

00365

6  
205



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS  
División de Estudios de Posgrado**

El Denotador: Su Estructura,  
Construcción y Papel en la  
Teoría Matemática de la Música

T E S I S  
Que para obtener el grado académico de  
MAESTRA EN CIENCIAS  
(MATEMATICAS)

p r e s e n t a

**MAT. MARIANA MONTIEL HERNANDEZ**

Director de Tesis: Dr. Emilio Lluís Puebla

México, D. F.

1999

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

273129



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Bernardo y Emiliano

“¿Acaso no puede describirse la música como una matemática de los sentidos y la matemática como una música de la razón? De este modo el músico *siente* la matemática, el matemático *piensa* la música...recibiendo cada uno del otro su consumación cuando la inteligencia humana, elevada a su tipo de perfección, resplandece glorificada en algún futuro Mozart-Dirichlet o Beethoven-Gauss, unión prefigurada ya con claridad en el genio y la obra de un Helmholtz!”

James Joseph Sylvester  
(en un artículo sobre la regla de Newton para el descubrimiento de raíces imaginarias en las ecuaciones algebraicas)

## AGRADECIMIENTOS

Ante todo quisiera expresar mi admiración y agradecimiento al Dr. Guerino Mazzola, el creador de los conceptos fundamentales encontrados en el presente trabajo. Él tiene mi admiración por su gran cultura matemática, musical y universal, así como por su enorme capacidad creativa; y mi agradecimiento por haberme incluido como colaboradora en su trascendental proyecto. Asimismo, agradezco a mi director de tesis y asesor, el Dr. Emilio Lluís Puebla, por su apoyo incondicional en todas las etapas de mis estudios y su respaldo hacia mi proyecto de tesis y de vida.

Quisiera darle un reconocimiento especial a mi codirector de tesis, el Dr. Francisco Marmolejo, ya que, sin las horas que él me entregó, difícilmente hubiera hecho los nexos necesarios para poder realizar este trabajo. Por el gran dominio que él posee en su área de la Matemática y por su lucidez constante, fue un privilegio tener su apoyo.

Agradezco también al M.en C. Alejandro Odgers, a la Dra. María de Lourdes Palacios, al Dr. Rodolfo San Agustín, al Dr. Pablo Padilla y al M.en C. Aarón Aparicio por sus acertados comentarios y sugerencias.

Sin embargo, quiero recalcar que cualquier falla o incoherencia que encuentre el lector es responsabilidad exclusivamente mía.

Por otro lado, quisiera reconocer el apoyo que recibí de la Dirección General de Estudios de Posgrado (DGEP), ya que conté, de su parte, con una beca para realizar mis estudios, de septiembre de 1997 a septiembre de 1998. También deseo destacar que la tesis fue elaborada cuando percibía el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), mediante su Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación, Proyecto 27552-E, bajo la dirección del Dr. Emilio Lluís Puebla, de diciembre de 1998 a agosto de 1999.

## ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	4
<b>I LA GÉNESIS DEL CONCEPTO DE DENOTADOR</b> .....	7
I.1 El Encicloespacio y Formatos Universales de Conceptos.....	7
I.2 Notación.....	8
I.3 Formas.....	9
I.4 Denotadores.....	10
I.5 Formas y Denotadores Regulares y Circulares.....	15
<b>II LA CATEGORÍA DE DENOTADORES</b> .....	20
II.1 Composiciones Locales.....	20
II.2 Elementos de la Teoría Local.....	23
II.2.1 Construcciones Booleanas.....	23
II.2.2 Productos y Coproductos.....	25
II.3 Morfismos de Composiciones Locales.....	26
II.4 Categorías de Composiciones Locales.....	32
II.5 Construcciones Universales en la Categoría de Composiciones Locales.....	37
<b>III EJEMPLOS Y CONSTRUCCIONES DE FORMAS Y DENOTADORES</b> .....	40
III.1 Módulos en Musicología.....	40
III.2 Composiciones Locales.....	42
III.3 La Forma <i>Pianoscore</i> y el Denotador <i>Traümerei</i> .....	44
(Denotador ..... página 1-página 8)	

III.4 Morfismos entre Composiciones Locales.....	47
<b>APÉNDICE I</b> <b>Topoi</b> .....	55
<b>APÉNDICE II</b> <b>El Topos de la Música y la TMM</b> .....	67
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	72

## INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se desarrolla en base a la obra *The Topos of Music* (designada como ToM de aquí en adelante) del matemático y músico suizo Guerino Mazzola, todavía sin publicar, y de la cual la autora de esta tesis tiene el honor de ser colaboradora. Dicen MacLane y Moerdijk en el prólogo de *Sheaves in Geometry and Logic* [MacMo] que “A startling aspect of topos theory is that it unifies two seemingly wholly distinct mathematical subjects: on the one hand, topology and algebraic geometry, and on the other hand, logic and set theory”. Parafreando a estos autores, se diría que una aspecto asombroso de la Teoría Matemática de la Música (TMM en lo consecuente) es que unifique la Teoría de Topos (junto con la Topología, la Topología y la Geometría Algebraicas, la Teoría de Grupos y la de Módulos, etc.) y la Computación como ciencia, con la Música. La Música es un fenómeno multifacético y, si bien es cierto que se relaciona con manifestaciones emocionales y psicológicas, de manera similar consiste en aspectos físicos y estructurales. Este último aspecto está implícito en todo el desarrollo de la presente tesis.

En el primer capítulo, como su nombre lo indica, se trazará el origen del *Denotador* hasta llegar a su definición formal y su clasificación en Denotadores regulares y circulares.

El segundo capítulo se concentra en la construcción de la categoría de composiciones locales que, finalmente, abarca los Denotadores que nos interesan. Cabe hacer notar aquí que la Teoría de Denotadores, y toda la perspectiva funtorial, surgió como respuesta a ciertas limitaciones para la operacionalización de la TMM que se presentaron cuando, como en ocasiones anteriores, se había trabajado con lo que aquí llamamos *composiciones locales objetivas*.

En el tercer capítulo se aportan ejemplos tomados de la TMM, y se presenta el Denotador *Traümerei* de Forma *Pianoscore* que fue construido por la autora de esta tesis para tener un Denotador bastante completo y poder hacer matemáticas con él. En este ejemplo se trabaja con todos los tipos de Formas (y, por

ende, Denotadores) más una Forma *circular*, cuya existencia se prueba. El mismo lenguaje que se acaba de usar, con sus plurales que indican Formas y Denotadores como partes componentes de un Denotador y Forma en particular, nos devela el concepto de recursividad, tal vez uno de los más importantes en todo el marco teórico sobre el que descansa el Denotador. El ejemplo se presenta en *denoteX*, que es un formato universal, estandarizado y comunicable a todo editor de textos. Actualmente Thomas Noll y su equipo de la Berlin Technische University, están desarrollando traducciones para convertir *denoteX* en LaTeX, Mathematica, etc., así como herramientas para Mathematica.

Con la excepción del Lema II.3.2, el Teorema II.3.8, la Proposición II.4.5 y el Teorema II.5.1 con su corolario, todas las demás pruebas son de la autora de la tesis y, en los números mencionados, se intentó desglosar las demostraciones con pasos agregados, etc. Normalmente las proposiciones surgen de afirmaciones o ejercicios del ToM que no son demostrados.

La notación es la original de ToM que, si bien se requiere de un poco de práctica en un principio para “traducirla” a la notación usual de la Teoría de Topos y de Categorías, tiene su propio encanto ¡por lo menos para quien esto escribe! Lo fundamental es entender el uso del signo “@”. Por ejemplo  $\text{Mod}^{\textcircled{A}}$  es la categoría de funtores contravariantes  $F_u : \text{Mod} \rightarrow \text{Sets}$ , (donde nos basamos en el axioma de MacLane y podemos considerar a Sets como un universo que contenga a Mod).  $A@F$  es  $F(A)$ , o sea, la evaluación del funtor en la dirección (“at” the address)  $A$ , donde  $A \in \text{Mod}$ . En la sección I.2 se explica esta notación. Asimismo, para entender la notación y conceptos estándares de aplicaciones básicas de la TMM (la escala cromática como isomorfa a  $Z_{12}$ , etc.) véase la tesis de licenciatura de la autora. [MM]

Otro aspecto que habría que remarcar es el uso del inglés, especialmente en el Denotador *Traimerei* así como en otros ejemplos del capítulo III. Lo que sucede es que la TMM es un proyecto internacional y ToM cuenta con 13 colaboradores cuyos idiomas son el alemán, italiano, francés, inglés y español. El inglés se emplea como el idioma universal de este proyecto, independientemente de los idiomas particulares de los participantes (que en su mayoría es el alemán). De manera similar, se respetó el uso de mayúsculas para los conceptos Forma y Denotador, así como para el nombre de la Forma (NF).

Finalmente, se hará mención de los dos apéndices. El primero es un resumen de los elementos fundamentales de la Teoría de Topos que se tendrían que manejar para poder entender esta tesis. El segundo pretende ser una breve reseña de la motivación filosófica, científica y humanística de esta aventura del conocimiento que es la TMM.

## CAPÍTULO I

### LA GÉNESIS DEL CONCEPTO DE “DENOTADOR”

#### I.1 El “Encicloespacio” y Formatos Universales de Conceptos

El conocimiento consiste en dos elementos fundamentales: información y organización mental. La información sola, sin un sistema de “coordenadas” que permita ubicarla y recogerla cuando sea necesario, no es conocimiento. Por este motivo, el paradigma de la información puramente digital,  $Z_2, (\{0,1\}, \text{“off” y “on”}, \text{etc.})$  nada tiene que ver con el conocimiento. Así es que se precisa un sistema de conceptos que provea un método completo de “navegación” y que funcione en un espacio de conceptos exhaustivo. El problema estriba en “...cómo realizar una arquitectura tal de conceptos sin perder rigor y confiabilidad”. [ToM,cap.5] El Denotador pretende ser la solución a este planteamiento.

El Encicloespacio se plantea como la actualización del concepto tradicional de enciclopedia, originalmente desarrollado por Diderot y D’Alembert en el Siglo de las Luces. Con el advenimiento de la computadora personal esta actualización exige un dinamismo en la estructuración de datos en el espacio tiempo, en contraposición al contexto estático de antes, así como una relación interactiva con esta estructuración de información. Asimismo, el orden alfabético de la enciclopedia clásica, adecuada para sus volúmenes de textos, se generaliza a la orientación que impone la navegación. En este sentido, el orden alfabético de la enciclopedia de la sala tiene que ser complementado por órdenes relacionados con presentaciones de datos que no son textos (espacios geométricos, colecciones de conjuntos, etc.).

La navegación tiene dos vertientes: navegación receptiva, más apegada a la enciclopedia clásica, en que el Encicloespacio no se modifica, y navegación productiva, donde hay interacción con el Encicloespacio y se agrega conocimiento al ya existente.

Hay tres características de la enciclopedia que son, realmente, principios de la tipología de formatos universales de datos: unidad, completéz y discursividad. A cada uno de estos principios hay un aspecto que le corresponde al Denotador. La unidad en la creación de conceptos se realiza por medio de construcciones recursivas; la completéz se logra por la ramificación extensiva de estas construcciones y la discursividad se tiene por la libre construcción y recombinación de Denotadores. En contraposición a los sistemas comunes de bases de datos, en el trabajo con denotadores no hay ningún conjunto fijo de posibles construcciones.

## I.2 Notación

Sea  $\text{Mod}$  la categoría que tiene como objetos todos los módulos izquierdos,  ${}_A M$ , sobre todos los anillos  $A$ , asociativos y con unitario. Estos módulos también pueden ser el conjunto vacío, a diferencia de la categoría usual de  ${}_R \text{Mod}$ . Los morfismos forman el conjunto de transformaciones diafines  $e^t \cdot f$  donde  $f$  es dilineal (consiste en una pareja "compatible" de homomorfismos de anillos y módulos  $(\rho, u)$ , [véanse Mac., p.35, Sol, p.280-81] y  $e^t$  es una traslación en  $N \in \text{Mod}$ . Aquí la  $e$  es una forma cómoda de notación y no tiene que ver con la función exponencial. Así es que  $(e^t \cdot f)(m) = f(m) + t$  con  $m \in M, f(m), t \in N$  (no especificaremos el anillo).

$\text{Mod}^\circledast$  será la categoría de funtores contravariantes de la categoría  $\text{Mod}$  a la categoría de conjuntos:

$$Fu : \text{Mod} \rightarrow \text{Sets}.$$

Asimismo, para todo  $Fu \in \text{Mod}^\circledast$  un módulo  $M$  del dominio de  $Fu$  se llamará una *dirección de  $Fu$* , y un morfismo de módulos  $f : M \rightarrow N$  se llamará un *cambio de dirección*.<sup>1</sup>  $\circledast M$  son los funtores  $\text{Mod}(-, M)$ , y  $M @ Fu$  denota el valor de  $Fu$  (en  $\text{Sets}$ ) en la dirección  $M$  es decir,  $Fu(M)$ .

Sabemos que  $\text{Mod}^\circledast$  es un Topos [véase Introducción; también véase Apéndice I para Teoría de Topos], siendo una categoría de pregavillas. Por lo tanto  $\text{Mod}^\circledast$  tiene un clasificador de subobjetos que denotaremos, como de costumbre, por  $\Omega$ .

<sup>1</sup>Aquí la palabra "dirección" debe entenderse como "address" en inglés.

Cabe mencionar que las construcciones que se realizarán en los capítulos I y II, con la excepción del producto fibrado en *Loc* (la categoría de *composiciones locales* que construiremos en el capítulo II), no recurren a la especificidad de  $\text{Mod}^{\mathcal{Q}}$ , es decir, a la categoría *Mod*, y podrían, en un momento dado, generalizarse a una categoría de pregavillas cualquiera.

### I.3 Formas

Antes de definir la Categoría de Formas, hay que advertir que la recursividad es parte indisoluble tanto de Formas como de Denotadores. Una Forma se define en función de una Forma previa, o de la Forma previa se desprende una Forma nueva. Esto queda claro en el ejemplo del Denotador para el Träumerei de Robert Schumann, construido en el Capítulo III. Se sugiere estudiar esta aplicación elemental antes de continuar con la formalización de los conceptos.

**Definición 3.1** Una *Forma*  $F$  es una lista de cuatro elementos,  $(NF, TF, CF, IF)$  donde

(i)  $NF$  es una cuerda de caracteres ASCII llamada el *Nombre de la Forma*;

(ii)  $TF$  es uno de los símbolos:

1. Simple,
2. Syn,
- 3 Power,
- 4.Limit,
- 5.Colimit,

llamado *Tipo de la Forma*;

(iii)  $CF$  es uno de los siguientes objetos:

1. Para Simple,  $CF$  es un módulo,
2. Para Syn y Power,  $CF$  es una Forma,<sup>2</sup>
3. Para Limit y Colimit,  $CF$  es un diagrama de Formas,<sup>3</sup>

---

<sup>2</sup>Aquí se comienza a ver la recursividad en la definición.

<sup>3</sup>El diagrama de Formas es un diagrama en la categoría  $\text{Mod}^{\mathcal{Q}}$ , donde los vértices son los funtores,  $\text{Fun}(F)$ , de la Forma  $F$  en particular. De hecho, los morfismos en la categoría de Formas son los morfismos (transformaciones naturales) entre los funtores  $\text{Fun}(F)$ .

llamado el *Coordinador de la Forma*,

(iv)  $IF$  es un monomorfismo de funtores,  $IF : Fun(F) \rightarrow X$ ,  $IF \in Mod^{\mathcal{Q}}$ , cuyo contradominio  $X$  se relaciona con  $TF$  de la siguiente manera:

1. Para **Simple**,  $X = @M$ , donde  $M$  es el Coordinador de la Forma;
2. Para **Syn**,  $X = Fun(CF)$ , (o sea, el funtor del Coordinador de  $F$  que es, a su vez, una Forma);
3. Para **Power**,  $X = \Omega^{Fun(CF)}$ , (o sea, el objeto potencia  $P(Fun(CF))$ ), correspondiente al objeto  $Fun(CF) \in Mod^{\mathcal{Q}}$ , que es una generalización del conjunto potencia en Sets, véase Apéndice 1).
4. Para **Limit**,  $X = Limit(D)$ , donde  $D$  es un diagrama de Formas;
5. Para **Colimit**,  $X = CoLimit(D)$ .

$IF$  se llama el *Identificador de la Forma*. Su dominio  $Fun(F)$  es el *funtor de la Forma*, también llamado el *funtor del espacio de la Forma*.

La Forma se denotará en este texto así:

$$NF_{id}TF(CF),$$

aunque el formato universal, llamado **denoteX** y formulado por la autora de este trabajo junto con Guerino Mazzola y Thomas Noll, se explica en el capítulo 3.

#### I.4 Denotadores

Antes de dar la definición de *Denotador*, cabe mencionar el siguiente hecho. La Forma debe entenderse, de manera intuitiva, como el espacio donde vive el Denotador. A su vez, el Denotador debe concebirse como un punto en ese espacio, ¡si bien este punto lleva su espacio consigo! Asimismo, la definición de Denotador también tiene una estructura recursiva, similar a la definición de Forma (y que se plasma en los ejemplos del capítulo 3)

**Definición 4.1** Sea  $M \in Mod$ . Un *Denotador* con dirección  $M$  es una lista de tres elementos,  $(ND, FD, CD)$  donde:

- (i)  $ND$  es una cuerda de caracteres ASCII, llamado el *Nombre del Denotador*;
- (ii)  $FD$  es una Forma, la *Forma del Denotador*;

(iii)  $CD$  es un elemento de  $M \otimes Fun(FD)$  y se llama las *Coordenadas* (plural) del Denotador.

Cabe enfatizar, asimismo, que la Forma de un Denotador abarca toda la información recursiva acerca de él. De hecho, es el funtor de la Forma,  $Fun(FD)$ , que determina las Coordenadas del Denotador.

Veamos ahora las Coordenadas,  $CD$ , que son el “punto”, o sea, el funtor de la Forma evaluado en la dirección  $M$ . Como cada Forma tiene su tipo  $TF$ , y a cada tipo le corresponde un Identificador  $IF$ , podemos exhibir la clase de objetos de las coordenadas cuando éstas corresponden a una Forma dada. Así es que,

(i) cuando tenemos una Forma de tipo **Simple**, sabemos que su Coordinador  $CF$  es un módulo  $N$ . De esta manera, las Coordenadas  $CD$  se identifican, por medio del identificador  $IF$ , con un elemento de  $M \otimes N$ , o sea, una transformación diafin de módulos,  $Mod(M, N)$ . Es importante señalar que podemos tener la llamada “dirección cero”, con  $M = 0_Z$ . En este caso  $Mod(0, N) \cong N$ .

(ii) En el caso de **Syn**,  $CD$  corresponde a un elemento de  $M \otimes Fun(C(FD))$ , o sea, el funtor del Coordinador de la Forma del Denotador, evaluado en la dirección  $M$ .

De aquí en adelante, usaremos  $F$  para designar  $FD$ , la Forma del Denotador.

(iii) Las Coordenadas  $CD$  correspondientes al TF **Power** se identifican con un subfuntor de

$$\otimes M \times Fun(CF),$$

ya que hay un isomorfismo

$$M \otimes \Omega^{Fun(CF)} \cong Subfuntores(\otimes M \times Fun(CF)).$$

Veamos esto con más detalle (también consúltese Apéndice I).

Primeramente, sabemos que en un topos de pregavillas como  $Mod^{\circ}$  existe una biyección entre el conjunto de cribas  $\Omega(M)$  y los subfuntores  $Mod(-, M)$ , y que el clasificador de subobjetos en este topos es  $True : 1 \rightarrow \Omega$ . También tenemos el funtor de Yoneda,  $\otimes : M \rightarrow M^{\circ}$  que es pleno y fiel, más la existencia de objetos potencia en cualquier topos.

Por otro lado, recordemos que 1)  $Fun(CF) \in Mod^{\circ}(2)$ , 2)  $N \otimes M = Mod(N, M)$ . Veamos cómo el conjunto potencia  $2^{M \otimes Fun}$  en Sets da lugar a un funtor  $2^{Fun} \in Mod^{\circ}$  (para cualquier

$Fu \in \text{Mod}^{\circledast}$ ) definido por  $M @ 2^{Fu} = 2^{M @ Fu}$ . Probemos que  $2^{Fu}$  efectivamente es un functor.

**Proposición 4.2.**  $2^{Fu}$  es un functor contravariante.

*Demostración:* 1) A cada objeto  $M$  en  $\text{Mod}$ ,  $2^{Fu}$  le asigna el objeto  $M @ 2^{Fu} = 2^{M @ Fu}$  en  $\text{Sets}$ , o sea, el conjunto potencia de  $M @ Fu$ .

2) A cada morfismo  $u : N \rightarrow M$  en  $\text{Mod}$  le corresponde un morfismo  $u @ 2^{Fu}$  en  $\text{Sets}$  que lleva  $S \subset M @ Fu$  (que, a su vez, es un elemento de  $2^{M @ Fu}$ ) de  $2^{M @ Fu}$  a  $(u @ 2^{Fu})(S) = (u @ Fu)(S) \in 2^{N @ Fu}$ .

3) Si  $v : L \rightarrow N$  es un morfismo en  $\text{Mod}$ , con  $u$  el mismo que en 2),  $u \circ v$  en  $\text{Mod}$  da lugar a

$$(u \circ v) @ 2^{Fu}$$

en  $\text{Sets}$  de la siguiente manera:

$$((u \circ v) @ 2^{Fu})(S) = (v @ Fu)(u @ 2^{Fu})(S) = v @ 2^{Fu} \circ u @ 2^{Fu}(S).$$

Así es que  $2^{Fu}$  es contravariante.

$$4) 1_M @ 2^{Fu} = 2^{1_M @ Fu} = 1_{2^{M @ Fu}}. \blacksquare$$

De hecho,  $2^{Fu}$  es la composición de  $Fu : \text{Mod}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$  y el functor conjunto potencia covariante

$$2^- : \text{Sets} \rightarrow \text{Sets}.$$

Finalmente, recordemos que (Apéndice I):

$$M @ \Omega^{Fun(CF)} \cong Nat(@M, \Omega^{Fun(CF)}) \cong Nat(@M \times Fun(CF), \Omega).$$

De esta manera, si  $\{\hat{S}\}$  son los subfuntores de  $@M \times Fun(CF)$ , hay un isomorfismo

$$\{\hat{S}\} \cong M @ \Omega^{Fun(CF)},$$

el cual se puede ilustrar en el siguiente diagrama de producto fibrado:

$$\begin{array}{ccc} \hat{S} & \rightarrow & @M \times Fun(CF) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{1} & \rightarrow & \Omega \end{array}$$

Por otro lado, sean  $Fun(F) \in \text{Mod}^{\circledast}$  y  $S \in M @ 2^{Fun(F)}$ . Entonces  $S \in 2^{M @ Fun(F)}$  y, por lo tanto,  $S \subset M @ Fun(F)$ .

**Definición 4.3** A cada  $S \in M @ 2^{Fun(F)}$  le asociamos un subfuntor  $\hat{S} \hookrightarrow @M \times Fun(F)$  definido como sigue. Para otro módulo  $N$ ,

$$N @ \hat{S} = \{(u \in N @ M, v \in N @ Fun(F)) : v \in (u @ Fun(F))(S)\}$$

Entonces, para cualquier morfismo  $q : N \rightarrow L$ , tenemos que  $q @ \hat{S} = q @ M \times q @ Fun(F) / \hat{S}(L)$ .

**Proposición 4.4**  $\hat{S}$  es un funtor contravariante.

*Demostración:* Debemos mostrar que, si  $\hat{S} : Mod \rightarrow Sets$ ,

(a) a cada objeto  $N \in Mod$ ,  $\hat{S}$  le asigna un objeto  $\hat{S}(N)$  en Sets. Pero, para  $N \in Mod$ ,

$$\hat{S}(N) = N @ \hat{S} \in Sets,$$

con

$$N @ \hat{S} \subset N @ M \times N @ Fun(F),$$

y elementos  $(u, v)$ .

