



01163 7
2eg

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA

FLUJO DE AGUA EN SUELOS
CON PERMEABILIDAD ALEATORIA

NORMA PATRICIA LÓPEZ ACOSTA

TESIS

Presentada a la División de
Estudios de Posgrado de la
FACULTAD DE INGENIERÍA
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Como requisito para obtener
el GRADO de
MAESTRO EN INGENIERÍA
(MECÁNICA DE SUELOS)

DIRECTOR DE TESIS: DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD

CIUDAD UNIVERSITARIA
DICIEMBRE, ~~1999~~

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1999



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres, Ino y Vicente

*A mis hermanos, Vicente,
Elisa, Isabel y mi cuñado Gerardo*

A mis suegros, M^a del Carmen y Hugo

*A mi esposo, Hugo,
gracias por todo tu apoyo y comprensión,
gracias por tu paciencia, pero sobre todo,
mil gracias por tu amor,
que en realidad, es lo que me hace grande*

Agradecimientos:

A los investigadores Dr. Gabriel Auvinet Guichard, Dr. Raúl Flores Berrones, Dr. Efraín Ovando Shelley, Dr .Miguel P. Romo Organista, Ing. Jesús Alberro Aramburu.

A mis compañeros Marcos, Moisés, Edgar, Eduardo, Osvaldo, Celestino, Ernesto, Fredy, Oscar, Enrique, Juan Félix, Juan Carlos, Adonay, Yesenia, Deneb, y todos aquellos que siempre han estado cerca.

Al Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).

FLUJO DE AGUA EN SUELOS CON PERMEABILIDAD ALEATORIA

ÍNDICE

	Pág.
<u>RESUMEN</u>	4
<u>NOTACIÓN</u>	5
<u>LISTA DE FIGURAS</u>	7
<u>LISTA DE TABLAS</u>	9
<u>1. INTRODUCCIÓN</u>	
<u>1.1 Aspectos generales</u>	11
<u>1.2 Objetivos</u>	13
<u>1.3 Limitaciones</u>	13
<u>2. ANTECEDENTES</u>	
<u>2.1 Teorías y métodos comunes empleados en la solución de problemas de flujo de agua en suelos</u>	15
<u>2.1.1 Conceptos básicos</u>	15
<u>a. Carga hidráulica</u>	15
<u>b. Velocidad de infiltración</u>	17
<u>c. Ley de Darcy</u>	17
<u>d. Flujo laminar y turbulento</u>	18
<u>e. Flujo establecido y transitorio</u>	19
<u>f. Ecuación de Laplace</u>	19
<u>g. Flujo bidimensional</u>	21
<u>h. Flujo confinado y no confinado</u>	22
<u>2.1.2 Análisis del flujo de agua en suelos</u>	22
<u>a. Método gráfico de la red de flujo</u>	22
<u>b. Teoría de la sección transformada para suelos anisótropos</u>	23
<u>c. Análisis en suelos estratificados</u>	24
<u>d. Método de las relajaciones</u>	24
<u>e. Método de los paseos casuales</u>	25
<u>f. Transformación conforme</u>	26
<u>g. Modelos físicos</u>	27
<u>h. Modelos analógicos para resolver problemas de flujo</u>	27
<u>i. Método de elementos de frontera</u>	28
<u>j. Método de Elementos Finitos</u>	28
<u>2.2 Fuentes de incertidumbre en el análisis de problemas de flujo de agua en suelos</u>	29
<u>2.2.1 Principales fuentes de incertidumbre</u>	29
<u>2.2.2 Incertidumbre en la permeabilidad</u>	29
<u>2.2.3 Incertidumbre en las condiciones de frontera</u>	37
<u>2.2.4 Incertidumbre asociada al método de cálculo</u>	38

3. MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO ESTOCÁSTICO APLICADO AL FLUJO DE AGUA EN SUELOS CON PERMEABILIDAD ALEATORIA	
<u>3.1</u> Introducción	39
<u>3.2</u> Principales técnicas	39
<u>3.3</u> Aplicación del enfoque de Primer Orden - Segundos Momentos al análisis del flujo agua	42
<u>3.3.1</u> Fundamentos del análisis de incertidumbre de Primer Orden	42
<u>a.</u> Caso de una función de una variable	42
<u>b.</u> Caso de una función de varias variables	43
<u>c.</u> Caso de varias funciones de varias variables	44
<u>3.3.2</u> Análisis de la incertidumbre en los resultados de un problema de flujo de agua resuelto por el <i>MEF</i>	45
<u>a.</u> Considerando como variable aleatoria el coeficiente de permeabilidad <i>k</i>	45
<u>a.1</u> Incertidumbre en la carga hidráulica	45
<u>a.2</u> Incertidumbre en el gradiente hidráulico	45
<u>a.3</u> Incertidumbre en la velocidad de flujo	46
<u>a.4</u> Incertidumbre en el gasto	46
<u>b.</u> Considerando como variable aleatoria el logaritmo del coeficiente de permeabilidad (<i>log k</i>)	47
<u>b.1</u> Incertidumbre en la carga hidráulica	47
<u>b.2</u> Incertidumbre en el gradiente hidráulico	47
<u>b.3</u> Incertidumbre en la velocidad de flujo	47
<u>b.4</u> Incertidumbre en el gasto	48
<u>3.4</u> Algoritmos desarrollados para la aplicación del <i>MEFE</i> al análisis de flujo de agua	48
4. APLICACIONES	
<u>4.1</u> Introducción	51
<u>4.2</u> Análisis del flujo de agua en dominios elementales	51
<u>4.2.1</u> Ejemplo elemental 1	51
<u>a.</u> Características generales	51
<u>b.</u> Valores esperados	53
<u>b.1</u> Cargas hidráulicas	53
<u>b.2</u> Velocidades de flujo, gradientes y gastos	54
<u>c.</u> Dispersión	55
<u>c.1</u> Carga hidráulica	55
<u>c.2</u> Velocidad de flujo	56
<u>c.3</u> Gradiente hidráulico	57
<u>4.2.2</u> Ejemplo elemental 2	58
<u>a.</u> Características generales	58
<u>b.</u> Resultados	59
<u>c.</u> Comentarios	60
<u>4.3</u> Flujo de agua a través de la cimentación de una presa de concreto	62
<u>4.3.1</u> Características generales	62
<u>4.3.2</u> Valores esperados	64
<u>4.3.3</u> Dispersión	68
<u>4.4</u> Flujo de agua en presas de materiales graduados	70
<u>4.4.1</u> Flujo a través del cuerpo de una presa	70
<u>a.</u> Características generales	70
<u>b.</u> Valores esperados	72
<u>c.</u> Dispersión	76
<u>4.4.2</u> Flujo a través de la cimentación de una presa	78

a. Características generales	78
b. Análisis considerando k como variable aleatoria	79
b.1 CASO I: Suelo homogéneo e isótropo	79
b.2 CASO II: Suelo heterogéneo	81
c. Análisis considerando $\log k$ como variable aleatoria	85
5. PERSPECTIVAS	
5.1 Introducción	89
5.2 Simulación de campos aleatorios	89
5.3 Teoría de la Percolación	90
5.4 Análisis Bayesiano	91
5.5 Planteamiento para investigaciones futuras	92
6. CONCLUSIONES	93
BIBLIOGRAFÍA	95
ANEXO A. Análisis del flujo de agua en suelos por medio del Método de Elementos Finitos utilizando un enfoque variacional	
A.1 Conceptos básicos	101
A.2 Obtención de la función potencial ϕ	101
A.3 Obtención de la función de corriente ψ	106
A.4 Trazo de redes de flujo	107
ANEXO B. Campos aleatorios	
B.1 Definición	111
B.2 Técnicas de estimación	112
B.2.1 Kriging	112
B.2.2 Estimación condicional	114
B.3 Técnicas de simulación	115
B.3.1 Simulación incondicional	115
B.3.2 Simulación condicional	116

RESUMEN

El presente trabajo aborda el tema del flujo bidimensional establecido de agua a través de medios porosos con permeabilidad aleatoria. Se recuerda en primer lugar la forma en la que puede realizarse por el *Método de Elementos Finitos (MEF)* el análisis determinista del flujo de agua utilizando un *enfoque variacional*, es decir, sustituyendo la resolución de la ecuación de Laplace en un determinado dominio por la obtención del mínimo de una funcional asociada a la mencionada ecuación y definida en el mismo dominio. El método consiste en dividir el medio analizado en pequeños elementos triangulares que se adaptan a su geometría, aceptando como aproximación que la carga hidráulica varía linealmente dentro del triángulo. Se desarrolla el algoritmo *FLOWNETS* para la aplicación de esta técnica y la obtención de gradientes hidráulicos, velocidades de flujo y gastos, además de las funciones potencial ϕ y de corriente ψ para el trazo de redes de flujo mediante un algoritmo de interpolación. En la parte principal de esta tesis, la naturaleza aleatoria de los parámetros del suelo se toma en cuenta por medio del *Método del Elemento Finito Estocástico (MEFE)* y en particular de la *Técnica de Primer Orden - Segundos Momentos*. Los coeficientes de permeabilidad se consideran como variables aleatorias. Se desarrolla el algoritmo *MEFLUSKO* que proporciona los valores esperados de los resultados acompañados de un intervalo de incertidumbre. Se revisan en esta tesis los fundamentos del *MEFE*, así como algunos aspectos de reciente evolución. Se resuelven diversos problemas de complejidad variable para ilustrar los resultados obtenidos al realizar este tipo de análisis y se interpretan los resultados típicos obtenidos. Finalmente, se presentan conclusiones y sugerencias para investigaciones futuras.

ABSTRACT

This work deals with the two-dimensional steady-state flow through porous media with random permeability. The form in which *Finite Element Method (FEM)* can carry deterministic analysis of problems of steady-state flow out using a variational approach for solving of Laplace equation is reviewed. The medium analyzed is divided into small triangular elements adapted to the geometry of the medium and it is accepted that the hydraulic head varies linearly inside the triangle. The *FLOWNETS* algorithm allows obtaining hydraulic gradients, flow velocities and discharges and, additionally, the potential ϕ and stream ψ functions that can be used to plot flow nets using an interpolation algorithm. In the main part of this thesis, the random nature of soil parameters is considered by means of the *Stochastic Finite Element Method (SFEM)* and in particular of the *First Order-Second Moments Technique*. The fundamentals of the *SFEM* and some aspects of its recent evolution are reviewed. The soil permeability coefficients are considered as random variables. The *MEFLUSKO* algorithm implemented provides the expected value of the results together with a range of uncertainty. Diverse problems of variable complexity are solved and typical results obtained are interpreted. Finally, conclusions and suggestions for future investigations are presented.

RÉSUMÉ

Le travail s'intéresse à l'écoulement permanent bi-dimensionnel des eaux au travers de milieux poreux à perméabilité aléatoire. On rappelle d'abord le principe des analyses déterministes des écoulements par la *Méthode des Éléments Finis (MEF)* utilisant une approche variationnelle et consistant à remplacer la résolution de l'équation de Laplace dans un domaine déterminé par l'obtention du minimum d'une fonctionnelle associée à cette équation et définie dans le même domaine. Le milieu analysé est divisé en éléments triangulaires qui s'adaptent à sa géométrie. On accepte que la charge hydraulique varie linéairement à l'intérieur de chaque triangle. L'algorithme *FLOWNETS* est développé en vue de l'obtention des gradients hydrauliques, vitesses de courant et débits, ainsi que des fonctions potentielles ϕ et de courant ψ qui permettent le traçage des réseaux d'écoulement au moyen d'un algorithme d'interpolation. Dans la partie principale de ce mémoire, la nature aléatoire des paramètres du sol est prise en compte au moyen de la *Méthode des Éléments Finis Stochastiques (MEFS)* et en particulier de la *Technique de Premier Ordre-Segonds Moments*. Les fondements de la *MEFS* sont révisés, ainsi que quelques aspects d'évolution récente. Les coefficients de perméabilité k sont modélisés au moyen de variables aléatoires. En plus des de l'espérance mathématique des résultats, l'algorithme *MEFLUSKO* fournit des intervalles d'incertitude. Divers problèmes de complexité variable sont résolus afin d'illustrer les résultats donnés par la méthode et les résultats typiques obtenus sont interprétés. Des conclusions et suggestions pour les recherches futures sont finalement présentées.

NOTACIÓN

A	Área de la sección de suelo
A_v	Área de la sección de vacíos
$\{A\}$	Vector general equivalente a la matriz general $[S]$
b_i, c_i	Elementos de la matriz geométrica $[B]$
$[B]$	Matriz geométrica
χ	Funcional empleada en análisis variacional
CV_k	Coefficiente de variación de la permeabilidad
$cov[h_i, h_l]$	Covarianza entre las cargas hidráulicas de los nodos i y l
$cov[k_1, k_2]$	Covarianza entre los coeficientes de permeabilidad k_1 y k_2
Δ	Área de un elemento finito triangular
Δh	Diferencia de carga hidráulica entre dos secciones
Δh	Gradiente hidráulico
L	
$\frac{\partial g(X)}{\partial X}$	Derivada de $g(X)$ respecto a X , evaluada para el valor medio de X , μ_x
$\frac{\partial \{h\}}{\partial m_i}$	Derivada del vector de cargas hidráulicas respecto a m_i
$\frac{\partial [S]}{\partial m_i}$	Derivada de la matriz general global respecto a m_i
d	Diámetro medio de las partículas del suelo
d_i	Espesor del estrato i
D	Dominio de estudio en el análisis variacional
$E\{k\}$	Valor esperado del coeficiente de permeabilidad
$E\{Y\}$	Valor esperado de la función Y
ϕ	Función potencial
F_a	Factor de amplificación empleado en la Teoría de la Sección Transformada
F_r	Factor de reducción empleado en la Teoría de la Sección Transformada
γ_w	Peso volumétrico del agua
g	Aceleración de la gravedad
$g(k)$	Función de la permeabilidad
η	Porosidad del suelo
h	Carga hidráulica
$\{h\}^e$	Vector de cargas hidráulicas en los nodos del elemento e
i	Gradiente hidráulico
i, j, m	Nodos de un elemento finito triangular
i_c	Gradiente hidráulico crítico
i_x, i_y, i_z	Gradiente hidráulico en las direcciones x, y, z , respectivamente
k	Coefficiente de permeabilidad
\bar{k}	Coefficiente de permeabilidad empleado en la Teoría de la Sección Transformada

k_i	Coefficiente de permeabilidad del estrato i
k_{max}, k_{min}	Coefficientes de permeabilidad máximo y mínimo en un suelo estratificado
μ	Viscosidad absoluta del agua
m_i	Parámetro que representa los coeficientes de permeabilidad k_x y k_z de un suelo
n_e	Número de intervalos entre líneas equipotenciales
n_f	Número de intervalos entre líneas de corriente
$N\$$	Nombre de un archivo de datos
N_i, N_j, N_m	Funciones de forma empleadas en MEF
p	Presión
$\frac{p}{\gamma_w}$	Carga de presión
q	Gasto en m^3/s
q_i, g_i	Gasto que sale por el lado opuesto al nodo i en las direcciones X y Z , respectivamente
ρ_w	Densidad del agua
$\rho(k_1, k_2)$	Coefficiente de correlación entre las variables aleatorias k_1 y k_2 ; pero por simplicidad expresado simplemente como ρ
R	Número de Reynolds
$[R]$	Matriz de permeabilidad
σ_k	Desviación estándar de la permeabilidad
$\$$	Factor de forma
$[S]$	Matriz general global
t	Tiempo en s
V	Velocidad de descarga o velocidad de flujo
$\frac{V^2}{2g}$	Carga de velocidad o energía cinética
V_i	Velocidad de infiltración
V_x, V_y, V_z	Velocidades de flujo en las direcciones x, y, z , respectivamente
$var [h_i]$	Varianza de la carga hidráulica en el nodo i
$var [i]$	Varianza del gradiente hidráulico
$var [k]$	Varianza del coeficiente de permeabilidad
$\{V\}^e$	Vector de velocidad de flujo del elemento e
ψ	Función de flujo o de corriente
$Y = g(X)$	Función de una sola variable
$Y = g(X_1, \dots, X_n)$	Función de varias variables
z	Carga de posición

LISTA DE FIGURAS

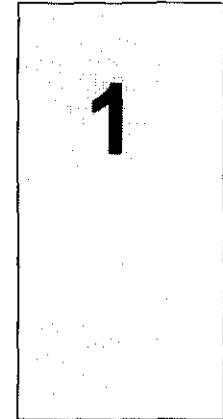
- Fig 1.1 Problemas típicos de infiltración
- Fig 2.1 Esquema para la obtención de h con eje de referencia superior
- Fig 2.2 Esquema para la obtención de h con eje de referencia inferior
- Fig 2.3 Esquema que ilustra la distinción entre velocidad de descarga y de infiltración
- Fig 2.4 Condición general de flujo en un elemento de suelo
- Fig 2.5 Problemas típicos de flujo bidimensional
- Fig 2.6 Interpretación gráfica del flujo en un medio poroso
- Fig 2.7 Malla para la resolución de la ecuación de Laplace en términos de diferencias finitas
- Fig 2.8 Transformación conforme del dominio G al dominio G'
- Fig 2.9 Densidad de probabilidad del coeficiente de permeabilidad k
- Fig 2.10 Perfil de permeabilidad de un depósito deltáico relativamente homogéneo (Terzaghi y Peck, 1955)
- Fig 2.11 Gráfica de frecuencia del coeficiente de permeabilidad k (cm/s), de una arcilla compactada (Gilbert, 1996)
- Fig 2.12 Gráfica de frecuencia del logaritmo de k de una arcilla compactada (Gilbert, 1996)
- Fig 2.13 Comparación entre las distribuciones normal y lognormal para representar la variación espacial del coeficiente de permeabilidad k
- Fig 2.14 Campo aleatorio de permeabilidad medido en un área de 40 m^2 (Fenton, 1996)
- Fig 3.1 Obtención de la densidad de $f_h(h)$ a partir de la densidad de $f_k(k)$ por medio de la función $g(k)$
- Fig 3.2 Función de la permeabilidad $g(k)$
- Fig 4.1 Muestra de suelo constituida por dos materiales
- Fig 4.2 Muestra de suelo constituida por cuatro materiales
- Fig 4.3 Resultados del análisis de incertidumbre en los CASOS II y III del ejemplo elemental 2
- Fig 4.4 Dominio triangular expuesto a flujo de agua
- Fig 4.5 Malla de elementos finitos en el dominio triangular
- Fig 4.6 Red de flujo esperada para el CASO I (suelo homogéneo e isótropo)
- Fig 4.7 Red de flujo esperada para el CASO II (suelo homogéneo y anisótropo)
- Fig 4.8 Red de flujo esperada para el CASO III (suelo de dos materiales con $k_x \neq k_y$)
- Fig 4.9 Vectores de velocidad esperada para el CASO I (suelo homogéneo e isótropo)
- Fig 4.10 Vectores de velocidad esperada para el CASO II (suelo homogéneo y anisótropo)
- Fig 4.11 Vectores de velocidad esperada para el CASO III (suelo de dos materiales con $k_x \neq k_y$)
- Fig 4.12 Desviación estándar de h en m para el CASO II
- Fig 4.13 Desviación estándar de h en m para el CASO III
- Fig 4.14 Desviación estándar de i (adimensional) para el CASO II
- Fig 4.15 Desviación estándar de i (adimensional) para el CASO III
- Fig 4.16 Sección permeable de una presa de materiales graduados
- Fig 4.17 Malla de elementos finitos
- Fig 4.18 Red de flujo esperada cuando se considera el suelo homogéneo e isótropo
- Fig 4.19 Red de flujo esperada cuando se considera el suelo homogéneo y anisótropo

- Fig 4.20 Variación del gradiente hidráulico esperado (*adimensional*) para el CASO I
- Fig 4.21 Variación del gradiente hidráulico esperado (*adimensional*) para el CASO II
- Fig 4.22 Variación de la velocidad de flujo esperada (*m/s*) para el CASO I
- Fig 4.23 Variación de la velocidad de flujo esperada (*m/s*) para el CASO II
- Fig 4.24 Desviación estándar de la carga hidráulica (*m*) para el CASO II
- Fig 4.25 Desviación estándar del gradiente hidráulico (*adimensional*) para el CASO II
- Fig 4.26 Desviación estándar de la velocidad de flujo (*m/s*) para el CASO II
- Fig 4.27 Sección máxima de la presa *Las Tórtolas*
- Fig 4.28 Red de flujo esperada en la presa *Las Tórtolas*, cuando se considera el suelo como homogéneo e isótropo
- Fig 4.29 Corte geológico por el eje de la presa *Las Tórtolas*
- Fig 4.30 Red de flujo esperada en la presa *Las Tórtolas*, cuando se consideran los materiales A y B
- Fig 4.31 Líneas equipotenciales obtenidas con *MEFLUSKO* en la presa *Las Tórtolas*
- Fig 4.32 Desviación estándar de la carga hidráulica (*m*), en la presa *Las Tórtolas*
- Fig 4.33 Desviación estándar del gradiente hidráulico (*adimensional*), en la presa *Las Tórtolas*
- Fig 4.34 Desviación estándar de la velocidad de flujo (*m/s*), en la presa *Las Tórtolas*
- Fig 4.35 Densidad de probabilidad en el CASO I
- Fig 4.36 Densidad de probabilidad en el CASO II
- Fig 4.37 Desviación estándar de la carga hidráulica (*m*), en el análisis con *Log k*
- Fig 4.38 Desviación estándar del gradiente hidráulico (*adimensional*), en el análisis con *Log k*
- Fig 4.39 Desviación estándar de la velocidad de flujo (*m/s*), en el análisis con *Log k*
- Fig 5.1 Condición de no percolación
- Fig 5.2 Condición de percolación
- Fig A.1 Elemento finito triangular
- Fig A.2 Red de flujo que verifica la ortogonalidad de las líneas de flujo y equipotenciales obtenidas con el algoritmo *FLOWNETS*
- Fig A.3 Red de flujo en un dominio de forma trapecial
- Fig A.4 Red de flujo bajo una tablestaca

LISTA DE TABLAS

- Tabla 4.1 Características de los nodos y número de material de cada elemento para el ejemplo elemental 1
- Tabla 4.2 Características de las coordenadas y potenciales de cada nodo para el ejemplo elemental 1
- Tabla 4.3 Velocidades de flujo y gradientes hidráulicos esperados para el ejemplo elemental 1
- Tabla 4.4 Gastos esperados para el ejemplo elemental 1
- Tabla 4.5 Gastos esperados a través del dominio triangular obtenidos con el algoritmo *FLOWNETS*
- Tabla 4.6 Valores esperados de $i_{máx}$
- Tabla 4.7 Valores esperados de $V_{máx}$
- Tabla 4.8 Valores esperados del gasto total
- Tabla 4.9 Comparación de cargas hidráulicas y mediciones piezométricas en *Las Tórtolas*
- Tabla 4.10 Desviaciones estándar máximas para diferentes correlaciones entre las permeabilidades de los materiales *A* y *B* de la presa *Las Tórtolas*

INTRODUCCIÓN



1.1 ASPECTOS GENERALES

Existe un gran número de problemas ingenieriles (Fig 1.1) en los cuales el flujo de agua a través de los suelos reviste una vital importancia:

- Flujo a través de la cimentación de presas de concreto
- Flujo a través de presas de tierra y sus cimentaciones
- Flujo hacia drenes
- Flujo alrededor de muros de contención
- Flujo hacia pozos
- Flujo en excavaciones
- Infiltraciones en lagunas artificiales

Conocer la cantidad de agua que puede circular en los suelos resulta fundamental para garantizar el buen funcionamiento de las obras, y evitar alguno de los siguientes problemas:

- Pérdidas de agua por el flujo a través de una presa y su cimentación, o en una laguna artificial o vaso de almacenamiento, etc.
- Altas presiones que tienden a causar volteo o flotación de estructuras apoyadas en el suelo.
- Altos gradientes hidráulicos que pueden ocasionar la falla local (tubificación) e incluso la falla total de la estructura soportada por el suelo.

Para evaluar *a priori* las condiciones de flujo *establecido o transitorio* en un problema dado, se ha desarrollado una gran diversidad de métodos. Las *soluciones analíticas* se basan en la integración de las ecuaciones de tipo diferencial que rigen el comportamiento de fluidos a través de medios porosos, como la conocida *ecuación de Laplace* que rige el flujo establecido en suelos. Generalmente, esta integración sólo es posible en aquellos casos en los cuales la geometría del dominio de flujo y las condiciones de frontera son particularmente simples. Cuando estas condiciones son extremadamente complejas; es posible emplear la transformación o mapeo conforme (*Panov, 1963; Spiegel, 1964; Flores, 1999*). Por otra parte, para simplificar la solución de los problemas de flujo de agua, se han desarrollado *métodos aproximados*, tales como:

- Método gráfico de la red de flujo
- Modelos físicos
- Modelos de analogía eléctrica
- Métodos numéricos

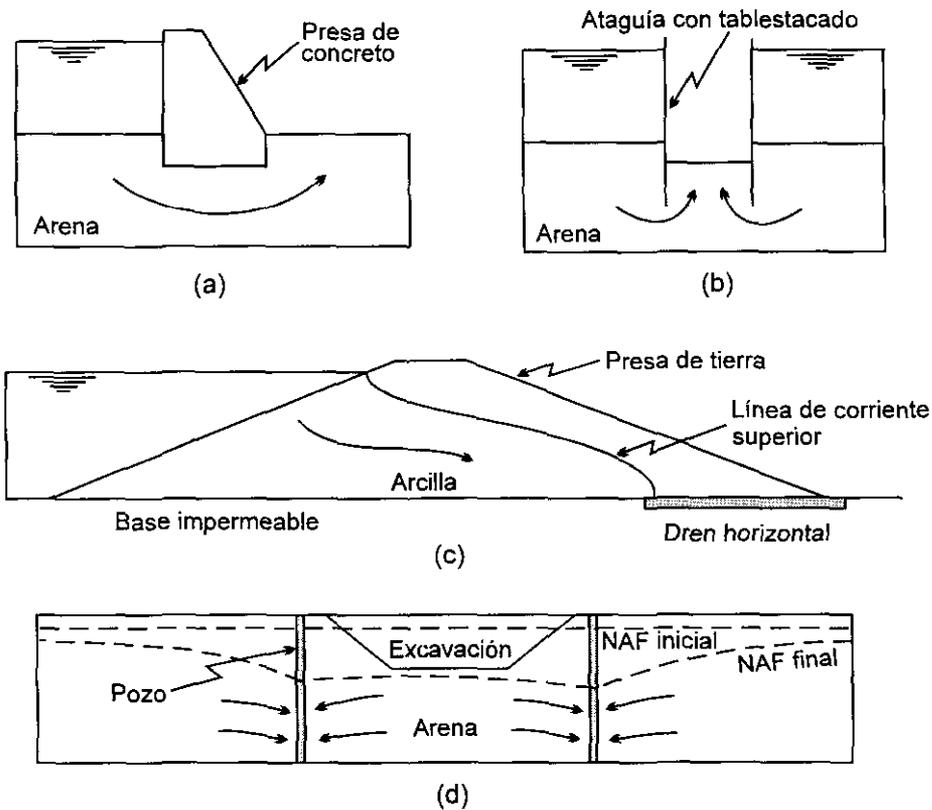


Fig 1.1 Problemas típicos de infiltración

Entre estos últimos destacan el *Método de Elementos Finitos (MEF)*, el *Método de Diferencias Finitas* y el *Método de Elementos de Frontera o Ecuaciones Integrales*. El empleado en esta tesis es el *Método de Elementos Finitos*, el cual convierte el manejo de ecuaciones diferenciales en el de un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales que pueden resolverse en forma eficiente por computadora. Su gran aceptación se debe principalmente a la facilidad con que puede aplicarse a medios heterogéneos y con condiciones de frontera complejas.

