S
Zej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ARBOLES ALGORITMICOS EN LA TEORIA DE BOCSES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTORA EN CIENCIAS

(MATEMATICAS)

P R E S E N T A

RITA ESTHER ZUAZUA VEGA

DIRECTOR DE TESIS: DR. RAYMUNDO BAUTISTA RAMOS.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ARBOLES ALGORITMICOS EN LA TEORIA DE BOCSES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTORA EN CIENCIAS

(MATEMATICAS)

P R E S E N T A

RITA ESTHER ZUAZUA VEGA

MEXICO, D.F. 1999

INTRODUCCION

El teorema de Krull-Schmidt nos dice que si Λ es una k-álgebra de dimensión finita, entonces todo módulo $M \in mod\Lambda$ tiene una descomposición única hasta isomorfismo en suma directa de un número finito de módulos inescindibles en $mod\Lambda$. Por lo tanto, uno de los problemas esenciales en la Teoría de Representaciones de Algebras es la clasificación de los módulos inescindibles de un álgebra. Este problema se traduce en ocasiones a problemas matriciales, es decir, problemas de álgebra lineal sobre equivalencia de matrices con respecto a un conjunto de operaciones elementales permitidas.

En los años setenta, A.V. Roiter y M. Kleiner ($[KR1], [KR2]$) interpretaron estos problemas matriciales como problemas de categorías graduadas diferenciales (DGC) e introdujeron el concepto de algoritmo de reducción al considerar ciertas operaciones en problemas matriciales.

El estudio de las representaciones de las DGC resultó ser muy difícil, por lo que en 1980 Roiter introdujo en $[R]$ el concepto de BOCS, bimódulo sobre una categoría con estructura de coálgebra.

En 1986, $[D]$ Y.A. Drozd demostró que toda álgebra Λ de dimensión finita sobre un campo k algebraicamente cerrado es mansa o salvaje pero no ambas.

Usando bocses Crawley-Boevey dió una nueva versión de la prueba del teorema de Drozd en 1988 $[CB]$ y obtuvo otros importantes resultados para álgebras. En 1993 Gustavo Montaño $[M]$ hizo un desarrollo explícito de las técnicas de bocses propuestas por Crawley-Boevey.

Sin embargo, existía cierta inconformidad con la prueba del teorema de Drozd, debido a la complejidad y "falta de naturalidad" en la misma, por lo que P. Gabriel, L.A. Nazarova, A. V. Roiter, V.V. Sergeichuck y D. Vossieck en 1993 $[GNRSV]$ dieron una nueva usando conceptos que se consideran más "naturales" sin la necesidad de utilizar bocses, aunque la complejidad de la prueba persisitió.

En 1996 Juan Boza $[B]$ estudió el comportamiento de la forma cuadrática de un bocs cuando a éste se le aplica un algoritmo de reducción, con el fín de obtener información sobre la estructura de sus representaciones. Como fruto de este estudio, Juan Boza demostró que si Λ es un álgebra de dimensión finita y $D(\Lambda)$ denota su bocs de Drozd asociado, para $M \in mod\Lambda$ y su correspondiente representación φ de $D(\Lambda)$,

$$\begin{aligned}\Delta(\varphi) &= dim_k End_{D(\Lambda)}(\varphi) - q_{D(\Lambda)}(\varphi)\\ &= dim_k Hom_\Lambda(M, DtrM) - dim_k Hom_\Lambda(TopM, Soc(DtrM))\end{aligned}$$

El presente trabajo, ha tenido tres objetivos. El primero (capítulos 1 y 2) ha sido presentar una reformulación de la definición de bocs diferenciable triangular y su categoría de representaciones, así como una descripción explícita de los algoritmos de reducción en términos de un morfismo de álgebras y un funtor fiel y pleno $F : Rep(\mathcal{B}) \to Rep(\mathcal{A})$, donde $\mathcal{B}$ es un bocs que se obtiene del bocs $\mathcal{A}$ aplicando un algoritmo de reducción y considerando una equivalencia de Morita. Se pone fín a esta primera parte mostrando algunas propiedades importantes de los algoritmos de reducción que fueron probadas en su mayoría por Boza.

Nuestro segundo objetivo (capítulo 3) ha sido dar una prueba alternativa para la primera parte del teorema de Drozd, demostraremos de una manera que consideramos más clara y evidentemente más corta que un bocs es manso o salvaje. De hecho, un bocs $\mathcal{A}$ es manso si y sólo si para todo vector dimensión d tiene asociado un árbol finito G con un solo pozo, al que hemos llamado su $G-$árbol algoritmico, tal que el número de familias 1-paramétricas necesarias para cubrir (hasta isomorfismo) la familia de representaciones inescindibles de $\mathcal{A}$ de dimensión d es siempre menor o igual al número de fuentes de G.

El último de nuestros propósitos (capítulos 4 y 5) ha sido dar condiciones suficientes para que un álgebra mansa Λ, sea de crecimiento polinomial. Esto lo hemos podido hacer estudiando los $G-$árboles algorítmicos de familias mansas de representaciones inescindibles del bocs de Drozd $D(\Lambda)$ asociado a Λ y generalizando el resultado de Juan Boza, lo que nos permite pasar de la teoría de representaciones de bocses diferenciables triangulares a la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado.

Finalizamos este trabajo con un apéndice donde se encuentran algunos resultados que facilitarán la lectura de la misma.

CAPITULO I

Un bocs es una terna $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ donde R es una $k-$álgebra, W un $R-$bimódulo graduado, $T_R(W)$ el álgebra tensorial de R y $\delta : T_R(W) \to T_R(W)$ una diferencial. Los objetivos de este capítulo son definir la categoría de representaciones del bocs $\mathcal{A}$ y construir un funtor fiel y pleno entre las categorías de representaciones de los bocses $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B} = (eR'e, W', \delta')$, donde $\mathcal{B}$ es el bocs inducido por un morfismo admisible de $k-$álgebras $\varphi : R \to R'$ y $eR'e$ es Morita equivalente a R'.

I.1 Algebras tensoriales y reducciones de Morita.

A lo largo de toda la tesis k denota un campo algebraicamente cerrado.

Definición 1. *Sea R una $k-$álgebra y W un $R-$bimódulo. El álgebra tensorial de R, es un álgebra graduada sobre los números naturales,*

$$T_R(W) \;=\; R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus \cdots$$

donde $R_0 = R$, $R_n = \underbrace{W \otimes_R W \otimes_R \cdots \otimes_R W}_{n-veces}$ para $n \geq 1$.
El producto de $r = r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 \otimes \cdots \otimes r_n \in R_n$ y $s = s_1 \otimes s_2 \otimes s_3 \otimes \cdots \otimes s_m \in R_m$ está dado por $rs = r_1 \otimes r_2 \otimes r_3 \otimes \cdots \otimes r_n \otimes_R s_1 \otimes s_2 \otimes s_3 \otimes \cdots \otimes s_m \in R_{n+m}$.

Si W es una suma directa de R−bimódulos, $W = W_0 \oplus W_1$ tenemos una nueva graduación para el álgebra tensorial $T_R(W)$ en donde ponemos:

1. $gr(w) = 0$ si $w \in W_0$,
2. $gr(w) = 1$ si $w \in W_1$, y
3. $gr(w_1 \otimes \cdots \otimes w_s) = \sum_{i=1}^{s} gr(w_i)$.

En particular se tiene:

$$\begin{aligned} [T_R(W)]_0 &= T_R(W_0) := A \\ [T_R(W)]_1 &= A \otimes_R W_1 \otimes_R A := V \end{aligned}$$

Como todos los R−bimódulos W que consideraremos serán de la forma $W = W_0 \oplus W_1$ (que simplemente llamaremos graduados), pensaremos siempre en la nueva graduación del álgebra tensorial $T_R(W)$.

Sea $\varphi : R \to R'$ un morfismo de k−álgebras. Si W' es un R'−bimódulo, también es un R−bimódulo vía φ. Todo morfismo $\varphi : W \to W'$ de R−bimódulos induce un morfismo de R−álgebras $\varphi' : T_R(W) \to T_{R'}(W')$. Si $W = W_0 \oplus W_1$ y $W' = W_0' \oplus W_1'$ y φ respeta la graduación, φ' se restringe a un morfismo de R−álgebras $\varphi_1' : A \to A'$.

Definición 2. *Una diferencial $\delta : T_R(W) \to T_R(W)$ es un morfismo de R−bimódulos tal que:*

1. *Si r es homogéneo de grado i, $\delta(r)$ es homogéneo de grado $i+1$;*
2. *Si r, s son homogéneos, $\delta(rs) = \delta(r)s + (-1)^{gr(r)} r\delta(s)$.*

Proposición 3. *Para definir una diferencial $\delta : T_R(W) \to T_R(W)$, es suficiente con tener un morfismo de R−bimódulos $\rho : W \to W \otimes_R W$ tal que*

$$\rho(W_0) \subset A \otimes_R W_1 \otimes_R A = V,\ \rho(W_1) \subset V \otimes_R V.$$

Demostración. Definamos $\delta\mid_W = \rho\mid_W$.
Para $n = 2$, sea $\rho_2' : W \times W \to T_R(W)$ tal que

$$\rho_2'(w_1, w_2) = \rho(w_1)w_2 + (-1)^{grw_1} w_1 \rho(w_2).$$

Si $r \in R$, tenemos $\rho_2'(w_1 r, w_2) = \rho(w_1) r w_2 + (-1)^{grw_1} w_1 \rho(r w_2) = \rho_2'(w_1, r w_2)$. Por lo tanto podemos definir $\rho_2 : W \otimes_R W \to T_R(W)$ tal que

$$\rho_2(w_1 \otimes w_2) = \rho(w_1)w_2 + (-1)^{grw_1} w_1 \rho(w_2).$$

Por inducción se define $\rho_n : W \otimes_R \cdots \otimes_R W \to T_R(W)$ como,

$$\rho_n(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) = \rho(w_1)w_2 \cdots w_n + (-1)^{grw_1} w_1 \rho_{n-1}(w_2 \otimes \cdots \otimes w_n).$$

Claramente $\delta : T_R(W) \to T_R(W)$ definida en generadores por la regla $\delta(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) = \rho_n(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n)$ es una diferencial. ■

Observación 3.1. *a)* Si $\delta : T_R(W) \to T_R(W)$ es una diferencial entonces $\delta(R) = 0$.
b) A menudo nos interesan diferenciales tales que $\delta^2 = 0$, como hemos visto, δ está determinada por su restricción $\rho : W \to W \otimes_R W$, luego para verificar que $\delta^2 = 0$, basta ver que para $w \in W$, $\sum_i \rho(v_i^1)v_i^2 + (-1)^{gr(v_i^1)} v_i^1 \rho(v_i^2) = 0$ donde $\rho(w) = \sum_i v_i^1 \otimes v_i^2$.

Definición 4. *Sea R una $k-$álgebra. Una reducción de Morita $\underline{\tau}$ de R es una quinteta $\underline{\tau} = (\{e_i\}_{i=1}^n, \{x_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n, l, \tau)$ tal que:*

1. *$1_R = \sum_{i=1}^n e_i$ es una descomposición de 1_R en una suma de idempotentes primitivos ortogonales;*
2. *$l \leq n$;*
3. *La función $\tau : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, l\}$ satisface $\tau(i) = i$ si $i \in \{1, \cdots, l\}$. Si $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq l$ entonces $Re_j \neq Re_i$. Además, $Re_j \cong Re_{\tau(j)}$ para toda $j \in \{1, \cdots, n\}$;*
4. *Para toda $j \in \{1, \cdots, n\}$, los elementos $x_j \in e_j R e_{\tau(j)}$; $y_j \in e_{\tau(j)} R e_j$, satisfacen las siguientes propiedades:*

$$\begin{array}{rl} x_j = y_j = e_j & \text{si } j \in \{1, \cdots, l\} \\ x_j y_j = e_j \ ; \ y_j x_j = e_{\tau(j)} & \text{si } l+1 \leq j \leq n \end{array}$$

Para $\underline{\tau}$ una reducción de Morita de R, se define $e = e(\underline{\tau}) = \sum_{i=1}^l e_i$. Por $[Z]$ teorema 2.14 del capítulo 1, tenemos que R es Morita equivalente a eRe.

Si R es un álgebra básica y $1_R = \sum_{i=1}^n e_i$ es una descomposición de 1_R en una suma de idempotentes primitivos ortogonales, podemos hablar de la reducción de Morita trivial dada por $\underline{\tau} = (\{e_i\}_{i=1}^n, \{e_i\}_{i=1}^n, \{e_i\}_{i=1}^n, n, I)$.

Observación 4.1.

1. Supongamos que $1_R = e_1 + \cdots + e_l + e_{l+1} + \cdots + e_{l+r}$ es una descomposición de 1_R en suma de idempotentes primitivos ortogonales con $Re_j \neq Re_i$ para $i \neq j$ con $1 \leq i, j \leq l$ y $Re_{l+j} \cong Re_{\tau(j)}$ si $j = 1, \cdots, r$, $1 \leq \tau(j) \leq l$. De lo anterior obtenemos elementos $x_i, y_i \in R$, $1 \leq i \leq r$ tales que $x_i y_i = e_{l+i}$, $y_i x_i = e_{\tau(i)}$ y de allí una reducción de Morita de R.

2. Si $\underline{\tau}= (\{e_i\}_{i=1}^n, \{x_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n, l, \tau)$ es una reducción de Morita de R, claramente $1_R = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Luego, si $e = e(\underline{\tau})$,

$$\begin{aligned} Re &= \oplus_{i=1}^n x_i eRe \\ eR &= \oplus_{i=1}^n eRey_i \end{aligned}$$

Lema 5. *Sea W un $R-$bimódulo y $\underline{\tau}= (\{e_i\}_{i=1}^n, \{x_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n, l, \tau)$ una reducción de Morita de R. Entonces $\underline{\tau}$ también es una reducción de Morita del álgebra tensorial $T_R(W)$.*

Demostración. Por [Z] proposición 2.9, capítulo 2, $T_R(W)e_i \cong T_R(W)e_j$ si y sólo si existen elementos $x \in e_i T_R(W) e_j$, $y \in e_j T_R(W) e_i$ tales que $xy = e_i$, $yx = e_j$. Ahora

$$\begin{array}{ll} x = x_0 + x_1 + \cdots + x_n + \cdots & \text{donde } x_0 \in e_i R e_j, x_n \in e_i W^{\otimes n} e_j \text{ para } n \geq 1 \\ y = y_0 + y_1 + \cdots + y_n + \cdots & \text{donde } y_0 \in e_j R e_i, y_n \in e_j W^{\otimes n} e_i \text{ para } n \geq 1 \end{array}$$

Es fácil ver que entonces $xy = x_0 y_0$, $yx = y_0 x_0$ y nuevamente por [Z] tenemos que $Re_i \cong Re_j$. Claramente si $Re_i \cong Re_j$ entonces $T_R(W)e_i \cong T_R(W)e_j$. ■

Nos interesa describir, dada una reducción de Morita $\underline{\tau}$ de R, la relación entre las álgebras tensoriales $eT_R(W)e$ y $T_{eRe}(eWe)$. Veamos antes los siguientes isomorfismos.

Lema 6. *Existen isomorfismos de $R-$bimódulos y de $eRe-$bimódulos, respectivamente,*

$$\begin{array}{lll} 1)\sigma : R \to Re \otimes_{eRe} eR & \textit{dado por} & \sigma(r) = \sum_{u=1}^n r x_u \otimes y_u = \sum_{u=1}^n x_u \otimes y_u r \\ 2)\rho : eRe \to eR \otimes_R Re & \textit{dado por} & \rho(ere) = ere \otimes_R e \end{array}$$

Demostración. 1) Sea $m : Re \otimes_{eRe} eR \to R$ tal que $m(r_1 e \otimes e r_2) = r_1 e r_2$, entonces:

$$\begin{aligned} \sigma m(r_1 e \otimes e r_2) &= \sigma(r_1 e r_2) = \textstyle\sum_{u=1}^n (r_1 e r_2) x_u \otimes y_u \\ &= \textstyle\sum_{u=1}^n r_1 e \otimes e r_2 x_u y_u = r_1 e \otimes e r_2 \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} m\sigma(r) &= m(\textstyle\sum_{u=1}^n r x_u \otimes y_u) = \sum_{u=1}^n r(x_u y_u) \\ &= r 1_R = r \end{aligned}$$

Observemos que $\sigma_1(r) = \sum_{u=1}^n x_u \otimes y_u r$ es también un inverso para el morfismo m, por lo tanto $\sigma = \sigma_1$, y se sigue la última igualdad de 1).

2) Sea $m : eR \otimes_R Re \to eRe$ tal que $m(er_1 \otimes r_2 e) = e(r_1 r_2)e$, entonces:

$$\begin{aligned}\rho m(er_1\otimes r_2e) &= \rho(e(r_1r_2)e)=er_1r_2e\otimes e\\ &= er_1\otimes r_2e\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$m\rho(ere) = m(ere\otimes e)=ere$$

■

Proposición 7. *Sean C y D dos $k-$álgebras y ${}_CV_R$, ${}_RW_D$ bimódulos. Entonces $q_1 : V\otimes_R W\to Ve\otimes_{eRe} eW$ dado por $q_1(v\otimes_R w)=\sum_{u=1}^n vx_u\otimes_{eRe} y_uw$ es un isomorfismo de $C-D-$bimódulos con inverso $q_2 : Ve\otimes_{eRe} eW\to V\otimes_R W$ tal que $q_2(ve\otimes_{eRe} ew)=ve\otimes_R ew$.*

Demostración. Consideremos la siguiente composición de isomorfismos:

$$\begin{array}{ccccccc} V\otimes_R W & \to & V\otimes_R R\otimes_R W & \to & V\otimes_R Re\otimes_{eRe} eR\otimes_R W & \to & Ve\otimes_{eRe} eW\\ v\otimes w & \mapsto & v\otimes 1_R\otimes w & \overset{1\otimes\sigma\otimes 1}{\mapsto} & v\otimes\sum_{u=1}^n x_u\otimes y_u\otimes w & \mapsto & \sum_{u=1}^n vx_u\otimes y_uw\\ ve\otimes_R ew & \leftarrow & v\otimes e\otimes w & \overset{1\otimes\sigma^{-1}\otimes 1}{\leftarrow} & v\otimes e\otimes e\otimes w & \leftarrow & ve\otimes_{eRe} ew\end{array}$$

■

Corolario 8. *Si V es un $R-$bimódulo, existen isomorfismos de $R-$bimódulos, inversos uno del otro,*

$$V\otimes_R V\otimes_R\cdots\otimes_R V \underset{q_2^m}{\overset{q_1^m}{\rightleftarrows}} Ve\otimes_{eRe} eVe\otimes_{eRe}\cdots\otimes_{eRe} eVe\otimes_{eRe} eV$$

explícitamente:

$$\begin{aligned}q_1^m(v_1\otimes v_2\otimes v_3\otimes\cdots\otimes v_m) &= \textstyle\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^n v_1x_{i_1}\otimes y_{i_1}v_2x_{i_2}\otimes\cdots\otimes y_{i_m}v_m\\ q_2^m(v_1e\otimes ev_2e\otimes\cdots\otimes ev_m) &= v_1e\otimes ev_2\otimes\cdots\otimes ev_m\end{aligned}$$

■

Proposición 9. *Existe un isomorfismo de $k-$álgebras $\varphi : eT_R(W)e\to T_{eRe}(eWe)$ que fija eRe.*

Demostración.

$$\begin{array}{ccccccccccc} eT_R(W)e & = & eRe & \oplus & eWe & \oplus & e(W\otimes W)e & \oplus & e(W\otimes W\otimes W)e & \oplus & \cdots\\ \downarrow\varphi & & \downarrow I & & \downarrow I & & \downarrow q_1 & & \downarrow q_1^3 & & \downarrow\\ T_{eRe}(eWe) & = & eRe & \oplus & eWe & \downarrow & eWe\otimes eWe & \oplus & eWe\otimes eWe\otimes eWe & \oplus & \cdots\end{array}$$

Claramente φ preserva el producto. Además, φ es un isomorfismo de $eRe-$bimódulos. ■

Definición 10. *Sean R, R' dos $k-$álgebras, $\underline{\tau}= (\{e_i\}_{i=1}^n, \{x_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n, l, \tau)$ una reducción de Morita de R'. Un morfismo de álgebras $\varphi : R \to R'$ se llama admisible si:*

1. $x_i \otimes_R y_i = x_{\tau(i)} \otimes_R y_{\tau(i)}$ *para toda* $i \in \{1, \cdots, n\}$;
2. *Si* $w_0 = \sum_{i=1}^l e_i \otimes_R e_i$ *entonces* $w_0 r = r w_0$ *para todo* $r \in eR'e$.

Proposición 11. *Sea $\varphi : R \to R'$ un morfismo admisible de álgebras, K el núcleo de la multiplicación $R' \otimes_R R' \to R'$. Con la notación anterior tenemos:*

1. $eR' \otimes_R R'e = \sum_{i,j=1}^n eR'e(y_i \otimes_R x_j)eR'e$.
2. $eKe = Ker(eR' \otimes_R R'e \to eR'e) = \sum_{i \neq j} eR'e(y_i \otimes_R x_j)eR'e$.
3. $w_0 eR'e = \sum_{i=1}^n eR'e(y_i \otimes_R x_i) = \sum_{i=1}^n (y_i \otimes_R x_i)eR'e$.
4. $eR' \otimes_R R'e = w_0 eR'e \oplus eKe$.

Demostración. 1) Se sigue de la observación 4.1.2.
2) Sea $z \in eKe \subset eR' \otimes_R R'e$, entonces $z = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}(y_i \otimes_R x_j)\mu_{ij}$, $\lambda_{ij}, \mu_{ij} \in eR'e$. Observemos que si $i \geq l+1$, entonces $eR'e(y_i \otimes_R x_j) = 0$. Similarmente si $j \geq l+1$, entonces $(y_i \otimes_R x_j)eR'e = 0$, por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^n \lambda_{ii}(y_i \otimes_R x_i)\mu_{ii} & = & \sum_{i=1}^l \lambda_{ii}(y_i \otimes_R x_i)\mu_{ii} \\ & = & (\sum_i \lambda_{ii})w_0(\sum_i \mu_{ii}) \\ & = & \sum_{i=1}^l \lambda_{ii}\mu_{ii}(e_i \otimes_R e_i) \end{array}$$

de donde tenemos,

$$\begin{array}{rcl} z & = & \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}(y_i \otimes_R x_j)\mu_{ij} \\ & = & \sum_{i=1}^l \lambda_{ii}\mu_{ii}(e_i \otimes_R e_i) + \sum_{i \neq j} \lambda_{ij}(y_i \otimes_R x_j)\mu_{ij} \end{array}$$

Por otro lado $m(z) = 0 = \sum \lambda_{ii}\mu_{ii}e_i$ implica que $\lambda_{ii}\mu_{ii} = 0$, por lo tanto $z = \sum_{i \neq j} \lambda_{ij}(y_i \otimes x_j)\mu_{ij}$, lo que demuestra que $eKe \subseteq \sum_{i \neq j} eR'e(y_i \otimes_R x_j)eR'e$. El otro lado de la contención es inmediato.
3) Se sigue de la definición 10.2).
4) Por 1,2 y 3, $eR' \otimes_R R'e = w_0 + eKe$. Si $w_0(er'e) \in eKe$ tenemos que $0 = m(w_0)(er'e) = eer'e = er'e$, por lo tanto la suma es directa. ■

I.2 Algebras y bimódulos libremente generados.

En esta sección, R es una $k-$álgebra de dimensión finita, $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$ una descomposición en idempotentes primitivos ortogonales de 1_R y J un conjunto finito de índices. Las demostraciones de las afirmaciones hechas en esta sección, se pueden ver en $[Z]$, capítulo II, sección 2.

Definición 12. *Sea A una $k-$álgebra que contiene a R como subálgebra y sean $a_j \in e_{t(j)}Ae_{s(j)}$, $j \in J$. Diremos que A está libremente generada sobre la $k-$álgebra R, por las a_j, si para toda $k-$álgebra B, que contiene a R como subálgebra y cualesquiera elementos $b_j \in e_{t(j)}Be_{s(j)}$, $j \in J$, existe un único morfismo de álgebras $\varphi : A \to B$ tal que $\varphi \mid R = I_R$ y $\varphi(a_j) = b_j$ para cada $j \in J$.*

Proposición 13. *Sean A_1 y A_2 dos $k-$álgebras libremente generadas sobre R por elementos $a_{1i} \in A_1$ y $a_{2i} \in A_2$, respectivamente. Entonces existe un isomorfismo $\varphi : A_1 \to A_2$ tal que $\varphi(a_{1i}) = a_{2i}$.*

Proposición 14. *Sea A libremente generada sobre R por elementos $a_i \in e_{t(i)}Ae_{s(i)}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ y denotemos por $A_j = R(a_1, \cdots, a_j)$, a la subálgebra de A generada por R y por $a_1, \cdots, a_j$ para $1 \leq j < n$. Entonces:*

1. *A_j está libremente generada sobre R por los elementos $a_1, \cdots, a_j$.*
2. *A está libremente generada sobre A_j por los elementos $a_{j+1}, \cdots, a_n$.*

Proposición 15. *Sea $A = kQ$ un álgebra de carcaj sobre k, $1_A = \sum_{i=1}^{n} e_i$ una descomposición en idempotentes primitivos ortogonales de 1_A, $a_j : t(j) \to s(j)$ las flechas de Q. Si $R = ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_n$, entonces A está libremente generada sobre R por las a_j.*

Observación 15.1. Supongamos que $A = kQ$, $R = ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_n$ y $V = \amalg_{a_j \in Q_1} Re_{t(j)} \otimes_k e_{s(j)}R$ que podemos identificar con el conjunto de caminos de longitud 1 en Q, similarmente, $V \otimes_R V$ se identifica con los caminos de longitud 2 en Q, etc. Es inmediato que $T_R(V)$ está libremente generada sobre R por los elementos $b_j = e_{t(j)} \otimes_k e_{s(j)}$. Además, $A \cong T_R(V)$.

Definición 16. *Sea R una $k-$álgebra y $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$ una descomposición en idempotentes primitivos ortogonales de 1_R. Un $R-$bimódulo V se dice libremente generado por elementos $v_1, \cdots, v_n$, donde $v_j \in e_{t(j)}Ve_{s(j)}$, si para cualquier $R-$bimódulo W y elementos $w_j \in e_{t(j)}We_{s(j)}$ existe un único morfismo de $R-$bimódulos $\varphi : V \to W$ tal que $\varphi(v_j) = w_j$.*

Proposición 17. *Sea V un bimódulo libremente generado sobre el álgebra R, por los elementos $v_1, \cdots, v_n$ y sea W un $R-$bimódulo generado por elementos $w_1, \cdots, w_n$. Supongamos que existe un morfismo de $R-$bimódulos $\varphi : W \to V$ tal que $\varphi(w_i) = v_i$ para toda i. Entonces, W está libremente generado sobre R por los elementos $w_1, \cdots, w_n$.*

Proposición 18. *Sea V un $R-$bimódulo libremente generado por elementos $v_1, \cdots, v_n$ donde $v_j \in e_{t(j)} V e_{s(j)}$. Sea B una $k-$álgebra y $\varphi : R \to B$ un morfismo. Entonces $B \otimes_R V \otimes_R B$, está libremente generado por los elementos $1_B \otimes_R v_i \otimes_R 1_B$.*

Proposición 19. *Sean B una $k-$álgebra, $1_B = \sum_{i=1}^{l} f_i$ una descomposición en idempotentes primitivos ortogonales de 1_B, V un $B-$bimódulo libremente generado por elementos $v_1, \cdots, v_t$ donde $v_j \in f_{t(j)} V f_{s(j)}$ y $\varphi : B \to R$ un morfismo admisible con respecto a la reducción de Morita de R, $\underline{\tau}= (\{e_i\}_{i=1}^n, \{x_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n, l, \tau)$. Entonces el $eRe-$bimódulo, $eR \otimes_B V \otimes_B Re$ está libremente generado por los elementos de la forma $y_j \otimes_B v_p \otimes_B x_i$ diferentes de cero.*

Demostración. Sea $\varphi(f_i) = \sum_{j=1}^{s} e_j$ y W un eRe - $eRe-$bimódulo con elementos $w_i \in e_{\tau(u)} W e_{\tau(v)}$.Observemos que $eRe_{\tau(u)}$ es isomorfo como $eRe-$módulo izquierdo a $eRe_{\tau(u)} y_u \varphi(f_{t(i)})$. El isomorfismo Ψ está dado de la siguiente forma, sea $\lambda \in eRe_{\tau(u)}$, $\Psi(\lambda) = \lambda y_u \varphi(f_{t(i)})$. Si $\Psi(\lambda) = 0$, entonces $0 = \lambda y_u \varphi(f_{t(i)}) = \lambda y_u (\sum_{i=1}^{s} e_i) = \lambda y_u$, por lo tanto $0 = \lambda y_u x_u = \lambda e_{\tau(u)} = \lambda$. Claramente Ψ es suprayectivo.
Similarmente, tenemos que $\varphi(f_{t(i)}) x_u e_{\tau(u)} Re$ es isomorfo como $eRe-$módulo derecho a $e_{\tau(u)} Re$. Por lo tanto, teniendo en mente la observación 4.1.2) tenemos,

$$
\begin{aligned}
eR \otimes_B V \otimes_B Re &\cong \oplus_{p=1}^{t} eR \otimes_B v_p \otimes_B Re \\
&\cong \oplus_{p=1}^{t} eR \otimes_B B f_{t(p)} \otimes_k f_{s(p)} B \otimes_B Re \\
&\cong \oplus_{p=1}^{t} eR \varphi(f_{t(p)}) \otimes_k \varphi(f_{s(p)}) Re \\
&\cong \oplus_{p,u,v} eRe y_u \varphi(f_{t(p)}) \otimes_k \varphi(f_{s(p)}) x_v eRe \\
&= \oplus_{p,u,v} eRe_{\tau(u)} y_u \varphi(f_{t(p)}) \otimes_k \varphi(f_{s(p)}) x_v e_{\tau(v)} Re \\
&\cong \oplus_{u,v} eRe_{\tau(u)} \otimes_k e_{\tau(v)} Re \\
&\cong \oplus_{u,v} (eRe) e_{\tau(u)} \otimes_k e_{\tau(v)} (eRe)
\end{aligned}
$$

Sea $y_i \otimes_B v_p \otimes_B x_i \in eR \otimes_B V \otimes_B Re$, siguiendo la cadena de isomorfismos anteriores tenemos:

$$
\begin{aligned}
y_i \otimes_B v_p \otimes_B x_i &\cong y_i \otimes_B f_{t(p)} \otimes_k f_{s(p)} \otimes_B x_j \\
&\cong y_i \varphi(f_{t(p)}) \otimes_k \varphi(f_{s(p)}) x_j \\
&\cong y_i (\textstyle\sum_u e_u) \otimes_k (\sum_v e_v) x_j \\
&= \textstyle\sum_w y_i (x_w y_w) (\sum_u e_u) \otimes_k (\sum_v e_v) \sum_z (x_z y_z) x_j \\
&\cong \textstyle\sum_u y_i (x_u y_u) \varphi(f_{t(p)}) \otimes_k \varphi(f_{s(p)}) \sum_v (x_v y_v) x_j \\
&\cong \textstyle\sum_{u,v} y_i x_u e_{\tau(u)} \otimes_k e_{\tau(v)} y_v x_j = e_{\tau(u)} \otimes_k e_{\tau(v)} \blacksquare
\end{aligned}
$$

I.3 Bocses y su categoría de representaciones.

Definición 20. *Un bocs es una terna $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ donde R es una $k-$álgebra, $W = W_0 \oplus W_1$ es un $R-$bimódulo graduado y $\delta : T_R(W) \to T_R(W)$ es una diferencial con $\delta^2 = 0$.*

Definición 21. *Las representaciones del bocs $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$, son las representaciones del álgebra $A = T_R(W_0)$. Si M y N son dos representaciones de $\mathcal{A}$, un morfismo $f : M \to N$ consiste de un par de morfismos $f = (f^0, f^1)$ tal que:*

1. $f^0 \in Hom_R(M, N)$;
2. $f^1 \in Hom_{A-A}(V, Hom_k(M, N))$ donde $V = A \otimes_R W_1 \otimes_R A$;
3. Para todo $a \in A$ y $m \in M$ se tiene:

$$af^0(m) = f^0(am) + f^1(\delta(a))(m).$$

Dados dos morfismos $f : M \to N$ y $g : N \to L$ entre representaciones del bocs $\mathcal{A}$, su composición $gf = ((gf)^0, (gf)^1)$ se define :

$$\begin{aligned} (gf)^0 &= g^0 f^0 \\ (gf)^1(v) &= g^0 f^1(v) + g^1(v) f^0 + \sum g^1(v_i^1) f^1(v_i^2)(v) \end{aligned}$$

donde $v \in V$ y $\delta(v) = \sum_i v_i^1 \otimes v_i^2$.

Proposición 22. *La clase de las representaciones del bocs $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$, junto con los morfismos y la composición que hemos introducido constituye una categoría: la categoría $Rep(\mathcal{A})$ de representaciones del bocs $\mathcal{A}$.*

Demostración. a) Veamos que $h = gf = (h^0, h^1)$ es un morfismo en $Rep(\mathcal{A})$.
Claramente $h^0 \in Hom_R(M, L)$ y, por ser f y g morfismos en $Rep(\mathcal{A})$, para $a \in A, m \in M$ y $n \in N$, se tiene:

$$\begin{aligned} af^0(m) &= f^0(am) + f^1(\delta(a))(m) \\ ag^0(n) &= g^0(an) + g^1(\delta(a))(n) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} ah^0(m) - h^0(am) &= a(g^0(f^0(m))) - g^0(f^0(am)) \\ &= g^0(af^0(m)) + g^1(\delta(a))(f^0(m)) \\ &\quad -g^0(af^0(m)) + g^0(f^1(\delta(a))(m)) \\ &= g^1(\delta(a))(f^0(m)) + g^0(f^1(\delta(a))(m)) \end{aligned}$$

Ahora, si $a, b \in R$, $v \in V$ y $\delta(v) = \sum_i v_i^1 \otimes v_i^2$, $\delta(avb) = \sum_i av_i^1 \otimes v_i^2 b$. Luego, para $m \in M$,

$$\begin{aligned} (gf)^1(avb)(m) &= g^0(f^1(avb)(m)) + (g^1(avb))f^0(m) + \sum g^1(av_i^1)f^1(v_i^2 b)(m) \\ &= g^0((af^1(v)b)(m)) + (ag^1(v)b)f^0(m) + \sum ag^1(v_i^1)f^1(v_i^2)b(m) \\ &= ag^0 f^1(v)(bm) + ag^1(v)f^0(bm) + a\sum g^1(v_i^1)f^1(v_i^2)(bm) \end{aligned}$$

y así, $(gf)^1(avb) = a(gf)^1(v)b$. Esto es, $h^1 \in Hom_{A-A}(V, Hom_k(M, L))$.
Por otro lado, como $0 = \delta(\delta(a)) = \sum w_i^1 \otimes w_i^2$ tenemos:

$$\begin{aligned} h^1(\delta(a))(m) &= g^0 f^1(\delta(a))(m) + g^1(\delta(a))f^0(m) + \sum g^1(w_i^1)f^1(w_i^2)(m) \\ &= g^0 f^1(\delta(a))(m) + g^1(\delta(a))f^0(m) \end{aligned}$$

b) Claramente, para todo $M \in Rep(\mathcal{A})$, el morfismo identidad es $I_M = (I_M, 0)$.

c) Mostraremos que si $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{h} T$ son morfismos en $Rep(\mathcal{A})$, entonces $h(gf) = (hg)f$.

1. Es inmediato que $[h(gf)]^0 = [(hg)f]^0$.

2. Por demostrar que $[h(gf)]^1 = [(hg)f]^1$

$$\text{Sean} \quad v \in V, \quad \begin{aligned} \delta(v) &= \textstyle\sum_i v_i^1 \otimes v_i^2 \\ \delta(v_i^1) &= \textstyle\sum_j w_{ij}^1 \otimes w_{ij}^2 \\ \delta(v_i^2) &= \textstyle\sum_t u_{it}^1 \otimes u_{it}^2 \end{aligned}$$

por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned} [h(gf)]^1(v) &= h^0(gf)^1(v) + h^1(v)(gf)^0 + \textstyle\sum_i h^1(v_i^1)(gf)^1(v_i^2) \\ &= h^0(g^0 f^1(v) + g^1(v)f^0 + \textstyle\sum_i g^1(v_i^1)f^1(v_i^2)) + h^1(v)(gf)^0 \\ &\quad + \textstyle\sum_i h^1(v_i^1)(g^0 f^1(v_i^2) + g^1(v_i^2)f^0 + \sum_t g^1(u_{it}^1)f^1(u_{it}^2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(hg)f]^1(v) &= (hg)^0 f^1(v) + (hg)^1(v)f^0 + \textstyle\sum_i (hg)^1(v_i^1)f^1(v_i^2) \\ &= (h^0 g^0)f^1(v) + (h^0 g^1(v) + h^1(v)g^0 + \textstyle\sum_i h^1(v_i^1)g^1(v_i^2))f^0 \\ &\quad + \textstyle\sum(h^0 g^1(v_i^1) + h^1(v_i^1)g^0 + \sum_j h^1(w_{ij}^1)g^1(w_{ij}^2))f^1(v_i^2) \end{aligned}$$

De donde llegamos a que

$$[h(gf)]^1(v) = [(hg)f]^1(v) \Leftrightarrow \sum_{i,t} h^1(v_i^1)\left[g^1(u_{it}^1)f^1(u_{it}^2)\right] = \sum_{i,j} h^1(w_{ij}^1)g^1(w_{ij}^2)\left[f^1(v_i^2)\right]$$

Pero por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned} 0 = \delta^2(v) &= \delta(\textstyle\sum_i v_i^1 \otimes v_i^2) \\ &= \textstyle\sum_i \delta(v_i^1)v_i^2 + (-1)^{gr(v_i^1)} v_i^1 \delta(v_i^2) \end{aligned}$$

De donde se sigue que $\sum \delta(v_i^1)v_i^2 = \sum v_i^1\delta(v_i^2)$. Estas últimas sumas tienen la misma imagen bajo el morfismo compuesto:

$$V \otimes_R V \otimes_R V \xrightarrow{h^1 \otimes g^1 \otimes f^1} Hom(L, M) \otimes Hom(M, N) \otimes Hom(N, T) \xrightarrow{\Pi} Hom(L, T)$$

donde Π es la composición. Luego, $[h(gf)]^1(v) = [(hg)f]^1(v)$. ■

I.4 Bocses inducidos por morfismos admisibles.

Proposición 23. *Sea R una k–álgebra, $\underline{\tau} = (\{e_i\}_{i=1}^n, \{x_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n, l, \tau)$ una reducción de Morita de R y $e = e(\underline{\tau})$. Entonces*

$$R \cong M_n^\tau(eRe) = \left\{(a_{ij}) \in M_{n\times n}(eRe) \mid a_{ij} \in e_{\tau(i)}Re_{\tau(j)}\right\}.$$

Demostración. Sea $M : R \to M_n^\tau(eRe)$ tal que $M(r) = M_r = (y_i r x_j)$ para toda $r \in R$.

