



Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Posgrado en Ciencias Físicas

00362

1  
Lej-

# Sintonización de un sistema de Bombeo por Energía de Oleaje

Tesis presentada por

Ramiro Godoy Diana

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias (Física)

Jurado

Presidente: Dr. Steven Czitrom Baus (Director de tesis)

Secretario: Dr. Guillermo Monsivais Galindo

Vocal: Dr. Antonmaría Minzoni Allesio

Vocal: Dr. Ramón Peralta Fabi

Vocal: Dr. Victor Romero Rochín

Suplente: Dr. Arturo Olvera Chávez

Suplente: Dra. Catalina Stern

México D.F., Marzo 1999

273A61

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Sintonización de un sistema de bombeo por  
energía de oleaje

Ramiro Godoy Diana  
rgodoy@mar.icmyl.unam.mx

## Resumen

Se analizan en este trabajo los diversos factores que afectan a la sintonización de un sistema de bombeo por energía de oleaje que funciona por resonancia. El sistema está constituido por una columna de agua oscilante que comprime y descomprime armónicamente el aire en una cámara y su funcionamiento es óptimo en resonancia, cuando la frecuencia natural de oscilación del sistema coincide con la frecuencia del oleaje que sirve como excitación. Se construye un modelo matemático que describe al sistema y se comparan los resultados de una simulación numérica basada en este modelo con datos obtenidos en experimentos con un modelo a escala en estanque de olas. Se hace un análisis dimensional para validar el uso de las conclusiones obtenidas para el modelo a escala en una aplicación real. Se construyen a partir de datos obtenidos con la simulación numérica, ecuaciones para predecir el volúmen de aire en la cámara de compresión que determina una condición de resonancia, así como para el flujo máximo esperable, en función del período y la amplitud de una ola monocromática y de la marea. Se desarrolla un criterio de sintonización para condiciones de oleaje policromático que tiene aplicación en el control de un sistema de tamaño real.

# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Teoría.</b>	<b>6</b>
2.1	Ecuaciones de Movimiento para un fluido. . . . .	6
2.1.1	Principios de Conservación. . . . .	7
2.1.2	Ecuaciones constitutivas. . . . .	10
2.1.3	Ecuaciones de Navier-Stokes. . . . .	12
2.1.4	Ecuación de Bernoulli. . . . .	13
2.2	Análisis dimensional. . . . .	14
2.2.1	El teorema $\Pi$ de Buckingham. . . . .	15
2.2.2	Números adimensionales en fluidos. . . . .	15
<b>3</b>	<b>Sistema de Bombeo.</b>	<b>17</b>
3.1	Descripción. . . . .	17
3.1.1	Fase de no bombeo. . . . .	18
3.1.2	Fase de bombeo. . . . .	25
3.2	Soluciones. . . . .	28
3.2.1	Análisis dimensional de las ecuaciones. . . . .	28
3.2.2	Sistema Linealizado. . . . .	32
3.2.3	Términos No Lineales. . . . .	35
3.2.4	Solución Numérica. . . . .	39
<b>4</b>	<b>Experimentos.</b>	<b>49</b>
4.1	Pruebas con un modelo a escala del sistema de bombeo. . . . .	49
4.1.1	Forzamiento monocromático. . . . .	51
4.1.2	Forzamiento policromático. . . . .	56
4.2	Chorro de agua a la salida de un tubo vertical. . . . .	62

<b>5 Sintonización.</b>	<b>65</b>
5.1 Sintonización a Oleaje Monocromático. . . . .	66
5.1.1 Sintonización lineal. . . . .	66
5.1.2 Corrimiento en la frecuencia de resonancia debida a términos no lineales. . . . .	67
5.1.3 Efecto del bombeo sobre la sintonización. . . . .	70
5.1.4 Obtención numérica de un algoritmo de sintonización. .	71
5.2 Sintonización a Oleaje Policromático. . . . .	77
5.2.1 Respuesta del sistema. . . . .	77
5.2.2 Criterios de sintonización para oleaje policromático. . .	79
<b>6 Conclusiones.</b>	<b>86</b>

# Lista de Figuras

1.1	Diagrama del sistema de bombeo por energía de oleaje. . . . .	4
3.1	Diagrama esquemático del sistema de bombeo. . . . .	18
3.2	La función $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ a lo largo de la línea de corriente A <sub>i</sub> B <sub>i</sub> para el ducto resonante (a) y el de desagüe (b). . . . .	21
3.3	Esquema de la cámara de compresión durante la fase de bombeo	26
3.4	Modelo simplificado para explicar el comportamiento del sistema de bombeo. . . . .	32
3.5	Diagrama de flujo del algoritmo utilizado para simular numéricamente al sistema de bombeo . . . . .	41
3.6	Datos experimentales y numéricos de la altura de agua en el tubo resonante y en la cámara de desagüe. El tamaño de las oscilaciones está normalizado con la amplitud de la ola de forzamiento. . . . .	47
3.7	Curvas de flujo contra volumen de aire en la cámara de compresión para distintos colectores. El flujo está normalizado con el volumen de agua en el ducto que cabe en una amplitud de ola por un período $\mathcal{A}A_R/T$ . El colector está normalizado con la amplitud de la ola y el volumen con la predicción $V_{OLin}$ calculada para el sistema lineal (ver sección 5.1.1). . . . .	48
4.1	Montaje experimental del modelo a escala. . . . .	50
4.2	Diagrama esquemático del modelo a escala probado en estanque de olas. . . . .	50
4.3	Señal de oleaje en el estanque. Trazas de los sensores de altura de la ola y de presión. . . . .	52
4.4	Transformadas de Fourier de las señales de oleaje en el estanque capturadas con los sensores de presión y de altura de la ola. . . . .	53

4.5	Transformadas de Fourier de las señales de: (a) y (b) forzamiento (sensor de presión y de altura de la ola) y de oscilación en el ducto resonante; (c) y (d) oscilación en el desagüe. Se calcularon mediante un procedimiento de FFT con 2048 puntos muestrados cad 0.01 s. . . . .	55
4.6	Trazas de los sensores de forzamiento, altura de agua en ductos resonante y desagüe (cámara) y flujo en un experimento con oleaje policromático. . . . .	58
4.7	Transformadas de Fourier de la señal de la ola (a) y de las señales en los ductos resonante (b) y de desagüe (c). . . . .	60
4.8	Flujo acumulado contra volumen de sintonización para distintos colectores en un experimento con oleaje policromático. . . . .	61
4.9	Diagrama esquemático del dispositivo experimental para medir la altura de un chorro vertical. . . . .	63
5.1	Amplificación de la señal de forzamiento en el ducto resonante contra volumen de la cámara de compresión normalizado con la predicción lineal $V_{0Lin}$ para distintas amplitudes de la ola. . . . .	69
5.2	Valores del volumen resonante obtenidos con el modelo numérico contra los que predice la ecuación de regresión . . . . .	73
5.3	Gráficas del volumen resonante en función de: (a) período de la ola y de la marea; (b) amplitud y período de la ola. . . . .	74
5.4	Gráficas del flujo resonante a través de la bomba ( $Q_0$ ) en función de: (a) período y amplitud de la ola (sin marea $T_d = 0$ ) y (b) período de la ola y marea (para un amplitud de ola constante de 0.09 m) . . . . .	76
5.5	Transformadas de Fourier de los datos experimentales para las oscilaciones en los ductos y el forzamiento. Se muestran cuatro pruebas en las mismas condiciones, donde sólo se modificó el volumen de aire en la cámara de compresión. . . . .	78
5.6	Curvas de flujo acumulado contra volumen de aire en la cámara de compresión para experimentos realizados con dos forzamientos distintos. En (a) las cuatro componentes principales fueron de 1.8, 2, 2.2 y 2.4 segundos; en (b) de 2, 2.15, 2.3 y 2.45 s. Las líneas rojas indican las predicciones del modelo lineal $V_{0Lin}$ para cada período. Las líneas azules muestran la predicción de $V_0$ obtenida con el modelo numérico para el período más grande de cada caso y tres colectores distintos. . . . .	81

5.7	Transformada de Fourier de la señal de oleaje y gráfica de $Q_0(T)$ correspondiente, cada curva normalizada con respecto a su máximo. . . . .	83
5.8	Valores de flujo contra volumen de aire en la cámara de compresión obtenidos con la simulación numérica, utilizando como forzamiento una señal con componentes de 2 y 2.6 s. . . . .	84

# Capítulo 1

## Introducción.

Entre los distintos sistemas de aprovechamiento de energía de oleaje, existe un tipo de dispositivos (conocidos como sistemas OWC<sup>1</sup>) que funcionan mediante una columna de agua oscilante excitada por el oleaje. Las oscilaciones de la columna de agua se maximizan cuando el sistema está en resonancia con el forzamiento, y de esta manera se obtiene el máximo potencial de aprovechamiento energético. En los dispositivos diseñados para producir electricidad, la columna de agua oscilante comprime una cámara de aire que a su vez mueve la turbina de un generador. La energía utilizable a la salida de las turbinas es incrementada, en algunos casos, aprovechando la mayor amplitud de las oscilaciones de la columna de agua que se registran cuando se mantiene una condición de resonancia con distintas componentes de frecuencia del oleaje. Fuera de resonancia, el uso de mecanismos de control de fase sirve para mejorar el rendimiento. De cualquier modo, en general la eficiencia global es baja principalmente debido a la conversión entre tipos de energía (mecánica y eléctrica).

La eficiencia de los sistemas de energía de oleaje tipo OWC puede ser sustancialmente incrementada si se evita la conversión entre tipos de energía, es decir, si la energía de la oscilación de la columna de agua se utiliza directamente para hacer trabajo mecánico. Por otra parte, el rendimiento también aumenta en forma importante si se consigue mantener una condición de resonancia para las condiciones cambiantes en el oleaje incidente. El objeto de estudio de este trabajo es el Sistema de Bombeo por Energía de Oleaje (SIBEO) desarrollado por Czitrom [5], cuyas aplicaciones potenciales en

---

<sup>1</sup>OWC por sus siglas en inglés: Oscillating Water Column

manejo costero incluyen la acuicultura, el saneamiento de áreas contaminadas y la recuperación de lagunas costeras aisladas como zonas de crianza [6]. El SIBEO aprovecha la energía de las olas sin requerir conversiones de energía, y su rendimiento es optimizado utilizando un mecanismo de sintonización que mantiene al sistema en resonancia con el oleaje. El objetivo particular de este trabajo es la obtención de criterios de sintonización para distintas condiciones de oleaje que sirvan como directivas para mantener la condición resonante. Se analizan los diversos procesos y parámetros involucrados en la sintonización para obtener los algoritmos apropiados para cada situación.

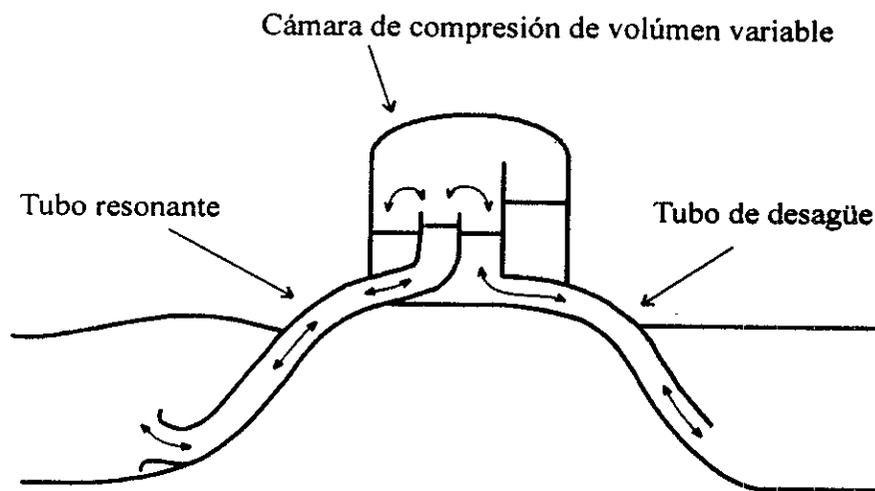


Figura 1.1: Diagrama del sistema de bombeo por energía de oleaje.

Un diagrama esquemático del sistema de bombeo se puede ver en la figura 1.1. La señal de presión inducida por el oleaje en la boca del tubo resonante provoca un flujo oscilante. Con cada ola, el agua se derrama en la cámara de compresión y posteriormente, a través del tubo de desagüe, llega al cuerpo de agua receptor. El aire en la cámara de compresión se comporta como un resorte contra el cual oscila el agua en ambos ductos. La eficiencia máxima es alcanzada en condiciones de resonancia cuando la frecuencia natural de oscilación del sistema coincide con la frecuencia del oleaje. Es posible mantener una condición resonante para diferentes frecuencias de oleaje por medio de una cámara de compresión de volumen variable que ajusta la dureza del resorte de aire [4] y que constituye un sistema de sintonización. Así, definir

un criterio de sintonización significa encontrar el volumen de la cámara de compresión que mantiene la condición resonante en función de los demás parámetros de diseño del sistema de bombeo.

Antes de comenzar con la descripción del sistema de bombeo (Capítulo 3), se hace una breve revisión de los conceptos de mecánica de fluidos que se utilizarán (Capítulo 2). Se incluye también una descripción de los experimentos realizados con un modelo a escala del SIBEO (Capítulo 4), antes de analizar el tema de la sintonización (Capítulo 5) que ha sido tratado pensando básicamente en dos situaciones distintas: los criterios de sintonización para oleaje monocromático y policromático.

# Capítulo 2

## Teoría.

Para el estudio del sistema de bombeo se utilizarán algunos de los conceptos y ecuaciones de la mecánica de fluidos. Definimos un fluido como un material que se deforma indefinidamente bajo el efecto de una fuerza cortante. Las ecuaciones básicas que describen el movimiento de los fluidos se derivan de las leyes de conservación de la masa, el momento y la energía. En el desarrollo de estas se asumirá la validez de la mecánica clásica, es decir, no se tomarán en cuenta efectos cuánticos ni relativistas. Así mismo, se trabajará bajo la *hipótesis del continuo* que supone que todos los campos que describen un fluido ( $\rho$ ,  $p$ ,  $\vec{u}$ , etc.) son continuos. Esto significa que es posible pensar en el cuerpo que queremos estudiar como una distribución continua de *partículas de fluido*, infinitamente pequeñas comparadas con el volumen del sistema en consideración, pero lo suficientemente grandes para contener un número elevado de moléculas, es decir, grandes comparadas con las distancias entre las moléculas [14].

### 2.1 Ecuaciones de Movimiento para un fluido.

Antes de proceder a la deducción de las ecuaciones de movimiento es necesario introducir un marco de referencia desde el cual describir la cinemática del fluido. La descripción de la mecánica usual consiste en seguir la trayectoria de cada partícula de fluido a partir de una situación inicial, de esta manera las variables independientes son la posición inicial  $\vec{r}_0(t_0)$  y el tiempo  $t$ . Esta descripción nos permite introducir directamente los principios de conserva-

ción y se conoce como *lagrangiana* o *material*. Aunque la elección de  $\vec{r}_0(t_0)$  y  $t$  como variables independientes surge directamente siguiendo el razonamiento de la mecánica clásica, en mecánica de fluidos nos encontramos con que la descripción material es casi siempre impráctica. Esto se debe a que en la mayoría de los problemas la atención se sitúa en lo que ocurre en una región específica del espacio mientras el tiempo pasa. Lo anterior nos da la pauta para escoger un sistema de referencia más apropiado, que es aquel donde las variables independientes son  $\vec{r}$  y  $t$ . Esta es la descripción *euleriana* o *espacial*, donde tenemos *variables de campo* que toman un valor para cada tiempo  $t$ .

Para introducir la dinámica de fluidos, es necesario establecer la equivalencia entre la diferenciación con respecto al tiempo en las descripciones lagrangiana y euleriana. Si definimos  $\frac{D}{Dt}$  como la *derivada material* tenemos que, en la descripción espacial:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \quad (2.1)$$

Otra cantidad que resulta de interés es la razón de cambio de integrales materiales. Si  $\varphi$  es una propiedad del fluido relacionada al volumen, podemos enunciar el *teorema del transporte de Reynolds*:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \varphi dV = \int_{V(t)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi \vec{u}) \right) dV \quad (2.2)$$

Este resultado se obtiene aplicando la regla de Leibniz del lado izquierdo de la ecuación —lo cual es válido ya que  $\varphi$  y  $\frac{D\varphi}{Dt}$  son continuas—.

### 2.1.1 Principios de Conservación.

El principio de conservación de la masa para un fluido de densidad  $\rho$  contenido en un volumen  $V$  que no cambia en el tiempo y que esta limitado por la superficie  $S$ , puede enunciarse de la siguiente manera: la razón de incremento de la masa contenida en  $V$  es igual a la razón con la que el fluido cruza la frontera  $S$  hacia adentro de  $V$ ; es decir,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \vec{u} \cdot \hat{n} dA \quad (2.3)$$

Utilizando el teorema de la divergencia, podemos reescribir la igualdad anterior como,

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} \right) dV = 0 \quad (2.4)$$

y partiendo de que queremos que esto se cumpla para un volumen arbitrario, es suficiente pedir que el integrando se anule en todo punto. El resultado es el siguiente y se conoce como *ecuación de continuidad*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} = 0 \quad (2.5)$$

que se puede escribir como,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.6)$$

Si la derivada material  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ , es decir, si la densidad de cada partícula de fluido se mantiene constante en el tiempo, los primeros dos términos de la ecuación 2.6 desaparecen y esta se reduce a  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ . Esta es la hipótesis de incompresibilidad, que se traduce en el hecho de que no hay ninguna dirección privilegiada en el fluido. Vale la pena hacer notar que aunque  $\rho$  constante implica que  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ , el caso inverso no es cierto; es decir, si  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ ,  $\rho$  no es necesariamente constante.

La conservación del momento lineal la podemos escribir —a partir de la segunda ley de Newton—, pidiendo que la variación temporal del momento sea proporcional a la suma de las fuerzas externas. Estas fuerzas se pueden agrupar en dos tipos distintos, las fuerzas volumétricas (como la gravitacional o la electromagnética) y los esfuerzos superficiales, que son las fuerzas ejercidas en la superficie de un elemento de fluido por el resto del continuo. Para enunciar la conservación del momento utilizamos el *tensor de esfuerzos*  $\tilde{\tau}$  —donde  $\tau_{ij}$  representa la componente  $i$  de la fuerza por unidad de área que actúa sobre un elemento de superficie con normal en la dirección  $j$ — para escribir las fuerzas superficiales, y  $\vec{F}$  para las fuerzas volumétricas, obteniendo así:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \int_V \rho \vec{F} dV + \int_S \tilde{\tau} \cdot \hat{n} dS \quad (2.7)$$

Utilizando el teorema del transporte de Reynolds 2.2 en el lado izquierdo de la ecuación anterior y el teorema de la divergencia en el término de las fuerzas superficiales, podemos juntar todos los términos en una misma integral de volumen y reescribir 2.7 como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}') = \rho \bar{\mathbf{F}} + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (2.8)$$

Desarrollando los primeros dos términos y utilizando la ecuación de continuidad 2.5, obtenemos la forma diferencial de la ecuación de conservación del momento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{F}} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (2.9)$$

o bien, utilizando la notación de índices y de derivada material 2.1:

$$\frac{Du_i}{Dt} = F_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.10)$$

Para enunciar la conservación de la energía nos valemos de la primera ley de la termodinámica. De esta manera estamos haciendo la hipótesis de que la termodinámica es aplicable en cada punto del espacio todo el tiempo. Decimos entonces que la razón de cambio de la energía total de un volumen de fluido es igual a la potencia de las fuerzas externas más la razón de transferencia de calor de los alrededores al volumen de fluido, es decir:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{1}{2} \rho \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \rho \epsilon \right) dV = \int_V \bar{\mathbf{u}} \cdot \rho \bar{\mathbf{F}} dV + \int_S (\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \int_S \bar{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (2.11)$$

donde  $\bar{\mathbf{q}}$  es el flujo de calor por unidad de área por unidad de tiempo y el signo menos en la integral que contiene a  $\bar{\mathbf{q}}$  denota que se pierde energía cuando  $\bar{\mathbf{q}}$  va en la dirección de  $\hat{\mathbf{n}}$ , i.e. hacia afuera del volumen  $V$ . Utilizando las otras dos leyes de conservación expresadas como 2.5 y 2.9 se puede simplificar la expresión anterior dando como resultado:

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\tau_{ij}}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \quad (2.12)$$

Se han obtenido, a partir de principios de conservación, un conjunto de ecuaciones que determinan la evolución temporal de las variables que describen un fluido. Este conjunto de ecuaciones no constituye en si mismo un problema matemático cerrado, es decir, contiene más variables que ecuaciones. Para definir un problema único se necesita más información sobre

el sistema en cuestión. Una parte de esta información se puede obtener de la termodinámica, a partir de las ecuaciones de estado para la energía interna y la presión  $\epsilon = \epsilon(\rho, T)$  y  $p = p(\rho, T)$ ; otra parte es necesario definirla suponiendo algunas características para el flujo que se estudia. Estas suposiciones se conocen como *ecuaciones constitutivas* y son relaciones que describen la manera en que los esfuerzos y el flujo de calor dependen de las demás variables de campo.

### 2.1.2 Ecuaciones constitutivas.

En principio, las ecuaciones constitutivas se podrían obtener de la teoría molecular de líquidos y gases. De hecho, para el caso de moléculas de estructura simple —en particular para gases—, se pueden obtener de esta teoría ecuaciones constitutivas que concuerdan muy bien con resultados experimentales. Por el contrario, este procedimiento no ha sido muy exitoso al aplicarse a *líquidos newtonianos* [23]. Se recurre entonces a diferentes modelos para definir las ecuaciones constitutivas.

#### Fluidos viscosos.

Se dice que un fluido es *viscoso* si presenta resistencia al desplazamiento de una de sus capas sobre otra. Esta resistencia se puede interpretar como una *fricción interna* e implica una transferencia de momento irreversible entre dos capas adyacentes de fluido que se mueven con velocidades distintas. El signo de los esfuerzos de corte debidos a la viscosidad es tal que tiende a igualar las velocidades de las dos capas de fluido [14][1]. La forma que tienen los esfuerzos en un fluido está determinada por el tensor de esfuerzos  $\tilde{\tau}$ . Es conveniente escribir al tensor de esfuerzos  $\tilde{\tau}$  como una suma de dos componentes: una primera parte, isotrópica,  $-p \tilde{\mathbf{I}}$  que representa la compresión uniforme debida al medio continuo (la transferencia de momento regulada por este término si es reversible y  $p$  es la presión en el sentido termodinámico); y un segundo término  $\tilde{\tau}'$  que representa los esfuerzos de corte, y que definimos como *tensor de esfuerzos viscosos*:

$$\tilde{\tau} = -p \tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\tau}' \quad (2.13)$$

Existen distintos modelos para  $\tilde{\tau}'$ , aquí utilizaremos el modelo de *fluido newtoniano* que es adecuado para una gran variedad de fluidos, entre ellos

para el agua. La hipótesis principal del modelo newtoniano es que el tensor de esfuerzos viscosos depende linealmente de los gradientes de velocidad en el fluido. Las componentes de  $\tau'$  para un fluido newtoniano son [1]:

$$\tau'_{ij} = 2\mu \left( e_{ij} - \frac{1}{3} \Delta \delta_{ij} \right) \quad (2.14)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad,  $e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  es la razón de deformación y  $\Delta = e_{ii}$  denota la razón de expansión. Sustituyendo esto en la expresión (2.13) se obtiene para el tensor de esfuerzos en un fluido newtoniano:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left( e_{ij} - \frac{1}{3} \Delta \delta_{ij} \right) \quad (2.15)$$

### Flujo de calor.

Obtendremos una ecuación constitutiva para el vector  $\bar{q}$  de flujo de calor pensando en el fenómeno de *conducción* de calor, que ocurre cuando se tienen en un medio continuo regiones con temperaturas distintas. El flujo de calor se presenta en la dirección necesaria para disminuir la magnitud del gradiente de temperatura  $\nabla T$ , de manera que tiende a homogeneizar la temperatura en el medio. Para escribir una expresión cuantitativa de  $\bar{q}$  haremos dos hipótesis: i) para  $|\nabla T|$  pequeños el flujo de calor solo depende de  $\nabla T$  y de las propiedades locales del fluido, i.e.  $\bar{q} = \bar{q}(\nabla T)$ ; y ii)  $\bar{q}$  depende linealmente de  $\nabla T$ . El resultado que se obtiene es la ley de conducción del calor de Fourier:

$$\bar{q} = -\kappa \nabla T \quad (2.16)$$

donde  $\kappa = \kappa(\rho, T)$  es el coeficiente de conductividad térmica ( $\kappa > 0$ ). Matemáticamente, la expresión resultante es el término de primer orden de la expansión en serie de Taylor de  $\bar{q} = \bar{q}(\nabla T)$ ; el término de orden cero se anula para tener un flujo neto nulo cuando  $|\nabla T| = 0$ , mientras que los términos de órdenes cuadrático y mayores se anulan para satisfacer la hipótesis de linealidad [1].

### Fluidos ideales.

Hemos descrito en las dos secciones anteriores los procesos de disipación de energía que pueden ocurrir en un fluido; ya sea debido a la fricción interna

que hemos denominado viscosidad, o bien al intercambio térmico entre las distintas partes del mismo. Los fluidos que pueden ser descritos sin tomar en cuenta ni la conductividad ni la viscosidad se denominan fluidos *ideales*, y las ecuaciones constitutivas que les corresponden son:

$$\underline{\tau} = -p \mathbf{I} \quad (2.17)$$

donde se ha omitido la parte viscosa del tensor de esfuerzos, y:

$$|\underline{q}| = 0 \quad (2.18)$$

lo que significa una ausencia de intercambio térmico entre las distintas partes del fluido, es decir, significa que el movimiento en un fluido ideal es adiabático [14].

