1
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

HIPERESPACIOS QUE SON CONOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

DANIEL AREVALO GRAJEDA

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA

1999

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Hiperespacios que son conos

realizado por Daniel Arévalo Grajeda

con número de cuenta 9104881-5, pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Alejandro Illanes Mejía	
Propietario	Dr. Wlodzimierz Jan Charatonik	
Propietario	Dr. Sergio Macías Álvarez	
Suplente	Dr. Raúl Escobedo Conde	
Suplente	Dra. Isabel Puga Espinosa	

Consejo Departamental de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL

Mat. César Guevara Bravo

MATEMATICAS

A mis padres Francisco†, Josefina y Jesús.

Agradezco al Instituto de Matemáticas de la UNAM por todo el apoyo que he recibido de su parte.

Índice General

Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Dado un continuo X, se puede construir, por un lado, su *cono topológico* $K(X)$ (ver definición 1.12) y por otro, su *hiperespacio de continuos* $C(X) = \{A \subset X : A \text{ es un continuo}\}$, el cual está provisto con la *métrica de Hausdorff* (ver definición 2.2). En seguida se notarán algunas similitudes entre $K(X)$ y $C(X)$:

1. Ambos contienen una copia "natural" de X; por una parte, la *base* de $K(X)$ y por otra, el *conjunto de singletones* $F_1(X) = \{\{x\} \in C(X) : x \in X\}$ de $C(X)$.

2. Para cada punto de la base de $K(X)$, existe un arco "natural" en $K(X)$ que lo conecta con el *vértice del cono.* De igual modo, cada singletón de $C(X)$ puede conectarse con el elemento X de $C(X)$ por medio de un *arco ordenado* (ver definición 2.5).

3. $K(X)$ puede descomponerse "horizontalmente" de una manera muy sencilla a través de los conjuntos de la forma $\pi(X \times \{t\})$, donde π es la función cociente (ver comentario subsecuente al teorema 1.13), del mismo modo, $C(X)$ puede ser descompuesto "horizontalmente" utilizando una función de Whitney normalizada μ

(ver inciso 3 del apunte posterior a la definición 2.3) y considerando sus niveles correspondientes, esto es, los conjuntos de la forma $\mu^{-1}(t)$.

Todo lo anterior hace que sea muy natural plantear las siguientes preguntas:

1. ¿Para cuáles continuos X, los espacios $K(X)$ y $C(X)$ son homeomorfos? y, más aún,

2. ¿Para cuáles continuos X existe un homeomorfismo entre $K(X)$ y $C(X)$ de tal manera que, al vértice de $K(X)$ le asigne el elemento X de $C(X)$ y a la base de $K(X)$ la envie sobre el conjunto de singletones de $C(X)$?

Hasta ahora ha corrido mucha tinta en el intento de clasificar los continuos X para los que la respuesta a alguna de estas preguntas sea afirmativa. Los autores que han trabajado en este tema se han restringido a los continuos de *dimensión* finita (ver definición 4.1), pues en éstos se dispone de mayores posibilidades para obtener resultados.

En este trabajo se desarrollan dos de los más importantes resultados sobre el tema, a saber:

1. Sea X un continuo de dimensión finita con la propiedad de que existe un homeomorfismo entre $K(X)$ y $C(X)$ de tal modo que, al vértice de $K(X)$ le asocia el elemento X de $C(X)$ y a la base de $K(X)$ la envía sobre el conjunto de singletones de $C(X)$. Entonces X es un arco, una curva cerrada simple o un continuo *indescomponible* (ver definición 1.5) de dimensión igual a

uno tal que cada uno de sus subcontinuos propios y no degenerados es un arco.

2. Sea X un continuo indescomponible de dimensión finita con la característica de que existe un homeomorfismo entre $K(X)$ y $C(X)$. Entonces dicho homeomorfismo debe asociarle el elemento X de $C(X)$ al vértice de $K(X)$ y debe enviar a la base de éste sobre el conjunto de singletones de $C(X)$.

Para demostrar estos dos resultados y hacerlos entendibles se tuvieron que desarrollar los primeros cuatro capítulos, en donde se presentan las nociones básicas de los continuos, los hiperespacios, los dendroides y algunos conceptos de la teoría de la dimensión.

El primer resultado fue demostrado originalmente por J. T. Rogers, Jr., en [Rg72]. Esta tesis se realizó mientras se escribía el libro [IN99]. De las discusiones que tuvimos descubrimos una prueba diferente y más accesible a dicho resultado, ésta es la que se incluye en la tesis y que es bosquejada en [IN99, Sección 80].

Como conocimientos previos sólo se presuponen los principios básicos de los espacios métricos y compactos y conexidad de espacios topológicos. Para mayor información acerca del tema el lector puede consultar [IN99] y un resultado nuevo en [Il].

Capítulo 1

Continuos

En el presente capítulo se discutirán los principales conceptos y resultados de la *teoría de continuos*, mismos que serán los mínimos e indispensables para un buen entendimiento de la presente tesis. Si el lector desea ahondar más en este tema se le recomienda primordialmente el libro [Nd92, Capítulos 1–5].

Definición 1.1. *Un* **continuo** *es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.* ▲

Naturalmente, a los subespacios de un continuo que resultan ser continuos se les denomina subcontinuos del espacio en cuestión. En lo subsecuente se supondrá, si no se indica lo contrario, que todos los espacios son continuos. Igualmente, cuando se mencionen espacios que son el producto cartesiano de otros, se pensará en aquéllos con la topología producto, esto desde luego a menos que se diga lo contrario. Asimismo, se denotará por $B(x,\delta)$, $B_d(x,\delta)$ o $B^X(x,\delta)$ a la bola abierta con centro en $x \in X$ y radio $\delta > 0$ de un espacio métrico (X,d) y si $A \subset X$ entonces $\overline{A}$

o $\overline{A}^X$ será la notación para la cerradura de A en X.

Un resultado que permite construir bastantes continuos es el que se demuestra en [Nd92, 2.1] y que sólo es enunciado en seguida.

Teorema 1.2. *El producto cartesiano de una cantidad finita o numerable de continuos con la topología producto es un continuo.* ▲

A continuación se presenta una serie de ejemplos, observaciones y demás cuyo propósito es compenetrar al lector en algunos detalles técnicos que puedan brindarle unas cuantas intuiciones geométricas.

Ejemplo 1.1. Sea $I = [0,1]$ con la topología usual. Entonces I es un continuo. En lo sucesivo, a los espacios homeomorfos al intervalo $[0,1]$ se les nombrará *arcos.*

Notación 1.2. Sean X un continuo y p y q dos puntos diferentes de X. Si existe un homeomorfismo $f : [0,1] \to f([0,1]) \subset X$ tal que $f(0) = p$ y $f(1) = q$ entonces se dirá que el arco $f([0,1])$ une a los puntos p y q yendo precisamente de p a q en el sentido que $f([0,1])$ cuenta con el orden inducido por el intervalo $[0,1]$, esto es, para cada $t, s \in [0,1]$, $f(t) \leq f(s)$ si y sólo si $t \leq s$. Por otra parte, a los puntos p y q se les llamará puntos extremos del arco $f([0,1])$. En los casos en que $f([0,1])$ sea el único arco en X que une a los puntos p y q o en que no se preste a confusión, al arco $f([0,1])$ se le denotará como pq o $f(0)f(1)$.

Notación 1.3. Considere un continuo X, un compacto A contenido en X, un punto p de $X \setminus A$ y un punto q de A. Suponga que existe un homeomorfismo $f : [0,1] \to$

$f([0,1]) \subset X$ tal que $f(0) = p$ y $f(1) = q$, entonces el conjunto $f^{-1}(pq \cap A)$ es un compacto en $[0,1]$, por lo cual alcanza su mínimo, así pues, sea $t_0 = \min f^{-1}(pq \cap A)$. En el futuro se referirá al punto $f(t_0)$ como "el primer punto del arco pq tal que $f(t_0) \in A$".

Recordatorio 1.4. Sea $H : Y \to Z$ una función entre espacios topológicos tal que es continua por pedazos, es decir, existen dos cerrados A y B de Y tales que $Y = A \cup B$ y $H|_A$ y $H|_B$ son funciones continuas, entonces H es una función continua. (Ver [Dg89, 9.4, p.83])

Recordatorio 1.5. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos tal que X es compacto, Y es Hausdorff y f es biyectiva. Entonces f es un homeomorfismo. (Ver [En89, 3.1.13]).

Observación 1.6. Sean X un continuo y pq y qr dos arcos en X que satisfacen que $pq \cap qr = \{q\}$. Suponga que $f : [0,1] \to pq$ y $g : [0,1] \to qr$ son dos homeomorfismos tales que $f(1) = q = g(0)$. Defina $h : [0,1] \to pq \cup qr$ de la siguiente forma:

$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{si } t \in [0,1/2]; \\ g(2t-1), & \text{si } t \in [1/2,1]. \end{cases} \tag{1.1}$$

Si se escribe $A = [0,1/2]$ y $B = [1/2,1]$ entonces h cumple las condiciones del recordatorio 1.4. Por tanto, h es continua. Observe que, por construcción, h es biyectiva. Gracias al recordatorio 1.5, se sigue que h es un homeomorfismo. Por tanto, el arco $pq \cup qr$ puede reescribirse como el arco pr.

Ejemplo 1.7. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $I_k = [0,1]$. Dada $n \in \mathbb{N}$, se le llama *n-celda* a cualquier espacio homeomorfo a $\prod_{k=1}^{n} I_k$. Sea $Q = \prod_{k=1}^{\infty} I_k$ con la topología producto. A Q se le conoce como el *cubo de Hilbert*. Por el teorema 1.2, se infiere que tanto las n-celdas como el cubo de Hilbert son continuos.

Ejemplo 1.8. Sea S^1 la circunferencia unitaria, es decir, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Note que S^1 es un continuo. A cualquier espacio homeomorfo a S^1 se le conoce como *curva cerrada simple.*

Observación 1.9. Sea X un continuo. Sean $f : [0,1] \to f([0,1]) \subset X$ y $g : [0,1] \to g([0,1]) \subset X$ dos homeomorfismos tales que $f(0) = g(1)$, $f(1) = g(0)$ y $f([0,1]) \cap g([0,1]) = \{f(0), f(1)\}$. Defina $h : S^1 \to f([0,1]) \cup g([0,1])$ de la siguiente manera:

$$h(e^{2\pi it}) = \begin{cases} f(2t), & \text{si } t \in [0,1/2]; \\ g(2t-1), & \text{si } t \in [1/2,1]. \end{cases} \tag{1.2}$$

Ahora, denote por $A = \{e^{2\pi it} \in S^1 : t \in [0,1/2]\}$ y por $B = \{e^{2\pi it} \in S^1 : t \in [1/2,1]\}$. Observe que A y B son cerrados en S^1 tales que $S^1 = A \cup B$. Note además que las funciones $h|_A$ y $h|_B$ son continuas, más aún, coinciden en $A \cap B$. Finalmente, hay que mencionar que, por construcción, h es biyectiva. Así que, como antes, h resulta ser un homeomorfismo y, por tanto, X contiene una curva cerrada simple.

Observación 1.10. Sea X un continuo. Sean x y y dos elementos diferentes en X para los cuales existen dos homeomorfismos $f : [0,1] \to f([0,1]) \subset X$ y $g : [0,1] \to g([0,1]) \subset X$ tales que $f(0) = g(0) = x$ y $f(1) = g(1) = y$. Suponga que $f([0,1])$ es distinto a $g([0,1])$, en otras palabras, existen dos arcos diferentes que unen a x y y. Suponga que $f([0,1])$ no está contenido en $g([0,1])$. Denote por $D = f^{-1}(f([0,1]) \cap g([0,1]))$. Observe que D es un compacto en $[0,1]$ que contiene a 0 y 1. Entonces $[0,1] \setminus D$ es un abierto en $[0,1]$. Sea C una componente de $[0,1] \setminus D$, la cual existe debido a la suposición de que $f([0,1])$ no se encuentra contenido en $g([0,1])$. Como $[0,1]$ es localmente conexo, las componentes de los abiertos de $[0,1]$ son abiertas, en particular, C es un abierto en $[0,1]$. Note que $\overline{C}$ es un subarco de $[0,1]$. Sean p y q los puntos extremos del arco $f(\overline{C})$ entonces, por la manera en que se definió C, se concluye que $f(\overline{C}) \cap g([0,1]) = \{p,q\}$. Sean $F : [0,1] \to f(\overline{C})$ y $G : [0,1] \to G([0,1]) \subset g([0,1])$ dos homeomorfismos tales que $F(0) = p = G(1)$ y $G(0) = q = F(1)$ ($G([0,1])$ no es más que el subarco en $g([0,1])$ que une a q y p). Por tanto, en virtud de la observación 1.9, se tiene que $F([0,1]) \cup G([0,1])$ es una curva cerrada simple contenida en X.

Ejemplo 1.11. Sea X un continuo. Al continuo $X \times [0,1]$ con la topología producto se le denomina el *cilindro* de X.

A continuación se enunciará, un teorema interesante sobre espacios métricos. De este resultado se deriva un corolario que permite ubicar a los continuos en un espacio ambiente que, en muchas ocasiones, resulta ser bastante útil. Cabe recordar que a una función continua $f : X \to Y$ entre espacios topológicos que es un homeomorfismo entre X y

$f(X)$ se le llama *encaje*, y se dice que X está encajado en Y.

Teorema 1.3. *Sea M un espacio métrico y compacto. Entonces M se puede encajar en el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$.* ▲

Demostración. Suponga que d es una métrica para M tal que $\text{diám}\, M \leq 1$. Puesto que M es un espacio métrico y compacto, se sigue que contiene un subconjunto denso y numerable $D = \{x_1, x_2, \dots\}$. Defina $f : M \to \mathcal{Q}$ por $f(x) = (d(x, x_1), d(x, x_2), \dots)$. Note que del hecho de que $\text{diám}\, M \leq 1$, se desprende que la imagen de M bajo f queda, efectivamente, contenida en $\mathcal{Q}$. Para mostrar la inyectividad de f, considere dos puntos distintos x y y de M. Tome $\epsilon > 0$ tal que $2\epsilon < d(x, y)$. Como D es denso, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, \epsilon)$ y, por el modo en que se eligio ϵ, $x_n \notin B(y, \epsilon)$. Por tanto, $d(x, x_n) < \epsilon < d(y, x_n)$. Por otro lado, la continuidad de f se obtiene como consecuencia de que cada una de sus funciones coordenadas es continua. Sólo resta observar el recordatorio 1.5 para concluir este teorema. ▲

Corolario 1.4. Sea X un continuo. Entonces X se puede encajar en el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$. ▲

Entre continuos es común distinguir los que son descomponibles de los que no lo son, dicha distinción, así como las propiedades con las que cada uno cuenta y que serán utilizadas a lo largo de esta tesis, son presentadas a continuación.

Definición 1.5. *A un continuo no degenerado X se le dice* **descomponible** *si existen dos subcontinuos propios A y B*

de X tales que $X = A \cup B$. En caso contrario, se dirá que X es **indescomponible**. *Más aún, si cada subcontinuo no degenerado de X es descomponible entonces a X se le llamará* **hereditariamente descomponible**. *Análogamente se define* **hereditariamente indescomponible**. ▲

Definición 1.6. *Sean X un continuo y p un punto de X. Al conjunto:*

$$\kappa(p) = \bigcup \{A \subsetneq X : p \in A \text{ y } A \text{ es un subcontinuo de } X\} \tag{1.3}$$

se le conoce como la **composante** *de p en X.* ▲

Usualmente uno habla de una composante sin indicar el punto que la determina, esto debido a que, dependiendo de las condiciones, no importa trabajar con una composante particular sino con algún subconjunto del continuo en cuestión que sea una composante. En seguida se presentan tres teoremas fundamentales concernientes a composantes. El primero, cuya demostración será omitida, está formulado como un ejercicio en [Nd92, 5.20].

Teorema 1.7. *Sea X un continuo. Entonces cada composante de X es un subespacio denso de X.* ▲

Teorema 1.8. *Sean (X, d) un continuo y κ una de sus composantes. Suponga que κ y X son distintos. Entonces existe una sucesión creciente $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos (propios) de X tal que $\kappa = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.* ▲

Demostración. Sean p un punto de X tal que $\kappa(p) = \kappa$, q un punto de $X \setminus \kappa$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < d(p,q)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $X \setminus B\left(q, \frac{1}{N+n}\right)$ es un cerrado que tiene a p, así que defina K_n como la componente de dicho cerrado que tiene a p. Note que para cada $n \in \mathbb{N}$, K_n es cerrado en X, ya que es una componente de un cerrado, conque K_n es un subcontinuo de X. Observe que

$$p \in K_n \subset X \setminus B\left(q, \frac{1}{N+n}\right) \subset X \setminus B\left(q, \frac{1}{N+(n+1)}\right) \tag{1.4}$$

así que, por definición de componente, se tiene que K_n se encuentra contenido en K_{n+1}. Por tanto, $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de subcontinuos (propios, ya que ninguno de ellos tiene a q) de X. Como cada K_n es un subcontinuo propio que tiene a p, K_n se encuentra contenido en κ. Ahora considere un punto x de κ. Entonces, por definición, existe un subcontinuo propio A de X tal que p y x pertenecen a A. Debido a que q no está en A (ya que si estuviese entonces sería un punto de κ lo que es imposible), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B\left(q, \frac{1}{N+n}\right)$ y A son ajenos, en otras palabras, A queda contenido en $X \setminus B\left(q, \frac{1}{N+n}\right)$. Por la definición de K_n y, puesto que A es un conexo que tiene a p, se deduce que A (y por tanto x) se encuentra contenido en K_n. Por tanto, se ha mostrado que $\kappa = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, según se deseaba. ▲

El teorema siguiente se demuestra al combinar [Nd92, 11.13], [Nd92, 11.15] y [Nd92, 11.17].