El *MEF* es una herramienta de gran utilidad en la práctica. Sin embargo, la exactitud de un análisis realizado por este método depende de la precisión con la que se determinen las propiedades del suelo. Desgraciadamente, la mayoría de las veces, los parámetros del mismo no pueden ser definidos de manera confiable debido a las limitaciones de las pruebas de laboratorio y de campo realizadas para determinarlos y a la falta de representatividad de estas cuando las propiedades del medio presentan importantes variaciones espaciales. Debe reconocerse que en los análisis, la asignación de parámetros representativos se realiza generalmente en forma parcialmente subjetiva.

La incertidumbre en las propiedades del material, en este caso el coeficiente de permeabilidad del suelo k , se refleja directamente en la confiabilidad de las velocidades, gastos, gradientes y

potenciales hidráulicos calculados. De ahí el interés de los ingenieros por tener al alcance una metodología que permita evaluar la incertidumbre sobre los resultados del análisis a partir de la incertidumbre estimada en las propiedades de los materiales. Este tipo de evaluación puede realizarse mediante el *Método del Elemento Finito Estocástico (MEFE)*, el cual permite calcular las estadísticas (valores esperados, varianzas, covarianzas, etc.) de los resultados que interesan a partir de una descripción probabilista de los parámetros del suelo (valores esperados y alguna medida de las incertidumbres que los afectan como su desviación estándar o su coeficiente de variación).

El tema de la presente tesis es precisamente la presentación de la base teórica de este método, el desarrollo de herramientas numéricas que permitan su aplicación y la evaluación de su utilidad ingenieril a través de algunas aplicaciones enfocadas a la solución de problemas de flujo bidimensional establecido de agua en medios porosos.

1.2 OBJETIVOS

Los objetivos específicos de esta tesis son:

- Desarrollar un algoritmo determinista para resolver problemas de flujo bidimensional establecido de agua, que recurre a un enfoque variacional para la resolución de la ecuación de Laplace por el *Método de Elementos Finitos*. Este algoritmo proporciona velocidades, gradientes y gastos, además de los valores nodales de la función potencial y de corriente para el trazo de redes de flujo, para distintos tipos de suelos (homogéneos y heterogéneos, tanto isótropos como anisótropos). En este algoritmo se optiman los cálculos por medio de la *Técnica de la Silueta o Skyline (Bathe y Wilson, 1976)* que consiste en almacenar la matriz general en forma de vector ignorando aquellos términos que son nulos y que se agrupan en las esquinas superior derecha e inferior izquierda de la matriz mencionada. Esta técnica permite una ejecución más rápida que con los métodos convencionales, además de que los requerimientos de memoria son menores y el tiempo de solución es independiente del ancho de banda.
- Revisar las principales fuentes de incertidumbre que afectan los análisis de flujo de agua en suelos.
- Desarrollar un segundo algoritmo para el análisis probabilista del flujo bidimensional establecido de agua, empleando el *Método de Primer Orden-Segundos Momentos*, el cual se basa en aproximaciones lineales y específicamente en *series de Taylor*. El algoritmo permite obtener los resultados que interesan, pero con un intervalo de variación que es función de las propiedades aleatorias de los materiales constitutivos del medio. Esto es, se obtienen cargas hidráulicas, gradientes, velocidades y gastos en la forma de valores esperados acompañados de sus respectivas desviaciones estándar, varianzas, covarianzas, etc.
- Presentar y discutir resultados típicos de problemas de flujo bidimensional establecido de agua obtenidos con las técnicas anteriores y evaluar sus beneficios para el ingeniero geotecnista.

1.3 LIMITACIONES

- De los diversos tipos de incertidumbres que existen, en esta tesis sólo se consideran las incertidumbres sobre las propiedades del material, que en este caso corresponden al

tensor de permeabilidad.

- En los problemas aquí tratados, la modelación de la incertidumbre se realiza por medio de *variables aleatorias*. El énfasis se pone en la incertidumbre implícita en la asignación de valores representativos de la permeabilidad al dominio de flujo o a subdominios del mismo. Se deja para trabajos futuros el modelado de las variaciones espaciales de la permeabilidad mediante *campos aleatorios*.
- La incertidumbre sobre la permeabilidad se introduce por medio de coeficientes de variación y matrices de covarianzas. Debe entenderse que, en un problema específico, la definición de estos elementos, al igual que la definición de los valores esperados de los parámetros del suelo, tiene un carácter en cierta medida subjetivo y puede variar de un analista a otro, dependiendo de aspectos tales como la *experiencia*, la *obtención de datos experimentales fidedignos*, etc.
- Se presenta al *MEFE* como una herramienta muy útil para introducir un mayor grado de realismo en la resolución de problemas de flujo de agua; sin embargo, por lo expuesto en el inciso anterior, se reconoce que la interpretación de sus resultados es delicada.

2.1 TEORÍAS Y MÉTODOS COMUNES EMPLEADOS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FLUJO DE AGUA EN SUELOS

2.1.1 Conceptos básicos

a. Carga hidráulica

Al estudiar los problemas del flujo de agua, es común introducir el concepto de carga hidráulica, medida en metros de agua. La carga hidráulica total h es la suma de tres componentes: la carga de velocidad $\frac{V^2}{2g}$ correspondiente a la energía cinética, la carga de presión $\frac{p}{\gamma_w}$ y la carga de posición z :

$$h = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma_w} + z \quad (2.1)$$

donde g aceleración de la gravedad
 γ_w peso volumétrico del agua

La carga de velocidad es generalmente muy pequeña debido a la alta resistencia al flujo que origina la estructura granular del suelo; razón por la cual, en los problemas usuales de flujo de agua el término correspondiente puede considerarse despreciable.

La diferencia de carga hidráulica Δh entre dos secciones de un dominio determinado, es la que origina el flujo de agua en el mismo.

Debido a las confusiones que se presentan comúnmente en cuanto a la determinación de la carga hidráulica h , a continuación se ilustra la obtención de la misma por medio de dos ejemplos.

Suponiendo que se tiene un recipiente lleno de agua y considerando el eje de referencia en la

superficie de la misma (Fig 2.1), la carga hidráulica h será, de acuerdo con la expresión (2.1) y despreciando el cuadrado de la velocidad:

$$h = \frac{p}{\gamma_w} + (-z) \quad (2.2)$$

y teniendo en cuenta que $p = \gamma_w z$, la carga hidráulica resulta:

$$h = \frac{\gamma_w z}{\gamma_w} + (-z) = z + (-z) = 0 \quad (2.3)$$

Si ahora el eje de referencia se localiza en la parte inferior del recipiente (Fig 2.2), la carga hidráulica será:

$$h = \frac{p}{\gamma_w} + z = \frac{\gamma_w(L-z)}{\gamma_w} + z = L - z + z = L \quad (2.4)$$

Donde los resultados de (2.3) y (2.4) son aplicables a cualquier punto del recipiente. Se observa por tanto que la carga hidráulica depende del nivel de referencia escogido en un problema dado. Se mostrará más adelante que esta característica debe tomarse muy en cuenta al definir la dispersión sobre la carga hidráulica en un contexto aleatorio.

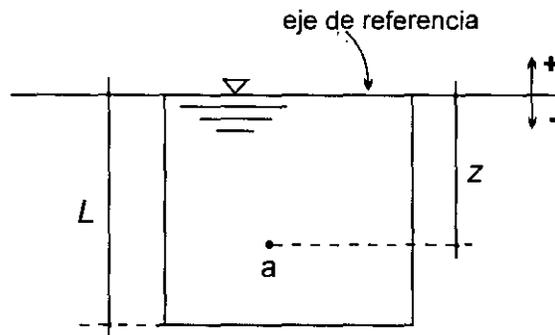


Fig 2.1 Esquema para la obtención de h con eje de referencia superior

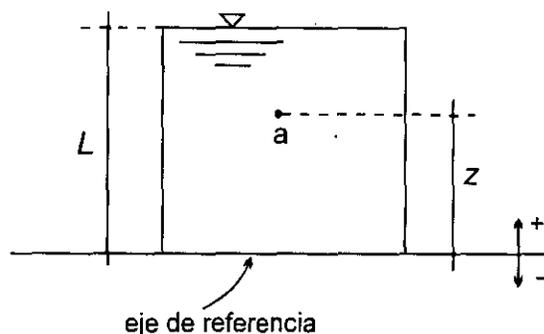


Fig 2.2 Esquema para la obtención de h con eje de referencia inferior

b. Velocidad de infiltración

La *velocidad de infiltración* es la velocidad real del agua que pasa a través de los poros de un suelo, es decir, la que se presenta tomando en cuenta la existencia de una fase sólida impermeable (Fig 2.3). Se define como:

$$V_i = V \frac{A}{A_v} = \frac{V}{\eta} \quad (2.5)$$

donde V_i velocidad de infiltración

V velocidad de descarga o de flujo

A área de la sección del suelo (perpendicular a la dirección del flujo)

A_v área de la sección de vacíos

η porosidad del suelo

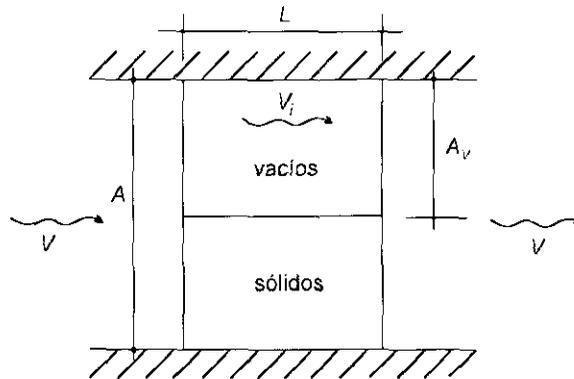


Fig 2.3 Esquema que ilustra la distinción entre velocidad de descarga y de infiltración

c. Ley de Darcy

La ley de Darcy establece que la *velocidad de descarga* (o simplemente *velocidad*) es proporcional al gradiente hidráulico:

$$V \propto i \quad \text{o} \quad V = -k i \quad (2.6)$$

donde V velocidad de descarga

k constante física de proporcionalidad denominada coeficiente de permeabilidad del suelo

$i = \frac{\Delta h}{L}$ gradiente hidráulico definido como la pérdida de carga por unidad de longitud

Existen condiciones en las cuales se desarrolla un gradiente hidráulico vertical ascendente que llega a un valor crítico ($i_c \approx 1$) que anula los esfuerzos efectivos en el suelo. Cuando esto sucede, se pueden presentar problemas de tubificación e incluso la falla total de estructuras apoyadas en el suelo.

Si se le asigna al gradiente hidráulico i un valor de 1 en la expresión (2.6), se observa que se

puede definir el coeficiente de permeabilidad k como la *velocidad de flujo inducida por gradiente hidráulico unitario*. Y, puesto que i es adimensional, el coeficiente de permeabilidad k se expresa en unidades de velocidad, tales como m/s , cm/s , etc. Este coeficiente depende de diversas propiedades del suelo y del fluido, como son: temperatura, contenido de agua, grado de saturación, relación de vacíos, densidad, distribución del tamaño de las partículas, forma y orientación de las partículas, distribución del tamaño y conectividad de los poros, composición química y viscosidad del líquido permeante y edad del espécimen de prueba. Además, debido a que el intervalo de valores de k es muy amplio, la selección del método y del equipo para su determinación depende del tipo de suelo, de la magnitud y tipo de proyecto, etc., empleándose métodos directos —pruebas de campo y de laboratorio— e indirectos —a partir de la distribución granulométrica, de la prueba de consolidación, o de la prueba de capilaridad horizontal (Juárez y Rico, 1974)—. Algunos de los métodos directos son: prueba de carga constante (Juárez y Rico, 1974; Whitlow, 1994), prueba de carga variable (Juárez y Rico, 1974; Whitlow, 1994), prueba USBR E-19 (Auvinet y Esquivel, 1986), prueba Nasberg (Auvinet y Esquivel, 1986), prueba Lugeon (Flores, 1999), prueba Lefranc (Auvinet y Esquivel, 1986; Flores, 1999), prueba de bombeo en pozos (Whitlow, 1994), etc.

En muchos problemas de flujo de agua, el coeficiente de permeabilidad varía con la dirección del flujo en el espacio. Se introduce entonces un *tensor* de permeabilidad referido a un sistema de coordenadas preseleccionado:

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

En este caso, las componentes de la velocidad de descarga en tres direcciones ortogonales de referencia son:

$$\begin{aligned} V_x &= k_x i_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \\ V_y &= k_y i_y = -k_y \frac{\partial h}{\partial y} \\ V_z &= k_z i_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.8)$$

El signo negativo indica que V_x , V_y y V_z son positivas en la dirección del flujo, es decir, en la dirección en que disminuye la carga total h .

d. Flujo laminar y turbulento

El flujo de agua a través de medios porosos sigue los mismos principios de la hidráulica que cuando fluye por conductos abiertos o cerrados. El movimiento del agua a través de una masa de suelo se denomina *infiltración*. La arena, el limo, la arcilla y muchas rocas, tienen poros abiertos interconectados entre sus partículas sólidas por los cuales el agua puede fluir, ya sea a presión o por gravedad. Estos diminutos canales están dispuestos al azar en tamaño y orientación. A escala microscópica el flujo de agua forma una ruta sinuosa a través de los vacíos del suelo, sin embargo, desde un punto de vista práctico se supone que sigue un curso en línea recta. El flujo de agua puede producirse en dos estados característicos diferentes, denominados *flujo laminar* y *flujo turbulento*. En el flujo laminar cada partícula de agua fluye siguiendo una trayectoria definida que no corta la trayectoria de otra partícula. Esta clase de

flujo es típica cuando las velocidades son bajas. En el rango del flujo laminar, el gradiente hidráulico es proporcional a la velocidad de flujo. A altas velocidades se observa un patrón de flujo más irregular o turbulento en el que las trayectorias de flujo se entrecruzan al azar. En este caso se observa que el gradiente hidráulico varía aproximadamente con el cuadrado de la velocidad.

El rango de aplicación de la ley de Darcy se establece en términos del número de Reynolds; es decir, esta ley es válida cuando R tiene valores de 1 a 20 (Kazda, 1990). El número de Reynolds está definido por la siguiente expresión (Zangar, 1953):

$$R = \frac{d V \rho_w}{\mu} \quad (2.9)$$

donde R número de Reynolds
 V velocidad de flujo media
 ρ_w densidad del agua
 μ viscosidad absoluta del agua
 d diámetro medio de las partículas del suelo

Debido a que los poros de la mayor parte de los suelos son pequeños, las velocidades son bajas y por tanto, en la mayoría de los casos de interés para el ingeniero civil, el flujo de agua es *laminar*, y en este caso la ley de Darcy es la que gobierna el flujo a través del suelo.

e. Flujo establecido y transitorio

Se dice que existe flujo *establecido* o *estacionario* cuando sus características no varían con el tiempo.

Existe un flujo *transitorio* cuando las características del mismo varían en función del tiempo. Las fuerzas y presiones de poro ocasionadas por llenado o vaciado rápido en presas de tierra constituye uno de los casos más comunes de este tipo de flujo. Otro problema común que puede tratarse como flujo transitorio es la saturación de las bases de los pavimentos (como consecuencia de lluvias torrenciales, aumento del nivel freático, impermeabilización por congelamiento o taponamiento por finos en la parte superior de la base, etc.).

Lo tratado en esta tesis se refiere exclusivamente al flujo establecido.

f. Ecuación de Laplace

La ecuación diferencial general que rige el flujo establecido de agua a través de medios porosos se deduce de la forma generalizada de la ley de Darcy y de la ecuación de continuidad, como se explica a continuación.

Si se considera un elemento de suelo de dimensiones dx , dy , dz (Fig 2.4) con el flujo verificándose únicamente en el plano x , z , se debe cumplir que:

Cantidad de flujo que entra al elemento = cantidad de flujo que sale del elemento

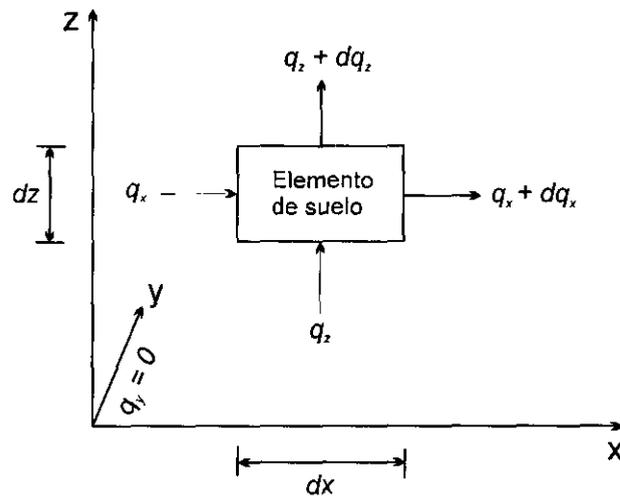


Fig 2.4 Condición general de flujo en un elemento de suelo

es decir:

$$V_x dy dz + V_z dy dx = \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(V_z + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz \right) dy dx \quad (2.10)$$

Eliminando términos se llega a la *ecuación de continuidad de flujo*:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

que se cumple bajo las siguientes hipótesis:

- El flujo es establecido
- El suelo está saturado
- El agua y las partículas sólidas son incompresibles
- El flujo no modifica la estructura del suelo en ninguna forma

Si se considera el flujo en tres dimensiones, la *ecuación de continuidad* es:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (2.12)$$

Sustituyendo las velocidades V_x , V_y y V_z por sus expresiones de acuerdo con la ley de Darcy (ec. 2.6), en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.13)$$

que es la *ecuación de Laplace* para un suelo homogéneo y anisótropo, en el caso tridimensional.

En muchos problemas existe una simetría axial; en este caso, es conveniente expresar la ecuación de Laplace en *coordenadas cilíndricas* (r, θ, z) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (2.14)$$

aplicable solo en condiciones isotópicas. Siendo las componentes de la velocidad $V_r = k \frac{\partial h}{\partial r}$, $V_\theta = \frac{k}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta}$ y $V_z = k \frac{\partial h}{\partial z}$.

En *coordenadas esféricas* (r, θ, ζ) la ecuación de Laplace en condiciones isotópicas se escribe:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 h}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (2.15)$$

y las componentes de la velocidad son $V_r = k \frac{\partial h}{\partial r}$, $V_\theta = k \frac{\partial h}{\partial \theta}$ y $V_\zeta = k \frac{\partial h}{\partial \zeta}$.

Ecuaciones similares a la de Laplace (2.13) pero con algunos términos adicionales, se emplean para analizar otros tipos de flujo: establecido y no saturado, transitorio saturado, transitorio no saturado y transporte de contaminantes (Istok, 1989).

g. Flujo bidimensional

El flujo de agua a través de las cimentaciones de presas de concreto, vertederos, ataguías, terraplenes, diques, bajo muros de contención; alrededor de tablestacas (Fig 2.5) y en general bajo estructuras muy largas en una dirección, por ejemplo la dirección y , puede considerarse como bidimensional puesto que las infiltraciones se generan principalmente en el plano x, z . Por tanto, es común considerar que el flujo que se presenta en una longitud unitaria en la dirección y , es representativo del patrón de flujo bajo toda la estructura.

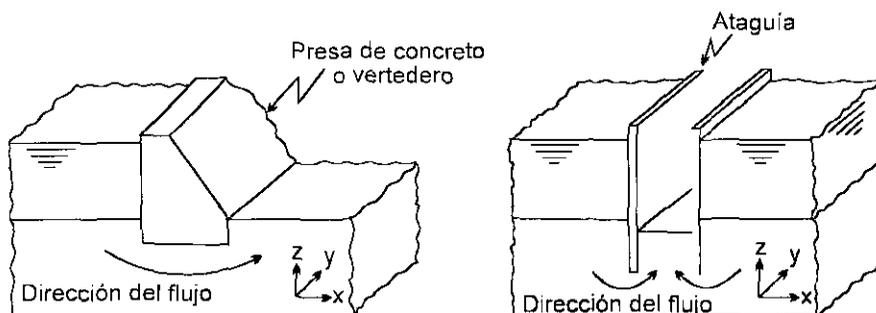


Fig 2.5 Problemas típicos de flujo bidimensional

En esta tesis, sólo se tratarán casos de flujo bidimensional.

h. Flujo confinado y no confinado

El *flujo confinado* es aquel en el que el fluido está obligado a circular a través de un espacio permeable limitado por líneas equipotenciales y líneas de flujo. En cambio, en un problema de *flujo no confinado* el espacio permeable a través del cual circula el agua está limitado por una o ambas de estas fronteras (línea de flujo y línea equipotencial) y por alguna de las siguientes fronteras: línea superior de flujo o línea de descarga libre. En las Figs 1.1(a) y 1.1(b) se ilustran ejemplos de flujo confinado, y en la Fig 1.1(c) se muestra un ejemplo de flujo no confinado.

En la práctica, es común resolver los problemas de *flujo confinado* mediante el conocido *método gráfico de la red de flujo*. En cambio, en los problemas de *flujo no confinado*, primero se debe definir una de las dos fronteras desconocidas: la *línea superior de flujo* o la *línea de descarga libre*, y posteriormente tratarlo como si fuera un problema de flujo confinado. La línea superior de flujo se puede obtener mediante algún método conocido, como la *parábola básica de Kozeny*, la *fórmula de Dupuit*, *método de Schaffernak y Van Iterson*, etc. (Juárez y Rico, 1974; Flores, 1999). Esta línea tiene aproximadamente la forma de una parábola; sin embargo, aunque esta solución es bastante aceptable, se requieren modificaciones para corregir las inconsistencias que pueden presentarse en la intersección de la mencionada línea con las superficies de entrada y de salida de la sección de una presa. La *línea de corriente superior* tiene las siguientes características importantes:

- Es una línea de flujo frontera, y como tal, todas las líneas equipotenciales son perpendiculares a ella.
- La presión a lo largo de esta línea es la atmosférica, y por tanto, la carga hidráulica total es $h = z$, es decir que las cargas de las líneas equipotenciales que corten a la línea de corriente superior serán idénticas a la elevación del punto de intersección.

En la línea de descarga libre la carga hidráulica también es igual a la posición ($h = z$); sin embargo no es línea de flujo ni equipotencial, y por tanto, las líneas que lleguen a ella no son perpendiculares necesariamente.

2.1.2 Análisis del flujo de agua en suelos

a. Método gráfico de la red de flujo

Ciertos problemas de flujo establecido bidimensional pueden analizarse utilizando un método gráfico. Existen dos funciones que satisfacen la ecuación de Laplace y que, geoméricamente, constituyen dos familias de curvas ortogonales entre sí: las de potencial ϕ constante, llamadas *líneas equipotenciales*, y las de valores iguales de la función de corriente ψ , llamadas *líneas de corriente*. La construcción gráfica de tales líneas recibe el nombre de *red de flujo*, y permite obtener una aproximación de la solución de la ecuación de Laplace. Con un dibujo de este tipo que satisfaga las condiciones de frontera y de ortogonalidad, se puede resolver, de un modo sencillo y puramente gráfico, un problema de flujo de agua en el que el suelo sea homogéneo e isótropo; además, si el suelo es anisótropo, es posible realizar los cambios geométricos correspondientes para transformarlo en uno isótropo (inciso b) y resolver el problema mediante esta misma técnica.

Se puede calcular por ejemplo, el gasto en un dominio dado, construyendo una red de flujo de tal manera que los intervalos entre equipotenciales adyacentes correspondan a una *diferencia de carga constante* Δh y los intervalos entre líneas de corriente adyacentes correspondan a una

cantidad de flujo constante Δq (Fig 2.6).

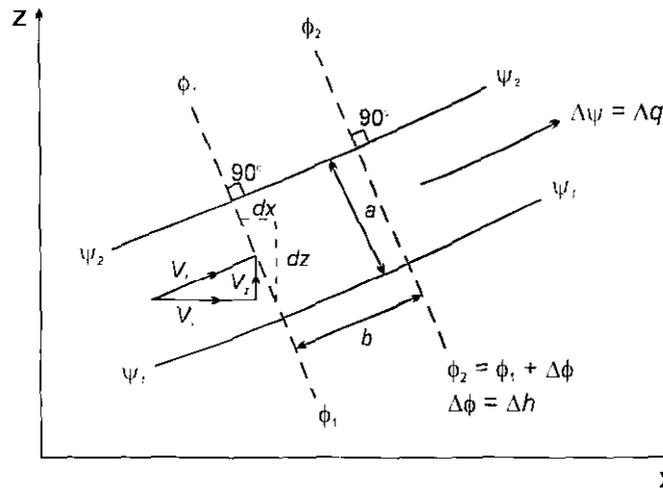


Fig 2.6 Interpretación gráfica del flujo en un medio poroso

Además, si en esta red de flujo se cumple que $\Delta\phi = \Delta\psi$ o que $a/b = 1$ (Fig 2.6), es decir, que los espacios limitados por las líneas equipotenciales y de corriente son *cuadrados* (curvilíneos), entonces, el gasto total que atraviesa una determinada sección del medio analizado es, de acuerdo con la ley de Darcy, y para un espesor unitario en la dirección y :

$$q = kh \left(\frac{n_f}{n_e} \right) = kh \mathcal{S} \quad (2.16)$$

- donde k coeficiente de permeabilidad del suelo
- h carga hidráulica
- n_f número de intervalos entre líneas de flujo
- n_e número de intervalos entre líneas equipotenciales
- \mathcal{S} factor de forma

b. Teoría de la sección transformada para suelos anisótropos

Cuando se analiza un problema de flujo de agua por medio de una red de flujo, se admite que el suelo es homogéneo y que su coeficiente de permeabilidad k es el mismo en las direcciones horizontal y vertical. Sin embargo, en la mayoría de los problemas prácticos se sabe que la permeabilidad en el sentido de la estratificación es mayor, en comparación con la que se tiene en el sentido perpendicular a ella y que la diferencia puede ser de diez veces o más. Aún en el caso de suelos compactados, donde se procura la utilización de equipo que no de lugar a estratificación, no es fácil eliminar totalmente este problema. Por tanto, en el análisis de suelos anisótropos se emplea la denominada *teoría de la sección transformada*, la cual permite reducir el caso de un suelo en el que las permeabilidades tanto horizontal como vertical sean diferentes, al de un suelo homogéneo e isotrópico. Con esta reducción se logra que la ecuación de Laplace y sus soluciones sean aplicables para describir el flujo a través de este tipo de suelo. La *teoría de la sección transformada* es un simple artificio de cálculo que consiste en una sencilla transformación de coordenadas, y que modifica sobre el papel las dimensiones de la

zona en estudio, de tal manera que la nueva sección obtenida, supuesta isótropa con $k_x = k_z$, tiene todas las condiciones de flujo que interesan iguales a las prevaecientes en la sección propuesta originalmente en la cual $k_x \neq k_z$. Por tanto, cuando en un caso práctico se tenga un suelo anisótropo, éste se puede transformar previamente, y aplicarle posteriormente la teoría de los suelos isótropos.