### 2.1.3 Ecuaciones de Navier-Stokes.

La sustitución de la ecuación constitutiva (2.15) para el tensor de esfuerzos, en la ecuación (2.9) que se obtuvo de la ley de conservación del momento da como resultado la siguiente ecuación que se conoce como *ecuación de movimiento de Navier-Stokes* [1]:

$$\frac{Du_i}{Dt} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( 2\mu \left( e_{ij} - \frac{1}{3} \Delta \delta_{ij} \right) \right) \quad (2.19)$$

Esta ecuación se puede simplificar si suponemos que la viscosidad es uniforme en el fluido, y más aún si pensamos en flujo incompresible ( $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ ); con estas consideraciones la ecuación (2.19) se puede escribir como:

$$\frac{Du_i}{Dt} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.20)$$

Esta ecuación (2.20), más las que se obtienen de los principios de conservación de la masa y la energía (2.5) y (2.12), considerando las ecuaciones constitutivas correspondientes a un fluido newtoniano para el tensor de esfuerzos (2.15) y a la ley de conducción del calor de Fourier (2.16) para el vector de flujo de calor, y la hipótesis de incompresibilidad, se conocen como *las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible*:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \epsilon = \frac{\kappa}{\rho} \nabla^2 T + \frac{1}{\rho} \Phi \quad (2.23)$$

En la ecuación para la energía hemos introducido la *función de disipación*  $\Phi$  definida como,

$$\Phi = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (2.24)$$

que mide la cantidad de energía mecánica que se pierde en forma de calor debido a la viscosidad [14][1].

Si consideramos que están dados los valores de  $\bar{\mathbf{F}}$ ,  $\mu$  y  $\kappa$  para el fluido que queremos estudiar, las ecuaciones (2.21), (2.22) y (2.23), más una ecuación de estado para la energía interna, forman un problema matemáticamente cerrado.

#### 2.1.4 Ecuación de Bernoulli.

Si pensamos en un fluido ideal, la introducción de la ecuación constitutiva (2.17) en la ecuación de conservación de momento (2.9), da como resultado la siguiente forma simplificada de la ecuación de movimiento de Navier-Stokes (2.22) que se conoce como *ecuación de Euler*:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.25)$$

Utilizando la identidad vectorial  $\nabla \left( \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \right) = \bar{\mathbf{u}} \times (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}) + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}$ , se puede reescribir la ecuación anterior como:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{u^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p - \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{u}} \times (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}) \quad (2.26)$$

y todavía podemos simplificarla más si suponemos que las fuerzas volumétricas son conservativas —de forma que se pueden escribir como el gradiente de un potencial  $\bar{\mathbf{F}} = -\nabla G$ —, y que la densidad es constante:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + G \right) = \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) \quad (2.27)$$

Aquí es conveniente introducir el concepto de *línea de corriente*. Estas son líneas cuya tangente en cualquier punto indica la dirección de la velocidad en dicho punto. Si tenemos un flujo estacionario, las líneas de corriente no varían en el tiempo y coinciden con las *trayectorias* de las partículas de fluido. Para el caso dependiente del tiempo ya no se da esta coincidencia: las líneas de corriente evolucionan con el tiempo e indican las direcciones de distintas partículas de fluido instantáneamente, mientras que las trayectorias muestran las direcciones de las velocidades de partículas dadas en distintos instantes de tiempo [14]. Ahora, podemos evaluar una integral de la ecuación de momento escrita como (2.27) multiplicando esta ecuación escalarmente por un elemento de línea  $d\vec{s}$  paralelo a una línea de corriente  $C$ , obteniendo la forma dependiente del tiempo de la *ecuación de Bernoulli*:

$$\int^c \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + G = \text{Constante} \quad (2.28)$$

En el caso estacionario el primer término de esta ecuación se anula, y se obtiene la forma independiente del tiempo. Si el flujo es irrotacional ( $\nabla \times \vec{u} = 0$ ),  $\vec{u}$  puede expresarse como el gradiente de una función escalar y la ecuación (2.28) también se simplifica [14].

## 2.2 Análisis dimensional.

En el estudio de los fluidos y en general en física resulta de gran importancia la utilización de parámetros adimensionales, de hecho, en ocasiones, las posibilidades de obtener resultados fundamentales para la comprensión de ciertos fenómenos están completamente condicionadas al empleo de cantidades adimensionales para el análisis. Además de proveernos de la capacidad para enunciar problemas y resultados de manera universal, y por esto debe entenderse que no es necesario definir una escala física para plantear un problema, la utilización de cantidades adimensionales permite diseñar experimentos que se pueden realizar, por ejemplo, en un laboratorio y luego aplicar los resultados obtenidos en situaciones reales que difícilmente serían reproducibles experimentalmente tal como son. En general, los números adimensionales relevantes en física, no son otra cosa que razones entre las

magnitudes de los distintos "actores" que juegan en un problema, es decir, de las fuerzas. En esta sección se presentan, primero, un método para definir los parámetros adimensionales que están involucrados en un problema, conocido como el teorema  $\Pi$  de Buckingham [24], y después, algunas de las cantidades que aparecen comúnmente en problemas de fluidos.

### 2.2.1 El teorema $\Pi$ de Buckingham.

Este teorema prueba que en un problema físico caracterizado por  $n$  cantidades en las cuales aparecen  $m$  dimensiones, estas cantidades pueden ser ordenadas en  $n - m$  parámetros adimensionales distintos. Si  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  son las cantidades involucradas en el problema (e.g. presión, viscosidad, velocidad, etc.) que sabemos son fundamentales para la solución, entonces debe existir alguna relación funcional:

$$F(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0 \quad (2.29)$$

Si  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ , representan grupos adimensionales de las cantidades  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , entonces si hay  $m$  dimensiones involucradas, existe una ecuación de la forma:

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-m}) = 0 \quad (2.30)$$

La metodología para determinar los parámetros  $\Pi$  consiste en seleccionar  $m$  de las cantidades  $A_i$ , con dimensiones distintas, que contengan entre ellas las  $m$  dimensiones, y utilizarlas como *variables repetidas* junto con otra de las cantidades  $A_i$  para cada  $\Pi$ . Es necesario que ninguna de las  $m$  cantidades seleccionadas como variables repetidas sea derivable de las otras variables repetidas. Se busca un exponente para las cantidades  $A_i$  de manera que cada parámetro  $\Pi$  sea adimensional [24].

### 2.2.2 Números adimensionales en fluidos.

Para obtener algunos de los números adimensionales que aparecen comúnmente en problemas de fluidos, pensemos en una situación de flujo donde los parámetros relevantes son:

- densidad  $\rho$
- velocidad  $u$

- viscosidad  $\mu$
- gravedad  $g$
- alguna dimensión lineal  $d$
- tensión superficial  $\sigma$
- velocidad del sonido  $c$

Aplicando el análisis dimensional a estas variables según el teorema enunciado en la sección anterior, se puede obtener el siguiente conjunto de cantidades  $\Pi$ :

$$\left( \frac{\rho u d}{\mu}, \frac{u^2}{g d}, \frac{\rho u^2 d}{\sigma}, \frac{u}{c} \right) \quad (2.31)$$

La primera cantidad se conoce como *número de Reynolds* ( $Re \equiv \frac{\rho u d}{\mu}$ ) y cuantifica la relación entre las fuerzas viscosas y las fuerzas inerciales involucradas en el problema. Este número es de gran importancia ya que caracteriza el tipo de flujo que se observa: para  $Re < 2000$  se observa flujo laminar, mientras que al sobrepasar esta cota se comienzan a tener transiciones a un flujo turbulento que se desarrolla por completo al aumentar más el valor de  $Re$ . El segundo número es el *número de Froude* ( $Fr \equiv \frac{u^2}{g d}$ ), el cual da una medida de las fuerzas inerciales con respecto a las fuerzas gravitacionales. El tercero es el *número de Weber* ( $We \equiv \frac{\rho u^2 d}{\sigma}$ ), en el que se comparan fuerzas de tensión superficial con las fuerzas inerciales, y el cuarto es el *número de Mach* ( $M \equiv \frac{u}{c}$ ), que nos da una comparación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas elásticas. Este último es de gran importancia cuando se analizan flujos compresibles.

Se pueden utilizar las cantidades anteriores para definir si varios flujos son *similares dinámicamente*. Este concepto va ligado al uso de números adimensionales, y significa que las relaciones entre los distintos términos de la ecuación de movimiento (i.e. las fuerzas), son las mismas para dos o más flujos que pueden ser distintos en escala [1].

## Capítulo 3

# Sistema de Bombeo.

### 3.1 Descripción.

Para estudiar el comportamiento del sistema de bombeo se propone modelar el desplazamiento de las superficies libres dentro del tubo resonante y de la cámara conectada al desagüe. Suponiendo un fluido ideal, se puede construir un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas cuya solución es la posición de estas dos superficies libres [5]. El sistema se obtiene escribiendo la ecuación de Bernoulli para dos líneas de corriente: una que une la superficie del agua en el tubo resonante con la superficie en el sitio donde se tiene la señal de oleaje y la otra que une la superficie del agua en la cámara (conectada al tubo de desagüe) con la superficie del cuerpo de agua receptor (ver figura 3.1). El acoplamiento entre las dos ecuaciones resulta del término correspondiente a la presión en la cámara y el forzamiento se incorpora como una señal de presión oscilante en la boca del tubo resonante. Para que este sistema idealizado simule adecuadamente al sistema real, es necesario agregarle algunos términos que representen las diversas pérdidas que no se consideran al emplear la ecuación de Bernoulli y que se deben, principalmente, a los efectos viscosos. En el modelo propuesto se incluyen pérdidas por fricción, formación de vórtices y radiación.

La descripción anterior es adecuada mientras el agua oscila en los tubos sin pasar de uno a otro, es decir, cuando no hay bombeo. Al tener oscilaciones lo suficientemente grandes en el tubo resonante, el agua rebasa el nivel del colector y se derrama en la cámara de desagüe. En este caso, mientras el agua se está derramando, no resulta conveniente hablar de la posición

de la superficie del agua en el tubo resonante, pues esta ya no representa al desplazamiento del fluido dentro del tubo. Para evitar este problema, dividimos el ciclo de operación en dos fases: la de bombeo, que comprende el tiempo durante el cual se da intercambio de fluido entre el tubo resonante y el de desagüe, y la de no-bombeo, cuando el agua oscila en ambos tubos sin pasar de uno a otro.

### 3.1.1 Fase de no bombeo.

Para construir las ecuaciones de movimiento que utilizaremos para simular el sistema de bombeo, pensemos en el modelo que se ilustra de manera esquemática en la figura 3.1.

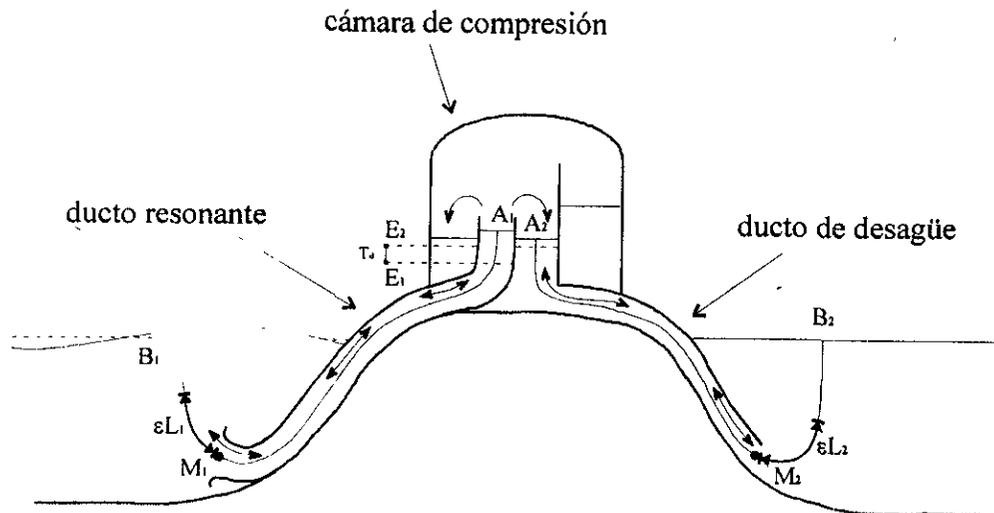


Figura 3.1: Diagrama esquemático del sistema de bombeo.

Se han trazado las líneas de corriente que se asume existen a lo largo de los dos tubos. Para cada una consideramos la forma dependiente del tiempo de la ecuación de Bernoulli 2.28 la cual nos dice que, a lo largo de una línea de corriente  $C$ :

$$\int^C \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gx = Constante \quad (3.1)$$

donde hemos sustituido el potencial de las fuerzas volumétricas  $G$ , con el valor correspondiente para el campo gravitacional que depende de la posición  $x$  del punto en cuestión sobre la posición de equilibrio. Definimos ahora los desplazamientos de las superficies libres dentro del tubo resonante y de la cámara conectada al desagüe a partir de la posición de equilibrio como  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente. Notemos que, tanto en el tubo de desagüe como en el resonante, la posición de equilibrio está a una altura  $H$  sobre el cuerpo de agua al que están conectados. Esta posición de equilibrio, sin embargo, no es necesariamente la misma en ambos tubos ya que puede haber una diferencia de alturas entre el mar y la laguna costera, por ejemplo, debido a las mareas. Consideramos los dos puntos en los extremos de cada línea de corriente (que se indican en la figura 3.1 como  $A_i$  y  $B_i$ ) sin tomar en cuenta la oscilación del punto  $B_1$  producida por el oleaje—el forzamiento lo introduciremos más adelante—. A partir de 3.1 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\int_{B_1}^{A_1} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \cdot d\vec{s}_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{P_{A_1} - P_{B_1}}{\rho} + g(x_1 + H) = 0 \quad (3.2)$$

$$\int_{B_2}^{A_2} \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} \cdot d\vec{s}_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{P_{A_2} - P_{B_2}}{\rho} + g(x_2 + H) = 0$$

Tenemos además que  $P_{B_1} = P_{B_2} = P_A$  es la presión atmosférica, y que  $P_{A_1} = P_{A_2} = P_{cam}$  es la presión en la cámara de compresión. Podríamos pensar aquí que  $P_{B_1}$  es en realidad  $P_A$  más una componente oscilatoria debida al oleaje, sin embargo, consideraremos que el punto  $P_{B_1}$  es fijo y añadiremos al final del análisis una función de forzamiento para simular el oleaje. Ahora, para obtener una expresión de  $P_{cam}$  en términos de los desplazamientos  $x_1$  y  $x_2$ , asumimos que la compresión resultante de la oscilación del agua en los tubos es adiabática [5] y entonces podemos utilizar la relación:

$$PV^\gamma = Constante \quad (3.3)$$

donde  $\gamma$  es la compresibilidad del aire. Utilizamos como valores de referencia para volumen y presión los que se tienen en la situación de equilibrio  $V_0$  y  $P_0$  ( $P_0 = P_A - \rho gH$ ); el nuevo volumen lo calculamos sustrayendo al volumen inicial el volumen desplazado por el agua al incrementarse  $x_1$  y  $x_2$ , es decir,  $V_{cam} = V_0 - A_R x_1 - A_{cam} x_2$ , donde  $A_R$  y  $A_{cam}$  son las áreas de las superficies libres en el tubo resonante y en la cámara de desagüe, respectivamente. Aplicando 3.3,  $P_{cam} V_{cam}^\gamma = P_0 V_0^\gamma$ , por lo que:

$$P_{cam} = (P_A - \rho g H) \left( 1 - \frac{A_R x_1 + A_{cam} x_2}{V_0} \right)^{-\gamma} \quad (3.4)$$

Con esta forma para  $P_{cam}$ , cada ecuación en el sistema 3.2 queda como ( $i = \{1, 2\}$ ):

$$\int_{B_i}^{A_i} \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} \cdot d\vec{s}_i + \frac{u_i^2}{2} + \frac{P_A - \rho g H}{\rho} \left[ \left( 1 - \frac{A_R x_1 + A_{cam} x_2}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] + g x_i = 0 \quad (3.5)$$

Es necesario ahora evaluar la integral que aparece como primer término en estas ecuaciones y que representa, en términos mecánicos, la contribución inercial de una masa *virtual* [11]. Esta incluye, además de la masa real del fluido en el tubo, una masa añadida por efectos de borde. Como no conocemos la forma exacta de  $\vec{u}_i$  como función ni del tiempo ni de la longitud  $s_i$  sobre la que queremos evaluar la integral, haremos un análisis de la forma que tendrá  $\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t}$  a lo largo de la línea de corriente de manera que podamos separar la integral en varias partes. Para esto asumimos lo siguiente: primero, el fluido es incompresible y el transporte en cada sección del tubo es el mismo a todo lo largo; y segundo, la velocidad  $\vec{u}_i$  que en el punto  $B_i$  es prácticamente nula, va aumentando a lo largo de la línea de corriente hasta alcanzar un valor que se mantendrá independiente de  $s_i$  a partir del punto  $M_i$  en la boca del tubo [21]; en el caso del tubo resonante esta velocidad permanecerá constante hasta la superficie libre  $A_1$ , por el contrario, para el tubo de desagüe hay que tomar en cuenta que este se abre al llegar a la cámara, y así, las velocidades de oscilación de la superficie  $A_2$  serán menores que aquellas dentro del ducto de acuerdo a la razón  $\frac{A_D}{A_{cam}}$  entre las áreas del ducto y de la cámara. Tomando en cuenta las consideraciones anteriores se puede separar la integral; en dos partes para el caso del tubo resonante y en tres para el de desagüe. Se ilustra de manera cualitativa en la figura 3.2 la dependencia de  $\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t}$  con  $s_i$  para cada ducto.

Para el tubo resonante tenemos entonces que:

$$\int_{B_1}^{A_1} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \cdot d\vec{s}_1 = \int_{B_1}^{M_1} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \cdot d\vec{s}_1 + (L_R + x_1) \frac{du_1}{dt}$$

mientras que para el desagüe se obtiene:

$$\int_{B_2}^{A_2} \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} \cdot d\vec{s}_2 = \int_{B_2}^{M_2} \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} \cdot d\vec{s}_2 + \left( L_D \frac{A_{cam}}{A_D} + L_{cam} + x_2 \right) \frac{du_2}{dt}$$

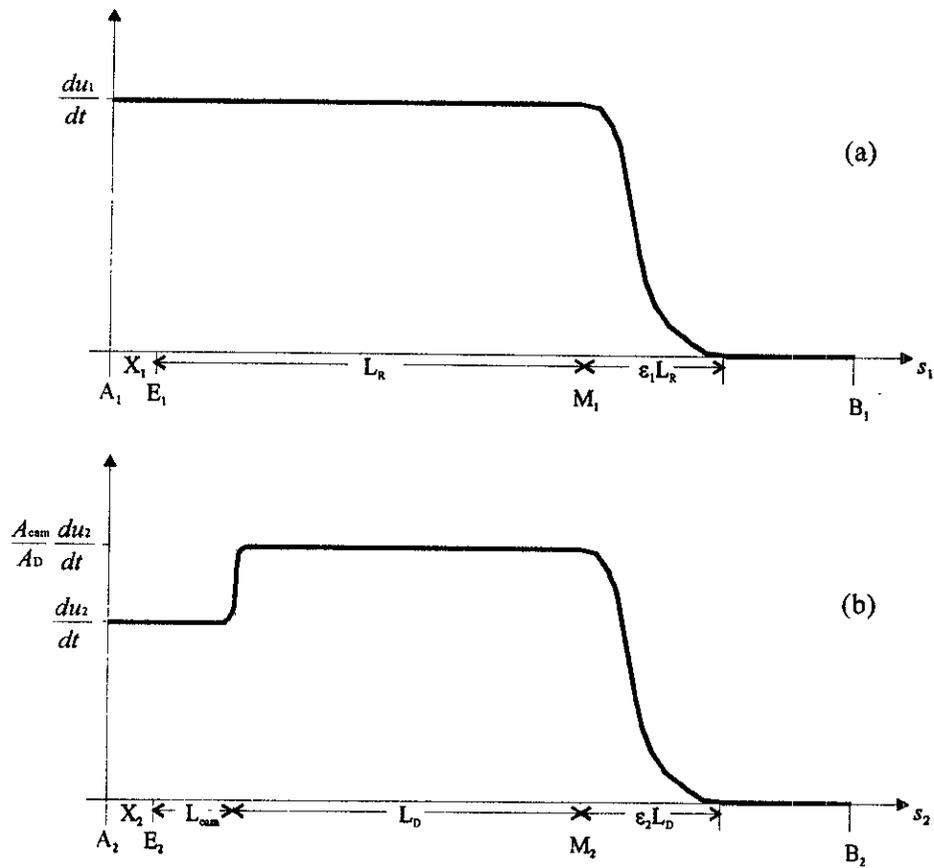


Figura 3.2: La función  $\frac{\partial u_i}{\partial t}$  a lo largo de la línea de corriente  $A_i B_i$  para el ducto resonante (a) y el de desagüe (b).

Ahora el problema se ha reducido a la parte de la línea de corriente fuera del tubo. Volviendo a la interpretación física que le habíamos dado a este término y observando la figura 3.2, podemos ver que el área bajo la curva que no podemos calcular entre  $B_i$  y  $M_i$  puede representarse como una fracción del área conocida calculada entre  $M_i$  y  $A_i$ , lo que corresponde a pensar en un incremento de la *longitud efectiva* de cada ducto por los efectos de borde [11][5]. Este incremento es el que se puede ver como una masa añadida a la contribución inercial y lo representaremos como una fracción  $\epsilon$  de la longitud de cada ducto.

De acuerdo con lo anterior queda completamente definido el sistema de ecuaciones 3.5. Solo falta considerar la diferencia de nivel que puede existir entre la superficie del cuerpo de agua receptor y la superficie donde se encuentra la señal de oleaje —i.e. la marea que definimos como  $T_d$ —. En el desarrollo de la ecuación del tubo resonante esto aparece como un término adicional  $T_d \frac{du_1}{dt}$  que compensa la diferencia entre las posiciones de equilibrio del agua en ambos ductos. Si añadimos también el término de forzamiento que habíamos dejado de lado, tenemos que:

$$\begin{aligned} & ((1 + \epsilon_1) L_R + x_1 + T_d) \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1^2}{2} + \\ & + \frac{P_A - \rho g H}{\rho} \left[ \left( 1 - \frac{A_R x_1 + A_{cam} x_2}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] + g x_1 = W(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & \left( (1 + \epsilon_2) L_D \frac{A_{cam}}{A_D} + L_{cam} + x_2 \right) \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2^2}{2} + \\ & + \frac{P_A - \rho g H}{\rho} \left[ \left( 1 - \frac{A_R x_1 + A_{cam} x_2}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] + g x_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Antes de introducir los términos correspondientes a las pérdidas vamos a hablar un poco de la naturaleza de estas. Como hemos mencionado, se incluirán términos para pérdidas por fricción, formación de vórtices y radiación.

La pérdida por fricción se debe a los esfuerzos cortantes entre las partículas de fluido que se mueven en trayectorias paralelas con distintas velocidades. El desplazamiento entre distintas capas de fluido se debe específicamente a la

presencia de la pared del tubo, de ahí que la pérdida de presión se atribuya a la fricción en las paredes. Cuando el flujo es turbulento, la presencia de vórtices en todo el fluido incrementa los esfuerzos viscosos entre las distintas capas y, por lo tanto, las pérdidas de presión por fricción son mayores que en el caso laminar.

La siguiente pérdida que consideramos se debe a la formación de anillos de vórtices en la entrada de los tubos. Estos anillos, que son inducidos por el flujo oscilante en los tubos, se forman periódicamente de forma semejante a los aros de humo que puede hacer un fumador. Como veremos en la parte experimental (Capítulo 4), la forma de la entrada de los ductos juega un papel muy importante en la magnitud de las pérdidas por formación de vórtices. En cuanto a la pérdida por radiación de energía, consideramos que las oscilaciones en los tubos generan una onda superficial en el cuerpo de agua al que están conectados.

Para estudiar la forma que deben tener las pérdidas, comenzamos por establecer cuales son las cantidades que se consideran relevantes en cada caso. En la siguiente tabla se muestran las variables del sistema con las que se relacionan las pérdidas de presión debidas a fricción, a formación de vórtices y a radiación.

	fricción	formación de vórtices	radiación
pérdida de presión	$\frac{\Delta p}{\rho}$	$\frac{\Delta p}{\rho}$	$\frac{\Delta p}{\rho}$
longitud del tubo	$L$		
diámetro	$D$	$D$	$D$
velocidad	$u$	$u$	$u$
velocidad máxima	$u_{\max}$	$u_{\max}$	$u_{\max}$
densidad	$\rho$	$\rho$	
viscosidad	$\mu$	$\mu$	
frecuencia	$\Omega$	$\Omega$	$\Omega$
rugosidad	$r_{ug}$		

A partir de un análisis dimensional se puede buscar la forma que deben tener las pérdidas de presión ocasionadas por los distintos fenómenos considerados. Se encuentra para la pérdida de presión por formación de vórtices una dependencia con dos números de Reynolds, uno de ellos basado en la velocidad máxima del flujo y otro basado en la frecuencia con la que este oscila; también se observa dependencia con una velocidad adimensional [8][19]:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = u^2 C_v \left( \frac{\rho D u_{\max}}{\mu}, \frac{\rho \Omega D^2}{\mu}, \frac{u}{u_{\max}} \right) \quad (3.8)$$

La pérdida debida a la fricción queda dada por [5][19]:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = u^2 C_f \left( \frac{L}{D}, \frac{\rho D u_{\max}}{\mu}, \frac{\rho \Omega D^2}{\mu}, \frac{u}{u_{\max}}, \frac{r_{ug}}{D} \right) \quad (3.9)$$

donde se añaden a las cantidades relevantes en la pérdida por vórtices, una longitud y una rugosidad adimensionalizadas con el diámetro del tubo. Para la pérdida por radiación se tiene que [5]:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = u^2 C_r \left( \frac{\Omega D}{u_{\max}}, \frac{u}{u_{\max}} \right) \quad (3.10)$$

La forma funcional específica que existe entre los diferentes números adimensionales para cada tipo de pérdida de presión se discute más adelante.