Teorema 1.9. *Sea X un continuo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es indescomponible.*

2. *X tiene una cantidad no numerable de composantes diferentes.*

3. *X tiene dos o más composantes y éstas son mutuamente ajenas entre sí.*

▲

Corolario 1.10. Sean X un continuo indescomponible y Y un subcontinuo propio de X. Si Y° denota el interior de Y en X entonces Y° es vacío. ▲

Demostración. Suponga que Y° no es vacío. Sean p un punto de Y° y $\kappa(p)$ la composante de p en X. Por definición de composante, Y está contenido en $\kappa(p)$, por consiguiente, Y° es un abierto no vacío de X que se encuentra contenido $\kappa(p)$ lo cual es una contradicción ya que, por el teorema 1.9, existe una composante κ de X, ajena a $\kappa(p)$, que, por el teorema 1.7, debe intersectar a Y°. ▲

Corolario 1.11. Sea X un continuo tal que contiene un abierto no vacío conexo por arcos. Entonces X es descomponible. ▲

Demostración. Suponga que X es indescomponible. Sea U un abierto no vacío de X conexo por arcos. Por el teorema 1.7, cada composante de X intersecta a U, así que, escoja dos puntos p y q que pertenezcan a diferentes composantes de X y ambos se encuentren en U. Como U es conexo por arcos, existe un arco pq en U que une a p y q. Dado que un arco es un continuo descomponible, se tiene que pq es un subcontinuo propio de X. Por tanto, $pq \subset \kappa(p) \cap \kappa(q)$, donde $\kappa(p)$ y $\kappa(q)$ son las composantes de p y q en X respectivamente, lo cual es una contradicción al teorema 1.9. ▲

A continuación se presenta el concepto de *cono topológico* que es una de las dos construcciones topológicas más importantes que se utilizarán durante este trabajo, el capítulo dos está reservado, en su totalidad, a la otra noción, a saber, *hiperespacio de continuos.*

Definición 1.12. *Dado un espacio métrico y compacto X, se construye su* **cono topológico** *$K(X)$ como sigue:*
Sea Y el cilindro de X (ver ejemplo 1.11). Defina en Y la siguiente relación de equivalencia ρ:

$(x,t)\rho(y,s)$ *si y sólo si*

1. $x = y$ *y* $t = s$ *o*

2. $t = s = 1$

Sea $K(X) = Y/\rho$ con la topología cociente. ▲

De lo comentado en [Nd92, 3.15] se deduce el siguiente resultado.

Teorema 1.13. *Si X es un espacio métrico y compacto entonces $K(X)$ es un continuo.* ▲

Recuerde que cuando se habla propiamente de un espacio cociente, como lo es $K(X)$, también se suele pensar en la función cociente $\pi : X \times [0,1] \to K(X)$ dada por $\pi(x,t) = [(x,t)]$, donde $[(x,t)]$ es la clase de equivalencia de (x,t) bajo la relación ρ. Así que, cuando uno se refiere a un punto del cono topológico, debe hacerlo como "... el punto $\pi(x,t)$ ..." o "... el punto $[(x,t)]$ ..." según desee cada quien.

Observe que lo único que se hace para obtener el cono topológico de un continuo es identificar la tapa superior del cilindro a un punto. A este punto particular se le llama *vértice* del cono y se denota por v. Igualmente, hay un subespacio particular de $K(X)$ el cual se mencionará con frecuencia, éste es $B(X) = \{\pi(x,0) : x \in X\}$ al que se le conoce como la *base* del cono. Es de destacarse que para t menor que 1, $\pi|_{X\times\{t\}}$ es inyectiva y, como los subespacios del cilindro de X de la forma $X \times \{t\}$ con t menor que 1 son todos ellos homeomorfos a X, se tiene del mismo modo que, para t menor que 1, $B_t(X) = \{\pi(x,t) : x \in X\}$ es homeomorfo a X. Por otro lado, dado un subespacio A de X, al espacio $\{\pi(a,t) : a \in A \text{ y } t \in [0,1)\} \cup \{v\}$ contenido en $K(X)$ se le denotará por $K(A)$, esto por simplificación y en casos en que no se preste a ambigüedades, similarmente, $B(A) = \{\pi(a,0) : a \in A\}$.

Además del concepto de cono topológico, está el de cono geométrico, del cual se da la construcción a continuación:

Definición 1.14. *Sea X un espacio métrico y compacto, en virtud del teorema 1.3, se puede suponer que X ya está encajado en el cubo de Hilbert Q. Denote por u el elemento de Q tal que cada una de sus coordenadas es* 0. *Considere el espacio $Q \times [0,1]$ con la topología producto, el cual es un* *subconjunto convexo del espacio vectorial* $(\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}_i) \times \mathbb{R}$ *con la topología producto, donde* $\mathbb{R}_i$ *es una copia homeomorfa de la recta real* $\mathbb{R}$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$. *Para cada* $(x, 0) \in X \times \{0\} \subset \mathcal{Q} \times [0,1]$ *sea*

$$L_x = \{t(u, 1) + (1 - t)(x, 0) : t \in [0, 1]\}. \tag{1,5}$$

Note que L_x *no es más que el segmento de línea recta en* $\mathcal{Q} \times [0,1]$ *que une* $(x,0)$ *con* $(u,1)$ *y, por tanto, si* x *es diferente de* y *entonces* $L_x \cap L_y = \{(u,1)\}$.
Se le llama **cono geométrico** *de* X *al subespacio* $GC(X) = \bigcup_{x \in X} L_x$ *de* $\mathcal{Q} \times [0,1]$, *y al punto* $(u,1)$ *se le conoce como el* **vértice** *de este cono.* ▲

En seguida se presentará un teorema que es enunciado como un ejercicio en [Nd92, 3.22] y que resultará ser pieza base para la demostración del teorema posterior.

Teorema 1.15. *[de la Transgresión] Sean* Y, W *y* Z *espacios topológicos y sean* $q : Y \to W$ *una función cociente y* $f : Y \to Z$ *una función continua. Suponga que para cada punto* w *de* W, $f(q^{-1}(w))$ *consiste de un solo elemento. Entonces existe una única función continua* $g : W \to Z$ *tal que* $f = g \circ q$, *esto es, para cada punto* w *de* W, *se cumple que* $g(w) =$ *el único punto de* $f(q^{-1}(w))$. ▲

Teorema 1.16. *Sea* X *un espacio métrico y compacto. Entonces* $K(X)$ *y* $GC(X)$ *son homeomorfos.* ▲

Demostración.

1. Suponga que X ya está encajado en $\mathcal{Q}$ (teorema 1.3). Sean $Y = X \times I$ y $Z = GC(X)$. Defina $f : Y \to Z$

como:

$$\begin{aligned} f(x,t) &= t(u,1) + (1-t)(x,0) \\ &= ((1-t)x,t). \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde, según la definición 1.14, u es el elemento de $\mathcal{Q}$ tal que cada una de sus coordenadas es 0.

2. Para concluir que f es continua basta verificar la continuidad de las funciones coordenadas de f, lo anterior, recordando que Z es un subespacio de $\mathcal{Q} \times I$; puesto que $f(x,t) = ((1-t)x,t)$ y debido a la construcción de $GC(X)$, se obtiene que $((1-t)x,t) \in GC(X) \subset \mathcal{Q} \times I$, así que se tienen las siguientes funciones coordenadas: $f_0 : Y \to I$ dada por $f_0(x,t) = t$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, $f_i : Y \to I$ dada por $f_i(x,t) = (1-t)x_i$, donde $x = (x_1, x_2, \dots) \in X \subset \mathcal{Q}$. La continuidad de f_0 se deduce del hecho de que es la función proyección de $X \times I$ sobre I. Note que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $f_i = \theta_i \circ \eta_i$, donde $\eta_i : X \times I \to I^2$ es dada por $\eta_i(x,t) = (x_i,t)$ para $x = (x_1, x_2, \dots)$ y $\theta_i : I^2 \to I$ es dada por $\theta_i(a,b) = a(1-b)$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, considere la función $p_i|_X : X \to I_i$ dada por $(p_i|_X)(x) = x_i$ donde $x = (x_1, x_2, \dots)$, que no es más que la restricción a X de la proyección p_i de $\mathcal{Q}$ sobre $I_i = [0,1]$ y, por tanto, $p_i|_X$ resulta ser una función continua. Observe que la continuidad de η_i se sigue de que sus dos funciones coordenadas son continuas, esto debido a que, $\eta_{i1} : X \times I \to I$ dada por $\eta_{i1}(x,t) = x_i$ donde $x = (x_1, x_2, \dots)$ puede ser expresada como $\eta_{i1} = p_i|_X \circ q_i$ donde $q_i : X \times I \to X$ es la

proyección y $\eta_{i2} : X \times I \to I$ dada por $\eta_{i2}(x,t) = t$ no es más que la proyección. Por tanto, ambas funciones (η_i y θ_i) son continuas para cada $i \in \mathbb{N}$ y con esto se desprende la continuidad de f_i para cada $i \in \mathbb{N}$ y, por ende, la de f.

3. f es una función suprayectiva. Esto es gracias a la misma definición de f.

De este modo se tiene que f es una función continua y suprayectiva, si se considera a la función cociente $\pi : X \times [0,1] \to K(X)$ y se observa que $f(\pi^{-1}(v)) = \{(u, 1)\}$ y, cuando t es menor que 1,

$$\begin{aligned} f(\pi^{-1}(\pi(x,t))) &= \{t(u, 1) + (1 - t)(x, 0)\} \\ &= \{((1-t)x, t)\}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

entonces, aplicando el teorema 1.15 (de la Transgresión), se concluye que existe una función continua $g : K(X) \to GC(X)$ con las propiedades mencionadas en el teorema citado.

1. g es inyectiva: Sean $\pi(x,t)$ y $\pi(y,s)$ dos puntos distintos de $K(X)$. Considere los siguientes casos:

   (a) $\pi(y,s) = v$, donde v es el vértice. Entonces $s = 1$ y $t < 1$. Por la definición de g, se tiene que $f(\pi(x,t)) = t(u, 1) + (1 - t)(x, 0)$ y, como la segunda coordenada de este punto es $t < 1$, se infiere que $g(v) \neq g(\pi(x,t))$.

   (b) $\pi(x,t)$ y $\pi(y,s)$ son distintos de v. Entonces s y t son menores que 1. Aquí se tienen dos subcasos.

i. Si $x \neq y$, como $L_x \cap L_y = \{(u, 1)\}$ y, dado que s y t son menores que 1, entonces se obtiene que $g(\pi(x,t)) \neq g(\pi(y,s))$.

ii. Si $s < t$ entonces se sigue que $g(\pi(x,t))$ y $g(\pi(y,s))$ se encuentran a distintas alturas en $GC(X)$, con lo que se concluye que $g(\pi(x,t)) \neq g(\pi(y,s))$.

2. g es suprayectiva: Por definición, $g(v) = (u, 1)$, entonces tome un punto $t(u, 1)+(1-t)(x, 0)$ de $GC(X) \setminus \{(u, 1)\}$. No hace falta sino observar que $g(\pi(x,t)) = t(u, 1) + (1 - t)(x, 0)$.

Finalmente, hay que mencionar que, por el teorema 1.13, $K(X)$ es un continuo y, por construcción, $GC(X)$ es un espacio métrico. Así que, al aplicar el recordatorio 1.5, se concluye que $g : K(X) \to GC(X)$ es un homeomorfismo. ▲

Ahora es posible obtener una visión práctica del cono topológico de un continuo.

Corolario 1.17. Sea X un continuo. Entonces $K(X)$ y $GC(X)$ son homeomorfos. ▲

De esta manera, uno se puede imaginar el cono topológico como si fuese el geométrico, donde el vértice de uno corresponde al del otro y, cuando t sea menor que 1, el punto $\pi(x,t)$ corresponde al punto de L_x que está a altura t (que no es más que el punto $t(u, 1) + (1 - t)(x, 0)$). De aquí en adelante se hará un pequeño abuso de notación en el cono topológico, se denotará, cuando no exista confusión y t sea menor que 1, al punto $\pi(x,t)$ por (x,t).

Lema 1.18. Sea X un continuo. Defina $\varpi : (K(X) \setminus \{v\}) \to X$ por $\varpi(\pi(x,t)) = x$. Entonces ϖ es una función continua y abierta. ▲

Demostración.

1. ϖ es una función bien definida: Si $\pi(x,t)$ pertenece a $K(X) \setminus \{v\}$ entonces la imagen inversa de $\pi(x,t)$ bajo π es únicamente el punto (x,t) de $X \times [0,1]$. Por tanto, al ser (x,t) el único representante de su clase de equivalencia con respecto a la relación ρ se tiene que ϖ está bien definida.

2. ϖ es continua: Sean $\pi(x,t)$ un elemento de $K(X)\setminus\{v\}$ y V una vecindad de $x = \varpi(\pi(x,t))$ en X. Considere el conjunto $U = \pi(V \times [0,1))$. U es un abierto de $K(X)$, ya que $(\pi)^{-1}(U) = V \times [0,1)$ y éste es un abierto básico de $X \times I$. Como U es un abierto de $K(X)$ y no tiene a v entonces U es un abierto de $K(X)\setminus\{v\}$. Observe que $\pi(x,t)$ pertenece a U, esto porque x se encuentra en V, $t \in [0,1)$ y por la definición de U. Ahora, note que si $\pi(y,s)$ es un elemento de U entonces $\varpi(\pi(y,s)) = y$, el cual pertenece a V. Por tanto $\varpi(U)$ está contenido en V.

3. ϖ es abierta: Sea $\pi(U)$ un abierto de $K(X) \setminus \{v\}$. Debido a que $\pi|_{X\times[0,1)}$ es inyectiva y a que π es una función cociente, se obtiene que $U = \pi^{-1}(\pi(U))$ y que éste es un abierto de $X \times [0,1)$. Sea $p : X \times [0,1) \to X$ la función proyección, esto es, la función dada por $p(x,t) = x$. Observe que p es una función abierta, de

donde se sigue que $p(U)$ es un abierto de X. Sólo hace falta destacar que $p(U) = \varpi(\pi(U))$.

▲

Corolario 1.19. Si X es un continuo y A es una componente por arcos de X entonces $K(A) \setminus \{v\}$ es una componente por arcos de $K(X) \setminus \{v\}$. ▲

Demostración. Sean $\pi(a,t)$ un elemento de $K(A) \setminus \{v\}$ y $\mathcal{A}$ su componente por arcos en $K(X) \setminus \{v\}$. Sea $\pi(b,s)$ otro elemento de $K(A) \setminus \{v\}$, conque a y b pertenecen a A, lo que implica que existe un arco ab en X, que de hecho se encuentra contenido en A, que une a a con b. Observe que $\pi(\{a\} \times [0,t])$, $\pi(ab \times \{0\})$ y $\pi(\{b\} \times [0,s])$ son arcos (posiblemente degenerados) tales que el primero intersecta al segundo, éste a su vez al tercero y cuya unión es un arco contenido en $K(X) \setminus \{v\}$ que une a $\pi(a,t)$ con $\pi(b,s)$, así que $\pi(b,s)$ pertenece a $\mathcal{A}$. Ahora considere un elemento $\pi(c,r)$ de $\mathcal{A}$. Sea B un arco en $K(X) \setminus \{v\}$ que una a $\pi(a,t)$ con $\pi(c,r)$. Gracias a que v no se encuentra en B se puede aplicar la función ϖ del lema 1.18 para concluir que $\varpi(B)$ es un continuo conexo por arcos que tiene a los puntos a y c, de donde se deduce que c (al igual que a) pertenece a A. Del hecho que $\pi(c,r)$ es diferente a v se sigue que $\pi(c,r)$ se encuentra en $K(A) \setminus \{v\}$. Por tanto $K(A) \setminus \{v\} = \mathcal{A}$. ▲

La conexidad local es una propiedad topológica que en general es muy útil, pero, como se notará más adelante, lo es aún más en continuos. Es por eso que en seguida se presenta una serie de tres resultados que al respecto son bastante importantes.

Teorema 1.20. *Sea X un continuo. Suponga que existe una vecindad abierta $\mathcal{U}$ de v (el vértice) en $K(X)$ tal que cualquier punto de $\mathcal{U}$ es un punto de conexidad local de $K(X)$. Entonces X es localmente conexo.* ▲

Demostración. Sean p un elemento de X y U una vecindad abierta de p en X. Escriba $V = U \times [0,1)$ y $\mathcal{V} = \pi(V)$ (recuerde que π es la función cociente). Note que $V = \pi^{-1}(\pi(V))$ y, como V es un abierto en $X \times I$, se sigue que $\mathcal{V} = \pi(V)$ es un abierto de $K(X)$. Ahora, si $g : K(X) \to GC(X)$ es el homeomorfismo dado en el teorema 1.16, entonces la familia $\{g(\pi(X \times (1 - \frac{1}{n}, 1]))\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema de vecindades abiertas para $g(v)$, por consiguiente, la colección $\{\pi(X \times (1 - \frac{1}{n}, 1])\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema de vecindades abiertas para v, por tanto, sean $n_0 \in \mathbb{N}$ y $t_0 < 1$ tales que $\pi(X \times (1 - \frac{1}{n_0}, 1])$ queda contenido en $\mathcal{U}$ y $1 - \frac{1}{n_0} < t_0 < 1$. Observe que, por construcción, $\pi(p, t_0)$ pertenece a $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, así que, por hipótesis, se concluye que $\pi(p, t_0)$ es un punto de conexidad local de $K(X)$. Sea $\mathcal{W}$ una vecindad abierta y conexa de $\pi(p, t_0)$ en $K(X)$ tal que se encuentra contenida en $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Ahora considere la función ϖ del lema 1.18 y note que $\mathcal{V}$ está en el dominio de definición de dicha función, así que, se puede escribir $W = \varpi(\mathcal{W})$. Por último, en virtud de que $\pi(p, t_0)$ pertenece a $\mathcal{W}$ y éste está contenido en $\mathcal{V}$, al aplicar ϖ se tiene que $p \in W \subset U$, pero, por el lema 1.18, W es la imagen, bajo una función continua y abierta, de $\mathcal{W}$ el cual es un abierto y conexo. Por tanto W es una vecindad abierta y conexa de p que se queda contenida en U lo que implica que X es localmente conexo. ▲

Los siguientes dos resultados sólo serán enunciados, una demostración de éstos puede verificarse en [Nd92, 8.23] y [Nd92, 8.26] respectivamente.