1. Veamos que $M_{r+s} = M_r + M_s$ y $M_{rs} = M_r M_s$.
   $M_{r+s} = (y_i(r+s)x_j) = (y_i r x_j) + (y_i s x_j) = M_r + M_s$.
   $M_r M_s = \sum_u (y_i r x_u)(y_u s x_j) = (y_i r \sum_u x_u y_u s x_j) = (y_i r s x_j) = M_{rs}$.
2. Sea $I_{M_n^\tau(eRe)} = diag(e_{\tau(i)})$ entonces $M(1_R) = (y_i(\sum_{u=1}^n x_u y_u)x_j) = diag(e_{\tau(i)})$.
3. Supongamos que $0 = M(r) = (y_i r x_j)$, entonces $r = \sum x_i y_i r x_j y_j = 0$. Por lo tanto M es un monomorfismo.
4. Un sistema de generadores para $M_n^\tau(eRe)$ como k–espacio vectorial, está dado por las matrices $E_{ij}(s) = \begin{cases} y_i x_i s y_j x_j & \text{en el lugar } ij \\ 0 & \text{en lo demás} \end{cases}$ con $s \in R$, por lo tanto basta demostrar que cada matriz $E_{ij}(s)$ está en la imagen de M. Sean $s \in R$ y $r = x_i s y_j$, entonces $M_r = (y_u x_i s y_j x_u)$ coincide con la matriz cero excepto en la entrada ij que vale $y_i x_i s y_j x_j$. Luego $M_r = E_{ij}(s)$. Con lo que queda demostrado que M es un epimorfismo. ■

Observación 23.1. Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y $\varphi : R \to R'$ un morfismo admisible con respecto a la reducción de Morita de R', $\underline{\tau} = (\{e_i\}_{i=1}^n, \{x_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n, l, \tau)$. Como antes, $e = e(\underline{\tau})$. Consideremos el R'-bimódulo $W' := (R' \otimes_R W \otimes_R R' \oplus K)$ donde $K = ker(R' \otimes_R R' \to R')$, y la R'-álgebra $A' = T_{R'}(W')$. Esta última se relaciona con $A = T_R(W)$ mediante el morfismo $\varphi' : A \to A'$ que extiende a $\varphi : R \to R'$ y a $\overline{\varphi} : W \to W'$ tal que $\overline{\varphi}(w) = 1 \otimes w \otimes 1$.

Ahora bien, por el lema 5, $\underline{\tau}$ también es una reducción de Morita para A' y por lo tanto, $A' \cong M_n^\tau(eA'e)$.

Por la proposición 9, tenemos que $eA'e \cong T_{eR'e}(eW'e)$ como $eR'e$-álgebras. Este isomorfismo induce otro $M_n^\tau(eA'e) \cong M_n^\tau(T_{eR'e}(eW'e))$. Nos interesa la composición

$$A \xrightarrow{\varphi'} A' \cong M_n^\tau(eA'e) \cong M_n^\tau(T_{eR'e}(eW'e))$$

que denotaremos por H; si $a \in A$, H_a denotará la imagen de a bajo H.

Así, por ejemplo, si $w \in W$, $M_{\overline{\varphi}(w)} = M_{1\otimes w \otimes 1} = (y_i \otimes 1 \otimes w \otimes 1 \otimes x_j) \in M_n^\tau(eA'e)$ y $H_w = (y_i \otimes w \otimes x_j)$. Similarmente, si $w \in W$ y $\delta(w) = \sum_s w_s^1 \otimes w_s^2$ $H_{\delta(w)} = (\sum_{s,u}(y_j \otimes w_s^1 \otimes x_u)(y_u \otimes w_s^2 \otimes x_i))$.

En lo que sigue, si L es un R-bimódulo, denotamos por $M_{n\times n}(L)$ el conjunto de matrices de tamaño $n \times n$ con coeficientes en L. En particular si $L = T_R(W)$ diremos que una matriz Z con coeficientes en $T_R(W)$ es homogénea de grado s si todos sus coeficientes son homogéneos de grado s. Ademas, si $B = (b_{ij}) \in M_{n\times n}(T_R(W))$ pondremos $\delta'(B) = (\delta'(b_{ij}))$.

Si δ es la diferencial de $T_R(W)$, podemos considerar el morfismo de R-bimódulos $\overline{\delta} : M_{n\times n}(T_R(W)) \to M_{n\times n}(T_R(W))$ tal que $\overline{\delta}(b_{ij}) = (\delta(b_{ij}))$. Dicho morfismo $\overline{\delta}$ nos será de gran utilidad para manejar la diferencial δ' que construiremos más adelante. Por ahora veamos antes el siguiente hecho.

Lema 24. *Si A, B son matrices homogéneas en $M_{n\times n}(T_R(W))$, entonces $\overline{\delta}(AB) = \overline{\delta}(A)B + (-1)^{gr(A)}A\overline{\delta}(B)$.*

Demostración. Sea $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, entonces:

$$\begin{aligned}
(\overline{\delta}(A)B + (-1)^{gr(A)}A\overline{\delta}(B))_{ij} &= \textstyle\sum_u \overline{\delta}(a_{iu})b_{uj} + \sum_u(-1)^{gr(a_{iu})}a_{iu}\overline{\delta}(b_{uj}) \\
&= \textstyle\sum_u(\overline{\delta}(a_{iu})b_{uj} + (-1)^{gr(a_{iu})}a_{iu}\overline{\delta}(b_{uj})) \\
&= \textstyle\sum_u \overline{\delta}(a_{iu}b_{uj}) = \overline{\delta}(\sum_u a_{iu}b_{uj}) \\
&= (\overline{\delta}(AB))_{ij}
\end{aligned}$$

■

Definición 25. *Si a los supuestos de la observación 23.1 agregamos que* $w_1, \cdots, w_r$ *son generadores libres de* W*, entonces por la proposición 19,* $y_i \otimes w_u \otimes x_j$ *son generadores libres de* $eR' \otimes_R W \otimes_R R'e$*. Además, si* $K = Ker(R' \otimes_R R' \to R')$*,* eKe *está libremente generado por los elementos no nulos* $y_i \otimes x_j$*,* $i \neq j$ *en* $\{1, \cdots, n\}$ *.*
Hagamos $W' = eR' \otimes_R W \otimes_R R'e \oplus eKe$*. Entonces* W' *es un* $eR'e-$*bimódulo con graduación*

$$\begin{aligned} W'_0 &= eR' \otimes_R W_0 \otimes_R R'e \\ W'_1 &= eR' \otimes_R W_1 \otimes_R R'e \oplus eKe. \end{aligned}$$

Sea $\delta' : W' \to W' \otimes_{eR'e} W'$ *el morfismo de* $eR'e-$*bimódulos tal que:*

$$\begin{aligned} \delta'(y_i \otimes w \otimes x_j) &= \textstyle\sum_{u\neq i}(y_i \otimes x_u)(y_u \otimes w \otimes x_j) - \\ &\quad \textstyle\sum_{u\neq i}(-1)^{gr(w)}(y_i \otimes w \otimes x_u)(y_u \otimes x_j) + \\ &\quad \textstyle\sum_{s,u}(y_i \otimes w_s^1 \otimes x_u)(y_u \otimes w_s^2 \otimes x_j) \\ \\ \delta'(y_i \otimes x_j) &= \textstyle\sum_{u\neq i,j}(y_i \otimes x_u) \otimes (y_u \otimes x_j) \end{aligned}$$

donde $\delta(w) = \sum w_s^1 \otimes w_s^2$*. Por la proposición 3,* δ' *se extiende a una diferencial* $\delta' : T_{eR'e}(W') \to T_{eR'e}(W')$*.*

Observación 25.1 : Con la notación anterior en mente, sea $\mu : R' \otimes_R R' \to (R' \otimes_R R') \otimes_{R'} (R' \otimes_R R')$ dado por $\mu(r \otimes s) = r \otimes 1 \otimes 1 \otimes s$, el cual es un $R'-$morfismo de bimódulos. Por el lema 6,

$$(eR' \otimes_R R') \otimes_{R'} (R' \otimes_R R'e) \cong (eR' \otimes_R R'e) \otimes_{eR'e} (eR' \otimes_R R'e),$$

por lo tanto, μ induce un morfismo $\underline{\mu}$: $eR' \otimes_R R'e \to (eR' \otimes_R R'e) \otimes_{eR'e} (eR' \otimes_R R'e)$. Definimos $\rho(z) = \underline{\mu}(z) - w_0 \otimes z - z \otimes w_0$ el cual es un morfismo de $eR'e-$bimódulos, por ser φ admisible. Recordemos que $y_i \in e_{\tau(i)}R'e_i$ y $x_i \in e_iRe_{\tau(i)}$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \rho(y_i \otimes x_j) &= (y_i \otimes 1 \otimes 1 \otimes x_j) - w_0 \otimes (y_i \otimes x_j) - (y_i \otimes x_j) \otimes w_0 \\ &= \textstyle\sum y_i \otimes x_u \otimes y_u \otimes x_j - \sum e_{\tau(i)} \otimes e_{\tau(i)} \otimes y_i \otimes x_j \\ &\quad - \textstyle\sum y_i \otimes x_j \otimes e_{\tau(i)} \otimes e_{\tau(i)} \\ &= \textstyle\sum_{u\neq i,j}(y_i \otimes x_u) \otimes (y_u \otimes x_j) \\ &= \delta'(y_i \otimes x_j) \end{aligned}$$

En conclusión, $\delta' \mid_{eKe} = \rho \mid_{eKe}$.

Sea $X := (y_j \otimes x_i) \in M_{n\times n}(eKe)$ tal que $(X)_{ii} = 0$. Entonces $\delta'(X) = X^2$. Además, con la notación de las observaciones 23.1 y 25, tenemos el siguiente lema.

Lema 26. *Para cualquier elemento homógeneo $w \in T_{eR'e}(W')$,*

$$\delta'(H_w) = XH_w - (-1)^{gr(w)}H_wX + H_{\delta(w)}.$$

Demostración. Como δ, δ' son diferenciales, si w es de grado cero, $\delta'(H_w) = 0 = H_{\delta(w)}$. La igualdad es evidente. Si w tiene grado 1, se sigue de las descripciones de H_w y $H_{\delta(w)}$ dadas al final de la observación 23.1. Supongamos que la fórmula vale para cualquier elemento de grado menor que n. Sea $w = w_1w_2$ tal que grado $w_1 = 1$ y el grado de $w_2 = n$.

$$\begin{aligned}
\delta'(H_w) &= \delta'(H_{w_1}H_{w_2}) = \delta'(H_{w_1})H_{w_2} - H_{w_1}\delta'(H_{w_2}) \\
&= (XH_{w_1} + H_{w_1}X + H_{\delta(w_1)})H_{w_2} - H_{w_1}(XH_{w_2} - (-1)^{gr(w_2)}H_{w_2}X + H_{\delta(w_2)}) \\
&= XH_{w_1}H_{w_2} + (-1)^{gr(w_2)}H_{w_1}H_{w_2}X + H_{\delta(w_1)}H_{w_2} - H_{w_1}H_{\delta(w_2)} \\
&= XH_{w_1w_2} - (-1)^{gr(w_1w_2)}H_{w_1w_2}X + H_{\delta(w_1w_2)}.
\end{aligned}$$

■

Proposición 27. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs, $\varphi : R \to R'$ un morfismo admisible de álgebras con respecto a $\underline{\tau}$ donde $\underline{\tau} = (\{e_i\}_{i=1}^n, \{x_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n, l, \tau)$ es una reducción de Morita de R'. Entonces φ induce un nuevo bocs $\mathcal{B} = (eR'e, W', \delta')$.*

Demostración. Solo resta demostrar que $(\delta')^2 = 0$. Para ello verificaremos que $(\delta')^2(X) = 0$ y $(\delta')^2(H_w) = 0$.

$$(\delta')^2(X) = \delta'(\delta'(X)) = \delta'(XX) = \delta'(X)X - X\delta'(X) = X^3 - X^3 = 0.$$

$$\begin{aligned}
\delta'(\delta'(H_w)) &= \delta'(XH_w - (-1)^{gr(w)}H_wX + H_{\delta(w)}) \\
&= X^2H_w - X(XH_w - (-1)^{gr(w)}H_wX + H_{\delta(w)}) \\
&\quad -(-1)^{gr(w)}(XH_w - (-1)^{gr(w)}H_wX + H_{\delta(w)})X \\
&\quad -(-1)^{gr(w)}H_wX^2 + XH_{\delta(w)} + (-1)^{gr(w)}H_{\delta(w)}X \\
&= X^2H_w - X^2H_w + (-1)^{gr(w)}XH_wX - XH_{\delta(w)} \\
&\quad -(-1)^{gr(w)}XH_wX + (-1)^{gr(w)}(-1)^{gr(w)}H_wX^2 \\
&\quad -(-1)^{gr(w)}H_{\delta(w)}X - (-1)^{gr(w)}H_wX^2 \\
&\quad +XH_{\delta(w)} + (-1)^{gr(w)}H_{\delta(w)}X \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\delta')^2 = 0$ y $\mathcal{B} = (eR'e, W', \delta')$ es un bocs. ■

I.5 Construcción de un funtor fiel y pleno $F : Rep(\mathcal{B}) \to Rep(\mathcal{A})$.

Fijemos para toda esta sección: $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs, $\varphi : R \to R'$ un morfismo admisible de álgebras con respecto a $\underline{\tau}$, donde $\underline{\tau} = (\{e_i\}_{i=1}^n, \{x_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n, l, \tau)$ es una reducción de Morita de R'

Lema 28. *Sea $B = T_{R'}(R' \otimes_R W_0 \otimes_R R')$. Si $M \in Rep(eBe)$, como $R-$módulo ${}_RBe \otimes_{eBe} M \overset{\theta}{\cong}_R R'e \otimes_{eR'e} M$. El isomorfismo θ está dado por la siguiente regla:*

$$\theta(be \otimes m) = \textstyle\sum_{u=1}^n x_u \otimes y_u bem \text{ y } \theta^{-1}(r'e \otimes m) = r'e \otimes m.$$

Demostración. Como $R-$módulos tenemos ${}_RB \cong_R R' \otimes_{R'} B$ y por la proposición 7, ${}_RBe \cong_R R' \otimes_{R'} Be \cong_R R'e \otimes_{eR'e} eBe$, por lo tanto,

${}_RBe \otimes_{eBe} M \cong_R R'e \otimes_{eR'e} eBe \otimes_{eBe} M \cong_R R'e \otimes_{eR'e} M.$ ■

Lema 29. *Para cada $X, Y \in mod(R')$, existe un isomorfismo como $k-$espacios vectoriales $\Psi : Hom_{eR'e}(eX, eY) \to Hom_{R'}(X, Y)$, tal que si $f \in Hom_{eR'e}(eX, eY)$, $\Psi(f)(x) = \sum_i x_i f(y_i x)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} Hom_{R'}(X,Y) &\cong Hom_{R'}(R' \otimes_{R'} X, R' \otimes_{R'} Y) \\ &\cong Hom_{eR'e}(eR' \otimes_{R'} X, eR' \otimes_{R'} Y) \\ &\cong Hom_{eR'e}(eX, eY). \end{aligned}$$

■

Lema 30. *Existe un isomorfismo de $k-$espacios vectoriales $\Psi : Hom_{R'}(R' \otimes_R X, Y) \to Hom_R(X, Y)$, para cada $R-$módulo X y cada $R'-$módulo Y.*

Demostración. Dado $f \in Hom_{R'}(R' \otimes_R X, Y)$, se define $g \in Hom_R(X, Y)$ como $g(x) = f(1 \otimes x)$. Inversamente, dado g, se define f como $f(r \otimes x) = rg(x)$. ■

Lema 31. *Si $M, N \in mod(eR'e)$, existe un isomorfismo de $k-$espacios vectoriales*

$$\Psi : Hom_{eR'e-eR'e}(eR' \otimes_R R'e, Hom_k(M, N)) \to Hom_R(R'e \otimes_{eR'e} M, R'e \otimes_{eR'e} N).$$

Si $f \in Hom_{eR'e-eR'e}(eR' \otimes_R R'e, Hom_k(M, N))$ y $x_i \otimes m$ es un generador típico de $R'e \otimes_{eR'e} M$, $\Psi(f)(x_i \otimes m) = \sum_j x_j \otimes f(y_j \otimes x_i)(m)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} Hom_{eR'e-eR'e}(eR' \otimes_R R'e, Hom_k(M,N)) &\cong Hom_{eR'e}(eR' \otimes_R R'e \otimes_{eR'e} M, N) \\ &\cong Hom_{R'}(R' \otimes_R R'e \otimes_{eR'e} M, R'e \otimes_{eR'e} N) \\ &\cong Hom_R(R'e \otimes_{eR'e} M, R'e \otimes_{eR'e} N). \end{aligned}$$

■

Lema 32. *Si X es un $R-$bimódulo, hay un isomorfismo de k espacios vectoriales*

$$\Psi : Hom_{R-R}(R, X) \to Z(X) = \{x \in X \mid x.r = r.x \; \forall r \in R\}.$$

Demostración. Sea $f \in Hom_{R-R}(R, X)$ entonces $f(1) \in X$. En efecto, para toda $r \in R$ se tiene,

$$\begin{aligned} f(r) &= f(1.r) = f(1).r \\ &= f(r.1) = r.f(1) \end{aligned}$$

Luego, Ψ está bien definida y claramente es $k-$lineal. Ahora, si $c \in Z(X)$, se define $\overline{\Psi}(c)(r) = c.r = r.c$ y se demuestra que $\overline{\Psi} = \Psi^{-1}$. ■

Observe que, en particular, si M y N son $eR'e-$módulos entonces

$$Hom_{eR'e-eR'e}(eR'e, Hom_k(M,N)) \cong Hom_{eR'e}(M,N).$$

Lema 33. *Existe un isomorfismo de $k-$espacios vectoriales*

$$\begin{aligned} Hom_{eR'e-eR'e}(eR' \otimes_R R'e, Hom_k(M,N)) &\xrightarrow{\Psi} Hom_{eR'e-eR'e}(eKe, Hom_k(M,N)) \oplus \\ & \quad Hom_{eR'e}(M,N)) \end{aligned}$$

Si $U^1 \in Hom_{eR'e-eR'e}(eKe, Hom_k(M,N))$, $U^0 \in Hom_{eR'e}(M,N))$ y definimos $U = \Psi^{-1}(U^0 + U^1) \in Hom_{eR'e-eR'e}(eR' \otimes_R R'e, Hom_k(M,N))$, entonces

$$U(y_i \otimes x_j)(m) = \begin{cases} U^1(y_i \otimes x_j)(m) & i \neq j \\ U^0(e_{\tau(i)}(m)) & i = j \end{cases}$$

Demostración. Como $eR' \otimes_R R'e \to eR'e$ es suprayectivo, sabemos que $eR' \otimes_R R'e \cong eR'e \oplus eKe$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
Hom_{eR'e-eR'e}(eR' \otimes_R R'e, Hom_k(M,N)) &\cong Hom_{eR'e-eR'e}(eKe, Hom_k(M,N)) \oplus \\
&\quad Hom_{eR'e-eR'e}(eR'e, Hom_k(M,N)) \\
&\cong Hom_{eR'e-eR'e}(eKe, Hom_k(M,N)) \oplus \\
&\quad Hom_{eR'e}(M,N).
\end{aligned}$$

∎

Lema 34. *Si $M, N \in Rep(\mathcal{A})$, existe un isomorfismo:*

$$Hom_{A-A}(A \otimes_R W_1 \otimes_R A, Hom_k(M,N)) \xrightarrow{\Psi} Hom_{R-R}(W_1, Hom_k(M,N)).$$

Si $f \in Hom_{R-R}(W_1, Hom_k(M,N))$ se tiene $\Psi^{-1}(f)(a_1 \otimes v \otimes a_2)(m) = a_1.f(v)(a_2.m)$ con $a_1, a_2 \in A, v \in W_1$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
Hom_{R-R}(W_1, Hom_k(M,N)) &\cong Hom_R(W_1 \otimes_R M, N) \\
&\cong Hom_A(A \otimes_R W_1 \otimes_R M, N) \\
&\cong Hom_A(A \otimes_R W_1 \otimes_R A \otimes_A M, N) \\
&\cong Hom_{A-A}(A \otimes_R W_1 \otimes_R A, Hom_k(M,N)) \\
&\cong Hom_{A-A}(V(\mathcal{A}), Hom_k(M,N)).
\end{aligned}$$

∎

Observación 34.1. Para $W_1' = eR' \otimes_R W_1 \otimes_R R'e \oplus eKe$, se tiene:

$$\begin{aligned}
Hom_{eR'e-eR'e}(W_1', Hom_k(M,N)) &\cong Hom_{eR'e-eR'e}(eR' \otimes_R W_1 \otimes_R R'e, Hom_k(M,N)) \oplus \\
&\quad Hom_{eR'e-eR'e}(eKe, Hom_k(M,N))
\end{aligned}$$

Lema 35. *Si M y $N \in mod(eR'e)$. Existe un isomorfismo de $k-$espacios vectoriales*

$$\begin{gathered}
Hom_{eR'e-eR'e}(eR' \otimes_R W_1 \otimes_R R'e, Hom_k(M,N)) \\
\downarrow \Psi \\
Hom_{R-R}(W_1, Hom_k(R'e \otimes_{eR'e} M, R'e \otimes_{eR'e} N))
\end{gathered}$$

Si $f \in Hom_{eR'e-eR'e}(eR' \otimes W_1 \otimes R'e, Hom_k(M,N))$, tenemos que $\Psi(f) = g$ está dada por $g(w)(x_i \otimes m) = \sum_j x_j \otimes f(y_j \otimes w \otimes x_i)(m)$.

Demostración. Considere la siguiente cadena de isomorfismos:

$$\begin{array}{c} Hom_{eR'e-eR'e}(eR' \otimes_R W_1 \otimes_R R'e, Hom_k(M,N)) \\ \downarrow \\ Hom_{eR'e}(eR' \otimes_R W_1 \otimes_R R'e \otimes_{eR'e} M, N) \\ \downarrow \\ Hom_{eR'e}(eR' \otimes_R W_1 \otimes_R R'e \otimes_{eR'e} M, eR'e \otimes_{eR'e} N) \\ \downarrow \\ Hom_{R'}(R' \otimes_R W_1 \otimes_R R'e \otimes_{eR'e} M, R'e \otimes_{eR'e} N) \\ \downarrow \\ Hom_R(W_1 \otimes_R R'e \otimes_{eR'e} M, R'e \otimes_{eR'e} N) \\ \downarrow \\ Hom_{R-R}(W_1, Hom_k(R'e \otimes_{eR'e} M, R'e \otimes_{eR'e} N)). \end{array}$$

■

Teorema 36. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs y $\varphi : R \to R'$ un morfismo admisible con respecto a $\underline{\tau}$ donde $\underline{\tau} = (\{e_i\}_{i=1}^n, \{x_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n, l, \tau)$ es una reducción de Morita de R'. Sea $\mathcal{B} = (eR'e, W', \delta')$ como se definió en I.4. Entonces existe un funtor fiel y pleno $F : Rep(\mathcal{B}) \to Rep(\mathcal{A})$.*

Demostración. Sea $B = T_{R'}(R' \otimes_R W_0 \otimes_R R')$ y $\varphi' : A \to B$ el morfismo inducido por φ y $w \mapsto 1 \otimes w \otimes 1$ de W_0 en $R' \otimes_R W_0 \otimes_R R'$. Así, todo $B-$módulo será $A-$módulo pr restricción de escalares vía φ'. Por otro lado, por la proposición 9, podemos identificar a eBe con $T_{eR'e}(eR' \otimes_R W_0 \otimes_R R'e)$. Asi, todo objeto M de $Rep(\mathcal{B})$ determina un módulo $M \in Mod(eBe)$ y podemos definir $F : Rep(\mathcal{B}) \to Rep(\mathcal{A})$, en objetos, por la fórmula $F(M) = Be \otimes_{eBe} M$.

Con el fín de describir mejor la acción de A sobre $F(M)$, trasladaremos la acción de A sobre el $R-$módulo $R'e \otimes_{eR'e} M$ con la ayuda del isomorfismo del lema 28. Primero observemos que, por la observación 4.1(2), si $z \in R'e \otimes_{eR'e} M$, z tiene una expresión única de la forma $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes_{eR'e} m_i$ donde $m_i \in e_{\tau(i)}M$. Podemos entonces representar a z con su "vector de coordenadas" :

$$[z] = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}$$

Ahora, si $a \in A$,

$$\begin{aligned} az &= a.(\textstyle\sum x_i \otimes_{eR'e} m_i) \\ &= \theta(a\theta^{-1}(\textstyle\sum x_i \otimes_{eR'e} m_i)) \\ &= \theta(a(\textstyle\sum x_i \otimes_{eBe} m_i)) \\ &= \theta(\varphi'(a)(\textstyle\sum x_i \otimes_{eBe} m_i)) \\ &= \theta(\textstyle\sum \varphi'(a)x_i \otimes_{eBe} m_i)) \\ &= \textstyle\sum_j x_j \otimes_{eR'e} (y_j\varphi'(a)x_i).m_i \end{aligned}$$

En resumen, $[a.z] = M_{\varphi'(a)}[z]$, donde M denota el isomorfismo $B \to M_n^{\tau}(eBe)$.

La idea para dar el funtor F en morfismos es la siguiente: $U = (U^0, U^1) \in Hom_{\mathcal{B}}(M, N)$ está dado por $U^0 \in Hom_{eR'e}(M, N)$ y $U^1 \in Hom_{_{eBe-eBe}}(V(\mathcal{B}), Hom_k(M, N))$. A su vez, $U^1 \cong U_0^1 + f^1$ donde $U_0^1 \in Hom_{eR'e-eR'e}(eKe, Hom_k(M, N))$ y el morfismo $f^1 \in Hom_{A-A}(V(\mathcal{A}), Hom_k(F(M), F(N))$. Por otro lado, queremos tener un morfismo $f = (f^0, f^1) \in Hom_{\mathcal{A}}(F(M), F(N))$, donde $f^0 \in Hom_R(F(M), F(N))$ y $f^1 \in Hom_{A-A}(V(\mathcal{A}), Hom_k(F(M), F(N))$. Veremos que $f^0 = U^0 + U_0^1$ funciona bien.

Si $M, N \in Rep(\mathcal{B})$, sea $U = (U^0, U^1) \in Hom_{\mathcal{B}}(M, N)$ entonces,

$$\begin{array}{rcl} U^0 & \in & Hom_{eR'e}(M, N) \\ U^1 & \in & Hom_{_{eBe-eBe}}(V(\mathcal{B}), Hom_k(M, N)) \end{array}$$

Por los lemas 33, 34 y la observación 34.1, tenemos que $U^1 \cong U_0^1 + f^1$ donde $U_0^1 \in Hom_{eR'e-eR'e}(eKe, Hom_k(M, N))$ y $f^1 \in Hom_{A-A}(V(\mathcal{A}), Hom_k(F(M), F(N))$. Observemos que $U_0^1 = U^1 \mid_{eKe}$, por lo que escribiremos $U^1 \cong U^1 + f^1$. Explícitamente,

$$f^1(a_1wa_2)(x_i \otimes m) = \textstyle\sum_{r,s,j} x_r \otimes (y_r\varphi(a_1)x_s)U^1(y_s \otimes w \otimes x_j)(y_j\varphi(a_2)x_i)(m).$$

Pero

$$\begin{array}{rcl} \sum_{s,j}(y_r\varphi(a_1)x_s)U^1(y_s \otimes w \otimes x_j)(y_j\varphi(a_2)x_i) & = & U^1 \sum_{s,j}(y_r\varphi(a_1)x_s)(y_s \otimes w \otimes x_j)(y_j\varphi(a_2)x_i) \\ & = & U^1(y_r\varphi(a_1) \otimes w \otimes \varphi(a_2)x_i) \end{array}$$

Por otro lado $\varphi : R \to R'$ induce $\varphi' : A \to B$ dado por $\varphi'(w) = 1 \otimes w \otimes 1$ para toda $w \in W$, por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} \varphi'(a_1wa_2) & = & \varphi'(a_1)\varphi'(w)\varphi'(a_2) \\ & = & \varphi'(a_1)(1 \otimes w \otimes 1)\varphi'(a_2) \\ & = & \varphi'(a_1) \otimes w \otimes \varphi'(a_2) \end{array}$$

De donde, finalmente tenemos que

$$f^1(a_1wa_2)(x_i \otimes m) = \textstyle\sum_r x_r \otimes U^1(y_r\varphi(a_1wa_2)x_i)(m).$$

En términos de coordenadas,

$$[f^1(a_1wa_2)(z)] = U^1 M_{\varphi(a_1wa_2)}[z].$$

En general, si $v \in V(\mathcal{A})$, $[f^1(v)(z)] = U^1 M_{\varphi(v)}[z]$.

Por los lemas 31 y 33 tenemos el siguiente isomorfismo:

$$Hom_R(F(M), F(N)) \cong Hom_{eR'e}(M, N) \oplus Hom_{_{eR'e-eR'e}}(eKe, Hom_k(M, N))$$

Para $U^0 \in Hom_{eR'e}(M,N)$, y $U^1 \in Hom_{eR'e-eR'e}(eKe, Hom_k(M,N))$, se define $f^0 \in Hom_R(F(M), F(N))$, dado por $f^0(x_i \otimes m) = \sum_{j\neq i} x_j \otimes U^1(y_j \otimes x_i)(m) + x_i \otimes U^0(e_{\sigma(i)}m)$. En términos de coordenadas tenemos,

$$[f^0(z)] = U^1(X)\,[z] + U^0\,[z]\,.$$

Veamos que el morfismo $f = (f^0, f^1) \in Hom_{\mathcal{A}}(F(M), F(N))$.

$f = (f^0, f^1)$ es un morfismo si y sólo si para todo $a \in A, z \in F(M)$ se cumple:

$$a.f^0(z) = f^0(a.z) + f^1(\delta(a))(z)$$

En términos de coordenadas, tenemos:

$$[a.(f^0(z))] = [f^0(a.z)] + [f^1(\delta(a))(z)]$$

es decir,

$$\begin{aligned} M_{\varphi(a)}U^1(X)\,[z] + M_{\varphi(a)}U^0\,[(z)] &= U^1(X)M_{\varphi(a)}\,[z] + U^0 M_{\varphi(a)}\,[z] + \\ & \quad U^1 M_{\delta(\varphi(a))}\,[z] \end{aligned}$$

O, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} M_{\varphi(a)}U^0\,[(z)] - U^0 M_{\varphi(a)}\,[z] &= U^1(X)M_{\varphi(a)}\,[z] - M_{\varphi(a)}U^1(X)\,[z] + \\ & \quad U^1 M_{\delta(\varphi(a))}\,[z] \end{aligned}$$

Como $(U^0, U^1) \in Hom_{\mathcal{B}}(M,N)$, para $y_j\varphi(a)x_i \in eBe$, $m_i \in M$, se tiene,

$$(y_j\varphi(a)x_i)U^0(m_i) - U^0(y_j\varphi(a)x_i)(m_i) = U^1(\delta'(y_j\varphi(a)x_i))(m_i)$$

En términos de coordenadas, tenemos:

$$\begin{aligned} M_{\varphi(a)}U^0\,[(z)] - U^0 M_{\varphi(a)}\,[z] &= U^1(\delta'(M_{\varphi(a)}))\,[z] \\ &= U^1(XM_{\varphi(a)} - M_{\varphi(a)}X + M_{\delta(\varphi(a))})\,[z] \\ &= U^1(X)M_{\varphi(a)}\,[z] - M_{\varphi(a)}U^1(X)\,[z] + \\ & \quad U^1 M_{\delta(\varphi(a))}\,[z]\,. \end{aligned}$$

Si definimos $F : Rep(\mathcal{B}) \to Rep\mathcal{A}$ por la regla $F(U) = (f^0, f^1)$ como ha sido descrito en el párrafo anterior, tenemos claramente que $F(I_M) = I_{F(M)}$. Por lo que solo nos resta ver que para

$$M \quad \xrightarrow{U} \quad N \quad \xrightarrow{V} \quad L \quad \text{en} \quad Rep(\mathcal{B})$$

$$R'e \otimes M \quad \xrightarrow{f} \quad R'e \otimes N \quad \xrightarrow{g} \quad R'e \otimes L \quad \text{en} \quad Rep(\mathcal{A})$$

tales que:

$$F(U) = f \qquad F(V) = g \qquad F(VU) = h$$

se tiene que $((gf)^0, (gf)^1) = (h^0, h^1)$.

$$\begin{aligned} [(gf)^0(z)] = [g^0(f^0(z))] &= V^1(X)\,[f^0(z)] + V^0\,[f^0(z)] \\ &= V^1(X)U^1(X)\,[z] + V^1(X)U^0\,[z] + \\ &\quad V^0U^1(X)\,[z] + V^0U^0\,[z] \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} [h^0(z)] &= (VU)^1(X)\,[z] + V^0U^0\,[z] \\ &= V^1(X)U^1(X)\,[z] + V^1(X)U^0\,[z] + \\ &\quad V^0U^1(X)\,[z] + V^0U^0\,[z] \end{aligned}$$

por lo tanto, $(gf)^0 = h^0$.

Sólo nos falta demostrar que $(gf)^1 = h^1$.

$$\begin{aligned} [h^1(w)(z)] &= (VU)^1 M_{\varphi(w)}\,[z] \\ &= V^0U^1M_{\varphi(w)}\,[z] + V^1M_{\varphi(w)}U^0\,[z] + \\ &\quad (V^1 \otimes U^1)\delta'(M_{\varphi(w)})\,[z] \\ &= V^0U^1M_{\varphi(w)}\,[z] + V^1M_{\varphi(w)}U^0\,[z] + \\ &\quad (V^1 \otimes U^1)\delta'(A_w)\,[z] \\ &= V^0U^1M_{\varphi(w)}\,[z] + V^1M_{\varphi(w)}U^0\,[z] + \\ &\quad (V^1 \otimes U^1)(XA_w + A_wX + A_{\delta(w)})\,[z] \end{aligned}$$

Por lo que finalmente tenemos,

$$\begin{aligned} [h^1(w)(z)] &= V^0U^1M_{\varphi(w)}\,[z] + V^1M_{\varphi(w)}U^0\,[z] + V^1(X)U^1M_{\varphi(w)} + \\ &\quad V^1M_{\varphi(w)}U^1(X) + (V^1 \otimes U^1)M_{\varphi(\delta(w))}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} [(gf)^1(w)(z)] &= [g^0f^1(w)(z)] + [g^1(w)f^0(z)] + [(g^1 \otimes f^1)(\delta(w)(z)] \\ &= V^1(X)\,[f^1(w)(z)] + V^0\,[f^1(w)(z)] + \\ &\quad V^1M_{\varphi(w)}\,[f^0(z)] + [(g^1 \otimes f^1)(\delta(w)(z)] \\ &= V^1(X)U^1M_{\varphi(w)}\,[z] + V^0U^1M_{\varphi(w)}\,[z] + V^1M_{\varphi(w)}U^1(X)\,[z] + \\ &\quad V^1M_{\varphi(w)}U^0\,[z] + [(g^1 \otimes f^1)(\delta(w)(z)] \end{aligned}$$

Por lo que para concluir, es necesario ver que $[(g^1 \otimes f^1)(\delta(w)(z)] = (V^1 \otimes U^1)M_{\varphi(\delta(w))}\,[z]$.

$$\begin{array}{rcl}[(g^1 \otimes f^1)(\delta(w)(z)] & = & \sum_s [g^1(w_s^1)f^1(w_s^2)(z)] \\ & = & \sum_s V^1 M_{\varphi(w_s^1)} [f^1(w_s^2)(z)] \\ & = & \sum_s V^1 M_{\varphi(w_s^1)} U^1 M_{\varphi(w_s^2)} [z] \\ & = & (V^1 \otimes U^1) \sum_s M_{\varphi(w_s^1)} M_{\varphi(w_s^2)} [z] \\ & = & (V^1 \otimes U^1) M_{\varphi(\delta(w))} [z] \,.\end{array}$$

■

CAPITULO II

Una bigráfica B es una gráfica finita orientada con dos tipos de flechas. Si R es un álgebra minimal y W es un $R-$bimódulo graduado libremente generado sobre R, existe una biyección entre las parejas (R, W) y las parejas (R, B). Definiremos lo que es un funtor admisible elemental entre la categoría de representaciones de los bocses $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Mostraremos que un algoritmo de reducción es un funtor admisible elemental fiel y pleno $F : Rep(\mathcal{B}) \to Rep(\mathcal{A})$. Nuestro propósito en este capítulo es describir explícitamente cuatro algoritmos de reducción: eliminación de idempotentes, regularización, reducción de una flecha y unravelling. Finalizamos esta sección con algunas propiedades importantes de los algoritmos de reducción.

II.1 Bocses diferenciables triangulares.

Definición 1. *Una $k-$álgebra R es minimal si existe una descomposición en idempotentes primitivos ortogonales de $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$ tales que:*

1. *Para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$, $e_iRe_i \cong k$ ó $e_iRe_i \cong k[x]_{f_i(x)}$ para algún $f_i \in k[x]$;*
2. *Si $i \neq j$, $e_iRe_j = 0$.*

Observemos que si R es una $k-$álgebra minimal entonces R es básica e isomorfa a una $k-$álgebra $S = k \times \cdots \times k \times k[x]_{f_1(x)} \times \cdots \times k[x]_{f_t(x)}$.

Definition 2. *Una bigráfica $B = (V, A, gr)$ es una gráfica orientada finita, donde V es el conjunto de vértices de B, A es el conjunto de aristas de B y $gr : A \to \{0, 1\}$ es una función. Si $\alpha \in A$, el grado de $\alpha = gr(\alpha)$.*

Si R es un álgebra minimal, $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$ es una descomposición en idempotentes primitivos ortogonales de 1_R y W un $R-$bimódulo graduado libremente generado, e.d, $W_0 = \amalg_{i \in I} Re_{t(i)} \otimes_R e_{s(i)}R$ y $W_1 = \amalg_{j \in J} Re_{t(j)} \otimes_R e_{s(j)}R$, al par (R, W) podemos asociarle una bigráfica B de la siguiente forma:

1. El conjunto de vértices de B, $V = \{1, \cdots, n\}$.
2. Para cada $\alpha_i \in e_{t(i)}W_0e_{s(i)}$ generador libre de W_0 sea $\alpha : s(i) \longrightarrow t(i)$ una flecha de grado cero en B.
3. Para cada $v_i \in e_{t(i)}W_1e_{s(i)}$ generador libre de W_1 sea $v : s(i) \dashrightarrow t(i)$ una flecha de grado uno en B.

Recíprocamente, dada un álgebra minimal R con descomposición $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$ en idempotentes ortogonales primitivos, a cada bigráfica B con vértices $\{1, 2, \cdots, n\}$ podemos asociarle un par (R, W) de la siguiente manera:

1. Por cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$ de grado cero en B, sea $\alpha_i \in e_{t(i)}W_0e_{s(i)}$ un generador libre de W_0.
2. Por cada flecha $v : i \dashrightarrow j$ de grado uno en B, sea $v_i \in e_{t(i)}W_1e_{s(i)}$ un generador libre de W_1

En lo que sigue, se considera siempre el caso en que W_0 y W_1 están libremente generados sobre R por elementos $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ y $v_1, \cdots, v_m$, respectivamente, por lo que pensaremos indistintamente en el par (R, W) o (R, B).

Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs, B la bigráfica asociada a $\mathcal{A}$, $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ el conjunto de flechas de grado cero en B, y $\{v_1, \cdots, v_m\}$ el conjunto de flechas de grado uno en B.

Definición 3. *Un bocs $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ es triangular si:*

1. *Existe un orden $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ tal que para todo i, $1 \leq i \leq n$, $\delta(\alpha_i) = \sum b_j v_j c_j$, con b_j, c_j caminos de B de grado cero compuestos por flechas del conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}\}$ y v_j una flecha de grado uno en B.*
2. *Existe un orden $v_1 < v_2 < \cdots < v_m$ tal que para toda j, $1 \leq j \leq m$, $\delta(v_j) = \sum w_k w_l$, con w_k, w_l caminos de grado uno compuestos por flechas del conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_{j-1}\}$ y flechas de grado cero.*

En lo que sigue todos los bocses son triangulares.

