

01162 2
2ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERIA

MODELOS TEORICOS DE OLEAJE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA (HIDRAULICA)

P R E S E N T A :

GUILLERMO CARDOSO LANDA

ASESOR: DR. OSCAR A. FUENTES MARILES



CIUDAD UNIVERSITARIA

NOVIEMBRE,

1977

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

273359



Universidad Nacional
Autónoma de México



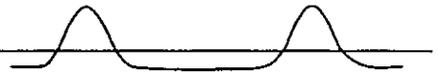
UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

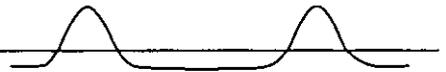
El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

| | |
|---|-----------|
| JUSTIFICACION..... | 5 |
| OBJETIVOS..... | 6 |
| OBJETIVO GENERAL..... | 6 |
| OBJETIVOS PARTICULARES..... | 6 |
| A.-MODELO MATEMATICO..... | 6 |
| B.-SIGNIFICADO FISICO..... | 6 |
| C.-CASOS TIPO DE PROBLEMAS..... | 6 |
| D.-PROGRAMAS DE COMPUTO..... | 6 |
| E.-COMPARACION DE RESULTADOS..... | 6 |
| CAPITULO 1. INTRODUCCION..... | 7 |
| 1.1 OLEAJE..... | 7 |
| 1.2 CARACTERISTICAS FISICAS DEL OLEAJE..... | 9 |
| 1.3 CLASIFICACION DEL OLEAJE..... | 12 |
| 1.4 TIPOS DE TEORIAS DE OLEAJE..... | 15 |
| 1.4.1 INTRODUCCION..... | 15 |
| 1.4.2 PARAMETROS CARACTERISTICOS..... | 16 |
| 1.4.3 METODOS DE SOLUCION..... | 17 |
| 1.4.3.1 LINEALIZACION..... | 17 |
| 1.4.3.2 SERIES DE TAYLOR..... | 18 |
| 1.4.3.3 METODOS NUMERICOS..... | 18 |
| 1.4.4 CLASIFICACION..... | 19 |
| 1.4.4.1 TEORIA DE ONDAS DE PEQUEÑA AMPLITUD..... | 19 |
| 1.4.4.2 TEORIAS DE ONDAS LARGAS..... | 19 |
| 1.5 ASPECTOS DE LAS TEORIAS DEL OLEAJE..... | 25 |
| CAPITULO 2. TEORIA LINEAL..... | 28 |
| 2.1 TEORIA LINEAL PARA OLEAJE PROGRESIVO..... | 28 |
| 2.1.1 ASPECTOS GENERALES..... | 28 |
| 2.1.2 MODELO MATEMATICO..... | 29 |
| 2.1.2.1 TEOREMA DE BERNOULLI..... | 30 |
| 2.1.2.2 TEORIA LINEAL DEL OLEAJE EN DOS DIRECCIONES ESPACIALES..... | 32 |
| 2.1.2.2.1 HIPOTESIS..... | 32 |
| 2.1.2.2.2 CONDICIONES DE FRONTERA..... | 33 |



| | |
|--|-----------|
| 2.1.2.2.3 FUNCION POTENCIAL..... | 35 |
| 2.1.2.2.4 ECUACION DE DISPERSION..... | 38 |
| 2.1.2.2.5 PRESION..... | 40 |
| 2.1.2.2.6 VELOCIDAD DE LAS PARTICULAS DE AGUA..... | 40 |
| 2.1.2.2.7 ACELERACIONES DE LAS PARTICULAS DE AGUA..... | 41 |
| 2.1.2.2.8 DESPLAZAMIENTO DE LAS PARTICULAS DE AGUA..... | 41 |
| 2.1.2.2.9 ENERGIA DE LA OLA..... | 43 |
| 2.1.2.2.10 POTENCIA DE LA OLA..... | 45 |
| 2.1.3 SIGNIFICADO FISICO..... | 47 |
| MODELOS TEORICOS DE OLEAJE..... | 56 |
| 2.1.4 CASOS TIPO DE PROBLEMAS..... | 58 |
| 2.1.5 PROGRAMA DE COMPUTADORA..... | 58 |
| 2.1.6 EJEMPLOS..... | 58 |
| 2.2 TEORIA LINEAL PARA OLEAJE ESTACIONARIO..... | 60 |
| 2.2.1 ASPECTOS GENERALES..... | 60 |
| 2.2.2 MODELO MATEMATICO..... | 61 |
| 2.2.3 SIGNIFICADO FISICO..... | 62 |
| MODELOS TEORICOS DE OLEAJE..... | 63 |
| 2.2.4 PROGRAMA DE COMPUTADORA..... | 65 |
| 2.2.5 EJEMPLOS..... | 65 |
| CAPITULO 3. TEORIA DE SEGUNDO ORDEN DE STOKES..... | 67 |
| 3.1 TEORIA DE SEGUNDO ORDEN DE STOKES PARA OLEAJE PROGRESIVO..... | 67 |
| 3.1.1 ASPECTOS GENERALES..... | 67 |
| 3.1.2 MODELO MATEMATICO..... | 68 |
| 3.1.3 SIGNIFICADO FISICO..... | 68 |
| MODELOS TEORICOS DE OLEAJE..... | 71 |
| 3.1.4 PROGRAMA DE COMPUTADORA..... | 73 |
| 3.1.5 EJEMPLOS..... | 74 |
| CAPITULO 4. TEORIA DE TERCER ORDEN DE STOKES..... | 76 |
| 4.1 TEORIA DE TERCER ORDEN DE STOKES PARA OLEAJE PROGRESIVO..... | 76 |
| 4.1.1 ASPECTOS GENERALES..... | 76 |
| 4.1.2 MODELO MATEMATICO..... | 76 |
| 4.1.3 SIGNIFICADO FISICO..... | 76 |
| MODELOS TEORICOS DE OLEAJE..... | 77 |

| | |
|--|------------|
| 4.1.4 PROGRAMA DE COMPUTADORA..... | 80 |
| 4.1.5 EJEMPLOS..... | 81 |
| CAPITULO 5. TEORIA CNOIDAL..... | 83 |
| 5.1 TEORIA CNOIDAL PARA OLEAJE PROGRESIVO..... | 83 |
| 5.1.1 ASPECTOS GENERALES..... | 83 |
| 5.1.2 MODELO MATEMATICO..... | 83 |
| MODELOS TEORICOS DE OLEAJE..... | 85 |
| 5.1.3 SIGNIFICADO FISICO..... | 89 |
| 5.1.4 PROGRAMA DE COMPUTADORA..... | 90 |
| 5.1.5 EJEMPLOS..... | 90 |
| CAPITULO 6. CONCLUSIONES..... | 92 |
| 6.1 TEORIA LINEAL..... | 92 |
| 6.2 TEORIA DE SEGUNDO ORDEN DE STOKES..... | 92 |
| 6.3 TEORIA DE TERCER ORDEN DE STOKES..... | 93 |
| 6.4 TEORIA CNOIDAL..... | 93 |
| 6.5 REGIONES DE VALIDEZ DE LAS TEORIAS DEL OLEAJE..... | 94 |
| APENDICE A. METODOS NUMERICOS Y MATEMATICOS UTILIZADOS..... | 96 |
| A.1 METODO DE NEWTON-RAPHSON..... | 96 |
| A.1.1 DEDUCCION DE LA ECUACION DE NEWTON-RAPHSON A PARTIR DE LA SERIE DE TAYLOR..... | 96 |
| A.1.2 DEDUCCION GRAFICA DE LA ECUACION DE NEWTON-RAPHSON..... | 97 |
| A.1.3 ANALISIS DEL ERROR DEL METODO DE NEWTON-RAPHSON A PARTIR DE LA SERIE DE TAYLOR..... | 98 |
| A.1.4 DESVENTAJAS DEL METODO DE NEWTON-RAPHSON..... | 99 |
| A.1.4.1 RAICES SIMPLES..... | 99 |
| A.1.4.2 RAICES MULTIPLES..... | 101 |
| A.2 FUNCIONES ELIPTICAS JACOBIANAS..... | 104 |
| A.2.1 INTRODUCCION..... | 104 |
| A.2.2 CARACTERISTICAS DE LAS FUNCIONES ELIPTICAS JACOBIANAS..... | 105 |
| A.2.3 CLASIFICACION DE LAS DOCE FUNCIONES ELIPTICAS JACOBIANAS..... | 106 |
| A.2.4 RELACION DE LAS FUNCIONES JACOBIANAS CON LAS COPOLARES $sn u$, $cn u$, $dn u$ | 107 |



| | |
|---|------------|
| A.2.5 APROXIMACION DE LAS FUNCIONES ELIPTICAS JACOBIANAS EN TERMINOS DE FUNCIONES CIRCULARES. | 107 |
| A.2.6 APROXIMACION DE LAS FUNCIONES ELIPTICAS JACOBIANAS EN TERMINOS DE FUNCIONES HIPERBOLICAS. | 108 |
| A.2.7 INTEGRALES ELIPTICAS | 108 |
| A.2.7.1 FORMAS CANONICAS DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS | 109 |
| INTEGRAL ELIPTICA DE PRIMERA CLASE..... | 109 |
| INTEGRAL ELIPTICA DE SEGUNDA CLASE | 109 |
| INTEGRAL ELIPTICA DE TERCERA CLASE | 109 |
| A.2.7.2 INTEGRALES ELIPTICAS COMPLETAS..... | 110 |
| <i>APENDICE B. Programa fuente (P-1).</i> | 113 |
| <i>APENDICE C. Programa fuente (P-2).</i> | 118 |
| <i>APENDICE D. Programa fuente (P-3).</i> | 123 |
| <i>APENDICE E. Programa fuente (P-4).</i> | 129 |
| <i>APENDICE F. Programa fuente (P-5).</i> | 135 |
| <i>BIBLIOGRAFIA.</i> | 141 |

JUSTIFICACION.

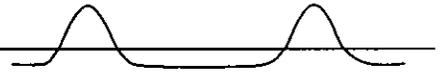
Desde el momento en que me inicié en el estudio de la Hidráulica Marítima en un curso correspondiente al octavo semestre de la carrera de Ingeniería Civil en el año de 1981, surgió en mí la idea de analizar los fenómenos físicos en los mares, tales como el oleaje, las mareas y corrientes, así como sus efectos en el diseño de estructuras marinas.

Afortunadamente me ha sido posible hacerlo al ingresar al Programa de Maestría en Ingeniería Hidráulica, que propone la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M., tomando la línea de Investigación precisamente de HIDRAULICA MARITIMA.

Tal como lo cita ROBERT L. WIEGEL en las primeras páginas de su clásica obra "OCEANOGRAPHICAL ENGINEERING", alrededor del año de 1965:

"LAS OLAS OCEANICAS SON UN FENOMENO COMPLICADO, DIFICIL, SI NO ES QUE IMPOSIBLE DE DESCRIBIR CORRECTAMENTE EN TERMINOS MATEMATICOS".

Precisamente en estas pocas líneas se resume el gran atractivo que representa el reto de simular mediante diversos modelos matemáticos la acción natural del oleaje en los mares y que es el propósito fundamental de esta tesis de grado.



OBJETIVOS.

OBJETIVO GENERAL.

La presente tesis de grado, titulada "MODELOS TEORICOS DE OLEAJE" pretende efectuar un estudio comparativo de las teorías de oleaje existentes, así como el desarrollo de programas de cómputo que permitan el cálculo directo y rápido de las características de las olas en el mar.

OBJETIVOS PARTICULARES.

A.-MODELO MATEMATICO.

Para cada teoría de oleaje se plantean los desarrollos matemáticos a través de los que se pueden determinar las características principales.

B.-SIGNIFICADO FISICO.

Se indica para las teorías en análisis la interpretación física de cada uno de los elementos en las olas.

C.-CASOS TIPO DE PROBLEMAS.

Se propone agrupar en cada teoría, las distintas formas de presentarse problemas prácticos de ingeniería y su correspondiente solución, con el propósito de homogeneizar los resultados.

D.-PROGRAMAS DE COMPUTO.

Debido al desarrollo matemático tan amplio que presentan las ecuaciones para los cálculos de las características de las olas y con el propósito de evitar el uso de tablas y gráficas de común empleo hasta la fecha, se considera de gran importancia la elaboración de programas de computadora, que minimicen los tiempos de cálculo y eviten el empleo de los elementos auxiliares mencionados para realizar estimaciones más rápidas.

E.-COMPARACION DE RESULTADOS.

Aplicando los programas señalados podrán compararse los resultados que arroje cada una de las teorías, pudiendo finalmente establecer un conjunto de recomendaciones en el empleo de cada una de ellas.

CAPITULO 1. INTRODUCCION.

El comportamiento de las olas en los océanos es uno de los fenómenos de la naturaleza más enigmáticos y probablemente uno de los que menos entiende el ser humano.

A través de varias disciplinas del conocimiento, el hombre ha dedicado muchos años al estudio de este fenómeno, midiendo sus características en el lugar y aplicando modelos matemáticos que pretenden simular su comportamiento.

Es fácil entender que esto se debe a la necesidad de construir tanto obras que protejan las costas, como estructuras que requieren estar dentro de los mares y ríos.

1.1 OLEAJE.

Al movimiento alternativo de ascenso y descenso de la superficie libre del mar se le conoce con el nombre de OLEAJE. Desde el punto de vista físico existe una gran variedad de oleajes, cuyos movimientos comprenden desde olas generadas por viento en los océanos hasta olas de inundación en ríos; desde oscilaciones de largo período en dársenas de puertos hasta olas de marea o saltos hidráulicos en estuarios; desde olas producidas por un barco en movimiento en un canal hasta tsunamis consecuencia de maremotos u oleaje debido a explosiones nucleares. Los agentes productores de olas oceánicas son:

a.- Fuerza de atracción gravitacional de los océanos con la Luna y el Sol, generando las MAREAS ASTRONOMICAS.

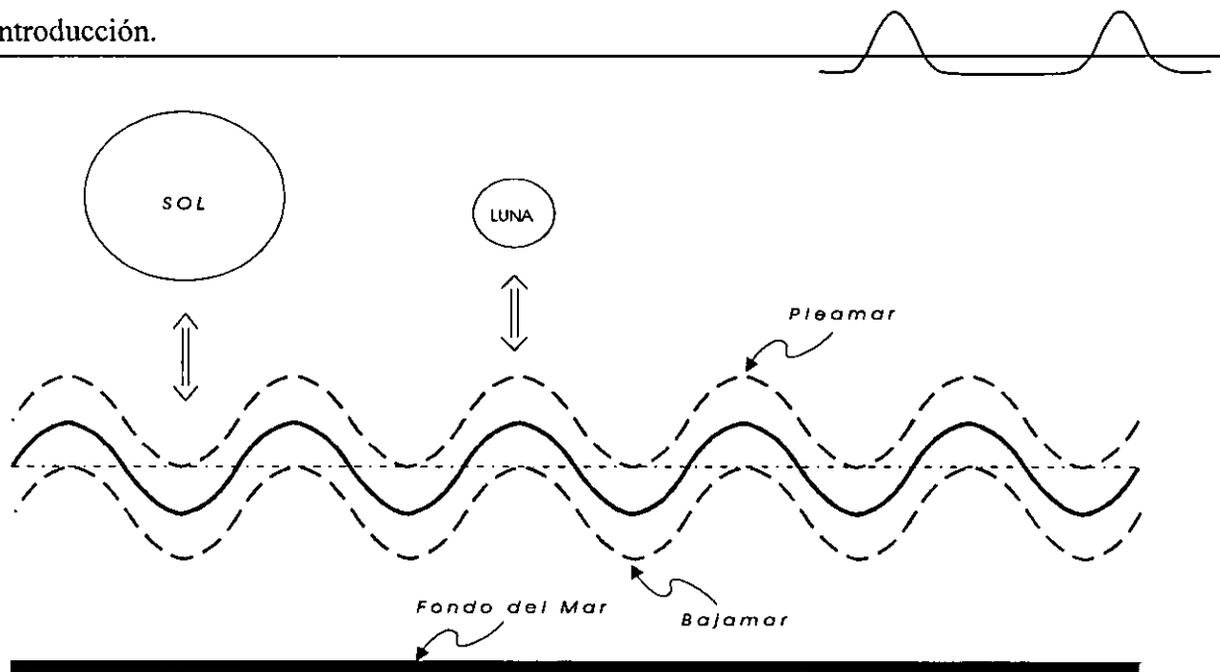


Figura 1.a Mareas astronómicas.

b.- Movimientos sísmicos en océanos, produciendo las grandes olas llamadas TSUNAMIS.

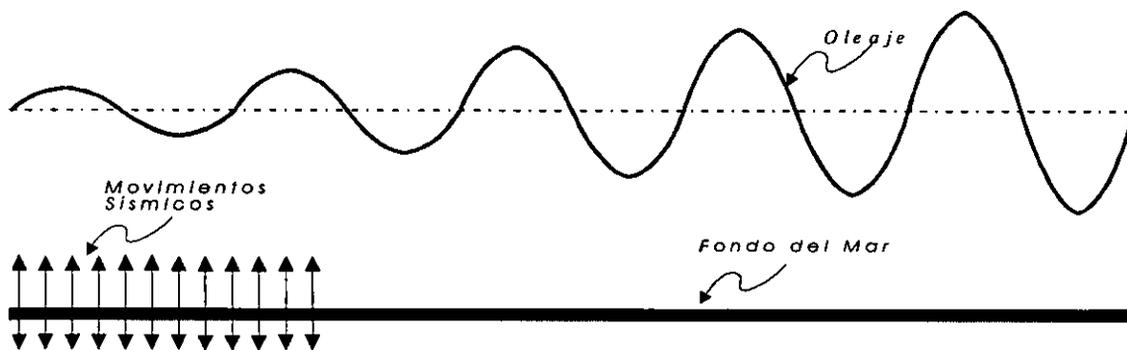


Figura 1.b Tsunamis.

c.- El viento, siendo el OLEAJE DE VIENTO el producto de este agente y del cual se ocupa exclusivamente este escrito.

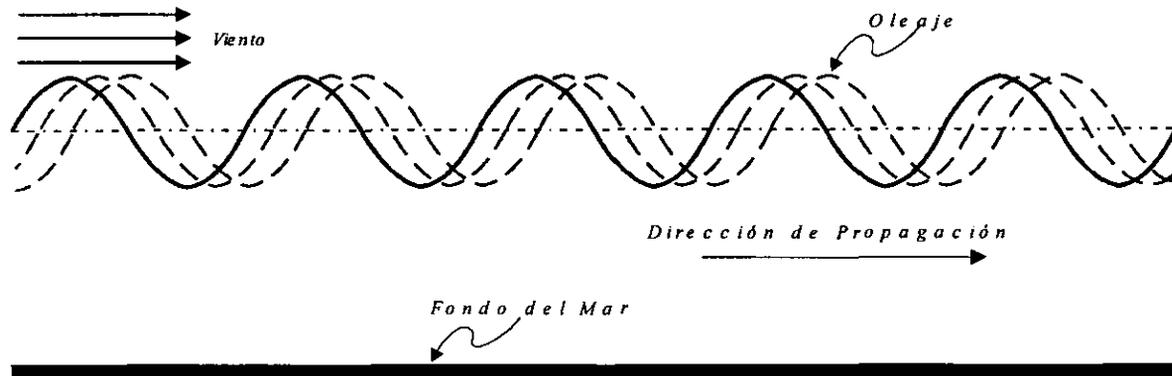


Figura 1.c Oleaje de viento.

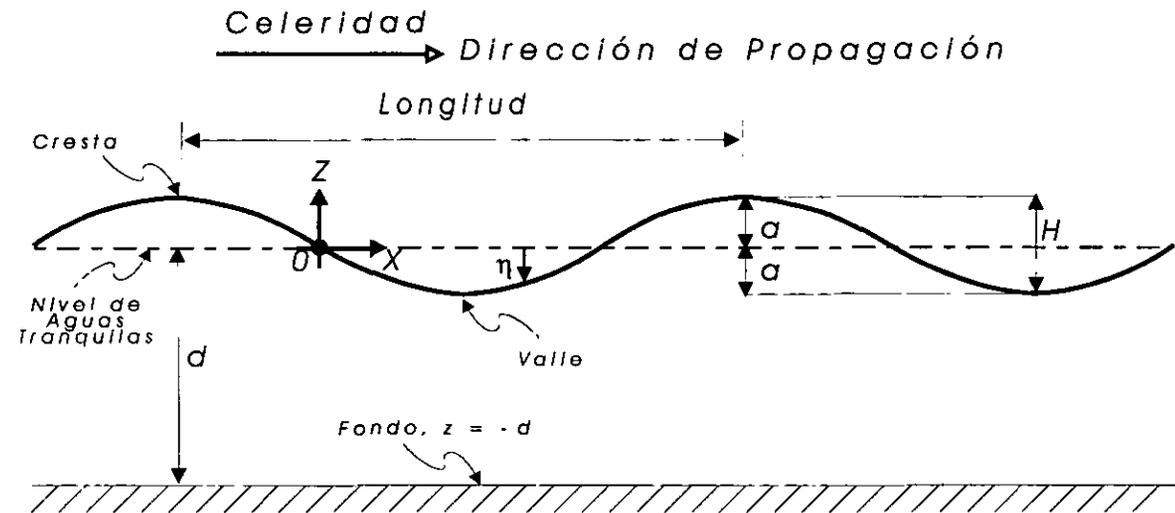
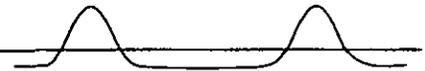
En las Figuras No. 1.a, 1.b y 1.c se muestran estos tres tipos de oleaje, señalándose sus diferencias más notables.

En general, el fenómeno del oleaje es difícil de describir matemáticamente debido a sus características tridimensionales, no lineales y una componente aparentemente aleatoria.

Sin embargo, existen varias teorías que intentan dar respuesta a este fenómeno, las cuales se desarrollarán en este escrito.

1.2 CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DEL OLAJE.

En el oleaje de viento se presentan algunos elementos muy importantes que es necesario conocer y calcular, a los cuales se le llamarán CARACTERÍSTICAS FÍSICAS del mismo, pudiendo observarlas en la Figura No. 2, la cual esquematiza un perfil del oleaje de viento.



- NOTA: a) $\eta = a \cos \{2\pi x/L - 2\pi t/T\}$
 b) Para un origen dado ($x=0$) se muestra el perfil de la ola para $t = 3T/4, 7T/4, 11T/4, \dots$
 c) $\eta = a = H/2$ en la cresta
 $\eta = -a = -H/2$ en el valle

Figura 2 Características físicas del oleaje.

A continuación se comentan estos elementos.

a.- Nivel de Aguas Tranquilas (NAT). Es el nivel que adoptaría el mar en ausencia del oleaje.

b.- Período de la ola (T). Tiempo que transcurre entre dos crestas (o valles) consecutivas en una misma sección.

c.- Frecuencia de la ola (f). Es el recíproco de su período ($f=1/T$).

d.- Cresta de la ola. Punto de altura máxima en el perfil del oleaje.

e.- Valle de la ola. Punto de mínima elevación en el perfil del oleaje.

f.- Altura de la ola (H). Distancia vertical medida entre cresta y valle de la ola consecutivos.

g.- Amplitud de la ola (a). Distancia vertical entre la cresta y el nivel de aguas tranquilas o entre el valle y el nivel de aguas tranquilas.

h.- Altura del perfil (η). Distancia vertical medida entre cualquier punto de la superficie libre del perfil de la ola y el nivel de las aguas tranquilas.

i.- Longitud de la ola (L). Distancia horizontal medida entre crestas consecutivas o valles consecutivos.

j.- Celeridad de la ola (C). Velocidad con la que se mueve la ola a través de la superficie libre del mar.

k.- Velocidades orbitales de las partículas (u,w). Son las velocidades tangentes a las trayectorias de cada partícula debajo de la ola en el plano vertical x-z.

l.- Celeridad de grupo (Cg). Es la velocidad con la cual se desplaza un grupo de olas.

m.- Aceleración de las partículas (a_x, a_z). Representación de la aceleración de una partícula de agua en el plano vertical x-z.

n.- Desplazamiento de las partículas (ξ, ζ). Son las distancias medidas horizontal y verticalmente, a partir de un origen en un sistema de referencia, sobre la trayectoria de una partícula de agua.

o.- Presión (P). Representa la presión total del oleaje sobre una partícula debajo de la superficie libre de mar.

p.- Energía de la ola (E). Es la energía total producida por el oleaje.

q.- Potencia de la ola. Representa el trabajo desarrollado por la ola en la unidad de tiempo.

En la Figura No. 3 se observan algunas otras de las características del movimiento del oleaje.

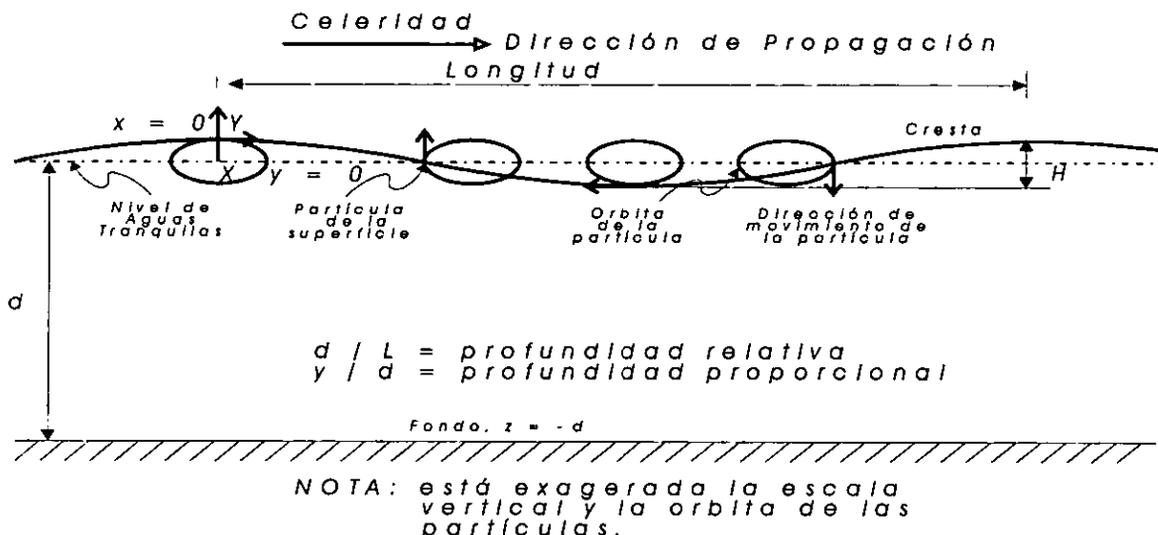
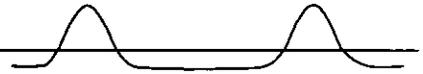


Figura 3 Desplazamiento de las partículas.



1.3 CLASIFICACION DEL OLEAJE.

El oleaje de viento puede presentar muy diversas formas, desde las completamente caóticas hasta las muy definidas, siendo necesario agruparlo bajo distintas consideraciones, siendo las más destacadas las siguientes:

a.- En función de la relación entre la profundidad y la longitud del oleaje (d/L), conocida como PROFUNDIDAD RELATIVA. Las olas pueden presentarse en tres zonas, que son:

ZONA DE AGUAS PROFUNDAS. En ésta, las olas no son afectadas por la profundidad en su desarrollo normal y es válida para valores $d/L \geq 0.5$.

ZONA DE AGUAS INTERMEDIAS. Aquí, las olas son afectadas en su desarrollo por la proximidad del fondo marino y se presentan para cuando $0.5 > d/L > 0.05$.

ZONA DE AGUAS SOMERAS. También conocida como zona de aguas someras, es en donde las olas son modificadas por la cercanía del fondo del mar en mayor magnitud y corresponden al valor de $d/L \leq 0.05$.

En la Figura No. 4 se pueden observar estas tres condiciones de oleaje.

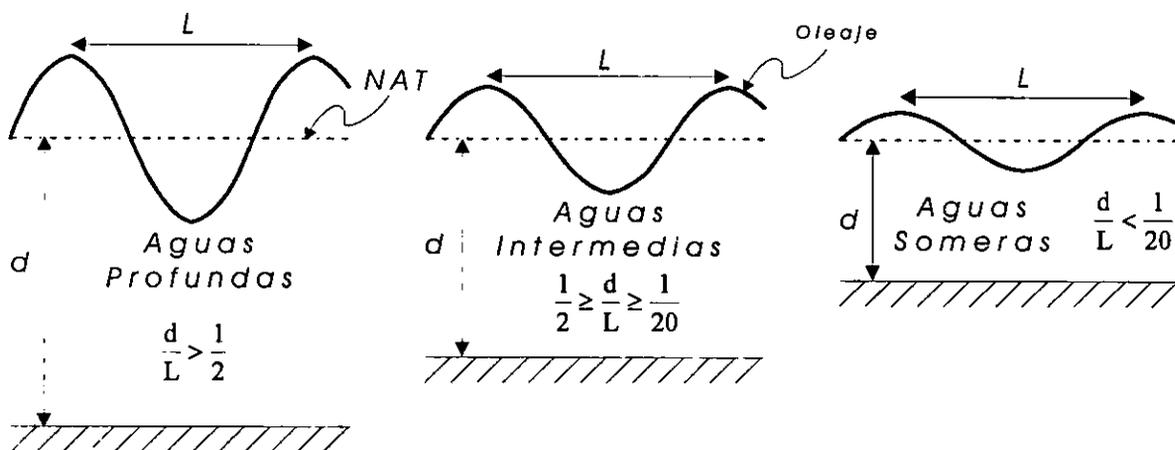


Figura 4 Oleaje en función de la profundidad relativa.

b.- De acuerdo al desplazamiento de las partículas. Considerando el tipo de desplazamiento que sufren las partículas al presentarse el oleaje, se tiene:

OLAS DE TRASLACION PURA. El desplazamiento de las partículas se produce en la dirección del movimiento de la ola, en cualquier instante.

OLAS DE OSCILACION PURA. En éstas, los desplazamientos de las partículas describen trayectorias cerradas o casi cerradas, con la particularidad de que la velocidad disminuye de la superficie hacia el fondo, pudiendo ser circulares o elípticas.

c.- Considerando el tipo de desplazamiento de la cresta de la ola.

OLAS PROGRESIVAS. Se presentan cuando la cresta de la ola se desplaza horizontalmente.

OLAS ESTACIONARIAS. Son aquellas en las cuales se presenta un desplazamiento vertical aparente y un nulo desplazamiento horizontal.

En los esquemas mostrados en la Figura No. 5 pueden apreciarse estos tipos de oleaje.

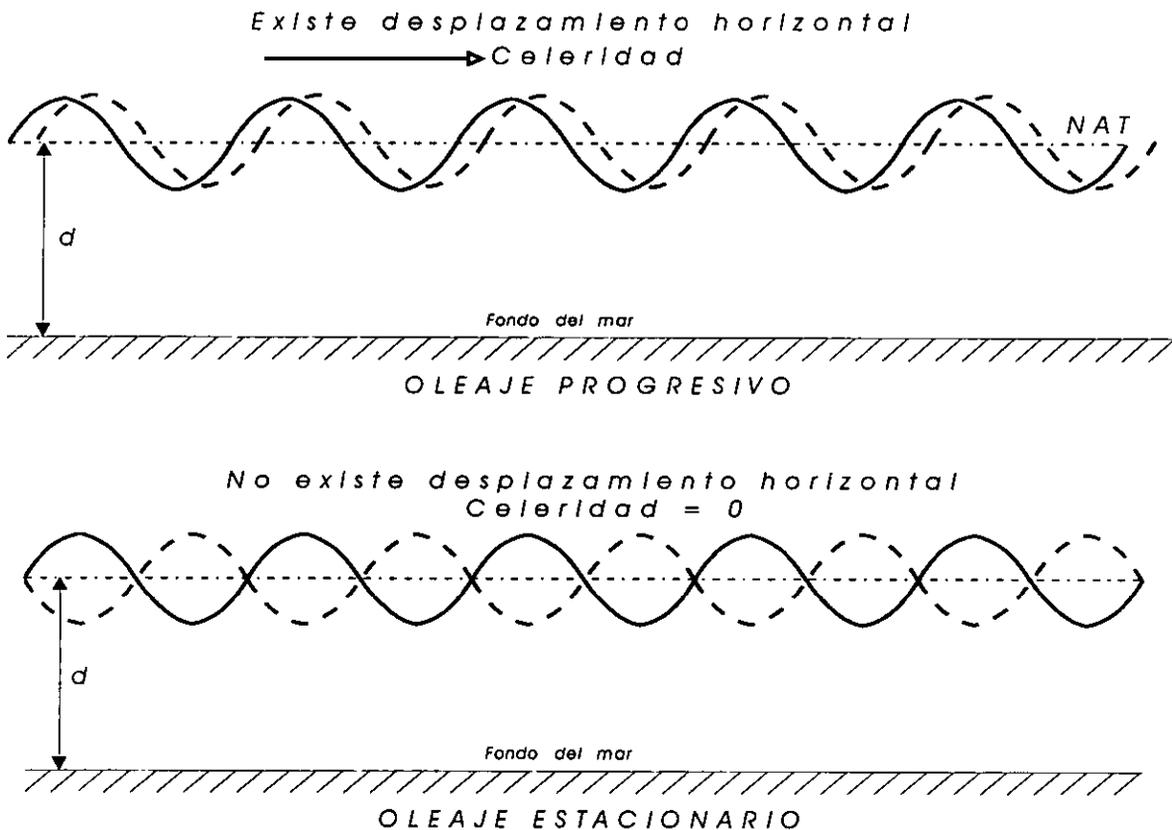


Figura 5 Oleaje de acuerdo al desplazamiento de la creta.



d.- Tomando en cuenta la altura de la ola. Esta clasificación es muy importante y pueden presentarse:

ONDAS DE PEQUEÑA AMPLITUD. Se caracterizan porque la altura de la ola es pequeña en comparación con su longitud.

ONDAS DE AMPLITUD FINITA. Por el contrario, son olas cuya altura no es pequeña comparada con su longitud.

Al estudiar las ondas de pequeña amplitud, se desprecian los desplazamientos que sufre la superficie libre, con lo que se logra un modelo matemático más sencillo para su aplicación, como se verá al analizar la Teoría Lineal del oleaje. Una forma para diferenciar este tipo de olas se muestra en la Figura No. 6.

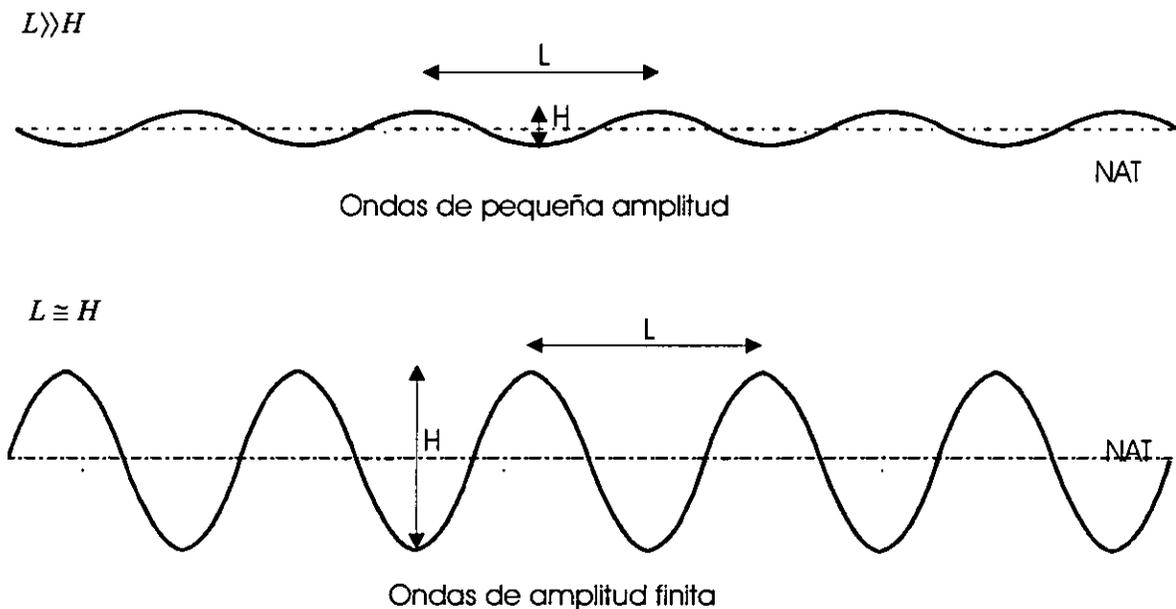


Figura 6 Oleaje atendiendo a su amplitud.

e.- Conforme al período de las ondas. Pueden ser:

OLAS CAPILARES. Su período es menor de 0.1 s.

OLAS DE ULTRAGRAVEDAD. Con períodos que van de 0.1 s hasta 1.0 s.

OLAS DE GRAVEDAD. Generadas por vientos con velocidades de 6.5 a 7.0 m/s, presentan períodos entre 1.0 y 30.0 s, siendo las más comúnmente observadas en los océanos y por lo tanto las de mayor interés para la Hidráulica Marítima.

OLAS DE INFRAGRAVEDAD. Son aquellas que presentan períodos entre 30.0 y 300.0s.

f.- Atendiendo al punto donde se presentan.

OLAS EN LA ZONA DE GENERACION O LOCALES. Cuando las olas están bajo la influencia del viento en una zona de nacimiento, llamada zona de generación; generalmente se les llama "SEA".

OLEAJE DISTANTE. Corresponde a las olas que se localizan fuera de la zona de acción del viento que las genera; denominadas frecuentemente "SWELL".

1.4 TIPOS DE TEORIAS DE OLEAJE

1.4.1 INTRODUCCION

Desde el punto de vista matemático no existe una solución general para describir el comportamiento real del oleaje; aún en los casos más sencillos deben realizarse aproximaciones.