Con los resultados del análisis dimensional en mente, introducimos tres términos de pérdidas en cada una de las ecuaciones del sistema 3.6 y 3.7. Para esto hay que escribir  $u|u|$  en lugar de  $u^2$  para garantizar que la pérdida de presión actúe en el sentido correcto durante todo el ciclo, i.e. en contra del movimiento. Finalmente, tenemos el modelo completo para la fase de no bombeo:

$$\begin{aligned} & ((1 + \epsilon_1) L_R + x_1 + T_d) \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1^2}{2} + (C_{v1} + C_{f1} + C_{r1}) u_1 |u_1| + \\ & + \frac{P_A - \rho g H}{\rho} \left[ \left( 1 - \frac{A_R x_1 + A_{cam} x_2}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] + g x_1 = W(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} & \left( (1 + \epsilon_2) L_D \frac{A_{cam}}{A_D} + L_{cam} + x_2 \right) \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2^2}{2} + (C_{v2} + C_{f2} + C_{r2}) u_2 |u_2| + \\ & + \frac{P_A - \rho g H}{\rho} \left[ \left( 1 - \frac{A_R x_1 + A_{cam} x_2}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] + g x_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Queremos estudiar estas ecuaciones sin depender de los valores que tomen los parámetros involucrados, es decir, buscamos obtener resultados que

sean aplicables en diferentes escalas; el procedimiento adecuado es entonces escribirlas en forma adimensional. Para esto, definimos una función de forzamiento que determine las escalas relevantes, tanto temporal como espacial. Escogemos para empezar un modelo monocromático de la forma  $W(t) = g \mathcal{A} \text{sen}(\Omega t)$  y definimos las variables adimensionales  $x_i = \mathcal{A} A_{f_i} \chi_i$ , para  $i = \{1, 2\}$  y  $t = \Omega^{-1} t$ . Introducimos en la adimensionalización de las variables  $x_i$ , un *factor de amplificación*  $A_{f_i}$  para considerar la diferencia que existe normalmente entre la amplitud de los desplazamientos máximos en los ductos y la amplitud de la ola de forzamiento. Haciendo  $L_1 = (1 + \epsilon_1) L_R + T_d$ ,  $L_2 = (1 + \epsilon_2) L_D \frac{A_{cam}}{A_D} + L_{cam}$  y  $\alpha = \frac{P_A - \rho g H}{\rho}$ , expresando  $u_i$  como  $\frac{dx_i}{dt}$  y utilizando las nuevas variables escribimos el sistema adimensionalizado. Ordenando un poco se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{L_1}{\mathcal{A} A_{f_1}} + \chi_1 \right) \frac{d^2 \chi_1}{dt} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\chi_1}{dt} \right)^2 + (C_{v1} + C_{f1} + C_{r1}) \frac{d\chi_1}{dt} \left| \frac{d\chi_1}{dt} \right| + \\ & + \frac{\alpha}{\mathcal{A}^2 A_{f_1}^2 \Omega^2} \left[ \left( 1 - \mathcal{A} \frac{A_R A_{f_1} \chi_1 + A_{cam} A_{f_2} \chi_2}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] + \frac{g}{\mathcal{A} A_{f_1} \Omega^2} \chi_1 = \frac{g}{\mathcal{A} A_{f_1}^2 \Omega^2} \text{sen } t \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{L_2}{\mathcal{A} A_{f_2}} + \chi_2 \right) \frac{d^2 \chi_2}{dt} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\chi_2}{dt} \right)^2 + (C_{v2} + C_{f2} + C_{r2}) \frac{d\chi_2}{dt} \left| \frac{d\chi_2}{dt} \right| + \\ & + \frac{\alpha}{\mathcal{A}^2 A_{f_2}^2 \Omega^2} \left[ \left( 1 - \mathcal{A} \frac{A_R A_{f_1} \chi_1 + A_{cam} A_{f_2} \chi_2}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] + \frac{g}{\mathcal{A} A_{f_2} \Omega^2} \chi_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Plantearémos ahora las ecuaciones correspondientes a la fase de bombeo, de manera que se tenga una visión global del ciclo previa al estudio de las soluciones en cada caso.

### 3.1.2 Fase de bombeo.

Las ecuaciones correspondientes a la fase de bombeo se obtienen a partir de la ecuación de Bernoulli procediendo de forma similar al caso discutido anteriormente. En esta situación, el punto  $A_1$  de la figura 3.1 está ligeramente arriba de la boca del ducto resonante. Esto se debe a la columna de fluido

que se forma sobre la boca del tubo mientras el agua se derrama en la cámara conectada al desagüe. De hecho, para usar la ecuación de Bernoulli, suponemos que la línea de corriente en el tubo resonante es perpendicular a la superficie del agua aún cuando esta rebasa la boca y el flujo ya no está confinado al ducto. La altura de la columna de agua que se forma durante el bombeo varía en función de la velocidad del flujo dentro del tubo. Más adelante (sección 4.2) se discute este fenómeno y se explica el procedimiento que se utilizó para obtener la siguiente expresión para la altura  $\kappa$  de la columna de agua [6]:

$$\kappa \simeq \sqrt[3]{\frac{Du^4}{g^2}} \quad (3.15)$$

En la figura 3.3 se muestra un esquema del interior de la cámara de compresión durante el bombeo.

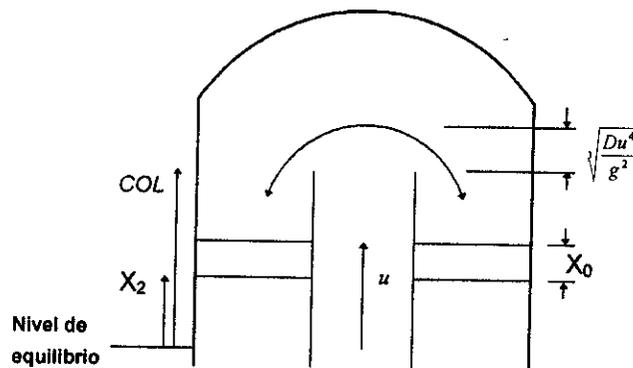


Figura 3.3: Esquema de la cámara de compresión durante la fase de bombeo

Además de la altura de la columna de agua 3.15, dos nuevas cantidades están involucradas en el desarrollo de las ecuaciones de bombeo: el *colector* (*COL*), que se define como la longitud de la porción de tubo resonante que sobresale del agua en la posición de equilibrio; y el cambio en el nivel de la cámara de compresión debido al agua que se transfiere a esta durante el bombeo, que puede expresarse, en términos de la velocidad del flujo en el tubo resonante como:

$$x_0 = \frac{A_R}{A_{cam}} \int_{t_0}^t u dt \quad (3.16)$$

donde  $t_0$  es el momento en que comienza a derramarse agua.

De acuerdo con las definiciones y consideraciones anteriores, el modelo para la fase de bombeo puede escribirse:

$$\begin{aligned} & \left( L_1 + COL + \frac{\kappa(u_1)}{2} \right) \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\kappa(u_1)}{dt} \right)^2 + (C_{v1} + C_{f1} + C_{r1}) u_1 |u_1| + \\ & + \alpha \left[ \left( 1 - \frac{A_R(COL - T_d + \kappa(u_1))}{V_0} - \frac{A_{cam}(x_2 + x_0)}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] + g(COL - T_d + \kappa(u_1)) = W(t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} & (L_2 + x_2 + x_0) \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d(x_2 + x_0)}{dt} \right)^2 + (C_{v2} + C_{f2} + C_{r2}) u_2 |u_2| + \\ & + \alpha \left[ \left( 1 - \frac{A_R(COL - T_d + \kappa(u_1))}{V_0} - \frac{A_{cam}(x_2 + x_0)}{V_0} \right)^{-\gamma} - 1 \right] + g(x_2 + x_0) = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Como podemos ver, las ecuaciones anteriores están en términos de otras variables independientes con respecto a las que se utilizaron en las ecuaciones 3.11 y 3.12 de la fase de no bombeo. El cambio principal radica en que la variable que se utiliza en la ecuación del tubo resonante 3.17 es la velocidad del fluido, en lugar del desplazamiento de la superficie libre dentro de él. Esto se debe a que, cuando hay bombeo, este desplazamiento ya no es representativo del movimiento del fluido en el ducto. Para la ecuación del desagüe 3.18, el cambio consiste en agregar a la posición del agua en la cámara ( $x_2$ ), el incremento de nivel debido al bombeo ( $x_0$ ).

En la deducción de la ecuación 3.17 para el ducto resonante, la gráfica correspondiente a la que se muestra en la figura 3.2 (a) para el caso de no bombeo es ligeramente distinta. Durante el bombeo  $\frac{\partial u_1}{\partial t}$  debe comenzar cerca de cero en el origen —que corresponde a la parte superior de la columna de agua—, para crecer rápidamente hasta alcanzar el valor completo de  $\frac{du_1}{dt}$  a la altura del colector. Esta parte de la integral en la ecuación de Bernoulli se

puede aproximar como el área de un triángulo de altura  $\frac{du_1}{dt}$  y base  $\varkappa(u_1)$ , lo que explica el término  $\frac{\varkappa(u_1)}{2}$  añadido a la longitud  $L_1$  en 3.17.

Como se puede ver, aumenta la cantidad de no linealidades debido a la dependencia en la velocidad  $u_1$  de la función  $\varkappa$ . Sería posible ahora reescribir las ecuaciones 3.17 y 3.18 de manera adimensional, sin embargo esto es prescindible debido al procedimiento que se utilizará para buscar las soluciones.

## 3.2 Soluciones.

El sistema estudiado opera en dos fases que se acoplan para formar un ciclo. Una primera manera que se ocurre para buscar una solución al problema completo sería encontrando soluciones analíticas para cada parte, y consiguiendo acoplarlas en las interfases para describir el comportamiento cíclico del sistema. Sin embargo, la presencia de diversas no linealidades en los modelos de las dos fases determina que esto sea un problema complicado sino es que imposible de resolver. Un procedimiento alternativo para resolver el problema consiste en la integración numérica de las ecuaciones. El uso de métodos numéricos es muy versátil en cuanto al acoplamiento de las dos fases a lo largo del ciclo, sin embargo, la obtención de la solución de esta manera no siempre ayuda a comprender mejor la física del problema. Es por esto que, antes de proceder a estudiar las soluciones, haremos un análisis dimensional de las ecuaciones del sistema. De esta manera es posible determinar la importancia de cada término en la explicación del comportamiento observado, y entender más claramente el papel que juegan los distintos factores que están involucrados en el problema.

### 3.2.1 Análisis dimensional de las ecuaciones.

Para evaluar la importancia de cada término en las ecuaciones de la fase de no bombeo, se hace necesario pensar en dimensiones específicas del sistema. Vamos a tener en mente dos situaciones: la primera es un caso propuesto, de acuerdo a lo que se espera tener en una aplicación real en el océano, y la segunda es el caso del modelo a escala que se probó en condiciones de laboratorio (ver capítulo 4). En la siguiente tabla se muestran las dimensiones que consideraremos:

Tabla 1. Parámetros para el sistema en el laboratorio y el mar.

	$L_R$	$L_D$	$V_0$	$D_R$	$D_D$	$D_{cam}$
Mar	80 m	70 m	46.8 m <sup>3</sup>	1.4 m	1.4 m	4 m
Laboratorio	4 m	15 m	0.0134 m <sup>3</sup>	0.056 m	0.036 m	0.145 m
	$T$	$H$	$\mathcal{A}$	$\epsilon$	$A_{f1}$	
Mar	15 s	2 m	1 m	0.06	2	
Laboratorio	2.25 s	1.26 m	0.05 m	0.06	4	

Las ecuaciones 3.13 y 3.14 nos sirven para analizar el peso de cada término en las situaciones propuestas. Para poder interpretar más claramente los resultados, vamos a desarrollar el término de la cámara de compresión en serie de Taylor<sup>1</sup>. Asimismo,  $\frac{L_i}{AA_{f1}} \gg \chi_i$  por lo que despreciamos el término  $\chi_i \frac{d^2 \chi_i}{dt^2}$ , lo que deja un coeficiente constante para el término de aceleración. Asumiendo conservación de momento, se obtiene la siguiente relación entre los factores de amplificación:

$$A_{f1} = \frac{L_1 A_R}{L_2 A_{cam}} A_{f2}$$

Podemos entonces reescribir las ecuaciones 3.13 y 3.14 como:

$$\begin{aligned} & \Lambda_1 \frac{d^2 \chi_1}{dt^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\chi_1}{dt} \right)^2 + (C_{v1} + C_{f1} + C_{r1}) \frac{d\chi_1}{dt} \left| \frac{d\chi_1}{dt} \right| + \\ & + K \left[ \left( \chi_1 + \frac{L_1}{L_2} \chi_2 \right) + K' \left( \chi_1 + \frac{L_1}{L_2} \chi_2 \right)^2 + K'' \left( \chi_1 + \frac{L_1}{L_2} \chi_2 \right)^3 + \dots \right] + \Gamma_1 \chi_1 = \Delta \text{sen } t \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\Lambda_2 \frac{d^2 \chi_2}{dt^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\chi_2}{dt} \right)^2 + (C_{v2} + C_{f2} + C_{r2}) \frac{d\chi_2}{dt} \left| \frac{d\chi_2}{dt} \right| +$$

<sup>1</sup>Utilizamos la forma  $(1 - a(x + y))^{-\gamma} = 1 + \gamma a(x + y) + \dots$

$$+KZ_1^2 \left[ \left( \chi_1 + \frac{L_1}{L_2} \chi_2 \right) + K' \left( \chi_1 + \frac{L_1}{L_2} \chi_2 \right)^2 + K'' \left( \chi_1 + \frac{L_1}{L_2} \chi_2 \right)^3 + \dots \right] + \Gamma_2 \chi_2 = 0 \quad (3.20)$$

donde,

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{L_1}{\mathcal{A}A_{f1}}, \quad \Lambda_2 = \frac{L_2}{\mathcal{A}A_{f2}} \\ K &= \frac{\alpha\gamma A_R}{\mathcal{A}A_{f1}\Omega^2 V_0}, \quad K' = \frac{(\gamma+1)\mathcal{A}A_R A_{f1}}{2V_0}, \quad K'' = \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)\mathcal{A}^2 A_R^2 A_{f1}^2}{6V_0^2} \\ Z_1 &= \frac{L_1 A_R}{L_2 A_{cam}}, \quad \Gamma_1 = \frac{g}{\mathcal{A}A_{f1}\Omega^2}, \quad \Gamma_2 = Z_1 \Gamma_1 \\ \Delta &= \frac{g}{\mathcal{A}A_{f1}^2 \Omega^2} \end{aligned}$$

Para poder comparar numéricamente el tamaño de todos los términos en una situación específica, nos hace falta solamente dar valores numéricos a los coeficientes de pérdidas  $C_v$ ,  $C_f$ , y  $C_r$ . Para concluir con el análisis dimensional sin distraernos en el estudio de las distintas formas para estos coeficientes, dejaremos su explicación para más adelante (en el marco del estudio del modelo numérico, sección 3.2.4), utilizando por el momento los resultados obtenidos. En la tabla 2 se muestra una comparativa de los tamaños de los distintos términos en las ecuaciones 3.19 y 3.20, donde los coeficientes se han normalizado con el término lineal de la cámara de compresión.

Como podemos ver, hemos utilizado distintas formas para las pérdidas por fricción en el laboratorio y en el mar. Aunque explicaremos más adelante en que consiste cada una de ellas, vale la pena mencionar que para la pérdida de presión por fricción en el caso del mar se empleó un modelo empírico para flujo oscilatorio completamente turbulento en tubos muy rugosos [10]. Esperamos que el valor obtenido con este modelo sea una cota muy superior al valor real para el sistema de bombeo que tiene tubos lisos [19][20]. En el caso del laboratorio, la pérdida de presión por fricción se modeló utilizando una combinación del resultado conocido para flujos laminares unidireccionales y de un resultado teórico obtenido para flujo laminar oscilante en ductos. La motivación para pensar en modelos distintos para la fricción en las dos situaciones surge de los valores para los números de Reynolds  $Re$  y Reynolds modificado  $Re_m$  en cada caso. De los datos mostrados en la tabla 1, encontramos que existe un contraste muy grande entre lo que se obtiene para el

flujo en el tubo resonante en el modelo a escala ( $Re = 7,820$  y  $Re_m = 2,190$ ) y en el mar ( $Re = 590,000$  y  $Re_m = 205,000$ ).

En cuanto a las pérdidas por vórtices y radiación, se utilizaron los valores de la suma  $C_v + C_r$  que se ajustaron empíricamente para obtener la mejor reproducción numérica de las mediciones experimentales obtenidas con el modelo a escala (ver sección 3.2.4). A falta de un mejor valor para el caso del mar, se utilizaron los mismos valores para  $C_v + C_r$  en los dos casos.

**Tabla2. Estimaciones para el tamaño de los distintos términos en las ecuaciones 3.19 y 3.20 para condiciones en el laboratorio y en el mar.**

	LABORATORIO		MAR	
	Resonante	Desagüe	Resonante	Desagüe
Inercia ( $\Lambda/K$ )	1.19	2.79	1.90	1.90
Velocidad al cuadrado ( $1/2K$ )	0.03	0.00	0.02	0.00
Pérdida por vórtices y radiación ( $C_v + C_r$ )/K	0.27	0.12	0.22	0.29
Fricción en el laboratorio				
<i>lineal</i>	0.03	0.13		
<i>constante</i>	0.03	0.13	—	—
1 <sup>er</sup> <i>no lineal</i>	0.02	0.07		
2 <sup>o</sup> <i>no lineal</i>	0.00	0.02		
Fricción en el océano	—	—	0.87	0.99
Cámara de compresión				
<i>lineal</i> (K/K)	1.00	1.00	1.00	1.00
<i>cuadrático</i> K'	0.06	0.06	0.17	0.17
<i>cúbico</i> K''	0.00	0.00	0.00	0.00
Gravedad ( $\Gamma/K$ )	0.34	0.02	1.25	0.20
Forzamiento ( $\Delta/K$ )	0.08	—	1.63	—

Un resultado importante que se obtiene del análisis dimensional de las ecuaciones es que, si bien existen algunos contrastes, el balance de términos es similar para el caso del mar y el caso del laboratorio. Esto permite pensar en la aplicación de los resultados que se obtengan con el estudio del modelo a escala en un sistema real.

Puede verse también, del balance de términos anterior, que el comportamiento principal del sistema es gobernado por los términos lineales. Este

resultado es muy importante, ya que nos permite pensar en analizar un sistema linealizado para obtener la información básica del sistema. Tomando en cuenta los tamaños de los distintos términos presentados en la tabla 2, podemos recurrir a un modelo mecánico como el de la figura 3.4 para interpretar el comportamiento básico del sistema de bombeo. Las masas corresponden al agua dentro de cada ducto, el resorte del lado izquierdo a la fuerza gravitacional en el ducto resonante, el resorte que acopla las masas a la cámara de compresión y los amortiguadores a las pérdidas de presión debidas a los términos no lineales. La pérdida en el ducto resonante se debe principalmente a la generación de anillos de vórtices en la boca y a radiación de ondas superficiales, en tanto que la pérdida en el desagüe es debida a la fricción. No hemos incluido en este modelo el efecto de la gravedad en el ducto de desagüe, ya que en las dos configuraciones consideradas su tamaño es despreciable.

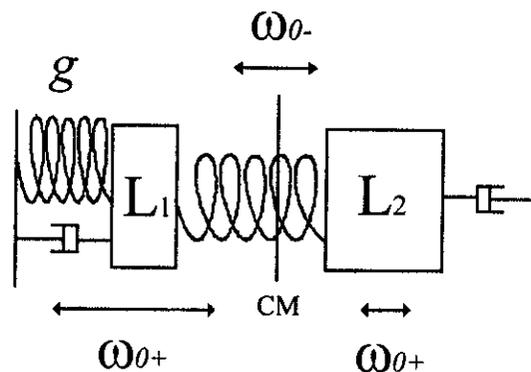


Figura 3.4: Modelo simplificado para explicar el comportamiento del sistema de bombeo.

### 3.2.2 Sistema Linealizado.

Como hemos visto de la sección anterior, los términos lineales en las ecuaciones de no bombeo representan la parte esencial del sistema. Tomando esto en cuenta, buscaremos una solución para el sistema que resulta de retener solo la parte lineal de las ecuaciones 3.19 y 3.20; despreciamos también el efecto de

la gravedad en el ducto de desagüe (ver tabla 2). Recordemos que estas ecuaciones resultan de las ecuaciones adimensionales para la fase de no bombeo 3.13 y 3.14, si se hace la suposición de que  $L_i \gg \mathcal{A}A_{fi}\chi_i$ , para  $i = \{1, 2\}$ , y se desarrolla en serie de Taylor el término de acoplamiento correspondiente a la cámara de compresión. El sistema de ecuaciones linealizado se puede escribir como sigue:

$$\frac{d^2\chi_1}{dt^2} + \frac{1}{L_1\Omega^2} \left( \frac{\alpha\gamma A_R}{V_0} + g \right) \chi_1 + \frac{\alpha\gamma A_{cam}}{V_0 L_1 \Omega^2} \chi_2 = \frac{g}{L_1 \Omega^2} \text{sen } t \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2\chi_2}{dt^2} + \frac{\alpha\gamma A_{cam}}{V_0 L_2 \Omega^2} \chi_2 + \frac{\alpha\gamma A_R}{V_0 L_2 \Omega^2} \chi_1 = 0 \quad (3.22)$$

Para resolver el sistema anterior separamos las variables utilizando un método de operadores [22], lo que nos lleva a las siguientes dos ecuaciones (que están desacopladas):

$$\frac{d^4\chi_i}{dt^4} + A \frac{d^2\chi_i}{dt^2} + B\chi_i = C_i \text{sen } t \quad (3.23)$$

para  $i = \{1, 2\}$  y,

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha\gamma}{\Omega^2 V_0} \left( \frac{A_R}{L_1} + \frac{A_{cam}}{L_2} \right) + \frac{g}{\Omega^2 L_1} \\ B &= \frac{g}{L_1 L_2 \Omega^4} \frac{\alpha\gamma}{V_0} A_{cam} \\ C_1 &= \frac{g}{L_1 L_2 \Omega^4} \left( \frac{\alpha\gamma}{V_0} A_{cam} - L_2 \Omega^2 \right) \\ C_2 &= -\frac{g}{L_1 L_2 \Omega^4} \frac{\alpha\gamma}{V_0} A_R \end{aligned}$$

Como podemos ver, las ecuaciones 3.23 para  $\chi_1$  y para  $\chi_2$  solo difieren en la función de forzamiento, y por lo tanto la solución de la parte homogénea es la misma en ambas; se encuentran así soluciones armónicas que oscilan con las frecuencias naturales del sistema:

$$\omega_0^\pm = \sqrt{\frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}} \quad (3.24)$$

La frecuencia más alta  $\omega_0^+$  corresponde a la oscilación que determina un ciclo de compresión-descompresión en la cámara (representada por el resorte de acoplamiento en la figura 3.4), mientras que la frecuencia baja  $\omega_0^-$  está asociada a una oscilación del centro de masa con respecto a su posición de equilibrio. Para bombear agua buscamos que el sistema esté en resonancia con la frecuencia más alta  $\omega_0^+$  de manera que las superficies libres en ambos ductos oscilan en fase hacia arriba y hacia abajo. Como veremos en el análisis de los datos experimentales, el otro modo de oscilación es prácticamente eliminado por el efecto del bombeo.

Es importante recordar que al haber adimensionalizado el tiempo utilizando la frecuencia del forzamiento  $\Omega$ , estas frecuencias naturales de oscilación (que son adimensionales) están medidas en la escala determinada por  $\Omega$  y por lo tanto la condición de resonancia se satisface cuando  $\omega_0^+ = 1$  ó  $\omega_0^- = 1$ . En este caso, las soluciones para 3.23 —donde hemos considerado al sistema inicialmente en reposo, en  $\chi_1 = \chi_2 = 0$ — se pueden escribir como:

$$\chi_1 = \frac{C_1}{2(2-A)} (t \cos t - \sin t) \quad (3.25)$$

$$\chi_2 = \frac{C_2}{2(2-A)} (t \cos t - \sin t) \quad (3.26)$$

Como podemos ver ambas son soluciones sinusoidales cuya amplitud va creciendo linealmente con el tiempo. La razón de crecimiento de esta amplitud es distinta para las soluciones  $\chi_1$  y  $\chi_2$ ; la magnitud de esta diferencia es determinada por la relación entre los diversos parámetros de diseño. Observando las ecuaciones 3.25 y 3.26 es fácil ver el efecto de no haber incluido los términos no lineales. Al no considerar ninguna pérdida que limite el efecto de la resonancia, la amplitud de las oscilaciones en este modelo crece linealmente con el tiempo indefinidamente. Además de su efecto como limitador del tamaño de las oscilaciones, será necesario evaluar cual es el efecto de los términos no lineales en la frecuencia natural de oscilación.

En este punto vale la pena pensar en el ciclo completo y recordar que las ecuaciones que se han linealizado, y para las cuales se han obtenido las soluciones 3.25 y 3.26, fueron escritas para modelar exclusivamente la fase de no bombeo. Más adelante encontraremos las limitaciones que resultan de haber trabajado solamente con estas ecuaciones que no consideran intercambio de fluido entre los ductos. Por ahora nos conformaremos con la suposición de que el ciclo del sistema se describe aproximadamente con las ecuaciones de

no bombeo 3.13 y 3.14, y estudiaremos los efectos no lineales que no fueron considerados para obtener las soluciones 3.25 y 3.26 y la forma 3.24 de las frecuencias naturales de oscilación.