Proposición 1.21. *Todo continuo localmente conexo es conexo por arcos.* ▲

Proposición 1.22. *En un continuo localmente conexo, los abiertos conexos son conexos por arcos.* ▲

Definición 1.23. *Dados un continuo X y un punto p de X, se dice que p es un* **punto de corte** *de X si $X \setminus \{p\}$ es disconexo.* ▲

Cabe mencionar que en el intervalo $[0,1]$, por ejemplo, cualquier punto $x \in (0,1)$ es de corte mientras que los puntos extremos 0 y 1 no lo son, ya que el complemento de cada uno de ellos es conexo. Similarmente, note que ningún punto de la circunferencia unitaria S^1 es de corte en virtud de que su complemento en S^1 es un conjunto homeomorfo a $(0,1)$, el cual es conexo. Sobre la mínima cantidad de puntos que no son de corte en un continuo se tiene el siguiente resultado que es demostrado en [Nd92, 6.6] y que aquí sólo será enunciado.

Teorema 1.24. *Cualquier continuo no degenerado tiene al menos dos puntos que no son de corte.* ▲

A continuación se enunciará un teorema que se encuentra como corolario en [Nd92, 5.5] y el cual será útil como herramienta posteriormente.

Teorema 1.25. *Sea X un continuo. Si A es un subcontinuo propio de X y U es un abierto de X que contiene a*

A entonces existe un subcontinuo B de X que satisface que $A \subsetneq B \subset U$. ▲

Capítulo 2

Hiperespacios

En este capítulo se mencionarán las nociones más importantes de la *teoría de hiperespacios*, las cuales serán necesarias en capítulos subsecuentes.

Definición 2.1. *Dado un continuo X se define su* **hiperespacio de continuos** *como:*

$$C(X) = \{A \subset X : A \textit{ es un continuo}\} \tag{2.1}$$

▲

Definición 2.2. *Sea (X, d) un continuo. Para $C(X)$ se construye la siguiente métrica:*

$$H_d(A, B) = \text{ínf}\{\delta > 0 : A \subset N(B, \delta) \textit{ y } B \subset N(A, \delta)\} \tag{2.2}$$

donde A y B pertenecen $C(X)$ y

$$N(A, \delta) = \bigcup_{a \in A} B(a, \delta) \tag{2.3}$$

A H_d se le conoce como la **métrica de Hausdorff**. ▲

En [Nd92, 4.2] se demuestra que H_d es, efectivamente, una métrica. Asimismo, se sabe ([Nd92, 4.17]) que ($C(X)$, H_d) es compacto,más aún, es cierto que es conexo con lo que resultará ser un continuo, pero eso se comentará un poco más adelante. Si A es un elemento de $C(X)$ y $\epsilon > 0$ se denotará a la bola con centro en A y radio ϵ en $C(X)$ por $B_{H_d}(A, \epsilon)$ o por $B^{C(X)}(A, \epsilon)$. Hay un subespacio especial de $C(X)$ el cual será utilizado continuamente, éste es $F_1(X) = \{\{x\} \in C(X) : x \in X\}$ al que se le llama *conjunto de singletones*. Este espacio con la métrica heredada de $C(X)$ resulta ser isométrico y, por tanto homeomorfo, a X. En el futuro (corolario 2.16) cuando se considere un continuo X y un subespacio κ de X se denotará por $C(\kappa) = \{A \in C(X) : A \subset \kappa\}$ y se pensará en él con la métrica heredada de $C(X)$.

Ahora se exhibirán dos ejemplos en los cuales se muestran los hiperespacios de dos de los continuos más sencillos y que servirán para clarificar varios argumentos en el futuro.

Ejemplo 2.1. $C([0,1])$ es homeomorfo al triángulo

$$\begin{aligned}\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ y} \\ 0 \leq y \leq \text{mín}\{2x, -2x+2\}\}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Para demostrar esto, en primer lugar hay que observar que los elementos de $C([0,1])$ son de dos formas: son singletones, esto es, de la forma $\{t\} = [t,t]$ donde $t \in [0,1]$ o son arcos de la forma $[a,b]$ donde $0 \leq a < b \leq 1$ y no hay más. Considere las métricas, d en $[0,1]$ inducida por el valor absoluto, y ρ en Δ como la métrica euclidiana. Ahora defina la siguiente función: $F : C([0,1]) \to \Delta$ dada por $F([a,b]) = (\frac{a+b}{2}, b-a)$. Basta notar los siguientes tres hechos para concluir que F es un homeomorfismo:

1. F es inyectiva: Sean $[a,b]$ y $[c,d]$ dos elementos de $C([0,1])$ tales que $F([a,b]) = F([c,d])$. Entonces se tiene el siguiente par de ecuaciones lineales:
$$(a)\ \frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2} \qquad (b)\ b-a = d-c \quad (2.5)$$
De donde se desprende que $a = c$ y $b = d$. Por tanto $[a,b] = [c,d]$.

2. F es suprayectiva: Sea $(x,y) \in \Delta$. Defina $a = \frac{2x-y}{2}$ y $b = \frac{2x+y}{2}$. De la definición de Δ (ecuación 2.4) se deduce que $0 \leq a \leq b \leq 1$. Por otro lado, de la elección de a y b se sigue que $\frac{a+b}{2} = x$ y $b - a = y$. Por tanto $[a,b] \in C([0,1])$ y $F([a,b]) = (x,y)$.

3. F es continua; con esto será suficiente ya que, como se mencionó antes, $C([0,1])$ es un compacto, Δ es un espacio métrico, F es biyectiva y de acuerdo al recordatorio 1.5 se tendrá que F es un homeomorfismo. Sean pues $[a,b]$ un elemento de $C([0,1])$ y $\epsilon > 0$. Defina $\delta = \epsilon/3$. Lo que se mostrará es que:
$$F(B^{C([0,1])}([a,b],\delta)) \subset B^{\Delta}(F([a,b],\epsilon)). \qquad (2.6)$$
Considere entonces un elemento $[x,y]$ de $B^{C([0,1])}([a,b],$ $\delta)$. Se sigue que $H_d([a,b],[x,y]) < \delta$ y esto, por definición, implica que:
$$(a)\ [x,y] \subset N([a,b],\delta) = (a-\delta, b+\delta) \cap [0,1] \text{ y}$$
$$(b)\ [a,b] \subset N([x,y],\delta) = (x-\delta, y+\delta) \cap [0,1]. \qquad (2.7)$$

De estas ecuaciones se desprende que:

$$(a)\ |a-x|<\delta \qquad (b)\ |b-y|<\delta \quad (2.8)$$

Así que, al calcular la distancia $\rho(F([a,b]),F([x,y]))$ se tiene:

$$\begin{aligned}\rho(F([a,b]),F([x,y])) &= \\ &= \rho\left(\left(\frac{a+b}{2},b-a\right),\left(\frac{x+y}{2},y-x\right)\right)\\ &= \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-\frac{x+y}{2}\right)^2+(b-a-y+x)^2}\\ &< \sqrt{5\delta^2}<\epsilon\end{aligned} \quad (2.9)$$

Por tanto F es un homeomorfismo.

Ejemplo 2.2. $C(S^1)$ es homeomorfo al disco unitario $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq 1\}$. Para concluir lo anterior, se hará una construcción similar a la del ejemplo previo. Primero observe que un elemento cualquiera de $C(S^1)$ puede ser de una de las siguientes tres formas: un singletón, un arco o S^1. Ahora considere las siguientes tres funciones:

1. $L:C(S^1)\backslash\{S^1\}\to[0,2\pi]$ dada por $L(A)=$ la longitud de arco de A,

2. $M:C(S^1)\setminus\{S^1\}\to S^1$ dada por $M(A)=$ el punto medio de A, y

3. $F:C(S^1)\to D$ dada por

$$F(A)=\begin{cases}\left(1-\frac{L(A)}{2\pi}\right)M(A), & \text{si } A\neq S^1;\\ (0,0), & \text{si } A=S^1.\end{cases} \quad (2.10)$$

De la definición de L se sigue que si dos elementos de $C(S^1)\backslash\{S^1\}$ son tales que la distancia entre ellos es pequeña entonces estos deben contar con longitudes de arco harto semejantes, conque L resulta ser continua. Igualmente, si dos elementos de $C(S^1) \setminus \{S^1\}$ cumplen que, la distancia entre ellos es tan pequeña que sus complementos (en S^1) se intersectan entonces sus puntos medios se encuentran bastante cercanos el uno del otro en S^1, por lo que M también es continua. Sin realizar una discusión sobre la continuidad de las funciones L y M mayor a la ya expuesta se procederá a mostrar que F es un homeomorfismo. Note primero que el modo en que opera F sobre un elemento A de $C(S^1)$ es como sigue; sobre el radio que determina el punto medio de A (con el origen) se escoge aquel punto que satisfaga que su valor absoluto es igual a $\left(1 - \frac{L(A)}{2\pi}\right)$, y éste será el valor que F le asigne a A.

1. F es inyectiva: Observe que, por construcción, S^1 es el único elemento de $C(S^1)$ tal que $F(S^1) = (0,0)$, en consecuencia, considere dos elementos diferentes A y B de $C(S^1) \setminus \{S^1\}$. Note que su punto medio y su longitud de arco los caracteriza a cada uno de ellos. Así que en el caso en que cuentan con punto medio distinto se tiene que $F(A)$ y $F(B)$ deben encontrarse en radios diferentes. Si el caso es que poseen el mismo punto medio entonces en la longitud de arco es en lo que deben diferir, de donde se infiere que la posición que guardan $F(A)$ y $F(B)$ en el radio que determina $M(A)$ (o $M(B)$) es distinta.

2. F es suprayectiva: Sea $z \in D$. En el caso en que $|z| \in$

$\{0, 1\}$ se sigue que S^1 o $\{z\}$ es el candidato a elegir según corresponda. En la otra situación, se obtiene que $2\pi - 2\pi |z| \in (0, 2\pi)$. Si en S^1 se considera al arco A tal que su punto medio es $\frac{z}{|z|}$ $(z \neq 0)$ y su longitud de arco es $2\pi - 2\pi |z|$ entonces se concluye que A está en la preimagen de z bajo F.

3. F es continua: De la manera en que se definió F se deduce que la continudad de ésta depende de que L y M sean continuas, lo que ya fue comentado, y del hecho que si A se encuentra cerca de S^1 en $C(S^1)$ entonces $\left(1 - \frac{L(A)}{2\pi}\right)$ es un número pequeño, lo que implica que $F(A)$ está cerca de $(0, 0)$ en D.

Así que gracias al recordatorio 1.5 se concluye que F es un homeomorfismo.

A continación se presentarán el concepto de funciones de Whitney y un teorema sobre la existencia de ellas. Cabe destacar que esta clase de funciones ha desempeñado un papel preponderante en la teoría de hiperespacios.

Definición 2.3. *Sea X un continuo. Una* **función de Whitney** *es una función continua $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ tal que satisface las siguientes condiciones:*

1. $\mu(\{x\}) = 0$ *para cada* $x \in X$.
2. *Monotonía. Para cada par de elementos A y B de $C(X)$ tales que $A \subsetneq B$ se cumple que $\mu(A) < \mu(B)$.*

▲

De la definición se desprenden los siguientes hechos:

1. Gracias a que X es un continuo y μ es continua se sigue que $\mu(C(X))$ es un intervalo compacto de $[0,\infty)$ que contiene a 0, esto es, $\mu(C(X)) = [0,m]$ donde $m \in (0,\infty)$.

2. Debido a la monotonía de μ y a que, para cada elemento A de $C(X)$ se tiene que A está contenido en X, entonces $m = \mu(X)$.

3. Defina $\nu : C(X) \to [0,1]$ como $\nu(A) = (\frac{1}{m})\mu(A)$ para cada elemento A de $C(X)$. Note que ν es una función continua y que satisface las condiciones *1* y *2* de la definición 2.3. A ν se le conoce como *función de Whitney normalizada* y tiene la propiedad adicional de que $\nu(X) = 1$.

Observe que las funciones de Whitney se pueden interpretar como funciones de "medida" o de "tamaño". De este modo, dados dos subcontinuos de los cuales uno se encuentra contenido propiamente en el otro, uno puede pensar (y de hecho es usual hacerlo al considerar el orden parcial dado por la contención "$\subset$") que el primero es "más pequeño" que el segundo, así, una de tantas virtudes de estas funciones es que la idea anterior queda reflejada de manera numérica. El siguiente teorema está planteado como un ejercicio en [Nd92, 4.23], aquí sólo será mencionado.

Teorema 2.4. *Para cada continuo X existen funciones de Whitney.* ▲

En lo sucesivo se supondrá además que las funciones de Whitney con las que se trabaje son normalizadas. Otro concepto de indudable utilidad y, por ende, gran importancia en la teoría de hiperespacios, es el que en seguida se presenta.

Definición 2.5. *Sea X un continuo. Sean A y B dos elementos de $C(X)$ tales que $A \subsetneq B$. Un* **arco ordenado** *de A a B es un homeomorfismo $\alpha : [0,1] \to \alpha([0,1]) \subset C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y si $0 \leq t < s \leq 1$ entonces $\alpha(t) \subsetneq \alpha(s)$.* ▲

Un teorema importante acerca de la existencia de arcos ordenados y que es enunciado como un ejercicio en [Nd92, 5.25] es el que viene a continuación.

Teorema 2.6. *Sean X un continuo y A y B elementos de $C(X)$. Entonces existe un arco ordenado de A a B si y sólo si $A \subsetneq B$.* ▲

Por este teorema, se sigue que para todo $A \subsetneq X$, existe un arco que une a A con X, con lo que se concluye el siguiente corolario.

Corolario 2.7. Sea X un continuo. Entonces $C(X)$ es conexo por arcos y, por tanto, conexo. ▲

Corolario 2.8. Sean X un continuo y A un subcontinuo propio de X. Entonces $C(X) \setminus C(A)$ es un abierto conexo por arcos de $C(X)$. ▲

Demostración. $C(A)$ es un cerrado de $C(X)$ ya que es un compacto, luego entonces $C(X) \setminus C(A)$ es un abierto de $C(X)$. Para terminar la prueba basta mostrar que cualquier elemento B de $C(X) \setminus C(A)$ se puede conectar con X por medio de un arco contenido en $C(X) \setminus C(A)$, para esto, debido a que, por definición, B no está contenido en A, se tiene que existe un punto b de B que no pertenece a A. Sea $\beta : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado de B a X. Note que para cada $t \in [0,1]$, se cumple que B se encuentra contenido en $\beta(t)$, así que b es un punto de $\beta(t)$, conque este último no puede estar contenido en A. Por tanto, $\beta([0,1])$ está contenido en $C(X) \setminus C(A)$, acorde con lo que se deseaba. ▲

Si se tiene una función continua entre continuos uno puede inducir de manera natural una función entre los respectivos hiperespacios de continuos. En seguida se da la definición precisa de esta función.

Definición 2.9. *Sean X y Y dos continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Se le nombra* **función inducida** *por f, a la función $C(f) : C(X) \to C(Y)$ dada por $C(f)(A) = f(A)$.* ▲

Note que $C(f)$ lo que hace es tomar cada elemento A de $C(X)$, el cual por definición es un subcontinuo de X, y asociarle el elemento en $C(Y)$ que representa al subcontinuo $f(A) \subset Y$. El lema siguiente trata sobre el buen comportamiento de estas funciones.

Lema 2.10. Sean X y Y dos continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces $C(f)$ es una función continua. ▲

Demostración. Primero observe que $C(f)$ está bien definida, pues si A es un elemento de $C(X)$, dado que f es una función continua, se tiene que $f(A)$ es un subespacio compacto, conexo y desde luego no vacío de Y. Sean d y ρ

métricas para X y Y, respectivamente. Ahora, tome $\epsilon > 0$. Como f es una función continua entre espacios métricos y compactos, se tiene que es uniformemente continua, así que, existe $\delta > 0$ tal que $f(B^X(x,\delta)) \subset B^Y(f(x),\epsilon)$, esto para cada elemento x de X. Considerando esta δ se sigue que si $H_d(A,B) < \delta$, entonces para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $b \in B^X(a,\delta)$, lo que implica que

$$f(b) \in f(B^X(a,\delta)) \subset B^Y(f(a),\epsilon) \subset N^Y(f(A),\epsilon). \quad (2.11)$$

Por tanto, $f(B) \subset N^Y(f(A),\epsilon)$. De igual manera se puede ver que $f(A) \subset N^Y(f(B),\epsilon)$. De las dos últimas contenciones se observa que $H_\rho(C(f)(A), C(f)(B)) < \epsilon$. Concluyendo así que $C(f)$ es continua. ▲

A continuación se presenta un lema que será empleado al menos en dos ocasiones durante el presente capítulo.

Lema 2.11. Sean X un continuo y U un abierto de X. Entonces el conjunto $\Lambda(U) = \{A \in C(X) : A \cap U \neq \emptyset\}$ es abierto en $C(X)$. ▲

Demostración. Sean A un elemento de $\Lambda(U)$ y a un punto de $A \cap U$. Como a pertenece a U y éste es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(a,\epsilon)$ está contenido en U. Se verificará que $B_{H_d}(A,\epsilon)$ queda contenido en $\Lambda(U)$. Sea B un elemento de $B_{H_d}(A,\epsilon)$. Por definición, $a \in A \subset N(B,\epsilon)$, por consiguiente, existe un punto b de B tal que $a \in B(b,\epsilon)$ o, en otras palabras, $b \in B(a,\epsilon) \subset U$. Por tanto, b pertenece a $B \cap U$, lo que implica que B es un elemento de $\Lambda(U)$, según se necesitaba. ▲

Corolario 2.12. Dados un continuo X y un cerrado C de X se cumple que $\Gamma(C) = \{A \in C(X) : A \subset C\}$ es un cerrado en $C(X)$. ▲

Demostración. Bastará mostrar que el complemento de $\Gamma(C)$ en $C(X)$ es abierto. Como C es cerrado, $X \setminus C$ es abierto en X, así que, por el lema 2.11, se tiene que $\Lambda(X \setminus C)$ es abierto en $C(X)$. Ahora note que un elemento A de $C(X)$ pertenece a $C(X) \setminus \Gamma(C)$ si y sólo si A no se encuentra contenido en C, esto si y sólo si $A \cap (X \setminus C) \neq \emptyset$, es decir, A es un elemento de $\Lambda(X \setminus C)$. Por tanto, $C(X) \setminus \Gamma(C) = \Lambda(X \setminus C)$. ▲

Observe que gracias a que, para cualquier continuo (X, d), se obtiene que $(C(X), H_d)$ también lo es, resulta natural considerar al hiperespacio de continuos de $C(X)$, esto es, al espacio $C(C(X))$ con su respectiva métrica de Hausdorff H_{H_d}. En estas condiciones existe una función definida en $C(C(X))$ que en diversas situaciones resulta ser muy útil, a continuación se enuncia la definición precisa de dicha función.