Las aproximaciones matemáticas para el estudio del movimiento del oleaje son tan variadas como los aspectos físicos.

En realidad los tratamientos matemáticos que pretenden analizar el oleaje utilizan los recursos de su comportamiento físico y matemático con problemas lineales y no lineales; siendo la principal dificultad el hecho de que una de las fronteras, llamada superficie libre, es una de las incógnitas.

Los movimientos del oleaje son tan diversos y complicados que cualquier intento de una clasificación única puede conducir a errores.

Cualquier definición corresponde a idealizar situaciones que nunca ocurren rigurosamente, ya que son solamente aproximadas. Por ejemplo un movimiento bidimensional puro nunca existe; es un concepto matemáticamente conveniente, el cual físicamente tiene una mejor aproximación



en un tanque con paredes paralelas. Los efectos de condición de frontera y componentes transversales, aunque existen, son difíciles de detectar.

1.4.2 PARAMETROS CARACTERISTICOS

En un sistema de coordenadas Euleriano el problema de describir la superficie de la ola generalmente involucra tres incógnitas: la elevación de la superficie libre (o la profundidad total), la presión (conocida en la superficie libre) y la velocidad de la partícula.

Debido a que es imposible tener un método de solución general han sido desarrolladas hipótesis simplificadoras que se aplican a casos particulares con precisión variable, que están incluidas en las teorías del oleaje.

En general el método de solución que es utilizado depende de los efectos no lineales considerados, es decir de la importancia relativa de los términos de inercia convectiva con respecto a la inercia local.

Sin embargo, en lugar de analizar el comportamiento con esos términos inerciales directamente, es más conveniente relacionarlos con otros parámetros característicos accesibles del oleaje, como son:

1. Un valor típico de la elevación de la superficie libre llamado altura de la ola H .
2. Una longitud horizontal conocida como longitud de la ola L , y
3. La profundidad del agua d .

A pesar de que las relaciones entre los términos inerciales y estos tres parámetros no son simples, sus valores relativos son de considerable ayuda en la clasificación de las teorías del oleaje desde un punto de vista matemático.

Por ejemplo, es fácilmente comprensible que cuando la elevación de la superficie libre disminuye, la velocidad de las partículas disminuye también. En consecuencia cuando la altura de la ola H tiende a cero el término de inercia convectiva (el cual se relaciona con el cuadrado de la

velocidad de la partícula) es infinitesimal de orden mas alto que el término local de inercia el cual está relacionado linealmente a la velocidad. En tal caso el término de inercia convectiva puede ser despreciado y las ecuaciones pueden ser linealizadas.

Tres relaciones características pueden ser obtenidas de H , L , d ; estas son H/L , H/d , L/d . La importancia relativa del término de inercia convectiva aumenta conforme el valor de estas tres relaciones aumenta.

En aguas profundas (H/d y L/d son pequeños) el parámetro más significativo es H/L , el cual es llamado altura unitaria de al ola; mientras que en aguas someras es H/d llamado altura relativa y en aguas intermedias el parámetro signficante es la relación $(H/L)(L/d)^3$ llamado parámetro de Ursell y que cubre también los casos en aguas someras y en aguas profundas.

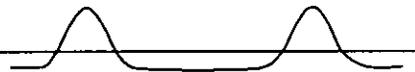
1.4.3 METODOS DE SOLUCION

Dependiendo del problema considerado y del rango de valores de los parámetros H/L , H/d y L/d pueden utilizarse tres aproximaciones matemáticas para la solución.

1.4.3.1 LINEALIZACION.

El caso más simple de las teorías de oleaje es por supuesto la teoría lineal, en la cual los términos de inercia convectiva son completamente despreciados. Estas teorías son válidas cuando H/L , H/d y L/d son pequeños, es decir para ondas de pequeña amplitud y longitud pequeña en aguas profundas; por la primera razón es llamada "TEORIA DE ONDAS DE PEQUEÑA AMPLITUD".

Las ecuaciones linealizadas están sujetas a soluciones matemáticas que las teorías lineales del oleaje usan para una variedad extrema de movimientos del oleaje. Por ejemplo, algunos fenómenos que son estudiados por este método son la difracción del oleaje, las olas generadas por el movimiento de un barco y el oleaje producto de explosiones, aun cuando puedan tener amplitudes grandes.



1.4.3.2 SERIES DE TAYLOR.

También pueden encontrarse soluciones como una serie de potencias en función de un parámetro pequeño comparado a otros. Esta cantidad pequeña es H/L en aguas profundas o H/d en aguas bajas. En el primer caso (desarrollo en términos de H/L u oleaje de Stokes) el primer término de las series es una solución de las ecuaciones linealizadas. En el segundo caso, el primer término de las series es ya una solución de ecuaciones no lineales, estas son las olas cnoidales.

El cálculo de los términos sucesivos de las series es bastante laborioso, por lo que estos métodos son usados en un número de casos muy pequeño.

El caso más típico es el oleaje periódico progresivo en dos dimensiones, aunque también se puede aplicar en olas periódicas estacionarias y en oleaje irregular.

1.4.3.3 METODOS NUMERICOS

Puede suceder que no exista como solución un perfil de condición continuo y regular, en cuyo caso una solución numérica donde las diferenciales son sustituidas por diferencias finitas es frecuentemente utilizada. Esto ocurre para valores grandes de H/d y L/d , cuando los términos no-lineales tales como $[\rho u (\partial u / \partial x)]$ son relativamente grandes en comparación con la inercia local $[\rho (\partial u / \partial t)]$. Este es el caso de ondas largas propagándose en aguas someras.

Por supuesto, en este caso puede ser utilizado un método numérico para resolver un sistema de ecuaciones linealizado; por ejemplo el método de relajación es usado para estudiar la agitación de olas pequeñas en un estanque. También una solución analítica de un sistema no-lineal de ecuaciones puede encontrarse en algunos casos particulares.

Sin embargo, debe tenerse en mente que estos tres métodos de solución y el rango de aplicación dado en cada caso indican mas una tendencia que una regla general.

Aparte de los tres métodos descritos que enfocan la atención en una solución determinística completa del problema del oleaje, la descripción del estado del mar generalmente involucra el uso de funciones aleatorias. Las operaciones matemáticas que son usadas en este caso

(como el análisis armónico) generalmente implican que el oleaje obedece leyes lineales, requisitos necesarios para aceptar que el principio de superposición es válido. Por consiguiente tales aproximaciones pierden su validez para describir el estado del mar en aguas reducidas (grandes valores de H/d y L/d) y en la zona de rompiente del oleaje.

1.4.4 CLASIFICACION

En general las teorías del oleaje se pueden agrupar en dos grandes familias que son:

1.4.4.1 TEORIA DE ONDAS DE PEQUEÑA AMPLITUD.

Adoptan la teoría linealizada para las olas de amplitud infinitesimal y la primera categoría de series de potencias, es decir las series en términos de H/L para las olas de amplitud finita.

1.4.4.2 TEORIAS DE ONDAS LARGAS.

Emplean el método numérico de solución para las ecuaciones no-lineales de ondas largas.

Estas dos grandes familias de teorías incluyen un gran número de variantes y algunos casos intermedios que presentan algunas de las características de ambas familias; por ejemplo la teoría cnoidal, la teoría de la ola solitaria y la teoría monoclinial son consideradas como casos particulares de las teorías de ondas largas, ya que presentan oleaje no-lineal en aguas someras.

En la figura No. 7 siguiente se presentan las teorías lineales de acuerdo a sus características más relevantes: altura relativa H/d , parámetro de Ursell $H/L(L/d)^3$, profundidad relativa d/L , distribución de la presión, rotacionalidad, fuerzas de fricción, tipo de ola, transporte de masa y solución matemática.

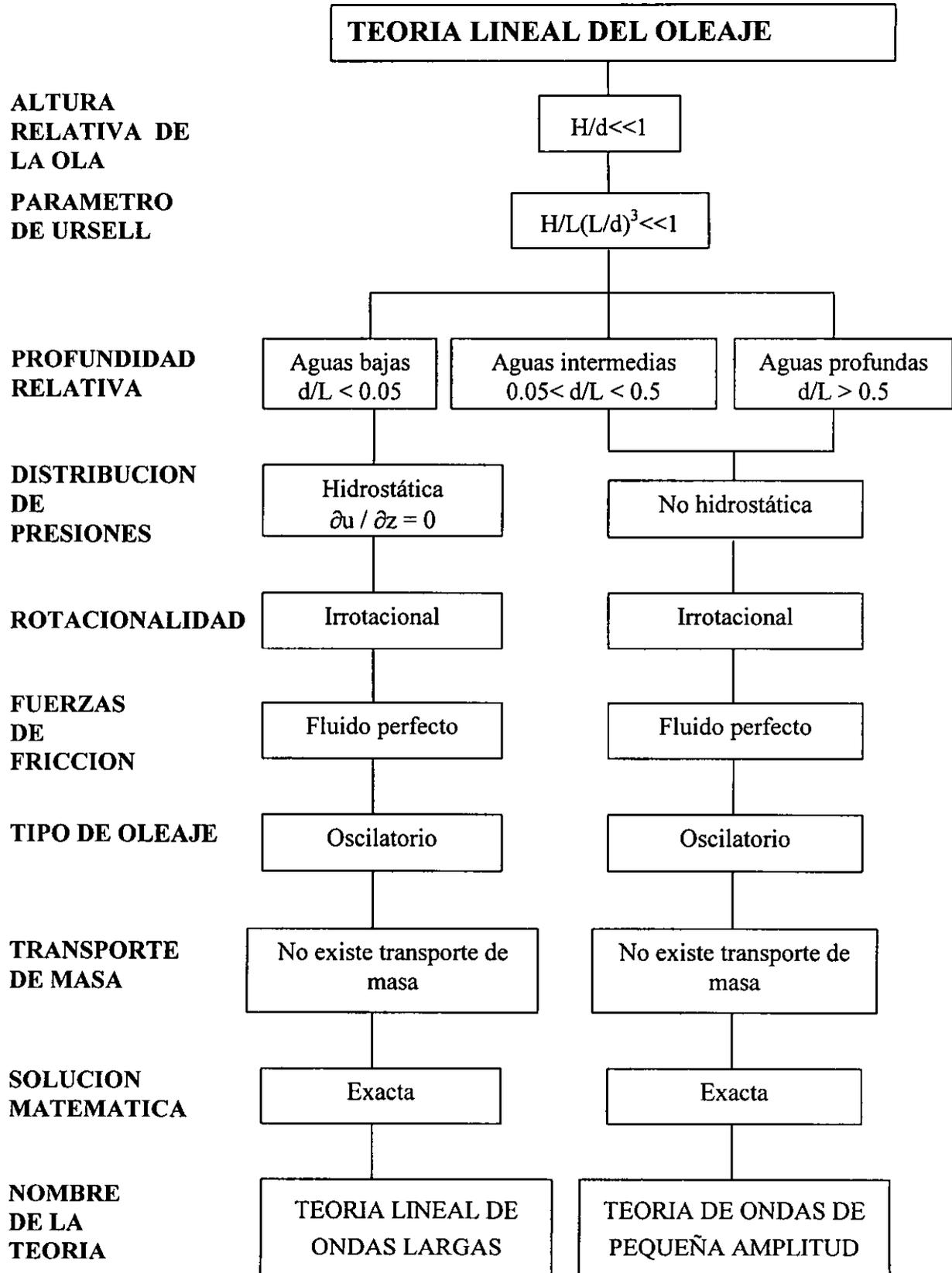


Figura 7 Teorías lineales del oleaje.

De manera similar se muestra en las figuras 8, 9, 10 y 11 las características de las teorías no lineales del oleaje.

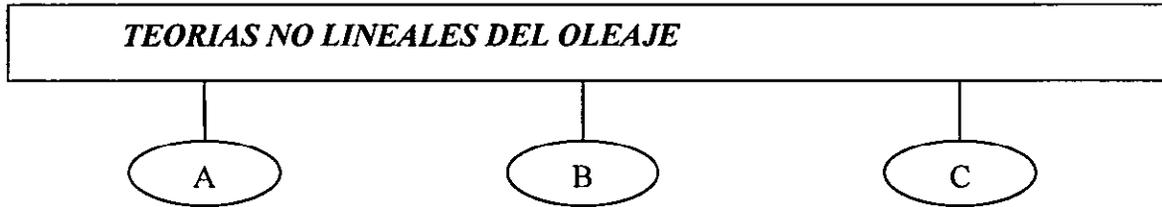


Figura 8 Teorías no lineales del oleaje.

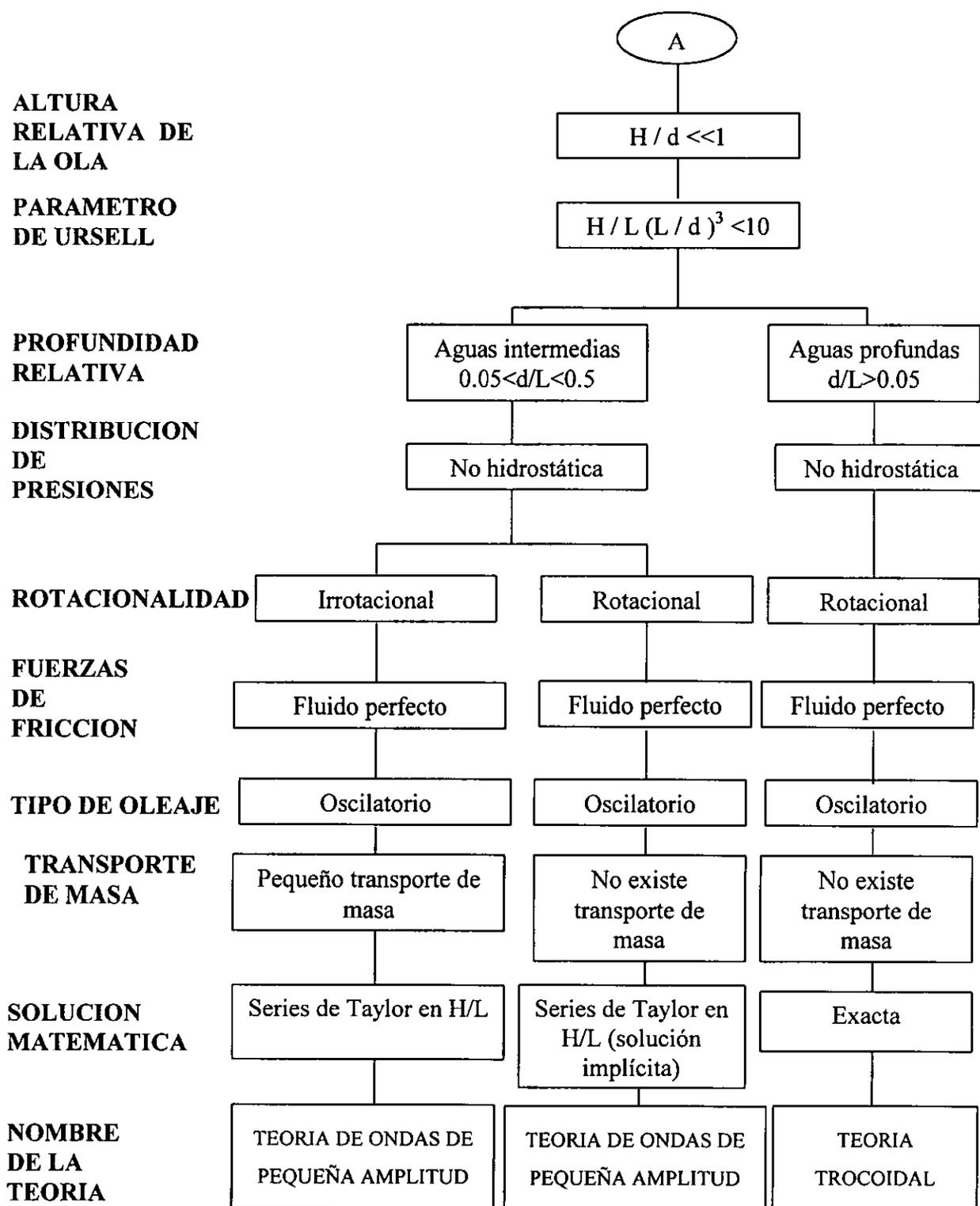
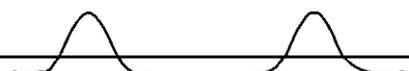


Figura 9 Teorías no lineales del oleaje.

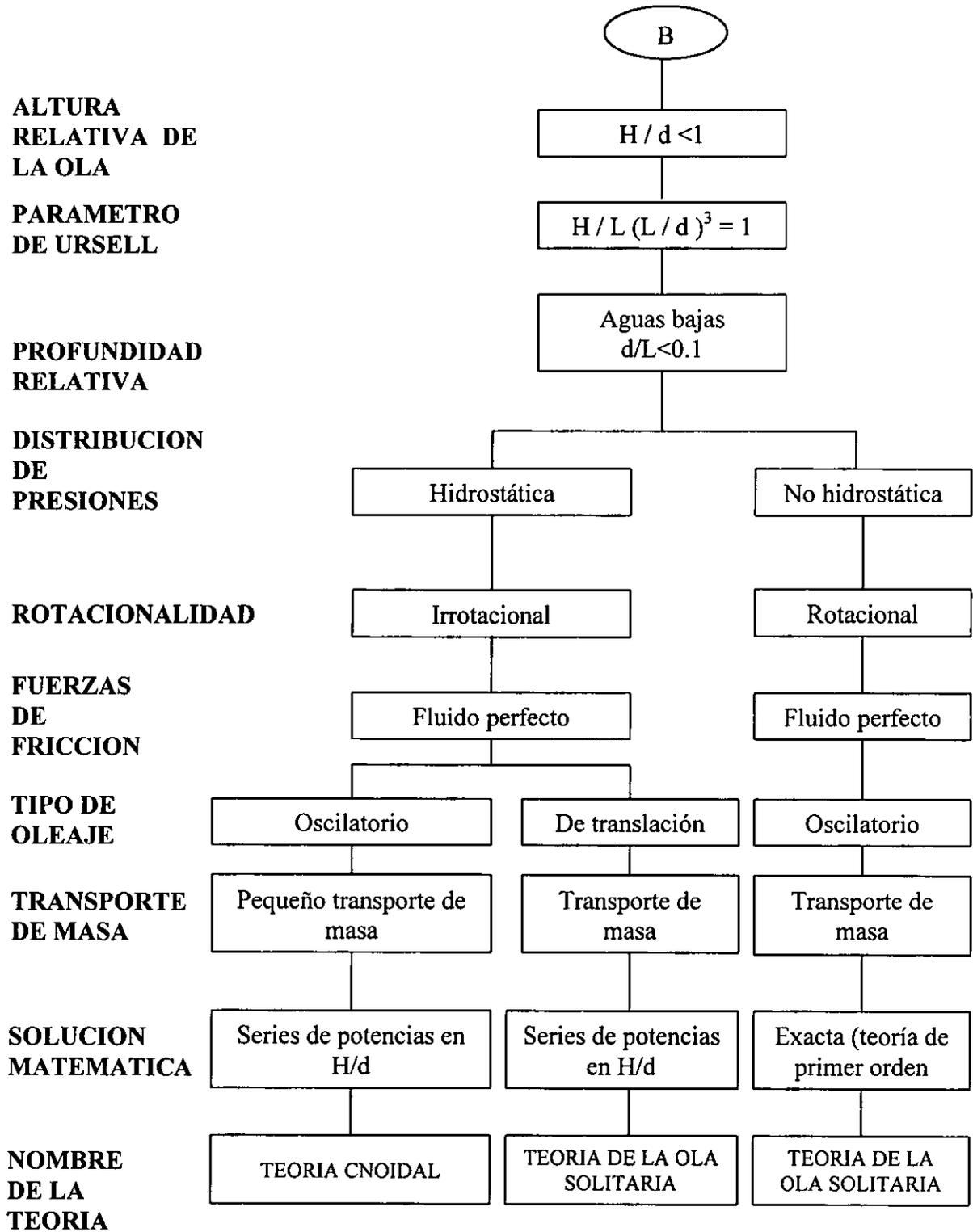


Figura 10 Teorías no lineales del oleaje.

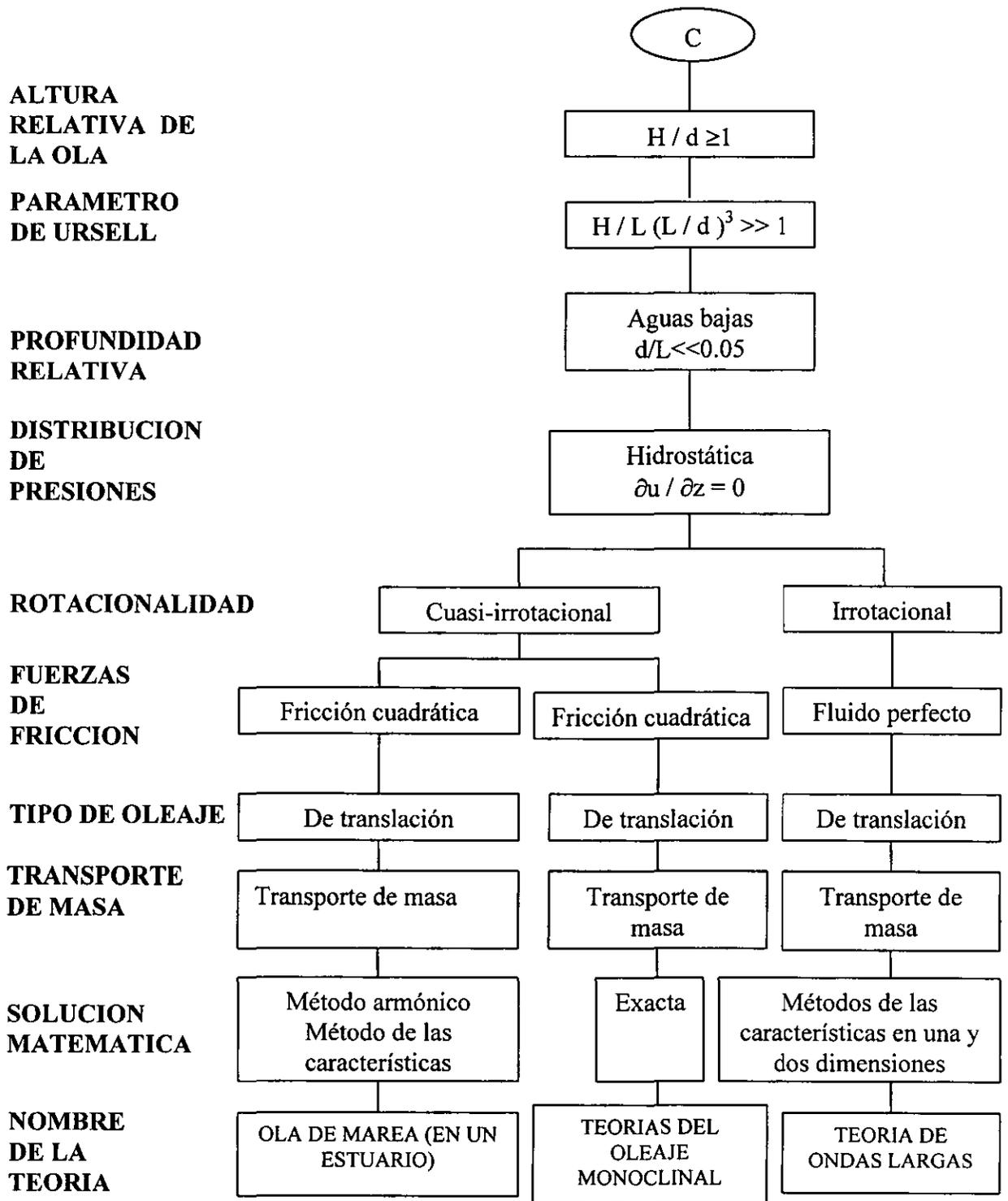


Figura 11 Teorías no lineales del oleaje.

1.5 ASPECTOS DE LAS TEORIAS DEL OLEAJE.

Como ya se estableció anteriormente el problema de la superficie de la ola en un sistema Euleriano de coordenadas implica tres incógnitas (η, p, \bar{v}).

Se parte de la suposición que una ola periódica y progresiva que viaja sobre el fondo del mar horizontal esta caracterizada por un perfil de condición estacionario, es decir:

$$\eta, \bar{v}, p = f(x - Ct) \quad (1)$$

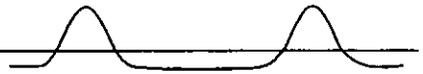
donde C es una constante igual a la velocidad de la ola. (De hecho, se ha observado que bajo ciertas condiciones el perfil de la ola en aguas someras llega a ser inestable, asimétrico y degenera en una sucesión de ondulaciones más pequeñas).

El problema consiste ahora en resolver un sistema que satisfaga las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y ciertas condiciones de frontera. Sin embargo, éstas no son suficientes para resolver el problema no lineal y son necesarias dos consideraciones más.

Esto conduce a la discusión del problema de la rotacionalidad y el transporte de masa, en vista de que ellos están relacionados.

En primer lugar se hace notar que un flujo estacionario de distribución de velocidad arbitraria siempre puede ser superpuesto a un movimiento del oleaje dado, induciéndolo de este modo a cualquier distribución de velocidad de transporte de masa arbitrario (Dubreuil-Jacotin, 1934). Las consideraciones en el cálculo del movimiento de la ola son inherentes a las condiciones que predominan en las hipótesis que son utilizadas en el cálculo del transporte de masa.

El movimiento de la ola puede determinarse considerando que no hay transporte de masa en absoluto. Estas son las teorías de órbitas cerradas, tales como la solución exacta de Gerstner (1809) en aguas profundas y la solución de series de potencia de Boussinesq, Kravtchenko y Dauber (1957) para aguas someras. Como un resultado de esta hipótesis el movimiento es rotacional y la vorticidad en la dirección opuesta a la rotación de la partícula, es decir, en la



dirección opuesta a la que debería esperarse físicamente bajo la influencia de un esfuerzo cortante debido al viento que sopla en la dirección del oleaje.

El movimiento de la ola también puede ser aceptado como irrotacional, en cuyo caso se presenta una distribución de transporte de masa como un resultado de la no-linealidad (Wehausen y Laitone, 1960). Estas son las teorías del oleaje Stokesianas, que incluyen las de Stokes (1847), Levi-Civita (1925), Struik (1926) y Nekrassov (1951).

Aun cuando existe una distribución de transporte de masa, la cual es función de la coordenada vertical, la constante de integración se determina frecuentemente suponiendo que el transporte de masa promedio es nulo por la condición de continuidad, o sea, un flujo estacionario se superpone por lo que la velocidad promedio del transporte de masa es cero (Miche, 1944).

Sea:

$$U(z) = (\mu + 1)U_{\zeta=0}(z) \quad (2)$$

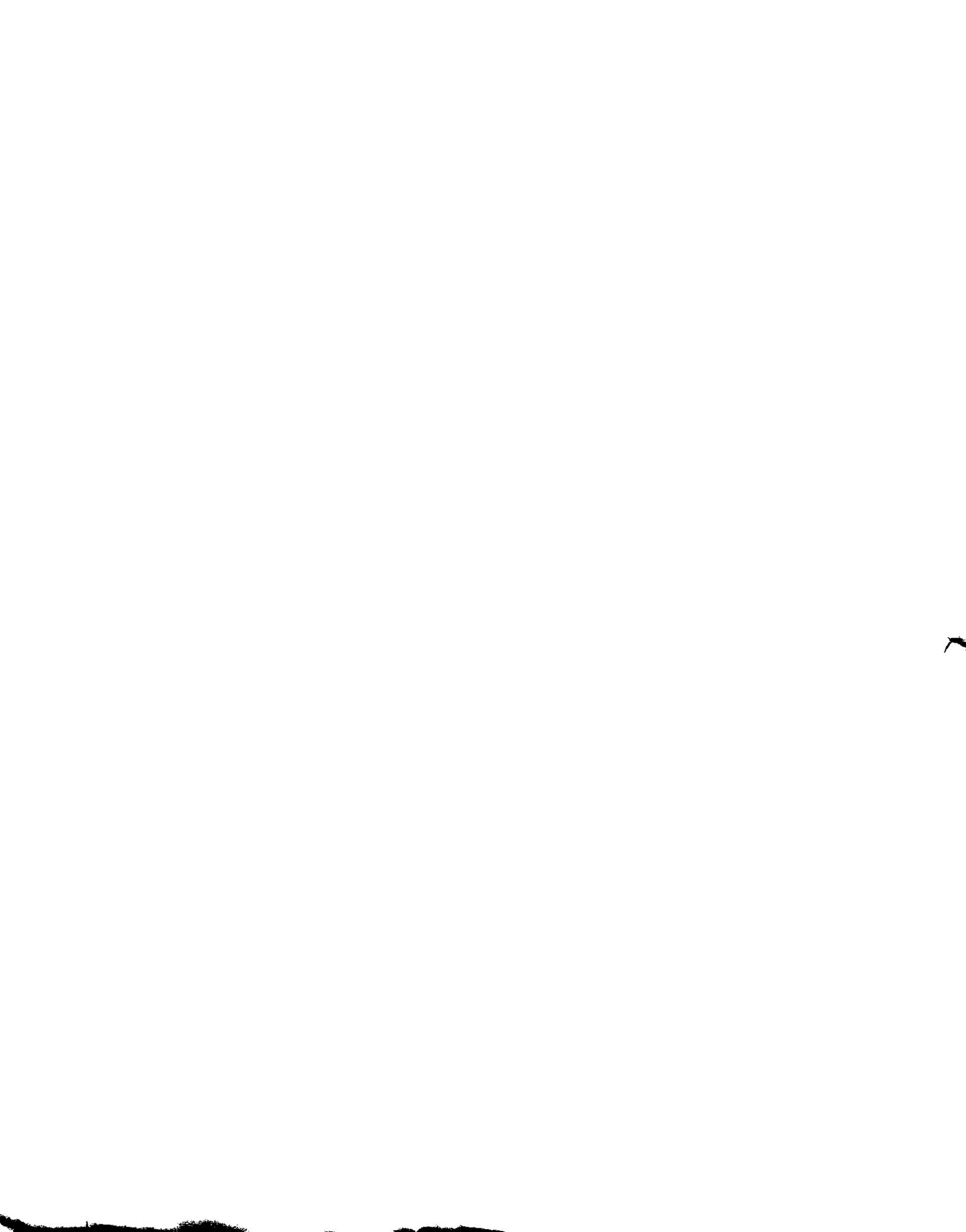
donde $U(z)$ es la velocidad del transporte de masa como una función de la distancia vertical z y $U_{\zeta=0}$ es el transporte de masa en una ola irrotacional ($\zeta = 0$) de la misma familia y aproximación.

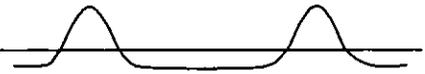
El caso donde $\mu = -1$ corresponde a la solución de Boussinesq para órbitas cerradas. Cuando $\mu = 0$ corresponde a la teoría irrotacional de Stokes. Si $\mu > 0$, la vorticidad promedio se presenta en la misma dirección que la dirección de la órbita, lo que se debe a un viento fuerte actuando en la dirección del oleaje. El caso donde $\mu < -1$ genera una vorticidad negativa y un transporte de masa negativo en la superficie libre, los cuales son debidos a la acción del viento en la dirección opuesta a la propagación de la ola (un caso frecuente cerca de la costa). Finalmente cuando $-1 < \mu < 0$, la vorticidad se presenta en la dirección opuesta y el transporte de masa es más pequeño que en el caso irrotacional.

Longuet-Higgins (1953) demostró la importancia de las fuerzas viscosas en el fondo para explicar el hecho de que el transporte de masa en el fondo del mar es siempre en la dirección del oleaje.

Además de la primera hipótesis respecto de la rotacionalidad o transporte de masa, se requiere otra condición adicional. Por ejemplo, para olas progresivas monocromáticas, se intenta establecer una solución de estado estacionario, tal que la función potencial sea $\phi = f(x - Ct)$ donde C es una constante igual a la velocidad de la ola, en cuyo caso la solución es única. Aun cuando las soluciones de estado estacionario son de la misma forma, C es indeterminada y para su obtención se requiere otra condición. Por ejemplo, la velocidad horizontal promedio durante un período de la ola en una situación dada puede tomarse como cero, pero el transporte de masa es entonces el mínimo.

Generalmente se prefiere otra condición que consiste en asumir que la cantidad de movimiento promedio a lo largo de la longitud de la ola es cero por la adición de un movimiento estacionario; en este caso se obtiene otra expresión para C , la cual consiste en un transporte de masa diferente. De esta manera se entiende que el cálculo de las teorías del oleaje está sujeto a ciertas arbitrariedades debidas a distintas hipótesis utilizadas que pueden conducir a diferentes valores de C (Le Méhauté, 1968).





CAPITULO 2. TEORIA LINEAL.

La más elemental teoría que describe los elementos del oleaje de pequeña amplitud, fue desarrollada por Airy en 1845.

Su importancia fundamental radica en su fácil aplicación y en la gran región del oleaje que abarca.

Matemáticamente, la Teoría Lineal, también conocida como Teoría de Airy, puede ser considerada como una primera aproximación de una descripción teórica completa acerca del comportamiento del oleaje.

2.1 TEORIA LINEAL PARA OLEAJE PROGRESIVO.

2.1.1 ASPECTOS GENERALES.

Algunas consideraciones de partida muy importantes y previas al establecimiento de las características físicas del oleaje son:

(a) Para el análisis, se propone un marco de referencia espacial, mediante un sistema de coordenadas cartesiano (x,y,z) , en donde 'x' se localiza en la dirección horizontal de propagación de la ola y sobre la línea de nivel de aguas tranquilas (NAT); 'z' se mide verticalmente; 'y' se medirá en dirección perpendicular al plano 'x-z'.

(b) El fluido es homogéneo e incompresible; por lo tanto, la densidad ' ρ ' es constante.

(c) La tensión superficial se desprecia.

(d) El efecto de Coriolis se desprecia.

(e) El fluido se considera ideal o no viscoso y además irrotacional.

(f) Las olas se consideran bidimensionalmente actuando en el plano 'x-z'.

(g) La ola que se analiza no interactúa con los movimientos de ninguna otra ola.

(h) La amplitud de la ola es pequeña y su forma no varía en el tiempo y espacio.

(i) El fondo es fijo, horizontal e impermeable; lo que implica que la velocidad vertical en el fondo es cero.

2.1.2 MODELO MATEMATICO.

Al ser el oleaje un fluido en movimiento, puede plantearse un esquema de solución a partir de las ecuaciones básicas de hidrodinámica, como son las tres Ecuaciones de Navier-Stokes y la Ecuación de Continuidad; generándose un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, a saber, la presión, 'p' y los tres componentes de la velocidad en las direcciones x,y, z (llamadas 'u', 'v', 'w').

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u + X = \frac{du}{dt} \quad (3)$$

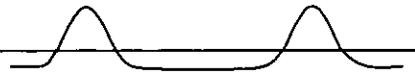
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v + Y = \frac{dv}{dt} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w + Z = \frac{dw}{dt} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

en estas ecuaciones:

- ρ , densidad del agua de mar, en kg_m/m^3 .
 ν , viscosidad cinemática del agua de mar, en m^2/s .
 X, Y, Z , fuerzas másicas del volumen de agua analizado sobre los respectivos ejes de referencia.
 ∇ , operador nabra.
 ∇^2 , laplaciano.



2.1.2.1 TEOREMA DE BERNOULLI

Si se desarrolla el miembro derecho de la ecuación 3 se obtiene:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (7)$$

También se sabe que $|\hat{v}|^2 = V^2 = u^2 + v^2 + w^2$, por lo que

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) - v \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8)$$

Sustituyendo 8 en 7

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (9)$$

Recordando la definición de rotacional

$$\begin{aligned} \text{rot} \hat{v} \times \hat{v} = & \hat{i} \left[v \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \hat{j} \left[u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + w \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \\ & \hat{k} \left[v \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + u \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Observando las ecuaciones 9 y 10 se aprecia que los dos últimos términos de 9 representan la magnitud de la componente x del producto $\text{rot} \hat{v} \times \hat{v}$, es decir,

$$v \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = [\text{rot} \hat{v} \times \hat{v}]_x \quad (11)$$

si se sustituye 11 en 9

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) + [\text{rot}\hat{v} \times \hat{v}]_x \quad (12)$$

por otra parte, sustituyendo 12 en 3

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \nabla^2 u + X = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\text{rot}\hat{v} \times \hat{v})_x \quad (13)$$

También pueden establecerse las hipótesis siguientes:

1. Se considera nula la viscosidad cinemática del fluido, por lo que el término $v \nabla^2 u$ se desprecia.
2. Existe un potencial Ω para las fuerzas másicas, por lo que $X = \partial\Omega/\partial x$.
3. Se presenta un potencial de velocidad, lo que implica que $\text{rot}\hat{v} = 0$ y por ende $[\text{rot}\hat{v} \times \hat{v}]_x = 0$.

con los cuales la ecuación 13 se reduce a

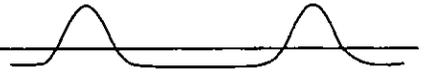
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) \quad (14)$$

Considerando ahora que el potencial de las fuerzas másicas es el gravitacional, $\Omega = -gz$ y que la presión se considera negativa, la ecuación 14 será

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} \right) = - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (15)$$

Bajo un desarrollo similar al mostrado, partiendo ahora de las ecuaciones 4 y 5, pueden obtenerse expresiones análogas para las direcciones Y y Z.

Partiendo de 15 y sus análogas, multiplicando por dx , dy , dz , respectivamente, sumando miembro a miembro e introduciendo el vector $d\hat{s} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz$ se obtiene finalmente



$$d\left(\frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g}\right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{v} \cdot d\hat{s}) \quad (16)$$

que es el teorema de Bernoulli que se utilizará en la teoría lineal del oleaje.