### 3.2.3 Términos No Lineales.

Para estudiar el efecto de los términos no lineales que aparecen en las ecuaciones 3.13 y 3.14, utilizaremos un modelo reducido de la ecuación para el tubo resonante. Consideraremos para el análisis, solamente los términos correspondientes a las pérdidas (de forma  $\frac{d\chi}{dt} \left| \frac{d\chi}{dt} \right|$ ), el término  $\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2$  obtenido de la ecuación de Bernoulli y las contribuciones cuadrática y cúbica de la expansión del término correspondiente a la cámara de compresión ( $\chi^2$  y  $\chi^3$ ), mientras que se desprecia el efecto del término  $\chi \frac{d^2\chi}{dt^2}$  así como las contribuciones a ordenes mayores del término de la cámara de compresión; esto es razonable, recordando los resultados del análisis dimensional de las ecuaciones. Por otra parte, simplificamos el análisis al no considerar el acoplamiento con la ecuación del desagüe; se espera que el efecto perturbativo de las pérdidas y demás no linealidades sea semejante al que se obtendría considerando el sistema acoplado. Recordando que el término de acoplamiento, correspondiente a la cámara de compresión, aparece en la forma  $\chi_1 + \frac{L_1}{L_2}\chi_2$  en las ecuaciones del sistema 3.19 y 3.20, es razonable suponer que el efecto del acoplamiento será pequeño ya que en ambos casos  $L_2$  resulta ser mucho mayor que  $L_1^2$ . Tenemos entonces el siguiente modelo reducido:

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + \omega_0^2\chi + \varepsilon \left( \lambda \frac{d\chi}{dt} + \mu \frac{d\chi}{dt} \left| \frac{d\chi}{dt} \right| + \zeta \left( \frac{d\chi}{dt} \right)^2 + \eta\chi^2 + \xi\chi^3 \right) = \varepsilon F \cos \Omega t \quad (3.27)$$

Como se puede ver, estamos considerando además de los términos no lineales que mencionamos arriba, una perturbación lineal en la velocidad. Esto se debe a que, si recordamos las formas obtenidas para las pérdidas 3.8, 3.9 y 3.10, todas ellas son funciones de la velocidad del fluido entre otros parámetros. Además de esto, como veremos más adelante, la forma específica que utilizaremos durante la solución numérica para la pérdida por fricción

<sup>2</sup>Cabe mencionar que  $L_2$  resulta mucho mayor que  $L_1$  debido a que está definida en función de un factor  $\frac{A_{cam}}{A_D}$  (ver sección 3.1.1), y el área de la cámara  $A_{cam}$  es bastante más grande que el área del tubo de desagüe  $A_D$  en todas las configuraciones del sistema de bombeo.

determina que aparezca un término proporcional a  $\frac{dx}{dt}$ . Hemos introducido en la ecuación anterior un parámetro  $\varepsilon$  que consideramos lo suficientemente pequeño para poder analizar el sistema utilizando métodos de perturbaciones. Este enfoque supone que el comportamiento básico del sistema es explicado por las ecuaciones linealizadas 3.21 y 3.22, de tal manera que el aporte de los términos no lineales consistirá únicamente en una pequeña corrección a la solución de estas ecuaciones y no las modificará en forma radical. Escogemos un método de promedios de Krylov-Bogoliubov [15] para obtener la solución a orden  $\varepsilon$ . En la ecuación 3.27 hemos fijado al forzamiento de orden  $\varepsilon$  de manera que la ecuación no perturbada (recuperada haciendo  $\varepsilon = 0$ ) es la ecuación del oscilador armónico simple sin forzamiento  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0$ , cuya solución y la primera derivada de esta pueden expresarse como:

$$\chi_p = a \cos(\omega_0 t + \beta) \quad (3.28)$$

$$v_p = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \beta) \quad (3.29)$$

Cuando  $\varepsilon$  es distinto de cero, recordando que estamos considerándolo como una perturbación pequeña, podemos suponer que la solución mantendrá la forma no perturbada pero ahora  $a$  y  $\beta$  serán funciones del tiempo. Sin embargo, estas funciones cambian en el tiempo muy lentamente (mientras más pequeños sean las perturbaciones, más lenta será esta dependencia temporal) de manera que si definimos una nueva escala de tiempo  $\tau = \varepsilon t$ , entonces  $a$  y  $\beta$  serán funciones de  $\tau$ . Combinando las ecuaciones 3.28 y 3.29 con 3.27 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\frac{dv_p}{dt} = -\omega_0^2 \chi_p - \varepsilon (\lambda v_p + \mu v_p |v_p| + \zeta v_p^2 + \eta \chi_p^2 + \xi \chi_p^3 - F \cos \Omega t) \quad (3.30)$$

$$\frac{d\chi_p}{dt} = v_p \quad (3.31)$$

Para sustituir  $\chi_p$  y  $v_p$  en el lado izquierdo de las ecuaciones 3.30 y 3.31 debemos recordar que  $a$  y  $\beta$  son funciones del tiempo. Para simplificar la escritura hacemos  $\phi = \omega_0 t + \beta$ . Además, como estamos interesados en el análisis cerca de resonancia, le damos un valor de orden  $\varepsilon$  a la diferencia entre  $\Omega$  y  $\omega_0$  definiendo un parámetro de sintonía  $\sigma$  como  $\sigma\varepsilon = \Omega - \omega_0$ . Las ecuaciones resultantes forman un sistema lineal para  $\dot{a}$  y  $\dot{\beta}$  cuya solución es:

$$\dot{a} = -\varepsilon \begin{bmatrix} \lambda a \sin^2 \phi + \mu \omega_0 a^2 \sin^2 \phi |\sin \phi| \\ -\zeta \omega_0 a^2 \sin^3 \phi - \frac{\eta a^2}{\omega_0} \cos^2 \phi \sin \phi \\ -\frac{\xi a^3}{\omega_0} \cos^3 \phi \sin \phi + \frac{F}{\omega_0} \sin \phi \cos(\phi + \sigma\tau - \beta) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$a\dot{\beta} = -\varepsilon \begin{bmatrix} \lambda a \sin \phi \cos \phi + \mu \omega_0 a^2 \cos \phi \sin \phi |\sin \phi| \\ -\zeta \omega_0 a^2 \cos \phi \sin^2 \phi - \frac{\eta a^2}{\omega_0} \cos^3 \phi \\ -\frac{\xi a^3}{\omega_0} \cos^4 \phi + \frac{F}{\omega_0} \cos \phi \cos(\phi + \sigma\tau - \beta) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

En este punto es cuando explotamos las dos escalas de tiempo que están involucradas en el problema. Podemos sacar el valor promedio de las ecuaciones 3.32 y 3.33 en un período de  $t$  a  $t + \frac{2\pi}{\omega_0}$  (en términos de  $\phi$  esto corresponde a una integración de  $0$  a  $2\pi$ ) considerando que  $\tau$  se mantiene prácticamente constante durante ese intervalo de tiempo y, en consecuencia,  $a$  y  $\beta$  permanecen constantes también. Realizando los cálculos pertinentes obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales para la amplitud y la fase:

$$\langle \dot{a} \rangle = -\varepsilon \left( \frac{1}{2} \lambda a + \frac{4}{3\pi} \mu \omega_0 a^2 - \frac{F}{2\omega_0} \sin(\sigma\tau - \beta) \right) \quad (3.34)$$

$$a \langle \dot{\beta} \rangle = \varepsilon \left( \frac{3\xi a^3}{8\omega_0} - \frac{F}{2\omega_0} \cos(\sigma\tau - \beta) \right) \quad (3.35)$$

Definiendo  $\psi = \sigma\tau - \beta$  de tal forma que  $\langle \dot{\beta} \rangle = \langle \sigma\dot{\tau} - \dot{\beta} \rangle = \sigma\varepsilon - \langle \dot{\psi} \rangle$ , podemos reescribir la ecuación 3.35 para  $\dot{\beta}$  y así obtener la forma final:

$$\langle \dot{a} \rangle = -\varepsilon \left( \frac{1}{2} \lambda a + \frac{4}{3\pi} \mu \omega_0 a^2 - \frac{F}{2\omega_0} \sin \psi \right) \quad (3.36)$$

$$a \langle \dot{\psi} \rangle = \varepsilon \left( a\sigma - \frac{3\xi a^3}{8\omega_0} + \frac{F}{2\omega_0} \cos \psi \right) \quad (3.37)$$

Podemos identificar el efecto de cada perturbación en la ecuación 3.27 mediante los coeficientes que aparecen en las ecuaciones 3.36 y 3.37 para la amplitud y la fase. En la ecuación para la amplitud 3.36 vemos que solo aparece una dependencia con los términos de pérdidas, mientras que en la ecuación para la fase 3.37 encontramos únicamente la contribución del término cúbico de la cámara de compresión. En ambas ecuaciones se tiene

además el término derivado del forzamiento. Los términos no lineales  $\zeta \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$  y  $\eta\chi^2$  no tienen ningún efecto sobre la amplitud ni sobre la fase a orden  $\varepsilon$ .

Para encontrar el comportamiento asintótico del sistema consideramos la situación en la que  $a$  y  $\beta$  han alcanzado un valor estable; esto se logra pidiendo que  $\langle \dot{a} \rangle = \langle \dot{\psi} \rangle = 0$ . De las expresiones resultantes examinamos la dependencia de la amplitud  $a$  con el tamaño del forzamiento  $F$ . Tomando en cuenta solamente el término  $\mu \frac{dx}{dt} \left| \frac{dx}{dt} \right|$  obtenemos que  $a$  es proporcional a  $\sqrt{F}$ , mientras que si utilizamos el término  $\lambda \frac{dx}{dt}$  obtenemos que  $a$  depende linealmente de  $F$ . Por otra parte, si consideramos el término cúbico de la cámara de compresión, encontramos que la contribución de  $\xi\chi^3$  en la amplitud  $a$  va como  $\sqrt[3]{F}$ . En el análisis de la solución numérica, estas formas nos permitirán determinar la importancia de las diferentes perturbaciones consideradas.

El siguiente problema consiste en encontrar la frecuencia del forzamiento que corresponde al valor máximo de la amplitud  $a$  —i.e. la frecuencia de resonancia del sistema perturbado—. Este es un punto importante ya que nos habla de la magnitud del error en que incurrimos al utilizar los resultados obtenidos con el sistema linealizado para definir un criterio de sintonización. Podemos calcular una solución de la ecuación para la fase 3.37 fijando el valor de la amplitud; esto se puede hacer eliminando el parámetro de forzamiento. Se obtiene de esta forma que la solución  $\psi$  crece linealmente en el tiempo. Así, la frecuencia de oscilación del sistema en la solución de orden cero puede reescribirse como:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \frac{3\xi a^3}{8\omega_0} \quad (3.38)$$

Observemos que el corrimiento con respecto a la frecuencia del sistema no perturbado exhibe una dependencia con la amplitud  $a$ . Este corrimiento determina que el sistema esté fuera de resonancia cuando es excitado con la frecuencia natural de oscilación del sistema linealizado  $\omega_0$ .

Por medio del análisis anterior hemos identificado el tipo de efectos que esperamos encontrar debido a los términos no lineales. Procedemos ahora a calcular una solución numérica en la que se consideran todos los términos del modelo del sistema de bombeo.

### 3.2.4 Solución Numérica.

Hasta ahora hemos hecho diferentes aproximaciones para estudiar la dinámica del sistema de bombeo. Si bien hemos logrado describir su funcionamiento básico, para poder tener una solución susceptible de ser comparada cuantitativamente con resultados experimentales se hace necesario recurrir a los métodos numéricos. Como se ha mencionado anteriormente, además de las no linealidades que aparecen en las ecuaciones del modelo, un impedimento importante para encontrar una solución analítica global radica en la dificultad para acoplar las dos fases del ciclo. Este problema se resuelve cómodamente utilizando un esquema de diferencias finitas para integrar las ecuaciones hacia adelante en el tiempo.

#### Algoritmo.

El procedimiento utilizado para construir numéricamente las soluciones del problema se basa en un esquema de diferencias finitas de dos pasos. Este método parte de una discretización de la escala de tiempo que define los puntos en los cuales se va a calcular la solución numérica. Se obtiene una fórmula de recurrencia que permite ir calculando iterativamente cada punto de la solución utilizando los valores de la misma en los dos puntos anteriores. En la aplicación a nuestro problema, cuando se pasa de una fase a otra (bombeo-no bombeo), se utilizan como condiciones iniciales para la nueva fase, los puntos calculados en la última iteración de la fase previa y se resuelven las ecuaciones correspondientes a la nueva fase.

Para explicar el funcionamiento del esquema numérico, pensemos en la siguiente ecuación diferencial modelo, semejante a las que conforman el sistema que nos interesa:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + sx = f(t) \quad (3.39)$$

Pensando en una escala de tiempo discreta, podemos escribir las siguientes representaciones para la primera y segunda derivadas de una función  $x(t)$ , donde  $h$  es el tamaño de la discretización:

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad (3.40)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{x(t+2h) - 2x(t+h) + x(t)}{h^2} \quad (3.41)$$

Utilizando las aproximaciones discretas 3.40 y 3.41 podemos obtener la siguiente forma de  $x(t + 2h)$  en términos de  $x(t + h)$  y  $x(t)$  que nos permite ir calculando iterativamente los puntos de la solución numérica de 3.39:

$$x(t + 2h) \approx 2x(t + h) - x(t) + h^2 \left( f(t) - sx(t) - r \frac{x(t + h) - x(t)}{h} \right) \quad (3.42)$$

Una vez definido el tamaño del paso  $h \neq 0$ , comenzando con los valores iniciales dados  $t_0$ ,  $x_0 = x(t_0)$ ,  $t_1$ , y  $x_1 = x(t_1)$ , se pueden obtener, a puntos equidistantes  $t_i = t_1 + ih$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , aproximaciones  $\eta_i$  a los valores  $x_i = x(t_i)$  de la solución exacta  $x(t)$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= x_0 & \eta_1 &= x_1 & & (3.43) \\ \eta_{i+2} &= 2\eta_{i+1} - \eta_i + h^2 \left[ f(t_i) - s\eta_i - \frac{r}{h} (\eta_{i+1} - \eta_i) \right], & i &= 0, 1, 2, 3, \dots \\ t_{i+1} &= t_i + h \end{aligned}$$

La calidad de la aproximación esta en función del tamaño del paso  $h$ . En nuestro caso utilizamos un valor de  $\frac{1}{100}$  del período de la ola de forzamiento, que es suficientemente chico para obtener una buena aproximación a la solución. Este método arrojó resultados indistinguibles de los obtenidos utilizando el método Runge-Kutta, pero resulto ser más rápido y más flexible a las modificaciones requeridas para modelar la fase de bombeo.

Para calcular la solución de nuestro problema hace falta determinar una forma cuantitativa precisa de las pérdidas que denominamos  $C_v$ ,  $C_f$  y  $C_r$  en el desarrollo de las ecuaciones del sistema. Por otra parte, es necesario identificar los puntos en los que se sitúan las interfases (en el caso del cambio de no bombeo a bombeo, este punto está regulado por el tamaño de la columna de agua caracterizada por  $\kappa$ , ecuación 3.15). La figura 3.5 muestra un diagrama de flujo del algoritmo utilizado para calcular la solución numérica de las ecuaciones 3.13 y 3.14; este algoritmo fue desarrollado en Turbopascal para PC compatible con IBM.

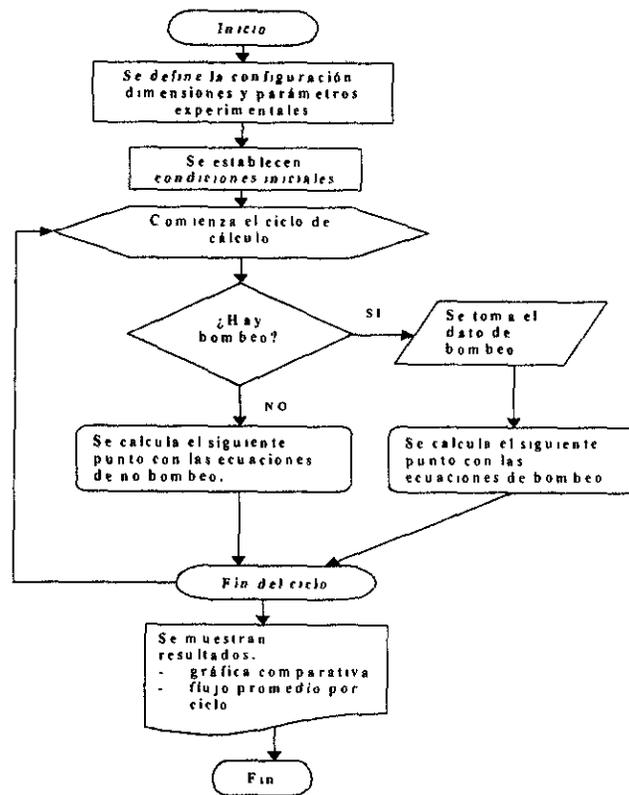


Figura 3.5: Diagrama de flujo del algoritmo utilizado para simular numéricamente al sistema de bombeo

### Formas específicas de los coeficientes de pérdidas.

En la práctica, como habíamos dicho, nos interesa obtener una solución que sea comparable con los resultados experimentales, así que la configuración utilizada para los experimentos numéricos corresponde a la del modelo a escala que se probó en un estanque de olas (ver capítulo 4). De hecho, la señal de forzamiento utilizada para excitar al modelo numérico fue la señal de presión medida en la boca del ducto resonante. Lo que sigue es definir las formas para las pérdidas que se usaron en la simulación numérica.

El término correspondiente a la pérdida de presión por fricción fue modificado varias veces a lo largo del análisis numérico. La forma que se utilizó en un principio era la correspondiente a un flujo unidireccional turbulento<sup>3</sup> multiplicada por un factor de diez; esta idea fue propuesta por Carstens [3][6] y está basada en el trabajo de Jonsson [10] para flujos oscilatorios completamente turbulentos en ductos muy rugosos, por lo que fue considerada como una cota superior al valor de la pérdida por fricción. Se encontró una concordancia satisfactoria entre el modelo numérico y los datos experimentales. Se hicieron alrededor de esta forma diversas modificaciones empíricas buscando optimizar la simulación, sin embargo, aun cuando los resultados obtenidos eran buenos, no existía una justificación teórica para utilizar ese modelo de fricción. Se procedió entonces a estudiar el factor de fricción adecuado para flujos oscilantes. La forma de este factor depende del tipo de flujo que se observa en la tubería (laminar ó turbulento), de la misma manera que en el caso de flujo unidireccional, donde se tienen distintas formas para el coeficiente de pérdida por fricción según la región en que se encuentra el número de Reynolds (diagrama de Stanton) [8]. Para flujos oscilantes, se puede mostrar que la naturaleza laminar o turbulenta del flujo se puede caracterizar mediante un número de Reynolds modificado basado en la frecuencia de oscilación  $Re_m = \frac{\rho \omega a^2}{\mu}$ , donde  $a$  es el radio de la tubería [25][19][20][17][18]. Para valores de  $Re_m < 2000$  se observa flujo laminar; a partir de esa cota es posible que se de una transición a flujo turbulento, y a medida que va aumentando  $Re_m$ , el flujo turbulento comienza a desarrollarse completamente [25]. En los experimentos que se describen

<sup>3</sup>El factor de pérdida por fricción para flujos turbulentos unidireccionales está dado por  $C_f = \frac{1}{2} \left( 1.14 - 2 \log_{10} \left( \frac{R_{rug}}{D} \right) \right)^{-2}$  donde  $R_{rug}$  es el radio de las rugosidades de la tubería.

en el capítulo 4 se trabajó con  $Re_m \simeq 2000$ , lo que se encuentra todavía en la cota de flujo laminar. Esto corresponde con las observaciones hechas experimentalmente utilizando líquido caleidoscópico, donde no se presentó aparentemente ninguna fase turbulenta [6][8].

Estudiamos entonces el caso del flujo laminar oscilante en una tubería que resulta de utilizar un gradiente de presión sinusoidal como forzamiento [19][20]. Para valores muy pequeños de  $Re_m$ , la fuerza viscosa domina a las fuerzas inerciales y el perfil de velocidades que se observa tiende al de un flujo de Poiseuille moviéndose en fase con el gradiente de presión. Al ir aumentando el valor de  $Re_m$ —i.e. al tener frecuencias más altas ó diámetros mas grandes—, una porción central del fluido se empieza a desacoplar del gradiente de presión hasta que, para  $Re_m > 40$ , se establece  $\frac{\pi}{2}$  atrás de éste. Aunque el desfase llega a un valor en que no evoluciona más, al ir aumentando  $Re_m$ , esta porción central del fluido (dominada por las fuerzas inerciales) se expande, en tanto que los efectos viscosos se van confinando a la región cercana a las paredes del ducto; en esa parte, se observa un anillo de fluido, denominado anillo de Richardson [25], que permanece en fase con el gradiente de presión. Para  $Re_m = 2000$  la porción central del fluido ocupa el 90% del área del ducto. El desfase entre el anillo de Richardson (que va en fase con el gradiente de presión) y el resto del fluido, determina que aún cuando la velocidad promedio en una sección del ducto sea nula, exista una pérdida de presión debida a la fricción [8][19][25].

Un modelo para este tipo de flujo fue desarrollado por Pérez [19], que estudió el movimiento de un fluido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$ , confinado a un cilindro infinito de radio  $a$  y forzado por un gradiente de presión oscilante de la forma  $\nabla p = -P_0 \cos \omega t$ . Para flujo laminar, se encuentra la siguiente solución a las ecuaciones de Navier-Stokes correspondientes en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{V}(R, T) = \hat{k} \frac{P_0}{\rho \omega} [P(R) \cos T + I(R) \sin T]. \quad (3.44)$$

Aquí  $R = r/a$  es una coordenada radial adimensional,  $T = \omega t$  es un tiempo adimensional,  $\hat{k}$  es el vector unitario en la dirección del eje del cilindro,

$$\begin{aligned} P(R) &= A \operatorname{ber} \left( R \sqrt{Re_m} \right) - B \operatorname{bei} \left( R \sqrt{Re_m} \right), \\ I(R) &= 1 - B \operatorname{ber} \left( R \sqrt{Re_m} \right) + A \operatorname{bei} \left( R \sqrt{Re_m} \right), \end{aligned}$$

$$A = \frac{\text{bei}(\sqrt{Re_m})}{\text{ber}^2(\sqrt{Re_m}) + \text{bei}^2(\sqrt{Re_m})},$$

$$B = \frac{\text{ber}(\sqrt{Re_m})}{\text{ber}^2(\sqrt{Re_m}) + \text{bei}^2(\sqrt{Re_m})}$$

y  $\text{ber}(x)$  y  $\text{bei}(x)$  son las funciones de Kelvin de orden cero [19]. Como podemos ver, una dependencia con el número de Reynolds modificado  $Re_m$  aparece repetidamente en esta solución.

La velocidad promediada en una sección del tubo y la pérdida de presión debida a la fricción (esta última obtenida de la expresión para el esfuerzo cortante evaluada en la pared del tubo) son:

$$V_p(T) = \frac{P_0}{\omega \rho} \sqrt{\frac{2}{Re_m}} [V_1 \cos T + V_2 \sin T] \quad (3.45)$$

$$\Delta p(T) = -LP_0 \sqrt{\frac{2}{Re_m}} [E_1 \cos T + E_2 \sin T] \quad (3.46)$$

donde,

$$V_1 = (B - A) \text{ber}_1(\sqrt{Re_m}) + (A + B) \text{bei}_1(\sqrt{Re_m})$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{Rm}{2}} + (A + B) \text{ber}_1(\sqrt{Re_m}) + (A - B) \text{bei}_1(\sqrt{Re_m})$$

$$E_1 = (A + B) \text{ber}_1(\sqrt{Re_m}) + (A - B) \text{bei}_1(\sqrt{Re_m})$$

$$E_2 = (A - B) \text{ber}_1(\sqrt{Re_m}) - (A + B) \text{bei}_1(\sqrt{Re_m})$$

En las constantes anteriores aparecen las funciones de Kelvin de orden uno  $\text{ber}_1(x)$  y  $\text{bei}_1(x)$ . Para escribir una forma de  $\Delta p = \Delta p(V_p)$  nos referimos a las condiciones experimentales que nos interesan (ver sección 3.3), donde al calcular las constantes obtenemos que  $V_2 \gg V_1$ . Considerando esto, podemos escribir directamente, a partir de las expresiones 3.45 y 3.46, la siguiente expresión para  $\Delta p(V_p)$ :

$$\Delta p = -\frac{1}{V_2} \rho \omega L \left[ E_2 V_p \pm E_1 \sqrt{V_2^2 \frac{2P_0^2}{\rho^2 \omega^2 Re_m} - V_p^2} \right] \quad (3.47)$$

o bien, arreglada en la forma que buscamos:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = -\frac{L}{a} V_p^2 \left( \frac{Re_m}{Re} \right) \left[ \left( \frac{E_2}{V_2} \right) \pm \left( \frac{E_1}{V_2} \right) \sqrt{\frac{2}{Re_m} \left( \frac{P_0 V_2}{\rho \omega V_p} \right)^2 - 1} \right] \quad (3.48)$$

donde el signo positivo actúa mientras la velocidad  $V_p$  aumenta y el negativo cuando esta disminuye [19] —aquí hemos introducido además de  $Re_m = \frac{\rho \omega a^2}{\mu}$ , el número de Reynolds basado en la velocidad instantánea promedio en una sección del tubo  $V_p$ ,  $Re = \frac{\rho a V_p}{\mu}$  —.