En una *sección transformada* el gasto se puede calcular con la expresión (2.16) utilizando el siguiente coeficiente de permeabilidad:

$$\bar{k} = \sqrt{k_{max} k_{min}} \quad (2.17)$$

y empleando uno u otro de los siguientes factores de transformación:

$$F_r = \sqrt{k_{min} / k_{max}} \rightarrow \text{para reducir dimensiones en la dirección de } k_{max} \quad (2.18)$$

$$F_a = \sqrt{k_{max} / k_{min}} \rightarrow \text{para ampliar dimensiones en la dirección de } k_{min} \quad (2.19)$$

c. Análisis en suelos estratificados

Cuando se tienen suelos estratificados, el problema se puede convertir en un problema de suelos anisótropos donde se tendrá un k_{max} en el sentido de la estratificación y un k_{min} en el sentido perpendicular a esta, utilizando los siguientes promedios (*pesado* y *armónico*, respectivamente):

$$k_{max} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i d_i}{\sum_{i=1}^n d_i} ; \quad k_{min} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{d_i}{k_i} \right)} \quad (2.20)$$

siendo n número de estratos analizados

k_i coeficiente de permeabilidad del estrato i

d_i espesor del estrato i

Una vez convertido el problema al caso de un suelo anisótropo, se puede aplicar la teoría de la sección transformada y convertirlo al de un suelo homogéneo e isótropo, el cual puede resolverse mediante el método gráfico de la red de flujo.

d. Método de las relajaciones

El *método de las relajaciones*, introducido por Southwell (1940), se emplea en los problemas de flujo de agua para reducir la ecuación diferencial de Laplace a una ecuación algebraica de *diferencias finitas* (Juárez y Rico, 1974). La esencia del *método de diferencias* para la solución de ecuaciones diferenciales es que, en vez de resolver una ecuación diferencial se resuelve una ecuación correspondiente de diferencias finitas que se obtiene sustituyendo las expresiones de diferencias con un nivel de exactitud mayor o menor para las derivadas (Panov, 1963).

El método de diferencias es especialmente apropiado para la solución de problemas de valores de frontera, tales como el de determinar una función que satisfaga la ecuación de Laplace en el interior de un dominio G , dando valores en las fronteras del mismo. El método de diferencias consiste en construir una malla en el plano X, Y que cubra al dominio G , por medio de una serie de líneas horizontales y verticales que formen entre ellas cuadrados de lado a (Fig 2.7). En este tipo de problemas de flujo de agua los valores de frontera corresponden a los valores de la carga hidráulica en las fronteras del dominio analizado. El método de las relajaciones consiste entonces en dar una serie de valores de h en los puntos donde no se conoce (respetando los valores de h conocidos) y buscar mediante iteraciones el cumplimiento de la ecuación de Laplace expresada en términos de diferencias finitas en todos los puntos (x, y) en el interior del dominio G . Existen diversas fórmulas que representan la ecuación de Laplace en términos de diferencias finitas, dependiendo de la zona del problema que se esté analizando (Panov, 1963).

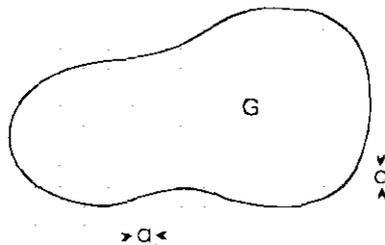


Fig 2.7 Malla para la resolución de la ecuación de Laplace en términos de diferencias finitas

Algunas de las ventajas del *método de las relajaciones* son su fácil adaptación a condiciones de frontera muy diversas, obteniendo resultados con cualquier grado de aproximación. Sin embargo, sus desventajas son, que el análisis es tedioso al intentar obtener soluciones aproximadas si no ha sido programado para resolverse mediante una computadora, y no proporciona soluciones generales, sino que debe aplicarse a cada caso particular. Este método permite analizar el flujo de agua tanto en medios homogéneos e isótropos, como en medios heterogéneos y anisótropos; permite asimismo resolver otros problemas de la geotecnia la consolidación unidimensional con flujo vertical y la consolidación por flujo radial, así como problemas de capacidad de carga (Juárez y Rico, 1974).

e. Método de los paseos casuales

Este método recurre a la denominada *Técnica de Monte Carlo* (Auvinet, 1975) la cual constituye una alternativa a los métodos usuales de análisis de flujo de agua. El método de los paseos casuales consiste en estudiar los movimientos de una partícula que se desplaza en forma aleatoria sobre los nodos de una malla similar a la de la Fig 2.7 (que representa al dominio de flujo en estudio), permitiendo determinar la carga hidráulica en los puntos de interés del suelo a partir de la resolución numérica de la ecuación de Laplace en términos de diferencias finitas. El método puede adaptarse fácilmente a dominios de flujo complejos modificando la ecuación mencionada en los nodos que lo requieran (Auvinet, 1975).

f. Transformación conforme

La ecuación diferencial de Laplace puede resolverse para un dominio G (Fig 2.8a), si la transformación (correspondencia o mapeo) conforme de este dominio con algún otro dominio más simple G_1 (p. ej. el rectángulo de la Fig 2.8b) es conocida (Panov, 1963; Spiegel, 1964; Flores, 1999). La transformación o correspondencia se realiza por medio de la función de una variable compleja:

$$\zeta = \varphi(z) \quad (2.21)$$

donde:

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad z = x + iy \quad (2.22)$$

por tanto:

$$\varphi(z) = f(x, y) + ig(x, y) \quad (2.23)$$

Entonces, la correspondencia o transformación está dada por las funciones:

$$\xi = f(x, y), \quad \eta = g(x, y) \quad (2.24)$$

de las cuales, se sabe que la ecuación de Laplace:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (2.25)$$

se transforma en:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} = 0 \quad (2.26)$$

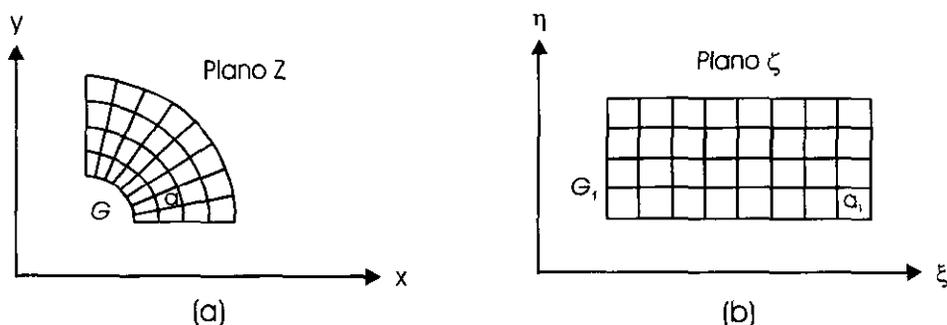


Fig 2.8 Transformación conforme del dominio G al dominio G_1

Existen algunas transformaciones generales, tales como traslación, inversión, rotación, estrechamiento, que permiten trasladar, invertir, etc. el dominio del plano original al plano correspondiente. Asimismo, existen diversas transformaciones especiales cuyas funciones de

correspondencia con los dominios del plano original se indican en la forma de tablas (*Spiegel*, 1964).

g. Modelos físicos

Los *modelos de laboratorio* que reproducen a escala la región de flujo considerada, se han usado con frecuencia para analizar el flujo en dos dimensiones, así como, para calcular gastos, efectos de tubificación (*Sellmeijer*, 1981), arenas movedizas, etc. Los dispositivos utilizados para alojar tales modelos son generalmente tanques con paredes de vidrio, de poco ancho, dentro de los cuales se simula la región por estudiar a rigurosa escala geométrica. El material comúnmente usado para reproducir la región de flujo, es una arena más o menos fina (*Cahill*, 1967). Otros tipos de modelos de laboratorio usualmente empleados son los de Hele-Shaw (*Juárez y Rico*, 1974; *Hernández*, 1990), tales modelos constan de dos placas planas de material transparente y rígido, separadas una distancia muy pequeña, entre las cuales se hace fluir un líquido viscoso en régimen laminar; la imagen del flujo se obtiene coloreando un número arbitrario de filamentos de flujo, por medio de inyectar colorante a través de la entrada del fluido. Estos modelos tienen dos formas principales de operación (*Hernández*, 1990): como *túnel* (cuando las placas que confinan el flujo forman un túnel o conducto a presión) y como *canal* (cuando el flujo presenta una superficie expuesta a la atmósfera). Estos modelos permiten estudiar problemas de flujo bidimensional y radial; asimismo, analizar casos de flujo establecido y transitorio, confinado y no confinado, así como suelos estratificados (*Kashef*, 1987; *Hernández*, 1990).

h. Modelos analógicos para resolver problemas de flujo

La ecuación de Laplace no sólo gobierna el flujo establecido del agua a través de un medio poroso, sino que, también rige diversos problemas de la física aplicada, tales como el flujo eléctrico a través de un conductor, el flujo calorífico, el campo magnético en torno a un conductor, etc. La causa de estas correlaciones se aprecia claramente cuando se considera que las leyes físicas que gobiernan esos fenómenos son, en esencia, de la misma naturaleza; de esta manera, la *ley de Darcy* para el flujo de agua, es análoga a la *ley de Fourier* en transferencia de calor, a la *ley de Ohm* en la conducción de corrientes eléctricas, etc. Por tanto, la idea básica consiste en plantear un modelo en el que se estudie un cierto fenómeno análogo al de flujo de agua (que quizás sea más fácil de resolver), y reproducir en tal modelo las circunstancias equivalentes al problema de flujo, de manera que midiendo los parámetros correspondientes en el modelo, se conozca el valor de los términos que interesan en el problema de flujo de que se trate. Modelos caloríficos, magnéticos, de membrana elástica, de analogía eléctrica, etc., han sido empleados para simular problemas de flujo de agua.

El uso de *modelos caloríficos* implica la construcción de una región geoméricamente análoga a la región de flujo y someterla a condiciones térmicas de frontera también análogas a las que se tienen en el problema de flujo de agua. Aunque en la actualidad ya no resulta difícil simular las fronteras impermeables (por el aislamiento que se requiere), así como mantener la temperatura constante en las fronteras equipotenciales, este tipo de modelos no son muy comunes.

En los *modelos magnéticos*, el patrón de flujo se determina usando fibras de material dieléctrico, tales como, limaduras de hierro, fragmentos de carbón, yeso, polvo de mica, etc. (*Hague*, 1929). Sin embargo, tanto los *modelos magnéticos* como los de *membrana elástica* (*Hansen*, 1952) son poco usuales; se les emplea generalmente solo para propósitos ilustrativos.

La analogía con el *campo eléctrico*, es uno de los modelos más usuales. Se han desarrollado algunas técnicas que sirven para representar de una manera relativamente sencilla y rápida, a muchas de las regiones de flujo para diversas condiciones de circulación del agua. Entre estas se mencionan: la construcción de modelos a partir de papel conductor, y los modelos realizados con circuitos de resistencia eléctrica (Todd, 1980), empleados entre otros, para estudiar el flujo en suelos anisótropos (Röhnisch y Marotz, 1965). Los modelos de analogía eléctrica se han empleado para estudiar el flujo a través de suelos homogéneos y heterogéneos, isotropos o anisótropos. Asimismo, para estudiar problemas de irrigación, canales de flujo, problemas de protección costera, etc.

i. Método de elementos de frontera

El método de *elementos de frontera* o *ecuaciones integrales* consiste en obtener la *representación integral* de la solución de una ecuación diferencial parcial en términos de valores de frontera (Balas et al, 1989). En un problema de flujo establecido de agua, la solución de la ecuación de Laplace se obtiene resolviendo la ecuación integral de frontera correspondiente.

En el caso de problemas unidimensionales la frontera se representa por los dos puntos extremos, y la integral se reduce a una suma. Los problemas bi y tridimensionales son mucho más complejos. En un problema de valores de frontera bien definido solo algunas de las condiciones de frontera (las cuales se introducen en la representación integral de la solución) son prescritas (Balas et al, 1989; Istok, 1989). Los valores de frontera desconocidos deben ser calculados con las ecuaciones integrales de frontera.

j. Método de Elementos Finitos

El *Método de Elementos Finitos (MEF)* se originó como un procedimiento general de *discretización de problemas continuos* planteados por expresiones definidas matemáticamente, que sólo pueden resolverse con técnicas especiales (diferencias finitas, residuos ponderados, etc.) que permiten la simplificación del problema mediante ciertas aproximaciones. Con este método, el continuo es dividido en un número finito de partes (elementos) cuyo comportamiento se especifica mediante un número finito de parámetros; y la solución del sistema completo como un *ensamblaje de todos los elementos sigue precisamente las mismas reglas* que se aplican a los *problemas discretos* (Zienkiewicz y Taylor, 1994). Por tanto, este método es simplemente una técnica numérica que proporciona soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales parciales para resolver un problema de campo determinado (Livesley, 1994).

El *MEF* se ha empleado para resolver problemas de flujo de agua a través de suelos (Zienkiewicz, Meyer y Cheung, 1966; Finn, 1967; Neuman y Witherspoon, 1970; Tristán, 1975; Istok, 1989; Zienkiewicz y Taylor, 1994; Livesley, 1994; Auvinet, 1997, entre otros). En esta tesis se utiliza para resolver problemas de flujo bidimensional establecido de agua aplicando un enfoque variacional para la resolución de la ecuación de Laplace (Auvinet, 1997). En este caso, la aplicación del *MEF* se lleva a cabo sustituyendo el medio analizado por elementos finitos triangulares que se adaptan a su geometría; y en los cuales, se acepta como aproximación que la carga hidráulica varía linealmente. La carga hidráulica de cada elemento es función del potencial en cada uno de sus tres nodos o vértices i, j, m y de sus respectivas coordenadas, así como del área del elemento. La resolución de la ecuación de Laplace en el dominio analizado se sustituye por la obtención del mínimo de una funcional que está precisamente expresada en términos de la expresión aproximada de h para este mismo dominio. Con estas bases se establece el siguiente sistema matricial de ecuaciones:

$$[S] \{h\} = 0 \quad (2.27)$$

La resolución del mismo proporciona los potenciales h en cada nodo de los elementos finitos de la malla empleada. Una vez calculados los potenciales h , se obtienen los gradientes hidráulicos, los gastos y las velocidades de flujo de acuerdo con la ley de Darcy. Es posible también, realizar un análisis de manera análoga y obtener los valores nodales de la función de corriente ψ y trazar la red de flujo con estos y los valores ya conocidos de h , mediante un algoritmo de interpolación (López y Auvinet, 1998). El análisis del flujo bidimensional establecido de agua por medio del MEF utilizando un enfoque variacional se presenta con mayor detalle en el ANEXO A.

El Método de Elementos Finitos presenta grandes ventajas, puesto que permite analizar todo tipo de problemas de flujo de agua, con consideraciones tan complejas como anisotropía, heterogeneidad, y múltiples condiciones de frontera.

2.2 FUENTES DE INCERTIDUMBRE EN EL ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE FLUJO DE AGUA EN SUELOS

2.2.1 Principales fuentes de incertidumbre

En un problema de flujo de agua, existen múltiples factores que afectan la validez de los resultados del análisis. Entre estos destacar:

- La incertidumbre sobre los coeficientes de permeabilidad del suelo debida a la baja confiabilidad de las estimaciones o pruebas realizadas y a la variación espacial.
- La incertidumbre en las condiciones de frontera
- La incertidumbre en el modelo de cálculo

2.2.2 Incertidumbre en la permeabilidad

a. Incertidumbre en la estimación o determinación de la permeabilidad de un material homogéneo

Aun cuando se admita que un material permeable pueda considerarse como homogéneo en un dominio dado, resulta difícil contar con un valor fidedigno de su coeficiente de permeabilidad. En efecto, en la práctica, este valor se estima recurriendo a una de las técnicas siguientes:

- a) *Estimación subjetiva.*- Es común que la permeabilidad de un dominio de flujo se defina simplemente a partir de la opinión de un experto después de observar muestras de material o de inspecciones in situ. Este tipo de estimación puede verse afectada por un error considerable. En materia de permeabilidad, la estimación subjetiva se referirá generalmente solamente al *orden de magnitud*.
- b) *Correlaciones.*- Es común también estimar la permeabilidad de un material a partir de correlaciones entre esta propiedad y propiedades índice como la distribución granulométrica. Estas correlaciones son generalmente poco confiables, especialmente en presencia de un porcentaje significativo de finos.
- c) *Pruebas de laboratorio.*- Un problema típico, es la falta de representatividad de las pruebas

(opinión del experto en cuanto a la confiabilidad de su estimación) o con base en la experiencia existente respecto a la dispersión comúnmente observada alrededor de la predicción dada por la correlación o prueba considerada.

b. Variación espacial

Aceptar que un dominio de flujo es homogéneo es raramente una hipótesis realista. De hecho, el coeficiente de permeabilidad k es una de las propiedades de los suelos que presenta mayor variabilidad natural. Un ejemplo muy ilustrativo de ello se muestra en la Fig 2.10, en la que se describe el perfil de permeabilidad de un depósito de delta (*Terzaghi y Peck, 1955*). En la misma se puede apreciar la gran dispersión de permeabilidades que se tiene en esa región de suelo. Por tanto, en los depósitos de este tipo, no es de extrañarse tener coeficientes de variación hasta de varios órdenes de magnitud para k .

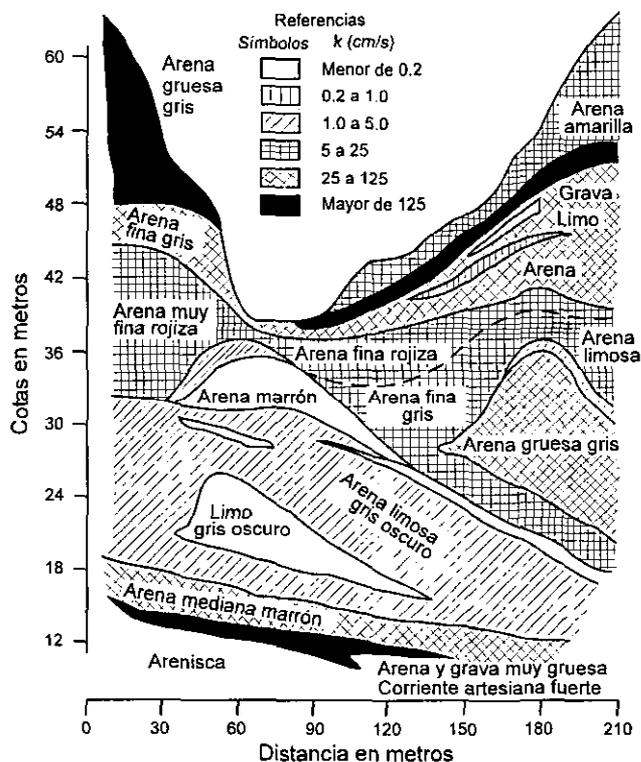


Fig 2.10 Perfil de permeabilidad de un depósito deltáico relativamente homogéneo (*Terzaghi y Peck, 1955*)

Al analizar el flujo de agua a través de un suelo, lo ideal sería conocer los valores del coeficiente de permeabilidad en todos los puntos de la zona estudiada; sin embargo, aun si se realiza un amplio programa de muestreo o de pruebas, la permeabilidad permanece incierta en la mayor parte del dominio.

Se ha buscado describir la dispersión de las permeabilidades de los suelos recurriendo a la *estadística descriptiva* que permite presentar de un modo compacto un gran número de valores de k obtenidos mediante pruebas de permeabilidad de campo y de laboratorio de un sitio o de una obra particular. En consecuencia, la variabilidad del coeficiente de permeabilidad k en un

determinado suelo, puede analizarse mediante *métodos gráficos* (histogramas, gráficas de frecuencia absoluta, gráficas de frecuencia relativa, etc.), y *métodos cuantitativos* (medidas de tendencia central –media, mediana, moda–; medidas de dispersión –desviación estándar, varianza–; correlación o dependencia entre datos –covarianza, coeficiente de correlación–). Debido a que el coeficiente de permeabilidad k varía en un rango de diversos órdenes de magnitud, es frecuentemente útil transformar los datos (Gilbert, 1996). Así, para representar los valores de k de un suelo, en vez de utilizar una gráfica de frecuencia de los valores de k (Fig 2.11), es generalmente preferible emplear una gráfica de frecuencia del logaritmo de k (Fig 2.12).

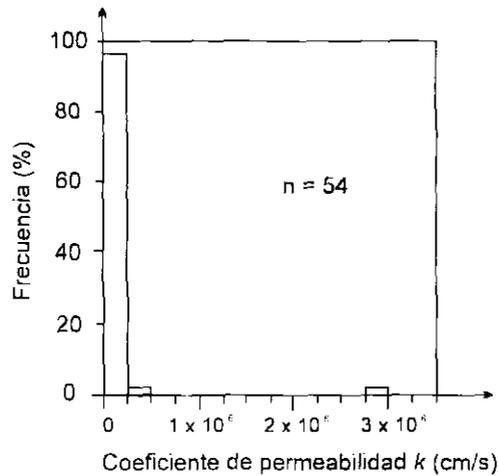


Fig 2.11 Gráfica de frecuencia del coeficiente de permeabilidad k (cm/s), de una arcilla compactada (Gilbert, 1996)

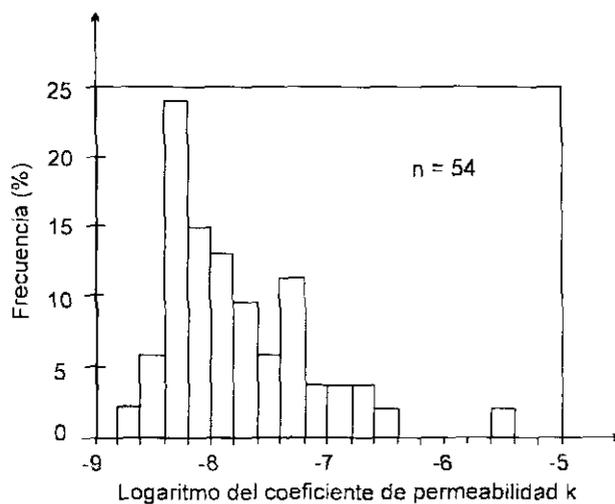


Fig 2.12 Gráfica de frecuencia del *logaritmo de k* de una arcilla compactada (Gilbert, 1996)

Estas representaciones frecuenciales pueden llevar a la definición de un modelo probabilista, es decir, a la definición de variables aleatorias asociadas a diversos dominios estadísticamente

homogéneos. Es común entonces utilizar densidades de probabilidad de tipo *lognormal* (Smith y Hebbert, 1979; Hoeksema y Kitadinis, 1985; Sudicky, 1986; Kiyoshi y Makoto, 1987; Bogardi, Kelly y Bardossy, 1990, Rubin y Dagan, 1992). La *densidad lognormal* se utiliza porque permite modelar variables que son mayores de cero y que varían sobre diversos órdenes de magnitud, tales como el coeficiente de permeabilidad. La Fig 2.13 muestra cómo la distribución *lognormal* es la que describe mejor la variación espacial de k , a partir de un histograma referido a los resultados de pruebas de permeabilidad de campo en pozos de 5 m de profundidad realizadas a lo largo del perímetro de la laguna de Cerro Prieto, B. C. (Rodríguez, 1996).

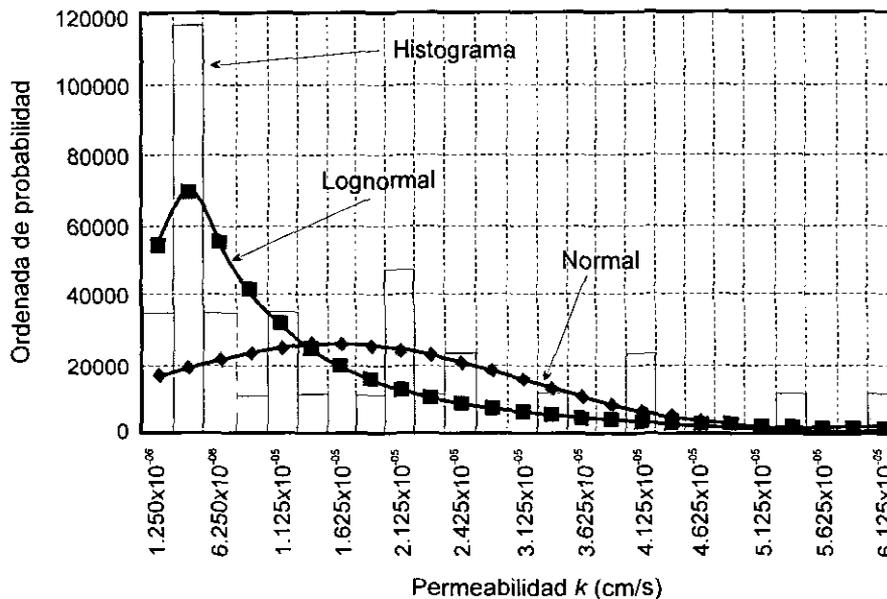


Fig 2.13 Comparación entre las distribuciones normal y lognormal para representar la variación espacial del coeficiente de permeabilidad k

También es posible representar la variación espacial del coeficiente de permeabilidad mediante *campos aleatorios*, también conocidos como *procesos estocásticos espaciales* o *procesos aleatorios* (Alonso, 1979; Auvinet, 1991; Honjo, 1991), el término *campo* indica que el parámetro espacio es multidimensional (Vanmarcke, 1983). La ventaja principal de la representación con campos aleatorios es que permite describir la *dependencia espacial* entre propiedades en diferentes puntos del medio analizado. Algunas de las áreas en las que se ha empezado a recurrir a campos aleatorios para describir la variación espacial de las propiedades de los suelos considerando la dependencia espacial es el control de la compactación de obras térreas (Auvinet y Abaziou, 1993). Se ha empleado también en el análisis del comportamiento hidrológico de áreas de captación utilizando una distribución lognormal para los parámetros hidráulicos del suelo (Smith y Hebbert, 1979); o en el análisis probabilista del flujo establecido en dominios limitados (Smith y Freeze, 1979); así como en la modelación a gran escala de problemas de flujo por medio de campos aleatorios tridimensionales (Mantoglou y Gelhar, 1987); y también en el análisis del gradiente de salida de estructuras de retención (Griffiths, Fenton y Paice, 1996).

Específicamente, un campo aleatorio de permeabilidad $k(x)$ es una familia de variables aleatorias k_1, k_2, \dots , cada una asociada con el valor del coeficiente de permeabilidad del suelo en los puntos x_1, x_2, \dots del campo (Fenton, 1996). Es decir, que $k(x)$ es un proceso

estocástico, caracterizado por:

- Su media, μ_k , o valor esperado, $E\{k(x)\}$, que puede ser espacialmente constante (campo aleatorio estacionario u homogéneo), o puede variar como una función de \underline{x} (campo aleatorio no estacionario o no homogéneo).
- Su varianza $\sigma_k^2(x)$ o $var[k(x)]$, la cual representa el grado de dispersión del campo respecto a la media.
- Su estructura de correlación $\rho[k(x), k(x')]$, que proporciona el coeficiente de correlación entre los campos aleatorios $k(x)$ y $k(x')$ para los puntos (\underline{x}) y (\underline{x}') .
- Su función de densidad de probabilidad conjunta, es decir, la descripción probabilista de todos los puntos del campo.

Diversas propiedades clave de los campos aleatorios, tales como *homogeneidad*, *isotropía* y *ergodicidad*, simplifican la estimación de las distribuciones de probabilidad y estadísticas a partir de los datos disponibles (Vanmarcke, 1983). Se dice que un campo aleatorio es *homogéneo* si todas las funciones de densidad de probabilidad conjunta permanecen iguales cuando el conjunto de puntos $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ se traslada (no se rota). Para un campo aleatorio unidimensional el término *estacionario* se emplea usualmente en lugar del término homogéneo. El campo es *isótropo* si las funciones de densidad de probabilidad conjunta permanecen iguales cuando el grupo de puntos $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ se rota en el espacio. Un campo aleatorio es *ergódico* si toda la información acerca de sus distribuciones de probabilidad conjunta y sus estadísticas pueden obtenerse a partir de una realización única del mismo. En el ANEXO B se expone con mayor detalle la teoría de campos aleatorios, así como las técnicas para la estimación de valores del campo en puntos o dominios particulares y los métodos de simulación.