(b) A cada morfismo  $(q : N \rightarrow L)$  en Mod,  $\hat{S}$  le asigna un morfismo  $\hat{S}(q)$  en Sets. Pero si

$$q : N \rightarrow L,$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{para } (x, y) \in L @ \hat{S}, \hat{S}(q)(x, y) &= (q @ M \times q @ Fun(F))(x, y) \\ &= (xq, q @ Fun(F)(y)) \\ &= (xq, (q @ Fun(F))(x @ Fun(F)(z)), z \in M @ Fun(F)) \\ &= (xq, xq @ Fun(F)(z)) \in N @ \hat{S} \end{aligned}$$

Veamos unos diagramas para fijar ideas:

$$\begin{array}{ccc} N & N @ \hat{S} \hookrightarrow & N @ M \times N @ Fun(F) \\ q \downarrow & q @ \hat{S} \uparrow & q @ M \uparrow q @ Fun(F) \\ L & L @ \hat{S} \hookrightarrow & L @ M \times L @ Fun(F) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} L & L @ Fun(F) \\ z \downarrow & \uparrow z @ Fun(F) \\ M & M @ Fun(F) \end{array}$$

(c) Sea  $r : L \rightarrow K$  en Mod tal que  $r \circ q : N \rightarrow L \rightarrow K$ . Entonces,

$$\hat{S}(r \circ q) = (r \circ q) @ \hat{S}$$

$$\begin{aligned}
&= (r \circ q) \otimes M \times (r \circ q) \otimes \text{Fun}(F)'_{K \otimes \hat{S}} \\
&= q \otimes M \circ r \otimes M \times q \otimes \text{Fun}(F) \circ r \otimes \text{Fun}(F)'_{K \otimes \hat{S}} \\
&= q \otimes \hat{S} \circ r \otimes \hat{S} \\
&= \hat{S}(q) \circ \hat{S}(r)
\end{aligned}$$

Así es que,  $\hat{S}$  es contravariante.

(d) Finalmente, tenemos que:  $\hat{S}(1_N) = 1_N \otimes \hat{S} = 1_{N \otimes \hat{S}} = 1_{\hat{S}(N)}$ . ■

(iv) Para el TF **Limit**, el Denotador correspondiente consiste en listas especiales en el producto de todos los  $M \otimes \text{Fun}(F_i) \in \text{Sets}$ . Otra vez, veamos con más detalle este desarrollo.

Supongamos que el diagrama de Formas tiene vértices  $F_i$ , (con  $F_i$  una Forma) y funtores  $\text{Fun}(F_i)$  correspondientes a cada  $F_i$ . Asimismo,  $f_i$  es una flecha en el diagrama y  $m(f_i)$  una transformación natural. Cuando hay un cambio de dirección en **Mod** tenemos:

$$\begin{array}{ccc}
M & M \otimes \text{Fun}(F_i) \\
\downarrow & \uparrow f_i \\
N & N \otimes \text{Fun}(F_i)
\end{array}$$

y, en una dirección dada, vemos

$$\begin{array}{ccc}
& M \otimes \text{Fun}(F) = \text{Limit}(D) & \\
M \otimes h_i \swarrow & & \searrow M \otimes h_j \\
M \otimes \text{Fun}(F_i) & \xrightarrow{M \otimes m(f_i)} & M \otimes \text{Fun}(F_j)
\end{array}$$

De hecho, cuando la dirección es fija sabemos, por la construcción clásica del límite en *Sets*, que:

$$M \otimes \text{Limit}(D) = M \otimes \text{Fun}(F) = \{(x_i) \in \prod M \otimes \text{Fun}(F_i) : M \otimes m(f_i)(x_i) = x_j, \forall f_i \in D\},$$

el cual se ve así en el caso de dos vértices:

$$\begin{array}{ccccc}
& & M \otimes \text{Fun}(F) = M \otimes \text{Limit}(D) & & \\
& M \otimes h_i \swarrow & \downarrow & \searrow M \otimes h_j & \\
M \otimes \text{Fun}(F_i) & \xleftarrow{p_i} & M \otimes \text{Fun}(F_i) \times M \otimes \text{Fun}(F_j) & \xrightarrow{p_j} & M \otimes \text{Fun}(F_j) \\
& \underbrace{\hspace{10em}}_{M \otimes m(f_i)} & & & 
\end{array}$$

Así es que vemos que los Denotadores correspondientes a una Forma con TF **Limit**, cuando tienen una dirección fija están relacionados canónicamente con el producto.

(iv) Finalmente, tenemos el Denotador correspondiente al TF **Colimit**. Aquí también tenemos un diagrama de Formas y, para una dirección  $M$ , tenemos una relación de equivalencia  $\sim$  en el coproducto

que se genera por la relación binaria  $x_k \sim x_j \iff m(f_k)(x_k) = x_j$  para

$$x_k \in M \circ Fun(F_k), x_j \in M \circ Fun(F_j),$$

en el coproducto  $\coprod M \circ Fun(F_i)$ . Esto también se desprende de la construcción del colímite en Sets.

$$M \circ CoLimit(D) = M \circ Fun(F) = \coprod M \circ Fun(F_i) / \sim$$

que, con dos funtores se ve así:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M \circ Fun(F) & & \\
 & & \uparrow & & \\
 M \circ Fun(F_k) & \xrightarrow{i_k} & \coprod M \circ Fun(F_i) / \sim & \xrightarrow{i_j} & M \circ Fun(F_j) \\
 & \searrow^{M \circ h_k} & & \swarrow_{M \circ h_j} & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

$M \circ m(f_i)$

### 1.5 Formas y Denotadores Regulares y Circulares

Después de definir Formas y Denotadores surge la pregunta acerca de su existencia. Para atacar este problema se distinguen entre dos tipos de Formas (Denotadores), las (los) *regulares* y *circulares*. Como siempre se procede, primeramente se definen y trabajan las Formas regulares y circulares, para después hacer lo mismo con los Denotadores regulares y circulares, cuya existencia depende de sus Formas (su espacio).

**Definición 5.1** Sea  $n$  un número natural. Una Forma es *regular* de nivel  $n = 0$  si es de tipo **Simple** (si  $CF$  es un módulo). Una Forma es regular de nivel  $n$  si todos sus  $CF$  son regulares de nivel  $m < n$ , y si hay un  $CF$  which is regular of level  $n - 1$ .

Esto significa que la Forma es regular si los  $CF$ , que también son Formas, terminan en **Simple** después de un número finito, menor o igual que  $m$ , de pasos recursivos y  $n$  es el sucesor de todos los niveles de sus  $CF$

**Definición 5.2.** Una Forma es *circular* si no es regular.

Esto último significa que una Forma circular no llega recursivamente a un módulo.

Así es que las Formas regulares se construyen recursivamente y su nivel es una prueba directa de su existencia. Sin embargo, el caso de las Formas circulares es diferente, y pueden presentarse "catástrofes".

Véamos algunos ejemplos de la construcción de Formas circulares que-al contrario de las Formas regulares que siempre pueden construirse- pueden resultar catastróficas.

**Ejemplos.** 1) Comencemos con el *TF Limit*. Una Forma circular de Tipo **Limit** se desarrolla de la siguiente manera:

$$NF \quad \quad \quad TF \quad CF$$

$$'LimCirc' \xrightarrow{f: Fun(F) \rightarrow Fun(F) \times Fun(G)} Limit(LimCirc, G)$$

Aquí la Forma circular (*LimCirc*) está como producto con otra Forma G que suponemos existe (tiene su *Fun(F)* y su *IF*). Definamos el *IF*,

$$f : Fun(F) \rightarrow X = Limit(D)$$

como

$$Fun(F) = Fun(G)^N \text{ y } f : Fun(G)^N \rightarrow Fun(G)^N \times Fun(G).$$

Así es que para una dirección *M*, hay un isomorfismo

$$M \otimes f : M \otimes Fun(G)^N \rightarrow M \otimes Fun(G)^N \times M \otimes Fun(G), \text{ con } (g_i)_{i \geq 0} \mapsto ((g_{i+1})_{i \geq 0}, g_0).$$

De esta manera, hay una cantidad infinita de realizaciones de esta Forma circular, cosa que no podría suceder con una Forma regular.

2) El caso del *TF Colimit* es similar en su construcción al de **Limit**. Tenemos, por analogía con 1),

$$'ColimCirc' \xrightarrow{f: Fun(F) \rightarrow Fun(F) \amalg Fun(G)} Colimit(ColimCirc, G)$$

Hacemos el dominio del *IF*, en este caso, la unión disjunta de funtores:  $Fun(F) = \coprod_N Fun(G)$  y el identificador isomorfismo es  $f : \coprod_N Fun(G) \rightarrow \coprod_N Fun(G) \amalg Fun(G)$  que, si consideramos  $Fun(G)_i$ , como el cofactor de índice *i* en el coproducto, se expresa así:

$$f|_i = \begin{cases} 1 : Fun(G)_i \rightarrow Fun(G)_{i-1} & i > 0 \\ 1 : Fun(G)_i \rightarrow Fun(G) & i = 0 \end{cases}$$

De esta manera tenemos otra vez una cantidad infinita de realizaciones.

3) Veamos ahora un ejemplo de la Forma circular del *TF Power*. Para poder entender este ejemplo necesitamos recordar ciertos funtores relacionados con las construcciones universales en la categoría de pregavillas, en particular,  $\mathbf{Mod}^{\mathcal{O}}$ . Por un lado, tenemos el morfismo canónico  $\{\} : Fun(F) \rightarrow 2^{Fun(F)}$ ; por otro lado tenemos  $\hat{g} : 2^{Fun(F)} \rightarrow \Omega^{Fun(F)}$ ,  $S \mapsto \hat{S}$ .

**Proposición 5.3.**  $\hat{g} : 2^{Fun(F)} \rightarrow \Omega^{Fun(F)}$  es un monomorfismo natural.

*Demostración:* Sabemos que  $Fun(F)$ ,  $2^{Fun(F)} \in \mathbf{Mod}^{\mathcal{O}}$  y, por definición

$$M @ 2^{Fun(F)} = 2^{M @ Fun(F)}.$$

Si tenemos un cambio de dirección  $u : N \rightarrow M$  en  $\mathbf{Mod}$ , entonces tenemos

$$u @ Fun(F) : M @ Fun(F) \rightarrow N @ Fun(F)$$

en **Sets**, con

$$S \mapsto (u @ Fun(F))(S).$$

Asimismo, como  $S \in M @ 2^{Fun(F)} = 2^{M @ Fun(F)}$  entonces  $S \subset M @ Fun(F)$ . Para  $S \subset M @ Fun(F)$  se tiene  $\hat{S}$ , un subfuntor de  $@M \times Fun(F)$ . Tenemos que:

$$N @ \hat{S} = \{(u \in N @ M, v \in N @ Fun(F)) : v \in (u @ Fun(F))(S)\}.$$

Entonces,  $N @ \hat{S} \subset N @ M \times N @ Fun(F)$ .

Veamos que  $\hat{g}$  es un monomorfismo. Sea  $\hat{S} = \hat{Y}$ . Si

$$u \in N @ M, \text{ tenemos que si } (u, v) \in N @ \hat{S} \text{ y } (u, v') \in N @ \hat{Y}, \text{ entonces } v = v'.$$

Así es que  $v \in (u @ Fun(F))(S)$ , y  $v = v' \in (u @ Fun(F))(Y)$ ; por definición de  $N @ \hat{S}$  tenemos que  $S = Y$ . Por lo tanto,  $\hat{g}$  es un monomorfismo.

Ahora veamos que  $\hat{g}$  es una transformación natural. Para mostrar que  $\hat{g}$  es una transformación natural, tenemos que ver que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} N @ 2^{Fun(F)} & \xrightarrow{\hat{g}_N} & N @ \Omega^{Fun(F)} \\ u @ 2^{Fun(F)} \uparrow & & u @ \Omega^{Fun(F)} \uparrow \\ M @ 2^{Fun(F)} & \xrightarrow{\hat{g}_M} & M @ \Omega^{Fun(F)} \end{array}$$

Pero, tenemos que:

$$(u @ \Omega^{Fun(F)} \circ \hat{g}_M)(S) = (u @ \Omega^{Fun(F)})(\hat{S}).$$

Sean  $(x, s) \in \hat{S}$  con  $x : M \rightarrow L$ . Entonces, por un lado:

$$(u \otimes \Omega^{Fun(F)} \circ \hat{g}_M)(s) = (u \otimes \Omega^{Fun(F)})(x, s) = (ux, (u \otimes \Omega^{Fun(F)})(s))$$

$$\text{donde } s \in (x \otimes \Omega^{Fun(F)})(T) \text{ y } T \subset L \otimes Fun(F)$$

y, por otro lado, con la misma  $s$ :

$$\begin{aligned} (\hat{g}_N \circ u \otimes 2^{Fun(F)})(s) &= \hat{g}_N(u \otimes 2^{Fun(F)}(s)) \\ &= (ux, u \otimes \Omega^{Fun(F)}(s)). \blacksquare \end{aligned}$$

De esta manera podemos exhibir un monomorfismo canónico

$$f = \hat{g} \circ \{ \} : Fun(CF) \mapsto 2^{Fun(CF)} \mapsto \Omega^{Fun(CF)}.$$

En este caso, tenemos a  $f$  como el  $IF$  para  $Fun(F)$  y nunca puede ser un isomorfismo.

Ahora veamos el funtor  $Fin(H)$  en  $\text{Mod}^{\mathfrak{Q}}$ .

**Proposición 5.4** Sea  $H$  un funtor en  $\text{Mod}^{\mathfrak{Q}}$ , y  $M, N$  dos direcciones con  $f : N \rightarrow M$  una transformación diafin de módulos. Entonces,  $M \mapsto M \otimes Fin(H) = \{Y \subset M \otimes H : \text{card}(Y) < \infty\}$  junto con la función en Sets,

$$u \otimes Fin(H) : M \otimes Fin(H) \rightarrow N \otimes Fin(H),$$

$$X \mapsto (u \otimes H)(X),$$

define un funtor  $Fin(H)$  en  $\text{Mod}^{\mathfrak{Q}}$ .

*Demostración.* 1)  $M \otimes Fin(H) \subset M \otimes 2^H = 2^{M \otimes H}$ .

2) Para  $\text{card}(X) < \infty$ , tenemos que  $\text{card}(u \otimes H)(X) < \infty$ .

Por lo tanto,  $Fin(H) \subset 2^H$  (un subfuntor, por supuesto). ■

Ahora enunciaremos un último resultado; para su demostración véase [ToM., Apéndice G].

**Proposición 5.5** Sea  $H$  un funtor en  $\text{Mod}^{\mathfrak{Q}}$ . Entonces existen funtores  $X$  y  $Y$  en  $\text{Mod}^{\mathfrak{Q}}$  tal que:

$$X \cong Fin(H \times X)$$

y

$$Y \cong H \times Fin(Y).$$

**Ejemplo 5.6** Ejemplificaremos una Forma circular de  $TF$  Power (que no es propiamente de TMM).

Consideremos un libro típico:

'Book'  $\rightarrow$  Limit( $No.$ ,  $Title$ ,  $Text$ ,  $Chapters$ ), con

$$IF = f : Fun(F) \mapsto Fun(No.) \times Fun(Title) \times Fun(Text) \times Fun(Chapters)$$

siendo las componentes

'No'  $\xrightarrow{Fun(No.) \rightarrow \mathbf{oz}}$  Simple( $\mathbb{Z}$ )

'Title'  $\xrightarrow{Fun(Title) \rightarrow \mathbf{oz} \langle ASCII \rangle}$  Simple( $\mathbb{Z} \langle ASCII \rangle$ )

'Text'  $\xrightarrow{Fun(Text) \rightarrow \mathbf{oz} \langle ASCII \rangle}$  Simple( $\mathbb{Z} \langle ASCII \rangle$ )

'Chapters'  $\xrightarrow{Fin(Fun(F)) \rightarrow \Omega^{Fun(F)}}$  Power( $Book$ )

El funtor  $Fin(Fun(F))$  es un subfuntor del funtor  $2^{Fun(F)}$  y consiste en todos los subconjuntos finitos de  $N @ Fun(F)$  en una dirección dada  $N$  (y que se inyecta canónicamente en  $\Omega^{Fun(F)}$ ). Sea  $H = Fun(No.) \times Fun(Title) \times Fun(Text)$ . Lo que buscamos hacer es definir un funtor  $Fun(F)$  tal que existe un isomorfismo  $f : Fun(F) \cong H \times Fin(Fun(F))$ . De esta manera cualquier información acerca del texto, codificada en  $H$ , y cualquier conjunto finito de capítulos, codificado en  $Fin(Fun(F))$ , podría ser alcanzada por un Denotador de Forma 'Book'. La solución se da por la Proposición 5.5, aunque no es única.

**Definición 5.7** Un Denotador regular o circular es un Denotador cuya Forma es regular o circular respectivamente.

## CAPÍTULO II

### LA CATEGORÍA DE DENOTADORES

#### II.1 Composiciones Locales

En esta sección se pretende definir los objetos de la categoría  $\text{Loc}$ ; dichos objetos son un tipo de Denotador, conocido como composición local. Cabe mencionar que en el presente trabajo sólo se manejará la “Teoría Local”, que trata estructuras locales. La “Teoría Global” cae fuera del alcance de esta tesis, aunque es la otra parte fundamental de la TMM. La composición local posee una estructura indescomponible que, en la TMM, se conoce como “elemental”.

**Definición 1.1** Una *composición local* es un Denotador  $D : A \rightsquigarrow F(y)$ , con  $A \in \text{Mod}$ , cuya Forma  $F$  es de tipo **Power**. El Coordinador,  $CF$ , de  $F$  se llamará el *espacio ambiente* de  $D$  y sus Coordenadas  $y$  se conocerán como su *soporte*.

**Definición 1.2** Una composición local  $D$  se llamará *objetiva* si  $y \in 2^{\text{Fun}(CF)}$ , o sea, si existe  $Y \subset A \otimes \text{Fun}(CF)$ , con  $y = \hat{Y} \subset \otimes A \times \text{Fun}(CF)$ .<sup>1</sup> En este caso  $Y$  también se llamará el soporte de  $D$ . La  $\text{Card}(D)$  de un Denotador objetivo es la cardinalidad de su conjunto de Coordenadas,  $Y$ .

Aquí debemos recordar lo visto en la sección I.4, Definición I.4.2, o sea,

$$\hat{Y} \subset \otimes A \times \text{Fun}(CF), \text{ para } Y \subset A \otimes 2^{\text{Fun}(CF)}$$

y, para otro módulo  $B$ ,

$$B \otimes \hat{Y} = \{(u \in B \otimes A, v \in B \otimes \text{Fun}(CF)) : v \in (u \otimes \text{Fun}(CF))(Y)\}.$$

**Definición 1.3** Una composición local que no es objetiva, se llama *funtorial*

Cabe mencionar que para cualquier Forma  $F$  cuyo tipo no es **Power**, un Denotador  $D$  puede definirse como el conjunto de un sólo elemento  $\{D\}$  de la Forma con nombre  $\text{Loc}^F$  y definida así:

---

<sup>1</sup> $y$  es un subfuntor de  $\otimes A \times \text{Fun}(CF)$ . Hemos visto que  $y = \hat{Y}$  es el subconjunto  $Y \subset A \otimes \text{Fun}(CF)$  “hecho funtor”.

$$\text{Loc}^F \rightarrow \mathbf{Power}(F)$$

$$Id_{\mathcal{A}Fun(F)}$$

De esta manera, cuando trabajamos con un Denotador  $D$  en general, de Forma  $F$ , podemos considerar  $\{D\}$  y, así derivar de  $\text{Loc}^F$  cualquier composición local de espacio ambiente  $F$ . Regresaremos a este punto en la sección 2.3.

Así es que una composición local functorial es un subfuntor:

$$Z \hookrightarrow \mathbb{A} \times Fun(CF),$$

y una composición local objetiva es un subconjunto:

$$Y \hookrightarrow \mathbb{A} @ Fun(CF))$$

También escribiremos  $F$  a veces para indicar  $Fun(CF)$  y se dirá “espacio ambiente”, pero este abuso de notación se usará siempre y cuando no dé lugar a confusión.

Por otro lado, sabemos de la sección 1.4 que un Denotador objetivo,  $C \hookrightarrow \mathbb{A} @ F$  (con  $C$  una composición local,  $A \in \mathbf{Mod}$  y  $F$  un functor) puede identificarse con su versión functorial  $\hat{C} \hookrightarrow \mathbb{A} \times F$ . Asimismo, a cada composición local functorial puede asociársele su *traza objetiva*.

**Definición 1.4** Sea  $S \hookrightarrow \mathbb{A} \times F$  una composición local functorial,  $A \in \mathbf{Mod}$ ,  $F$  el espacio ambiente. Su *traza objetiva* se define como la composición local:

$$\check{S} = \{s \in \mathbb{A} @ F : (Id_A, s) \in \mathbb{A} @ S\},$$

o sea,  $\check{S} = 1_A @ S$  y, de esta forma, una composición local functorial puede ser “congealada” a su traza objetiva.

Asimismo, la versión functorial correspondiente a  $\check{S}$  (que es la composición local functorial  $S$  objetivizada) se denotará como  $S^\diamond = (\check{S})^\wedge$

**Proposición 1.5** Sea  $S \hookrightarrow \mathbb{A} \times F$  una composición local,  $A \in \mathbf{Mod}$  y espacio ambiente  $F$ . Entonces  $S^\diamond \subset S$  y  $S^\diamond = S$  si, y sólo si,  $S$  es objetiva.

*Demostración:* Sea  $(u, v) \in B @ S^\diamond = \{u \in B @ A, v \in B @ F : v \in (u @ F)(\check{S})\}$ . Entonces,  $u : B \rightarrow A$  y  $v \in (u @ F)(\check{S})$  y existe  $s \in \check{S}$  tal que  $(u @ F)(s) = v$ .

También tenemos que  $(Id_A, s) \in A \circledast S \subset A \circledast A \times A \circledast F$ . Así es que queremos probar que

$$(u, v) \in B \circledast S \subset B \circledast A \times B \circledast F.$$

Pero sabemos que:

$$u \circledast S : A \circledast S \rightarrow B \circledast S, (Id_A, s) \mapsto (u, v) \text{ porque}$$

$$\circledast A \times F \supset u \circledast S : A \circledast A \times A \circledast F \rightarrow B \circledast A \times B \circledast F, (Id_A, s) \mapsto (u, u \circledast F(s)) = (u, v).$$

Por lo tanto  $(u, v) \in B \circledast S$  y  $S^\diamond \subset S$ .

Sea  $S$  objetiva, y  $S = \hat{Y}$ , con  $Y \subset A \circledast F$ . Entonces,  $\hat{S} = Y$  y  $S^\diamond = \hat{Y} = S$ . Inversamente, si  $S = S^\diamond$  entonces  $S = (\hat{S})^\wedge$  es la versión funtorial de la composición local objetiva  $S = \hat{S}$ , ya que  $\hat{S} = S^\diamond$ . ■

Es muy importante para nosotros enfatizar la diferencia entre composiciones locales funtoriales y objetivas, ya que antes del desarrollo de la teoría de Denotadores, la TMM privilegiaba las composiciones locales objetivas, lo cual implicaba una restricción demasiado limitada para sus necesidades.

Sea  $S \mapsto \circledast A \times F$  una composición local,  $A \in \mathbf{Mod}$ ,  $F$  el funtor de  $CF$  (el espacio ambiente), y  $u : B \rightarrow A$  un morfismo diafin en  $\mathbf{Mod}$ . Como notación fijamos  $u \circledast S = \{t \in B \circledast S : t = (u, v)\}$ . Así es que tenemos:

$$\begin{array}{ccc} B & u \circledast S \subset B \circledast S \subset B \circledast A \times B \circledast F & \\ \downarrow u & \uparrow u \circledast A \times u \circledast F & \\ A & A \circledast S \subset A \circledast A \times A \circledast F & \end{array}$$

$$\text{con } B \circledast S = \coprod_{u: B \rightarrow A} u \circledast S.$$

Ahora veamos un ejemplo en que sólo se da la contención  $S^\diamond \subset S$  y la composición local objetiva (u objetivizada, en este caso) queda muy corta para las necesidades de la TMM. Aceptaremos por el momento que las composiciones locales funtoriales juegan un papel esencial en la Teoría Global de la TMM.

**Ejemplo 1.6** Sea  $S = \circledast A \times F$  una composición local. Así es que  $A \circledast S = A \circledast A \times A \circledast F$  con  $u \circledast S = \{u\} \times A \circledast F$  y  $u : A \rightarrow A$ . Por otro lado,  $u \circledast S^\diamond = \{u\} \times (u \circledast F)(\hat{S})$ .

Tomemos una Forma de tipo **Simple** (con Coordinador un módulo) con el funtor de la Forma  $\circledast B$ , así como el morfismo cero,  $z : A \rightarrow A$ . Entonces, para  $S$ ,  $z \circledast S = \{z\} \times A \circledast B \cong A \circledast B$ , o sea, el

conjunto pleno de morfismos diafines (un homomorfismo de módulos más una traslación). Sin embargo,

$$z \otimes S^\diamond = \{z\} \times (z \otimes B)(\tilde{S}) = \{z\} \times e^B \cdot 0,$$

o sea, los morfismos afines constantes  $b + 0$ , que evidentemente es menor que el conjunto de todas las transformaciones diafines  $A \otimes B$ .

