado con el número 7 y el cálculo de las rigideces se muestra en la tabla 5.4.

En este ejemplo también se analizará la subestructura correspondiente al marco paralelo al plano YZ (fig. 5.3). Ello lleva a considerar un nuevo nodo que delimite la frontera de la subestructura. Se han eliminado los elementos 5, 6 y 7 (fig. 5.4), por lo que en esta ocasión se ubicarán las condiciones de frontera en el nodo 3, correspondiente a una de las uniones viga-columna del marco. El modelo de la nueva subestructura (llamada *subestructura 2*) se presenta en la figura 5.6. El cálculo de las rigideces de los resortes para este nodo se presenta en la tabla 5.5.

Por otra parte, para el análisis con la imposición de desplazamientos se usarán las mismas subestructuras 1 y 2, y por lo tanto, los mismos nodos de frontera en que se colocaron los resortes se usarán para imponerles los desplazamientos obtenidos del estudio con el modelo primario.

Para la subestructura 1, en el nodo 7 se impondrán los desplazamientos que pueden leerse en la tabla 5.3. Dado que la malla de elementos finitos no se altera en comparación con la malla usada para estudiar el efecto de los resortes en esta subestructura, el modelo para esta opción es el mismo que se muestra en la figura 5.5.

En el caso de la subestructura 2, el nodo de frontera es el 3, por lo que de la tabla 5.3 se extraen los desplazamientos que se impondrán en el nuevo modelo con esta subestructura aislada (figura 5.6).

5.1.3 Elemento estructural tipo de un puente de tridilosa

Como último ejemplo de análisis estructural, a continuación se expondrá el caso que motivó el estudio de la aplicación de estas condiciones de frontera; se trata del análisis de los elementos tipo de un puente de tridilosa.

A diferencia de los ejemplos anteriores, el estudio de los elementos tipo en un puente de tridilosa (conocidos como "*piñas*") es un caso real y muy específico, por lo que

Casos estudiados

es necesario puntualizar sobre ciertos aspectos de su historia y características generales antes de abordar su estudio propiamente dicho.

En cierta forma, este caso indujo a considerar la posibilidad de estudiar estructuras complejas a partir del comportamiento de subestructuras relativamente más simples. Las causas principales para ello fueron la complejidad para crear un modelo detallado y eficiente del puente y las limitaciones que esa complejidad indujo en los programas de análisis y equipo de cómputo.

Los sistemas tridimensionales (tridésicas) son estructuras con elementos en tres direcciones, de cualquier forma y con cualquier tipo de perfil estructural. Al tratarse de la interacción que puede lograrse al hacer trabajar de manera conjunta elementos de acero con otros de concreto, se refiere entonces al sistema conocido como tridilosa (ref. 15). La tridilosa se emplea comúnmente en cubiertas y sistemas de piso en diversas edificaciones, sin embargo, se le ha usado también en superestructuras de puentes vehiculares.

A raíz de diferentes experiencias derivadas del uso de este sistema en dichos puentes, se han realizado estudios formales para evaluar su comportamiento (ref. 16). Dichos estudios proporcionan información importante sobre la seguridad estructural del puente y se basan tanto en pruebas de campo como en el uso de modelos por computadora. En la creación de dichos modelos, se asumieron ciertas simplificaciones que aliviaron en cierta medida el trabajo de análisis.

Una de esas simplificaciones es la que se refiere al modelo de las piñas. Dado que su modelado más preciso representaba un nivel de complejidad considerablemente alto, se creó un modelo menos detallado que fuese lo suficientemente útil para los propósitos que se perseguían (ref. 16).

A fin de que haya un entendimiento más claro de los modelos del puente y las piñas que posteriormente se explicarán, ahora se hará una descripción breve de sus características generales.

La estructura en estudio es el puente llamado *Palo Blanco*, el cual se localiza en el kilómetro 292+320 de la autopista México-Acapulco (Autopista del Sol) en el tramo Chilpancingo-Tierra Colorada en el estado de Guerrero. Salva un claro total de 176 m mediante tres tramos, dos de 58.5 m de longitud y uno más, en el centro, de 59 m. El

ancho del puente es de 21.5 m y se apoya sobre pilas y estribos. En la figura 5.7 se presenta un esquema general de este puente.

La superestructura del puente es un sistema de tridilosa formado por la estructura espacial metálica coronada por una losa de concreto reforzado de 20 cm de espesor. La estructura espacial la constituyen las piñas ligadas entre sí mediante varillas de acero corrugado en su parte inferior. El peralte de esta estructura metálica es de aproximadamente 3.85 m y para su construcción se emplean perfiles de acero de sección cuadrada tipo PTR. Los perfiles se colocan en diagonal uniéndose a partir de 4 puntos superiores y 4 inferiores en el centro de la piña mediante una placa de acero. Dicha placa es la responsable de transmitir los efectos de las cargas sobre la calzada del puente a los elementos que se encuentran en la parte inferior de la piña, por lo que su estudio adquiere importancia si se desea saber cómo responde el puente al tráfico vehicular. En la figura 5.8 se ilustra este tipo de estructuras.

Las dimensiones de los elementos de las piñas varían a lo largo del puente para dar respuesta satisfactoria a los efectos que se generan a consecuencia del tráfico vehicular. Los cambios ocurren principalmente en la sección transversal de las diagonales y en el número de varillas que corren por la parte inferior de las piñas. Para el caso que aquí se presenta se escogió una piña cuyos perfiles estructurales tienen una sección cuadrada de 3.8 cm x 0.32 cm de espesor en los perfiles alojados sobre el eje *i* de la figura 6, y 6.4 cm x 0.35 cm de espesor en aquéllos que están sobre el eje *j* de la misma figura. Para esta misma estructura se tienen 5 varillas de 1.5 pulgadas de diámetro en las cuerdas longitudinales inferiores. La placa central, a lo largo de todo el puente, es de 20 x 20 cm y tiene 0.95 cm de espesor.

Para todos los elementos de acero se consideró un módulo de elasticidad de 2100 t/cm² y para la losa de concreto se tomó $E=237.5$ t/cm².

Para este caso, puede decirse que se tiene una estructura principal que es el tramo del puente y una subestructura que es la piña. Sin embargo, también puede enfocarse desde otro punto de vista y considerar que la piña es la estructura principal y la placa de la parte central una de sus subestructuras (las demás serían los elementos diagonales o las cuerdas inferiores).

Casos estudiados

El modelo general del puente con elementos finitos se realizó utilizando elementos VIGA-BARRA y elementos CASCARÓN. El primer tipo de elementos se usó para modelar las diagonales de las piñas y las cuerdas longitudinales inferiores, mientras que con los elementos CASCARÓN se modeló la losa. Para este modelo general del tramo del puente no se consideró la placa de acero de la parte central. En la figura 5.9 se presenta este modelo del tramo del puente *Palo Blanco*.

Las cargas aplicadas sobre el modelo del puente corresponden a las descargas de los vehículos usados cuando se realizaron las pruebas de campo (ref. 16), para las cuales se consideraron 8 condiciones de carga; para el presente estudio se escogió sólo una de ellas. Los camiones utilizados para esa condición de carga se colocaron en un tramo lateral a lo largo de la calzada aunque hubo una ligera concentración en la parte central. El modelo también toma en cuenta el peso propio de todos los elementos del puente.

En lo referente al modelado de la piña se consideraron dos opciones. En una de ellas se reproduce el mismo tipo de modelo utilizado en la representación del tramo del puente, es decir, las diagonales unidas en un nodo, sin placa central y con la losa de rodamiento. En la otra opción, con el fin de conocer sobre el comportamiento de la placa y su efecto en los resultados de toda la piña, se agrega al modelo la placa de acero donde se unen las diagonales. Para estas últimas se ocuparon elementos finitos VIGA-BARRA y para la losa de concreto y la placa de acero elementos CASCARÓN. Para el primer modelo se usó solamente un elemento CASCARÓN en la losa de rodamiento, mientras que en el segundo se usaron cuatro elementos; para la placa fueron 64 elementos CASCARÓN los utilizados. En la figura 5.10 se muestran los dos modelos mencionados.

En ambos modelos de la piña se imponen los desplazamientos que se obtuvieron del análisis en el modelo del puente (tabla 5.6) con excepción de los desplazamientos registrados en el punto de unión de los perfiles a la mitad del peralte de la piña ya que ese nodo servirá para comparar los resultados que se obtengan. En la tabla 5.7 se presentan estos desplazamientos; en los análisis también se toma en cuenta el peso propio de todos los elementos.

5.2 Resultados

En esta parte se explican los resultados obtenidos al analizar todos los modelos descritos en el subcapítulo anterior. Para cada caso se explica primero el efecto de usar los resortes con rigidez finita como sistema de apoyo y posteriormente la imposición de desplazamientos.

5.2.1 Modelo de viga

Los resultados del análisis para el modelo original se encuentran en la tabla 5.1; los referentes a los modelos con resortes y desplazamientos se encuentran en las tablas 5.8 y 5.9 respectivamente.

Comparando los resultados de los modelos con resortes y con desplazamientos con aquellos que se obtuvieron del análisis en el modelo principal, pueden hacerse las siguientes observaciones:

Modelo de viga con resortes. Para el modelo de viga con resortes no existe similitud entre los elementos mecánicos de la viga aislada y aquéllos que se obtuvieron sobre la viga en el modelo original. Los momentos flexionantes están fuera de cualquier intervalo, tanto en magnitud como en signo algunos, de tal forma que hasta este punto la única apreciación que podría hacerse es que los resortes desvirtúan la realidad que se presenta en la viga cuando forma parte del marco.

Para la fuerza cortante, las magnitudes difieren entre los resultados del modelo de viga aislada y los del modelo de viga original, sin embargo, puede notarse que se encuentran dentro de un intervalo de diferencia hasta cierto punto aceptable (tabla 5.8a). Puede verse que la variación de fuerza cortante a lo largo del elemento es la misma en los dos modelos, lo cual podría explicarse debido a que la carga transversal aplicada a la viga se conserva íntegra, siendo ésta la principal causa de que se conserve ese patrón de cambio.

Esto último podría indicar que los resortes, a pesar de modificar los resultados originales, otorgan a la estructura aislada cierta independencia para que ésta responda por su cuenta a las cargas que se le aplican, es decir, el efecto de los resortes sobre la viga en cuanto a su tipo de respuesta (no a su magnitud) es el mismo que surten las co-

lumnas en el modelo original, por lo menos al hacer referencia a la fuerza cortante. Esta afirmación deberá ser evaluada nuevamente a la luz de otros modelos como el que se desarrolla para el estudio del marco tridimensional.

En lo que se refiere a los desplazamientos (tabla 5.8b), se observa que, salvo en la dirección vertical en la cual se aplican las cargas transversales a la viga, los desplazamientos están fuera de un intervalo aceptable, sin embargo, al igual que en el caso de la fuerza cortante, las respuestas relativas entre puntos si conserva cierta semejanza con el modelo original. En este caso, lo que se puede obtener es una configuración final parecida en su forma a aquella obtenida del modelo inicial, ya que los desplazamientos de prácticamente todos los grados de libertad en todos los nodos, conservan la misma dirección; la única discrepancia surge en el giro del nodo 2, donde cambia tanto en magnitud como en dirección, alterando la forma final de la viga deformada en comparación con la forma final del modelo original.

El valor de la carga axial que se registra en la viga, puede sugerir cierta respuesta a la aparente inutilidad de los resortes como modelo de los sistemas de apoyo de la viga. Esto debido a la facilidad con que puede apreciarse el siguiente hecho: en el modelo original, prácticamente todas las cargas están directamente aplicadas a la viga o en los nodos que la limitan, salvo una carga puntual horizontal que se aplica sobre la columna izquierda y que por su dirección, podría suponerse que tiene un efecto directo sobre la carga axial que debe soportar la viga. Como se ve en los resultados del modelo de la viga aislada, la carga axial y las reacciones horizontales en los apoyos involucran únicamente la carga aplicada en el nodo izquierdo, repartiendo en cada nodo las reacciones que equilibran esa fuerza. Esto significa que el nuevo modelo ha ignorado completamente los efectos de las cargas que se encuentran fuera del elemento en estudio, pero que en su posición original tienen un determinado efecto sobre el subsistema al actuar en los miembros que se suponen unidos rigidamente con él.

Esta situación obliga a percibir el modelado de sistemas de apoyo basado en resortes como condición de frontera no homogénea, como una opción que no puede considerarse totalmente válida por sí sola, ya que la representatividad que ofrece el modelo respecto a la estructura original de acuerdo a los resultados obtenidos es muy baja. La participación de las cargas ajenas al subsistema modelado y que afectan su comportamiento general es ignorada por el modelo con resortes; sin embargo, por lo que se refie-

re a la respuesta propia del subsistema, los resortes no la alteran, por lo menos en su tipo, lo cual puede interpretarse, hasta cierto punto y tomando en cuenta las reservas ya mencionadas, como una representación aceptable de los sistemas de apoyo (en este caso las columnas) mediante los resortes con su respectiva rigidez asociada.

Modelo de viga con desplazamientos impuestos. En este modelo se aplican los desplazamientos nodales obtenidos del análisis inicial en los nodos extremos de la viga aislada pretendiendo reproducir el estado de esfuerzos original, es por ello que en este caso no se puede obtener ninguna información adicional de los resultados en cuanto a la configuración deformada, aun si se hubiese desplazado solamente uno de los nodos dada la simpleza de la subestructura; esto habría orillado a un modelo menos representativo en el que sólo uno de sus nodos se desplaza y el otro sigue una trayectoria similar dada la rigidez de la viga, presentándose la misma traslación de todos los puntos materiales del elemento y por lo tanto, de toda la viga.

Para este caso, a diferencia del modelo con resortes, los resultados son más alentadores en cuanto a elementos mecánicos; la similitud es evidente para todas las secciones en que se determinaron tanto fuerza axial como fuerza cortante y momento flexionante (tabla 5.9a).

El máximo error relativo entre momentos flexionantes de una misma sección es menor al 1%, lo cual es indicador de que por lo menos hasta este punto, el modelado con el uso de los desplazamientos como condiciones de frontera no homogéneas es mucho más representativo que la opción de los resortes. Esto permite suponer que los desplazamientos presentan mayor similitud con respecto al modelo original debido a que son resultado directo de la combinación entre el sistema de cargas y la rigidez de los miembros estructurales en el modelo original, por lo que al trasladarlos hacia el nuevo modelo de viga aislada su efecto es más notorio que el de los resortes.

Hay que recordar que cuando en los diferentes grados de libertad se imponen los desplazamientos, se restringe cualquier posibilidad de desplazamiento posterior, por lo que para ese grado de libertad el nodo se convierte en uno de apoyo en la condición de empotramiento. Es por ello que los resultados de las reacciones en los nodos ofrecen también información acerca del estado en que se encuentra la viga y en el que se encontraba al formar parte del marco.

En las reacciones generadas en los nodos en cuanto a fuerzas en las direcciones X y Y (tabla 5.9c, fig. 5.2), se puede notar que aquellas en sentido Y son exactamente iguales a las reacciones en los nodos de apoyo del modelo original, esto debido a que en los dos modelos se tiene un sistema de cargas idéntico en esa dirección, es decir, este sistema no se alteró al pasar de un modelo a otro, por lo que las reacciones verticales fueron las mismas destinadas a equilibrar la estructura. Dichas reacciones corresponden a las cargas axiales que soportaban las columnas iniciales y por lo tanto, se transmiten como fuerza cortantes sobre la viga a través del nudo rígido que las unía en el modelo original.

Respecto a la dirección X, las reacciones en los nodos se equilibran entre ellas al no existir una fuerza externa en esa dirección y su valor corresponde al de la fuerza axial de la viga tanto aislada como cuando formaba parte del marco. Al estar integrada en la estructura original, esa fuerza axial se traslada hasta el nodo de apoyo en la base de la columna derecha empotrada y no se modifica por no existir fuerzas externas horizontales en la columna mencionada. Es por ello que las reacciones en el nodo 3 de la viga aislada resultan iguales a las del nodo 4 en el modelo original. Caso contrario de lo que sucede con los nodos 1 del modelo original y 2 del modelo de viga aislada, dado que en la columna que los une sí existe una fuerza externa sobre ella.

El análisis de los momentos flexionantes muestra también cómo las reacciones en los nodos de apoyo informan acerca del estado que guardaba la subestructura. Los momentos de reacción que ahora se tienen, son aquellos que en la estructura original eran aplicados sobre las secciones extremas de la subestructura, es decir, son los momentos flexionantes en las secciones próximas a los nodos que unían a la viga con las columnas y por lo tanto, los que se aplicaban sobre éstas (tomando en cuenta la presencia de un momento externo en la columna de la derecha), lo cual permite identificar completamente el estado en que se encontraba la viga y su entorno.