Un ejemplo de *campo aleatorio de permeabilidad* se muestra en la Fig 2.14 (Fenton, 1996). En la misma se observa que los puntos que están muy cercanos entre sí tienden a tener permeabilidades similares (es decir, están altamente correlacionadas), y los puntos que están más alejados tienen diferentes permeabilidades (están poco correlacionadas). Debido a que la correlación entre los puntos decrece con la distancia, la estructura de correlación a menudo se considera como una sencilla función de la distancia entre los mismos. Los modelos comúnmente empleados para estos fines dependen de la denominada *escala de fluctuación*, l , que de manera burda, se define como la distancia más allá de la cual el campo no está correlacionado (Fenton, 1996).

Si se cuenta con varios puntos de muestreo, para una mejor descripción de las variaciones espaciales es conveniente pasar del campo aleatorio original al *campo condicional* cuyo valor esperado debe coincidir con los valores medidos y cuya varianza debe anularse en los puntos de muestreo. Si el campo aleatorio adoptado es de tipo Gaussiano, el campo condicional se define sin dificultad (Mood y Graybill, 1963).

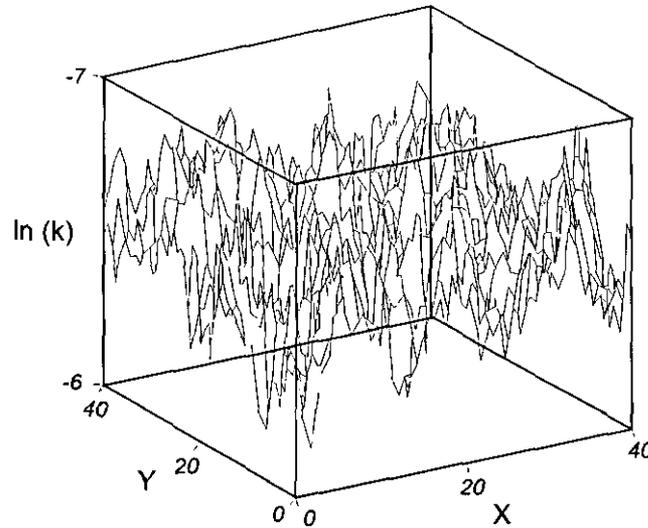


Fig 2.14 Campo aleatorio de permeabilidad medido en un área de 40 m^2 (Fenton, 1996)

c. Variación espacial aparente

Los campos de coeficientes de permeabilidad del suelo solamente se conocen a través de ensayos cuyos resultados dependen, como se ha visto, de diversos factores aleatorios, tales como operadores, equipo, condiciones atmosféricas, etc. Por tanto, si $k^*(x)$ son las propiedades observadas y $k(x)$ las propiedades reales, se tiene:

$$k^*(x) = k(x) + \varepsilon_x \quad (2.35)$$

donde ε_x es un término aleatorio de error con valor medio igual a cero, si la prueba no da ningún error sistemático.

Si se admite que las funciones ε_x son independientes entre ellas e independientes de $k(x)$, se puede escribir, suponiendo que $E\{\varepsilon\} = 0$:

$$\begin{aligned} E\{k^*(x)\} &= E\{k(x)\} \\ \text{var}[k^*(x)] &= \text{var}[k(x)] + \text{var}[\varepsilon_x] \\ \text{cov}[k^*(x), k^*(x')] &= \text{cov}[k(x), k(x')] \end{aligned} \quad (2.36)$$

El coeficiente de correlación ρ entre $k^*(x)$ y $k^*(x')$ es:

$$\rho[k^*(x), k^*(x')] = \frac{\text{cov}[k^*(x), k^*(x')]}{\sqrt{\text{var}[k^*(x)]\text{var}[k^*(x')]}} = \frac{\text{cov}[k(x), k(x')]}{\sqrt{(\text{var}[k(x)] + \text{var}[\varepsilon_x])(\text{var}[k(x')] + \text{var}[\varepsilon_{x'}])}} \quad (2.37)$$

Si $\text{var}[\varepsilon_x]$ y $\text{var}[\varepsilon_{x'}]$ son positivas, se tiene:

$$\rho[k^*(x), k^*(x')] < \rho[k(x), k(x')] \quad (2.38)$$

De esta manera, la incertidumbre debida al tipo y forma de ensaye realizado disminuye el grado de correlación aparente entre las propiedades de dos puntos del medio.

d. Modelado de la incertidumbre sobre la permeabilidad en los análisis del flujo por el método del elemento finito

Al recurrir al método del elemento finito para resolver problemas de flujo de agua, es necesario asignar a cada elemento o a grupos de elementos unos coeficientes de permeabilidad específicos.

Si se opta por una modelación de la incertidumbre con variables aleatorias asociadas a subdominios homogéneos, se harán coincidir los grupos de elementos con estos subdominios.

La modelación por medio de campos aleatorios presenta mayores dificultades por los motivos siguientes:

- Si se admite que existe una variación espacial significativa, esta se presenta generalmente en las tres direcciones, por lo que la hipótesis de flujo bidimensional deja de ser válida y es necesario recurrir a un modelo tridimensional.
- Para conocer con precisión las características del campo es necesario contar con un número importante de resultados de pruebas, raramente disponible.
- Aun si se suponen conocidos los parámetros del campo, es necesario proceder a una discretización del mismo. Los valores representativos (aleatorios) que deben asignarse a cada elemento o grupo de elementos son entonces difíciles de definir. En todo caso, no son simples promedios aritméticos espaciales del campo como lo han considerado algunos autores (se sabe que, según la dirección del flujo respecto a las heterogeneidades, el promedio representativo puede ser el promedio aritmético o el armónico). Una posibilidad consiste en asignar a cada elemento finito un valor aleatorio del coeficiente de permeabilidad estimado en su centro de gravedad y suponer que este valor se aplica al elemento completo (mid-point method). Obviamente, este método sólo será válido si las dimensiones del elemento son pequeñas respecto a la distancia de influencia. Lo anterior obliga a manejar un número grande de elementos y de variables aleatorias, lo que puede resultar muy laborioso.

Tomando en cuenta lo anterior, en esta tesis se modela la incertidumbre sobre los coeficientes de permeabilidad del suelo por medio de *variables aleatorias*. Específicamente, estas *variables aleatorias* describen los posibles valores que la permeabilidad puede tomar en diversos subdominios de flujo. Se dejan las modelaciones con campos aleatorios para trabajos futuros. Los planteamientos presentados se aplican también al caso en el que se considera el logaritmo del coeficiente de permeabilidad como variable aleatoria.

2.2.3 Incertidumbre en las condiciones de frontera

En general, estas condiciones de frontera están constituidas por los valores de la carga hidráulica en las fronteras permeables del dominio de flujo. En ciertas situaciones, pueden existir dudas en cuanto a estos valores que pueden entonces representarse mediante variables aleatorias. No existe dificultad para incluir estas variables en los análisis de incertidumbre (Bittnar, 1996). Sin embargo, en esta tesis se considerará que no existe incertidumbre sobre las

condiciones de frontera.

2.2.4 Incertidumbre asociada al método de cálculo

La realidad es siempre tan compleja, que todo método de cálculo implica cierto número de hipótesis simplificadoras. Siendo k_i ($i=1, 2, \dots, n$) los valores de los coeficientes de permeabilidad del suelo, entonces se supone que el modelo matemático que permite obtener la carga hidráulica, la velocidad de flujo, los gradientes y los gastos es de la forma:

$$Y = g(k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (2.39)$$

donde Y es una función que depende de los coeficientes de permeabilidad en diversos puntos del suelo.

La incertidumbre sobre el método de cálculo puede considerarse con un término aleatorio de error (multiplicativo o aditivo). Por ejemplo, $Y = g(k_1, k_2, \dots, k_n)\beta$, con $E\{\beta\} = 1$ si se considera que el modelo matemático no introduce errores.

Esta incertidumbre, en general, es muy difícil de estimar; pero puede evaluarse comparando los resultados experimentales con los cálculos efectuados por el método, considerando un medio con características bien determinadas. En esta tesis no se tomará en cuenta este tipo de incertidumbre.

MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO ESTOCÁSTICO APLICADO AL FLUJO DE AGUA EN SUELOS CON PERMEABILIDAD ALEATORIA

3.1 INTRODUCCIÓN

Para introducir la incertidumbre, mediante variables o campos aleatorios, en los análisis geotécnicos es necesario recurrir a técnicas especiales desarrolladas o adaptadas para tomar en cuenta la naturaleza aleatoria de los parámetros del suelo. Una de las herramientas más poderosas con estas características es el *Método del Elemento Finito Estocástico (MEFE)*.

El *Método del Elemento Finito Estocástico* se ha empleado en el estudio probabilista de numerosos problemas, tales como:

- Análisis de estabilidad de taludes (*Ishii y Suzuki, 1987*).
- Análisis de esfuerzos y desplazamientos en estructuras (*Righetti y Harrop-Williams, 1988; Auvinet, Bouayed, López y Orlandi, 1996, Orlandi 1996*).
- Análisis de consolidación de suelos bajo exceso de presión de poro inicial (*Darrag y Tawil, 1993*).
- Análisis de compresión secundaria (*Bourdeau, 1991*).
- Análisis de depósitos de suelo sujetos a cargas sísmicas (*Rosidi, Kavvas y Shen, 1993*).
- Análisis de asentamientos durante la construcción de terraplenes (*Suzuki e Ishii, 1994*).
- Análisis de asentamientos en cimentaciones con pilotes (*Phoon, Quek, Chow y Lee, 1990*).
- Análisis de la interacción entre una estructura y su viga de cimentación (*Chang, 1993*).
- Control de la compactación de obras térreas (*Auvinet y Abaziou, 1993*).
- Análisis del flujo tridimensional en medios heterogéneos (*Rubin y Dagan, 1992; Mantoglou y Gelhar, 1987*), así como el análisis del flujo establecido (*Smith y Freeze, 1979; Alonso y Melloni, 1987; Auvinet, Bouayed y Ben Cheikh, 1995; Auvinet, Bouayed, López y Orlandi, 1996; Griffiths, Fenton y Paice, 1996*); entre otros.

3.2 PRINCIPALES TÉCNICAS

Lo que se pretende con un análisis probabilista, en el caso de un problema de flujo de agua, es cuantificar la incertidumbre sobre cantidades tales como la carga hidráulica h , el gradiente hidráulico i , la velocidad de flujo V y el gasto q , tomando en cuenta la naturaleza aleatoria de los coeficientes de permeabilidad k (Fig 3.1). Con estos fines, los coeficientes k del suelo se consideran como variables aleatorias a las que se asigna una función de densidad de

probabilidad $f_k(k)$ que refleja la incertidumbre existente (Fig 3.1).

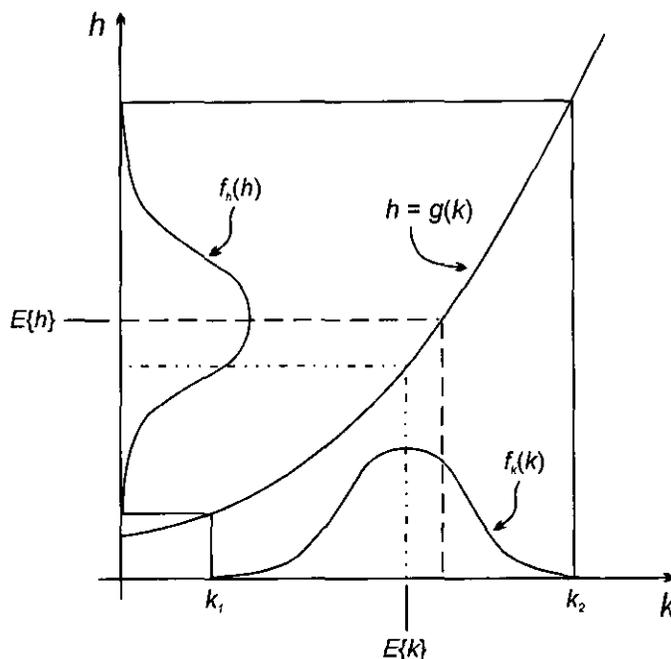


Fig 3.1 Obtención de la densidad de $f_h(h)$ a partir de la densidad de $f_k(k)$ por medio de la función $g(k)$

En el caso simple en que la carga hidráulica en un punto es función de un solo coeficiente de permeabilidad, el algoritmo de cálculo puede representarse por $h = g(k)$ (Fig 3.1). El problema consiste entonces en determinar la densidad de probabilidad, $f_h(h)$, del potencial que corresponde a la densidad $f_k(k)$ del coeficiente de permeabilidad k del suelo. Se observa de paso que, si la función $g(k)$ no es lineal, el valor esperado de la permeabilidad $E\{k\}$ no corresponde con el valor esperado de la carga hidráulica o potencial $E\{h\}$.

El *Método General o del Jacobiano* (Parzen, 1960) es un método exacto que permite realizar las transformaciones que interesan, proporcionando la densidad de la carga hidráulica h en función de la densidad de la permeabilidad k . Este método consiste en escribir que:

$$f_k(k)dk = f_h(h)dh \quad (3.1)$$

Se tiene por tanto, tomando en cuenta que las probabilidades son siempre positivas:

$$f_h(h) = f_k(k) \left| \frac{dk}{dh} \right| \quad (3.2)$$

El método anterior, que se generaliza fácilmente a funciones de varias variables (Mood y Graybill, 1963), presenta dificultades cuando la función $g(k)$ no es explícita, como en el caso del método del elemento finito y es necesario recurrir a otros métodos.

Dentro de los métodos aproximados que permiten estimar la incertidumbre que afecta los resultados de un análisis con elementos finitos se encuentran los siguientes:

- *Método de Monte Carlo.*
- *Aproximación Puntual (Rosenblueth, 1975).*
- *Método de las Perturbaciones.*
- *Método de Expansión de Neumann.*
- *Método de Primer Orden – Segundos Momentos, etc.*

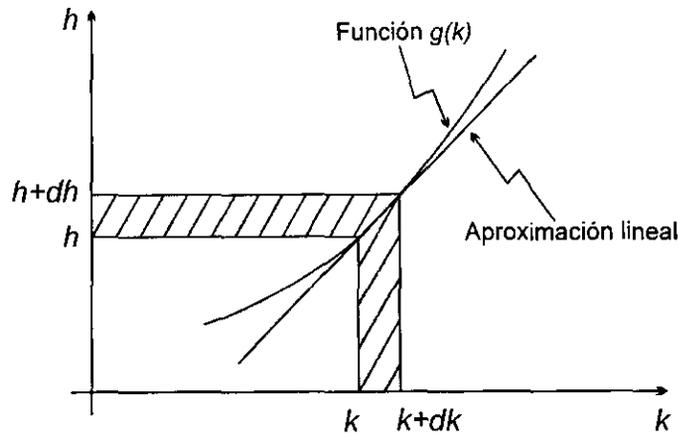
El *Método de Monte Carlo* consiste en considerar un juego de valores de X_1, X_2, \dots, X_n (en nuestro caso del coeficiente de permeabilidad) tomados al azar respetando las densidades de probabilidad de diferentes variables, así como sus correlaciones. Se calcula el valor de la función (en nuestro caso el potencial) para cada valor muestreado. Si la operación se repite un número de veces suficiente y si se somete el conjunto de resultados obtenidos a un análisis estadístico, se puede estimar la densidad de probabilidad buscada por medio de un histograma. La gran desventaja de este método es su convergencia extremadamente lenta.

Rosenblueth (1975) propuso un método para resolver de manera aproximada el problema de la transformación de la densidad de probabilidad. El método consiste en reemplazar la densidad de la variable X o de las variables X_1, X_2, \dots, X_n por una distribución de probabilidades de variables discretas que presenten los mismos momentos estadísticos. Este ingenioso método, sin embargo, es difícil de llevar a la práctica cuando el número de variables es grande y cuando existe correlación entre ellas.

El *Método de las Perturbaciones* se basa en el desarrollo en series de Taylor (*Mathews, 1964*). El comportamiento aleatorio del material, en este caso el suelo, se introduce en términos de la esperanza matemática y de la varianza de sus propiedades. Este método se ha empleado en el análisis de armaduras elastoplásticas sometidas a descarga (*Hisada y Noguchi, 1989*). Así como en el análisis de la interacción entre una estructura y una viga de cimentación, considerando el módulo de reacción de la misma como aleatorio (*Chang, 1993*).

El *Método de Expansión de Neumann* surgió por la necesidad de superar los problemas presentados por el Método de las Perturbaciones, tales como convergencia lenta, complejidad de cálculo en una PC, y aproximación debida al truncamiento de la serie en un determinado número de términos. Se ha empleado para determinar la incertidumbre en la respuesta estructural debido a la variabilidad espacial de las propiedades del material de estructuras sujetas a cargas estáticas de naturaleza determinista, modelada por medio de campos bidimensionales. Este método permite hacer una comparación más detallada entre el Método de Perturbaciones y el de Monte Carlo en cuanto a exactitud, convergencia y eficiencia computacional (*Yamazaki, Shinosuka y Dasgupta, 1988*).

El *Método de Primer Orden-Segundos Momentos* puede considerarse como un caso particular del método de las perturbaciones. Recurre a una representación aproximada de la función $g(k)$, por medio de una recta, obtenida por desarrollo de Taylor, alrededor del valor esperado (Fig. 3.2). Se ha empleado en el análisis de esfuerzos y desplazamientos de estructuras, así como en el análisis del comportamiento de suelos considerando que el módulo de elasticidad tiene distribución aleatoria (*Righetti y Harrop-Williams, 1988; Orlandi, 1996*). También se ha empleado en el cálculo de asentamientos de cimentaciones con pilotes (*Phoon, Quek, Chow y Lee, 1990*), en el análisis del flujo establecido de agua (*Auvinet, Bouayed y Ben Cheikh, 1995; Auvinet, Bouayed, López y Orlandi, 1996*), y en el análisis de estabilidad de taludes (*Ishii, y Suzuki, 1987*) así como en la evaluación de campos de presión de poro originados por la variación espacial de las permeabilidades de los suelos (*Hachich y Vanmarcke, 1983*), etc.

Fig 3.2 Función de la permeabilidad $g(k)$

En esta tesis se adoptará esta última técnica, misma que se detalla a continuación.

3.3 APLICACIÓN DEL ENFOQUE DE PRIMER ORDEN - SEGUNDOS MOMENTOS AL ANÁLISIS DEL FLUJO DE AGUA

3.3.1 Fundamentos del análisis de incertidumbre de Primer Orden

Si conociendo la distribución de probabilidad de una o varias variables, se trata de definir la distribución de una función de las mismas, o por lo menos sus *segundos momentos*, es posible recurrir al análisis de *Primer Orden - Segundos Momentos* expuesto a continuación (Benjamin y Cornell, 1970).

a. Caso de una función de una variable

Sea una función que depende de una sola variable:

$$Y = g(X) \quad (3.3)$$

El desarrollo en Serie de Taylor de la función $g(X)$ en la vecindad del valor medio de X , es:

$$g(X) = g(\mu_X) + (X - \mu_X) \left. \frac{\partial g(X)}{\partial X} \right|_{\mu_X} + \frac{(X - \mu_X)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 g(X)}{\partial X^2} \right|_{\mu_X} + \dots \quad (3.4)$$

donde $\left. \frac{\partial g(X)}{\partial X} \right|_{\mu_X}$ es la primer derivada de $g(X)$ con respecto a X , evaluada para el valor medio de X , μ_X .

Si el coeficiente de variación de X y el grado de no-linealidad de la función $g(X)$ son pequeños en las cercanías del valor medio de X , puede ser aceptable conservar sólo los dos primeros términos de la serie de Taylor anterior.

Si se toma la esperanza matemática de ambos miembros de la igualdad, conservando los dos primeros términos de la serie de Taylor y considerando que $E\{\mu_X\} = 0$, la siguiente *aproximación de primer orden* es válida:

$$E\{Y\} = E\{g(X)\} \approx g(E\{X\}) \quad (3.5)$$

Asimismo, si se consideran los tres primeros términos de la serie de Taylor, la *aproximación de segundo orden* para el valor esperado de la función $Y = g(X)$ es:

$$E\{g(X)\} \approx g(\mu_X) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(X)}{\partial X^2} \bigg|_{\mu_X} \sigma_X^2 \quad (3.6)$$

De la misma forma se puede obtener la *aproximación de primer orden* de la varianza de la función Y , considerando que $\text{var}[g(\mu_X)] = 0$:

$$\text{var}[g(X)] \approx \text{var} \left[\frac{\partial g(X)}{\partial X} \bigg|_{\mu_X} (X - \mu_X) \right] \approx \left[\frac{\partial g(X)}{\partial X} \bigg|_{\mu_X} \right]^2 \text{var}[X] \quad (3.7)$$

Las aproximaciones de primer orden anteriores, son rigurosamente exactas cuando $g(X)$ es una función lineal de X .

b. Caso de una función de varias variables

Se pueden hacer las mismas aproximaciones utilizando el desarrollo de Taylor, pero ahora para una función que depende de varias variables, es decir:

$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.8)$$

La *aproximación de primer orden* al valor esperado de Y será:

$$E\{Y\} \approx g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \quad (3.9)$$

donde $\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}$ son los valores medios de X_1, X_2, \dots, X_n .

Y la *aproximación de segundo orden* para el valor esperado de Y será:

$$E\{Y\} \approx g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \bigg|_{\mu_X} \text{cov}[X_i, X_j] \quad (3.10)$$

La *aproximación de primer orden* para la varianza de la función Y será:

Por tanto, el cálculo de las varianzas y covarianzas de la velocidad de flujo se realiza con las expresiones (3.22) y (3.23), modificadas como sigue:

$$\text{var}[V_x] = \sum_i \sum_j \left. \frac{\partial V_x}{\partial m_i} \right|_{\mu_{m_i}} \left. \frac{\partial V_x}{\partial m_j} \right|_{\mu_{m_j}} \text{cov}[m_i, m_j] \frac{k_i}{0.43429} \frac{k_j}{0.43429} \quad (3.31)$$

$$\text{cov}[V_{x_i}, V_{x_j}] = \sum_i \sum_j \left. \frac{\partial V_{x_i}}{\partial m_i} \right|_{\mu_{m_i}} \left. \frac{\partial V_{x_j}}{\partial m_j} \right|_{\mu_{m_j}} \text{cov}[m_i, m_j] \frac{k_i}{0.43429} \frac{k_j}{0.43429} \quad (3.32)$$

Para calcular la incertidumbre sobre V_z se emplean expresiones análogas.

b.4 Incertidumbre en el gasto

Esta incertidumbre se calcula a partir de las expresiones (3.24) y (3.25) vistas con anterioridad (en ellas el $\log k$ ya está incluido en la varianza de la velocidad calculada previamente).

3.4 ALGORITMOS DESARROLLADOS PARA LA APLICACIÓN DEL MEFE AL ANÁLISIS DE FLUJO DE AGUA

Para la aplicación de la teoría anterior a la resolución de problemas de flujo de agua, se desarrollaron los algoritmos *FILEFLOW*, *MEFLUSKO* y *SFEMLOGK* (López y Auvinet, 1998). El primero permite formar un archivo de datos que contiene entre otras, las características geométricas e hidráulicas de los elementos (incluyendo la matriz de covarianzas de las permeabilidades) y de los nodos de la malla de elementos finitos. *MEFLUSKO* y *SFEMLOGK* proporcionan la incertidumbre en las velocidades, gastos, gradientes y potenciales hidráulicos calculados, el primero considerando como variable aleatoria el coeficiente de permeabilidad k , y el segundo considerando como variable aleatoria el logaritmo de tal coeficiente ($\log k$). Estos programas proporcionan los valores esperados y varianzas de los resultados usando la aproximación de *Primer Orden - Segundos Momentos*. Los tres algoritmos utilizan la ya mencionada *Técnica de la Silueta o Skyline* (Bathe y Wilson, 1976), para la conversión de matrices a vectores, así como el *Método de Eliminación Gaussiana* para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. Los fundamentos de los algoritmos, la definición de las variables empleadas, los diagramas de flujo, los listados y el funcionamiento de los mismos, así como el *Método de Eliminación Gaussiana*, la explicación detallada de la conversión de matrices a vectores y la numeración de mallas se pueden consultar en el manual de tales programas (López, 1998). Asimismo, con la finalidad de verificar que el procedimiento funciona correctamente, en este manual se proporcionan diversos ejemplos resueltos de manera analítica y su correspondiente comparación con los resultados obtenidos por el *método de elementos finitos*, tanto para el análisis determinista como probabilista.

Los tres algoritmos citados se describen brevemente a continuación:

FILEFLOW:

1. Entrada de datos generales (N° de nodos, N° de elementos, N° de materiales, etc.).
2. Entrada de las propiedades de los materiales (valores esperados de los coeficientes de permeabilidad k).
3. Entrada de datos para los elementos triangulares (1°, 2°, 3er nodo y número de material para cada elemento).

4. Entrada de datos para los nodos (coordenadas X , Z , y valores de ϕ y ψ impuestos).
5. Entrada de datos para la estructura —presa, tablestaca, etc.— (coordenadas X , Z).
6. Entrada de datos para el análisis de la incertidumbre (varianzas y covarianzas de k).
7. Impresión del archivo de datos.
8. Almacenamiento en disco del archivo de datos.
9. Representación gráfica de la malla de elementos finitos.

MEFLUSKO:

1. Lectura del archivo de datos generado con *FILEFLOW*.
2. Obtención de las cargas hidráulicas h .
 - Definición de la silueta de la matriz $[S]$.
 - Definición del vector de direcciones de los elementos de la diagonal de $[S]$.
 - Obtención de la matriz geométrica $[B]$ y del área Δ del elemento.
 - Definición de los coeficientes $C_x = k_x / 4\Delta$ y $C_z = k_z / 4\Delta$.
 - Integración del vector general $\{A\}$ equivalente a la matriz general $[S]$.
 - Multiplicación de $\{A\}\{h\}$ teniendo en cuenta las cargas hidráulicas impuestas.
 - Solución del sistema de ecuaciones $\{A\}\{h\} = 0$ por el *Método de Eliminación Gaussiana*.
3. Cálculo de las velocidades, gradientes y gastos.
4. Representación gráfica de la malla de elementos finitos con los vectores de velocidad de cada elemento.
5. Cálculo de las derivadas de h con respecto a las permeabilidades m_i , $\partial\{h\} / \partial m_i$.
6. Cálculo de la incertidumbre en h (varianza, covarianza, desviación estándar, etc.).
7. Obtención de las derivadas de la velocidad con respecto a m_i , $\partial\{V\} / \partial m_i$.
8. Cálculo de la incertidumbre en la velocidad (varianza, covarianza, desviación estándar, etc.).
9. Cálculo de la incertidumbre en el gradiente hidráulico (varianza, desviación estándar, coeficiente de variación).
10. Cálculo de la incertidumbre en el gasto (varianza, desviación estándar, coeficiente de variación).
11. Impresión de los resultados.
12. Almacenamiento en disco de los resultados.