Lema 4. *Sea* $f = (f^0, f^1) : M \to N$ *en* $Rep\mathcal{A}$*. Entonces* f *es un isomorfismo si y sólo si* f^0 *es un isomorfismo en* $modR$*.*

Demostración. *a*) Supongamos que $f = (f^0, f^1)$ es un isomorfismo, entonces existe $g = (g^0, g^1)$ tal que $gf = (I, 0)$ y $fg = (I, 0)$. Pero $I = (gf)^0 = g^0 f^0$. Similarmente $f^0 g^0 = I$, por lo tanto f^0 es un isomorfismo.
b) Supongamos que f^0 es un isomorfismo y sea g^0 su inverso, queremos demostrar que existe g^1, tal que $(g^0, g^1)(f^0, f^1) = (I, 0)$. Como el bocs es triangular, existe α_1 minimal tal que $\delta(\alpha_1) = 0$. Definamos $g^1(\alpha_1) = -g^0 f^1(\alpha_1)(f^0)^{-1}$, por lo tanto $(gf)^1(\alpha_1) = 0$. Inductivamente podemos definir

$$g^1(\alpha_n) = -g^0 f^1(\alpha_n)(f^0)^{-1} - \textstyle\sum_j g^1(\alpha_j^1) f^1(\alpha_j^2)$$

donde $\delta(\alpha_n) = \sum_j \alpha_j^1 \otimes \alpha_j^2$ y $\alpha_j^1, \alpha_j^2 < \alpha_n$.
Por lo tanto, para todo $\alpha \in A \otimes W_1 \otimes A$ y $m \in M$ se satisface

$$g^0 f^1(\alpha)(m) + g^1(\alpha) f^0(m) + \textstyle\sum_i g^1(\alpha_i^1) f^1(\alpha_i^2)(m) = 0$$

donde $\delta(\alpha) = \sum_i \alpha_i^1 \otimes \alpha_i^2$. En particular si $v = \delta(\alpha)$, se tiene

$$g^0 f^1(\delta(\alpha))(m) = -g^1(\delta(\alpha)) f^0(m).$$

Veremos ahora que (g^0, g^1) es un morfismo. Como g^0 es un isomorfismo, todo $n \in N$ es de la forma $f^0(m)$ y usando el hecho de que f es un morfismo se tiene,

$$g^0 \left[a f^0(m) - f^0(am)\right] = g^0(f^1(\delta(a))(m)$$

lo cual implica que

$$g^0(a f^0(m)) - a g^0(f^0(m)) = -g^1(\delta(a)) f^0(m)$$

por lo tanto

$$a g^0(f^0(m)) - g^0(a f^0(m)) = g^1(\delta(a)) f^0(m).$$

De manera similar se demuestra que g es inverso izquierdo de f. ■

II.2 Eliminación de idempotentes.

Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs donde R es minimal, $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$ una descomposición en idempotentes primitivos ortogonales de 1_R y $I = \langle e_l \rangle$, para l arbitrario $1 \leq l \leq n$.

Sea $R' = R/I$, $1_{R'} = \sum_{i=1, i \neq l}^{n} e_i$ y $\varphi : R \to R/I$ el mofismo canónico. Observe que R' es básica, por lo que resulta innecesario considerar una reducción de Morita y claramente φ es un morfismo admisible. Por la teoría general expuesta en el capítulo anterior, el nuevo R'−bimódulo está dado por $W' = R/I \otimes_R W \otimes_R R/I \oplus eKe$. Observemos que $R/I \otimes_{R/I} R/I \cong R/I \otimes_R R/I \to R/I$ es un isomorfismo, por lo tanto, $eKe = 0$.

Recordemos que los generadores libres de W' son de la forma $e_i \otimes_R w \otimes_R e_j$ para $i, j \neq l$ y w generador libre de W. Por lo tanto la nueva diferencial $\delta' : T_{R/I}(W') \to T_{R/I}(W')$ está dada de la siguiente manera $\delta'(e_i \otimes_R w \otimes_R e_j) = 1_{R/I} \otimes_R \delta(w) \otimes_R 1_{R/I}$.

Por lo tanto $\mathcal{B} = (R', W', \delta')$, resulta ser un nuevo bocs diferenciable y existe un funtor fiel y pleno $F : Rep\mathcal{B} \to Rep\mathcal{A}$.

Si $M \in Rep\mathcal{B}$ se define $F(M) =_A M$ tal que $({}_AM)_i = M_i$ si $i \neq l, ({}_AM)_l = 0$. Si $f = (f^0, f^1) : M \to N$, $B = \left[T_{R/I}(W')\right]_0$, como $Hom_{R/I}(M, N) = Hom_R({}_AM, {}_AN)$ y

$$Hom_{B-B}\left(\left[T_{R/I}(W')\right]_1, Hom_k(M, N)\right) = Hom_{A-A}\left([T_R(W)]_1, Hom_k({}_AM, {}_AN)\right)$$

se tiene $F(f) = f$.

Observe que si consideramos la subcategoría plena de $Rep\mathcal{A}$ formada por las re- presentaciones M tales que $(M)_l = 0$, entonces el funtor F resulta ser una equivalencia.

Finalmente, si B es la bigráfica asociada al bocs $\mathcal{A}$, B' la bigráfica asociada al bocs $\mathcal{B}$, tiene los mismos vértices que B, excepto el vértice l. Las flechas de B' son las mismas que las de B excepto aquellas que tengan algún extremo en l.

II.3 Reducción de una flecha.

Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs triangular diferenciable, R básica, $1_R = \sum_{i=1}^{n} f_i$ una descomposición en idempotentes primitivos ortogonales de 1_R, $a(s) = f_{b(s)} \otimes_k f_{a(s)}$ los generadores de W_0 y $v(t) = f_{b(t)} \otimes_k f_{a(t)}$ los generadores de W_1, es decir :

$$\begin{array}{rcl} W_0 & = & \amalg_{a(s)} Ra(s)R \\ W_1 & = & \amalg_{v(t)} Rv(t)R \end{array}$$

Sea $\alpha = f_j \otimes_k f_i \in W_0$; $i \neq j$, $f_i R f_i = k$, $f_j R f_j = k$ y $\delta(\alpha) = 0$. Si $R = R_0 \times R_1 = k \times k \times R_1$ y $R(\alpha) = R_0(\alpha) \times R_1$ sabemos que $A = T_R(W) \cong T_{R(\alpha)}(W_\alpha)$ donde W_α es el $R(\alpha)-$bimódulo graduado con generadores $\{a(s)\}_{a(s)\neq\alpha}$ y $\{v(t)\}$, es decir,

$$W_\alpha = \amalg_{a(s)\neq\alpha} R(\alpha)a(s)R(\alpha) \oplus \amalg_{v(t)} R(\alpha)v(t)R(\alpha)$$

Sea $R' = k \times M_2(k) \times k \times R_1$; $1_{R'} = \sum_{i=1}^n e_i + e_{z_1} + e_{z_2}$, $x_{z_2} \in e_{z_2} R' e_{z_1}$, $y_{z_2} \in e_{z_1} R' e_{z_2}$ donde,

$$e_{z_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{z_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{z_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_{z_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $\varphi : R(\alpha) \to R'$ el siguiente morfismo de álgebras,

$$\begin{array}{rcll} \varphi(f_l) & = & e_l & \text{si } l \neq i, j \\ \varphi(f_i) & = & e_i + e_{z_1} & \\ \varphi(f_j) & = & e_j + e_{z_2} & \\ \varphi(\alpha) & = & x_{z_2} & \end{array}$$

Podemos extender $\varphi : R(\alpha) \to R'$ a $\phi : T_{R(\alpha)}(W_\alpha) \to T_{R'}(R' \otimes_{R(\alpha)} W_\alpha \otimes_{R(\alpha)} R')$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} \phi(f_{b(s)} \otimes_k f_{a(s)}) & = & 1_{R'} \otimes_{R(\alpha)} f_{b(s)} \otimes_k f_{a(s)} \otimes_{R(\alpha)} 1_{R'} \\ & = & \varphi(f_{b(s)}) \otimes_{R(\alpha)} 1_{R(\alpha)} \otimes_k 1_{R(\alpha)} \otimes_{R(\alpha)} \varphi(f_{a(s)}) \\ & \cong & \varphi(f_{b(s)}) \otimes_k \varphi(f_{a(s)}) \\ & = & \varphi(a(s)) \end{array}$$

por lo tanto:

$$\begin{array}{rcl} R' \otimes_{R(\alpha)} W_\alpha \otimes_{R(\alpha)} R' & = & R' \otimes_{R(\alpha)} \left(\amalg_{a(s)\neq\alpha} R(\alpha)a(s)R(\alpha)\right) \otimes_{R(\alpha)} R' \oplus \\ & & R' \otimes_{R(\alpha)} \left(\amalg_{v(t)} R(\alpha)v(t)R(\alpha)\right) \otimes_{R(\alpha)} R' \\ & = & \left(\amalg_{a(s)\neq\alpha} R'\varphi(a(s))R'\right) \oplus \left(\amalg_{v(t)} R'\varphi(v(t))R'\right). \end{array}$$

A continuación daremos una reducción de Morita de R'.

Sea $e = \sum_{i=1}^n e_i + e_{z_1}$, $\tau : I_n \cup \{z_1, z_2\} \to I_n \cup \{z_1\}$ tal que

$$\tau(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \in I_n \cup \{z_1\} \\ z_1 & i = z_2 \end{cases}$$

Si $i \in I_n \cup \{z_1\}$, $x_i = y_i = e_i$, $y_{z_2}x_{z_2} = e_{\tau(z_2)}$ y $x_{z_2}y_{z_2} = e_{z_2}$, R' es Morita equivalente a $eR'e$, donde:

$$eR'e = e(k \times M_2(k) \times k \times R_1)e \cong k \times k \times k \times R_1 = R \times k.$$

El nuevo $eR'e-$bimódulo graduado es $W' = e\left(R' \otimes_{R(\alpha)} W_\alpha \otimes_{R(\alpha)} R'\right)e \oplus eKe$, con graduación,

$$\begin{aligned} W_0' &= \amalg_{a(s)\neq\alpha} eR'\varphi(a(s))R'e \\ W_1' &= \amalg_{v(t)} eR'\varphi(v(t))R'e \oplus eKe \end{aligned}$$

donde $eKe = Ker(eR' \otimes_{R(\alpha)} R'e \to eR'e)$.
Recordemos que $\{y_k\}$ y $\{x_l\}$ son conjuntos de generadores de eR' y $R'e$, respectivamente, además $eR' \otimes_{R(\alpha)} R'e \overset{\phi}{\cong} Hom_{eR'e}(End_{R(\alpha)}(R'e), eR'e)$ (ver[BZ]), el isomorfismo es el siguiente:

$$\text{si } g \in End_{R(\alpha)}(R'e) \Rightarrow \phi(y_k \otimes x_l)(g) = y_k g(x_l).$$

Si $z \in R'e = (k \times M_2(k) \times k \times R_1)e \cong ke_i \times ke_{z_1} \times kx_{z_2} \times ke_j \times R_1 e$, $a \in R(\alpha)$, para $g \in End_{R(\alpha)}(R'e)$, se debe de cumplir que $g(a.z) = a.g(z)$ con la acción determinada por $\varphi : R(\alpha) \to R'$ por lo que tenemos el siguiente lema.

Lema 5. *Si $g \in End_{R(\alpha)}(R'e)$ entonces g tiene la siguiente forma matricial:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{34} & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_r \end{pmatrix}$$

.

Demostración

$$g(f_iz) = g((e_i + e_{z_1})z) = (e_i + e_{z_1})g(z) \Rightarrow \begin{cases} z = e_i & g(e_i) = (a_{11}e_i + a_{21}e_{z_1}) \\ z = e_{z_1} & g(e_{z_1}) = (a_{21}e_i + a_{22}e_{z_1}) \end{cases}$$

$$g(f_jz) = g((e_j + e_{z_2})z) = (e_j + e_{z_2})g(z) \Rightarrow \begin{cases} z = e_j & g(e_j) = (a_{33}e_j + a_{43}x_{z_2}) \\ z = x_{z_2} & g(x_{z_2}) = (a_{34}e_j + a_{44}x_{z_2}) \end{cases}$$

$$g(\alpha z) = g(x_{z_2}z) = x_{z_2}g(z) \Rightarrow \begin{cases} z = e_{z_1} & a_{43} = 0 \\ z = x_{z_2} & a_{22} = a_{33} \end{cases}$$

$$g(xe_i) = xg(e_i) = 0 \Rightarrow a_{21} = 0$$

$$\text{finalmente, } g(f_lz) = e_lg(z) = g(e_l) \Rightarrow g(e_l) = \lambda_le_l \text{ para toda } f_l \in R_1$$

■

Por lo tanto, los generadores de eKe son $y_i \otimes x_{z_1}$ y $y_{z_2} \otimes x_j$. Además, $y_{z_1} \otimes x_{z_1} = y_{z_2} \otimes x_{z_2}$, y φ es un morfismo admisible.

Con el objetivo de definir una diferencial para $(eR'e, W')$, estudiaremos que sucede con los generadores del $R-$bimódulo W, bajo la acción de φ y definiremos una matriz para los generadores de W.

1. Si $a = f_q \otimes f_p \in W_0$, $p, q \neq i, j$, entonces $a = e_q \otimes e_p \in W_0'$ y $A_a = (a)$.
2. Si $a = f_q \otimes f_i \in W_0$, $q \neq i, j$, entonces tenemos dos generadores para W_0', $a_{1,1} = e_q \otimes e_i$, $a_{1,2} = e_q \otimes e_{z_1}$, y $A_a = (a_{1,1}, a_{1,2})$.
3. Si $a = f_i \otimes f_p \in W_0$, $p \neq i, j$, entonces tenemos dos generadores para W_0', $a_{1,1} = e_i \otimes e_p$, $a_{2,1} = e_{z_1} \otimes e_p$, y $A_a = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{pmatrix}$.
4. Si $a = f_q \otimes f_j \in W_0$, $q \neq i, j$, entonces tenemos dos generadores para W_0', $a_{1,1} = e_p \otimes e_j$, $a_{2,1} = e_q \otimes e_{z_1}$, y $A_a = (a_{1,1}, a_{1,2})$.
5. Si $a = f_j \otimes f_p \in W_0$, $p \neq i, j$, entonces tenemos dos generadores para W_0', $a_{1,1} = e_j \otimes e_p$, $a_{2,1} = e_{z_1} \otimes e_p$, y $A_a = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{pmatrix}$.
6. Si $a = f_l \otimes f_l \in W_0, l = i$ ó $l = j$, entonces tenemos cuatro generadores para W_0', $a_{1,1} = e_l \otimes e_l$, $a_{1,2} = e_l \otimes e_{z_1}$, $a_{2,1} = e_{z_1} \otimes e_l$, $a_{2,2} = e_{z_1} \otimes e_{z_1}$ y $A_a = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2$.

7. Si $\beta = f_j \otimes f_i \in W_0$, $\beta \neq \alpha$, entonces tenemos cuatro generadores para W_0', $a_{1,1} = e_j \otimes e_i$, $a_{1,2} = e_{z_1} \otimes e_i, a_{2,1} = e_j \otimes e_{z_1}$, $a_{2,2} = e_{z_1} \otimes e_{z_1}$ y $A_\beta = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2$.

En el caso de que $v = f_q \otimes f_p \in W_1$, los generadores de W_1' se calculan de la misma manera que para el caso en que tomamos un generador de W_0, similarmente se define la matriz A_v.
Sea e_{z_1} el idempotente en el vértice z_1, definimos $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & e_{z_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Para un camino $\gamma = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_s$ en B, la bigráfica sociada al bocs $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$, con grado de $\gamma \in \{0, 1\}$ definimos la matriz $A_\gamma = A_{\gamma_1} A_{\gamma_2} \cdots A_{\gamma_s}$, si $u = \sum_i c_i \gamma_i$, entonces $A_u = \sum_i c_i A_{\gamma_i}$.

Para todo p vértice de B, se define la matriz Y_p tal que:

$$Y_i = \begin{pmatrix} 0 & x_{z_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_j = \begin{pmatrix} 0 & y_{z_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_p = 0 \text{ si } p \neq i, j.$$

Para toda flecha en B, $a : p \longrightarrow q$ de grado cero, $a \neq \alpha$, sea,

$$\delta'(A_a) = Y_q A_a - A_a Y_p + A_{\delta(a)}.$$

De igual manera, para toda $v : p - - \to q$ en B, de grado uno ,

$$\delta'(A_v) = Y_q A_v + A_v Y_p + A_{\delta(v)}.$$

Finalmente $\delta'(A_\alpha) = 0$ y $\delta'(Y_p) = (Y_p)^2 = 0$ lo que implica que $\delta'(x_{z_2}) = \delta'(y_{z_2}) = 0$. Se tiene entonces que para toda flecha $\beta : p \longrightarrow q$,

$$\delta'(A_\beta) \;=\; Y_q A_\beta - (-1)^{gr(\beta)} A_\beta Y_p + A_{\delta(\beta)}$$

Por lo tanto, si denotamos para una flecha a_s de grado cero en $B, A_{a_s} = (a_{ij}^s)$, con los índices en los rangos adecuados, entonces la diferencial de a_s se define como las entradas de la matriz $\delta'(A_{a_s})$. Similarmente para v_t una flecha de grado uno.

Por lo que tenemos el nuevo bocs diferenciable $\mathcal{B} = (eR'e, W', \delta')$.

La bigráfica B' asociada a $\mathcal{B}$, tiene como vértices el conjunto $\{1, \cdots, n, z_1\}$, una flecha de grado cero por cada uno de los generadores de W_0', una flecha de grado uno por cada uno de los generadores de W_1', además de dos flechas de grado uno, dadas por los generadores de eKe, explícitamente, $v_1 : z_1 - - \to i$ y $v_2 : j - - \to z_1$.

Finalizamos esta sección con la descripción del funtor fiel y pleno $F : \mathrm{Re}p(\mathcal{B}) \to \mathrm{Re}p(\mathcal{A})$.

Sea $M = (M_i, i \in I_n \cup \{z_1\}\,; M(a_{ij}^s),\ a_{ij}^s \in W_0')$, pero $M_i \cong e_i M_i$, por lo tanto si $F(M) = R'e \otimes_{eR'e} M$ tenemos:

$$\begin{aligned} f_l.(R'e \otimes_{eR'e} M) &= \varphi(f_l)(R'e \otimes_{eR'e} M) = e_l(R'e \otimes_{eR'e} M) \\ &= e_l M = e_l M_l \\ f_i.(R'e \otimes_{eR'e} M) &= (e_i + e_{z_1})(R'e \otimes_{eR'e} M) \\ &= e_i R'e \otimes_{eR'e} M \oplus e_{z_1} R'e \otimes_{eR'e} M \\ &= e_i M_i \oplus e_{z_1} M_{z_1} \\ f_j.(R'e \otimes_{eR'e} M) &= e_j M_j \oplus e_{z_1} M_{z_1} \end{aligned}$$

de donde, $F(M) = (M_i \oplus M_{z_1}, M_j \oplus M_{z_1}, M_l \text{ si } l \neq i, j)$ junto con las transformaciones lineales

$$F(M)(a_s) = (M(a_{ij}^s)), F(M)(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & I_{M_{z_1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $f = (f^0, f^1) : M \to N \in \mathrm{Re}p(\mathcal{B})$, $g = (g^0, g^1) \in \mathrm{Re}p(\mathcal{A})$ se define:

$$\begin{aligned} g^0 |_{M_l} &= f^0 |_{M_l} \qquad\qquad \text{si } l \neq i, j \\ g^0 |_{M_i} &= \begin{pmatrix} f^0 |_{M_i} & f^1(x) \\ 0 & f^0 |_{M_j} \end{pmatrix} \\ g^0 |_{M_j} &= \begin{pmatrix} f^0 |_{M_j} & f^1(y) \\ 0 & f^0 |_{M_i} \end{pmatrix} \\ g^1(v_t) &= (f^1(v_{ij}^t)) \end{aligned}$$

Proposición 6. *El funtor $F : \mathrm{Re}p(\mathcal{B}) \to \mathrm{Re}p(\mathcal{A})$ es una equivalencia.*

Demostración. Sea $N \in \mathrm{Re}p(\mathcal{A})$, $N(\alpha) : N_i \to N_j$, entonces $N_i \cong Ker N(\alpha) \oplus \mathrm{Im}\, N(\alpha)$, $N_j = \mathrm{Im}\, N(\alpha) \oplus W$ con $W \subset N_j$. Se define $M \in \mathrm{Re}p(\mathcal{B})$ mediante:

$$\begin{aligned} M_i &= Ker N(\alpha) \\ M_{z_1} &= \mathrm{Im}\, N(\alpha) \\ M_j &= W \\ M_l &= N_l,\ l \neq i, j \end{aligned}$$

Además, toda $N(a_s)$ se expresa como una matriz $N(a_s) = (N_{ij}(a_s))$, de $1, 2$ ó 4 entradas. Para toda flecha a_{ij}^s de grado cero en B', se define la transformación lineal $M(a_{ij}^s) = N_{ij}(a_s)$. Se puede ver claramente que $N \cong F(M)$, por lo tanto el funtor F es denso. ■

II.4 Unravelling.

Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$, con $R = \times_{\hat{i}=1}^{m} R_{\hat{i}}$; $f_{\hat{i}} = (0, \cdots, 0, 1_{R_{\hat{i}}}, 0, \cdots, 0)$, $1_R = \sum_{\hat{i}=1}^{m} f_{\hat{i}}$ una descomposición en idempotentes primitivos ortogonales.

Supongamos que $R_{\hat{1}} = f_{\hat{1}} R f_{\hat{1}} = k\,[x]_{f(x)}$ y consideremos $\lambda \in k$ con $f(\lambda) \neq 0$. A continuación describimos el unravelling de tamaño l con respecto a λ.

Sea Γ el carcaj de traslación con $|V(\Gamma)| = \frac{l(l+1)}{2}$ descrito en el apéndice. Como antes consideremos el $k\,[x]_{f(x)}$ −módulo $V = \amalg_{r \in \Gamma} kr = J_{1,\lambda} \oplus \cdots \oplus J_{l,\lambda}$. Para cada órbita $o(i)$, $i = 1, \cdots, l$ tenemos el $k\,[x]_{f(x)}$ −submódulo $V_i = \amalg_{r \in o(i)} kr$, $V = \oplus_{i=1}^{l} V_i$.

Tomemos $R_0' = End_k(V_1) \times \cdots \times End_k(V_l) \times k\,[x]_{f(x)(x-\lambda)}$. Sea $\varphi_0 : k\,[x]_{f(x)} \to R_0'$ dado por $\varphi_0(x) = (m_x^1, \cdots, m_x^l, x)$, en donde m_x^i es la aplicación lineal de V_i en V_i dada por la multiplicación por la izquierda por x.

Recordemos que $R = \times_{\hat{i}=1}^{m} R_{\hat{i}} = k\,[x]_{f(x)} \times \overline{R}$ por lo que se tiene un morfismo de álgebras $\varphi : R = k\,[x]_{f(x)} \times \overline{R} \to R_0' \times \overline{R}$ dado por $\varphi(u, v) = (\varphi_0(u), v)$.

A continuación daremos una reducción de Morita de $R' = R_0' \times \overline{R}$. Consideremos en primer lugar una familia de idempotentes primitivos en R', $\overline{f}_{\hat{i}} = f_{\hat{i}}$, $\hat{i} = \hat{1}, \cdots, \widehat{m}$.

Para cada $r \in V(\Gamma)$ consideremos la aplicación lineal de V_i en V_i dada por

$$e_r(s) = \begin{cases} r & \text{si } s = r \\ 0 & \text{si } s \neq r \end{cases}$$

Claramente las e_r son idempotentes. Sea $I_0 = \{\text{vértices de } \Gamma\} \cup \left\{\hat{1}, \cdots, \widehat{m}\right\}$. Si ponemos $e_{\hat{i}} = f_{\hat{i}}$, se tiene que $1_{R'} = \sum_{u \in I_0} e_u$ es una descomposición en idempotentes primitivos ortogonales de $1_{R'}$.

Para $r \in \Gamma$ definimos $x_r, y_r \in End_k(V_i)$ con $r \in o(i)$, de la siguiente forma,

$$x_r(s) = \begin{cases} r & \text{si } s = q_i \\ 0 & \text{si } s \neq q_i \end{cases}, \quad y_r(s) = \begin{cases} p_i & \text{si } s = r \\ 0 & \text{si } s \neq r \end{cases}.$$

Entonces $y_r x_r = e_{q_i}$, $y_r x_r = e_r$. Para $\widehat{i}$ ponemos $x_{\widehat{i}} = y_{\widehat{i}} = e_{\widehat{i}}$. Consideremos ahora $I_1 = \left\{q_1, \cdots, q_l, \widehat{1}, \cdots, \widehat{m}\right\}$, y $\tau : I_0 \to I_1$ dada por

$$\begin{array}{rcll} \tau(r) & = & q_i & \text{si } \ r \in o(i) \\ \tau(\widehat{j}) & = & \widehat{j} & \text{si } \ \widehat{1} \leq \widehat{j} \leq \widehat{m} \end{array}$$

Por lo anterior se tiene $y_u x_u = e_{\tau(u)}$, $x_u y_u = e_u$ para $u \in I_0$. Por lo tanto, (τ, x_u, y_u) es una reducción de Morita de R'. Si $e = \sum_{u \in I_1} e_u$,

$$eR'e = e(k\left[x\right]_{f(x)(x-\lambda)} \times End_k(V_1) \times \cdots \times End_k(V_l) \times \overline{R})e = k\left[x\right]_{f(x)(x-\lambda)} \times k \times \cdots \times k \times \overline{R}.$$

Veamos por ejemplo, el caso en que $l = 3$.

$$e_1 = e_{q_1} = 1 \qquad e_2 = e_{q_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_4 = e_{q_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad y_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad y_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación describiremos el nuevo $eR'e-$bimódulo graduado.

Sean $a(s) = f_{b(s)} \otimes_k f_{a(s)}$ generadores de W_0; $v(t) = f_{b(t)} \otimes_k f_{a(t)}$ generadores de W_1, es decir, $W = \amalg_{a(s)} Ra(s)R \oplus \amalg_{v(t)} Rv(t)R$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} R' \otimes_R W \otimes_R R' & = & \left(\amalg_{a(s)} R'\varphi(a(s))R'\right) \oplus \left(\amalg_{v(t)} R'\varphi(v(t))R'\right) \\ & = & (R' \otimes_R W_0 \otimes_R R') \oplus (R' \otimes_R W_1 \otimes_R R') \end{array}$$

Sea $W' = e\left(R' \otimes_R W \otimes_R R'\right)e \oplus eKe$, recordemos que la nueva graduación de W' es:

$$\begin{aligned} W_0' &= e\left(R' \otimes_R W_0 \otimes_R R'\right)e &&= \amalg_{a(s)} eR'\varphi(a(s))R'e \\ W_1' &= e\left(R' \otimes_R W_1 \otimes_R R'\right)e \oplus eKe &&= \amalg_{v(t)} eR'\varphi(v(t))R'e \oplus eKe. \end{aligned}$$

Nuevamente estudiaremos quien es eKe, usando el hecho de que

$$eR' \otimes_R R'e \cong Hom_{eR'e}(End_R(R'e), eR'e).$$

Una base para $R'e = (k\,[x]_{f(x)(x-\lambda)} \times End_k(V_1) \times End_k(V_2) \times \cdots \times End_k(V_l) \times R_1)e$ es

$$\left\{e_1, e_2, x_3, e_4, x_5, x_6, \cdots, e_l, x_{l+1}, \cdots, x_{\frac{l(l+1)}{2}}\right\}$$

Si $g \in End_R(R'e)$, $z \in R'e$ y $a \in R$ entonces se debe de cumplir $g(a.z) = a.g(z)$ con la acción determinada por $\varphi : R \to R'$.

Como $xR'e \cong R'e$, si $g \in End_R(R'e)$ tiene la siguiente forma matricial.

$$g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_r \end{pmatrix}$$

Donde Z pertenece al espacio de matrices de tamaño $\frac{l(l+1)}{2}$ que conmutan con $V = \oplus_{i=1}^{l} J_{i,\lambda}$.
De esta manera quedan determinados los generadores de eKe y además puede verse que φ es un morfismo admisible. Por ejemplo, si $l = 3$,

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & b_1 & 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ a_4 & b_4 & b_5 & 0 & b_6 & b_7 \\ 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & b_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con la finalidad de describir la nueva diferencial $\delta' : T_{eR'e}(W') \to T_{eR'e}(W')$ veremos que sucede con los generadores del $R-$bimódulo W, bajo la acción de φ y definiremos una matriz para los generadores de W.

1. Si $a_u = f_{\widehat{i}} \otimes_k f_{\widehat{j}}$ tal que $\widehat{i} \neq \widehat{1} \neq \widehat{j}$, entonces $a_u = f_{\widehat{i}} \otimes_k f_{\widehat{j}} \in W_0'$ y $A_{a_u} = (a_u)$.
2. Si $a_u = f_{\widehat{1}} \otimes_k f_{\widehat{j}}$ tal que $\widehat{j} \neq \widehat{1}$, entonces $a_{j,u} = f_{\widehat{1}} \otimes_k e_j \in W_0'$, $j \in V(\Gamma)$ y $A_{a_u} = (a_{j,u})_{j \in V(\Gamma)}$.
3. Si $a_u = f_{\widehat{i}} \otimes_k f_{\widehat{1}}$ tal que $\widehat{i} \neq \widehat{1}$, entonces $a_{u,i} = e_i \otimes_k f_{\widehat{1}} \in W_0'$, $i \in V(\Gamma)$ y $A_{a_u} = (a_{u,i})_{i \in V(\Gamma)}$.
4. Si $a_u = f_{\widehat{i}} \otimes_k f_{\widehat{j}}$ tal que $\widehat{i} = \widehat{1} = \widehat{j}$, entonces $a^u_{i,j} = e_j \otimes_k e_i \in W_0'$, $i, j \in V(\Gamma)$ y $A_{a_u} = (a^u_{i,j})_{i,j \in \Gamma}$.

Si v_u es un generador de W_1, A_{v_u} se define de manera similar.
Como en el caso de reducción de un eje, tenemos que para toda flecha $\beta : p \dashrightarrow q$, $\delta'(A_\beta) = X_q A_\beta - (-1)^{gr(\beta)} A_\beta X_p + A_{\delta(\beta)}$ es una diferencial, donde

$$X_i = \begin{cases} 0 & i \neq 1 \\ (x_{s,r})_{s,r \in V(\Gamma)} & i = 1 \end{cases}$$

donde

$$x_{s,r} = \begin{cases} 0 & \text{si no existe un camino en } \Gamma, \gamma : s \to r \\ x_{s,r} & \text{si existe } \gamma : s \to r \text{ (escribimos } s < r) \end{cases}$$

En nuestro ejemplo,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{1,3} & 0 & 0 & x_{1,6} \\ x_{2,1} & 0 & x_{2,3} & 0 & x_{2,5} & x_{2,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{3,6} \\ x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} & 0 & x_{4,5} & x_{4,6} \\ 0 & 0 & x_{5,3} & 0 & 0 & x_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Supongamos que $\beta : p \longrightarrow 1$, $p \neq 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \left[\delta'(A_\beta)\right]_{ij} &= \left[X_q A_\beta - (-1)^{gr(\beta)} A_\beta X_p + A_{\delta(\beta)}\right]_{ij} \\ &= \left[X_1 A_\beta + A_{\delta(\beta)}\right]_{ij} \\ &= \textstyle\sum_{i<r} x_{i,r} a_{r,j} + \left[A_{\delta(\beta)}\right]_{ij} \end{aligned}$$

Supongamos que $\beta : 1 \longrightarrow q$, $q \neq 1$, entonces:

$$\begin{aligned}\left[\delta'(A_\beta)\right]_{ij} &= \left[X_q A_\beta - (-1)^{gr(\beta)} A_\beta X_p + A_{\delta(\beta)}\right]_{ij}\\ &= \left[-(-1)^{gr(\beta)} A_\beta X_p + A_{\delta(\beta)}\right]_{ij}\\ &= -(-1)^{gr(\beta)} \textstyle\sum_{s>j} a_{i,s}x_{s,j} + \left[A_{\delta(\beta)}\right]_{i,j}\end{aligned}$$

Finalmente, si $\beta : 1 \longrightarrow 1$, entonces:

$$\begin{aligned}\left[\delta'(A_\beta)\right]_{ij} &= \left[X_q A_\beta - (-1)^{gr(\beta)} A_\beta X_p + A_{\delta(\beta)}\right]_{ij}\\ &= \left[X_1 A_\beta - (-1)^{gr(\beta)} A_\beta X_p + A_{\delta(\beta)}\right]_{ij}\\ &= \textstyle\sum_{i<r} x_{i,r}a_{r,j} - (-1)^{gr(\beta)} \sum_{s>j} a_{i,s}x_{s,j} + \left[A_{\delta(\beta)}\right]_{ij}\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos un nuevo bocs diferenciable $\mathcal{B} = (eR'e, W', \delta')$.

La nueva bigráfica B' asociada a $\mathcal{B}$ tiene vértices $\left\{1, 2, \cdots, l, \widehat{1}, \cdots, \widehat{m}\right\}$ y una flecha de grado cero por cada generador de W_0', y una de grado uno por cada generador de W_1' ó de eKe.

Si $\mathcal{B} = (eR'e, W', \delta')$ es el nuevo bocs, que obtenemos de hacer unravelling de tamaño l con respecto a λ, veremos a continuación como es el funtor fiel y pleno $F : Rep(\mathcal{B}) \to Rep(\mathcal{A})$.
Sea $M = (M_i, i = 1, \cdots, l, \widehat{1}, \cdots, \widehat{m}; M(a_u), a_u \in W_0') \in Rep(\mathcal{B})$, con $M_i \cong e_iM_i$, por lo tanto si $F(M) = R'e \otimes_{eR'e} M$ tenemos:

$$\begin{aligned}f_{\widehat{i}}\cdot(R'e \otimes_{eR'e} M) &= \varphi(f_{\widehat{i}})(R'e \otimes_{eR'e} M)\\ &= f_{\widehat{i}}R'e \otimes_{eR'e} M = f_{\widehat{i}}M\\ &= f_{\widehat{i}}M_{f_{\widehat{i}}} \text{ si } \widehat{i} \neq 1\\ f_{\widehat{1}}\cdot(R'e \otimes_{eR'e} M) &= \varphi(f_{\widehat{1}})(R'e \otimes_{eR'e} M)\\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^{l} e_i + f_{\widehat{1}})(R'e \otimes_{eR'e} M)\\ &= \oplus_{i=1}^{l}(e_iM_{e_i})^i \oplus f_{\widehat{1}}M_{f_{\widehat{1}}}\end{aligned}$$

de donde $F(M) = (\oplus_{i=1}^{l}(e_iM_{e_i})^i \oplus f_{\widehat{1}}M_{f_{\widehat{1}}}, f_{\widehat{i}}M_{f_{\widehat{i}}} \text{ si } \widehat{i} \neq 1)$, junto con las transformaciones lineales siguientes:

1. Si $a_u : i \to j$, con $i, j \neq \widehat{1}$, $F(M)(a_u) = M(a_u)$.

2. Si $a_u : \hat{1} \to j, j \neq \hat{1}, F(M)(a_u)$ es la matriz de tamaño $l \times 1, F(M)(a_u) = M(a_{j,u})$,

3. Si $a_u : i \to \hat{1}, i \neq \hat{1}, F(M)(a_u)$ es la matriz de tamaño $1 \times l, F(M)(a_u) = M(a_{u,,j})$,

4. Para un lazo $a_u : \hat{1} \to \hat{1}, a \neq \alpha$, se define $F(M)(a_u) = M(a^u_{i,j})$,

5. Finalmente, $FM(x) : M_{\hat{1}} \to M_{\hat{1}}$ es la suma directa de matrices

$$M(x) = N(x) \oplus J^1_\lambda \oplus \cdots \oplus J^s_\lambda$$

en donde

$$J^i_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda I_{N_i} & I_{N_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda I_{N_i} & I_{N_i} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \lambda I_{N_i} & I_{N_i} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda I_{N_i} \end{pmatrix}$$

II.5 Regularización.

A diferencia de los tres algoritmos descritos anteriormente, el algoritmo de regularación no depende de tener un morfismo admisible entre dos álgebras, ni de considerar una reducción de Morita. Sin embargo, nos da una equivalencia entre dos bocses diferenciables, con la misma R $k-$álgebra como base.

Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs diferenciable. Supongamos que $\delta(\alpha) = v$, donde $\alpha = e_j R e_i \in W_0$, $v = e_j R e_i \in W_1$. Consideremos el ideal $J = \langle \alpha, v \rangle$ y definamos $W' = W'_0 \oplus W'_1$ donde $W'_0 = W_0 - < \alpha >$ y $W'_1 = W_1 - < v >$. Por lo tanto $T_R(W') \cong T_R(W)/J$. Observe que $\delta(J) \subset J$, si $\eta : T_R(W) \to T_R(W)/J$ es el morfismo canónico, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_R(W) & \xrightarrow{\delta} & T_R(W) \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ T_R(W)/J & \xrightarrow{\delta'} & T_R(W)/J \end{array}$$

Afirmación: δ' es una diferencial.

1. $\delta'(R) = 0$;

2. $gr(v) = gr(\eta v)$ para todo $v \in T_R(W)$, por lo tanto si $gr(v) = n$ tenemos que $gr(\delta'(v)) = n+1$.

3. Veamos que δ' satisface la regla de Leibnitz,

$$\begin{aligned}
\delta'(xy) &= \delta'(\eta(x)\eta(y)) = \delta'\eta(xy) \\
&= \eta\delta(xy) \\
&= \eta(\delta(x)y + (-1)^{gr(x)}x\delta(y)) \\
&= \delta'(\eta(x))\eta(y) + (-1)^{gr(\eta(x))}\eta(x)\eta\delta(y) \\
&= \delta'(\eta(x))\eta(y) + (-1)^{gr(\eta(x))}\eta(x)\delta'(\eta(y)) \\
&= \delta'(x)y + (-1)^{gr(x)}x\delta'(y)
\end{aligned}$$

4. $(\delta')^2(v) = \delta'(\delta'(\eta(v))) = \delta'(\eta\delta(v)) = \eta\delta\delta(v) = 0$.

Por lo tanto $\mathcal{B} = (R, W', \delta')$ es un bocs diferenciable.

La siguiente proposición es necesaria para demostrar que el funtor $F : Rep\mathcal{B} \longrightarrow Rep\mathcal{A}$ es denso.

Proposición 7. *Sea M' un $R-$ módulo, M un $A-$ módulo, $f = (f^0, f^1)$ tal que $f^0 \in Hom_R(M', M)$ es un isomorfismo, $f^1 \in Hom_{R-R}(W_1, Hom_k(M', M))$ entonces se le puede dar una estructura de $A-$ módulo a M' tal que $f \in Rep\mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $m' \in M'$, definimos la acción de $\alpha \in A$, como $\alpha.m' = (f^0)^{-1}(\alpha f^0(m'))$. Supongamos que a es mínima, entonces $af^0(m') = f^0(am') + f^1(\delta(a))(m') = f^0(am')$. Por inducción se pude continuar, teniendo nuestra proposición. ■

Teorema 8. *Existe una equivalencia $F : Rep\mathcal{B} \longrightarrow Rep\mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $M \in Rep\mathcal{B}$, $F(M) = M$; si $f = (f^0, f^1) \in Rep\mathcal{B}$, definimos $F(f) = (f^0, f^1\eta)$.
Observe que $M \in Rep\mathcal{A}$ está en la imagen de F si y sólo si $\alpha M = 0$. Veamos que $F(f)$ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$.
Sea $a \in T_R(W_0')$ y $m \in M$, la acción de $a.m = \eta(a)m$. Queremos demostrar que para toda $a \in T_R(W_0)$ y $m \in M$,

$$af^0(m) - f^0(am) = \eta(a)f^0(m) - f^0(\eta(a)m) = f^1\eta(\delta(a))(m).$$

Pero η es suprayectiva, por lo tanto para toda $a \in T_R(W_0')$, $a = \eta(a)$ y por ser f un morfimo en $Rep\mathcal{B}$ tenemos:

$$\eta(a)f^0(m) - f^0(\eta(a)m) = f^1(\delta'(\eta(a))(m) = f^1\eta(\delta(a))(m).$$

Claramente $F(I_M) = I_{F(M)}$.