## II.2 Elementos de la Teoría Local

### 2.1 Construcciones Booleanas

Sean  $C \hookrightarrow \mathbb{A} \times F, S \hookrightarrow \mathbb{A} \times F$ , dos composiciones locales,  $A \in \mathbf{Mod}$ ,  $F$  el espacio ambiente. Evidentemente, ambos son subfuntores de  $\mathbb{A} \times F$ . Así es que podemos hablar de contención ( $C \subset S$ ), unión ( $C \cup S$ ), intersección ( $C \cap S$ ) y diferencia ( $C - S$ ).<sup>2</sup>

**Lema 2.1.1** Para dos composiciones locales  $C \hookrightarrow \mathbb{A} \times F, S \hookrightarrow \mathbb{A} \times F$  así como  $A \in \mathbf{Mod}$  y  $F$  el functor del espacio ambiente, y para dos composiciones locales objetivas  $U \subset A \otimes F, W \subset A \otimes F$ , las siguientes relaciones entre operaciones Booleanas se cumplen:

- (i) Si  $U \subset W$ , entonces  $\hat{U} \subset \hat{W}$ ;
- (ii) Si  $C \subset S$  entonces  $\check{C} \subset \check{S}$ ;
- (iii) Si  $C \subset S$  entonces  $C^\diamond \subset S^\diamond$ ;
- (iv)  $\hat{U} \cup \hat{W} = (U \cup W)^\wedge$ ;
- (v)  $C^\diamond \cup S^\diamond \subset (C \cup S)^\diamond$ ;
- (vi)  $(U \cap W)^\wedge \subset \hat{U} \cap \hat{W}$ .

*Demostración:* Como podemos trabajar puntualmente en una categoría de pregavillas (en este caso  $\mathbf{Mod}^\bullet$ ), tenemos:

(i)  $B \otimes U \subset B \otimes W$ . Entonces

$$\begin{aligned} B \otimes \hat{U} &= \{u \in B \otimes A, v \in B \otimes F : v \in (u \otimes F)(U)\} \subset \{u \in B \otimes A, v \in B \otimes F : v \in (u \otimes F)(W)\} \\ &= B \otimes \hat{W} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>La diferencia de funtores,  $C - S$  es, por definición, el subfuntor más grande de  $C \hookrightarrow \mathbb{A} \times F$  que es disjunto de  $S$ .

(ii) y (iii) se comprueban análogamente, empleando las definiciones.

Asimismo, para (iv) tenemos que

$$B@{\hat{U}} \cup B@{\hat{W}}$$

$$= \{u \in B@A, v \in B@F : v \in (u@F)(U)\} \cup \{u \in B@A, v \in B@F : v \in (u@F)(W)\}$$

y, a la vez,

$$B@(U \cup W)^{\wedge} = \{u \in B@A, v \in B@F : v \in (u@F)(U \cup W)\}.$$

Así es que,

$$w \in B@{\hat{U}} \cup B@{\hat{W}} \iff w \in B@{\hat{U}} \text{ o } w \in B@{\hat{W}}$$

$$\iff v \in (u@F)(U) \text{ o } v \in (u@F)(W) \iff v \in (u@F)(U) \cup (u@F)(W)$$

$$\iff v \in (u@F)(U \cup W) \text{ (un hecho elemental de Teoría de Funciones y Conjuntos)}$$

$$\iff w \in B@(U \cup W)^{\wedge}.$$

Por lo tanto,

$$B@{\hat{U}} \cup B@{\hat{W}} = B@(U \cup W)^{\wedge} \text{ y } \hat{U} \cup \hat{W} = (U \cup W)^{\wedge}.$$

(v) es análogo. En el (vi) sólo tenemos la contención de un lado. La probaremos y ofreceremos un contraejemplo para el otro lado.

$$B@(U \cap W)^{\wedge} = \{u \in B@A, v \in B@F : v \in (u@F)(U \cap W)\}$$

Sea  $w \in B@(U \cap W)^{\wedge}$ . Entonces  $v \in (u@F)(U \cap W)$  lo cual significa, también por una propiedad elemental de Teoría de Funciones y Conjuntos, que  $v \in (u@F)(U) \cap (u@F)(W)$ . Entonces,

$$w \in \{u \in B@A, v \in B@F : v \in (u@F)(U)\}$$

$$\cap \{u \in B@A, v \in B@F : v \in (u@F)(W)\}$$

$$= B@{\hat{U}} \cap B@{\hat{W}}.$$

Por lo tanto,  $B@(U \cap W)^{\wedge} \subset B@{\hat{U}} \cap B@{\hat{W}}$  y  $(U \cap W)^{\wedge} \subset \hat{U} \cap \hat{W}$ . ■

**Ejemplo 2.1.2** Ahora veamos un contraejemplo para la otra contención de (vi). Supongamos que  $\hat{U} \cap (A@F-U)^{\wedge}$  es objetiva. Como  $U \cap (A@F-U) = \emptyset$ , si existiera la doble contención,  $\hat{U} \cap (A@F-U)^{\wedge}$

tendría que ser vacía, pero

$$B \otimes \hat{U} \cap B \otimes (A \otimes F - U)$$

$$= \{u \in B \otimes A, v \in B \otimes F : v \in (u \otimes F)(U)\} \cap \{u \in B \otimes A, v \in B \otimes F : v \in (u \otimes F)(A \otimes F - U)\}$$

y por Teoría de Funciones y Conjuntos sabemos que  $(B \otimes \hat{U}) \cap B \otimes (A \otimes F - U)$  no es necesariamente vacía (ya que  $(u \otimes F)(U) \cap (u \otimes F)(A \otimes F - U)$  no es necesariamente vacía). Por lo tanto  $\hat{U} \cap (A \otimes F - U)$  puede no ser vacía.

## 2.2 Productos y Coproductos

Sean  $S \hookrightarrow @A \times F$  y  $T \hookrightarrow @B \times G$  dos composiciones locales. El functor producto  $S \times T$  se puede construir como una composición local. Veamos.

Para cada módulo  $A$ ,  $S \times T$  es un subfunctor de  $(@A \times F) \times (@B \times G)$ . Hay un isomorfismo canónico  $@A \times @B \cong @(A \times B)$  ya que :

$$@A \times @B = Hom(-, A) \times Hom(-, B) \cong Hom(-, A \times B) = @(A \times B)$$

Así es que  $S \times T$  es isomorfo a una composición local perteneciente a  $@(A \times B) \times (F \times G)$  con módulo  $A \times B$  y espacio ambiente  $F \times G$ . Esta es la composición local que se tomará como el producto  $S \times T$  de composiciones locales. De esta forma, si  $u : C \rightarrow A \times B$  es una transformación diafin de módulos, sean  $u_A : C \rightarrow A$  y  $u_B : C \rightarrow B$  las dos componentes de  $u$ . Entonces  $u \otimes (S \times T) \cong u_A \otimes S \times u_B \otimes T$ .

Asimismo, las proyecciones  $p_S : S \times T \rightarrow S$  y  $p_T : S \times T \rightarrow T$  son inducidas, respectivamente, por:

$$p_A : A \times B \rightarrow A, p_F : F \times G \rightarrow F \text{ y } p_B : A \times B \rightarrow B, p_G : F \times G \rightarrow G.$$

Los siguientes dos diagramas conmutativos de funtores sirven como modelo para los morfismos generales entre composiciones locales (Denotadores), cuya definición será el tema de la siguiente sección.

$$\begin{array}{ccc} S \times T & \rightarrow & @(A \times B) \times (F \times G) \\ \downarrow p_S & & \downarrow @p_A \times p_F \\ S & \rightarrow & @A \times F \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} S \times T & \rightarrow & @(A \times B) \times (F \times G) \\ \downarrow p_T & & \downarrow @p_B \times p_G \\ T & \rightarrow & @B \times G \end{array}$$

Los coproductos de las composiciones locales  $S$  y  $T$  pueden construirse siempre y cuando su dirección sea la misma, es decir,  $S \hookrightarrow A \times F$  y  $T \hookrightarrow A \times G$ . Esto se explica en función de la relación entre coproductos y el coproducto fibrado ya que, en el diagrama,  $S$  y  $T$  tienen el mismo dominio.

El funtor coproducto  $S \amalg T$  es un subfuntor de  $\mathbb{A} \times F \amalg \mathbb{A} \times G \cong \mathbb{A} \times (F \amalg G)$  (esto se puede comprobar fácilmente si se evalúa puntualmente en Sets). Así es que, igual que hicimos con el funtor producto, identificaremos  $S \amalg T$  con la correspondiente composición local, un subfuntor de  $\mathbb{A} \times (F \amalg G)$ , siendo  $A$  el módulo y  $F \amalg G$  el espacio ambiente.

Asimismo, para una transformación diafin de módulos  $u : B \rightarrow A$ , tenemos

$$u \circ (S \amalg T) \cong (u \circ S) \amalg (u \circ T),$$

siendo este isomorfismo inducido de las inyecciones

$$i_F : F \rightarrow F \amalg G \text{ y } i_G : G \rightarrow F \amalg G.$$

De nuevo tenemos dos diagramas conmutativos de funtores que serán de utilidad para entender los morfismos entre composiciones locales.

$$\begin{array}{ccc} S & \rightarrow & \mathbb{A} \times F \\ \downarrow i_S & & \downarrow \mathbb{A} \times i_F \\ S \amalg T & \rightarrow & \mathbb{A} \times (F \amalg G) \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc} T & \rightarrow & \mathbb{A} \times G \\ \downarrow i_T & & \downarrow \mathbb{A} \times i_G \\ S \amalg T & \rightarrow & \mathbb{A} \times (F \amalg G) \end{array}$$

### II.3 Morfismos de Composiciones Locales (Denotadores)

Primero se definirán los morfismos para composiciones locales objetivas, después para composiciones locales functoriales para, finalmente, mostrar la relación entre ambas.

**Definición 3.1** Sean  $K \hookrightarrow \mathbb{A} \circ F$  y  $L \hookrightarrow \mathbb{B} \circ G$  dos composiciones locales objetivas, con  $A, B \in \text{Mod}$  y  $F, G$  sus respectivos espacios ambientes (o sea,  $F = \text{Fun}(CF)$ ,  $G = \text{Fun}(CG)$ ). Un morfismo de  $K$  a  $L$  es una pareja  $(f, \alpha)$ , con  $\alpha : A \rightarrow B$  un morfismo (transformación diafin) de módulos y  $f : K \rightarrow L$  una función de conjuntos, con  $L \circ \alpha = \text{im}(L)$  bajo  $\alpha \circ G : \mathbb{B} \circ G \rightarrow \mathbb{A} \circ G$  tal que existe una transformación natural  $h : F \rightarrow G$  con  $f = \mathbb{A} \circ h \circ K$  :

$$\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & A \otimes F \\ \downarrow f = A \otimes h / \kappa & & \downarrow A \otimes h \\ L \alpha & \hookrightarrow & A \otimes G \end{array}$$

Este morfismo se denota con  $f'_{\alpha} : K \rightarrow L$ . Cualquier transformación natural  $h$  se llamará una *simetría subyacente* de este morfismo.

En seguida veremos dos lemas acerca de morfismos de composiciones locales objetivas.

**Lema 3.2** Sean  $f'_{\alpha} : K \rightarrow L$  y  $g'_{\beta} : L \rightarrow N$ , dos morfismos de composiciones locales, con  $K \hookrightarrow A \otimes F$ ,  $L \hookrightarrow B \otimes G$ ,  $N \hookrightarrow C \otimes H$ , y  $\alpha : A \rightarrow B$ ,  $\beta : B \rightarrow C$ . Entonces  $g'_{\beta} \circ f'_{\alpha} = \alpha(g)\beta$  también es un morfismo de composiciones locales, siendo  $\alpha(g)$  la única función que haga conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} L & \rightarrow & L \alpha \\ g \downarrow & & \downarrow \alpha(g) \\ M \beta & \rightarrow & M \beta \alpha \end{array}$$

donde  $M \beta \hookrightarrow B \otimes H$ ,  $M \beta \alpha \hookrightarrow A \otimes H$ . Este morfismo se llamará la *composición* de  $f'_{\alpha}$  y  $g'_{\beta}$ .

*Demostración:* Tenemos que  $g'_{\beta} \circ f'_{\alpha} : K \rightarrow L \rightarrow N$  y  $f'_{\alpha}$  es inducida por  $h$ :

$$\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & A \otimes F \\ f \downarrow & & \downarrow A \otimes h \\ L \alpha & \hookrightarrow & A \otimes G \end{array}$$

mientras que  $g'_{\beta}$  es inducida por  $k : G \rightarrow H$ :

$$\begin{array}{ccc} L & \hookrightarrow & B \otimes G \\ g \downarrow & & \downarrow B \otimes k \\ M \beta & \hookrightarrow & B \otimes H \end{array}$$

Es evidente que  $g'_{\beta}$  es determinada de forma única por  $g$  y  $\beta$  ya que, por un lado,

$$(1 \otimes k)(L) = g(L) \subset B \otimes H$$

y, por otro:

$$\begin{array}{ccc} B & g(L) \subset M \beta = \beta \otimes H(N) \subset B \otimes H \\ \beta \downarrow & \uparrow \beta \otimes H \\ C & N \subset C \otimes H \end{array}$$

Como  $k : G \rightarrow H$  es natural con respecto a  $\alpha$ , o sea:

$$\begin{array}{ccccc} A & A \otimes G & \xrightarrow{k_A} & A \otimes H \\ \downarrow \alpha & \uparrow \alpha \otimes G & & \uparrow \alpha \otimes H \\ B & B \otimes G & \xrightarrow{k_B} & B \otimes H \end{array}$$

tenemos la función única de conjuntos  $\alpha(g)$ :

$$\begin{array}{ccc}
 B \otimes G \supset L & \xrightarrow{\alpha \otimes G/L} & L\alpha \subset A \otimes G \\
 \downarrow g & & \downarrow \alpha(g) \\
 B \otimes H \supset M\beta & \xrightarrow{\alpha \otimes H/M\beta} & M\beta\alpha \subset A \otimes H
 \end{array}$$

De esta manera,  $\alpha(g)f\beta\alpha : K \rightarrow L\alpha \rightarrow M\beta\alpha$  que es inducida por  $A \otimes k \circ A \otimes h = A \otimes kh$ . ■

**Lema 3.3** (Existencia del morfismo identidad, la asociatividad de morfismos y la factorización canónica)

(i) Para una composición local objetiva  $K$ , con dirección  $A$  ( $A \in \text{Mod}$ ) tenemos que

$$1_K = 1_{f_1} : K \rightarrow K$$

es un morfismo.

(ii) Si  $f\alpha : K \rightarrow L$ ,  $g\beta : L \rightarrow M$ ,  $q\gamma : M \rightarrow N$  son tres morfismos, entonces

$$(q\gamma \circ g\beta) \circ f\alpha = q\gamma \circ (g\beta \circ f\alpha).$$

(iii)  $1_L \circ f\alpha = f\alpha = f\alpha \circ 1_K$ .

(iv) Todo morfismo  $f\alpha : K \rightarrow L$  se puede factorizar a  $f\alpha = 1_{L\alpha} \circ f\alpha$  con el factor  $f\alpha : K \rightarrow L\alpha$  para una dirección (módulo) fija, y  $1_{L\alpha} : L\alpha \rightarrow L$  para el cambio de dirección (módulo).

*Demostración:* (i) El siguiente diagrama sale directamente de la definición de morfismo para composiciones locales objetivas, con  $f = 1_K, \alpha = 1_A$ :

$$\begin{array}{ccc}
 A & K & \hookrightarrow A \otimes F \\
 1_A \downarrow & 1_{f_1=1_K} \downarrow & \downarrow A \otimes F \\
 A & K & \hookrightarrow A \otimes F
 \end{array}$$

(ii) Sabemos que  $q\gamma \circ (g\beta \circ f\alpha) = q\gamma \circ (\alpha(g)f\beta\alpha) = \beta\alpha(q)\alpha(g)f\beta\alpha^* = (q\gamma \circ g\beta) \circ f\alpha$ , ya que \* es una composición de funciones de conjuntos y posee asociatividad.

(iii)  $1_L \circ f\alpha = K \rightarrow L \rightarrow L$ , pero

$$\begin{array}{ccc}
 L & \rightarrow & B \otimes G \\
 g=1_{f_1} \downarrow & & \downarrow 1_B \otimes G \\
 L & \rightarrow & B \otimes G
 \end{array}$$

con  $\beta = 1 : B \rightarrow B$ . Así es que  $g\beta = 1_L$  y  $g\beta \circ f\alpha = 1_L \circ f\alpha = \alpha(1)f\alpha = f\alpha$ . Asimismo,  $f\alpha \circ 1_K = \alpha(f)1_{\alpha \circ 1} = f\alpha$ .

(iv) Este hecho es una aplicación directa de las definiciones y propiedades, o sea  $1_{L\alpha} \circ f\alpha : K \rightarrow L\alpha \rightarrow L$  tal que tenemos:

$$\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & A \otimes F \\ f = f_1 \downarrow & & \downarrow A \otimes h \\ L\alpha & \hookrightarrow & A \otimes G \end{array}$$

y, como existe la identidad ( $1 : G \rightarrow G$ ) como simetría subyacente podemos definir  $1/\alpha : L\alpha \rightarrow L$  :

$$\begin{array}{ccc} L\alpha & \hookrightarrow & A \otimes G \\ 1/\alpha \downarrow & & \downarrow A \otimes 1_G \blacksquare \\ L & \hookrightarrow & B \otimes G \end{array}$$

Ahora veamos los morfismos entre composiciones locales functoriales.

**Definición 3.4** Sean  $A, B$  dos módulos y sean  $K \hookrightarrow \mathbb{A} \times F$ ,  $L \hookrightarrow \mathbb{B} \times G$  dos composiciones locales functoriales. Un morfismo de  $K$  a  $L$  es una pareja  $(f, \alpha)$  donde  $\alpha : A \rightarrow B$  es una transformación diafin de módulos y  $f/\alpha : K \rightarrow L$  es una transformación natural, tal que existe una simetría subyacente  $h : F \rightarrow G$  tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & \mathbb{A} \times F \\ f/\alpha \downarrow & & \downarrow \mathbb{A} \times h \\ L & \hookrightarrow & \mathbb{B} \times G \end{array}$$

Se pueden definir los morfismos entre composiciones locales functoriales de una manera alternativa que, aunque menos elegante que la definición 2.3.2, nos remite a la definición de morfismos entre composiciones locales objetivas y ayuda para realizar demostraciones.

**Definición 3.5** (Definición equivalente de morfismos entre composiciones locales functoriales)

Consideremos el siguiente diagrama de producto fibrado ("pullback"):

$$\begin{array}{ccc} L\alpha & \hookrightarrow & \mathbb{A} \times G \\ \downarrow & & \downarrow \mathbb{A} \times 1_G \\ L & \hookrightarrow & \mathbb{B} \times G \end{array}$$

Entonces las transformaciones naturales  $f : K \rightarrow L\alpha$  y  $h : F \rightarrow G$  hacen que conmute el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & \mathbb{A} \times F \\ f \downarrow & & \downarrow \mathbb{A} \times h \\ L\alpha & \hookrightarrow & \mathbb{A} \times G \end{array}$$

En otras palabras, tenemos la siguiente situación universal:

$$\begin{array}{ccc} K & & \mathbb{A} \times F \\ \downarrow f & \searrow & \downarrow \mathbb{A} \times h \\ L\alpha & \hookrightarrow & \mathbb{A} \times G \\ \downarrow 1/\alpha & & \downarrow \mathbb{A} \times 1_G \\ L & \hookrightarrow & \mathbb{B} \times G \end{array}$$

**Definición 3.6** Si  $f'_{\alpha} : K \rightarrow L$  y  $g'_{\beta} : L \rightarrow M$  son dos morfismos entre composiciones locales funtoriales, entonces la composición  $g'_{\beta} \circ f'_{\alpha} : K \rightarrow M$  se define por  $g'_{\beta} \circ f'_{\alpha} = g'f'_{\beta\alpha}$

Hay un lema análogo al de composiciones locales objetivas para morfismos entre composiciones locales funtoriales y cuya demostración, igualmente, se desprende de las definiciones.

**Lema 3.7** (Existencia del morfismo identidad así como la asociatividad y factorización canónica para composiciones locales funtoriales).

(i) Para una composición local funtorial  $K \hookrightarrow \mathbb{O}A \times F$ ,  $A \in \text{Mod}$ ,  $F$  el espacio ambiente, la identidad  $1_{f_1} : K \rightarrow K$  es un morfismo funtorial. Así como (i), los incisos (ii), (iii) y (iv) se enuncian y demuestran de forma análoga a como se realizó en el Lema 3.2, con la diferencia de que las composiciones locales y sus morfismos son funtoriales y entre funtores, en vez de conjuntos y funciones de conjuntos.

Estas analogías no son, de ninguna manera, casuales o coincidentales. Es posible establecer una inclusión del marco objetivo en el marco funtorial. Sabemos de la sección 1.4 que toda composición local objetiva  $C \hookrightarrow A\mathbb{O}F$  da lugar a un subfuntor  $\hat{C} \hookrightarrow \mathbb{O}A \times F$ . Sean  $\alpha : A \rightarrow B$  y  $\beta : X \rightarrow A$  morfismos de módulos,  $g'_{\alpha} : C \rightarrow J$  un morfismo de composiciones locales objetivas, así como  $J \hookrightarrow B\mathbb{O}G$  con  $h : F \rightarrow G$  una simetría subyacente. Lo que queremos probar es que las mismas  $h$  y  $\alpha$  inducen el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \hat{C} & \hookrightarrow & \mathbb{O}A \times F \\ \downarrow & & \downarrow \mathbb{O}\alpha \times h \\ \hat{J} & \hookrightarrow & \mathbb{O}B \times G \end{array}$$

**Teorema 3.8** Si  $g'_{\alpha} : C \rightarrow J$  es un morfismo de composiciones locales objetivas, entonces  $\hat{g}'_{\alpha} : \hat{C} \rightarrow \hat{J}$  es un morfismo de composiciones locales funtoriales inducido por las mismas  $h$  y  $\alpha$  que  $g'_{\alpha}$ .

*Demostración.* Vamos a evaluar un elemento en  $X\mathbb{O}\hat{C}$  para ver si, por medio de  $X\mathbb{O}\alpha \times X\mathbb{O}h$ , conseguimos un elemento en  $X\mathbb{O}\hat{J}$ . Si este es el caso, por la puntualidad de los funtores en la pregavilla  $\text{Mod}^{\mathbb{O}}$ , podemos afirmar que sí existe  $\hat{g}'_{\alpha} : \hat{C} \rightarrow \hat{J}$  con las mismas  $\alpha$  y  $h$  del morfismo de composiciones locales objetivas  $g'_{\alpha} : C \rightarrow J$ . Después veremos que  $\hat{g}'_{\alpha}$  está bien definida, o sea, que depende sólo de  $g'_{\alpha}$  y no de  $h$ .

Sea  $(\beta, c\beta) \in X \otimes \hat{C} = \{\beta \in X \otimes A, c\beta \in X \otimes F : c\beta \in (\beta \otimes F)(C)\} \subset (\otimes A \times F)(X)$ .

Así es que, aplicamos  $(X \otimes \alpha \times X \otimes h)(\beta, c\beta) = (\alpha\beta, (X \otimes h)(c\beta))$  (nótese que  $X \otimes \alpha$  es covariante). Sabemos que  $\alpha\beta \in X \otimes B$ . Hay que ver que  $(X \otimes h)(c\beta) \in X \otimes \hat{J}$ . Pero, por un lado,

$$X \otimes \hat{J} = \{\alpha\beta \in X \otimes B, j\alpha\beta \in X \otimes G : j\alpha\beta \in (\alpha\beta \otimes G)(J)\} \subset \otimes B \times G$$

y, por otro lado,

$$(X \otimes h)(c\beta) = (A \otimes h)(c)(\beta) \text{ (con } c \in C \subset A \otimes F),$$

porque

$$\begin{array}{ccc} X & c\beta \in (\beta \otimes F)(C) \subset X \otimes F & c \in C \subset A \otimes F \\ \beta \downarrow & \uparrow \beta \otimes F & \downarrow A \otimes h \\ A & c \in C \subset A \otimes F & (A \otimes h)(c) \in J\alpha \subset A \otimes G \\ & & \downarrow \\ & & (A \otimes h)(c)(\beta) \in J\alpha\beta \subset X \otimes G \end{array} \quad \text{y}$$

De esta manera si  $A \otimes h(c) \in J\alpha$  entonces  $(A \otimes h)(c)(\beta)$  es un elemento de  $J\alpha\beta$ , es decir, es

$$j\alpha\beta \in (\alpha\beta \otimes G)(J).$$

Por lo tanto,  $(X \otimes \alpha \times X \otimes h)(\beta, c\beta) = (\alpha\beta, j\alpha\beta) \in X \otimes \hat{J}$ , y podemos afirmar que  $\hat{g}'_\alpha : \hat{C} \rightarrow \hat{J}$  es inducida por  $g'_\alpha : C \rightarrow J$ .