SFEMLOGK:

1. Lectura del archivo de datos generado con *FILEFLOW*.
2. Obtención de las cargas hidráulicas h como se hizo en el algoritmo *MEFLUSKO*.
3. Cálculo de las velocidades, gradientes y gastos.
4. Representación gráfica de la malla de elementos finitos con los vectores de velocidad de cada elemento.
5. Cálculo de las derivadas de la matriz general con respecto al logaritmo de las permeabilidades, es decir, $\frac{\partial[S]}{\partial m_i} = \frac{\partial[S]}{\partial k_x} \frac{k_x}{0.43429}$ y $\frac{\partial[S]}{\partial m_j} = \frac{\partial[S]}{\partial k_z} \frac{k_z}{0.43429}$.
6. Cálculo de las derivadas de la carga hidráulica h con respecto al logaritmo de las permeabilidades, es decir, $\frac{\partial\{h\}}{\partial m_i} = \frac{\partial\{h\}}{\partial k_x} \frac{k_x}{0.43429}$ y $\frac{\partial\{h\}}{\partial m_j} = \frac{\partial\{h\}}{\partial k_z} \frac{k_z}{0.43429}$.
7. Obtención de la incertidumbre en h (varianza, covarianza, desviación estándar, etc.).
8. Cálculo de las derivadas de la velocidad con respecto al logaritmo de las permeabilidades,

utilizando las derivadas $\frac{\partial [R][B]}{\partial m_j} = \frac{\partial [R][B]}{\partial k_x} \frac{k_x}{0.43429}$ y $\frac{\partial [R][B]}{\partial m_j} = \frac{\partial [R][B]}{\partial k_z} \frac{k_z}{0.43429}$.

9. Cálculo de la incertidumbre en la velocidad (varianza, covarianza, desviación estándar, etc.).
10. Cálculo de la incertidumbre en el gradiente hidráulico (varianza, desviación estándar, coeficiente de variación).
11. Cálculo de la incertidumbre en el gasto (varianza, desviación estándar, coeficiente de variación).
12. Impresión de los resultados.
13. Almacenamiento en disco de los resultados.

La utilidad de los algoritmos anteriores se muestra en el siguiente capítulo con la resolución de algunos ejemplos y la interpretación de los resultados obtenidos.

4.1 INTRODUCCIÓN

Los primeros cuatro problemas que se analizan a continuación se refieren a ejemplos típicos de flujo de agua en los que la descripción probabilista del suelo se establece en forma arbitraria. El objetivo es ilustrar el método y entender los resultados típicos que este proporciona. El último ejemplo se refiere por lo contrario a un caso real en el que los valores esperados del coeficiente de permeabilidad k se obtuvieron mediante pruebas de permeabilidad de campo. En este último ejemplo, se realiza un segundo análisis de incertidumbre considerando como variable aleatoria el logaritmo del coeficiente de permeabilidad ($\log k$).

4.2 ANÁLISIS DEL FLUJO DE AGUA EN DOMINIOS ELEMENTALES

4.2.1 Ejemplo elemental 1

a. Características generales

Empezando con un ejemplo sencillo, se analiza el flujo de agua a través de una muestra de espesor unitario constituida por dos materiales como se indica en la Fig 4.1. Este ejemplo se desarrolla básicamente para verificar de manera analítica los resultados obtenidos con el algoritmo *MEFLUSKO*.

Para estos materiales, los valores esperados del coeficiente de permeabilidad k son:

$$\text{Material 1:} \quad E\{k_1\} = 1 \text{ cm/s}$$

$$\text{Material 2:} \quad E\{k_2\} = 0.5 \text{ cm/s}$$

Siendo iguales las permeabilidades en la dirección vertical y horizontal para cada material.

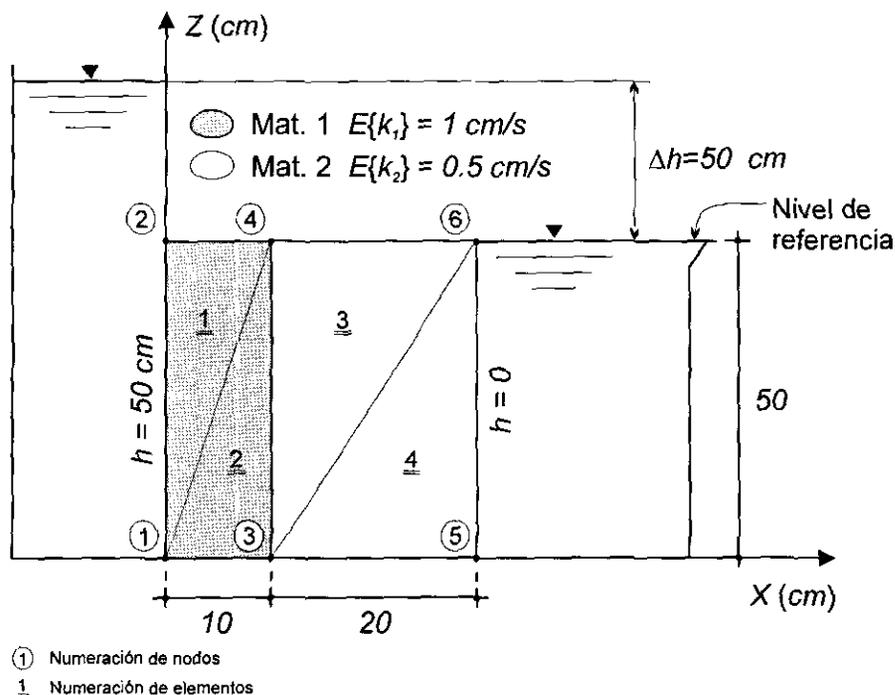


Fig 4.1 Muestra de suelo constituida por dos materiales

En ambos casos se supone que los coeficientes de variación son $\frac{\sigma_k}{E\{k\}} = 10\%$, es decir, las desviaciones estándar de k para estos materiales son:

Material 1: $\sigma_{k_1} = 0.1 \text{ cm/s}$

Material 2: $\sigma_{k_2} = 0.05 \text{ cm/s}$

Además, se considera que el coeficiente de correlación entre las permeabilidades horizontales y verticales de cada material es unitario ($\rho = 1$), y que entre las permeabilidades de los materiales 1 y 2 no existe correlación ($\rho = 0$); por tanto, la matriz de covarianzas del coeficiente de permeabilidad k es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}^2$$

En la diagonal principal de esta matriz se ubican las varianzas de k y, fuera de la diagonal, las covarianzas entre las permeabilidades de ambos materiales.

El archivo de datos de este problema, denominado *SAMPLE.DAT*, se forma a partir del algoritmo *FILEFLOW* con las características que se indican en las Tablas 4.1 y 4.2.

Tabla 4.1 Características de los nodos y número de material de cada elemento para el ejemplo elemental 1

ELEMENTO	NODO 1°	NODO 2°	NODO 3°	MATERIAL
1	1	4	2	1
2	1	3	4	1
3	3	6	4	2
4	3	5	6	2

Tabla 4.2 Características de las coordenadas y potenciales de cada nodo para el ejemplo elemental 1

NODO	X (cm)	Z (cm)	CASO KA	POTENCIAL (cm)
1	0	0	1 = impuesto	50
2	0	50	1 = impuesto	50
3	10	0	0 = no impuesto	—
4	10	50	0 = no impuesto	—
5	30	0	1 = impuesto	0
6	30	50	1 = impuesto	0

b. Valores esperados

b.1 Cargas hidráulicas

En este caso, las cargas hidráulicas desconocidas son las de los nodos 3 y 4. De acuerdo con el programa MEFLUSKO sus valores esperados resultan $E\{h_3\} = E\{h_4\} = 40 \text{ cm}$.

En este problema particular, las cargas hidráulicas en los nodos 3 y 4 tienen una expresión analítica simple en función de las permeabilidades de los materiales 1 y 2:

$$h_3 = h_4 = f(k_1, k_2) = \frac{100}{2 + \frac{k_2}{k_1}} \tag{4.1}$$

La aproximación de primer orden del valor esperado es por tanto efectivamente igual a:

$$E\{h_3\} = E\{h_4\} \cong \frac{100}{2 + \frac{E\{k_2\}}{E\{k_1\}}} = \frac{100}{2 + \frac{0.5}{1}} = 40 \text{ cm} \tag{4.2}$$

La solución analítica permite también comparar la aproximación de primer orden con la de segundo orden (Benjamín y Cornell, 1970):

$$E\{h_3\} = E\{h_4\} \approx f(E\{k_1\}, E\{k_2\}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial k_i \partial k_j} \mu_k \text{ cov}[k_i, k_j] \tag{4.3}$$

Las derivadas que intervienen en los cálculos de la expresión anterior son:

$$\frac{\partial f}{\partial k_1} = -100 \left(2 + \frac{k_2}{k_1}\right)^{-2} k_2 = \frac{-100k_2}{\left(2 + \frac{k_2}{k_1}\right)^2} = -8$$

$$\frac{\partial f}{\partial k_2} = -100 \left(2 + \frac{k_2}{k_1}\right)^{-2} \left(\frac{1}{k_1}\right) = \frac{-100}{k_1 \left(2 + \frac{k_2}{k_1}\right)^2} = -16$$

(4.4)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial k_1 \partial k_1} = 200k_2 \left(2 + \frac{k_2}{k_1}\right)^{-3} k_2 = \frac{200k_2^2}{\left(2 + \frac{k_2}{k_1}\right)^3} = 3.2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial k_2 \partial k_2} = \frac{200}{k_1} \left(2 + \frac{k_2}{k_1}\right)^{-3} \left(\frac{1}{k_1}\right) = \frac{200}{k_1^2 \left(2 + \frac{k_2}{k_1}\right)^3} = 12.8$$

Por tanto, sustituyendo los valores anteriores con sus respectivos términos de la matriz de covarianzas de k en la aproximación de segundo orden (4.3), se obtiene que el valor esperado de la carga hidráulica en los nodos 3 y 4 es:

$$E\{h_3\} = E\{h_4\} \approx 40 + \frac{1}{2} \left[(3.2)(1 \times 10^{-2}) + (12.8)(0.25 \times 10^{-2}) \right] = 40.032 \text{ cm} \quad (4.5)$$

El error que se comete al considerar solamente una aproximación de primer orden es por tanto mínimo.

b.2 Velocidades de flujo, gradientes y gastos

Los valores esperados para las velocidades, gradientes y gastos obtenidos con *MEFLUSKO* se muestran en las Tablas 4.3 y 4.4.

Tabla 4.3 Velocidades de flujo y gradientes hidráulicos esperados para el ejemplo elemental 1

ELEMENTO	$E\{V_x\}$ (cm/s)	$E\{V_z\}$ (cm/s)	$E\{i_x\}$	$E\{i_z\}$
1	1	0	-1	0
2	1	0	-1	0
3	1	0	-2	0
4	1	0	-2	0

Tabla 4.4 Gastos esperados para el ejemplo elemental 1

ELEMENTO	NODOS		$E\{Q_x\} (cm^3/s)$	$E\{Q_z\} (cm^3/s)$
1	1°	1	0	0
	2°	4	-50	0
	3°	2	50	0
2	1°	1	50	0
	2°	3	-50	0
	3°	4	0	0
3	1°	3	0	0
	2°	6	-50	0
	3°	4	50	0
4	1°	3	50	0
	2°	5	-50	0
	3°	6	0	0

El signo negativo en los resultados anteriores indica que la velocidad (según la ley de Darcy) es positiva en la dirección del flujo, es decir, en la dirección en que la carga hidráulica h disminuye.

Los valores esperados de las velocidades de flujo y los gastos resultan iguales en todos los elementos (aún cuando existan diversas características geométricas y de permeabilidad) debido a la *condición de continuidad de flujo*; es decir que a través de la muestra el agua circula con velocidad y gasto constante, $E\{V_x\} = 1 \text{ cm/s}$ y $E\{Q_x\} = 50 \text{ cm}^3/\text{s}$, respectivamente.

Los valores esperados de los gradientes hidráulicos en los *elementos 1 y 2* son diferentes de los que se tienen en los *elementos 3 y 4*, debido a las diferencias geométricas que existen entre ellos (Fig 4.1).

c. Dispersión

c.1 Carga hidráulica

Los resultados de este análisis obtenidos con el algoritmo *MEFLUSKO* para la carga hidráulica se indican en la siguiente *matriz de covarianza*:

$$\begin{bmatrix}
 \text{var}[1,1] & \text{cov}[1,2] & \text{cov}[1,3] & \text{cov}[1,4] & \text{cov}[1,5] & \text{cov}[1,6] \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \text{var}[2,2] & \text{cov}[2,3] & \text{cov}[2,4] & \text{cov}[2,5] & \text{cov}[2,6] \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & \text{var}[3,3] & \text{cov}[3,4] & \text{cov}[3,5] & \text{cov}[3,6] \\
 & & 1.28 & 1.28 & 0 & 0 \\
 & & & \text{var}[4,4] & \text{cov}[4,5] & \text{cov}[4,6] \\
 & & & 1.28 & 0 & 0 \\
 & & & & \text{var}[5,5] & \text{cov}[5,6] \\
 & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & \text{var}[6,6] \\
 & & & & & 0
 \end{bmatrix} \text{ cm}^2$$

En la matriz anterior, $\text{var}[1,1]$ y $\text{cov}[2,5]$ indican la varianza de la carga hidráulica del *nodo* 1 y la covarianza entre las cargas hidráulicas de los *nodos* 2 y 5 de la Fig 4.1, respectivamente, y de manera análoga para los términos restantes.

En cuanto a los coeficientes de correlación de la carga hidráulica entre los diferentes *nodos* de la malla analizada todos son cero excepto entre los *nodos* 3 y 4 donde se tiene una correlación perfecta ($\rho = 1$).

Además, en esta matriz se puede observar que en los *nodos* 1, 2 y 5, 6 no existe incertidumbre debido a que en los mismos las cargas hidráulicas fueron impuestas.

Los valores de la varianza de la carga hidráulica en los *nodos* 3 y 4 (situados en la diagonal principal de la matriz anterior) se verifican a continuación con una *aproximación multivariable de primer orden* (Benjamin y Cornell, 1970), para el caso en que no existe correlación entre las permeabilidades de los materiales 1 y 2:

$$\text{var}[h_3] = \text{var}[h_4] \approx \sum_{i=1}^2 \left[\left. \frac{\partial f}{\partial k_i} \right|_{\mu_k} \right]^2 \text{var}[k_i] \quad (4.6)$$

A partir de los datos que se tienen de este problema:

$$\text{var}[k_1] = 0.01 \quad ; \quad \text{var}[k_2] = 0.0025 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial k_1} = -8 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial k_2} = -16$$

Resulta que la aproximación de primer orden para la varianza de la carga hidráulica es:

$$\text{var}[h_3] = \text{var}[h_4] \approx (-8)^2(0.01) + (-16)^2(0.0025) = 1.28 \text{ cm}^2 \quad (4.8)$$

Lo que coincide con lo obtenido por el método de elementos finitos.

Del valor anterior se obtiene la desviación estándar de h_3 y h_4 :

$$\sigma_{h_3} = \sigma_{h_4} = \sqrt{\text{var}[h_3]} = \sqrt{\text{var}[h_4]} \approx 1.13 \text{ cm} \quad (4.9)$$

Asimismo, los coeficientes de variación son:

$$\frac{\sigma_{h_3}}{E\{h_3\}} = \frac{\sigma_{h_4}}{E\{h_4\}} = \frac{1.13}{40} \approx 2.83 \% \quad (4.10)$$

c.2 Velocidad de flujo

La *matriz de covarianza* resultante (cm^2/s^2) para la velocidad de flujo obtenida con el algoritmo MEFLUSKO es:

$V_{x_1}^2$ 6.8×10^{-3}	V_{x_1}, V_{z_1} 0	V_{x_1}, V_{x_2} 6.8×10^{-3}	V_{x_1}, V_{z_2} 0	V_{x_1}, V_{x_3} 6.8×10^{-3}	V_{x_1}, V_{z_3} 0	V_{x_1}, V_{x_4} 6.8×10^{-3}	V_{x_1}, V_{z_4} 0
	$V_{z_1}^2$ 0	V_{z_1}, V_{x_2} 0	V_{z_1}, V_{z_2} 0	V_{z_1}, V_{x_3} 0	V_{z_1}, V_{z_3} 0	V_{z_1}, V_{x_4} 0	V_{z_1}, V_{z_4} 0
		$V_{x_2}^2$ 6.8×10^{-3}	V_{x_2}, V_{z_2} 0	V_{x_2}, V_{x_3} 6.8×10^{-3}	V_{x_2}, V_{z_3} 0	V_{x_2}, V_{x_4} 6.8×10^{-3}	V_{x_2}, V_{z_4} 0
			$V_{z_2}^2$ 0	V_{z_2}, V_{x_3} 0	V_{z_2}, V_{z_3} 0	V_{z_2}, V_{x_4} 0	V_{z_2}, V_{z_4} 0
				$V_{x_3}^2$ 6.8×10^{-3}	V_{x_3}, V_{z_3} 0	V_{x_3}, V_{x_4} 6.8×10^{-3}	V_{x_3}, V_{z_4} 0
					$V_{z_3}^2$ 0	V_{z_3}, V_{x_4} 0	V_{z_3}, V_{z_4} 0
						$V_{x_4}^2$ 6.8×10^{-3}	V_{x_4}, V_{z_4} 0
							$V_{z_4}^2$ 0

Esta matriz tiene dimensión de $2 \cdot NE$ (siendo NE el número de elementos), es decir, para cada elemento se tendrán combinaciones entre las dos direcciones X, Z de la velocidad como se indica arriba. En la misma, los elementos de la diagonal principal representan a las varianzas de la velocidad en las direcciones respectivas, y los términos restantes indican las covarianzas entre las velocidades en las direcciones correspondientes.

En la matriz anterior, se puede observar que los valores de las varianzas y covarianzas para todos los elementos entre diferentes velocidades en la dirección X son iguales, esto indica que en tal dirección en los diversos elementos se tiene una correlación lineal perfecta ($\rho = 1$). Las covarianzas entre las velocidades V_z o entre velocidades V_x y V_z en los diversos elementos son cero, esto se debe a que la velocidad en la dirección Z es nula en este problema (Tabla 4.3).

De esta matriz se obtienen las desviaciones estándar de las velocidades, de acuerdo con:

$$\sigma_{V_{x_1}} = \sigma_{V_{x_2}} = \sigma_{V_{x_3}} = \sigma_{V_{x_4}} = \sqrt{\text{var}[V_x]} \approx 8.2461 \times 10^{-2} \text{ cm/s} \quad (4.11)$$

y sus correspondientes coeficientes de variación resultan:

$$E\{V_{x_1}\} = E\{V_{x_2}\} = E\{V_{x_3}\} = E\{V_{x_4}\} = \frac{8.2461 \times 10^{-2}}{1} \approx 8.25 \% \quad (4.12)$$

c.3 Gradiente hidráulico

En cuanto a los gradientes hidráulicos los resultados aleatorios obtenidos con el algoritmo MEFLUSKO son:

$$\sigma_{i_{x_1}} = \sigma_{i_{x_2}} \approx 0.1131 \rightarrow \text{en los elementos 1 y 2}$$

$$\sigma_{i_{x_3}} = \sigma_{i_{x_4}} \approx 5.6569 \times 10^{-2} \rightarrow \text{en los elementos 3 y 4} \quad (4.13)$$

Puede observarse que estos valores son diferentes en los elementos 1, 2 y 3, 4, debido a los distintos valores de los gradientes que se tienen en tales elementos (conforme se indicó en la Tabla 4.3). Además, en la dirección vertical, las desviaciones estándar de i son nulas puesto que los gradientes son nulos en la dirección Z (Tabla 4.3).

Asimismo, los coeficientes de variación del gradiente hidráulico son:

$$\frac{\sigma_{i_{x_1}}}{E\{i_{x_1}\}} = \frac{\sigma_{i_{x_2}}}{E\{i_{x_2}\}} = \frac{0.1131}{|-1|} \approx 11.31\% \quad (4.14)$$

$$\frac{\sigma_{i_{x_3}}}{E\{i_{x_3}\}} = \frac{\sigma_{i_{x_4}}}{E\{i_{x_4}\}} = \frac{5.6569 \times 10^{-2}}{-2} \approx 2.83\%$$

4.2.2 Ejemplo elemental 2

a. Características generales

Se analiza el flujo de agua a través de una muestra de espesor unitario constituida por cuatro materiales como se indica en la Fig 4.2.

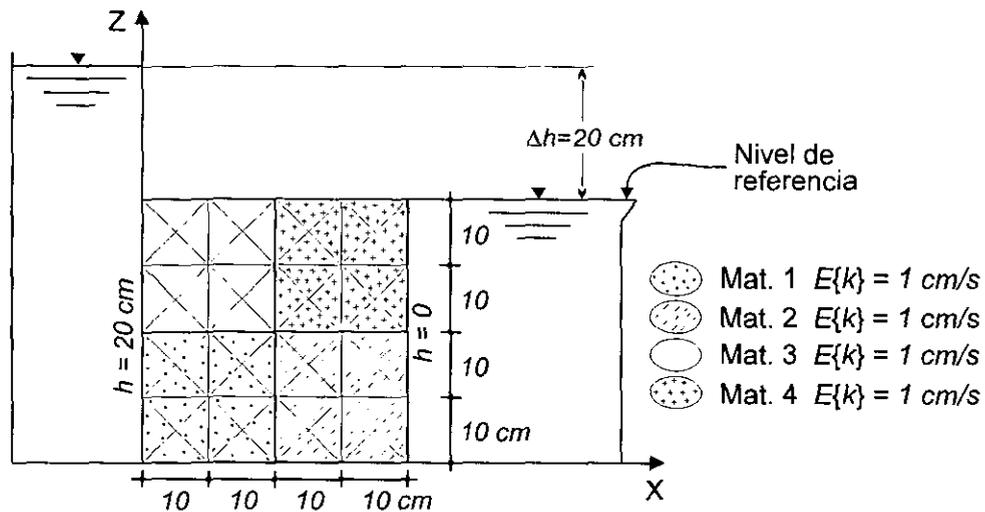


Fig 4.2 Muestra de suelo constituida por cuatro materiales

Para los cuatro materiales, se supone que el valor esperado del coeficiente de permeabilidad k es $E\{k\} = 1 \text{ cm/s}$, y su coeficiente de variación es $\frac{\sigma_k}{E\{k\}} = 10\%$.

El dominio se representó con una malla de 64 elementos finitos y 41 nodos y se impusieron las condiciones de frontera $h = 20 \text{ cm}$ y $h = 0$ como se indica en la figura.

El problema se analizó para los siguientes casos:

CASO I. Material homogéneo pero aleatorio, donde el coeficiente de correlación ρ entre cualquier par de permeabilidades se considera unitario; es decir, la matriz de covarianzas de la permeabilidad, k , es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}^2$$

CASO II. Cuatro materiales independientes, con coeficiente de correlación $\rho = 0$; es decir, la matriz de covarianzas de la permeabilidad, k , es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}^2$$

CASO III. Cuatro materiales parcialmente correlacionados positivamente, con coeficiente de correlación $\rho = 0.5$; es decir, la matriz de covarianzas de la permeabilidad, k , es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}^2$$

b. Resultados

El análisis realizado con los valores esperados de los coeficientes de permeabilidad muestra que, a través del sólido, pasa un gasto total esperado $q = 20 \text{ cm}^3/\text{s}$, con una velocidad uniforme $V_x = 0.5 \text{ cm/s}$ y un gradiente constante $i_x = -0.5$.

Del análisis estocástico resulta que, en el CASO I (material aleatorio pero homogéneo), no

existe incertidumbre en la *carga hidráulica* ni en el *gradiente hidráulico*, lo que era de esperarse puesto que, en un suelo homogéneo, la *carga hidráulica no depende del coeficiente de permeabilidad k* . La *velocidad de flujo* presenta por su parte una incertidumbre constante en toda la muestra con una desviación estándar $\sigma_V = 0.05 \text{ cm/s}$ y un coeficiente de variación igual al de la permeabilidad ($\sigma_V / E\{V\} = 10\%$).

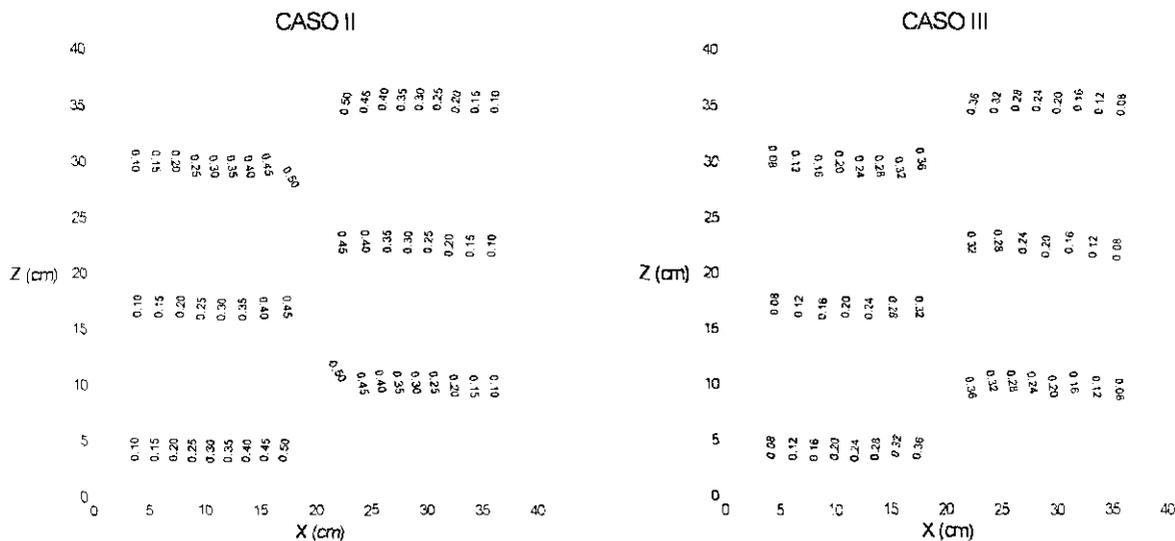
Los resultados para los CASOS II y III se presentan en la Fig 4.3 en la forma de curvas de isovalores. Se puede observar que, en el CASO II (cuatro materiales independientes), no hay incertidumbre sobre la *carga hidráulica* en las líneas verticales de frontera ($X=0$ y $X=40 \text{ cm}$) ya que en ellas se impusieron valores deterministas para h ; además, la incertidumbre es máxima en la región más alejada de dichas fronteras. Es interesante notar que la desviación estándar máxima de la *carga hidráulica* ($\sigma_h \approx 0.60 \text{ cm}$) se alcanza en la parte superior e inferior de la zona central de la muestra. En estos puntos, el flujo depende principalmente de los parámetros de los dos materiales contiguos y la incertidumbre es mayor que en el centro de la muestra donde el efecto de *compensación estadística*, atribuible a la interferencia entre los parámetros de los cuatro materiales, es más pronunciado. Asimismo, en este caso, la distribución de la incertidumbre sobre el *gradiente hidráulico* es similar a la de h , con un valor máximo $\sigma_i \approx 0.105$. En cuanto a la *velocidad de flujo horizontal*, la mayor incertidumbre ocurre en el eje de simetría horizontal de la muestra, con un valor máximo $\sigma_V \approx 0.0429 \text{ cm/s}$.

En la misma figura, para el CASO III (cuatro materiales parcialmente correlacionados positivamente), se observa que la incertidumbre tanto en la *carga hidráulica* como en el *gradiente hidráulico* es similar a la observada en el CASO II, sin embargo, se aprecia una ligera disminución de esta incertidumbre asociada al aumento de la correlación entre las permeabilidades de los diferentes materiales; sus valores máximos son $\sigma_h \approx 0.40 \text{ cm}$ y $\sigma_i \approx 0.075$. Este resultado puede parecer sorprendente puesto que la correlación reduce el efecto de *compensación estadística*; sin embargo, al mismo tiempo, la correlación crea una condición más parecida a la de un material homogéneo para el cual la carga se vuelve independiente del coeficiente de permeabilidad. De igual manera, la mayor incertidumbre en la *velocidad de flujo horizontal* se presenta en el eje de simetría horizontal de la muestra, con una desviación estándar máxima $\sigma_V \approx 0.0466 \text{ cm/s}$. Comparando este valor con el del caso anterior se observa que, contrariamente a lo que sucede con la carga hidráulica, conforme aumenta la correlación entre las permeabilidades, la incertidumbre en la velocidad horizontal también aumenta, lo que debe atribuirse a la reducción de la compensación estadística.