Sean $f : M \to N$ y $g : N \to L$ dos morfismos en $Rep\mathcal{B}$. Veremos que $F(gf) = F(g)F(f)$.

$F(g)F(f) = (g^0f^0, (g^1\eta)(f^1\eta))$ pero,

$$(g^1\eta)(f^1\eta)(v) = g^0f^1\eta(v) + g^1\eta(v)f^0 + \sum g^1\eta(v_i^1)f^1\eta(v_i^2)$$

donde $\delta'(v) = \sum v_i^1 \otimes v_i^2$, por lo que $\delta'\eta(v) = \sum \eta(v_i^1) \otimes \eta(v_i^2) = \eta\delta(v)$.

Por otro lado, $gf = (g^0f^0, (g^1f^1))$, $g^1f^1(v) = g^0f^1(v) + g^1(v)f^0 + \sum g^1(v_i^1)f^1(v_i^2)$, por lo tanto, $F(gf) = (g^0f^0, (g^1f^1)\eta)$ donde

$$(g^1f^1)\eta(v) = g^0f^1\eta(v) + g^1\eta(v)f^0 + \sum g^1\eta(v_i^1)f^1\eta(v_i^2).$$

a) El funtor F es fiel.

Supongamos que $F(f) = (f^0, f^1\eta) = (0,0)$, entonces $f^0 = 0$ y $f^1\eta = 0$, es decir la siguiente composición es cero:

$$[T_R(W)_1]_1 \xrightarrow{\eta} \left[T_R(W')\right]_1 \xrightarrow{f^1} Hom_R(M,N)$$

$f^1(\eta(v))(m) = 0 \Longrightarrow f^1 = 0$.

b) El funtor F es pleno.

Sea $g = (g^0, g^1) \in Rep\mathcal{B}$ y considere el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{g^1} & Hom_k(M,N) \\ \eta \searrow & & \nearrow f^1 \\ & W_1' & \end{array}$$

Por lo tanto $g^1 = f^1\eta$, veamos que (g^0, f^1) es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$.

$$(\eta a)g^0(m) + g^0(\eta a.m) = g^1(\delta'(a))(m) = f^1\eta(\delta'(a))(m) = f^1(\delta(\eta a))(m).$$

c) F es denso.
Para $M \in Rep\mathcal{A}$, considere el morfismo $f = (Id_M, f^1)$ tal que $f^1(v) = -M(\alpha)$ y cero en lo demás. ∎
Finalmente, si B es la bigráfica asociada al bocs $\mathcal{A}$, B' la bigráfica asociada a $\mathcal{B}$, es la subigráfica de B que se obtiene al quitar las flechas α y v.

II.6 Anulación de flechas.

A continuación definimos una composición de algoritmos de reducción que usaremos frecuentemente y que vuelve a ser un algoritmo de reducción, en el sentido de que tenemos un funtor fiel y pleno.

La anulación de flechas consiste en lo siguiente , sea α una flecha de grado cero tal que $\delta(\alpha) = 0$.

1. Si $\alpha : i \longrightarrow i$, aplicamos unravelling de tamaño 1 con respecto a $x = 0$ seguido de eliminación del vértice correspondiente a i, el resultado es que en el nuevo bocs, $\alpha = 0$.
2. Si $\alpha : i \longrightarrow j$, aplicamos reducción de un eje seguido de eliminación del nuevo vértice que hemos llamado z_1, nuevamente el resultado es que en el nuevo bocs $\alpha = 0$.

II.7 Propiedades importantes de los algoritmos de reducción.

Definición 9. *Un bocs $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ es minimal si $W_0 = 0$, es decir, en su bigráfica asociada B no hay flechas de grado cero. Diremos que el bocs es estrictamente minimal, si además, $e_i R e_i = k$ para toda i.*

Definición 10. *Sea $\mathcal{A} = (R, B, \delta)$ un bocs diferenciable triangular y $n = |V(B)|$. Decimos que un vector $l = (l_1, l_2, \cdots, l_n) \in N^n$ es sincero si $l_i \neq 0$ para toda $i = 1, \cdots, n$.*

Sea $M = \{M_i\}_{i=1}^{n} \in Rep\mathcal{A}$, $l_i = \dim_k M_i$, se definen $\underline{\dim} M = l$ y $K_0(\mathcal{A}) = N^n$.

Definición 11. *Si $l = (l_1, l_2, \cdots, l_n) \in K_0(\mathcal{A})$, la norma de l,*

$$||l|| = \sum_{i, e_i R e_i \neq k} l_i^2 + \sum_{\alpha: i \to j \in W_o} l_i l_j.$$

Lema 12. *Si $l \in K_0(\mathcal{A})$ es sincero y $||l|| = 0$, entonces $\mathcal{A}$ es estrictamente minimal.*

Demostración. Si $||l|| = \sum_{\alpha: i \to i \in D} l_i^2 + \sum_{i \to j} l_i l_j = 0$, como $l_i \neq 0$ para toda i, se tiene que $e_i R e_i = k$ para toda i y además no hay flechas de grado cero. ■

Definición 13. *Sea $F : Rep(\mathcal{B}) \to Rep(\mathcal{A})$ un algoritmo de reducción. Denotaremos como $t_F : K_0(\mathcal{B}) \to K_0(\mathcal{A})$ a la función lineal tal que $\underline{\dim} F(M) = t_F(\underline{\dim} M)$.*

1. *Si F es eliminación de idempotentes en el vértice k, tal que $\dim M_k = 0$ entonces, $t_F : N^{n-1} \to N^n$ está dada por:*

$$t_F(l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}) = (l_1, l_2, \cdots, l_{k-1}, 0, l_k, \cdots, l_{n-1});$$

2. *Si F es regularización entonces $t_F = I_{N^n}$;*

3. *Si F es reducción de una flecha $\alpha : i \to j$, z el nuevo vértice en B' entonces $t_F : N^{n+1} \to N^n$ está dada por:*

$$t_F(y_1, \cdots, y_n, y_z) = (x_1, \cdots, x_n),$$

tal que $y_k = x_k$ si $k \neq i, j$, $x_i = y_i + y_z, x_j = y_j + y_z$;

1. *Si F es unravelling de tamaño r con respecto a λ en el vértice i, $z_1, z_2, \cdots, z_r$ los nuevos vértices en B' entonces $t_F : N^{n+r} \to N^n$ está dada por:*

$$t_F(y_1, \cdots, y_n, y_{z_1}, \cdots, y_{z_r}) = (x_1, \cdots, x_n),$$

tal que $y_k = x_k$ si $k \neq i, x_i = y_i + y_{z_1} + 2y_{z_2} + \cdots + ry_{z_r}$.

Lema 14. *Sea $F : Rep(\mathcal{B}) \to Rep(\mathcal{A})$ un algoritmo de reducción, $F(N) \cong M$ y $l = \underline{\dim} M$ entonces:*

1. *$\|t_F(l)\| \leq \|l\|$;*

2. *Si $x \in K_0(\mathcal{A})$ existen a lo más un número finito de $y \in K_0(\mathcal{B})$ tal que $t_F(y) = x$.*

Demostración.

1. En las páginas 25, 28, 49 y 50 [*Boza*] prueba este resultado, pero además demuestra que en el caso de que M sea sincero, la desigualdad es estricta para el caso en que F sea regularización o reducción de un eje. Si F es eliminación de idempotentes, tenemos una igualdad, y finalmente, si F es el unravelling con respecto a λ, y λ es valor propio de $M(\alpha)$, tenemos también una desigualdad estricta.

2. Es claro que si F es eliminación de idempotentes o regularización, existe un sólo y tal que $t_F(y) = x$.

3. Sea F reducción de una flecha, $\underline{\dim} M = (x_1, \cdots, x_n)$ y $\underline{\dim} N = (y_1, \cdots, y_r, y_z)$ entonces $x_s = y_s$ para toda $s \neq i, j$, $x_i = y_i + y_z, x_j = y_j + y_z$,pero $y_i \in \{0, \cdots, x_i\}$, $y_j \in \{0, \cdots, x_j\}$ y $y_z \in \{0, 1, \cdots, \max\{x_i, x_j\}\}$, lo cual nos da sólo un número finito de posibilidades.

4. Si F es unravelling de tamaño $r, \underline{\dim} M = (x_1, \cdots, x_n)$ y $\underline{\dim} N = (y_1, \cdots, y_{z_r})$ entonces $y_k = x_k$ si $k \neq i, x_i = y_i + y_{z_1} + 2y_{z_2} + \cdots + ry_{z_r}$, pero $y_{z_k} \in \{0, \cdots, x_i\}, 1 \leq k \leq r$, $y_i \in \{0, \cdots, x_i\}$, por lo que nuevamente tenemos sólo un número finito de posibilidades. ■

Sea $\mathcal{A} = (R, B, \delta)$ un bocs diferenciable triangular y $n = |V(B)|$. Denotemos por m_{ij} el número de flechas de grado cero, con cualquier orientación, para cada par de vértices i, j y con n_{ij} el número de flechas de grado uno.

Definición 15. *Sea $\underline{\dim} M = l$. La forma cuadrática del bocs diferenciable $\mathcal{A} = (R, B, \delta)$, es la función $q_{\mathcal{A}} : Z^n \to Z$ tal que:*

$$q_{\mathcal{A}}(l_1, \cdots, l_n) = \sum_{i=1}^n l_i^2 - \sum_{i,j=1}^n m_{ij} l_i l_j + \sum_{i,j=1}^n n_{ij} l_i l_j.$$

Lema 16. *Si $F : Rep(\mathcal{B}) \to Rep(\mathcal{A})$ es un algoritmo de reducción, $M \in Rep(\mathcal{A})$ y $N \in Rep(\mathcal{B})$ tal que $F(N) \cong M$ entonces*

$$q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} N) \geq q_{\mathcal{A}}(\underline{\dim} M).$$

Demostración. [*Boza*] página 56.

Definición 17. *Sea $\mathcal{A} = (R, B, \delta)$ un bocs diferenciable triangular, M una representación inescindible de $\mathcal{A}$, definimos:*

$$\triangle(M) = \dim_k End_{\mathcal{A}}(M) - q_{\mathcal{A}}(\underline{\dim} M).$$

Proposición 18. *([Boza], pag. 66).* $\triangle(M) \geq 0$.

Lema 19. *([Boza], pag. 66). Si $F : Rep(\mathcal{B}) \to Rep(\mathcal{A})$ es un algoritmo de reducción, $F(N) \cong M$ entonces*

1. $\triangle(N) \leq \triangle(M)$;
2. $\triangle(M) - \triangle(N) = q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} N) - q_{\mathcal{A}}(\underline{\dim} M)$.

Explícitamente, para $F(N) \cong M$, donde F es un algoritmo de reducción se tiene:

1. Si F es regularización o eliminación de idempotentes, $q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} N) - q_{\mathcal{A}}(\underline{\dim} M) = 0$.
2. Si F es reducción de una flecha $\alpha : i \to j$, $q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} N) - q_{\mathcal{A}}(\underline{\dim} M) = x_i x_j$.
3. Si F es unravelling de tamaño s, $q_{\mathcal{B}}(\underline{\dim} N) - q_{\mathcal{A}}(\underline{\dim} M) = \sum_{i=1}^s i z_i^2 + 2 \sum_{i,j=1, i<j} i z_i z_j$.

Lema 20. *Sea $F : Rep(\mathcal{B}) \to Rep(\mathcal{A})$ reducción de una flecha, $M_1, M_2 \in Rep(\mathcal{A})$ tales que $M_1 \cong F(N_1), M_2 \cong F(N_2)$, $\underline{\dim} M_1 = \underline{\dim} M_2$, $\Delta(M_1) - \Delta(N_1) = \Delta(M_2) - \Delta(N_2)$ entonces $\underline{\dim} N_1 = \underline{\dim} N_2$.*

Demostración. [*Boza*] página 68.

Lema 21. *Sea $F : Rep(\mathcal{B}) \to Rep(\mathcal{A})$ un algoritmo de reducción, $M_1, M_2 \in Rep(\mathcal{A})$ tales que $M_1 \cong F(N_1), M_2 \cong F(N_2)$, $\underline{\dim} M_1 = \underline{\dim} M_2$, $\Delta(M_1) = \Delta(N_1)$ y $\Delta(M_2) = \Delta(N_2)$ entonces $\underline{\dim} N_1 = \underline{\dim} N_2$.*

Demostración.

1. Sea F regularización. Si $M_1 = F(N_1) \Rightarrow \underline{\dim} M_1 = \underline{\dim} N_1 = \underline{\dim} N_2 = \underline{\dim} M_2$.

2. Si F es eliminación de idempotentes el resultado se sigue trivialmente.

3. Sea F reducción de un eje, si $\underline{\dim} M_1 = (x_1 + x_z, x_2 + x_z, x_3, \cdots, x_r) = \underline{\dim} M_2$, $\underline{\dim} N_1 = (x_1, x_2, \cdots, x_r, x_z)$ y $\underline{\dim} N_2 = (y_1, y_2, \cdots, y_r, y_z)$ por hipótesis $\Delta(M_1) - \Delta(N_1) = q_{B'}(\underline{\dim} N_1) - q_B(\underline{\dim} M_1) = 0$, $\Delta(M_2) - \Delta(N_2) = q_{B'}(\underline{\dim} N_2) - q_B(\underline{\dim} M_2) = 0$ por lo que tenemos, $x_1 x_2 = y_1 y_2 = 0, x_1 + x_z = y_1 + y_z$, $x_2 + x_z = y_2 + y_z$.

   Queremos demostrar que $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_z = y_z$. Supongamos que $x_1 = 0$ y $y_1 \neq 0 \Rightarrow y_2 = 0 \Rightarrow x_2 + x_z = y_z = x_z - y_1 \Rightarrow x_2 = -y_1$, pero x_2 y y_1 son números positivos, por lo tanto, $x_2 = y_1 = 0$, lo cual es una contradicción. Los demás casos se resuelven de manera similar.

4. Sea F unravelling. Como $\Delta(M_1) = \Delta(N_1)$ se tiene que $\sum_i i z_i^2 + 2 \sum z_i z_j = 0 = \sum_i i (z_i')^2 + 2 \sum z_i' z_j' \Rightarrow z_i = z_i' = 0$ para toda i. Por lo tanto, si $\underline{\dim} N_1 = (z_0, x_2, \cdots, x_r), \underline{\dim} N_2 = (z_0', x_2, \cdots, x_r)$ y como $\underline{\dim} M_1 = \underline{\dim} M_2$, $z_0 = z_0'$ de donde $\underline{\dim} N_1 = \underline{\dim} N_2$. ∎

.

CAPITULO III

Nuestro objetivo en este capítulo es estudiar los bocses mansos y salvajes. Demostraremos que todo bocs crítico es salvaje, y que si un bocs $\mathcal{A}$ no es es salvaje, entonces para toda dimensión $\underline{d}$, se le puede asociar al par $(\mathcal{A}, \underline{d})$ un árbol orientado finito con un solo pozo al que hemos denominado su árbol algorítimo. Finalmente, demostramos que un bocs $\mathcal{A}$ es manso si y sólo para toda dimensión $\underline{d}$ se tiene un árbol algorítimico. Para tener completa la demostración de teorema de Drozd, nos faltaría ver que un bocs no puede ser simultaneamente manso y salvaje, pero omitimos esta parte e indicamos únicamente algunas referencias donde puede consultarse.

III.1 Bocses salvajes.

Sea Σ la categora de $k\langle x,y\rangle$ −módulos izquierdos de dimensión finita.

Definición 1. *Una $k-$álgebra finitamente generada A es salvaje si existe un $A - k\langle x,y\rangle$ −bimódulo M finitamente generado libre como $k\langle x,y\rangle$ −módulo, tal que el funtor $F(X) = M \otimes_{k\langle x,y\rangle} X : \Sigma \to RepA$ preserva inescindibles y clases de isomorfía.*

Generalizamos esta definición para bocses de la siguiente forma:

Definición 2. *Decimos que el bocs $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$, donde $A = T_R(W_0)$, es de tipo de representación salvaje, si existe un $A - k\langle x,y\rangle$ −bimódulo M, finitamente generado* *libre como $k\langle x,y\rangle$ −módulo, tal que el funtor $F(X) = M \otimes_{k\langle x,y\rangle} X : \Sigma \to RepA$ preserva inescindibles y clases de isomorfía.*

Proposición 3. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$, $A = T_R(W_0)$. Supongamos que existe W_0' sumando directo como R−bimódulo de W_0, tal que*

1. *$\delta(W_0') = 0$;*
2. *$B = T_R(W_0')$ es de tipo de representación salvaje.*

Entonces el bocs $\mathcal{A}$ es de tipo de representación salvaje.

Demostración. Sea $W_0 = W_0' \oplus W_0''$. Entonces existe un epimorfismo $\varphi : A \to B$, por lo tanto tenemos un funtor fiel y pleno $G : RepB \to Rep\mathcal{A}$ tal que $G(M) = M$ considerado como A-módulo por medio de φ y $M' \in RepA$ es imagen bajo G de $M \in RepB$ si y sólo si $W_0''M' = 0$. Considere la siguiente composición de funtores:

$$RepB \xrightarrow{G} RepA \xrightarrow{H} Rep\mathcal{A}$$

tal que para $M \in RepB$, $HG(M) = M' = G(M)$ y si $f : M \to N$ es un morfismo en $RepB$, entonces $HG(f) = (f', 0) = (G(f), 0)$.

Observemos que si $M, N \in RepB$ y $f' = (f^0, f^1) : G(M) \to G(N)$ entonces $f = (f^0, 0) + (0, f^1)$, ya que los generadores de A son de la forma $a \in R$, $w' \in W_0'$ ó $w'' \in W_0''$, en cualquier caso, para toda $a \in A$ y $m \in G(M)$, se tiene que $f^0(am) = af^0(m)$ y $f^1(\delta(a))(m) = 0$.

Supongamos que $M \in RepB$ es inescindible, queremos demostrar que $End_{Rep\mathcal{A}}(G(M))$ es local, es decir, que todo $f = (f^0, f^1) : G(M) \to G(M)$ es isomorfismo o nilpotente.

Recordando que $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ es triangular y usando inducción, se puede probar que $(0, f^1)$ es nilpotente.

El morfismo f^0 visto en $End_B(M)$,es nilpotente o es un isomorfismo por ser M inescindible en B, en cualquiera de los dos casos tenemos que $f = (f^0, 0) + (0, f^1)$, o bien es suma de nilpotentes, y por lo tanto es nilpotente, o usamos el hecho de que f es isomorfismo si y sólo si f^0 es isomorfismo.

Claramente HG refleja isomorfismos.

Como B es salvaje, existe un $B - k\langle x,y\rangle$-bimódulo y $F : \Sigma \to RepB$ dado por $FX = M \otimes_{k\langle x,y\rangle} X$. Si consideramos la composición

$$\Sigma \xrightarrow{F} RepB \xrightarrow{G} RepA \xrightarrow{H} Rep\mathcal{A}$$

$HGF(X) = HG(M \otimes_{k\langle x,y\rangle} X) =_A M \otimes_{k\langle x,y\rangle} X$. ${}_AM$ como $k\langle x,y\rangle$ −módulo es igual a ${}_BM$ como $k\langle x,y\rangle$ −módulo, por lo tanto es libre finitamente generado. ■

Proposición 4. *Sean $\mathcal{A} = (R, W, \delta), \mathcal{B} = (R', W', \delta')$ dos bocses, $F : Rep\mathcal{A} \to Rep\mathcal{B}$ un funtor fiel y pleno, entonces*

1. *F preserva inescindibles;*
2. *$f \in \mathcal{A}(M, N)$ es un isomorfismo si y sólo si $F(f) \in \mathcal{B}(F(M), F(N))$ es un isomorfismo.*

Demostración.

1. Sea $M \in Rep\mathcal{A}$ inescindible, entonces $End_{\mathcal{A}}(M)$ es local y como $End_{\mathcal{A}}(M) \cong End_{\mathcal{B}}(F(M))$, se tiene que $F(M)$ es inescindible.
2. Supongamos que $f \in \mathcal{A}(M, N)$ es un isomorfismo, entonces existe $g \in \mathcal{A}(N, M)$ tal que $gf = I_M$ y $fg = I_N$, entonces $F(gf) = F(g)F(f) = F(I_M) = I_{F(M)}$ y $F(fg) = F(f)F(g) = F(I_N) = I_{F(N)}$, por lo tanto $F(f)$ es un isomorfismo.
3. Supongamos que $F(f)$ es un isomorfismo, entonces existe $g' \in \mathcal{B}(F(N), F(M))$ tal que $g'F(f) = I_{F(M)}$ y $F(f)g' = I_{F(N)}$, por ser F pleno, existe $g : N \to M$, tal que $F(g) = g'$, por lo tanto, $F(gf) = F(g)F(f) = g'F(f) = I_{F(M)} = F(I_M)$ y $F(gf) = F(f)F(g) = F(f)g' = I_{F(N)} = F(I_N)$. Por lo tanto, f es isomorfismo. ■

La proposición anterior nos demuestra que si $F : Rep\mathcal{A} \to Rep\mathcal{B}$ es un algoritmo de reducción, entonces F preserva inescindibles y refleja isomorfismos.

Proposición 5. *Si $F : Rep\mathcal{A} \to Rep\mathcal{B}$ es un algoritmo de reducción y $\mathcal{A}$ es salvaje, entonces $\mathcal{B}$ es salvaje.*

Demostración. Si $\mathcal{A}$ es salvaje, existe $G : \Sigma \to Rep\mathcal{A}$ dado por $G(X) = M \otimes_{k\langle x,y\rangle} X$ en donde M es un $A - k\langle x,y\rangle$-bimódulo, $k\langle x,y\rangle$ libre finitamente generado. Ahora, si F es un algoritmo de reducción, excepto regularización $F(L) = Be \otimes_{eBe} L$, por lo tanto $FG(X) = (Be \otimes_{eBe} M) \otimes_{k\langle x,y\rangle} X$, pero $Be \otimes_{eBe} M \cong \amalg eBe \otimes_{eBe} M \cong \amalg M$, por lo que $(Be \otimes_{eBe} M)$ es $k\langle x,y\rangle$ libre finitamente generado. Si F es regularización el resultado es inmediato. Por la proposición anterior tenemos nuestra proposición. ■

Definición 6. *Un bocs diferenciable $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$, con B su bigráfica asociada, se dice crítico si:*

1. *B consiste de un solo vértice z tal que $e_zRe_z \cong k[x]_{f(x)}$ y tiene un lazo de grado cero α, y un lazo de grado uno V, tal que $\delta(\alpha) = r(x,y)V$ con $r(x,y)$ no invertible en $k[x,y]_{f(x)f(y)}$; o*

2. *B tiene dos vèrtices z_1, z_2 tales que $e_{z_1}Re_{z_1} \cong k[x]_{f(x)}$, $e_{z_2}Re_{z_2} \cong k[y]_{f(y)}$ y tiene una flecha de grado cero $\alpha : z_1 \to z_2$, y una flecha de grado uno $V : z_1 \to z_2$, tal que $\delta(\alpha) = r(x,y)V$ con $r(x,y)$ no invertible en $k[x,y]_{f(x)f(y)}$; o*

3. *B tiene dos vértices z_1, z_2 tales que $e_{z_1}Re_{z_1} \cong k[x]_{f(x)}$ o $e_{z_2}Re_{z_2} \cong k[y]_{f(y)}$ $\alpha : z_1 \to z_2$ de grado cero tal que $\delta(\alpha) = 0$.*

Lema 7. *Sea $r(x,y)$ un elemento distinto de cero, no invertible en $k[x,y]_{f(x)f(y)}$, primo relativo con $f(x)f(y)$. Supongamos que para todo $\lambda \in k$ con $f(\lambda) \neq 0$, existe a lo más un número finito de $\mu \in k$ tal que $r(\lambda,\mu) = 0$ y para todo $\mu \in k$ con $f(\mu) \neq 0$, existe a lo más un número finito de $\lambda \in k$ tal que $r(\lambda,\mu) = 0$. Entonces existen elementos $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ en k tal que:*

1. *$r(\lambda_1,\lambda_2) = r(\lambda_2,\lambda_3) = \cdots = r(\lambda_{s-1},\lambda_s) = 0$; y*

2. *$f(\lambda_i) \neq 0$ para $i = 1, \cdots, s$.*

Demostración. Sea $r(x,y) = \sum_{j=1,i=1}^{m,n} c_{ji}x^iy^j$, $c_{ji} \in k$. Entonces:

$$\begin{aligned} r(x,y) &= y^m f_m(x) + y^{m-1} f_{m-1}(x) + \cdots + f_0(x) \\ &= x^n g_n(y) + x^{n-1} g_{n-1}(y) + \cdots + g_0(y) \end{aligned}$$

donde $f_j(x) = \sum_{i=1}^{m} c_{ji}x^i, g_u(y) = \sum_{i=1}^{n} c_{iu}y^i$.

Supongamos que $f_u(x) = 0$ para $0 < u \leq m$, entonces $r(x,y) = f_0(x)$, sea $\lambda \in k$, tal que $f_0(\lambda) = 0$ y $f(\lambda) \neq 0$, entonces $r(\lambda,y) = 0$, para toda y, lo cual contradice nuestra hipòtesis.

Similarmente se puede probar que existe v, $g_v(x) \neq 0$, para $0 < v \leq n$.

Fijemos u, $1 \leq u \leq m$ con $f_u(x) \neq 0$ y v, $1 \leq v \leq n$ con $g_v(y) \neq 0$.

Sea $Z = \{\lambda \in k \mid f_u(\lambda) = 0 \text{ ó } g_v(\lambda) = 0 \text{ ó } f(\lambda) = 0\}$ entonces si $\mu \notin Z$, $g_v(\mu) \neq 0$, $r(x,\mu)$ no es una constante y existe $\lambda \in k$ con $r(\lambda,\mu) = 0$.

Sea Υ la gráfica con vértices los elementos de k. Ponemos una flecha $\mu \to \lambda$ si $r(\lambda,\mu) = 0$. Por hipótesis, cada punto $z \in Z$ tiene a lo más un número finito de flechas saliendo o entrando en z. Si $\lambda, \mu \in \Upsilon$, ponemos $d(\lambda,\mu) = \infty$ si no existe un camino orientado de x a y. En otro caso ponemos:

$$d(\lambda, \mu) = \min \{longitud(\gamma) \mid \gamma : \mu \to \lambda \text{ es un camino orientado}\}.$$

Consideremos $V_s(Z) = \{\lambda \in \Upsilon \mid d(\lambda, \mu) \leq s \text{ para algún } \mu \in Z)\}$.

Sea $\lambda_1 \notin V_s(Z)$, lo cual implica que $\lambda_1 \notin Z$, por lo tanto existe λ_2 tal que tenemos una flecha $\lambda_1 \to \lambda_2$. $\lambda_2 \notin Z$ porque si no $\lambda_1 \in V_s(Z)$, nuevamente existe una flecha $\lambda_2 \to \lambda_3$, otra vez $\lambda_3 \notin Z$, entonces existe una flecha $\lambda_3 \to \lambda_4$ donde $\lambda_4 \notin Z$. Si continuamos con este procedimiento, llegaremos hasta encontrar una flecha $\lambda_{s-1} \to \lambda_s$ tal que $\lambda_s \notin Z$. De donde se sigue nuestro resultado. ■

Teorema 8. *Todo bocs diferenciable crítico, $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ es de tipo de representación salvaje .*

Demostración. a) Consideremos el primer caso donde B consiste de un solo vértice z tal que $e_z R e_z \cong k\,[x]_{f(x)}$ y tiene un lazo de grado cero α, y un lazo de grado uno V, tal que $\delta(\alpha) = r(x, y)V$ con $r(x, y)$ no invertible en $k\,[x, y]_{f(x)f(y)}$.

a .1) Supongamos que existe algún μ con $f(\mu) \neq 0$ y una infinidad de λ_i tal que $r(\lambda_i, \mu) = 0$. Podemos asumir que tenemos λ_i, $1 \leq i \leq 5$ con $f(\lambda_i) \neq 0, \lambda_i \neq \mu$ y $r(\lambda_i, \mu) = 0$. Considere el unravelling de tamaño uno con respecto a λ_i, $i = 1, \cdots, 5$. A continuación considere el unravelling de tamaño uno con respecto a μ. Llamemos $\mathcal{B} = (R', W', \delta')$ al nuevo bocs diferenciable. Sea W_0'' el $R-$bimódulo generado por $\alpha_i : \mu \to \lambda_i$, $i = 1, \cdots, 5$. Entonces para $B = T_{R'}(W_0'')$ tenemos el siguiente subcarcaj salvaje,

$$\mu \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha_1} \lambda_1 \\ \xrightarrow{\alpha_2} \lambda_2 \\ \xrightarrow{\alpha_3} \lambda_3 \\ \xrightarrow{\alpha_4} \lambda_4 \\ \xrightarrow{\alpha_5} \lambda_5 \end{matrix}$$

con $\delta'(\alpha_i) = r(\lambda_i, \mu)V_i = 0$ para toda $i = 1, \cdots, 5$. Por las proposiciones 3 y 4 se sigue nuestro resultado.

a.2) Supongamos que para algún λ con $f(\lambda) \neq 0$ existe un número infinito de μ con $r(\lambda, \mu) = 0$. Procedemos similarmente que en el caso anterior.

a.3) Supongamos que existen cuatro elementos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ de k tal que

$$r(\lambda_2, \lambda_1) = r(\lambda_3, \lambda_2) = r(\lambda_4, \lambda_3) = 0 \text{ y } f(\lambda_1)f(\lambda_2)f(\lambda_3)f(\lambda_4) \neq 0.$$

a.3.1) Supongamos que todas las λ_i son diferentes y consideremos el unravelling (R', W', δ') de tamaño 3 con respecto a las diferentes λ_i.
Si $a^{i,j}_{s,t} : z^{\lambda_i}_{o(t)} \dashrightarrow z^{\lambda_j}_{o(s)}$, donde $o(l) =$ órbita de l; tenemos:

$$\delta'(a^{i,j}_{s,t}) = \textstyle\sum_{m<s} x^{i,j}_{s,m} a^{i,j}_{m,t} - \sum_{t<n} a^{i,j}_{s,n} x^{i,j}_{n,t} + \sum_{u,v} C_{u,v} J_{\lambda_i}(1,2,3)^u V_{i,j} J_{\lambda_j}(1,2,3)^v$$

por lo tanto, si $i = j + 1$ obtenemos:

$$\begin{array}{rcl}
\delta(a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),3}) & = & 0 \\
\delta(a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),2}) & = & -a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),3} x^{i,j}_{3,2} \\
\delta(a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),1}) & = & -a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),2} x^{i,j}_{2,1} - a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),3} x^{i,j}_{3,1} \\
\delta(a^{i,j}_{\sigma^{-1}(2),3}) & = & x^{i,j}_{\sigma^{-1}(2),\sigma^{-2}(3)} a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),3} \\
\delta(a^{i,j}_{\sigma^{-1}(3),3}) & = & x^{i,j}_{\sigma^{-1}(3),\sigma^{-1}(2)} a^{i,j}_{\sigma^{-1}(2),3} + x^{i,j}_{\sigma^{-1}(3),\sigma^{-2}(3)} a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),3} + \partial_1 r(\lambda_i, \lambda_j) V^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),3} \\
\delta(a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),\sigma^{-1}(3)}) & = & -a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),2} x^{i,j}_{2,\sigma^{-1}(3)} - a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),3} x^{i,j}_{3,\sigma^{-1}(3)} + \partial_2 r(\lambda_i, \lambda_j) V^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),3}
\end{array}$$

Donde $\partial_s r(\lambda_i, \lambda_j)$ denota la derivada parcial con respecto a la primera variable si $s = 1$ y con respecto a la segunda si $s = 2$.

Aplicando anulación de flechas sucesivamente en $a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),3}$, $a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),2}$ y $a^{i,j}_{\sigma^{-1}(2),3}$ se tiene,

$$\delta(a^{i,j}_{\sigma^{-1}(3),3}) = \partial_1 r(\lambda_i, \lambda_j) V^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),3} \qquad \delta(a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),\sigma^{-1}(3)}) = \partial_2 r(\lambda_i, \lambda_j) V^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),3}$$

Definamos,

$$\beta^{i,j}_{\sigma^{-1}(3),3} = \begin{cases} a^{i,j}_{\sigma^{-1}(3),3} & \text{si } \partial_1 r(\lambda_i, \lambda_j) V^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),3} = 0 \\ \partial_1 r(\lambda_i, \lambda_j) a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),\sigma^{-1}(3)} & \\ \quad -\partial_2 r(\lambda_i, \lambda_j) a_{\sigma^{-1}(3),3} & \text{si } \partial_1 r(\lambda_i, \lambda_j) V^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),3} \neq 0 \end{cases}$$

Entonces $\delta(\beta^{i,j}_{\sigma^{-1}(3),3}) = 0$ y $\delta(a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),1}) = 0$.

Si $\mathcal{B} = (R', W', \delta')$ es el nuevo bocs diferenciable y W''_0 el R'-bimódulo generado por los elementos $\beta^{i,j}_{\sigma^{-1}(3),3}$ y $a^{i,j}_{\sigma^{-2}(3),1}$ para $j = i + 1$, en $B = T_R(W''_0)$ tenemos el siguiente subcarcaj salvaje:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & z_1^{\lambda_1} & & z_1^{\lambda_2} & & z_1^{\lambda_3} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
z_3^{\lambda_1} & \to & z_3^{\lambda_2} & \to & z_3^{\lambda_3} & \to & z_3^{\lambda_4}
\end{array}$$

Por las proposiciones 3 y 4 tenemos que $\mathcal{A}$ es salvaje.

a.3.2) Si $\lambda_1 = \lambda_2$, tomando $\lambda = (\lambda_1\lambda_3)$, en B tenemos el siguiente subcarcaj salvaje:

$$\begin{array}{ccc} z_3^{\lambda_1} & & \\ \downarrow \alpha & & \\ z_3^{\lambda_1} & \xrightarrow{\beta} & z_3^{\lambda_3} \end{array}$$

a.3.3) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pero $\lambda_1 = \lambda_3$, tomamos $\lambda = (\lambda_1\lambda_2)$, en B tenemos el siguiente subcarcaj salvaje:

$$\begin{array}{ccc} z_1^{\lambda_1} & \rightarrow & \\ & \leftarrow & z_3^{\lambda_2} \\ z_3^{\lambda_1} & \rightarrow & \end{array}$$

a.3.4) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_2 \neq \lambda_3, \lambda_1 \neq \lambda_3, \lambda_1 = \lambda_4$, tenemos el siguiente subcarcaj salvaje en B :

$$\begin{array}{ccccc} & & z_1^{\lambda_1} & & \\ & \swarrow & & \nwarrow & \\ z_3^{\lambda_2} & - & - & \rightarrow & z_3^{\lambda_3} \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ z_3^{\lambda_1} & & & & z_3^{\lambda_2} \end{array}$$

b) Consideremos el caso en que B tiene dos vèrtices z_1, z_2 tales que $e_{z_1}Re_{z_1} \cong k\,[x]_{f(x)}$, $e_{z_2}Re_{z_2} \cong k\,[y]_{f(y)}$ y tiene una flecha de grado cero $\alpha : z_1 \to z_2$, y una flecha de grado uno $V : z_1 \to z_2$, tal que $\delta(\alpha) = r(x,y)V$ con $r(x,y)$ no invertible en $k\,[x,y]_{f(x)f(y)}$. La demostración de este caso, se hará en tres pasos:

1. Hágase el unravelling de tamaño 9 con respecto a $\lambda = 0$ en el vértice z_1.

2. Hágase el unravelling de tamaño q con respecto a $\lambda = 0$ en el vértice z_2.

3. Hágase anulación de flechas.

1) Sean $x_1, \cdots, x_9$ los nuevos vértices obtenidos de hacer el unravelling de tamaño 9 y considere Γ el correspondiente carcaj de traslación, para cada vértice r de Γ sea $\alpha_r : x_{o(r)} - - \to y, v_r : x_{o(r)} - - \to y$, y para cada $[\gamma]$, $\gamma : i - - \to j \in \Gamma$, sea $w_{[\gamma]} : x_{o(i)} - - \to x_{o(j)}$.

2) Considere el unravelling de tamaño q en z_2, sean $y_1, \cdots, y_q$ los nuevos vértices y Υ el correspondiente carcaj de traslación, para cada vértice s de Υ sea $\alpha_r^s : x_{o(r)} - - \to y_{o(s)}, v_r^s : x_{o(r)} - - \to y_{o(s)}$, $\rho^u : y_t - - \to y_t$, para $t \in \{1, \cdots, q\}$, $u = 1, \cdots, t-1$. Entonces la nueva diferencial está dada por:

$$\delta'(\alpha_r^s) = \sum_{i=1}^{i+s=q} \rho^r \alpha_r^{s+i} - \sum_{\gamma:r\to t} \alpha_t^s w\,[\gamma] + \sum_{i=0}^{s+i=q} c_{i,j} V_{\tau^j(r)}^{s+i}.$$

3) Si B' es la bigráfica asociada al nuevo bocs diferenciable, observemos que contiene a la siguiente subgráfica:

$$\begin{array}{lcl}
x_1\bullet & \searrow \alpha_1^q & \\
x_3\bullet & \searrow \alpha_{\tau^{-1}(3)}^q & \\
x_5\bullet & \xrightarrow{\alpha_{\tau^{-2}(5)}^q} & \bullet y_q \\
x_7\bullet & \nearrow \alpha_{\tau^{-3}(7)}^q & \\
x_9\bullet & \nearrow \alpha_{\tau^{-4}(9)}^q &
\end{array}$$

Sea $r \in \{1, \tau^{-1}(3), \tau^{-2}(5), \tau^{-3}(7), \tau^{-4}(9)\}$ y $s = q$. Si hacemos anulación de flechas para toda α_t^s tal que $s \in \Upsilon, s < q$ y $t \in \Gamma$ tal que existe $\gamma : r \to t$, tenemos que $\delta'(\alpha_r^q) = \sum_j c_{0,j} V_{\tau^j(r)}^q$. De donde se tiene:

$$\begin{array}{rcl}
\delta'(\alpha_1^q) & = & 0 \\
\delta'(\alpha_{\tau^{-1}(3)}^q) & = & C_{0,1}V_3^q \\
\delta'(\alpha_{\tau^{-2}(5)}^q) & = & C_{0,1}V_{\tau^{-1}(5)}^q + C_{0,2}V_5^q \\
\delta'(\alpha_{\tau^{-3}(7)}^q) & = & C_{0,1}V_{\tau^{-2}(7)}^q + C_{0,2}V_{\tau^{-1}(7)}^q + C_{0,3}V_7^q \\
\delta'(\alpha_{\tau^{-4}(9)}^q) & = & C_{0,1}V_{\tau^{-3}(9)}^q + C_{0,2}V_{\tau^{-2}(9)}^q + C_{0,3}V_{\tau^{-1}(9)}^q + C_{0,4}V_9^q
\end{array}$$

Nuestro siguiente paso es encontrar una q de tal manera que podamos asegurar que las diferenciales anteriores son siempre cero y entonces podremos aplicar nuevamente las proposiciones 3 y 4.

En general, sea p el tamaño del unravelling en el vértice z_1 y q el tamaño del unravelling en el vértice z_2. Denotemos $\delta(\alpha_{\tau^{-n}(r)}^q) = \delta(\tau^n(r))^q = \sum_{j=0}^n C_{0,j} V_{\tau^{j-n}(r)}^{s+i}$.