2.1.2.2 TEORIA LINEAL DEL OLEAJE EN DOS DIRECCIONES ESPACIALES

Se analizará el oleaje en un movimiento bidimensional, que tiene lugar en planos verticales paralelos al sistema x (horizontal) y z (vertical).

Para encontrar las ecuaciones básicas del oleaje de la teoría lineal se requieren de varias hipótesis y de establecer algunas condiciones de frontera.

2.1.2.2.1 HIPOTESIS

a.- El flujo es potencial. Por ello la velocidad se plantea en términos de la función potencial ϕ como:

$$v = \nabla\phi \quad (17)$$

b.- Los términos cuadráticos de la velocidad son pequeños. Por lo que

$$\nabla\phi \cdot \nabla\phi = 0 \quad (18)$$

c.- El componente de la velocidad vertical en el fondo del mar es nulo

$$(w)_{z=-d} = 0 \quad (19)$$

d.- Puesto que el oleaje es oscilatorio, la elevación de la superficie libre se puede expresar como una función periódica.

$$\eta = a \cos(kx - \sigma t) \quad (20)$$

k es el número de la ola igual a $2\pi/L$ y σ se llama frecuencia angular que es igual a $2\pi/T$ siendo T el periodo.

e.- La función ϕ varía cíclicamente y se expresa como:

$$\phi = \phi(x, z, t) = f(z)f(x, t) \quad (21)$$

donde

$$f(x, t) = \text{sen}(kx - \sigma t) \quad (22)$$

2.1.2.2.2 CONDICIONES DE FRONTERA

Para obtener la presión p y el potencial ϕ que cumplen con la ecuación de Laplace y con la ecuación de Bernoulli (ecuación 16) se requieren tres condiciones de frontera, las que se describen a continuación.

A) CONDICION PARA LA SUPERFICIE LIBRE

Considérese que el sistema de referencia en el oleaje es el mostrado en la figura siguiente:

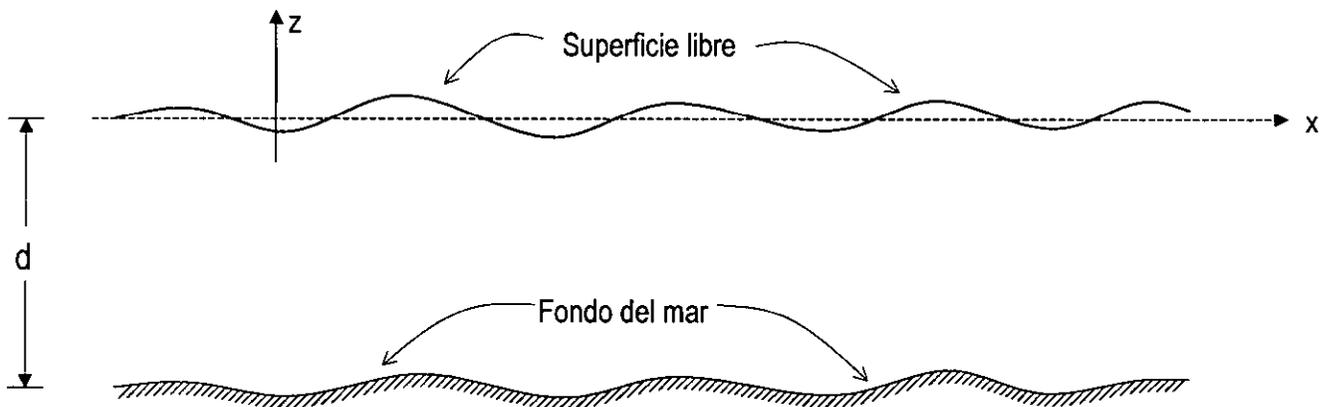


Figura A) 1 . Condiciones de frontera en la superficie libre y en el fondo

Debido a que el flujo es bidimensional la componente v se anula y la ecuación 16 toma la forma:

$$d\left(\frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g}\right) = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial w}{\partial t} dz\right) \quad (23)$$

Si existe potencial $u = \partial\phi/\partial x$ y $w = \partial\phi/\partial z$, y suponiendo que las velocidades pequeñas por lo que $v^2/2g$ se desprecia, la expresión anterior



$$d\left(\frac{p}{\gamma} + z\right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t}(d\phi) \quad (24)$$

Integrando y ordenando

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} = c \quad (25)$$

Si se selecciona adecuadamente el sistema de referencia $c = 0$, $p = 0$ y $z = \eta$, la ecuación 25 se puede escribir como:

$$\eta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\eta} \quad (26)$$

Considerando que la velocidad vertical en la superficie libre corresponde al cambio en el tiempo de la masa se tiene:

$$w = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{z=\eta} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=\eta} \quad (27)$$

Derivando parcialmente con respecto al tiempo la ecuación 26

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{z=\eta} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=\eta} \quad (28)$$

Sustituyendo la ecuación 27 en la ecuación 28 se obtiene:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z=\eta} = 0 \quad (29)$$

En donde se observa que la condición de frontera para la superficie libre (cinemática y dinámica) implica que el potencial satisfaga esta relación.

B) CONDICION PARA EL FONDO

En el fondo del mar, a una profundidad d de la superficie libre como se aprecia en la figura A) 1 la velocidad vertical w debe ser cero puesto que no hay flujo a través del fondo (de acuerdo a la hipótesis c, ecuación 19). Esta condición implica que

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=-d} = 0 \quad (30)$$

debe satisfacerse.

2.1.2.2.3 FUNCION POTENCIAL

Por tratarse de un flujo bidimensional $V=0$ y con potencial de velocidades ($u = \partial\phi/\partial x$ y $w = \partial\phi/\partial z$) la ecuación de continuidad 6. deviene en

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (31)$$

En conclusión, para que sea válido el potencial ϕ deberá satisfacer esta ecuación 31 y las ecuaciones 29 y 30 provenientes de las condiciones de frontera.

De la hipótesis e) y sustituyendo la ecuación 22 en la 21. se obtiene

$$\phi = f(z)\text{sen}(kx - \sigma t) \quad (32)$$

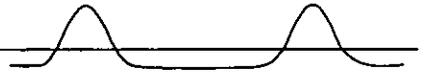
al sustituir la ecuación 32 en 31

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z) - k^2 f(z) = 0 \quad (33)$$

siendo la solución general de esta relación

$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz} \quad (34)$$

Ahora si se sustituye la ecuación 34 en la expresión 32 se genera



$$\phi = (Ae^{kz} + Be^{-kz})\text{sen}(kx - \sigma t) \quad (35)$$

y si se deriva parcialmente con respecto a z

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = (Ake^{kz} - Bke^{-kz})\text{sen}(kx - \sigma t) \quad (36)$$

Considerando la condición 30, para $z = -d$ se tiene

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=-d} = (Ake^{-kd} - Bke^{kd})\text{sen}(kx - \sigma t) \quad (37)$$

es decir

$$Ake^{-kd} - Bke^{kd} = 0 \quad (38)$$

o también

$$Ae^{-kd} - Be^{kd} = 0 \quad (39)$$

y si se hace

$$Ae^{-kd} = Be^{kd} = \frac{D}{2} \quad (40)$$

Sustituyendo esta expresión 40 en la ecuación del potencial 35 se genera

$$\phi = \frac{D}{2} [e^{k(z+d)} + e^{-k(z+d)}]\text{sen}(kx - \sigma t) \quad (41)$$

y recordando la definición de funciones hiperbólicas

$$\phi = D \cosh[k(z+d)]\text{sen}(kx - \sigma t) \quad (42)$$

Derivando parcialmente con respecto al tiempo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\sigma D \cosh[k(z+d)] \cos(kx - \sigma t) \quad (43)$$

para $z=0$ se obtiene

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=0} = -\sigma D \cosh(kd) \cos(kx - \sigma t) \quad (44)$$

Debido a que se trata de oleaje de pequeña amplitud se puede hacer que:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=\eta} \cong \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=0} \quad (45)$$

Si se sustituyen las expresiones 45 y 44 en la ecuación 26

$$\eta = \frac{\sigma}{g} D \cosh(kd) \cos(kx - \sigma t) \quad (46)$$

Igualando la hipótesis d(ecuación 20) con esta expresión 46

$$a \cos(kx - \sigma t) = \frac{\sigma}{g} D \cosh(kd) \cos(kx - \sigma t) \quad (47)$$

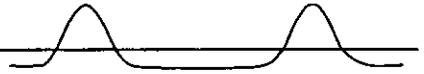
y si se despeja D

$$D = \frac{ag}{\sigma} \frac{1}{\cosh(kd)} \quad (48)$$

Finalmente sustituyendo este valor para D en la ecuación 42

$$\phi = \frac{ag}{\sigma} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \sin(kx - \sigma t) \quad (49)$$

Expresión para el potencial de velocidades de la teoría lineal en una dimensión espacial horizontal.



2.1.2.2.4 ECUACION DE DISPERSION

Derivando parcialmente dos veces con respecto al tiempo la función potencial de la ecuación 35

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (Ae^{kz} + Be^{-kz})\sigma^2 \text{sen}(kx - \sigma t) \quad (50)$$

para $z = 0$ se tiene que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (A + B)\sigma^2 \text{sen}(kx - \sigma t) \quad (51)$$

Haciendo $z = 0$ en la ecuación 36

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = (Ak - Bk)\text{sen}(kx - \sigma t) \quad (52)$$

Si se sustituyen las ecuaciones 51 y 52 en la expresión 29

$$(Ak - Bk)\text{sen}(kx - \sigma t) + \frac{1}{g}(A + B)\sigma^2 \text{sen}(kx - \sigma t) \quad (53)$$

y al efectuar simplificaciones

$$(\sigma^2 - gk)A + (\sigma^2 + gk)B = 0 \quad (54)$$

Las ecuaciones 39 y 54 forman un sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuyas incógnitas son A y B. Para que este sistema tenga solución distinta de la trivial se requiere que el determinante de su matriz de coeficientes sea nulo, o sea

$$\begin{bmatrix} e^{-kd} & -e^{kd} \\ (\sigma^2 - gk) & (\sigma^2 + gk) \end{bmatrix} = 0$$

Si se desarrolla

$$e^{-kd}(\sigma^2 + gk) + e^{kd}(\sigma^2 - gk) = 0$$

y se despeja a σ^2

$$\sigma^2 = gk \frac{e^{kd} - e^{-kd}}{e^{kd} + e^{-kd}}$$

e introduciendo la definición de funciones hiperbólicas

$$\sigma^2 = gk \tanh(kd) \quad (55)$$

llamada ecuación de dispersión que relaciona la frecuencia angular σ con el número de ola k .

La frecuencia angular se define en función del periodo T como

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} \quad (56)$$

y el número de onda en función de la longitud de onda L por

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (57)$$

Si la celeridad es la relación entre la longitud y el periodo de la onda, $C=L/T$, utilizando las anteriores expresiones se obtiene que:

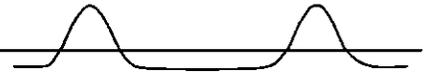
$$C = \frac{\sigma}{k} \quad (58)$$

Empleando las relaciones 58 y 57 en la ecuación de dispersión 55 se tiene

$$C = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kd)}$$

o también

$$C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)} \quad (59)$$



Elevando al cuadrado, sustituyendo $L=CT$ y reduciendo

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \quad (60)$$

Si se expresa la longitud de la ola en función de celeridad se llega a:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \quad (61)$$

2.1.2.2.5 PRESION

Si se sustituye la expresión de la función potencial 49 en la ecuación 25 y se hace $C=0$, se obtiene

$$\frac{p}{\gamma} + z - a \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \cos(kx - \sigma t) = 0 \quad (62)$$

Tomando en cuenta 20

$$p = \gamma \eta \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} - \gamma z \quad (63)$$

Mediante esta expresión es posible obtener la presión en un punto (x,z) si se conocen la elevación de la superficie libre del mar y la profundidad z .

2.1.2.2.6 VELOCIDAD DE LAS PARTICULAS DE AGUA

Derivando parcialmente la función potencial 49 con respecto a x y a y , y recordando la definición de potencial se obtienen las expresiones

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{kg a \cosh[k(z+d)]}{\sigma \cosh(kd)} \cos(kx - \sigma t) \quad (64)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{kg a \sinh[k(z+d)]}{\sigma \cosh(kd)} \sin(kx - \sigma t) \quad (65)$$

que permiten determinar las velocidades horizontal u y vertical w de cualquier partícula de agua en el oleaje.

2.1.2.2.7 ACELERACIONES DE LAS PARTICULAS DE AGUA

Si se derivan parcialmente las ecuaciones 61 y 62 con respecto al tiempo se obtienen las componentes del vector aceleración de una partícula de agua

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = kga \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \sin(kx - \sigma t) \quad (66)$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = kga \frac{\sinh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \cos(kx - \sigma t) \quad (67)$$

2.1.2.2.8 DESPLAZAMIENTO DE LAS PARTICULAS DE AGUA.

Considerando que la velocidad es el desplazamiento sufrido por las partículas en determinado intervalo, la velocidad en el sentido x resulta ser $u=dx/dt$. De la ecuación 64. puede obtenerse que la longitud recorrida (en el sentido x), valdrá

$$X = \frac{gka}{\sigma} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \int \cos(kx - \sigma t) dt \quad (68)$$

se obtiene al integrar

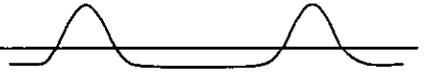
$$X = -\frac{gka}{\sigma^2} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \sin(kx - \sigma t) + X_0 \quad (69)$$

En esta fórmula X_0 es una constante de integración.

Como

$$\frac{kga}{\sigma} = \frac{gaT}{2\pi C}$$

por lo que



$$X = -\frac{ga\Gamma}{2\pi C} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \text{sen}(kx - \sigma t) + X_0 \quad (70)$$

Sí se sustituye la celeridad por la expresión 60 resulta

$$X = -a \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \text{sen}(kx - \sigma t) + X_0 \quad (71)$$

Siguiendo un razonamiento análogo en la dirección de z, puede obtenerse

$$Z = a \frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(kx - \sigma t) + Z_0 \quad (72)$$

Así, los desplazamientos de las partículas respecto a la posición media (X_0, Z_0) resulta ser

$$\xi = -a \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \text{sen}(kx - \sigma t) \quad (73)$$

$$\zeta = a \frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(kx - \sigma t) \quad (74)$$

Por otra parte, las ecuaciones 71 y 72 se pueden escribir como

$$\text{sen}(kx - \sigma t) = -\frac{X - X_0}{a \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}} \quad (75)$$

$$\cos(kx - \sigma t) = -\frac{Z - Z_0}{a \frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}} \quad (76)$$

Elevando al cuadrado 75 y 76, y sumando miembro a miembro se obtendrá la expresión que describa los movimientos (X y Z) de una partícula, es decir

$$\frac{(X - X_0)^2}{\left(a \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\right)^2} + \frac{(Z - Z_0)^2}{\left(a \frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\right)^2} = 1 \quad (77)$$

Como puede verse se trata de una elipse, forma que tendrá la trayectoria de las partículas al producirse el movimiento ondulatorio. Es interesante observar que, en el fondo, como $z=-d$, $\cosh[k(z+d)]=\cosh(0)=1$, en tanto que $\sinh(0)=0$. Esto significa que allí, los semiejes de la elipse serán $a \neq 0$ y $b=0$, es decir que en el fondo la elipse degenera en un tramo de recta.

Por otra parte, en aguas profundas ($d \rightarrow \infty$), sucederá que $\sinh[k(z+d)] \rightarrow \cosh[k(z+d)]$, con lo cual los dos semiejes de la elipse se harán iguales y la trayectoria se hará circular.

Como además se ha hecho ver que en el fondo $\sinh(0)=0$, resultará que en aguas profundas las órbitas de las partículas serán círculos cuyo radio irá disminuyendo desde un cierto valor en la superficie, hasta ser cero en el fondo.

2.1.2.2.9 ENERGIA DE LA OLA.

La energía del oleaje está formada de dos partes, la potencial y la cinética. La suma de ambas da la energía total. Su cálculo es interesante porque una vez conocida se pueden determinar algunas de las acciones del oleaje. Tales son los casos del arrastre litoral y las corrientes playeras pues, aún cuando la energía no aparece de modo explícito en las fórmulas asociadas a estos fenómenos, se puede reconocer su presencia.

La energía potencial, por unidad de cresta se define como

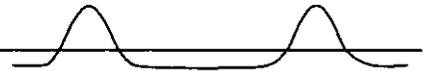
$$E_p = \gamma \int_b^t \int_0^{\eta} Z dx dz \quad (78)$$

La energía cinética por unidad de cresta se define como

$$E_c = \frac{\gamma}{2g} \int_b^t \int_d^0 (u^2 + w^2) dx dz \quad (79)$$

La energía total se expresa por

$$E_T = E_p + E_c \quad (80)$$



Integrando 78 respecto a Z

$$E_p = \gamma \int_b^L \frac{\eta^2}{2} dx$$

De la fórmula 20 se tiene

$$E_p = \frac{\gamma a^2}{2} \int_b^L \cos^2(kx - \sigma t) dx$$

Así

$$E_p = \frac{\gamma a^2}{2} \frac{\pi}{k}$$

Recordando que $k=2\pi/L$ se obtiene

$$E_p = \frac{\gamma a^2}{4} L \quad (81)$$

De las formulas 64, 65 y 79 se deduce

$$E_c = \frac{\gamma}{2g} \int_b^0 \int_{-d}^0 \left(\frac{gka}{\sigma} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2(kd)} \left(\frac{\cosh^2[k(z+d)] \cos^2(kx - \sigma t) + \sinh^2[k(z+d)] \sin^2(kx - \sigma t)}{\sinh^2[k(z+d)] \cosh^2(kd)} \right) dx dz \quad (82)$$

$$E_c = \frac{\gamma}{2g} \left(\frac{gka}{\sigma} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2(kd)} \frac{\pi}{k^2} (\sinh(kd) \cosh(kd))$$

Teniendo en cuenta 55 y simplificando se concluye que

$$E_c = \frac{\gamma a^2 L}{4} \quad (83)$$

Utilizando 80, 81 y 83 se llega a que la energía total de la ola por unidad de cresta es

$$ET = \frac{\gamma a^2}{2} L \quad (84)$$

Resulta interesante observar que esta energía total depende de la altura de la ola y la longitud o el período.

2.1.2.2.10 POTENCIA DE LA OLA.

El producto de la fuerza que actúa sobre un plano en el fluido por la velocidad del flujo a través de él, corresponde a la potencia; si la fuerza es igual a la presión debida al movimiento del oleaje, entonces la potencia por unidad de longitud de cresta es

$$P = \int_0^d (p + \gamma z) u dz \quad (85)$$

al substituir $(p + \gamma z)$ por la igualdad dada por la 63 y al tener en cuenta la 64 se tiene

$$P = \int_0^d \left(\gamma a \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \cos(kx - \sigma t) \right) \left(\frac{g a k}{\sigma} \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \cos(kx - \sigma t) \right) dz$$

o sea

$$P = \frac{\gamma a^2 g}{\sigma} \frac{\cos^2(kx - \sigma t)}{\cosh^2(kd)} \int_0^d \cosh^2[k(z+d)] k dz$$

Integrando

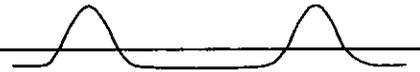
$$P = \frac{\gamma a^2 g}{\sigma} \frac{\cos^2(kx - \sigma t)}{\cosh^2(kd)} \left(\frac{kd}{2} + \frac{\sinh(2kd)}{4} \right) \quad (86)$$

La potencia promedio durante un periodo de la ola, \bar{P} , es

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt \quad (87)$$

Al substituir la ecuación 86 en la 87 se tiene

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \frac{\gamma a^2 g}{\sigma^2 \cosh^2(kd)} \left(\frac{kd}{2} + \frac{\sinh(2kd)}{4} \right) \int_0^T \cos^2(kx - \sigma t) \sigma dt$$



Integrando

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \frac{\gamma a^2 g}{\sigma^2 \cosh^2(kd)} \left(\frac{kg}{2} + \frac{\sinh(2kd)}{4} \right) (\pi) \quad (88)$$

de la ecuación 55

$$\frac{g}{\sigma} = \frac{C}{\tanh(kd)}$$

Así

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \frac{\gamma a^2 g}{\sigma \tanh(kd) \cosh^2(kd)} \frac{\pi}{\cosh^2(kd)} \left(\frac{kd}{2} + \frac{\sinh(2kd)}{4} \right)$$

de modo

$$\bar{P} = \frac{\gamma a^2 C}{\sigma \sinh(2kd)} \left(\frac{kd}{2} + \frac{\sinh(2kd)}{4} \right)$$

o bien

$$\bar{P} = \frac{\gamma a^2 C}{4} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right)$$

finalmente

$$\bar{P} = \frac{\gamma a^2 C}{2} \frac{L}{T} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right) \quad (89)$$

El término $\bar{P} = \frac{\gamma a^2 L}{2}$ corresponde a la energía total en una ola por unidad de cresta

(ecuación 84) y

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right) = n = \frac{C_g}{C} \quad (90)$$

es la razón entre la llamada celeridad de grupo a la celeridad. La 89 puede escribirse

$$\bar{P} = \frac{nE_T}{T}$$

2.1.3 SIGNIFICADO FISICO.

En esta sección se describirán las ecuaciones para cada uno de los elementos de este tipo de oleaje, tratando de indicarse su interpretación física.

A. PERFIL DE LA SUPERFICIE LIBRE.

Propone que la superficie libre del mar sea una cosenoide simétrica, en donde su ecuación es una función del tiempo 't' y de la distancia horizontal 'x', medida a partir del origen de un sistema de referencia fijo, como se observa en la Figura No. 12.

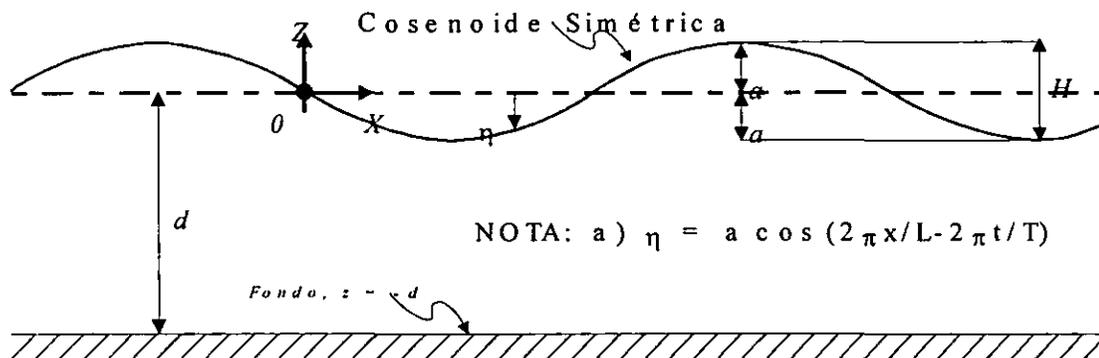
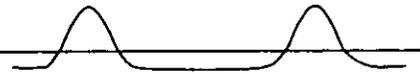


Figura 12 Perfil de la superficie libre de la ola.

La ecuación presenta varias formas, como se observa a continuación,

$$\eta = a \cos\left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{H}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right) \quad (91)$$

o también,



$$\eta = a \cos(kx - \sigma t) = a \cos \theta \quad (92)$$

en las cuales se tiene que:

$k = 2\pi / L$, es conocido como número de la onda.

$\sigma = 2\pi / T$, llamado normalmente frecuencia angular de la onda.

Con esta ecuación 92, se obtienen cada uno de los puntos que forman la cosenoide en el plano, que representa el oleaje simétrico y regular.

B. CELERIDAD.

Algunas de las expresiones equivalentes para esta característica del oleaje son:

$$C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)} = \frac{gT}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \quad (93)$$

$$C = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kd)}$$

Esta celeridad de la ola representa físicamente la velocidad con la cual se propaga toda la forma de la ola. Es igual a la relación entre la longitud de la ola y su respectivo periodo ($C = L/T$).

C. LONGITUD.

De manera muy simple puede obtenerse la relación para la longitud de la ola.

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kd) \quad (94)$$

Representa físicamente la distancia, medida horizontalmente, entre dos crestas consecutivas.

Algo muy importante por señalar es que esta ecuación es implícita, ya que la longitud 'L' se encuentra en ambos miembros de la misma y no se puede despejar directamente.

D. VELOCIDAD DE LAS PARTICULAS.

Derivando parcialmente la función potencial ' ϕ ', mostrada en páginas anteriores, con respecto a 'x', se obtiene la expresión para determinar la velocidad orbital de cualquier partícula por debajo de la superficie libre, en la dirección del avance de la ola,

$$u = \frac{kg a \cosh[k(z+d)]}{\sigma \cosh(kd)} \cos(kx - \sigma t) \quad (95)$$

De manera similar, derivando parcialmente ' ϕ ', ahora con respecto al eje 'z', se obtiene la ecuación para el cálculo de la velocidad orbital de una partícula en dirección vertical,

$$w = \frac{kg a \sinh[k(z+d)]}{\sigma \cosh(kd)} \sin(kx - \sigma t) \quad (96)$$

Físicamente estas magnitudes 'u', 'w', horizontal y vertical, respectivamente, representan las velocidades tangentes a la trayectoria (circular o elíptica) de cualquier partícula localizada por debajo de la superficie libre de la ola de cualquier instante, como se observa en la Figura No. 13.

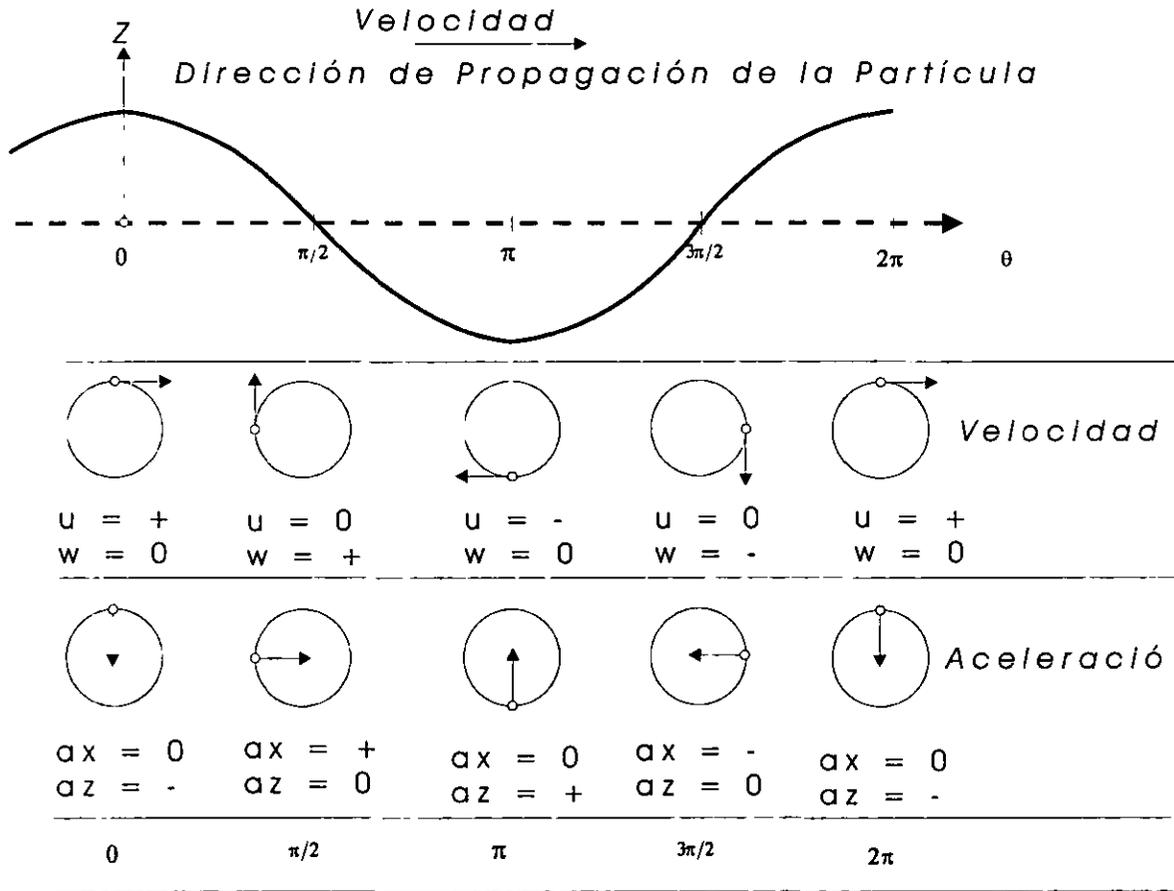
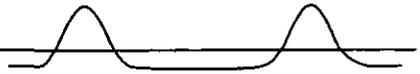


Figura 13 Velocidades y aceleraciones orbitales de las partículas en aguas profundas.

E. VELOCIDAD DE GRUPO.

Un tren de olas se presenta cuando dos o más de ellas, armónicas y de período o longitud similares se suman, dando lugar a un conjunto de ondas tales que sus amplitudes entre olas consecutivas disminuyen y aumentan desde un máximo hasta un mínimo, dando con ello una apariencia de grupos, como se observa en la Figura No. 14.

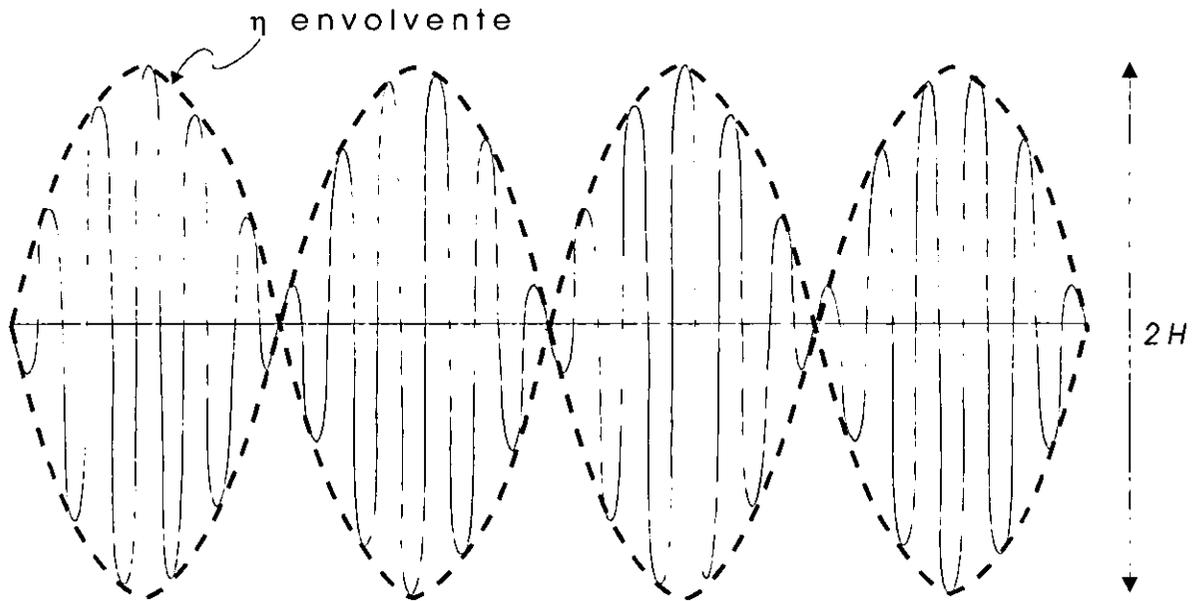


Figura 14 Envolvente de un tren de olas.

Desarrollando la suma de dos olas armónicas de igual amplitud y diferente longitud se obtiene una expresión para determinar la velocidad de grupo de un tren de olas.

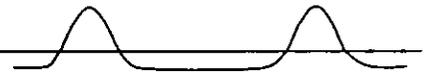
$$C_g = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right) \quad (97)$$

Físicamente la velocidad de grupo es la velocidad con la que se desplaza el centro del grupo de olas, o bien la envolvente del tren de olas que forman el grupo. Esta velocidad es menor o igual que la celeridad de las olas que forman el grupo.

F. ACELERACION DE LAS PARTICULAS.

Si se derivan ahora las ecuaciones 95 y 96 con respecto al tiempo se obtienen las expresiones que permiten calcular las componentes del vector aceleración en el plano 'x-z',

$$a_x = kga \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \sin(kx - \sigma t) \quad (98)$$



$$a_z = -kga \frac{\sinh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \cos(kx - \sigma t) \quad (99)$$

Las cuales representan las aceleraciones horizontal y vertical de cualquier partícula en su trayectoria cerrada, debajo de las olas, (Figura No. 13).

G. DESPLAZAMIENTO DE LAS PARTICULAS.

Partiendo de la relación $dx = u dt$, substituyendo la ecuación 95 e integrando, se obtiene,

$$\varepsilon = -a \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(kx - \sigma t) \quad (100)$$

que representa físicamente el desplazamiento horizontal que sufre una partícula debajo de la superficie libre de las olas, a partir de la posición inicial media en reposo, establecida por el punto de coordenadas (X_0, Z_0) , como se ve en la Figura No. 15.

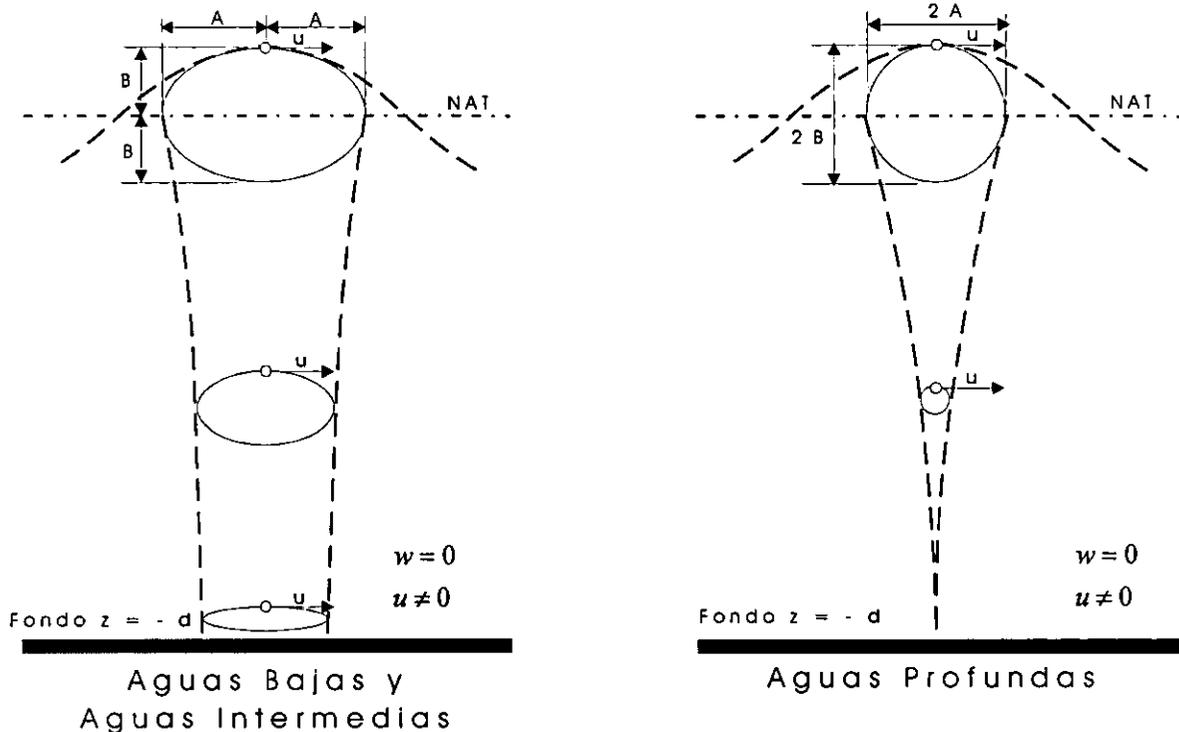


Figura 15 Trayectorias y desplazamientos de las partículas en el oleaje.

Es importante señalar que las trayectorias de las partículas son cerradas y que en aguas profundas son CIRCULARES, mientras que en aguas someras e intermedias son ELIPTICAS (debido a la proximidad del fondo marino), como se nota en la misma Figura No. 15.

Similarmente, para el desplazamiento vertical se parte de la relación $dz = w dt$, sustituyendo la ecuación 96 e integrando,

$$\zeta = a \frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(kx - \sigma t) \quad (101)$$

siendo el desplazamiento ahora en el sentido vertical.

H. PRESION ABAJO DE LA SUPERFICIE.

Considerando la Ecuación de Bernoulli y la del Potencial ' ϕ ', ya comentadas en cuartillas anteriores, se obtiene,

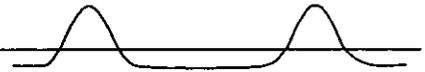
$$P = \gamma \eta \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} - \gamma z \quad (102)$$

con la cual puede calcularse la presión subsuperficial en cualquier partícula, desde la superficie libre (considerada igual a cero) hasta el fondo del mar.

I. ENERGIA TOTAL POR UNIDAD DE CRESTA.

A partir de las definiciones mecánicas de energía potencial y energía cinética, sumándolas e introduciendo las ecuaciones 95 y 96 se deduce que,

$$E = \frac{\gamma a^2}{2} L \quad (103)$$



Esta energía representa la capacidad que tiene el oleaje para efectuar algún tipo de trabajo mecánico y es la suma tanto de su energía potencial como de su energía cinética y está expresada por unidad de longitud de cresta.

J. POTENCIA POR UNIDAD DE CRESTA PROMEDIO.

De acuerdo a la definición mecánica de potencia, substituyendo algunas de las ecuaciones ya comentadas y reduciéndolas, se obtiene que,

$$P_0 = \frac{nE}{T} \quad (104)$$

en la cual 'n' representa la relación existente entre la celeridad de grupo y la celeridad, o sea,

$$n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right] = \frac{C_g}{C} \quad (105)$$

La potencia del oleaje puede interpretarse como el producto de la fuerza que actúa sobre un plano en el fluido por la velocidad del flujo a través de él.