Esto demuestra la capacidad de imponer desplazamientos para representar las condiciones de la subestructura antes de ser aislada, dado que esas reacciones equivalen a las fuerzas necesarias para llevar al nodo hasta la posición que obligadamente ha alcanzado, fuerzas que resumen la existencia previa de todo un sistema de cargas que indujeron esos desplazamientos.

5.2.2 Marco en el espacio

Para este ejemplo, los resultados del análisis con el modelo original se encuentran en la tabla 5.3. En este caso se definieron dos tipos de subestructuras; los resultados del análisis con resortes como sistemas de apoyo para la subestructura 1 se encuentran en la tabla 5.10 y para la subestructura 2 en la tabla 5.11.

Por otro lado, los resultados con la condición de desplazamientos impuestos se encuentran en la tabla 5.12 para la subestructura 1 y en la tabla 5.13 para la subestructura 2.

Modelo de marco en el espacio con resortes. Existe una alta similitud entre los resultados obtenidos en el modelo original y los que se presentaron al hacer el análisis de la subestructura 1 en lo que se refiere a los desplazamientos y las fuerzas y reacciones aplicadas en los nodos (error relativo máximo de 0.1% para desplazamientos y de 0.03% para fuerzas, tabla 5.10).

Con excepción del giro del nodo 7 alrededor del eje X, prácticamente todos los desplazamientos de los nodos en la subestructura 1 son similares a los que se presentaron en el modelo original (tabla 5.3). Dicho giro corresponde a la torsión que se presenta en el elemento número 5 (fig. 5.4), que es la trabe que liga los marcos del modelo original. Entre los resultados de ambos modelos existe una diferencia notable, la cual representa un error relativo de poco menos del 75%. Esta discrepancia se puede atribuir a que el resorte asociado al grado de libertad no logra representar la condición de rigidez asociada al giro torsional. Dado que el giro presentado en el modelo aislado de la subestructura 1 es menor al ocurrido en el modelo original, podría suponerse que los demás resortes tienen cierta contribución (que no ofrecían los elementos estructurales en el modelo primario) para reducir la rotación del nodo.

Por otro lado, las fuerzas que se presentan en el nodo 7 se deben a que ahora, con la inclusión de los resortes, se le ha convertido en un nodo de apoyo, por lo que las reacciones que se presentan en él equilibran el sistema de cargas de la subestructura aislada. Dado que en el modelo original dicho nodo estaba en completo equilibrio, cabe suponer que las reacciones que ahora se presentan equivalen a la superposición respectiva de los elementos mecánicos en los dos miembros que se quitaron y que, en determinado momento, sirvieron para mantener el equilibrio en el nodo.

Respecto a los elementos mecánicos, para todos los elementos estructurales se presentan prácticamente las mismas magnitudes que se obtuvieron en el modelo original, tanto de fuerzas axial y cortante como de momentos flexionante y de torsión excepto por un caso (el máximo error relativo es de 0.06%, tabla 5.10) . Para estos elementos mecánicos, la excepción se presenta en el momento torsionante del elemento número 5, en el cual se encuentra el nodo para el cual no se logra reproducir el giro torsional del modelo original (en este elemento mecánico el error relativo es de 126%). Dado que la determinación de la matriz de rigideces y la solución del sistema de ecuaciones para obtener los desplazamientos no impuestos preceden al cálculo de los elementos mecánicos, es que esta diferencia era esperada, y por lo tanto, en el fondo tiene la misma causa del giro torsional.

Revisando ahora la segunda subestructura, puede verse cómo la similitud tanto en elementos mecánicos como en fuerzas, reacciones y desplazamientos desaparece en todos los elementos. Para los elementos mecánicos el intervalo de errores relativos abarca desde 4% hasta 140%; para los desplazamientos de 3% hasta 126% y para las fuerzas y reacciones de 3% hasta 136% (tabla 5.11).

El objetivo de estudiar otra subestructura, es medir hasta qué punto se pueden usar los resortes como condiciones de frontera para delimitar el subsistema. Es decir, dado que la subestructura puede comprender desde un miembro hasta prácticamente todo el sistema estructural, los puntos de frontera pueden estar colocados en cualquier nodo del mismo. Sin embargo, como se vio en el caso de la viga simple, la participación de las cargas que se encuentran fuera del subsistema en estudio es muy importante para lograr en éste el comportamiento deseado. Es por ello que se plantea la interrogante de hasta qué grado es factible usar los resortes como condición de frontera de tal forma que se logre trasladar los efectos de las cargas externas al subsistema.

Es evidente que en la medida en que se reduzca la complejidad de la subestructura, es decir, mientras más se le aisle del sistema principal, las cargas aplicadas en los otros subsistemas dejarán de actuar sobre ella provocando que su respuesta no sea la misma que se presenta en el modelo original. Para esta segunda subestructura, puede verse en la tabla 5.11 que los efectos de las cargas fuera del plano del marco son prácticamente ignoradas anulando los elementos mecánicos asociados a esas condiciones de carga.

Si se recuerda que para el caso de la viga simple se ignoró el efecto de una carga que estaba en el plano del marco (sistema principal) pero fuera de la subestructura en estudio, se puede concluir que el dilema, más que ser un problema asociado a la dimensionalidad del análisis, se relaciona con cada caso de manera individual. El caso de la viga es más simple que el de la estructura en tres dimensiones y su limitación fue inmediata. El segundo caso es más complejo y permitió el estudio de una subestructura en tres dimensiones de manera muy aceptable, por lo que tal vez la forma en que se usan los resortes también tenga que ver con la complejidad del problema.

Lo que se puede extraer de estas observaciones, es que para algún modelo en particular probablemente se tenga que recurrir al ensayo continuo de los modelos y sus diferentes posibilidades. Es decir, se podrían aplicar diferentes pruebas mediante ensayo y error (en la medida en que el tiempo y los recursos involucrados lo permitan) hasta encontrar el modelo que mejor represente a la subestructura y que otorgue las facilidades en cuanto a construcción y análisis del modelo que con el artificio de los resortes se pretenden obtener.

Modelo de marco en el espacio con desplazamientos impuestos. En lo referente al uso de los desplazamientos como condiciones de frontera no homogéneas, las reacciones y fuerzas aplicadas en los nodos sí son iguales a los resultados del modelo de la estructura general (errores relativos de prácticamente 0%, tablas 5.3 y 5.12), lo que revela que la combinación de las cargas propias de la subestructura y la rigidez general de ésta son adecuadamente representadas por las condiciones impuestas y no se afectaron por los elementos estructurales que se eliminaron para aislar el subsistema.

Al igual que en el caso de los resortes, para el nodo en que se impusieron las condiciones de frontera se tiene ahora un conjunto de reacciones que son equivalentes a las fuerzas que en su momento manifestaron los elementos que no pertenecen al subsistema y equilibran al nodo (tabla 5.12). Puede verse que dichas reacciones son similares a las que aparecieron en la opción del uso de resortes salvo por el momento alrededor del eje X, que como se aclaró, no muestra similitud con los resultados del modelo principal. Referente a los elementos mecánicos, todos ellos son similares a los resultados del modelo original (error relativo máximo de 0.01%).

Revisando la segunda subestructura, a diferencia del análisis con los resortes, la bondad del modelo sigue siendo alta para estudiar el nuevo subsistema (errores relativos de prácticamente 0%, tabla 5.13).

Al igual que en la imposición de desplazamientos en el nodo 7, se presenta un nuevo conjunto de reacciones que también buscan equilibrar el sistema. Obviamente, las reacciones son diferentes, ya que ahora es otro el miembro estructural unido al subsistema y por lo tanto, otros los elementos mecánicos que se transmitieron a él en la estructura principal.

A diferencia de la subestructura 2 con resortes, se ha notado que el uso de los desplazamientos es mucho más flexible para escoger el subsistema que permita lograr los fines del análisis y no sólo eso, sino que su efectividad, por los casos hasta ahora mostrados, pareciera ser mucho mayor que la opción de los resortes.

5.2.3 Elemento estructural tipo de un puente de tridilosa

Para este caso, sólo se revisará el comportamiento de la subestructura usando la imposición de desplazamientos, ya que ha demostrado mayor efectividad en el análisis que el estudio mediante resortes. A diferencia de los casos anteriores en que los archivos de resultados se integraron con desplazamientos, fuerzas aplicadas y reacciones en los nodos y elementos mecánicos, en este caso los resultados a comparar son las fuerzas que se generan sobre los perfiles estructurales en los nodos extremos de los elementos finitos que simulan cada perfil.

Lo anterior se debe a la dificultad que representa la lectura de elementos mecánicos en estructuras tridimensionales dado que, por estar referidos a los ejes locales de cada elemento, no se pueden asociar fácilmente con los ejes globales de tal forma que para todos los elementos se tenga un sistema de referencia común y se pueda hacer una comparación adecuada. Es aun más complicado si se pretende comparar dos estructuras orientadas de manera diferente. Los elementos mecánicos, sin embargo, si pueden usarse sin mayor dificultad para realizar algunos comentarios propios de la estructura en que se presentan.

Para salvar esta dificultad se ha recurrido a la posibilidad que ofrece el programa SAP90 para leer las fuerzas sobre los elementos referidas al sistema de ejes globales y

no al sistema local de cada elemento. La segunda dificultad se resuelve orientando de manera similar las estructuras que se quieren comparar.

En este caso se comparó una de las piñas del modelo del tramo lateral del puente *Palo Blanco* con el modelo de esa piña completamente aislada. Para ello se orientó el nuevo modelo de manera similar a las piñas que se encuentran en el puente. De este modo se tiene un sistema de referencia común para todas las piñas incluida la que se aisló. Las fuerzas que se aplican sobre los elementos en los nodos que limitan la piña seleccionada se muestran en la tabla 5.6. De dichos resultados se extraen los desplazamientos que se impondrán en los modelos de la piña; estos desplazamientos se muestran en la tabla 5.7 para los nodos en que se aplican.

Modelo de piña sin placa. De los resultados obtenidos para este modelo y que se presentan en la tabla 5.14 (fuerzas sobre los elementos en los nodos de la piña), puede verse que existe alta similitud entre las fuerzas que se aplican en los perfiles para este modelo y el del puente (tabla 5.6). Ningún resultado representa un error relativo mayor al 1%. En el caso de los momentos flexionantes también se puede afirmar que la similitud se conserva de manera importante (errores relativos de prácticamente 0%).

De los resultados de elementos mecánicos en los perfiles de la piña (tabla 5.15) puede verse que los valores de carga axial y momento flexionante son comparativamente mayores a los que se presentan de fuerza cortante y momento de torsión (diferencia de hasta 100% entre las fuerzas y de casi 130% para los momentos).

De esto se pueden desprender dos situaciones:

1) se confirma que estos elementos trabajan de manera importante a flexotensión o flexocompresión, por lo que su modelado con elementos finitos que emplean una formulación viga-columna (mediante la superposición de los efectos de elementos finitos VIGA y BARRA) es adecuada para representar su comportamiento; y

2) el hecho de que para la piña seleccionada la fuerza cortante sea tan pequeña, puede sugerir que para estos elementos estructurales es factible desprestigiar sus efectos; esto implica, además de ahorrar trabajo numérico, realizar un análisis más exacto, ya que los efectos de cortante suelen restar precisión a los resultados obtenidos cuando se emplean elementos finitos VIGA o BARRA, en los cuales se desprestigia este elemento mecánico para realizar su formulación.

Casos estudiados

Respecto a los desplazamientos en el nodo en que no se impusieron condiciones de frontera (nodo 5 a la mitad de la piña), también puede verse cómo las traslaciones y giros son los mismos que se presentaron en él cuando formaba parte del puente (errores relativos de 0%). Esto permite confirmar la idea expuesta para los otros ejemplos de que los desplazamientos otorgan independencia a la subestructura para responder conforme a las características geométricas y mecánicas de sus elementos. La selección y aplicación adecuada de las condiciones de frontera colaboran entonces para lograr un modelo representativo y una subestructura útil para los propósitos que se persiguen.

Aunque en cierta forma cumplieron con el objetivo para el que fueron creados (evaluar el comportamiento estructural del puente, ref. 16), los modelos de elementos finitos de las piñas en el tramo lateral del puente no representan con toda fidelidad la forma que en la realidad tienen esas estructuras, ya que la ausencia de la placa central y su importancia en el funcionamiento de la estructura no pueden ser despreciados. Para estudiar el efecto de esta placa en el comportamiento de la piña (y por lo tanto del puente) se propuso un segundo modelo en el que se incluye la placa de acero encargada de transmitir las cargas entre las zonas inferior y superior de la piña.

Modelo de piña con placa. Tomando como base los resultados del análisis con el modelo anterior, a este también se le impusieron los desplazamientos obtenidos del estudio del puente (tabla 5.7). Los resultados en cuanto a elementos mecánicos obtenidos se presentan en la tabla 5.16.

En lo que se refiere a los desplazamientos en el nodo número 5 del modelo de piña con placa (en cuyo centro se ubica este nodo), las traslaciones resultan prácticamente idénticas a las que se presentan en el modelo sin placa (máximo error relativo de 0.33%, tablas 5.7 y 5.17). No así en el caso de los giros, en los cuales se presentan diferencias bastante notables (error relativo máximo de aproximadamente 800%, tablas 5.7 y 5.17). Lo anterior puede atribuirse a la presencia de la placa y a que en ese nodo ya no se conectan los perfiles estructurales, por lo que tiene mayor libertad para girar sin las restricciones que le imponían las diagonales. Para el caso de las traslaciones, las rigideces de los perfiles y la placa permiten que éstas sean similares para las dos situaciones, con la piña aislada y formando parte del puente.

Esa rigidez de la placa es puesta en evidencia por los desplazamientos que se obtuvieron en los nodos que la limitan; algunos de esos desplazamientos (en el nodo

central y en los nodos de los bordes de la placa) se muestran en la tabla 5.17. Como puede verse en ella, los nodos se desplazan de manera similar al nodo central (nodo 5), y las diferencias pequeñas entre cambios de posición de nodos adyacentes indican que las deformaciones en la placa son lo suficientemente pequeñas para lograr que ésta se comporte como un cuerpo rígido. La suficiencia en rigidez de dicha placa sería motivo de otro tipo de estudios que escapan al alcance del presente, en los que se evalúe su capacidad de acuerdo a su geometría y la calidad de los materiales que la forman.

Respecto a los elementos mecánicos en los perfiles de la piña con placa (tabla 5.16) puede notarse un cambio importante en cuanto a sus magnitudes y una variación diferente entre fuerzas y momentos como se verá a continuación. En cuanto a la carga axial, ésta disminuye desde 3 hasta casi 18 veces respecto a los resultados del modelo anterior (tabla 5.15), lo cual puede deberse a que la placa toma cierta carga que antes recibía completamente cada perfil. Al estar conectados rigidamente placa y diagonales, estos transfieren parte de dicha carga. Los momentos flexionantes aumentan todavía más (desde 2 hasta casi 70 veces) a consecuencia de la rigidez que la placa proporciona al funcionar como sistema de apoyo.

A consecuencia de esas fuerzas que los perfiles transmitieron a la placa, ésta trabaja soportando esfuerzos cortantes principalmente, tanto en su plano como en su sección transversal. De hecho, esa es la función principal de la placa, por lo que debe ser diseñada para resistir ese elemento mecánico de manera eficiente.

El efecto de la rigidez de la placa se observa el diagrama de distribución de momentos flexionantes que se muestra en la figura 5.11. En ella puede observarse que, como era de esperarse, la concentración de momentos máximos ocurre alrededor de las zonas donde se conecta la placa con los perfiles; la variación súbita de estos momentos máximos en distancias relativamente pequeñas, pone de manifiesto los altos valores de fuerza cortante en esas zonas. En la fig. 5.11 se muestra la variación de momentos flexionantes en la dirección X, que es en la que circula el tráfico vehicular y, por lo tanto, en la que se presume que se presentan las máximas fuerzas cortantes. También es evidente la simetría que existe en cuanto a las respuestas de la placa, ya que tomando como eje de simetría a cualquiera de los ejes principales perpendiculares al eje normal de la placa, puede encontrarse que las respuestas a ambos lados de ese eje son similares.

5.3 Modelo de cimentación sobre apoyos elásticos

Ahora se presenta el uso que puede hacerse de las condiciones de frontera no homogéneas en el estudio de las cimentaciones. En esta parte se muestra el estudio de cimentaciones superficiales desde el punto de vista de vigas sobre apoyos elásticos.