Lema 9. *Sea $m \in N$ tal que $C_{i,0} = C_{0,i} = 0$ para $i \leq m-1$, $C_{m,.0} \neq 0$ entonces existe q función de m y n tal que $V_r^q = V_{\tau^{-1}(r)}^q = \cdots = V_{\tau^{-n}(r)}^q = 0$.*

Demostracion. Consideraremos dos casos, $m = 1$ y $m > 1$.
a) Sea $m = 1$, $q \geq n+2$. La demostracion se hara por induccion sobre n.

a.1) Supongamos que $n = 0$ y $q \geq 2$, queremos demostrar que $V_r^q = 0$.

$$\delta'(r)^{q-1} = \sum_{i=0}^1 C_{i,0} V_r^{q-1+i} = C_{1,0}V_r^q = 0$$

como $C_{1,0} \neq 0$, tenemos que $V_r^q = 0$.

a.2) Supongamos que la afirmación vale para $n-1$, es decir, para $q \geq n+1$ se tiene,

$$V_r^q = V_{\tau^{-1}(r)}^q = \cdots = V_{\tau^{-(n-1)}(r)}^q = 0$$

$a.3)$ Por demostrar que vale para n, es decir, si $q \geq n+2$ entonces $V_r^q = \cdots = V_{\tau^{-n}(r)}^q = 0$.

$$\begin{array}{rcl} \delta(\tau^{-n}(r))^{q-1} & = & \sum_{i=0}^{1} C_{i,j} V_{\tau^{j-n}(r)}^q \\ & = & C_{1,0} V_{\tau^{-n}(r)}^q + \sum_{j=1}^{n} C_{0,j} V_{\tau^{j-n}(r)}^{q-1} + \sum_{j=1}^{n} C_{1,j} V_{\tau^{j-n}(r)}^q \\ & = & C_{1,0} V_{\tau^{-n} x_r}^t \end{array}$$

Observe que $q \geq n+2 \Rightarrow q-1 \geq n+1$, y $j-n = 0, 1, \cdots, -(n-1)$, por lo tanto por hipótesis de inducción tenemos $\delta(\tau^{-n}(r))^{q-1} = C_{1,0} V_{\tau^{-n} x_r}^t = 0$. Como $C_{1,0} \neq 0, V_{\tau^{-n}(r)}^t = 0$.

$b)$ Sea $m > 1, q \geq (n+1)m - (n-1)$. Nuevamente la demostracion se hara por induccion sobre n.

$b.1)$ Supongamos que $n = 0$ y $q \geq m+1$, queremos demostrar que $V_r^q = 0$.

$$\begin{array}{rcl} \delta(r)^{q-m} & = & \sum_{i=0}^{m} C_{i,0} V_r^{q-m+i} \\ & = & C_{1,0} V_r^{q-m-1} + \cdots + C_{m-1,0} V_r^{q-1} + C_{m,0} V_r^q \\ & = & C_{m,0} V_r^q \\ & = & 0 \end{array}$$

Como $C_{m,0} \neq 0$, se tiene que $V_r^q = 0$.

$b.2)$ Supongamos que la afirmación vale para $n-1$, es decir si $q \geq nm - (n-2)$ entonces

$$V_r^q = V_{\tau^{-1}(r)}^q = \cdots = V_{\tau^{-(n-1)}(r)}^q = 0$$

$b.3)$ Por demostrar que vale para n, e.d., si $q \geq nm + m - n + 1$ entonces $V_r^q = \cdots = V_{\tau^{-n}(r)}^q = 0$.

$$\begin{array}{rcl} \delta(\tau^{-n}(r))^{q-m} & = & \sum_{\substack{i=0,\cdots,m \\ j=0,\cdots,n}} C_{i,j} V_{\tau^{j-n}(r)}^{q-m+i} \\ & = & C_{m,0} V_{\tau^{-n}(r)}^q + \sum_{j=1}^{n} C_{1,j} V_{\tau^{j-n}(r)}^{q-m+1} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} C_{m,j} V_{\tau^{j-n}(r)}^q \\ & = & 0 \end{array}$$

Pero observemos que $q-m+i \geq nm-n+2$ porque $i \geq 1$ y además $0 \leq j-n \leq -(n-1)$. Por lo tanto aplicando nuestra hipótesis de inducción tenemos que $C_{m,0} V_{\tau^{-n}(r)}^q = 0$ y como $C_{m,0} \neq 0$, se tiene que $V_{\tau^{-n}(r)}^q = 0$.

■

En particular, si $p = 9$, $n \leq 4$, la q suficientemente grande para concluir la demostración de nuestra proposción es:

Si $m = 1, 2, 4$	es suficientes $q \geq 5$
Si $m = 3$	es suficientes $q \geq 6$
Si $m \geq 5$	es suficientes $q \geq 1$

c) Supongamos que B tiene dos vértices z_1, z_2 tales que $e_{z_1}Re_{z_1} \cong k[x]_{f(x)}$ o $e_{z_2}Re_{z_2} \cong k[y]_{f(y)}$ $\alpha : z_1 \to z_2$ de grado cero tal que $\delta(\alpha) = 0$.

Sea z el vértice de B tal que $e_zRe_z \cong k[x]_{f(x)}$, aplicando unravelling de tamaño cinco se tiene el resultado deseado. ■

III.2 Bocses mansos.

El siguiente lema es fundamental en la demostración del teorema principal de esta sección.

Lema 10. *Sea $\mathcal{A} = (R, D, \delta)$ un bocs diferenciable no salvaje. Sea $\alpha : i \longrightarrow j$ su flecha minimal. Supongamos que $\delta(\alpha) = \sum_l r_l(x,y)V_l$. Entonces podemos aplicar un unravelling de tal manera que en el nuevo bocs $\delta(\alpha) = W$.*

Demostración. Sea $s(x,y) = m.c.d.\,\{r_l(x,y)\}$, entonces $r_l(x,y) = r_l^0(x,y)s(x,y)$, por lo tanto existen polinomios $h(x)$ y $q(x,y)$ tales que $h(x) = \sum_l q_i(x,y)r_i^0(x,y)$ y una matriz M con determinanate $h(x)^n$, tal que su primer columna está formada por los elementos $r_l^0(x,y)$. Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ todas las raices del polinomio $h(x)$ y hagamos unravelling de tamaño r con respecto a cada una de las diferentes $\lambda's$. $h(x) = \Pi(x - \lambda_i)^{\alpha_i}$ por lo que $h(x)$ es invertible en $k[x]_{h(x)(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_s)}$. Por lo tanto podemos hacer un cambio de base $(V_1, \cdots, V_l)M = \begin{pmatrix} V_1' \\ \vdots \\ V_l' \end{pmatrix}$ tal que $\delta(\alpha) = s(x,y)V_1'$, pero nuevamente $s(x,y)$ es invertible, por lo tanto podemos hacer un nuevo cambio de base de tal manera que $\delta(\alpha) = W$.
En el caso en que $\delta(\alpha) = \sum_l h_l(x)V_l$, se puede proceder de manera similar. ■

Definición 11. *Sea G un árbol orientado finito con un solo pozo. Un $G-$ algoritmo de reducción consiste de un par de funciones (f,g):*

1. *$f : V(G) \to \{(Rep\mathcal{A}, U) \mid \mathcal{A} = (R, W, \delta), U \subset K_0(\mathcal{A})$ finito y no vacio$\}$,*
2. *$g : A(G) \to \{F \mid F$ es un algoritmo de reducción$\}$*

que satisfacen las siguientes propiedades:

1. *Si $F = g(\alpha) : Rep\mathcal{A}_i \to Rep\mathcal{A}_j$ entonces $t_F(U_i) \subseteq U_j$ y $\cup_{k\in j^+}t_F(U_k) = U_j$,*

2. *Si $M \in Rep\mathcal{A}_j$ y $\dim M \in U_j$ entonces existe $\alpha : i \to j, N \in Rep\mathcal{A}_i$ con $\dim N \in U_i$ tal que $F(N) \cong M$ para $F = g(\alpha)$,*

3. *$i \in V(G)$ es fuente si y sólo si $\mathcal{A}_i$ es minimal.*

Definición 12. *Decimos que G es el árbol algorítmico del par $(Rep\mathcal{A}, U)$, si existe un $G-$algoritmo de reducción tal que $f(fuente\ de\ G) = (Rep\mathcal{A}, U)$.*

Teorema 13. *Si el bocs diferenciable $\mathcal{A}$ no es salvaje, entonces para toda dimensión $d \in K_0(\mathcal{A})$, existe un árbol algorítimico G del par $(Rep\mathcal{A}, d)$.*

Demostración. Haremos inducción sobre la norma de d.
I) Supongamos que $\|d\| = 0$.

1. Si d es sincero entonces $\mathcal{A}$ es minimal por el lema 11, sección $II.7$.

2. Supongamos que d no es sincero. Entonces aplicamos eliminación de idempotentes en cada uno de los vértices i tales que $(d)_i = 0$. Si $(\mathcal{B}, d')$ es el nuevo bocs diferenciable tal que $t_F(d') = d$ y d' sincero, por el lema 11, sección $II.7$, tenemos que $\mathcal{B}$ es un bocs minimal.

II) Supongamos que el teorema se cumple para toda d tal que $\|d\| < n$.
III) Sea $\|d\| = n$ y podemos suponer sin pérdida de generalidad que d es sincero. Recordemos que $\mathcal{A}$ es triangular, sea α su flecha minimal.

1. $\delta(\alpha) = 0$

   (a) $i = j$

      i. $e_iRe_i \cong k$, lo cual no puede ser porque ya hemos saturado.

      ii. $e_iRe_i \cong k\left[x\right]_{f(x)}$, entonces $\delta(\alpha) = \sum r_i(x,y)V_i = 0$, pero el 0 es no invertible en $f(x)$, por lo tanto sería critico y salvaje, lo cual no es posible.

   (b) $i \neq j$

      i. $e_iRe_i \cong k$, $e_jRe_j \cong k$, entonces aplicamos reducción de una flecha.

      ii. $e_iRe_i \cong k$ y $e_jRe_j \cong k\left[x\right]_{f(x)}$ o $e_iRe_i \cong k\left[x\right]_{f(x)}$ y $e_jRe_j \cong k$, pero en ambos casos nuevamente aparecen bocses críticos y salvajes, lo cual tampoco se puede

      iii. $e_iRe_i \cong k\left[x\right]_{f(x)}$ y $e_jRe_j \cong k\left[x\right]_{f(x)}$, entonces $\delta(\alpha) = \sum r_i(x,y)V_i = 0$, pero el 0 es no invertible en $k(x,y)_{f(x)f(y)}$, por lo tanto sería critico y salvaje, lo cual no es posible.

2. $\delta(\alpha) \neq 0$

   (a) $i = j$

      i. $e_iRe_i \cong k$, entonces $\delta(\alpha) = \sum c_iV_i$ por lo que podemos hacer un cambio de base de tal manera que $\delta(\alpha) = V'$ y aplicar regularización.

      ii. $e_iRe_i \cong k[x]_{f(x)}$, entonces $\delta(\alpha) = \sum r_i(x,y)V_i$. Por el lema 1 tenemos que es posible hacer un cambio de base de tal manera que $\delta(\alpha) = W$ y por lo tanto podemos aplicar regularización.

   (b) $i \neq j$.

      i. $e_iRe_i \cong k$, $e_jRe_j \cong k$, entonces $\delta(\alpha) = \sum c_iV_i$, lo que nos permite hacer un cambio de base y aplicar regularización.

      ii. $e_iRe_i \cong k$ y $e_jRe_j \cong k[x]_{f(x)}$ o $e_iRe_i \cong k[x]_{f(x)}$ y $e_jRe_j \cong k$, en ambos casos $\delta(\alpha) = \sum h_i(x)V_i$,aplicando el lema 1, llegamos a que podemos hacer regularización.

      iii. $e_iRe_i \cong k[x]_{f(x)}$ y $e_jRe_j \cong k[x]_{f(x)}$, entonces $\delta(\alpha) = \sum r_i(x,y)V_i$ y se puede hacer regularización. ■

Sea S una familia de representaciones inescindibles no isomorfas dos a dos del bocs $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$, tal que $\underline{\dim} M = \underline{d}$ para todo $M \in S$.

Definición 14. *Una parametrización estricta de S consiste de un $A - K[x]_{f(x)}$ bimódulo $\mathcal{M}$, libre finitamente generado como $K[x]_{f(x)}$ −módulo tal que:*

1. para toda $\lambda \in k$, $f(\lambda) \neq 0, \mathcal{M} \otimes_{K[x]_{f(x)}} S_\lambda \in S$ donde $S_\lambda = K[x] \setminus (x - \lambda)$;

2. para todo $M \in S$, $M \cong \mathcal{M} \otimes_{K[x]_{f(x)}} S_\lambda$, para algún $\lambda \in k$, $f(\lambda) \neq 0$;

3. si $\lambda \neq \mu$ entonces $\mathcal{M} \otimes_{K[x]_{f(x)}} S_\lambda \neq \mathcal{M} \otimes_{K[x]_{f(x)}} S_\mu$.

Diremos que la familia S está estrictamente parametrizada por $\mathcal{M}$.

Definición 15. *Sea T una familia de representaciones inescindibles. Decimos que la familia T es parametrizable si para cada dimensión $\underline{d}$, existe un número finito de representaciones inescendibles $X_1, \cdots, X_m \in T_{\underline{d}}$ tal que $T_{\underline{d}} / \{X_1, \cdots, X_m\} = S_1 \cup \cdots \cup S_l$ con S_i familias estrictamente parametrizadas.*

Definimos $\mu_T(\underline{d}) = l$.

Definición 16. *La familia T se llama doméstica si existe una constante $c > 0$ tal que $\mu_T(\underline{d}) \leq c$ para toda $\underline{d}$.*

Definición 17. *T se llama de crecimiento polinomial si existe un polinomio p tal que $\mu_T(\underline{d}) \leq p(\|d\|)$.*

Definición 18. *Γ es un álgebra racional si $\Gamma = k\,[x]_{f(x)}$.*

Definición 19. *Un bocs $\mathcal{A}$ es manso si para cada dimensión $\underline{d}$ existen un número finito de k-álgebras racionales $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_r$ y $A - \Gamma_i$ bimódulos $B_1, B_2, \cdots, B_r$ con B_i libre finitamente generados como Γ_i-módulo, tal que para toda representación inescindible M de dimensión $\underline{d}$, existen $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ y una $\lambda \in \{\lambda \in k \mid f(\lambda) \neq 0\}$ tales que $M \cong B_i \otimes_{\Gamma_i} S_\lambda$.*

Proposición 20. *Sea $\mathcal{A}$ un bocs minimal, entonces $\mathcal{A}$ es de tipo de representación finita o es manso.*

Demostración.

1. Supongamos que B es estrictamente minimal, entonces $W_0 = 0$, $R = k \times \cdots \times k$ y $A = T_R(W_0) = R$. Entonces el número de representaciones inescindibles de $\mathcal{A}$ es igual al número de factores de R, por lo tanto el bocs es de tipo de representación finita.

2. Si B no es estrictamente minimal, las representaciones inescindibles para cada factor $k\,[x]_{f(x)} \neq 0$ están dadas por bloques de Jordan. Para la representación $M = J_\lambda(n)$ sea $\Gamma = k\,[z]_{f(z)}$ y $B = \underbrace{k\,[z]_{f(z)} \oplus \cdots \oplus k\,[z]_{f(z)}}_{n-veces}$, la acción de x por la izquiera está dada por $J_z(n)$ y $B \otimes_{k[z]_{f(z)}} S_\lambda = J_\lambda(n)$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es manso. ■

Proposición 21. *Sea $F : Rep\mathcal{B} \to Rep\mathcal{A}$ un algoritmo de reducción y $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de representaciones de $\mathcal{B}$ estrictamente parametrizada por $\mathcal{M}$ un $eBe - k\,[x]_{f(x)}$-bimódulo libre finitamente generado como $k\,[x]_{f(x)}$-módulo entonces la familia $\{F(M_i)\}_{i \in I}$ es una familia estrictamente parametrizada de representaciones de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Para toda $i \in I$, $M_i \cong \mathcal{M} \otimes_{k[x]_{f(x)}} S_\lambda$, $\lambda \in \{\lambda \in k \mid f(\lambda) \neq 0\}$.

1. Supongamos que F no es regularización entonces

$$F(M_i) \cong Be \otimes_{eBe} M_i \cong F(\mathcal{M} \otimes_{k[x]_{f(x)}} S_\lambda) \cong (Be \otimes_{eBe} \mathcal{M}) \otimes_{k[x]_{f(x)}} S_\lambda$$

pero $Be = \amalg x_i eBe \cong \amalg eBe$, por lo tanto $Be \otimes_{eBe} \mathcal{M} \cong \amalg eBe \otimes_{eBe} \mathcal{M} \cong \amalg \mathcal{M}$, y como suma de libres finitamente generados es libre finitamente generado, tenemos que la familia $\{F(M_i)\}_{i \in I}$ también está estrictamente parametrizada por el $A - k\,[x]_{f(x)}$ bimódulo $Be \otimes_{eBe} \mathcal{M}$.

2. Supongamos que F es regularización entonces $F(M_i) \cong M_i$, por lo tanto $F(\mathcal{M} \otimes_{k[x]_{f(x)}} S_\lambda) \cong \mathcal{M} \otimes_{k[x]_{f(x)}} S_\lambda$. ■

Proposición 22. *El bocs $\mathcal{A}$ es manso si y sólo si, para toda dimensión $\underline{d}$ tiene asociado un G-algoritmo de reducción.*

Demostración. $\Leftarrow$ Consideremos $B_1, \cdots, B_l$ el conjunto de bocses minimales asociados al árbol algorítmico del par $(\mathcal{A},\underline{d})$, $F_u : RepB_u \to Rep\mathcal{A}$, para cada familia $\{M_i\}_{i \in I} \in RepB_u$ estrictamente parametrizada, por la proposición anterior tenemos que la familia $\{F_u(M_i)\}_{i \in I} \in Rep\mathcal{A}$ está estrictamente parametrizada. Por la definición de árbol algorítmico, sabemos que para casi toda clase de isomorfía $\{N\}$, $N \in Rep\mathcal{A}$ con $\underline{dim}N = \underline{d}$, existe $u \in \{1, \cdots, l\}$ tal que $F_u(M_i) \cong N$.
$\Rightarrow$ Si $\mathcal{A}$ es manso entonces por el teorema de Drozd no es salvaje y aplicamos el teorema 12 ■

.

CAPITULO IV

Sea $\mathcal{A}$ un bocs de tipo de representación manso, T una familia de representaciones inescindibles del bocs. La familia $T_{\underline{d}}(u) = \{M \in T \mid \underline{dim}M = \underline{d} \text{ y } \Delta(M) = u\}$ donde $\Delta(M) = dim_k End_{\mathcal{A}}(M) - q_{\mathcal{A}}(\underline{dim}M)$. En este capítulo, estudiaremos el árbol algorítmico de las familias $T_{\underline{d}}(u)$ y mostraremos condiciones suficientes para que éstas sean de tipo de crecimiento polinomial. Daremos una breve introducción geométrica con la finalidad de demostrar la proposición 13.

IV.1 Introducción geométrica.

Sea k un campo algebraicamente cerrado. Consideremos el espacio afín $V = k^n$.
El anillo de coordenadas de V, se define como $k[V] = k[x_1, \cdots, x_n]$ = el anillo de polinomios en n variables conmutativas. Si $f \in k[V]$, nos define una función polinomial $f : V \to k$ dada por $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \to f(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Definición 1. *Para toda colección finita de elementos en* $k[V]$, $\{f_1, \cdots, f_m\}$ *sea*

$$\Sigma = \{\lambda \in V \mid f_i(\lambda) = 0, \forall i = 1, \cdots, m\}.$$

Si $I = \langle f_1, \cdots, f_m \rangle$ es un ideal de $k[V]$, como $k[V]$ es un anillo noetheriano, cualquier ideal está generado por un número finito de elementos, por lo tanto

$$\Sigma = C(I) = \{\lambda \in V \mid f_i(\lambda) = 0, \forall f_i \in I\}.$$

Los conjuntos $C(I)$ satisfacen las siguientes propiedades:

1. $C(I_1) \cap C(I_2) = C(I_1 + I_2)$.

   Sea $\lambda \in C(I_1) \cap C(I_2)$, $h \in I_1 + I_2$, $h = g_1 + g_2$, $g_1 \in I_1$, $g_2 \in I_2$, entonces $h(\lambda) = g_1(\lambda) + g_2(\lambda) = 0$, por lo tanto $\lambda \in C(I_1 + I_2)$.

   Sea $\lambda \in C(I_1+I_2)$, $g_1 \in I_1 \subset I_1+I_2$, entonces $g_1(\lambda) = 0$, por lo tanto $\lambda \in C(I_1)$. Similarmente tenemos que si $g_2 \in I_2 \subset I_1 + I_2$, $\lambda \in C(I_2)$.

2. $C(I_1) \cup C(I_2) = C(I_1 I_2)$.

   Sea $\lambda \in C(I_1) \cup C(I_2)$, $g \in I_1 I_2$, $g = \sum h_i f_i$, $h_i \in I_1$, $f_i \in I_2$, entonces $g(\lambda) = \sum h_i(\lambda) f_i(\lambda) = 0$, por lo tanto $\lambda \in C(I_1 I_2)$.

   Sea $\lambda \in C(I_1 I_2)$, $g(\lambda) = \sum h_i(\lambda) f_i(\lambda) = 0$, $I_1 = \langle h_1, \cdots, h_m \rangle$, $I_2 = \langle f_1, \cdots, f_n \rangle$, $I_1 I_2 = \langle h_i f_j \rangle$, entonces $h_i(\lambda) f_j(\lambda) = 0$ para toda i, j. Si $f_j(\lambda) = 0$ para toda j entonces $\lambda \in C(I_1)$. Si existe j, tal que $f_j(\lambda) \neq 0$, entonces para toda i, $h_i(\lambda) f_j(\lambda) = 0$, por lo tanto $h_i(\lambda) =$ para toda i, y $\lambda \in C(I_2)$.

3. $\emptyset = C(k[x_1, \cdots, x_n])$.

4. $V = C(0)$.

Con lo que queda demostrado el siguiente lema.

Lema 2. *El espacio V está dotado de la estructura de espacio topológico, donde los subespacios cerrados están formados por los conjuntos $C(I)$, donde I es un ideal de $k[V]$. A esta topología se le conoce como la topología de Zariski.*

■

Como ejemplo si $V = k$ los cerrados de V son los subconjuntos finitos de k, junto con el total y el vacio.

Recordemos el siguiente resultado importante.

Teorema 3. *(Nullstellensatz-Hilbert):*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(C(I)) &= \{f \in k[x_1, \cdots, x_n] \mid f(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = 0, \forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in C(I)\} \\ &= \{h \in k[x_1, \cdots, x_n] \mid h^n \in I \text{ para alguna } n \in N\} \end{aligned}$$

Si $\Sigma = C(I)$ es un cerrado, el anillo de coordenadas de Σ, denotado $k[\Sigma] = k[x_1, \cdots, x_n]/I$. Además, $f \in k[\Sigma]$ si y sólo si f se puede extender a una función g polinomial, es decir, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \subset & k^n \\ f\downarrow & \swarrow g & \\ k & & \end{array}$$

Definición 4. *Un conjunto A es un abierto en V, si A es el complemento de un cerrado, es decir, $A = \{\lambda \in V \mid g(\lambda) \neq 0, \forall g \in I\}$.*

Si A es un abierto de k^n, A = complemento de $Z(I)$, $I = \langle f_1, \cdots, f_n \rangle$, el anillo de coordenadas de A, $k[A] = k[x_1, \cdots, x_n]_{f_1,\cdots,f_n} = \left\{ \frac{h_1}{h_2} \mid h_2 = f_1(x)^{s_1} \cdots f_n^{s_n} \right\}$.

Nuevamente A tiene estructura de variedad, sus cerrados son los conjuntos formados por los ceros comunes de conjuntos finitos de funciones $h_1, \cdots, h_l \in k[A]$.

Definición 5. *Si $X \subset k^n$, X se llama irreducible si $X = X_1 \cup X_2$ cerrados implica que $X_1 = X$ ó $X_2 = X$.*

Proposición 6. *Sea Σ una variedad, Σ en $k[\Sigma]$ es irreducible si y sólo si $k[\Sigma]$ es un dominio entero.*

Demostración. $\Rightarrow$ Sean $h_1, h_2 \in k[\Sigma]$ tal que $h_1 h_2 = 0$, claramente $Z(h_1) \cup C(h_2) \subseteq \Sigma$. Si $\lambda \in \Sigma$ entonces $h_1(\lambda) h_2(\lambda) = 0$ por lo que $h_1(\lambda) = 0$ ó $h_2(\lambda) = 0$, por lo tanto $\lambda \in C(h_1) \cup C(h_2)$, como Σ es irreducible $Z(h_1) = \Sigma$ ó $Z(h_2) = \Sigma$ de donde se tiene que $h_1 = 0$ ó $h_2 = 0$.
$\Leftarrow$ Supongamos que $k[\Sigma]$ es dominio entero y $\Sigma = X_1 \cup X_2$ cerrados con $X_1 \neq \Sigma$ y $X_2 \neq \Sigma$, entonces. existe $h_1 \neq 0$ tal que $h_1(X_1) = 0$ y $h_1(\Sigma) \neq 0$. Similarmente tenmos $h_2 \neq 0$ tal que $h_2(X_2) = 0$ y $h_2(\Sigma) \neq 0$. Por lo tanto $h_1 h_2 = 0$, lo cual contradice el hecho de que Σ sea un dominio entero. ■
El anillo de coordenadas del producto de dos variedades X_1, X_2 se define como $k[X_1 \times X_2] = k[X_1] \otimes_k k[X_2]$, $u \in k[X_1 \times X_2]$, $u = \sum h_i \otimes_k g_i$, nos define, $X_1 \times X_2 \xrightarrow{u} k$, dado por $u(\lambda_1, \lambda_2) = \sum h_i(\lambda_1) g_i(\lambda_2)$.

Un morfismo entre dos variedades X, Y es un morfismo $f : X \to Y$ tal que para cualquier $h \in k[Y]$, se tiene que $hf \in k[X]$. El morfismo f, nos induce $f^* : k[Y] \to k[X]$. Además f^{-1} manda cerrados en cerrados y por lo tanto es continua.

Definición 7. *Sea X una variedad y Z en X. Decimos que Z es construible si Z se puede expresar como una unión finita de intersecciones de abiertos y cerrados, es decir, $Z = \cup_{i \in I}(A_i \cap C_i)$.*

Como ejemplo, en k los construibles son conjuntos finitos o cofinitos. Además, el complemento de un construible, vuelve a ser un construible.

Teorema 8. *(Chevaley): Sea $Z \subset X$ construible y $f : X \to Y$ un morfismo de variedades entonces $f(Z)$ es construible.*

Ejemplo 9. *Sea Q un carcaj, $|V(Q)| = n$, $A(G) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$, $d = (d_1, \cdots, d_n)$. Se define,*

$$\begin{array}{rcl} Rep_d(Q) & = & \times_{\alpha:i\to j} M_{d_i \times d_j}(k) \cong \times_{\alpha:i\to j} k^{d_i d_j}. \\ ind_d(Q) & = & \{M \in Rep_d(Q) \mid M \text{ es inescindible}\} \\ des_d(Q) & = & \{M \in Rep_d(Q) \mid M \text{ es descomponible}\} \\ G(d) & = & \times_{i \in V(Q)} GL_{d_i}(k) \end{array}$$

Lema 10. *$ind_d(Q)$ es construible.*

Demostración. Sea $D_{d_1,d_2} = Rep_d(Q) \times Rep_{d_1}(Q) \times Rep_{d_2}(Q) \times G(d)$ tal que $d_1 \neq 0 \neq d_2$ y $d_1 + d_2 = d$.

Ejemplo 11. *Definimos $D^0_{d_1,d_2} = \left\{(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, g_\alpha) \in D_{d_1,d_2} \mid g_{f(\alpha)} x_\alpha = (y_\alpha \oplus z_\alpha) g_{i(\alpha)}\right\}$, el cual es cerrado y por lo tanto construible.*

Si consideramos el morfismo proyección $\pi : D_{d_1,d_2} \to Rep_d(Q)$ restringido a $D^0_{d_1,d_2}$, por el teorema de Chevaley $\pi(D^0_{d_1,d_2}) = D^1_{d_1,d_2}$ es construible. Como $des_d(Q) = \cup_{d_1+d_2=d} D^1_{d_1,d_2}$ tenemos que $ind_d(Q) = des_d(Q)^c$ es construible. ■

Ejemplo 12. *Sea M un kQ–$k[x]_{h(x)}$–bimódulo, $M = \times_{\alpha \in A(Q)} \overset{k[x]^{d_i}_{h(x)}}{\bullet} \xrightarrow{(\alpha_{ij(x)})} \overset{k[x]^{d_j}_{h(x)}}{\bullet}$. La parametrización asociada a M es el morfismo $\mathcal{M} : k \setminus \{\eta \in k \mid h(\eta) = 0)\} \to Rep_d(Q)$ tal que $\mathcal{M}(\lambda) = M \otimes S_\lambda = \times_{\alpha \in A(Q)} \overset{k^{d_i}}{\bullet} \xrightarrow{(\alpha_{ij(\lambda)})} \overset{k^{d_j}}{\bullet}$.*

Lema 13. *Sean $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ dos parametrizaciones, entonces*

$$Z = \{\lambda \in k \mid \mathcal{M}_1(\lambda) \cong \mathcal{M}_2(\mu) \text{ para alguna } \mu \in k\}$$

es un conjunto construible.

Demostración. Consideremos

$$W = k \setminus \{\eta \in k \mid h(\eta) = 0)\} \times k \setminus \{\eta \in k \mid h(\eta) = 0)\} \times G(d)$$

$$Z^1 = \left\{(\lambda, \mu, g) \in W \mid g_{f(\alpha)} \mathcal{M}_1(\lambda)(\alpha) = \mathcal{M}_2(\mu)(\alpha) g_{i(\alpha)}\right\}.$$

Nuevamente Z^1 es cerrado y por lo tanto construible, Si consideramos la proyección $\pi : W \to k \setminus \{\eta \in k \mid h(\eta) = 0)\}$ restringida a Z^1, $\pi(Z^1) = Z$ es construible. ■
Sea $\mathcal{A}$ un bocs manso, S una familia de representaciones inescindibles no isomorfas dos a dos, tal que $\underline{dim}M = \underline{d}$ para todo $M \in S$.

Proposición 14. *Si $S \subset ind_d(\mathcal{A})$ una familia estrictamente parametrizada, $\mathcal{M}$ una parametrización dada por un $A - k[x]_{h(x)}$ −bimódulo M, entonces para casi toda λ, $\mathcal{M}(\lambda)$ es homogéneo con quasilongitud igual a una constante.*
Además $dim_k Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}(\lambda), \mathcal{M}(\mu))$ es constante.

Demostración. Como el bocs $\mathcal{A}$ es de tipo de representación manso, para todo vector dimensión $\underline{d}$ tenemos un árbol algorítimico con pozo igual a $(\mathcal{A},\underline{d})$ y fuentes bocses minimales $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n$. Si además consideramos la parametrización $\mathcal{M}$ tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{H_1} & \dot{\mathcal{B}}_1 \\ & \xleftarrow{H_2} & \dot{\mathcal{B}}_2 \\ Rep_d(\mathcal{A}) & & \\ & \vdots & \vdots \\ & \xleftarrow{H_n} & \dot{\mathcal{B}}_n \\ \uparrow \mathcal{M} & & \\ k \setminus \{\eta \in k \mid h(\eta) = 0)\} & & \end{array}$$

Como tenemos un número finito de H_i, pero un número infinito de $\mathcal{M}(\lambda)$, existe i tal que para casi toda λ, $\mathcal{M}(\lambda) \cong H_i(\mu)$ para alguna $\mu \in k$, como $H_i(\mu)$ es homogéneo, concluimos que para casi toda λ, $\mathcal{M}(\lambda)$ es homogéneo.

Por otro lado, las parametrizaciones de los bocses minimales están dadas por matrices de Jordan de tamaño n_i, por lo tanto $q(\mathcal{M}(\lambda)) = q(\ H_i(\mu)) = n_i$.

Recordemos que si $\mathcal{B}$ es un bocs minimal entonces $W_0 = 0$, $A = T_R(W_0) = R$, $\delta(A) = 0$, por lo tanto si $f \in Hom_{\mathcal{B}}(M, N)$, $f = (f^0, 0) + (0, f^1)$ (ver demostración de la proposición 3, capítulo III). Si $f^0 \in Hom_R(J_{n_i}(\mu), J_{n_i}(\mu'))$, $f^1 \in Hom_{R-R}(W_1, Hom_k(J_{n_i}(\mu), J_{n_i}(\mu')$ como W_1 está generado por las flechas de grado 1, tenemos que $dim_k Hom_{R-R}(W_1, Hom_k(J_{n_i}(\mu), J_{n_i}(\mu$ cn_i^2 donde c =número de flechas de grado 1. Además si $\mu \neq \mu'$, $dim_k Hom_R(J_{n_i}(\mu), J_{n_i}(\mu')) = 0$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} dim_k Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}(\lambda), \mathcal{M}(\lambda')) &= dim_k Hom_{\mathcal{A}}(H_i(\mu), H_i(\mu')) \\ &= dim_k Hom_{\mathcal{B}}(J_{n_i}(\mu), J_{n_i}(\mu')) \\ &= n_i^2 c. \ ■ \end{aligned}$$

IV.2 Arbol algorítmico de las familias $T_{\underline{d}}(u)$.

Definición 15. *Sea $\mathcal{A}$ un bocs de tipo de representación manso y G su árbol algorítmico para $(\mathcal{A},\underline{d})$. La extensión de G, denotada G' se define como el siguiente árbol finito con un solo pozo:*

$$V(G') = \{(\mathcal{A}_i, \underline{d}_i) \mid (\mathcal{A}_i, U_i) \in V(G) \text{ y } \underline{d}_i \in U_i\}$$

Si $F : (\mathcal{A}_i, U_i) \to (\mathcal{A}_j, U_j)$ es una arista de G y $t_F(\underline{d}_i) = \underline{d}_j$ entonces $F' : (\mathcal{A}_i, \underline{d}_i) \to (\mathcal{A}_i, \underline{d}_j)$ es una arista de G'.

Por ejemplo, supongamos que en G, tenemos el siguiente subárbol:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{F} & \bullet \\ \left(\mathcal{A}, \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{matrix}\right) & & \left(\mathcal{B}, \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix}\right) \end{array}$$

tal que $t_F(f_1) = t_F(f_4) = d_1, t_F(f_2) = d_2, t_F(f_3) = d_3$, entonces en G' tenemos el siguiente subárbol:

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow & \underset{(\mathcal{B},\underline{f}_4)}{\bullet} \\ \underset{(\mathcal{A},\underline{d}_1)}{\bullet} & \longleftarrow & \underset{(\mathcal{B},\underline{f}_1)}{\bullet} \\ \underset{(\mathcal{A},\underline{d}_2)}{\bullet} & \longleftarrow & \underset{(\mathcal{B},\underline{f}_2)}{\bullet} \\ \underset{(\mathcal{A},\underline{d}_3)}{\bullet} & \longleftarrow & \underset{(\mathcal{B},\underline{f}_3)}{\bullet} \end{array}$$

Sea $(\mathcal{A}_i, \underline{d}_i)$ un vértice de G, y M una representación inescindible de $\mathcal{A}_i$ con dimensión $\underline{d}_i$, con $H_i(M)$ denotamos la composición de funtores dada por el camino que existe en G que inicia en $(\mathcal{A}_i, \underline{d}_i)$ y termina en la fuente de G, es decir, en $(\mathcal{A}, \underline{d})$. Sea C una clase de representaciones inescindibles en el bocs $\mathcal{A}$ cerrado bajo isomorfismo.

Definición 16. *El diagrama de C, denotado D_C es el subárbol pleno de G' tal que $(\mathcal{A}_i, \underline{d}_i)$ es un vértice de D_C si y sólo si existe un número infinito de clases de isomorfía $\{M\} \in ind\mathcal{A}_i$ con $H_i(M) \in C$.*

Sea T una familia de representaciones inescindibles del bocs manso $\mathcal{A}$, con $\underline{\dim}M = \underline{d}$ para toda $M \in T$. Si $\Delta(M) = dim_k End_{\mathcal{A}}(M) - q_{\mathcal{A}}(\underline{dim}M)$, estudiaremos el diagrama asociado a las familias $T(u) = \{M \in T \mid \Delta(M) = u\}$.

Para el par $(\mathcal{A}, \underline{d})$, construiremos el siguiente $G-$algoritmo de reducción:

$F_1 : (\mathcal{A}_1, U_1) \to (\mathcal{A}, \underline{d})$ consistirá en aplicar el algoritmo de eliminación de idempotentes, de tal manera que todos los vectores dimensión $\underline{d}_i \in U_1$ sean sinceros, el siguiente paso $F_2 : (\mathcal{A}_2, U_2) \to (\mathcal{A}_1, U_1)$, por las propiedades de los algoritmos de reducción, satisface que $\left\|\underline{f}_j\right\| < \|\underline{d}\|$ para todo $\underline{f}_j \in U_2$. Si repetimos este proceso, concluimos que el número de pasos necesarios para llegar a obtener un bocs minimal es menor o igual que la norma de $\underline{d}$.

a) Supongamos que $u = 1$, y que la familia $T(1)$ es infinita. Sea $T(1) = [T(1)]_0 + [T(1)]_1$ donde

$$[T(1)]_0 = \{M \mid \Delta(N) = 0, F(N) = M, F \text{ un algoritmo de reducción}\}$$
$$[T(1)]_1 = \{M \mid \Delta(N) = 1, F(N) = M, F \text{ un algoritmo de reducción}\}$$

entonces $[T(1)]_1$ es infinita. Observemos que si $M, M' \in [T(1)]_1, N, N'$ tal que $F(N) = M, F(N') = M'$ entonces $\underline{\dim}N = \underline{\dim}N'$, pero $\underline{\dim}M = \underline{\dim}M', \Delta(M) = \Delta(N), \Delta(M') = \Delta(N')$ por lo tanto $\underline{\dim}N = \underline{\dim}N'$. Es decir, en términos de diagramas tenemos que $D_{T(1)}$ tiene siempre la siguiente forma:

$$\underset{(\mathcal{A},\underline{d})}{\bullet} \longleftarrow \underset{(\mathcal{A}_1,\underline{d}_1)}{\bullet} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \underset{(\mathcal{A}_n,\underline{d}_n)}{\bullet} \longleftarrow \underset{\mathcal{B}}{\bullet}$$

donde $\mathcal{B}$ es un bocs minimal, y por lo tanto $\mu_{\underline{d}}(T(1)) = 1$.

b) Supongamos que $u > 1$. En esta situación tenemos dos casos.

$b.1$) En el árbol G, no aparecen unravelling. No es difícil ver que si consideramos nuevamente una descomposición de la familia $T(2) = [T(2)]_0 + [T(2)]_1 + [T(2)]_2$en esta situación el diagrama asociado a la familia $T(2)$ tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \swarrow \overset{\bullet}{T_{\underline{d}}}(1) & & \swarrow \overset{\bullet}{T_{\underline{d}}}(1) & & & \swarrow \overset{\bullet}{T_{\underline{d}}}(1) & \\ \underset{(\mathcal{A},\underline{d})}{\bullet} & \longleftarrow & \underset{(\mathcal{A}_1,\underline{d}_1)}{\bullet} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \underset{(\mathcal{A}_n,\underline{d}_n)}{\bullet} & \longleftarrow & \underset{\mathcal{B}}{\bullet} \end{array}$$

donde aparece máximo una familia $T(1)$ cada dos ramas del camino de $\mathcal{B} \to (\mathcal{A}, \underline{d})$ y por construcción la norma del vector dimensión disminuye cada vez que hacemos un algoritmo de reducción, por lo tanto, $\mu_{\underline{d}}(T(2)) \leq \|\underline{d}\| + 1$.