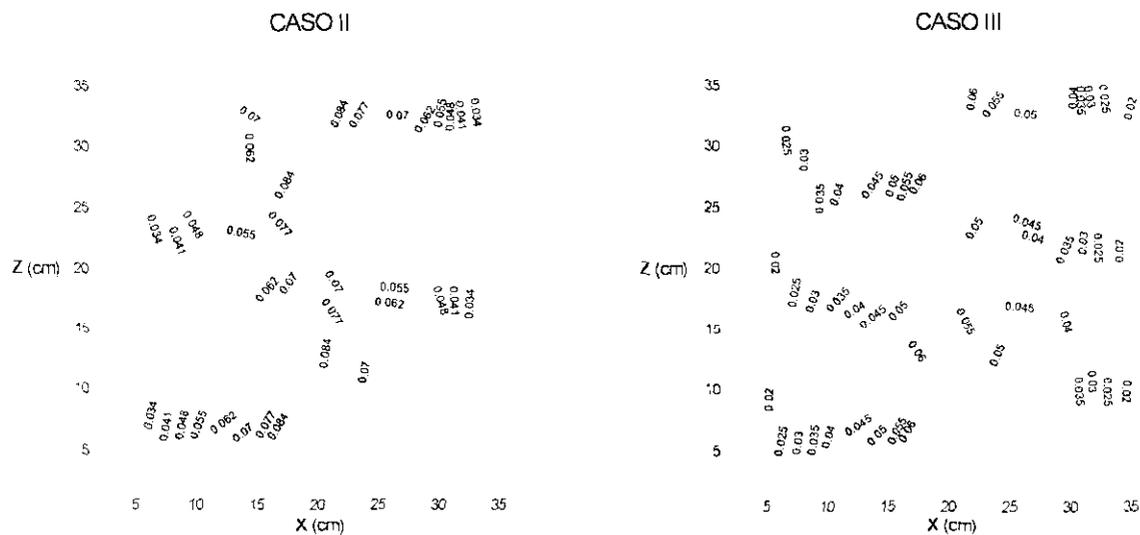
c. Comentarios

Los ejemplos presentados muestran que:

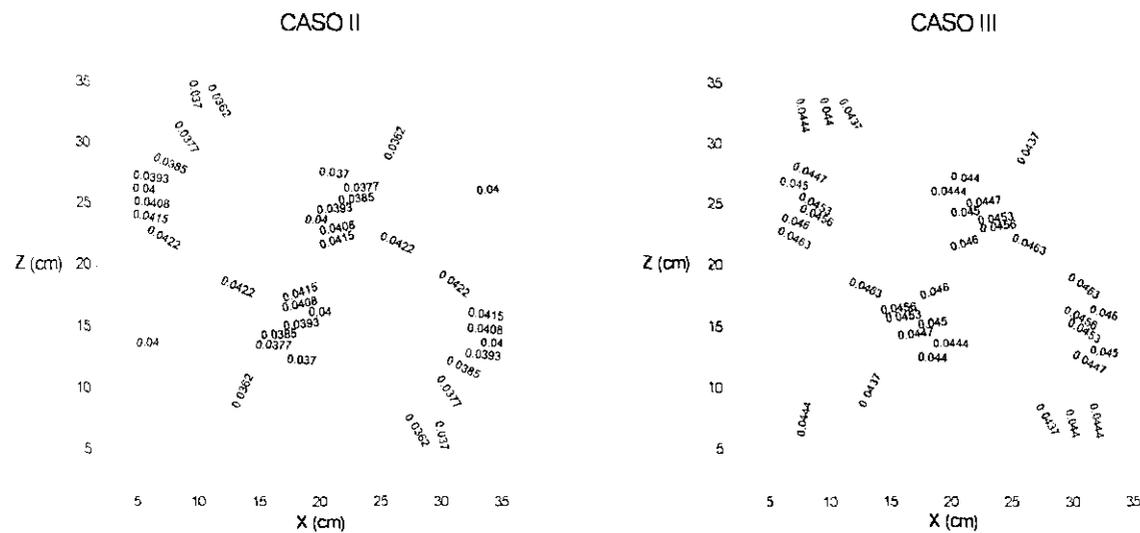
- Como era de esperarse, en medios homogéneos con permeabilidad aleatoria, no existe incertidumbre sobre la carga hidráulica ya que, en este caso, esta carga es independiente de la permeabilidad.
- En medios heterogéneos, la incertidumbre sobre la carga hidráulica tiende a ser máxima en los puntos del medio más alejados de las fronteras con condiciones impuestas.
- En este último caso, a una mayor correlación positiva entre las variables aleatorias consideradas corresponde una menor incertidumbre tanto en la carga hidráulica como en el gradiente hidráulico; por lo contrario, la incertidumbre en la velocidad de flujo tiende a aumentar.



(a) Desviación estándar de la carga hidráulica (cm)



(b) Desviación estándar del gradiente hidráulico (adimensional)



(c) Desviación estándar de la velocidad de flujo (cm/s)

Fig 4.3 Resultados del análisis de incertidumbre en los CASOS II y III del ejemplo elemental 2

4.3 FLUJO DE AGUA A TRAVÉS DE LA CIMENTACIÓN DE UNA PRESA DE CONCRETO

4.3.1 Características generales

En este ejemplo se analiza el flujo de agua a través de un dominio triangular con las características geométricas mostradas en la Fig 4.4.

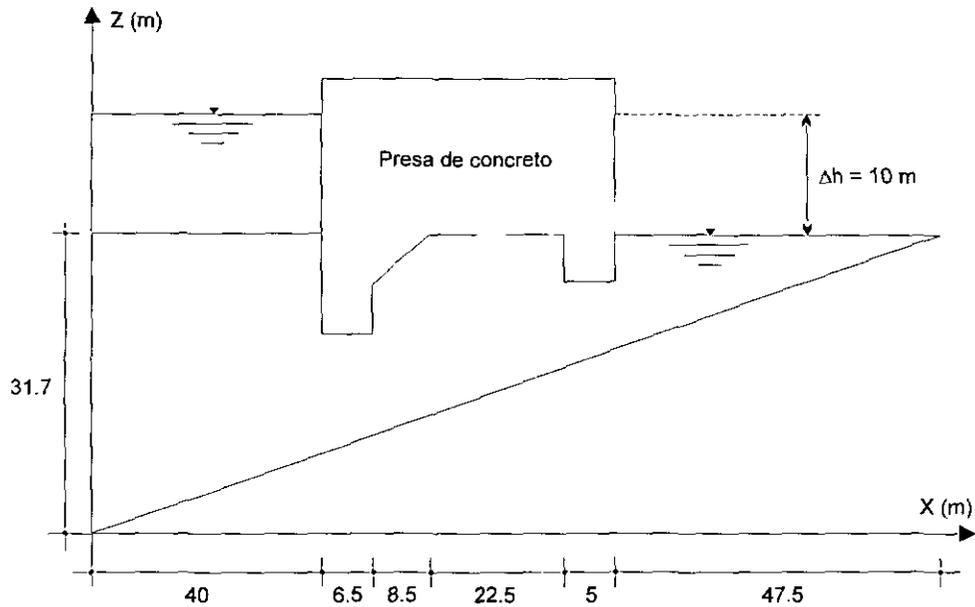


Fig 4.4 Dominio triangular expuesto a flujo de agua

Para realizar el análisis, se discretizó al suelo en cuestión con una malla de 78 elementos finitos y 58 nodos que se adaptaron a su geometría como se muestra en la Fig 4.5. En la misma, también se puede apreciar la numeración de los elementos.

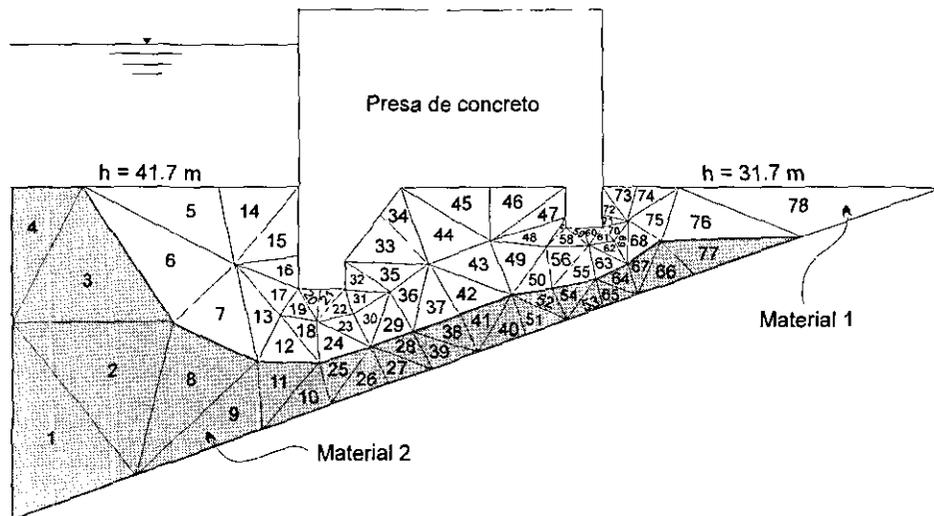


Fig 4.5 Malla de elementos finitos en el dominio triangular

Las condiciones de frontera impuestas para la carga hidráulica fueron $h = 41.7 \text{ m}$ en los nodos que se encuentran aguas arriba en el contacto entre el suelo y el agua, y $h = 31.7 \text{ m}$ en los nodos que se encuentran en la parte superior del suelo aguas abajo de la presa (Fig 4.5).

El problema se analizó para los siguientes valores esperados del coeficiente de permeabilidad, k :

CASO I. Suelo homogéneo e isótropo:

$$E\{k_{x_1}\} = E\{k_{z_1}\} = 1 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

CASO II. Suelo homogéneo y anisótropo:

$$E\{k_{x_1}\} = 1 \times 10^{-5} \text{ m/s} \quad ; \quad E\{k_{z_1}\} = 1 \times 10^{-6} \text{ m/s}$$

CASO III. Suelo constituido por dos materiales:

$$\text{Material 1: } E\{k_{x_1}\} = 1 \times 10^{-6} \text{ m/s} \quad ; \quad E\{k_{z_1}\} = 1 \times 10^{-7} \text{ m/s}$$

$$\text{Material 2: } E\{k_{x_2}\} = 1 \times 10^{-4} \text{ m/s} \quad ; \quad E\{k_{z_2}\} = 1 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

En el CASO III se supone que el *material 2* presenta una mayor permeabilidad que el *material 1* (Fig 4.5).

El análisis de incertidumbre se lleva a cabo considerando que para el CASO I se tiene una correlación perfecta entre k_x y k_z ($\rho = 1$); para el CASO II, que no existe correlación entre las permeabilidades en las direcciones X y Z ($\rho = 0$); para el CASO III, que existe una correlación de $\rho = 0.5$ entre k_x y k_z de cada material y una correlación de $\rho = 0.25$ entre las permeabilidades de los *materiales 1* y *2*. Además, en la formación de la matriz de covarianza se asume que el coeficiente de variación de k es $\frac{\sigma_k}{E\{k\}} = 10\%$ para estas tres condiciones, es decir:

CASO I:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

CASO II:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

CASO III:

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.005 & 2.5 & 0.25 \\ 0.005 & 0.001 & 0.25 & 0.025 \\ 2.5 & 0.25 & 1000 & 50 \\ 0.25 & 0.025 & 50 & 10 \end{bmatrix} \times 10^{13} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

4.3.2 Valores esperados

Los datos para dibujar las redes de flujo esperadas que se muestran en las Figs 4.6 a 4.8 se obtuvieron con el algoritmo *FLOWNETS*. Este algoritmo proporciona los valores de las funciones ϕ y ψ en cada nodo de la malla de la Fig 4.5, que son interpolados en el algoritmo *SURFER* y dibujados en la forma de curvas de isovalores (que representan a las líneas equipotenciales y de flujo correspondientes). En estas redes de flujo esperadas se puede observar que en el CASO I (Fig 4.6) los cuadrados no son perfectos, lo cual se debe entre otras cosas a las diversas aproximaciones que se van haciendo durante los cálculos, poniéndose de manifiesto también, las limitaciones que se tienen al graficar los datos de ϕ y ψ con el algoritmo de interpolación *SURFER*. Por otra parte, en el CASO III (Fig 4.8) los canales de flujo cerca de la frontera impermeable son más angostos debido a que aquí se localiza el *material 2* que es más permeable que el *material 1*, por esta razón, puesto que hay mayor velocidad, el flujo requiere menor área para circular; es decir, para un *suelo heterogéneo* en los lugares donde existan las mayores permeabilidades los canales de flujo serán más angostos, y donde se tengan las menores permeabilidades los canales de flujo serán más anchos.

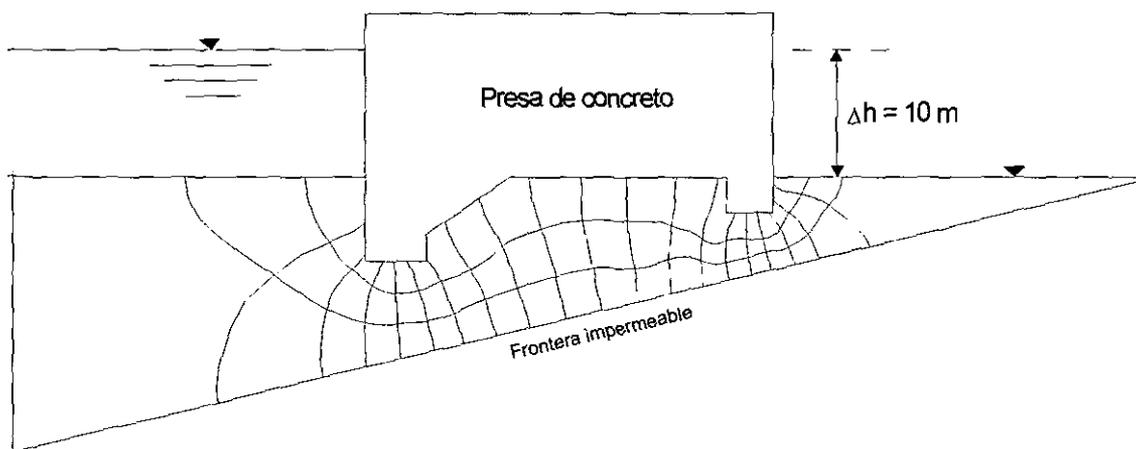


Fig 4.6 Red de flujo esperada para el CASO I (suelo homogéneo e isótropo)

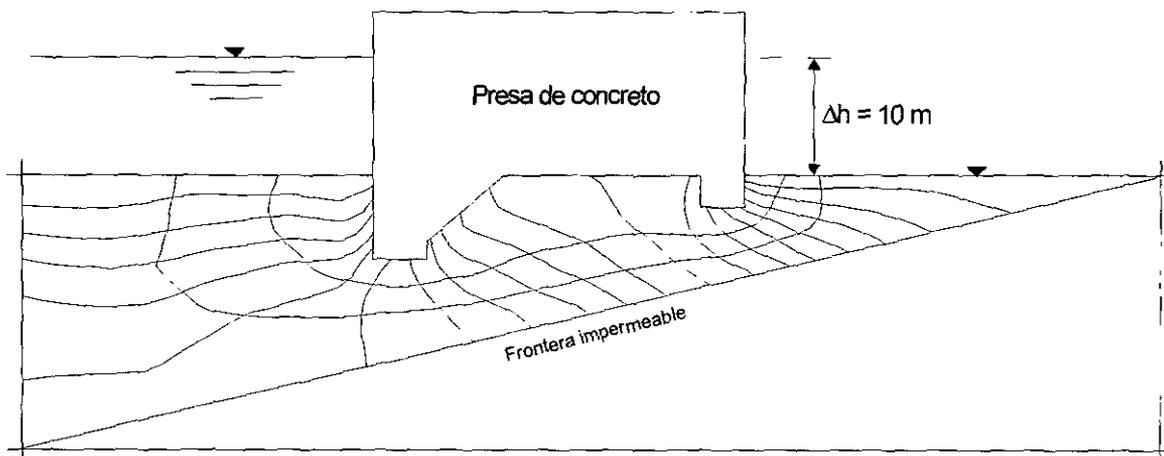


Fig 4.7 Red de flujo esperada para el CASO II (suelo homogéneo y anisótropo)



Fig 4.8 Red de flujo esperada para el CASO III (suelo de dos materiales con $k_x \neq k_z$)

Con el algoritmo mencionado también se obtuvieron los gastos esperados que pasan debajo de la presa de concreto como se indica en la Tabla 4.5 para una longitud de la presa de 50 m.

Tabla 4.5 Gastos esperados a través del dominio triangular obtenidos con el algoritmo FLOWNETS

CASO	ELEMENTO	NODO OPUESTO AL ELEMENTO	GASTO (m^3/s /lancho unitario)	GASTO ^(*) (l/s)
I	45	30	5.2755×10^{-6}	0.82
	43	28	5.9996×10^{-6}	
	40	26	5.0261×10^{-6}	
			$\Sigma = 1.63012 \times 10^{-5}$	
II	45	30	8.6966×10^{-7}	0.30
	43	28	2.7761×10^{-6}	
	40	26	2.3985×10^{-6}	
			$\Sigma = 6.04426 \times 10^{-6}$	
III	45	30	4.7499×10^{-8}	0.27
	43	28	7.6665×10^{-8}	
	40	26	5.3725×10^{-6}	
			$\Sigma = 5.49667 \times 10^{-6}$	

(*) Para una longitud $L = 50$ m

En el CASO I (suelo homogéneo e isótropo) el gasto esperado se verificó con:

- Ley de Darcy:

$$q = k i A = (1 \times 10^{-5} \text{ m/s})(10/130)(20 \text{ m})(50 \text{ m}) = 7.6923 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \approx 0.77 \text{ l/s}$$

- Red de flujo esperada obtenida con el algoritmo *FLOWNETS* (Fig 4.6):

$$q = k h \Delta L = (1 \times 10^{-5} \text{ m/s})(10 \text{ m})(3/20)(50 \text{ m}) = 7.5 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \approx 0.75 \text{ l/s}$$

Comparando estos resultados con el de la Tabla 4.5 se advierte que el programa realiza los cálculos de manera suficientemente aproximada para fines prácticos.

En las Figs 4.9 a 4.11 se muestran los vectores de la velocidad de flujo esperada obtenidos con el algoritmo *FLOWNETS*.

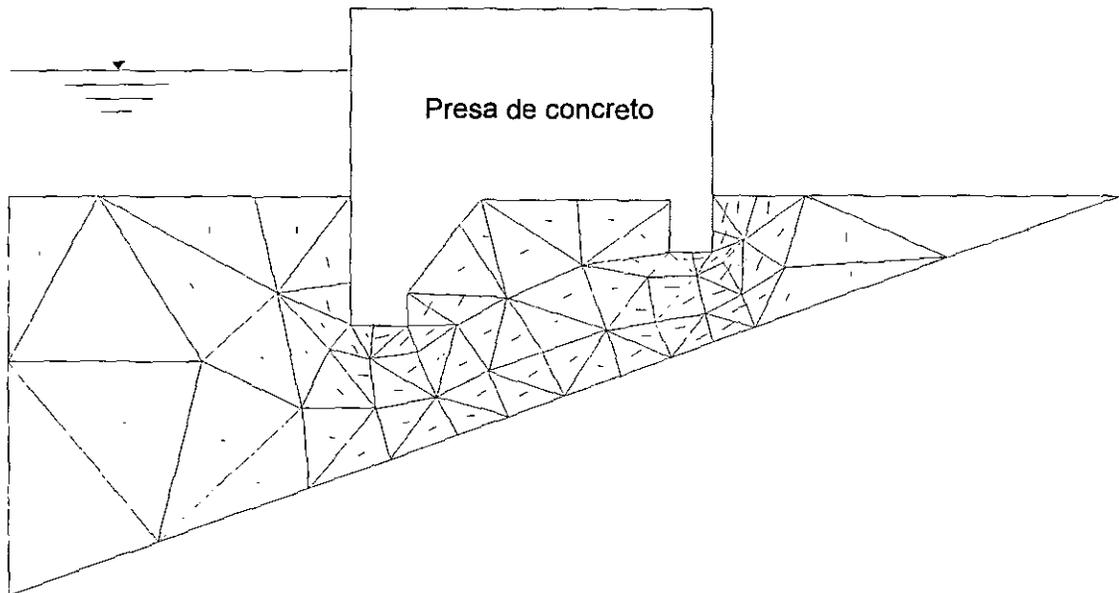


Fig 4.9 Vectores de velocidad esperada para el CASO I (suelo homogéneo e isótropo)

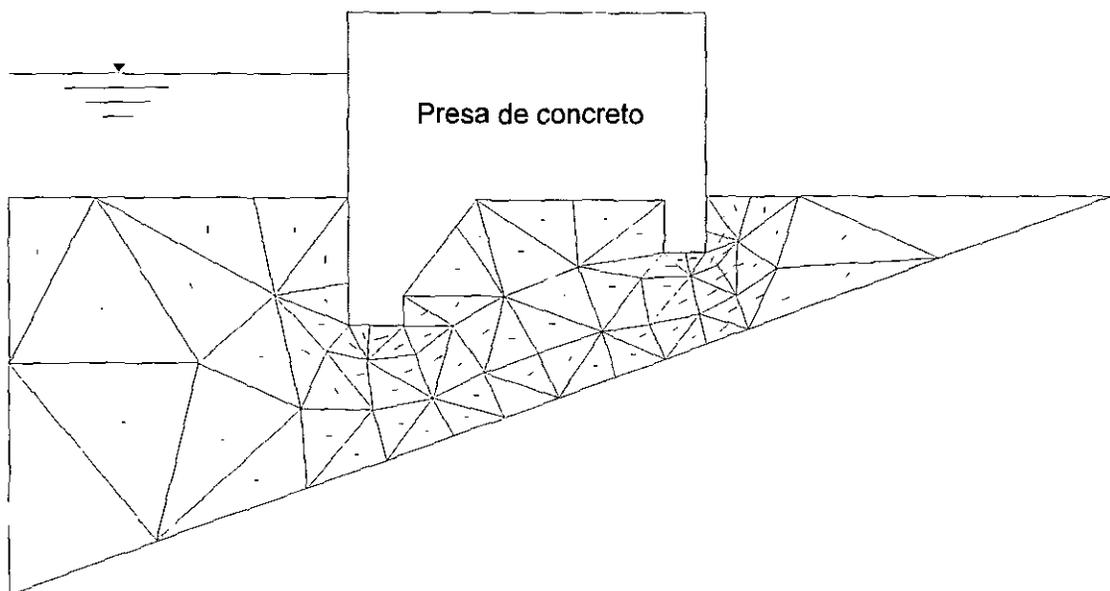


Fig 4.10 Vectores de velocidad esperada para el CASO II (suelo homogéneo y anisótropo)

Presa de concreto

Fig 4.11 Vectores de velocidad esperada para el CASO III
(suelo de dos materiales con $k_x \neq k_z$)

Los máximos valores esperados tanto de la *velocidad de flujo* como del *gradiente hidráulico* obtenidos con FLOWNETS resultaron:

$$\begin{aligned} \text{CASO I: } E\{i_{max}\} &\approx 0.4 && \text{(elemento 60)} \\ E\{V_{max}\} &\approx 4 \times 10^{-6} \text{ m/s} && \text{(elemento 60)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CASO II: } E\{i_{max}\} &\approx 0.6 && \text{(elemento 71)} \\ E\{V_{max}\} &\approx 3 \times 10^{-6} \text{ m/s} && \text{(elemento 60)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CASO III: } E\{i_{max}\} &\approx 1.6 && \text{(elemento 78)} \\ E\{V_{max}\} &\approx 2 \times 10^{-6} \text{ m/s} && \text{(elemento 64)} \end{aligned}$$

El comportamiento del *gradiente hidráulico* esperado depende de la *dirección del flujo* y de la *distancia* que este recorre, es decir, a partir de la definición del *gradiente hidráulico* (*pérdida de carga por unidad de longitud*) se observa en los "cuadrados" de las *redes de flujo* de las Figs 4.6 a 4.8 que en aquellas zonas donde el agua recorre las menores distancias (de acuerdo con la *dirección del flujo*), los *gradientes hidráulicos* esperados son *mayores*. Además, los valores esperados máximos para los CASOS I y II se presentan en la punta del *dentellón de aguas abajo* de la presa (Figs 4.9 y 4.10, respectivamente), pues como se sabe, en un *suelo homogéneo* tanto la *velocidad de flujo* como el *gradiente hidráulico* son teóricamente infinitos en la punta de una *tablestaca* o *dentellón*. En el CASO III (Fig 4.11) los máximos valores esperados ocurren en la punta del *detalle geológico* (en el extremo derecho del *suelo de cimentación* —cerca de la *frontera impermeable*—), poniendo de manifiesto los *serios problemas* que este *detalle geológico* puede ocasionar, por ser más permeable que el resto del *suelo de cimentación*.

4.3.3 Dispersión

Los resultados de este análisis, realizado con el algoritmo *MEFLUSKO*, muestran que en el CASO I la incertidumbre tanto en la carga como en el gradiente hidráulico es nula, puesto que, en un suelo homogéneo estas variables son independientes de la permeabilidad. Por otra parte, el coeficiente de variación de la velocidad de flujo varía en el mismo sentido que el de la permeabilidad ($\sigma_k / E\{k\} = \sigma_V / E\{V\} = 10\%$).

Por otro lado, en las Figs 4.12 y 4.13 se muestran las curvas de isovalores de las desviaciones estándar de la carga hidráulica, para los CASOS II y III, respectivamente. En las mismas, se puede observar que, en el CASO II, la mayor desviación estándar de h ocurre en el extremo inferior del suelo analizado hacia la parte aguas arriba de la presa, con un valor máximo $\sigma_h = 0.45 m$. Y para el CASO III la máxima desviación estándar de h se presenta entre el suelo analizado y la frontera impermeable hacia la parte aguas abajo de la presa, con un valor máximo $\sigma_h = 0.19 m$. Si se compara la magnitud de los valores máximos anteriores, se aprecia una disminución de la incertidumbre en el CASO III, que se debe al aumento de correlación entre las permeabilidades (como ocurrió en el *ejemplo elemental 2* analizado anteriormente); además, en estas condiciones, los máximos valores se presentan en zonas diferentes. En el CASO II la máxima desviación ocurre en el lugar más alejado de las fronteras con condiciones impuestas (sólo una esquina debido a la geometría del dominio analizado), y en el CASO III la mayor desviación se observa en la zona donde se presentan los máximos gradientes hidráulicos. La disparidad entre uno y otro caso, se debe a la influencia que el coeficiente de permeabilidad tiene sobre la carga hidráulica en el CASO III, es decir que, para un suelo heterogéneo, la carga hidráulica ya no es independiente de la permeabilidad, como ocurre en un suelo homogéneo. Se observa también que, en la superficie del suelo aguas arriba y aguas abajo de la presa no existe incertidumbre sobre h , ya que en estas líneas las cargas hidráulicas son conocidas, y fueron impuestas como condiciones de frontera del problema.