En ciertos aspectos del análisis sísmico de edificaciones no se suele considerar los efectos que la cimentación induce en su comportamiento; sin embargo, en ciertos casos en que el suelo se ve sensiblemente afectado por la presencia de la estructura es necesario tomar en cuenta la interacción entre ambos, (ref. 13).

Dicha interacción involucra considerar la rigidez de un sistema suelo-estructura. En general, al considerar dicho sistema con una cimentación rígida se tienen seis grados de libertad asociados a esta última. En vista de ello se definen seis coeficientes de rigidez que representan la restricción que el suelo bajo una estructura opone a tales movimientos. Varios autores han propuesto coeficientes de rigidez que dependen de la forma de la cimentación y del tipo de análisis que se realice, ya sea estático o dinámico. Los resultados han demostrado que los valores de las rigideces utilizadas para los casos de excitación armónica son muy similares a los empleados para análisis de tipo estático (ref. 2). Sin embargo, para cualquiera de los dos casos las expresiones son complicadas y de uso restringido a casos particulares.

El problema de considerar a la cimentación como una viga rígida sobre apoyos elásticos ya había sido planteado desde hace tiempo. La solución propuesta por Winkler en 1867, conocida como "cimentación de Winkler" (ref. 12), consideraba a la cimentación como una cama o plancha de resortes. Bajo este enfoque, se busca que la presión no uniforme ejercida por el suelo sobre la cimentación se logre mediante la asignación de cierta rigidez finita a los resortes donde ésta se apoya; dicha rigidez depende de las características mecánicas propias del suelo.

El planteamiento de la ecuación diferencial representativa del fenómeno puede hacerse utilizando una ecuación propia de la mecánica estructural que involucra las deformaciones registradas en la viga y la carga distribuida. Considerando el esquema de la figura 5.13:

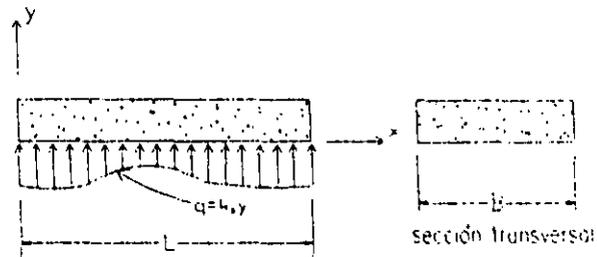


Figura 5.13 Cimentación rígida sobre apoyos elásticos

se tiene la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q = -k'_s y$$

donde E es el módulo de elasticidad del material de la cimentación; I es el momento de inercia de la sección transversal de la cimentación; y es el desplazamiento vertical de la cimentación; x es la distancia a lo largo de la cimentación donde se calculan los desplazamientos; q es la carga distribuida debida a la presión del suelo y $k'_s = k_s B$, donde k_s es el módulo o coeficiente de reacción y B es el ancho de la cimentación.

La solución de esta ecuación puede obtenerse de manera cerrada para casos particulares, aunque para ello se utilizan expresiones muy complejas. Sin embargo, a pesar de que se han generalizado las soluciones propuestas no se tiene una solución universal que permita dar respuesta a todos los casos que se presentan, (ref. 12).

Los principales inconvenientes de la solución de Winkler se refieren a la necesidad de usar ciertas simplificaciones para tomar en cuenta situaciones particulares, tales como restricciones de movimiento en algunos puntos, distintas condiciones de carga, cambios en las propiedades del suelo, etc. El uso del método del elemento finito para este mismo problema ha permitido plantearlo de manera más general y con la precisión deseada, pues elimina esos inconvenientes y permite obtener respuestas con alto valor práctico. Dada la importancia que conlleva resolver este tipo de problemas y la frecuencia con que ocurren, se han creado programas de cómputo diseñados especialmente para este tipo de propósitos.

De manera similar a la formulación que se hace en la mecánica estructural, la solución con elementos finitos se reduce a resolver un sistema de ecuaciones que rela-

cionan fuerzas con desplazamientos en la estructura. A esta ecuación matricial puede llegarse de manera análoga a como se hizo anteriormente; en este caso sólo se presenta la forma final de dicha ecuación. El proceso matemático para ello puede verse en la ref. 12.

El sistema de ecuaciones que debe resolverse es el siguiente:

$$X = [ASA^T]^{-1} P$$

donde X es el vector de desplazamientos nodales, P es el vector de fuerzas externas aplicadas en los nodos y el producto ASA^T es la llamada *matriz global*, que contiene los coeficientes del sistema de ecuaciones. Para el producto matricial anterior, la matriz A relaciona las fuerzas externas en los nodos de la estructura con las fuerzas internas generadas y sus coeficientes dependen únicamente de factores geométricos. La matriz S contiene los coeficientes que relacionan las fuerzas internas (en los miembros de la estructura) con las deformaciones internas. Estos valores dependen de condiciones tanto geométricas como mecánicas y para el caso de los problemas de geotecnia se involucran también las características del suelo.

Estas propiedades del suelo son las que interesan en mayor medida, especialmente el módulo de reacción k_s . Dicho módulo se define como la relación que existe entre la presión del suelo y el asentamiento correspondiente. Matemáticamente se expresa como:

$$k_s = \frac{q}{\Delta}$$

donde Δ es el hundimiento promedio para un incremento de presión.

El valor de k_s se determina mediante pruebas de laboratorio, por lo que la magnitud que se le asigne dependerá en gran medida de las condiciones en que se realicen éstas. Con estos elementos se puede abordar el ejemplo que se usará para verificar la aplicación de los resortes como condición de frontera no homogénea en el problema del análisis de una estructura sobre apoyos flexibles. Para ello se hará uso de un ejemplo incluido en la ref. 12.

5.3.1 Modelo de cimentación rígida sobre apoyos elásticos

El problema consiste en determinar las fuerzas y momentos que se generan en los nodos de la estructura así como las traslaciones y rotaciones que se presentan. La estructura estudiada consiste en una cimentación superficial que bien podría tratarse de una zapata aislada o corrida, o de una losa de cimentación a la que descargan fuerzas y momentos flexionantes mediante un par de columnas. La geometría de la estructura, cargas y propiedades mecánicas de la cimentación y del suelo se muestran en la fig. 5.12.

La solución que se obtiene en la ref. 12 se muestra en la tabla 5.18. El enfoque que aquí se le dará considera también la idea de la "cama de resortes" de Winkler, por lo que para los resortes que se colocan en cada nodo se calculan las rigideces asociadas. Para ello se requiere hacer ciertas consideraciones que se explican más adelante. Para resolver el problema se usarán elementos finitos VIGA, por lo que sólo se considerarán los grados de libertad referentes a los desplazamientos verticales y los giros alrededor del eje normal al plano de la figura.

Se utilizan 4 elementos de distinta longitud pero con las mismas secciones transversales y propiedades mecánicas. En cada nodo que une a elementos adyacentes se colocará un resorte como sistema de apoyo. El cálculo de sus rigideces se basa en el módulo de reacción.

Para cada resorte se considera la participación de un tramo de suelo a cada lado del mismo. La longitud de dicho tramo es la mitad de la longitud de cada elemento finito, es decir, se toma en cuenta una cierta área tributaria que consiste en la mitad del área en planta comprendida entre dos secciones ubicadas donde se encuentran los nodos. La rigidez asociada a esa área tributaria se calcula como el producto de esa área por el coeficiente de reacción. Para los resortes interiores se superponen las rigideces calculadas a ambos lados.

En el caso de los resortes exteriores, no se considera solamente la rigidez de su área tributaria sino que se duplica su valor. Esto se hace para representar con mayor precisión el hecho de que las presiones en el borde son mayores, lo que lleva a pensar que las rigideces de los extremos son más altas. La duplicación de los valores de rigidez

en los resortes extremos ha demostrado proporcionar mejores resultados (ref. 3). En la tabla 5.19 se muestra el cálculo de estas rigideces.

5.3.2 Resultados del modelo de cimentación rígida sobre apoyos elásticos

Los resultados se muestran en la tabla 5.20. Como puede verse, éstos no difieren de manera importante a los obtenidos de la ref. 12 (tabla 5.18); el hecho de que el máximo error relativo sea menor al 8% permite afirmar que el procedimiento aquí empleado es satisfactorio para conocer las respuestas de sistemas sometidos a estas condiciones de apoyo y de carga.

Estos resultados permiten reforzar la idea expresada anteriormente en el sentido de que los resortes usados como sistema de apoyo otorgan a la estructura (o subestructura) que sustentan la independencia necesaria para que ésta reaccione según sus propias condiciones geométricas, mecánicas y de carga.

6. Conclusiones y comentarios finales

El objetivo principal de este trabajo fue realizar el análisis estructural de un sistema con base en subestructuras más simples. Dicho análisis debe permitir conocer el comportamiento tanto del subsistema como de la estructura de la que procede. Para corroborar esto se debe recurrir a la información proporcionada por los resultados obtenidos en las pruebas de los distintos modelos.

Estos resultados sugieren conclusiones como las siguientes:

1) El análisis estructural de un sistema puede ser realizado tomando como base el comportamiento mostrado por las subestructuras que lo componen. Esta descomposición permite identificar y considerar de manera más detallada las características físicas de las subestructuras, de tal forma que se puede realizar un estudio más adecuado del comportamiento general del sistema.

2) El uso de las condiciones de frontera como un medio para ligar a cada subsistema con su entorno es un aspecto fundamental en este análisis. Dado que las respuestas que se presenten en cada subestructura están íntimamente ligadas con las condiciones de apoyo que se consideren, el uso apropiado de las condiciones de frontera permitirá dotar al subsistema de los elementos necesarios para reproducir su estado original, es decir, cuando formaba parte del sistema principal. Mediante dichas condiciones de frontera se "recuerda" a la subestructura las propiedades físicas y mecánicas de los subsistemas restantes así como las cargas que actúan sobre ellos.

3) Al estar los puntos de frontera ubicados en las uniones entre distintas subestructuras, se convierten en transmisores de los efectos generados en cada subsistema hacia la estructura completa. El análisis realizado en cada subestructura permitirá entonces conocer el comportamiento general de la estructura de interés o viceversa. En los casos en que se puede generalizar el estudio de un solo subsistema (como es el caso de los puentes de tridilosa) la situación puede facilitarse en la medida en que se tengan en cuenta las causas y consecuencias de dicha generalización.

Conclusiones y comentarios finales

Se revisaron dos condiciones de apoyo: resortes con rigidez finita y desplazamientos impuestos. A partir de los resultados obtenidos se pueden hacer los siguientes comentarios acerca de su efectividad como condiciones de frontera:

1) En general, la opción del modelado con resortes mostró ser poco representativa de las condiciones de apoyo de las subestructuras analizadas. Dada la poca similitud registrada entre los modelos de subestructuras con resortes y los modelos de las subestructuras en su estado original, no puede aceptarse esta opción como válida completamente. Los resultados obtenidos al comparar las tablas de resultados en todos los casos (tablas 5.1 y 5.8, y 5.3 y 5.10 respectivamente) demuestran que los resortes no transmiten íntegramente los efectos de los subsistemas en la vecindad de la subestructura en estudio.

2) La deficiencia principal del modelado con resortes, es que ignora por completo las cargas que se encuentran aplicadas en los miembros de la estructura principal, pero fuera de la subestructura de interés. No importa que estas cargas y los elementos estructurales se encuentren en un mismo plano en la estructura original, al aislar el subsistema los resortes no le transmiten los efectos de las cargas ajenas a éste. Dicha situación se manifiesta tanto en los desplazamientos como en los elementos mecánicos obtenidos. Esto es suficiente para considerar que el nuevo modelo no es representativo del problema en estudio. Sin embargo, esta opción mostró ser útil en el caso en que se estudia cimentaciones desde el punto de vista de vigas sobre apoyos elásticos; dado que la viga siempre es considerada como la estructura principal y como su única subestructura, el sistema de cargas no se altera, por lo que la independencia relativa otorgada por la rigidez de los resortes es suficiente para estudiar de manera eficaz este tipo de casos.

3) De los modelos de subestructuras para el marco tridimensional (tablas 5.10 y 5.11), puede extraerse que la bondad del modelado con resortes se va perdiendo conforme se aísla más a la subestructura de su estructura principal. El nivel de este aislamiento progresivo (es decir, de la estructura completa hacia sus formas más sencillas) depende del grado de complejidad que tenga el sistema principal. Esto impide establecer parámetros fijos con los cuales se pueda evaluar si el modelo ha perdido representatividad, y obliga a que cada caso sea considerado de manera individual, recurriendo a la

experiencia de quien elabora los distintos modelos y a diferentes pruebas con ellos antes de aceptar completamente la validez de alguno.

4) Para el caso de los desplazamientos impuestos se obtuvo una buena similitud entre los resultados de los modelos de las subestructuras aisladas y los de las estructuras originales (tablas 5.1 y 5.9, y 5.3 y 5.12 respectivamente). Para todos los elementos estructurales, los elementos mecánicos son prácticamente idénticos, lo cual permite aceptar que el estado de esfuerzos a que se ve sometida la subestructura es el mismo en las dos condiciones: al estar aislada y al formar parte de la estructura principal. Esto puede atribuirse a que los desplazamientos son el resultado de la combinación directa entre el sistema de cargas y la rigidez de los miembros estructurales, por lo que al trasladarlos hacia el nuevo modelo del subsistema aislado tienen un efecto mucho más representativo del entorno de la subestructura.

5) La aplicación del método del elemento finito para llevar a cabo este tipo de estudios es de suma importancia dada la gran cantidad de variables que deben controlarse para representar adecuadamente el problema físico. Su uso como herramienta de análisis permite considerar tanto las características geométricas y mecánicas de los elementos estructurales como las condiciones de sustentación que, en cierto modo, gobiernan la naturaleza de este estudio. Su disponibilidad a través de distintos programas de cómputo es una ventaja relevante que apoya su utilización, independientemente de la ya demostrada efectividad en cuanto a resultados obtenidos. Su versatilidad puede explotarse mejor si se conocen adecuadamente las diferentes opciones de elementos finitos que se encuentren disponibles en los distintos programas creados para ello.

Finalmente, para lograr resultados más satisfactorios, la aplicación del método debe ir acompañada del criterio ingenieril que permita juzgar desde la bondad y fidelidad del modelo empleado, hasta la correcta interpretación de los resultados, de tal forma que toda la carga numérica pueda llevarse a una realidad concreta. De no ser así, se corre el riesgo de ejecutar soluciones inadecuadas a causa de la elaboración incorrecta de un modelo que represente el problema físico, o bien, de la interpretación equivocada de los resultados generados por la computadora, y con ello, transformar al método del elemento finito en una *panacea* y a quien lo aplica en una herramienta.

APÉNDICE 1

Solución de un problema de flujo con potencial mediante el método del elemento finito

El problema de un flujo con potencial puede ser resuelto de diferentes maneras, ya sea con métodos analíticos, numéricos, gráficos o con pruebas de laboratorio. El método del elemento finito se encuentra entre los diversos métodos numéricos que pueden usarse para resolver este problema. El análisis de un flujo, ya sea bidimensional o tridimensional, basado en la existencia de una cierta función de potencial proporciona una aproximación más real que los otros tipos de soluciones en la mayor parte de los casos. Mediante este análisis es posible conocer de manera más precisa la distribución de velocidades y presiones a través de un conducto.

Este tipo de análisis está basado en la existencia de un modelo matemático llamado flujo con potencial; esto es, existe una función escalar $\phi(x,y,z)$ tal que la velocidad en cada punto es $v = \text{grad } \phi$, o sea:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Al calcular las componentes del campo vectorial rotacional (que evalúa la rotación o vorticidad de una partícula dentro del flujo) con las expresiones anteriores, se llega a que $\text{rot } v = \text{rot } \text{grad } \phi = 0$, lo cual significa que la existencia de un potencial de velocidades está limitada a los casos de flujo irrotacional. En general, el movimiento de un fluido ideal se puede considerar irrotacional si se exceptúa la presencia de singularidades vorticosas debidas principalmente a los efectos de la viscosidad del fluido, lo cual se logra mediante la propia hipótesis acerca del fluido ideal o perfecto (definido como aquel que se comporta como incompresible y no viscoso). Sin embargo, el flujo irrotacional por sí mismo ocurre con bastante frecuencia en los problemas de la práctica.

La existencia del potencial ϕ en un flujo incompresible donde $\text{div } v = 0$ (hipótesis de flujo uniforme), implica que $\text{div } \text{grad } \phi = 0$, es decir, la función ϕ , es una solución de la ecuación de Laplace, esto es, se cumple:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Para un flujo bidimensional la ecuación de Laplace se reduce a:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

La integración de la ecuación de Laplace en un flujo para obtener la función que la resuelve en cada punto dentro del campo, debe satisfacer un conjunto de condiciones de frontera.