Si ahora consideramos la familia $T(3)$, lo que se obtiene es que por cada dos ramas del camino de $\mathcal{B} \to (\mathcal{A}, \underline{d})$, se puede tener una familia $T(1)$ y una familia $T(2)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{d}}(T(3)) &\leq \|\underline{d}\| \left(\mu_{\underline{d}}(T(2)) + \mu_{\underline{d}}(T(1))\right) + 1 \\ &\leq \|\underline{d}\| \left(\|\underline{d}\| + 1 + 1\right) + 1 \\ &= \|\underline{d}\|^2 + 2\,\|\underline{d}\| + 1 \\ &= (\|\underline{d}\| + 1)^2 \end{aligned}$$

Similarmente, puede verse que en general, el diagrama asociado a la familia $T(u)$ tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{\bullet}{\searrow} T_{\underline{d}}(1) \; \overset{\bullet}{\searrow} T_{\underline{d}}(2) \cdots \swarrow \overset{\bullet}{T_{\underline{d}}}(u-1) & & & \\ \underset{(\mathcal{A},\underline{d})}{\bullet} \;\longleftarrow & \underset{(\mathcal{A}_1,\underline{d}_1)}{\bullet} & \longleftarrow & \cdots \longleftarrow & \underset{\mathcal{B}}{\bullet} \end{array}$$

por lo que, $\mu_{\underline{d}}(T(u)) \leq \|\underline{d}\| \left(\mu_{\underline{d}}(T(u-1)) + \cdots + \mu_{\underline{d}}(T(2)) + 1\right) + 1$. Si $y = \|\underline{d}\| + 1$,

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{d}}(T(u)) &\leq (y-1)(y^{u-2} + y^{u-3} + \cdots + y^2 + y + 1) + 1 \\ &= y^{u-1} \\ &= (\|\underline{d}\| + 1)^{u-1} \end{aligned}$$

$b.2)$ Sea $s = max\,\{$número de eigenvalores para cualquier unravelling en $G\}$. Supongamos que existe c tal que $s < c$ para todo vector dimensión $\underline{d} \in K_0(\mathcal{A})$.

En general, consideraremos que la familia $T(u) = [T(u)]_0 + [T(u)]_1 + \cdots + [T(u)]_u$. Por el lema 20 del capítulo 2, tenemos que $\mu([T(u)]_u) = 1$ para toda u. Por otro lado (lema 19 capítulo 2), tenemos que si M', N' son dos representaciones tales $F(M') \cong F(N') \cong M$ y F es el algoritmo de unravelling de tamaño l, entonces $\Delta(M') - \Delta(N') = \sum_{i=1}^{l} iz_i^2 + \sum 2iz_iz_j \leq u$ donde los z_i corresponden a los nuevos vértices que se obtienen al hacer el unravelling F. Por lo que cada solución de la ecuación anterior corresponde a un parámetro de la familia $T(u)$.

Sea $\sigma(u)$ el número de vectores $z = (z_1, \cdots, z_l) \in N^l$ tales que se satisface la desigualdad $\sum_{i=1}^{l} iz_i^2 + \sum 2iz_iz_j \leq u$. Por ejemplo, si $u = 1$, tenemos que la única solución es $z = (1, 0, \cdots, 0)$, si $u = 2$ tenemos una solución nueva que corresponde a $z = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, si $u = 3$, la nueva solución es $z = (0, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, si $u = 4$, tenemos dos soluciones nuevas $z = (0, 0, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ y $z' = (2, 0, \cdots, 0)$, continuando con este proceso, tenemos que los primeros $\sigma(u)$ son los siguientes:

$$\begin{aligned}
\sigma(1) &= 1\\
\sigma(2) &= 2\\
\sigma(3) &= 3\\
\sigma(4) &= 5\\
\sigma(5) &= 7\\
\sigma(6) &= 9\\
\sigma(7) &= 11\\
\sigma(8) &= 14\\
\sigma(9) &= 18\\
\sigma(10) &= 22
\end{aligned}$$

Si ahora tomamos en cuenta que tenemos posibilidad de un total de s valores propios para F y que además puede ser que alguno de ellos no aparezca, es decir, que no tome ninguna de las soluciones de $\sigma(u)$, tenemos que en el primer paso del árbol algorítimico asociado a la familia $T(2)$, con la construcción dada anteriormente, éste se ve:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & (\sigma(1)+1)^s \\ & & & & \searrow\searrow\cdots\swarrow\swarrow \\ \underset{(\mathcal{A},\underline{d})}{\bullet} & \longleftarrow & \underset{(\mathcal{A}_1,\underline{d}_1)}{\bullet} & \longleftarrow & \underset{(\mathcal{A}_2,U_2)}{\bullet} \end{array}$$

Este diagrama puede repetirse tantas veces como la $\|\underline{d}\|$, por lo tanto

$$\mu(T(2)) \leq \|\underline{d}\|\,(\sigma(1)+1)^s + 1.$$

Pensemos ahora en la familia $T(3)$, en esta situación, el árbol algorítmico se ve así:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & (\sigma(2)+1)^s T(2) \\ & & & & \searrow\searrow\cdots\swarrow\swarrow \\ \underset{(\mathcal{A},\underline{d})}{\bullet} & \longleftarrow & \underset{(\mathcal{A}_1,\underline{d}_1)}{\bullet} & \longleftarrow & \underset{(\mathcal{A}_2,U_2)}{\bullet} \end{array}$$

de donde tenemos $\mu(T(3)) \leq \|\underline{d}\|\,(\sigma(2)+1)^s(\|\underline{d}\|\,(\sigma(1)+1)^s+1)+1$

$$\begin{aligned}
\mu(T(3)) &\leq \|\underline{d}\|\,((\sigma(2)+1)^s\mu(T(2))+1\\
&= \|\underline{d}\|\,(\sigma(2)+1)^s(\|\underline{d}\|\,(\sigma(1)+1)^s+1)+1\\
&= \|\underline{d}\|^2\,((\sigma(2)+1)(\sigma(1)+1))^s + \|\underline{d}\|\,(\sigma(2)+1)^s+1
\end{aligned}$$

En general, el árbol algorítimico de la familia $T(u)$ tiene la siguiente forma,

$$\begin{array}{ccccc} & & & & (\sigma(u-1)+1)^s T(u-1) \\ & & & & \searrow\searrow\cdots\swarrow\swarrow \\ \underset{(\mathcal{A},\underline{d})}{\bullet} & \longleftarrow & \underset{(\mathcal{A}_1,\underline{d}_1)}{\bullet} & \longleftarrow & \underset{(\mathcal{A}_2,U_2)}{\bullet} \end{array}$$

por lo tanto $\mu(T(u)) \leq \|\underline{d}\| (\sigma(u-1)+1)^s \mu(T(u-1))+1$.

Nuestro siguiente paso, será caracterizar de alguna manera los bocses mansos para los cuales podemos asegurar que en su $G-$ algoritmo de reducción aparezcan o no unravalling. Como veremos esto depende de la diferencial asociada al bocs.

IV.3 Relaciones entre el árbol algorítimico y la diferencial del bocs.

Definición 17. *Una familia genérica de representaciones de un bocs es una familia uno paramétrica Υ de representaciones homogéneas y quasisimples del bocs.*

Recordemos que si $M, N \in Rep\mathcal{A}$, $\underline{dim}M = \underline{x}, \underline{dim}N = \underline{y} \in K_0(\mathcal{A})$, m_{ij} = número de flechas de grado cero de i a j, n_{ij} = número de flechas de grado uno de i a j, se define

$$\begin{aligned}
q(\underline{x}) &= \textstyle\sum x_i^2 - \sum_{i,j} m_{ij}x_ix_j + \sum_{ij} n_{ij}x_ix_j \\
B(\underline{x},\underline{y}) &= \textstyle\sum x_iy_i - \sum_{i,j} m_{ij}x_iy_j + \sum_{ij} n_{ij}x_iy_j \\
\Delta(M) &= \dim_k End_{\mathcal{A}}(M) - q_{\mathcal{A}}(\underline{\dim}M) \\
\langle M,N\rangle &= \dim_k Hom_{\mathcal{A}}(M,N) - B_{\mathcal{A}}(\underline{\dim}M, \underline{\dim}N)
\end{aligned}$$

Definición 18. *Decimos que Υ es una familia genérica rizada, si existe una colección infinita de familias genéricas $\Upsilon = \Upsilon_1, \cdots, \Upsilon_s, \cdots$ tal que si $X \in \Upsilon_i$, $Y \in \Upsilon_j$, , $\langle X, Y\rangle \geq min\,\{i,j\}$*

Proposición 19. *Sea $\mathcal{A}$ un bocs de tipo de representación manso. Supongamos que en el vértice i existe un lazo de grado cero α, tal que $\delta(\alpha) = 0$. Entonces existe una familia genérica Υ en la categoría de representaciones de $\mathcal{A}$. Además, para casi todo $M \in \Upsilon$, $\underline{dim}_{\mathcal{A}}M = e_i$, donde $e_i \in K_0(\mathcal{A})$ es el vector canónico.*

Demostración. Para todo $\lambda \in k$, sea S_λ la representación con espacio vectorial k y $S_\lambda(x) = \lambda$, la cual es una familia uno paramétrica de representaciones en el bocs y $\underline{dim}_{\mathcal{A}}S_\lambda = e_i$.

Sea G el árbol algorítimico asociado a $\mathcal{A}$ y $B_1, \cdots, B_n$ los bocses minimales y fuentes de G, podemos suponer que todo B_u es local, como n es un número finito, existe u, $1 \leq u \leq n$, tal que existe una infinidad de representaciones M_λ en B_u, tales que bajo el funtor $F_u : RepB_u \to Rep\mathcal{A}$, $F_u(M_\lambda) = S_\lambda$ y $dim_k M_\lambda = 1$. Como B_u es minimal, las M_λ son homogéneas quasisimples, por lo tanto para casi toda λ, $\Upsilon = \{S_\lambda\}$ es una familia genérica. ■

Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs local no trivial, e.d., $R = k\,[x]_{f(x)}$. A continuación estudiaremos cuando podemos asegurar la existencia de una familia genérica rizada en la categoría de representaciones del bocs.

Recordemos que el álgebra tensorial $T_R(W)$ tiene dos graduaciones,

1. Su graduación natural $[T_R(W)]^0 = R$, $[T_R(W)]^n = \underbrace{W \otimes_R \cdots \otimes_R R}_{n-veces}$,

2. La graduación inducida por el $R-$bimódulo W, donde $[T_R(W)]_0 = A$ y $[T_R(W)]_1 = V = A \otimes_R W_1 \otimes_R A$.

Para $z \in T_R(W)$, sea $\pi(z) =$ proyección de z en W. En particular, si $\alpha \in W_0$, $\delta(\alpha) \in V$, pero,

$$\begin{aligned} V &= A \otimes_R W_1 \otimes_R A \\ &= [T_R(W)]_0 \otimes_R W_1 \otimes_R [T_R(W)]_0 \\ &= (R \oplus W_0 \oplus W_0 \otimes_k W_0 \oplus \cdots) \otimes_R W_1 \otimes_R (R \oplus W_0 \oplus W_0 \otimes_k W_0 \oplus \cdots) \\ &= W_1 \oplus (W_0 \otimes_R W_1) \oplus (W_0 \otimes_R W_1 \otimes_R W_0) \oplus \cdots \end{aligned}$$

por lo tanto, $\pi(\delta(\alpha)) \in W_1$. Si tomamos la convención de que $yV_i = V_i x$ donde V_i es un generador de W_1, tenemos que $\pi(\delta(\alpha)) = \sum_i \sum_{s,t} c_i^{s,t} x^s V_i x^t = \sum_i r_i(x,y)V_i$ para $r_i(x,y) = \sum_{s,t} c_i^{s,t} x^s y^t$.

Recordemos que la diferencial de una flecha de grado cero está en función de las flechas que son menores que ella más una parte que tiene que ver con la proyección, por lo tanto si α es una flecha de grado cero minimal, $\delta(\alpha) = \pi(\delta(\alpha))$.

Sean $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$, $v_1 < v_2 < \cdots < v_l$ las flechas de grado cero y uno de $\mathcal{A}$, respectivamente. Consideremos la matriz de tamaño $l \times n$, $M(x,y) = (r_{ji}(x,y))$ donde $\delta(\alpha_1) = \pi(\delta(\alpha_1)) = \sum_{i=1}^{l} r_{1i}(x,y)V_i$, $\pi(\delta(\alpha_j)) = \sum_{i=1}^{l} r_{ji}(x,y)V_i$, $j = 2, \cdots, n$.

Si hacemos el siguiente cambio de variable $V_1' = V_1 + dV_2$, $V_i' = V_i$ $i \geq 2$, obtenemos que

$$\pi(\delta(\alpha_2)) = \textstyle\sum_{i=1}^{l} r_{1i}(x,y)V_i = r_{11}(x,y)V_1' + (r_{12}(x,y) - dr_{11}(x,y))V_2') + \sum_{i=3}^{l} r_{1i}(x,y)V_i'$$

Es decir, este cambio de variable no es otra cosa que hacer operaciones elementales en las columnas de la matriz $M(x,y)$.

Si hacemos el siguiente cambio $\alpha_1' = \alpha_1$, $\alpha_2' = \alpha_2 + a_1\alpha_1, \cdots, \alpha_i' = \alpha_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_j\alpha_j$, tenemos que $\delta(\alpha_i') = \delta(\alpha_i) + \sum_{j=1}^{i-1} a_j\delta(\alpha_j)$, por lo que se preserva la triangularidad del bocs, e.d., $\alpha_1' < \alpha_2' < \cdots < \alpha_n'$, por lo que en la matriz $M(x,y)$, si $i > j$ podemos hacer operaciones entre los renglones M_i, M_j de la forma $M_i' = M_i + cM_j'$.

Lema 20. *Sea $\lambda \in k$, $f(\lambda) \neq 0$ y $M(\lambda,\lambda) = (r_{ji}(\lambda,\lambda))$. Supongamos que el rango de $M(\lambda,\lambda) < n$, entonces podemos hacer operaciones elementales en $M(\lambda,\lambda)$ de tal manera que se ve así:*

$$M(\lambda,\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

donde el renglón l–ésimo es igual a cero, $l \leq n$.

Demostración. Sea $r_{1j}(\lambda,\lambda)$ el primer elemento distinto de cero en el renglón uno de la matriz $M(\lambda,\lambda)$. Sumemos la columna j–ésima con la primera columna y dividamos todo el primer renglón entre $r_{1j}(\lambda,\lambda)$, con lo que tenemos $(M(\lambda,\lambda))_{1,1} = 1$ con operaciones elementales en las columnas podemos hacer cero todas las demàs entradas del primer renglón, y por operaciones elementales en los renglones, podemos también hacer cero el resto de las entradas de la primera columna. Es decir,

$$M(\lambda,\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & * & * \\ \vdots & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

Podemos repetir este proceso y como el rango es menor que n, en algún momento encontraremos un renglón con todas sus entradas igual a cero. ■

Lema 21. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs local no trivial. Con la notación anterior, si el rango de la matriz $M(\lambda,\lambda) < n$, existe $\mathcal{B}$ en un árbol algorítimico de $\mathcal{A}$, tal que para todo $u \geq 1$, existe una familia genérica Υ_u en la categoría de representaciones de $\mathcal{B}$.*

Demostración. Si hacemos unravelling de tamaño u con respecto a λ y consideramos el carcaj de traslación asociado Γ, el nuevo bocs $\mathcal{B}_1$ tiene el vértice 1 más u nuevos vértices a los que hemos denotado como $z_1, \cdots, z_u$ los cuales representan cada una de las órbitas de Γ. Si hacemos eliminación de idempotentes en el vértice 1, por cada lazo α_i en $\mathcal{A}$, en el nuevo bocs $\mathcal{B}_2$ tenemos una colección de flechas de grado cero $(\alpha_i)_{s,t} : o(t) \to o(s)$, $s,t \in V(\Gamma)$. La nueva diferencial está dada por,

$$\delta'((\alpha_i)_{s,t}) = \textstyle\sum_{s<r} x_{s,r}a_{r,t} - \sum_{r<t} a_{s,r}x_{r,t} + \left[A_{\delta(\alpha_i)}\right]_{s,t}.$$

Si $s = n_u$ (e.d., es el proyectivo maximal) y $t = n_u - (u-1)$ (e.d., es el inyectivo minimal), entonces

$$\begin{aligned}\delta'((\alpha_1)_{s,t}) &= \left[A_{\delta(\alpha 1)}\right]_{s,t} \\ &= \sum_{u,v} c_1^{u,v}\tfrac{1}{uv} d_x^u d_y^v r_{1,j}(\lambda,\lambda)(V_1)_{\sigma^u(s),\sigma^{-v}(t)} \\ &= r_{1,1}(\lambda,\lambda)(V_1)_{s,t} = (V_1)_{s,t}\end{aligned}$$

si aplicamos regularización, tenemos que $(\alpha_1)_{s,t} = 0 = (V_1)_{s,t}$.

Sea $s_1 = s - 1$, consideremos $\delta'((\alpha_1)_{s_1,t})$, como en la diferencial ahora aparecen únicamente $(V_1)_{s_1,t}$ y $(V_1)_{s,t} = 0$, tenemos que $\delta'((\alpha_1)_{s_1,t}) = r_{1,1}(\lambda,\lambda)(V_1)_{s_1,t} = (V_1)_{s_1,t}$, por lo que nuevamente podemos hacer regularización y obtenemos $(\alpha_1)_{s_1,t} = 0 = (V_1)_{s_1,t}$. Podemos repetir este proceso hasta obtener que $(\alpha_1)_{s,t} = 0 = (V_1)_{s,t}$ para todo $s, t \in V(\Gamma)$.

De manera similar, dado que el bocs es triangular, en la diferencial de α_i intervienen únicamente las α_j tales que $j < i$, se tiene que $(\alpha_i)_{s,t} = 0 = (V_i)_{s,t}$ para todo $s, t \in V(\Gamma), i < l$.

Si ahora calculamos la diferencial de $(\alpha_l)_{s,t}$, donde $s = n_u$ y $t = n_u - (u-1)$, se tiene que $\delta'((\alpha_l)_{s,t}) = 0$. Como tanto la órbita de s como la de t son u, tenemos que $(\alpha_l)_{s,t} : z_u \to z_u$ es un lazo con diferencial cero. Si llamamos $\mathcal{B}$ al bocs que hemos obtenido de hacer esta sucesión de regularizaciones, por la proposición tres tenemos que existe una familia genérica $\Upsilon_u = \left\{S_{z_u}^{\mu}\right\}$ en la categoría de representaciones de $\mathcal{B}$.

Observemos que si en el bocs $\mathcal{B}_1$ hacemos también eliminación de idempotentes en el vértice z_u, el resultado es el mismo que haber hecho un unravelling de tamaño $u-1$ en $\mathcal{A}$, por lo que repitiendo nuestro argumento anterior podemos tener una familia genérica de representaciones Υ_{u-1} en $\mathcal{B}$. De donde se tiene el resultado deseado. ■

Teorema 22. *Sea $\mathcal{A} = (R, W, \delta)$ un bocs local no trivial, $\lambda \in k$, tal que $f(\lambda) \neq 0$. Si el rango de la matriz $M(\lambda,\lambda) < n$, existe una familia genérica rizada en la categoría de representaciones de $\mathcal{A}$*

Demostración. Por el lema anterior existe $\mathcal{B}$ en un árbol algorítimico de $\mathcal{A}$, tal que para todo $u \geq 1$, existe una familia genérica Υ_u en la categoría de representaciones de $\mathcal{B}$. Sea $F : rep\mathcal{B} \to rep\mathcal{A}$ (F es composición de algoritmos de reducción), entonces la familia $\Upsilon_u' = F(\Upsilon_u)$ es una familia genérica en la categoría de representaciones de $\mathcal{A}$. Demostraremos que la colección de familias $\Upsilon_1', \cdots, \Upsilon_u', \cdots$ es una familia genérica rizada.

En el apéndice hemos demostrado que si $M_i = F(S_i)$ donde $S_i \in \Upsilon_i$, $i = 1, 2, \cdots, u$ se cumple que $B_{\mathcal{A}}(\underline{\dim} M_i, \underline{\dim} M_j) = B_{\mathcal{B}}(e_i, e_j) - \varphi(e_i, e_j)$ donde $\varphi(e_i, e_j) = min\,\{i, j\}$, por lo que.

$$
\begin{aligned}
\langle M_i, M_j\rangle &= \dim_k Hom_{\mathcal{A}}(M_i, M_j) - B_{\mathcal{A}}(\underline{\dim} M_i, \underline{\dim} M_j)\\
&= \dim_k Hom_{\mathcal{B}}(S_i, S_j) - B_{\mathcal{A}}(\underline{\dim} M_i, \underline{\dim} M_j)\\
&= \dim_k Hom_{\mathcal{B}}(S_i, S_j) - B_{\mathcal{B}}(S_i, S_j) + \varphi(e_i, e_j)\\
&= \langle S_i, S_j\rangle + \varphi(e_i, e_j).
\end{aligned}
$$

como $\langle S_i, S_j\rangle \geq 0$, se tiene que $\langle M_i, M_j\rangle \geq min\{i, j\}$.

Por lo tanto la familia $\Upsilon' = \Upsilon'_1$ es una familia genérica rizada. ∎

Teorema 23. *Sea $\mathcal{A}$ un bocs local no trivial, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ las flechas de grado cero de $\mathcal{A}$, $\delta(\alpha_1) = \sum_{i=1}^{l} r_{1i}(x, y)V_i$. Supongamos que (λ, μ) es una raiz comun de los polinomios $r_{1i}(x, y)$, $i = 1, \cdots, n$ y el rango de $M(\lambda, \lambda) = n$. Entonces existe una representación no homogéna en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $S_\lambda \in Rep\mathcal{A}$, con espacio vectorial k, $S_\lambda(x)$ =la multiplicación por λ y cero en todo lo demás. Sea T la representación con espacio vectorial k^2,

$$T(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T(x) = \begin{pmatrix} \mu & 0\\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ y cero en lo demàs.}$$

Supongamos que S_λ es una representación homogénea, entonces tenemos una sucesión que casi se divide de la forma $S_\lambda \to E_\lambda \xrightarrow{v} S_\lambda$ tal que $dim_k E_\lambda = 2$.

Sea $f : T \to S_\lambda$ tal que $f = (f^0, 0)$,donde $f^0 = (0, 1)$, veamos que f es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$.

$$f^0T(x) = (0,1)\begin{pmatrix} \mu & 0\\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = (0, \lambda) = S_\lambda(x)f^0$$

$$f^0T(\alpha) = (0,1)\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0) = S_\lambda(\alpha)f^0$$

Supongamos que existe $\sigma : S_\lambda \to T$ tal que $f\sigma = I$, entonces

$$
\begin{aligned}
(f\sigma)^0 &= f^0\sigma^0 = I\\
(f\sigma)^1 &= f^0\sigma^1 + f^1\sigma^0 + \sum f^1(\ )\sigma^1(\ ) = f^0\sigma^1 = 0
\end{aligned}
$$

por lo tanto,

$$f^0\sigma^0 = (0,1)\begin{pmatrix} u\\ w \end{pmatrix} = w = I \text{ de donde } \sigma^0 = \begin{pmatrix} u\\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f^0\sigma^1 = (0,1)\begin{pmatrix} c\\ d \end{pmatrix} = d = 0 \text{ por lo que } \sigma^1 = \begin{pmatrix} c\\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, como σ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, se debe de cumplir que

$$\begin{aligned} T(x)\sigma^0 &= \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u \\ \lambda \end{pmatrix} = \sigma^0 S_\lambda(x) \\ T(\alpha)\sigma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma^0 S_\lambda(\alpha) + \sigma^1(\delta(\alpha)) = \sigma^1(\delta(\alpha)) \end{aligned}$$

Pero, $\delta(\alpha_1) = \sum_{i=1}^{l} r_{1i}(x,y)V_i = \sum_{i=1}^{l} c_i^{u,v} y^u V_i x^v$, y como (λ, μ) es una raiz,

$$\begin{aligned} \sigma^1(\delta(\alpha)) &= \sum_{i=1}^{l} c_i^{u,v}\begin{pmatrix} \mu^u & 0 \\ 0 & \lambda^v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}\lambda^v = \sum_{i=1}^{l} c_i^{u,v}\begin{pmatrix} \mu^u c \lambda^v \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con lo que hemos llegado a una contradicción, por lo tanto no existe $\sigma : S_\lambda \to T$ tal que $f\sigma = I.$, pero si existe $g : T \to E_\lambda$ tal que $vg = f$, de donde se debe de cumplir,

$$v^0 g^0 = (0,1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (c,d) = (0,1) \text{ por lo que } g^0 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además $E_\lambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ó $E_\lambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, y para ser morfismo necesitamos que se satisfaga $E_\lambda(x)g^0 = g^0 T(x)$. Si tomamos la primera opción para $E_\lambda(x)$, tenemos,

$$\begin{aligned} E_\lambda(x)g^0 &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b + 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\neq \begin{pmatrix} \mu a & \lambda b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = g^0 T(x) = \sigma^1(\delta(\alpha)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $E_\lambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Consideremos la matriz $M(\lambda,\lambda) = (\sum r_{ij}(\lambda,\lambda))$ que por hipótesis tiene rango n, por lo tanto $M(\lambda,\lambda)$ es diagonalizable y podemos suponer que $M(\lambda,\lambda) = Id$, de tal manera que $\delta(\alpha_i) = V_i$, para $i = 1, \cdots, n$. Si hacemos unravelling de tamaño 1, con respecto a λ, obtenemos $\mathcal{A}_1 = (R', W', \delta')$ donde R' tiene dos vértices $1, z_1$, si aplicamos eliminación de idempotentes en el vértice 1, tenemos que el nuevo bocs tiene un solo vértice y las mismas flechas que el bocs original, pero ahora $\pi\delta'(\alpha_i) = \sum r_{ij}(\lambda,\lambda)V_j = r_{ii}(\lambda,\lambda)V_i = V_i$. Por lo que si i hacemos regularización sucesivamente en cada una de las flechas α_i, por ser este algoritmo una equivalencia, tenemos que el nuevo bocs $\mathcal{B}$ tiene solo un vértice y aparecen únicamente flechas de grado 1, por lo tanto en $\mathcal{B}$, $W_0 = 0$ y $A = T_R(W_0) = R = k$.

La sucesión que casi se divide $S_\lambda \to E_\lambda \xrightarrow{v}$, vista en $\mathcal{B}$ es de la forma $S'_\lambda \to E'_\lambda \xrightarrow{v} S'_\lambda$, pero esta no puede existir, ya que la dimensión de $E_\lambda = 2$, $E'_\lambda = F(E_\lambda)$ tendría que tener dimensión 2 y la única representación inescindible en $\mathcal{B}$ tiene dimensión 1.

Por lo que S_λ es una representación no homogénea en el bocs $\mathcal{A}$. ■

Consideremos ahora $\mathcal{A}$ un bocs tal que $R = k[x]_{f(x)} \times k[y]_{h(y)}$, que corresponden a los vértices x y y, sea $\alpha : x \to y$ minimal, es decir, $\delta(\alpha) = \sum_{i=1}^{l} r_i(x,y)V_i$, donde las $V_i : x \to y$ tienen grado uno. Sean $\beta_1 < \cdots < \beta_n$, $w_1 < \cdots < w_m$ los lazos de grado cero y uno respectivamente en el vértice x y $\beta'_1 < \cdots < \beta'_{n'}$, $w'_1 < \cdots < w'_{m'}$ los lazos de grado cero y uno respectivamente en el vértice y. Sea $\pi\delta(\beta_j) = \sum_{i=1}^{m} s_{ji}(x,y)w_i$ y $\pi\delta(\beta'_j) = \sum_{i=1}^{m'} s'_{ji}(x,y)w'_i$. Para $\lambda \in k$, denotemos por $M(\lambda,\lambda) = (s_{ji}(\lambda,\lambda))$, $M'(\lambda,\lambda) = (s'_{ji}(\lambda,\lambda))$.

Teorema 24. *Con la notación anterior, si (λ,μ) es una raiz comun de los polinomios $r_i(x,y)$, $i = 1, \cdots, l$ y el rango de $M(\lambda,\lambda) = m$ o el rango de $M'(\lambda,\lambda) = m'$.Entonces existe una representación no homogéna en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $S_\lambda \in Rep\mathcal{A}$, con espacio vectorial k, $S_\lambda(x)$ =la multiplicación por λ y cero en todo lo demás. Sea T la representación con espacios vectoriales k y k, $T(\alpha) = Id, T(x) = \lambda$, $T(y) = \mu$ y cero en lo demàs.

Supongamos que S_λ es homogéneo, entonces tenemos una sucesión que casi se divide de la forma $S_\lambda \to E_\lambda \xrightarrow{v} S_\lambda$ tal que $dim_k E_\lambda = 2$.

Sea $f : T \to S_\lambda$ tal que $f = (f^0, 0)$,donde $f^0 = Id$, veamos que f es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} f^0T(x) &= Id\lambda = S_\lambda(x)f^0 \\ f^0T(y) &= 0 = S_\lambda(y)f^0 \\ f^0(y)T(\alpha) &= 0 = S_\lambda(\alpha)f^0(x) \end{aligned}$$

Supongamos que existe $\sigma : S_\lambda \to T$ tal que $f\sigma = I$, entonces

$$\begin{aligned}(f\sigma)^0 &= f^0\sigma^0 = I\\ (f\sigma)^1 &= f^0\sigma^1 + f^1\sigma^0 + \sum f^1(\ )\sigma^1(\ ) = f^0\sigma^1 = 0\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}f^0\sigma^0(x) &= I \text{ de donde } \sigma^0(x) = I\\ f^0\sigma^0(y) &= 0 \text{ de donde } \sigma^0(y) = 0\end{aligned}$$

Ahora, como σ es un morfismo en $Rep\mathcal{A}$, se debe de cumplir que

$$\begin{aligned}T(x)\sigma^0(x) &= \lambda I = \sigma^0(x)S_\lambda(x)\\ T(y)\sigma^0(y) &= 0 = \sigma^0(y)S_\lambda(y)\\ T(\alpha)\sigma^0(x) &= I = \sigma^0(y)S_\lambda(\alpha) + \sigma^1(\delta(\alpha)) = \sigma^1(\delta(\alpha))\end{aligned}$$

Pero, $\delta(\alpha_1) = \sum_{i=1}^{l} r_{1i}(x,y)V_i = \sum_{i=1}^{l} c_i^{u,v} y^u x^v$, y como (λ,μ) es una raiz,

$$\sigma^1(\delta(\alpha)) \;=\; \textstyle\sum_{i=1}^{l} c_i^{u,v}\mu^u c\lambda^v = 0 \neq I$$

con lo que hemos llegado a una contradicción, por lo tanto no existe $\sigma : S_\lambda \to T$ tal que $f\sigma = I$., pero si existe $g : T \to E_\lambda$ tal que $vg = f$, de donde se debe de cumplir,

$$v^0g^0 = (0,1)\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix} = b = 1 \text{ por lo que } g^0 = \begin{pmatrix} a\\ 1\end{pmatrix}$$

Además $E_\lambda(x) = \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ ó $E_\lambda(x) = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, y para ser morfismo necesitamos que se satisfaga $E_\lambda(x)g^0 = g^0T(x)$. Si tomamos la primera opción para $E_\lambda(x)$, tenemos,

$$\begin{aligned}E_\lambda(x)g^0 &= \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda a + 1\\ \lambda\end{pmatrix}\\ &\neq \begin{pmatrix}\lambda a\\ \lambda\end{pmatrix} = g^0T(x) = \sigma^1(\delta(\alpha))\end{aligned}$$

Por lo tanto, $E_\lambda(x) = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$.

Si ahora consideramos que el rango de $M(\lambda,\lambda) = m$ o el rango de $M'(\lambda,\lambda) = m'$ procediendo igual que en el teorema anterior tenemos nuestro resultado. ■

Lo que hemos demostrado, es que por cada raiz en común (λ, μ) de los polinomios $r_{ij}(x,y)$, tenemos una representación no homogénea S_λ o una familia genérica rizada $\Upsilon_1 = \left\{S^\lambda_{z_1}\right\}$. Observemos que si $\lambda \neq \lambda'$ entonces $S_\lambda \neq S_{\lambda'}$ en caso de que exista y los elementos de las correspondientes familias genéricas, son no isomorfos.

IV.4 Resultados para bocses.

Teorema 25. *Sea $\mathcal{A}$ manso y supongamos que no existen familias genéricas rizadas ni módulos no homogéneos en la categoría de representaciones de $\mathcal{A}$, entonces para toda u, la familia $T(u)$ es parametrizable y de crecimiento polinomial.*

Demostración. Sea $\delta(\alpha) = \sum r_i(x,y)V_i$ para α minimal, si no existen familias genéricas rizadas ni representaciones no homogéneas, entonces no existen raices comunes entre los polinomios $r_i(x,y)$,por lo tanto, $1 = \sum q_i(x,y)r_i(x,y)$ y existe una matriz M que tiene en su primera columna a los elementos $r_i(x,y)$, lo que nos permite hacer el siguiente cambio de variable $(V_i)M = (V_i')$, por lo que $\delta(\alpha) = V_1'$, y no necesitamos usar unravelling. Por el análisis que hicimos en la sección $IV.2$ todas las familias $T(u)$ son parametrizables y de crecimiento polinomial. ■

Definición 26. *El bocs $\mathcal{A}$ se llama $\epsilon-$ acotado si existe $b > 0$ tal que $\frac{\dim_k End_{\mathcal{A}}(M)}{q(M)^2} < b$ para todo M homogéneo.*

Observemos que si Υ es una familia genérica rizada, entonces para toda i y para casi todo $M \in \Upsilon_i$, $q(M) = 1$ y $\dim_k End_{\mathcal{A}}(M) \geq i$, por lo cual el bocs no es $\epsilon-$ acotado.

Corolario 27. *Sea $\mathcal{A}$ manso, $\epsilon-$ acotado y supongamos que no existen módulos no homogéneos en la categoría de representaciones de $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ es de crecimiento polinomial.*

Demostración. Sea $R_i = \{M \text{ inescindibles} \mid q(M) = i\}$, entoces para todo u, i, las familias $T(u) \cap R_i$ son parametrizables, por lo que $\mu_{\underline{d}} \leq \sum_{d'|d} \sum_u \mu_{\underline{d_i}}(T(u) \cap R_1)$, pero

$$\begin{aligned}
\mu_{\underline{d}} &\leq \textstyle\sum_{d'|d} \sum_u \mu_{\underline{d_i}}(T(u) \cap R_1) \\
&\leq \textstyle\sum_{d'|d} \sum_u \mu_{\underline{d_i}}(T(u)) \\
&\leq \textstyle\sum_{d'|d} \sum_{u \leq b} p_u(\|d\|) \\
&\leq \tau(d) b p_u(\|d\|)
\end{aligned}$$

donde $\tau(d)$ = número de divisores de $\underline{d}$. ■

Sea $\mathcal{A}$ un bocs, α un lazo minimal en el bocs, es decir, $\delta(\alpha) = \sum_{i=1}^s r_i(x,y)V_i$, sea $I = \langle r_1(x,y), \cdots, r_s(x,y)\rangle$, de acuerdo a la notación de la sección anterior tenemos que $C(I) = \{(\lambda_j, \mu_j) \in k^2 \mid r_i(\lambda_j, \mu_j) = 0, \forall r_i(x,y) \in I\}$.

Lema 28. *Existe $n \in N$ tal que $[(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_p)]^n = \sum_{i=1}^{s} r_i(x,y)q_i(x,y)$.*

Demostración. Sea $h(x,y) = h(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_p)$, por lo tanto $h(\lambda_j,\mu_j) = 0$ para toda $j = 1,\cdots,p$, por lo tanto h se anula en $C(I)$, por el teorema de Nullstellensatz-Hilbert, existe $n \in N$, tal que $h^n \in I$, es decir, $h^n = \sum_{i=1}^{s} r_i(x,y)q_i(x,y)$. ■

El lema anterior nos dice que para reducir el bocs $\mathcal{A}$ (e.d., para encontrar un árbol algorítmico del bocs), necesitamos aplicar un unravelling por cada valor propio de h, lo cuál nos lleva al siguiente teorema.

Teorema 29. *Sea $\mathcal{A}$ manso, y supongamos que existe un natural N tal que para cada dimensión $\underline{d}$ el número de familias genéricas rizadas y representaciones no homogéneas del bocs es menor que N, entonces para toda u, la familia $T(u)$ es parametrizable de crecimiento polinomial.*

Demostración. Si el número de familias genéricas rizadas y representaciones no homogéneas del bocs es menor que N, significa que s =máximo número de valores propios para cualquier unravelling en $G < N$, para todo vector dimensión $\underline{d} \in K_0(\mathcal{A})$, por lo tanto, por el análisis realizado en la sección $IV.2$ tenemos que las familias $T(u)$ son parametrizables de crecimiento polinomial. ■

Corolario 30. *Sea $\mathcal{A}$ manso, $\epsilon-$ acotado y supongamos que existe un natural N tal que para cada dimensión $\underline{d}$ el número de módulos no homogéneos es menor que N, entonces $\mathcal{A}$ es de crecimiento polinomial.*

Demostración. Si considereamos nuevamente las familias $R_i = \{M \text{ inescindibles} \mid q(M) = i\}$, tenemos que $\mu_{\underline{d}} \leq \tau(d)bp_u(\|d\|)$. ■

CAPITULO V

Sea Λ una k-álgebra básica. En este capítulo definiremos dos categorías asociadas a Λ, la categoría de representaciones del bocs de Drozd de Λ y la categoría $P(\Lambda)$. Veremos que estas dos categorías son equivalentes y demostraremos que el álgebra Λ es del mismo tipo de representación que el bocs de Drozd asociado, es decir, Λ es mansa si y sólo si $D(\Lambda)$ es manso. Finalizamos este capítulo dando resultados para bocses de tipo de representación manso, que pueden traducirse a resultados para álgebras del mismo tipo de representación.

V.1 El bocs de Drozd para Λ.

Sea Λ una $k-$álgebra básica, $P_1, \cdots, P_n$ los proyectivos inescindibles que aparecen en su descomposición y $1_\Lambda = \sum_{i=1}^{n} e_i$ la descomposición en idempotentes primitivos ortogonales de 1_Λ asociada. Para toda $i = 1, \cdots, n$, tenemos una filtración de la forma

$$Rad\Lambda e_i \supset Rad^2\Lambda e_i \supset \cdots \supset Rad^{n_i}\Lambda e_i \supset Rad^{n_i+1}\Lambda e_i = 0$$

lo cual a su vez determina, para cada $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ una filtración de $Hom_\Lambda(\Lambda e_i, \Lambda e_j)$:

$$Hom_\Lambda(\Lambda e_i, Rad\Lambda e_j) \supset Hom_\Lambda(\Lambda e_i, Rad^2\Lambda e_j) \supset \cdots \supset Hom_\Lambda(\Lambda e_i, Rad^{n_j}\Lambda e_j).$$

Fijos $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ sea $X_{ij}^{n_j}$ una base de $Hom_\Lambda(\Lambda e_i, Rad^{n_j}\Lambda e_j)$, la cual podemos completar con el conjunto $X_{ij}^{n_j-1}$ para formar una base de $Hom_\Lambda(\Lambda e_i, Rad^{n_j-1}\Lambda e_j)$. Podemos repetir este proceso hasta tener una base X_{ij} de $Hom_\Lambda(\Lambda e_i, Rad\Lambda e_j)$, es decir, $X_{ij} = X_{ij}^1 \uplus X_{ij}^2 \uplus \cdots \uplus X_{ij}^{n_j}$.

Sea $X = \cup_{i,j} X_{ij}$. Si $x \in X_{il}$, $y \in X_{lj}$, $z \in X_{ij}$, definimos $c_{xy}^z := 0$ si $e_i x y e_j = 0$, entonces $xy = \sum_{z \in X} c_{xy}^z z$ donde $c_{xy}^z \in k$.

A continuación construiremos el bocs de Drozd de Λ, denotado $D(\Lambda) = (R, B, \delta)$.

Definimos $R = \underbrace{k \times k \times \cdots \times k}_{2n-\text{veces}}$. Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ tendremos asociados dos vértices en la bigráfica B, denotados i_1, i_2. Para cada $x \in X_{ij}$ se tiene en la bigráfica B una flecha de grado cero, $\alpha_x : i_1 \longrightarrow j_2$, y dos flechas de grado uno $u_x : i_1 \dashrightarrow j_1$, $v_x : i_2 \dashrightarrow j_2$.