Definición 2.13. *Sea (X, d) un continuo. Considere los hiperespacios $(C(X), H_d)$ y $(C(C(X)), H_{H_d})$. A la función $\sigma : C(C(X)) \to C(X)$ dada por $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$ se le conoce como la* **función unión**. ▲

Naturalmente hace falta demostrar que esta función está bien definida, esto es, que su contradominio realmente es $C(X)$ y verificar que es continua, para esto se cuenta con el siguiente resultado.

Teorema 2.14. *La función unión dada en la definición 2.13 es una función continua.* ▲

Demostración.

1. σ está bien definida. Sea $\mathcal{A}$ un elemento de $C(C(X))$.

   (a) Primero se mostrará que $\sigma(\mathcal{A})$ es cerrado en X. Sea x un punto de $\overline{\sigma(\mathcal{A})}$. Se sigue que existe una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ que converge a x y cuyos elementos pertenecen a $\sigma(\mathcal{A})$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea A_i un elemento de $\mathcal{A}$ que tenga a x_i. Como $\mathcal{A}$ es compacto, la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión $\{A_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a un elemento A de $C(X)$. De lo anterior se deduce que para cada $\epsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $k > K$ entonces

   $$(a)\ d(x, x_{i_k}) < \epsilon/2 \text{ y } (b)\ H_d(A, A_{i_k}) < \epsilon/2 \quad (2.12)$$

   de esta última desigualdad se desprende que $x_{i_k} \in A_{i_k} \subset N(A, \epsilon/2)$, de donde se concluye que existe un punto a de A tal que $x_{i_k} \in B(a, \epsilon/2)$, es decir, $d(a, x_{i_k}) < \epsilon/2$. Por tanto, de la desigualdad previa y de la ecuación 2.12(a) se sigue que $d(a, x) < \epsilon$, en otras palabras, $B(x, \epsilon) \cap A$ es no vacío, lo que implica que x se encuentra en $\overline{A}$ pero, A es cerrado. De este modo se infiere que $x \in A \subset \sigma(\mathcal{A})$.

   (b) Ahora se exhibirá la conexidad de $\sigma(\mathcal{A})$. Suponga que $\sigma(\mathcal{A})$ es disconexo. Sean M y N cerrados ajenos y no vacíos de X tales que $\sigma(\mathcal{A}) = M \cup N$ (recuerde que $\sigma(\mathcal{A})$ es cerrado). Por el corolario

2.12, se tiene que $\Gamma(M)$ y $\Gamma(N)$ son cerrados en $C(X)$. Note que $\Gamma(M)$ no es vacío ya que si se considera $x \in M \subset \sigma(\mathcal{A})$ entonces existe un elemento A de $\mathcal{A}$ tal que x pertenece a A. Gracias a que M y N están separados y $\sigma(\mathcal{A}) = M \cup N$ se sigue que A queda contenido en M, conque A pertenece a $\Gamma(M)$. De manera análoga se arguye que $\Gamma(N)$ es diferente del vacío. Ahora observe que $\Gamma(M) \cap \Gamma(N)$ es vacío ya que, si A fuese un elemento de dicha intersección entonces se obtendría que A se encuentra contenido en $M \cap N$ lo que es absurdo puesto que M y N son ajenos. Finalmente, dados un elemento A de $\mathcal{A}$ y un punto a de A se tiene que $a \in A \subset M \cup N$, suponiendo que a pertenece a M, por argumentos similares a los previos, se concluye que A queda contenido en M, es decir, A es un elemento de $\Gamma(M)$. Por tanto, $\mathcal{A} = \Gamma(M) \cup \Gamma(N)$, lo que es una contradicción ya que se está obteniendo una separación de $\mathcal{A}$ el cual es conexo. De esta forma se ha probado que σ está bien definida.

2. σ es continua. Sean $\mathcal{A}$ un elemento de $C(C(X))$ y $\epsilon > 0$. Sea $\mathcal{B}$ un elemento de $C(C(X))$ tal que $H_{H_d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \epsilon$. Se probará que se satisface $H_d(\sigma(\mathcal{A}), \sigma(\mathcal{B})) < \epsilon$. Denote por

$$N_2(\mathcal{A}, \epsilon) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} B^{C(X)}(A, \epsilon). \qquad (2.13)$$

Así, de la definición de $\mathcal{B}$ y de la ecuación 2.13, se deduce que $\mathcal{A}$ está contenido en $N_2(\mathcal{B}, \epsilon)$. Sea A un elemento de $\mathcal{A}$. De lo anterior se tiene que A pertenece a $N_2(\mathcal{B}, \epsilon)$, en otras palabras, existe un elemento B de $\mathcal{B}$ tal que $A \in B^{C(X)}(B, \epsilon)$, es decir, $H_d(A, B) < \epsilon$, esto a su vez implica que A se encuentra contenido en $N(B, \epsilon)$ pero, como B queda contenido en $\sigma(\mathcal{B})$, se sigue que $N(B, \epsilon)$ está contenido en $N(\sigma(\mathcal{B}), \epsilon)$. Por tanto, A se encuentra contenido en $N(\sigma(\mathcal{B}), \epsilon)$, de donde se concluye que $\sigma(\mathcal{A})$ queda contenido en $N(\sigma(\mathcal{B}), \epsilon)$. De forma similar se argumenta que $\sigma(\mathcal{B})$ está contenido en $N(\sigma(\mathcal{A}), \epsilon)$, para de este modo obtener que $H_d(\sigma(\mathcal{A}), \sigma(\mathcal{B})) < \epsilon$, según era deseado.

▲

Ahora se usará la función unión para mostrar un teorema importante que relaciona de manera interesante la indescomponibilidad de un continuo con una condición necesaria y suficiente para conectar ciertos pares de elementos de su hiperespacio a través de un arco.

Teorema 2.15. *Sean X un continuo indescomponible y A y B dos subcontinuos propios de X. Entonces A y B se encuentran contenidos en una misma composante de X si y sólo si existe un arco contenido en $C(X) \setminus \{X\}$ que los une.* ▲

Demostración.

1. Suponga que A y B están contenidos en una composante κ de X. Sean a y b elementos de A y B, respectivamente. Como a y b pertenecen a κ, existe un subcontinuo propio C de X que los contiene y el

cual se encuentra contenido en κ. Note que $A \cup C \cup B$ es un continuo contenido en κ y, por ende, es propio. Tome dos arcos ordenados $\eta : [0,1] \to C(X)$ y $\phi : [0,1] \to C(X)$ de A a $A \cup C \cup B$ y de B a $A \cup C \cup B$, respectivamente. Observe que $\eta([0,1]) \cup \phi([0,1])$ es un continuo conexo por arcos el cual queda contenido en $C(A \cup C \cup B)$. Por tanto, de dicho continuo se puede extraer un arco que une A con B y cuyos elementos son subcontinuos de $A \cup C \cup B$, en otras palabras, son propios.

2. Ahora suponga que A y B se encuentran en diferentes composantes y considere un arco $\mathcal{A}$ en $C(X)$ que los una. Sea $\alpha : [0,1] \to \mathcal{A}$ un homeomorfismo tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$. Por el teorema 2.14, se tiene que la función unión $\sigma : C(C(X)) \to C(X)$ es continua. De este modo, $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup\{C : C \in \mathcal{A}\}$ es un subcontinuo de X que contiene a A y B.

   (a) Se asegura que $\sigma(\mathcal{A}) = X$, ya que al suponer que $\sigma(\mathcal{A})$ es propio se sigue que debe estar contenido en una composante y, por el teorema 1.9, se deduce que no puede intersectar a dos composantes, lo que es una contradicción puesto que intersecta a la composante que contiene a A y a la que contiene a B que, por la hipótesis inicial, son distintas.

   (b) Gracias al modelo de $C([0,1])$ descrito en el ejemplo 2.1 se concluye que el subespacio

$$\mathcal{B} = \{[0,t] \in C([0,1]) : t \in [0,1]\} \qquad (2.14)$$

es un arco. Note que en base a dicho modelo, se puede obtener un homeomorfismo $\beta : [0,1] \to \mathcal{B}$ dado por $\beta(t) = [0,t]$.

(c) Ahora defina $\gamma : [0,1] \to C(X)$ como la siguiente composición de funciones continuas: $\sigma \circ C(\alpha) \circ \beta$. Por tanto, γ es una función continua. Note que $\gamma^{-1}(X)$ es diferente del vacío, ya que en particular

$$\begin{aligned}\gamma(1) &= (\sigma \circ C(\alpha) \circ \beta)(1) \\ &= (\sigma \circ C(\alpha))([0,1]) = \sigma(\mathcal{A}) = X.\end{aligned} \tag{2.15}$$

En virtud de que γ es continua, se tiene que $\gamma^{-1}(X)$ es un subconjunto compacto y no vacío de $[0,1]$. Sea $t_0 = \min \gamma^{-1}(X)$.

(d) De la definición de t_0 se deduce que para cada $t < t_0$, $\gamma(t)$ es un subcontinuo propio de X que contiene a A, esto último debido a que $A = C(\alpha)(\{0\})$ y éste es un elemento de $C(\alpha)([0,t])$. En consecuencia, para cada $t < t_0$, se cumple que $\gamma(t)$ está contenido en la composante κ de X que contiene a A, en particular, $\alpha(t)$ queda contenido en κ.

(e) Se afirma que $\alpha(t_0) = X$. Para verificar esto, se tiene que del inciso (d) se desprende que $\bigcup_{t<t_0} \alpha(t)$ está contenido en κ. Por tanto, si se escogen dos elementos x y y de X que pertenezcan a dos composantes diferentes entre sí y distintas a κ (esto se puede hacer gracias a que X es indescomponible y

al teorema 1.9), y se recalca que

$$X = \gamma(t_0) = \left(\bigcup_{t<t_0} \alpha(t) \right) \cup \alpha(t_0) \tag{2.16}$$

entonces se concluye que x y y son puntos de $\alpha(t_0)$, pero debido a que x y y pertenecen a diferentes composantes se deduce que $\alpha(t_0)$ no puede ser propio (otra vez por el teorema 1.9). Con esto se finaliza la prueba de la afirmación al igual que la del presente teorema.

▲

Corolario 2.16. Sean X un continuo indescomponible y Λ un subespacio de $C(X) \setminus \{X\}$. Entonces Λ es una componente por arcos de $C(X) \setminus \{X\}$ si y sólo si existe una composante κ de X tal que $\Lambda = C(\kappa)$. ▲

Demostración.

1. Por argumentar la necesidad. Sean A un elemento de Λ y κ la composante de X que contiene a A. Se mostrará que $\Lambda = C(\kappa)$. Sea B un elemento de $C(X)$. B pertenece a Λ si y sólo si existe un arco en $C(X) \setminus \{X\}$ de A a B. Por el teorema 2.15 lo anterior es cierto si y sólo si A y B están contenidos en la misma composante, esto es, B pertenece a $C(\kappa)$.

2. Por demostrar la suficiencia. Sean A un elemento de Λ y Γ la componente por arcos de $C(X) \setminus \{X\}$ que tiene a A. Se verificará que $\Lambda = \Gamma$. Sea B un elemento de $C(X)$. Entonces $B \in \Lambda = C(\kappa)$, o sea B se encuentra

contenido en la misma composante que A, si y sólo si (por el teorema 2.15) existe un arco en $C(X) \setminus \{X\}$ que los une, pero lo anterior se satisface si y sólo si B pertenece a Γ.

▲

Ahora se dejarán de lado los continuos indescomponibles (por lo que queda del presente capítulo) para considerar continuos arbitrarios y definir unos espacios conocidos como *n-odos*, cuya existencia en el continuo se refleja en la existencia de n-celdas en el hiperespacio, siendo este uno de los principales argumentos (o dicho de otro modo, una de las principales "armas" a usar) en, primordialmente, el quinto y el sexto capítulos.

Definición 2.17. *Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N}$ con $3 \leq n$, se dice que X es un* **n-odo** *si existen elementos $Y, X_1, X_2, \ldots, X_n$ de $C(X)$ tales que $X = Y \cup X_1 \cup X_2 \cdots \cup X_n$, para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con i distinto de j se tiene que $Y \cap X_i$ es diferente del vacío, X_i no está contenido en Y, y $(X_i \setminus Y)$ y $(X_j \setminus Y)$ son ajenos. En general el término triodo es más empleado al momento de referirse a un continuo que es un 3-odo. Un continuo X se llama* **n-odo simple** *si además Y pertenece a $F_1(X)$ y para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, X_i es un arco que tiene como uno de sus puntos extremos al único punto de Y.* ▲

Definición 2.18. *A un continuo X se le llama* **atriódico** *si no contiene triodos.* ▲

Teorema 2.19. *Sea X un continuo y suponga que X contiene un n-odo. Entonces $C(X)$ contiene una n-celda.* ▲

Demostración. Sea $Z \in C(X)$ un n-odo. Sean $Y, Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ elementos de $C(Z)$ que cumplan las condiciones de la definición 2.17. Dado que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $Y \cap Z_i$ es distinto del vacío entonces $Y_i = Y \cup Z_i$ es un continuo que contiene propiamente a Y esto puesto que Z_i no se encuentra contenido en Y. Por el teorema 2.6, existe un arco ordenado $\alpha_i : [0, 1] \to C(X)$ de Y a Y_i. Usando estos arcos ordenados se definirá un homeomorfismo $f : [0, 1]^n \to f([0, 1]^n) \subset C(X)$ con el que se concluye el teorema.

1. Definición de f. Para cada $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in [0, 1]^n$ se define:

   $$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(t_2) \cup \dots \cup \alpha_n(t_n) \tag{2.17}$$

   Se sigue que, como para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $Y = \alpha_i(0) \subset \alpha_i(t_i)$ entonces

   $$\alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(t_2) \cup \dots \cup \alpha_n(t_n) \in C(X), \tag{2.18}$$

   así que, f es una función bien definida.

2. f es un función inyectiva: Sean $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ y $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ dos puntos distintos en $[0, 1]^n$. Entonces existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que t_j y s_j son diferentes. Si $t_j < s_j$ (el otro caso es análogo) entonces $\alpha_j(t_j) \subsetneq \alpha_j(s_j)$. Sea $x \in \alpha_j(s_j) \setminus \alpha_j(t_j)$. Puesto que para cada i distinto de j, $(Z_i \setminus Y)$ y $(Z_j \setminus Y)$ son ajenos y $Y \subset \alpha_j(t_j) \subsetneq \alpha_j(s_j)$, se tiene que $x \notin \alpha_i(t_i) \subset Y_i$. Por tanto

   $$x \in f(s_1, s_2, \dots, s_n) \setminus f(t_1, t_2, \dots, t_n). \tag{2.19}$$

Concluyendo así que

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \neq f(s_1, s_2, \ldots, s_n). \tag{2.20}$$

3. f es continua: Sean $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$ y $\epsilon > 0$. En virtud de que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, α_i es continua en t_i se tiene que existe $\delta_i > 0$ tal que si $|t_i - s_i| < \delta_i$ entonces $H_d(\alpha_i(t_i), \alpha_i(s_i)) < \epsilon$. Defina $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Sea

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in B^{I^n}((t_1, t_2, \ldots, t_n), \delta). \tag{2.21}$$

Sea $x \in f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Entonces, por la defición de f, se sigue que para alguna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x \in \alpha_j(t_j)$. Por como se escogió δ se concluye que $H_d(\alpha_j(t_j), \alpha_i(s_j))$ $< \epsilon$, lo que, por definición implica que

$$\begin{aligned} x \in \alpha_j(t_j) &\subset N(\alpha_j(s_j), \epsilon) \\ &\subset N(f(s_1, s_2, \ldots, s_n), \epsilon). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Por tanto

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \subset N(f(s_1, s_2, \ldots, s_n), \epsilon). \tag{2.23}$$

De igual manera se obtiene que

$$f(s_1, s_2, \ldots, s_n) \subset N(f(t_1, t_2, \ldots, t_n), \epsilon), \tag{2.24}$$

con lo que se concluye que

$$H_d(f(t_1, t_2, \ldots, t_n), f(s_1, s_2, \ldots, s_n)) < \epsilon. \tag{2.25}$$

Por tanto f es continua.

Al ser f inyectiva, continua y estar definida de un compacto sobre un espacio métrico, se tiene que f es un homeomorfismo sobre su imagen. Por tanto, $C(X)$ contiene una n-celda. ▲

Sea X un continuo. Cuando uno estudia el hiperespacio $C(X)$, además de buscar propiedades estructurales intrínsecas de $C(X)$, uno también desea encontrar relaciones entre X y $C(X)$, es decir, si $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son dos propiedades topológicas entonces suelen hacerse las siguientes preguntas: ¿Es cierto que si X cuenta con la propiedad $\mathcal{P}_1$ entonces $C(X)$ posee la propiedad $\mathcal{P}_2$? ¿Puede decirse que X tiene la propiedad $\mathcal{P}_1$ si se sabe que $C(X)$ posee la propiedad $\mathcal{P}_2$? Un perfecto ejemplo de lo anterior es el teorema 2.19. A continuación se presenta un teorema que por sí solo resulta ser bastante interesante y que responde la primera pregunta cuando ambas propiedades, $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, son la conexidad local.

Teorema 2.20. *Sean X un continuo y p un punto de conexidad local de X. Si A es un elemento de $C(X)$ que contiene a p entonces $C(X)$ es localmente conexo en A.* ▲

Demostración. Sean p un punto de conexidad local de X, A un elemento de $C(X)$ tal que contiene a p, d y H_d métricas respectivas para X y $C(X)$ y $\epsilon > 0$. Se demostrará que existe un abierto y conexo $\mathcal{W}$ de $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset B_{H_d}(A, \epsilon)$.