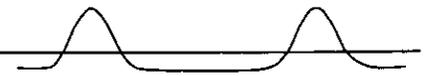
Es necesario aclarar que las trece ecuaciones mostradas anteriormente son válidas para el oleaje a cualquier profundidad y que se conocen como ecuaciones generales.

En el caso de aguas someras, la longitud de la ola es grande comparada con su profundidad, por lo que (kd) es pequeña y las ecuaciones hiperbólicas empleadas se reducen, generando ecuaciones más sencillas.

Por otro lado, en aguas profundas, la longitud de la ola es pequeña comparada con la profundidad del agua y (kd) es grande, reduciéndose así mismo las ecuaciones finales, al reducirse las correspondientes ecuaciones hiperbólicas.

No se anotan las trece ecuaciones derivadas para aguas profundas, ni tampoco las trece respectivas en aguas someras, debido a que en un tema subsecuente se desarrolla el programa de cómputo (P-1), en el cual no son necesarias estas ecuaciones reducidas, ya que se incluyen en las ecuaciones generales.

Con el propósito de poder consultar rápidamente y en un mismo lugar todas las ecuaciones generales, se agrupan en la Tabla No. 1.



MODELOS TEORICOS DE OLEAJE

Tabla No. 1 ECUACIONES DE LA TEORIA LINEAL PARA OLEAJE PROGRESIVO

| Nombre de la Ecuación | Ecuación | No. |
|---|---|-----|
| Perfil de la Superficie Libre | $\eta = a \cos(kx - \sigma t)$ | 1 |
| Celeridad | $C = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kd)}$ | 2 |
| Longitud | $L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kd)$ | 3 |
| Velocidad de Grupo | $Cg = \frac{C}{2} \left[1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right] = nC$ | 4 |
| Velocidad de las Partículas Horizontal | $u = \frac{kg a \cosh[k(z+d)]}{\sigma \cosh(kd)} \cos(kx - \sigma t)$ | 5 |
| Velocidad de las Partículas Vertical | $w = \frac{kg a \sinh[k(z+d)]}{\sigma \cosh(kd)} \sin(kx - \sigma t)$ | 6 |
| Aceleración de las Partículas Horizontal | $a_x = kga \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \sin(kx - \sigma t)$ | 7 |

| | | |
|--|--|----|
| Aceleración de las Partículas Vertical | $a_z = -kga \frac{\sinh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \cos(kx - \sigma t)$ | 8 |
| Desplazamiento de las Partículas Horizontal | $\varepsilon = -a \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(kx - \sigma t)$ | 9 |
| Desplazamiento de las Partículas Vertical | $\zeta = a \frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(kx - \sigma t)$ | 10 |
| Presión Abajo de la Superficie | $P = \gamma \eta \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} - \gamma z$ | 11 |
| Energía Total por Unidad de Cresta | $E = \frac{\gamma a^2}{2} L$ | 12 |
| Potencia Por Unidad de Cresta Promedio | $P_0 = \frac{nE}{T}$ $n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right]$ | 13 |



2.1.4 CASOS TIPO DE PROBLEMAS.

Analizando los problemas prácticos que se pueden derivar de esta teoría se propone agruparlos en los cuatro casos típicos siguientes,

| CASO No. | DATOS | INCOGNITAS |
|----------|---------------------|---------------------------------------|
| 1 | T,d,H, θ ,z. | L,C,Cg,u,w,ax,az,P,E,P ₀ . |
| 2 | H, θ . | T,d,C,L,Cg |
| 3 | T,d. | C,L,Cg. |
| 4 | L,d. | T,C,Cg. |

2.1.5 PROGRAMA DE COMPUTADORA.

Analizando los cuatro casos de problemas tipo de la sección anterior, se decidió elaborar un programa de computadora para el caso 1, ya que es el más representativo y los otros tres casos son de cálculos directos.

DESCRIPCION DEL PROGRAMA (P-1).

Se utilizó lenguaje de programación Turbo-Pascal, versión 6.0 (también para todos los demás programas). Este programa, llamado P-1, requiere que se introduzcan los siguientes datos: período, profundidad, altura y ángulo de fase del oleaje, así como la profundidad 'z' de la partícula por analizar.

En la primera parte del programa se utiliza el método de Newton-Raphson para determinar la longitud de la ola. En el Apéndice A se incluye la descripción de éste método.

En la segunda parte del mismo se calculan las trece características físicas del oleaje, presentándolas de manera ordenada al final.

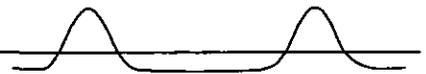
2.1.6 EJEMPLOS.

Ejemplo 1: Calcular las características del oleaje en cinco puntos, aplicando la teoría lineal para olas progresivas.

| Datos | Puntos Suministrados | | | | |
|---------------------------|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| T (s) | 7.2 | 7.2 | 7.2 | 7.2 | 7.2 |
| d (m) | 12.5 | 12.5 | 12.5 | 12.5 | 12.5 |
| H(m) | 3.1 | 3.1 | 3.1 | 3.1 | 3.1 |
| θ (°) | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 |
| z (m) | -2 | -1.9 | -1.8 | -1.7 | -1.6 |
| Variables | Puntos Calculados | | | | |
| L (m) | 66.84 | 66.84 | 66.84 | 66.84 | 66.84 |
| C (m/s) | 9.284 | 9.284 | 9.284 | 9.284 | 9.284 |
| Cg (m/s) | 6.742 | 6.742 | 6.742 | 6.742 | 6.742 |
| η (m) | 0.775 | 0.775 | 0.775 | 0.775 | 0.775 |
| u (m/s) | 0.706 | 0.711 | 0.716 | 0.721 | 0.726 |
| w (m/s) | 0.924 | 0.935 | 0.947 | 0.959 | 0.971 |
| a_x (m/s ²) | 1.066 | 1.074 | 1.082 | 1.090 | 1.098 |
| a_z (m/s ²) | -0.466 | -0.471 | -0.477 | -0.483 | -0.489 |
| ε (m) | -1.400 | -1.410 | -1.420 | -1.431 | -1.441 |
| ζ (m) | 0.611 | 0.619 | 0.627 | 0.634 | 0.642 |
| p (Kg/m ²) | 2742.396 | 2644.504 | 2546.674 | 2448.905 | 2351.198 |
| E (N) | 82544.315 | 82544.315 | 82544.315 | 82544.315 | 82544.315 |
| \bar{P} (J) | 8325.293 | 8325.293 | 8325.293 | 8325.293 | 8325.293 |

Ejemplo 2: Calcular las características del oleaje en cinco puntos, aplicando la teoría lineal para olas progresivas.

| Datos | Puntos Suministrados | | | | |
|--------------|----------------------|--------|--------|--------|--------|
| T (s) | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| d (m) | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| H(m) | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5 |
| θ (°) | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 |
| z (m) | -2 | -1.9 | -1.8 | -1.7 | -1.6 |
| Variables | Puntos Calculados | | | | |
| L (m) | 38.457 | 38.457 | 38.457 | 38.457 | 38.457 |
| C (m/s) | 7.691 | 7.691 | 7.691 | 7.691 | 7.691 |
| Cg (m/s) | 4.126 | 4.126 | 4.126 | 4.126 | 4.126 |
| η (m) | 0.625 | 0.625 | 0.625 | 0.625 | 0.625 |



| | | | | | |
|---------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| u (m/s) | 0.579 | 0.588 | 0.598 | 0.607 | 0.617 |
| w (m/s) | 0.974 | 0.991 | 1.008 | 1.025 | 1.042 |
| a_x (m/s ²) | 1.260 | 1.280 | 1.301 | 1.321 | 1.343 |
| a_z (m/s ²) | -0.707 | -0.719 | -0.731 | -0.743 | -0.756 |
| ε (m) | -0.798 | -0.811 | -0.824 | -0.837 | -0.850 |
| ζ (m) | 0.448 | 0.455 | 0.463 | 0.471 | 0.479 |
| p (Kg/m ²) | 2522.558 | 2427.229 | 2332.026 | 2236.952 | 2142.008 |
| E (N) | 30885.440 | 30885.440 | 30885.440 | 30885.440 | 30885.440 |
| \bar{P} (J) | 3313.676 | 3313.676 | 3313.676 | 3313.676 | 3313.676 |

Se aplicó el programa para varios oleajes con diferentes condiciones en aguas profundas, intermedias y someras, obteniéndose los resultados mostrados en el Apéndice B; también se anexa el listado del programa fuente.

2.2 TEORIA LINEAL PARA OLEAJE ESTACIONARIO.

2.2.1 ASPECTOS GENERALES.

Cuando en una ola las crestas no se mueven horizontalmente y presentan solamente movimiento vertical, cambiando periódicamente, formándose y desapareciendo, se le llama ola estacionaria.

La generación de este oleaje se presenta cuando se suman dos olas progresivas de igual amplitud y longitud que viajan en sentidos opuestos, en la misma dirección, con igual celeridad, como puede observarse en la Figura No. 16.

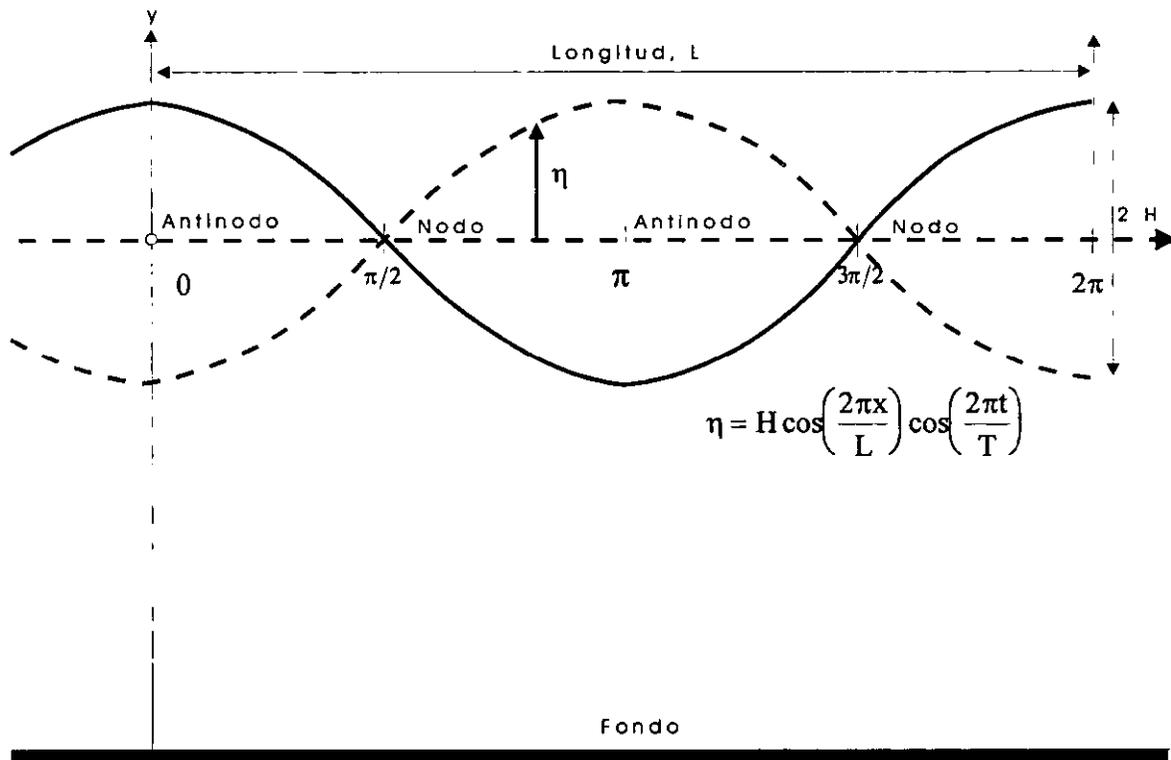


Figura 16 Oleaje estacionario.

Algunos ejemplos de olas estacionarias en la naturaleza son las clapotis, que se forman cuando una ola progresiva choca contra una estructura vertical e impermeable sin disipar energía; también en aguas bajas en lagos o en fondeaderos de puertos se presenta oleaje estacionario.

2.2.2 MODELO MATEMATICO.

Para oleaje estacionario de pequeña amplitud el modelo matemático es similar al descrito para el oleaje progresivo, siendo necesario obtener el respectivo potencial ' ϕ '; a partir de ello se obtienen las ecuaciones mostradas en la Tabla No. 2, válidas para oleaje en aguas intermedias.



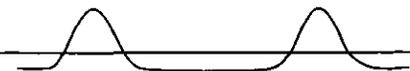
2.2.3 SIGNIFICADO FISICO.

Es idéntico al ya comentado para olas progresivas en cada característica física, a excepción de la velocidad de grupo (C_g) y de la potencia por unidad de cresta promedio (P_0), que no están definidos para este tipo de oleaje.

MODELOS TEORICOS DE OLAJE

Tabla No. 2 ECUACIONES DE LA TEORIA LINEAL PARA OLAJE ESTACIONARIO

| Nombre de la Ecuación | Ecuación | No. |
|--|---|-----|
| Perfil de la Superficie Libre | $\eta = -a \cos(kx) \cos(\sigma t)$ | 14 |
| Celeridad | $C = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kd)}$ | |
| Longitud | $L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kd)$ | |
| Velocidad de las Partículas Horizontal | $u = -a\sigma \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(kx) \sin(\sigma t)$ | 15 |
| Velocidad de las Partículas Vertical | $w = a\sigma \frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(kx) \sin(\sigma t)$ | 16 |
| Aceleración de las Partículas Horizontal | $a_x = a\sigma^2 \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(kx) \cos(\sigma t)$ | 17 |
| Aceleración de las Partículas Vertical | $a_z = a\sigma^2 \frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(kx) \cos(\sigma t)$ | 18 |



| | | |
|--|--|----|
| Desplazamiento de las Partículas Horizontal | $\epsilon = \frac{a \cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(kx) \cos(\sigma t)$ | 19 |
| Desplazamiento de las Partículas Vertical | $\zeta = \frac{-a \sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(kx) \cos(\sigma t)$ | 20 |
| Presión Abajo de la Superficie | $P = -\gamma z - \frac{\gamma a \cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \cos(kx) \cos(\sigma t)$ | 21 |
| Energía Total por Unidad de Cresta | $E = \frac{\gamma}{4} a^2 L$ | 22 |

2.2.4 PROGRAMA DE COMPUTADORA.

Los problemas tipo son similares a los del oleaje progresivo, por lo que se decidió elaborar un programa de computadora similar al del caso 1, con la obviedad del cálculo de la celeridad de grupo y de la potencia por unidad de cresta promedio, llamándosele programa (P-2).

DESCRIPCION DEL PROGRAMA.

Es un programa que presenta las mismas características de las mencionadas para el programa (P-1), con una primera parte para el cálculo de la longitud de la ola aplicando el método de Newton-Raphson y otra segunda parte para el cálculo de las otras diez características físicas de las olas estacionarias.

También es necesario incluir en los datos la posición de la partícula por analizar en sus coordenadas (x,t), es decir, el tiempo y la distancia horizontal desde el origen de un sistema de referencia fijo; por lo que el programa solicita estos elementos como datos.

2.2.5 EJEMPLOS.

Ejemplo 1: Calcular las características del oleaje en cinco puntos, aplicando la teoría lineal para olas estacionarias.

| Datos | Puntos Suministrados | | | | |
|---------------------------|----------------------|--------|--------|--------|--------|
| T (s) | 7.2 | 7.2 | 7.2 | 7.2 | 7.2 |
| d (m) | 12.5 | 12.5 | 12.5 | 12.5 | 12.5 |
| H(m) | 3.1 | 3.1 | 3.1 | 3.1 | 3.1 |
| θ (°) | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 |
| z (m) | -2 | -1.8 | -1.6 | -1.4 | -1.2 |
| Variables | Puntos Calculados | | | | |
| L (m) | 69.932 | 69.932 | 69.932 | 69.932 | 69.932 |
| C (m/s) | 8.997 | 8.997 | 8.997 | 8.997 | 8.997 |
| η (m) | -1.069 | -1.069 | -1.069 | -1.069 | -1.069 |
| u (m/s) | -0.999 | -1.016 | -1.033 | -1.051 | -1.070 |
| w (m/s) | 0.800 | 0.821 | 0.842 | 0.864 | 0.886 |
| a_x (m/s ²) | 0.660 | 0.671 | 0.682 | 0.694 | 0.706 |
| a_z (m/s ²) | 1.092 | 1.121 | 1.150 | 1.180 | 1.210 |



| | | | | | |
|-----------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| ε (m) | 0.502 | 0.511 | 0.520 | 0.529 | 0.538 |
| ζ (m) | -0.832 | -0.853 | -0.876 | -0.898 | -0.922 |
| ρ (Kg/m ²) | 1133.188 | 911.916 | 690.233 | 468.130 | 245.602 |
| E (N) | 43179.226 | 43179.226 | 43179.226 | 43179.226 | 43179.226 |

Ejemplo 2: Calcular las características del oleaje en cinco puntos, aplicando la teoría lineal para olas estacionarias.

| Datos | Puntos Suministrados | | | | |
|-----------------------------|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| T (s) | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| d (m) | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| H(m) | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5 |
| θ (°) | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 |
| z (m) | -2 | -1.9 | -1.8 | -1.7 | -1.6 |
| Variables | Puntos Calculados | | | | |
| L (m) | 38.457 | 38.457 | 38.457 | 38.457 | 38.457 |
| C (m/s) | 7.691 | 7.691 | 7.691 | 7.691 | 7.691 |
| η (m) | 0.511 | 0.511 | 0.511 | 0.511 | 0.511 |
| u (m/s) | -0.472 | -0.488 | -0.503 | -0.520 | -0.537 |
| w (m/s) | 0.459 | 0.475 | 0.491 | 0.508 | 0.525 |
| a_x (m/s ²) | 0.202 | 0.209 | 0.215 | 0.222 | 0.229 |
| a_z (m/s ²) | 0.232 | 0.240 | 0.248 | 0.256 | 0.265 |
| ε (m) | 0.319 | 0.329 | 0.340 | 0.351 | 0.362 |
| ζ (m) | -0.366 | -0.379 | -0.392 | -0.405 | -0.419 |
| ρ (Kg/m ²) | 1674.410 | 1456.489 | 1238.142 | 1019.364 | 800.137 |
| E (N) | 15442.720 | 15442.720 | 15442.720 | 15442.720 | 15442.720 |

En el Apéndice C se muestra el listado del programa fuente.

CAPITULO 3. TEORIA DE SEGUNDO ORDEN DE STOKES.

Algunas simplificaciones efectuadas en la teoría lineal, reducen la precisión con la que se pretende representar al oleaje con modelos matemáticos; se han desarrollado otras teorías cuyo objetivo es reducir esta diferencia entre la realidad y su representación matemática, las cuales pueden recibir el nombre de teorías de orden superior.

Un conjunto de este tipo de teorías, aplicable a oleaje de amplitud finita, reciben el nombre genérico de Teorías de Stokes, que van desde el segundo hasta el quinto orden de aproximación.

3.1 TEORIA DE SEGUNDO ORDEN DE STOKES PARA OLEAJE PROGRESIVO.

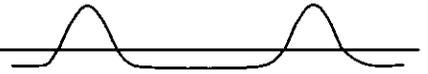
3.1.1 ASPECTOS GENERALES.

Cuando se presenta oleaje de amplitud finita, es decir, si la amplitud de las olas es grande en comparación de su longitud, deben considerarse en las ecuaciones fundamentales los términos no lineales.

Stokes, en 1880, estudió este tipo de oleaje, el cual tiene varios grados de aproximación, dependiendo de la extensión de los términos matemáticos introducidos en el desarrollo de las expresiones.

Las ecuaciones obtenidas por esta teoría presentan muchos términos, coeficientes, etc., por lo que diferentes investigadores no han llegado siempre al mismo resultado.

La demostración de la convergencia de las series empleado durante la obtención de las ecuaciones, fue realizada por Levi-Civita, en 1925, para aguas de profundidad infinita y por Struik, en 1926, para oleaje en aguas de profundidad finita, con algunas correcciones efectuadas por Wolf, en 1944 y por Hunt, en 1953.



3.1.2 MODELO MATEMATICO.

El modelo matemático utilizado por Stokes y por muchos otros investigadores posteriormente, consistió en extender el potencial de velocidad cerca del nivel de aguas tranquilas, obteniendo una condición de superficie no lineal para el potencial en el plano de dicho nivel, la cual consta de series infinitas que contienen derivadas parciales del potencial.

La deducción de las expresiones parte de las tres ecuaciones de Navier-Stokes y de la ecuación de Bernoulli (ya indicada en la Teoría Lineal), con la adición del término de carga de la velocidad, que en esta teoría si se considera.

Combinando las ecuaciones anteriores, con la condición indicada, puede obtenerse la relación:

$$g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2 \hat{\nabla} \phi \cdot \hat{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \hat{\nabla} \left(\hat{\nabla} \phi \cdot \hat{\nabla} \phi \right) = 0 \quad (106)$$

Con el propósito de obtener un potencial ' ϕ ' que satisfaga esta expresión, se utilizan desarrollos en Serie de Taylor, hasta que el potencial ' ϕ ' de orden superior sea igual al potencial original más una serie de términos de corrección.

Bajo este esquema deductivo se han obtenido las ecuaciones que permiten determinar las características físicas del oleaje de amplitud finita para oleaje progresivo por la teoría de segunda aproximación de Stokes, las que se agrupan en la Tabla No. 3.

3.1.3 SIGNIFICADO FISICO.

La interpretación física de los elementos del oleaje es exactamente la misma ya indicada en la teoría lineal, con las consideraciones siguientes; las ecuaciones para determinar la longitud y la celeridad de la ola son exactamente las mismas y, por otro lado, no están definidas la velocidad de grupo, la energía potencial por unidad de cresta y la potencia por unidad de cresta promedio.

Un aspecto fundamental de esta Teoría de Stokes, radica en que las olas obtenidas de ella, muestran perfiles más angostos en las crestas y más anchos en los valles, que los obtenidos con la

teoría lineal, lo cual se acerca mas al comportamiento real del oleaje en la Naturaleza. En la Figura No. 17 se observa la comparación de los perfiles dados por las dos teorías.

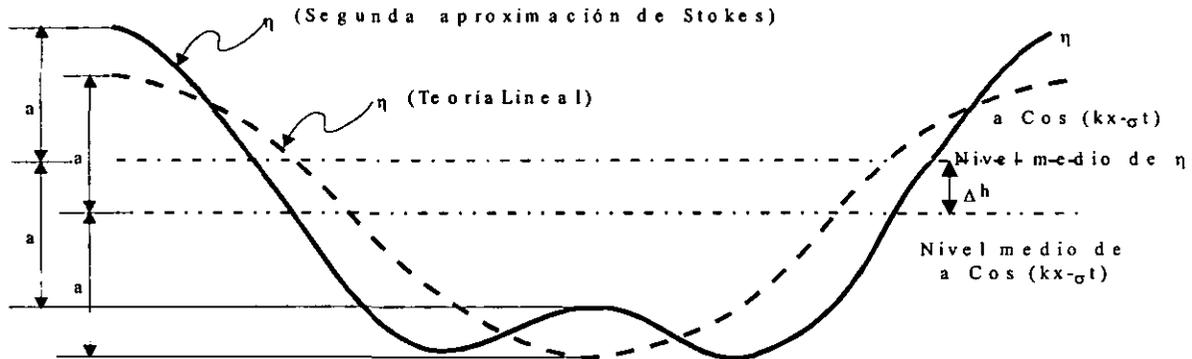


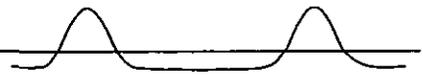
Figura 17. Comparación de los perfiles de la onda entre la teoría lineal y la teoría de segundo orden de Stokes.

En la Figura No. 17 puede observarse que el nivel medio no coincide con el nivel de aguas tranquilas (como ocurre para la teoría lineal); esta diferencia de elevaciones puede obtenerse como:

$$\Delta h = \frac{\pi H^2}{4L} \coth \frac{2\pi d}{L} \quad (107)$$

Otro aspecto a destacar en esta Teoría de Stokes es que las trayectorias de las partículas sobre un ciclo completo no son curvas cerradas, sino que representan un desplazamiento del punto inicial al punto final, como puede verse en la Figura No. 18, que corresponde a una ola con altura de 10.7m, período de 12s y profundidad de 25.9m; esta diferencia de coordenadas entre los puntos inicial y final en la trayectoria de la partícula se debe a la velocidad de transporte de masa (TM).

$$\bar{U}(z) = \left(\frac{\pi H}{L} \right)^2 \frac{C \cosh[2k(z+d)]}{2 \sinh^2(kd)} \quad (108)$$



CRESTA DE LA OLA

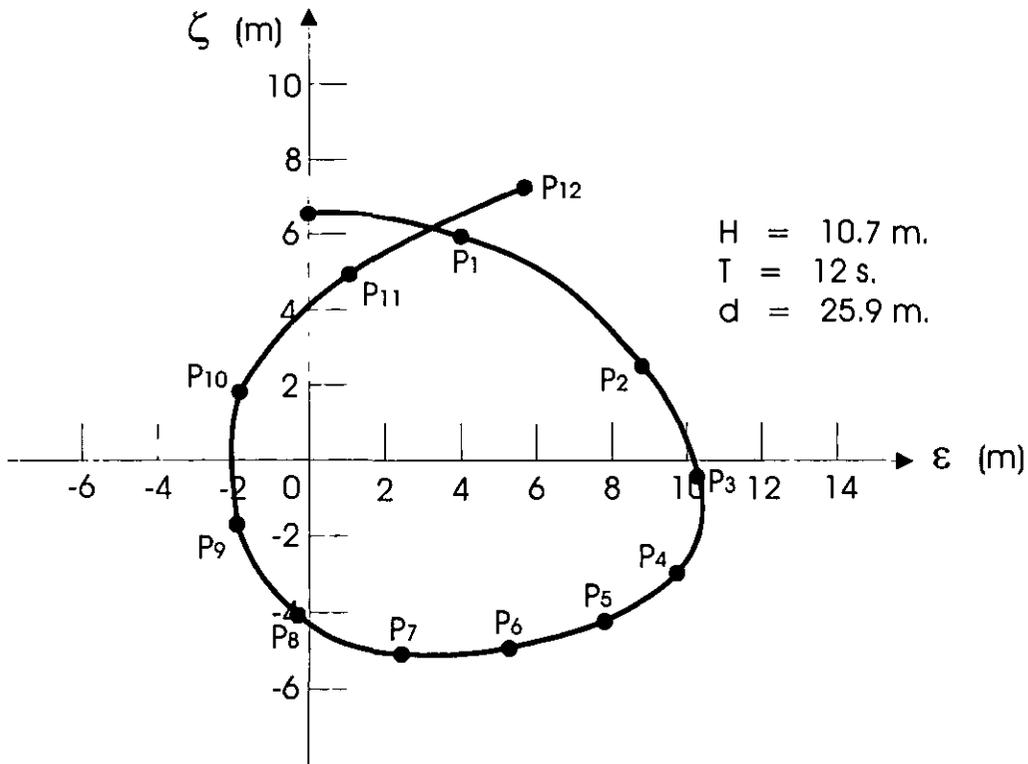


Figura 18 Trayectoria de una partícula de acuerdo a la teoría de segundo orden de Stokes.

Es común llamar al desplazamiento horizontal neto obtenido en un ciclo completo del oleaje dividido entre su período, velocidad de transporte de masa (TM).

MODELOS TEORICOS DE OLAJE

Tabla No. 3 ECUACIONES DE LA TEORIA DE SEGUNDO ORDEN DE STOKES

| Nombre de la Ecuación | Ecuación | No. |
|--|--|-----|
| Perfil de la Superficie Libre | $\eta = a \cos(kx - \sigma t) + \frac{ka^2 \cosh[kd(2 + \cosh 2kd)]}{4 \sinh^3(kd)} \cos 2(kx - \sigma t)$ | 23 |
| Celeridad | $C = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kd)}$ | |
| Longitud | $L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kd)$ | |
| Velocidad de las Partículas Horizontal | $u = \sigma a \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(kx - \sigma t) + \frac{3}{4} k \sigma a^2 \frac{\cosh[2k(z+d)]}{\sinh^4(kd)} \cos 2(kx - \sigma t)$ | 24 |
| Velocidad de las Partículas Vertical | $w = \sigma a \frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(kx - \sigma t) + \frac{3}{4} k \sigma a^2 \frac{\sinh[2k(z+d)]}{\sinh^4(kd)} \sin 2(kx - \sigma t)$ | 25 |
| Aceleración de las Partículas Horizontal | $a_x = a \sigma^2 \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(kx - \sigma t) + \frac{3}{2} k \sigma^2 a^2 \frac{\cosh[2k(z+d)]}{\sinh^4(kd)} \cos 2(kx - \sigma t)$ | 26 |



| | | |
|--|---|----|
| Aceleración de las Partículas Vertical | $a_z = -a\sigma^2 \frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(kx - \sigma t) - \frac{3}{2} k\sigma^2 a^2 \frac{\sinh[2k(z+d)]}{\sinh^4(kd)} \cos 2(kx - \sigma t)$ | 27 |
| Desplazamiento de las Partículas Horizontal | $\varepsilon = -a \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(kx - \sigma t) + \frac{ka^2}{4\sinh^2(kd)} \left\{ 1 - \frac{3 \cosh[2k(z+d)]}{2 \sinh^2(kd)} \right\} [\sin 2(kx - \sigma t)]$ $+ \frac{ka^2 \sigma t \cosh[2k(z+d)]}{2 \sinh^2(kd)}$ | 28 |
| Desplazamiento de las Partículas Vertical | $\zeta = a \frac{\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(kx - \sigma t) + \frac{3}{8} ka^2 \frac{\sinh[2k(z+d)]}{\sinh^4(kd)} \cos 2(kx - \sigma t) + \frac{ka^2 \sinh[2k(z+d)]}{4 \sinh^2(kd)}$ | 29 |
| Presión Abajo de la Superficie | $P = -\gamma z + a\gamma \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh(kd)} \cos(kx - \sigma t) + \frac{3}{4} ka^2 \gamma \frac{\tanh(kd)}{\sinh^2(kd)} \left\{ \frac{\cosh[2k(z+d)]}{\sinh^2(kd)} - \frac{1}{3} \right\} \cos 2(kx - \sigma t)$ $- \frac{ka^2 \gamma \tanh(kd)}{4 \sinh^2(kd)} \left\{ \cosh[2k(z+d)] \right\}$ | 30 |
| Transporte de Masa | $TM = \frac{k^2 a^2 C \cosh[2k(z+d)]}{2 \sinh^2(kd)}$ | 31 |
| Potencial de Velocidad | $\phi = aC \frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(kx - \sigma t) + \frac{3\pi a^{2C}}{4L} \frac{\cosh[2k(z+d)]}{\sinh^4(kd)} \sin 2(kx - \sigma t)$ | 32 |

3.1.4 PROGRAMA DE COMPUTADORA.

Como puede observarse en la Tabla No. 3, las ecuaciones para teoría son muy extensas, por lo que el uso del programa (P-3) ahorra una considerable cantidad de tiempo en la determinación de las características físicas de las olas de amplitud finita y permite hacer un número muy grande de comparaciones entre esta teoría, la teoría lineal y algunas otras que se manejarán más adelante.

Es conveniente mencionar que no se calculan la velocidad de grupo, la energía total por unidad de cresta y la potencia por unidad de cresta promedio, ya que no están definidas; sin embargo, se indica la determinación del transporte de masa TM.

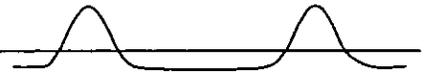
DESCRIPCION DEL PROGRAMA (P-3).

Al analizar los distintos tipos de problemas a presentarse prácticamente, se seleccionó como problema tipo más importante, aquel en el que determinan todas las características físicas, en función del período, profundidad y altura de la ola, así como profundidad de la partícula, ángulo de fase y tiempo de desplazamiento.

En este programa se requieren los datos indicados líneas arriba, con lo cual se determina primero la longitud de la ola, aplicando el método de Newton-Raphson. Posteriormente el programa calcula todas las diez características restantes mostradas en la Tabla No. 3 anexa.

El programa permite analizar de manera simultanea hasta 20 condiciones de oleaje, pudiendo variar alguno o todos los datos.

La hoja de resultados del programa muestra primero los datos introducidos y después las características físicas determinadas.



3.1.5 EJEMPLOS.

Ejemplo 1: Calcular las características del oleaje en cinco puntos, aplicando la teoría de segundo orden de Stokes para olas progresivas.

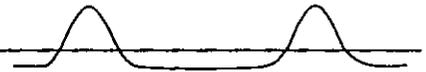
| Datos | Puntos Suministrados | | | | |
|---------------------------|----------------------|----------|----------|----------|----------|
| T (s) | 7.2 | 7.2 | 7.2 | 7.2 | 7.2 |
| d (m) | 12.5 | 12.5 | 12.5 | 12.5 | 12.5 |
| H(m) | 3.1 | 3.1 | 3.1 | 3.1 | 3.1 |
| θ (°) | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 |
| z (m) | -2 | -1.8 | -1.6 | -1.4 | -1.2 |
| Variables | Puntos Calculados | | | | |
| L (m) | 66.844 | 66.844 | 66.844 | 66.844 | 66.844 |
| C (m/s) | 9.284 | 9.284 | 9.284 | 9.284 | 9.284 |
| η (m) | -22.807 | -22.807 | -22.807 | -22.807 | -22.807 |
| u (m/s) | 0.868 | 0.879 | 0.890 | 0.902 | 0.914 |
| w (m/s) | 1.311 | 1.346 | 1.381 | 1.416 | 1.452 |
| a_x (m/s ²) | 2.017 | 2.050 | 2.084 | 2.119 | 1.155 |
| a_z (m/s ²) | -0.704 | -0.720 | -0.736 | -0.753 | -0.769 |
| ε (m) | -1.301 | -1.319 | -1.336 | -1.354 | -1.373 |
| ζ (m) | 0.672 | 0.689 | 0.707 | 0.726 | 0.744 |
| p (Kg/m ²) | 2614.258 | 2413.397 | 2212.577 | 2011.796 | 1811.648 |
| TM (m/s) | 0.169 | 0.175 | 0.181 | 0.188 | 0.195 |

Ejemplo 2: Calcular las características del oleaje en cinco puntos, aplicando la teoría de segundo orden de Stokes para olas progresivas.

| Datos | Puntos Suministrados | | | | |
|--------------|----------------------|--------|--------|--------|--------|
| T (s) | 9 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| d (m) | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| H(m) | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5 |
| θ (°) | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 |
| z (m) | -2 | -1.9 | -1.8 | -1.7 | -1.6 |
| Variables | Puntos Calculados | | | | |
| L (m) | 95.572 | 95.572 | 95.572 | 95.572 | 95.572 |
| C (m/s) | 10.619 | 10.619 | 10.619 | 10.619 | 10.619 |

| | | | | | |
|---------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| η (m) | -0.488 | -0.488 | -0.488 | -0.488 | -0.488 |
| u (m/s) | 1.034 | 1.042 | 1.051 | 1.061 | 1.070 |
| w (m/s) | 1.364 | 1.390 | 1.417 | 1.444 | 1.472 |
| a_x (m/s ²) | 2.776 | 2.803 | 2.831 | 2.860 | 2.888 |
| a_z (m/s ²) | -1.013 | -1.032 | -1.051 | -1.070 | -1.089 |
| ε (m) | -1.278 | -1.289 | -1.301 | -1.314 | -1.326 |
| ζ (m) | 0.544 | 0.554 | 0.565 | 0.576 | 0.587 |
| p (Kg/m ²) | 2556.624 | 2354.130 | 2151.673 | 1949.252 | 1746.868 |
| TM (m/s) | 0.077 | 0.079 | 0.081 | 0.083 | 0.085 |

En el apéndice D se muestra el listado del programa fuente.



CAPITULO 4. TEORIA DE TERCER ORDEN DE STOKES.

4.1 TEORIA DE TERCER ORDEN DE STOKES PARA OLEAJE PROGRESIVO.

4.1.1 ASPECTOS GENERALES.

Stokes extendió sus trabajos, considerando términos de tercer orden en las series utilizadas; en 1959, Skjelbreia retomó estos trabajos dándoles una presentación distinta, que es lo que se presenta en los siguientes apartados.

4.1.2 MODELO MATEMATICO.

Es exactamente el mismo comentado en el inciso 3.1.2 correspondiente a la teoría de segundo orden de Stokes para oleaje progresivo, con la diferencia de tomar en cuenta términos de orden 3 en las expresiones obtenidas.

En la Tabla No. 4 se muestran las ecuaciones para determinar las características físicas del oleaje progresivo propuestas por la teoría de tercer orden de Stokes.

Actualmente para aplicar estas expresiones se emplean las tablas o gráficas propuestas por Skjelbreia en 1958.

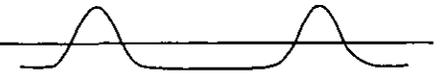
4.1.3 SIGNIFICADO FISICO.

El significado físico de los elementos del oleaje en esta teoría es el mismo ya mencionado en la teoría lineal; se presenta la Tabla No. 4 mostrándolos.