Mediante el cálculo variacional, se sabe que la solución a la ecuación de Laplace puede ser obtenida mediante la minimización del funcional:

$$D(\phi) = \iint \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

Con base en la técnica de elementos finitos, tenemos que los grados de libertad pueden interpretarse como los potenciales de velocidad en cada nodo del elemento finito que se usa para aproximar la solución. Para este caso, dicha aproximación se hará con elementos finitos de forma triangular como se muestra en la figura A. 1:

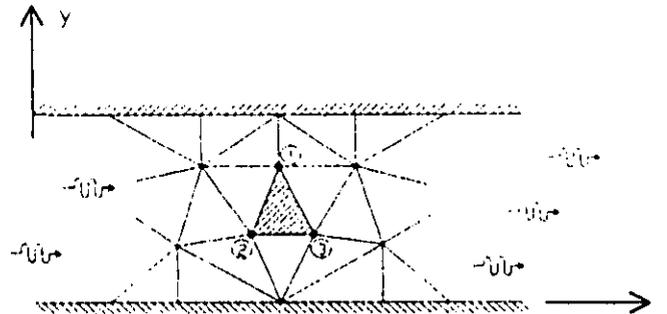


Figura A.1 Malla de elementos finitos triangulares en un conducto

Con la malla anterior, puede lograrse que todo el espacio donde interesa evaluar el potencial de velocidades sea cubierto por los elementos finitos triangulares, lo que permite, por un lado, tener mayor precisión en los cálculos, y por otro, conocer la distribución del potencial de velocidades en más puntos del espacio.

De acuerdo con el sistema de coordenadas indicado, se propone como función de aproximación según la técnica de Rayleigh-Ritz a:

$$\phi = a_1 + a_2x + a_3y$$

que con base en la figura anterior se llega al sistema de ecuaciones:

$$\phi_1 = a_1 + a_2x_1 + a_3y_1$$

$$\phi_2 = a_1 + a_2x_2 + a_3y_2$$

$$\phi_3 = a_1 + a_2x_3 + a_3y_3$$

el cual se resuelve para a_1 , a_2 y a_3 en términos de ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 (valores nodales), con lo que la función de aproximación queda en función de estos valores nodales, lo que se expresa como $\phi = f(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Además, se tiene que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = a_2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = a_3$$

por lo que el funcional $D(\phi)$ queda expresado en términos de ϕ_1 , ϕ_2 , y ϕ_3 , procediendo a la minimización del funcional. Se tiene que $a_2 = f(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ y $a_3 = g(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, entonces, si en el funcional se sustituye con a_2 y a_3 :

$$D(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \iint_A [a_2^2 + a_3^2] dx dy = (a_2^2 + a_3^2)A$$

y para tener el potencial mínimo, se debe cumplir que $\frac{\partial D}{\partial \phi_i} = 0$, por lo que al derivar par-

cialmente la expresión integrada con respecto a los valores nodales del potencial resulta:

$$\frac{\partial D}{\partial \phi_i} = \left(2a_2 \frac{\partial a_2}{\partial \phi_i} + 2a_3 \frac{\partial a_3}{\partial \phi_i} \right) A = 2A \left(a_2 \frac{\partial a_2}{\partial \phi_i} + a_3 \frac{\partial a_3}{\partial \phi_i} \right) = 0$$

que dará lugar al sistema de ecuaciones que nos permita conocer los valores de ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 que dan solución al problema de minimización del funcional y que por lo tanto, son soluciones numéricas de la ecuación de Laplace. Con estos potenciales se puede conocer los valores de los coeficientes de la aproximación a_1 , a_2 y a_3 que nos permitan otorgar a la función de aproximación empleada su forma definitiva que conduzca a la interpolación de otros valores del potencial de interés, (ref. 9).

Para el ejemplo anterior sólo restaría considerar todos los demás elementos finitos triangulares que integran la malla en el fluido y proceder como se ha hecho para conocer el potencial del flujo en todo el conducto.

REFERENCIAS

1. MELI, R.; *Diseño Estructural*; Edit. LIMUSA; México D.F.; 1995.
2. AU, T. y Christiano, P.; *Structural Analysis*; Prentice-Hall Inc.; NJ, E.U.A.; 1987.
3. COOK, R., Malkus, D. y Plesha, M.; *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*; John Wiley & Sons, Inc.; NY, E.U.A.; 3a. ed., 1989.
4. STRANG, G. y Fix, G.; *An Analysis of the Finite Element Method*; Prentice-Hall, Inc.; NJ, E.U.A.; 1973.
5. SEGERLIND, L.; *Applied Finite Element Analysis*; John Wiley & Sons, Inc.; E.U.A.; 2a. ed.; 1984.
6. GÓMEZ, R.; *Apuntes del curso de Introducción al Método de Elementos Finitos*; Facultad de Ingeniería, UNAM; 1998.
7. WILSON E. y Habibullah, A.; *SAP90. Users Manual*; Computers and Structures Inc.; Berkeley, CA, E.U.A.; 1995.
8. BRAUER, J.; *What every Engineer should know about Finite Element Analysis*; Marcel Dekker Inc.; NY, E.U.A.; 1988.
9. SOTELO, G.; *Hidráulica General* Volumen 1; Edit. LIMUSA; México D.F., 1995.
10. LOGAN, D.; *A First Course In the Finite Element Method using ALGOR*; PWS Publishing Company; MA, E.U.A.; 1997.
11. MURRIETA, A.; *Aplicaciones de la Estática*; Edit. LIMUSA; México D.F.; 1990.
12. BOWLES, J.; *Foundation Analysis and Design*; McGraw-Hill, Inc.; E.U.A.; 1977.
13. BAZÁN, E. y Meli, R.; *Diseño Sísmico de Edificios*; Edit. LIMUSA; México D.F.; 1998.
14. *Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo*; Departamento del Distrito Federal; México D.F.; 1993.
15. VALLEJO, A.; *Tridésicas y estructuras tridimensionales*; Conferencia impartida el día 9 de Octubre de 1996 en la ciudad de Guadalajara Jalisco, México.
16. GÓMEZ, R., Muñá-Vila, D., Sánchez, R. y Escobar, J.A.; *Evaluación de la seguridad estructural de las superestructuras de los puentes Palo Blanco y Xalostoc*; Instituto de Ingeniería, UNAM; México D.F.; 1996.

TABLAS

a)

ELEMENTOS MECÁNICOS*			
Distancia* desde el nodo 2	Fuerza axial	Fuerza cortante Plano 1-2	Mto. flexionante Plano 1-2
0		3.67	184.16
100		0.67	450.89
133.4	-2.97	0.00	462.02
400		-8.33	-248.93
500		-8.33	-982.19

b)

DESPLAZAMIENTOS NODALES*			
Nodo**	U(x)	U(y)	R(z)
2	0.308	-0.007	-0.0007
3	0.302	-0.015	-0.0003

c)

REACCIONES Y FUERZAS EN LOS NODOS*			
Nodo	F(x)	F(y)	M(z)
1	-4.03	3.67	628.11
2	4.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	-500.00
4	-2.97	8.33	557.54

* Distancias y desplazamientos en cm, giros en rad, fuerzas en t y momentos en t-cm

** Los nodos 1 y 4 están empotrados, por lo que no presentan desplazamientos

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.2

Tabla 5.1 Resultados del análisis para el modelo de viga original; a) elementos mecánicos; b) desplazamientos nodales; c) reacciones y fuerzas en los nodos

Nodo	Rigidez*	Fuerza ó Momento*	Desplazamiento*	$k, ^\circ$
2	Axial	2.97	0.308	9.65
	Cortante	3.67	-0.007	543.22
	Flexión	184.16	-0.0007	274865.67
3	Axial	2.97	0.302	9.82
	Cortante	8.33	-0.015	542.67
	Flexión	982.19	-0.0003	3597765.57

* Desplazamientos en cm, giros en rad, fuerzas en t, momentos en t-cm
y rigideces en t/cm ó t-cm/rad

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.2 y la tabla 5.1

Tabla 5.2 Cálculo de rigideces de resortes para el modelo de viga aislada

a)

ELEMENTOS MECÁNICOS*							
Elemento	Distancia ⁱ	Fuerza axial	Fuerza cortante Plano 1-2	Mto. flexionante Plano 1-2	Fuerza cortante Plano 1-3	Mto. flexionante Plano 1-3	Momento torsionante
1	0		0.96	-415.54	-2.94	683.68	
	700	-35.53	-0.96	-1067.90	-2.94	-1373.41	-1.74
2	0		6.65	-2146.34	-0.17	116.81	
	700	-26.86	6.65	2509.25	-0.17	-4.45	0.22
3	0		14.64	-1086.81	0.17	-173.01	
	300		3.64	1665.22	0.17	-121.04	
	421.3	-6.65	0.00	2176.04	0.17	-100.02	4.45
	700		-10.36	1011.20	0.17	-51.75	
4	0		7.50	-937.50	0.00	0.00	
	250	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0		20.89	-1377.87	-1.89	174.75	
	300		9.89	3539.56	0.31	-332.36	
	629.7	-7.11	0.00	5170.15	0.31	-230.26	1.09
	900		-10.11	4074.27	2.31	-146.55	
	1200		-19.11	-308.31	2.31	546.34	

d)

DESPLAZAMIENTOS NODALES*						
Nodo**	U(x)	U(y)	U(z)	R(x)	R(y)	R(z)
3	0.063	3.201	-0.112	-0.0108	-0.0462	-0.0144
4	3.508	3.171	-0.085	0.0026	0.0074	0.0018
5	3.052	3.171	0.233	0.0010	0.0074	0.0018
7	-0.014	0.008	-9.527	-0.0262	0.0340	0.0057

c)

REACCIONES Y FUERZAS EN LOS NODOS*						
Nodo***	F(x)	F(y)	F(z)	M(x)	M(y)	M(z)
1	-2.94	0.96	35.53	415.54	-683.68	1.74
2	-0.17	-6.65	26.86	2146.34	-116.81	-0.22
3	-4.00	4.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6	-0.73	-3.44	20.23	6356.77	-5.76	120.04
8	7.84	1.13	29.88	5.56	-9055.30	150.12

* Distancias desde el nodo i de cada elemento, en cm; traslaciones en cm, giros en rad, fuerzas en t y momentos en t-cm

** Los nodos 1, 2, 6 y 8 están empotrados, por lo que no presentan desplazamientos

*** En los nodos 4, 5 y 7 no se aplican cargas ni son nodos de apoyo, por lo que no se generan reacciones en ellos

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.9

Tabla 5.3 Resultados del análisis para el modelo de marco tridimensional original; a) elementos mecánicos; b) desplazamientos nodales; c) reacciones y fuerzas en los nodos

NODO 7			
Rigidez*	Fuerza ó Momento*	Desplazamiento*	k_i *
Axial	7.11	-0.0141	503.47
Cortante 1-2	19.11	-9.5271	2.01
Cortante 1-3	2.31	0.0078	297.83
Flexión 1-2	546.34	0.0057	95048.71
Flexión 1-3	308.31	0.0340	9068.47
Torsión	1.09	-0.0262	41.53

* Desplazamientos en cm, giros en rad, fuerzas en t, momentos en t-cm y rigideces en t/cm ó t-cm/rad

Las rigideces se asocian a los resortes ubicados en el extremo j del elemento 5 (nodo 7)

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.4 y la tabla 5.3

Tabla 5.4 Cálculo de rigideces para los resortes del modelo de la subestructura 1

NODO 3			
Rigidez*	Fuerza ó Momento*	Desplazamiento*	k_i *
Axial	1.69	3.2011	0.53
Cortante 1-2	20.89	-0.1120	188.46
Cortante 1-3	7.11	-0.0528	135.26
Flexión 1-2	1377.87	-0.0144	95951.95
Flexión 1-3	1.09	-0.0108	100.63
Torsión	174.75	-0.0452	3864.44

* Desplazamientos en cm, giros en rad, fuerzas en t, momentos en t-cm y rigideces en t/cm ó t-cm/rad

Las rigideces se asocian a los resortes ubicados en la unión de los elementos 1 y 3 (nodo 3)

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.6 y la tabla 5.3

Tabla 5.5 Cálculo de rigideces para los resortes del modelo de la subestructura 2

a)

FUERZAS SOBRE LOS ELEMENTOS EN LOS NODOS*							
Elemento**	Nodo**	F(x)	F(y)	F(z)	M(x)	M(y)	M(z)
8231	2791	-1.877	-1.883	-7.248	0.00	-0.007	0.002
	2831	1.877	1.883	7.252	0.00	-0.001	0.00
8232	2831	-1.562	-1.558	5.853	-0.001	0.001	0.00
	2811	1.562	1.558	-5.846	-0.001	-0.005	-0.002
8233	2792	-1.503	1.501	-5.776	0.00	-0.005	0.00
	2831	1.503	-1.501	5.783	0.001	0.001	-0.001
8234	2831	-1.806	1.801	6.760	0.001	0.00	0.001
	2812	1.806	-1.801	-6.754	0.00	-0.007	0.001
8307	2850	-1.899	1.868	7.031	0.004	-0.042	0.013
	2831	1.899	-1.868	-7.018	0.006	-0.007	0.003
8308	2831	-1.588	1.572	-6.050	0.001	0.002	-0.001
	2870	1.588	-1.572	6.063	0.002	-0.031	-0.007
8309	2851	-1.505	-1.487	5.609	-0.005	-0.029	-0.003
	2831	1.505	1.487	-5.596	-0.007	0.008	-0.006
8310	2831	-1.838	-1.816	-6.984	-0.001	-0.004	0.005
	2871	1.838	1.816	6.997	0.001	-0.039	0.006

b)

DESPLAZAMIENTOS NODALES*						
Nodo**	U(x)	U(y)	U(z)	R(x)	R(y)	R(z)
2791	0.0302	-0.0185	-0.0918	-0.0047	-0.0065	0.0011
2792	0.0306	-0.0176	-0.0960	-0.0043	-0.0069	0.0011
2811	0.0136	-0.0019	-0.0919	-0.0043	-0.0067	-0.0001
2812	0.0137	-0.0019	-0.0961	-0.0041	-0.0070	-0.0001
2831	0.0220	-0.0094	-0.0902	-0.0040	-0.0036	0.0003
2850	0.0306	-0.0170	-0.0850	-0.0043	-0.0069	0.0013
2851	0.0310	-0.0162	-0.0889	-0.0039	-0.0073	0.0012
2870	0.0130	-0.0018	-0.0852	-0.0040	-0.0069	-0.0001
2871	0.0131	-0.0018	-0.0890	-0.0038	-0.0072	-0.0001

* Desplazamientos en m, giros en rad, fuerzas en t y momentos en t-m

** La numeración de nodos y elementos finitos corresponde a la asignada en el modelo del tramo lateral del puente Palo Blanco (ref. 16)

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.9

Tabla 5.6 Resultados del análisis en la pila del modelo del tramo lateral del puente "Palo Blanco"; a) fuerzas sobre los elementos en los nodos; b) desplazamientos nodales

DESPLAZAMIENTOS NODALES*						
Nodo**	U(x)	U(y)	U(z)	R(x)	R(y)	R(z)
1	0.0302	-0.0185	-0.0918	-0.0047	-0.0065	0.0011
2	0.0306	-0.0176	-0.0960	-0.0043	-0.0069	0.0011
3	0.0136	-0.0019	-0.0919	-0.0043	-0.0067	-0.0001
4	0.0137	-0.0019	-0.0961	-0.0041	-0.0070	-0.0001
5	0.0220	-0.0094	-0.0902	-0.0040	-0.0036	0.0003
6	0.0306	-0.0170	-0.0850	-0.0043	-0.0069	0.0013
7	0.0310	-0.0162	-0.0889	-0.0039	-0.0073	0.0012
8	0.0130	-0.0018	-0.0852	-0.0040	-0.0069	-0.0001
9	0.0131	-0.0018	-0.0890	-0.0038	-0.0072	-0.0001

* Desplazamientos en m, giros en rad

** La numeración de nodos corresponde a la asignada en el modelo de la piña aislada
Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.10

Tabla 5.7 Desplazamientos a imponer en los nodos del modelo de piña aislada

a)

ELEMENTOS MECANICOS*				e _r (%)**	e _r (%)**	e _r (%)**
Distancia desde el nodo 2	Fuerza axial	Fuerza cortante Plano 1-2	Mto. flexionante Plano 1-2			
0		4.98	-123.15		36	167
100		1.98	275.14		196	39
133.4	-2	1.31	307.97	33	-	33
400		-5.02	-30.01		21	88
500		-7.02	-631.72		16	36

b)