1. Debido a que p es un punto de conexidad local de X, se tiene que existe una vecindad abierta y conexa U de p en X tal que $U \subset \overline{U} \subset B(p, \epsilon)$. Por el lema

2.11 se sigue que $\Lambda(U)$ es un abierto de $C(X)$. Defina $\mathcal{W} = B_{H_d}(A, \epsilon) \cap \Lambda(U)$. Observe que A pertenece a $\mathcal{W}$ ya que p es un punto de $A \cap U$. Resta verificar que $\mathcal{W}$ es conexo.

2. Sea B un elemento de $\mathcal{W}$. Entonces existe un punto q de $B \cap U$. Por tanto, $C = A \cup \overline{U} \cup B$ es un subcontinuo de X. Note que, por definición,

$$\overline{U} \subset B(p, \epsilon) \subset N(A, \epsilon). \tag{2.26}$$

Puesto que B es un elemento de $B_{H_d}(A, \epsilon)$, se deduce que B queda contenido en $N(A, \epsilon)$, así que, se concluye que

$$C = A \cup \overline{U} \cup B \subset N(A, \epsilon). \tag{2.27}$$

Ahora, sea $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ un arco ordenado de A a C. Entonces para cada $t \in [0, 1]$, se cumple que

$$A = \alpha(0) \subset \alpha(t) \subset N(\alpha(t), \epsilon) \tag{2.28}$$

además, usando la ecuación 2.27 se sigue que

$$\alpha(t) \subset \alpha(1) = C \subset N(A, \epsilon) \tag{2.29}$$

conque se obtiene que $H_d(A, \alpha(t)) < \epsilon$. Por tanto, $\alpha([0, 1])$ se encuentra contenido en $B_{H_d}(A, \epsilon)$. Ahora considere un arco ordenado $\beta : [0, 1] \to C(X)$ de B a C. Cabe señalar que $B = \beta(0) \subset \beta(t)$ implica que $N(B, \epsilon)$ queda contenido en $N(\beta(t), \epsilon)$ y, como se sabe que A está contenido en $N(B, \epsilon)$, esto porque $B \in B_{H_d}(A, \epsilon)$, entonces se satisface que

$$A \subset N(\beta(t), \epsilon) \tag{2.30}$$

Por otro lado, de la definición de arco ordenado se tiene que

$$\beta(t) \subset \beta(1) = C \tag{2.31}$$

y, usando nuevamente la ecuación 2.27, se concluye que

$$\beta(t) \subset N(A, \epsilon). \tag{2.32}$$

En virtud de las contenciones 2.30 y 2.32 se obtiene que $H_d(A, \beta(t)) < \epsilon$. Por consiguiente, $\beta([0,1])$ se encuentra contenido en $B_{H_d}(A, \epsilon)$. Debe mencionarse, además, que, puesto que cada $t, s \in [0,1]$ satisfacen que $p \in A \subset \alpha(t)$ y que $q \in B \subset \beta(s)$, entonces $\alpha(t)$ y $\beta(s)$ son elementos de $\Lambda(U)$. Finalmente, gracias a que C pertenece a $\alpha([0,1]) \cap \beta([0,1])$ entonces $\alpha([0,1]) \cup \beta([0,1])$ es un continuo que conecta a A con B y que queda contenido en $\mathcal{W}$ de donde se concluye que $\mathcal{W}$ es conexo.

▲

Corolario 2.21. Sea X un continuo. Si X es localmente conexo entonces $C(X)$ también lo es. ▲

Capítulo 3

Dendroides

El objetivo de este capítulo es desarrollar las herramientas relacionadas con los *dendroides* que servirán en un futuro para demostrar que los subcontinuos propios y no degenerados de ciertos continuos son arcos (ver teorema 5.9).

Definición 3.1. *Sea X un continuo. Se dice que X es* **unicoherente** *si para cualquier par de subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$ se cumple que $A \cap B$ es conexo. Si además cada subcontinuo de X también es unicoherente entonces a X se le llamará* **hereditariamente unicoherente**. ▲

Definición 3.2. *A un continuo conexo por arcos y hereditariamente unicoherente se le conoce como* **dendroide**. ▲

A continuación se enunciará un teorema que agrupa las principales propiedades de dendroides que serán empleadas posteriormente.

Teorema 3.3. *Sea X un dendroide. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *X es descomponible.*

2. *Si Y es un subcontinuo de X entonces Y es un dendroide.*

3. *Si x y y son dos puntos diferentes de X entonces existe un único arco en X que los une.*

▲

Demostración.

1. La parte *1* se sigue del corolario 1.11.

2. Para probar la afirmación *2*, considere un subcontinuo Y de X. Gracias a que X es hereditariamente unicoherente se sigue que Y también lo es. Ahora suponga que x y y son dos puntos distintos de Y. Como $x, y \in Y \subset X$ y X es conexo por arcos se deduce que existe un arco A en X que los une. Observe que x y y pertenecen a $A \cap Y$ y, además, por la unicoherencia hereditaria de X, $A \cap Y$ es un conexo y, por tanto, un continuo, el cual está contenido en A de donde no le queda más que ser A mismo, en consecuencia, A se encuentra contenido en Y y se ha obtenido un arco en Y que une a x con y.

3. Para demostrar el inciso *3*, considere dos puntos diferentes x y y de X y suponga que A_1 y A_2 son dos arcos en X que unen a x y y. Dado que x es un punto de $A_1 \cap A_2$ se tiene que $A_1 \cup A_2$ es un subcontinuo de X, como X es hereditariamente unicoherente, $A_1 \cap A_2$ es un subcontinuo de X. Note que $x, y \in A_1 \cap A_2 \subset A_1$.

Entonces A_1 es un arco de x a y y $A_1 \cap A_2$ es un subcontinuo de A_1 que los une, esto implica que $A_1 \cap A_2 = A_1$. Similarmente se obtiene que $A_1 \cap A_2 = A_2$. Por tanto $A_1 = A_2$.

▲

En seguida se presenta el teorema de reducción de Brouwer que es uno de los pocos resultados que se usarán (y que se demostrará) que requiere hipótesis muy generales (salvo los resultados del cuarto capítulo). Cabe señalar que en realidad solicitar que un espacio cuente con una base numerable y que tenga una propiedad adicional no es tan general como tal vez podría pensarse, aunque al recordar que los espacios con los que normalmente se ha estado trabajando (y se seguirá considerando) son métricos y compactos, entonces se verá que sí se trata de una condición más general. El espacio dedicado a dicho teorema queda justificado puesto que se utiliza explícitamente en la prueba del teorema posterior. Dicha prueba es de por sí bastante larga (por no decir que un poquito tediosa) y si se hubiera prescindido del teorema 3.4 tal vez hubiese resultado harto agobiante.

Teorema 3.4. *[de reducción de Brouwer] Sean X un espacio con una base numerable y $\mathcal{K}$ una familia no vacía de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de que para cada sucesión creciente $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{K}$, existe un elemento K de $\mathcal{K}$ tal que $K_n \subset K$ para cada $n \geq 0$. Entonces $\mathcal{K}$ contiene al menos un elemento maximal en $\mathcal{K}$ con respecto al orden parcial dado por la contención.* ▲

Demostración. Sean $\{U_n : n \geq 1\}$ una base numerable de X y K_0 un elemento de $\mathcal{K}$. Defina inductivamente K_{n+1} como un elemento de $\mathcal{K}$ que satisfaga que $K_n \subset K_{n+1}$ y que $K_{n+1} \cap U_{n+1}$ es distinto del vacío, si tal K_{n+1} existe y, en caso contrario, defina $K_{n+1} = K_n$. Observe que $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots$, así que, por hipótesis, existe un elemento K de $\mathcal{K}$ que cumple que para cada $n \geq 0$, $K_n \subset K$. Se demostrará que K es un elemento maximal en $\mathcal{K}$. Suponga lo contrario, es decir, que existe un elemento Q de $\mathcal{K}$ tal que K se encuentra contenido propiamente en Q. Sea x un elemento de $Q \setminus K$. Entonces $X \setminus K$ es una vecindad abierta de x, conque existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_m \subset X \setminus K$. Como K_m está contenido en K, se tiene que K_m y U_m son ajenos. Note además que $K_{m-1} \subset K \subset Q$ y que $Q \cap U_m$ es distinto del vacío (ya que x pertenece a esta intersección), así que de la manera en que se define K_m se sigue que K_m debe ser un elemento de $\mathcal{K}$ (por ejemplo Q) que intersecte a U_m, lo cual es una contradicción. Por tanto, K es un elemento maximal de $\mathcal{K}$. ▲

Teorema 3.5. *Sean X un dendroide y α un arco en X. Entonces existe un arco β en X con la propiedad de que α se encuentra contenido en β y si γ es un arco en X tal que contiene a β entonces $\beta = \gamma$. En otras palabras, cada arco de un dendroide queda contenido en uno maximal.* ▲

Demostración.

1. Sea $\alpha = a_0b_0$ un arco en X. Sea $\mathcal{K} = \{\beta : \beta$ es un arco de X y $\alpha \subset \beta\}$. Para aplicar el teorema de reducción de Brouwer hay que demostrar que si $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$

es una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{K}$, entonces existe un elemento β de $\mathcal{K}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que α_n está contenido en β.

2. Sea pues, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de arcos en X. Sea a un punto de $a_0b_0 \setminus \{a_0, b_0\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denote por $a_nb_n = \alpha_n$ y, sin pérdida de generalidad, suponga que ab_n está contenido en ab_{n+1}. El propósito de los siguientes incisos es mostrar que existe un arco ab en X tal que contiene a ab_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X es un continuo, se puede suponer que $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente, ya que, en caso contrario, el argumento es similar si se considera una subsucesión convergente $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y se tiene en cuenta que $ab_k \subset ab_{n_k}$ $(k \leq n_k)$.

3. Así pues, sea $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Denote por $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} ab_n$. Como S es unión de conexos y cada uno de ellos contiene a ab_1, se sigue que S es un conexo y, por tanto, $\overline{S}$ es un subcontinuo de X que, por el teorema 3.3, resulta ser un dendroide. Observe que $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ implica que b pertenece a $\overline{S}$. Sea ab el único arco de a a b en $\overline{S}$. Sean p un punto de S y n_p el primer natural tal que p pertenece al arco ab_{n_p}.

4. Sea $P = \bigcup_{n=n_p}^{\infty} pb_n$. Note que $\overline{P}$ es un subcontinuo de $\overline{S}$ que, por el teorema 3.3, es descomponible. Sea $\overline{P} = A \cup B$ donde A y B son subcontinuos propios de $\overline{P}$. Debido al mismo teorema 3.3, A y B son dendroides. Puede suponerse que $\mathbb{M} = \{m \in \mathbb{N} : b_m \in B\}$ es infinito, en este caso, reescriba $\mathbb{M} = \{m_k : k =$

$0, 1, 2, \dots\}$ considerando además, que para cada $i < j$, se cumpla que $m_i < m_j$.

5. Se afirma que p pertenece a $A \setminus B$, ya que, en situación contraria, para cada elemento x de P se tiene que para alguna $n \geq n_p$, x pertenece a pb_n. Por como se definió $\mathbb{M}$, se sigue que $m_n > n$ y se satisface que b_{m_n} es un punto de B. Dado que p y b_{m_n} se encuentran en B, el arco pb_{m_n} queda contenido en B y, como el primero a su vez contiene al arco pb_n, se obtiene que x pertenece a B. Por tanto, P está contenido en B y, puesto que éste es cerrado, se concluye que $\overline{P} = B$, lo cual es una contradicción que parte de suponer que p pertenece a B.

6. Sea q el primer punto del arco pb_{m_0} tal que q se encuentra en B (ver notación 1.3). Se asegura que para cada elemento w de $A \setminus B$, se cumple que w es un punto del arco pq. Esto es cierto debido a que, como w pertenece a $\overline{P}$ ($w \in A$) se sigue que $w = \lim_{k\to\infty} w_k$ donde w_k pertenece a P para cada $k \in \mathbb{N}$. Si se diera el caso en que existiese una $n > n_p$ tal que una infinidad de elementos de $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ pertenecieran a pb_n entonces como éste está contenido en pb_{m_n} y este último es compacto, se tendría que w pertenecería a pb_{m_n} lo que implicaría que w se encontraría en $pq \cup qb_{m_n}$, pero, dado que qb_{m_n} está contenido en B se obtendría que w pertenece al arco pq. Ahora, en caso contrario, puede suponerse que, para cada $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$ se tiene que w_k es un punto de $b_{n_k-1}b_{n_k}$, donde $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\mathbb{N}$. Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > m_0$. Puesto que para

cada $k > k_0$, se satisface que $m_0 < n_k - 1 < n_k \leq m_{n_k}$; entonces $w_k \in b_{n_k-1}b_{n_k} \subset b_{m_0}b_{m_{n_k}} \subset B$, de donde se deduce que $\lim_{n\to\infty} w_{m_k} = w$ es un punto de B lo cual es una contradicción. Lo anterior muestra que, este caso es imposible y, entonces, w pertenece al arco pq, según se deseaba. Note especialmente que para cada $n > m_0$, puesto que b_n no pertenece al arco pq (ya que $pb_n = pq \cup qb_n$), entonces b_n se encuentra en B.

7. Observe que el arco ap y B son ajenos, ya que si se supone lo contrario se tiene que $pq \cup ap \cup B$ es un subcontinuo de X, por tanto es un dendroide, pero, en virtud de que $ap \cup B$ es conexo y se nota que $pq \cap (ap \cup B) = (pq \cap ap) \cup (pq \cap B) = \{p, q\}$, se deduce que $pq \cup ap \cup B$ no es unicoherente, lo cual es una contradicción.

8. Lo anterior sirve para concluir lo siguiente: puesto que $ap \cap pq = \{p\}$ entonces $ap \cup pq = aq$, además como $aq \cap qb = \{q\}$ (ya que el arco qb está contenido en B), se sigue que $aq \cup qb = ab$. Así que p pertenece al arco ab, pero, si se recuerda que p es cualquier punto de S entonces se obtiene que S queda contenido en ab, es decir, el arco ab contiene a ab_n para cada $n \in \mathbb{N}$, lo que está acorde con lo que se quería probar en el inciso 2 de esta demostración.

9. Por último, de modo semejante se arguye que existe un punto c de X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, el arco ca contiene a su vez al arco $a_n a$. Si se supone que $ca \cap ab$ es distinto de $\{a\}$ entonces considere un punto x en

$(ca \cap ab) \setminus \{a\}$, se sigue que el arco ax se encuentra contenido en $ca \cap ab$, pero, puesto que a_0 pertenece a $ca \setminus \{a\}$ y b_0 a su vez es elemento de $ab \setminus \{a\}$ se tiene que existe un punto y en $(ax \cap a_0a \cap ab_0) \setminus \{a\}$, lo cual constituye una contradicción ya que $a_0a \cap ab_0 = \{a\}$. De esta manera se obtiene que $ca \cup ab = cb$. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = a_nb_n \subset cb$, lo que finaliza la demostración de este teorema.

▲

A continuación se muestra un teorema que resultará imprescindible en la prueba del teorema posterior y que, por sí solo, es interesante ya que caracteriza a los dendroides atriódicos.

Teorema 3.6. *Sea X un dendroide atriódico. Entonces X es un arco.* ▲

Demostración. Sea A un arco en X. Sea $b_1b_2 = B \subset X$ un arco maximal que contenga a A y que se obtiene del teorema 3.5. Si $B = X$ entonces no hay nada qué hacer. Así que, suponga que existe un punto p en $X \setminus B$. Como X es conexo por arcos, existe un arco pb_1 que une a p con b_1. Sea $q \in pb_1$ el primer punto del arco pb_1 tal que q se encuentra en B. Sea pq el subarco de pb_1 que une p con q. En el caso que $q = b_1$ entonces $pq \cap qb_2 = \{q\}$ y recordando la observación 1.6 se sigue que pb_2 es un arco que contiene propiamente a b_1b_2 (ya que p no está en este último arco), lo que contradice el modo en que se eligió a b_1b_2. El caso $q = b_2$ es simétrico. Ahora considere el caso en que q es diferente de b_1 y de b_2. Renombre $Y_1 = qb_1$, $Y_2 = qb_2$ y

$Y_3 = pq$. Observe que $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ resulta ser un triodo simple, lo que contradice el hecho inicial de que X es atriódico. Por tanto X no es más que el arco B. ▲

El teorema que se presenta a continuación es, por sí mismo, de un interés innegable aunque su importancia no resalta (en mi opinión) tan fácilmente a la vista debido a las pocas ocasiones en las que se le utiliza.

Teorema 3.7. *Sea X un continuo localmente conexo y atriódico. Entonces X es un arco o una curva cerrada simple.* ▲

Demostración.

1. Suponga que X contiene una curva cerrada simple Y. Si $Y = X$ entonces no hay nada qué hacer. Suponga entonces que existe un punto p en $X \setminus Y$. Sea w un punto de Y. Como X es localmente conexo, al aplicar la proposición 1.21, se obtiene que X es conexo por arcos. Sea pw un arco en X de p a w. Sea $q \in pw$ el primer punto de pw tal que q pertenece a Y. Puesto que Y es localmente conexo, existe un abierto y conexo Q de Y tal que $q \in Q \subset \overline{Q} \subsetneq Y$. Observe que $\overline{Q}$ no es más que un arco de la forma z_1z_2. De esta manera, si W_3 denota el subarco pq de pw que une a p con q y para $i = 1, 2$, W_i denota el subarco qz_i de z_1z_2 que une a q con z_i entonces se tiene que el continuo $W = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ es tal que para cada $i, j \in \{1, 2, 3\}$ con i distinto de j, W_i es un arco y $W_i \cap W_j = \{q\}$. Por tanto W es un triodo simple, lo cual es una contradicción a la hipótesis de que X es atriódico.