MODELOS TEORICOS DE OLAJE

Tabla No. 4 ECUACIONES DE LA TEORIA DE TERCER ORDEN DE STOKES

| Nombre de la Ecuación | Ecuación | No. |
|--------------------------------------|--|-----|
| Perfil de la Superficie Libre | $\eta = \frac{1}{2}a \cos(kx - \sigma t) + \frac{\pi a^2}{L} f_2\left(\frac{d}{L}\right) \cos 2(kx - \sigma t) + \frac{\pi^2 a^3}{L^2} f_3\left(\frac{d}{L}\right) \cos 3(kx - \sigma t)$ <p>donde:</p> $f_2\left(\frac{d}{L}\right) = \frac{\left[2 + \cosh\left(\frac{4\pi d}{L}\right)\right] \cosh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}{2 \operatorname{senh}^3\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$ $f_3\left(\frac{d}{L}\right) = \frac{3 \left[1 + 8 \cosh^6\left(\frac{2\pi d}{L}\right)\right]}{16 \left[\operatorname{senh}^6\left(\frac{2\pi d}{L}\right)\right]}$ | 33 |
| Celeridad | $C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \left[1 + \left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 \frac{14 + 4 \cosh^2\left(\frac{4\pi d}{L}\right)}{16 \operatorname{senh}^4\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}\right]}$ | 34 |
| Longitud | $L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \left[1 + \left(\frac{2\pi a}{L}\right)^2 \frac{14 + 4 \cosh^2\left(\frac{4\pi d}{L}\right)}{16 \operatorname{senh}^4\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}\right]$ | 35 |



| | | |
|---|--|----|
| Velocidad de las Partículas Horizontal | $u = C \left[F_1 \cosh \left[\frac{2\pi}{L}(z+d) \right] \cos(kx - \sigma t) + F_2 \cosh \left[\frac{4\pi}{L}(z+d) \right] \cos 2(kx - \sigma t) + F_3 \cosh \left[\frac{6\pi}{L}(z+d) \right] \cos 3(kx - \sigma t) \right]$ <p>donde:</p> $F_1 = \frac{2\pi a}{L} \frac{1}{\sinh \left(\frac{2\pi d}{L} \right)} - \left(\frac{2\pi a}{L} \right)^2 \frac{\left[1 + 5 \cosh^2 \left(\frac{2\pi d}{L} \right) \right] \cosh^2 \left(\frac{2\pi d}{L} \right)}{8 \sinh^5 \left(\frac{2\pi d}{L} \right)}$ $F_2 = \frac{3 \left(\frac{2\pi a}{L} \right)^2}{4} \frac{1}{\sinh^4 \left(\frac{2\pi d}{L} \right)}$ $F_3 = \frac{3 \left(\frac{2\pi a}{L} \right)^3}{64} \left[\frac{11 - 2 \cosh \left(\frac{4\pi d}{L} \right)}{\sinh^7 \left(\frac{2\pi d}{L} \right)} \right]$ | 36 |
| Velocidad de las Partículas Vertical | $w = C \left\{ \begin{aligned} &F_1 \sinh \left[\frac{2\pi}{L}(z+d) \right] \sin(kx - \sigma t) + F_2 \sinh \left[\frac{4\pi}{L}(z+d) \right] \sin 2(kx - \sigma t) \\ &+ F_3 \sinh \left[\frac{6\pi}{L}(z+d) \right] \sin 3(kx - \sigma t) \end{aligned} \right\}$ | 37 |

| | | |
|--|--|----|
| Aceleración de las Partículas Horizontal | $a_x = \frac{2\pi C}{T} F_1 \cosh\left[\frac{2\pi}{L}(z+d)\right] \sin(kx - \sigma t) + \frac{4\pi C}{T} F_2 \cosh\left[\frac{4\pi}{L}(z+d)\right] \sin 2(kx - \sigma t) + \frac{6\pi C}{T} F_3 \cosh\left[\frac{6\pi}{L}(z+d)\right] \sin 3(kx - \sigma t)$ | 38 |
| Aceleración de las Partículas Vertical | $a_z = -\frac{2\pi C}{T} F_1 \sinh\left[\frac{2\pi}{L}(z+d)\right] \sin(kx - \sigma t) - \frac{4\pi C}{T} F_2 \sinh\left[\frac{4\pi}{L}(z+d)\right] \sin 2(kx - \sigma t) - \frac{6\pi C}{T} F_3 \sinh\left[\frac{6\pi}{L}(z+d)\right] \sin 3(kx - \sigma t)$ | 39 |
| Desplazamiento de las Partículas Horizontal | $\varepsilon = -\frac{L}{2\pi} \left[F_1 \left(1 - \frac{F_1^2}{8}\right) \cosh\left[\frac{2\pi}{L}(z+d)\right] + \frac{F_1}{8} (3F_1^3 + 10F_2) \cosh\left[\frac{6\pi}{L}(z+d)\right] \right] \sin(kx - \sigma t) - \frac{L}{4\pi} \left[-\frac{1}{2} F_1^2 + F_2 \cosh\left[\frac{4\pi}{L}(z+d)\right] \right] \sin 2(kx - \sigma t) - \frac{L}{6\pi} \left[\frac{1}{4} F_1 (F_1^2 - 5F_2) \cosh\left[\frac{2\pi}{L}(z+d)\right] \right] \sin 3(kx - \sigma t) + \frac{Ct}{2} F_1^2 \left[\cosh\left[\frac{4\pi}{L}(z+d)\right] - F_1 \cosh\left[\frac{2\pi}{L}(z+d)\right] \cosh\left[\frac{4\pi}{L}(z+d)\right] \cos(kx - \sigma t) \right]$ | 40 |
| Desplazamiento de las Partículas Vertical | $\zeta = \frac{L}{2\pi} \left[F \left(1 - \frac{3}{8} F_1^2\right) \sinh\left[\frac{2\pi}{L}(z+d)\right] + \frac{F_1}{8} (F_1^2 + 6F_2) \sinh\left[\frac{6\pi}{L}(z+d)\right] \right] \cos(kx - \sigma t) + \frac{L}{4\pi} F_2 \sinh\left[\frac{4\pi}{L}(z+d)\right] \cos 2(kx - \sigma t) + \frac{L}{6\pi} \left[-\frac{3}{4} F_1 F_2 \sinh\left[\frac{2\pi}{L}(z+d)\right] + F_3 \sinh\left[\frac{6\pi}{L}(z+d)\right] \right] \cos 3(kx - \sigma t) - \frac{Ct}{2} F_1^3 \left[\sinh\left[\frac{2\pi}{L}(z+d)\right] \cosh\left[\frac{4\pi}{L}(z+d)\right] \sin(kx - \sigma t) \right]$ | 41 |



Algunas precisiones relativas a esta teoría son las siguientes:

a. No están definidas la presión, la velocidad de grupo, la energía total por unidad de cresta y la potencia por unidad de cresta promedio.

b. Como se puede observar en la Tabla No. 4 las ecuaciones presentan un desarrollo muy amplio, con incremento de hasta tres términos con respecto a las de la teoría de segundo orden de Stokes.

4.1.4 PROGRAMA DE COMPUTADORA.

Se elaboró el programa (P-4) utilizando lenguaje de programación Turbo Pascal con el propósito de calcular rápidamente las 9 características mostradas en los resultados anexos utilizando las ecuaciones propuestas por la teoría de tercer orden de Stokes, sin el empleo de las tablas y gráficas de Skjelbreia.

Es conveniente aclarar que no se calculan la presión, la velocidad de grupo, la energía total por unidad de cresta y la potencia por unidad de cresta promedio al no estar definidas para este caso.

DESCRIPCION DEL PROGRAMA (P-4).

Este programa requiere que se introduzcan los datos: período de la ola, profundidad de la ola, altura de la ola; profundidad, distancia horizontal y tiempo de la partícula en análisis y, peso específico del agua de mar.

Posteriormente el programa aplica el método numérico de Newton Raphson para determinar la longitud de la ola, por lo que al inicio se solicita introducir un valor aproximado de la longitud de onda.

Enseguida el programa permite calcular las otras ocho características del oleaje a través de la aplicación de las expresiones mostradas en la Tabla No. 4.

Se aclara que el programa permite realizar el proceso descrito de manera simultánea para 20 partículas de agua en análisis.

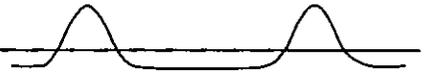
4.1.5 EJEMPLOS.

Ejemplo 1: Calcular las características del oleaje en cinco puntos, aplicando la teoría de tercer orden de Stokes para olas progresivas.

| Datos | Puntos Suministrados | | | | |
|---------------------------|----------------------|--------|--------|--------|--------|
| T (s) | 6.8 | 6.8 | 6.8 | 6.8 | 6.8 |
| d (m) | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| H(m) | 2.25 | 2.25 | 2.25 | 2.25 | 2.25 |
| θ (°) | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 |
| z (m) | -2 | -1.8 | -1.6 | -1.4 | -1.2 |
| Variables | Puntos Calculados | | | | |
| L (m) | 61.375 | 61.375 | 61.375 | 61.375 | 61.375 |
| C (m/s) | 8.147 | 8.147 | 8.147 | 8.147 | 8.147 |
| η (m) | -0.472 | -0.472 | -0.472 | -0.472 | -0.472 |
| u (m/s) | -0.984 | -1.003 | -1.023 | -1.044 | -1.065 |
| w (m/s) | 0.752 | 0.777 | 0.802 | 0.828 | 0.855 |
| a_x (m/s ²) | 0.191 | 0.195 | 0.199 | 0.202 | 0.207 |
| a_z (m/s ²) | 0.405 | 0.419 | 0.432 | 0.446 | 0.461 |
| ε (m) | 0.163 | 0.166 | 0.169 | 0.173 | 0.176 |
| ζ (m) | -0.346 | -0.357 | -0.369 | -0.381 | -0.393 |

Ejemplo 2: Calcular las características del oleaje en cinco puntos, aplicando la teoría de tercer orden de Stokes para olas progresivas.

| Datos | Puntos Suministrados | | | | |
|--------------|----------------------|--------|--------|--------|--------|
| T (s) | 5.4 | 5.4 | 5.4 | 5.4 | 5.4 |
| d (m) | 8.5 | 8.5 | 8.5 | 8.5 | 8.5 |
| H(m) | 2.7 | 2.7 | 2.7 | 2.7 | 2.7 |
| θ (°) | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 |
| z (m) | -2 | -1.9 | -1.8 | -1.7 | -1.6 |
| Variables | Puntos Calculados | | | | |
| L (m) | 35.911 | 35.911 | 35.911 | 35.911 | 35.911 |
| C (m/s) | 7.847 | 7.847 | 7.847 | 7.847 | 7.847 |
| η (m) | -0.147 | -0.147 | -0.147 | -0.147 | -0.147 |



| | | | | | |
|---------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| u (m/s) | -1.143 | -1.163 | -1.183 | -1.204 | -1.226 |
| w (m/s) | 0.770 | 0.799 | 0.828 | 0.858 | 0.889 |
| a_x (m/s ²) | 0.041 | 0.042 | 0.043 | 0.044 | 0.044 |
| a_z (m/s ²) | 0.077 | 0.080 | 0.083 | 0.086 | 0.089 |
| ε (m) | 0.056 | 0.057 | 0.058 | 0.059 | 0.060 |
| ζ (m) | -0.105 | -0.109 | -0.113 | -0.117 | -0.121 |

En el Apéndice E se muestra el listado del programa fuente (P-4).

CAPITULO 5. TEORIA CNOIDAL.

5.1 TEORIA CNOIDAL PARA OLEAJE PROGRESIVO.

5.1.1 ASPECTOS GENERALES.

Desde 1877 Boussinesq organizó los primeros antecedentes del estudio de las olas en aguas someras y de amplitud finita. Sin embargo, fueron Korteweg y DeVries, en 1895, quienes desarrollaron inicialmente la teoría de las olas cnoidales.

El término 'cnoidal' se aplica debido a que la superficie libre del oleaje se expresa a través de las funciones jacobianas elípticas.

Masch y Wiegel presentaron las características del oleaje y su determinación a través de curvas para su fácil aplicación práctica.

5.1.2 MODELO MATEMATICO.

Esta teoría propone que la forma de la superficie libre de las olas y las otras características están dadas por las curvas de las tres funciones elípticas jacobianas 'sn u', 'cn u' y 'dn u'.

Los valores de las características del oleaje dependen del número de términos elegidos para el desarrollo de las series de potencias en términos de la altura relativa H/d . La deficiencia del cálculo del transporte de masa es inherente a la deficiencia de la solución de las series de potencia.

No existe una sola teoría Cnoidal; la literatura presenta varias teorías cnoidales que no son idénticas. Como en las teorías Stokesianas, puesto que todas las representaciones cnoidales son series truncadas, el orden de aproximación es importante porque ciertos factores son cero en la teoría de bajo orden. Hay dos tipos de teorías cnoidales; la más antigua es intuitiva en la naturaleza y las teorías más recientes son integrales y más rigurosas, siendo todas irrotacionales. La teoría primaria intuitiva es la de Korteweg y de Vries (1895); el primero y segundo términos de las series son deducidos pero no se presenta un esquema para la extensión a términos de orden más alto, siendo únicos los términos encontrados. Las teorías rigurosas son las de Keulegan y



Patterson (1940), Keller (1948), Benjamin y Lighthill (1954), Iwasa (1955), Littman (1957), Laitone (1960 y 1962) Masch y Wiegel (1961) y Chapelear (1962); todas ellas están basadas en una expansión de perturbación desarrollada por Friedrichs en 1948. El trabajo de Keller confirma los resultados de Korteweg y de Vries, mientras que los de Laitone y Chapelear proporcionan un término de orden más alto.

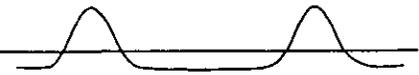
Desgraciadamente, aun cuando el rigor predomina, las teorías más recientes divergen después del tercer término. La teoría de Keulegan y Patterson no es consistente matemáticamente, ya que algunos términos de segundo orden son despreciados mientras que los términos de tercer orden son incluidos, a pesar de lo cual, puede ser la más atractiva físicamente.

En la Tabla No. 5 se muestran las ocho ecuaciones propuestas por la teoría cnoidal de Keulegan y Patterson.

MODELOS TEORICOS DE OLAJE

Tabla No. 5 ECUACIONES DE LA TEORIA CNOIDAL PARA OLAJE PROGRESIVO

| Nombre de la Ecuación | Ecuación | No |
|--|--|----|
| Perfil de la Superficie Libre | $\eta = Zt + Hcn^2 \left[2K(k) \left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right) \right]$ | 42 |
| Celeridad | $C = \sqrt{gd} \left\{ 1 + \frac{16d^2}{3L^2} K^2(k) \left[\frac{1}{2} - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \right\}$ | 43 |
| Longitud | $L = \sqrt{\frac{16d^3}{3H}} kK(k)$ | 44 |
| Velocidad de las Partículas Horizontal | $u = \sqrt{gd} \left\{ \begin{aligned} &-\frac{5}{4} + \frac{3Z_i}{2d} - \frac{Z_i^2}{4d^2} + \left[\left(\frac{3H}{2d} - \frac{Z_i H}{2d^2} \right) cn^2(\cdot) \right] - \frac{H^2}{4d^2} cn^4(\cdot) - \frac{8HK^2(k)}{L^2} \left(\frac{d}{3} - \frac{y^2}{2d} \right) \\ &\left[-k^2 sn^2(\cdot) cn^2(\cdot) + cn^2(\cdot) dn^2(\cdot) - sn^2(\cdot) dn^2(\cdot) \right] \end{aligned} \right\}$ | 45 |
| Velocidad de las Partículas Vertical | $w = \sqrt{gd} \left[\frac{2ZHK(k)}{Ld} \right] \left\{ 1 + \frac{Z_i}{d} + \frac{H}{d} cn^2(\cdot) + \frac{32K^2(k)}{3L^2} \left(d^2 - \frac{Z^2}{2} \right) \left[k^2 sn^2(\cdot) - k^2 cn^2(\cdot) - dn^2(\cdot) \right] \right\} \cdot \left[sn(\cdot) cn(\cdot) dn(\cdot) \right]$ | 46 |
| Aceleración de las Partículas Horizontal | $a_x = \sqrt{gd} \left[\frac{4HK(k)}{Td} \right] \left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{Z_i}{2d} \right) - \frac{H}{2d} cn^2(\cdot) + \frac{16K^2(k)}{L^2} \left(\frac{d^2}{3} - Z^2 \right) \left[k^2 sn^2(\cdot) - k^2 cn^2(\cdot) - dn^2(\cdot) \right] \right\} \cdot \left[sn(\cdot) cn(\cdot) dn(\cdot) \right]$ | 47 |



| | | |
|--|---|-----------|
| <p>Aceleración de las Partículas Vertical</p> | $a_z = \sqrt{gd} \left[\frac{4ZHK(k)}{LTd} \right] \left\{ \begin{aligned} & \left[1 + \frac{Z_t}{d} \right] \left[sn^2(\cdot) dn^2(\cdot) - cn^2(\cdot) dn^2(\cdot) + k^2 sn^2(\cdot) cn^2(\cdot) \right] \\ & + \frac{H}{d} \left[3sn^2(\cdot) dn^2(\cdot) - cn^2(\cdot) dn^2(\cdot) + k^2 sn^2(\cdot) \right] cn^2(\cdot) \\ & - \frac{32K^2(k)}{3L^2} \left[d^2 - \frac{Z^2}{2} \right] \left[\begin{aligned} & 9K^2 sn^2(\cdot) cn^2(\cdot) dn^2(\cdot) - k^2 sn^4(\cdot) (k^2 cn^2(\cdot) + dn^2(\cdot)) \\ & + k^2 cn^4(\cdot) (k^2 sn^2(\cdot) + dn^2(\cdot)) + dn^4(\cdot) (sn^2(\cdot) - cn^2(\cdot)) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}$ | <p>48</p> |
| <p>Presión Abajo de la Superficie</p> | $P = \gamma(\eta - Z)$ | <p>49</p> |
| <p>Período</p> | $T = \sqrt{\frac{g}{d}} \sqrt{\frac{16d}{3H}} \left\{ \frac{kK(k)}{1 + \frac{H}{dk^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{E(k)}{K(k)} \right]} \right\}$ | <p>50</p> |

Para resolver estas expresiones en la actualidad se utilizan las curvas propuestas por Wiegel en 1960.

Las variables que se utilizan en las relaciones de esta teoría son, Z_t , que representa la distancia vertical medida desde el fondo del mar hasta el valle de la ola, Z_c , que es la distancia medida verticalmente desde la cresta hasta el fondo del mar.

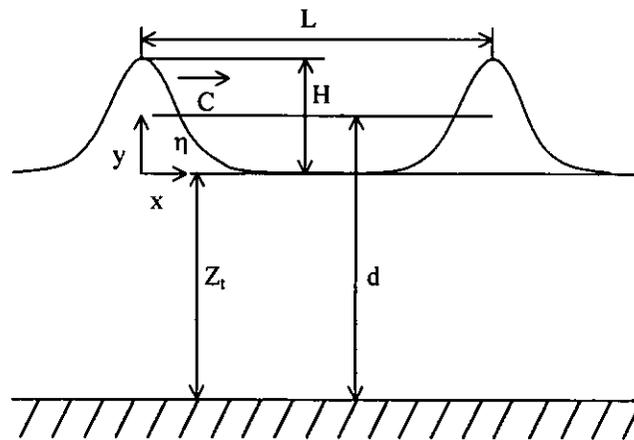


Figura 19 Oleaje Cnoidal Progresivo

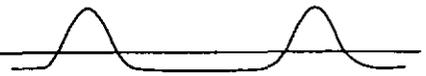
A continuación se propone la deducción de las ecuaciones para el módulo de las integrales elípticas, de las tres funciones elípticas Jacobianas y de las integrales elípticas completas de primera y segunda clase que se utilizarán en el desarrollo del programa P-5.

Si se parte del sistema de ecuaciones mostrado a continuación,

$$m = k^2 = \frac{H/d}{\left(2L + 1 - \frac{Z_t}{d}\right)} \quad (109)$$

$$\left(2L + 1 - \frac{Z_t}{d}\right)E(k) = \left(2L + 2 - \frac{H}{d}\right)K(k) \quad (110)$$

$$\frac{Z_t}{d} = \frac{H}{d[kK(k)]^2} \{K(k)[K(k) - E(k)]\} + 1 - \frac{H}{d} \quad (111)$$



sustituyendo la ecuación 111 en la 109 y 110:

$$m = k^2 = \frac{H/d}{\left\{ 2L - \frac{H\{K(k)[K(k)-E(k)]\}}{d[kK(k)]^2} + \frac{H}{d} \right\}} \quad (112)$$

sustituyendo la 110 en la 109:

$$m = k^2 = \frac{E(k)H/d}{\left\{ 2L + 2 + \frac{H}{d} \right\} K(k)} \quad (113)$$

de la ecuación 112

$$2L + \frac{H}{d} - \frac{H\{K(k)[K(k)-E(k)]\}}{d[kK(k)]^2} = \frac{H/d}{m} \quad (114)$$

$$2L = \frac{H\{K(k)[K(k)-E(k)]\}}{d[kK(k)]^2} + \frac{H}{dm} - \frac{H}{d} \quad (115)$$

$$L = \frac{H}{2d} \left\{ \frac{\{K(k)[K(k)-E(k)]\}}{d[kK(k)]^2} + \frac{1}{m} - 1 \right\} \quad (116)$$

se puede deducir la expresión siguiente, que relaciona directamente a las integrales elípticas completas de primera y segunda clase con su módulo, que es:

$$k^2 = m = \frac{E(k) \frac{H}{d}}{\left\{ \left[\frac{H}{d} \left[\frac{K(k)[K(k)-E(k)]}{[kK(k)]^2} + \frac{1}{m} - 1 \right] \right] + 2 - \frac{H}{d} \right\} K(k)} \quad (117)$$

en esta relación,

k , módulo de las integrales elípticas.

$K(k)$, integral elíptica completa de primera clase.

$E(k)$, integral elíptica completa de segunda clase.

Por otro lado, las tres funciones elípticas jacobianas se pueden obtener de manera aproximada y en términos de funciones hiperbólicas, de acuerdo a Milne-Thompson como:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sn}(u/m) &\approx \tanh(u) + \frac{1}{4} m_1 (\sinh(u) \cosh(u) - u) \operatorname{sech}^2(u) \\
 \operatorname{cn}(u/m) &\approx \operatorname{sech}(u) - \frac{1}{4} m_1 (\sinh(u) \cosh(u) - u) \tanh(u) \operatorname{sech}(u) \\
 \operatorname{dn}(u/m) &\approx \operatorname{sech}(u) + \frac{1}{4} m_1 (\sinh(u) \cosh(u) + u) \tanh(u) \operatorname{sech}(u)
 \end{aligned} \tag{118}$$

Así mismo las integrales elípticas completas de primera y segunda clase se calculan mediante las aproximaciones polinomiales propuestas por C. Hastings, Jr, en su publicación 'Approximations for Digital Computers', Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

$$K(m) = (a_0 + a_1 m_1 + \dots + a_4 m_1^4) + (b_0 + b_1 m_1 + \dots + b_4 m_1^4) \ln(1/m_1) + \varepsilon(m)$$

$$|\varepsilon(m)| \leq 2 \times 10^{-8}$$

| | |
|-----------------------|-----------------------|
| $a_0 = 1.38629436112$ | $b_0 = 0.5$ |
| $a_1 = 0.09666344259$ | $b_1 = 0.12498593597$ |
| $a_2 = 0.03590092383$ | $b_2 = 0.06880248576$ |
| $a_3 = 0.03742563713$ | $b_3 = 0.03328355346$ |
| $a_4 = 0.01451196212$ | $b_4 = 0.00441787012$ |

$$E(m) = (1 + a_1 m_1 + \dots + a_4 m_1^4) + (b_1 m_1 + \dots + b_4 m_1^4) \ln(1/m_1) + \varepsilon(m)$$

$$|\varepsilon(m)| < 2 \times 10^{-8}$$

| | |
|-----------------------|-----------------------|
| $a_1 = 0.44325141463$ | $b_1 = 0.24998368310$ |
| $a_2 = 0.06260601220$ | $b_2 = 0.09200180037$ |
| $a_3 = 0.04757383546$ | $b_3 = 0.04069697526$ |
| $a_4 = 0.01736506451$ | $b_4 = 0.00526449639$ |

5.1.3 SIGNIFICADO FISICO.

La interpretación física de las características del oleaje en esta teoría es la misma que se ha descrito en las anteriores, con la aclaración de que no se definan la velocidad de grupo, el desplazamiento horizontal y vertical, la energía total por unidad de cresta y la potencia por unidad cresta promedio.



5.1.4 PROGRAMA DE COMPUTADORA.

Con este programa (P-5) se pueden calcular fácilmente las características del oleaje propuestas por la teoría cnoidal, mostradas en la Tabla No. 5, **sin tener que emplear las gráficas propuestas por Wiegel.**

DESCRIPCION DEL PROGRAMA (P-5).

Este programa requiere introducir los datos siguientes: período de la ola, profundidad total, altura de la ola; profundidad, desplazamiento horizontal y tiempo de la partícula en análisis, peso específico del agua de mar y el valor aproximado del módulo de las integrales elípticas, que variará entre cero y uno.

Primeramente se calcula el módulo 'k' y las integrales elípticas completas $E(k)$ y $K(k)$; con base en estos cálculos se determinan a continuación todas las demás características del oleaje, pudiendo analizarse 20 partículas al mismo tiempo.

Se presentan el listado del programa fuente y algunas corridas para su interpretación adecuada.

5.1.5 EJEMPLOS.

Ejemplo 1: Calcular las características del oleaje en cinco puntos, aplicando la teoría cnoidal para olas progresivas.

| Datos | Puntos Suministrados | | | | |
|--------------|----------------------|----------|----------|----------|----------|
| T (s) | 4.3 | 4.3 | 4.3 | 4.3 | 4.3 |
| d (m) | 11.4 | 11.4 | 11.4 | 11.4 | 11.4 |
| H(m) | 2.15 | 2.15 | 2.15 | 2.15 | 2.15 |
| θ (°) | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 |
| z (m) | -4 | -3.5 | -3 | -2.5 | -2 |
| Variables | Puntos Calculados | | | | |
| L (m) | 6.482 | 6.482 | 6.482 | 6.482 | 6.482 |
| C (m/s) | -204.418 | -204.418 | -204.418 | -204.418 | -204.418 |
| η (m) | 11.404 | 11.404 | 11.404 | 11.404 | 11.404 |

| | | | | | |
|---------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| u (m/s) | -16.285 | -17.150 | -17.900 | -18.534 | -19.053 |
| w (m/s) | 121.067 | 107.606 | 93.477 | 78.774 | 63.593 |
| a_x (m/s ²) | -30.251 | -34.574 | -38.321 | -41.492 | -44.086 |
| a_z (m/s ²) | -99.633 | -88.554 | -76.925 | -64.824 | -52.331 |
| P (Kg/m ²) | 15835.489 | 15321.489 | 14807.489 | 14293.489 | 13779.489 |

Ejemplo 2: Calcular las características del oleaje en cinco puntos, aplicando la teoría cnoidal para olas progresivas.

| Datos | Puntos Suministrados | | | | |
|---------------------------|----------------------|----------|----------|----------|----------|
| T (s) | 3.15 | 3.15 | 3.15 | 3.15 | 3.15 |
| d (m) | 7.2 | 7.2 | 7.2 | 7.2 | 7.2 |
| H(m) | 1.28 | 1.28 | 1.28 | 1.28 | 1.28 |
| θ (°) | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 |
| z (m) | -3 | -2.5 | -2.0 | -1.5 | -1.0 |
| Variables | Puntos Calculados | | | | |
| L (m) | 4.167 | 4.167 | 4.167 | 4.167 | 4.167 |
| C (m/s) | -156.464 | -156.464 | -156.464 | -156.464 | -156.464 |
| η (m) | 7.202 | 7.202 | 7.202 | 7.202 | 7.202 |
| u (m/s) | -10.680 | -11.829 | -12.770 | -13.501 | -14.023 |
| w (m/s) | 99.180 | 85.120 | 69.713 | 53.228 | 35.935 |
| a_x (m/s ²) | -22.344 | -30.189 | -36.607 | -41.599 | -45.165 |
| a_z (m/s ²) | -111.481 | -95.675 | -78.355 | -59.825 | -40.388 |
| P (Kg/m ²) | 10488.131 | 9974.131 | 9460.131 | 8946.131 | 8432.131 |

En el Apéndice F se muestra el listado del programa fuente (P-5)



CAPITULO 6. CONCLUSIONES.

Después de efectuar un número muy grande de corridas (que no se incluyen en el trabajo ya que serían cientos de hojas de resultados) con los cinco programas ya comentados, pueden resumirse algunos aspectos sobresalientes para cada una de las teorías expuestas en el presente texto.

6.1 TEORIA LINEAL.

Aplicando el programa (P-1) a un número muy grande de datos diferentes se obtuvo que,

1.- El perfil de la superficie libre efectivamente da una onda cosenoidal simétrica con respecto al eje 'x'.

2.- A través de los desplazamientos en 'x', 'z', obtenidos mediante las ecuaciones 100 y 101, se observó que se generaban trayectorias circulares cerradas en aguas profundas y trayectorias elípticas cerradas en aguas intermedias y bajas, lo cual corrobora los planteamientos teóricos.

3.- La presión debajo de la superficie libre del agua, obtenida con la ecuación 32, se incrementa de manera no lineal.

4.- Tanto las velocidades de las partículas en análisis como sus aceleraciones, representadas por las expresiones 96, 97, 98 y 99, fueron disminuyendo de la superficie libre del agua hacia el fondo del mar.

En el caso de la aplicación del programa (P-2), se obtuvieron resultados idénticos en la forma de la superficie libre, la celeridad y la longitud; en las otras variables, aunque los valores obtenidos fueron distintos, en general el comportamiento es similar.

6.2 TEORIA DE SEGUNDO ORDEN DE STOKES.

Los comentarios más destacados que pueden hacerse de la aplicación del programa (P-3) a un número muy grande de datos son,

1.- La superficie libre presenta una forma irregular, pudiendo detectarse al graficar estos valores que, en general, se observan "picos" más agudos y valles achatados y un tramo central horizontal.

2.- El comportamiento de las velocidades y aceleraciones de las partículas se observó similar al ya comentado para el caso de la teoría lineal.

3.- Al analizar la trayectoria de las partículas resultó muy obvio que los puntos inicial y final no coinciden, es decir se presentó un deslizamiento hacia el frente, lo cual indica la presencia de trayectorias abiertas en esta teoría.

4.- Al comparar las velocidades de las partículas presentadas por las dos teorías se observó una diferencia en los valores finales del 10% al 30%, de acuerdo a la zona de las olas en que se calculó.

5.- De la comparación de los valores arrojados por las dos teorías para el caso de las aceleraciones de las partículas, se encontró una diferencia grande, desde el 30% hasta el 100%, dependiendo de la componente y de la zona del oleaje analizado.

6.3 TEORIA DE TERCER ORDEN DE STOKES.

Wiegel (1950), Morrison (1951), Suquet y Wallet (1953) y Savage (1954) han medido experimentalmente la velocidad de las olas para ciertos rangos y las han comparado con las teorías de la tercer orden de Stokes y Lineal. En general los resultados obtenidos demuestran que las olas de amplitud larga viajan más rápido que las de amplitud pequeña. El trabajo de Suquet y Wallet no incluyen datos para $d/L < 0.2$, aunque el trabajo de Morrison si lo hace. En la región de relaciones d/L pequeñas, donde la ecuación de tercer orden de Stokes para la velocidad de la ola se complica, los valores medidos fueron pocos, así como las mediciones para ciertas combinaciones de alturas y longitudes de la ola con la profundidad del oleaje.

6.4 TEORIA CNOIDAL.

Las conclusiones más importantes en el análisis de esta teoría se pueden agrupar en las siguientes:

1. Es apropiada la teoría Cnoidal en olas periódicas progresivas en aguas cuya profundidad sea menor a $1/10$ de su longitud.
2. Littman propone la región de validez para la teoría Cnoidal mostradas en la figura 20 siguiente, en función de las relaciones H/d y C^2/gd , donde se aprecia una zona de aplicación de las teorías de Stokes (Struik) y el límite para la teoría de la ola solitaria.

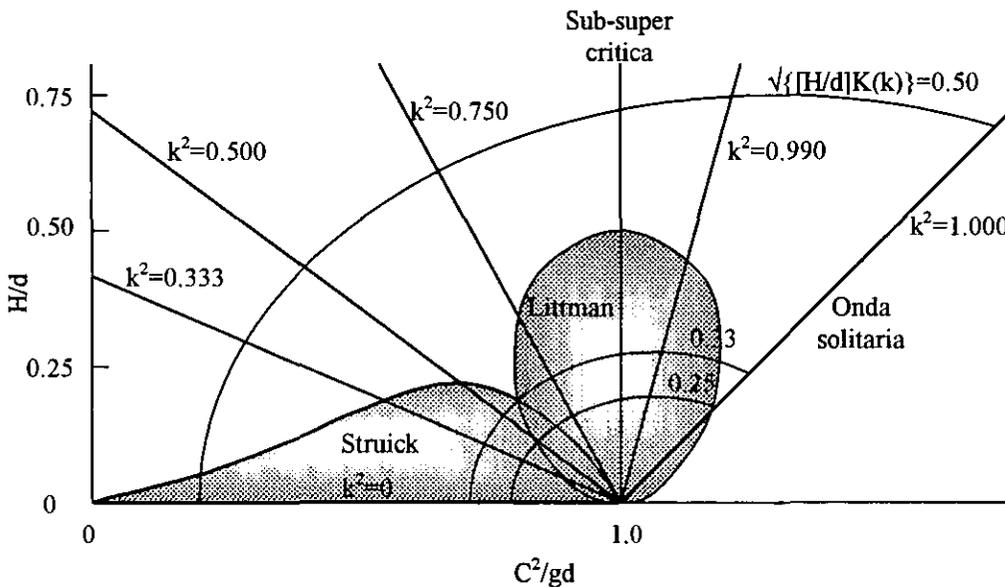
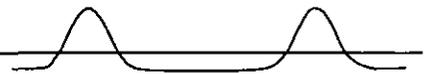


Figura 20 Regiones de validez aproximadas de perfiles existentes para olas de Stokes (Struik) y para oleaje Cnoidal (Littman)

3. Le Méhauté, Divoky y Lin desarrollaron mediciones de la velocidad del oleaje en el tanque de olas Tetra Tech, con rangos para olas $0.8\text{ft} / \text{s}^2 \geq D / T^2 \geq 0.05\text{ft} / \text{s}^2$ de 105 pies de longitud, sección transversal cuadrada de 4 pies y generador de oleaje con control de velocidad en un rango de 1 a 12 segundos de periodo. Se compararon estos resultados con los cálculos de los programas propuestos en este trabajo para el perfil de la superficie libre, velocidades y aceleraciones de las partículas y se observó que, aunque ninguna de las teorías se ajusta exactamente, la de mejor precisión fue la teoría Cnoidal de Keulegan y Patterson.

6.5 REGIONES DE VALIDEZ DE LAS TEORIAS DEL OLAJE

Para aplicar cada teoría es necesario definir las regiones donde cada una de ellas es válida. Diversos investigadores han realizado mediciones en laboratorio con su comparación analítica y sus resultados difieren en las condiciones límite para las diversas teorías.

Le Méhauté en 1969 presentó la figura 21 que ilustra el rango de validez de algunas teorías para las olas periódicas bidimensionales, en función de las relaciones d/T^2 , H/T^2 , el parámetro de Ursell y el criterio de rompiente de la ola.

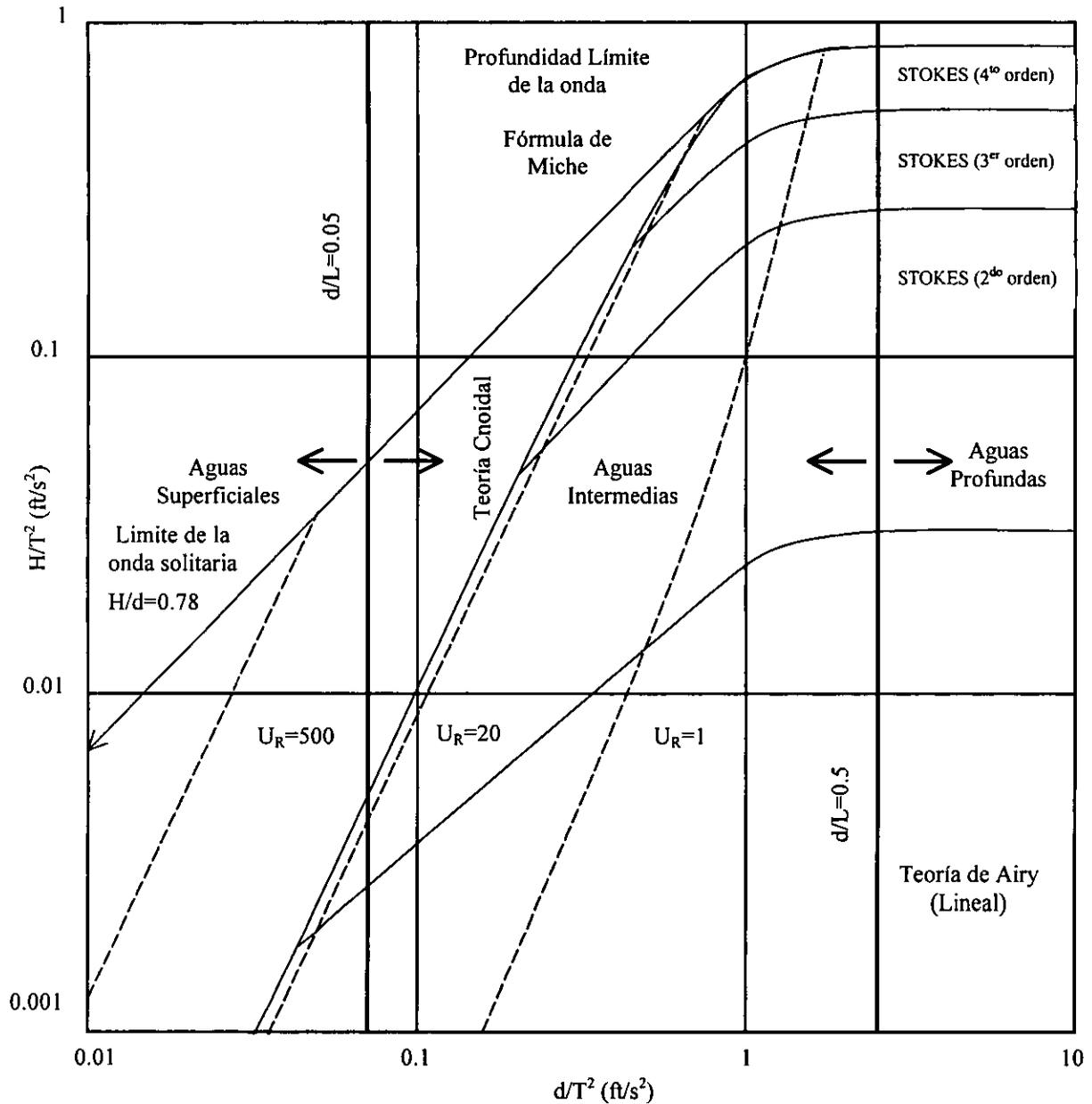


Figura 21 Regiones de validez de las teor6as de oleaje.