Para adaptar los resultados anteriores al modelo numérico que simula el sistema de bombeo, es necesario tomar en cuenta que el desarrollo teórico del cual se obtiene la forma (3.48) para la pérdida de presión por fricción, está hecho suponiendo que el fluido en una tubería oscila armónicamente como resultado de un gradiente de presión oscilante entre sus extremos. Se encontró que para el caso del sistema de bombeo, el hecho de tener la señal oscilante superpuesta a un flujo unidireccional (es decir, una velocidad residual en la dirección del flujo bombeado), no permite emplear exclusivamente el modelo de flujos oscilantes. Se introdujo la idea de separar el coeficiente de pérdida  $C_f$  de cada ducto en dos componentes,  $C_f = C_f^{lam} + C_f^{osc}$ : la primera, equivalente a la que se observa en un flujo laminar unidireccional<sup>4</sup> con la velocidad residual promedio del flujo en el ducto  $V_{res}$ , tomando en cuenta que este es el tipo de flujo que se observó con el dispositivo experimental; y la segunda, de la forma expresada por 3.48 correspondiente a un flujo oscilante. En esta última, se utiliza para determinar un valor de  $P_0$  la siguiente expresión, obtenida de la condición extrema para que la pérdida de presión de la ecuación 3.47 sea real:

$$P_0 = \frac{\rho \omega}{V_2} \sqrt{\frac{Re_m}{2}} V_{osc} \quad (3.49)$$

donde  $V_{osc}$  es la velocidad que hay que sumar a la velocidad residual promedio antes mencionada  $V_{res}$  para igualar la velocidad máxima que se desarrolla en el ducto. En el modelo numérico se utilizó la velocidad máxima calculada durante un ciclo para determinar el valor adecuado de  $P_0$  para el ciclo siguiente. La forma final que se empleó en el modelo numérico para la pérdida por fricción es la siguiente:

<sup>4</sup>El factor de fricción para flujos laminares en tuberías está dado por  $\frac{64}{Re_d}$ , donde  $Re_d$  es el número de Reynolds basado en el diámetro del ducto.

$$\frac{\Delta p}{\rho} = 16 \frac{L\mu}{a^2\rho} V_{res} - \frac{L}{a} V_p^2 \left( \frac{Re_m}{Re} \right) \left[ \left( \frac{E_2}{V_2} \right) \pm \left( \frac{E_1}{V_2} \right) \sqrt{\frac{2}{Re_m} \left( \frac{P_0 V_2}{\rho \omega V_p} \right)^2 - 1} \right] \quad (3.50)$$

El tamaño de la pérdida por fricción calculada de esta forma es, en magnitud, bastante más pequeña que la primera forma que se utilizó. Esto es lógico ya que en este modelo se piensa en un flujo oscilante laminar, en contraste con el modelo empírico anterior que se aplica a flujos oscilantes turbulentos completamente desarrollados y ductos muy rugosos.

Los coeficientes  $C_v$  y  $C_r$  correspondientes a las pérdidas por formación de vórtices y por radiación, así como el incremento  $\epsilon$  de la masa efectiva se emplearon como parámetros de ajuste para conseguir la mejor correspondencia con los resultados experimentales.

Debido a que no se elaboraron experimentos que permitieran diferenciar los efectos de pérdida por formación de vórtices de los de pérdida por radiación, para este ajuste se consideró un solo parámetro  $K = C_v + C_r$ . En el caso del tubo resonante, se dió la libertad de que  $K_1$  tomara un valor distinto durante la entrada de agua al tubo que durante la salida — $K_1^{ent}$  y  $K_1^{sal}$ , respectivamente—, ya que es probable tener una pérdida por formación de vórtices distinta al concentrarse el flujo dentro del ducto que al salir de este. Para el tubo de desagüe se consideró un valor único  $K_2$  pensando que el efecto de entrada y salida es similar en los dos extremos del tubo (uno conectado a la cámara y el otro que desemboca en el cuerpo de agua receptor). En todos los casos se tomó un valor de  $\epsilon$  igual para ambos tubos.

## Resultados.

Para ajustar la simulación numérica a los datos recabados experimentalmente con el modelo a escala se utilizaron principalmente dos criterios: en primer lugar, se evaluó la semejanza de las mediciones de altura de agua en la cámara (conectada al desagüe) y en el tubo resonante, con las predicciones del modelo numérico; el segundo criterio —que resulta ser el más importante al momento de pensar en la sintonización—, fue la concordancia entre el dato real de flujo y el dato obtenido con el modelo.

En la figura 3.6 se muestran trazas de altura de agua en el tubo resonante y en la cámara de desagüe contra tiempo. Se comparan lecturas experimentales con datos calculados numéricamente; se probaron para el cálculo

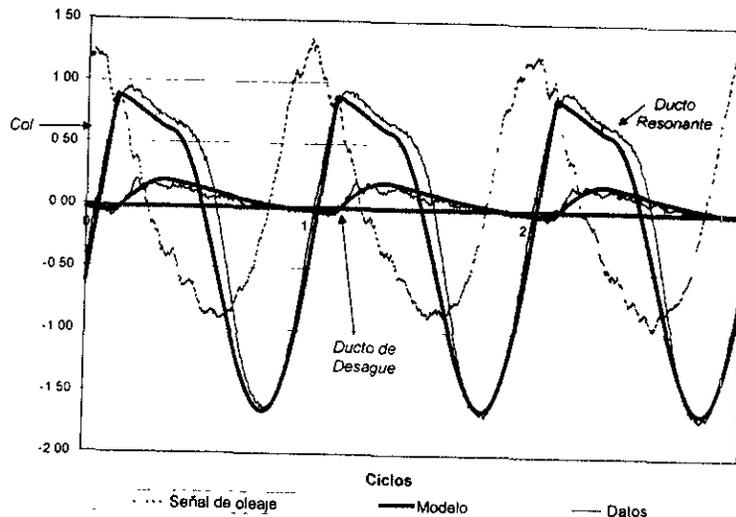


Figura 3.6: Datos experimentales y numéricos de la altura de agua en el tubo resonante y en la cámara de desagüe. El tamaño de las oscilaciones está normalizado con la amplitud de la ola de forzamiento.

numérico distintas combinaciones de los parámetros de ajuste hasta que se obtuvo la mejor correspondencia, tanto con la medición de flujo como con las mediciones de altura de agua en la cámara. Se muestra también la señal de presión medida en la boca del tubo resonante que se usó como forzamiento en la integración numérica.

En lo que se refiere a los valores para  $K_1^{ent}$ ,  $K_1^{sal}$  y  $K_2$ , se encontró que estos regulan, tanto el tamaño y la forma de las oscilaciones, como el flujo a través del sistema. Diferentes combinaciones de estos parámetros lograron reproducir bien los datos experimentales, por lo que no resulta factible intentar sacar alguna conclusión definitiva sobre la pérdida de presión. Tomando esto en cuenta, decidimos escoger un juego de valores que resultó bueno para modelar distintas situaciones experimentales de sintonización. Es claro que la obtención de mejores modelos para la pérdida de presión por formación de vórtices y radiación queda como uno de los trabajos a realizar en el futuro, sin embargo, el hecho de haber usado valores únicos de  $K_1^{ent}$ ,  $K_1^{sal}$  y  $K_2$  en toda la modelación de la figura 3.7, indica una relativa insensibilidad de estos valores a las variaciones en las características del flujo en los distintos

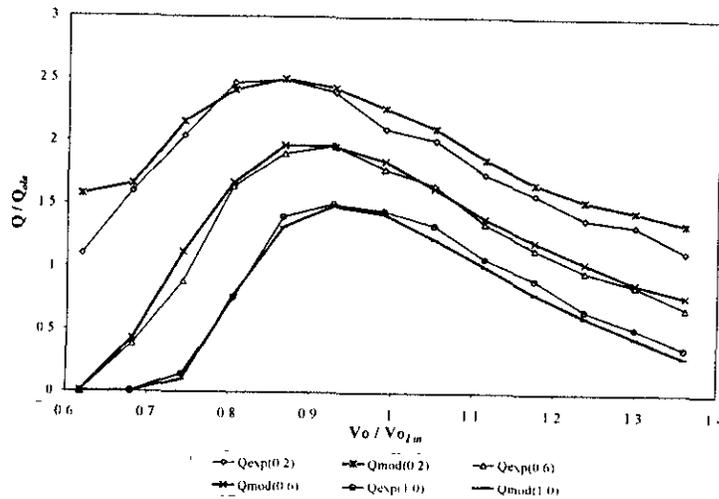


Figura 3.7: Curvas de flujo contra volumen de aire en la cámara de compresión para distintos colectores. El flujo está normalizado con el volumen de agua en el ducto que cabe en una amplitud de ola por un período  $AA_R/T$ . El colector está normalizado con la amplitud de la ola y el volumen con la predicción  $V_{0Lm}$  calculada para el sistema lineal (ver sección 5.1.1).

experimentos.

El valor de  $\epsilon$  en cambio, si resultó único en cuanto a su capacidad de ajustar la simulación numérica a los datos experimentales. El incremento en la longitud efectiva del ducto que es representado por  $\epsilon$ , determina la posición del máximo de flujo bombeado en función del volumen de sintonización (Figura 3.7). En esta figura se muestran curvas de flujo contra volumen de aire en la cámara de compresión para diferentes colectores. Se muestran valores experimentales y resultados calculados con el modelo numérico, en los que se aprecia que la concordancia es muy buena.

# Capítulo 4

## Experimentos.

En este capítulo se describen experimentos realizados con un modelo a escala del sistema de bombeo en un estanque de olas y se muestran los resultados obtenidos. Se describe también el trabajo hecho con chorros de agua que surgen de un tubo vertical, cuyos resultados se aplicaron en el estudio de la fase de bombeo (capítulo 3).

### 4.1 Pruebas con un modelo a escala del sistema de bombeo.

En esta sección se describen experimentos llevados a cabo con un modelo a escala en un estanque de olas para estudiar la sintonización del sistema de bombeo. Se utilizó un modelo de la bomba hecho con tubos de acrílico e instrumentado con sensores de altura de agua de tipo capacitivo instalados para registrar la oscilación en los tubos resonante y de desagüe.

En la figura 4.1 se muestra una fotografía del montaje experimental, y en la figura 4.2 se muestra un diagrama esquemático donde se identifican más claramente las distintas partes del modelo a escala utilizado. Además de los sensores instalados dentro de los tubos, se colocaron sensores de altura de agua en el estanque y de presión en la boca del tubo resonante para muestrear la señal de forzamiento real. En los sensores de altura, un alambre aislado y el agua en la que este se sumerge constituyen los dos polos de un capacitor, separados por el espesor del aislante. La capacitancia del sensor cambia como función de la longitud de alambre sumergida, lo que a su vez modifica la frecuencia de un oscilador electrónico. Al comparar con una señal estable

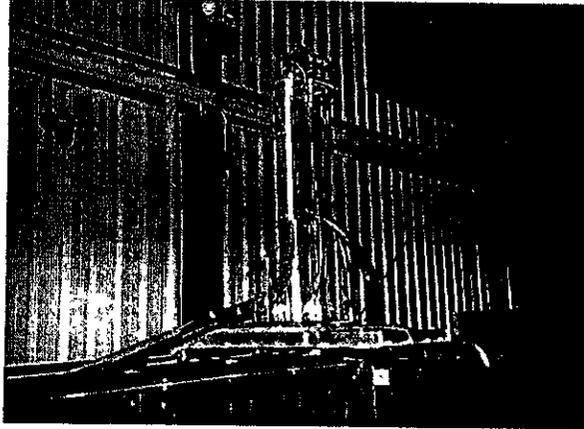


Figura 4.1: Montaje experimental del modelo a escala.

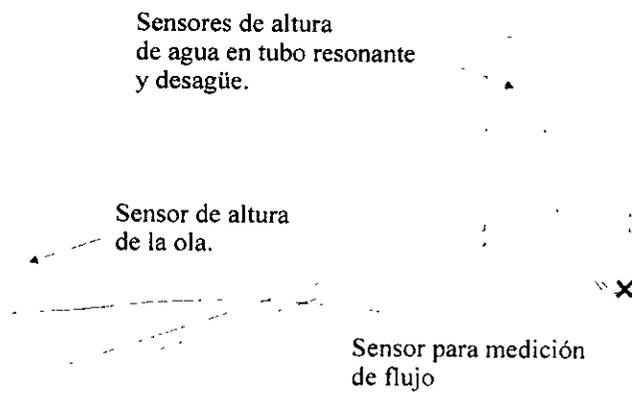


Figura 4.2: Diagrama esquemático del modelo a escala probado en estanque de olas.

de alta frecuencia (2 MHz), se obtiene un voltaje que cambia linealmente con la altura del agua. La sensibilidad fue de  $1\text{mV}/\text{mm}$  en un rango de 0 a  $350\text{mV} \pm 0.5\text{mV}$ . El sensor de presión utilizado fue de tipo piezoléctrico, con un diafragma de silicio de alta integridad y un módulo de titanio con una sensibilidad de  $2\text{mV}/\text{PSI}$  en un rango de 0 a  $100\text{ mV} \pm 1\%$ . Las señales fueron digitalizadas con 11 bits de precisión.

Una bomba de vacío fue empleada para subir el agua en los tubos hasta su nivel operativo dentro de la cámara de compresión. Entre un experimento y otro, el volumen de aire en la cámara y la altura del colector fueron modificados intercambiando agua entre el depósito de la cámara de compresión y un depósito adyacente.

Como se ha mencionado anteriormente, el oleaje induce una señal de presión oscilante en la boca del tubo resonante que provoca una oscilación del agua dentro del mismo. Cuando el tamaño de las oscilaciones rebasa el nivel del colector se forma un chorro de agua que se derrama en la cámara conectada al tubo de desagüe y que constituye el flujo bombeado. En el dispositivo experimental, el flujo es cuantificado y sirve para definir el volumen de la cámara de compresión que determina la condición de resonancia. También es posible a partir de estos datos definir la altura del colector óptima que maximiza el flujo bombeado.

Se describen dos situaciones experimentales, la primera —reportada por Czitrom et.al. (1996) [6]— se refiere a la respuesta del sistema a una señal de forzamiento monocromática, mientras que en la segunda se estudia el comportamiento del aparato con oleaje policromático.

#### 4.1.1 Forzamiento monocromático.

Los experimentos con oleaje monocromático se llevaron a cabo programando el generador de oleaje con una señal sinusoidal de amplitud y período dados. Las magnitudes para estas cantidades características de la ola se fijaron de manera que, de acuerdo con la teoría, estuvieran dentro de los rangos aprovechables por el modelo a escala. Se hizo un barrido en el volumen de la cámara de compresión para localizar el *volumen resonante* y se probaron también distintas alturas del colector para cada volumen de la cámara. Para cada configuración de  $V_0$  y  $COL$  se tomó una serie de datos de los sensores de 13 períodos de largo, y se hicieron mediciones del flujo bombeado tomando el tiempo requerido para llenar un vaso calibrado con el agua que rebasaba el nivel de la cubeta receptora (este procedimiento no es el esquematizado

en la figura 4.2 donde se muestra un sensor para el flujo; dicho método se implementó para los experimentos con oleaje policromático).

La configuración experimental utilizada fue la siguiente:

$L_r$	$D_r$	$A_r$	$L_d$	$D_d$	$A_d$
4.082m	0.056m	0.00985m <sup>2</sup>	15m	0.036m	0.00407m <sup>2</sup>
$D_{cam}$	$A_{cam}$	$V_0$	$COL$		
0.145m	0.06605m <sup>2</sup>	0.033m <sup>3</sup> -0.073m <sup>3</sup>	0.01m-0.1m		
Profundidad del estanque			Profundidad de la toma		
0.4m			0.19m		

En cuanto al oleaje utilizado, se programó el generador para producir una ola sinusoidal de 0.05m de amplitud con un período de 2.25s, sin embargo, por el efecto del estanque, la ola observada mostró claramente la superposición del modo fundamental con su primer armónico.

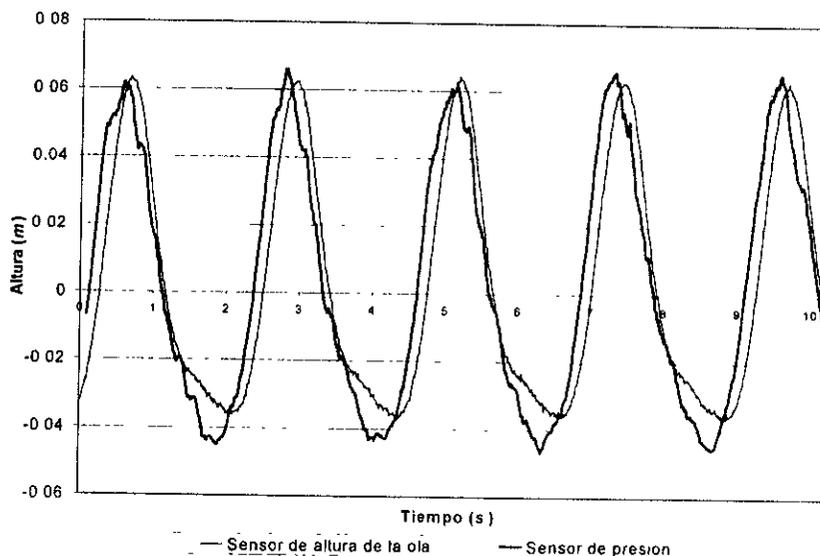


Figura 4.3: Señal de oleaje en el estanque. Trazas de los sensores de altura de la ola y de presión.

En la figura 4.3 se muestran las trazas de los datos recabados por el sensor de altura de la ola y el de presión en la boca del tubo resonante; la lectura del sensor de presión presentaba mucho ruido de alta frecuencia, por lo que la gráfica que se presenta es la de un promedio barrido de diez puntos. La presión esta convertida al valor correspondiente en altura de agua, dividiéndola entre  $\rho g$ , para poder ser comparada con la señal obtenida con el sensor de la superficie. En la figura 4.4 se muestran las componentes de frecuencia del forzamiento, obtenidas aplicando una transformada rápida de Fourier (FFT) a 2048 datos de cada sensor muestreados cada 0.01s [2]. Se observa claramente que el tamaño del primer armónico con respecto al modo fundamental es mas pequeño en la señal capturada con el sensor de presión en la boca del tubo que en la que se capturó con el sensor superficial. Esto se debe a que la atenuación de una onda superficial es mayor mientras más alta es la frecuencia y por lo tanto, la componente correspondiente al primer armónico se pierde más rápidamente al ir aumentando la profundidad.

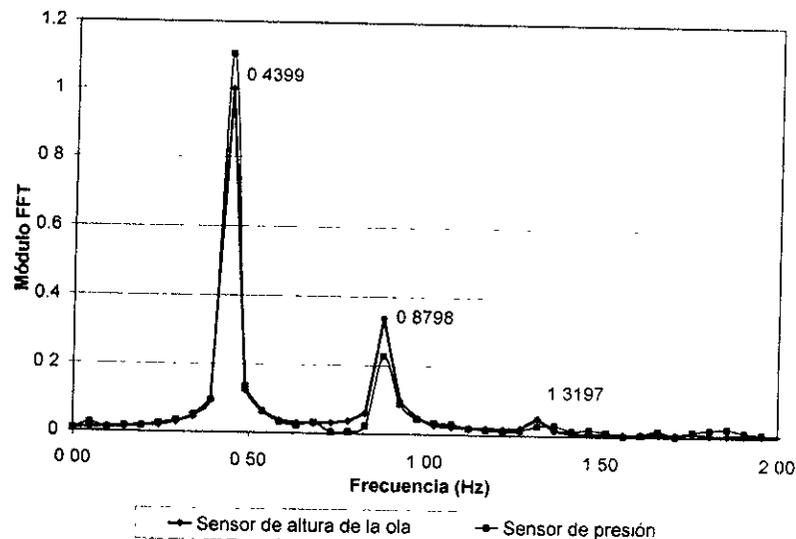


Figura 4.4: Transformadas de Fourier de las señales de oleaje en el estanque capturadas con los sensores de presión y de altura de la ola.

Además de lo anterior, se encontró que la amplitud de la frecuencia principal de la señal medida en la superficie, *es más pequeña* que la de la señal

medida directamente con el sensor de presión en la toma. En un campo de olas normal, la fluctuación de la superficie se atenúa con la profundidad <sup>1</sup>, por lo que el resultado anterior pudiera considerarse sorprendente. Parece ser, sin embargo, que la presencia de la boca del tubo resonante en el agua modifica el campo de presión alrededor de la boca del mismo, haciendo que la presión registrada en la toma sea distinta a la que habría a la misma profundidad si no hubiera ducto. Usando los valores que se muestran en la figura 4.3 y considerando que la frecuencia fundamental de la señal en la superficie bajo las condiciones experimentales debería atenuarse por un factor de 0.85 (este factor se obtiene para el período y la profundidad experimentales), la presencia del tubo de hecho amplifica esta componente por un factor de 1.3. Además de ser dependiente de la frecuencia, lo cual puede evaluarse observando que la relación entre las fluctuaciones en la superficie y en la boca es distinta para cada componente del forzamiento (figura 4.4), este factor de amplificación se modifica con la forma de la boca de entrada del ducto resonante. En experimentos realizados sin la entrada en forma de trompeta, la fluctuación medida en la boca para la frecuencia principal del forzamiento era la misma que la medida en la superficie, lo que, tomando en cuenta la atenuación esperada, corresponde a un factor de amplificación de 1.15. Para complementar lo anterior, el flujo medido a través del sistema resulto ser 10% mayor al utilizar la boca de entrada del ducto resonante en forma de trompeta que al poner el ducto cilíndrico directamente, para las mismas condiciones experimentales. Estos resultados nos indican que el diseño de la entrada del ducto resonante es muy importante por su efecto sobre la señal de oleaje *efectiva* que percibe el sistema como forzamiento.

Tomando en cuenta los resultados anteriores, es la señal de presión medida directamente en la toma la que se utilizó como excitación para el modelo numérico, cuya respuesta se mostró junto con los datos experimentales en la figura 3.6 del capítulo 3.

Otro resultado interesante se obtiene del análisis de las oscilaciones en los ductos para los distintos experimentos. En las figuras 4.5 (a) y (b) se muestra la transformada de Fourier de la señal en el ducto resonante junto con las correspondientes al forzamiento, para dos configuraciones experimentales diferentes. Las transformadas de Fourier de la señal en el desagüe para

<sup>1</sup>de acuerdo a  $\frac{\cosh(\frac{2\pi}{\lambda}(PROF+TOMA))}{\cosh(\frac{2\pi}{\lambda}PROF)}$  donde *PROF* es la profundidad del mar, *TOMA* es la profundidad a la cual queremos saber el valor del factor de atenuación y  $\lambda$  es la longitud de onda de las olas [16].

los experimentos correspondientes se muestran en las figuras 4.5 (c) y (d), respectivamente. Los valores presentados están normalizados con el módulo de la frecuencia principal en la señal de altura de la ola de cada experimento. Cabe hacer notar que la escala en las gráficas para el desagüe es representativa del movimiento del agua en la cámara, por lo que debe ser multiplicada por el factor  $\frac{A_{cam}}{A_D}$  (que es aproximadamente 13.8 en este caso) para representar el movimiento del agua en el ducto.

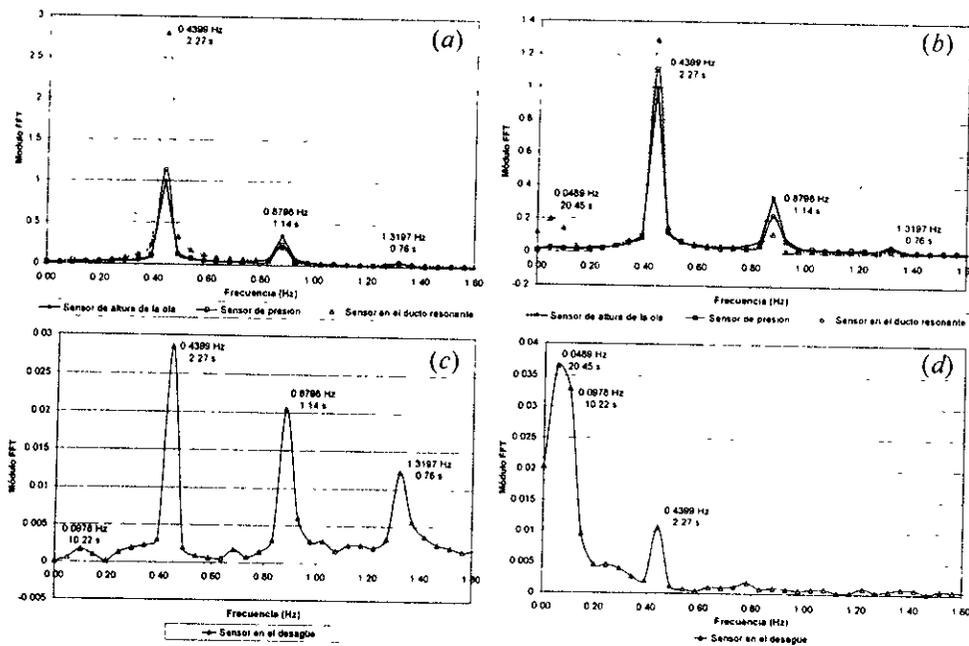


Figura 4.5: Transformadas de Fourier de las señales de: (a) y (b) forzamiento (sensor de presión y de altura de la ola) y de oscilación en el ducto resonante; (c) y (d) oscilación en el desagüe. Se calcularon mediante un procedimiento de FFT con 2048 puntos muestrados cad 0.01 s.

En el experimento correspondiente a las figuras 4.5 (a) y (c) el sistema se encontraba en condiciones de resonancia con la frecuencia fundamental del forzamiento. Podemos ver que esta frecuencia está sustancialmente amplificada en la señal medida en el ducto resonante con respecto a la del forzamiento. El sistema estaba bombeando agua con esta configuración experimental. En el caso que se muestra en las figuras 4.5 (b) y (d), el

sistema estaba fuera de resonancia y no bombeaba agua. La diferencia con el experimento anterior en la señal para el ducto resonante, además de la disminución notable en la amplificación de la frecuencia fundamental del forzamiento, se manifiesta en la aparición de una frecuencia más baja que no se presentaba en el forzamiento. En el caso del desagüe podemos ver que esta frecuencia baja resulta ser, sin lugar a dudas, la componente más importante de la oscilación. Identificamos esta frecuencia baja como el modo de oscilación más lento que se discutió en la sección 3.2.2., en el análisis del sistema linealizado. Haciendo los cálculos correspondientes se encuentra que, según el modelo lineal, si ajustamos el volumen de la cámara de compresión para resonar con la frecuencia alta correspondiente a un período de 2.25 s, el período asociado a la frecuencia baja es de 15 s aproximadamente. Este valor es consistente con lo que se observa en las gráficas 4.5 (b) y (d), donde el pico de la frecuencia baja se sitúa entre los puntos correspondientes a 10.22 s y a 20.45 s.