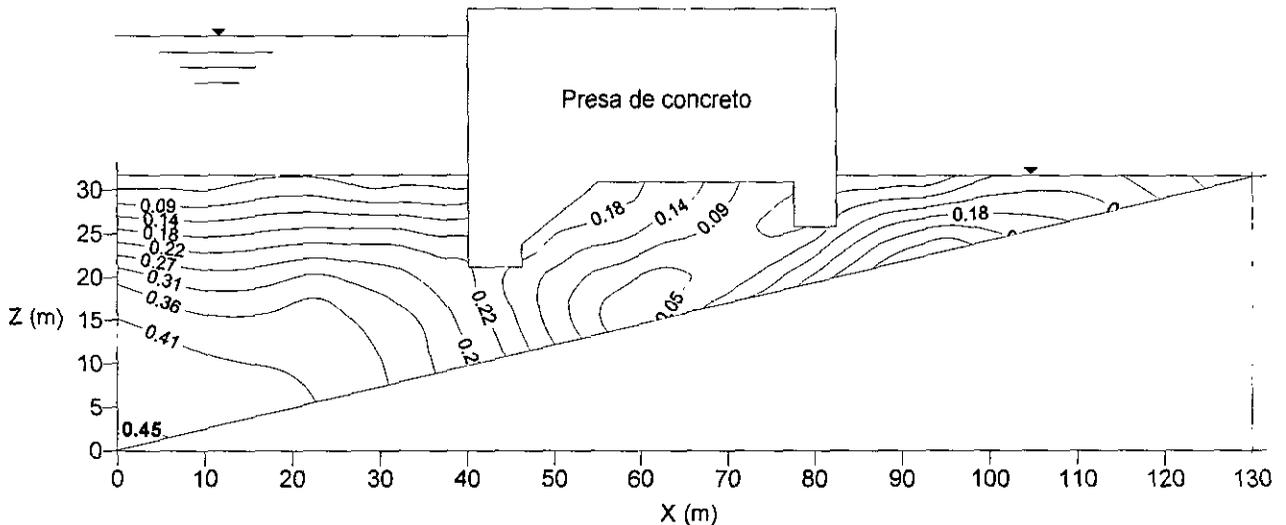


Fig 4.12 Desviación estándar de h en m para el CASO II

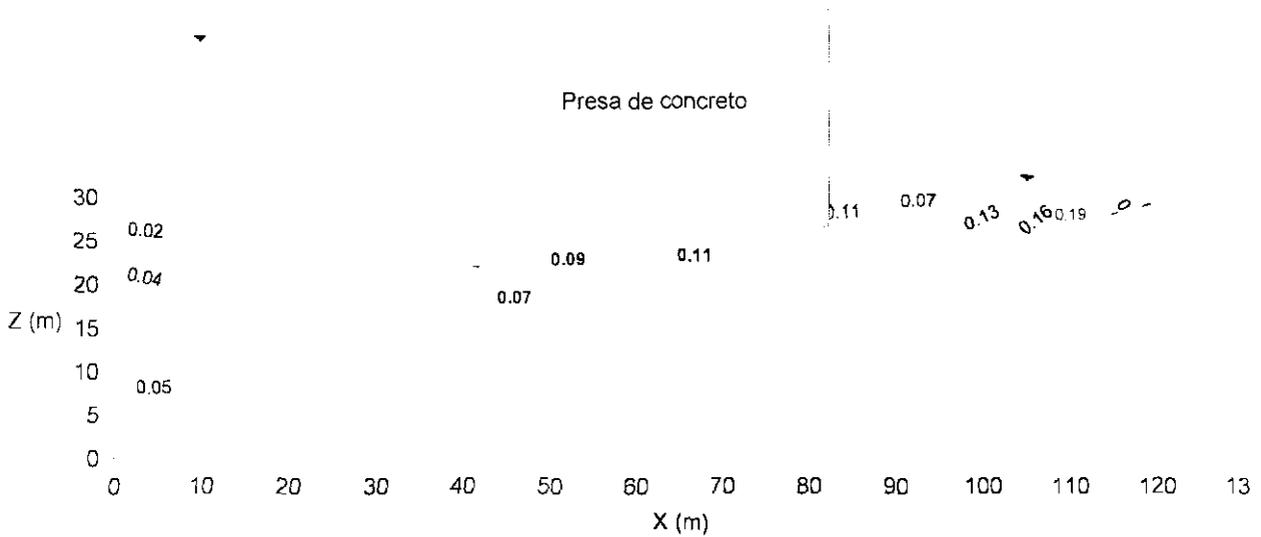


Fig 4.13 Desviación estándar de h en m para el CASO III

Las curvas de isovalores de la desviación estándar del gradiente hidráulico en los CASOS II y III se muestran en las Figs 4.14 y 4.15, respectivamente. En el CASO II, se puede apreciar que la máxima desviación estándar de i se presenta aproximadamente en el centro de gravedad del dominio analizado (*elemento 20*) con un valor máximo $\sigma_i \approx 0.14$ –adimensional–. Para el CASO III, la máxima desviación estándar se presenta en la punta del dentellón de aguas abajo de la presa (*elemento 57*) con un valor máximo $\sigma_i \approx 0.21$ –adimensional–.

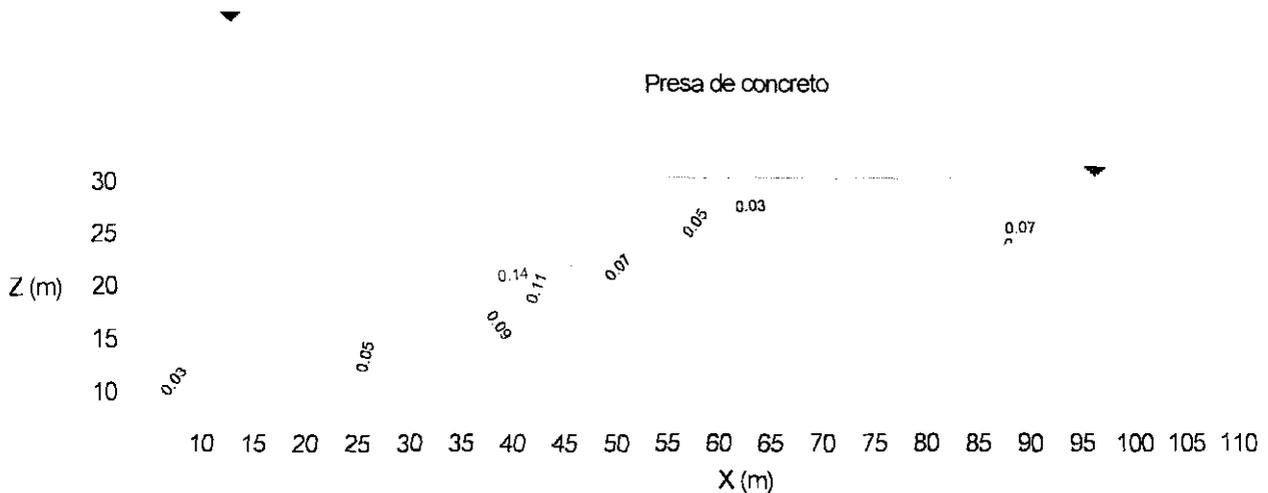


Fig 4.14 Desviación estándar de i (adimensional) para el CASO II

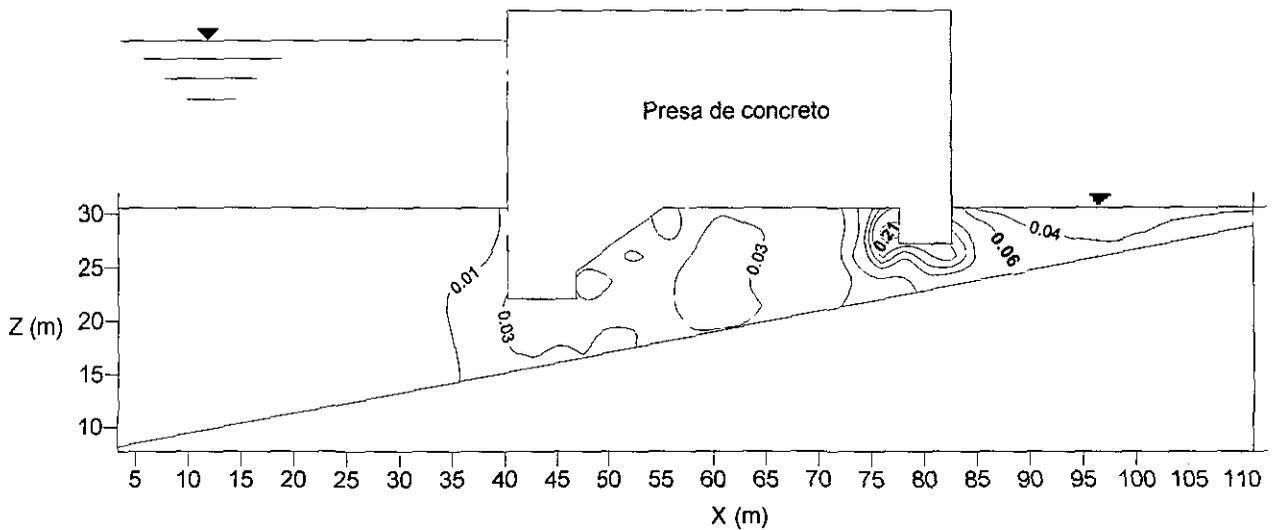


Fig 4.15 Desviación estándar de i (adimensional) para el CASO III

4.4 FLUJO DE AGUA EN PRESAS DE MATERIALES GRADUADOS

4.4.1 Flujo a través del cuerpo de una presa

a. Características generales

Se analiza el problema del vaciado rápido en una presa de materiales graduados (Fig 4.16), en la que el nivel del agua bajó repentinamente de la *Elev. 25* a la *Elev. 0*. Aún cuando el problema es de tipo transitorio, siguiendo la práctica común (*Marsal y Reséndiz, 1975*), se admite que el vaciado es instantáneo y se analizan las condiciones críticas que se pueden presentar, considerando un flujo supuestamente establecido en el instante inmediato después de que ocurra el vaciado rápido.

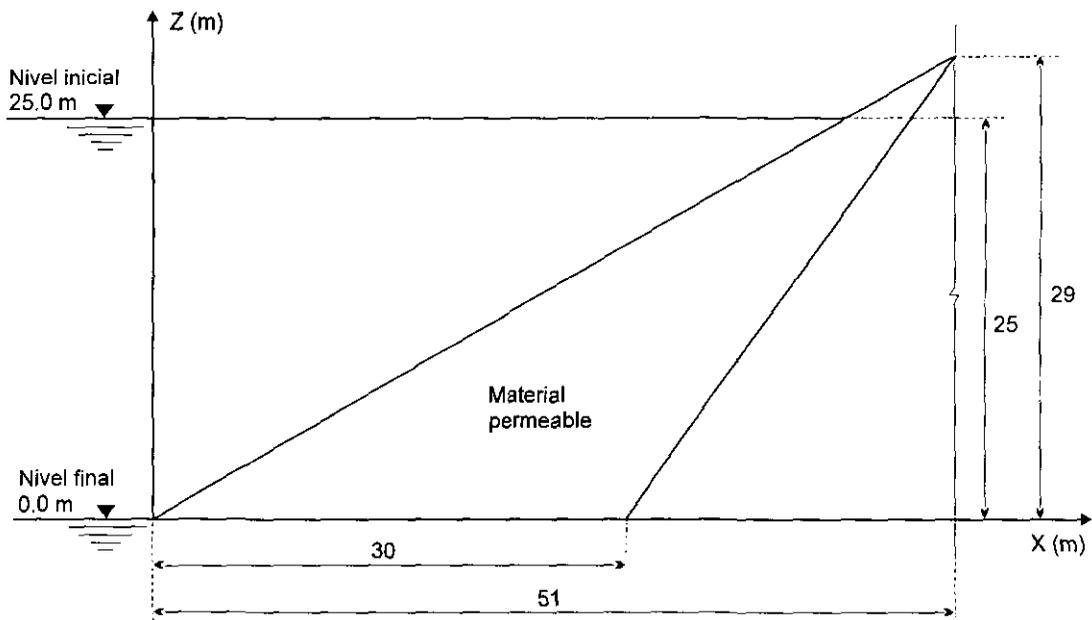


Fig 4.16 Sección permeable de una presa de materiales graduados

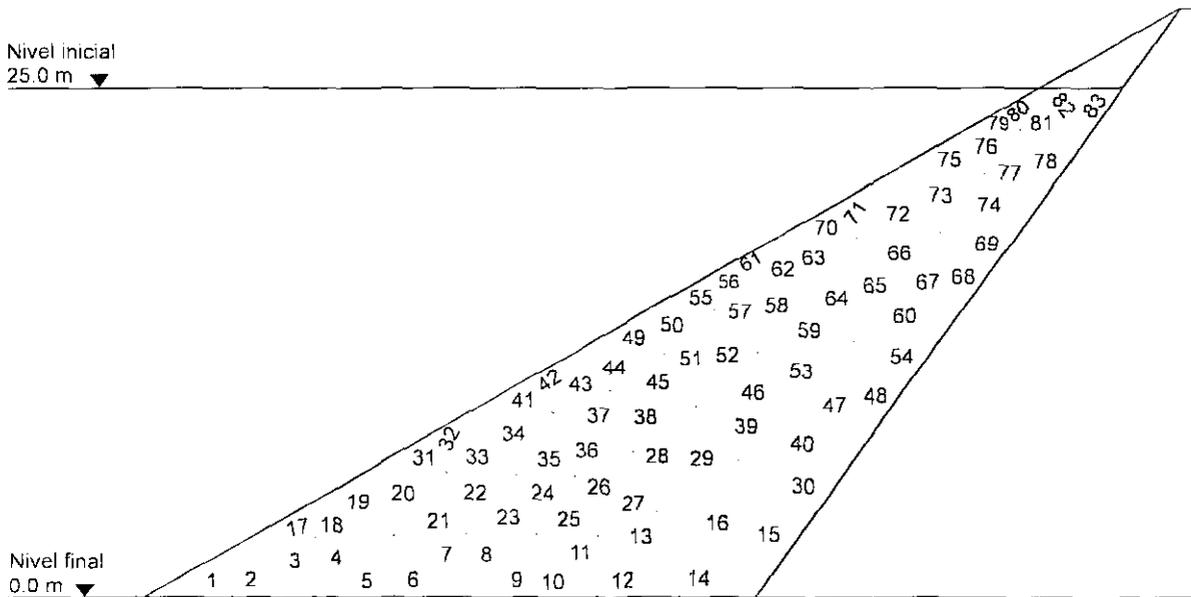
El análisis por medio del MEF se realiza en la región permeable localizada aguas arriba de la presa en la cual se supone que el material es incompresible y se encuentra totalmente saturado. El suelo se modela con la malla de 83 elementos finitos y 59 nodos que se muestra en la Fig 4.17, imponiéndose como condición de frontera la carga hidráulica $h = 25\text{ m}$ en todos los nodos situados en la línea horizontal superior donde se inicia el vaciado, y $h = z$ en todos los nodos ubicados en la línea que define la inclinación del talud.

Se consideran las siguientes condiciones:

CASO I. Suelo homogéneo e isótropo: $E\{k_x\} = E\{k_z\} = 1 \times 10^{-5}\text{ m/s}$

CASO II. Suelo homogéneo y anisótropo ($k_x = 5 k_z$): $E\{k_x\} = 1 \times 10^{-5}\text{ m/s}$

$E\{k_z\} = 2 \times 10^{-6}\text{ m/s}$



Nota: La numeración se refiere a los elementos

Fig 4.17 Malla de elementos finitos

Para el *análisis de incertidumbre*, se considera que la permeabilidad tiene un coeficiente de variación $\frac{\sigma_k}{E\{k\}} = 20\%$ en ambos suelos; y que en el CASO I, el coeficiente de correlación ρ entre las permeabilidades es unitario ($\rho = 1$), y en el CASO II, que las permeabilidades son independientes ($\rho = 0$). De acuerdo con lo anterior, las matrices de covarianzas de k en cada caso son:

CASO I:
$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \times 10^{-12}\text{ m}^2/\text{s}^2$$

CASO II:
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix} \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

b. Valores esperados

Las redes de flujo esperadas, calculadas con los resultados nodales de las funciones ϕ y ψ que proporciona el algoritmo *FLOWNETS* para los CASOS I y II, se muestran en las Figs 4.18 y 4.19, respectivamente (para el instante inmediato después de que ocurre el vaciado rápido).

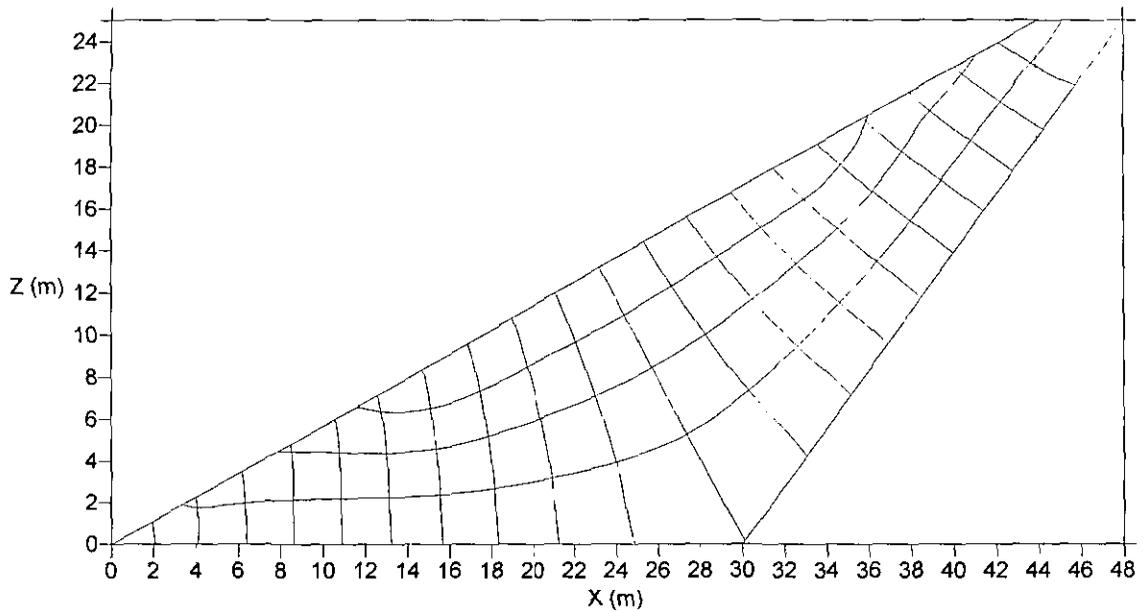


Fig 4.18 Red de flujo esperada cuando se considera el suelo homogéneo e isótropo

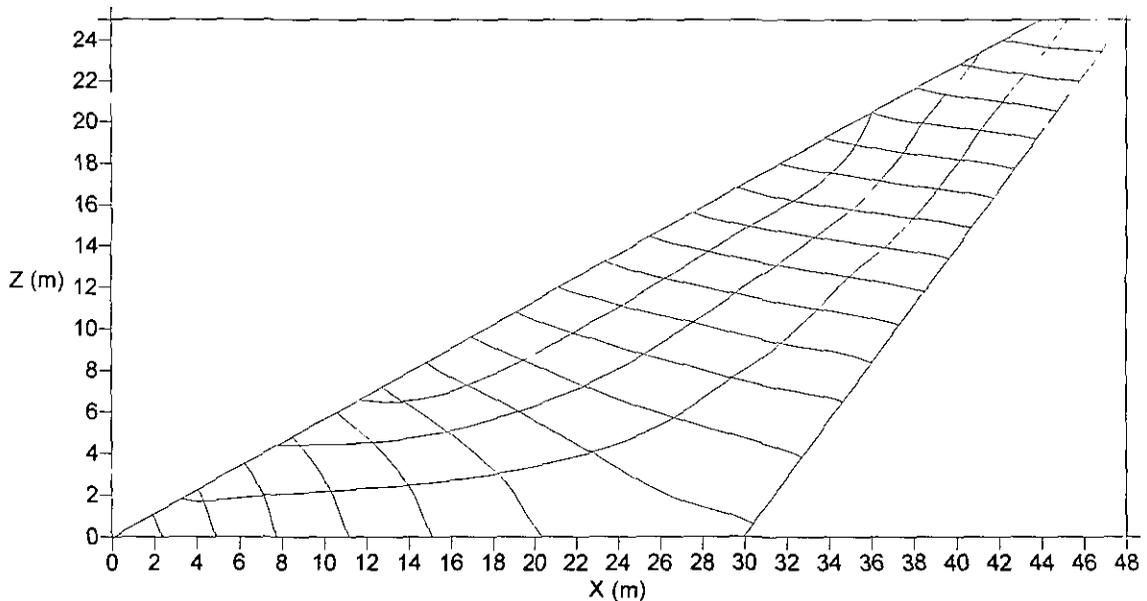


Fig 4.19 Red de flujo esperada cuando se considera el suelo homogéneo y anisótropo

En cuanto al *gradiente hidráulico*, los valores esperados máximos para los casos estudiados se indican en la Tabla 4.6.

Tabla 4.6 Valores esperados de $i_{m\acute{a}x}$

CASO	GRADIENTE MÁXIMO $i_{m\acute{a}x}$ (adimensional)	UBICACIÓN
I	0.59	elemento 1
II	0.82	elemento 79

En esta tabla, se puede apreciar que, en el CASO I, el máximo gradiente esperado ($i_{m\acute{a}x}$) se presenta en la punta inferior del talud de la presa. En el CASO II, el $i_{m\acute{a}x}$ ocurre en la parte superior del mismo talud. Por consiguiente (al igual que en el ejemplo anterior) la magnitud y posición del máximo gradiente esperado tiene que ver con el ya mencionado concepto del gradiente hidráulico ($\Delta h/L$), en donde a una menor distancia de recorrido del agua -dependiendo de la dirección del flujo- corresponde un mayor valor del gradiente hidráulico. Los altos valores de los gradientes hidráulicos esperados anteriores, sugieren que en esta región es probable que las partículas del suelo sean arrastradas por el agua, ya que para evitar que esto ocurra se recomienda que el gradiente de salida no exceda de 0.5 (Berry y Reid, 1993). Las variaciones que presenta el *gradiente hidráulico esperado* en esta sección de la presa se indican en la forma de curvas de isovalores en las Figs 4.20 y 4.21, para los casos analizados, respectivamente.

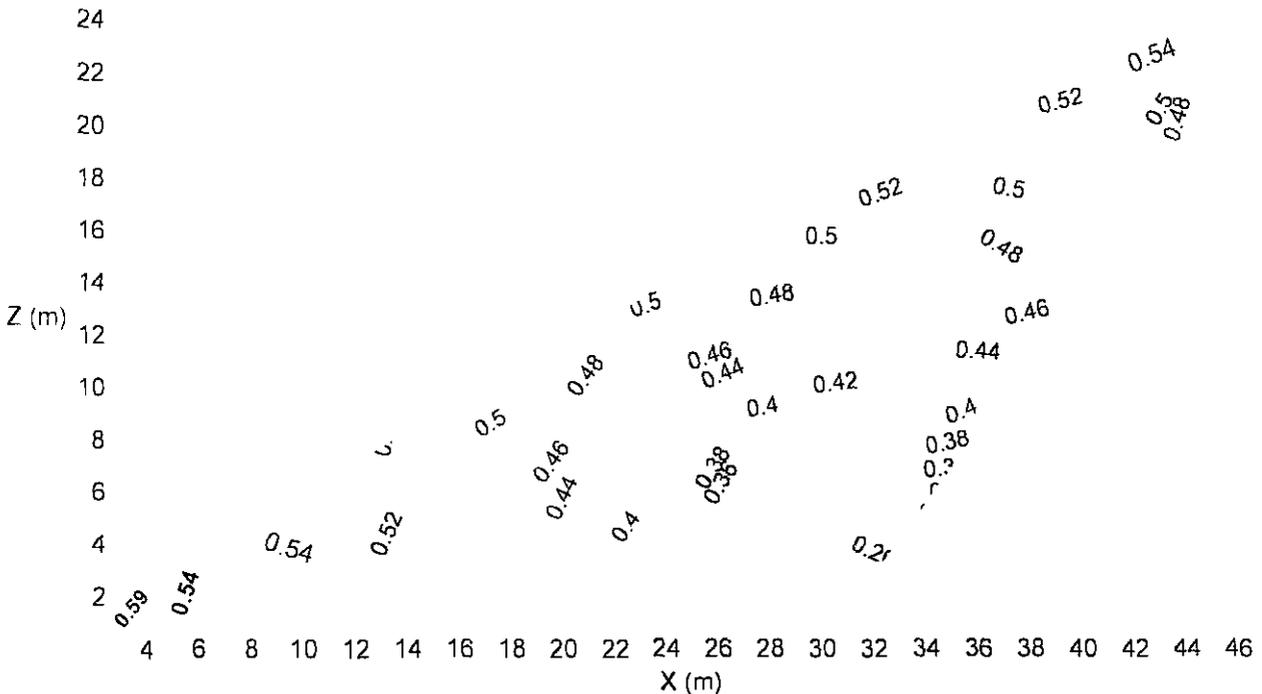


Fig 4.20 Variación del gradiente hidráulico esperado (adimensional) para el CASO I

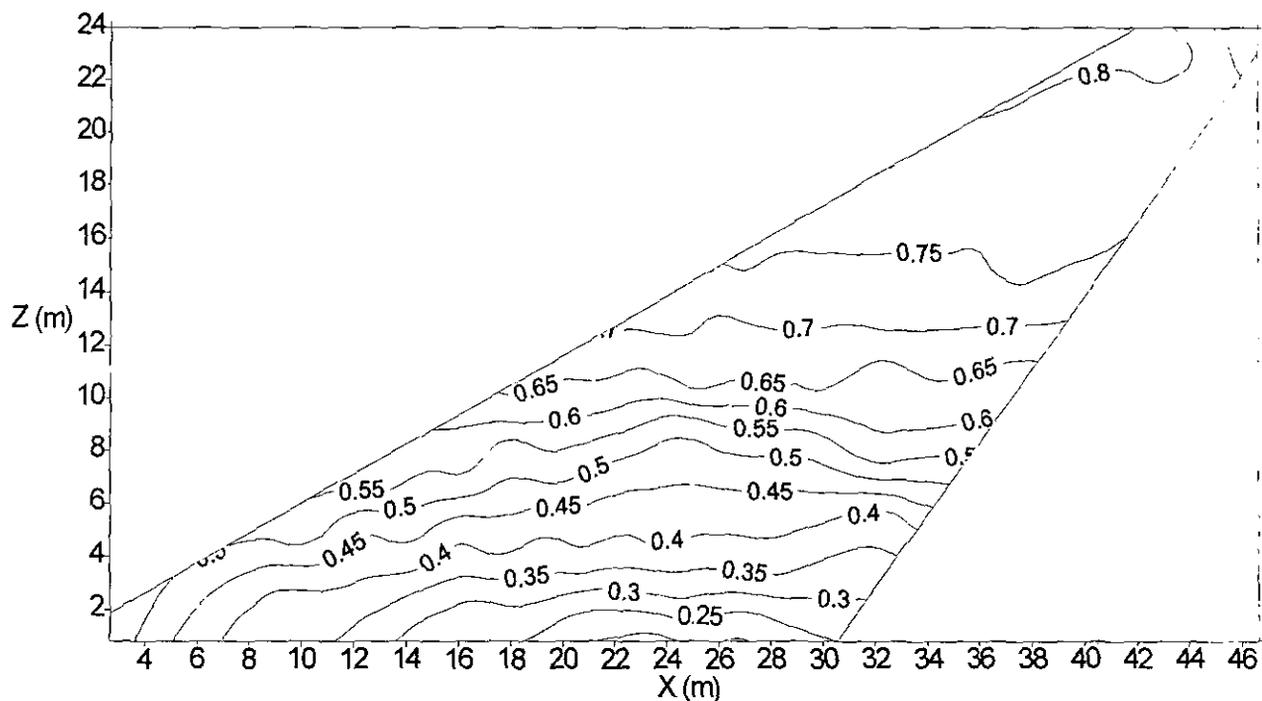


Fig 4.21 Variación del gradiente hidráulico esperado (adimensional) para el CASO II

Los valores esperados máximos para la *velocidad de flujo*, se indican en la Tabla 4.7.