Esta figura es solamente cualitativa y de cierta forma arbitraria, puesto que no se han analizado los errores que se cometen en cada regi6n.



APENDICE A. METODOS NUMERICOS Y MATEMATICOS UTILIZADOS

Se presentan los métodos y matemáticos que se emplearon en el desarrollo de las teorías de oleaje descritas.

A.1 METODO DE NEWTON-RAPHSON

Es uno de los procedimientos numéricos abiertos más utilizados para localizar raíces de ecuaciones algebraicas y transcendentales que involucran iteraciones sistemáticas de prueba y error.

A.1.1 DEDUCCION DE LA ECUACION DE NEWTON-RAPHSON A PARTIR DE LA SERIE DE TAYLOR.

La formulación matemática usada ampliamente en los métodos numéricos para expresar funciones en forma polinomial es la serie de Taylor, cuya expresión completa es:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1} \quad (\text{A.1.1})$$

donde el subíndice 'n' indica que el residuo (último término) es de la aproximación a enésimo orden y ξ es un valor cualquiera de x que se encuentra entre x_i y x_{i+1} .

Truncando la serie de Taylor después de la primera derivada se obtiene una versión aproximada.

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (\text{A.1.2})$$

En la intersección con el eje x , $f(x_{i+1})$ debe ser igual a cero, o sea

$$0 \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \quad (\text{A.1.3})$$

de la cual se puede obtenerse

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (\text{A.1.4})$$

llamada ecuación de Newton-Raphson.

A.1.2 DEDUCCION GRAFICA DE LA ECUACION DE NEWTON-RAPHSON.

Sea una función cualquiera de la forma $x = f(x)$ como se muestra en la figura:

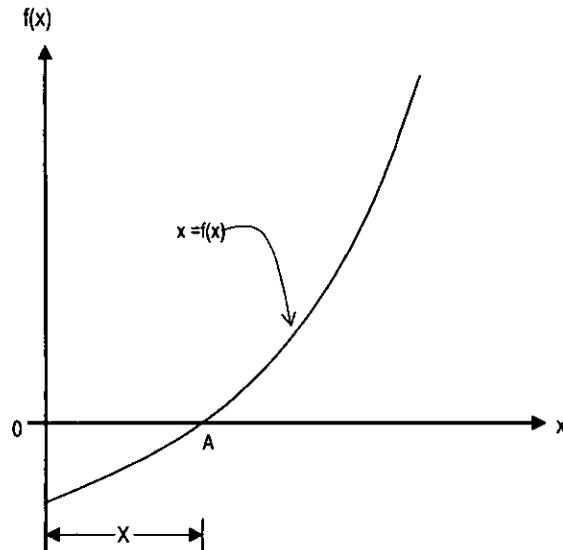


Figura A. 1

Se desea obtener el valor de la raíz x_A (punto A), para la cual se propone un valor inicial x_i y se extiende la tangente desde este punto 1 $[x_i, f(x_i)]$ hasta la intersección con el eje horizontal (punto 2), el cual representa una aproximación mejorada a la raíz.

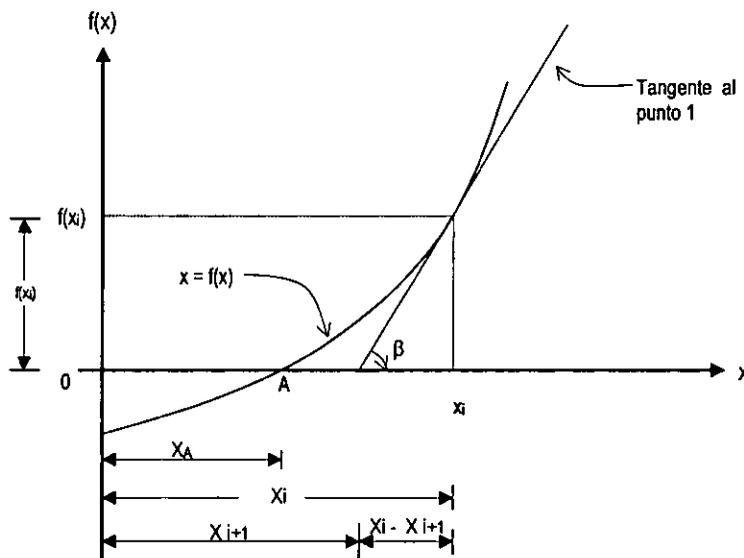
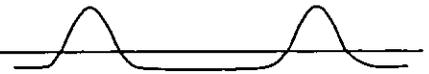


Figura A. 2

Analizando el triángulo rectángulo Δ 1-2-3 se observa que:



$$f'(x_i) = S_{i-2} = \tan \beta = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

de donde

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

que idéntica a la ecuación A.1.4 obtenida a través de la aplicación de la serie de Taylor en A.1.1.

A.1.3 ANALISIS DEL ERROR DEL METODO DE NEWTON-RAPHSON A PARTIR DE LA SERIE DE TAYLOR.

La serie de Taylor que incluye un término de segundo orden es:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 \quad (\text{A.1.5})$$

Para la raíz exacta se cumple que $x_{i+1} = x_r$, en donde x_r es el valor exacto de la raíz.

Sustituyendo este valor junto con $f(x_r) = 0$ en la serie de Taylor de la ecuación A.1.5 se obtiene.

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_r - x_i)^2 \quad (\text{A.1.6})$$

Restando la ecuación A.1.3 de la ecuación A.1.6

$$0 = f'(x_i)(x_r - x_{i+1}) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_r - x_i)^2 \quad (\text{A.1.7})$$

Por otro lado, considerando que el error es igual a la diferencia entre x_{i+1} y el valor real x_r .

$$E_{v,i+1} = x_r - x_{i+1} \quad (\text{A.1.8})$$

la ecuación A.1.7 se puede expresar por

$$0 = f'(x_i)E_{v,i+1} + \frac{f''(\xi)}{2!}E_{v,i}^2 \quad (\text{A.1.9})$$

Finalmente esta ecuación se despeja si se supone que hay convergencia (por lo que x_i y ξ se deben aproximar a la raíz x_r),

$$E_{v,i+1} = \frac{-f''(x_r)}{2f'(x_r)} E_{v,i}^2 \quad (\text{A.1.10})$$

esta ecuación expresa a que el error es casi proporcional al cuadrado del error anterior, lo que se llama convergencia cuadrática.

A.1.4 DESVENTAJAS DEL METODO DE NEWTON-RAPHSON.

A.1.4.1 RAICES SIMPLES

En algunas funciones al explicar este criterio se puede presentar convergencia lenta u oscilaciones, como se ilustra en los casos siguientes.

CASO 1. El punto de inflexión ocurre en la vecindad de una raíz. Se observa que las iteraciones que empiezan en x divergen progresivamente de la raíz.

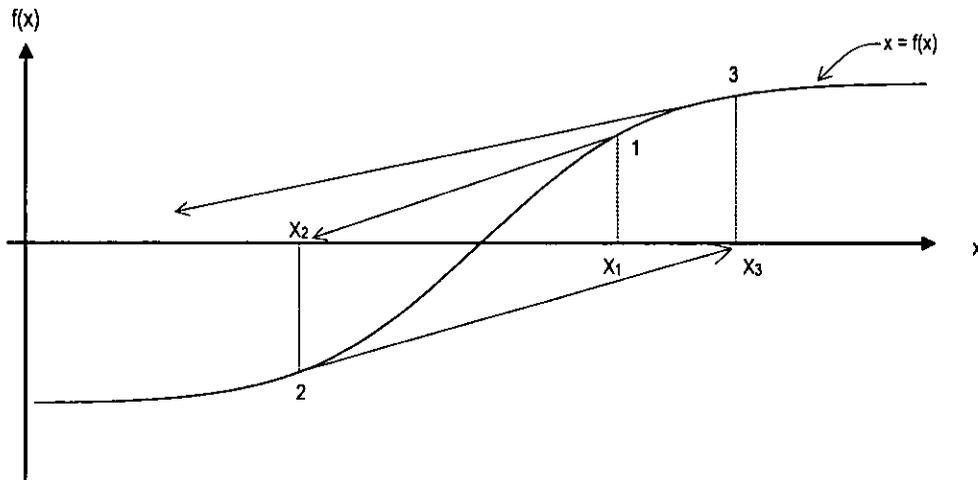


Figura A. 3



CASO 2. Oscilaciones alrededor de un punto mínimo o máximo local. Después de varias iteraciones se aprecia que las oscilaciones persisten o que se alcanza una pendiente cercana a cero, alejándose la solución del área de interés.

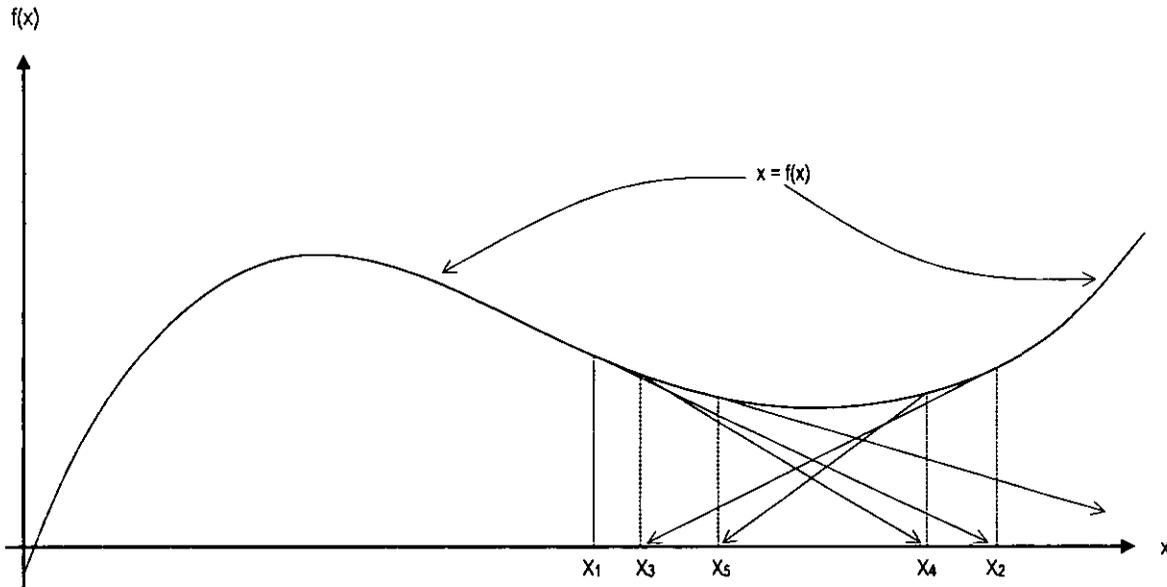


Figura A. 4

CASO 3. Funciones con pendientes cercanas a cero. A partir de un valor inicial cercano a la raíz puede saltar a una posición varias raíces lejos, debido a las pendientes cercanas a cero y en el caso de pendiente cero [$f'(x)=0$] se genera una división entre cero en la ecuación de Newton-Raphson. La solución en este caso es cambiar el valor inicial propuesto.

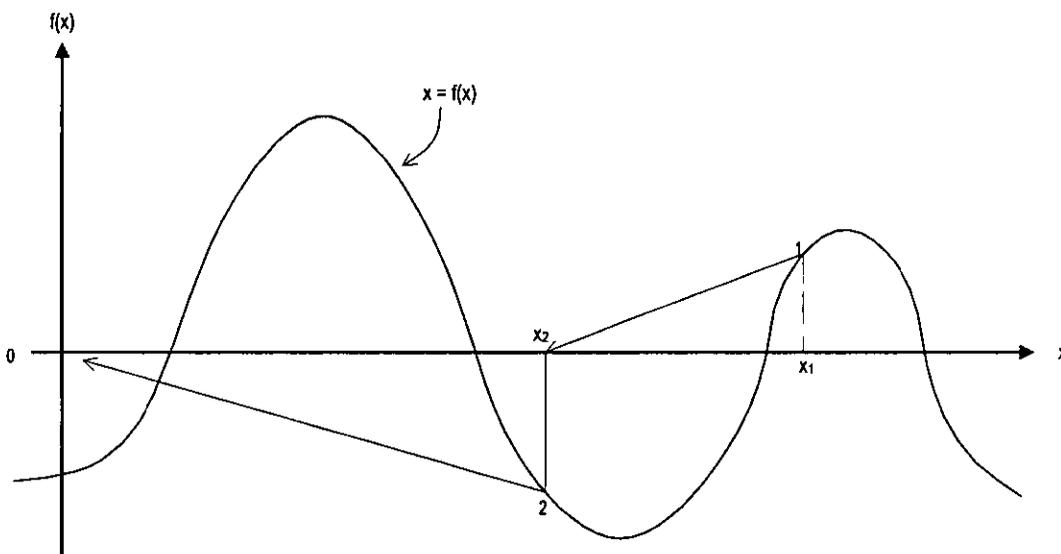


Figura A. 5

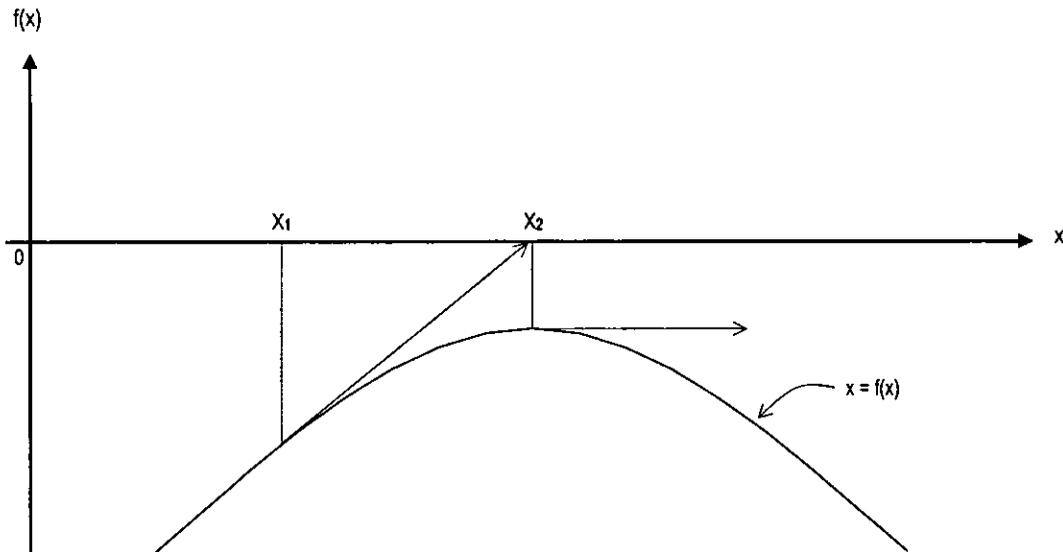


Figura A. 6

A.1.4.2 RAICES MÚLTIPLES

Una raíz múltiple se presenta en un punto donde una función es tangente al eje x . Si la multiplicidad de raíces es impar la curva cruza el eje, mientras que la multiplicidad par no lo cruza.

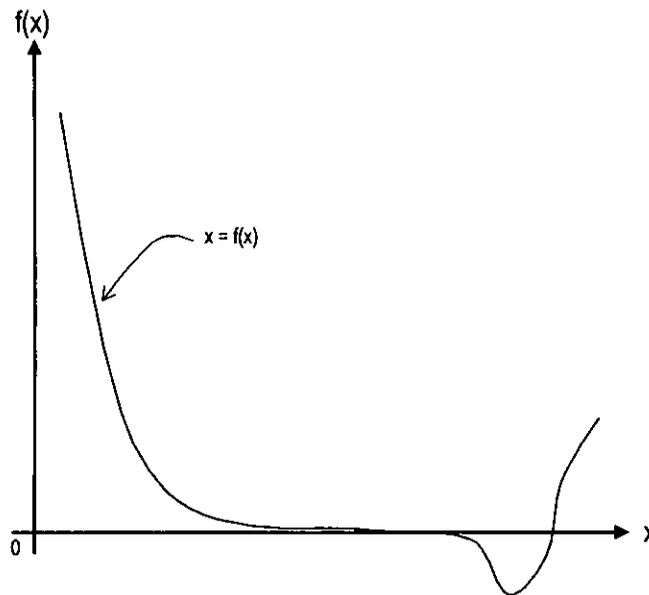


Figura A. 7 Raíces múltiples impares.

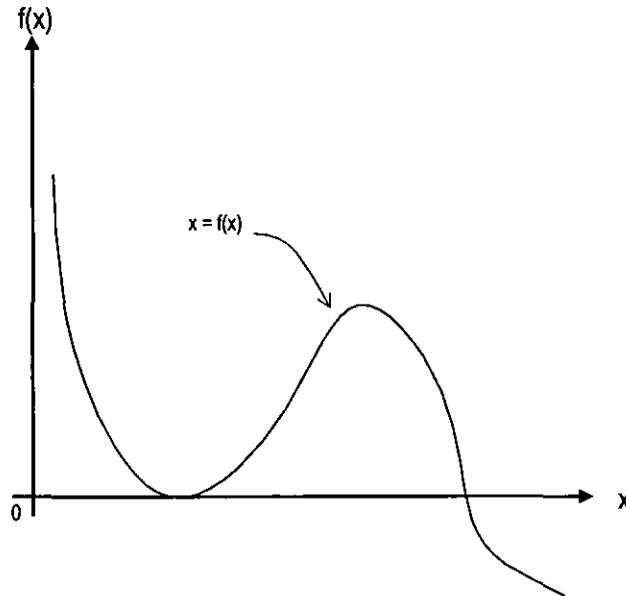


Figura A. 8 Raíces múltiples pares.

Raltson y Rabinowitz en 1978 demostraron que el método de Newton-Raphson converge en forma lineal cuando existen raíces múltiples en una función, en lugar de la convergencia cuadrática comentada en la sección A.1.3.

Una alternativa para obtener raíces múltiples la proponen también Raltson y Rabinowitz, definiendo la función $u(x)$ como

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (\text{A.1.11})$$

Si se sustituye esta relación en la ecuación A.1.4

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)} \quad (\text{A.1.12})$$

y se deriva la ecuación A.1.11

$$u'(x) = \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \quad (\text{A.1.13})$$

Finalmente si se sustituyen las ecuaciones A.1.11 y A.1.13 en la expresión A.1.12

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)} \quad (\text{A.1.14})$$

conocida como ecuación de Newton-Raphson modificada con la que se logra convergencia cuadrática.



A.2 FUNCIONES ELIPTICAS JACOBIANAS

A.2.1 INTRODUCCION

A una función meromórfica periódica doble se le llama normalmente función elíptica.

Sean m, m_1 números tales que se cumpla

$$m + m_1 = 1 \quad (\text{A.2.1})$$

donde m es un número real llamado parámetro y m_1 es el parámetro complementario; pudiendo establecerse que

$$0 \leq m \leq 1 \quad (\text{A.2.2})$$

Se definen los cuartos-periodos K e iK' como

$$K(m) = K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - m \sin^2 \theta)^{1/2}} \quad (\text{A.2.3})$$

$$iK'(m) = iK' = i \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - m_1 \sin^2 \theta)^{1/2}} \quad (\text{A.2.4})$$

donde K y K' son números reales; K se llama cuarto-periodo real e iK' cuarto periodo imaginario.

Puede notarse que

$$K(m) = K'(m_1) = K'(1 - m) \quad (\text{A.2.5})$$

También es posible observar que si se conoce alguno de los números $m, m_1, K(m), K'(m), K'(m)/K(m)$ todos los restantes pueden determinarse. De tal manera que K y K' no pueden ser escogidos arbitrariamente.

En el diagrama de Argand se indican los puntos $O, K, K + iK', iK'$ por s, c, d, n , respectivamente. Estos puntos están en los vértices de un rectángulo. Las translaciones de este

rectángulo por $\lambda K, \mu iK'$, donde λ, μ están dados por los valores positivos o negativos de las integrales, conducirá a la rejilla

$$\begin{array}{cccc} .s & .c & .s & .c \\ .n & .d & .n & .d \\ .s & .c & .s & .c \\ .n & .d & .n & .d \end{array}$$

repitiéndose indefinidamente este modelo en todas direcciones.

Sean p, q cualquiera de las letras s, c, d, n . Entonces p, q determinan en la rejilla un rectángulo mínimo cuyos lados tienen de longitud K y K' y cuyos lados tienen de longitud K y K' y cuyos vértices s, c, d, n están en el sentido de giro de las manecillas del reloj.

A.2.2 CARACTERISTICAS DE LAS FUNCIONES ELIPTICAS JACOBIANAS

Una función elíptica jacobiana $pq u$ está definida por las tres siguientes propiedades:

1. $pq u$ tiene un cero simple en p y un polo simple en q .
2. El paso desde p hasta q es un medio-periodo de $pq u$. Los números $K, iK', K + iK'$, que difieren de este paso son solamente cuarto-periodos.
3. El coeficiente del término principal en el desarrollo de $pq u$ en potencias ascendentes de u cerca de $u = 0$ es la unidad.

Con respecto a la propiedad 3 el término principal es $u, 1/u, 1$ conforme $u = 0$ es un cero, un polo o un punto ordinario.

De este modo las funciones con un polo o cero en el origen (por ejemplo las funciones en las cuales una letra es s) son no regulares y las otras son uniformes.

Si se desea llamar la atención del valor del parámetro se puede escribir $pq(u/m)$ en lugar de $pq u$.

Las funciones elípticas jacobianas pueden definirse también con respecto a ciertas integrales.



$$u = \int_b^{\varphi} \frac{d\theta}{(1 - m \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2}} \quad (\text{A.2.6})$$

en donde el ángulo φ se llama amplitud

$$\varphi = \operatorname{am} u \quad (\text{A.2.7})$$

y también

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} u &= \operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{cn} u &= \operatorname{cos} \varphi \\ \operatorname{dn} u &= (1 - m \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2} = \Delta(\varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.2.8})$$

A.2.3 CLASIFICACION DE LAS DOCE FUNCIONES ELIPTICAS JACOBIANAS

Tomando en consideración los polos y los medios-periodos las funciones elípticas jacobianas se clasifican en las que se muestran

| | Polo iK' | Polo $K+iK'$ | Polo K | Polo O | Periodos |
|-----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|
| Medio periodo iK' | $\operatorname{sn} u$ | $\operatorname{col} u$ | $\operatorname{dc} u$ | $\operatorname{ns} u$ | $2iK', 4K+4iK', 4K$ |
| Medio periodo $K+iK'$ | $\operatorname{cn} u$ | $\operatorname{sd} u$ | $\operatorname{nc} u$ | $\operatorname{ds} u$ | $4iK', 2K+2iK', 4K$ |
| Medio periodo K | $\operatorname{dn} u$ | $\operatorname{nd} u$ | $\operatorname{sc} u$ | $\operatorname{cs} u$ | $4iK', 4K+4iK', 2K$ |

Las tres funciones en una columna vertical reciben el nombre de funciones copolares.

Las cuatro funciones en una línea horizontal se llaman funciones coperiódicas. De los periodos citados en la última línea de cada hilera solo dos son independientes.

En la siguiente figura se muestran las curvas de las funciones copolares para el polo iK' con un parámetro $m = 1/2$

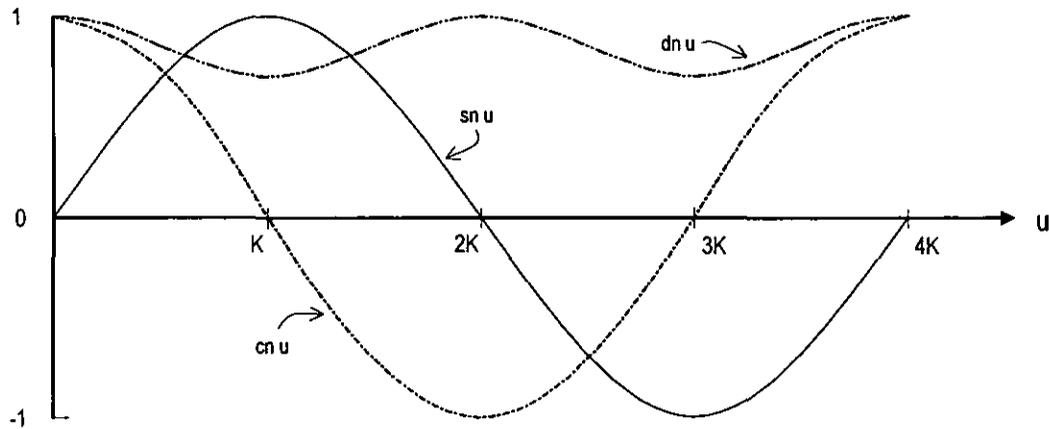


Figura A. 9

A.2.4 RELACION DE LAS FUNCIONES JACOBIANAS CON LAS COPOLARES $\text{sn } u$, $\text{cn } u$, $\text{dn } u$.

Se enlistan las expresiones que relacionan a las funciones copolares $\text{sn } u$, $\text{cn } u$, $\text{dn } u$, con las nueve restantes

$$\begin{array}{lll}
 \text{cd } u = \frac{\text{cn } u}{\text{dn } u} & \text{dc } u = \frac{\text{dn } u}{\text{cn } u} & \text{ns } u = \frac{1}{\text{sn } u} \\
 \text{sd } u = \frac{\text{sn } u}{\text{dn } u} & \text{nc } u = \frac{1}{\text{cn } u} & \text{ds } u = \frac{\text{dn } u}{\text{sn } u} \\
 \text{nd } u = \frac{1}{\text{dn } u} & \text{sc } u = \frac{\text{sn } u}{\text{cn } u} & \text{cs } u = \frac{\text{cn } u}{\text{sn } u}
 \end{array} \quad (\text{A.2.9})$$

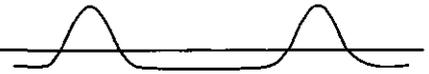
En general, si p, q, r son cualquier trío de letras s, c, d, n ,

$$pq u = \frac{pr u}{qr u} \quad (\text{A.2.10})$$

con la condición de que cuando dos letras sean las mismas (por ejemplo $pp u$) la correspondiente función es igual a la unidad.

A.2.5 APROXIMACION DE LAS FUNCIONES ELIPTICAS JACOBIANAS EN TERMINOS DE FUNCIONES CIRCULARES.

Cuando el parámetro m es tan pequeño que pueden despreciarse los valores m^2 y potencias de orden superior, las funciones elípticas jacobianas se pueden aproximar a



$$\operatorname{sn}(u/m) \approx \operatorname{senu} - \frac{1}{4} m(u - \operatorname{senu} \cos u) \cos u \quad (\text{A.2.11})$$

$$\operatorname{cn}(u/m) \approx \cos u + \frac{1}{4} m(u - \operatorname{senu} \cos u) \operatorname{senu} \quad (\text{A.2.12})$$

$$\operatorname{dn}(u/m) \approx 1 - \frac{1}{2} m \operatorname{sen}^2 u \quad (\text{A.2.13})$$

$$\operatorname{am}(u/m) \approx u - \frac{1}{4} m(u - \operatorname{senu} \cos u) \quad (\text{A.2.14})$$

A.2.6 APROXIMACION DE LAS FUNCIONES ELIPTICAS JACOBIANAS EN TERMINOS DE FUNCIONES HIPERBOLICAS.

Cuando el parámetro m es tan cercano a la unidad, m^2 , y potencias de orden superior pueden despreciarse y aplicarse las siguientes expresiones para determinar las funciones elípticas jacobianas de acuerdo a funciones hiperbólicas conocidas.

$$\operatorname{sn}(u/m) \approx \tanh u + \frac{1}{4} m_1 (\operatorname{senhu} \cosh u - u) \operatorname{sech}^2 u \quad (\text{A.2.15})$$

$$\operatorname{cn}(u/m) \approx \operatorname{sec hu} - \frac{1}{4} m_1 (\operatorname{senhu} \cosh u - u) \tanh u \operatorname{sec hu} \quad (\text{A.2.16})$$

$$\operatorname{dn}(u/m) \approx \operatorname{sec hu} + \frac{1}{4} m_1 (\operatorname{senhu} \cosh u + u) \tanh u \operatorname{sec hu} \quad (\text{A.2.17})$$

$$\operatorname{am}(u/m) \approx \operatorname{gdu} + \frac{1}{4} m_1 (\operatorname{senhu} \cosh u - u) \operatorname{sec hu} \quad (\text{A.2.18})$$

A.2.7 INTEGRALES ELIPTICAS

Si $R(x, y)$ es una función racional de x y y donde Y^2 es igual a un polinomio cúbico o de cuarto orden en x , la integral

$$\int R(x, y) dx \quad (\text{A.2.19})$$

se llama integral elíptica.

Denotando por $p_5(x)$ a un polinomio en x y sustituyendo por Y^2 se tiene que

$$R(x, y) = \frac{p_1(x) + yp_2(x)}{p_3(x) + yp_4(x)} = \frac{[p_1(x) + yp_2(x)][p_3(x) - yp_4(x)]y}{\{[p_3(x)]^2 - y^2[p_4(x)]^2\}y} = \frac{p_5(x) + yp_6(x)}{yp_7(x)}$$

$$R(x, y) = R_1(x) + \frac{R_2(x)}{y} \quad (\text{A.2.20})$$

donde $R_1(x)$ y $R_2(x)$ son funciones racionales de x .

Si se expresa $R_2(x)$ como la suma de una fracción parcial y otra fracción polinomial

$$\int R(x, y) dx = \int R_1(x) dx + \sum_s A_s \int x^s y^{-1} dx + \sum_s B_s \int [(x-c)^s y]^{-1} dx \quad (\text{A.2.21})$$

A.2.7.1 FORMAS CANONICAS DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS

Mediante algunas reducciones y ciertas transformaciones cada integral elíptica puede ser expresada de acuerdo a la integral de una función racional y en tres formas canónicas.

INTEGRAL ELIPTICA DE PRIMERA CLASE

Se llama integral elíptica de primera clase a la relación

$$F(\varphi \setminus \alpha) = F(\varphi / m) = \int_0^\varphi (1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \theta)^{-1/2} d\theta = \int_0^\varphi [(1 - t^2)(1 - mt^2)]^{-1/2} dt \quad (\text{A.2.22})$$

INTEGRAL ELIPTICA DE SEGUNDA CLASE

Está definida como

$$\begin{aligned} E(\varphi \setminus \alpha) = E(u / m) &= \int_0^\varphi (1 - t^2)^{-1/2} (1 - mt^2)^{1/2} dt = \\ &= \int_0^\varphi (1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \theta)^{1/2} d\theta = \int_0^u \text{dn}^2 w dw = m_1 u + m \int_0^u \text{cn}^2 w dw \end{aligned} \quad (\text{A.2.23})$$

INTEGRAL ELIPTICA DE TERCERA CLASE

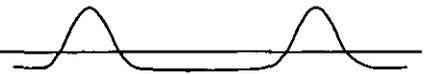
Es la integral formada por tres variables, el parámetro, la amplitud y la característica n

$$\Pi(n; \varphi \setminus \alpha) = \int_0^\varphi (1 - n \text{sen}^2 \theta)^{-1} (1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \theta)^{-1/2} d\theta \quad (\text{A.2.24})$$

o también

$$\Pi(n; u \setminus m) = \int_0^u (1 - nt^2)^{-1} [(1 - t^2)(1 - mt^2)]^{-1/2} dt = \int_0^u [1 - n \text{sn}^2(w/m)]^{-1} dw \quad (\text{A.2.25})$$

En estas integrales elípticas



$$\begin{aligned}
 m &= \text{sen}^2 \alpha = k^2 \\
 x &= \text{sen} \varphi = \text{sn } u \\
 \cos \varphi &= \text{cn } u \\
 (1 - m \text{sen}^2 \varphi)^{1/2} &= \text{dn } u = \Delta(\varphi) \\
 \varphi &= \text{arcsen}(\text{sn } u) = \text{am } u \\
 k &= \text{ns}(k + ik') \\
 k' &= \text{dn } k
 \end{aligned}
 \tag{A.2.26}$$

A.2.7.2 INTEGRALES ELIPTICAS COMPLETAS

Con respecto a las formas canónicas anotadas, las integrales elípticas son completas cuando la amplitud $\varphi = \text{am } u = \text{arc sen}(\text{sn } u) = \text{arc sen } x$ es $\frac{1}{2} \pi$ y por lo tanto $x=1$ y adoptando las expresiones indicadas a continuación

$$[K(m)] = K = \int_0^1 [(1-t^2)(1-mt^2)]^{-1/2} dt = \int_0^{\pi/2} (1 - m \text{sen}^2 \theta)^{-1/2} d\theta
 \tag{A.2.27}$$

llamada integral elíptica completa de primer orden y que también puede expresarse como:

$$K = F\left(\frac{1}{2} \pi / m\right) = F\left(\frac{1}{2} \pi / \alpha\right)$$

cuya forma se aprecia en las siguientes curvas

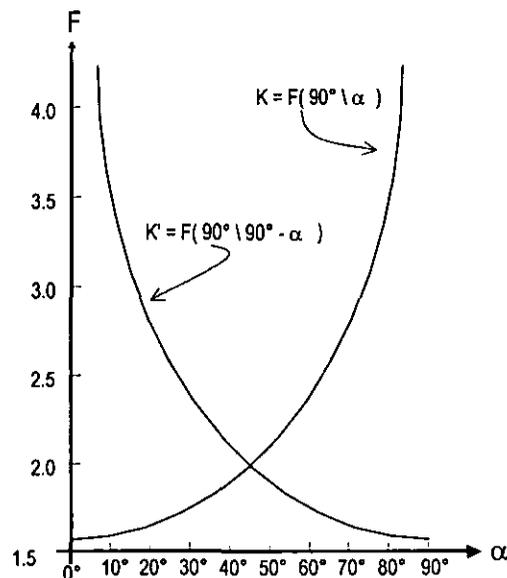


Figura A. 10 Integral elíptica completa de primer orden

Por otro lado

$$E[K(m)] = E = \int_0^1 (1-t^2)^{-1/2} (1-mt^2)^{1/2} dt = \int_0^{\pi/2} (1-m\sin^2\theta)^{1/2} d\theta \quad (\text{A.2.28})$$

$$E[K(m)] = E = E(m) = E\left(\frac{1}{2}\pi \setminus \alpha\right)$$

que corresponden a la integral elíptica completa de segundo orden y cuyo comportamiento se aprecia en las siguientes curvas

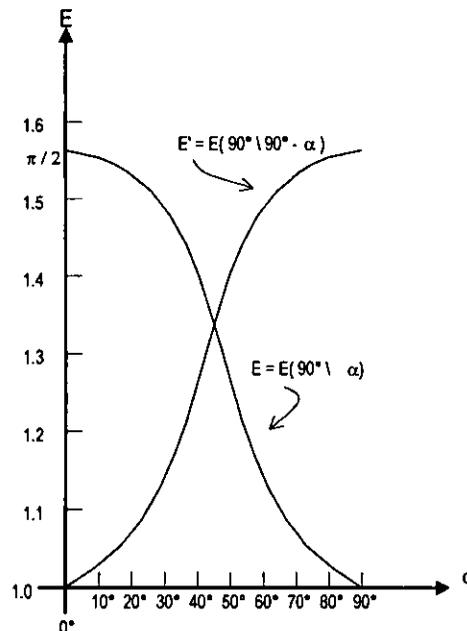


Figura A. 11 Integral elíptica completa de segunda clase

C. Hastings, Jr. propone algunas aproximaciones polinomiales para determinar estas integrales elípticas completas de primero y segundo orden

$$K(m) = (a_0 + a_1 m_1 + a_2 m_1^2) + (b_0 + b_1 m_1 + b_2 m_1^2) \ln(1/m_1) + \epsilon(m) \quad (\text{A.2.29})$$

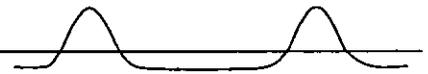
donde,

$$|\epsilon(m)| \leq 3 \times 10^{-5}$$

$$a_0 = 1.3862944 \quad b_0 = 0.5$$

$$a_1 = 0.1119723 \quad b_1 = 0.1213478$$

$$a_2 = 0.0725296 \quad b_2 = 0.0288729$$



o también

$$K(m) = (a_0 + a_1 m_1 + \dots + a_4 m_1^4) + (b_0 + b_1 m_1 + \dots + b_4 m_1^4) \ln(1/m_1) + \varepsilon(m) \quad (\text{A.2.30})$$

donde,

$$|\varepsilon(m)| \leq 2 \times 10^{-8}$$

| | |
|-----------------------|-----------------------|
| $a_0 = 1.38629436112$ | $b_0 = 0.5$ |
| $a_1 = 0.09666344259$ | $b_1 = 0.12498593597$ |
| $a_2 = 0.03590092383$ | $b_2 = 0.06880248576$ |
| $a_3 = 0.03742563713$ | $b_3 = 0.03328355346$ |
| $a_4 = 0.01451196212$ | $b_4 = 0.00441787012$ |

$$E(m) = (1 + a_1 m_1 + a_2 m_1^2) + (b_1 m_1 + b_2 m_1^2) \ln(1/m_1) + \varepsilon(m) \quad (\text{A.2.31})$$

donde,

$$|\varepsilon(m)| < 4 \times 10^{-5}$$

| | |
|-------------------|-------------------|
| $a_1 = 0.4630151$ | $b_1 = 0.2452727$ |
| $a_2 = 0.1077812$ | $b_2 = 0.0412496$ |

o también se puede emplear

$$E(m) = (1 + a_1 m_1 + \dots + a_4 m_1^4) + (b_1 m_1 + \dots + b_4 m_1^4) \ln(1/m_1) + \varepsilon(m) \quad (\text{A.2.32})$$

donde,

$$|\varepsilon(m)| < 2 \times 10^{-8}$$

| | |
|-----------------------|-----------------------|
| $a_1 = 0.44325141463$ | $b_1 = 0.24998368310$ |
| $a_2 = 0.06260601220$ | $b_2 = 0.09200180037$ |
| $a_3 = 0.04757383546$ | $b_3 = 0.04069697526$ |
| $a_4 = 0.01736506451$ | $b_4 = 0.00526449639$ |