Lema 1. *Sean W el R–bimódulo definido por B y $\rho : W \to W \otimes_R W$ la transformación lineal definida por,*

1. $\rho(\alpha_x) = \sum_{w,z \in X} c_{zw}^x (v_z \alpha_w - \alpha_z u_w)$;
2. $\rho(u_x) = \sum_{w,z \in X} c_{zw}^x u_z u_w$;
3. $\rho(v_x) = \sum_{w,z \in X} c_{zw}^x v_z v_w$

para toda $x \in X_{ij}$. Entonces ρ nos induce una diferencial $\delta : T_R(W) \to T_R(W)$ tal que $\delta^2 = 0$.

Demostración. Por la proposición 3, del capítulo I, ρ se extiende a un morfismo de R–bimódulos δ que resulta ser una diferencial. Por lo que únicamente demostraremos que $\delta^2 = 0$.

Una observación importante es que usando la asociatividad de la composición de morfismos en X, $((xy)z = x(yz))$, se tiene la siguiente propiedad para los coeficientes del producto $\sum_{w \in X} c_{xy}^w c_{wz}^t = \sum_{v \in X} c_{xv}^t c_{yz}^v$.

Sean $x \in X_{ij}$, $w \in X_{il}$, $z \in X_{lj}$, $a \in X_{ik}$, $b \in X_{kl}$, $c \in X_{lm}$, $d \in X_{mj}$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\delta^2(\alpha_x) &= \rho(\textstyle\sum_{z,w} c_{zw}^x (v_z \alpha_w - \alpha_z u_w)) = \sum_{z,w} c_{zw}^x (\rho(v_z \alpha_w) - \rho(\alpha_z u_w)) \\
&= \textstyle\sum_{z,w} c_{zw}^x \left[\rho(v_z)\alpha_w - v_z \rho(\alpha_w) - \rho(\alpha_z) u_w - \alpha_z \rho(u_w)\right]
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{array}{rcl} \delta(\alpha_w) & = & \sum_{b,a} c_{ba}^w(v_b\alpha_a - \alpha_b u_a) \\ \delta(\alpha_z) & = & \sum_{d,c} c_{dc}^z(v_d\alpha_c - \alpha_d u_c) \\ \delta(u_w) & = & \sum_{b,a} c_{ba}^w u_b u_a \\ \delta(v_z) & = & \sum_{d,c} c_{dc}^z v_d v_c \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{rcl} \delta^2(\alpha_x) & = & \sum_{z,w} c_{zw}^x \left[\sum_{d,c} c_{dc}^z v_d v_c \alpha_w - \sum_{b,a} c_{ba}^w v_z v_b \alpha_a\right] \\ & & + \sum c_{zw}^x \left[\sum_{b,a} c_{ba}^w v_z \alpha_b u_a - \sum_{d,c} c_{dc}^z v_d \alpha_c u_w\right] \\ & & + \sum c_{zw}^x \left[\sum_{d,c} c_{dc}^z \alpha_d u_c u_w - \sum_{b,a} c_{ba}^w \alpha_z u_b u_a\right] \end{array}$$

1. Como $c_{zw}^x c_{dc}^z = c_{dc}^z c_{zw}^x = c_{dv}^x c_{cw}^v$, tenemos que,

$$\begin{array}{llcl} \text{si } w = v & c_{zw}^x c_{ba}^w v_z v_b \alpha_a & = & c_{zv}^x c_{ba}^v v_z v_b \alpha_a \\ \text{si } a = w & & = & c_{zv}^x c_{bw}^v v_z v_b \alpha_w \\ \text{si } z = d & & = & c_{dv}^x c_{bw}^v v_d v_b \alpha_w \\ \text{si } b = c & & = & c_{dv}^x c_{cw}^v v_d v_c \alpha_w \end{array}$$

2. Similarmente, $\sum c_{zw}^x c_{dc}^z v_d \alpha_c u_w = \sum c_{zw}^x c_{ba}^w v_z \alpha_b u_a$ y $\sum c_{zw}^x c_{dc}^z \alpha_d u_c u_w = \sum c_{zw}^x c_{ba}^w \alpha_z u_b u_a$. Por lo tanto, $\delta^2(\alpha_x) = 0$.

3. Ahora

$$\begin{array}{rcl} \delta^2(u_x) & = & \rho(\sum c_{zw}^x u_z u_w) = \sum c_{zw}^x(\rho(u_z)u_w - u_z\rho(u_w)) \\ & = & \sum c_{zw}^x(\sum c_{dc}^z u_d u_c u_w - \sum c_{ba}^w u_z u_b u_a) = 0 \end{array}$$

4. Nuevamente, se ve que $\delta^2(v_x) = 0$.

Por lo tanto $\delta^2 = 0$ y $D(\Lambda) = (R, W, \delta)$ es un bocs. ∎

Lema 2. *El bocs de Drozd asociado a Λ, $D(\Lambda) = (R, W, \delta)$ es triangular.*

Demostración. Para $0 \neq x \in Hom_\Lambda(\Lambda e_i, Rad\Lambda e_j)$, definimos $v(x)$ como el número natural tal que $x \in Hom_\Lambda(\Lambda e_i, Rad^r\Lambda e_j) \setminus Hom_\Lambda(\Lambda e_i, Rad^{r+1}\Lambda e_j)$. Así, para $x \in X_{ij}^u$, tenemos que $v(x) = u$. Entonces, si $x \in X_{ij}$, $y \in X_{jk}$, tenemos que $v(xy) \geq v(x)+v(y)$. En consecuencia, en la expresión $xy = \sum c_{xy}^z z \in X_{ik}$, $c_{xy}^z z = 0$ si $v(z) < v(x) + v(y)$.

En el conjunto $\{\alpha_x\}_{x\in X}$ de flechas de grado cero de B, consideremos el orden parcial inducido por $\alpha_x > \alpha_y$ si y sólo si $v(x) > v(y)$. Si α_z es minimal, es decir $v(z) = 1$, tenemos que $\delta(\alpha_z) = 0$. En general, $\delta(\alpha_z) = \sum_{x,y\in X} c^z_{xy}(v_x\alpha_y - \alpha_x u_y)$, donde $c^z_{xy} \neq 0$ sólo si $v(y) + v(x) \leq v(z)$; en particular $\alpha_y, \alpha_x < \alpha_z$. Similarmente hacemos $u_x > u_y$ y $v_x > v_y$ si y sólo si $v(x) > v(y)$ para inducir un orden parcial el conjunto de flechas de grado uno. ■

V.2 La categoría $P(\Lambda)$.

Nuevamente, fijemos una $k-$álgebra básica Λ y una descomposición ${}_\Lambda\Lambda = \Lambda e_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda e_n$ en suma directa de proyectivos inescindibles no isomorfos dos a dos. Luego, $1_\Lambda = \sum_{i=1}^n e_i$ es una descomposición en idempotentes primitivos ortogonales de 1_Λ. Denotemos por P_i a Λe_i para cada $i = 1, \cdots, n$. La categoría $P(\Lambda)$ se define como sigue:

1. Los objetos de $P(\Lambda)$ son los morfismos $\varphi : \amalg m_i P_i \to \amalg n_j P_j$ tales que $Im\varphi \subset Rad(\amalg n_j P_j)$.

   Observemos que $m_i P_i$ se identifica con $P_i \otimes_k k^{m_i}$ o con $P_i \otimes_k V_i$, si V_i es un $k-$espacio vectorial con $dim_k V_i = m_i$.

2. Si $\amalg P_i \otimes_k V_i \xrightarrow{\varphi} \amalg P_j \otimes_k W_j$ y $\amalg P_i \otimes_k V_i' \xrightarrow{\varphi'} \amalg P_j \otimes_k W_j'$ son dos objetos de $P(\Lambda)$, un morfismo entre ellos es una pareja de morfismos (γ, β), $\gamma : \amalg P_i \otimes_k V_i \to \amalg P_i \otimes_k V_i'$, $\beta : \amalg P_j \otimes_k W_j \to \amalg P_j \otimes_k W_j'$ tales que $\beta\varphi = \varphi'\gamma$.

Observación 2.1 : $Hom_\Lambda(P_s, P_t) \otimes_k Hom_k(V_s, W_t) \overset{\Psi}{\cong} Hom_\Lambda(P_s \otimes_k V_s, P_t \otimes_k W_t)$. Sean $f \in Hom_\Lambda(P_s, P_t)$ y $h \in Hom_k(V_s, W_t)$, entonces $\Psi(f \otimes h)(p_s \otimes v_s) = f(p_s) \otimes h(v_s)$. Si $x_w = \sum_{x\in X_{s,t}} d^x_w x$, para toda $\varphi_{s,t} \in Hom_\Lambda(P_s \otimes_k V_s, P_t \otimes_k W_t)$, y $H_x \in Hom_k(V_s, W_t)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi_{s,t} &= \textstyle\sum_w x_w \otimes_k H_w \\ &= \textstyle\sum_w (\sum_{x\in X_{s,t}} d^x_w x) \otimes_k H_w \\ &= \textstyle\sum_w x \otimes_k (\sum_{x\in X_{s,t}} d^x_w H_w) \end{aligned}$$

Sea $\varphi_x := \sum_{x\in X_{s,t}} d^x_w H_w$. En el caso de que $s = t$, tenemos tambien el homomorfismo identidad $1_s : P_s \to P_s$, y denotaremos $X^\circ_{s,t} = X_{s,t} \cup \{1_s\}$. Luego, si definimos $X^\circ_{s,t} := X_{s,t}$ si $s \neq t$, tenemos para $\varphi \in Hom_\Lambda(\amalg P_i \otimes_k V_i, \amalg P_j \otimes_k W_j)$, la expresión única general: $\varphi = (\varphi_{ij}) = (\sum_{z\in X^\circ_{ij}} z \otimes_k \varphi_z)$.

V.3 La equivalencia entre $P(\Lambda)$ y $Rep(D(\Lambda))$.

Proposición 3. *Las categorías $P(\Lambda)$ y $Rep(D(\Lambda))$ son equivalentes.*

Demostración. Sea $F : P(\Lambda) \to Rep(D(\Lambda))$ tal que si $\varphi : \amalg P_i \otimes_k V_i \to \amalg P_j \otimes_k W_j \in P(\Lambda)$, entonces

$$F(\varphi)_{i_1} = V_i,\ F(\varphi)_{i_2} = W_i,\ F(\varphi)_{\alpha_x} = \varphi_x : V_i \to W_j \text{ donde } \alpha_x : i_1 \to j_2.$$

Si $(\gamma, \beta) : \varphi \to \varphi'$ es un morfismo en $P(\Lambda)$ donde $\varphi : \amalg P_i \otimes_k V_i \to \amalg P_j \otimes_k W_j$ y $\varphi' : \amalg P_i \otimes_k V_i' \to \amalg P_j \otimes_k W_j'$, $F(\gamma, \beta) = (f^0, f^1)$ está dado de la siguiente manera,

Con la notación introducida antes $\gamma = (\sum_{z \in X_{ij}^\circ} z \otimes \gamma_z)$ y $\beta = (\sum_{y \in X_{ij}^\circ} y \otimes \beta_y)$. Se definen,

$$\begin{array}{rcrl} f^0_{i_1} & = & \gamma_{I_i} : & V_i \to V_i' \\ f^0_{i_2} & = & \beta_{I_i} : & W_i \to W_i' \\ f^1_{u_x} & = & \gamma_x : & V_i \to V_j' \\ f^1_{v_x} & = & \beta_x : & W_i \to W_j' \end{array}$$

donde $u_x : i_1 \to j_1$, $v_x : i_2 \to j_2$.

1. Claramente $F(\varphi) \in Rep(D(\Lambda))$. Veamos que $F(\gamma, \beta) = (f^0, f^1)$ es un morfismo en $Rep(D(\Lambda))$. Como (γ, β) es un morfismo en $P(\Lambda)$, $\beta\varphi = \varphi'\gamma$. Ahora,

$$\begin{aligned} \beta\varphi &= (\textstyle\sum_{y \in X_{il}^\circ} y \otimes \beta_y)(\sum_{x \in X_{lj}^\circ} x \otimes \varphi_x) \\ &= \textstyle\sum_{y,x} yx \otimes \beta_y \varphi_x) \\ &= \textstyle\sum_z c_{yx}^z z \otimes \beta_y \varphi_x + \sum_x x \otimes \beta_{1_y} \varphi_x + \sum_y y \otimes \beta_y \varphi_{1_x} + 1 \otimes \beta_{1_y} \varphi_{1_x}) \end{aligned}$$

Similarmente

$$\varphi'\gamma = \textstyle\sum_w c_{x'z}^w w \otimes \varphi_{x'}' \gamma_z + \sum_z z \otimes \varphi_{1_{x'}}' \gamma_z + \sum_{x'} x' \otimes \varphi_{x'}' \gamma_{1_z} + 1 \otimes \varphi_{1_{x'}}' \gamma_{1_z})$$

Como φ y φ' tienen imagen en el radical de su codominio, $\varphi_{1_x} = \varphi_{1_x}' = 0$ para toda x. Por lo tanto, para toda $z \in X_{ij}$, $y \in X_{il}$, $x \in X_{lj}$ tenemos,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_z \left[(\sum_{x,y} c_{yx}^z z \otimes \beta_y \varphi_x) + z \otimes \beta_{1_i} \varphi_j \right] &= \textstyle\sum_z \left[(\sum_{x,y} c_{yx}^z z \otimes \varphi_y' \gamma_x) + z \otimes \varphi_{1_i}' \gamma_j \right] \\ (\textstyle\sum_{x,y} c_{yx}^z \beta_y \varphi_x) + \beta_{1_i} \varphi_j &= (\textstyle\sum_{x,y} c_{yx}^z \varphi_y' \gamma_x) + \varphi_{1_i}' \gamma_j \end{aligned}$$

Como $A = T_R(W_0)$ está generada como R-módulo por los elementos $\{\alpha_z\}_{z \in X}$, para verficar 3) de la definición de morfismos en la categoría de representaciones de un bocs, basta ver que vale para $\alpha_z : \alpha_x : i_1 \to j_2$. Sustituyendo en la última igualdad, tenemos,

$$\sum f^0_{j_2} F(\varphi)_{\alpha_z} - F(\varphi^{'})_{\alpha_z} f^0_{i_1} = \sum c^z_{yx}(F(\varphi^{'})_{\alpha_y} f^1_{u_x} - f^1_{v_y} F(\varphi)_{\alpha_x})$$

2. Veamos que F conserva la composición. Consideremos los objetos de $P(\Lambda)$,

$$\begin{aligned}
\varphi &: \amalg P_i \otimes_k V_i \to \amalg P_j \otimes_k W_j, \\
\varphi^{'} &: \amalg P_i \otimes_k V_i^{'} \to \amalg P_j \otimes_k W_j^{'}, \\
\varphi^{''} &: \amalg P_i \otimes_k V_i^{''} \to \amalg P_j \otimes_k W_j^{''}.
\end{aligned}$$

y los morfismos $(\gamma, \beta) : \varphi \to \varphi^{'}$ y $(\rho, \eta) : \varphi^{'} \to \varphi^{''}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\gamma &= \left(\textstyle\sum_{z \in X^o_{ik}} z \otimes \gamma_z\right) : \amalg P_i \otimes_k V_i \to \amalg P_i \otimes_k V_i^{'} \\
\beta &= \left(\textstyle\sum_{y \in X^o_{ik}} y \otimes \beta_y\right) : \amalg P_j \otimes_k W_j \to \amalg P_j \otimes_k W_j^{'} \\
\rho &= \left(\textstyle\sum_{a \in X^o_{kj}} a \otimes \rho_a\right) : \amalg P_i \otimes_k V_i^{'} \to \amalg P_i \otimes_k V_i^{''} \\
\eta &= \left(\textstyle\sum_{b \in X^o_{kj}} B \otimes \eta_b\right) : \amalg P_j \otimes_k W_j^{'} \to \amalg P_j \otimes_k W_j^{''}
\end{aligned}$$

Mostraremos que $F((\rho, \eta)(\gamma, \beta)) = F(\rho, \eta) F(\gamma, \beta)$. Recordemos que

$$\begin{array}{lll}
F(\varphi)_{i_1} = V_i, & F(\varphi)_{i_2} = W_i, & F(\varphi)_{\alpha_x} = \varphi_x \\
F(\varphi^{'})_{i_1} = V_i^{'}, & F(\varphi^{'})_{i_2} = W_i^{'}, & F(\varphi^{'})_{\alpha_x} = \varphi_x^{'} \\
F(\varphi^{''})_{i_1} = V_i^{''}, & F(\varphi^{''})_{i_2} = W_i^{''}, & F(\varphi^{''})_{\alpha_x} = \varphi_x^{''}
\end{array}$$

Además, para los morfismos $F(\gamma, \beta) = (f^0, f^1)$ y $F(\rho, \eta) = (g^0, g^1)$, tenemos, dado $x \in X_{ij}$

$$\begin{array}{ll}
f^0_{i_1} = \gamma_{1_i} : V_i \to V_i^{'}, & g^0_{i_1} = \rho_{1_i} : V_i^{'} \to V_i^{''}, \\
f^0_{i_2} = \beta_{1_i} : W_i \to W_i^{'}, & g^0_{i_2} = \eta_{1_i} : W_i^{'} \to W_i^{''}, \\
f^1_{u_x} = \gamma_x : V_i \to V_j^{'}, & g^1_{u_x} = \rho_x : V_i^{'} \to V_j^{''}, \\
f^1_{v_x} = \beta_x : W_i \to W_j^{'} & g^1_{v_x} = \eta_x : W_i^{'} \to W_j^{''}
\end{array}$$

Sea $u_x : i_1 \to j_1$, entonces

$$(gf)^1(u_x) = g^0 f^1_{u_x} + g^1_{u_x} f^0 + \sum_{\substack{w \in X_{il} \\ z \in X_{lj}}} c^x_{zw} g^1_{u_z} f^1_{u_w} = \rho_{1_i}\gamma_x + \rho_x \gamma_{1_1} + \sum c^x_{zw} \rho_z \gamma_w.$$

Sea $v_x : i_2 \to j_2$, entonces

$$(gf)^1(v_x) = g^0 f^1_{v_x} + g^1_{v_x} f^0 + \sum_{\substack{w \in X_{il} \\ z \in X_{lj}}} c^x_{zw} g^1_{v_z} f^1_{v_w} = \eta_{1_i}\beta_x + \eta_x \beta_{1_i} + \sum c^x_{zw} \eta_z \beta_w$$

Por otro lado, sea $(a, b) = (\rho, \eta)(\gamma, \beta)$.

$$\begin{aligned} a = \rho\gamma &= (\sum z \otimes \rho_z)(\sum w \otimes \gamma_w) = (\sum zw \otimes \rho_z\gamma_w) \\ &= (\sum w \otimes \rho_1\gamma_w + \sum z \otimes \rho_z\gamma_1 + \sum c_{zw}^x x \otimes \rho_z\gamma_w) \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $x \in X$, $a_x = \rho_1\gamma_x + \rho_x\gamma_1 + \sum c_{zw}^x \rho_z\gamma_w = (gf)^1(u_x)$.

$$\begin{aligned} b = \eta\beta &= (\sum z \otimes \eta_z)(\sum w \otimes \beta_w) = \sum zw \otimes \eta_z\beta_w \\ &= (\sum w \otimes \eta_1\beta_w + \sum z \otimes \eta_z\beta_1 + \sum c_{zw}^x x \otimes \eta_z\beta_w) \end{aligned}$$

De donde tenemos que $b_x = \eta_1\beta_x + \eta_x\beta_1 + \sum c_{zw}^x \eta_z\beta_w = (gf)^1(v_x)$ por lo tanto, F es un funtor.
De la definición de F, es fácil observar los siguientes hechos:

1. Para todo par de objetos φ, φ' en la categoría $P(\Lambda)$ y para todo morfismo en la categoría $Rep(D(\Lambda))$, $f = (f^0, f^1) : F(\varphi) \to F(\varphi')$ existe un morfismo $g : \varphi \to \varphi'$ en $P(\Lambda)$ tal que $f = F(g)$, es decir, F es pleno;

2. Para todo morfismo $g : \varphi \to \varphi'$ en $P(\Lambda)$, $F(g) = 0$ implica que $g = 0$, por lo tanto F es fiel;

3. Para todo $M \in Rep(D(\Lambda))$, existe $\varphi \in P(\Lambda)$ tal que $M \cong F(\varphi)$, es decir, F es denso.

Por lo tanto F es una equivalencia de categorías. ■

V.4 Parametrizaciones en $mod\Lambda$ y en $Rep(D(\Lambda))$.

Sea Λ una k-álgebra de dimensión finita sobre k. Consideremos la $k(x)$−álgebra, $\Lambda \otimes_k k(x)$, cuya multiplicación está dada por,

$$(\lambda \otimes_k a)\ (\lambda' \otimes_k b) = \lambda\lambda' \otimes_k ab, \text{ para } \lambda, \lambda' \in \Lambda,\ a, b \in k(x)$$

$k(x)$ se encaja en el centro de $\Lambda \otimes_k k(x)$ vía el homomorfismo, $i : k(x) \to \Lambda \otimes_k k(x)$ dado por $i(a) = (1 \otimes_k a)$, si $a \in k(x)$. En efecto,

$$\begin{aligned} (\lambda \otimes_k b)a &= (\lambda \otimes_k b)i(a) \\ &= (\lambda \otimes_k b)(1 \otimes_k a) \\ &= \lambda \otimes_k ba \\ &= \lambda \otimes_k ab \\ &= (1 \otimes_k a)(\lambda \otimes_k b) \\ &= i(a)(\lambda \otimes_k b) = a(\lambda \otimes_k b) \end{aligned}$$

Lema 4. *Si M es un $\Lambda \otimes_k k(x)$-módulo izquierdo de dimensión finita sobre $k(x)$, entonces existe $f \in k[x]$ y un $\Lambda \otimes_k k[x]_f$-módulo izquierdo M_0 que es libre finitamente generado como $k[x]_f$ −módulo tal que $M \cong M_0 \otimes_{k[x]_f} k(x)$, como $\Lambda \otimes_k k(x)$−módulo.*

Demostración. Sean $m_1, \cdots, m_l$ una $k(x)$−base de M y $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$ una k−base de Λ. Entonces, para cada i, j,

$$(\lambda_i \otimes_k 1)m_j = \textstyle\sum_l c^l_{ij} m_l,\ c^l_{ij} \in k(x).$$

Ahora, $c^l_{ij} = \frac{a^l_{ij}(x)}{b^l_{ij}(x)} = \frac{r^l_{ij}(x)a^k_{ij}(x)}{f(x)} \in k[x]_{f(x)}$ donde $f(x) = r^l_{ij}(x)b^l_{ij}(x) = m.c.m. \left\{b^l_{ij}\right\}$.

Sea $M_0 = k[x]_{f(x)} m_1 \oplus \cdots \oplus k[x]_{f(x)} m_l$, el cual es libre como $k[x]_{f(x)}$-módulo generado por las m_i. Como $\{\lambda_i \otimes_k 1 \mid 1 \leq i \leq t\}$ es una k−base de $\Lambda \otimes_k k[x]_{f(x)}$, obtenemos que $(\Lambda \otimes_k k[x]_{f(x)})M_0 \in M_0$ y así M_0 es un $\Lambda \otimes_k k[x]_{f(x)}$-módulo izquierdo.

Como M_0 es $k[x]_{f(x)}$-libre con base $m_1, \cdots, m_l$, $M_0 \otimes_{k[x]_{f(x)}} k(x)$ es un $k(x)$−espacio vectorial con base $m_1 \otimes 1, \cdots, m_l \otimes 1$.
Sea $\Psi : M_0 \otimes_{k[x]_{f(x)}} k(x) \to M$ tal que $\Psi(m_j \otimes_{k[x]_{f(x)}} 1) = m_j$. El morfismos Ψ es lineal y manda bases en bases, por lo tanto es un isomorfismo de $k(x)$−espacios vectoriales. Además,

$$\begin{array}{rcl}
\Psi((\lambda_i \otimes_k 1)(m_j \otimes_{k[x]_{f(x)}} 1)) & = & \Psi((\lambda_i \otimes_k 1)m_j \otimes_{k[x]_{f(x)}} 1) \\
& = & \Psi(\sum_s c^s_{ij} m_s \otimes_{k[x]_{f(x)}} 1) \\
& = & \sum_s c^s_{ij} \Psi(m_s \otimes_{k[x]_{f(x)}} 1) \\
& = & \sum_s c^s_{ij} m_s \\
& = & (\lambda_i \otimes_k 1)m_j \\
& = & (\lambda_i \otimes_k 1)\Psi(m_j \otimes_{k[x]_{f(x)}} 1).
\end{array}$$

Por lo tanto, $M \cong M_0 \otimes_{k[x]_{f(x)}} k(x)$ en $mod(\Lambda \otimes_k k(x))$. ∎

Lema 5. *Sea $\alpha : M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} L \to 0$ una sucesión exacta de de $\Lambda \otimes_k k(x)$−módulos de dimensión finita sobre $k(x)$, entonces existe $f \in k[x]$ y β una sucesión exacta $M^0_1 \xrightarrow{\varphi^0_1} M^0_2 \xrightarrow{\varphi^0_2} L^0 \to 0$ de $\Lambda \otimes_k k[x]_{f(x)}$ −módulos libre finitamente generados como $k[x]_f$ −módulos tal que α es isomorfa a β tensoreada por $k(x)$ en $mod(\Lambda \otimes_k k(x))$.*

Demostración. Consideremos las siguientes bases de $k(x)$−espacios vectoriales,

$l_1, \cdots, l_t$	una base de L
$k_1, \cdots, k_s$	una base para $Ker\varphi_2$
$k_1, \cdots, k_s, m_1, \cdots, m_t$	una base para M_2
$n_1, \cdots, n_s, r_1, \cdots, r_n$	una base para M_1

tales que $\varphi_1(n_i) = k_i$ y $\varphi_2(m_i) = l_i$. Procedemos como en la demostración anterior, eligiendo ahora $f(x)$ como el mínimo común múltiplo de los denominadores de todos los coeficientes de $(\lambda_i \otimes 1)x_i$ en términos de la $k(x)-$base $\{x_i\}$ de cada uno de los espacios M_1, M_2 y L. Como antes, consideramos

$$\begin{array}{rcl} M_1^0 & = & k\,[x]_{f(x)}\,n_1 \oplus \cdots \oplus k\,[x]_{f(x)}\,n_s \oplus k\,[x]_{f(x)}\,r_1 \oplus \cdots \oplus k\,[x]_{f(x)}\,r_n \\ M_2^0 & = & k\,[x]_{f(x)}\,k_1 \oplus \cdots \oplus k\,[x]_{f(x)}\,k_s \oplus k\,[x]_{f(x)}\,m_1 \oplus \cdots \oplus k\,[x]_{f(x)}\,m_t \\ L^0 & = & k\,[x]_{f(x)}\,l_1 \oplus \cdots \oplus k\,[x]_{f(x)}\,l_t \end{array}$$

y obtenemos la sucesión exacta $M_1^0 \xrightarrow{\varphi_1^0} M_2^0 \xrightarrow{\varphi_2^0} L^0 \to 0$ donde φ_i^0 denota la restricción de φ_i. Es fácil ver que es conmutativo el diagrama,

$$\begin{array}{ccccccc} M_1^0 \otimes_{k[x]_{f(x)}} k(x) & \xrightarrow{\varphi_1^0 \otimes I} & M_2^0 \otimes_{k[x]_{f(x)}} k(x) & \xrightarrow{\varphi_2^0 \otimes I} & L^0 \otimes_{k[x]_{f(x)}} k(x) & \to & 0 \\ \Psi \downarrow & & \Psi \downarrow & & \Psi \downarrow & & \\ M_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & M_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & L & \to & 0 \end{array}$$

■

Lema 6. *Sea $\varphi : L_1 \to L_2$ un morfismo en $mod(\Lambda \otimes_k k\,[x]_{f(x)})$ y $\varphi' : L_1' \to L_2'$ un morfismo en $mod(\Lambda \otimes_k k\,[x]_{g(x)})$ tales que para s_1, s_2 isomorfismos tenemos el siguiente diagrama comutativo en $mod(\Lambda \otimes_k k(x))$,*

$$\begin{array}{ccc} L_1 \otimes_{k[x]_{f(x)}} k(x) & \xrightarrow{\varphi \otimes I} & L_2 \otimes_{k[x]_{f(x)}} k(x) \\ s_1 \downarrow & & \downarrow s_2 \\ L_1' \otimes_{k[x]_{g(x)}} k(x) & \xrightarrow{\varphi' \otimes I} & L_2' \otimes_{k[x]_{g(x)}} k(x) \end{array}$$

entonces existe $h(x) \in k\,[x]$ e isomorfismos s_1', s_2' tales que tenemos el siguiente diagrama comutativo en $mod(\Lambda \otimes_k k\,[x]_{fgh(x)})$

$$\begin{array}{ccc} L_1 \otimes_{k[x]_{f(x)}} k\,[x]_{g(x)f(x)h(x)} & \xrightarrow{\varphi \otimes I} & L_2 \otimes_{k[x]_{f(x)}} k\,[x]_{g(x)f(x)h(x)} \\ s_1' \downarrow & & \downarrow s_2' \\ L_1' \otimes_{k[x]_{g(x)}} k\,[x]_{g(x)f(x)h(x)} & \xrightarrow{\varphi' \otimes I} & L_2' \otimes_{k[x]_{g(x)}} k\,[x]_{g(x)f(x)h(x)} \end{array}$$

Demostración. Sean $m_1, \cdots, m_t$ una base para $L_1, n_1, \cdots, n_s$ una base para L_2, $m_1', \cdots, m_t'$ una base para L_1', $n_1', \cdots, n_s'$ una base para L_2', todas ellas como $k\,[x]_{f(x)}-$ módulos libres y $s_1(m_i \otimes 1) = \sum c_{ij}(m_j' \otimes 1)$, $s_2(n_i \otimes 1) = \sum d_{ij}(n_j' \otimes 1)$, como s_1, s_2 son isomorfismos, $det(c_{ij}) \neq 0$ y $det(d_{ij}) \neq 0$, tenemos que $c_{ij}, d_{ij} \in k\,[x]_{g(x)f(x)h(x)}$, por lo tanto tomamos $s_i' = s_i$, $i = 1, 2$. ■

Proposición 7. *Sea F la composición $CokE$ donde Cok denota el funtor inducido por la operación de tomar el cokernel de una objeto de $P(\Lambda)$ y E la equivalencia entre las categorías $rep(D(\Lambda))$ y $P(\Lambda)$. Supongamos que existe una parametrización $\mathcal{M}$ en $D(\Lambda)$. Entonces existe un $\Lambda - k[x]_f$ −bimódulo C libre como $k[x]_f$ −módulo tal que para casi toda $\lambda \in k$, $F(\mathcal{M} \otimes_{k[x]_f} S_\lambda) \cong C \otimes_{k[x]_f} S_\lambda$.*

Demostración. Consideremos el bimódulo de $\mathcal{M}$ visto como una representación de la bigráfica B de $D(\Lambda)$ sobre el anillo $k[x]_f$. Sean:

$$\begin{aligned} M &= \left(k[x]_f^{n_i} \overset{\varphi_{ij}}{\to} k[x]_f^{n_j}\right) \in repD(\Lambda) \\ E(M) &= \left(\amalg P_i \otimes_k k[x]_f^{n_i} \overset{x\otimes\varphi_{ij}}{\to} \amalg P_i \otimes_k k[x]_f^{n_j}\right) \in P(\Lambda) \\ &= Q_1 \overset{\varphi}{\to} Q_2 \in mod(\Lambda \otimes_k k[x]_f) \end{aligned}$$

Si tomamos la sucesión,

$$Q_1 \otimes_{k[x]_f} k(x) \overset{\varphi\otimes I}{\to} Q_2 \otimes_{k[x]_f} k(x) \overset{Cok}{\to} C \to 0$$

por el lema 5, existe $g(x) \in k[x]$ y una sucesión

$$Q_1^0 \overset{\varphi^0}{\to} Q_2^0 \overset{Cok}{\to} C^0 \to 0 \text{ en } mod(\Lambda \otimes_k k[x]_f)$$

Por el lema anterior, existe $h(x) \in k[x]$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} Q_1 \otimes_{k[x]_f} k[x]_{gfh} & \overset{\varphi\otimes I}{\to} & Q_2 \otimes_{k[x]_{f(x)}} k[x]_{gfh} \\ s_1' \downarrow & & \downarrow s_2' \\ Q_1^0 \otimes_{k[x]_g} k[x]_{gfh} & \overset{\varphi^0\otimes I}{\to} & Q_2^0 \otimes_{k[x]_g} k[x]_{gfh} \end{array}$$

Si denotamos por C' al conúcleo del morfismo en el renglón superior del diagrama, este último se completa como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc} Q_1 \otimes_{k[x]_f} k[x]_{gfh} & \overset{\varphi\otimes I}{\to} & Q_2 \otimes_{k[x]_f} k[x]_{gfh} & \to & C' & \to & 0 \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\ Q_1^0 \otimes_{k[x]_g} k[x]_{gfh} & \overset{\varphi^0\otimes I}{\to} & Q_2^0 \otimes_{k[x]_g} k[x]_{gfh} & \to & C^0 \otimes_{k[x]_g} k[x]_{gfh} & \to & 0 \end{array}$$

Abusando del lenguaje, denotamos por el mismo símbolo S_λ a los módulos simples $k[x]_{gfh}/(x-\lambda)$ y $k[x]_f/(x-\lambda)$ en $mod(k[x]_{gfh})$ y $mod(k[x]_f)$, respectivamente.. Así, claramente $k[x]_{gfh} \otimes_{k[x]_f} S_\lambda \cong S_\lambda$.
Entonces, si tensoreamos el diagrama nterior por S_λ sobre $k[x]_{gfh}$, obtnemos el siguiente diagrama conmutativo en $mod\Lambda$:

$$\begin{array}{ccccccc}
Q_1 \otimes_{k[x]_f} S_\lambda & \overset{\varphi\otimes I}{\to} & Q_2 \otimes_{k[x]_f} S_\lambda & \to & C' \otimes_{k[x]_{gfh}} S_\lambda & \to & 0 \\
\downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \\
Q_1^0 \otimes_{k[x]_g} S_\lambda & \overset{\varphi^0\otimes I}{\to} & Q_2^0 \otimes_{k[x]_g} S_\lambda & \to & C^0 \otimes_{k[x]_g} S_\lambda & \to & 0
\end{array}$$

Al tomar conúcleos en el diagrama anterior, obtenemos,
$C^1 := Cok(Q_1 \otimes_{k[x]_g} k\,[x]_{gfh} \overset{\varphi\otimes I}{\to} Q_2 \otimes_{k[x]_f} k\,[x]_{gfh}) \cong C^0 \otimes_{k[x]_g} k\,[x]_{gfh})$
Como

$$\begin{aligned}
M \otimes_{k[x]_f} S_\lambda &= \left(k^{n_i} \overset{\varphi_{ij}(\lambda)}{\to} k^{n_j}\right), \text{ y} \\
E(M \otimes_{k[x]_f} S_\lambda) &= \left(\amalg P_i \otimes_k k^{n_i} \overset{x\otimes\varphi_{ij}(\lambda)}{\to} \amalg P_j \otimes_k k^{n_j}\right) \\
&\cong Q_1 \otimes_{k[x]_f} S_\lambda \overset{\varphi\otimes I}{\to} Q_2 \otimes_{k[x]_f} S_\lambda
\end{aligned}$$

resulta que $F(M \otimes_{k[x]_f} S_\lambda) \cong C^0 \otimes_{k[x]_g} S_\lambda$, como se afirmaba. ∎

V.5 El álgebra Λ es mansa si y sólo si el bocs $D(\Lambda)$ es manso.

Proposición 8. *Si el bocs $D(\Lambda)$ es de tipo de representación manso, entonces el álgebra Λ es de tipo de representación manso.*

Demostración. Sea $t = max\,\{dim_k P_i\}_{i=1,\cdots,r}$ donde los P_i son los proyectivos inescindibles que aparecen en la descomposición en inescindibles de Λ y sea d una dimensión fija.

Sea $L = \{(m_1, \cdots, m_s, n_1, \cdots, n_s) \mid \sum_{i=1}^s m_i \leq td, \sum_{i=1}^s n_i \leq d\}$, por lo tanto L es un conjunto finito.

Como $D(\Lambda)$ es manso, existen parametrizaciones $L_1, \cdots, L_r$ que podemos suponer $A - k\,[x]_f$ módulos para algún $f \in k\,[x]$, tales que,

1. $\text{rango}_{k[x]_{f(x)}}(L_i) \in L$,
2. para casi toda representación inescindible M de $D(\Lambda)$ tal que $\underline{dim}M \in L$, existen $i \in \{1, \cdots, r\}$ y $\lambda \in k$, tales que $M \cong L_i \otimes_{k[x]_{f(x)}} S_\lambda$.

Para cada $i = 1, \cdots, r$ existe un $\Lambda - k\,[x]_{g_i}$-bimódulo C_i libre finitamente gene- rado sobre $k\,[x]_{g_i}$ tal que para toda $\lambda \in k$, $g_i(\lambda) \neq 0$, $cokE(L_i \otimes_{k[x]_f} S_\lambda) \cong C_i \otimes_{k[x]_g} S_\lambda$. Sea $J = \{i \mid rangoC_i = d\}$.

Afirmación: Los bimódulos C_i con $i \in J$, parametrizan a los Λ-módulos inescindibles de dimensión d.

Sea X un Λ-módulo inescindible tal que $dim_k X = d$. Consideremos su presentación proyectiva minimal $\amalg m_i P_i \xrightarrow{\varphi} \amalg n_i P_i \xrightarrow{u} X$. Entonces φ es cubierta proyectiva del $ker(u)$ y u es cibierta proyectiva de X. En particular, $\amalg n_i P_i / Rad \amalg n_i P_i \cong X/RadX$, entonces $dim_k(\amalg n_i P_i / Rad \amalg n_i P_i) = dim_k(X/RadX)$, por lo tanto $\sum n_i \leq dim_k X = d$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \sum m_j &= dim_k(\amalg m_i P_i / Rad \amalg m_i P_i) = dim_k(ker(u)) \\ &\leq dim_k \amalg n_i P_i \leq \sum n_i dim_k P_i \\ &\leq \sum n_i t \leq dt \end{aligned}$$

En consecuencia, para φ_X la representación de $D(\Lambda)$ que corresponde a X, se tiene que $\underline{dim}\varphi_X \in L$. Luego, para casi todo X, existen i y λ tales que $\varphi_X \cong L_i \otimes_{k[x]_f} S_\lambda$ en $rep(D(\lambda))$.

Finalmente, $X = cokE\varphi_X = cokerE(L_i \otimes_{k[x]_f} S_\lambda) \cong C_i \otimes_{k[x]_{g_i}} S_\lambda$ y $d = dim_k X = dim(C_i \otimes_{k[x]_{f(x)}} S_\lambda) = rango\ C_i$, por lo tanto $i \in J$. ■

Sea $\Sigma = mod(k\langle x, y\rangle)$, la categoría de $k\langle x, y\rangle$ −módulos izquierdos de dimensión finita.

Proposición 9. *Existe un funtor $G : \Sigma \to \Sigma$ tal que satisface las siguientes condiciones*

1. *Si $Y = G(X)$, entonces Y no es de dimensión 1;*
2. *G conserva inescindibles;*
3. *G refleja clases de isomorfía;*
4. *G está dado como un producto tensorial.*

Demostración. Para $X = (X, T_X(x), T_X(y)) \in \Sigma$ donde $T_X(x), T_X(y) : X \to X$, sea

$$G(X) = X \oplus X \oplus X,\ T_{G(X)}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1_X & 0 \\ 0 & 0 & 1_X \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_{G(X)}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_X(x) & 0 & 0 \\ 0 & T_X(y) & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $h : X \to Y \in \Sigma$, donde $Y = (Y, T_Y(x), T_Y(y))$, sea $G(h) = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$.