El comportamiento observado en las figuras 4.5 (b) y (d) es lo que podríamos esperar para un sistema con dos frecuencias naturales de oscilación, esto es, es lógico pensar que, aunque uno de los modos resulte más amplificado por estar más cerca del forzamiento, la respuesta del sistema presente una superposición de los dos modos naturales. Sin embargo, habiendo analizado las diversas situaciones experimentales, se encontró que la aparición de la frecuencia baja es exclusiva de las configuraciones "no resonantes" para las cuales no se observa bombeo a través del sistema. Estos resultados parecen indicar que el bombeo elimina la oscilación más lenta (la del centro de masa, recurriendo a la figura 3.4), lo cual resulta razonable si pensamos que, al rectificarse la oscilación en el ducto resonante, el sistema es forzado a un modo de oscilación en el que el centro de masa no puede desplazarse libremente.

Finalmente, los datos de flujo recabados durante esta serie de experimentos son los que se compararon en la figura 3.7 con los datos del modelo numérico, y sirven para definir un volumen de sintonización experimental para cada altura del colector (identificado por el máximo flujo).

#### 4.1.2 Forzamiento policromático.

Para el dispositivo experimental utilizado en esta serie de pruebas, aparte de algunos pequeños cambios en las dimensiones físicas, la diferencia principal con el utilizado para el caso monocromático radica en el método de medición de flujo. Con estos experimentos se consideró necesario monitorear el flujo

recogido por la cubeta receptora como función del tiempo, en contraste con el caso monocromático ya que, debido a la variación en el tiempo de la señal de forzamiento, se observa una oscilación en la magnitud del flujo durante una misma corrida y no es realista usar un promedio de varias mediciones para determinar un dato instantáneo de flujo. Así, se construyó un depósito provisto de un sensor para poder tener un registro de flujo continuo como se muestra en la figura 4.2. Este registro de flujo nos da, además de un dato acumulado para cada prueba, una traza instantánea susceptible de ser analizada en comparación con la señal de forzamiento. Otro cambio con respecto a la serie de experimentos con forzamiento monocromático fue que se disminuyó la frecuencia de muestreo a 0.1s para generar paquetes de datos más manejables.

La configuración para los experimentos con oleaje policromático fue la siguiente:

$L_r$	$D_r$	$A_r$	$L_d$	$D_d$	$A_d$
5.25m	0.056m	0.00985m <sup>2</sup>	16m	0.036m	0.00407m <sup>2</sup>
$D_{cam}$	$A_{cam}$	$V_0$		$COL$	
0.145m	0.06605m <sup>2</sup>	0.033m <sup>3</sup> -0.073m <sup>3</sup>		0.005m-0.03m	
Profundidad del estanque			Profundidad de la toma		
0.86m			0.279m		

Se utilizaron distintos espectros en la señal de forzamiento diseñados para simular patrones de oleaje como los que se pueden observar en el océano, y al mismo tiempo, para intentar diferenciar la respuesta del dispositivo a las distintas componentes de frecuencia. Se probaron señales con cuatro modos principales superpuestos. Una primera selección, compuesta por componentes de períodos 2, 2.15, 2.3 y 2.45 segundos, fue empleada con tres amplitudes distintas (0.03, 0.04 y 0.05 m para cada componente). Después se utilizó una señal compuesta por frecuencias más separadas, correspondientes a períodos de 1.8, 2, 2.2 y 2.4 segundos, pero en esta ocasión se hicieron pruebas con una sola amplitud de 0.04 m para cada componente.

En la figura 4.6 se muestran las trazas a lo largo del tiempo, obtenidas en uno de los experimentos con la primera combinación de períodos y amplitud 0.03 m, para los sensores de altura de la ola, de flujo y de altura de agua en los tubos resonante y de desagüe. Desafortunadamente, para la serie de experimentos policromáticos no se contó con un sensor de presión para

monitorear simultáneamente la señal de altura de la ola y la presión efectiva en la entrada del ducto resonante. El experimento que se muestra en la figura 4.6 es un caso típico y nos sirve para hacer notar las características de las pruebas. Como se puede ver, las pulsaciones en la amplitud del oleaje se reflejan en la respuesta del sistema, con cierto desfase, primero como pulsaciones en la amplitud de oscilación en el tubo resonante y después como incrementos en la razón de flujo.

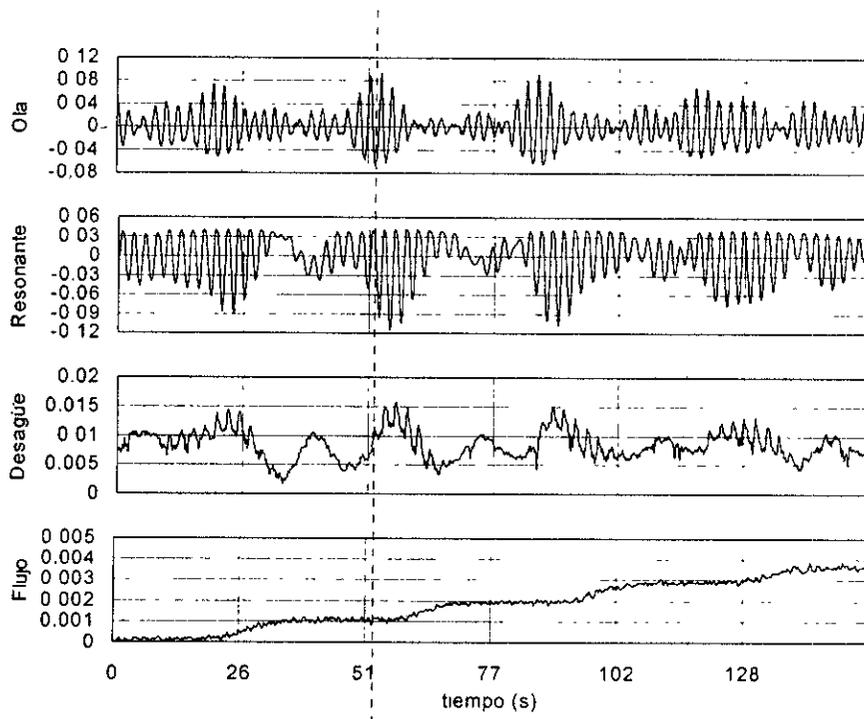


Figura 4.6: Trazas de los sensores de forzamiento, altura de agua en ductos resonante y desagüe (cámara) y flujo en un experimento con oleaje policromático.

Observando la figura 4.6, podemos ver que en la traza correspondiente al flujo, las pendientes más grandes están un poco atrasadas de las oscilaciones de mayor amplitud en la ola y en el tubo resonante; es posible caracterizar de esta forma un tiempo de respuesta del sistema a la excitación. Si definimos

este tiempo de respuesta como el tiempo que transcurre entre que se registran las máximas oscilaciones en el oleaje y se observa el máximo flujo, para este experimento obtenemos un valor aproximado de 12 s. Así mismo, las oscilaciones grandes en el tubo resonante (las que producen bombeo) se reflejan en un incremento en el nivel del agua en la cámara conectada al desagüe. Observando la traza del desagüe con respecto a la del resonante se puede ver que, si bien la superficie libre en la cámara presenta la componente de frecuencia más alta del forzamiento, las variaciones de nivel más notables aparecen con una frecuencia más lenta y se deben principalmente al incremento en el nivel de agua en la cámara como producto del bombeo y luego a su salida por el tubo de desagüe. Así, podemos pensar que una parte importante de la energía absorbida por el sistema se manifiesta en las oscilaciones de frecuencias más lentas, mismas que están asociadas a las pulsaciones que regulan el bombeo y que envuelven a las oscilaciones más rápidas.

En la figura 4.7 se muestran las transformadas de Fourier de la señal de la ola y de las oscilaciones dentro de ambos ductos, obtenidos utilizando un procedimiento de FFT con 1024 datos para cada señal (se utilizaron los datos del mismo experimento mostrado en la figura 4.6).

Observamos que el espectro del forzamiento es "transformado" por el sistema, de tal forma que las oscilaciones en los ductos muestran una nueva distribución de frecuencias. Es notable que además de las frecuencias que —con mayor o menor amplitud— formaban parte de la señal de forzamiento, aparecen nuevas componentes en la respuesta de ambos tubos. En contraste con los resultados encontrados para el caso monocromático, las frecuencias bajas que aparecen en la respuesta del sistema (que habíamos identificado en el caso anterior con la frecuencia natural de oscilación más lenta del sistema), no son atenuadas por el efecto del bombeo.

Análogamente a las curvas de sintonización que se muestran en la figura 3.7, obtenidas para el caso monocromático, se pueden trazar curvas de flujo contra volumen de aire en la cámara de compresión para los experimentos policromáticos. La diferencia es que en este caso el flujo que se mide es el valor acumulado durante una corrida, en contraste con el caso monocromático donde se tabulaba un valor instantáneo de flujo. Este método requiere que la "parte" del ciclo de oleaje utilizado para medir flujo sea la misma en los experimentos que se comparan, ya que dos intervalos distintos de una misma serie de oleaje de espectro policromático pueden generar flujos distintos a través del sistema de bombeo. Para ejemplificar lo anterior, se muestran

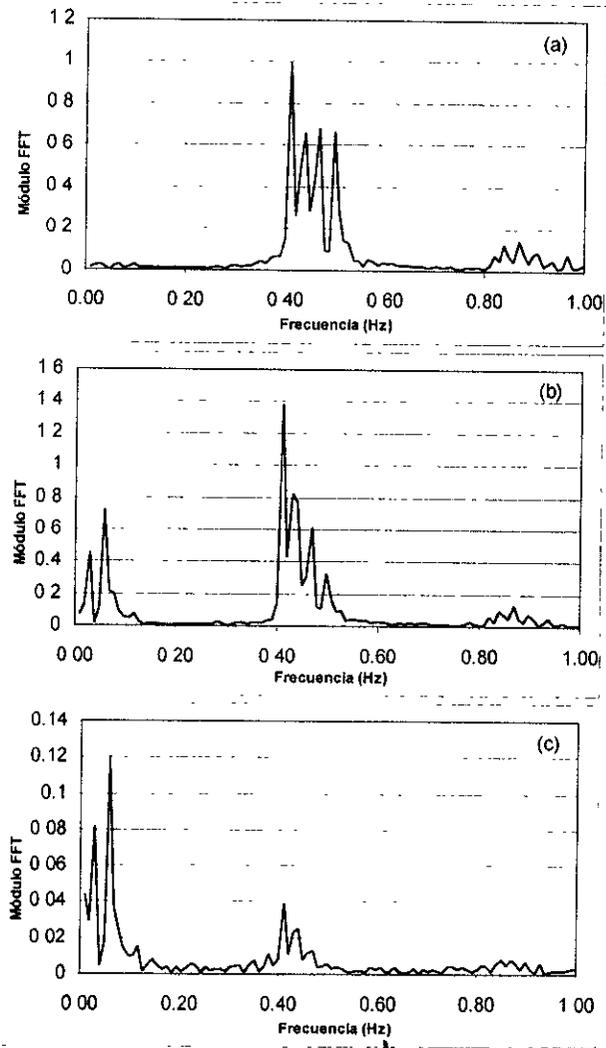


Figura 4.7: Transformadas de Fourier de la señal de la ola (a) y de las señales en los ductos resonante (b) y de desagüe (c).

en la figura 4.8 curvas de flujo acumulado contra volumen de aire en la cámara correspondientes a los datos experimentales donde las componentes de frecuencia de la señal de forzamiento estaban mas separadas.

Este tipo de gráficas constituyen una de las herramientas de análisis más importantes para el estudio de la sintonización en condiciones de forzamiento policromático (ver capítulo 5) ya que, dependiendo de los valores que tomen los parámetros que determinan la frecuencia natural de oscilación del sistema (e.g. el volumen de aire en la cámara de compresión), se pueden obtener condiciones de resonancia con distintas componentes del forzamiento.

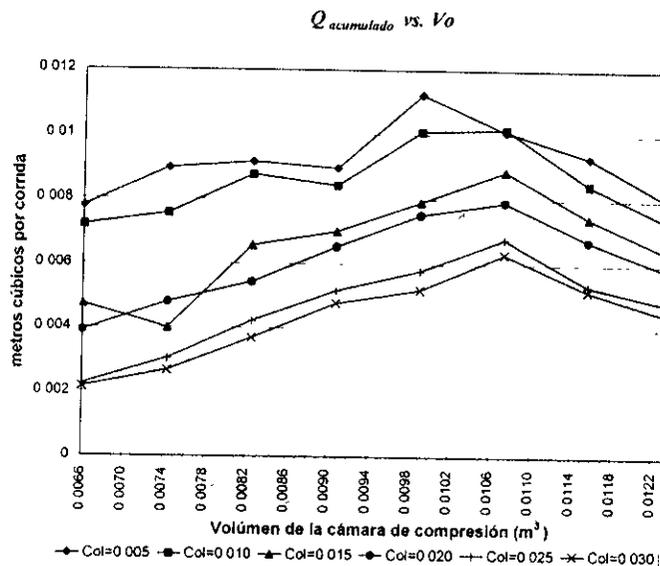


Figura 4.8: Flujo acumulado contra volumen de sintonización para distintos colectores en un experimento con oleaje policromático.

## 4.2 Chorro de agua a la salida de un tubo vertical.

Al salir un fluido por la boca de un tubo vertical, se forma una columna de agua que crece en altura hasta que el líquido comienza a derramarse hacia los lados. Entonces, si el flujo continúa, la altura media de esta columna de agua se establece. Si el flujo es producido por una señal de presión pulsante la altura de esta columna varía. La columna de agua que se describe pesa sobre el líquido que está aún dentro del tubo y así representa una *presión de regreso* que hay que considerar al estudiar el flujo en el tubo. Se realizaron experimentos para caracterizar la altura de esta columna de agua en función de la velocidad del flujo dentro del tubo para varios diámetros y flujos. A partir de un análisis dimensional se determinó la forma funcional que habría de existir entre esta altura y los parámetros característicos del flujo en cuestión.

Definiendo las siguientes cantidades:

$\kappa$	Altura de la columna de agua
$u$	Velocidad del agua a la salida del tubo
$D$	Diámetro del tubo
$g$	Gravedad
$\sigma$	Tensión superficial
$\rho$	Densidad
$\mu$	Viscosidad

Se escogieron  $u$ ,  $D$  y  $\rho$  como variables repetidas para el análisis, obteniendo el siguiente conjunto de cantidades adimensionales:

$$\left( \frac{\kappa}{D}, \frac{u^2}{gD}, \frac{\rho Du^2}{\sigma}, \frac{\rho Du}{\mu} \right) = \left( \frac{\kappa}{D}, Fr, We, Re \right)$$

De lo anterior podemos esperar que la altura de la columna de agua  $\kappa$  se pueda expresar como una función de los números de Froude, Weber y Reynolds.

En la figura 4.9, se muestra un esquema del dispositivo utilizado para estudiar chorros de agua saliendo por tubos verticales. Para cada tubo de

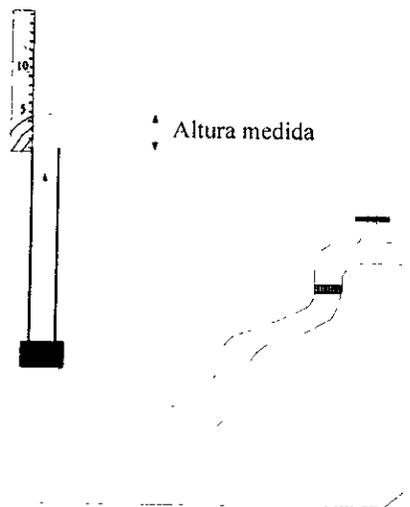


Figura 4.9: Diagrama esquemático del dispositivo experimental para medir la altura de un chorro vertical.

salida utilizado se efectuaron pruebas con distintos flujos. En cada prueba se efectuaron varias mediciones de la altura media en el centro de la columna de agua así como del flujo neto, buscando obtener una serie de datos que permitieran establecer una relación entre la altura de la columna de agua y los números de Froude, Weber y Reynolds. Para las condiciones experimentales exploradas ( $2700 < Re < 22700$ ,  $0.1 < Fr < 4.8$ ,  $5.8 < We < 219.8$ ), se encontró que la variable más relevante fue el número de Froude, de forma tal que

$$\kappa = DFr^{0.635} \quad (4.1)$$

explica el 96.8 % de la varianza en los datos.

Es razonable que el número de Weber no juegue un papel importante en este caso, ya que las fuerzas de tensión superficial se vuelven relevantes para  $We \sim 1$ , cuando son comparables a las fuerzas inerciales. La aparición del número de Froude como variable independiente única en la expresión 4.1 muestra que la altura media alcanzada por un chorro vertical es determinada

esencialmente por el balance entre las fuerzas inerciales y gravitacionales. La irrelevancia de  $Re$  nos dice que estos resultados son válidos para un amplio rango de números de Reynolds.

Aproximando 0.635 como  $2/3$ , y sustituyendo la expresión para el número de Froude, obtenemos:

$$\kappa \simeq \sqrt[3]{\frac{Du^4}{g^2}}$$

que es la expresión 3.15 utilizada en la deducción de las ecuaciones para la fase de bombeo en el capítulo 3.

## Capítulo 5

### Sintonización.

En este capítulo se describen los diferentes criterios que se pueden utilizar para sintonizar el sistema de bombeo en diferentes situaciones de oleaje y así conseguir su funcionamiento óptimo. La sintonización se logra dando a la cámara de compresión el volumen de aire necesario para que la frecuencia natural de oscilación del sistema coincida con la frecuencia del oleaje y así mantener un estado de resonancia. Cuando el sistema opera en esta condición de resonancia, se maximiza el tamaño de las oscilaciones en los ductos y por lo tanto se puede obtener el mayor flujo bombeado [8][9].

El problema consiste entonces en determinar un algoritmo que nos indique cual es el volumen adecuado para conseguir la condición de resonancia en una situación de oleaje y mareas dada. Se tienen dos casos principales: la sintonización a oleaje monocromático, para la cual ya se ha trazado parte del camino a seguir durante la búsqueda de soluciones, pero que representa una situación ideal si pensamos en sus posibilidades para modelar un patron de oleaje real; y la sintonización a oleaje policromático, donde se plantea adecuar los criterios desarrollados para el forzamiento ideal monocromático, en la búsqueda de un algoritmo de sintonización que funcione en un ambiente más realista. Si bien, en principio, el hablar de un forzamiento monocromático sinusoidal limita las posibilidades de aplicar directamente cualquier resultado en una situación real, se encuentra que esta es una muy buena forma de entender cuales son los factores que juegan un papel en la sintonización del sistema, y qué tan importante resulta cada uno de ellos. Una vez identificados estos factores, se tienen las herramientas para estudiar el caso policromático y establecer criterios que funcionen adecuadamente en una situación real.

## 5.1 Sintonización a Oleaje Monocromático.

En el capítulo 3 se estableció un modelo matemático para describir al sistema de bombeo y se plantearon algunos procedimientos de solución al problema. Pensando en una función de forzamiento monocromático de la forma  $A\sin\Omega t$ , se encontró una primera solución para una versión linealizada de las ecuaciones. Se hizo después un análisis de la parte no lineal, considerando a los términos no lineales como perturbaciones para ver su efecto sobre la solución de orden cero. Por último, se planteó un esquema numérico para integrar las ecuaciones. En esta última parte, fue necesario situar el problema en una escala física para darles una forma específica a algunos términos que aparecen en las ecuaciones. Ahora analizaremos los criterios de sintonización que se derivan de cada una de estas soluciones.

### 5.1.1 Sintonización lineal.

En la sección 3.2.1 se encontró la solución analítica para un sistema linealizado de las ecuaciones que modelan la fase de no bombeo. A partir de la forma 3.24 que se obtuvo para las frecuencias naturales de oscilación del sistema, se puede despejar la siguiente expresión para el volumen de la cámara de compresión que determina una condición de resonancia:

$$V_{0Lin} = \frac{P_a - \rho g H}{\rho} \gamma \left[ \frac{A_r}{L_1 \Omega^2 - g} + \frac{A_{cam}}{L_2 \Omega^2} \right] \quad (5.1)$$

donde  $\Omega$  es la frecuencia del forzamiento con la que se quiere estar en resonancia. Esta expresión constituye un primer criterio de sintonización con el que se puede estimar el volumen resonante de la cámara de compresión para una configuración dada. El valor de  $V_{0Lin}$  calculado con esta fórmula fue el que se utilizó en la figura 3.7 para adimensionalizar los valores experimentales del volumen de la cámara de compresión. Del análisis de esas figuras se puede ver que, mientras que el volumen resonante real es representado aceptablemente por la predicción  $V_{0Lin}$  del sistema linealizado (1 en el eje de las abscisas de la figura 3.7) para valores grandes del colector, al disminuir este, el valor real se desplaza hacia valores mas pequeños que el estimado  $V_{0Lin}$ . Las limitaciones de esta predicción se deben a dos factores: primero, fue obtenida utilizando una versión linealizada de las ecuaciones del sistema que funcionará adecuadamente en tanto que los términos no lineales sean pequeños; el otro factor que debe considerarse es que la ecuación 5.1 fue

obtenida utilizando solamente las ecuaciones modelo de la fase de no bombeo, y por lo tanto, no considera el efecto que tiene el intercambio de fluido entre los dos ductos sobre la frecuencia natural de oscilación del sistema.

Analizando la figura 3.7, podemos ver que si se utilizara el estimado  $V_{0_{L_{in}}}$  del volumen resonante para sintonizar al sistema de bombeo, esto representaría una disminución en el flujo hasta de un 15% con respecto a lo que se podría alcanzar sintonizando adecuadamente. Aunque ahora procederemos a buscar un mejor estimador del volumen resonante, más adelante confirmaremos que, como se ve en la figura 3.7, la fórmula obtenida para  $V_{0_{L_{in}}}$  funciona bien como cota superior al valor del volumen resonante, y por lo tanto constituye una importante herramienta de diseño. Su valor como parámetro de diseño radica en el hecho de que, una vez definido el período más grande que se espera en una situación dada, es posible utilizar el valor de  $V_{0_{L_{in}}}$  como estimador del volumen máximo de la cámara de compresión necesario para poder sintonizar óptimamente. Es el mayor período esperado el que nos interesa ya que, como se puede ver de la ecuación 5.1, el volumen de sintonización aumenta con el período ( $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ ).

### 5.1.2 Corrimiento en la frecuencia de resonancia debida a términos no lineales.

Aquí analizamos el efecto sobre la sintonización de los términos no lineales en las soluciones a las ecuaciones de la fase de no bombeo. Primero, utilizamos los resultados obtenidos en la sección 3.2.2, donde se hizo un análisis con teoría de perturbaciones para identificar el tipo de errores que se esperaban en la predicción lineal  $V_{0_{L_{in}}}$  por no haber incluido los términos no lineales, y cuantificamos la corrección al volumen resonante.

Del análisis de perturbaciones, recordemos que se obtuvo un valor efectivo para la frecuencia natural de oscilación del sistema dado por la ecuación 5.3,  $\omega = \omega_0 + \varepsilon \frac{3\xi a^3}{8\omega_0}$ , donde se ve que la frecuencia del sistema perturbado depende de la amplitud de la respuesta en el ducto resonante. Para obtener un valor del corrimiento de la frecuencia resonante del valor no perturbado  $\omega_0$  volvemos a las ecuaciones para la amplitud y la fase 3.36 y 3.37 calculadas en la sección 3.2.2. Sumando las formas cuadráticas de 3.36 y 3.37, los términos que dependen de  $\psi$  se anulan y obtenemos la siguiente expresión asintótica para la amplitud  $a$  :

$$\frac{9}{64} \frac{\xi^2}{\omega_0^2} a^6 + \left( \frac{16}{9\pi^2} \mu^2 \omega_0^2 - \frac{3\xi\sigma}{4\omega_0} \right) a^4 + \frac{4}{3\pi} \mu \omega_0 \xi a^3 + \left( \sigma^2 - \frac{1}{4} \xi^2 \right) a^2 - \frac{F^2}{4\omega_0^2} = 0 \quad (5.2)$$

Ahora, como queremos sacar el valor del corrimiento  $\sigma$  en resonancia, diferenciamos implícitamente y después hacemos  $\frac{da}{d\sigma} = 0$  para encontrar el máximo. La expresión para el corrimiento de la frecuencia resonante es entonces:

$$\hat{\sigma} = \frac{3\xi}{8\omega_0} \hat{a}^2 \quad (5.3)$$

Para encontrar una cantidad numérica de este corrimiento se requiere una expresión asintótica de  $\hat{a}$ , para lo que necesitamos referirnos a una situación específica. Pensando en la situación experimental que hemos utilizado anteriormente, nos referimos a los valores dados en la tabla 2 para los coeficientes de las ecuaciones adimensionales, identificando los términos de la ecuación del ducto resonante 3.19, con los correspondientes en la ecuación del modelo de perturbaciones 3.27. De esta manera se puede encontrar que el único término que resulta significativo es el correspondiente a la pérdida de presión por formación de vórtices y radiación (de coeficiente  $\mu$  en la ecuación 3.27). El valor asintótico de  $\hat{a}$  que se obtiene es:

$$\hat{a} \cong 0.31\sqrt{F}. \quad (5.4)$$

Utilizando de nuevo los valores de la tabla 2 y el resultado anterior, una estimación para el corrimiento de la ecuación 5.3 es  $\hat{\sigma} \approx 10^{-5}F$ . Este valor corresponde a un corrimiento indistinguible de la predicción lineal para el volumen resonante. Si definimos  $V_0^*$  como el nuevo volumen resonante, obtenemos un valor para  $\frac{V_{0,Lin} - V_0^*}{V_{0,Lin}}$  de orden  $\sim 10^{-4}$ , que es despreciable comparado con el corrimiento de  $\sim 0.23$  observado en la figura 3.7 (ese número se obtiene restando al 1 de la figura 3.7, el valor observado para el máximo flujo que es  $\sim 0.87$  para el colector más pequeño).