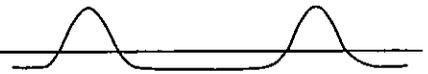
APENDICE B. Programa fuente (P-1).

```

PROGRAM TEORIA_LINEAL_PARA_OLEAJE_PROGRESIVO;
USES CRT;
VAR
  TOL, ANG, GAMA          :      REAL;
  I, N                    :      INTEGER;
  T, D, H, THETA, Z, L, C, CG, ETA, U, W, AX, AZ,
  EPSILON, ZETA, P, E, POT, A, B, FUNC, K, SIGMA,
  COSH, SINH              :      ARRAY[1..20] OF REAL;
CONST
  G      =      9.81;
  PI     =      3.141592654;

PROCEDURE LEER_DATOS;
BEGIN
  CLRSCR;
  N:=0;
  I:=0;
  WRITE('¿CUANTOS PUNTOS DEL OLEAJE DESEA ANALIZAR? (MAXIMO 20PUNTOS) ');
  READLN(N);
  FOR I:=1 TO N DO
  BEGIN
    WRITELN('DATOS PARA EL PUNTO', I, ' ');
    WRITE('INTRODUZCA EL PERIODO DEL OLEAJE, EN s. ');
    READLN(T[I]);
    WRITELN;
    WRITE('INTRODUZCA EL VALOR DE LA PROFUNDIDAD TOTAL, EN m. ');
    READLN(D[I]);
    WRITELN;
    WRITE('INTRODUZCA LA ALTURA DE LA OLA, EN m. ');
    READLN(H[I]);
    WRITELN;
    WRITE('INTRODUZCA EL ANGULO DE FASE THETA, EN GRADOS. ');
    READLN(THETA[I]);
    THETA[I]:=THETA[I]*0.017453292;{CONVERSION DE GRADOS A REDIANES}
    WRITELN;
    WRITE('INTRODUZCA LA PROFUNDIDAD DE LA PARTICULA EN ANALISIS, EN m. ');
    READLN(Z[I]);
    WRITELN;
    WRITE('INTRODUZCA EL VALOR APROXIMADO DE LA LONGITUD DE ONDA, EN m. ');
    READLN(L[I]);
    WRITELN;
  END;
  WRITE('INTRODUZCA EL PESO ESPECIFICO DEL AGUA DE MAR, EN Kg/m3. ');
  READLN(GAMA);

```



```

WRITELN;
END;

PROCEDURE NRDEL;
BEGIN {PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LA RAIZ DE L}
REPEAT
BEGIN
ANG:=2*PI*D[I]/L[I];
A[I]:=((G*SQR(T[I])* (EXP(ANG)-EXP(-ANG)))/(2*PI*(EXP(ANG)+EXP(-ANG))))-L[I];
B[I]:=(-G*SQR(T[I])*D[I])/(SQR(L[I])*SQR(EXP(ANG)+EXP(-ANG)))-1;
FUNC[I]:=A[I]/B[I];
IF ABS(FUNC[I])<TOL THEN
BEGIN
WRITE('LA LONGITUD DE LA OLA ES:      ',L[I]);
END
ELSE L[I]:=L[I]-FUNC[I];
END
UNTIL
ABS(FUNC[I])<TOL;
END;

PROCEDURE PARAMETROS_DE_LA_OLA;
BEGIN
K[I]:=2*PI/L[I];
SIGMA[I]:=2*PI/T[I];
END;

PROCEDURE CELERIDAD;
BEGIN
C[I]:=SQR((G/K[I])* ((EXP(K[I]*D[I])-EXP(-K[I]*D[I]))/((EXP(K[I]*D[I])+EXP(-K[I]*D[I])))));
END;

PROCEDURE VELOCIDAD_DE_GRUPO;
BEGIN
CG[I]:=(C[I]/2)*(1+(4*K[I]*D[I]/(EXP(2*K[I]*D[I])-EXP(-2*K[I]*D[I]))));
END;

PROCEDURE PERFIL_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
BEGIN
ETA[I]:=(H[I]/2)*COS(THETA[I]);
END;

PROCEDURE VELOCIDAD_DE_LAS_PARTICULAS;
BEGIN
COSH[I]:=((EXP(K[I]*D[I])+EXP(-K[I]*D[I]))/2);
U[I]:=(K[I]*G*H[I]/(2*SIGMA[I]))*((EXP(K[I]*(Z[I]+D[I]))+EXP(-K[I]*(Z[I]+D[I])))/2)*(COS(THETA[I]))/COSH[I];
W[I]:=(K[I]*G*H[I]/(2*SIGMA[I]))*((EXP(K[I]*(Z[I]+D[I]))-EXP(-K[I]*(Z[I]+D[I])))/2)*(SIN(THETA[I]))/COSH[I];

```

```

END;
PROCEDURE ACELERACION_DE_LAS_PARTICULAS;
BEGIN
AX[I] := (K[I]*G*H[I]/2) * ((EXP(K[I]*(Z[I]+D[I]))+EXP(-
K[I]*(Z[I]+D[I]))) / 2) * (SIN(THETA[I])) / COSH[I];
AZ[I] := (-K[I]*G*H[I]/2) * ((EXP(K[I]*(Z[I]+D[I]))-EXP(-
K[I]*(Z[I]+D[I]))) / 2) * (COS(THETA[I])) / COSH[I];
END;
PROCEDURE DESPLAZAMIENTO_DE_LAS_PARTICULAS;
BEGIN
SINH[I] := (EXP(K[I]*D[I]) - EXP(-K[I]*D[I])) / 2;
EPSILON[I] := (-H[I]/2) * ((EXP(K[I]*(Z[I]+D[I]))+EXP(-K[I]*(Z[I]+D[I]))) / 2) * (SIN(THETA[I])) / SINH[I];
ZETA[I] := (H[I]/2) * ((EXP(K[I]*(Z[I]+D[I]))-EXP(-K[I]*(Z[I]+D[I]))) / 2) * (COS(THETA[I])) / SINH[I];
END;
PROCEDURE PRESION_ABAJO_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
BEGIN
P[I] := ((GAMA*ETA[I] * (EXP(K[I]*(Z[I]+D[I]))+EXP(-K[I]*(Z[I]+D[I]))) / 2) / COSH[I]) - (GAMA*Z[I]);
END;
PROCEDURE ENERGIA_TOTAL_POR_UNIDAD_DE_CRESTA;
BEGIN
E[I] := (GAMA*SQR(H[I])*L[I]) / 8;
END;
PROCEDURE POTENCIA_POR_UNIDAD_DE_CRESTA_PROMEDIO;
BEGIN
POT[I] := (E[I] / (2*T[I])) * (1 + (4*K[I]*D[I] / (EXP(2*K[I]*D[I]) - EXP(-2*K[I]*D[I]))));
END;
PROCEDURE MUESTRA_RESULTADOS;
BEGIN
CLRSCR;
I:=1;
GOTOXY(5, I*7-5);
WRITE('CARACTERISTICAS FISICAS DEL OLAJE PROGRESIVO EN LA TEORIA LINEAL');
GOTOXY(7, I*7-4);
WRITE('T');
GOTOXY(22, I*7-4);
WRITE('D');
GOTOXY(37, I*7-4);
WRITE('H');
GOTOXY(52, I*7-4);
WRITE('THETA');
GOTOXY(67, I*7-4);
WRITE('Z');
GOTOXY(1, I*7-2+N);

WRITE('L');

```

```
GOTOXY(14, I*7-2+N);
WRITE('C');
GOTOXY(27, I*7-2+N);
WRITE('Cg');
GOTOXY(40, I*7-2+N);
WRITE('ETA');
GOTOXY(53, I*7-2+N);
WRITE('U');
GOTOXY(66, I*7-2+N);
WRITE('W');
GOTOXY(1, I+2*N+6);
WRITE('Ax');
GOTOXY(12, I+2*N+6);
WRITE('Az');
GOTOXY(23, I+2*N+6);
WRITE('EPSILON');
GOTOXY(34, I+2*N+6);
WRITE('ZETA');
GOTOXY(45, I+2*N+6);
WRITE('P');
GOTOXY(56, I+2*N+6);
WRITE('E');
GOTOXY(67, I+2*N+6);
WRITE('POT');
FOR I:=1 TO N DO
BEGIN
GOTOXY(7, I+3);
WRITE(T[I]:5:3);
GOTOXY(22, I+3);
WRITE(D[I]:5:3);
GOTOXY(37, I+3);
WRITE(H[I]:5:3);
GOTOXY(52, I+3);
WRITE(THETA[I]:5:3);
GOTOXY(67, I+3);
WRITE(Z[I]:5:3);
GOTOXY(1, 5+N+I);
WRITE(L[I]:5:3);
GOTOXY(14, 5+N+I);
WRITE(C[I]:5:3);
GOTOXY(27, 5+N+I);
WRITE(CG[I]:5:3);
GOTOXY(40, 5+N+I);
WRITE(ETA[I]:5:3);
GOTOXY(53, 5+N+I);
```

```
WRITE(U[I]:5:3);
GOTOXY(63,5+N+I);
WRITE(W[I]:5:3);
GOTOXY(1,7+2*N+I);
WRITE(AX[I]:5:3);
GOTOXY(12,7+2*N+I);
WRITE(AZ[I]:5:3);
GOTOXY(23,7+2*N+I);
WRITE(EPSILON[I]:5:3);
GOTOXY(34,7+2*N+I);
WRITE(ZETA[I]:5:3);
GOTOXY(45,7+2*N+I);
WRITE(P[I]:5:3);
GOTOXY(56,7+2*N+I);
WRITE(E[I]:5:3);
GOTOXY(67,7+2*N+I);
WRITE(POT[I]:5:3);
END;
END;
BEGIN {CUERPO DEL PROGRAMA}
TOL:=0.0001;
LEER_DATOS;
FOR I:=1 TO N DO
BEGIN
NRDEL;
PARAMETROS_DE_LA_OLA;
CELERIDAD;
VELOCIDAD_DE_GRUPO;
PERFIL_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
VELOCIDAD_DE_LAS_PARTICULAS;
ACELERACION_DE_LAS_PARTICULAS;
DESPLAZAMIENTO_DE_LAS_PARTICULAS;
PRESION_ABAJO_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
ENERGIA_TOTAL_POR_UNIDAD_DE_CRESTA;
POTENCIA_POR_UNIDAD_DE_CRESTA_PROMEDIO;
END;
MUESTRA_RESULTADOS;
END.
```

APENDICE C. Programa fuente (P-2).

```

PROGRAM TEORIA_DE_TERCERA_APROXIMACION_DE_STOKES;
{"THIS PROGRAM WAS DEVELOPED BY GUILLERMO CARDOSO LANDA"}
USES CRT;
VAR
  TOL, ANG, GAMA          :      REAL;
  I, N                    :      INTEGER;
  COSH, SINH, COSHY, SINHY, X, TI, T, D, H, THETA, Z, L, C,
  CG, ETA, U, W, AX, AZ, EPSILON, ZETA, P, E, POT,
  A, B, FUNC, K, SIGMA    :      ARRAY[1..20] OF REAL;
CONST
  G      =      9.81;
PROCEDURE LEER_DATOS;
BEGIN
  CLRSCR;
  N:=0;
  I:=0;
  WRITE('¿CUANTOS PUNTOS DEL OLEAJE DESEA ANALIZAR? (MAXIMO 20PUNTOS) ');
  READLN(N);
  FOR I:=1 TO N DO
  BEGIN
    WRITELN('DATOS PARA EL PUNTO ', I, ' ');
    WRITE('INTRODUZCA EL PERIODO DEL OLEAJE, EN s. ');
    READLN(T[I]);
    WRITELN;
    WRITE('INTRODUZCA EL VALOR DE LA PROFUNDIDAD TOTAL, EN m. ');
    READLN(D[I]);
    WRITELN;
    WRITE('INTRODUZCA LA ALTURA DE LA OLA, EN m. ');
    READLN(H[I]);
    WRITELN;
    WRITE('INTRODUZCA LA PROFUNDIDAD DE LA PARTICULA EN ANALISIS, EN m. ');
    READLN(Z[I]);
    WRITELN;
    WRITE('INTRODUZCA EL VALOR APROXIMADO DE LA LONGITUD DE ONDA, EN m. ');
    READLN(L[I]);
    WRITELN;
    WRITE('INTRODUZCA LA DISTANCIA HORIZONTAL, EN m. ');
    READLN(X[I]);
    WRITELN;
    WRITE('INTRODUZCA EL TIEMPO DE DESPLAZAMIENTO DE LA PARTICULA, EN s. ');
    READLN(TI[I]);
    WRITELN;
    WRITE('INTRODUZCA EL VALOR DE A');
    READLN(A[I]);
  
```

```

WRITELN;
END;
WRITE('INTRODUZCA EL PESO ESPECIFICO DEL AGUA DE MAR, EN Kg/m3.  ');
READLN(GAMA);
WRITELN;
END;

PROCEDURE CALCULO_DE_FUNCIONES_HIPERBOLICAS;
BEGIN
K[I]:=2*PI/L[I];
COSH[I]:=((EXP(K[I]*D[I])+EXP(-K[I]*D[I]))/2);
SINH[I]:=((EXP(K[I]*D[I])-EXP(-K[I]*D[I]))/2);
COSH[Y[I]]:=((EXP(K[I]*(Z[I]+D[I]))+EXP(-K[I]*(Z[I]+D[I])))/2);
SINH[Y[I]]:=((EXP(K[I]*(Z[I]+D[I]))-EXP(-K[I]*(Z[I]+D[I])))/2);
END;

PROCEDURE NRDEL;
BEGIN {PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LA RAIZ DE L}
REPEAT
BEGIN
ANG:=2*PI*D[I]/L[I];
A[I]:=((G*SQR(T[I])*SINH[I])/(2*PI*COSH[I]))-L[I];
B[I]:=((-G*SQR(T[I])*D[I])/(SQR(L[I])*SQR(COSH[I]))) -1;
FUNC[I]:=A[I]/B[I];
IF ABS(FUNC[I])<TOL THEN
BEGIN
WRITE('LA LONGITUD DE LA OLA ES:  ',L[I]);
END
ELSE L[I]:=L[I]-FUNC[I];
END
UNTIL
ABS(FUNC[I])<TOL;
END;

PROCEDURE PARAMETROS_DE_LA_OLA;
BEGIN
SIGMA[I]:=2*PI/T[I];
END;

PROCEDURE CELERIDAD;
BEGIN
C[I]:=SQR((G/K[I])*((EXP(K[I]*D[I])-EXP(-K[I]*D[I]))/((EXP(K[I]*D[I])+EXP(-K[I]*D[I])))));
END;

PROCEDURE VELOCIDAD_DE_GRUPO;
BEGIN
CG[I]:=0;

```

Programa fuente (P-2).



```
END;
PROCEDURE PERFIL_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
BEGIN
ETA[I] := (-H[I]/2)*COS(K[I]*X[I])*COS(SIGMA[I]*TI[I]);
END;
PROCEDURE VELOCIDAD_DE_LAS_PARTICULAS;
BEGIN
U[I] := (-H[I]/(2*SIGMA[I]))*COSHY[I]*(COS(K[I]*X[I]))*(SIN(SIGMA[I]*TI[I]))/SINH[I];
W[I] := (H[I]/(2*SIGMA[I]))*SINH[Y[I]]*(COS(K[I]*X[I]))*(SIN(SIGMA[I]*TI[I]))/SINH[I];
END;
PROCEDURE ACELERACION_DE_LAS_PARTICULAS;
BEGIN
AX[I] := (H[I]/(2*SQR(SIGMA[I]))) *COSH[Y[I]]*(SIN(K[I]*X[I]))*(COS(SIGMA[I]*TI[I]))/SINH[I];
AZ[I] := (H[I]/(2*SQR(SIGMA[I]))) *SINH[Y[I]]*(COS(K[I]*X[I]))*(COS(SIGMA[I]*TI[I]))/SINH[I];
END;
PROCEDURE DESPLAZAMIENTO_DE_LAS_PARTICULAS;
BEGIN
EPSILON[I] := (H[I]/2)*COSH[Y[I]]*(SIN(K[I]*X[I]))*(COS(SIGMA[I]*TI[I]))/SINH[I];
ZETA[I] := (-H[I]/2)*SINH[Y[I]]*(COS(K[I]*X[I]))*(COS(SIGMA[I]*TI[I]))/SINH[I];
END;
PROCEDURE PRESION_ABAJO_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
BEGIN
P[I] := (-GAMA*H[I]/2*COSH[Y[I]]/COSH[I])*COS(K[I]*X[I])*COS(SIGMA[I]*TI[I])-(GAMA*Z[I]);
END;
PROCEDURE ENERGIA_TOTAL_POR_UNIDAD_DE_CRESTA;
BEGIN
E[I] := (GAMA*SQR(H[I])*L[I])/16;
END;
PROCEDURE POTENCIA_POR_UNIDAD_DE_CRESTA_PROMEDIO;
BEGIN
POT[I] := 0;
END;
PROCEDURE MUESTRA_RESULTADOS;
BEGIN
CLRSCR;
I:=1;
GOTOXY(5,I*7-5);
WRITE('CARACTERISTICAS FISICAS DEL OLEAJE PROGRESIVO EN LA TEORIA LINEAL');
GOTOXY(7,I*7-4);
WRITE('T');
GOTOXY(22,I*7-4);
WRITE('D');
GOTOXY(37,I*7-4);
WRITE('H');
GOTOXY(52,I*7-4);
```

```
WRITE('Z');
GOTOXY(1, I*7-2+N);
WRITE('L');
GOTOXY(14, I*7-2+N);
WRITE('C');
GOTOXY(27, I*7-2+N);
WRITE('Cg');
GOTOXY(40, I*7-2+N);
WRITE('ETA');
GOTOXY(53, I*7-2+N);
WRITE('U');
GOTOXY(66, I*7-2+N);
WRITE('W');
GOTOXY(1, I+2*N+6);
WRITE('Ax');
GOTOXY(12, I+2*N+6);
WRITE('Az');
GOTOXY(23, I+2*N+6);
WRITE('EPSILON');
GOTOXY(34, I+2*N+6);
WRITE('ZETA');
GOTOXY(45, I+2*N+6);
WRITE('P');
GOTOXY(56, I+2*N+6);
WRITE('E');
GOTOXY(67, I+2*N+6);
WRITE('POT');
FOR I:=1 TO N DO
BEGIN
GOTOXY(7, I+3);
WRITE(T[I]:5:3);
GOTOXY(22, I+3);
WRITE(D[I]:5:3);
GOTOXY(37, I+3);
WRITE(H[I]:5:3);
GOTOXY(52, I+3);
WRITE(Z[I]:5:3);
GOTOXY(1, 5+N+I);
WRITE(L[I]:5:3);
GOTOXY(14, 5+N+I);
WRITE(C[I]:5:3);
GOTOXY(27, 5+N+I);
WRITE(CG[I]:5:3);
GOTOXY(40, 5+N+I);
WRITE(ETA[I]:5:3);
```

Programa fuente (P-2).

```
GOTOXY(53,5+N+I);
WRITE(U[I]:5:3);
GOTOXY(63,5+N+I);
WRITE(W[I]:5:3);
GOTOXY(1,7+2*N+I);
WRITE(AX[I]:5:3);
GOTOXY(12,7+2*N+I);
WRITE(AZ[I]:5:3);
GOTOXY(23,7+2*N+I);
WRITE(EPSILON[I]:5:3);
GOTOXY(34,7+2*N+I);
WRITE(ZETA[I]:5:3);
GOTOXY(45,7+2*N+I);
WRITE(P[I]:5:3);
GOTOXY(56,7+2*N+I);
WRITE(E[I]:5:3);
GOTOXY(67,7+2*N+I);
WRITE(POT[I]:5:3);
END;
END;
BEGIN {CUERPO DEL PROGRAMA}
TOL:=0.0001;
LEER_DATOS;
FOR I:=1 TO N DO
BEGIN
CALCULO_DE_FUNCIONES_HIPERBOLICAS;
NRDEL;
PARAMETROS_DE_LA_OLA;
CELERIDAD;
VELOCIDAD_DE_GRUPO;
PERFIL_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
VELOCIDAD_DE_LAS_PARTICULAS;
ACELERACION_DE_LAS_PARTICULAS;
DESPLAZAMIENTO_DE_LAS_PARTICULAS;
PRESION_ABAJO_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
ENERGIA_TOTAL_POR_UNIDAD_DE_CRESTA;
POTENCIA_POR_UNIDAD_DE_CRESTA_PROMEDIO;
END;
MUESTRA_RESULTADOS;
END.
```

APENDICE D. Programa fuente (P-3).

```
PROGRAM TEORIA_DE_SEGUNDA_APROXIMACION_DE_STOKES_PARA_OLEAJE_PROGRESIVO;
```

```
USES CRT;
```

```
VAR
```

```
TOL, ANG, GAMA          :      REAL;
```

```
I, N                   :      INTEGER;
```

```
COSHY, SINHY, COS2HY, SIN2HY, T, D, H, THETA,
```

```
Z, L, C, CG, ETA, U, W, AX, AZ, EPSILON, ZETA, P,
```

```
E, TM, A, B, AA, BB, FF, GG, HH, II, JJ, KK, LL, MM,
```

```
NN, FUNC, K, SIGMA, COSH, SINH, TI          :      ARRAY[1..20] OF REAL;
```

```
CONST
```

```
G      =      9.81;
```

```
PI     =      3.141592654;
```

```
PROCEDURE LEER_DATOS;
```

```
BEGIN
```

```
CLRSCR;
```

```
N:=0;
```

```
I:=0;
```

```
WRITE('¿CUANTOS PUNTOS DEL OLEAJE DESEA ANALIZAR? (MAXIMO 20PUNTOS) ');
```

```
READLN(N);
```

```
FOR I:=1 TO N DO
```

```
BEGIN
```

```
WRITELN('DATOS PARA EL PUNTO' , I , '');
```

```
WRITE('INTRODUZCA EL PERIODO DEL OLEAJE, EN s. ');
```

```
READLN(T[I]);
```

```
WRITELN;
```

```
WRITE('INTRODUZCA EL VALOR DE LA PROFUNDIDAD TOTAL, EN m. ');
```

```
READLN(D[I]);
```

```
WRITELN;
```

```
WRITE('INTRODUZCA LA ALTURA DE LA OLA, EN m. ');
```

```
READLN(H[I]);
```

```
WRITELN;
```

```
WRITE('INTRODUZCA LA PROFUNDIDAD DE LA PARTICULA EN ANALISIS, EN m. ');
```

```
READLN(Z[I]);
```

```
WRITELN;
```

```
WRITE('INTRODUZCA EL VALOR APROXIMADO DE LA LONGITUD DE ONDA, EN m. ');
```

```
READLN(L[I]);
```

```
WRITELN;
```

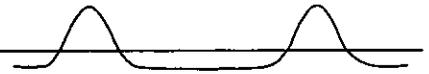
```
WRITE('INTRODUZCA EL ANGULO DE FASE THETA, EN GRADOS. ');
```

```
READLN(THETA[I]);
```

```
THETA[I]:=THETA[I]*0.017453292;{CONVERSION DE GRADOS A REDIANES}
```

```
WRITELN;
```

```
WRITE('INTRODUZCA EL TIEMPO DE DESPLAZAMIENTO DE LA PARTICULA, EN s. ');
```



```

READLN(TI [I]);
WRITELN;
END;
WRITE('INTRODUZCA EL PESO ESPECIFICO DEL AGUA DE MAR, EN Kg/m3.  ');
READLN(GAMA);
WRITELN;
END;

PROCEDURE NRDEL;
BEGIN {PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LA RAIZ DE L}
REPEAT
BEGIN
ANG:=2*PI*D[I]/L[I];
A[I]:=((G*SQR(T[I])*(EXP(ANG)-EXP(-ANG)))/(2*PI*(EXP(ANG)+EXP(-ANG))))-L[I];
B[I]:=(-G*SQR(T[I])*D[I])/(SQR(L[I])*SQR(EXP(ANG)+EXP(-ANG)))-1;
FUNC[I]:=A[I]/B[I];
IF ABS(FUNC[I])<TOL THEN
BEGIN
WRITE('LA LONGITUD DE LA OLA ES:      ',L[I]);
END
ELSE L[I]:=L[I]-FUNC[I];
END
UNTIL
ABS(FUNC[I])<TOL;
END;

PROCEDURE PARAMETROS_DE_LA_OLA;
BEGIN
K[I]:=2*PI/L[I];
SIGMA[I]:=2*PI/T[I];
END;

PROCEDURE CELERIDAD;
BEGIN
C[I]:=SQRT((G/K[I])*((EXP(K[I]*D[I])-EXP(-K[I]*D[I]))/((EXP(K[I]*D[I])+EXP(-K[I]*D[I])))));
END;

PROCEDURE VELOCIDAD_DE_GRUPO;
BEGIN
CG[I]:=0;
END;

PROCEDURE PERFIL_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
BEGIN
SINH[I]:=((EXP(K[I]*D[I])-EXP(-K[I]*D[I]))/2);
AA[I]:=(EXP(2*K[I]*D[I])+EXP(-2*K[I]*D[I]))/2;
BB[I]:=(EXP(K[I]*D[I]*(2+AA[I]))+EXP(-K[I]*D[I]*(2+AA[I])))/2;
FF[I]:=SINH[I]*SQR(SINH[I]);

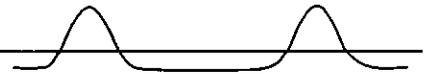
```

```

ETA[I] := (H[I]/2)*COS(THETA[I])+(K[I]*SQR(H[I])*BB[I]*COS(2*THETA[I]))/(16*FF[I]);
END;
PROCEDURE VELOCIDAD_DE_LAS_PARTICULAS;
BEGIN
COSH[I] := ((EXP(K[I]*D[I])+EXP(-K[I]*D[I]))/2);
SINH[I] := ((EXP(K[I]*D[I])-EXP(-K[I]*D[I]))/2);
COSHY[I] := ((EXP(K[I]*(Z[I]+D[I]))+EXP(-K[I]*(Z[I]+D[I])))/2);
SINHY[I] := ((EXP(K[I]*(Z[I]+D[I]))-EXP(-K[I]*(Z[I]+D[I])))/2);
COS2HY[I] := ((EXP(2*K[I]*(Z[I]+D[I]))+EXP(-2*K[I]*(Z[I]+D[I])))/2);
SIN2HY[I] := ((EXP(2*K[I]*(Z[I]+D[I]))-EXP(-2*K[I]*(Z[I]+D[I])))/2);
GG[I] := 16*SQR(SINH[I])*SQR(SINH[I]);
U[I] := (H[I]/(2*SIGMA[I]))*COSHY[I]*(COS(THETA[I]))/SINH[I]+(3*K[I]*SIGMA[I]*SQR(H[I])*COS2HY[I]*C
OS(2*THETA[I]))/(GG[I]);
W[I] := (H[I]/(2*SIGMA[I]))*SINHY[I]*(SIN(THETA[I]))/SINH[I]+(3*K[I]*SIGMA[I]*SQR(H[I])*SIN2HY[I]*S
IN(2*THETA[I]))/(GG[I]);
END;
PROCEDURE ACELERACION_DE_LAS_PARTICULAS;
BEGIN
HH[I] := 2*(3*K[I]*SQR(SIGMA[I])*SQR(H[I])*COS2HY[I]*SIN(2*THETA[I]))/(GG[I]);
II[I] := 2*(3*K[I]*SQR(SIGMA[I])*SQR(H[I])*SIN2HY[I]*COS(2*THETA[I]))/(GG[I]);
AX[I] := ((H[I]/(2*SQR(SIGMA[I]))) * COSHY[I] * (SIN(THETA[I]))/SINH[I]) + HH[I];
AZ[I] := ((-H[I]/(2*SQR(SIGMA[I]))) * SINHY[I] * (COS(THETA[I]))/SINH[I]) - II[I];
END;
PROCEDURE DESPLAZAMIENTO_DE_LAS_PARTICULAS;
BEGIN
JJ[I] := (K[I]*SQR(H[I])/(16*SQR(SINH[I]))) * (1 - (1.5*COS2HY[I]/SQR(SINH[I])));
KK[I] := (K[I]*SQR(H[I])*SIGMA[I]*TI[I]*COS2HY[I]/(8*SQR(SINH[I])));
LL[I] := 0.5*(3*K[I]*SQR(H[I])*SIN2HY[I]*COS(2*THETA[I]))/(GG[I]);
EPSILON[I] := ((-H[I]/2)*COSHY[I]*(SIN(THETA[I]))/SINH[I]) + JJ[I]*SIN(2*THETA[I]) + KK[I];
ZETA[I] := ((H[I]/2)*SINHY[I]*(COS(THETA[I]))/SINH[I]) + LL[I] + (K[I]*SQR(H[I])*SIN2HY[I]/(16*SQR(SINH
[I])));
END;
PROCEDURE PRESION_ABAJO_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
BEGIN
MM[I] := -GAMA*Z[I] + (H[I]*GAMA*COSHY[I]*COS(THETA[I]))/(2*COSH[I]);
NN[I] := (3*K[I]*SQR(H[I])*GAMA/(16*SINH[I]*COSH[I])) * ((COS2HY[I]/SQR(SINH[I])) -
(1/3))*COS(2*THETA[I]);
P[I] := MM[I] + NN[I] - ((K[I]*SQR(H[I])*GAMA/(16*SINH[I]*COSH[I]))*COS2HY[I]);
END;
PROCEDURE ENERGIA_TOTAL_POR_UNIDAD_DE_CRESTA;
BEGIN
E[I] := 0;
END;
PROCEDURE TRANSPORTE_DE_MASA;
BEGIN

```

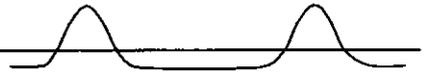
Programa fuente (P-3).



```
TM[I] :=SQR(K[I])*SQR(H[I])*C[I]*COS2HY[I]/(8*SQR(SINH[I]));
END;
PROCEDURE MUESTRA_RESULTADOS;
BEGIN
CLRSCR;
I:=1;
GOTOXY(5,I*7-5);
WRITE('CARACTERISTICAS FISICAS DEL OLEAJE PROGRESIVO EN LA TEORIA LINEAL');
GOTOXY(7,I*7-4);
WRITE('T');
GOTOXY(22,I*7-4);
WRITE('D');
GOTOXY(37,I*7-4);
WRITE('H');
GOTOXY(52,I*7-4);
WRITE('Z');
GOTOXY(1,I*7-2+N);
WRITE('L');
GOTOXY(14,I*7-2+N);
WRITE('C');
GOTOXY(27,I*7-2+N);
WRITE('Cg');
GOTOXY(40,I*7-2+N);
WRITE('ETA');
GOTOXY(53,I*7-2+N);
WRITE('U');
GOTOXY(66,I*7-2+N);
WRITE('W');
GOTOXY(1,I+2*N+6);
WRITE('Ax');
GOTOXY(12,I+2*N+6);
WRITE('Az');
GOTOXY(23,I+2*N+6);
WRITE('EPSILON');
GOTOXY(34,I+2*N+6);
WRITE('ZETA');
GOTOXY(45,I+2*N+6);
WRITE('P');
GOTOXY(56,I+2*N+6);
WRITE('E');
GOTOXY(67,I+2*N+6);
WRITE('TM');
FOR I:=1 TO N DO
BEGIN
GOTOXY(7,I+3);
```

```
WRITE(T[I]:5:3);
GOTOXY(22,I+3);
WRITE(D[I]:5:3);
GOTOXY(37,I+3);
WRITE(H[I]:5:3);
GOTOXY(52,I+3);
WRITE(Z[I]:5:3);
GOTOXY(1,5+N+I);
WRITE(L[I]:5:3);
GOTOXY(14,5+N+I);
WRITE(C[I]:5:3);
GOTOXY(27,5+N+I);
WRITE(CG[I]:5:3);
GOTOXY(40,5+N+I);
WRITE(ETA[I]:5:3);
GOTOXY(53,5+N+I);
WRITE(U[I]:5:3);
GOTOXY(63,5+N+I);
WRITE(W[I]:5:3);
GOTOXY(1,7+2*N+I);
WRITE(AX[I]:5:3);
GOTOXY(12,7+2*N+I);
WRITE(AZ[I]:5:3);
GOTOXY(23,7+2*N+I);
WRITE(EPSILON[I]:5:3);
GOTOXY(34,7+2*N+I);
WRITE(ZETA[I]:5:3);
GOTOXY(45,7+2*N+I);
WRITE(P[I]:5:3);
GOTOXY(56,7+2*N+I);
WRITE(E[I]:5:3);
GOTOXY(67,7+2*N+I);
WRITE(TM[I]:5:3);
END;
END;
BEGIN {CUERPO DEL PROGRAMA}
TOL:=0.0001;
LEER_DATOS;
FOR I:=1 TO N DO
BEGIN
NRDEL;
PARAMETROS_DE_LA_OLA;
CELERIDAD;
VELOCIDAD_DE_GRUPO;
PERFIL_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
```

Programa fuente (P-3).



```
VELOCIDAD_DE_LAS_PARTICULAS;  
ACELERACION_DE_LAS_PARTICULAS;  
DESPLAZAMIENTO_DE_LAS_PARTICULAS;  
PRESION_ABAJO_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;  
ENERGIA_TOTAL_POR_UNIDAD_DE_CRESTA;  
TRANSPORTE_DE_MASA;  
END;  
MUESTRA_RESULTADOS;  
END.
```

APENDICE E. Programa fuente (P-4).