DESPLAZAMIENTOS NODALES*				e _r (%)**	e _r (%)**	e _r (%)**
Nodo	U(x)	U(y)	R(z)			
2	0.207	-0.009	-0.0004	33	29	43
3	0.204	-0.013	0.00004	32	13	113

c)

REACCIONES Y FUERZAS EN LOS NODOS*				***		
Nodo	F(x)	F(y)	M(z)			
2	2.00	4.98	123.15	-	-	-
3	-2.00	7.02	-631.72	-	-	-

* Distancias y desplazamientos en cm, giros en rad, fuerzas en t y momentos en t-cm

** Se calculan como $\frac{|V_{real}-V|}{V_{real}} \times 100$, donde: V_{real} : valores del análisis en el modelo original (tabla 5.1)
V: valores del análisis en el modelo de viga aislada (tabla 5.8)

*** No se presentan errores relativos dado que estos resultados corresponden al sistema de cargas del nuevo modelo aislado, excluyendo las aplicadas fuera de la subestructura en el modelo original
Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.2 y la tabla 5.1

Tabla 5.8 Resultados del análisis para el modelo con resortes de viga aislada: a) elementos mecánicos; b) desplazamientos nodales; c) reacciones y fuerzas en los nodos

a)

ELEMENTOS MECÁNICOS*				e _r (%)**	e _r (%)**	e _r (%)**
Distancia desde el nodo 2	Fuerza axial	Fuerza cortante Plano 1-2	Mto. flexionante Plano 1-2			
0		3.67	183.88		0.00	0.15
100		0.67	450.73		0.00	0.04
133.4	-2.97	0.00	461.90	0.00	-	0.03
400		-6.33	-248.73		0.00	0.08
500		-8.33	-981.88		0.00	0.03

b)

REACCIONES Y FUERZAS EN LOS NODOS*				***		
Nodo	F(x)	F(y)	M(z)			
2	2.97	3.67	-183.88	-	-	-
3	-2.97	8.33	-981.88	-	-	-

* Distancias y desplazamientos en cm, giros en rad, fuerzas en t y momentos en t-cm

** Se calculan como $\frac{|V_{real}-V|}{V_{real}} \times 100$, donde: V_{real}: valores del análisis en el modelo original (tabla 5.1)
V: valores del análisis en el modelo de viga aislada (tabla 5.9)

*** No se presentan errores relativos dado que estos resultados corresponden al sistema de cargas del nuevo modelo aislado, excluyendo las aplicadas fuera de la subestructura en el modelo original. Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.2 y la tabla 5.1

Tabla 5.9 Resultados del análisis para el modelo con desplazamientos impuestos de la viga aislada; a) elementos mecánicos; b) reacciones y fuerzas en los nodos

a)

ELEMENTOS MECÁNICOS*							
Elemento	Distancia*	Fuerza axial	Fuerza cortante Plano 1-2	Mto. flexionante Plano 1-2	Fuerza cortante Plano 1-3	Mto. flexionante Plano 1-3	Momento torsionante
1	0		0.96	-415.65	-2.94	683.67	
	700	-35.53	-0.96	-1087.26	-2.94	-1373.40	-1.74
2	0		6.65	-2145.97	-0.17	116.81	
	700	-26.86	6.65	2508.88	-0.17	-4.45	0.22
3	0		14.64	-1087.54	0.17	-173.01	
	300		3.64	1954.82	0.17	-121.04	
	421.3	-6.65	0.00	2175.77	0.17	-100.02	4.45
	700		-10.36	1011.24	0.17	-51.75	
4	0		7.50	-837.50	0.00	0.00	
	250	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0		20.89	-1377.85	-1.69	174.75	
	300		9.89	3539.57	0.31	-332.35	
	629.7	-7.11	0.00	5170.16	0.31	-230.26	-0.28
	900		-10.11	4074.26	2.31	-146.55	
	1200		-19.11	-308.32	2.31	546.34	

b)

DESPLAZAMIENTOS NODALES*						
Nodo**	U(x)	U(y)	U(z)	R(x)	R(y)	R(z)
3	-0.053	3.200	-0.112	-0.0108	-0.0452	-0.0144
4	3.508	3.170	-0.085	0.0026	0.0074	0.0018
5	3.052	3.170	0.233	0.0010	0.0074	0.0018
7	-0.014	0.008	-9.526	-0.0068	0.0340	0.0057

c)

REACCIONES Y FUERZAS EN LOS NODOS*						
Nodo***	F(x)	F(y)	F(z)	M(x)	M(y)	M(z)
1	-2.94	0.96	35.53	415.65	-683.68	1.74
2	-0.17	-6.65	26.86	2145.97	-116.81	-0.22
3	-4.00	4.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	7.11	-2.31	19.11	0.28	-308.32	-546.34

* Distancias desde el nodo i de cada elemento, en cm; traslaciones en cm, giros en rad, fuerzas en t y momentos en t-cm

** Los nodos 1 y 2 están empotrados, por lo que no presentan desplazamientos

*** En los nodos 4 y 5 no se aplican cargas ni son nodos de apoyo, por lo que no se generan reacciones en ellos

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.5

Tabla 5.10 Resultados del análisis para el modelo con resortes de la subestructura 1 aislada: a) elementos mecánicos; b) desplazamientos; c) reacciones y fuerzas en los nodos

a)

ELEMENTOS MECANICOS***							
Elemento	Distancia*	e _r (%) Axial	e _r (%) Cortante 1-2	e _r (%) Flexión 1-2	e _r (%) Cortante 1-3	e _r (%) Flexión 1-3	e _r (%) Torsión
1	0		0.00	0.03	0.00	0.00	
	700	0.00	0.00	0.06	0.00	0.00	0.00
2	0		0.00	0.02	0.00	0.00	
	700	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
3	0		0.00	0.07	0.00	0.00	
	300		0.00	0.02	0.00	0.00	
	421.3	0.00	-	0.01	0.00	0.00	0.00
	700		0.00	0.00	0.00	0.00	
4	0		-	0.00	-	-	
	250		-	-	-	-	
5	0		0.00	0.00	0.00	0.00	
	300		0.00	0.00	0.00	0.00	
	629.7	0.00	-	0.00	0.00	0.00	125.69
	900		0.00	0.00	0.00	0.00	
	1200		0.00	0.00	0.00	0.00	

b)

DESPLAZAMIENTOS NODALES***						
Nodo**	e _r (%) U(x)	e _r (%) U(y)	e _r (%) U(z)	e _r (%) R(x)	e _r (%) R(y)	e _r (%) R(z)
3	0.01	0.02	0.00	0.04	0.00	0.00
4	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.02	0.01	0.10	0.00	0.00
7	0.03	0.01	0.01	74.03	0.00	0.00

c)

REACCIONES Y FUERZAS EN LOS NODOS***						
Nodo**	e _r (%) F(x)	e _r (%) F(y)	e _r (%) F(z)	e _r (%) M(x)	e _r (%) M(y)	e _r (%) M(z)
1	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00
3	0.00	0.00	-	-	-	-

* Distancias desde el nodo *i* de cada elemento, en cm.

** Los nodos 1 y 2 están empotrados, por lo que no presentan desplazamientos. En los nodos 4 y 5 no se aplican cargas ni son de apoyo, por lo que no se generan reacciones en ellos. Los errores relativos en el nodo 7 no tienen sentido, ya que antes era un nodo en equilibrio y ahora es de apoyo.

*** Se calculan como $\frac{|V_{real} - V|}{V_{real}} \times 100$, donde: V_{real} : valores del análisis en el modelo original (tabla 5.3)
V: valores del análisis en el modelo de subestructura 1 aislada (tabla 5.10)

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.5 y la tabla 5.3

Tabla 5.10 (Continuación) Errores relativos para los resultados del análisis en la subestructura 1; a) elementos mecánicos; b) desplazamientos nodales; c) reacciones y fuerzas en los nodos

a)

ELEMENTOS MECÁNICOS*							
Elemento	Distancia*	Fuerza axial	Fuerza cortante Plano 1-2	Mto. flexionante Plano 1-2	Fuerza cortante Plano 1-3	Mto. flexionante Plano 1-3	Momento torsionante
1	0	-9.71	-2.31	146.92	0.00	-1.08	0.00
	700		-2.31	-1472.52	0.00	0.22	
2	0	-26.09	5.30	-1585.39	0.00	-0.22	0.00
	700		5.30	2124.05	0.00	0.00	
3	0	-5.30	15.41	-1473.48	0.00	0.31	0.00
	300		4.41	1800.12	0.00	0.22	
	421.3		0.77	2067.62	0.00	0.18	
	700		-9.59	1164.84	0.00	0.09	
1000	-18.59	-3061.55	0.00	0.00			
4	0	0.00	7.50	-937.50	0.00	0.00	0.00
	250		0.00	0.00	0.00	0.00	

b)

DESPLAZAMIENTOS NODALES*						
Nodo**	U(x)	U(y)	U(z)	R(x)	R(y)	R(z)
3	-0.030	1.921	-0.031	-0.0096	-0.0001	0.0000
4	-0.007	1.897	-0.082	0.0039	-0.00002	0.0000
5	0.001	1.897	0.552	0.0023	-0.00002	0.0000

c)

REACCIONES Y FUERZAS EN LOS NODOS*						
Nodo***	F(x)	F(y)	F(z)	M(x)	M(y)	M(z)
1	0.00	2.31	9.71	-146.92	1.08	0.00
2	0.00	-5.30	26.09	1585.39	0.22	0.00
3	0.00	2.99	5.71	0.96	0.22	0.31

* Distancias desde el nodo i de cada elemento, en cm; traslaciones en cm, giros en rad, fuerzas en t y momentos en t-cm

** Los nodos 1 y 2 están empotrados, por lo que no presentan desplazamientos

*** En los nodos 4 y 5 no se aplican cargas ni son nodos de apoyo, por lo que no se generan reacciones en ellos

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.6

Tabla 5.11 Resultados del análisis para el modelo con resortes de la subestructura 2 aislada; a) elementos mecánicos; b) desplazamientos nodales; c) reacciones y fuerzas en los nodos

a)

ELEMENTOS MECÁNICOS***							
Elemento	Distancia*	e _r (%) Axial	e _r (%) Cortante 1-2	e _r (%) Flexión 1-2	e _r (%) Cortante 1-3	e _r (%) Flexión 1-3	e _r (%) Torsión
1	0		140.63	135.36	100.00	100.16	
	700	72.67	140.63	35.35	100.00	100.02	100.00
2	0		20.30	26.14	100.00	100.19	
	700	2.87	20.30	15.35	100.00	100.00	100.00
3	0		5.26	35.58	100.00	100.18	
	300		21.15	7.93	100.00	100.18	
	421.3	20.30	-	4.98	100.00	100.18	100.00
	700		7.43	15.19	100.00	100.17	
4	0		0.00	0.00	-	-	
	250		-	-	-	-	-

b)

DESPLAZAMIENTOS NODALES***						
Nodo**	e _r (%) U(x)	e _r (%) U(y)	e _r (%) U(z)	e _r (%) R(x)	e _r (%) R(y)	e _r (%) R(z)
3	43.77	39.98	72.68	11.63	99.88	99.98
4	100.20	40.16	2.87	46.41	100.20	101.75
5	99.96	40.16	137.13	125.94	100.20	101.75

c)

REACCIONES Y FUERZAS EN LOS NODOS***						
Nodo**	e _r (%) F(x)	e _r (%) F(y)	e _r (%) F(z)	e _r (%) M(x)	e _r (%) M(y)	e _r (%) M(z)
1	100.06	140.86	72.68	135.36	100.16	99.98
2	100.17	20.32	2.87	26.14	100.19	101.77

* Distancias desde el nodo *i* de cada elemento, en cm.

** Los nodos 1 y 2 están empotrados, por lo que no presentan desplazamientos. En los nodos 4 y 5 no se aplican cargas ni son de apoyo, por lo que no se generan reacciones en ellos. Los errores relativos en el nodo 3 no tienen sentido, ya que antes era un nodo en equilibrio y ahora es de apoyo.

*** Se calculan como $\frac{|V_{real}-V|}{V_{real}} \times 100$, donde: V_{real} : valores del análisis en el modelo original (tabla 5.3)
V: valores del análisis en el modelo de subestructura 2 aislada (tabla 5.11)

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.6 y la tabla 5.3

Tabla 5.11 (Continuación) Errores relativos para los resultados del análisis en la subestructura 2; a) elementos mecánicos; b) desplazamientos nodales; c) reacciones y fuerzas en los nodos

a)

ELEMENTOS MECÁNICOS*							
Elemento	Distancia*	Fuerza axial	Fuerza cortante Plano 1-2	Mto. Resonante Plano 1-2	Fuerza cortante Plano 1-3	Mto. Resonante Plano 1-3	Momento torsionante
1	0		-0.96	-415.54	-2.94	683.68	-1.74
	700	-35.53	-0.96	-1087.90	-2.94	-1373.41	
2	0		6.65	-2146.34	-0.17	116.81	0.22
	700	-26.86	6.65	2509.25	-0.17	-4.45	
3	0		14.64	-1086.81	0.17	-173.01	4.45
	300		3.64	1955.22	0.17	-121.04	
	421.3	-6.65	0.00	2176.04	0.17	-100.02	
	700		-10.36	1011.20	0.17	-51.75	
4	0		7.50	-537.50	0.00	0.00	0.00
	250	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
5	0		20.89	-1377.87	-1.69	174.74	1.09
	300		9.89	3539.56	0.31	-332.35	
	629.7	-7.11	0.00	5170.15	0.31	-230.25	
	900		-10.11	4074.27	2.31	-146.54	
	1200		-19.11	-308.31	2.31	546.35	

b)

REACCIONES Y FUERZAS EN LOS NODOS*						
Nodo**	F(x)	F(y)	F(z)	M(x)	M(y)	M(z)
1	-2.94	0.96	35.53	415.54	-683.68	1.74
2	-0.17	-6.65	26.86	2146.34	-116.81	-0.22
3	-4.00	4.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	7.11	-2.31	19.11	-1.09	-308.31	-546.35

* Distancias desde el nodo i de cada elemento, en cm; fuerzas en t y momentos en $t\cdot cm$

** En los nodos 4 y 5 no se aplican cargas ni son nodos de apoyo, por lo que no se generan reacciones en ellos

No se incluyen resultados de desplazamientos ya que éstos fueron impuestos

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.5

Tabla 5.12 Resultados del análisis para el modelo con desplazamientos impuestos de la subestructura 1 aislada; a) elementos mecánicos; b) reacciones y fuerzas en los nodos

a)

ELEMENTOS MECÁNICOS***							
Elemento	Distancia*	e_r (%) Axial	e_r (%) Cortante 1-2	e_r (%) Flexión 1-2	e_r (%) Cortante 1-3	e_r (%) Flexión 1-3	e_r (%) Torsión
1	0		0.00	0.00	0.00	0.00	
	700	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0		0.00	0.00	0.00	0.00	
	700	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0		0.00	0.00	0.00	0.00	
	300		0.00	0.00	0.00	0.00	
	421.3	0.00	-	0.00	0.00	0.00	0.00
	700		0.00	0.00	0.00	0.00	
4	0		-	0.00	-	-	
	250	-	-	-	-	-	-
5	0		0.00	0.00	0.00	0.01	
	300		0.00	0.00	0.00	0.00	
	629.7	0.00	-	0.00	0.00	0.00	0.00
	900		0.00	0.00	0.00	0.01	
	1200		0.00	0.00	0.00	0.00	

b)

REACCIONES Y FUERZAS EN LOS NODOS***						
Nodo**	e_r (%) F(x)	e_r (%) F(y)	e_r (%) F(z)	e_r (%) M(x)	e_r (%) M(y)	e_r (%) M(z)
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	-	-	-	-

* Distancias desde el nodo i de cada elemento, en cm.