Ahora veamos que  $\hat{g}'_\alpha$  está bien definida, o sea, que depende sólo de  $g'_\alpha$ .

Recordemos de la sección 2.1 que  $1_A \otimes \hat{C}$  se define como la traza objetiva  $\hat{C}$  de  $\hat{C}$ . Sea

$$1_A \otimes \hat{C} \rightarrow \alpha \otimes \hat{J},$$

la evaluación de  $\hat{g}$  en  $1_A$ , es decir:

$$\begin{array}{c} 1_A \otimes \hat{C} \subset A \otimes A \times A \otimes F \\ \downarrow \\ \alpha \otimes \hat{J} \subset A \otimes B \times A \otimes G \end{array}$$

con  $\hat{C} = C \subset A \otimes \hat{C}$  y  $J\alpha \subset A \otimes \hat{J}$ . Así es que tenemos  $g : C \rightarrow J\alpha$  como segunda coordenada.

Asimismo, tenemos el diagrama conmutativo que nos garantiza que  $\hat{g}$  depende sólo de  $g$ :

$$\begin{array}{ccc} 1_A \otimes \hat{C} & \xrightarrow{p_1} & \beta \otimes \hat{C} \subset X \otimes A \times X \otimes F \\ \downarrow g & & \downarrow \hat{g} \\ \alpha \otimes \hat{J} & \xrightarrow{p_2} & \alpha\beta \otimes \hat{J} \subset X \otimes B \times X \otimes G \end{array}$$

Para ver que es conmutativo, veamos las suprayecciones.  $\hat{g}(p_1(1_A, c)) = \hat{g}(\beta, c\beta) = (\alpha\beta, j\alpha\beta)$  y  $p_2(\alpha, j\alpha) = (\alpha\beta, j\alpha\beta)$ .

De esta manera, tenemos una función  $\hat{I} : g'_\alpha \rightarrow \hat{g}'_\alpha$  que transforma un morfismo objetivo en uno funtorial. ■

Recordemos la categoría de elementos  $\int_C P$  (véase Apéndice 1, teoría de Topos). En este caso, vamos a ver como un Denotador  $D$  puede verse como un elemento de la categoría de elementos  $\int_{\text{Mod}} \text{Fun}(F)$ , donde  $\text{Fun}(F)$  es el funtor de la Forma. Veamos como funciona esto.

Sea  $D$  un Denotador no necesariamente de Forma **Power**,  $D : A \rightsquigarrow F(x)$ . Este Denotador puede ser “envuelto” en una composición local de la siguiente manera. Consideremos la Forma:

$$\begin{array}{c} \text{Fin}(\text{Form}) \rightarrow \text{Power}(\text{Form}) \\ \text{Fin}(\text{Fun}(F)) \rightarrow \Omega^F \end{array}$$

En seguida, se define la composición local objetiva  $\{D\} : A \rightsquigarrow \text{Fin}(\text{Form})(D)$  (en otras palabras, las Coordenadas son  $D$ ).

Sean  $\{D_1\} \hookrightarrow A \otimes F_1$ ,  $\{D_2\} \hookrightarrow B \otimes F_2$  dos composiciones locales y  $h : F_1 \rightarrow F_2$ ,  $\alpha : A \rightarrow B$ . Si  $h = 1_{\text{Fun}(F)}$  como simetría subyacente, tendremos

$$(A, D_1 \in \{D_1\} \subset A \otimes F_1), (B, D_2 \in \{D_2\} \subset B \otimes F_1)$$

como elementos de  $\int_{\text{Mod}} \text{Fun}(F)$  con  $\alpha \otimes h : A \otimes F_1 \rightarrow B \otimes F_1$ ,  $h \in \text{Mod}^\circ$ .

Lo que necesitamos, para tener una categoría de elementos de  $\text{Fun}(F) : \text{Mod}^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$ , es que, si tenemos dos objetos  $(A, D_1), (B, D_2)$  de dicha categoría, más  $\alpha : A \rightarrow B$ , y si  $D_1 \in \{D_1\}$  y  $D_2 \in \{D_2\}$ , entonces  $D_2 \alpha = D_1$  o, realmente,  $D_2 \alpha = D_1 h$  cuando  $h = 1_{\text{Fun}(F)}$ , puesto que:

$$\begin{array}{ccc} A & (\alpha \otimes F_1)(D_2) = D_1 \in \{D_1\} \hookrightarrow A \otimes F_1 & \\ \alpha \downarrow & \uparrow \alpha \otimes F_1 & \\ B & D_2 \in \{D_2\} \hookrightarrow B \otimes F_1 & \end{array}$$

De esta manera,  $D_1$  y  $D_2$  son “elementos” y los morfismos entre tales “elementos” son parejas de una función única de conjuntos de un sólo elemento,  $! : \{D_1\} \rightarrow \{D_2\}$ , función inducida por un morfismo funtorial de los espacios (Formas) subyacentes, más un morfismo de módulos  $\alpha$  que en la TMM, se denota como  $!_\alpha : D_1 \rightarrow D_2$ .

#### II.4 Categorías de Composiciones Locales

Primeramente definiremos la categoría de composiciones locales objetivas, **ObLoc**.

**Definición 4.1** La categoría  $\mathbf{ObLoc}$  consiste en el conjunto  ${}_0\mathbf{ObLoc}$  de todas las composiciones locales objetivas. El conjunto  ${}_1\mathbf{ObLoc}$  de morfismos es la unión disjunta de los conjuntos  $\mathbf{ObLoc}(L_1, L_2)$  de los morfismos  $f'_\alpha : L_1 \rightarrow L_2$ . El morfismo identidad y la composición de morfismos objetivos son los de la sección 2.3.

En seguida definimos la categoría de composiciones locales functoriales.

**Definición 4.2** La categoría  $\mathbf{Loc}$  consiste en el conjunto  ${}_0\mathbf{Loc}$  de todas las composiciones locales functoriales. El conjunto  ${}_1\mathbf{Loc}$  de morfismos es la unión disjunta de los conjuntos  $\mathbf{Loc}(L_1, L_2)$  de morfismos  $f'_\alpha : L_1 \rightarrow L_2$ . Asimismo, tenemos el morfismo identidad y la composición de morfismos como se vio en 2.3.

Ahora bien, sabemos de 2.3 que la transformación  $\hat{I}$  lleva los objetos y los morfismos de  $\mathbf{ObLoc}$  a los objetos y morfismos de  $\mathbf{Loc}$ . De manera similar, sabemos que para una composición local functorial cuya dirección (módulo) es  $A$ , su traza objetiva  $\hat{C}$  se expresa como  $I_A \hat{C}$ .

**Proposición 4.3** El funtor  $\hat{I} : \mathbf{ObLoc} \rightarrow \mathbf{Loc}$  es un funtor pleno y fiel.

*Demostración:* Sean  $(C, A \hat{C} F)$ ,  $(J, B \hat{C} G)$ ,  $(S, C \hat{C} H)$  tres composiciones locales,

$$\alpha : A \rightarrow B, \beta : B \rightarrow D$$

dos morfismos de módulos, y  $k : F \rightarrow G$ ,  $l : G \rightarrow H$  dos simetrías subyacentes.

Sabemos de las proposiciones 1.4.4 y 1.5.3 que si  $C \in \mathbf{ObLoc}$ , entonces  $\hat{C} \in \mathbf{Loc}$ . Asimismo, por el teorema II.3.8 sabemos que si  $g'_\alpha : C \rightarrow J$  es un morfismo de composiciones locales objetivas, entonces  $\hat{g}'_\alpha$  es un morfismo de composiciones locales functoriales.

Habrá que demostrar que si  $g'_\alpha : C \rightarrow J$  y  $h'_\beta : J \rightarrow S$  son dos morfismos de composiciones locales objetivas, entonces

$$\hat{h}'_\beta \circ \hat{g}'_\alpha = (\alpha(h) \circ g)'_\beta \alpha, \text{ o sea, que } \hat{h} \circ \hat{g} = (\alpha(h) \circ g)^\wedge, \text{ con } \alpha(h) : J\alpha \rightarrow S\beta\alpha.$$

ya que esto nos daría

$$\hat{I}(h'_\beta \circ g'_\alpha) = \hat{I}(h'_\beta) \circ \hat{I}(g'_\alpha)$$

porque, como sabemos,

$$h'g \circ g'_{\alpha} = (\alpha(h) \circ g)'_{\beta\alpha}.$$

Sea  $q : X \rightarrow A$  un punto en la dirección  $A$ , y

$$q \circ \hat{C} \subset X \circ \hat{C} \hookrightarrow X \circ A \times X \circ F. \text{ Entonces, } (q, cq) \in q \circ \hat{C}.$$

Así es que tenemos que:

$$\begin{aligned} \hat{h}(\hat{g}(q, cq)) &= \hat{h}(\alpha q, g(cq)) \text{ (porque } cq \in X \circ F) \\ &= (\beta\alpha q, h(j\alpha q)) \\ &= (\beta\alpha q, \alpha(h)(j\alpha)q) \text{ (véase diagrama abajo)} \\ &= (\beta\alpha q, \alpha(h)g(c)q) \\ &= (\beta\alpha q, \alpha(h)g(cq)) \\ &= (\alpha(h)g)'(q, cq) \end{aligned}$$

que es lo que necesitábamos. Veamos un diagrama para entender mejor lo que acabamos de desarrollar:

$$\begin{array}{ccccccc} B \circ G & \hookrightarrow & J & \xrightarrow{\alpha \circ G} & J\alpha & \hookrightarrow & A \circ G \\ & & \downarrow h & & \downarrow \alpha(h) & & \\ B \circ H & \hookrightarrow & S\beta & \xrightarrow{\alpha \circ H} & S\beta\alpha & \hookrightarrow & A \circ H \end{array}$$

y  $g : C \rightarrow J\alpha$ .

También tenemos que  $\hat{I}(1_C) = 1'_{\hat{C}} = 1'_{\hat{C}}$ .

Ahora veamos que  $\hat{I}$  es fiel. Sea  $\check{g}'_{\alpha}$  en  $1_A \circ \hat{C}$ . Entonces,

$$\check{g}'_{\alpha}(1_A, c) = (\alpha, g(c)) \in \alpha \circ \hat{J} \subset A \circ B \times A \circ G \subset B \times G$$

Esto significa que si  $\hat{I}(g) = \hat{I}(h)$  then  $g = h$ , porque si  $\hat{g} = \hat{h}$  tenemos  $\check{g} = h'$ ; entonces  $g = h$  ya que, como vimos,  $g$  y  $\alpha$  son determinadas, de manera única, por  $\hat{g}$ .

Finalmente, veremos que  $\hat{I}$  es pleno. Sean

$$g'_{\alpha} : \hat{C} \rightarrow J'$$

Hemos visto que su evaluación va de

$$g'_{\alpha} : 1_A \circ \hat{C} \rightarrow \alpha \circ \hat{J}.$$

Para que  $\hat{I}$  sea pleno, necesitamos que para

$$\hat{g}'_\alpha : \hat{C} \rightarrow \hat{J}$$

siempre exista

$$g'_\alpha : C \rightarrow J.$$

Sabemos que existe el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C & \hookrightarrow & A \otimes F \\ \downarrow s & & \downarrow A \otimes k \\ J\alpha & \hookrightarrow & A \otimes G \end{array}$$

Veamos que  $\hat{s}'_\alpha = \hat{g}'_\alpha$ . Sea  $(q, cq) \in q \otimes \hat{C} \hookrightarrow X \otimes A \times X \otimes F$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \hat{g}(q, cq) &= (\alpha q, k(cq)) \\ &= (\alpha q, s(cq)) \\ &= (\alpha q, s(c)q) \\ &= \hat{s}(q, cq) \blacksquare \end{aligned}$$

Para una dirección fija, podemos hablar de un inverso izquierdo de  $\hat{I}$ , el funtor de la traza objetiva  $\check{I} : \text{Loc} \rightarrow \text{ObLoc}$  que, en objetos, es la traza objetiva y en morfismos funtoriales  $g'_\alpha : C \rightarrow S$  con  $\alpha = 1_A : A \rightarrow A$  ( $A \in \text{Mod}$ ), arroja el morfismo objetivo  $\check{g}'_\alpha : \check{C} \rightarrow \check{S}$ , con  $\check{g} = g'_C$ . Esto último se llamará la traza objetiva de los morfismos de composiciones locales funtoriales.

Hablaremos un poco de las implicaciones de la proposición 4.3. Por un lado, vemos que las composiciones locales objetivas pueden ser clasificadas o en  $\text{ObLoc}$  o en  $\text{Loc}$ . Asimismo, toda composición local funtorial con dirección fija  $A$ , puede ser tomada en  $1_A$  y, así, reducida a su traza objetiva. En otras palabras,  $\text{ObLoc}$  es una subcategoría plena de  $\text{Loc}$ .

Podría preguntarse el porqué de construir las composiciones locales funtoriales sobre el universo de composiciones locales objetivas, respecto a la TMM. La respuesta estriba en el hecho de que los objetos musicales no son sólo locales, sino muchas veces sólo cobran sentido cuando son “pegados” en el atlas, aspecto que corresponde a la teoría global que en este trabajo no vamos a abordar. Sin embargo, podemos señalar que la descripción matemática de objetos globales suelen emplear los productos fibrados (“pull-

back”) de composiciones locales, y esta construcción universal a veces falla para este propósito dentro del marco exclusivamente objetivo. Veamos un ejemplo de este hecho en el capítulo tres.

Veamos ahora bajo que condiciones el funtor  $\hat{I}$  y el funtor de traza objetiva  $\check{I}$  serán adjuntos (véase Apéndice 1). Para tener la adjunción general,  $\hat{I} \dashv \check{I}$  necesitamos un isomorfismo natural

$$\text{Hom}_{\text{ObLoc}}(\hat{C}, S) \cong \text{Hom}_{\text{Loc}}(C, \check{S})$$

para  $C$  objetiva y  $S$  funtorial. Vamos a ver que cuando tenemos una dirección fija, efectivamente tenemos tal relación de adjuntividad, que se llamará *adjunción con dirección fija*.

**Definición 4.4** Las categorías *coma con dirección fija*, en la dirección  $A$  ( $A \in \text{Mod}$ ), identifican la composición local  $\textcircled{A}$  con el funtor  $\textcircled{A} \times \textcircled{0}_0$ , donde  $0_0$  es el módulo cero sobre el anillo cero, es decir el objeto terminal de  $\text{Mod}$ . Así es que tenemos  $X\textcircled{(A \times 0_0)} = X\textcircled{A} \times X\textcircled{0_0} \cong X\textcircled{A}$  y, de esta manera, denotaremos  $\text{ObLoc}_{\textcircled{A}}$  y  $\text{Loc}_{\textcircled{A}}$  como las categorías coma sobre la composición local  $\textcircled{A}$ , donde el cambio de dirección es la identidad, que arroja el morfismo único  $!_{1_A} : L \rightarrow \textcircled{A}$ , para  $L$  una composición local. Los objetos de estas categorías son las parejas  $(L, !_{1_A})$  y los morfismos son los usuales en las categorías coma:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f_1} & K \\ \searrow !_{1_A} & & \swarrow !_{1_A} \\ & \textcircled{A} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & L & \hookrightarrow \textcircled{A} \times F \\ \downarrow 1 & \downarrow !_{1_A} & \downarrow \bullet_{A \times 1} \\ A & \textcircled{A} & \hookrightarrow \textcircled{A} \times \textcircled{0}_0 \end{array}$$

Es claro que la definición 4.4 nos da las restricciones  $\hat{I}_{\textcircled{A}} : \text{ObLoc}_{\textcircled{A}} \rightarrow \text{Loc}_{\textcircled{A}}$ ,  $\check{I}_{\textcircled{A}} : \text{Loc}_{\textcircled{A}} \rightarrow \text{ObLoc}_{\textcircled{A}}$  ya que  $\textcircled{A}$  y  $!_{1_A}$  se mantienen fijos bajo ambos funtores.

**Proposición 4.5** Los funtores  $\hat{I}_{\textcircled{A}}$  y  $\check{I}_{\textcircled{A}}$  son adjuntos.

*Demostración:* Por el hecho de que  $\hat{I}$  es pleno y fiel, tenemos un isomorfismo, con  $C$  objetiva y  $S$  funtorial,  $\text{Hom}_{\text{Loc}_{\textcircled{A}}}(\hat{C}, S^\diamond) \cong \text{Hom}_{\text{ObLoc}_{\textcircled{A}}}(C, \check{S})$ . Asimismo, tenemos una inyección  $S^\diamond \hookrightarrow S$  (por la proposición 2.1) y, por ende, una inyección  $\text{Hom}_{\text{Loc}_{\textcircled{A}}}(\hat{C}, S^\diamond) \hookrightarrow \text{Hom}_{\text{Loc}_{\textcircled{A}}}(\hat{C}, S)$ . Lo que debemos mostrar es que todo morfismo  $f_1 : \hat{C} \rightarrow S$  sobre  $\textcircled{A}$  se puede factorizar a través de  $S^\diamond$  y así, por transitividad, tendremos  $\text{Hom}_{\text{ObLoc}_{\textcircled{A}}}(C, \check{S}) \cong \text{Hom}_{\text{Loc}_{\textcircled{A}}}(\hat{C}, S)$ . En otras palabras, si  $q : X \rightarrow A$ , queremos que la imagen de  $1_A \textcircled{S}^\diamond \rightarrow q \textcircled{S}$  permanezca en  $q \textcircled{S}^\diamond$ .

Veamos el morfismo  $f_{1_A} : \hat{C} \rightarrow S$  en el punto  $q : X \rightarrow A$ , es decir,  $q \circ f_{1_A} : q \circ \hat{C} \rightarrow q \circ S$ . Es evidente que  $1_A \circ S = 1_A \circ S^\diamond$  (por ser la traza objetiva), ya que cuando se toma una composición local funtorial en el punto  $1_A$  se reduce a su traza objetiva  $\hat{S} = \{s \in A \circ F : (1_A, s) \in A \circ S\}$ . Así es, cuando se hace funtor  $\hat{S} = S^\diamond$ , entonces  $1_A \circ S \subset A \circ A \times A \circ S$ , con elementos  $(1_A, s)$  y  $1_A \circ S^\diamond \subset A \circ A \times A \circ S^\diamond$ , con los mismos elementos,  $(1_A, s)$ .

En el siguiente diagrama se ve que, por la misma definición de  $\hat{I}$ , que  $(q \circ G)(s)$ , con  $s \in S^\diamond$ , tiene que permanecer en  $q \circ S^\diamond$ .

$$\begin{array}{ccc} 1_A \circ \hat{C} \subset A \circ \hat{C} \subset A \circ A \times A \circ F & \xrightarrow{1_A \circ f} & 1_A \circ S^\diamond \subset A \circ S^\diamond \subset A \circ A \times A \circ G \\ q \circ A \times q \circ F \downarrow & & \downarrow q \circ A \times q \circ G \\ q \circ \hat{C} \subset X \circ \hat{C} \subset X \circ A \times X \circ F & \xrightarrow{q \circ f} & q \circ S \subset A \circ S \subset X \circ A \times X \circ G \end{array} \quad \blacksquare$$

## II.5 Construcciones Universales en la Categoría de Composiciones Locales

Sabemos que  $\mathbf{Mod}^\circledast$  es un topos y, por lo tanto, exhibe construcciones universales tales como límites finitos, colímites, clasificador de subobjetos y exponenciación. Los funtores de los Coordinadores (espacio ambiente) de los Denotadores (composiciones locales) se encuentran en  $\mathbf{Mod}^\circledast$ . Por este motivo, la categoría de composiciones locales functoriales,  $\mathbf{Loc}$ , también posee algunas de estas construcciones universales. Veamos.

**Teorema 5.1** La categoría  $\mathbf{Loc}$  posee productos fibrados.

*Demostración:* Sean  $K \hookrightarrow \circledast A \times F, L \hookrightarrow \circledast B \times G, M \hookrightarrow \circledast C \times H$  tres composiciones locales, y  $f_{1_A} : K \rightarrow M, g_{1_B} : L \rightarrow M$  dos morfismos functoriales. Habría que encontrar una composición local  $P \hookrightarrow \circledast D \times R$  y dos morfismos functoriales  $q_{1_A} : P \rightarrow K, p_{1_B} : P \rightarrow L$  tal que el siguiente diagrama sea un producto fibrado de composiciones locales.

$$\begin{array}{ccc} \circledast D \times R \supset P & \xrightarrow{p_{1_B}} & L \subset \circledast B \times G \\ q_{1_A} \downarrow & & \downarrow g_{1_B} \\ \circledast A \times F \supset K & \xrightarrow{f_{1_A}} & M \subset \circledast C \times H \end{array}$$

Por un lado, sabemos que hay productos fibrados en  $\mathbf{Mod}$  (con morfismos diafinos), o sea, para  $A, B, C, D \in \mathbf{Mod}$  y  $\alpha, \beta, \xi, \lambda$  transformaciones diafinas (véase ToM, Apéndice F.5.3, p.425). Entonces

$$\begin{array}{ccc} A \times_C B = D & \xrightarrow{\lambda} & B \\ \xi \downarrow & & \downarrow \beta \\ A & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array}$$

es un diagrama de producto fibrado.

Si  $h : F \rightarrow H, k : G \rightarrow H$  son dos simetrías subyacentes, entonces hay dos diagramas en  $\text{Mod}^{\otimes}$  que también son productos fibrados como funtores evaluados en conjuntos (recordemos la puntualidad).

$$\begin{array}{ccc} F \times_H G = R & \xrightarrow{s} & G \\ r \downarrow & & \downarrow k \\ F & \xrightarrow{h} & H \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} K \times_M L = P^* & \xrightarrow{p^*} & L \\ q^* \downarrow & & q'^* \downarrow \\ K & \xrightarrow{f'_\alpha} & M \end{array}$$

Habría que ver que  $P^* \cong P \hookrightarrow \otimes D \times R$ . Pero el siguiente diagrama también es un producto fibrado:

$$\begin{array}{ccc} \otimes(A \times_C B) \times (F \times_H G) & \xrightarrow{\otimes \lambda \times s} & \otimes B \times G \\ \otimes \xi \times r \downarrow & & \otimes \beta \times k \downarrow \\ \otimes A \times F & \xrightarrow{\otimes \alpha \times h} & \otimes C \times H \end{array}$$

Como los funtores  $K, L, M$  son subfuntores de  $\otimes A \times F, \otimes B \times G$  y  $\otimes C \times H$  respectivamente, también  $P^* \hookrightarrow \otimes(A \times_C B) \times (F \times_H G)$  y podemos reemplazar  $P^*$  por  $\text{im}(P^*) = P$ , y  $p^*, q^*$  respectivamente por  $p, q$  y seguir manteniendo la propiedad de  $P^*$  como producto fibrado. Sin embargo, todavía queda por mostrar que el diagrama es cartesiano.

Sean  $X \in \text{Mod}, m : W \rightarrow F, n : W \rightarrow G$  las simetrías subyacentes de

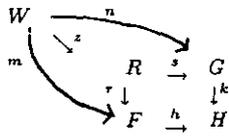
$$w_\tau : T \rightarrow K, v'_\eta : T \rightarrow L, \text{ con } T \hookrightarrow \otimes X \times W.$$

Afirmamos que  $t'_\rho : T \rightarrow P$  es una transformación natural única, ya que  $\rho : X \rightarrow D$  es un morfismo diafin único tal que  $\xi \circ \rho = \tau, \lambda \circ \rho = \eta$  y  $z : W \rightarrow R$  es una transformación natural (simetría subyacente) tal que  $s \circ z = n, r \circ z = m$ . Así es que  $q'_\xi \circ t'_\rho = w_\tau$  y  $p'_\lambda \circ t'_\rho = v'_\eta$ . En términos de diagramas:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{v'_\eta} & L \\ & \searrow t'_\rho & \downarrow q'_\xi \\ & P & \xrightarrow{p'_\lambda} & L \\ w_\tau \searrow & & & & q'^* \downarrow \\ & K & \xrightarrow{f'_\alpha} & M \end{array}$$

ya que:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & B \\ & \searrow \rho & \downarrow \lambda \\ & D & \xrightarrow{\lambda} & B \\ r \searrow & & & & \beta \downarrow \\ & A & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array}$$



y es el morfismo  $@_p \times W \rightarrow @D \times R$  que induce  $u_p : @X \times W \supset T \rightarrow P \subset @D \times R$ . ■

**Corolario 5.2** La categoría **Loc** es finitamente completa, es decir, posee límites finitos.

*Demostración:* Este corolario sale del hecho de que una categoría tiene límites finitos si, y sólo si, tiene pullback y objeto terminal (véase Apéndice 1). En este caso, el objeto final en **Loc** es  $@0_0 \times 0_0$ . ■

Hay que señalar que, por lo general, coproductos fibrados (pushout) no existen en **Loc** cuando las composiciones locales no tienen la misma dirección. Por este motivo **Loc** no es un topos.