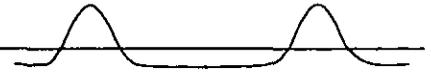
```

PROGRAM TEORIA_DE_TERCERA_APROXIMACION_DE_STOKES;
{"THIS PROGRAM WAS DEVELOPED BY GUILLERMO CARDOSO LANDA"}
USES CRT;
VAR
    TOL, ANG, GAMA          :      REAL;
    I, N                    :      INTEGER;
    COSH, SINH, COS2H, SIN2H, COSHY, SINHY,
    COS2HY, SIN2HY, COS3HY, SIN3HY, X, TI, T, D,
    H, THETA, Z, L, C, CG, ETA, U, W, AX, AZ, EPSILON,
    ZETA, P, E, POT, A, B, FUNC, K, SIGMA, F1, F2, F3,
    F4, F5, COEF            :      ARRAY[1..20] OF REAL;

CONST
    G      =      9.81;
    {PI    =      3.141592654;}

PROCEDURE LEER_DATOS;
BEGIN
    CLRSCR;
    N:=0;
    I:=0;
    WRITE('¿CUANTOS PUNTOS DEL OLEAJE DESEA ANALIZAR? (MAXIMO 20PUNTOS) ');
    READLN(N);
    FOR I:=1 TO N DO
    BEGIN
        WRITELN('DATOS PARA EL PUNTO ', I, ' ');
        WRITE('INTRODUZCA EL PERIODO DEL OLEAJE, EN s. ');
        READLN(T[I]);
        WRITELN;
        WRITE('INTRODUZCA EL VALOR DE LA PROFUNDIDAD TOTAL, EN m. ');
        READLN(D[I]);
        WRITELN;
        WRITE('INTRODUZCA LA ALTURA DE LA OLA, EN m. ');
        READLN(H[I]);
        WRITELN;
        WRITE('INTRODUZCA LA PROFUNDIDAD DE LA PARTICULA EN ANALISIS, EN m. ');
        READLN(Z[I]);
        WRITELN;
        WRITE('INTRODUZCA EL VALOR APROXIMADO DE LA LONGITUD DE ONDA, EN m. ');
        READLN(L[I]);
        WRITELN;
        WRITE('INTRODUZCA LA DISTANCIA HORIZONTAL, EN m. ');
        READLN(X[I]);
        WRITELN;
    
```

Programa fuente (P-4).



```

WRITE('INTRODUZCA EL TIEMPO DE DESPLAZAMIENTO DE LA PARTICULA, EN s.  ');
READLN(TI[I]);
WRITELN;
WRITE('INTRODUZCA EL VALOR DE A');
READLN(A[I]);
WRITELN;
END;
WRITE('INTRODUZCA EL PESO ESPECIFICO DEL AGUA DE MAR, EN Kg/m3.  ');
READLN(GAMA);
WRITELN;
END;

PROCEDURE CALCULO_DE_FUNCIONES_HIPERBOLICAS;
BEGIN
K[I] := 2*PI/L[I];
COSH[I] := ((EXP(K[I]*D[I]) + EXP(-K[I]*D[I]))/2);
SINH[I] := ((EXP(K[I]*D[I]) - EXP(-K[I]*D[I]))/2);
COS2H[I] := ((EXP(2*K[I]*D[I]) + EXP(-2*K[I]*D[I]))/2);
SIN2H[I] := ((EXP(2*K[I]*D[I]) - EXP(-2*K[I]*D[I]))/2);
COSH[Y] := ((EXP(K[I]*(Z[I]+D[I])) + EXP(-K[I]*(Z[I]+D[I])))/2);
SINH[Y] := ((EXP(K[I]*(Z[I]+D[I])) - EXP(-K[I]*(Z[I]+D[I])))/2);
COS2HY[I] := ((EXP(2*K[I]*(Z[I]+D[I])) + EXP(-2*K[I]*(Z[I]+D[I])))/2);
SIN2HY[I] := ((EXP(2*K[I]*(Z[I]+D[I])) - EXP(-2*K[I]*(Z[I]+D[I])))/2);
COS3HY[I] := ((EXP(3*K[I]*(Z[I]+D[I])) + EXP(-3*K[I]*(Z[I]+D[I])))/2);
SIN3HY[I] := ((EXP(3*K[I]*(Z[I]+D[I])) - EXP(-3*K[I]*(Z[I]+D[I])))/2);
END;

PROCEDURE NRDEL;
BEGIN {PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LA RAIZ DE L}
REPEAT
BEGIN
A[I] := (((G+SQR(T[I])*SINH[I])/(2*PI*COSH[I]))*
(1+SQR(2*PI*A[I]/L[I]))*(14+4*SQR(COS2H[I]))/(16*SQR(SINH[I])*SQR(SINH[I])))-L[I]);
B[I] := ((-G*SQR(T[I])*D[I])/(SQR(L[I])*SQR(COSH[I])))+((-
G*SQR(T[I])*D[I])/(SQR(L[I])*SQR(COSH[I])))*
(SQR(2*PI*A[I]/L[I]))*(14+4*SQR(COS2H[I]))/(16*SQR(SINH[I])*SQR(SINH[I]))+(G*SQR(T[I])*SINH[I]/2*
PI*COSH[I]))*
(((SQR(PI)*SQR(A[I]))*(14+4*SQR(COS2H[I]))/(L[I]*SQR(L[I])*2*SQR(SQR(SINH[I]))))+
(8*PI*SQR(PI)*SQR(A[I])*D[I])*(-
SINH[I]*COS2H[I]*SIN2H[I]+3.5*COSH[I]+SQR(COS2H[I])*COSH[I])/(SQR(SQR(L[I]))*
SQR(SQR(SINH[I])*SINH[I])))-1;
FUNC[I] := A[I]/B[I];
IF ABS(FUNC[I]) < TOL THEN
BEGIN
WRITE('LA LONGITUD DE LA OLA ES:  ',L[I]);

```

```

END
ELSE L[I] := L[I] - FUNC[I];
END
UNTIL
ABS (FUNC [I]) < TOL;
END;

PROCEDURE PARAMETROS_DE_LA_OLA;
BEGIN
SIGMA[I] := 2*PI/T[I];
END;
PROCEDURE CELERIDAD;
BEGIN
C[I] := SQRT(((G*L[I]*SINH[I])/(2*PI*COSH[I]))*(1+SQR(PI*A[I]/L[I]))*((14+4*SQR(COS2H[I]))/(16*SQR(SQR(SINH[I])))))));
END;
PROCEDURE VELOCIDAD_DE_GRUPO;
BEGIN
CG[I] := 0;
END;
PROCEDURE PERFIL_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
BEGIN
F4[I] := ((2+COS2H[I])*COSH[I])/(2*SQR(SINH[I])*SINH[I]);
F5[I] := (3/16)*((1+8*SQR(SQR(COSH[I])*SQR(COSH[I])))/(SQR(SQR(SINH[I])*SQR(SINH[I]))));
ETA[I] := (A[I]*COS(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I])/2)+(PI*SQR(A[I])*F4[I]*COS(2*(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]))/L[I])+(SQR(PI)*SQR(A[I])*A[I]*F5[I]*COS(3*(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]))/SQR(L[I]));
END;
PROCEDURE VELOCIDAD_DE_LAS_PARTICULAS;
BEGIN
COEF[I] := 2*PI*A[I]/L[I];
F1[I] := (COEF[I]/SINH[I])-(SQR(COEF[I])*((1+5*SQR(COSH[I]))*SQR(COSH[I]))/(8*SQR(SQR(SINH[I])*SINH[I])));
F2[I] := 0.75*SQR(COEF[I])/SQR(SQR(SINH[I]));
F3[I] := (3/64)*SQR(COEF[I])*COEF[I]*(11-2*COS2H[I])/((SQR(SQR(SQR(SINH[I])))/SINH[I]));
U[I] := C[I]*(F1[I]*COSH[Y[I]*COS(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I])+(F2[I]*COS2HY[I]*COS(2*(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]))+(F3[I]*COS3HY[I]*COS(3*(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]))));
W[I] := C[I]*(F1[I]*SINH[Y[I]*SIN(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I])+(F2[I]*SIN2HY[I]*SIN(2*(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]))+(F3[I]*SIN3HY[I]*SIN(3*(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]))));
END;
PROCEDURE ACELERACION_DE_LAS_PARTICULAS;
BEGIN
AX[I] := ((2*PI*C[I]*F1[I]*COSH[Y[I]*SIN(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]))/T[I])+

```



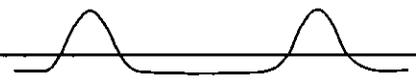
```

(4*PI*C[I]*F2[I]*COS2HY[I]*SIN(2*(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]))/T[I])+
(6*PI*C[I]*F3[I]*COS3HY[I]*SIN(3*(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]))/T[I]);
AZ[I]:=((-2*PI*C[I]*F1[I]*SINH[Y[I]*SIN(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]))/T[I])-
(4*PI*C[I]*F2[I]*SIN2HY[I]*SIN(2*(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]))/T[I])-
(6*PI*C[I]*F3[I]*SIN3HY[I]*SIN(3*(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]))/T[I]);
END;
PROCEDURE DESPLAZAMIENTO_DE_LAS_PARTICULAS;
BEGIN
EPSILON[I]:=((-L[I]/2*PI)*((F1[I]*(1-
(SQR(F1[I]))/8)*COSH[Y[I]]+((3*SQR(SQR(F1[I]))+10*F1[I]*F2[I])*(COS3HY[I])/8)))*
(SIN(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]))-(L[I]/(4*PI))*(-
0.5*SQR(F1[I])+F2[I]*COS2HY[I])*(SIN(2*(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*
TI[I])))-(L[I]/(6*PI))*(0.25*F1[I]*((SQR(F1[I])-5*F2[I])*COSH[Y[I]]+F3[I]*COS3HY[I])*
SIN(3*(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]))+(C[I]*TI[I]*SQR(F1[I])/2)*(COS2HY[I]-F1[I]*COSH[Y[I]*COS2HY[I]*
COS(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]));
ZETA[I]:=((L[I]/2*PI)*((F1[I]*(1-
3*(SQR(F1[I]))/8)*SINH[Y[I]]+((SQR(SQR(F1[I]))/F1[I]+6*F1[I]*F2[I])*(SIN3HY[I])/8)))*
(COS(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]))+(L[I]/(4*PI))*(F2[I]*SIN2HY[I])*(COS(2*(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*
TI[I])))+(L[I]/(6*PI))*((-0.75*F1[I]*F2[I]*(SINH[Y[I]]+F3[I]*SIN3HY[I]))*COS(3*(K[I]*X[I]-
SIGMA[I]*TI[I]))
-(C[I]*TI[I]*F1[I]*SQR(F1[I])/2)*(SINH[Y[I]*COS2HY[I]*SIN(K[I]*X[I]-SIGMA[I]*TI[I]));
END;
PROCEDURE PRESION_ABAJO_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
BEGIN
P[I]:=0;
END;
PROCEDURE ENERGIA_TOTAL_POR_UNIDAD_DE_CRESTA;
BEGIN
E[I]:=0;
END;
PROCEDURE POTENCIA_POR_UNIDAD_DE_CRESTA_PROMEDIO;
BEGIN
POT[I]:=0;
END;
PROCEDURE MUESTRA_RESULTADOS;
BEGIN
CLRSCR;
I:=1;
GOTOXY(5,I*7-5);
WRITE('CARACTERISTICAS FISICAS DEL OLEAJE PROGRESIVO EN LA TEORIA LINEAL');
GOTOXY(7,I*7-4);
WRITE('T');
GOTOXY(22,I*7-4);
WRITE('D');
GOTOXY(37,I*7-4);

```

```
WRITE('H');
GOTOXY(52, I*7-4);
WRITE('Z');
GOTOXY(1, I*7-2+N);
WRITE('L');
GOTOXY(14, I*7-2+N);
WRITE('C');
GOTOXY(27, I*7-2+N);
WRITE('Cg');
GOTOXY(40, I*7-2+N);
WRITE('ETA');
GOTOXY(53, I*7-2+N);
WRITE('U');
GOTOXY(66, I*7-2+N);
WRITE('W');
GOTOXY(1, I+2*N+6);
WRITE('Ax');
GOTOXY(12, I+2*N+6);
WRITE('Az');
GOTOXY(23, I+2*N+6);
WRITE('EPSILON');
GOTOXY(34, I+2*N+6);
WRITE('ZETA');
GOTOXY(45, I+2*N+6);
WRITE('P');
GOTOXY(56, I+2*N+6);
WRITE('E');
GOTOXY(67, I+2*N+6);
WRITE('POT');
FOR I:=1 TO N DO
BEGIN
GOTOXY(7, I+3);
WRITE(T[I]:5:3);
GOTOXY(22, I+3);
WRITE(D[I]:5:3);
GOTOXY(37, I+3);
WRITE(H[I]:5:3);
GOTOXY(52, I+3);
WRITE(Z[I]:5:3);
GOTOXY(1, 5+N+I);
WRITE(L[I]:5:3);
GOTOXY(14, 5+N+I);
WRITE(C[I]:5:3);
GOTOXY(27, 5+N+I);
WRITE(CG[I]:5:3);
```

Programa fuente (P-4).



```
GOTOXY(40,5+N+I);
WRITE(ETA[I]:5:3);
GOTOXY(53,5+N+I);
WRITE(U[I]:5:3);
GOTOXY(63,5+N+I);
WRITE(W[I]:5:3);
GOTOXY(1,7+2*N+I);
WRITE(AX[I]:5:3);
GOTOXY(12,7+2*N+I);
WRITE(AZ[I]:5:3);
GOTOXY(23,7+2*N+I);
WRITE(EPSILON[I]:5:3);
GOTOXY(34,7+2*N+I);
WRITE(ZETA[I]:5:3);
GOTOXY(45,7+2*N+I);
WRITE(P[I]:5:3);
GOTOXY(56,7+2*N+I);
WRITE(E[I]:5:3);
GOTOXY(67,7+2*N+I);
WRITE(POT[I]:5:3);
END;
END;
BEGIN {CUERPO DEL PROGRAMA}
TOL:=0.0001;
LEER_DATOS;
FOR I:=1 TO N DO
BEGIN
CALCULO_DE_FUNCIONES_HIPERBOLICAS;
NRDEL;
PARAMETROS_DE_LA_OLA;
CELERIDAD;
VELOCIDAD_DE_GRUPO;
PERFIL_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
VELOCIDAD_DE_LAS_PARTICULAS;
ACELERACION_DE_LAS_PARTICULAS;
DESPLAZAMIENTO_DE_LAS_PARTICULAS;
PRESION_ABAJO_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
ENERGIA_TOTAL_POR_UNIDAD_DE_CRESTA;
POTENCIA_POR_UNIDAD_DE_CRESTA_PROMEDIO;
END;
MUESTRA_RESULTADOS;
END.
```

APENDICE F. Programa fuente (P-5).

PROGRAM TEORIA_CNIDAL_DE_PRIMERA_APROXIMACION;

USES CRT;

VAR

```

TOL, ANG, GAMA, M, M1, EK, KK, YT           :      REAL;
I, N                                         :      INTEGER;
COSHY, SINHY, COSH, SINH, T, D, H, Z, L, C, CG, U, W, AX, AZ,
EPSILON, ZETA, P, E, K, TI, UM, X, SN, CN, DN, YS, THETA :      ARRAY[1..20] OF REAL;

```

CONST

```

G = 9.81;
PI = 3.141592654;
A0 = 1.38629436112; B0 = 0.5;
A1 = 0.09666344259; B1 = 0.12498593597; C1 = 0.44325141463; D1 = 0.24998368310;
A2 = 0.03590092383; B2 = 0.06880248576; C2 = 0.06260601220; D2 = 0.09200180037;
A3 = 0.03742563713; B3 = 0.03328355346; C3 = 0.04757383546; D3 = 0.04069697526;
A4 = 0.01451196212; B4 = 0.00441787012; C4 = 0.01736506451; D4 = 0.00526449639;

```

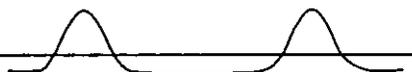
PROCEDURE LEER_DATOS;

BEGIN

```

  CLRSCR;
  N:=0;
  I:=0;
  WRITE('¿CUANTOS PUNTOS DEL OLEAJE DESEA ANALIZAR? (MAXIMO 20PUNTOS) ');
  READLN(N);
  FOR I:=1 TO N DO
    BEGIN
      Writeln('DATOS PARA EL PUNTO' , I , ' ');
      WRITE('INTRODUZCA EL PERIODO DEL OLEAJE, EN s. ');
      READLN(T[I]);
      Writeln;
      WRITE('INTRODUZCA EL VALOR DE LA PROFUNDIDAD TOTAL, EN m. ');
      READLN(D[I]);
      Writeln;
      WRITE('INTRODUZCA LA ALTURA DE LA OLA, EN m. ');
      READLN(H[I]);
      Writeln;
      WRITE('INTRODUZCA LA PROFUNDIDAD DE LA PARTICULA EN ANALISIS, EN m. ');
      READLN(Z[I]);
      Writeln;
      WRITE('INTRODUZCA EL VALOR APROXIMADO DE LA LONGITUD DE ONDA, EN m. ');
      READLN(L[I]);
      Writeln;
      WRITE('INTRODUZCA EL ANGULO DE FASE THETA, EN GRADOS. ');

```



```

      READLN (THETA [I] );
      THETA [I] :=THETA [I] *0.017453292; {CONVERSION DE GRADOS A RADIANTES}
      WRITELN;
      WRITELN;
      END;
      WRITE ('INTRODUZCA EL PESO ESPECIFICO DEL AGUA DE MAR, EN Kg/m3.  ');
      READLN (GAMA );
      WRITELN;
END;

PROCEDURE PARAMETRO_M;
BEGIN
  M:=0.5;
  TOL:=0.0001;
  REPEAT
    BEGIN
      EK:=(1+C1*SQRT(1-M)+C2*(1-M)+C3*(1-M)*SQRT(1-M)+C4*SQR(1-M))+(D1*SQRT(1-M)+D2*(1-
M)+D3*(1-M)*SQRT(1-M)+D4*SQR(1-M))*
      LN(1/SQRT(1-M));
      KK:=(A0+A1*SQRT(1-M)+A2*(1-M)+A3*(1-M)*SQRT(1-M)+A4*SQR(1-M))+(B0+B1*SQRT(1-M)+B2*(1-
M)+B3*(1-M)*SQRT(1-M)+
      B4*SQR(1-M))*LN(1/SQRT(1-M));
      M1:=(EK*H[I]/D[I])/(((H[I]/D[I])*((KK*(KK-EK)/SQR(KK*SQRT(M)))+(1/M)-1))+2-
(H[I]/D[I]))*KK);
      M:=(M+M1)/2;
    END
  UNTIL ABS(M-M1)<=TOL;
END;

PROCEDURE INTEGRALES_ELIPTICAS_JACOBIANAS;
BEGIN
  EK:=(1+C1*SQRT(1-M)+C2*(1-M)+C3*(1-M)*SQRT(1-M)+C4*SQR(1-M))+(D1*SQRT(1-M)+D2*(1-M)+D3*(1-
M)*SQRT(1-M)+D4*SQR(1-M))*
  LN(1/SQRT(1-M));
  KK:=(A0+A1*SQRT(1-M)+A2*(1-M)+A3*(1-M)*SQRT(1-M)+A4*SQR(1-M))+(B0+B1*SQRT(1-M)+B2*(1-M)+B3*(1-
M)*SQRT(1-M)+
  B4*SQR(1-M))*LN(1/SQRT(1-M));
  K[I]:=SQRT(M);
END;

PROCEDURE LONGITUD_DE_LA_OLA;
BEGIN
  L[I]:=SQRT(16*D[I]*SQR(D[I])/(3*H[I]))*KK*K[I];
END;

```

```
PROCEDURE DISTANCIA_FONDO_VALLE;
```

```
BEGIN
```

```
YT := (16 * D[I] * SQRT(D[I]) * (KK * (KK - EK)) / (3 * SQRT(L[I]))) + D[I] - H[I];
```

```
END;
```

```
PROCEDURE FUNCIONES_HIPERBOLICAS;
```

```
BEGIN
```

```
UM[I] := KK * (THETA[I]) / PI;
```

```
COSH[I] := (EXP(UM[I]) + EXP(-UM[I])) / 2;
```

```
SINH[I] := (EXP(UM[I]) - EXP(-UM[I])) / 2;
```

```
END;
```

```
PROCEDURE PERFIL_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
```

```
BEGIN
```

```
SN[I] := (SINH[I] / COSH[I]) + 0.25 * (1 - K[I]) * (SINH[I] * COSH[I] - (UM[I])) / SQRT(COSH[I]);
```

```
CN[I] := (1 / COSH[I]) - 0.25 * (1 - K[I]) * (SINH[I] * COSH[I] - (UM[I])) * SINH[I] / SQRT(COSH[I]);
```

```
DN[I] := (1 / COSH[I]) + 0.25 * (1 - K[I]) * (SINH[I] * COSH[I] + (UM[I])) * SINH[I] / SQRT(COSH[I]);
```

```
YS[I] := YT + H[I] * SQRT(CN[I]);
```

```
END;
```

```
PROCEDURE CELERIDAD;
```

```
BEGIN
```

```
C[I] := SQRT(G * D[I]) * (1 + (16 * SQRT(D[I]) * SQRT(KK) / (3 * SQRT(L[I]))) * (0.5 - (EK / KK)));
```

```
END;
```

```
PROCEDURE VELOCIDAD_DE_GRUPO;
```

```
BEGIN
```

```
CG[I] := 0;
```

```
END;
```

```
PROCEDURE VELOCIDAD_DE_LAS_PARTICULAS;
```

```
BEGIN
```

```
U[I] := 0;
```

```
U[I] := (SQRT(G * D[I])) * (-1.25 + (3 * YT / (2 * D[I])) - SQRT(YT / (2 * D[I])) + ((3 * H[I] / (2 * D[I])) - (YT * H[I] / (2 * SQRT(D[I])))) * SQRT(CN[I]) -
```

```
(SQRT(H[I] / (2 * D[I])) * SQRT(SQRT(CN[I]))) - ((8 * H[I] * SQRT(KK / L[I])) * ((D[I] / 3) - (SQRT(Z[I]) / (2 * D[I])))) * (-SQRT(K[I]) *
```

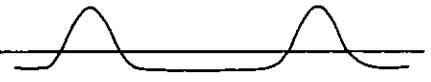
```
SQRT(SN[I]) * SQRT(CN[I])) + SQRT(CN[I]) * SQRT(DN[I]) - SQRT(SN[I]) * SQRT(DN[I])));
```

```
W[I] := (SQRT(G * D[I])) * (Z[I] * 2 * H[I] * KK / (L[I] * D[I])) * (1 + (YT / D[I]) + (H[I] * SQRT(CN[I]) / D[I]) + ((32 * SQRT(KK) / (3 * SQRT(L[I]))) *
```

```
(SQRT(D[I]) - SQRT(Z[I]) / 2)) * (SQRT(K[I] * SN[I]) - SQRT(K[I] * CN[I]) -
```

```
SQRT(DN[I])) * SN[I] * CN[I] * DN[I];
```

```
END;
```



PROCEDURE ACELERACION_DE_LAS_PARTICULAS;

```

BEGIN
  AX[I] := (SQRT(G*D[I])) * (4*H[I]*KK/(T[I]*D[I])) * ((1.5 - (YT/(2*D[I]))) -
(H[I]*SQR(CN[I]) / (2*D[I])) + (SQR(4*KK/L[I]))) *
  ((SQR(D[I])/3) - SQR(Z[I])) * (SQR(K[I]*SN[I]) - (SQR(K[I]*CN[I])) -
(SQR(DN[I]))) * SN[I]*CN[I]*DN[I];

AZ[I] := Z[I]*SQRT(G*D[I]) * (4*H[I]*SQR(KK)/(L[I]*T[I]*D[I])) * ((1 + (YT/D[I])) * ((SQR(SN[I]*DN[I])) -
(SQR(CN[I]*DN[I])) +
  (SQR(K[I]*SN[I]*CN[I])) + (H[I]/D[I]) * ((3*SQR(SN[I]*DN[I])) -
(SQR(CN[I]*DN[I])) + (SQR(K[I]*SN[I]))) * SQR(CN[I]) -
  (32*SQR(KK)/(3*SQR(L[I]))) * (SQR(D[I]) - (SQR(Z[I])/2)) * (SQR(3*K[I]*SN[I]*CN[I]*DN[I]) -
(SQR(K[I])*SQR(SQR(SN[I]))) *
(SQR(K[I]*CN[I]) + SQR(DN[I])) + (SQR(K[I])*SQR(SQR(CN[I]))) * (SQR(K[I]*SN[I]) + SQR(DN[I])) + SQR(SQR(DN[
I])) * (SQR(SN[I]) -
  SQR(CN[I])));
END;
```

PROCEDURE DESPLAZAMIENTO_DE_LAS_PARTICULAS;

```

BEGIN
  EPSILON[I] := 0;
  ZETA[I] := 0;
END;
```

PROCEDURE PRESION_ABAJO_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;

```

BEGIN
  P[I] := GAMA*(YS[I] - Z[I]);
END;
```

PROCEDURE ENERGIA_TOTAL_POR_UNIDAD_DE_CRESTA;

```

BEGIN
  E[I] := 0;
END;
```

PROCEDURE MUESTRA_RESULTADOS;

```

BEGIN
  CLRSCR;
  I := 1;
  GOTOXY(5, I*7-5);
  WRITE('CARACTERISTICAS FISICAS DEL OLAJE PROGRESIVO EN LA TEORIA CNOIDAL');
  GOTOXY(7, I*7-4);
  WRITE('T');
  GOTOXY(22, I*7-4);
  WRITE('D');
  GOTOXY(37, I*7-4);
  WRITE('H');
  GOTOXY(52, I*7-4);
  WRITE('Z');
```

```

GOTOXY(1, I*7-2+N);
WRITE('L');
GOTOXY(14, I*7-2+N);
WRITE('C');
GOTOXY(27, I*7-2+N);
WRITE('Cg');
GOTOXY(40, I*7-2+N);
WRITE('YS');
GOTOXY(53, I*7-2+N);
WRITE('U');
GOTOXY(66, I*7-2+N);
WRITE('W');

GOTOXY(1, I+2*N+6);
WRITE('Ax');
GOTOXY(12, I+2*N+6);
WRITE('Az');
GOTOXY(23, I+2*N+6);
WRITE('EPSILON');
GOTOXY(34, I+2*N+6);
WRITE('ZETA');
GOTOXY(45, I+2*N+6);
WRITE('P');
GOTOXY(56, I+2*N+6);
WRITE('E');
GOTOXY(67, I+2*N+6);
WRITE('E');

FOR I:=1 TO N DO
  BEGIN
    GOTOXY(7, I+3);
    WRITE(T[I]:5:3);
    GOTOXY(22, I+3);
    WRITE(D[I]:5:3);
    GOTOXY(37, I+3);
    WRITE(H[I]:5:3);
    GOTOXY(52, I+3);
    WRITE(Z[I]:5:3);

    GOTOXY(1, 5+N+I);
    WRITE(L[I]:5:3);
    GOTOXY(14, 5+N+I);
    WRITE(C[I]:5:3);
    GOTOXY(27, 5+N+I);
    WRITE(CG[I]:5:3);
    GOTOXY(40, 5+N+I);
    WRITE(YS[I]:5:3);
    GOTOXY(53, 5+N+I);
    WRITE(U[I]:5:3);
    GOTOXY(63, 5+N+I);
    WRITE(W[I]:5:3);

    GOTOXY(1, 7+2*N+I);
    WRITE(AX[I]:5:3);
    GOTOXY(12, 7+2*N+I);
    WRITE(AZ[I]:5:3);
    GOTOXY(23, 7+2*N+I);
    WRITE(EPSILON[I]:5:3);
    GOTOXY(34, 7+2*N+I);
    WRITE(ZETA[I]:5:3);
    GOTOXY(45, 7+2*N+I);
    WRITE(P[I]:5:3);
    GOTOXY(56, 7+2*N+I);
    WRITE(E[I]:5:3);
    GOTOXY(67, 7+2*N+I);
    WRITE(E[I]:5:3);
  END;

```

Programa fuente (P-5).



```
END;

BEGIN {CUERPO DEL PROGRAMA}
  TOL:=0.0001;
  LEER_DATOS;
  FOR I:=1 TO N DO
    BEGIN
      PARAMETRO_M;
      INTEGRALES_ELIPTICAS_JACOBIANAS;
      LONGITUD_DE_LA_OLA;
      DISTANCIA_FONDO_VALLE;
      FUNCIONES_HIPERBOLICAS;
      PERFIL_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
      CELERIDAD;
      VELOCIDAD_DE_GRUPO;
      VELOCIDAD_DE_LAS_PARTICULAS;
      ACELERACION_DE_LAS_PARTICULAS;
      DESPLAZAMIENTO_DE_LAS_PARTICULAS;
      PRESION_ABAJO_DE_LA_SUPERFICIE_LIBRE;
      ENERGIA_TOTAL_POR_UNIDAD_DE_CRESTA;
    END;
  MUESTRA_RESULTADOS;
END.
```

BIBLIOGRAFIA.

- [1] Airy, G. B. On Tides and waves. Encyclopedia Metropolitana, 1845.
- [2] A.S.C.E. Proceedings of the 11th coastal engineering conference. Vol. 1. London, England (1968).
- [3] A.S.C.E. Proceedings of the 13th coastal engineering conference. Vol. 1. Vancouver, Canadá (1972).
- [4] Bleistein, Norman. Mathematical methods for wave phenomena. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press.
- [5] Bruun, Per. Port engineering. Gulf Publishing Company (1981).
- [6] Carpper, G. D. An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude. Journal of Fluid Mechanics. Vol. 2, Part 6, pp. 532-540.
- [7] Cokeket, E. D. Steep gravity waves in water arbitrary uniform depth. Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. A. Vol. 286, pp. 183-270, (1977).
- [8] Cornish, V. Ocean waves and kindred geophysical phenomena. Cambridge University Press, 164 pp., (1934).
- [9] Coulson, Charles Alfred. Waves. (1977).
- [10] Chaplin, J. R. Developments of stream function wave theory. Proc. 17th conf. coastal eng., A.S.C.E. Vol. 3, (1980), pp. 179-205.
- [11] Chappellear, J. E. Direct numerical calculation of nonlinear ocean waves. Journal of Geophysical Research. Vol. 66, No. 2, pp. 501-508, (1961).
- [12] Daily, J. W.; Stephan, S. C., Jr. Characteristics of a solitary wave. Transactions of the American Society of Civil Engineers. Vol. 118, pp. 575-587, (1953).



- [13] Dalrymple, R. A.; Cox, J. C. Symmetric finite amplitude rotational water waves. *Journal of Phys. Ocean.* Vol. 6, No. 6, (1976).
- [14] Darbyshire, J. The generation of waves by wind. *Proc. Roy. Soc. A.* Vol. 215 (1122), pp. 299-328, (1952).
- [15] Dean, Robert George. *Water wave mechanics for engineers and scientists.* Prentice Hall (1984).
- [16] Dean, Robert G. Relative validities of water wave theories. *Journal of the waterways and harbors division.* Vol. 96, No. WW1, pp. 105-119, Feb. (1970).
- [17] Dean, R. G. Stenam function representation of nonlinear ocean waves. *Journal of Geophysical Research.* Vol. 70, No. 18, pp. 4561-4572, (1965).
- [18] Dean, R. G. Evaluation and development of water waves theories for engineering application. Special Report 1, U. S. Army, Coastal Engineering Research Center. Vols 1 and 2. Fort Belvoir, Va. (1974). Engineering and Industrial Experiment Station. Report, College of Engineering, University of Florida, Gainesville, (1970). (Draft copy).
- [19] Dean, R. G.; Le Méhauté, B. Experimental validity of water wave theories. National Structural Engineering Meeting. A.S.C.E., Portland, Oregon, April (1970).
- [20] Dearduff, R. F. A comparison of observed and hindcast wave characteristics of Southern New England. *Beach Erosion Board, U. S. A. C. E. Bull.* 7(4), pp.4-14, (1953).
- [21] Defant. *Physical oceanography.* Vol 1 & 2 (1961).
- [22] Djounkovsky, N. N. *La houle.*
- [23] Ebbesmeyer, C. C. Fifth order Stokes wave profiles. *Journal of waterways, harbors coastal eng. div., A.S.C.E.* Vol. 62, (1974).
- [24] Eckart, C. The approximate solution of one dimensional wave equations. *Rev. Mod. Phys.* Vol. 20(2), pp. 399-417, (1948).

- [25] Eckart, C. The generation of wind waves on a water surface. *Journal of Applied Physics*. Vol. 24, Part 12, pp. 1485-1494, (1953).
- [26] Fuentes Mariles, O. A.; Sánchez Bribiesca, J. L. Instituto de Ingeniería, U.N.A.M. (1985). *Compendio de hidráulica marítima (Texto y Apéndices)*.
- [27] Hughes, Steven A. *Coastal Engineering Practice '92*. A.S.C.E. (1992).
- [28] Hunt, J. N. Direct solution of wave dispersion equation. *Journal of waterways, ports, coastal ocean div.* Vol. 105, No. WW4, pp. 457-459, (1979).
- [29] Ingard, L. *Fundamentals of waves and oscillations*.
- [30] Ippen, A. T. *Estuary and coastline hydrodynamics*. Mc Graw Hill (1966).
- [31] Ippen, A. T. Waves and tides in coastal processes. *Journal of the Boston Society of Civil Engineering*. Vol. 53, No. 2, pp. 158-181, (1966a).
- [32] Ippen, A. T.; Kulin, G. The shoaling and breaking of the solitary wave. *Proceedings of the 5th conf. on coastal eng. Grenoble, Francia*, pp. 27-49, (1954).
- [33] Iribarren. *Obras marítimas*. Dossat (1954).
- [34] Iwasa, Y. Analytical consideration on Cnoidal and Solitary waves. *Memories of the Faculty of Engineering*. Reprint, Kyoto University, Japan, (1955).
- [35] Kamenkovich, V. M. *Fundamentals of ocean dynamics*. Elsevier Oceanography Series, 16 (1977).
- [36] Keulegan, Garbis H. The characteristics of internal solitary waves. *Journal of Resources*. No. 85 (1953).
- [37] Keulegan, G. H.; Patterson, G. W. *Mathematical theory of irrotational translation waves*. Report No. 1272, National Bureau of Standards. Washington, D. C., pp. 47-101, (1940).



- [38] Kinsman, B. Wind waves, their generation and propagation on the ocean surface. Prentice Hall (1975).
- [39] Knauss, John A. Introduction to physical oceanography. Prentice Hall (1978).
- [40] Komar, P. D.; Gaughan, M. K. Airy wave theory and breaker wave height prediction. Proc. 13th conf. coastal eng., A.S.C.E. Vancouver, (1972).
- [41] Laitone, E. V. The second approximation to Cnoidal and Solitary Waves. Journal of Fluids Mechanics. November, (1960).
- [42] Laitone, E. V. Limiting conditions for Cnoidal and Stokes waves. Journal of geophysical research. April, (1962).
- [43] Lamb, H. Hydrodynamics. Dover, 6th ed., New York (1945).
- [44] Le Méhauté, Band Webb, L. M. Periodic gravity waves over a gentle slope at a third order of approximation. Proceedings of the 9th conference of coastal engineering, A.S.C.E. (1964).
- [45] Le Méhaute, Bernard. An introduction to hydrodynamics & water waves. Springer-Verlag (1976).
- [46] Lighthill, M. James. Waves in fluids.
- [47] Lighthill, M. J. Physical interpretation of the mathematical theory of wave generation by wind. Journal of Fluid Mechanics. Vol. 14, part 3, pp. 385-398, (1962).
- [48] Longuet-Higgins, M. S. On the decrease of velocity with depth in an irrotational water wave. Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 49(3), pp. 552-560, (1953).
- [49] MacKay, J. H. On the Gaussian nature of ocean waves. Engineering Experiment Station, Georgia. Institute of Technology; Atlanta, Ga. Project A-366, Internal Tech. Note No. 8, 20 pp., (1959).

- [50] Madsen, O. S. On the generation of long waves. *Journal of Geophysical Research*. Vol. 76, No. 36, (1971).
- [51] Mann Bourguese, E.; Ginsburg, Norton. *Ocean yearbook 1*. University of Chicago Press.
- [52] Masch, F. D. Cnoidal waves in shallow water. *Proceedings of the 9th conf. of coastal engineering*. Chapter 1, Lisboa, (1964).
- [53] Masch, F. D.; Wiegel, R. L. Cnoidal waves. *Tables of functions*. Council of Wave Research, The Eng. Foundation. Richmond, Calif. (1961).
- [54] Maza Alvarez, J. A. *Manual de diseño de obras civiles*. Sección de Hidrotecnia. A.2.13 Hidráulica Marítima. Comisión Federal de Electricidad. Instituto de Investigaciones Eléctricas.
- [55] Minikin, Robert C. *Royal. Wind, waves and maritime structures*. (1963).
- [56] Mitchim, C. F. Oscillatory waves in deep water. *The military engineer*, pp. 107-109, march-april (1940).
- [57] Monin, Andrey S.; Kamenkovich, V.; Kort, V. G. *Variability of the oceans*. John Wiley & Sons (1977).
- [58] Monkmeier, P. L. Higher order theory for symmetrical gravity waves. *Proceedings of the 12th conf. on coastal engineering*. Washington, D. C., Chapter 33, (1970).
- [59] Munk, W. H. The solitary wave theory and its application to surf problems. *Annals of the New York Academy of Sciences*. Vol. 51, pp. 376-424, (1949).
- [60] O'Brien, M. P. A summary of the theory of oscillatory waves. U.S.A.C.E., Beach Erosion Board. Washington, D. C., TR-2, (1942).
- [61] Pond, Stephen; Pickard, George L. *Introductory dynamic oceanography*. Pergamon Press (1978).

- [62] Proceeding of a conference organized by the Institution of Civil Engineers and held at the University of Southampton on 14-15 sept. 1982. Shoreline protection.
- [63] Proceedings of the ASCE speciality conference on coastal engineering, Santa Bárbara. Octubre (1965). Stream function wave theory: validity and application.
- [64] Proudman, J. Dynamical oceanography (1963).
- [65] Quinn, Alonzo de F. Design and construction of ports and marine structures. Mc Graw Hill.
- [66] Schwartz, L. W. Computer extension and analytic continuation of Stokes' Expansion for gravity waves. Journal of Fluid Mechanics. Vol. 62, (1974).
- [67] Silvester, Richard. Coastal engineering I.- Generation, propagation and influence of waves. Elsevier Scientific Publishing Co. (1974).
- [68] Skjelbreia and Hendrickson. Fifth order gravity wave theory with tables of functions. Pasadena, California, (1962). National Engineering Science Co.
- [69] Somerfield. Wave mechanics. (1930).
- [70] Stokes, G. G. On the theory of oscillatory waves. Trans. Camb. Philos. Soc. Vol. 8, pp. 441-455, (1847).
- [71] Stokes, G. G. Supplement to a paper on the theory of oscillatory waves. Mathematical and Physical Paper, Vol. 1. London: Cambridge University Press; pp. 314-326, (1880).
- [72] Stoker, James Johnston. Water waves, the mathematical theory with applications.
- [73] U.S.A.C.E., Beach Erosion Board. T. M. 133, Washington, D. C., (1963). Higher approximation to non-linear water waves and the limiting heights of Cnoidal, Solitary and Stokes waves.
- [74] U.S.A.C.E.R.C. Shore protection manual. Vol. 1.

- [75] U.S. Army Coastal Engineering Research Center. Technical report No. 4 (1966). Shore protection, planning and design.
- [76] U.S. Department of commerce, Circular 521 (1952). Gravity waves.
- [77] University of California, Council on wave research. The eng. foundation, Berkeley (1959). Gravity waves. Stokes' Third order approximation. Tables of functions.
- [78] Ursell, F. The long-wave paradox in the theory of gravity waves. Proc. Camb. Philos. Soc. Vol. 49, pp. 685-694, (1953).
- [79] Ursell, F. Mass transport en gravity waves. Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 49(1), pp. 145-150, (1953).
- [80] Vilensky; Glouhovsky; Krilov; Juschak.. Some results and methods of investigation of sea wind waves. Annals of the Intern. Geophysical Year, Vol. XI. Simposia at the Fifth Meeting of CSAGI. New York; Pergamon Press. pp. 324-264, (1961).
- [81] Von Arx, W. S. An introduction to physical oceanography. Addison-Wesley Publishing Co.
- [82] Waldron, Richard Arthur. Waves and oscillations.
- [83] Wehausen, J. V.; Laitone, E. V. Handbuch der Physik, 9. Surface waves.
- [84] Weisberg, Joseph; Parish, Howard. Introductory oceanography. Mc Graw Hill.
- [85] Whitham, G. B. Linear and nonlinear waves. Wiley (1974), New York.
- [86] Whitan, Gerald Beresford. Waves.
- [87] Wiegell, Robert L. Oceanographical engineering. Prentice Hall (1965).
- [88] Wiegell, Robert L. A presentation of cnoidal wave theory for practical application. Journal of Fluid Mechanics. Vol. 7, part 2 (1960).