** En los nodos 4 y 5 no se aplican cargas ni son nodos de apoyo, por lo que no se generan reacciones en ellos

*** Se calculan como $\frac{|V_{real}-V|}{V_{real}} \times 100$, donde: V_{real} : valores del análisis en el modelo original (tabla 5.3)

V : valores del análisis en el modelo de subestructura 1 aislada (tabla 5.12)

No se incluyen resultados de desplazamientos ya que éstos fueron impuestos

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.5 y la tabla 5.3

Tabla 5.12 (Continuación) Errores relativos para los resultados del análisis de la subestructura 1 con desplazamientos impuestos: a) elementos mecánicos; b) reacciones y fuerzas en los nodos

a)

ELEMENTOS MECÁNICOS*							
Elemento	Distancia*	Fuerza axial	Fuerza cortante Plano 1-2	Mto. flexionante Plano 1-2	Fuerza cortante Plano 1-3	Mto. flexionante Plano 1-3	Momento torsionante
1	0		-0.96	-415.54	-2.94	683.68	
	700	-35.53	-0.96	-1087.90	-2.94	-1373.41	-1.74
2	0		6.65	-2146.34	-0.17	116.81	
	700	-26.86	6.65	2509.25	-0.17	-4.45	0.22
3	0		14.64	-1086.81	0.17	-173.01	
	300		3.64	1955.22	0.17	-121.04	
	421.3	-6.65	0.00	2176.04	0.17	-100.02	4.45
	700		-10.36	1011.20	0.17	-51.75	
	1000		-19.36	-3446.75	0.17	0.22	
4	0		7.50	-637.50	0.00	0.00	
	250	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

b)

REACCIONES Y FUERZAS EN LOS NODOS*						
Nodo**	F(x)	F(y)	F(z)	M(x)	M(y)	M(z)
1	-2.94	0.96	35.53	415.54	-683.68	1.74
2	-0.17	-6.65	26.86	2146.34	-116.81	-0.22
3	3.11	5.69	-20.89	-1.09	-1377.86	-174.75

* Distancias desde el nodo i de cada elemento, en cm; fuerzas en t y momentos en t-cm

** En los nodos 4 y 5 no se aplican cargas ni son nodos de apoyo, por lo que no se generan reacciones en ellos

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.6

Tabla 5.13 Resultados del análisis para el modelo con desplazamientos impuestos de la subestructura 2 aislada; a) elementos mecánicos; b) reacciones y fuerzas en los nodos

a)

ELEMENTOS MECÁNICOS***							
Elemento	Distancia*	e _r (%) Axial	e _r (%) Cortante 1-2	e _r (%) Flexión 1-2	e _r (%) Cortante 1-3	e _r (%) Flexión 1-3	e _r (%) Torsión
1	0		0.00	0.00	0.00	0.00	
	700	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0		0.00	0.00	0.00	0.00	
	700	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0		0.00	0.00	0.00	0.00	
	300		0.00	0.00	0.00	0.00	
	421.3	0.00	-	0.00	0.00	0.00	0.00
	700		0.00	0.00	0.00	0.00	
4	1000		0.00	0.00	0.00	0.00	
	0		-	0.00	-	-	
	250	-	-	-	-	-	-

b)

REACCIONES Y FUERZAS EN LOS NODOS***						
Nodo**	e _r (%) F(x)	e _r (%) F(y)	e _r (%) F(z)	e _r (%) M(x)	e _r (%) M(y)	e _r (%) M(z)
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

* Distancias desde el nodo *i* de cada elemento, en cm.

** En los nodos 4 y 5 no se aplican cargas ni son nodos de apoyo, por lo que no se generan reacciones en ellos

*** Se calculan como $\frac{|V_{real}-V|}{V_{real}} \times 100$, donde: V_{real} : valores del análisis en el modelo original (tabla 5.3)

V : valores del análisis en el modelo de subestructura 2 aislada (tabla 5.13)

No se incluyen resultados de desplazamientos ya que éstos fueron impuestos

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.6 y la tabla 5.3

Tabla 5.13 (Continuación) Errores relativos para los resultados del análisis de la subestructura 2 con desplazamientos impuestos:
a) elementos mecánicos; b) reacciones y fuerzas en los nodos

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

a)

FUERZAS SOBRE LOS ELEMENTOS EN LOS NODOS*							
Elemento**	Nodo**	F(x)	F(y)	F(z)	M(x)	M(y)	M(z)
1	1	-1.887	-1.883	-7.245	0.000	-0.007	0.002
	5	1.887	1.883	7.251	0.001	-0.001	0.000
2	5	-1.562	-1.558	5.853	-0.001	0.001	0.000
	3	1.562	1.558	-5.846	-0.001	-0.005	-0.002
3	2	-1.504	1.501	-5.777	0.000	-0.005	0.000
	5	1.504	-1.501	5.784	0.001	0.001	-0.001
4	5	-1.806	1.801	6.760	0.001	0.000	0.001
	4	1.806	-1.801	-6.754	0.000	-0.007	0.001
5	6	-1.898	1.868	7.029	0.004	-0.042	0.013
	5	1.898	-1.868	-7.016	0.006	-0.007	0.003
6	5	-1.588	1.572	-6.050	0.001	0.002	-0.001
	8	1.588	-1.572	6.063	0.002	-0.031	-0.007
7	7	-1.506	-1.487	5.609	-0.005	-0.029	-0.003
	5	1.506	1.487	-5.597	-0.007	0.008	-0.006
8	5	-1.838	-1.816	-6.984	-0.001	-0.004	0.005
	9	1.838	1.816	6.997	0.001	-0.039	0.006

b)

ERRORES RELATIVOS (%)***							
Elemento**	Nodo**	F(x)	F(y)	F(z)	M(x)	M(y)	M(z)
1	1	0.53	0.00	0.01	-	0.02	0.00
	5	0.53	0.00	0.01	-	0.00	-
2	5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-
	3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	2	0.07	0.00	0.02	-	0.00	-
	5	0.07	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00
4	5	0.00	0.00	0.00	0.00	-	0.00
	4	0.00	0.00	0.00	-	0.00	0.00
5	6	0.05	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00
	5	0.05	0.00	0.03	0.00	0.02	0.00
6	5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	7	0.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	5	0.07	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00
8	5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

* Fuerzas en t y momentos en t-m

** La numeración de nodos y elementos finitos corresponde a la asignada en el modelo de piña aislada sin placa central

*** Se calculan como $\frac{|V_{real}-V|}{V_{real}} \times 100$, donde: V_{real} : valores del análisis en el modelo de la piña en el puente (tabla 5.6)

V: valores del análisis en el modelo de piña aislada sin placa central (tabla 5.14)

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.10 y la tabla 5.6

Tabla 5.14 Resultados del análisis para el modelo de piña aislada sin placa central; a) fuerzas sobre los elementos en los nodos de la piña; b) errores relativos

ELEMENTOS MECÁNICOS*							
Elemento**	Distancia	Fuerza axial	Fuerza cortante Plano 1-2	Mto. flexionante Plano 1-2	Fuerza cortante Plano 1-3	Mto. flexionante Plano 1-3	Momento torsionante
1	0	7.72	0.01	-0.73	0.00	0.08	0.00
	78.7		0.00	0.16	0.00	0.07	
	205.1		0.00	0.12	0.00	0.04	
2	0	-8.25	0.00	-0.07	0.00	-0.15	0.03
	200.4		0.00	-0.95	0.00	0.18	
3	0	6.16	0.00	-0.52	0.00	0.02	-0.09
	40.1		0.00	-0.41	0.00	0.02	
	205.1		0.00	-0.09	0.00	0.12	
4	0	-7.22	0.00	0.05	0.00	0.16	-0.07
	200.4		0.00	-0.71	0.00	-0.06	
5	0	-7.51	-0.02	4.31	-0.01	0.68	-0.07
	200.4		-0.03	-0.65	0.00	-0.62	
6	0	6.46	0.02	0.15	0.00	-0.10	0.16
	205.1		0.01	3.17	0.00	0.32	
7	0	-5.99	-0.01	2.86	0.01	-0.57	-0.61
	200.4		-0.01	0.66	0.01	0.85	
8	0	7.45	0.02	-0.47	0.00	0.19	-0.37
	35.1		0.02	0.34	0.00	0.20	
	205.1		0.02	3.97	0.00	-0.02	
9	0	87.07	0.02	0.13	0.33	-21.44	6.36
	47.4		0.00	0.64	0.33	-5.62	
	100.1		-0.02	0.02	0.33	11.97	
10	0	88.67	0.02	0.19	0.13	-10.47	6.16
	47.2		0.00	0.69	0.13	-4.45	
	100.1		-0.02	0.06	0.13	2.31	

* Distancias en cm, fuerzas en t y momentos en t-cm

** La numeración de nodos y elementos finitos corresponde a la asignada en el modelo de piña aislada sin placa central
Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.10

Tabla 5.15 Elementos mecánicos en los perfiles estructurales y cuerdas inferiores del modelo de piña aislada sin placa

ELEMENTOS MECÁNICOS*							
Elemento**	Distancia	Fuerza axial	Fuerza cortante Plano 1-2	Mto. Resonante Plano 1-2	Fuerza cortante Plano 1-3	Mto. Resonante Plano 1-3	Momento torsionante
1	0		-0.03	2.65	0.00	-0.04	
	45.6	1.95	-0.03	1.15	0.00	-0.05	-0.12
	203		-0.03	-3.89	0.00	0.04	
2	0		-0.03	3.79	0.00	-0.28	
	198.7	-0.37	-0.03	-2.55	0.00	0.22	-0.14
3	0		-0.03	2.50	0.00	0.02	
	203	0.68	-0.03	-3.72	0.00	-0.22	0.07
4	0		-0.03	3.85	0.00	0.19	
	198.7	-1.48	-0.03	-2.63	0.00	-0.01	0.07
5	0		-0.06	6.50	0.00	0.14	
	198.7	-1.57	-0.06	-5.06	0.00	-0.22	-0.19
6	0		-0.05	4.65	0.00	0.13	
	203	0.79	-0.05	-5.91	0.00	-0.33	-0.08
7	0		-0.05	5.71	0.01	-0.62	
	198.7	-0.32	-0.05	-4.39	0.01	0.87	-0.30
8	0		-0.06	5.30	0.00	0.05	
	203	1.87	-0.06	-6.47	0.00	-0.37	-0.30
9	0		-0.02	-0.13	-0.33	21.44	
	47.4	87.07	0.00	-0.84	-0.33	5.62	6.36
	100.1		0.02	-0.02	-0.33	-11.97	
10	0		-0.20	-0.19	-0.13	10.47	
	47.2	88.67	0.00	-0.89	-0.13	4.45	8.16
	100.1		0.02	-0.06	-0.13	-2.31	

* Distancias en cm, fuerzas en t y momentos en t-cm

** La numeración de nodos y elementos finitos corresponde a la asignada en el modelo de piña aislada sin placa central
Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.10

Tabla 5.16 Elementos mecánicos en los perfiles estructurales y cuerdas inferiores del modelo de piña aislada con placa

a)

DESPLAZAMIENTOS NODALES EN LA PLACA*						
Nodo**	U(x)	U(y)	U(z)	R(x)	R(y)	R(z)
5	2.20	-0.94	-9.05	-0.0041	-0.0323	0.0005
10	2.17	-0.90	-9.28	-0.0038	-0.0248	0.0006
14	2.21	-0.90	-9.32	-0.0038	-0.0240	0.0005
18	2.26	-0.90	-9.35	-0.0041	-0.0245	0.0005
46	2.16	-0.94	-9.01	-0.0044	-0.0291	0.0005
53	2.24	-0.94	-9.09	-0.0037	-0.0285	0.0006
81	2.14	-0.99	-8.78	-0.0057	-0.0196	0.0004
85	2.19	-0.99	-8.82	-0.0044	-0.0187	0.0005
89	2.23	-0.99	-8.86	-0.0027	-0.0184	0.0006

b)

ERRORES RELATIVOS (%)***						
Nodo**	U(x)	U(y)	U(z)	R(x)	R(y)	R(z)
5	0.02	0.01	0.28	4.35	788.38	107.17

* Desplazamientos en cm y giros en rad

** La numeración de nodos corresponde a la asignada en la placa central del modelo de piña aislada

*** Se calculan como $\frac{|V_{\text{real}} - V|}{V} \times 100$, donde: V_{real} : valores del análisis en el modelo de la piña en el puente (tabla 5.6)

V_{real}

V: valores del análisis en el modelo de piña aislada con placa central (tabla 5.17)

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.10 y la tabla 5.6

Tabla 5.17 Resultados de desplazamientos en la placa central; a) desplazamientos en los nodos extremos de la placa central; b) errores relativos en los desplazamientos del nodo central (5)

MOMENTOS Y REACCIONES EN EL SUELO*					
Elemento	Nodo	Momento	Mto. total por nodo	Fuerza	Fza. total por nodo
1	1	-40.008	-40.008	216.713	216.713
	2	391.691		89.179	
2	2	-391.668	0.023	66.884	156.063
	3	211.848		58.344	
3	3	-211.848	0.000	68.068	126.412
	4	-414.090		57.652	
4	4	444.043	29.953	74.124	131.776
	5	-0.020	-0.020	103.901	103.901

DESPLAZAMIENTOS NODALES*		
Nodo	Giro	Hundimiento
1	-0.00221	0.04703
2	-0.00185	0.03871
3	-0.00148	0.03376
4	-0.00163	0.02860
5	-0.00204	0.02004

* Fuerzas en k, momentos en k-ft, giros en rad y hundimientos en ft
 Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.12

Tabla 5.18 Resultados del problema de Geotecnia por elementos finitos según la ref. 12

RIGIDECES ASOCIADAS A LOS RESORTES*					
Elemento	Nodo	L_{elem}	$L' = L_{elem}/2$	$k_s = k_s B L'$	$k_{nodo} = \sum k_s$
1	1	4.0	2.00	4608**	4608
	2		2.00	2304	
2	2	3.0	1.50	1728	4032
	3		1.50	1728	
3	3	3.5	1.75	2016	3744
	4		1.75	2016	
4	4	4.5	2.25	2592	4608
	5		2.25	5184**	

L_{elem} = longitud total de cada elemento finito

B = ancho de la estructura = 8 ft

k_s = módulo de reacción = 144 k/ft³

* Longitudes en ft, rigideces en k/ft

** Se duplican sus valores originales para incrementar su representatividad (ref. 12)

Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.12

Tabla 5.19 Cálculo de las rigideces asociadas a los resortes en los apoyos de la estructura

REACCIONES Y FUERZAS EN LOS NODOS					
a)	Nodo	Momento	Reacción en el suelo	Er_{Mom} (%)	Er_{Res} (%)
	1	-40.00	209.8274	0.02	3.18
	2	0.00	149.0191	--	4.51
	3	0.00	120.0083	--	5.07
	4	30.00	125.1804	0.16	5.01
	5	0.00	95.9647	--	7.64

DESPLAZAMIENTOS NODALES*					
b)	Nodo	R(z)	U(y)	$Er_{R(z)}$ (%)	$Er_{U(y)}$ (%)
	1	-0.00224	0.04554	1.27	3.18
	2	-0.00187	0.03696	1.24	4.52
	3	-0.00149	0.03205	0.34	5.05
	4	-0.00161	0.02717	0.98	5.00
	5	-0.00202	0.01851	1.18	7.64

* Traslaciones en ft, giros en rad, fuerzas en k y momentos en k-ft

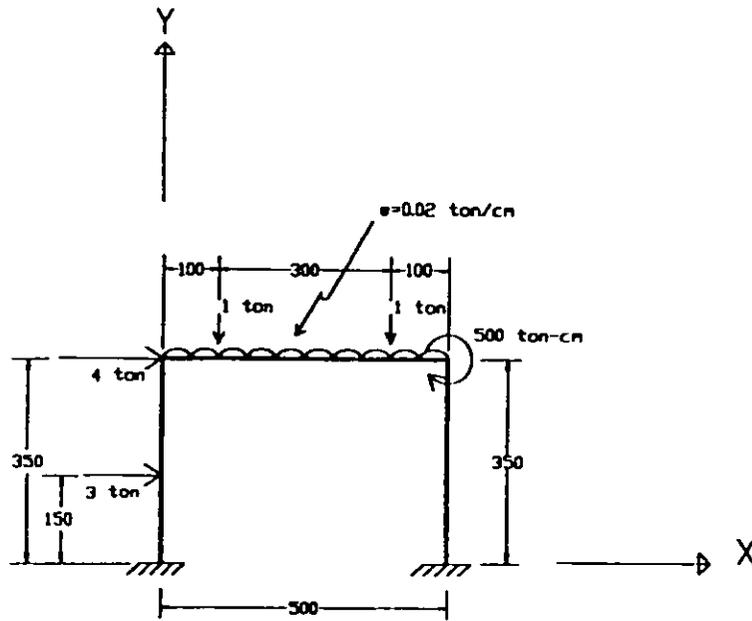
** Se comparan con valores de momento nulos, por lo que este parámetro no es representativo

Las diferencias, sin embargo, son pequeñas en valor absoluto.