2. Ahora, suponga que X no es un arco, lo que se mostrará es que X contiene una curva cerrada simple, conque se reducirá al caso anterior. Por el teorema 1.24 se tiene que existen al menos dos puntos p y q en X que no son de corte. Sea A un arco de p a q en X. Debido a la suposición de que X no es un arco, se sigue que existe un punto r en $X \setminus A$. Puesto que $X \setminus \{p\}$ es un abierto y conexo (ya que p no es un punto de corte) de X, al aplicar el teorema 1.22, se deduce que existe un arco B de r a q en X que se queda contenido en $X \setminus \{p\}$. Se afirma que $A \cap B = \{q\}$, ya que en caso contrario, defina w como el primer punto del arco B tal que w pertenece a A. Entonces, como en el caso anterior, escriba $W_1 = rw \subset B$, $W_2 = pw \subset A$ y $W_3 = wq \subset A$ y observe que:

   (a) q es distinto de w porque se está suponiendo que $A \cap B \neq \{q\}$,

   (b) p es diferente de w ya que el segundo pertenece a B, mismo que se encuentra contenido en $X \setminus \{p\}$ y

   (c) r es distinto a w puesto que el primero no pertenece a A mientras que el segundo sí.

   Por tanto, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, W_i es un continuo no degenerado, y estos arcos son tales que la intersección de cualesquiera dos de ellos es $\{w\}$, de esta manera se concluye que $W = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ resulta ser un triodo simple contenido en X, lo cual contradice nuevamente la suposición de que X es atriódico. Por tanto es cierto que $A \cap B = \{q\}$, así que, por la observación 1.6, se sigue que $A \cup B$ es un arco que une a p con r y algo que es importante señalar es que dicho arco contiene al punto q. Ahora, de manera similar se obtiene un arco C en $X \setminus \{q\}$ que une a p con r. Así pues, se tienen dos arcos diferentes (uno que pasa por q y el segundo que no lo tiene) que van de p a r lo que implica, por la observación 1.10, que X contiene una curva cerrada simple.

▲

Capítulo 4

Dimensión

La intención de este capítulo es presentar los aspectos básicos de la *teoría de la dimensión* que serán necesarios para demostrar que si un continuo es tal que sus composantes son conexas por arcos y la dimensión de su hiperespacio de continuos es finita entonces la dimensión de dicho continuo es igual a 1 (teorema 4.9).

En la teoría de la dimensión se trabaja principalmente con tres definiciones diferentes, a saber: la de *Menger-Urysohn* (ind) o *inductiva chica*, la de *Brouwer-Čech* (Ind) o *inductiva grande* y la de *Čech-Lebesgue* (dim) o *cubriente*. A continuación se presenta la definición de la primera junto con un teorema demostrado en [En89, 7.3.3].

Definición 4.1. *[Dimensión de Menger-Urysohn] Sean X un espacio regular y n un entero no negativo, denote por* $\operatorname{ind} X$ *a la dimensión de Menger-Urysohn de X. Se dice que:*

1. $\operatorname{ind} X = -1$ *si X es vacío.*

2. $\operatorname{ind} X \leq n$ *si para cada* $x \in X$ *y cada vecindad* V *de* x *existe un abierto* $U \subset X$ *tal que* $x \in U \subset V$ *y* $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq n-1$, *donde* $\operatorname{Fr} U$ *denota la frontera de* U.

3. $\operatorname{ind} X = n$ *si* $\operatorname{ind} X \leq n$ *y la desigualdad* $\operatorname{ind} X \leq n-1$ *no se cumple.*

4. $\operatorname{ind} X = \infty$ *si la desigualdad* $\operatorname{ind} X \leq n$ *no se satisface para ninguna* n.

▲

Teorema 4.2. *Para cada espacio métrico separable* X *se tiene que* $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = \dim X$. ▲

La razón por la que únicamente se presenta esta definición de entre las tres de dimensión es por ser la menos díficil de entender y visualizar y, además, debido a este teorema se tiene que los tres conceptos coinciden en continuos. Por lo que se prescindirá de una discusión mayor sobre dichos conceptos, no sin antes mencionar que de aquí en adelante se utilizará como notación $\dim X$ (por ser la más sugerente) y se referirá a ella simplemente como "la dimensión de X". Un hecho a recalcar y que se desprende de la definición es que si dos espacios topológicos (regulares) son homeomorfos entonces tienen la misma dimensión.

Observación 4.1. De la definición 4.1 se sigue que si Z es un espacio métrico separable que tiene dimensión igual a cero entonces tiene una base $\mathcal{B}$ tal que para cada elemento U de $\mathcal{B}$ se cumple que $\dim \operatorname{Fr} U = -1$, es decir, $\operatorname{Fr} U$ es vacía, por tanto, U es un abierto y cerrado de Z, en particular, si Z es no degenerado entonces es disconexo. Por consiguiente, si

Z es un continuo no degenerado entonces tiene dimensión mayor o igual a 1.

Ejemplo 4.2. Sea Z un espacio discreto y no vacío. Entonces $\dim Z = 0$.

Ejemplo 4.3. Considere el intervalo I. Dado que cada $x \in I$ tiene el sistema de vecindades abiertas $\{(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}) \cap I\}_{n=1}^{\infty}$, y cada una de estas vecindades tiene como frontera un espacio discreto y no vacío de a lo más dos puntos, entonces se sigue que $\dim I \leq 1$, pero como I es un continuo y, gracias a la observación 4.1, se concluye que $\dim I = 1$.

Los siguientes tres teoremas serán una buena herramienta durante el desarrollo de este capítulo, los primeros dos son demostrados en [En89, 7.1.1] y [En89, 7.2.1], respectivamente, y el tercero se encuentra como ejercicio en [En78, 1.9.E(b)].

Teorema 4.3. *Dados un continuo X y un subespacio A de X se cumple que* $\dim A \leq \dim X$. ▲

Teorema 4.4. *Sea X un continuo. Si X tiene una cubierta cerrada numerable $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que* $\dim F_i \leq n$ *para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces* $\dim X \leq n$. ▲

Teorema 4.5. *Sean X un espacio métrico y compacto y Y un espacio métrico separable con* $\dim Y = 1$. *Entonces* $\dim(X \times Y) = \dim X + 1$. ▲

Corolario 4.6. Para cada continuo X se tiene que la dimensión del cilindro de X es $\dim X + 1$. ▲

Así, por ejemplo, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que la n-celda I^n, que no es más que el cilindro de I^{n-1}, es de dimensión n.

Una aplicación importante de los dos teoremas anteriores es dada en el siguiente resultado.

Teorema 4.7. *Si X es un continuo entonces* $\dim K(X) = \dim X + 1$. ▲

Demostración. Si $\dim X = \infty$ entonces como X es homeomorfo a $B(X)$, por el teorema 4.3, se sigue que $\dim K(X) = \infty$. Así que suponga que la dimensión de X es finita. Defina $F_1 = \{v\}$, donde v es el vértice de $K(X)$ y, para cada $i \in \{2, 3, \dots\}$, $F_i = \pi(X \times [0, \frac{i-1}{i}])$, donde π es la función cociente. Dado que $X \times [0, \frac{i-1}{i}]$ es un compacto y π es continua, se sigue que F_i es un compacto y, por tanto, un cerrado de $K(X)$ para cada $i \in \{2, 3, \dots\}$. Como F_1 también es cerrado, $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una colección de cerrados de $K(X)$. Ahora, sea p un elemento de $K(X)$. Si $p = v$ entonces $p \in F_1$. Suponga entonces que $p = \pi(x, t)$ con t menor que 1. Como $\{\frac{i-1}{i}\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge a 1, se concluye que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [0, \frac{j-1}{j}]$, por lo que $p = \pi(x, t) \in F_j$, obteniendo así que $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un cubierta (cerrada) de $K(X)$. Gracias al corolario 4.6 y a que para cada $i \in \{2, 3, \dots\}$, F_i es homeomorfo al cilindro de X se obtiene que $\dim F_i = \dim X + 1$. Por lo anterior, por el teorema 4.4 y dado que $\dim F_1 = 0$, se concluye que $\dim K(X) = \dim X + 1$. ▲

En 1951 R. H. Bing publicó el artículo [Bn51] el cual es uno de los más importantes concernientes a la dimensión y a los continuos hereditariamente indescomponibles, de dicho trabajo se utilizará el Teorema 5 que dice lo siguiente:

Teorema 4.8. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tales que* $\dim X = n+1$. *Entonces X contiene un subcontinuo hereditariamente indescomponible Y que satisface que* $\dim Y = n$. ▲

Ahora se demostrará el teorema más importante de este capítulo.

Teorema 4.9. *Sea X un continuo tal que sus composantes son conexas por arcos y su hiperespacio de continuos $C(X)$ es de dimensión finita. Entonces* $\dim X = 1$. ▲

Demostración. Si $\dim X = \infty$ entonces del hecho de que X es homeomorfo a $F_1(X)$ se desprende que $\dim C(X) = \infty$ lo cual es absurdo. Por tanto $\dim X$ es finita. Ahora suponga que $\dim X > 1$. Por el teorema 4.8, X contiene un continuo hereditariamente indescomponible Y tal que $\dim Y = \dim X - 1$. Sean p un punto de Y y $\kappa(p)$ su composante en X. Entonces Y queda contenido en $\kappa(p)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sean $q_1, q_2, \ldots, q_n$, n puntos diferentes de Y y q un punto de $\kappa(p) \setminus Y$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea U_i una vecindad abierta de q_i en X tal que para i diferente de j se cumple que U_i y U_j son ajenos. Por otro lado, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $\alpha_i : [0, 1] \to \alpha_i([0, 1]) \subset \kappa(p)$ un homeomorfismo tal que $\alpha_i(0) = q_i$ y $\alpha_i(1) = q$. Por continuidad de α_i existe $t_i \in (0, 1)$ tal que $\alpha_i([0, 2t_i))$ está contenido en U_i. Así que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, denote $Y_i = \alpha([0, t_i])$. Considere $Z = Y \cup Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_n$. Observe que Z es un n-odo, ya que q_i pertenece a $Y \cap Y_i$, como Y_i es descomponible y Y es hereditariamente indescomponible, se sigue que Y_i no está contenido en Y y dado que para cada

$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, Y_i se encuentra contenido en U_i, se infiere que Y_i y Y_j son ajenos cuando i es distinto de j. Como X contiene un n-odo, por el teorema 2.19, se sigue que $C(X)$ contiene una n-celda. Puesto que n es arbitraria, al aplicar el teorema 4.3 se deduce que $C(X)$ es de dimensión infinita, esta contradicción concluye el teorema. ▲

Capítulo 5

La propiedad de cono=hiperespacio

En este capítulo se expondrá la parte medular de esta tesis, que consiste en presentar la noción de la *propiedad de cono=hiperespacio*, así como desarrollar los principales teoremas sobre la estructura de los continuos de dimensión finita que tienen esta propiedad.

Definición 5.1. *Sea X un continuo. Se dice que X tiene la* **propiedad de cono=hiperespacio** *si existe un homeomorfismo $h : K(X) \to C(X)$ tal que $h(B(X)) = F_1(X)$ y $h(v) = X$. A h se le conoce como* **homeomorfismo de Rogers**. ▲

Al homeomorfismo de Rogers se le puede pedir que para cada elemento x de X, se cumpla que $h(x, 0) = \{x\}$, el siguiente resultado verifica lo anterior.

Proposición 5.2. *Si X es un continuo con la propiedad de cono=hiperespacio entonces existe un homeomorfismo de Rogers $H : K(X) \to C(X)$ tal que para cada elemento x de*

X, se satisface que $H(\pi(x,0)) = \{x\}$, donde π es la función cociente. ▲

Demostración. Sea $h : K(X) \to C(X)$ un homeomorfismo de Rogers. Como ya se mencionó, $B(X) \approx X \approx F_1(X)$ y, además, se pueden dar los homeomorfismos de la siguiente forma:

$$\eta : X \to B(X) \text{ con } \eta(x) = \pi(x,0) \tag{5.1}$$

y

$$\theta : X \to F_1(X) \text{ con } \theta(x) = \{x\}. \tag{5.2}$$

Por definición, se tiene que $h|_{B(X)} : B(X) \to F_1(X)$ es un homeomorfismo, de donde se desprende que $(h|_{B(X)})^{-1} : F_1(X) \to B(X)$ también lo es. Defina $f : X \to X$ como la siguiente composición de homeomorfismos: $\eta^{-1} \circ (h|_{B(X)})^{-1} \circ \theta$, la cual resulta ser un homeomorfismo. En virtud del lema 2.10, se concluye que $C(f) : C(X) \to C(X)$ es un homeomorfismo. Ahora, defina $H : K(X) \to C(X)$ por $H = C(f) \circ h$. Note que H es un homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos. Sólo resta verificar que H es el homeomorfismo de Rogers deseado. Para esto se tiene que si v es el vértice entonces

$$H(v) = (C(f) \circ h)(v) = C(f)(X) = X \tag{5.3}$$

ya que $f(X) = X$. Además, dado un punto x de X, $H(\pi(x,0)) = C(f)(h(\pi(x,0)))$. Sea $\{p\} = h(\pi(x,0))$, entonces

$$
\begin{aligned}
C(f)(h(\pi(x,0))) &= f(h(\pi(x,0))) = f(\{p\}) \\
&= (\eta^{-1} \circ (h|_{B(X)})^{-1} \circ \theta)(\{p\}) \\
&= \{(\eta^{-1} \circ (h|_{B(X)})^{-1} \circ \theta)(p)\} \\
&= \{(\eta^{-1} \circ (h|_{B(X)})^{-1})(\{p\})\} \\
&= \{(\eta^{-1} \circ (h|_{B(X)})^{-1})(h(\pi(x,0)))\} \\
&= \{\eta^{-1}(\pi(x,0))\} = \{x\}.
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Por tanto $H(\pi(x,0)) = \{x\}$. ▲

En consecuencia, de ahora en adelante se supondrá que cualquier homeomorfismo de Rogers h cumple que $h(\pi(x,0)) = \{x\}$ para cada punto x de X.

Los resultados que se presentan a continuación servirán de base para deducir el corolario 5.10, el cual aglutina, en pocas palabras, todas las propiedades que se obtienen de dichos resultados. Cada uno de éstos brinda información sustancial para obtener una caracterización completa de los subcontinuos propios y no degenerados de un continuo de dimensión finita con la propiedad de cono=hiperespacio en áquel corolario.

Teorema 5.3. *Sea X un continuo con la propiedad de cono =hiperespacio. Entonces cada composante de X es conexa por arcos.* ▲

Demostración. Suponga que X no es un arco. Sean w un punto de X y $\kappa(w)$ su composante en X. Sea q un elemento de $\kappa(w)$ distinto de w. Por definición de composante, existe un subcontinuo propio Q de X tal que w y q pertenecen a Q.

Sea $h : K(X) \to C(X)$ un homeomorfismo de Rogers. Considere nuevamente el homeomorfismo θ dado en la ecuación 5.2. Igualmente, preste atención al subespacio $\pi(Q \times \{0\})$ de $B(X)$ y observe que $(\theta^{-1} \circ h)(\pi(Q \times \{0\})) = Q$ (recuerde que se está suponiendo que $h(\pi(x,0)) = \{x\}$). Tome el hiperespacio de continuos $C(Q)$ de Q, el cual cabe mencionar es un subespacio conexo por arcos de $C(X)$ (corolario 2.7) que no tiene a X. Sea $\mathcal{A}$ un arco en $C(Q)$ que una a $\{w\}$ con $\{q\}$. Note que el vértice v no se encuentra en $h^{-1}(\mathcal{A})$, ya que $h(v) = X$ y éste no pertenece a $\mathcal{A}$. Observe además, que la función $\varpi : (K(X) \setminus \{v\}) \to X$ definida en el lema 1.18 se puede aplicar al subespacio $h^{-1}(\mathcal{A})$, consiguiendo así un subcontinuo conexo por arcos de X el cual tiene a los puntos w y q. Por tanto, de dicho subcontinuo se puede obtener un arco que una a w con q que, por la suposición inicial, es distinto de X, por lo que se queda contenido en $\kappa(w)$. ▲

Teorema 5.4. *Sea X un continuo de dimensión finita tal que $K(X)$ y $C(X)$ son homeomorfos y cada una de sus composantes es conexa por arcos. Entonces X es de dimensión igual a* 1 *y $C(X)$ es de dimensión igual a* 2. ▲

Demostración. Suponga que $\dim X = n$. Por el teorema 4.7, se tiene que $\dim K(X) = n + 1$. Puesto que $K(X)$ es homeomorfo a $C(X)$, se sigue que $\dim C(X) = n + 1$ y, por tanto, es de dimensión finita. No resta más que aplicar el teorema 4.9 para concluir que $\dim X = 1$ conque $\dim C(X) = 2$. ▲

Corolario 5.5. Sea X un continuo de dimensión finita con la propiedad de cono=hiperespacio. Entonces X es de dimensión igual a 1 y $C(X)$ es de dimensión igual a 2. ▲

Teorema 5.6. *Sea X un continuo tal que la dimensión de su hiperespacio $C(X)$ es igual a 2. Entonces X es atriódico.* ▲

Demostración. Por el teorema 2.19, se tiene que si X contuviera un triodo entonces $C(X)$ contendría una 3-celda, lo que es imposible puesto que $\dim C(X) = 2$. ▲

Teorema 5.7. *Sea X un continuo tal que la dimensión de su hiperespacio $C(X)$ es igual a 2 y cada una de sus composantes es conexa por arcos. Si Y es un subcontinuo propio de X, entonces Y es unicoherente.* ▲

Demostración. Sea Y un subcontinuo propio de X. Suponga que Y no es unicoherente. Entonces existe un par de subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$ y que $A \cap B$ es disconexo. Sean C y D dos componentes distintas de $A \cap B$ y U y V dos abiertos ajenos de X tales que $C \subset U$ y $D \subset V$. Sea w un punto de Y. Puesto que Y es un subcontinuo propio de X, $X \setminus Y$ es un abierto no vacío de X y como la composante $\kappa(w)$ de w en X es densa en X (teorema 1.7), se sigue que existe un punto p en $\kappa(w) \cap (X \setminus Y)$. Dado que $\kappa(w)$ es conexo por arcos se concluye que existe un arco pw contenido en él. Sea $q \in pw$ el primer punto del arco pw tal que q pertenece a Y y suponga que q se encuentra en A. Puesto que $U \cap B$ y $V \cap B$ son dos abiertos relativos a B los cuales contienen a C y D, respectivamente, al aplicar el teorema 1.25 se obtienen dos subcontinuos X_2 y X_3 de B que satisfacen que $C \subsetneq X_2 \subset U \cap B$ y $D \subsetneq X_3 \subset V \cap B$. Note que, en virtud de que C es componente de $A \cap B$ y X_2 es un continuo que cumple que $C \subsetneq X_2 \subset B$, entonces X_2 no está contenido en A, similarmente se deduce que X_3 no se encuentra contenido en A. Renombre $pq = X_1$ y denote por $Z = A \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3$. Observe que, por construcción, se verifican las siguientes afirmaciones.

1. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, A y X_i se intersectan. Por tanto Z es un continuo. Además X_i no está contenido en A ya que p se encuentra en $X_1 \backslash A$ y, como se comentó hace unos instantes, X_2 y X_3 tampoco están contenidos en A.

2. Para cada $i, j \in \{1, 2, 3\}$ con i distinto de j se sigue que $(X_i \setminus A)$ es ajeno a $(X_j \setminus A)$.

Por tanto Z es un triodo contenido en X, pero esto es una contradicción ya que, por el teorema 5.6, X debe ser atriódico. ▲

Teorema 5.8. *Sea X un continuo de dimensión finita tal que satisface las siguientes dos condiciones:*

1. *Existe un homeomorfismo $h : K(X) \to C(X)$ tal que $h(v) = X$, donde v es el vértice de $K(X)$.*

2. *Cada una de sus composantes es conexa por arcos.*

Entonces cada subcontinuo propio de X es conexo por arcos.

▲

Demostración.

1. Sea Y un subcontinuo propio de X. Sean x y y dos puntos distintos de Y. Debido a que x y y pertenecen a Y y éste es diferente de X, se tiene que x y y se encuentran en la misma composante $\kappa(x)$ de X. Como $\kappa(x)$ es conexa por arcos, existe un homeomorfismo $\alpha : [0,1] \to \alpha([0,1]) \subset \kappa(x)$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Si $\alpha([0,1])$ queda contenido en Y entonces no resta nada por hacer.

2. Así que suponga que $\alpha([0,1])$ no se encuentra contenido en Y. Como Y es cerrado (ya que es compacto), $\alpha([0,1]) \setminus Y$ es un abierto no vacío de $\alpha([0,1])$. De la continuidad de α se deduce que $\alpha^{-1}(\alpha([0,\ 1]) \setminus Y)$ es un abierto no vacío de $[0,1]$. Sea C una componente de $\alpha^{-1}(\alpha([0,1]) \setminus Y)$ y note que, por la conexidad local de $[0,1]$, se concluye que C es un abierto de $[0,1]$. Observe además, que 0 y 1 no pertenecen a C ya que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$ son puntos de Y. Por tanto, C es de la forma (a,b) donde $a, b \in [0,1]$ y $\alpha([a,b]) \cap Y$ consta únicamente de los puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$.

3. Observe que, por el teorema 5.4, $C(X)$ es de dimensión igual a 2 y que, por el teorema 5.7, los subcontinuos propios de X son unicoherentes. Ahora, cabe destacar que $Y \cup \alpha([a,b]) = X$, ya que en caso contrario X contendría un subcontinuo propio que no es unicoherente (el mismo $Y \cup \alpha([a,b])$). De este modo, $\alpha([a,b])$ es un arco en X tal que $\alpha([a,b]) \setminus \{\alpha(a), \alpha(b)\}$ es un abierto localmente conexo de X.

4. Tome una métrica d para X. Defina $p = \alpha\left(\frac{a+b}{2}\right)$ y $\epsilon = \left(\frac{1}{2}\right) d(p, Y)$. Considere ahora un punto A en $B_{H_d}(X, \epsilon)$. Por definición se obtiene que X queda contenido en $N(A, \epsilon)$, de donde se concluye que existe un punto q de A tal que $d(p, q) < \epsilon$. Por la manera en que se eligió ϵ, se deduce que q no pertenece a Y y, por tanto, es un punto de $\alpha((a, b))$, lo que implica que q es un punto de conexidad local de X. Utilizando el teorema 2.20 se obtiene que A es un punto de conexidad local de $C(X)$.

5. Considere ahora el homeomorfismo $h : K(X) \to C(X)$ dado por las hipótesis. Note que $h^{-1}(B_{H_d}(X, \epsilon))$ es una vecindad abierta de v tal que cualquiera de sus puntos es de conexidad local. Observe que se verifican las siguientes conclusiones:

   (a) X es localmente conexo por el teorema 1.20.

   (b) X es atriódico por el teorema 5.6.

   (c) El teorema 3.7 asegura que X es un arco o una curva cerrada simple.

   Por tanto, cualquier caso que se llegara dar en la anterior conclusión (c) implica que los subcontinuos propios de X son conexos por arcos.

▲

Teorema 5.9. *Sea X un continuo de dimensión finita tal que satisface las condiciones 1 y 2 enunciadas en el pasado teorema 5.8. Entonces cada subcontinuo propio y no degenerado de X es un arco.* ▲

Demostración. Sea Y un subcontinuo propio y no degenerado de X. Note que, por el teorema 5.4, $C(X)$ es de dimensión igual a dos, por consiguiente, al aplicar los teoremas 5.6, 5.7 y 5.8 se deduce que Y es un dendroide atriódico. Sólo resta recordar el teorema 3.6 para concluir que Y es un arco. ▲

Ahora ya se tienen los elementos suficientes para deducir que en un continuo de dimensión finita con la propiedad de cono=hiperespacio, todos los subcontinuos propios y no degenerados son arcos. Este resultado y el corolario 5.5 representan (a mi modo de ver) dos de los resultados más importantes sobre la estructura de los continuos de dimensión finita con la propiedad de cono=hiperespacio.

Corolario 5.10. Sea X un continuo de dimensión finita con la propiedad de cono=hiperespacio. Entonces cada subcontinuo propio y no degenerado de X es un arco. ▲

En seguida se dará una caracterización de los continuos de dimensión finita con la propiedad de cono=hiperespacio en el caso particular en que son descomponibles.

Teorema 5.11. *Sea X un continuo descomponible de dimensión finita con la propiedad de cono=hiperespacio. Entonces X es un arco o una curva cerrada simple.* ▲

Demostración. Debido a que X es descomponible, se tiene que $X = A \cup B$ donde A y B son subcontinuos propios de X. Del corolario 5.10 se deriva que tanto A como B son arcos. Suponga que a_1 y a_2 son los puntos extremos de A y que b_1 y b_2 son los respectivos de B. Como B es propio, existe un punto w en $A \setminus B$. Para $i \in \{1, 2\}$, sea wa_i el subarco de a_1a_2 que une a w con a_i. Se tienen los siguientes dos casos:

1. Suponga que para ambas $i = 1, 2$, wa_i y b_1b_2 se intersectan. Sean x_i el primer punto del arco wa_i tal que x_i se encuentra en B y x_1x_2 el subarco de b_1b_2 que une x_1 con x_2. Observe que, por construcción, se tiene que $S = wx_1 \cup x_1x_2 \cup wx_2$ es una curva cerrada simple donde $wx_1 \subset wa_1$, $x_1x_2 \subset b_1b_2$ y $wx_2 \subset wa_2$. Como los subcontinuos propios de X son arcos se obtiene que $X = S$ y por tanto X es una curva cerrada simple.

2. Suponga que solamente para una $i \in \{1, 2\}$ se cumple que wa_i y b_1b_2 se intersectan. Sin pérdida de generalidad suponga que wa_2 es el que satisface tal condición. Entonces $wa_2 \cup b_1b_2$ es un subcontinuo propio (ya que no contiene al punto a_1) de X. Por tanto $C = wa_2 \cup b_1b_2$ es un arco que tiene a w como punto extremo, esto, en virtud de que $wa_2 \setminus \{w\}$ es conexo y, por ende, también lo es $C \setminus \{w\}$ (puesto que w no pertenece al arco b_1b_2). De este modo, $wa_1 \cap C = \{w\}$ y, por la observación 1.6, se concluye que $wa_1 \cup C = a_1a_2 \cup b_1b_2 = A \cup B = X$ es un arco.

▲

El siguiente par de proposiciones representa el recíproco del teorema anterior, consiguiendo así una caracterización de todos los continuos descomponibles de dimensión finita con la propiedad de cono=hiperespacio.

Proposición 5.12. $[0,1]$ *tiene la propiedad de cono=hiperespacio.* ▲

Demostración. Primero observe que el cono geométrico y, por tanto el topológico, de $[0,1]$ es homeomorfo al triángulo Δ descrito en la ecuación 2.4, siendo en este caso el punto $\left(\frac{1}{2},1\right)$ el que representa al vértice de $K([0,1])$ y el arco $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1] \text{ y } y = 0\}$ el que corresponde a la base $B([0,1])$ de $K([0,1])$. Asimismo, recuerde que en el ejemplo 2.1 se mostró que $C([0,1])$ es homeomorfo al mismo triángulo, sucediendo en aquella ocasión que, $\left(\frac{1}{2},1\right)$ era la imagen bajo el homeomorfismo correspondiente del elemento $[0,1]$ de $C([0,1])$ y el previamente mencionado arco A lo era a su vez del subespacio $F_1([0,1])$. Con lo anterior puede concluirse que existe un homeomorfismo $h : K([0,1]) \to C([0,1])$ que satisface las condiciones necesarias para ser uno de Rogers. ▲

Proposición 5.13. S^1 *tiene la propiedad de cono=hiperespacio.* ▲

Demostración. Como en la prueba previa, note primeramente que el cono topológico de S^1 (sirviéndose del geométrico si hace falta) es homeomorfo al "cucurucho"

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (1-z)^2 \text{ y } z \in [0,1]\} \quad (5.5)$$

donde el punto $(0,0,1)$ está asociado con el vértice v de $K(S^1)$ y cada elemento $\pi((x,y),0)$ de $B(S^1)$ (recuerde que π es la función cociente pertinente) está relacionado bajo dicho homeomorfismo con el punto $(x,y,0)$ de Γ. Recuerde, además, que, en virtud del ejemplo 2.2, $C(S^1)$ es homeomorfo al disco unitario D descrito en dicho ejemplo. Igualmente observe que el disco D (el cual, cabe señalar, está contenido en el plano complejo $\mathbb{C}$) es homeomorfo al subespacio

$$G = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\} \tag{5.6}$$

de $\mathbb{R}^3$, existiendo, además, un homeomorfismo entre éstos que al punto $x + iy$ le asocia el punto $(x, y, 0)$. Finalmente, la función proyección que al punto (x, y, z) lo manda al punto $(x, y, 0)$ es continua, si se le restringe a Γ es, por la definición de Γ, inyectiva y su imagen es G. Por tanto Γ es homeomorfo a G. Conque Γ es homeomorfo a D y no sólo eso sino que gracias a la forma en que se fueron describiendo los homeomorfismos necesarios se cumple que la imagen de $(0, 0, 1)$ es el punto 0 (complejo) y la imagen de $(x, y, 0)$ es el punto $x + iy$ (cuya norma es igual a 1). Con los argumentos previos se deduce que existe un homeomorfismo de Rogers entre $K(S^1)$ y $C(S^1)$. ▲

Capítulo 6

Continuos C-H

El objetivo de este capítulo es desarrollar los resultados más interesantes sobre los continuos C-H e indescomponibles de dimensión finita. Cabe señalar que el principal de estos resultados garantiza que dichos continuos cuentan con la propiedad de cono=hiperespacio.

Definición 6.1. *Dado un continuo X, se dice que es un* **continuo** C-H *si satisface que $K(X)$ es homeomorfo a $C(X)$.* ▲

Observe que a diferencia de la propiedad de cono=hiperespacio, a un continuo C-H, X, no se le exige que exista un homeomorfismo $h : K(X) \to C(X)$ tal que $h(B(X)) = F_1(X)$ y que $h(v) = X$.

Teorema 6.2. *Sea X un continuo* C-H *e indescomponible. Si $h : K(X) \to C(X)$ es un homeomorfismo y v es el vértice de $K(X)$ entonces $h(v) = X$.* ▲

Demostración. Suponga que $h(v)$ es distinto de X. Por el corolario 2.8, $C(X) \setminus C(h(v))$ es un abierto y conexo por arcos de $C(X)$, por consiguiente $U = h^{-1}(C(X) \setminus C(h(v)))$ es un abierto y conexo por arcos de $K(X)$ que no tiene a v, así que al aplicar la función ϖ del lema 1.18 a U se obtiene que $\varpi(U)$ es un abierto (ya que ϖ es abierta) no vacío conexo por arcos de X lo cual contradice el corolario 1.11. ▲

Proposición 6.3. *Sea X un continuo* C-H *e indescomponible. Entonces cada subcontinuo propio de él está contenido en alguna componente por arcos de X.* ▲

Demostración.

1. Sean M un subcontinuo propio de X y $h : K(X) \to C(X)$ un homeomorfismo. Suponga que M intersecta a dos componentes por arcos diferentes A_1 y A_2 de X.

2. Por el corolario 1.19, se tiene que para cada $i \in \{1, 2\}$, $K(A_i) \setminus \{v\}$ es una componente por arcos de $K(X) \setminus \{v\}$. Del mismo modo, por el teorema 6.2, $h(v) = X$ y, en consecuencia, $h(K(X) \setminus \{v\}) = C(X) \setminus \{X\}$. Como h es homeomorfismo, $h(K(A_i) \setminus \{v\})$ es una componente por arcos de $C(X) \setminus \{X\}$. Así que en virtud del corolario 2.16, existen dos composantes (ajenas) κ_1 y κ_2 de X tales que para cada $i \in \{1, 2\}$, $h(K(A_i) \setminus \{v\}) = C(\kappa_i)$.

3. Debido a que, para cada $i \in \{1, 2\}$, M intersecta a A_i, se tiene que, igualmente, $B(M)$ intersecta a $B(A_i)$, lo que implica que $h(B(M))$ intersecta a $C(\kappa_i) = h(K(A_i) \setminus \{v\})$. Por tanto, $\sigma(h(B(M)))$ intersecta a κ_i (recuerde que σ es la función unión dada en la definición

2.13). Del hecho de que $\sigma(h(B(M)))$ es un subcontinuo de X que intersecta a dos composantes distintas, se concluye que $\sigma(h(B(M))) = X$ (gracias al teorema 1.9 y a la indescomponibilidad de X).

4. Por el teorema 6.2, se tiene que X no pertenece a $h(B(M))$, así que $h(B(M))$ debe intersectar a $C(\kappa)$ para cada composante κ de X, conque por el corolario 2.16, $h(B(M))$ intersecta a cada componente por arcos de $C(X)\setminus\{X\}$. Por tanto, $B(M)$ intersecta a cada componente por arcos de $K(X)\setminus\{v\}$ que, por el corolario 1.19, implica que M intersecta a cada componente por arcos de X, en particular, M intersecta a componentes por arcos que se encuentran contenidas en composantes ajenas de donde se deduce que $M = X$, lo cual es una contradicción.

▲

Proposición 6.4. *Sea X un continuo* C-H *e indescomponible. Entonces cada composante de X es conexa por arcos. Por tanto, las composantes de X coinciden con las componentes por arcos de X.* ▲

Demostración. Sean p un punto de X, κ la composante de X que tiene a p y A la componente por arcos de X a la que pertenece p. Se mostrará que $A = \kappa$. Sea a un punto de A. Entonces existe un arco ap que une a a con p, pero ap es un continuo descomponible por consiguiente está contenido propiamente en X y tiene a p, así que ap y, por tanto a, se encuentra contenido en κ. Ahora considere un punto q de κ. Entonces existe un subcontinuo propio

M de X que contiene a p y q (ya que ambos pertenecen a la misma composante). Por la proposición 6.3, M se encuentra contenido en una componente por arcos, la cual no puede ser más que A puesto que p pertenece a $M \cap A$, esto implica que M está contenido en A y, por tanto, q pertenece a A. ▲

Teorema 6.5. *Sea X un continuo* C-H, *indescomponible y de dimensión finita. Entonces cada subcontinuo propio y no degenerado de X es un arco.* ▲

Demostración. Observe que, por el teorema 6.2 y la proposición 6.4, X satisface las condiciones *1* y *2* enunciadas en el teorema 5.8, así que no queda más que aplicar el teorema 5.9, para concluir este teorema. ▲

Teorema 6.6. *Sea X un continuo indescomponible tal que cada uno de sus subcontinuos propios y no degenerados es un arco. Entonces cada composante de X es la imagen continua e inyectiva de $\mathbb{R}$ o $[0, \infty)$.* ▲

Demostración.

1. Sea K una composante de X. Sea $\mu : C(X) \to [0, 1]$ una función de Whitney normalizada (recuerde que tales funciones son aquéllas mencionadas en la discusión posterior a la definición 2.3 y que, gracias al teorema 2.4, se sabe que existen). Escoja dos puntos distintos p y q de K.

2. Observe que, para cada punto x de K diferente de p, existe un único arco, px, entre p y x ya que, en caso contrario, la observación 1.10 garantiza que X

contiene una curva cerrada simple, la cual es descomponible conque es un subcontinuo propio de X, pero, por hipótesis tales subcontinuos son arcos lo que es imposible.

3. Defina $g : K \to \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \begin{cases} \mu(px), & \text{si } px \cap pq \neq \{p\}; \\ -\mu(px), & \text{si } px \cap pq = \{p\}; \\ 0, & \text{si } x = p. \end{cases} \tag{6.1}$$

4. g es inyectiva. Sean x y y dos puntos diferentes de K. Note que, además, puede suponerse que p es distinto de x y de y, ya que en caso contrario se tiene que $g(x)$ y $g(y)$ son un par de números reales, de los cuales uno es cero y el otro es diferente a cero. Observe que $px \cup py \cup pq$ es un subcontinuo descomponible, en consecuencia es propio en X y, por tanto, es un arco. Sea pues $w_0 z_0$ tal arco. Considere un orden en $w_0 z_0$, $\leq$, como aquél presentado en la notación 1.2. Suponga que sucede cualquiera de las siguientes dos situaciones: $x, y \leq p$ o $p \leq x, y$, entonces $px \subsetneq py$ o $py \subsetneq px$, ambas implican que $\mu(px) \neq \mu(py)$ de donde se deduce que $|g(x)| \neq |g(y)|$, por tanto $g(x) \neq g(y)$. Ahora suponga que se presenta uno de los siguientes casos: $x < p < y$ o $y < p < x$, entonces sólo considere las posibilidades $p < q$ o $q < p$ para concluir, en cualquier caso, que $g(x)$ y $g(y)$ son de signos contrarios.