## CAPÍTULO III

### EJEMPLOS Y CONSTRUCCIONES DE FORMAS Y DENOTADORES

En este capítulo pretendemos aportar ejemplos y construcciones de Formas y Denotadores, regulares y circulares, así como ejemplos de morfismos entre composiciones locales de una Forma dada. De manera igual, se incluirá el ejemplo del Denotador de Forma *Pianoscore*, el *Traümerei* de Robert Schumann, desarrollados por quien esto escribe en el formato *denoteX*, un formato universal, estandarizado y comunicable a todo editor de textos. Cabe mencionar que, en estas fechas, el equipo del Berlin Technische University, bajo la dirección de Thomas Noll (otro colaborador de la TMM y el ToM), está desarrollando traducciones para convertir *denoteX* en LaTeX, Mathematica, etc., así como herramientas para Mathematica.

#### III.1 Módulos en Musicología

Tal vez el lector que haya leído los primeros dos capítulos de este trabajo se pregunte ¿por qué módulos? Esta estructura algebraica se escogió por motivos teóricos y prácticos, tanto matemáticos como musicológicos. Se recordará que un módulo es un grupo abeliano con multiplicación escalar sobre un anillo que cumple con ciertas condiciones bien conocidas. En caso de que este anillo sea a su vez un campo, tenemos un espacio vectorial.

En seguida presentaremos unos ejemplos que muestran ciertos módulos que juegan un papel sobresaliente en la TMM.

**Ejemplo 1.1** Un módulo muy importante en la TMM es el anillo de monoide  $\mathbf{Z}(ASCII)$ . Esta construcción nos permite emplear el código universal ASCII, es decir, el conjunto de caracteres ASCII, que necesitamos para reflejar cualquier situación en que aparezcan palabras (pero requerimos que se ajuste a nuestro marco teórico, basado en la pregavilla  $\mathbf{Mod}^{\circledast}$ ). Construimos  $\mathbf{Z}(ASCII)$  con un alfabeto  $A$  y un anillo conmutativo de coeficientes. Así es que  $\langle A \rangle$  es el monoide libre de todas las

palabras  $(a_1, a_1 a_2, \dots, a_1 \dots a_n, \dots)$  generadas por  $A$ . El anillo de monoide,  $\Lambda(A)$  son todas las sumas  $\sum_{p \in (A)} \lambda_p p$  con sólo un número finito de  $\lambda_p \neq 0$ .

$\mathbb{Z}\langle ASCII \rangle$  se construye sobre el anillo de los enteros  $\mathbb{Z}$ . Para los nombres de Denotadores y Formas de tipo **Simple**, normalmente sólo empleamos el caso particular de  $\lambda_p = 1$  que nos da  $\langle A \rangle \subset \mathbb{Z}\langle ASCII \rangle$ , pero sí hay situaciones en que se hará uso de toda la estructura de  $\mathbb{Z}\langle ASCII \rangle$  como un  $\mathbb{Z}$ -módulo. Esto podría ser, por ejemplo, en el caso de ver las diferentes multiplicidades de "sub-Formas" usadas en una Forma dada (véase el ejemplo, sección III.3, de *Pianoscore Form* y la figura III.3.1).

**Ejemplo 1.2** La Forma *Euler Module*, que es muy usado en TMM (véanse los ejemplos de III.2.1 y III.2.3) tiene Coordinador en el módulo  $\mathbb{Q}^3$  sobre  $\mathbb{Q}$ .

$$\text{Euler Module} \xrightarrow{\text{Identidad}} \text{Simple}(\mathbb{Q}^3)$$

Sean  $o = (1, 0, 0)$ ,  $q = (0, 1, 0)$ ,  $t = (0, 0, 1)$  la base canónica de  $\mathbb{Q}^3$ , donde  $o$  nos indica el eje de las octavas (como intervalo musical),  $q$  las quintas y  $t$  las terceras. Cada punto en el espacio *Euler Module*,  $(a, b, c)$ , puede escribirse como  $p = a \cdot o + b \cdot q + c \cdot t$ . Asimismo, la quinta y la tercera mayor se asocian con los puntos  $q - o$  y  $t - 2o$  (véase ToM, Apéndice A.2), que representan la cuarta y la sexta menor respectivamente. También

$$p = (a + b + 2c) \cdot o + b \cdot (q - o) + c \cdot (t - 2o) = (a, b, c).$$

Esto nos dice que cualquier nota (que, a su vez, puede concebirse como un intervalo, o diferencia de 2 notas, ya que tanto a la nota como al intervalo se le asocia un vector) puede generarse de la octava, la quinta y la tercera mayor por medio de intercambio, yuxtaposición y división (véase ToM, 6.4.1).

**Ejemplo 1.3** Otro ejemplo de módulos muy importantes para TMM son las sumas directas, que son Formas construidas por productos (que son diagramas sin flechas, en lenguaje de Teoría de Categorías) de Formas de tipo **Simple**.

$$\text{Sean } F \rightarrow \text{Simple}(M), G \rightarrow \text{Simple}(N), M, N \in \text{Mod}.$$

Así es que, por un lado tenemos:

$$F \times G \xrightarrow{\alpha_{(M \oplus N) \times \alpha_{M \times N}}} \text{Limit}(M, N)$$

y, por otro,

$$F \oplus G \xrightarrow{\text{Id}_{\alpha_{(M \oplus N)}}} \text{Simple}(M \oplus N)$$

Sabemos que, cuando los índices son finitos,  $\prod_{i=0, \dots, \infty} M_i = \bigoplus_{i=0, \dots, \infty} M_i$ . Así es que podemos identificar el tipo **Limit**, cuando es producto, con el tipo **Simple**. Este proceso se explica diciendo que la Forma compuesta  $F$  se simplifica a la Forma simple  $G$ , cada vez que se construye una Forma simple  $G$  isomorfa a una Forma compuesta  $F$ .

### III.2 Composiciones Locales

En seguida daremos unos ejemplos de composiciones locales (Denotadores) usadas en la TMM.

#### Ejemplo 2.1 Acordes

Un acorde es una composición local finita con espacio ambiente igual a *Euler Module*. Es decir, si el funtor del Coordinador de la Forma *EulerChord* es  $F(CF) = F = \text{Fun}(\text{Euler Module})$ , entonces la composición local es un Denotador

$$Cr : A \rightsquigarrow \text{EulerChord}(Cr) \text{ de Forma } \text{EulerChord} \xrightarrow{F \text{ en } (F) \rightsquigarrow \Omega^F} \text{Power}(\text{Euler Module})$$

con cardinalidad  $n$ .

#### Ejemplo 2.2 $p$ -Acordes

Un acorde de clase  $p$  (por ejemplo,  $p = 12$  y estamos en  $\mathbb{Z}_{12}$ ) es una composición local finita con espacio ambiente

$$p\text{-Eulerclass} \xrightarrow{\text{Identidad}} \text{Simple}(\mathbb{Q}^3 / \mathbb{Z} \cdot p)$$

y si  $\text{Fun}(CF) = F = \text{Fun}(p\text{-Euler Class})$  entonces un acorde de clase  $p$  es un Denotador

$$p\text{-Cr} : 0 \rightsquigarrow p\text{-ClassChord}(p\text{-Euler Class})$$

con Forma

$$p\text{-ClassChord} \xrightarrow{F \circ \text{in}(F) \rightarrow \Omega^F} \text{Power}(p\text{-EulerClass}).$$

### Ejemplo 2.3 Escalas

Consideremos el espacio ambiente *EulerModule*. Una escala es *periódica*, en la medida en que repite las notas de la escala después de un período. Si el período  $p \neq 0$ , el Denotador se expresa

$p : 0 \rightsquigarrow \text{EulerModule}(p)$ . Esto nos da un morfismo que es la proyección canónica

$\pi : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3/\mathbb{Z} \cdot p$ . Así es que cada composición local objetiva  $K : A \hookrightarrow A @ \text{Fun}(\text{EulerModule})$

se proyecta en  $\text{mod}_p(K) : A \hookrightarrow A @ \text{Fun}(p\text{-EulerClass})$ . Por lo tanto, tenemos la siguiente definición.

**Definición 2.4** Dado un período  $p$ , una  $p$ -Scale ( $p$ -Escala) es una composición local no vacía  $S$ , de espacio ambiente *EulerModule*, y  $F(\text{EulerModule}) = @ \mathbb{Q}^3$  tal que:

(i) Su proyección  $\text{mod}_p(S)$  es un acorde de la  $p$ -clase y

(ii)  $S = e^p L$ , es decir,  $S$  es periódica de periodo  $p$ .

**Lema 2.5** Sea  $F = \text{Fun}(\text{EulerModule})$ . Entonces, para direcciones (módulos)  $A$ ,

$$Sc : A \rightarrow Sc(A) = \{S \in A @ 2^F : S \text{ es una } p\text{-Scale}\}$$

define un subfunctor de  $2^F$ .

*Demostración:* Hay que ver que:

(i)  $A @ Sc = Sc(A) \subset A @ 2^F$  y

(ii) si  $u : A \rightarrow B$  es un morfismo de módulos en  $\text{Mod}$ , entonces  $Sc(u) = u @ 2^F |_{Sc(A)}$ .

Para (i), tenemos que si  $2^F : A \rightarrow A @ 2^F$ , por definición  $Sc(A) \subset A @ 2^F$ , ya que para cada  $S \in Sc(A)$  también  $S \in A @ 2^F$ .

Para (ii) tenemos:

$$\begin{array}{ccc} A & & A @ 2^F \\ u \downarrow & & \uparrow u @ 2^F \\ B & & B @ 2^F \end{array}$$

Sin embargo,  $Sc(A) \subset A @ 2^F$ ,  $Sc(B) \subset B @ 2^F$ , entonces

$$\begin{array}{ccc}
 A & (u @ Sc)(T) \in Sc(A) & \\
 u \downarrow & \uparrow Sc(u) & \\
 B & T \in Sc(B) & 
 \end{array}$$

y como  $T$  es un  $p$ -escala,  $(u @ Sc)(T)$  también lo es. Así es que  $u @ 2^F T = u @ 2^F T_{Sc(B)} = Sc(u)$ . ■

Con base en este lema, tenemos la Forma:

$$p\text{-Scale} \xrightarrow{Sc \rightarrow \Omega^F} \text{Power}(\text{Euler Module})$$

con la proyección  $\text{mod}_p : p\text{-Scale} \rightarrow p\text{-ClassChord}$  que es un morfismo de Formas (transformación natural) en  $\text{Mod}^{\circ}$ .

### III.3 La Forma *Pianoscore* y el Denotador *Traümerei*

En esta sección vamos a dar a conocer el ejemplo de la Forma *Pianoscore*, junto con el Denotador del *Traümerei* de Robert Schumann (de la colección “Escenas de Juventud”). Estos fueron desarrollados para aterrizar mucho de lo que se vio en los primeros dos capítulos en una Forma y un Denotador bastante completos, para después poder hacer matemáticas con ellos. A la vez, con este ejemplo podemos ilustrar Formas de cada tipo, más una Forma circular cuya existencia se demostrará.

La Forma *Pianoscore* ejemplifica tanto la recursividad implícita en el desarrollo teórico en el que está basada, como la importancia de la Forma en el marco de los Denotadores. En la figura III.3.1 se ve un diagrama de la Forma *Pianoscore*, en que salta a la luz cómo los Denotadores fueron concebidos para resolver los problemas que presentan las características universales enciclopédicas, como se describió en la sección I.1.

El Denotador *Traümerei* es un “punto” en el espacio *Pianoscore*. Todavía falta por definirse, en un futuro trabajo, un morfismo entre dos “puntos” (dos partituras para piano en el estilo tradicional europeo).

Por otro lado, el formato es el de **denoteX**, y no de la notación del desarrollo teórico de los dos primeros capítulos. Como ya se mencionó, el **denoteX** pronto será traducible a LaTeX, Matemática, etc. En vez de tener

$$NF_{IF}TF(CF)$$

se tiene  $NF : IF.TF(CF)$ ; si el identificador es la identidad será:  $NF : .TF(CF)$ ;

Asimismo, el Denotador en lugar de  $ND : AD \rightsquigarrow FD(CD)$  es  $ND : AD@FD(CD)$  (también habíamos escrito  $D : A \rightsquigarrow F(x)$ ) y si la dirección (módulo) es cero se escribe  $ND : @FD(CD)$ , donde  $ND$  es el nombre del Denotador,  $AD$  es la dirección (address en inglés) del Denotador,  $FD$  es la Forma del Denotador y  $CD$  son las Coordenadas. En el ejemplo, la dirección siempre es cero y la mayoría de los identificadores es la identidad.

Se presenta el formato entero en inglés, ya que este es el modelo que se está usando internacionalmente y como es conocido<sup>1</sup>, independientemente del idioma de los colaboradores de la TMM en particular (que, en su mayoría, es el alemán).

---

<sup>1</sup>Se puede buscar bajo:  
<http://cooljazz.cs.tu-berlin.de/denoteX/dokumentation/pianoScore.JPG>



---

## Pianoscore Form

//The entire form has this shape:

```
Pianoscore.:Limit(Bibinf,Signatures,Lines,Generalnotes,Articulations,  
Dynamicres,Absloundsigns,Tempi);
```

//The basic Forms of Bibinf are:

```
Composer.:Simple(Z<ASCII>);  
Title.:Simple(Z<ASCII>);  
Date.:Simple(Z<ASCII>);  
Instru.:Simple(Z<ASCII>);  
/*this specifies the keyboard instrument such as  
piano, harpsichord,etc.*/  
Edition.:Simple(Z<ASCII>);
```

//Together they define the bibliographic information:

```
Bibinf.:Limit(Composer,Title,Date,Instru,Edition);
```

//The basic Forms for Signatures are:

```
Onset.:Simple(R);  
Keysig.:Simple(Z);  
Timesig.:Simple(Z^2); //Z^2 is the second power of Z
```

//Then we define Keysigss

```
Keysigs:2O.Power(Keysig)
```

//Then we define the products:

```
Keysigevent.:Limit(Onset,Keysigss);  
Timesigevent.:Limit(Onset,Timesig);
```

/\*Then we define sets of Keysigevent and Timesigevent. From here on in,  
the identifier 2O is the canonical functor embedding of 2^Formname->  
Omega^Formname.\*/

```
Keysigs:2O.Power(Keysigevent);  
Timesigs:2O.Power(Timesigevent);
```

//This gives us Signatures:

```
Signatures.:Limit(Keysigs,Timesigs);
```

//The basic Forms for Tempi are:

```
Tempostrng.: Simple(Z<ASCII>);
Quartermetronome.: Simple(R);
/* Maelzel Metronome number in quarters per
minute.*/
```

```
Duration.: Simple(R);
//Then we have the compound Forms:
```

```
Combtempo.: Limit(Tempostring,Quartermetronome);
Tempo.: Colimit(Tempostring,Combtempo);
Tempoevent.: Limit(Onset,Tempo,Duration);
```

//This gives us Tempi:

```
Tempi:2O.Power(Tempoevent);
```

//Then we have the following Forms that we need for Lines

```
Barline.: Syn(Onset);
Barlines:2O.Power(Barline);
```

```
Rep.: Limit(Barline,Duration);
```

/\*A Repetition denotator means:jump from the onset of Barline to the onset of Barline + Duration in the score time. Repetition means negative Duration.\*/

//We also have Reps

```
Reps:2O.Power(Rep)
```

//Another basic Form for Reps:

```
Length: Simple(Z);
```

//With the compound Forms:

```
Item.: Limit(Reps,List(Reps));
```

```
List(Reps): Colimit(Item(Reps),Length);
```

```
Reps.: Syn(List(Reps));
```

//Then we have the Form "Lines":

```
Lines.: Limit(Barlines,Reps);
```

//Next we introduce the Form for Generalnotes:

```
Pitch.: Simple(Z); //This is the number of the key, with middle C =40
```

```
Loudness.: Simple(Z<ASCII>);
```

```
Alt.: Simple(Z<SHP,FLT,NAT>);
```

/\*Combinations of three words, SHP for sharp, FLT for flat and NAT for natural, with the empty word for a note without alteration sign\*/

```

Artsymb: Simple(Z<ASCII>);
//Articulation symbols such as martellato, staccato points, etc.

Artsyms:2O.Power(Artsymb);

Note: Limit(Onset,Pitch,Duration,Loudness,Alt,Artsyms);
Notes:2O.Power(Note);

Rest: Limit(Onset,Duration);
Rests:2O.Power(Rest);

Trillsymb: Simple(Z<ASCII>);

Trillnote: Limit(Note,Trillsymb);
Trillnotes:2O.Power(Trillnote);
/*Trillnotes are a special type of ornamental structures and need this
special form.*/

//So the general note event is:

Generalnote: Colimit(Note,Rest,Trillnote);

Generalnotes: 2O.Power(Generalnote);

//Next we look at the articulation signs of slurs and pedals:

Pedind: Simple(Z);
//This will be 1,2,3 for the three pedals from right to left.

Pedal: Limit(Onset,Duration,Pedind);
Pedals:2O.Power(Pedal);

Slur: Syn(Generalnotes);
Slurs:2O.Power(Slur);

Articulation: Colimit(Pedal,Slur);
Articulations:2O.Power(Articulation);
//This is a set of slurs or pedal indications

/*Now we indicate the relative dynamics signs (crescendo,etc.) and the
notes that are affected.*/

Dyname: Simple(Z<ASCII>);
Dynamicre: Limit(Generalnotes,Dyname);

Dynamicres:2O.Power(Dynamicre);

/*Ahora indicaremos exactly where the absolute dynamic symbols are placed
(pp,mf,etc.)*/

Absloudsign: Limit(Onset,Dyname);

Absloudsigns:2O.Power(Absloudsign);

Arpeggio: Syn(Generalnotes);

Arpeggi:2O.Power(Arpeggio);

```

//Denotator of Robert Schumann's "Träumerei"

myTräumerei:@Pianoscore(myBibinf,mySignatures,myTempi,myLines,  
myGeneralnotes,myArticulations,myDynamicres,myAbsloudsigns,  
myArpeggi);

myBibinf:@Bibinf(Robert Schumann,Träumerei,,Piano,The Superior Library  
Piano Classics Book fifteen);

/\*From 1 to 7 represents C to B. + represents a sharp and - a flat. For  
example, -7 is B flat\*/

myKeysigs:@Keysigs({(0,7)});

myTimesigs:@Timesigs({(0,(4,4))});

myTempi:@Tempi({(0,(adagio espressivo,56),15.75),  
(15.75,(ritard., ),1.375),  
(17,(a tempo,56),5.625), (21.625,(ritard., ),1.375),  
(23.0,(piú ritard., ),1.625), (24.375,(lento., ),.225)});

myLines:@Lines({1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,  
17,18,19,20,21,22,24,25},{1,8});

myGeneralnotes:@(myNotes,myRests,myTrillnotes);

myNotes:@Notes({1:@Note(24.75,40.,25,p.,{}),  
2:@Note(1.0,45.,625,mp.,{}),3:@Note(1.0,21.1,0,p.,{}),  
4:@Note(1.25,40.,75,p.,{}),5:@Note(1.25,37.,75,p.,{}),  
6:@Note(1.25,33.,75,p.,{}),7:@Note(1.25,28.,75,p.,{}),  
8:@Note(1.625,44.,125,mp.,{}),9:@Note(1.75,45.,125,mp.,{}),  
10:@Note(1.875,49.,125,mp.,{}),11(2.0,52.,125,mf.,{}),  
12:@Note(2.125,57.,125,mf.,{}),13:@Note(2.25,57.,5,f.,{}),  
14:@Note(2.25,45,1.0,mf.,{}),15:@Note(2.25,42.,5,mf.,{}),  
16:@Note(2.25,33.,75,mf.,{}),17:@Note(2.25,26.,27,mf.,{}),  
18:@Note(2.75,56.,125,mf.,{}),19:@Note(2.75,40.,125,mp.,{}),  
20:@Note(2.875,54.,125,mf.,{}),21:@Note(2.875,38.,125,mp.,{}),  
22:@Note(3.0,52.,125,mf.,{}),23:@Note(3.0,37.,25,mp.,{}),  
24:@Note(3.0,28.,25,mp.,{}),25:@Note(3.125,57.,125,mp.,{}),  
26:@Note(3.25,47.,125,mp.,{}),27:@Note(3.25,44.,5,mp.,{}),  
28:@Note(3.25,38.,125,p.,{}),29:@Note(3.25,28.,5,mp.,{}),  
30:@Note(3.375,49.,125,mp.,{}),31:@Note(3.375,37.,125,p.,{}),  
32:@Note(3.5,50.,125,p.,{}),33:@Note(3.5,35.,25,p.,{}),  
34:@Note(3.625,54.,125,pp.,{}),35:@Note(3.75,45.,125,mp.,{}),  
36:@Note(3.75,40.,5,mp.,{}),37:@Note(3.75,33.,125,p.,{}),  
38:@Note(3.75,25.,125,p.,{}),39:@Note(3.875,47.,125,mp.,{}),  
40:@Note(3.875,44.,125,p.,{}),41:@Note(3.875,35.,125,p.,{}),  
42:@Note(3.875,28.,125,mp.,{}),43:@Note(4.0,49.,125,mp.,{}),  
44:@Note(4.0,45.,25,p.,{}),45:@Note(4.0,37.,25,p.,{}),  
46:@Note(4.0,33.,5,mp.,{}),47:@Note(4.125,52.,125,p.,{}),  
48:@Note(4.25,47.,5,p.,{}),49:@Note(4.25,44.,5,p.,{}),  
50:@Note(4.25,44.,5,p.,{}),51:@Note(4.25,40.,5,p.,{}),  
52:@Note(4.25,35.,5,p.,{}),53:@Note(4.25,28,1.25,mf.,{}),  
54:@Note(4.375,30.,125,mf.,{}),55:@Note(4.5,28.,125,mp.,{}),  
56:@Note(4.625,26.,125,mp.,{}),57:@Note(4.75,40.,25,p.,{}),  
58:@Note(4.75,23,125,p.,{}),59:@Note(4.875,25.,125,p.,{}),