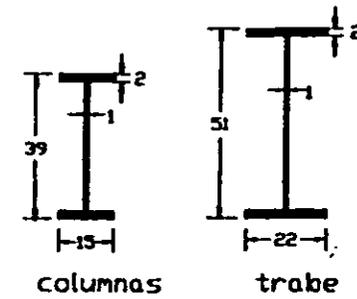
Esta tabla se complementa con el esquema de la figura 5.12

Tabla 5.20 Resultados y errores relativos en el análisis del problema de geotecnia usando resortes con rigidez finita; a) reacciones y fuerzas en los nodos; b) desplazamientos nodales

FIGURAS



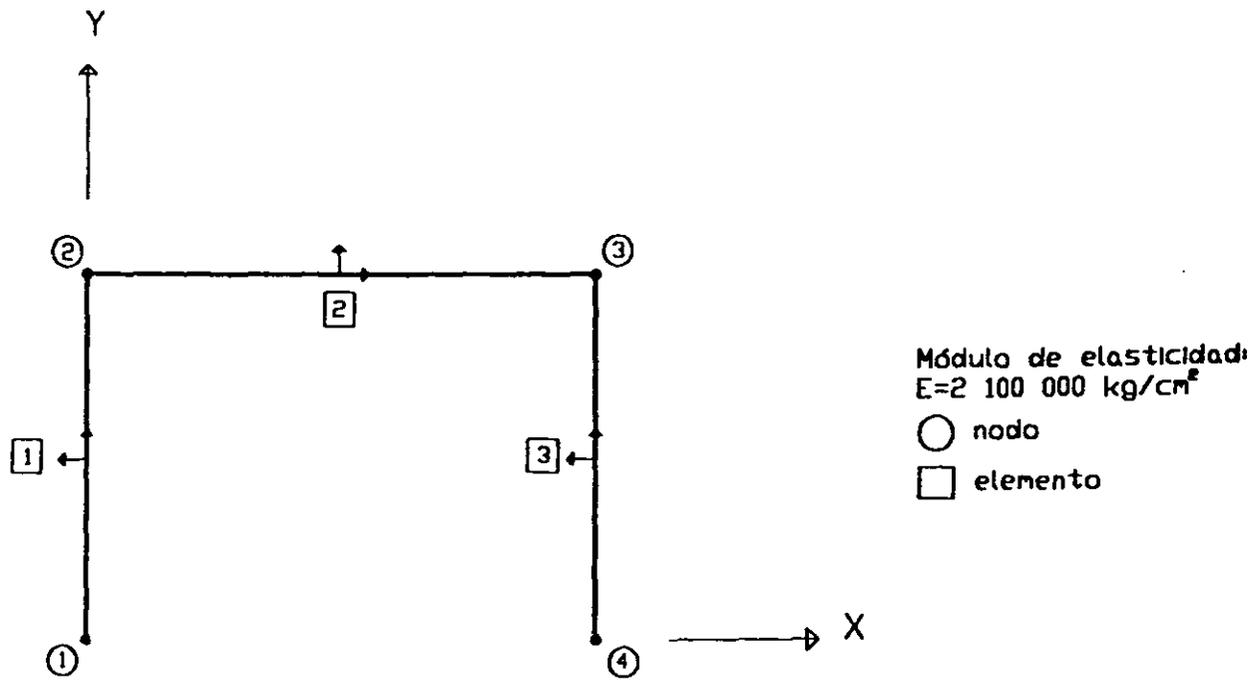
Esquema general
de la estructura principal



Secciones transversales
para los elementos empleados

dimensiones en cm

Figura 5.1. Estructura y sistema de cargas para el modelo de viga

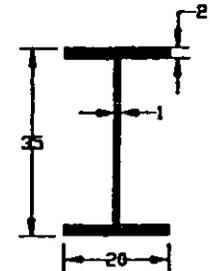
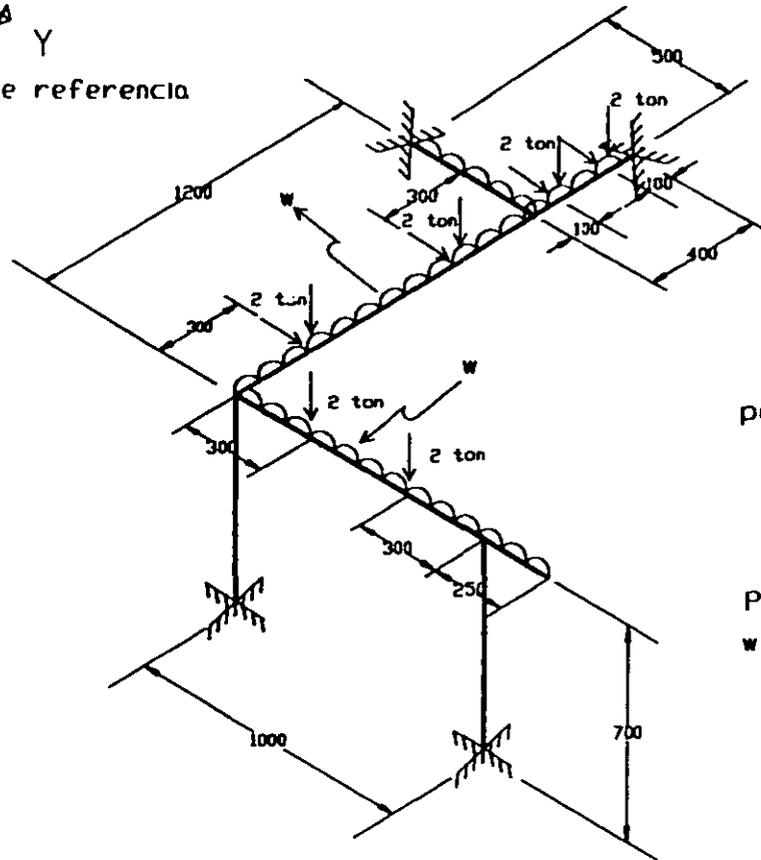
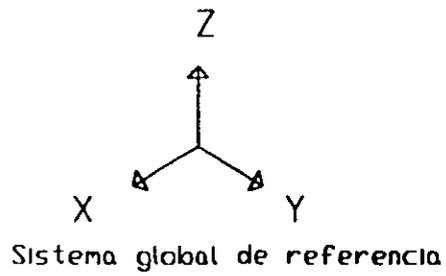


a) Modelo de marco plano



b) Modelo de viga aislada

Figura 5.2. Modelos de elementos finitos del marco y la viga aislada



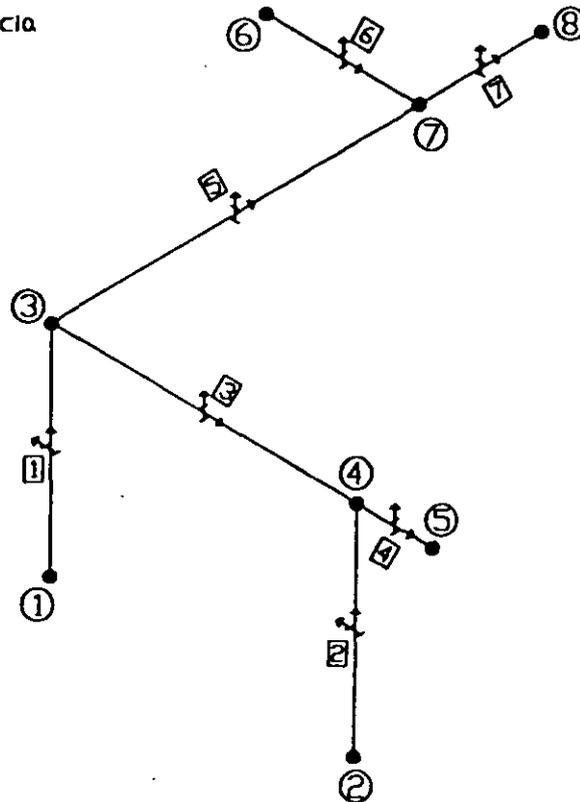
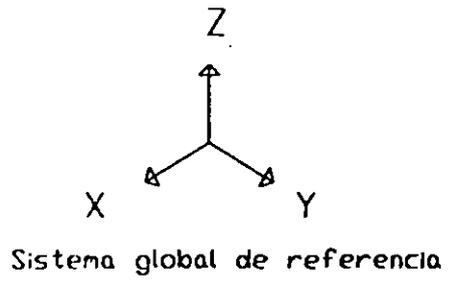
columnas y traves

Sección transversal para los elementos empleados

Para todas las traves:
 $w=0.03 \text{ ton/cm}$

dimensiones en cm

Figura 5.3. Estructura principal y sistema de cargas para el modelo de marco en el espacio

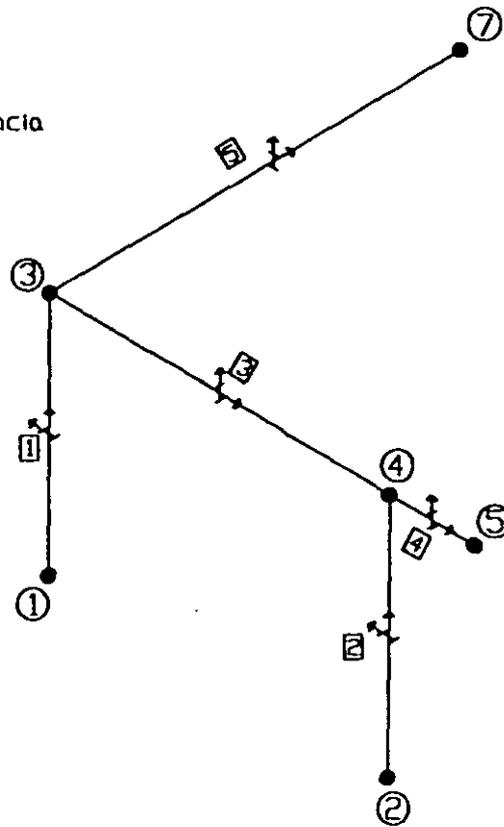
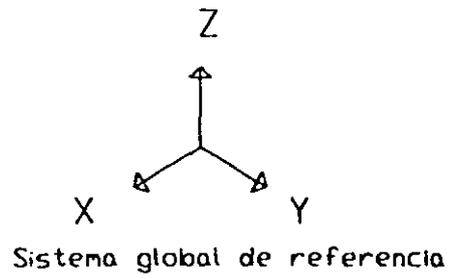


Módulo de elasticidad:
 $E=2\ 100\ 000\ \text{kg/cm}^2$

○ nodo

□ elemento

Figura 5.4. Modelo de elementos finitos de la estructura principal para el modelo de marco en el espacio



Módulo de elasticidad:
 $E=2\ 100\ 000\ \text{kg/cm}^2$

○ nodo

□ elemento

Figura 5.5. Modelo de elementos finitos de la subestructura 1

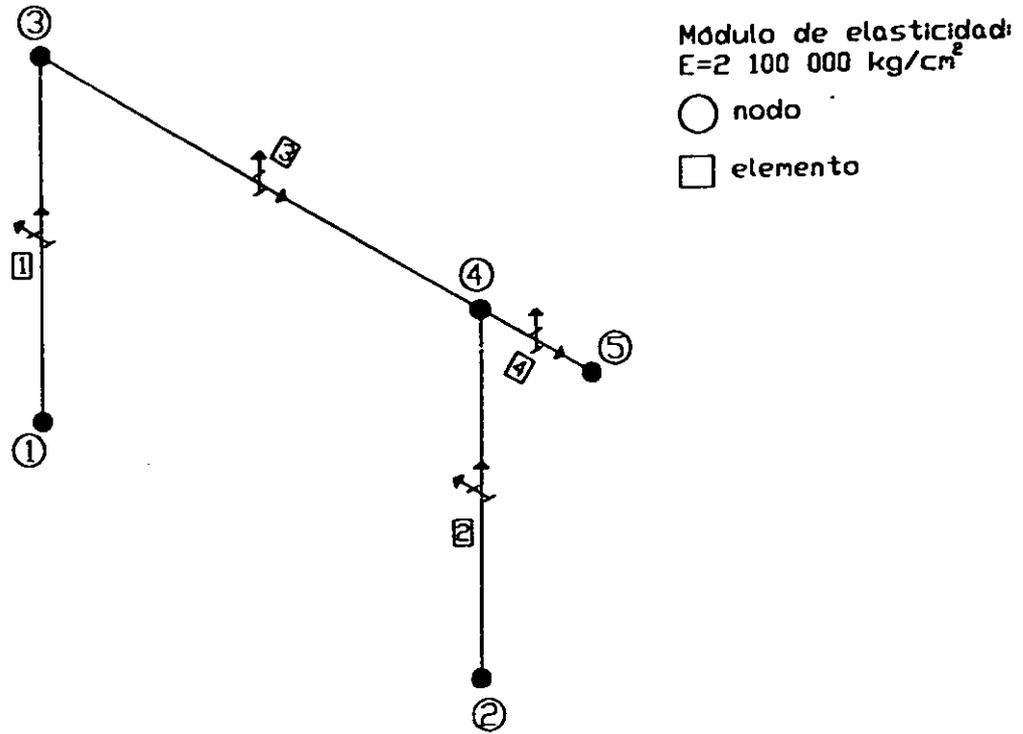
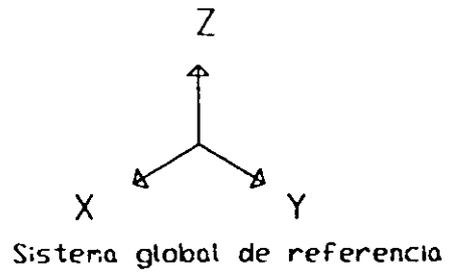