1. Veamos que $G(h) : G(X) \to G(Y)$ es un isomorfismo en Σ.

Como h es un morfismo en Σ, tenemos que $hT_X(x) = T_Y(x)h$, $hT_X(y) = T_Y(y)h$.

P.D. $G(h)T_{G(X)}(x) = T_{G(Y)}(x)G(h)$

$$G(h)T_{G(X)}(x) = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_X & 0 \\ 0 & 0 & 1_X \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{G(Y)}(x)G(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1_Y & 0 \\ 0 & 0 & 1_Y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P.D. $G(h)T_{G(X)}(y) = T_{G(Y)}(y)h$

$$\begin{aligned} G(h)T_{G(X)}(y) &= \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_X(x) & 0 & 0 \\ 0 & T_X(y) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ hT_X(x) & 0 & 0 \\ 0 & hT_X(y) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_Y(x)h & 0 & 0 \\ 0 & T_Y(y)h & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$T_{G(Y)}(y)h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_Y(x) & 0 & 0 \\ 0 & T_Y(y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_Y(x)h & 0 & 0 \\ 0 & T_Y(y)h & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $G(h)$ es un morfismo en Σ y de la definición es claro que G es un funtor.

2. G conserva inescindibles.

Demostraremos que si X es inescindible, entones $End(G(X))$ es local.

Sea $\varphi : G(X) \to G(X)$, $\varphi = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix}$, por ser un morfismo, se satisface que $T_{G(X)}(x)\varphi = \varphi T_{G(X)}(x)$, es decir,

$$\begin{pmatrix} D & E & F \\ G & H & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A & B \\ 0 & D & E \\ 0 & G & H \end{pmatrix} \Longrightarrow \varphi = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & A & B \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

pero también $T_{G(X)}(y)\varphi = \varphi T_{G(X)}(y)$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_X(x)A & T_X(x)B & T_X(x)C \\ 0 & T_X(y)A & T_X(y)B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BT_X(x) & CT_X(y) & 0 \\ AT_X(x) & BT_X(y) & 0 \\ 0 & AT_X(y) & 0 \end{pmatrix}$$

de donde $T_X(x)A = AT_X(x)$ y $T_X(y)A = AT_X(y)$, por lo tanto $A \in End(X)$. Como X es inescindible, $End(X)$ es local y tenemos que A es invertible o es nilpotente.

Si A es invertible, entonces existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$, por lo tanto

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & A & B \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

es decir, φ es invertible.

Si A es nilpotente, entonces existe n tal que $A^n = 0$, claramente $\varphi^{4n} = 0$, es decir, φ es nilpotente.

Por lo tanto $End(G(X))$ es local.

3. Veamos que G refleja clases de isomorfía.

Sea $H : G(X) \to G(Y)$ un isomorfismo, razonando como en el inciso anterior obtenemos que $T_X(x)A = AT_Y(y)$ donde $A \in Hom(X,Y)$ es invertible, por lo tanto $X \cong Y$.

4. Finalmente, demostraremos que G está dado por un producto tensorial.

Sea M el $k\langle x,y\rangle$ −bimódulo, tal que $M = k\langle x,y\rangle \oplus k\langle x,y\rangle \oplus k\langle x,y\rangle$ como módulo derecho y $T_M(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1_{k\langle x,y\rangle} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{k\langle x,y\rangle} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T_M(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}$ como módulo izquierdo, entonces $G(X) \cong M \otimes_{k\langle x,y\rangle} X$. ∎

En [*LRS*] (Proposición 3.6) se demuestra que la definición de ser salvaje es equivalente a la siguiente:

Definición 10. *Una k−álgebra finitamente generada A es salvaje si existe un $A-k\langle x,y\rangle$ −bimódulo M finitamente generado como $k\langle x,y\rangle$ −módulo, tal que el funtor $F(X) = M \otimes_{k\langle x,y\rangle} X : \Sigma \to RepA$ preserva inescindibles y clases de isomorfía.*

Teorema 11. *Si el bocs $D(\Lambda)$ es de tipo de representación salvaje, entonces Λ es de tipo de representación salvaje.*

Demostración. Supongamos que $D(\Lambda)$ es un bocs salvaje, entonces existe L un $A - k\langle x, y\rangle$ −bimódulo M finitamente generado libre como $k\langle x, y\rangle$ −módulo, tal que el funtor $F(X) = L \otimes_{k\langle x,y\rangle} X : \Sigma \to RepD(\Lambda)$ preserva inescindibles y clases de isomorfía. Sea $G' : \Sigma \to \Sigma$ definido como en la proposición anterior. Entonces, $G = FG' : \Sigma \to Rep(D(\Lambda))$ preserva inescindibles y refleja clases de isomorfía, además $G \cong L \otimes_{k\langle x,y\rangle} M \otimes_{k\langle x,y\rangle} -$. Consideremos $H : RepD(\Lambda) \overset{E}{\to} P(\Lambda) \overset{Cok}{\to} mod\Lambda$.

Sea X inescindible en $\sum$, entonces $End_\Lambda(HG(X)) = Hom_\Lambda(HG(X), HG(X)) \neq 0$, porque si $HG(X) = 0$ implica que $G(X)$ es simple y por construcción $G(X)$ no es simple, por otro lado $G(X)$ es inescindible, por lo tanto $Hom_{D(\Lambda)}(G(X), G(X))$ es local. Consideremos el epimorfismo

$$\varepsilon : Hom_{D(\Lambda)}(G(X), G(X)) \to Hom_\Lambda(HG(X), HG(X)),$$

sea $f \in Hom_\Lambda(HG(X), HG(X))$, como el funtor es pleno existe $g \in Hom_{D(\Lambda)}(G(X), G(X))$, tal que $\varepsilon(g) = f$, por lo tanto g es un isomorfismo o es nilpotente.

Si g es isomorfismo existe g^{-1} tal que $gg^{-1} = I_{G(X)} = g^{-1}g$, y

$$\varepsilon(g^{-1})\varepsilon(g) = \varepsilon(g^{-1}g) = \varepsilon(I_{G(X)}) = I_{HG(X)} = \varepsilon(g^{-1})f = f\varepsilon(g^{-1})$$

por lo tanto f es un isomorfismo.

Si g es nilpotente, entonces existe n tal que $g^n = 0$, por lo tanto,

$$\varepsilon(g^n) = \varepsilon(g)\cdots\varepsilon(g) = f\cdots f = 0$$

es decir, f es nilpotente. Con lo que queda demostrado que HG preserva inescindibles.

Como G', F, E y Cok reflejan clases de isomorfía, $HG = (Cok)(EFG')$ hereda esta propiedad.

∎

V.6 Resultados para álgebras.

Sea Λ una $k-$ álgebra de dimensión finita, $D(\Lambda)$ el bocs asociado a Λ. Hemos considerado el funtor $Rep(D(\Lambda)) \cong P(\Lambda) \overset{Cok}{\to} mod\Lambda$. Dados $M, N \in mod\Lambda$, denotemos por $\varphi(M), \varphi'(N) \in P(\Lambda)$ a sus cubiertas proyectivas, por $\varphi, \varphi' \in Rep(D(\Lambda))$ los objetos correspondientes en $Rep(D(\Lambda))$. Luego, $Cok\varphi(M) = M$ y $Cok\varphi'(N) = N$. Si $\underline{dim}\ \varphi = (m_1, \cdots, m_r, n_1, \cdots, n_r)$ definimos el vector $c(M) = \underline{dim}\ \varphi$, similarmente $c(N) = \underline{dim}\ \varphi'$.

Sea $\delta(M, N) = dim_k Hom_\Lambda(N, DtrM) - dim_k Hom_\Lambda(topM, socDtrN)$.

Proposición 12. $\left\langle\varphi,\varphi'\right\rangle=\delta(M,N)$ *donde* $\left\langle\varphi,\varphi'\right\rangle=dim_kHom_{D(\Lambda)}(\varphi,\varphi')-B(\varphi,\varphi')$

Demostración. Sea $P_0(M)=\amalg_{i=1}^r n_iP_i$, $P_1(M)=\amalg_{i=1}^r m_iP_i, P_0(N)=\amalg_{i=1}^r n_i'P_i$, $P_1(N)=\amalg_{i=1}^r m_i'P_i$.

Denotemos $\langle M,Z\rangle=dim_kHom_\Lambda(M,Z)$, para $Z\in mod(\Lambda)$, por [*ARS*, *IV*.4.3] tenemos,

$$\langle M,Z\rangle-\langle Z,DtrM\rangle=\langle P_0(M),Z\rangle-\langle P_1(M),Z\rangle.$$

Sea $Z=N$, entonces,

$$\langle M,N\rangle-\langle N,DtrM\rangle=\langle P_0(M),N\rangle-\langle P_1(M),N\rangle.$$

De la sucesión exacta $0\to\Omega N\to P_0(N)\to N\to 0$ se tiene la sucesión exacta

$$0\to\langle P_i(M),\Omega N\rangle\to\langle P_i(M),P_0(N)\rangle\to\langle P_i(M),N\rangle\to 0$$

lo cual implica,

$$\langle P_i(M),\Omega N\rangle-\langle P_i(M),P_0(N)\rangle+\langle P_i(M),N\rangle=0,\ i=0,1.$$

De manera similiar

$$0\to\Omega^2N\to P_1(N)\to\Omega N\to 0$$

implica,

$$\langle P_i(M),\Omega^2N\rangle-\langle P_i(M),P_1(N)\rangle+\langle P_i(M),\Omega N\rangle=0,\ i=0,1.$$

Las siguientes afirmaciones se demuestran siguiendo los cálculos hechos por Juan Boza, para demostrar esta misma afirmación en el caso particular de que $M=N$.

1. $\langle P_1(M),P_0(N)\rangle=dim_kradHom_\Lambda(P_1(M),P_0(N))+\sum_{i=1}^r m_in_i'$
2. $\langle P_0(M),P_0(N)\rangle=dim_kradHom_\Lambda(P_0(M),P_0(N))+\sum_{i=1}^r n_in_i'$
3. $\langle P_1(M),P_1(N)\rangle=dim_kradHom_\Lambda(P_0(M),P_0(N))+\sum_{i=1}^r m_im_i'$.
4. $B(\varphi,\varphi')=\langle P_1(M),P_1(N)\rangle+\langle P_0(M),P_0(N)\rangle-dim_kradHom_\Lambda(P_1(M),P_0(N))$.
5. $dim_kHom_{D(\Lambda)}(\varphi,\varphi')=\langle M,N\rangle+\langle P_0(M),\Omega N\rangle+\langle P_1(M),\Omega^2N\rangle$
6. $\sum m_in_i'=\langle topM,socDtrN\rangle$

Aplicando estas relaciones tenemos:

$$\begin{aligned} -\left\langle \varphi,\varphi' \right\rangle &= B(\varphi,\varphi') - dim_k Hom_{D(\Lambda)}(\varphi,\varphi') \\ &= [\langle P_1(M), P_1(N)\rangle - \langle P_1(M), \Omega^2 N\rangle] \\ &+ [\langle P_0(M), P_0(N)\rangle - \langle P_0(M), \Omega N\rangle] \\ &- dim_k radHom_\Lambda(P_1(M), P_0(N)) - \langle M, N\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\left\langle \varphi,\varphi' \right\rangle &= [\langle P_1(M), \Omega(N)\rangle + \langle P_0(M), N\rangle] \\ &- dim_k radHom_\Lambda(P_1(M), P_0(N)) - \langle M, N\rangle \\ &= [\langle P_0(M), N\rangle - \langle M, N\rangle] \\ &+ \langle P_1(M), \Omega(N)\rangle - dim_k radHom_\Lambda(P_1(M), P_0(N)) \\ &= [\langle P_1(M), N\rangle - \langle N, DtrM\rangle] \\ &+ \langle P_1(M), \Omega(N)\rangle - dim_k radHom_\Lambda(P_1(M), P_0(N)) \\ &= [\langle P_1(M), N\rangle + \langle P_1(M), \Omega(N)\rangle] \\ &- \langle N, DtrM\rangle - dim_k radHom_\Lambda(P_1(M), P_0(N)) \\ &= \langle P_1(M), P_0(N)\rangle - dim_k radHom_\Lambda(P_1(M), P_0(N)) - \langle N, DtrM\rangle \\ &= \sum m_i n_i' - \langle N, DtrM\rangle = \langle topM, socDtrN\rangle - \langle N, DtrM\rangle \end{aligned}$$

■

Como ya lo habiamos mencionado, si $M = N$ tenemos $\Delta(\varphi') = \delta(M, M)$.

Definición 13. *Una familia genérica de módulos de una álgebra Λ, es una familia uno paramétrica Υ de módulos homogéneos quasisimples de $mod\Lambda$.*

Definición 14. *Decimos que Υ es una familia genérica rizada, si existe una colección infinita de familias genéricas $\Upsilon = \Upsilon_1, \cdots, \Upsilon_u, \cdots$ tal que si $M \in \Upsilon_i$, $N \in \Upsilon_j$, $\delta(M, N) \geq min\{i, j\}$.*

Como $\delta(M, N) = \left\langle \varphi, \varphi' \right\rangle$ tenemos una relación uno a uno entre las familias genéricas rizadas de representaciones del bocs $D(\Lambda)$ y las familias genéricas rizadas de módulos del álgebra Λ.

Sea $C(i) = \{M \in ind\Lambda \mid \delta(M, M) = i\}$. Entonces tenemos los siguientes resultados para álgebras mansas equivalentes a los que hemos demostrado para bocses mansos, el paso de uno a otro es posible por la proposición que acabamos de demostrar.

Teorema 15. *Sea Λ un álgebra mansa supongamos que no existen familias genéricas rizadas ni módulos no homogéneos en la categoría de representaciones de Λ, entonces para toda u, la familia $C(u)$ es parametrizable y de crecimiento polinomial.*

Definición 16. *El álgebra Λ se llama $\epsilon-$ acotada si existe $b > 0$ tal que $\frac{\dim_k End_A(M)}{q(M)^2} < b$ para todo M homogéneo.*

Corolario 17. *Sea Λ mansa , $\epsilon-$ acotada y supongamos que no existen módulos no homogéneos en la categoría de representaciones de Λ , entonces Λ es de crecimiento polinomial.*

Teorema 18. *Sea Λ mansa, y supongamos que existe un natural N tal que para cada dimensión $\underline{d}$ el número de familias genéricas rizadas y representaciones no homogéneas del álgebra es menor que N, entonces para toda u, la familia $C(u)$ es parametrizable de crecimiento polinomial.*

Corolario 19. *Sea Λ mansa , $\epsilon-$ acotada y supongamos que existe un natural N tal que para cada dimensión $\underline{d}$ el número de módulos no homogéneos es menor que N, entonces Λ es de crecimiento polinomial.* ■

El carcaj de traslación Γ.

Consideremos el àlgebra $k[x]_{h(x)}$, sus representaciones inescindibles están dadas por $J_{n,\lambda}$ con $J_{n,k} = k^n$, $J_{n,\lambda} =$ la matriz de Jordan de tamaño n con valor propio λ, es decir,

$$J_{n,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Consideremos la suma $J_{1,\lambda} \oplus J_{2,\lambda} \oplus \cdots \oplus J_{l,\lambda}$. Con el fín de estudiar el álgebra de endomorfismos de la suma anterior, $End_{k[x]_{h(x)}}(J_{1,\lambda} \oplus J_{2,\lambda} \oplus \cdots \oplus J_{l,\lambda})$ vamos a introducir el siguiente carcaj de traslación Γ.

1. Los vértices de $\Gamma = \{1, 2, \cdots, n_l\}$ donde $n_l = \frac{l(l+1)}{2}$. Es claro que toda $j \in V(\Gamma)$ puede expresarse de manera única como $j = n_u - k$ con $1 \le u \le l, 0 \le k \le u-1$.
2. Si $n_{u+1} - k$ y $n_u - k$ son vértices de Γ pondremos una flecha $n_{u+1} - k \to n_u - k$. Similarmente si $n_u - k$ y $n_{u+1} - (k+1)$ son vértices de Γ pondremos una flecha $n_u - k \to n_{u+1} - (k+1)$.
3. Los elementos inyectivos de Γ son los vértices $q_u = n_u - (u-1)$.
4. Los elementos proyectivos de Γ son los vértices $p_u = n_u$.
5. Si $n_u - k$ no es proyectivo definimos su trasladado, $\sigma(n_u - k) = n_u - (k-1)$.
6. Si $n_u - k$ no es inyectivo se define $\sigma^{-1}(n_u - k) = n_u - (k+1)$.

Para $1 \le u \le l$, la órbita de u, $o(u) = \{n_u - k \mid 0 \le k \le u-1\}$. Si γ_1, γ_2 son dos caminos en Γ con $i(\gamma_1) = i(\gamma_2)$ y $f(\gamma_1) = f(\gamma_2)$, decimos que $\gamma_1 = \gamma_2$. Los caminos orientados en Γ tienen las siguientes propiedades:

1. Si $\alpha : r \to s$ es una flecha de Γ y s no es inyectivo, entonces r no es inyectivo y $\sigma^{-1}\alpha : \sigma^{-1}r \to \sigma^{-1}s$ es una flecha en Γ.
2. Si $\alpha : r \to s$ es una flecha de Γ y r no es proyectivo, entonces s no es proyectivo y $\sigma\alpha : \sigma r \to \sigma s$ es una flecha en Γ.
3. Si $\gamma : r \to y_1 \to \cdots \to y_m \to s$ es un camino en Γ y s no es inyectivo, entonces $r, y_1, \cdots, y_m$ no son inyectivos y $\sigma^{-1}\gamma : \sigma^{-1}r \to \sigma^{-1}y_1 \to \cdots \to \sigma^{-1}y_m \to \sigma^{-1}s$ es un camino en Γ.

4. Si $\gamma : r \to y_1 \to \cdots \to y_m \to s$ es un camino en Γ y r no es proyectivo, entonces $y_1, \cdots, y_m, s$ no son proyectivos y $\sigma\gamma : \sigma r \to \sigma y_1 \to \cdots \to \sigma y_m \to \sigma s$ es un camino en Γ.

Definición 1. *Si r no es inyectivo, denotamos por ρ_r al camino $r \to y \to \sigma^{-1}r$, en donde $r \to y$, $y \to \sigma^{-1}r$ son flechas en Γ.*

Lema 2. *Sea $\gamma : \sigma^{-1}r \to \cdots \to s$ un camino en Γ. Entonces $\gamma\rho_r = \rho_{\sigma s}\sigma\gamma$.*

Demostración.

Como $\sigma^{-1}r$ no es proyectivo, s tampoco y $\sigma\gamma \in \Gamma$, por lo tanto,

$$\begin{array}{rcccccccccc} \gamma\rho_r = & r & \to & l & \to & \sigma^{-1}r & \to & \cdots & \to & s \\ \rho_{\sigma s}\sigma\gamma = & r & \to & \cdots & \to & \sigma s & \to & l' & \to & s \end{array}$$

■

Definición 3. *Dos caminos γ_1 y γ_2 en Γ se dicen equivalentes ($\gamma_1 \sim \gamma_2$) si existe $u \in Z$, tal que $\gamma_1 = \sigma^u\gamma_2$.*

Sea $C(\Gamma) = \left\{\underline{\gamma} \mid \underline{\gamma} \text{ es una clase de equivalencia de caminos en } \Gamma\right\}$. Si $\underline{\gamma} \in C(\Gamma)$ y $\gamma : i \to j$ pondremos $\underline{\gamma}$: $o(r) \to o(s)$.

Claramente si $\underline{\gamma} \in C(\Gamma)$, $\underline{\gamma}$: $o(r) \to o(s)$ y $r \in o(i)$ existe a lo más una $\gamma \in \underline{\gamma}$ con $i(\gamma) = r$. Además por cada $\underline{\gamma} : o(i) \to o(j)$ existe una única γ tal que $i(\gamma) = n_i$.

Los $k\left[x\right]_{h(x)}$ -módulos asociados a Γ.

Sea $V = \amalg_{r\in\Gamma}kr$. La acción de x en V está dada por $\overline{x}.r = \sigma^{-1}r$ si r no es inyectivo y $\overline{x}.r = 0$ si r es inyectivo, con $\overline{x} = (x - \lambda)$. $V = \amalg_{i=1}^{l} V_i$ en donde cada $V_i = \amalg_{r\in o(i)}kr$ es un $k\left[x\right]_{h(x)}$-módulo.

Si escogemos $q_i, \sigma q_i, \cdots, \sigma^{i-1}q_i$ como la base de V_i, la acción de x está dada por $J_{i,\lambda}$. Por lo tanto, $V_i = J_{i,\lambda}$ y $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l = J_{1,\lambda} \oplus \cdots \oplus J_{l,\lambda}$.

Sea $\underline{\gamma} \in C(\Gamma)$, entonces $\underline{\gamma}$ define una función $f_{\underline{\gamma}} : V \to V$ definida en la base de elementos $r \in \Gamma$ como sigue:

$$f_{\underline{\gamma}}(r) = \begin{cases} \text{final de } \gamma & \text{si existe } \gamma \in \underline{\gamma} \text{ tal que } i(\gamma) = r \\ 0 & \text{si no existe } \gamma \in \underline{\gamma} \text{ tal que } i(\gamma) = r \end{cases}$$

En particular, $f_{\underline{\rho_r}}(r) = \overline{x}r$.

Proposición 4. *Los morfismos* $f_{\underline{\gamma}}$ *con* $\underline{\gamma} \in C(\Gamma)$ *son* $k\,[x]_{h(x)}$*-endomorfismos de* V *y forman una* k *-base de* $End_{k[x]_{h(x)}}(V)$.

Demostración.

1. $f_{\underline{\gamma}}$ es un $k\,[x]_{h(x)}$-morfismo.

$$\begin{aligned} f_{\underline{\gamma}}(\overline{x}.r) &= f_{\underline{\gamma}} f_{\underline{\rho_r}}(r) = f_{\underline{\gamma\rho_r}}(r) \\ &= f_{\underline{\rho_{\sigma s}\sigma\gamma}}(r) = f_{\underline{\rho_s}}(f_{\underline{\gamma}}r) \\ &= \overline{x} f_{\underline{\gamma}}(r) \end{aligned}$$

2. Los elementos $f_{\underline{\gamma}}$ son $k-$linealmente independientes.

   Supongamos que $0 = \sum_{\underline{\gamma}} c_{\underline{\gamma}} f_{\underline{\gamma}}$. Sea $\underline{\gamma_0} : o(i) \to o(j)$, $\gamma_0 \in \underline{\gamma_0}$, $\gamma_0 : r \to s$, $r \in o(i)$, $s \in o(j)$. Entonces $0 = \sum_{\underline{\gamma}} c_{\underline{\gamma}} f_{\underline{\gamma}}(r) = \sum_{\underline{\gamma}} c_{\underline{\gamma}} s' = 0$ con s' final de $\gamma \in \underline{\gamma}$ tal que $i(\gamma) = r$.

   Como las $\underline{\gamma}$ son diferentes si $\underline{\gamma_1} \neq \underline{\gamma_2}$ y $\gamma_1 \in \underline{\gamma_1}$, $\gamma_2 \in \underline{\gamma_2}$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, $i(\gamma_1) = i(\gamma_2) = r$ por lo tanto $f(\gamma_1) \neq f(\gamma_2)$ y las s' son distintas. En consecuencia cada $c_{\underline{\gamma}} = 0$, en particular $c_{\underline{\gamma_0}} = 0$.

3. Los elementos $f_{\underline{\gamma}}$ generan al espacio $End_{k[x]_{h(x)}}(V)$.

   Sea $f \in End_{k[x]_{h(x)}}(V)$, $p_1, p_2, \cdots, p_l$ los vértices proyectivos del carcaj de traslación Γ. Cada $p_i = \sigma^{i-1} q_i$ por lo que $x^v p_i = 0$ para $v > i - 1$, entonces $x^v f(p_i) = f(x^v p_i) = 0$ implica $f(p_i) = \sum c_{s,i} \sigma^{s-1} q_s$ con $s \leq i$.

   Para cada $\sigma^{s-1} q_s$ con $s \leq i$, existe un camino $\gamma_{s,i} : p_i \to \sigma^{s-1} q_s$ tal que $\sigma^{s-1} q_s = f_{\gamma_{s,i}}(p_i)$ por lo tanto $f(p_i) = \sum c_{s,i} f_{\gamma_{s,i}}(p_i)$ y podemos poner $f(p_i) = \sum c_{s,j} \gamma_{s,j}(p_i)$. Si ponemos $c_{(s,j)} = c_{f_{\gamma j}}$ tenemos que $f(p_i) = \sum_{\underline{\gamma} \in c(\Gamma)} c_{\underline{\gamma}} f_{\gamma}(p_i)$ para cada p_i.

   Pero todo $r \in \Gamma$ es de la forma $r = \sigma^{-s} p_i = \overline{x}^s p_i$ para alguna s y alguna i. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} f(r) &= f(\overline{x}^s p_i) = \overline{x}^s f(p_i) \\ &= \sum c_{\underline{\gamma}} \overline{x}^s f_{\underline{\gamma}}(p_i) = \sum c_{\underline{\gamma}} f_{\underline{\gamma}}(\overline{x}^s p_i) \\ &= \sum c_{\underline{\gamma}} f_{\underline{\gamma}}(r) \end{aligned}$$

   por lo tanto $f = \sum c_{\underline{\gamma}} f_{\underline{\gamma}}$. ■

Obsérvese que $Hom_{k[x]_{h(x)}}(V_i, V_j)$ tiene por $k-$base a los elementos $f_{\underline{\gamma}}$ con $\underline{\gamma}$: $o(i) \to o(j)$.

En lo que sigue veremos cuáles son las γ con $\gamma : o(i) \to o(j)$. Usaremos la siguiente notación, si $\gamma : r \to s$ es un camino en Γ y s no es inyectivo, $x\gamma$ es el camino $\rho_s\gamma$. Por inducción definimos $x^u\gamma = x(x^{u-1}\gamma)$. Nótese que todos los elementos pertenecientes a una clase $\underline{\gamma}$ en $c(\Gamma)$ tienen la misma longitud, por lo tanto $l(\underline{\gamma}) = l(\gamma)$ con $\gamma \in \underline{\gamma}$.

Afirmación: Sea $\underline{\gamma_0}$ la clase en $c(\Gamma)$ de $o(i) \to o(j)$ con $l(\underline{\gamma_0})$ mínima. Si $s = min(i, j)$, entonces:

Lema 5. 1. *Los elementos en $c(\Gamma)$ de $o(i)$ a $o(j)$ son $\underline{\gamma_0}, x\underline{\gamma_0}, \cdots, x^{s-1}\underline{\gamma_0}$;*

2. *Sea $f \in Hom_{k[x]_{h(x)}}(V_i, V_j)$ con $f = c_0 f_{\gamma_0} + c_1 f_{x\gamma_o} + \cdots + c_{s-1} f_{x^{s-1}\gamma_o}$. La matriz T_f con respecto a las bases escogidas tiene la forma:*

   (a) para $i > j$ $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{j-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_0 & \cdots & c_{j-2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 \end{pmatrix}$

   (b) para $i < j$ $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{i-1} \\ 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{i-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

   (c) para $i = j$ $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{i-1} \\ 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{i-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 \end{pmatrix}$

■

El unravelling de un bocs local no trivial.

Sea $\mathcal{A}$ un bocs local no trivial, es decir, $R = k\,[x]_{f(x)}$, sean $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ y $v_1 < \cdots < v_n$ las flechas de grado cero y grado uno, respectivamente. Sea $\delta(\alpha_1) = \sum_{i=1}^{n} r_i(x,y)v_i$ donde $r_i(x,y) = \sum c_{i,j}x^iy^j$ y $y^jv_k = v_kx^j$. Sea $\lambda \in k$, tal que $f(\lambda) \neq 0$, $J_\lambda(n) =$ matriz de Jordan con valor propio λ de tamaño $n \times n$ y $J_\lambda(1,\cdots,n) = J_\lambda(1) \oplus \cdots \oplus J_\lambda(n)$.

Consideremos el carcaj de traslación Γ definido en la sección anterior de tamaño n, entonces tenemos (ver descripción de unravelling en general) que

$$\delta'((\alpha_i)_{s,t}) = \textstyle\sum_{s<r} x_{s,r}a_{r,t} - \sum_{r<t} a_{s,r}x_{r,t} + \left[A_{\delta(\alpha_i)}\right]_{s,t}.$$

Si $s = n_u$ (e.d., es el proyectivo maximal) y $t = n_u - (u-1)$ (e.d., es el inyectivo minimal), entonces $\delta'((\alpha_1)_{s,t}) = \left[A_{\delta(\alpha_1)}\right]_{s,t}$.

Por $[BZ]$ sabemos que $\left[A_{\delta(\alpha 1)}\right]_{s,t} = \sum a_{u,v}J_\lambda(1,\cdots,n)^u(V)_{i,j}J_\lambda(1,\cdots,n)^v$ por lo que calcularemos explícitamente $J_\lambda(1,\cdots,n)^u(V)_{s,t}J_\lambda(1,\cdots,n)^v$.

Si $g(\lambda)$ es un polinomio en λ usaremos la siguiente notación:

$$g(\lambda)^{(l)} = \begin{cases} \frac{d^l}{d\lambda^l}(\frac{1}{l}g(\lambda) & l > 0 \\ \\ g(\lambda) & l = 0 \end{cases}$$

Por otro lado,

$$J_\lambda(1,\cdots,n)^u = \begin{pmatrix} J_\lambda(1)^u & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_\lambda(2)^u & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_\lambda(n)^u \end{pmatrix}$$

y

$$J_\lambda(s)^u = \begin{pmatrix} \lambda^u & (\lambda^u)^{(1)} & \cdots & (\lambda^u)^{(s-1)} \\ 0 & \lambda^u & \cdots & (\lambda^u)^{(s-2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^u \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si $(z_{r,t}) = J_\lambda(1,\cdots,n)^u$, $z_{r,t} \neq 0$ si y sólo si $t = \sigma^{-l}(r)$ para alguna $l \geq 0$ y en tal caso $z_{r,\sigma^{-l}(r)} = (\lambda^u)^{(l)}$. En consecuencia si $J_\lambda(1,\cdots,n)^u V = (d_{l,r})$ donde

$$d_{l,r} = \sum_w z_{l,w}(V)_{w,r} = \sum_{k\geq 0} z_{l,\sigma^{-k}(l)} V_{\sigma^{-k}(l),r}$$

tenemos que $(a_{l,r}) = J_\lambda(1,\cdots,n)^u V J_\lambda(1,\cdots,n)^v$ está dada por ,

$$\begin{aligned} a_{l,r} &= \sum d_{l,\sigma^w(r)} z_{\sigma^w(t),t} \\ &= \sum_{k\geq 0} z_{l,\sigma^{-k}(l)} V_{\sigma^{-k}(l),\sigma^w(t)} z_{\sigma^w(t),t} \\ &= \sum V_{\sigma^{-k}(l),\sigma^w(t)} (\lambda^u)^{(k)} (\lambda^v)^{(w)} \end{aligned}$$

De donde se obtiene explícitamente que,

$$\begin{aligned} \delta'((\alpha_1)_{s,t}) &= \left[A_{\delta(\alpha 1)}\right]_{s,t} \\ &= \sum_{u,v} c_1^{u,v} \tfrac{1}{uv} d_x^u d_y^v r_{1,j}(\lambda,\lambda)(V_1)_{\sigma^{-u}(s),\sigma^v(t)} \\ &= r_{1,1}(\lambda,\lambda)(V_1)_{s,t} = (V_1)_{s,t} \end{aligned}$$

Relación entre $B_\mathcal{A}(t_F(e_i), t_F(e_j))$ y $B_\mathcal{B}(e_i,e_j)$

Recordemos que si $\mathcal{A}$ es un bocs, $M \in Rep\mathcal{A}$ y $\underline{dim}M = \underline{x} \in K_0(\mathcal{A})$, entonces tenemos definida la forma quadrática de $\mathcal{A}$ de la siguiente manera:

$$q(\underline{x}) = \sum x_i^2 - \sum_{i,j} m_{ij}x_ix_j + \sum_{ij} n_{ij}x_ix_j$$

donde m_{ij} = número de flechas de grado cero de i a j, n_{ij} = número de flechas de grado uno de i a j.

Asociada a la forma cuadrática, para $\underline{x} = \underline{dim}M$ y $\underline{y} = \underline{dim}N$ tenemos la siguiente forma bilineal:

$$B(\underline{x},\underline{y}) = \sum x_iy_i - \sum_{i,j} m_{ij}x_iy_j + \sum_{ij} n_{ij}x_iy_j.$$

Por otro lado, habiamos definido el número $\Delta(M) = \dim_k End_\mathcal{A}(M) - q_\mathcal{A}(\underline{\dim}M)$, que ahora generalizamos para dos representaciones M y N como,

$$\langle M,N\rangle = \dim_k Hom_\mathcal{A}(M,N) - B_\mathcal{A}(\underline{\dim}M, \underline{\dim}N)$$

Observemos que en particular $\langle M,M\rangle = \Delta(M)$.

Supongamos que $\mathcal{B}$ se obtiene de $\mathcal{A}$ haciendo un unravelling de tamaño u, en el vértice 1, sean $z_1,\cdots,z_u$ los nuevos vértices, $e_1, e_{z_1},\cdots,e_{z_u}, e_2,\cdots,e_r$ los vectores de la base canónica para $N^{r+u} = K_0(\mathcal{B})$ y $f_1,\cdots,f_r$ para $N^r = K_0(\mathcal{A})$. Entonces la función $t_F : N^{r+u} \to N^r$ definida en el capítulo dos está dada de la siguiente manera:

$$t_F(e_i) = \begin{cases} f_i & i = 1, 2, \cdots, r \\ jf_1 & i = z_j, j = 1, \cdots, u \end{cases}$$

Si $\alpha, \beta \in K_0(\mathcal{B})$, definimos la siguiente forma bilineal

$$\varphi(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{u} i\alpha_{z_i}\beta_{z_i} + \sum_{i=1, i<j}^{u} i(\alpha_{z_i}\beta_{z_j} + \alpha_{z_j}\beta_{z_i}).$$

Si m'_{ij} = número de flechas de grado cero del vértice i al vértice j en el bocs $\mathcal{B}$, tenemos,

$$m'_{ij} = \begin{cases} m_{ij} & i = x_s \text{ y } j = x_t \\ km_{1j} & i = z_k \text{ y } j = x_t \\ km_{i1} & i = x_s \text{ y } j = z_k \\ st(m_{11} - 1) & i = z_s \text{ y } j = z_t \end{cases}$$

Si n'_{ij} = número de flechas de grado cero del vértice i al vértice j en el bocs $\mathcal{B}$, tenemos,

$$n'_{ij} = \begin{cases} n_{ij} & i = x_s \text{ y } j = x_t \\ kn_{1j} & i = z_k \text{ y } j = x_t \\ kn_{i1} & i = x_s \text{ y } j = z_k \\ stn_{11} + min\{i, j\} & i = z_s \text{ y } j = z_t \end{cases}$$

Por comodidad, denotemos $(e_i)_j = e_i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Lema 6. $B_{\mathcal{A}}(t_F(e_i), t_F(e_j)) = B_{\mathcal{B}}(e_i, e_j) - \varphi(e_i, e_j)$.

Demostración.

Supongamos que $e_i = e_{x_i}, e_j = e_{x_j}$ entonces,

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{A}}(t_F(e_i), t_F(e_j)) &= B_{\mathcal{A}}(f_i, f_j) \\ &= f_i f_j - m_{ij} + n_{ij} \\ &= e_i e_j - m'_{ij} + n'_{ij} \\ &= B_{\mathcal{B}}(e_i, e_j) \end{aligned}$$

Supongamos que $e_i = e_{x_i}, e_j = e_{z_j}$ entonces,

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{A}}(t_F(e_i), t_F(e_j)) &= B_{\mathcal{A}}(f_i, jf_1) \\ &= -jm_{i1} + jn_{i1} \\ &= -m'_{i1} + n'_{i1} \\ &= B_{\mathcal{B}}(e_i, e_j) \end{aligned}$$

Similarmente tenemos que si $e_i = e_{z_i}, e_j = e_{x_j}$ entonces $B_{\mathcal{A}}(t_F(e_i), t_F(e_j)) = B_{\mathcal{B}}(e_i, e_j)$.

Finalmente, supongamos que $e_i = e_{z_i}$ y $e_j = e_{z_j}$, $i \neq j$ entonces,

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{A}}(t_F(e_i), t_F(e_j)) &= B_{\mathcal{A}}(if_1, jf_1) \\ &= ij - ijm_{11} + ijn_{11} \\ B_{\mathcal{B}}(e_i, e_j) &= -m'_{ij} + n'_{ij} \\ &= -ij(m_{11} - 1) + ijn_{11} + min\{i, j\} \end{aligned}$$

Observemos que si $i \neq j$, $i < j$, $\varphi(e_i, e_j) = i = min\{i, j\}$, si $i > j$, $\varphi(e_i, e_j) = j$.

Si $i = j$ entonces,

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{A}}(t_F(e_i), t_F(e_i)) &= B_{\mathcal{A}}(if_1, if_1) \\ &= i^2 - i^2 m_{11} + i^2 n_{11} \\ B_{\mathcal{B}}(e_i, e_i) &= -m'_{ii} + n'_{ii} \\ &= -i^2(m_{11} - 1) + i^2 n_{11} + i \end{aligned}$$

En este caso, $\varphi(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{u} i e_i e_i = i$. Por lo tanto, hemos demostrado que en cualquier situación, $B_{\mathcal{A}}(t_F(e_i), t_F(e_j)) = B_{\mathcal{B}}(e_i, e_j) - \varphi(e_i, e_j)$.

■

Bibliografía

[*ARS*] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalo. "Representation Theory of Artin Algebras", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[*B*] J. Boza. "Algoritmos de reducción en la teoría de representaciones de coálgebras", Tesis de Doctorado, UNAM, México, 1996.

[*BZ*] Bautista-Zuazua. "Morita equivalence and reduction algorithms for representations of coalgebras", Canadian Math. Soc., Conference Proc., Vol 18, 1996.

[*CB*1] W.W. Crawley-Boevey. "On tame algebras and bocses", Proc. London Math. Soc. 3(56), 1988.

[*CB*2] W.W. Crawley-Boevey. "Matrix problems and Drozd′*s* theorem", Topics in Algebra, Banach Center Publ., Vol 26, Part 1, Warsaw, 1990.

[*D*1] Y.A. Drozd. "Tame and wild matrix problems", Representation Theory II, Lecture Notes in Mathematics 832, Springer, 1980.

[*D*2] Y.A. Drozd. "Tame and wild matrix problems", Amer. Math. Soc. Transl. (2), Vol 128, 1986.

[*GNRSV*] P. Gabriel, L.A. Nazarova, A.V. Roiter, V.V. Sergeichuk, D. Vossieck. "Tame and wild subspace problems", Ukrainan Math. Journal 45, 1993.

[*H*] J. Harris. "Algebraic Geometry", Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 133, 1992.

[*M*] G. Montaño. "Caracterización de bocses de dimensión finita de tipo manso", Tesis de Maestría, UNAM, México, 1993.

[*KR*1] M.M. Kleiner,A.V. Roiter. "Representations of Differential Graded Categories. Matrix problems", Math Inst. of the Academy of Sciences, USSR, 1977.

[*KR*2] M.M. Kleiner,A.V. Roiter. "Representations of Differential Graded Categories", Lectures Notes in Mathematics 488, Springer, 1975.

[*LRS*] F. Larrión, G. Raggi, L. Salmerón. "Rudimentos de mansedumbre y salvajismo en teoría de representaciones", Aportaciones Matemáticas, SMM, 1995.

[*R*] A.V. Roiter. "Matrix problems and Representation of Bocs′*s*", Representation Theory I, Lectures Notes in Mathematics 831, Springer, Berlin 1980.