60: @Note(5 0,45, 625,p.,{}),61: @Note(5 0,21, 1,0,pp.,{}),  
 62: @Note(5 25,40, 75,p.,{}),63: @Note(6 25,37, 75,p.,{}),  
 64: @Note(5 25,33, 75,p.,{}),65: @Note(5 25,28, 75,p.,{}),  
 66: @Note(5 625,44, 125,p.,{}),67: @Note(5 75,45, 125,mp.,{}),  
 68: @Note(5 875,49, 125,mp.,{}),69: @Note(6 0,52, 125,mf.,{}),  
 70: @Note(6 125,61, 125,f.,{}),71: @Note(6 25,61, 375,mf.,{}),  
 72: @Note(6 25,49, 1,125,mf.,{}),73: @Note(6 25,47, 75,mf.,{}),  
 74: @Note(6 25,44, 75,mf.,{}),75: @Note(6 25,37, 75,mf.,{}),  
 76: @Note(6 25,29, 25,mf,SHP,{}),77: @Note(6 625,59, 125,mf.,{}),  
 78: @Note(6 75,57, 125,mf.,{}),79: @Note(6 875,56, 125,mf.,{}),  
 80: @Note(7 0,57, 125,mf.,{}),81: @Note(7 0,42, 375,mp.,{}),  
 82: @Note(7 0,30, 375,mp.,{}),83: @Note(7 125,61, 125,mf.,{}),  
 84: @Note(7 25,54, 125,mp.,{}),85: @Note(7 375,57, 125,mp.,{}),  
 86: @Note(7 375,57,48, 125,mp,FLT,{}),87: @Note(7 375,40, 5,mp,NAT.,{}),  
 88: @Note(7 375,33, 125,mp.,{}),89: @Note(7 5,56, 375,mp.,{}),  
 90: @Note(7 5,47, 125,mf.,{}),91: @Note(7 5,35, 375,mp.,{}),  
 92: @Note(7 625,52, 125,mf.,{}),93: @Note(7 75,44, 125,mp.,{}),  
 94: @Note(7 875,55, 125,mf,FLT,{}),95: @Note(7 875,46, 125,mp, SHP,{}),  
 96: @Note(7 875,40, 125,mp.,{}),97: @Note(7 875,37, 125,p,NAT,{}),  
 98: @Note(8 0,54, 25,mf.,{}),99: @Note(8 0,45, 5,mp,NAT.,{}),  
 100: @Note(8 0,39, 125,mp,NAT,{}),101: @Note(8 0,35, 5,p.,{}),  
 102: @Note(8 125,47, 125,mp.,{}),103: @Note(8 25,56, 375,mf,NAT,{}),  
 104: @Note(8 25,37, 125,mp.,{}),105: @Note(8 375,39, 125,mp.,{}),  
 106: @Note(8 4375,52, 0625,mp.,{}),107: @Note(8 5,52, 25,mp.,{}),  
 108: @Note(8 5,44, 25,mp.,{}),109: @Note(8 5,40,mp.,{}),  
 110: @Note(8 5,28, 125,mp.,{}),111: @Note(8 625,30, 125,mp.,{}),  
 112: @Note(8 75,26, 125,p,FLT,{}),113: @Note(8 875,40, 125,p.,{}),  
 114: @Note(8 875,23, 125,p.,{}),115: @Note(9 0,45, 625,mf.,{}),  
 116: @Note(9 0,21, 1 0,mf.,{}),117: @Note(9 25,40, 75,mp.,{}),  
 118: @Note(9 25,37, 75,mp.,{}),119: @Note(9 25,33, 75,mp.,{}),  
 120: @Note(9 25,28, 75,mp.,{}),121: @Note(9 625,44, 125,mp.,{}),  
 122: @Note(9 75,45, 125,mf.,{}),123: @Note(9 875,49, 125,mf.,{}),  
 124: @Note(10 0,52, 125,f.,{}),125: @Note(10 125,55, 125,f,FLT,{}),  
 126: @Note(10 125,50, 125,f.,{}),127: @Note(10 125,35, 125,mp.,{}),  
 128: @Note(10 125,28, 125,mp.,{}),129: @Note(10 25,55, 5,f.,{}),  
 130: @Note(10 25,49, 5,f.,{}),131: @Note(10 25,34, 125,mp, SHP,{}),  
 132: @Note(10 25,30, 625,mp.,{}),133: @Note(10 375,37, 125,mp.,{}),  
 134: @Note(10 5,42, 125,mf.,{}),135: @Note(10 5,42, 875,mf.,{}),  
 136: @Note(10 625,46, 125,mf, SHP,{}),137: @Note(10 75,54, 125,mf.,{}),  
 138: @Note(10 75,49,mf.,{}),139: @Note(10 875,52, 125,mf.,{}),  
 140: @Note(10 875,34, 125,mf, SHP,{}),141: @Note(11 0,50, 125,mf.,{}),  
 142: @Note(11 0,50, 25,mf.,{}),143: @Note(11 0,35, 375,mf.,{}),  
 144: @Note(11 125,54, 125,mf.,{}),145: @Note(11 25,47, 125,mp.,{}),  
 146: @Note(11 25,47, 125,mp.,{}),147: @Note(11 375,49, 125,mp.,{}),  
 148: @Note(11 375,34, 125,mp, SHP,{}),149: @Note(11 375,28, 125,mp.,{}),  
 150: @Note(11 5,50, 375,mp.,{}),151: @Note(11 5,42, 125,mp.,{}),  
 152: @Note(11 5,35, 375,mp.,{}),153: @Note(11 5,30, 375,mp.,{}),  
 154: @Note(11 625,47, 125,mp.,{}),155: @Note(11 75,38, 125,p.,{}),  
 156: @Note(11 875,47, 125,p.,{}),157: @Note(11 875,40, 125,p.,{}),  
 158: @Note(11 875,31, 125,FLT,{}),159: @Note(12 0,47, 375,p.,{}),  
 160: @Note(12 0,38, 125,mp.,{}),161: @Note(12 0,30, 375,p.,{}),  
 162: @Note(12 125,42, 125,mp.,{}),163: @Note(12 25,35, 125,mp.,{}),  
 164: @Note(12 375,42,mp.,625,{}),165: @Note(12 375,40, 125,mp.,{}),  
 166: @Note(12 375,37, 625,mp.,{}),167: @Note(12 375,30, 25,mp.,{}),  
 168: @Note(12 5,38, 25,mp.,{}),169: @Note(12 625,35, 125,mp.,{}),  
 170: @Note(12 625,35, 125,mp.,{}),171: @Note(12 75,23, 125,p.,{}),  
 172: @Note(12 875,45, 125,p.,{}),173: @Note(12 875,25, 125,p.,{}),  
 174: @Note(13 0,50, 625,mp.,{}),175: @Note(13 0,11, 25,mp.,{}),  
 176: @Note(13 25,45, 75,mp.,{}),177: @Note(13 25,42, 75,mp.,{}),

178: @Note(13.25,38,.75,mp,,{}), 179: @Note(13.25,33,.75,mp,,{}),  
180: @Note(13.625,49,.125,mp,,{}), 181: @Note(13.75,50,.125,p,,{}),  
182: @Note(13.875,54,.125,p,,{}), 183: @Note(14.0,57,.125,pp,,{}),  
184: @Note(14.0,57,.25,pp,,{}), 185: @Note(14.125,62,.125,pp,,{}),  
186: @Note(14.125,42,.125,pp,,{}), 187: @Note(14.125,38,.125,pp,,{}),  
188: @Note(14.25,62,.5,p,,{}), 189: @Note(14.25,56,.5,pp,NAT,{}),  
190: @Note(14.25,41,.125,pp,SHP,{}), 191: @Note(14.25,37,.625,pp,,{}),  
192: @Note(14.375,44,.125,pp,,{}), 193: @Note(14.5,49,.125,p,,{}),  
194: @Note(14.5,49,.875,p,,{}), 195: @Note(14.625,53,.125,p,SHP,{}),  
196: @Note(14.75,61,.125,mp,,{}), 197: @Note(14.75,56,.25,p,,{}),  
198: @Note(14.875,59,.125,mp,,{}), 199: @Note(14.875,40,.125,p,,{}),  
200: @Note(15.0,57,.125,mp,,{}), 201: @Note(15.0,54,.25,p,,{}),  
202: @Note(15.0,42,.375,p,,{}), 203: @Note(15.125,61,.125,mp,,{}),  
204: @Note(15.25,54,.125,mf,,{}), 205: @Note(15.25,54,.125,mf,,{}),  
206: @Note(15.375,56,.125,mf,,{}), 207: @Note(15.375,50,.125,mf,,{}),  
208: @Note(15.375,41,.125,mf,SHP,{}), 209: @Note(15.375,35,.125,mf,,{}),  
210: @Note(15.5,57,.375,mf,,{}), 211: @Note(15.5,49,.125,mf,,{}),  
212: @Note(15.5,42,.375,mf,,{}), 213: @Note(15.5,37,.375,mf,,{}),  
214: @Note(15.625,.125,54,mf,,{}), 215: @Note(15.75,45,.125,mp,,{}),  
216: @Note(15.875,56,.125,mp,,{}), 217: @Note(15.875,47,.125,mp,,{}),  
218: @Note(15.875,38,.125,mp,,{}), 219: @Note(16.0,54,.375,mp,,{}),  
220: @Note(16.0,45,.125,mp,,{}), 221: @Note(16.0,37,.625,mp,,{}),  
222: @Note(16.125,49,.125,mp,,{}), 223: @Note(16.25,42,.125,p,,{}),  
224: @Note(16.375,49,.375,p,,{}), 225: @Note(16.375,47,.125,p,,{}),  
226: @Note(16.375,44,.125,p,,{}), 227: @Note(16.375,41,p,SHP,{}),  
228: @Note(16.5,45,.25,p,,{}), 229: @Note(16.5,41,.125,p,,{}),  
230: @Note(16.625,.375,p,,{}), 231: @Note(16.625,38,.375,p,,{}),  
232: @Note(16.75,47,.1875,pp,,{}), 233: @Note(16.75,44,.1875,p,,{}),  
234: @Note(16.75,40,p,NAT,{}), 235: @Note(16.875,38,.125,pp,,{}),  
236: @Note(16.875,28,.125,pp,NAT,{}), 237: @Note(16.9375,40,.0625,pp,,{}),  
238: @Note(17.0,45,.625,.625,pp,,{}), 239: @Note(17.0,21,1.0,p,,{}),  
240: @Note(17.25,40,.75,p,,{}), 241: @Note(17.25,37,.75,p,,{}),  
242: @Note(17.25,33,.75,p,,{}), 243: @Note(17.25,28,.75,p,,{}),  
244: @Note(17.625,44,.125,p,,{}), 245: @Note(17.75,45,.125,mp,,{}),  
246: @Note(17.875,49,.125,mp,,{}), 247: @Note(18.0,52,.125,mf,,{}),  
248: @Note(18.125,57,.125,mf,,{}), 249: @Note(18.25,57,.5,f,,{}),  
250: @Note(18.25,45,1.0,f,,{}), 251: @Note(18.25,42,.5,f,,{}),  
252: @Note(18.25,33,.75,f,,{}), 253: @Note(18.25,26,.75,f,,{}),  
254: @Note(18.75,56,.125,mf,,{}), 255: @Note(40,.125,mf,,{}),  
256: @Note(18.875,54,.125,mf,,{}), 257: @Note(18.875,38,.125,mf,,{}),  
258: @Note(19.0,52,.125,mp,,{}), 259: @Note(19.0,37,.25,mp,,{}),  
260: @Note(19.0,28,.25,mp,,{}), 261: @Note(19.125,57,.125,mp,,{}),  
262: @Note(19.25,47,.125,mp,,{}), 263: @Note(19.25,44,.5,mp,,{}),  
264: @Note(19.25,38,.125,mp,,{}), 265: @Note(19.25,28,.5,mp,,{}),  
266: @Note(19.375,49,.125,p,,{}), 267: @Note(19.375,37,.125,p,,{}),  
268: @Note(19.5,50,.125,p,,{}), 269: @Note(19.5,35,.25,p,,{}),  
270: @Note(19.625,54,.125,p,,{}), 271: @Note(19.75,45,.125,pp,,{}),  
272: @Note(19.75,40,.5,pp,,{}), 273: @Note(19.75,33,.125,mp,,{}),  
274: @Note(19.75,25,.125,pp,,{}), 275: @Note(19.875,47,.125,pp,,{}),  
276: @Note(19.875,44,.125,pp,,{}), 277: @Note(19.875,35,.125,p,,{}),  
278: @Note(19.875,28,.125,p,,{}), 279: @Note(20.0,49,.125,p,,{}),  
280: @Note(20.0,45,.125,p,,{}), 281: @Note(20.0,37,.25,mp,,{}),  
282: @Note(20.0,33,.25,mp,,{}), 283: @Note(20.125,52,mp,,{}),  
284: @Note(20.25,47,.5,mp,,{}), 285: @Note(20.25,44,.5,mp,,{}),  
286: @Note(20.25,40,.5,mp,,{}), 287: @Note(20.25,35,.5,mf,,{}),  
288: @Note(20.25,28,.125,mf,,{}), 289: @Note(20.375,30,.125,mf,,{}),  
290: @Note(20.5,28,.125,mf,,{}), 291: @Note(20.625,26,.126,mf,,{}),  
292: @Note(20.75,40,.25,mf,,{}), 293: @Note(20.75,23,.125,mf,,{}),  
294: @Note(20.875,25,.125,mf,,{}), 295: @Note(21.0,45,.625,f,,{}),

296:@Note(21.0,21,1.0,f,{}),297:@Note(21.25,40,75,mf,{}),  
 298:@Note(21.25,37,75,mf,{}),299:@Note(21.25,33,75,mf,{}),  
 300:@Note(21.25,28,75,mf,{}),301:@Note(21.625,125,44,mp,{}),  
 302:@Note(21.75,45,125,mp,{}),303:@Note(21.875,49,125,mp,{}),  
 304:@Note(22.0,52,125,p,{}),305:@Note(22.125,61,125,p,{}),  
 306:@Note(22.25,61,375,mf,{}),307:@Note(22.25,54,375,mf,{}),  
 308:@Note(22.25,47,375,mf,{}),309:@Note(22.25,45,1.0,mp,{}),  
 310:@Note(22.25,39,75,mp,NAT,{}),311:@Note(22.25,30,75,p,{}),  
 312:@Note(22.25,23,75,p,{}),313:@Note(22.625,59,125,mf,{}),  
 314:@Note(22.75,57,125,mp,{}),315:@Note(22.875,54,125,mp,{}),  
 316:@Note(23.0,52,125,p,{}),317:@Note(23.0,40,25,p,{}),  
 318:@Note(23.0,37,25,p,{}),319:@Note(23.0,28,25,p,{}),  
 320:@Note(23.125,57,125,p,{}),321:@Note(22.25,47,125,mp,{}),  
 322:@Note(23.25,44,5,mp,{}),323:@Note(23.25,40,5,mp,{}),  
 324:@Note(23.25,38,125,mp,FLT,{}),325:@Note(23.25,28,5,mp,{}),  
 326:@Note(23.375,49,125,mp,{}),327:@Note(23.375,37,125,mp,{}),  
 328:@Note(23.375,37,125,mp,{}),329:@Note(23.5,50,125,mp,{}),  
 330:@Note(23.5,35,25,mp,{}),331:@Note(23.625,54,125,mp,{}),  
 332:@Note(23.75,47,125,mp,{}),333:@Note(23.75,42,5,mp,{}),  
 334:@Note(24.125,54,125,p,{}),335:@Note(23.75,45,125,mp,{}),  
 336:@Note(23.75,26,125,mp,{}),337:@Note(23.875,49,125,p,{}),  
 338:@Note(23.875,46,125,p,SHP,{}),339:@Note(23.875,37,125,p,{}),  
 340:@Note(23.875,30,125,p,{}),341:@Note(24.0,50,125,p,{}),  
 342:@Note(24.0,47,125,p,{}),343:@Note(24.0,38,25,p,{}),  
 344:@Note(24.0,35,25,p,{}),345:@Note(24.25,42,125,pp,{}),  
 346:@Note(24.25,42,25,pp,{}),347:@Note(24.25,38,25,pp,{}),  
 348:@Note(24.25,28,75,pp,{}),349:@Note(24.25,28,125,pp,{}),  
 350:@Note(24.375,44,125,pp,{}),351:@Note(24.375,40,625,pp,{}),  
 352:@Note(24.375,16,125,pp,{}),353:@Note(24.5,45,5,pp,{}),  
 354:@Note(24.5,37,5,pp,{}),355:@Note(24.5,21,5,pp,{}));

myRests:@Rests({(25.75,25),(1.0,25),(1.0,25),(2.0,25),  
 (4.75,25),(5.0,25),(5.0,25),(6.0,25),(6.0,25),(8.75,125),  
 (8.75,25),(9.0,25),(9.0,25),(9.0,25),(10.0,125),(12.75,125),  
 (13.0,25),(14.0,125),(17.0,25),(17.0,25),(18.0,25),(18.0,25),  
 (20.75,25),(21.0,25),(21.0,25),(22.0,25)});

// The Articulations will first give the set of Pedals and then of Slurs.

myArticulations:@Articulations(myPedals,mySlurs);

myPedals:@Pedals({(1.0,1.0,3),(2.25,75,3),(5.0,1.0,3),  
 (13.0,3.87,3),(16.625,625,2),(22.25,75,3)});

mySlurs:@Slurs({(1,2,8,9,10,11,12),(13,18,20,22,25),  
 {15,19,21,23},{26,30,32,34},{28,31,33},{35,39,43,47},  
 {37,41,45},  
 {57,60,66,67,68,69,70},{71,77,78,79,80,83,84,85,89},  
 {94,98,103,106},  
 {96,100,102,104,105,109},{113,115,121,122,123,124,125},  
 {110,111,112,114,116},  
 {129,137,139,141,144,145,147,150,156,159},  
 {127,131,133,134,136,138},{148,152},{158,161},  
 {167,169,171,173,175},  
 {172,174,180,182,183,185},{186,190,192,193,195,197},  
 {198,200,203,204,206,210,216,219},{208,212},{218,221},  
 {224,232},  
 {237,238,244,245,247,248},{249,254,256,258,261},  
 {262,266,268,270});

{264.:267.:269.}, {271.:275.:279.:283.:284.},  
 {288.:289.:290.:291.:293.:294.:296.},  
 {292.:295.:301.:302.:303.:304.:305.}, {306.:313.:314.:315.:316.:320.},  
 {321.:326.:329.:331.}, {324.:328.:330.}, {332.:336.:340.:344.},  
 {334.:338.:342.}, {345.:350.:353.});  
  
 myDinamicres:@Dinamicres({{8.:9.:10.:11.:12.},crescendo),  
 {{26.:28.:30.:31.:32.:33.:34.},decrecendo),  
 {{37.:38.:41.:42.:45.:46.},crescendo),  
 {{53.:54.:55.:56.:57.:58.:59.},decrecendo), {{66.:67.:68.:69.},crescendo),  
 {{110.:111.:112.:114.},decrecendo), {{121.:122.:123.:124.},crescendo),  
 {{127.:128.:131.:132.:133.:134.:136.},crescendo),  
 {{145.:146.:147.:148.:149.:150.:151.:152.:153.:154.:155.:156.:157.:158.},  
 decrecendo), {{180.:181.:182.},decrecendo),  
 {{196.:197.:198.:199.:200.:201.:202.:203.:204.:205.:206.:207.:208.},crescend  
  
 o),  
 {{244.:245.:246.:247.},crescendo),  
 {{258.:259.:260.:261.:262.:263.:264.:265.:266.:267.:268.:269.},decrecendo),  
  
 {{273.:274.:277.:278.:281.:282.},crescendo),  
 {{301.:302.:303.:304.:305.:306.},crescendo)}});  
  
 myAbsloudsigns:@Absloudsigns({{7.625,dim.}, (15.625,dim.), (22.675,dim.}});  
  
 myArpeggi:@Arpeggi({{15.:16.:17.}, {73.:74.:75.:76.}, {251.:252.:253.},  
 {306.:307.:308.:309.:310.:311.:312.}});

Había que demostrar la existencia de la Forma circular “List”, que se usa para indicar las repeticiones (tipo “da capo”) en una partitura. List se define así:

$$Length : Simple(\mathbb{Z});$$

$$Item(F) : Limit(F, List(F));$$

$$List(F) : Colimit(Item(F), Length)$$

Para probar que esta Forma existe, se tiene que exhibir el funtor de la Forma,  $Fun(List(F))$  y el identificador (aquí regresamos a nuestra notación anterior)

$$f : Fun(List(F)) \rightarrow Fun(Item(F)) \bigsqcup Fun(Length).$$

Si existiera la Forma List, deberíamos tener:

$$(i) \text{ la Forma } Length = (Length, Simple, \mathbb{Z}, @\mathbb{Z} \mapsto @\mathbb{Z});$$

$$(ii) \text{ la Forma } Item(F) = (Item(F), Limit, (F, List(F)),$$

$$Fun(Item(F)) \mapsto Fun(F) \times Fun(List(F));$$

$$(iii) \text{ la Forma } List(F) = (List(F), CoLimit, (Item(F), Length),$$

$$Fun(List(F)) \mapsto Fun(Item(F)) \bigsqcup Fun(Length).$$

Pero lo que realmente necesitamos son isomorfismos tales que, si la Forma existiera:

$$\begin{aligned} Fun(List(F)) &\cong Fun(Item(F)) \bigsqcup Fun(Length) = Fun(Item(F)) \bigsqcup @\mathbb{Z} \\ &\cong (Fun(F) \times Fun(List(F))) \bigsqcup @\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Sean  $Fun(F) = H$ ,  $Fun(Item(F)) = K$ ,  $Fun(List(F)) = L$ .

Entonces, necesitamos que:

$$(a) L \cong (H \times L) \bigsqcup @\mathbb{Z}.$$

También queremos que

$$\begin{aligned} Fun(Item(F)) &\cong Fun(F) \times Fun(List(F)) \\ &\cong Fun(F) \times (Fun(Item(F)) \bigsqcup @\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

o, en otras palabras:

$$(b) K \cong H \times (K \sqcup \mathbb{Q}Z).$$

Como  $H$  es arbitrario, mostraremos que existe un funtor  $M(H) \cong M(H) \times H$ , definiendo un funtor en  $M^{\mathbb{O}}$  como  $H^N$ . Entonces,  $H^N \cong H^N \times H$  y  $M(H) = H^N$ .

Sea  $L = \bigsqcup_{i=0, \dots, \infty} H^i \times \mathbb{Q}Z$ . Queremos probar el isomorfismo (a). El lado derecho de (a), con  $L$  definido de esta manera, es:

$$\begin{aligned} H \times \left( \bigsqcup \mathbb{Q}Z \sqcup H \mathbb{Q}Z \sqcup H^2 \mathbb{Q}Z \dots \right) \sqcup \mathbb{Q}Z &= \left( \bigsqcup H \times \mathbb{Q}Z \sqcup H^2 \times \mathbb{Q}Z \sqcup H^3 \times \mathbb{Q}Z \dots \right) \sqcup \mathbb{Q}Z \\ &= \bigsqcup_{i=0, \dots, \infty} H^i \times \mathbb{Q}Z = L. \end{aligned}$$

Ahora sea  $K = H \times L$ . Entonces,

$$\begin{aligned} K &= H \times \bigsqcup_{i=0, \dots, \infty} H^i \mathbb{Q}Z = H \times \left( \bigsqcup \mathbb{Q}Z \sqcup H \times \mathbb{Q}Z \sqcup H^2 \times \mathbb{Q}Z \dots \right) \\ &= H \times \left( \left( \bigsqcup H \mathbb{Q}Z \sqcup H^2 \mathbb{Q}Z \dots \right) \sqcup \mathbb{Q}Z \right) = H \times \left( \left( H \times \bigsqcup \mathbb{Q}Z \sqcup H \times \mathbb{Q}Z \sqcup H^2 \times \mathbb{Q}Z \dots \right) \sqcup \mathbb{Q}Z \right) \\ &= H \times \left( \left( H \times \bigsqcup_{i=0, \dots, \infty} H^i \mathbb{Q}Z \right) \sqcup \mathbb{Q}Z \right) = H \times \left( \left( H \times L \right) \sqcup \mathbb{Q}Z \right) = H \times (K \sqcup \mathbb{Q}Z). \blacksquare \end{aligned}$$

### III.4 Morfismos entre Composiciones Locales

A continuación vemos ejemplos de simetrías en la música, ya que la teoría de morfismos entre composiciones locales se basa en ellas.

#### Ejemplo 4.1 Transposición (Cambio de Tonalidad)

Consideremos un vector de traslación  $t \in \mathbb{Q}^3$ , una transformación afín de módulos

$$e^t : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$$

y una transformación natural de funtores

$$\mathbb{Q}e^t : \mathbb{Q}\mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}\mathbb{Q}^3$$

que lleva cualquier Denotador de *EulerModule*  $x$ , ( $x : A \rightsquigarrow EulerModule(x)$ ) a su trasladado

$$e^t(x) : A \rightsquigarrow EulerModule(e^t \cdot x).$$

Si  $x$  es un punto en el espacio de la Forma *EulerModule*, entonces

$$x \in \mathbb{Q}^3 \text{ y } e^t \cdot x = x + t.$$

Veamos la clase de la octava,  $\text{mod}_o(x) : 0 \rightsquigarrow o\text{-EulerClass}(e^{\mathbb{Z}_o} \cdot x)$ , donde los trasladados son  $e^{no}, n \in \mathbb{Z}$ , de los miembros (enteros) de la octava aplicados (sumados) a  $x$ . Si tenemos un acorde de tamaño  $k$  dentro de  $\text{mod}_o(x)$ , es decir,

$Ch : 0 \rightsquigarrow o\text{-ClassChord}(c_1, c_2, \dots, c_k)$ , consideraremos el trasladado

$$e^{\text{modo}} \cdot Ch = \{e^{\text{modo}(x)} \cdot c_1, \dots, e^{\text{modo}(x)} \cdot c_k\}.$$

Si tenemos la escala de siete notas, o sea, un subconjunto de  $\mathbb{Z}_{12}$ , como un "acorde" de siete notas, por ejemplo  $Do_{\text{may}} = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$  (como clases), aplicándole  $e^{\text{modo}}(7)$  tendremos

$$Sol_{\text{may}} = \{7, 9, 11, 0, 2, 4, 6\}.$$

#### Ejemplo 4.2 Inversión, Retrogrado, Inversión con Retrogrado

Estas simetrías son bien conocidas en la teoría de la música, desde la época barroca hasta la contemporánea (la inversión con retrogrado es fundamental en la composición serial dodecafónica).