Figura 5.6. Modelo de elementos finitos de la subestructura 2

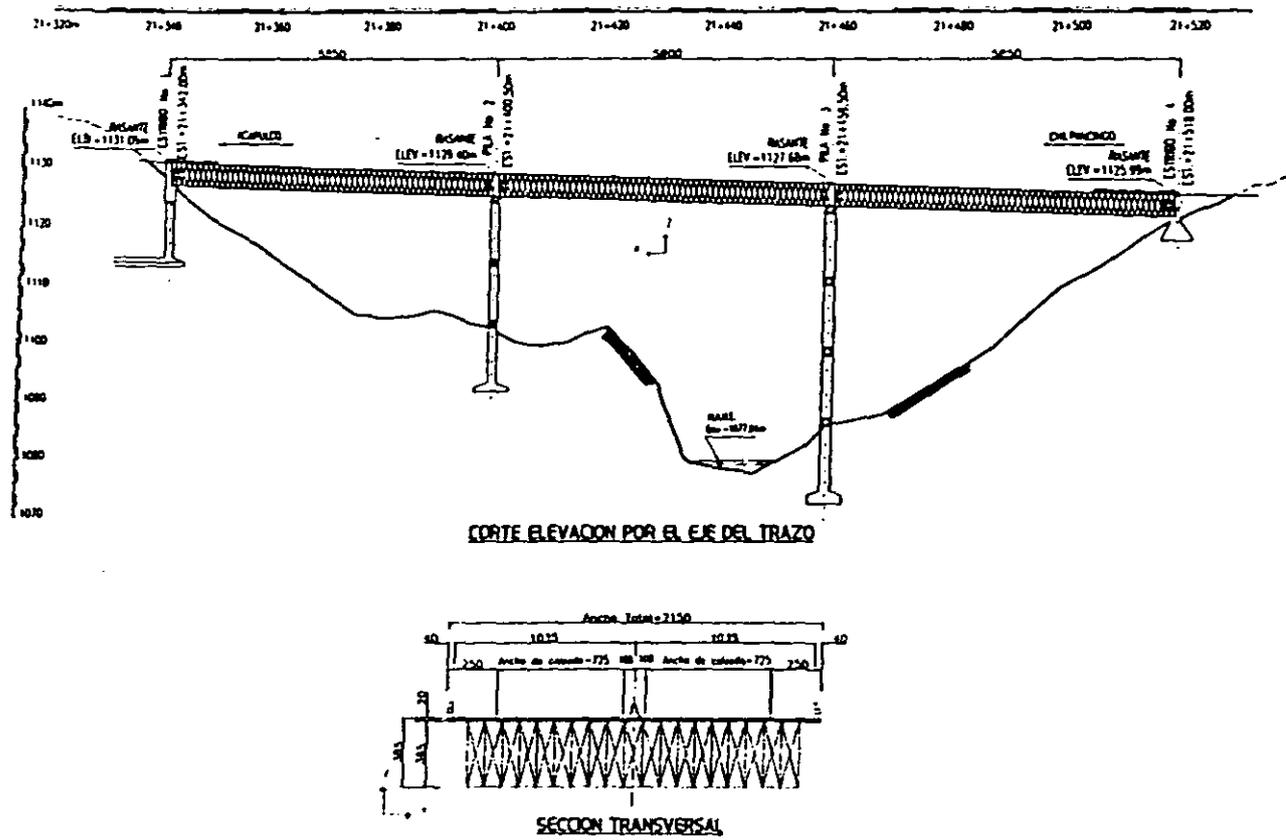


Figura 5.7. Dimensiones generales del puente Palo Blanco

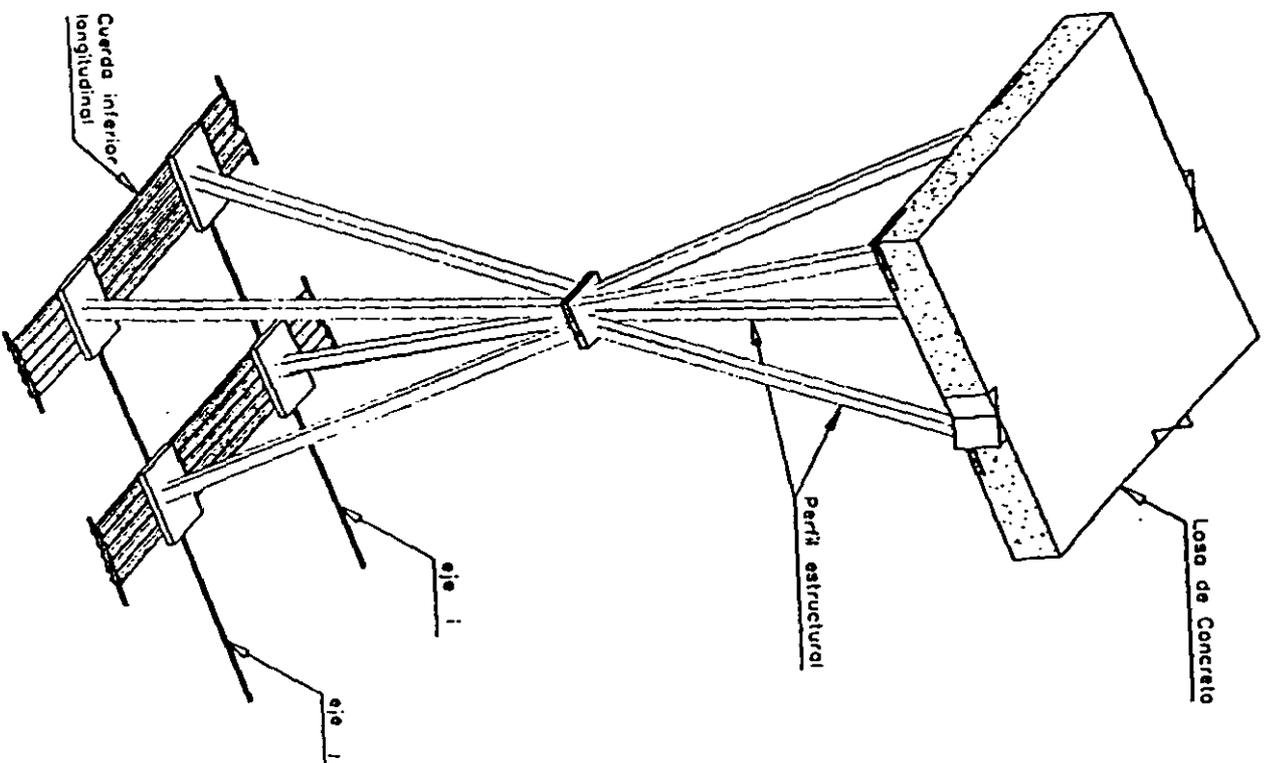


Figura 5.8. Elemento estructural tipo del puente Palo Blanco ("piñas")

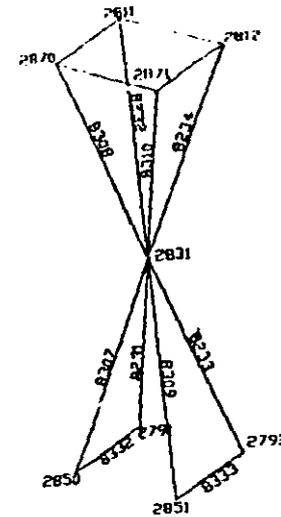
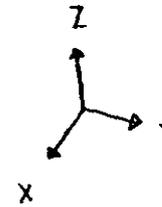
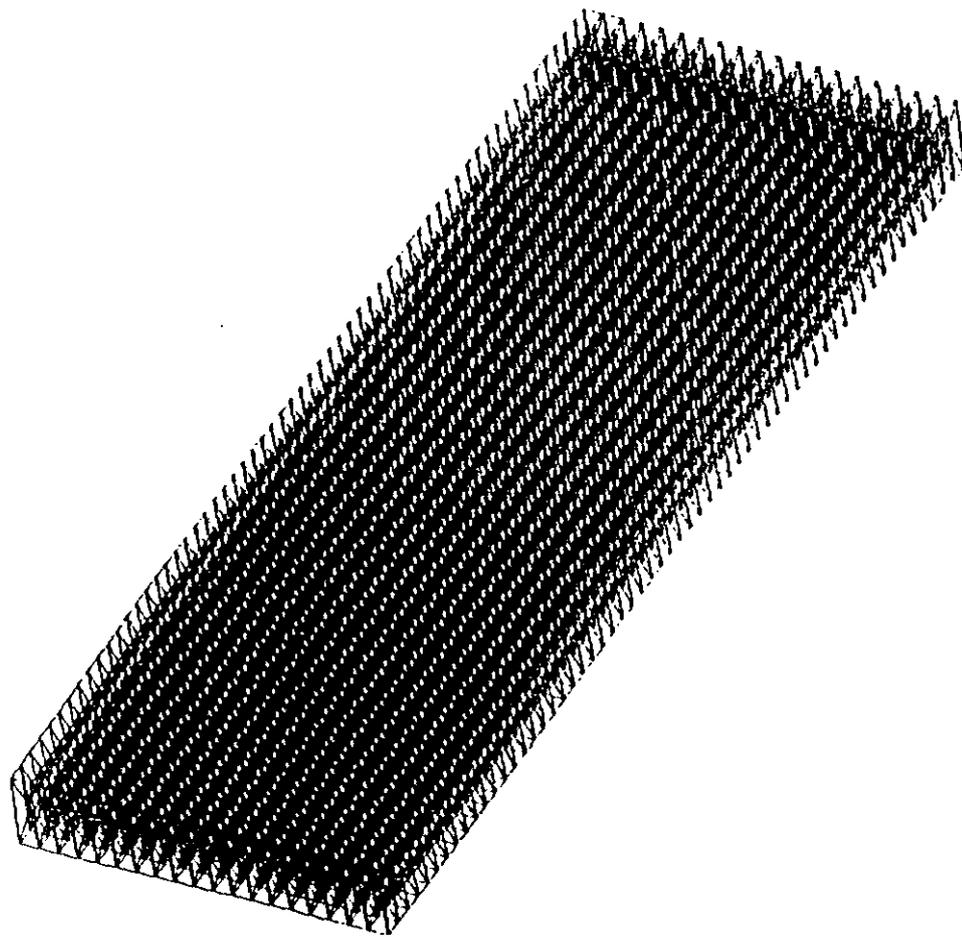
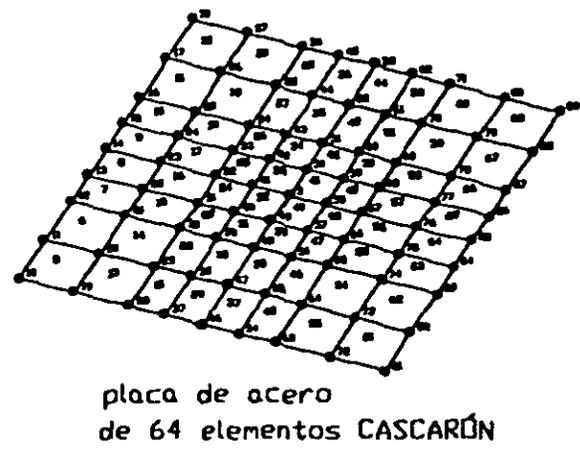
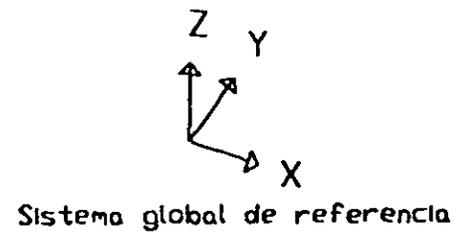
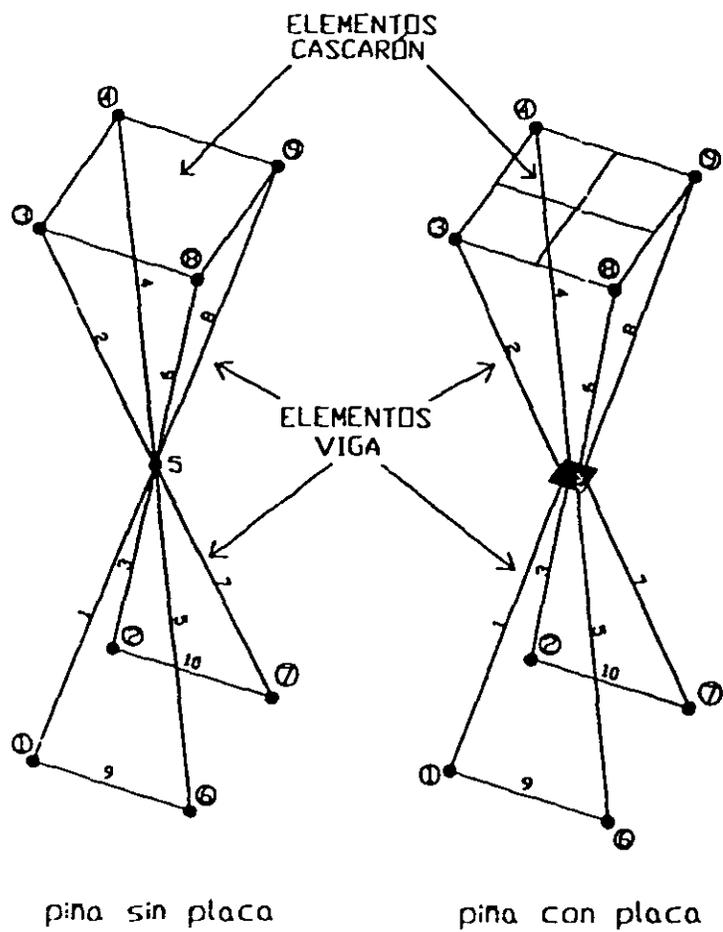


Figura 5.9. Modelo de elementos finitos del tramo lateral del puente Palo Blanco y de la pila seleccionada para el estudio



PROPIEDAD	ACERO	CONCRETO
Módulo de elasticidad (kg/cm^2)	2 100 000	237 500
Peso volumétrico (t/m^3)	7.85	3.06
Módulo de elasticidad al cortante (kg/cm^2)	870 000	98 545

Figura 5.10 Modelos de elementos finitos de las piñas con y sin placa

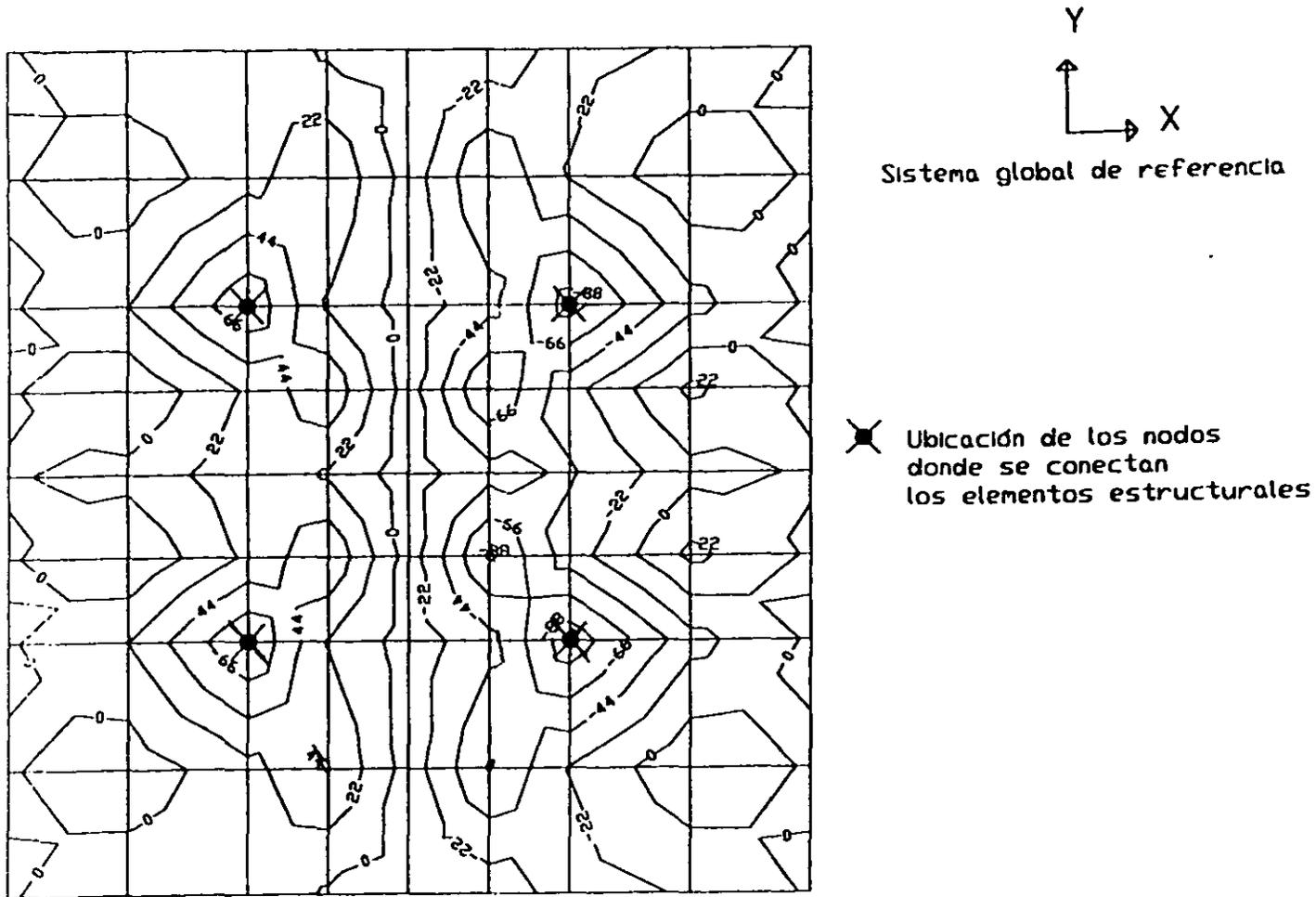
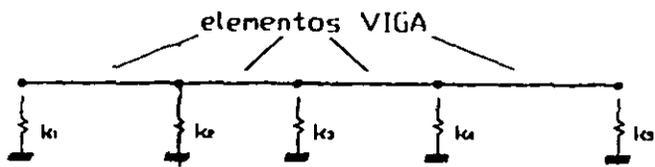
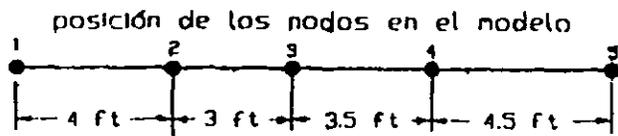
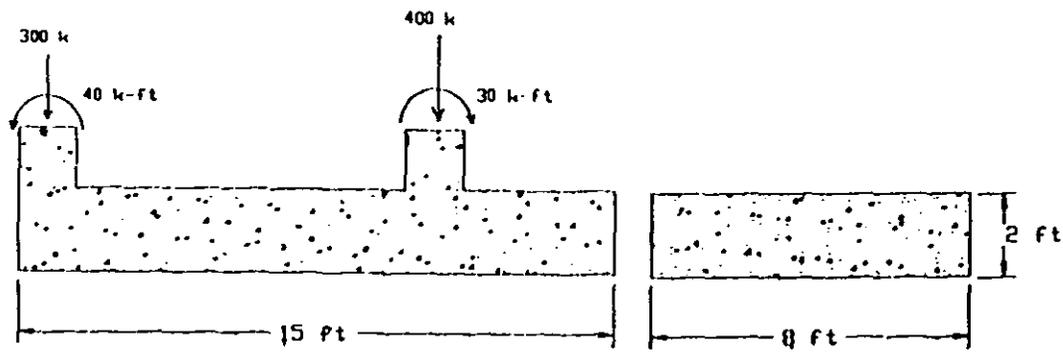


Figura 5.11. Distribución de momentos flexionantes en la placa central alrededor del eje Y



Módulo de reacción	$k_s = 144 \text{ k/ft}^2$
Módulo de elasticidad de la cimentación	$E = 452\,700 \text{ ksF}$
Resistencia a compresión del concreto de la cimentación	$f'_c = 3000 \text{ psi}$

Figura 5.12. Forma general, cargas y modelo de elementos finitos de la viga sobre apoyos elásticos