Podemos confirmar este resultado utilizando el modelo numérico (que obtiene una solución numérica para las ecuaciones completas), si lo hacemos funcionar exclusivamente en la fase de no bombeo. Para distintos volúmenes de la cámara de compresión, la amplificación que se obtiene en la respuesta del ducto resonante con respecto al forzamiento toma distintos valores,

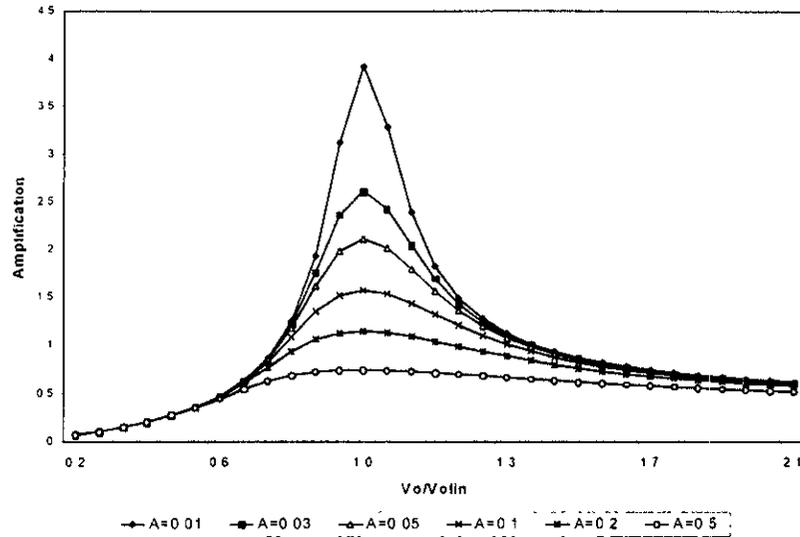


Figura 5.1: Amplificación de la señal de forzamiento en el ducto resonante contra volumen de la cámara de compresión normalizado con la predicción lineal  $V_{0Lin}$  para distintas amplitudes de la ola.

encontrándose el máximo en el volumen de resonancia. En la figura 5.1 se muestran las curvas de amplificación contra volumen de resonancia para distintas amplitudes de forzamiento. Como podemos ver, la posición del máximo se conserva en el mismo sitio (alrededor de 1), de manera que cualquier efecto no lineal que pudiera determinar un corrimiento de la frecuencia natural de oscilación del sistema y, por lo tanto, del volumen resonante, no es apreciable.

Analizando la figura 5.1 se encuentra que las amplitudes de la oscilación en el ducto resonante son proporcionales a la raíz cuadrada de la amplitud de la ola de forzamiento. Una regresión entre la amplitud de oscilación en el ducto resonante y la amplitud de la ola  $A$ , da como resultado  $0.73A^{0.4986}$  con una  $R^2$  de 0.99998. Este resultado muestra que la expresión 5.4 encontrada a partir de la solución asintótica nos da la misma forma funcional que el modelo numérico. A partir de lo anterior, y recordando los resultados del análisis de los términos no lineales realizado en la sección 3.2.3, podemos concluir que, para las condiciones experimentales del laboratorio, la formación de vórtices

y la pérdida por radiación representan la perturbación más significativa y que controlan la amplitud de la respuesta oscilatoria en el sistema y por lo tanto el flujo bombeado en el régimen de resonancia.

Este resultado es un argumento más en el sentido de lo que se encontró en el análisis de los datos experimentales (sección 4.1.1), sobre la importancia que tiene el diseño de la boca del tubo resonante en el rendimiento óptimo del sistema de bombeo, y abre toda una línea de trabajo teórico y experimental para realizar en el futuro.

### 5.1.3 Efecto del bombeo sobre la sintonización.

Habiendo comprobado que el efecto de los términos no lineales no puede ser la explicación para el corrimiento que se observa en el volumen de resonancia efectivo con respecto a la predicción del modelo linealizado, procedemos a analizar el proceso de bombeo. Pensando en el modelo lineal —y en su representación esquemática de la figura 3.4—, podemos ver que la fuerza de restitución para el fluido en el ducto resonante es ejercida tanto por la cámara de compresión como por la fuerza de gravedad. Ahora, durante el bombeo, el agua que surge del tubo resonante y es recolectada por el desagüe deja de pesar sobre el resto del fluido en el ducto, de manera que la fuerza de restitución gravitacional se mantiene constante a partir del momento en que el agua comienza a derramarse. En la dinámica de la oscilación, según el esquema de la figura 3.4, el fluido en el ducto resonante estará entonces sometido a una fuerza de restitución más suave, ya que esta será ejercida solamente por la cámara de compresión. Así, el bombeo disminuye la frecuencia natural de oscilación del sistema de manera que, para mantener una condición de resonancia con la frecuencia del oleaje, la restitución debida a la cámara de compresión debe incrementarse; esto se logra disminuyendo el volumen de la misma. Este fenómeno explica la razón por la cual el máximo bombeo ocurre cerca de la predicción lineal del volumen resonante para los experimentos con colectores altos (en los cuales el bombeo ocurre durante una porción pequeña del ciclo), y se va separando de la predicción, corriéndose hacia volúmenes más pequeños al ir disminuyendo el colector y aumentando el bombeo (figura 3.7).

Podemos hacer una primera estimación del corrimiento en el volumen resonante debido a este efecto si asumimos que la fuerza de restitución debida a la gravedad es despreciable durante la mitad del ciclo durante la que ocurre el bombeo (para colectores pequeños). Podemos simular esta

situación pensando en una aceleración gravitacional efectiva de  $g/2$  para el ducto resonante. Utilizando la ecuación 5.1, tenemos que  $V_0/V_{0Lin}$  se escribe, en una primera aproximación:

$$1 - \frac{g}{2L_1 \left( \Omega^2 - \frac{g}{L_1} \right) \left[ 1 + \frac{A_{cam} L_1}{A_r L_2} \left( 1 - \frac{g}{L_1 \Omega^2} \right) \right]} \quad (5.5)$$

Sustituyendo los valores correspondientes a las condiciones experimentales, la expresión anterior toma un valor de 0.81, que es lo suficientemente grande para explicar el corrimiento observado ( $\sim 0.87$ ). Podemos concluir que la disminución de la fuerza de restitución gravitacional que resulta del bombeo, es lo que determina el corrimiento en la frecuencia natural de oscilación del sistema [9].

#### 5.1.4 Obtención numérica de un algoritmo de sintonización.

Hemos visto que es el efecto del bombeo el que determina un corrimiento importante del volumen resonante observado con respecto a la predicción obtenida con el modelo linealizado. Sería necesario entonces, para obtener una predicción analítica más adecuada de la frecuencia de resonancia, la obtención de soluciones para el sistema completo, es decir, necesitaríamos obtener también una solución para las ecuaciones de la fase de bombeo que se pudiera acoplar adecuadamente con la solución de la fase de no bombeo. La diversidad de términos no lineales en las ecuaciones de bombeo determina que esto sea prácticamente imposible. La alternativa que proponemos en esta sección se basa en la utilización del modelo numérico que hemos descrito en la sección 3.2.3 y que ha resultado bastante bueno para reproducir la respuesta del sistema real.

El procedimiento consiste en ejecutar la modelación numérica para un conjunto de situaciones distintas diseñadas tomando en cuenta los parámetros que modifican el valor del volumen de aire resonante. Para un sistema dado consideramos que: el período y la amplitud de la ola de forzamiento ( $T$  y  $\mathcal{A}$ , respectivamente), la altura de la marea ( $T_d$ ) y el tamaño del colector ( $COL$ ) afectan la sintonización. El período  $T$  es obviamente el parámetro fundamental ya que define la frecuencia con la que se quiere establecer la resonancia. La amplitud de la ola debe considerarse ya que mientras más grande esta sea, mayor será el bombeo y, de acuerdo con lo que hemos encontrado, el proceso

de bombeo juega un papel importante en la definición del volumen resonante. Por esta misma razón deben considerarse la marea y el colector. El tamaño del colector está directamente relacionado con la capacidad de bombeo del sistema (como se puede ver en la figura 3.7). En cuanto a la marea, al bajar el nivel de equilibrio del agua en el ducto resonante como resultado de esta, se observan dos efectos: primero, el bombeo disminuye debido a que el agua recorre una distancia mayor antes de derramarse, y segundo, la masa de agua en el tubo resonante se hace más pequeña, afectando la frecuencia natural de oscilación del sistema.

Para cada conjunto de valores de  $T$ ,  $\mathcal{A}$  y  $T_d$  se hizo un barrido en los valores del volumen de la cámara de compresión y del colector para determinar los valores que dan un flujo máximo (este se obtiene, por supuesto, para el volumen resonante  $V_0$  y el colector óptimo  $COL_0$ ). De esta forma se generó un conjunto de puntos en un espacio de coordenadas  $(V_0, COL_0, Q_0, T, \mathcal{A}, T_d)$ , donde  $Q_0$  es este *flujo resonante*. Estos puntos se usaron para obtener una aproximación polinomial para el volumen resonante  $V_0(T, \mathcal{A}, T_d)$ ; de igual manera se obtuvieron funciones  $COL_0(T, \mathcal{A}, T_d)$  y  $Q_0(T, \mathcal{A}, T_d)$ .

Para el caso del modelo a escala probado en el laboratorio, el dominio utilizado para los experimentos numéricos fue  $T \in (1.5s, 3s)$ ,  $\mathcal{A} \in (0.01m, 0.1m)$ ,  $T_d \in (0m, -0.09m)$ , y  $COL \in (0m, 0.025m)$  y se obtuvieron 253 puntos de  $(V_0, COL_0, Q_0, T, \mathcal{A}, T_d)$ . Por medio de una regresión múltiple se ajustaron los volúmenes resonantes a una expansión de Taylor en tres dimensiones hasta el cuarto orden:

$$V_0(T, \mathcal{A}, T_d) = \sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!} \left[ ((T, \mathcal{A}, T_d) - (T^0, \mathcal{A}^0, T_d^0)) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}}, \frac{\partial}{\partial T_d} \right) \right]^k V_0(T^0, \mathcal{A}^0, T_d^0) \quad (5.6)$$

donde  $T^0$ ,  $\mathcal{A}^0$  y  $T_d^0$  son valores intermedios para el período y la amplitud de la ola y la altura de de la marea respectivamente. Los valores de las derivadas parciales en la ecuación anterior se estimaron con la regresión y entonces se obtuvo un coeficiente para la influencia de cada variable hasta el cuarto orden y para las interacciones. Expansiones similares fueron utilizadas para estimar el colector óptimo  $COL_0(T, \mathcal{A}, T_d)$  y el flujo  $Q_0(T, \mathcal{A}, T_d)$ . Las regresiones fueron realizadas con el paquete STATISTICA, conservando solamente los términos más significativos en la explicación de la varianza.

En la figura 5.2 se muestra una gráfica de los volúmenes resonantes calculados con el modelo numérico contra los valores que predice la ecuación

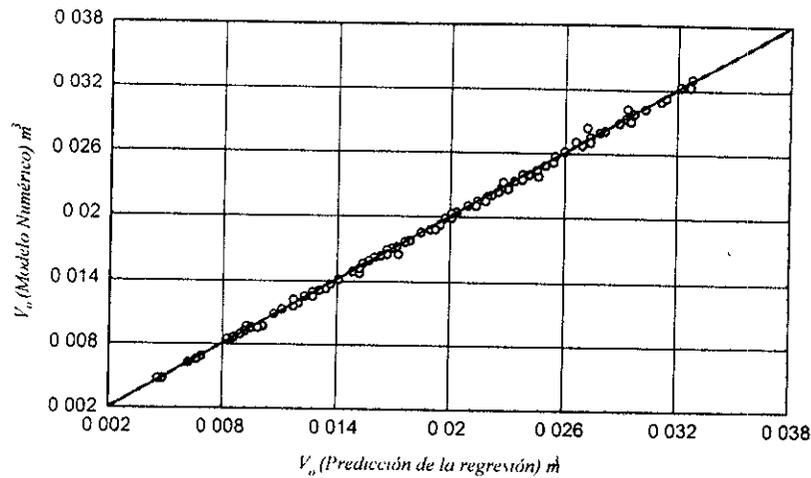


Figura 5.2: Valores del volumen resonante obtenidos con el modelo numérico contra los que predice la ecuación de regresión

de la regresión múltiple. El valor de  $R^2$  (porcentaje de la varianza explicada por la estimación) es de 99.91, en tanto que el error estándar es de  $0.00023 \text{ m}^3$ . Lo anterior nos permite afirmar que la expansión de Taylor a cuarto orden es un modelo adecuado para obtener los volúmenes resonantes para la cámara de compresión. Resultados semejantes se obtienen en las ecuaciones de regresión del colector óptimo y del flujo. La ecuación obtenida con la regresión puede utilizarse para definir el volumen de aire en la cámara de compresión que determina una condición de resonancia para un conjunto dado de valores de  $T$ ,  $\mathcal{A}$  y  $T_d$ , y constituye por lo tanto un algoritmo de sintonización. El sistema se sintoniza óptimamente ajustando el colector con la ecuación para  $COL_0(T, \mathcal{A}, T_d)$ . Es importante recordar que estos algoritmos son confiables para valores de  $T$ ,  $\mathcal{A}$  y  $T_d$  que estén dentro del dominio generado con el modelo numérico ya que fuera de éste la predicción se deteriora rápidamente.

Para probar la ecuación obtenida veamos el caso del experimento con el modelo a escala del cual tenemos los datos que se muestran en la figura 3.7. En ese caso el período de la ola fue de 2.25 s, la amplitud de 0.05 m y la marea de 0 m. Normalizando el valor que arroja la ecuación de la regresión para  $V_0(T, \mathcal{A}, T_d)$  con la predicción lineal (de la ecuación 5.1) se obtiene un valor para el volumen resonante de 0.865. Observando la figura 3.7 podemos

ver que este valor se ajusta muy bien al volumen resonante experimental para el colector de 0.2 (de valor normalizado) que es  $\sim 0.87$ . El colector óptimo estimado por la ecuación de regresión  $COL_0(T, \mathcal{A}, T_d)$  es 0.163, en la misma escala, lo que nos indica que se podría haber obtenido un flujo un poco mayor en los experimentos si se hubiera disminuido más la altura del colector.

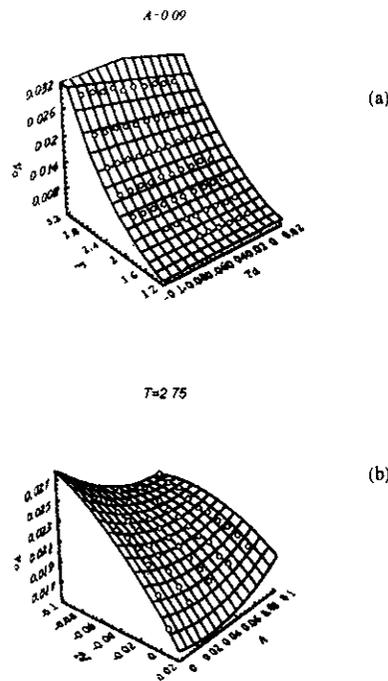


Figura 5.3: Gráficas del volumen resonante en función de: (a) período de la ola y de la marea; (b) amplitud y período de la ola.

Para analizar el comportamiento de  $V_0$  en función de  $T$ ,  $\mathcal{A}$  y  $T_d$  es conveniente utilizar las gráficas de  $V_0(T, T_d)$  y  $V_0(\mathcal{A}, T_d)$  presentadas en la figura 5.3 donde se muestran los puntos obtenidos con el modelo numérico y superficies de interpolación tipo spline. En la figura 5.3.a podemos ver que al aumentar el período de la ola, el volumen requerido para mantener la condición de resonancia es mayor. Esto se puede explicar haciendo referencia al modelo de los resortes esquematizado en la figura 3.4. Observemos que el resorte

de acoplamiento que representa a la cámara de compresión debe suavizarse para disminuir la frecuencia natural de oscilación del sistema y mantener la condición de resonancia con un forzamiento de período más largo. Suavizar el resorte equivale, por supuesto, a aumentar el volumen de la cámara de compresión. Ahora, de la misma figura 5.3.a podemos ver que el volumen resonante de la cámara aumenta al disminuir la altura de la marea. Esto se debe a que, al bajar la marea, la longitud efectiva del ducto resonante se acorta y por lo tanto la masa dentro del mismo disminuye, aumentando la frecuencia natural del sistema. Para mantener la condición de resonancia con el período del forzamiento, este incremento de la frecuencia natural debe compensarse aumentando el volumen de la cámara de compresión. Al bajar la marea también se observa que disminuye el bombeo, y éste es otro factor que determina, según lo que hemos visto, un aumento en el volumen resonante.

Ahora, analizando la figura 5.3.b, podemos ver que, para mareas bajas, el volumen resonante disminuye al aumentar la amplitud de la ola. Esto es explicable pensando que, al aumentar el tamaño de la ola, aumenta el flujo, y esto disminuye la frecuencia natural de oscilación; efecto que debe compensarse con un volumen menor de aire en la cámara. Por el contrario, si no hay marea el volumen resonante aumenta con la amplitud de la ola. Este comportamiento no es explicable directamente recurriendo al modelo de los resortes de la figura 3.4, ya que al no haber marea, el aumento en la amplitud debe evaluarse junto con la optimización del colector para definir el efecto del bombeo.

Del análisis anterior y de los rangos de  $T$ ,  $\mathcal{A}$  y  $T_d$  cubiertos en las simulaciones numéricas, podemos concluir que el volumen de aire resonante para la cámara de compresión es afectado, en orden decreciente de importancia, por el período de la ola, la marea, y la amplitud de la ola.

Un análisis semejante puede llevarse a cabo para la función  $Q_0(T, \mathcal{A}, T_d)$ . En la figura 5.4 se muestran gráficas de  $Q_0(\mathcal{A}, T)$  y  $Q_0(T, T_d)$ , en las que podemos observar el comportamiento de la función de flujo. De la figura 5.4.a es claro que el flujo aumenta con la amplitud de la ola, lo cual era de esperarse, y con el período. Esto también es razonable si consideramos que, en resonancia, podemos esperar oscilaciones mayores para períodos más grandes. En la figura 5.4.b se observa que el flujo a través de la bomba disminuye cuando baja la marea. Esto se explica si pensamos que al bajar la marea el nivel de equilibrio de la superficie libre dentro del ducto resonante es más bajo y, por lo tanto, el agua recorre un tramo más largo antes de sobrepasar el nivel del colector. Esto se traduce en que el sistema está

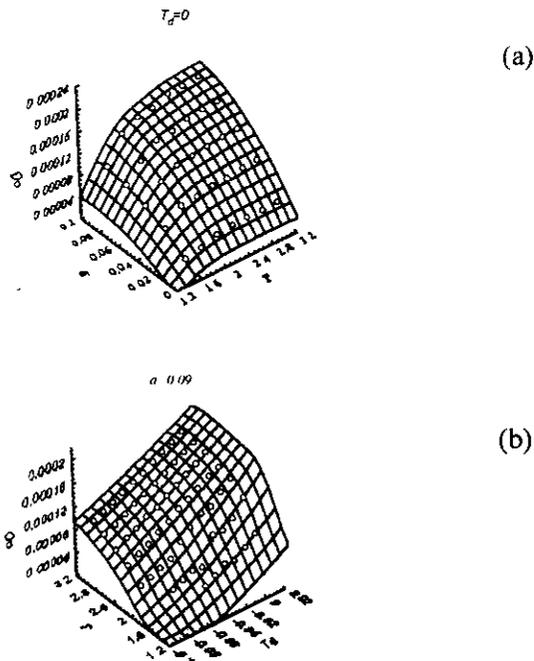


Figura 5.4: Gráficas del flujo resonante a través de la bomba ( $Q_0$ ) en función de: (a) período y amplitud de la ola (sin marea  $T_d = 0$ ) y (b) período de la ola y marea (para un amplitud de ola constante de 0.09 m)

en la fase de bombeo durante una proporción más pequeña del ciclo. De hecho, podemos observar que para amplitudes de la ola pequeñas y mareas grandes, la oscilación en el ducto resonante no es suficiente para sobrepasar el nivel del colector y el sistema no bombea. Concluimos a partir de las gráficas en la figura 5.4 que, para los rangos de  $T$ ,  $A$  y  $T_d$  cubiertos en las simulaciones, el flujo resonante es afectado aproximadamente igual por el período y la amplitud de la ola y por las mareas.

## 5.2 Sintonización a Oleaje Policromático.

Hemos analizado hasta ahora la respuesta del sistema de bombeo a forzamiento monocromático. Los resultados obtenidos nos indican cuales son los factores que juegan un papel importante en la elaboración de un criterio de sintonización. Al pensar en una señal policromática, podemos anticipar que los valores relevantes serán los períodos y amplitudes de cada componente del forzamiento. Al ser excitado por una señal que tiene un espectro dado, el sistema puede sintonizarse para resonar con distintas componentes del forzamiento. La sintonización con una u otra frecuencia del espectro determinará distintas respuestas del sistema —de acuerdo a la capacidad para absorber energía en los distintos intervalos de frecuencia—, determinando que, entre varias configuraciones resonantes para un espectro dado, existan algunas más eficientes que otras. De lo anterior podemos ver que es necesario analizar cual es el criterio para escoger la configuración óptima de los parámetros de sintonización en una situación de oleaje dada.

Estudiaremos primero la respuesta del sistema a partir de las señales experimentales (el forzamiento y las oscilaciones en ambos ductos) obtenidas en las pruebas con el modelo a escala (ver capítulo 4), utilizando las transformadas de Fourier de cada serie de datos como se mostró en la figura 4.7. Este tipo de gráficas nos permiten ver, entre otras cosas, la amplificación o atenuación que presentan las distintas componentes de frecuencia del forzamiento y, de esta manera, identificar cuales son las componentes del forzamiento que están resonando en cada configuración.

Compararemos el volumen de sintonización experimental que se obtuvo a partir de la medida acumulativa del flujo para las distintas pruebas, con las predicciones del modelo monocromático para cada componente del forzamiento utilizado, esperando poder definir un criterio de sintonización para un espectro dado.

### 5.2.1 Respuesta del sistema.

Para analizar la respuesta del sistema de bombeo cuando el forzamiento tiene varias componentes de frecuencia, vamos a recurrir a las trazas de las oscilaciones en los ductos recabadas durante las pruebas con el modelo a escala. En la figura 5.5 se muestran gráficas de transformadas de Fourier correspondientes a la señal de la ola y a las señales en los ductos, para cuatro situaciones distintas. Los cuatro experimentos fueron realizados en

las mismas condiciones, donde el único valor que se cambió entre uno y otro fue el volumen de aire en la cámara de compresión.

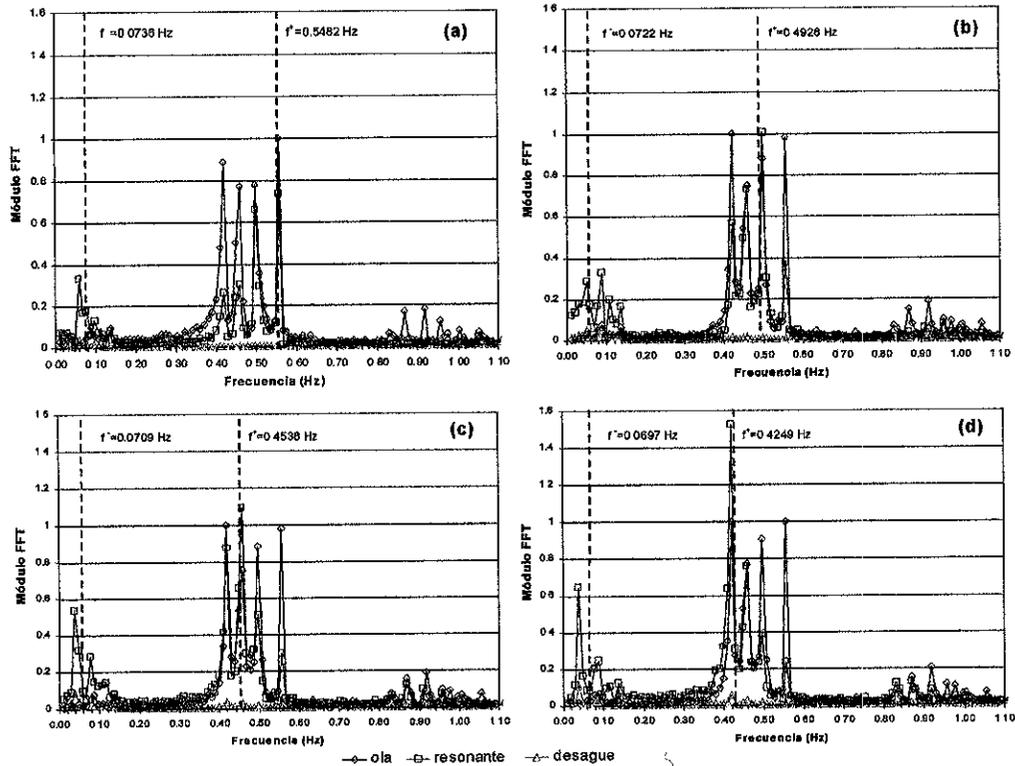


Figura 5.5: Transformadas de Fourier de los datos experimentales para las oscilaciones en los ductos y el forzamiento. Se muestran cuatro pruebas en las mismas condiciones, donde sólo se modificó el volumen de aire en la cámara de compresión.