Como la inversión es un reflejo sobre el eje de "Pitch" (altura de las notas) en una nota fija, su descripción visual depende del espacio de "Pitch" en el cual se trabaja. Por ejemplo:

1) *Pitch*; ( $Pitch \rightarrow \text{Simple}(\mathbb{Z})$ ); esta Forma nos sirve para designar, por ejemplo, las 88 teclas del piano).

2) *MathPitch*; ( $MathPitch \rightarrow \text{Simple}(\mathbb{R}_Q)$ ); su Coordinador es el espacio vectorial de dimensión infinita  $\mathbb{R}_Q$ ).

3) *Euler Module*;

4) *p-PitchClass*.

Podemos definir un inversión musical (inversión melódica, no de acordes o intervalos) como una transformación afín  $e^s \cdot (-1)$ , que manda un Denotador de Forma Pitch,

$$D : A \rightsquigarrow Pitch(x) \text{ a}$$

$e^s \cdot (-1)D : A \rightsquigarrow Pitch(e^s \cdot (-1)(x) = s \cdot (-1)(x) = s - x$ . Es interesante preguntar bajo que condiciones tendrá esta inversión un punto (nota) fijo.

Sea  $x = e^t \cdot x_0$ . Entonces,  $e^t \cdot x_0 = s - e^t \cdot x_0$  si, y sólo si,  $t - x_0 = s - (t - x_0) = s - t + x_0$  si, y sólo si,  $2t = s + 2x_0$ . Pero  $e^t \cdot t = e^s \cdot 2x_0$  si, y sólo si,  $2t = s$  y  $2x_0 = 0$ . Para *Pitch*, *MathPitch* y *EulerModule* tenemos que la inversión  $e^s \cdot (-1)$  tiene un punto (nota) fijo si, y sólo si,  $t = \frac{1}{2}s$  y  $x_0 = 0$ .

Sin embargo, en el caso de *p-PitchClass* estamos hablando de morfismos diafines en  $x \in A @ \mathbb{Z}_p$ , donde  $s \in 2\mathbb{Z}_p$ , más un dihomomorfismo (lineal) de módulos  $x_0 : A \rightarrow \mathbb{Z}_p$ , con  $2im(x_0) = 0$ . De la Teoría de Campos Finitos, sabemos que si  $p$  es impar, 2 tiene un inverso multiplicativo en  $\mathbb{Z}_p$ , y el punto (nota) fijo se encuentra haciendo  $t = \frac{1}{2}s$  y el dihomomorfismo  $x_0 = 0$ .

Si  $p$  es par, o sea,  $p = 2q$ , no es forzoso que  $s \in 2\mathbb{Z}_p$ ; por otro lado, el dihomomorfismo lineal debe tener imagen en el submódulo  $q\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_2$  para que  $2x_0 = 0$ .

Tomemos como ejemplo la Fuga no.6 del libro 1 del *Clave Temperado* de J.S.Bach. El compás 33 es una inversión del compás 29, que es el motivo de la fuga.



Figura 2

Vemos que, en la transformación hay un punto fijo ( $sol = 7$ ) que aparece 2 veces en las 5 aplicaciones. Tenemos que, por ser un punto fijo,  $s - e^t \cdot x_0 = e^t \cdot x_0$ . En este caso estaríamos en  $12\text{-PitchClass}$  ( $\mathbb{Z}_{12}$ ) y nuestro Denotador sería:

$Fuga6I : \rightsquigarrow 12\text{-PitchClass}(x)$  (cuando la dirección es cero, no se pone).

Si  $t = 7$ , entonces  $s = 2 \cdot 7 = 2$  y  $x_0 = 6 \cdot s = 6 \cdot 2 = 0$ . Entonces,  $2x_0 = 0$ . Evaluado en  $x = 7$ , efectivamente,  $e^7 \cdot (-1) \cdot 0(7) = 7 - 0 \cdot 7 = 7 = x$ , y  $s - x = 2 - 7 = 7$ . Evidentemente, esto será igual para cualquier nota de la escala cromática (entero de  $\mathbb{Z}_{12}$ ), con  $t = x$ . En otras palabras, en  $\mathbb{Z}_{12}$  se puede hacer la inversión en torno a cualquier nota (otra propiedad importante de la división de la octava en 12 notas).

En la música, el retrógrado significa el tocar al revés, comenzando con la última nota y terminando con la primera. Sin embargo, el tiempo contemplado en parámetros como “Onset”, “Duración”, etc. no se puede invertir tan intuitivamente; el ejemplo de una grabación invertida nos muestra algo que no es el retrógrado musical.

Véamos que sucede cuando trabajamos con la Forma  $Onset \rightarrow Simple(\mathbb{R})$ . Aquí se puede trazar una analogía con la inversión de  $Pitch$  y la simetría del retrógrado:

$k_s(x) = e^s \cdot (-1)x = s - x$ , siendo  $s$  el “largo” total de la pieza, medida en  $\mathbb{R}$ . Si, por ejemplo, tenemos un compás medido en cuartos,  $s = 4$ , y si  $x = 1.5$  (una nota que comienza en  $Onset = 1.5$ ) en su retrógrado la misma nota comenzará en  $Onset = 4 - 1.5 = 2.5$ .

Pero, ¿qué pasa cuando tenemos dos notas en los tiempos  $Onset$  y  $Offset = Onset + Onsetdistance$ , separadas por  $Onsetdistance$ . Es decir, nota 1 tiene  $Onset = 1.5$  y nota 2 comienza en

$$Onset + Onsetdistance = 1.5 + .75 = 2.25.$$

Si aplicamos nuestra simetría  $k_s$ , tenderemos

$$\{k_s(Onset), k_s(Offset)\} = \{s - Offset, s - Onset\}$$

que, en nuestro ejemplo, es  $\{4 - 2.25, 4 - 1.5\} = \{1.75, 2.5\}$ . Así es que el retrógrado de nota 2 comienza exactamente  $Onsetdistance$  antes del retrógrado de nota 1.

Sin embargo, si la duración (que no hemos contemplado) de *nota 2* es más larga que *Onsetdistance* (por ejemplo, si dura 1.5) entonces  $k_s(\text{Offset})$  no terminará cuando comienza  $k_s(\text{Onset})$ .

Así es que hay que incluir el parámetro *Duración* cuando se define una simetría de retrógrado y, por ende, trabajar en el espacio bidimensional  $\text{Onset} \oplus \text{Duración}$ . Si tomamos dos eventos,

$$OD(\text{Onset}, \text{Duración}) \text{ y } OD(\text{Offset}, \text{Duración}).$$

primeramente hay que aplicar  $e^s \cdot (-1)$  en los parámetros *Onset* de ambas notas, o sea,

$$OD(k_s(\text{Onset}), \text{Duration}) \text{ y } OD(d_s(\text{Offset}), \text{Duration}).$$

Sea la duración de *nota 1* = .5, *nota 2* = 1.0 > .75. Entonces, tenemos (2.5, .5), (1.75, 1.0). Pero esta transformación es intermedia, ya que queremos evitar empalmes. Así es que tomamos en cuenta la duración para obtener

$$OD(k_s(\text{Onset}) - \text{Duration}_1, \text{Duration}_1)$$

$$\text{ y } OD(k_s(\text{Offset}) - \text{Duration}_2, \text{Duration}_2), \text{ o sea}$$

$$(2.5 - .5, .5) = (2.0, .5) \text{ y } (1.75 - 1.0, 1.0) = (.75, 1.0).$$

De esta forma, el empalme de 2.5 a 2.75 se evita por completo, ya que en el retrógrado *nota 2* termina en 1.75 y *nota 1* comienza en 2.0.

Finalmente, definimos el retrógrado como  $K_s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (o, d) \mapsto (s - o - d, d)$ , es decir,

$$e^{(s,0)} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Evidentemente, en este ejemplo no contemplamos el parámetro *Volumen (Loudness)* que musicalmente está, también, sujeto al retrógrado.

Por otro lado, la inversión con retrógrado, tan usado en la música serial dodecafónica, involucra tres parámetros, o sea,  $\text{Onset} \oplus \text{Pitch} \oplus \text{Duration}$ . Así es que tenemos:

$KU_{s,t} = e^{(s,t,0)} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  y si  $o$  es el *Onset*,  $p$  la nota (*Pitch*) y  $d$  la duración (*Duration*) originales,  $o, p, d \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} o \\ p \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -o-d \\ -p \\ d \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -o-d \\ -p \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-o-d \\ t-p \\ d \end{bmatrix} ..$$

De esta manera, una inversión con retrógrado nos lleva de

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (o, p, d) \mapsto (s - o - d, t - p, d).$$

**Ejemplo 4.3** En la sección II.4 se mencionó que se daría un ejemplo en que el producto fibrado de dos composiciones locales objetivas en **ObLoc** no cumple con las necesidades de la TMM, mientras que en el marco funtorial, como objetos en **Loc** con dirección cero, sí funciona bien.

Tomemos  $A = B = C = \mathbb{Z}$  y el punto  $x : 0_{\mathbb{Z}} \rightarrow A$ . Sean  $C, J$  dos composiciones locales objetivas,  $C \hookrightarrow A @ Fun(Pitch), J \hookrightarrow A @ Fun(Pitch)$  y, en este caso,  $Pitch \rightarrow \mathbf{Simple}(\mathbb{Z})$  y  $Fun(CF) = @\mathbb{Z}$ , que es el espacio ambiente.

Con la simetría  $e^t \cdot x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  realmente tenemos dos conjuntos de intervalos con un punto base y un punto terminal. Supongamos que  $C \cap J = \emptyset$  y, por lo tanto, el conjunto de intervalos correspondiente a  $C$  nunca se interseca con el conjunto de intervalos correspondiente a  $J$ . Supongamos, además, que todos los puntos de la base son iguales en los dos conjuntos, pero los puntos terminales nunca coinciden en  $C$  y  $J$ .

De esta manera, como ejemplo,  $\hat{C} = \{(0, 2), (0, 4), (0, 5)\}, \hat{J} = \{(0, 7), (0, 9), (0, 11)\}$ , o sea, todos los intervalos comienzan desde el tónico (digamos *do*) y

$$C = \{re = 2, mi = 4, fa = 5\}, J = \{sol = 7, la = 9, si = 11\}$$

Como se puede apreciar, la perspectiva objetiva en la dirección  $A$  no muestra puntos en común, mientras la perspectiva funtorial sí muestra los puntos comunes de la base. Veamos como se relaciona esto con los productos fibrados objetivo y funtorial.

Si tomamos el producto fibrado objetivo, tendremos las intersecciones de los conjuntos  $C = \{2, 4, 5\}$  y  $J = \{7, 9, 11\}$  que es claramente vacía:

$$\begin{array}{ccc} C \cap J & \rightarrow & C \subset @\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ @\mathbb{Z} \supset J & \rightarrow & S = \mathbb{Z}\mathbb{Z} \end{array}$$

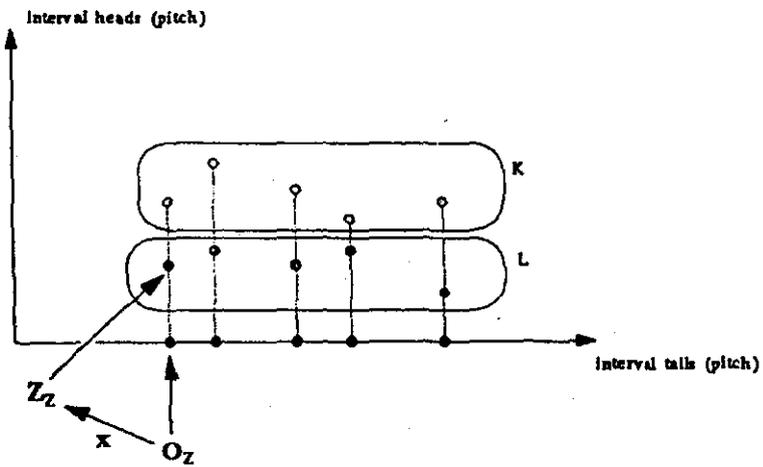


Figura 3

## APÉNDICE I

### TOPOI

La construcción del concepto de Denotador, como es empleado en este trabajo, fue un proceso arduo y es producto, como toda estructura matemática (sin ahondar aquí en la esencia multidisciplinaria de nuestro Denotador), de una serie de antecedentes que fueron desarrollados sin que se supiera en que momento se fueran a hacer los nexos decisivos entre ellos. Una de las fuentes más importantes que contribuyó al desarrollo del concepto y la estructura del Denotador es la Teoría de Categorías y, más específicamente, la Teoría de Topos. En las palabras de Guerino Mazzola, el creador del marco teórico que sostiene la estructura "... en vista del riguroso marco formal que (se expondrá adelante), podemos decir que los principios más generales de la construcción matemática de producto, coproducto, conjunto potencia... reúne todo lo que se sabe relevante para la formación de estructuras matemáticas y de bases de datos... Es asombroso que los teóricos de bases de datos todavía no han aprendido a hacer un uso sistemático de la Teoría de Categorías, aunque sí se emplea en el aspecto teórico de la Ciencia de la Computación". [ToM, cap.6]

En este Apéndice, haremos un breve recorrido por los aspectos de la Teoría de Topos que son esenciales para poder entender la estructura del Denotador. Las definiciones básicas de Teoría de Categorías como categoría, funtor, transformación natural, categoría dual, etc. pueden consultarse en varios libros de la bibliografía [p.ej. LluP, cap.II] y nos concentraremos en los conceptos ligados a los topoi, los cuales son necesarios para comprender el presente trabajo donde la categoría de funtores (pregavillas), el topos  $\text{Mod}^{\mathbf{Q}}$ , juega un papel privilegiado.

1.1 Límites, Colímites, Producto Fibrado, Coproducto Fibrado y Objetos Iniciales (Terminales)

**Definición.** Un *producto* en una categoría  $C$  es un objeto  $A \times B$ , con  $A, B \in C$ , junto con una pareja  $(p_A : A \times B \rightarrow A, p_B : A \times B \rightarrow B)$  de morfismos tal que para cualquier pareja de  $C$  morfismos  $(f : C \rightarrow A, g : C \rightarrow B)$  existe un morfismo único  $p = \langle f, g \rangle$  tal que el siguiente diagrama conmuta ( $p_A \circ p = f$  y  $p_B \circ p = g$ ).

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & f \swarrow & \downarrow p & \searrow g & \\ A & \xleftarrow{p_A} & A \times B & \xrightarrow{p_B} & B \end{array}$$

Cabe mencionar que  $A \times B$  está definido de manera única, salvo isomorfismo.

El dual del producto es el coproducto (o suma directa).

**Definición.** Un *coproducto* en una categoría  $C$  es un objeto  $A \oplus B$ , con  $A, B \in C$ , junto con una pareja  $i_A : A \rightarrow A \oplus B, i_B : B \rightarrow A \oplus B$  de morfismos tal que para cualquier pareja de morfismos  $(f : A \rightarrow C, g : B \rightarrow C)$  existe un morfismo único  $i : A \oplus B \rightarrow C$  tal que el siguiente diagrama conmuta ( $i \circ i_A = f, i \circ i_B = g$ ).

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & f \nearrow & \uparrow i & \nwarrow g & \\ A & \xrightarrow{i_A} & A \oplus B & \xleftarrow{i_B} & B \end{array}$$

Ahora definiremos el igualador.

**Definición.** Dada una pareja  $f, g : A \rightarrow B$  de morfismos en una categoría  $C$ , sea  $i : E \rightarrow A$  con  $E \in C$ . El morfismo  $i$  es un *igualador* de la pareja  $f, g$  de morfismos si:

(a)  $f \circ i = g \circ i$ ;

(b) Para todo  $h : C \rightarrow A$ , si  $f \circ h = g \circ h$ , entonces existe un morfismo único  $k : C \rightarrow E$  tal que el siguiente diagrama conmuta,  $C \in C$

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \uparrow k & \nearrow h & & \searrow g & \\ C & & & & \end{array}$$

De manera dual, un *coigualador* de la pareja  $f, g : A \rightarrow B$  de morfismos es un  $C$  morfismo

$$p : B \rightarrow E$$

si:

(a)  $p \circ f = p \circ g$ ,

(b) Para todo  $h : B \rightarrow K$ , si  $h \circ f = h \circ g$ , entonces existe un morfismo único  $k : E \rightarrow K$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{p} & E \\ & \searrow g & & \searrow h & \downarrow k \\ & & & & K \end{array}$$

Cabe mencionar que se puede demostrar con facilidad que todo igualador es un monomorfismo y todo coigualador es un epimorfismo.

Ya estamos listos para definir límites y colímites.

**Definición.** Un cono para un diagrama  $D$  en una categoría  $\mathcal{C}$  consiste en un objeto  $C \in \mathcal{C}$ , junto con un  $\mathcal{C}$  morfismo  $f_i : C \rightarrow D_i$  para cada objeto  $D_i$  en el diagrama, tal que el siguiente diagrama conmuta cuando  $g$  es un morfismo de  $D$  ( $g \circ f_i = f_j$ ).

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ f_i \swarrow & & \searrow f_j \\ D_i & \xrightarrow{g} & D_j \end{array}$$

**Definición.** Un límite para  $D$  es un cono sobre  $D$  ( $\{f_i : C \rightarrow D_i\}$ ) con la siguiente propiedad: dado cualquier otro cono ( $\{f'_i : C' \rightarrow D_i\}$ ), hay exactamente un morfismo  $f : C' \rightarrow C$  tal que el siguiente diagrama conmuta ( $f_i \circ f = f'_i$ ).

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{f} & C \\ f'_i \downarrow & & \swarrow f_i \\ D_i & & \end{array}$$

Un límite para  $D$ , o sea el cono  $C$ , es único salvo isomorfismo..

Un colímite para  $D$  consiste en un cocono ( $\{f_i : D_i \rightarrow C'\}$ ) tal que para cualquier otro cocono hay un morfismo único  $f : C \rightarrow C'$  tal que el siguiente diagrama conmuta ( $f \circ f_i = f'_i$ ).

$$\begin{array}{ccc} C' & \xleftarrow{f} & C \\ f'_i \uparrow & & \swarrow f_i \\ D_i & & \end{array}$$

**Ejemplo.** Sean  $D_i, D_j$  dos  $\mathcal{C}$  objetos sin un morfismo entre ellos. Así es que un límite para  $D$  (el morfismo  $\emptyset$ ) es el producto de  $D_i$  y  $D_j$  y un colímite para  $D$  es el coproducto:

$$\begin{array}{ccccc} & C' & & & \\ f'_i \swarrow & \downarrow f & \searrow f'_j & & \\ D_i & \xleftarrow{f} & C & \xrightarrow{f} & D_j \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & C' & & \\ & \swarrow f'_i & \uparrow f & \nwarrow f'_j & \\ D_i & \xrightarrow{f} & C & \xleftarrow{f} & D_j \end{array}$$

Ahora recordaremos el producto fibrado ("pullback") y su dual, el coproducto fibrado ("pushout").

**Definición.** El *producto fibrado* de dos morfismos con el mismo codominio,

$f : D_k \rightarrow D_j$  y  $g : D_i \rightarrow D_j$ , es un límite en una categoría  $C$  para el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & D_i \\ & & \downarrow g \\ D_k & \xrightarrow{\quad} & D_j \end{array}$$

Un cono para este diagrama consiste en 3 morfismos,  $f_i, f_j, f_k$

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f_i} & D_i \\ f_k \downarrow & \searrow f_j & \downarrow g \\ D_k & \xrightarrow{f} & D_j \end{array}$$

Pero como  $f \circ f_k = f_j = g \circ f_i$ , es suficiente decir que el cono es la pareja de morfismos  $(f_i, f_k)$ , tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f_i} & D_i \\ f_k \downarrow & & \downarrow g \\ D_k & \xrightarrow{f} & D_j \end{array} \dots$$

Asimismo, cuando tenemos  $f'_i$  y  $f'_k$  tal que  $f \circ f'_k = g \circ f'_i$ , entonces existe un morfismo único

$h : C' \rightarrow C$  tal que  $f'_k = f_k \circ h$  y  $f'_i = f_i \circ h$ :

$$\begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{f'_i} & D_i \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{f_i} & D_i \\ f_k \downarrow & \searrow f_j & \downarrow g \\ D_k & \xrightarrow{f} & D_j \end{array}$$

El cuadrado interior  $(f, g, f_i, f_k)$  es llamado cuadrado cartesiano.

El dual del producto fibrado es el coproducto fibrado ("pushout"), el cual es un colímite para el diagrama

$$\begin{array}{ccc} D_j & \xrightarrow{g} & D_k \\ f \downarrow & & \\ D_i & & \end{array}$$

que representa dos morfismos en una categoría  $C$ ,  $f$  y  $g$ , con el mismo dominio. Su construcción es como sigue ( $f_i \circ g = f_k \circ f, f'_i \circ g = f'_k \circ f$ ).

$$\begin{array}{ccc} D_j & \xrightarrow{g} & D_i \\ f \downarrow & \searrow f_j & \downarrow f_i \\ D_k & \xrightarrow{f_k} & C \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} D_j & \xrightarrow{g} & D_i \\ f \downarrow & & \downarrow f'_i \\ D_k & \xrightarrow{f_k} & C' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} D_j & \xrightarrow{g} & D_i \\ f \downarrow & & \downarrow f_i \\ D_k & \xrightarrow{f_k} & C \\ f'_k \downarrow & & \downarrow h \\ C' & & \end{array}$$

Finalmente, definiremos los objetos iniciales (terminales) de una categoría.

**Definición.** Un *objeto inicial* en una categoría  $C$  es un objeto  $0$  tal que existe un morfismo único de  $0$  en  $A$ , para todo objeto  $A \in C$  ( $0 \rightarrow A$ ). Un *objeto terminal* en  $C$  es un objeto  $1$  tal que existe un morfismo único de cualquier  $A$  en  $C$  en  $1$  ( $A \rightarrow 1$ ).

Una categoría puede carecer de objetos iniciales (terminales) pero, en el caso de poseerlos, son *únicos salvo isomorfismo*. Veamos la prueba de este hecho para  $1$ .

**Teorema.** Si  $1$  y  $1'$  son ambos objetos terminales, entonces existen morfismos únicos

$$u : 1 \rightarrow 1',$$

$$u' : 1' \rightarrow 1$$

tal que

$$u' \circ u = 1_1, \quad u \circ u' = 1_{1'}$$

( $1$  es el morfismo identidad).

*Demostración:* Sabemos  $u : 1 \rightarrow 1'$  es única porque  $1'$  es terminal. Análogamente  $u' : 1' \rightarrow 1$  es única. Así es que la composición  $u' \circ u : 1 \rightarrow 1' \rightarrow 1$  es única y tiene que ser  $1_1$ , ya que  $1_1 : 1 \rightarrow 1$  es el único morfismo de  $1$  en  $1$ . Análogamente,  $1_{1'}$  es el único morfismo de  $1'$  en  $1'$  y es igual a

$$u \circ u' : 1' \rightarrow 1 \rightarrow 1'. \blacksquare$$

Cabe mencionar que el objeto cero es un objeto en una categoría que es inicial y terminal a la vez, pero no nos interesa ya que una categoría con objeto cero (como  $Grp$ , por ejemplo) no puede ser un topos.

Un ejemplo de objetos iniciales (terminales) son el vacío (y el conjunto de un sólo elemento) en  $Set$ . En el caso de  $Grp$ , como ya mencionamos, el objeto inicial y terminal es el mismo,  $e$ , el grupo trivial con  $e * e = e$ .

Las siguientes definiciones y teorema serán muy importantes cuando definamos y estudiemos los topoi.

**Definición.** Una categoría  $\mathcal{C}$  es *completa (cocompleta)* si cada diagrama en  $\mathcal{C}$  tiene un límite (colímite) en  $\mathcal{C}$ .

**Definición.** Un *diagrama finito* es un diagrama que tiene un número finito de objetos y de morfismos entre ellos.

**Definición.** Una categoría  $\mathcal{C}$  es *finitamente completa (finitamente cocompleta)* si cada diagrama finito tiene límite (colímite).

**Teorema.** Una categoría  $\mathcal{C}$  tiene un objeto terminal y un producto fibrado para cada pareja de morfismos con codominio común si, y sólo si,  $\mathcal{C}$  es finitamente completa.

## 1.2 Funtores Adjuntos y Exponenciación

**Definición.** Sean  $\mathcal{C} \xrightleftharpoons{F, G} \mathcal{D}$ , o sea,  $F$  y  $G$  un par de funtores entre las categorías  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$ .  $F$  es *adjunto izquierdo* de  $G$  (o  $G$  *adjunto derecho* de  $F$ ),  $F \dashv G$ , si hay una biyección natural de funtores tal que:

$$\mathcal{C}(F(D), C) \cong \mathcal{D}(D, G(C))$$

para los objetos  $C \in \mathcal{C}$ ,  $D \in \mathcal{D}$ .