5. Sea A un arco contenido en K. Se mostrará que $g|_A$ es continua. Para esto, sean a un punto de A y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

una sucesión de puntos de A convergente a a. Note que $A \cup pa \cup pq$ es un arco, así que denote por w_1z_1 a tal arco. Igualmente observe que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el arco pa_n queda contenido en el arco w_1z_1 por tanto, de acuerdo al ejemplo 2.1, la sucesión de arcos $\{pa_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al arco pa. Como μ es continua, la sucesión $\{\mu(pa_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\mu(pa)$. Si $p = a$ entonces la sucesión $\{g(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $g(a)$. Así que suponga que p es diferente de a, que d es una métrica para X y que $\leq$ es un orden en w_1z_1 de tal modo que $w_1 \leq p \leq z_1$. Como p es distinto de a, puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que $p < a$. Si $pa \cap pq \neq \{p\}$ entonces para $\epsilon = \left(\frac{1}{2}\right) d(a, w_1p)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $d(a, a_n) < \epsilon$ lo que implica que en el arco w_1z_1 se tiene que $pa_n \cap pq \neq \{p\}$, es decir, la sucesión $\{g(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $g(a)$. De igual modo se obtiene la misma conclusión si $pa \cap pq = \{p\}$. Por tanto, se ha mostrado que $g|_A$ es continua y debido al recordatorio 1.5, A y $g(A)$ son homeomorfos. Por tanto $g(A) = [c, d]$ para algún par de números c y d de $\mathbb{R}$.

6. Gracias al teorema 1.8 se puede escribir $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de subcontinuos propios y no degenerados (de hecho, cada A_n es un arco) de X. Como g restringida a un arco es un homeomorfismo sobre la imagen de dicho arco, cada $g(A_n)$ es un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, así que denote $[t_n, s_n] = g(A_n)$ y observe que $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, es una sucesión decreciente y acotada por -1, lo anterior es cierto en

virtud de que μ es una función de Whitney normalizada, así que, para cada punto x de X, $|g(x)| = \mu(px) \leq \mu(X) = 1$. De igual modo se concluye que $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente y acotada por 1. Sean $t = \text{lím}_{n\to\infty} t_n$ y $s = \text{lím}_{n\to\infty} s_n$. Por consiguiente, $g(K)$ es la unión de una sucesión creciente de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ y se tiene, además, por la conexidad de K, que $g(K)$ es un subintervalo de $[t, s]$ tal que t y s son sus puntos frontera en $\mathbb{R}$. Defina $f : g(K) \to K$ por $f = g^{-1}$ (recuerde que g es inyectiva).

7. f es continua. Sea r un número de $g(K)$. Si $r = t$ entonces t pertenece a $g(K)$, pero como $t = \text{ínf}\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ y, por tanto $t = \text{ínf}\, g(K)$, se infiere que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t = t_m$, pero gracias a que A_m y $g(A_m) = [t_m, s_m]$ son homeomorfos bajo $g|_{A_m}$, y a que f es la inversa de g se obtiene que $f|_{[t,s_m]}$ es continua y como $[t, s_m)$ es un abierto del dominio de f que tiene a r, se deduce que f es continua en r. De manera similar se concluye lo mismo si $r = s$. Así que suponga que $r \in (t, s)$. Por la definición de t y de s, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $r \in (t_m, s_m)$, así que, de igual modo, se concluye que f es continua en r.

8. Como f es continua, se tiene que $g(K)$ no puede ser compacto ya que en caso contrario, $f(g(K)) = K$ sería un compacto en X lo que es imposible debido a que K es un subespacio denso y propio de X. De lo anterior se deduce que $g(K)$ no es más que de una de las siguientes tres formas: $[t, s)$, $(t, s]$ o (t, s). Por tanto K es la imagen continua e inyectiva (puesto que f es la inversa

de g) de uno de los tres intervalos antes mencionados, concluyendo así la prueba de este teorema.

▲

Corolario 6.7. Sea X un continuo C-H, indescomponible y de dimensión finita. Entonces cada composante de X es la imagen continua e inyectiva de $\mathbb{R}$ o $[0, \infty)$. ▲

Corolario 6.8. Suponga que X es un continuo indescomponible de dimensión finita con la propiedad de cono=hiperespacio. Entonces cada composante de X es la imagen continua e inyectiva de $\mathbb{R}$ o $[0, \infty)$. ▲

A continuación se presentan una definición y un ejemplo que serán útiles para la prueba del lema posterior.

Definición 6.9. *Sean X un continuo, p un punto de X y $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ el disco unitario. Se dice que p es un* **punto interior a un disco** *en X si existe un subespacio U de X y un homeomorfismo $g : D \to U$ tal que $g(0) = p$. Asimismo al subespacio U se le llamará* **disco para** p. ▲

Ejemplo 6.1. Considere el triángulo Δ descrito en la ecuación 2.4. Observe que si Δ° y $\operatorname{Fr}\Delta$ denotan el interior y la frontera de Δ en $\mathbb{R}^2$ respectivamente, entonces cada $(x, y) \in \Delta^\circ$ es un punto interior a un disco en Δ. Igualmente note que ningún elemento de $\operatorname{Fr}\Delta$ puede serlo. Así que, gracias al homeomorfismo dado en el ejemplo 2.1 entre $C([0, 1])$ y Δ, se deduce que un elemento $[a, b]$ de $C([0, 1])$ es un punto interior a un disco en $C([0, 1])$ si y sólo si se satisface que $0 < a < b < 1$. Por otra parte, observe que puesto que Δ y $K([0, 1])$ son homeomorfos, se concluye que ningún elemento de $B([0,1])$ puede ser un punto interior a un disco en $K([0,1])$.

Lema 6.10. Sea X un continuo tal que sus subcontinuos no degenerados y conexos por arcos son arcos. Entonces ningún elemento de $B(X)$ es un punto interior a un disco en $K(X)$. ▲

Demostración. Suponga lo contrario, a saber, existe un elemento $\pi(p,0)$ de $B(X)$ y un disco V para tal punto en $K(X)$, donde π es la función cociente. Puesto que el vértice v es diferente de $\pi(p,0)$, escoja un nuevo disco U para $\pi(p,0)$ contenido en V y tal que v no pertenezca a él. Por tanto, U se encuentra en el dominio de la función ϖ dada en el lema 1.18. Como U es conexo por arcos, $\varpi(U)$ es un subcontinuo conexo por arcos y no degenerado (puesto que si fuese degenerado entonces U debería quedar contenido en $\pi(\{p\}\times[0,1))$ lo que es imposible ya que U es homeomorfo al disco unitario D). En consecuencia, $\varpi(U)$ es un arco en X y note que U está contenido en el cono $K(\varpi(U))$, conque $\pi(p,0)$ es un elemento de la base de este cono. Finalmente observe que se ha encontrado un disco U para $\pi(p,0)$ (un elemento de la base) en $K(\varpi(U))$ (el cono de un arco), lo que es imposible en virtud del ejemplo 6.1. ▲

Con el siguiente teorema se dará por concluido este capítulo (y de hecho la tesis).

Teorema 6.11. *Sea X un continuo* C-H, *indescomponible y de dimensión finita. Entonces X tiene la propiedad de cono=hiperespacio.* ▲

Demostración. Sea $h : K(X) \to C(X)$ un homeomorfismo. Por el teorema 6.2, $h(v) = X$. Sólo resta verificar que $h(B(X)) = F_1(X)$. Sea θ una composante de X, por la proposición 6.4, θ es una componente por arcos de X. Debido al corolario 1.19, se tiene que $K(\theta) \setminus \{v\}$ es una componente por arcos de $K(X) \setminus \{v\}$, lo que implica que $h(K(\theta) \setminus \{v\})$ es una componente por arcos de $C(X) \setminus \{X\}$. Gracias al corolario 2.16, existe una composante κ de X tal que $h(K(\theta) \setminus \{v\}) = C(\kappa)$. Por el corolario 6.7, sucede uno de los siguientes casos:

1. Existe una función $f_1 : \mathbb{R} \to \kappa$ continua y biyectiva, o
2. Existe una función $f_2 : [0, \infty) \to \kappa$ continua y biyectiva.

En cualquier caso y, en virtud de la conclusión del inciso 5 de la demostración del teorema 6.6, se cumple que cada elemento A de $C(\kappa)$ se puede escribir como $A = f_i([a, b])$, donde $i \in \{1, 2\}$ y a y b son números reales. Los argumentos siguientes son para concluir que $h(B(\theta))$ queda contenido en $F_1(\kappa) = \{\{p\} : p \in \kappa\}$, para esto, se analizarán dos casos.

Primer caso. Suponga que $\kappa = f_1(\mathbb{R})$. Sea A un elemento de $C(\kappa) \setminus F_1(\kappa)$. Entonces existen dos números reales a y b tales que $A = f_1([a, b])$. Como f_1 es inyectiva se tiene que f_1 restringida a un arco es un homeomorfismo sobre su imagen, así que, utilizando el ejemplo 6.1, se deduce que $A = f_1([a, b])$ es un punto interior a un disco en $C(f_1([a-1, b+1]))$. Por tanto, A es un punto interior a un disco en $C(X)$. Ahora considere un punto $\pi(p, 0)$ de $B(\theta)$

y escriba $h(\pi(p,0)) = B$. Recuerde que, por el lema 6.10, $\pi(p,0)$ no es un punto interior a un disco en $K(X)$, lo cual, aunado a lo mencionado hace unos instantes implica que B es un elemento de $F_1(\kappa)$, es decir, $h(B(\theta))$ se encuentra contenido en $F_1(\kappa)$.

Segundo caso. Suponga que $\kappa = f_2([0,\infty))$.

1. Sea A un elemento de $C(\kappa) \setminus (F_1(\kappa) \cup C(\kappa, f_2(0)))$, donde $C(\kappa, f_2(0)) = \{M \in C(\kappa) : f_2(0) \in M\}$. Entonces existen dos números reales a y b tales que $A = f_2([a,b])$. Como A no pertenece a $C(\kappa, f_2(0))$, se tiene que $0 < a$ así que, procediendo del mismo modo que en el caso previo, se concluye que A es un punto interior a un disco en $C(f_2([0,b+1]))$ y, por tanto en $C(X)$. Considere un punto $\pi(p,0)$ de $B(\theta)$ y escriba $h(\pi(p,0)) = B$. De manera similar a lo discutido en el caso anterior, se deduce que B es un elemento de $F_1(\kappa) \cup C(\kappa, f_2(0))$, lo que implica que $h(B(\theta))$ está contenido en $F_1(\kappa) \cup C(\kappa, f_2(0))$.

2. Considere una función de Whitney normalizada $\mu : C(X) \to [0,1]$ y sea $\alpha : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado de $\{f_2(0)\}$ a X. Se mostrará que $C(\kappa, f_2(0)) = \alpha([0,1))$. Primero note que, por el comentario previo al primer caso y, por la definición de $C(\kappa, f_2(0))$, se sigue que

$$C(\kappa, f_2(0)) = \{f_2([0,t]) : t \in [0,\infty)\} \qquad (6.2)$$

Sean A un elemento de $C(\kappa, f_2(0))$ y $t \in [0,\infty)$ tal que $A = f_2([0,t])$. Debido a que $\mu(A) \in [0,1]$ y a que

$\mu \circ \alpha : [0,1] \to [0,1]$ es una función continua y tal que $(\mu \circ \alpha)(0) = \mu(\{f_2(0)\}) = 0$ y que $(\mu \circ \alpha)(1) = \mu(X) = 1$, se tiene que, por el teorema del valor intermedio, existe $s \in [0,1]$ tal que $\mu(\alpha(s)) = \mu(A)$. Note, además, que $s < 1$, ya que por la definición de A, éste es un subcontinuo propio de X y, como $\alpha(1) = X$, se tiene que $\mu(A) < \mu(\alpha(1))$. Entonces $\alpha(s)$ es un subcontinuo propio de X (contenido en κ) que contiene a $f_2(0)$ (ya que $\{f_2(0)\} = \alpha(0)$ y, por definición, éste se encuentra contenido en $\alpha(s)$). Sea $r \in [0,\infty)$ tal que $\alpha(s) = f_2([0,r])$, conque $A = f_2([0,t])$ está contenido en $\alpha(s)$ o este último queda contenido en el primero, pero $\mu(\alpha(s)) = \mu(A)$, de donde se deduce que $A = \alpha(s)$. Por tanto, $C(\kappa, f_2(0))$ está contenido en $\alpha([0,1))$. Por otra parte, cualquier elemento de $\alpha([0,1))$ es un subcontinuo propio de X que contiene $\alpha(0) = \{f_2(0)\}$, así que debe estar contenido en κ. Por consiguiente, se ha mostrado que $C(\kappa, f_2(0)) = \alpha([0,1))$.

3. Se afirma que $h(B(\theta))$ está contenido en $F_1(\kappa)$. Suponga lo contrario, es decir, existe un punto $\pi(q,0)$ de $B(\theta)$ tal que que $h(\pi(q,0))$ no pertenece a $F_1(\kappa)$. Denote por Q a $h(\pi(q,0))$. Del pasado inciso 1 se deduce que Q es un elemento de $C(\kappa, f_2(0)) \setminus F_1(\kappa)$ así que, por el inciso 2, existe $a \in [0,1)$ tal que $Q = \alpha(a)$, pero, debido a que Q no es degenerado, se tiene que $a > 0$. Ahora, gracias a que μ es continua se cumple que $\mu^{-1}((0,\mu(Q)))$ es un abierto de $C(X)$. Observe que se verifica

$$\mu^{-1}((0,\mu(Q))) \cap (F_1(X) \cup \alpha([0,1])) = \alpha((0,a)) \quad (6.3)$$

ya que si considera un elemento M del lado izquierdo de esta ecuación, entonces $\mu(M) > 0$, de donde se obtiene que M no pertenece a $F_1(X)$, es decir, M es un elemento de $\alpha([0,1])$ tal que $\mu(M) < \mu(Q)$, esto a su vez implica que M está contenido en Q (ya que ambos son elementos del arco ordenado α), en consecuencia, M pertenece a $\alpha((0,a))$, por otro lado, si $b \in (0,a)$ entonces por definición de α se tiene que $\alpha(0) \subsetneq \alpha(b) \subsetneq \alpha(a) = Q$ obteniendo así que $0 < \mu(\alpha(b)) < \mu(Q)$, por tanto, se ha verificado la ecuación 6.3. Ahora considere lo siguiente, puesto que $B(X)$ es homeomorfo a X y θ es denso en X, se tiene que $\overline{B(\theta)}^{K(X)}$ (mismo que se queda contenido en $B(X)$ ya que éste es un cerrado en $K(X)$) es igual a $B(X)$, así que, al aplicar el homeomorfismo h y, debido a que $F_1(X)$ es un cerrado en $C(X)$, se obtiene que

$$\begin{aligned} h(B(X)) = h\left(\overline{B(\theta)}^{K(X)}\right) &\subset \overline{F_1(\kappa) \cup C(\kappa, f_2(0))}^{C(X)} \\ &\subset \overline{F_1(\kappa)}^{C(X)} \cup \overline{C(\kappa, f_2(0))}^{C(X)} \\ &= F_1(X) \cup \alpha([0,1]) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Observe que el espacio $F_1(X) \cup \alpha([0,1])$ consiste de un continuo ($F_1(X)$) y un arco ($\alpha([0,1])$) que se intersectan en un único punto ($\alpha(0)$). Por otra parte, debido a que $h(B(X))$ es indescomponible y a que cualquier subcontinuo no degenerado de $\alpha([0,1])$ es descomponible, ya que es un arco, se deduce que $h(B(X))$ no puede quedar contenido en $\alpha([0,1])$. Por consiguiente $h(B(X))$ es un subcontinuo de $F_1(X) \cup \alpha([0,1])$ que intersecta a $F_1(X)$ y que tiene a $Q = \alpha(a)$. De los argumentos previos se infiere que $\alpha([0,a])$ es un subcontinuo propio (ya que es descomponible) de $h(B(X))$ que tiene interior no vacío en $h(B(X))$, lo anterior en virtud de que, por la ecuación 6.3, $\alpha((0,a))$ es un abierto de $F_1(X) \cup \alpha([0,1])$ que, por la ecuación 6.4, implica que también es abierto en $h(B(X))$, esta observación es una contradicción debida al corolario 1.10, dicha contradicción prueba la afirmación inicial de este inciso 3.

Por tanto, se ha demostrado que $h(B(\theta))$ se encuentra contenido en $F_1(\kappa)$ el cual está contenido a su vez en $F_1(X)$. Como θ se escogió como una composante cualquiera de X, se concluye que $h(B(X))$ se encuentra contenido en $F_1(X)$, pero, $h(B(X))$ es un subcontinuo indescomponible y los subcontinuos propios y no degenerados de $F_1(X)$ son arcos (recuerde que $F_1(X)$ es homeomorfo a X), por tanto $h(B(X)) = F_1(X)$. De este modo queda concluida la demostración de este teorema. ▲

Bibliografía

[Bn51] R. H. BING, *Higher-dimensional hereditarily indecomposable continua*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 267-273.

[Dg89] James DUGUNDJI, *Topology*, Wm. C. Brown Publishers. Dubuque, Iowa, 1989.

[En78] Ryszard ENGELKING, *Dimension Theory*, North-Holland Mathematical Library, vol. 19, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.

[En89] Ryszard ENGELKING, *General Topology*, Sigma series in pure mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[Il] Alejandro ILLANES M., *The cono=hyperspace, a characterization*, manuscrito.

[IN99] Alejandro ILLANES M. y Sam B. NADLER, Jr., *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[Nd77] Sam B. NADLER, Jr., *Continua whose cone and hyperspace are homeomorphic*, Trans. Amer. Math. Soc. **230** (1977), 321-345.

[Nd92] Sam B. NADLER, Jr., *Continuum theory, an introduction*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[Rg72] James T. ROGERS, Jr., *The cone=hyperspace property*, Can. J. Math. **24** (1972), 279-285.