En este conjunto de gráficas se puede notar claramente el efecto *sin-tonizador* de la cámara de compresión. Al ir cambiando el volumen de aire en la cámara, se van excitando distintas componentes de frecuencia del forzamiento, lo que se observa claramente en la respuesta del ducto resonante. Se han marcado en las gráficas de las transformadas de Fourier, las predicciones del modelo linealizado para las dos frecuencias naturales de oscilación ( $f^+$  y  $f^-$ ). Como podemos ver, la predicción lineal para el modo

más rápido ( $f^+$ ) funciona bastante bien como indicador de la frecuencia que resultará más importante en la respuesta del sistema (utilizando la oscilación en el ducto resonante como medidor de esta respuesta). Este es un resultado importante, ya que indica que la componente principal de la respuesta corresponde a la frecuencia que debería tener una señal monocromática resonante con el sistema. Los datos que se muestran en la figura 5.5 corresponden a experimentos realizados con el colector más grande (0.03 m). Se escogieron de esta forma pensando en analizar un caso donde el corrimiento en la sintonización debido al bombeo fuera lo menor posible.

En cuanto a la frecuencia natural de oscilación más lenta ( $f^-$ ), en contraste con lo que se observó en el caso monocromático, la predicción lineal no explica claramente la relación entre las distintas componentes de baja frecuencia que aparecen en la respuesta del sistema. De hecho, puede mostrarse que estas frecuencias bajas —que aparecen con un tamaño importante en algunos casos (ver figura 5.5 (c) y (d))— corresponden mayoritariamente a combinaciones lineales de las frecuencias principales. Si bien la presencia de estos efectos nos hace pensar en la existencia de resonancias más complicadas, y en una respuesta policromática que no puede ser interpretable simplemente como una superposición de respuestas monocromáticas, el hecho de que el modelo linealizado nos indique cual es la frecuencia principal de la respuesta del sistema, permite pensar en la utilización de los algoritmos monocromáticos como herramienta para definir criterios de sintonización en el caso policromático.

### 5.2.2 Criterios de sintonización para oleaje policromático.

Para tratar de definir un criterio de sintonización para el sistema de bombeo que sea adecuado en condiciones de oleaje policromático, vamos a pensar que la respuesta del sistema se puede analizar como una suma de las respuestas a cada componente del forzamiento. Esto resulta razonable de acuerdo a lo que observamos en la sección anterior, y nos permite evaluar la utilidad de los algoritmos que tenemos para la situación monocromática. Comenzaremos con el análisis de los datos experimentales, lo que nos permitirá probar directamente el criterio escogido, y después desarrollaremos un método útil en cualquier espectro de oleaje, empleando como ejemplo un forzamiento construido arbitrariamente.

### Sintonización a partir de datos experimentales.

A partir de los datos experimentales de flujo medido —como los mostrados en la figura 4.8—, podemos determinar los volúmenes resonantes para cada situación experimental. Ahora, utilizando el algoritmo monocromático alimentado con las frecuencias de las distintas componentes principales del forzamiento, podemos estimar cuales serían los volúmenes resonantes, en una configuración dada, para cada una de estas frecuencias.

En las gráficas de la figura 5.6 se muestran, para dos configuraciones diferentes, las curvas de flujo acumulado contra volumen de aire en la cámara de compresión para distintos valores del colector. La figura 5.6.a es la misma que se mostró en el capítulo 4, solamente que ahora se incluyen, en rojo, las predicciones del modelo lineal ( $V_{0Lin}$ ) para las distintas componentes del forzamiento, y en azul, los estimados obtenidos con el modelo numérico para el período más grande con tres colectores distintos. La figura 5.6.b corresponde a un experimento realizado con otra combinación de frecuencias del forzamiento (también cuatro componentes principales pero más cercanas entre sí). En ambas gráficas, podemos observar nuevamente el efecto del bombeo sobre el volumen resonante: en los experimentos con colectores más pequeños, el bombeo se incrementa, y vemos que el volumen óptimo se desplaza a valores más pequeños (líneas azules). Aunque es la predicción del algoritmo numérico la que se utilizará para sacar conclusiones al respecto de la sintonización, una vez más podemos observar la validéz de  $V_{0Lin}$  (línea roja correspondiente al período más grande) como cota superior al valor resonante del volumen de aire en la cámara, lo que la constituye como una importante herramienta de diseño.

De la observación de ambas gráficas en la figura 5.6, es claro que la predicción monocromática correspondiente al período más largo de cada caso (líneas azules) es la que mejor se acerca al volumen resonante observado en los datos experimentales. De hecho, esta predicción resulta muy buena como estimador del valor óptimo para el volumen de aire en la cámara. Este resultado nos indica que, a pesar de los efectos que —como vimos en la sección anterior— resultan de tener un forzamiento policromático, la respuesta de bombeo del sistema conserva la tendencia marcada por una de las componentes de frecuencia. Hay varios argumentos que explican el hecho de que sea el período más grande del "bloque" principal el que marca la condición resonante real: Lo primero que podemos pensar es que son las olas más largas las que llevan una mayor cantidad de energía (en el

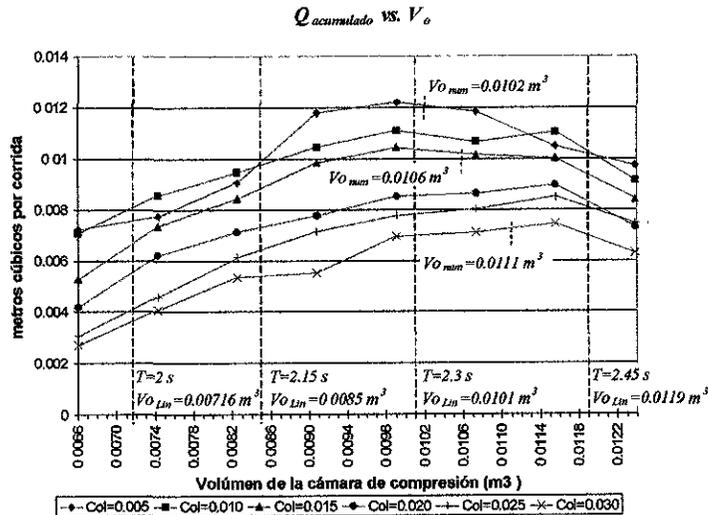
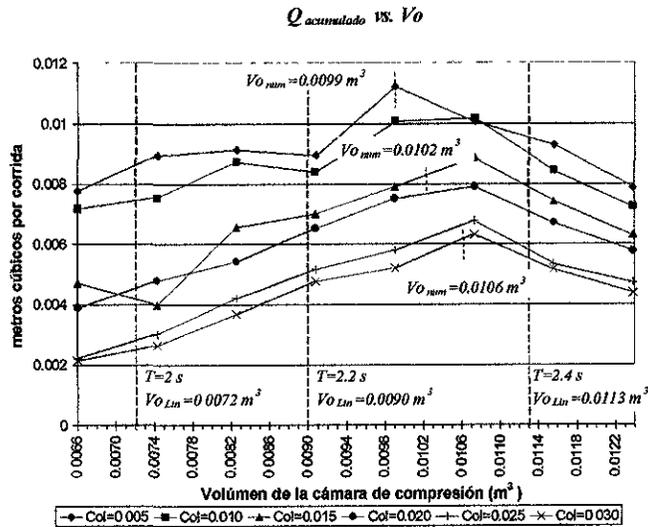


Figura 5.6: Curvas de flujo acumulado contra volumen de aire en la cámara de compresión para experimentos realizados con dos forzamientos distintos. En (a) las cuatro componentes principales fueron de 1.8, 2, 2.2 y 2.4 segundos; en (b) de 2, 2.15, 2.3 y 2.45 s. Las líneas rojas indican las predicciones del modelo lineal  $Vo_{Lin}$  para cada período. Las líneas azules muestran la predicción de  $V_0$  obtenida con el modelo numérico para el período más grande de cada caso y tres colectores distintos.

estudio del oleaje, estas olas de períodos largos se conocen como *oleaje de fondo*<sup>1</sup>); por otra parte, la atenuación de la fluctuación superficial con la profundidad es menor para las olas de períodos más grandes. Si pensamos en el análisis experimental del forzamiento monocromático (sección 4.1.1) recordaremos que la atenuación del primer armónico era notablemente mayor que la del modo fundamental. Esto último fue analizado en conjunto con la amplificación del modo fundamental de la señal de presión —atribuida a la presencia de la boca del ducto resonante—, y nos da otro argumento para pensar que los períodos grandes son los que generan una respuesta más eficiente del sistema de bombeo.

En todos los experimentos realizados se repite este resultado, lo que nos invita a pensar que el criterio de sintonizar al período más grande podría ser aplicable en una situación real. Sin embargo, cabe mencionar que en las pruebas con el modelo a escala, los cuatro períodos principales superpuestos en la señal de forzamiento tenían amplitudes semejantes. En el caso del oleaje real, el "bloque" de frecuencias principales podría estar compuesto por componentes de tamaños más dispares, determinando que la componente más eficiente no fuera necesariamente la de período más grande. Para contemplar esta situación, recurriremos a la ecuación para el flujo  $Q_0(T, \mathcal{A}, T_d)$  obtenida del análisis numérico (cuyas gráficas se mostraron en la figura 5.4) en el estudio del siguiente caso, donde delineamos el método que se propone utilizar en un momento dado en una aplicación real.

### **Método de sintonización para forzamiento policromático.**

Comenzamos con una función de oleaje particular, a partir de la cual buscaremos decidir cual es el volúmen óptimo de aire para la cámara de compresión en una situación dada. En el caso de un sistema real, es posible utilizar mediciones de oleaje para definir cada cierto tiempo el forzamiento con el cual queremos optimizar el bombeo. Emplearemos para lo siguiente un sistema con las magnitudes descritas en la sección 4.1.1 y para el cual obtuvimos numéricamente un algoritmo de sintonización monocromático en la sección 5.1.4, de manera que podamos usar directamente las funciones  $V_0(T, \mathcal{A}, T_d)$  y  $Q_0(T, \mathcal{A}, T_d)$ . Utilizamos una señal de forzamiento compuesta únicamente por dos frecuencias (correspondientes a períodos de 2 s y 2.6 s) con magnitudes diferentes, en la cual hemos dado un tamaño significativamente mayor

---

<sup>1</sup>Ver *swell* en inglés en [16].

a la componente de 2 s (ver figura 5.7). Esta señal nos permite ejemplificar un caso en el que el criterio de sintonización nos indica que no es adecuado sintonizar al período más largo ya que existe una componente más eficiente aunque es de período más corto.

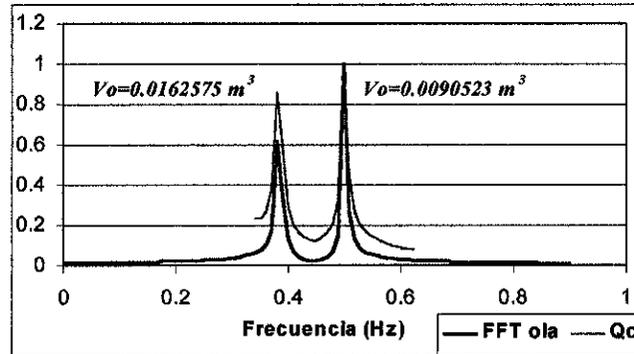


Figura 5.7: Transformada de Fourier de la señal de oleaje y gráfica de  $Q_0(T)$  correspondiente, cada curva normalizada con respecto a su máximo.

En la figura 5.7 se muestra, además de la transformada de Fourier del forzamiento utilizado, el valor de flujo resonante dado por  $Q_0(T, \mathcal{A}, T_d)$  en función de la frecuencia  $f = T^{-1}$ . Para trazar la gráfica de  $Q_0(T, \mathcal{A}, T_d)$  hemos usado la transformada de Fourier del forzamiento para definir una función  $\mathcal{A}(T)$  y un valor constante  $T_d = 0$ , de manera que  $Q_0 \equiv Q_0(T)$ . Si utilizamos esta predicción de flujo en resonancia para decidir cual es la componente del forzamiento que conviene sintonizar, veremos que el mayor flujo se puede obtener si el sistema se sintoniza a la componente de 2 s. Notemos que si el sistema se sintoniza para resonar con la componente de período más grande (criterio que probó ser efectivo al tener componentes de iguales magnitudes), estaríamos registrando, en este caso, un flujo hasta 15% menor al máximo posible. Es por esto que resulta importante tomar en cuenta el tamaño de cada componente en la elaboración del criterio de sintonización. Una vez escogida la componente más eficiente, la función  $V_0(T, \mathcal{A}, T_d)$  nos da el valor óptimo del volumen de aire en la cámara de compresión ( $9.05 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  para este caso). Es interesante recalcar, a partir de la figura 5.7, que la diferencia entre las magnitudes del flujo máximo esperado para la situación resonante con una y otra componente del forzamiento

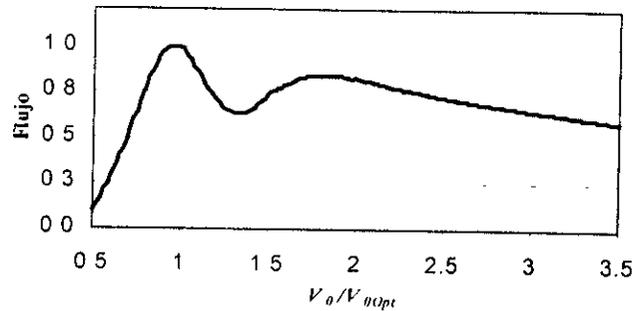


Figura 5.8: Valores de flujo contra volumen de aire en la cámara de compresión obtenidos con la simulación numérica, utilizando como forzamiento una señal con componentes de 2 y 2.6 s.

( $Q_0$ ), es notablemente menor que la magnitud de la diferencia observada en el forzamiento mismo (FFT). Esto confirma la idea de que los períodos más largos son empleados por el sistema de bombeo de una forma más eficiente, aún cuando, al tomar en cuenta las magnitudes con las que las distintas componentes se presentan en un patrón de oleaje dado, resulte conveniente sintonizar a un período menor.

El criterio anterior asume que, como se observó en el análisis de los experimentos con forzamiento policromático, el sistema responde a una excitación con un espectro de frecuencias dado, básicamente como una superposición de las respuestas a sus componentes. Podemos confirmar lo anterior para nuestro caso particular haciendo uso del modelo numérico, esta vez alimentado directamente con el forzamiento en cuestión. En la figura 5.8 se muestra una gráfica de flujo contra volumen de aire en la cámara de compresión obtenida con la simulación numérica. El eje del flujo está normalizado con el valor máximo, mientras que el eje del volumen lo está con el valor escogido según el criterio de sintonización. Como se puede ver, la respuesta presenta dos máximos, correspondientes a los volúmenes que resuenan con cada componente del forzamiento. Se confirma que el máximo absoluto en el flujo se da para el valor de volumen que anteriormente habíamos identificado con el valor resonante correspondiente a la componente de 2 s.

El método anterior parte de la señal de oleaje con la que se excita al

sistema y da como resultado el volúmen de aire óptimo de la cámara de compresión, utilizando algoritmos que son susceptibles de programarse y ser ejecutados por un microprocesador. Esto lo constituye en una herramienta útil y fácil de emplearse en el control del sistema de bombeo por energía de oleaje.

## Capítulo 6

### Conclusiones.

Se describe en este trabajo un método para obtener un algoritmo de sintonización para un sistema de bombeo con energía de oleaje que funciona por resonancia. La resonancia del sistema con el oleaje determina una condición óptima de funcionamiento, y puede conseguirse ajustando el volumen de aire en una cámara que es comprimida y descomprimida armónicamente por una columna de agua excitada por el oleaje. En el análisis de las soluciones al modelo matemático propuesto, se evaluaron los efectos que tienen los distintos parámetros y características del sistema en la sintonización. A partir de un análisis dimensional, se validó el uso de los resultados obtenidos con un modelo a escala del sistema para sacar conclusiones al respecto del comportamiento esperado en un dispositivo de tamaño real. Este análisis sirvió también para determinar la importancia de las distintas componentes del modelo matemático utilizado en la descripción del sistema. Se encontró que el comportamiento esencial del sistema es descrito por la parte lineal de las ecuaciones del modelo, en tanto que los términos no lineales constituyen casi exclusivamente una fuerza limitadora del tamaño de las oscilaciones y, por lo tanto, del flujo a través del sistema.

Se obtuvo un primer algoritmo de sintonización para oleaje monocromático, a partir de la solución analítica de una versión linealizada de las ecuaciones utilizadas para modelar al sistema. Las limitaciones de este algoritmo resultan básicamente de haber sido desarrollado a partir de ecuaciones que no consideran el bombeo. La predicción para el volumen resonante obtenida de esta manera (ver  $V_{0L,m}$  en la sección 5.1.1) resultó ser útil como cota superior, pero presentó una desviación con respecto al valor óptimo —bastante notable en los casos donde las oscilaciones eran de mayor tamaño y, por lo

tanto, también producían mayor bombeo—. Se concluyó que el corrimiento observado es debido al efecto del bombeo (sección 5.1.3).

Se desarrolló un algoritmo de sintonización para oleaje monocromático que toma en cuenta tanto el efecto del bombeo como los términos no lineales, utilizando una simulación numérica que probó ser muy confiable en la reproducción de datos experimentales. A partir de un conjunto de datos arrojados por el modelo numérico, se construyeron ecuaciones de predicción para el volumen resonante, el flujo máximo y el colector óptimo en función del período y la amplitud de la ola y de la marea. Del análisis de estas ecuaciones se concluyó que el volumen óptimo de aire para la cámara de compresión es afectado, en orden decreciente de importancia, por el período de la ola, por las mareas y por la amplitud de la ola; en tanto que el flujo máximo es afectado de manera similar por las tres variables (sección 5.1.4).

En el estudio de la sintonización a oleaje policromático se recurrió a datos experimentales para evaluar el comportamiento del sistema (sección 5.2.1). Se encontró que, si bien existe una interacción entre las distintas componentes de frecuencia presentes en el forzamiento, la parte principal de la respuesta del sistema (la que regula el flujo y, por lo tanto, la que nos interesa para la sintonización) es analizable como una superposición de las respuestas monocromáticas a cada componente. Este resultado es muy importante en términos prácticos, ya que permite pensar en la utilización del algoritmo de sintonización monocromático en situaciones de oleaje real con un espectro dado; es decir, reduce el problema a encontrar un criterio para definir a que componente de un oleaje policromático queremos sintonizar.

Del análisis de los datos experimentales con oleaje policromático se concluyó que las componentes de períodos más grandes son las que provocan una respuesta más eficiente del sistema de bombeo, determinando que, si tenemos un forzamiento compuesto por varias frecuencias, todas con la misma magnitud, la elección adecuada sea la de sintonizar a la componente correspondiente al período más grande (primera parte de la sección 5.2.2). A este resultado se atribuyeron tres explicaciones posibles: primero, el hecho de que las olas de períodos más grandes llevan mayor energía; segundo, que al aumentar la frecuencia del oleaje, la fluctuación de presión superficial se atenúa más rápidamente con la profundidad; y tercero, que la presencia de la boca del ducto resonante en el mar modifica el campo de presión a su alrededor, dando como resultado una señal efectiva amplificada. Este último efecto, además de ser considerablemente dependiente de la forma de la boca del ducto resonante que está expuesta al oleaje, parece ser mayor en las

componentes de período mas grande. Por el tipo de datos recabados durante los experimentos, no es posible identificar cual es la importancia de cada uno de estos efectos en el comportamiento del sistema; ese es un trabajo que queda por realizarse y que resultará muy importante en el desarrollo del diseño más óptimo de la entrada del ducto resonante.

Para elaborar un método de sintonización que tomara en cuenta las distintas magnitudes que normalmente presentan las distintas componentes del oleaje, se decidió utilizar la ecuación para el flujo máximo construida a partir de los datos arrojados por la simulación numérica (segunda parte de la sección 5.2.2). Se probó exitosamente el criterio de definir la componente más eficiente de un espectro de oleaje dado, utilizando el valor de esta ecuación de flujo máximo en función de el período y la amplitud de cada componente y de la marea. Se utilizó la simulación numérica alimentada con el forzamiento policromático para probar los resultados y se corroboró el resultado esperado, confirmando que la respuesta del sistema a un forzamiento con varias componentes de frecuencia se puede pensar, para efectos de la sintonización, como la suma de las respuestas monocromáticas.

El método de sintonización propuesto para forzamiento policromático es susceptible de ser programado secuencialmente, y de convertirse en el criterio de control del sistema de bombeo por energía de oleaje. En una aplicación real, un microprocesador puede utilizarse para capturar el valor de la marea y la señal de oleaje transmitidas por un sensor de presión, calcular el espectro del oleaje, escoger a partir de las funciones de flujo máximo y volumen resonante — $Q_0(T, \mathcal{A}, T_d)$  y  $V_0(T, \mathcal{A}, T_d)$ , respectivamente— el valor óptimo para el volumen de aire en la cámara de compresión y controlar un sistema que dé físicamente este volumen de aire a la cámara. Las funciones  $V_0(T, \mathcal{A}, T_d)$  y  $Q_0(T, \mathcal{A}, T_d)$  se pueden construir a partir de la simulación numérica, una vez definidas las dimensiones de un sistema particular y los rangos esperados para las variables de período y amplitud de las componentes de oleaje y mareas. Estas últimas estarán en función de las características físicas y de oleaje del sitio donde se vaya a instalar el sistema, y serán determinadas por un criterio de diseño adecuado a la aplicación que se le quiera dar.

# Bibliografía

- [1] Batchelor, G.K., **An introduction to fluid dynamics**. Cambridge University Press, 1994, 1967.
- [2] Brigham, E.O., **The Fast Fourier Transform**. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [3] Carstens, T., 1993. SINTEF, Trondheim, Norway, comunicación personal.
- [4] Czitrom, S.P.R., Patente en trámite. Sintonizador para sistemas de extracción de energía de oleaje que operan por resonancia. Solicitud de Patente Mexicana No. 933605.
- [5] Czitrom, S.P.R., 1996 **Sea-Water Pumping by Resonance I**. Proceedings of the Second European Wave Power Conference, Lisboa. ISBN 92-827-7492-9, pp.366-370.
- [6] Czitrom, S.P.R., E.Prado, R. Godoy, R.Rodríguez & R. Peralta-Fabi, 1996. **Sea-Water Pumping by Resonance II**. Proceedings of the Second European Wave Power Conference, Lisboa. ISBN 92-827-7492-9, pp.324-328.
- [7] Czitrom, S.P.R., 1996. **Wave-Energy Driven Resonant Sea-Water Pump**. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering. Transactions of the ASME. Vol.119, pp.191-195.
- [8] Czitrom, S.P.R., R.Godoy, E.Prado, P.Pérez, R.Peralta-Fabi & C. Stern, (sometido), **Hydrodynamics of an oscillating water column sea water pump. Part I:Theoretical Aspects**.

- [9] Czitrom, S.P.R., R.Godoy, E.Prado & A.Olvera, (sometido), **Hydrodynamics of an oscillating water column sea water pump. Part II: Tuning to Monochromatic Waves.**
- [10] Jonsson, I.G., 1980. **A New Approach to Oscillatory Rough Turbulent Boundary Layers.** Ocean Engineering, Vol.7, pp.109-152.
- [11] Knott, G.F. and J.O. Flower, 1979. **Simulation studies of the basic non-linear effects of wave-energy conversion by an overtopping water-column.** Energy Conversion. Vol.19, pp.59-69.
- [12] Knott, G.F. and J.O. Flower, 1980. **Measurement of energy losses in oscillatory flow through a pipe exit.** Applied Ocean Research, Vol. 2, No. 4, pp. 155-164.
- [13] Knott, G.F. and M.R. Mackley, 1980. **On eddy motions near plates and ducts, induced by water waves and periodic flows.** Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol.294A, No.1412, pp.599-623.
- [14] Landau, L.D. & E.M. Lifshitz, **Mecánica de Fluidos**, Editorial Reverté S.A., 1986.
- [15] Nayfeh, A., **Perturbation Methods**, John Wiley & Sons, 1973.
- [16] Neumann, G. & J.P. Willard Jr., **Principles of Physical Oceanography**, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.
- [17] Ohmi, M., M.Iguchi, T.Usui and H.Minami, 1980. **Flow pattern and frictional losses in pulsating pipe flow, part 1: Effect of pulsating frequency on the turbulent flow pattern.** Bull.JSME, Vol.23, No.186, pp. 2013-2020.
- [18] Ohmi, M. and M.Iguchi, 1980. **Flow pattern and frictional losses in pulsating pipe flow, part 2: Effect of pulsating frequency on the turbulent frictional losses; part 3: General representation of the turbulent flow pattern.** Bull.JSME, Vol.23, No.186, pp. 2021-2028 & pp. 2029-2036.
- [19] Pérez, P., **Pérdidas de presión debidas a fricción en ductos con flujos oscilantes.** Tesis de licenciatura en Física. Facultad de Ciencias. UNAM, 1995.

- [20] Pérez, P, S.P.R.Czitrom, R.Peralta-Fabi, & C.Treviño, 1996. **Friction in oscillating flows**. Proceedings of the Second European Wave Power Conference, Lisboa.. ISBN 92-827-7492-9, pp.375-380.
- [21] Prado, E. **Caracterización de la soluciones a la ecuación de un ducto resonante en un campo de olas**, Tesis de licenciatura en física, Facultad de Ciencias, UNAM, 1993.
- [22] Ross, S.L. **Differential Equations**, 2nd edition, Xerox College Publishing, Lexington, Massachussets, 1974, 1964.
- [23] Spurk, J.H., **Fluid Mechanics**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.
- [24] Streeter, V.L. **Fluid Mechanics**, McGraw-Hill, 1958.
- [25] White, F.M. **Viscous Fluid Flow**, McGraw-Hill, 1991, 1974.