**Definición.** Una categoría  $\mathcal{C}$  posee *exponenciación* si cualesquier dos objetos  $A, B \in \mathcal{C}$  tienen producto, y si existe  $B^A$  y un morfismo *evaluación*  $ev : B^A \times A \rightarrow B$  tal que, para  $C \in \mathcal{C}$  y un morfismo

$$g : C \times A \rightarrow B$$

existe una única

$$\hat{g} : C \rightarrow B^A$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} C \times A & \xrightarrow{\hat{g} \times 1_A} & B^A \times A \\ & \searrow g & \downarrow ev \\ & & B \end{array}$$

En otras palabras, existe una única  $\hat{g}$  tal que  $ev(\hat{g} \times 1_A) = g$ . Esto nos da una biyección entre los morfismos  $Hom_{\mathcal{C}}(C \times A, B)$  y  $Hom_{\mathcal{C}}(C, B^A)$ .

### 1.3 Pregavillas, Funtores Representables y el Lema de Yóneda

La categoría  $\text{Mod}^{\mathcal{A}}$ , que es un topos como se definirá en 1.5, es un ejemplo particular de una categoría de pregavillas.

**Definición.** Una *pregavilla* de conjuntos sobre una categoría pequeña fija  $\mathcal{C}^1$  es un funtor contravariante  $P : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$ . Así es que la categoría de pregavillas es equivalente al topos  $\text{Sets}^{\mathcal{C}^{op}}$  y la denotaremos por  $\mathcal{P}$ . Los objetos de  $\mathcal{P}$  son todos los funtores contravariantes  $P : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$  y los morfismos son las transformaciones naturales  $\tau : P \rightarrow P'$ .

**Definición** Sea  $Y(A) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$  el funtor contravariante *Hom*. Las pregavillas de este estilo se llaman *funtores (pregavillas) representables*.

La pregavilla  $Y(A)$  se define en un objeto  $B \in \mathcal{C}$  como

$$Y(A)(B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$$

y en un morfismo  $q : X \rightarrow B$  para  $u : B \rightarrow A$  como

$$Y(A)(q) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$$

$$\text{donde } Y(A)(q)(u) = u \circ q$$

Para el morfismo  $u : B \rightarrow A$  en  $\mathcal{C}$ , existe una transformación natural

$$\tau : Y(B) \rightarrow Y(A),$$

es decir,

$$\begin{array}{ccc} B & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B) \\ u \downarrow & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, u) \\ A & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \end{array}$$

Así es que  $Y$  es un funtor que lleva de la categoría  $\mathcal{C}$  a la categoría de funtores contravariantes en  $\mathcal{C}$ .  $Y$  se llama el *funtor de Yóneda*,  $Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $A \mapsto Y(A) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$  y es un funtor pleno y fiel. El funtor de Yóneda da lugar al *Lema de Yóneda*.

<sup>1</sup>En este trabajo se ha estado basando en el axioma de MacLane

"Existe un universo  $V$ "

que es más débil que el universo de Grothendieck. Esto es necesario porque si nos basáramos en los axiomas ZF o el sistema NBG [Gold, cap. I]  $\text{Mod}^{\mathcal{A}}$  no sería una pregavilla [McLr, II.12]

**Lema de Yóneda.** Para una pregavilla arbitraria  $P$  en  $\mathcal{C}$  y  $A \in \mathcal{C}$ , hay una correspondencia natural biyectiva entre las transformaciones naturales  $\theta : Y(A) \rightarrow P$  y los elementos del conjunto  $P(A)$ .

En otras palabras, y según la notación del presente trabajo, si  $P \in \text{Mod}^{\mathcal{C}}$  entonces existe una biyección

$$\alpha : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\otimes A, P) \rightarrow A \otimes P.$$

tal que si

$$\theta : \otimes A \rightarrow P,$$

entonces

$$\theta \mapsto \alpha(\theta) = \theta(A)1_A,$$

o sea

$$\begin{array}{ccccc} A & A \otimes A & \xrightarrow{\theta_A \circ 1_A} & P(A) \\ \downarrow u & \uparrow u \otimes A & & \uparrow P(u) \\ B & B \otimes A & \xrightarrow{\theta_B} & P(B) \end{array}$$

#### 1.4 Los Subobjetos, el Clasificador de Subobjetos $\Omega$ , las Cribas y los Objetos Potencia

Sea  $f : B \rightarrow A$ ,  $g : C \rightarrow A$ . Decimos que  $f \subseteq g$  si existe un único monomorfismo  $h : B \rightarrow C$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{h} & C \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & A \end{array}$$

Si  $h$  es un isomorfismo con inverso  $j$ , tenemos que:

$$f = g \circ h \circ j = f \circ j$$

en cuyo caso diremos que  $f \simeq g$ , ya que sus dominios son isomorfos. Definimos una clase de equivalencia:

$$[f] = \{g : f \simeq g\}$$

que hereda la reflexividad y transitividad de la relación de inclusión  $\subseteq$  original, y es antisimétrica, ya que si

$$f \subseteq g \text{ y } g \subseteq f \text{ entonces } [f] = [g].$$

Asimismo, esta relación no depende del representante de la clase, porque

$$\text{sean } [f] = [f'] \text{ y } [g] = [g']; \text{ si } f \subseteq g \text{ entonces } f' \subseteq g'.$$

**Definición.** Sea  $A \in \mathcal{C}$ . Un *subobjeto* de  $A$  es una clase de equivalencia de monomorfismos con contradominio  $A$ .

**Definición.** En una categoría  $\mathcal{C}$ , con límites finitos, un *clasificador de subobjetos* es un monomorfismo,  $\text{true} : 1 \rightarrow \Omega$ , tal que para todo monomorfismo  $f : S \rightarrow X$  en  $\mathcal{C}$  existe un único morfismo  $\chi_f$ , tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \chi_f \\ 1 & \xrightarrow{\text{true}} & \Omega \end{array}$$

Veamos el clasificador de subobjetos en Sets como motivación. Recordemos que si  $D$  es un conjunto, el conjunto potencia de  $D$ ,  $\mathcal{P}(D)$ , está en correspondencia biyectiva con todos los morfismos:

$$(D \rightarrow 2 = \{0, 1\}).$$

En otras palabras, la biyección entre los subconjuntos de  $D$ ,  $\mathcal{P}(D)$ , y la colección de funciones  $(D \rightarrow 2)$  se establece así.

$$\text{Sea } A \subseteq D \text{ y definimos } \chi_A \text{ como } \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

(a)  $\mathcal{P}(D) \rightarrow (D \rightarrow 2)$  es inyectiva, ya que si  $\chi_A = \chi_B$ , entonces  $A = B$ .

(b)  $\mathcal{P}(D) \rightarrow (D \rightarrow 2)$  es suprayectiva porque como  $2 = \{0, 1\}$ , si  $f \in (D \rightarrow 2)$  y si  $x \in A$ , entonces  $f(x) = \chi_A = 1$  y si  $x \in D - A$  entonces  $f(x) = \chi_{D-A} = 0$ .

La correspondencia entre los subconjuntos y las funciones características puede representarse en un diagrama de producto fibrado. Aquí tenemos  $A_f = \{x : x \in D \text{ y } f(x) = 1\}$ , o sea,  $A_f$  es la imagen inversa de  $\{1\} \subset \{0, 1\}$  bajo  $f$ .

$$\begin{array}{ccc} A_f & \rightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \{1\} & \xrightarrow{\text{true}} & 2 = \{0, 1\} \end{array}$$

La función  $\text{true}$  se conoce como la función "verdad". Cabe mencionar que un clasificador de subobjetos, cuando existe en una categoría, es único salvo isomorfismo.

Ahora vemos el clasificador de subobjetos en  $\mathcal{P}$  (una categoría de pregavillas, como  $\text{Mod}^{\mathfrak{A}}$ ).

Para cualquier categoría arbitraria de pregavillas  $\mathcal{P}$  si hay un clasificador de subobjetos  $\Omega$  éste debe, en particular, clasificar los subobjetos de cada pregavilla representable  $Y(A) = \text{Hom}_{\mathcal{P}}(-, A)$  ( $\mathfrak{A}$  en nuestra notación). Así es que:

$$\text{Sub}_{\mathcal{P}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{P}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \Omega) = \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \Omega).$$

Pero por el Lema de Yoneda,

$$\text{Nat}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A), \Omega) \cong \Omega(A).$$

Así es que, si existe el clasificador de subobjetos en  $\hat{\mathcal{C}}$ , tiene que ser el funtor (la pregavilla)  $\Omega$  tal que:

$$\Omega(A) = \text{Sub}_{\mathcal{P}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)) = \{S : S \text{ es un subfuntor de } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)\}.$$

Lo común en este caso es introducir una manera alternativa de definir los subfuntores del funtor representable  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ .

**Definición.** Una *criba* en  $A \in \mathcal{C}$  es un conjunto  $Cr$  de morfismos con contradominio  $A$  tal que si  $f \in Cr$  y si  $fh$  está definida, entonces  $fh \in Cr$ .

Ahora veremos que hay una biyección entre cribas en  $A$  y los subfuntores de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ . Por un lado

$$Cr = \{f : \text{para } B \in \mathcal{C}, f : B \rightarrow A \text{ y } f \in Q(B)\}$$

donde  $Q$  es un subfuntor de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$  es una criba.

Por otro lado, si tenemos una criba  $Cr$  en  $A$  podemos definir

$$Q(B) = \{f : B \rightarrow A \text{ y } f \in Cr\} \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$$

el cual, a su vez, nos da un funtor  $Q \in \mathcal{C}$ , con  $Q$  un subfuntor de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ . De esta manera tenemos que una criba  $Cr$  en  $A$  es equivalente a un subfuntor de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ .

**Definición.** El clasificador de subobjetos  $\Omega$  en una categoría de pregavillas (funtores)  $\mathcal{P}$  se define en objetos como:

$$\Omega(A) = \{Cr : Cr \text{ es una criba en } A \in \mathcal{C}\}$$

y en morfismos  $u : B \rightarrow A$  como:

$\Omega(u) : \Omega(A) \rightarrow \Omega(B)$ , tal que si  $u \circ q \in C\tau$  ( $q$  una función con codominio  $B$ )

entonces  $\Omega(u \circ q) = \Omega(q) \circ \Omega(u)$ .

Para  $A \in C$  el conjunto de todos los morfismos que tienen contradominio  $A$  se llama la criba maximal.

Estas cribas maximales se "pegan" para dar la transformación natural:

$$true : 1 \rightarrow \Omega.$$

**Definición.** Una categoría  $C$  con productos tiene *objeto potencia* si a cada  $A \in C$  existe  $\Omega^A$  (véase la definición de exponenciación) tal que para cualquier  $B \in C$ , hay un isomorfismo

$$Hom_C(B \times A, \Omega) \approx Hom_C(A, \Omega^B).$$

En otras palabras, el funtor  $Hom_C(B \times -, \Omega)$  es representable -isomorfo a  $Hom_C(-, \Omega^B)$ - siendo  $\Omega^B$  el objeto representante..

El objeto potencia tiene que cumplir con la condición de exponenciación.

## 1.5 Topoi

Ahora podemos ver varias definiciones equivalentes de un topos.

**Definición 1.** Un *topos* es una categoría  $C$  tal que:

- (a)  $C$  es finitamente completa (cada diagrama finito tiene límite);
- (b)  $C$  es finitamente cocompleta (cada diagrama finito tiene cólmite);
- (c)  $C$  tiene exponenciación;
- (d)  $C$  tiene un clasificador de subobjetos.

Cuando se cumple (a) y (c) se dice que  $C$  es *Cartesiana cerrada*. Asimismo tenemos

(a')  $C$  tiene objeto terminal y producto fibrado y

(b')  $C$  tiene objeto inicial y coproducto fibrado, siendo tanto (a) y (a') como (b) y (b') equivalentes.

De forma igual, (a), (c) y (d) implican (b).

**Definición 2.** Un topos es una Categoría Cartesiana Cerrada con un clasificador de subobjetos.

**Definición 3** Un topos  $\mathcal{T}$  es una categoría con:

- a) límites finitos;
- b) un clasificador de subobjetos  $\Omega$ ;
- c) una función  $f$  que asigna a cada objeto  $A \in \mathcal{T}$  un objeto  $\Omega^A \in \mathcal{T}$ ;
- d) dos isomorfismos naturales para cada objeto  $A \in \mathcal{T}$ :

$$\text{i) } \text{Sub}_{\mathcal{T}} A \cong \text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, \Omega) \text{ y}$$

$$\text{ii) } \text{Hom}_{\mathcal{T}}(B \times A, \Omega) \cong \text{Hom}_{\mathcal{T}}(A, \Omega^B).$$

### 1.6 La Categoría de Elementos

La categoría de elementos se denota  $\int_{\mathcal{C}} P$ . Sus objetos son todas las parejas  $(A, D)$  donde  $A \in \mathcal{C}$  y  $D \in P(A)$  (en nuestro caso,  $A \in \text{Mod}$  y  $D \in A@F$ ). Sus morfismos  $(A, D) \rightarrow (B, D')$  son los morfismos  $\alpha : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}$  (en  $\text{Mod}$ , por ejemplo) tal que  $D'\alpha = D$ .

## APÉNDICE II

### EL TOPOS DE LA MÚSICA Y LA TMM

El punto de referencia de todo este trabajo ha sido la enciclopédica obra ToM, *The Topos of Music*. No es el lugar aquí para reproducir el índice de ésta, con sus aproximadamente 62 capítulos y 21 apéndices, pero cabe remarcar que, aparte de la teoría de Topos, se emplea una vasta variedad de ramas de la Matemática, tanto en el desarrollo teórico como en la parte aplicada y experimental de la obra.

Guerino Mazzola, matemático discípulo de Alexander Grothendieck (el cual dijo acerca del libro previo de Mazzola publicado en alemán en 1990, *Geometrie der Töne*<sup>1</sup>, “Das ist wohl schon die Mathematik des ‘Neuen Zeitalters’”, es decir, “Esta es la Matemática del ‘nuevo siglo’”) es también un experimentado pianista de jazz y musicólogo. Sin embargo, como queda claro en los primeros 5 capítulos de ToM, correspondientes a la sección I, no da ningún paso sin filosofar acerca de su materia. En este apéndice intentaremos dar al lector que ha tenido la paciencia-o va a tener-de estudiar con todo detalle técnico al Denotador, una noción acerca de la motivación filosófica detrás de su formulación y, en general, detrás de la Teoría Matemática de la Música, TMM.

La existencia de un vínculo entre estas dos áreas de la creación y el conocimiento humanos data desde la época de los griegos, pero es hasta fechas recientes que una maquinaria matemática sofisticada se despliega en aras de entender y describir el fenómeno musical. Esto, a su vez, es totalmente comprensible, ya que no existía tal desarrollo de la Matemática hasta la segunda mitad del siglo por terminar. Asimismo, es importante recalcar que no es el propósito de la TMM absorber la genialidad de un compositor o intérprete mediante una teoría formal, sino el de entender los aspectos de la Música sujetos al razonamiento, de la misma manera en que los físicos intentan comprender la naturaleza perceptible como una expresión racional del “Creador”, y no al Creador mismo.

<sup>1</sup>*The Topos of Music* iba a ser una traducción de la *Geometrie der Töne*, solicitada por la Editorial Birkhäuser, pero se transformó en una obra tan amplia, que rebasa la de 1990.

Un aspecto importante de la TMM descansa sobre el hecho de cómo una aplicación de la Matemática a un área en particular de la Ciencia o las Humanidades (en este caso la Música) redundará en aportes a la misma Matemática, con la creación de nuevos objetos, estructuras y modelos. En este caso, los antecedentes de la TMM reportan la creación de nuevos objetos matemáticos (Denotadores, Composiciones Locales y Globales, etc.) y los softwares RUBATO y PRESTO. En cuanto a la Musicología, el aporte es tan revolucionario que bien se puede pensar en hablar de la Musicología Científica.

Podemos apreciar que el mismo título de la obra, *The Topos of Music*, posee un doble sentido. Por un lado está la palabra griega topos, que significa lugar y que sugiere la ubicación del concepto de la Música como un tópico, en el sentido de Aristóteles y Kant. Por otro lado, se hace referencia a la teoría matemática de Topos que, como hemos visto en esta tesis, sirve para reflejar el sistema de signos musicales, esto es, la Música en su faceta de un sistema abstracto cuya estructura puede permanecer escondida sin un marco adecuado de comprensión. Este doble significado expresa, de hecho, la intención de unificar una profundización filosófica con la precisión de la Matemática, en torno a la Musicología.

Una de las metas del trabajo que se realiza en la TMM es desarrollar un marco estable de conceptos para hacer Musicología. Se parte de un esquema de clasificación en la Música y Musicología que destaca cuatro actividades: producción, recepción, documentación y comunicación. Aunque no es el único esquema posible, sí es suficientemente amplio para captar una variedad de perspectivas. Un aspecto interesante es que cada una de las cuatro actividades tiene una importancia en sí, y juntas son necesarias para la comprensión de la Música en su amplio espectro. Por otro lado, cuando la Música se contempla como un tema especial de investigación, hay que buscar un “conjunto mínimo” de otras disciplinas que sean necesarias para poder realizar dicha investigación. En la TMM se han escogido cuatro ciencias para cumplir este requisito: la Matemática, la Física, la Semiótica y la Psicología. De ninguna forma se pretende crear un esquema reduccionista de la realidad musical, sino que se busca ubicar a la Musicología en el mismo lugar que ocupa cualquier área de investigación, sea de las Ciencias Naturales o de las Humanidades, y acabar con el aura de misticismo y la fuerte recurrencia a la subjetividad que, en lo tocante a nuestro tema, se invocan con frecuencia.

Definiremos provisionalmente a la Música como “un sistema de signos, compuestos de formas complejas, que puede ser representada por sonidos físicos que representan contenido mental y psíquico”. Así es que se recurre a la ciencia de los signos por excelencia, la Semiótica, para tener un marco de referencia para el sistema de signos; a la Física para entender la representación de las formas como sonido; a la Psicología para el contenido psíquico y a la Matemática para el contenido mental. Cabe explicar que las formas musicales no sólo tienen una representación física sino, también, una existencia mental, que es donde la Matemática se involucra directamente. Asimismo, la Física “absorbe” la Ciencia de la Computación y la Ingeniería de Sonido. Los aspectos sociales de la Música pueden verse bajo el rubro de la Psicología Social (así como la Semiótica Social), y la Psicología también abarca cuestiones de pedagogía y educación musical en general.

Es fundamental enfatizar que, mientras quien emplee métodos matemáticos, lógicos o computacionales en la Música no tiene que ser docto en la Filosofía de la Música, sí es necesario que tenga una orientación dentro de la compleja ontología de este arte. Tanto en la Música como en otras áreas del conocimiento se ha atestiguado cómo la precisión de la Matemática, más un conocimiento deficiente acerca de la ontología del área de aplicación, provoca un dogmatismo; injustamente, se le suele responsabilizar a la Matemática por este problema, y no cuestionar la falta de capacidad de hacer nexos de quien la aplica.

La TMM ofrece un modelo ontológico con un carácter flexible y abierto a modificaciones. Se intenta aportar un “sistema” de coordenadas para localizar problemas dentro del proceso de hacer Musicología. Se propone desde un principio formular un sistema tridimensional que nos permita decir *dónde* vive el concepto de la Música, y que se conoce como la *Topografía de la Música*. Las coordenadas son:

- 1) Realidad;
- 2) Comunicación;
- 3) Semiosis.

Véamos estas coordenadas con un poco más de detalle.

1) La *realidad* de la Música es física, psicológica y mental. En el nivel físico se trata de un fenómeno acústico, en tanto en su nivel mental se trata de la partitura como una abstracción. Como realidad psíquica, la Música expresa los estados emocionales de sus creadores y afecta emocionalmente al escucha.

2) La *comunicación* de la Música pasa por tres instancias: el nivel del creador, o lo que se conoce como la *poiesis*, seguido por el nivel *neutral* que es la obra en sí. El nivel *estético* del *escucha* es la instancia que percibe al ser interpretada una obra. Desde el momento en que una obra musical es creada, la existencia del creador es fijo; en cambio, el número de escuchas e intérpretes crece constantemente.

3) Como la Música es uno de los sistemas no-lingüísticos más desarrollados de signos, la Semiología juega un papel en la ubicación de su ontología. Se enfatiza que la Música no se interpreta como un tipo de lenguaje; al contrario, se señala que hay diferencias significativas entre un sistema musical y uno lingüístico. Sin embargo, se describe la Semiología de la Música desde la perspectiva de la Semiología Estructuralista de Roland Barthes como una generalización de la teoría lingüística de Ferdinand de Saussure. Para no desviarnos del propósito de este esbozo, como apéndice de la presente tesis de Matemáticas, no podremos ahondar en este aspecto tan interesante. Sólo mencionaremos que un sistema es semiótico si se articula según una estratificación fundamental de signos en su *significante*, *significación* y *significado*, donde el significante (los morfemas, o sea, la mínima forma significativa) llega al profundo del mensaje, el significado, por medio de las relaciones de la significación.

Todo lo anterior nos señala que una ubicación ontológica de la Música puede interpretarse como un punto en un cubo tridimensional generado por los ejes de realidad, comunicación y semiología, cada uno, a su vez, articulado en tres valores:

realidad : física, psíquica, mental;

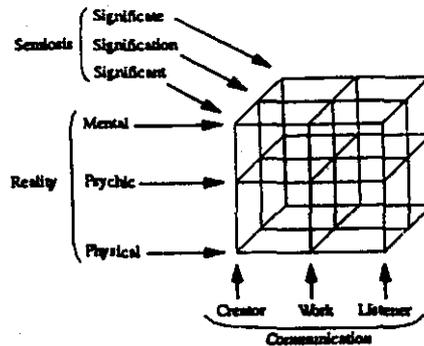
comunicación : creador, obra, escucha;

semiología : significante, significación, significado

Así es como tenemos el *cubo topográfico* de la ontología musical, que consiste en un conjunto de

$$3^3 = 27$$

posibles ubicaciones topográficas como puntos. Pero cualquier objeto general puede ubicarse en cualquier subconjunto del cubo, y los 27 puntos son sólo ubicaciones elementales, a partir las cuales se componen ontologías más complejas.



Para finalizar, nos gustaría citar un párrafo de ToM que resume contundentemente lo expuesto:

“Es equivocado creer que la Música es un asunto especial de la ciencia porque se trata de objetos que apuntan a un estrato no mental de la realidad. La Psicología, por ejemplo, estudia emociones, la Física estudia partículas elementales. Todos estos objetos comparten aspectos que trascienden la conceptualización humana. Pero podemos concebirlos en un sistema cognoscitivo y modelar su comportamiento con un éxito impresionante para nuestra capacidad de comprensión. La Música no es ni más ni menos accesible que la Física. Pero tenemos que establecer un sofisticado sistema de signos para poder aprehender su significado; el lenguaje común no es la herramienta para el espacio conceptual de la Música”.

Finalmente, cabe señalar que otro aspecto de motivación fundamental para el desarrollo del Denotador, la *navegación*, se esboza brevemente en el capítulo I, sección I.1 del presente trabajo.

## BIBLIOGRAFÍA

Bucur, Ion y Deleanu, Aristide, *Introduction to the Theory of Categories and Functors*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, London, 1968.

[Gold] Goldblatt, Robert, *Topoi: The Categorical Analysis of Logic*, Elsevier Science Publishers, Amsterdam 1984.

[Llup] Lluis-Puebla, *Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica*, Adison Wesley Ib, 1990.

[Mac] MacLane, Saunders, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971.

[MacMo] MacLane, Saunders y Moerdijk, Ieke, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer Verlag, New York, 1992.

Mazzola, Guerino, et al., *A Symmetry Orientated Mathematical Model of Classical Counterpoint and Related Neurophysiological Investigations by Depth-EEG*, in *Symmetry II*, CAMWA, Pergamon, New York, 1989.

Mazzola, Guerino, *Mathematical Music Theory-an Informal Survey*, CERFIM, 1994.

[ToM] Mazzola, Guerino, *The Topos of Music: Geometric Logic of Concepts, Theory and Performance*, Borrador por publicarse en la Editorial Birkhäuser.

[McLr] McLarty, Colin, *Elementary Categories, Elementary Topos*, Carendon Press, Oxford 1995.

[MM] Montiel, Mariana, *Matemáticas y Música: Perspectivas a través del Tiempo*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1996.

Muzzolini, D., *Musical Modulation by Symmetries*, Journal for Music Theory, 1995.

[Sol] Solian, Alexandru, *Theory of Modules (An Introduction to the Theory of Module Categories)*, JohnWiley & Sons Limited, 1977.

van Oosten, Joap, *Basic Category Theory*, BRICS Lecture Series, University of Aarhus, Denmark,  
January 1995.