Tabla 4.7 Valores esperados de $V_{m\acute{a}x}$

CASO	VELOCIDAD MÁXIMA $V_{m\acute{a}x}$ (m/s)	UBICACIÓN
I	5.9×10^{-6}	elemento 1
II	5.1×10^{-6}	elemento 1

En ambos casos el valor máximo se presenta en la punta inferior del talud de la presa; esto se debe a que, en el CASO I, ahí se presentó el máximo valor del gradiente hidráulico, y en el CASO II, a que en tal extremo el agua lleva una dirección horizontal y este es el sentido del flujo más representativo para esta condición ($k_x = 5 k_z$). Las variaciones de la *velocidad de flujo esperada* en esta sección de la presa se indican en las Figs 4.22 y 4.23, para los casos analizados, respectivamente.

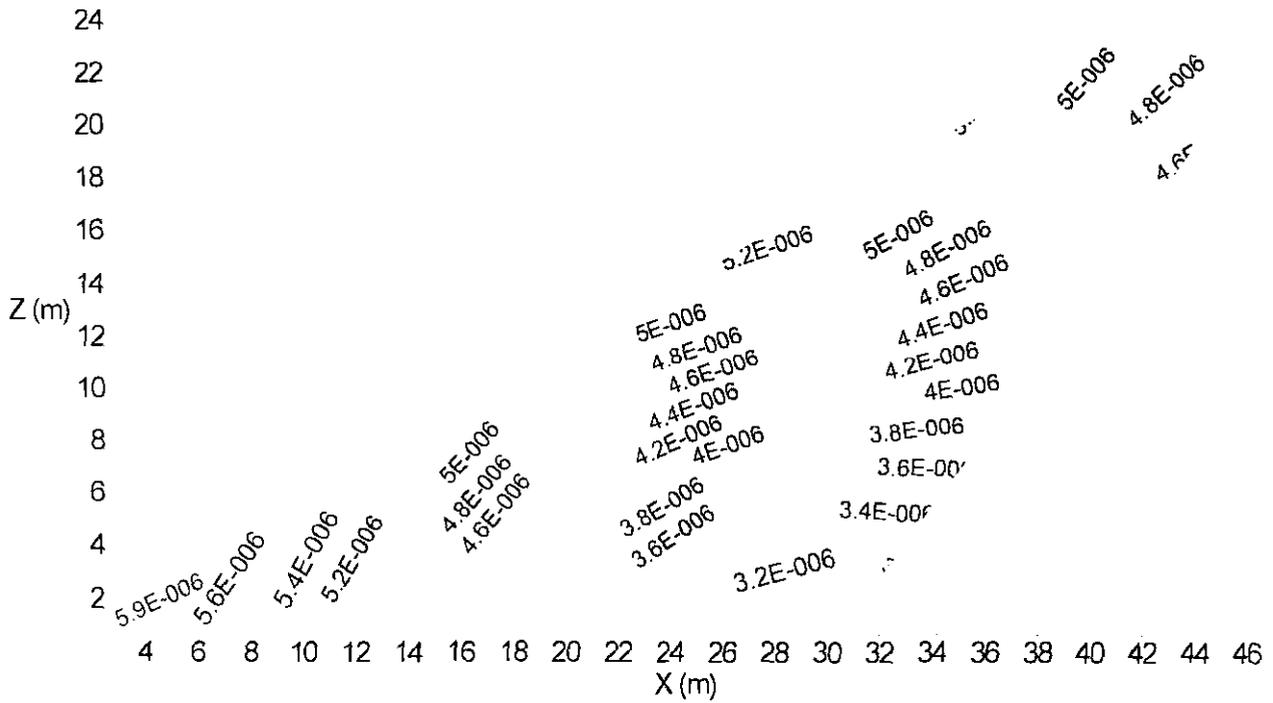


Fig 4.22 Variación de la velocidad de flujo esperada (m/s) para el CASO I

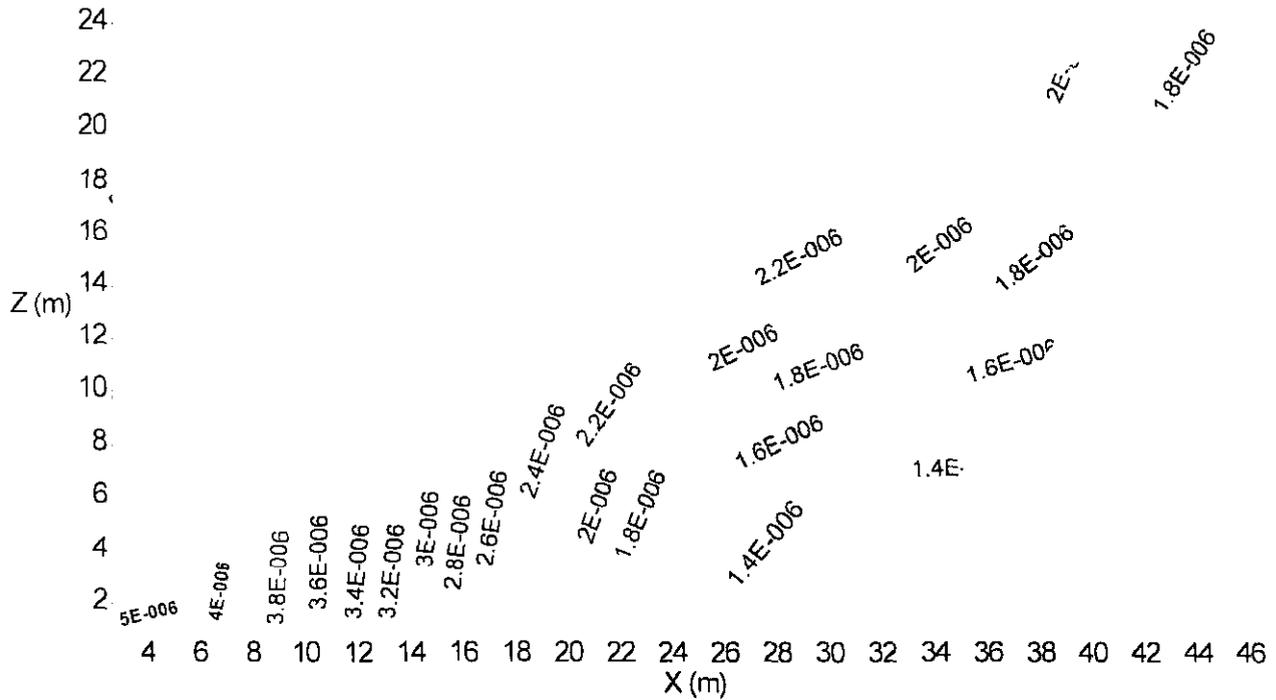


Fig 4.23 Variación de la velocidad de flujo esperada (m/s) para el CASO II

El análisis proporciona también los valores esperados que se indican en la Tabla 4.8 del *gasto total* que pasa a través de la sección permeable de la presa.

Tabla 4.8 Valores esperados del gasto total

CASO	ELEMENTO	NODO OPUESTO AL ELEMENTO	GASTO ^(*) (m ³ /s)	GASTO ^(*) (l/s)
I	50	39	8.5135×10^{-6}	
	51	39	1.0588×10^{-5}	
	39	32	9.8218×10^{-6}	
	30	25	1.1274×10^{-5}	
	$\Sigma = 4.0197 \times 10^{-5}$			
II	50	39	3.4348×10^{-6}	
	51	39	4.5963×10^{-6}	
	39	32	4.7540×10^{-6}	
	30	25	4.0720×10^{-6}	
	$\Sigma = 1.6857 \times 10^{-5}$			

(*) Por metro lineal

c. Dispersión

Los resultados obtenidos con el algoritmo *MEFLUSKO* muestran que, en el CASO I, la incertidumbre tanto en la *carga* como en el *gradiente hidráulico* es nula, debido a la ya mencionada independencia de estas propiedades con el coeficiente permeabilidad del suelo. Por otra parte, el coeficiente de variación de la velocidad de flujo varía en el mismo sentido que

el de la permeabilidad: $\frac{\sigma_k}{E\{k\}} = \frac{\sigma_v}{E\{v\}} = 20\%$, es decir, permanece constante en toda la sección.

En el CASO II, se obtiene que las mayores desviaciones estándar son:

- Para la *carga hidráulica*: $\sigma_{h_{max}} = 0.92$ m (en la esquina inferior derecha de la sección permeable analizada –Fig 4.24–). Se observa que este valor máximo se presenta en la región más alejada de las fronteras con carga hidráulica conocida. Algo curioso, es que las curvas de isovalores de esta incertidumbre varían siguiendo aproximadamente la inclinación del talud, y tienen cierta similitud con las líneas de abatimiento del agua que se presentan en un problema de vaciado rápido en distintos tiempos.
- Para el *gradiente hidráulico*: $\sigma_{i_{max}} = 0.37$ (en el elemento 11 –cerca de la parte inferior de la sección permeable de la presa, como se ilustra en la Fig 4.25–). Es decir, que la mayor incertidumbre se presenta en la región donde la dirección del flujo predominante es la horizontal.
- Para la *velocidad de flujo*: $\sigma_{v_{max}} = 8.5 \times 10^{-7}$ m/s (en el elemento 1 –esquina inferior izquierda de la región permeable de la presa, como se indica en la Fig 4.26–). Este valor máximo coincide con la zona donde se presentó la mayor velocidad.

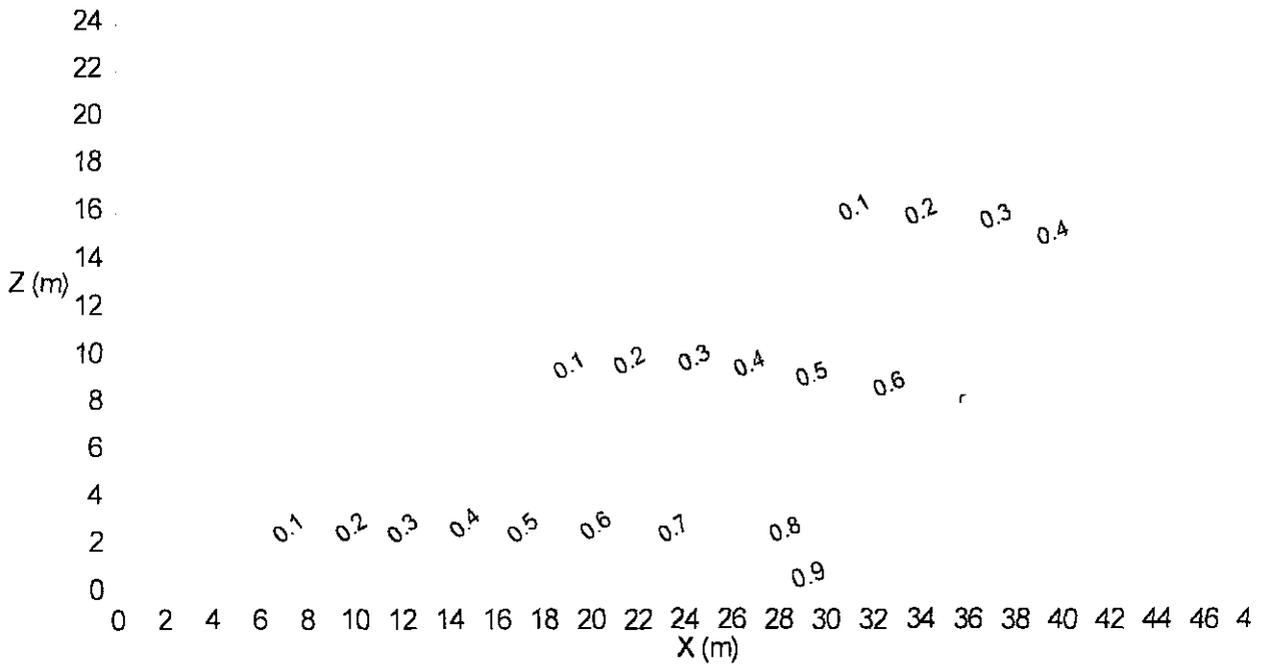


Fig 4.24 Desviación estándar de la carga hidráulica (m) para el CASO II

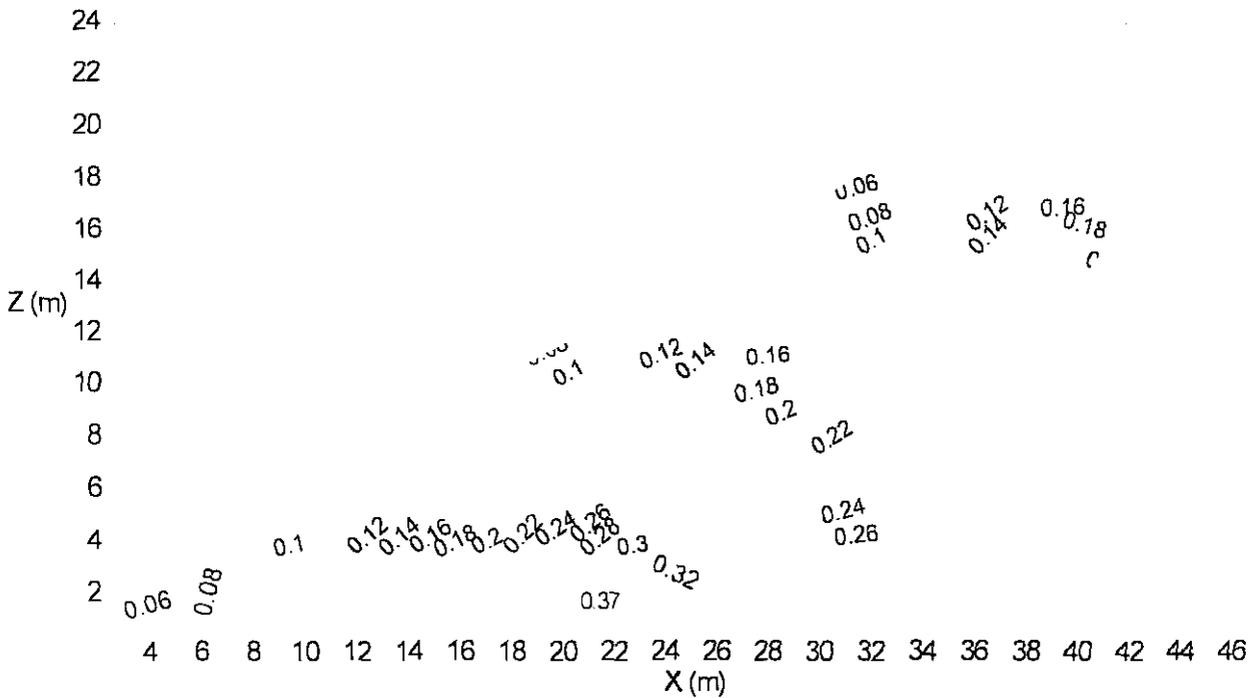


Fig 4.25 Desviación estándar del gradiente hidráulico (adimensional) para el CASO II

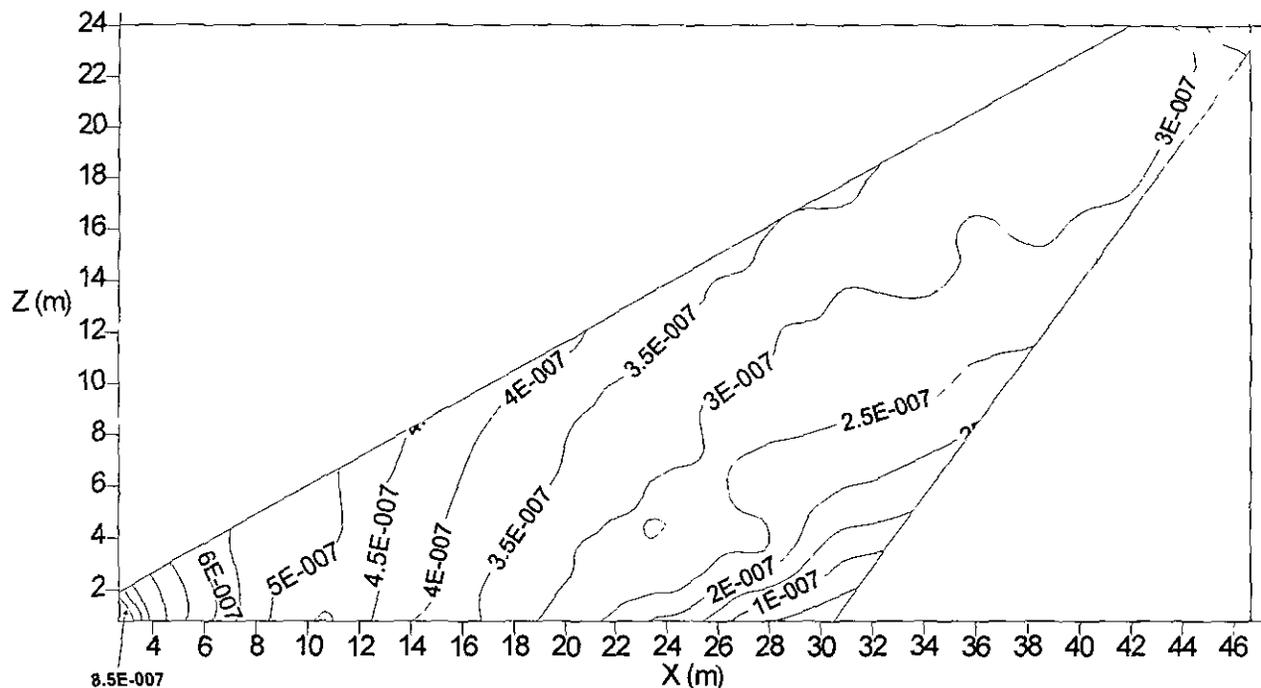


Fig 4.26 Desviación estándar de la velocidad de flujo (m/s) para el CASO II

4.4.2 Flujo a través de la cimentación de una presa

a. Características generales

Se analiza el flujo de agua a través de la cimentación de la presa *Las Tórtolas*, localizada en el estado de Durango (*Marsal et al*, 1976), y construida sobre el río Nazas con la finalidad de controlar avenidas y aumentar el riego en la zona llamada La Laguna, en el norte de México. Esta presa tiene una altura de 33 m sobre el lecho del río y 480 m de longitud (Fig 4.27), constituyendo un volumen total de $870\,500\text{ m}^3$. Está formada por un núcleo central de arcilla compactada y respaldos permeables de grava y arena, protegidos exteriormente por enrocamiento; también posee un filtro de arena - grava bien graduada de 5 m de espesor localizado entre el corazón impermeable y el respaldo de aguas abajo.

La presa está ubicada en la entrada del cañón *Fernández*, en un territorio ocupado por calizas cársticas del cretáceo superior. El eje de la misma se localiza sobre la formación *Kiamichi* integrada por capas de calizas y lutitas, las cuales están cubiertas en el cauce por un depósito de aluvión de 140 m de espesor máximo aproximadamente. Por tanto, debido a que las filtraciones a través del núcleo arcilloso de la presa son insignificantes en comparación con las que pudieran presentarse en el suelo de cimentación, la presencia de este depósito es la que llama la atención en este problema. En consecuencia, se decidió construir una pantalla parcial de 25 m de profundidad (*Marsal et al*, 1976), mediante el procedimiento de trinchera excavada en presencia de lodo bentonítico y relleno de suelo bien graduado, de 3 m de ancho y taludes 2:1 en el contacto con el corazón impermeable (Fig 4.27). Con esta pantalla impermeable no se pretende reducir las filtraciones puesto que el almacenamiento de agua no es primordial en este caso, sino más bien constituir una línea de defensa contra el desarrollo de la erosión interna en el depósito de aluvión. En la selección de este tipo de pantalla se consideraron la carencia de material arcilloso en la proximidad de la presa y el mayor costo de las pantallas de tipo rígido.

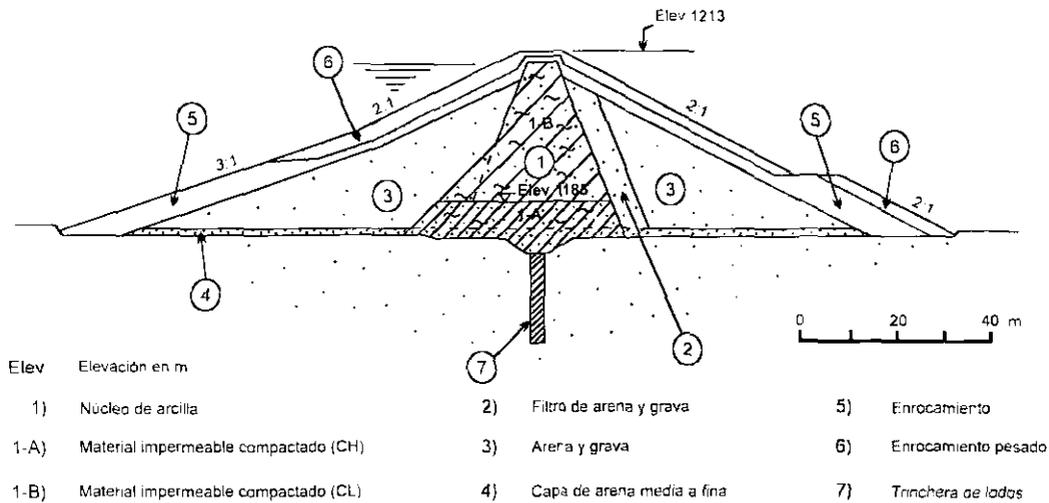


Fig 4.27 Sección máxima de la presa Las Tórtolas

b. Análisis considerando k como la variable aleatoria

b.1 CASO I: Suelo homogéneo e isótropo

Se realizó un primer análisis considerando al suelo de cimentación como aleatorio pero homogéneo e isótropo, con valores esperados de las permeabilidades:

$$E\{k_x\} = E\{k_z\} = 1 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

y coeficientes de variación $\frac{\sigma_k}{E\{k\}} = 100\%$, es decir con desviaciones estándar

$\sigma_{k_x} = \sigma_{k_z} = 1 \times 10^{-4} \text{ m/s}$, y correlación positiva perfecta entre las mismas: $\rho = 1$.

El dominio analizado se representó con una malla de 85 elementos finitos y 60 nodos, para una longitud de 810 m en la dirección transversal de la presa, además, se impusieron las condiciones de frontera $h = 30 \text{ m}$ y $h = 0 \text{ m}$ como se indica en la Fig 4.28. Asimismo, se consideró al núcleo de arcilla de la presa como impermeable, y se supuso que el agua atraviesa a los materiales restantes (enrocamiento, grava y arena). La red de flujo esperada en este caso se ilustra en la Fig 4.28.

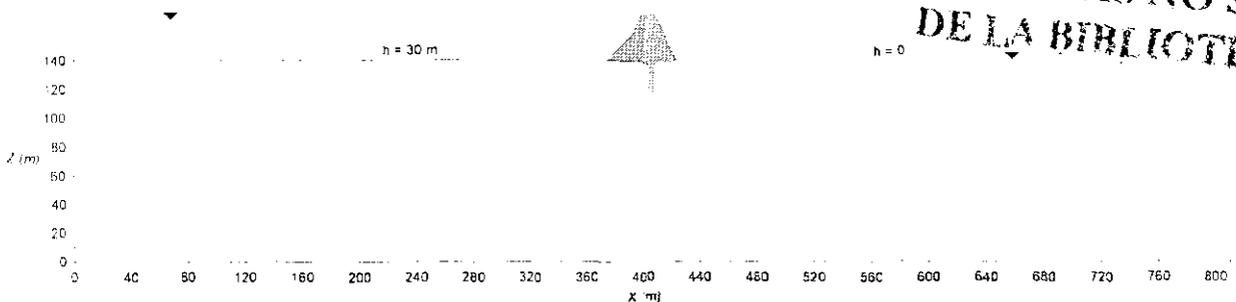


Fig 4.28 Red de flujo esperada en la presa Las Tórtolas, cuando se considera el suelo como homogéneo e isótropo

ESTA TESIS NO SALE DE LA BIBLIOTECA

El análisis realizado por medio del algoritmo *MEFLUSKO* proporciona los siguientes valores esperados:

$$E\{i_{max}\} \approx 1.44$$

$$E\{V_{max}\} \approx 1.44 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

Ambos resultados máximos se presentan en la punta de la pantalla impermeable, afirmación que no sorprende puesto que en esta región tanto el gradiente como la velocidad de flujo, son teóricamente infinitos.

Por otra parte, los resultados obtenidos del *análisis de incertidumbre*, ratifican lo determinado en ejemplos anteriores con estas mismas características, esto es:

- Tanto la carga como el gradiente hidráulico tienen incertidumbre nula, debido a la independencia de k con estas propiedades.
- La incertidumbre en la velocidad de flujo es constante en todo el medio, y varía igual que la de la permeabilidad, es decir presenta un coeficiente de variación $\frac{\sigma_V}{E\{V\}} = 100\%$.

Con este mismo algoritmo se obtuvo que, considerando la longitud de la presa $L = 480 \text{ m}$, el gasto esperado que pasa a través del suelo de cimentación es:

$$E\{q\} \approx 1.12 \text{ m}^3/\text{s}$$

Valor esperado alto pero que se considera aceptable para los fines de la presa (el riego principalmente), y que además, presenta un coeficiente de variación igual que el de la permeabilidad, $\frac{\sigma_q}{E\{q\}} = 100\%$, es decir, que el gasto también varía en el mismo sentido que k .

El valor esperado del gasto puede comprobarse fácilmente, de manera aproximada, como sigue:

- Con la ley de Darcy:

$$i = \Delta h / L = 22 \text{ m} / 100 \text{ m} = 0.22$$

$$V = k i = (1 \times 10^{-4} \text{ m/s})(0.22) = 2.2 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$q = (2.2 \times 10^{-5} \text{ m/s})(116 \text{ m})(480 \text{ m}) = 1.2249 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$q \approx 1.22 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Con la red de flujo de la Fig 4.28:

$$\$ = n_f / n_e = 7/10$$

$$q = k \Delta h \$ L = (1 \times 10^{-4} \text{ m/s})(30 \text{ m})(7/10)(480 \text{ m}) = 1.008 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$q \approx 1 \text{ m}^3/\text{s}$$

b.2 CASO II: Suelo heterogéneo

De acuerdo con estimaciones obtenidas mediante pruebas de permeabilidad Lefranc (*Marsal et al, 1976*), en un segundo análisis se aceptó que el suelo de la cimentación está constituido por dos mantos (Fig 4.29):

- El superficial (*material A*), de 20 m de espesor aproximadamente, formado por arenas y gravas bien graduadas, con permeabilidad esperada $E\{k_{x_A}\} - E\{k_{z_A}\} = 1 \times 10^{-4} \text{ m/s}$.
- El inferior (*material B*), también constituido por gravas y arenas, ligeramente cementadas con finos y con un coeficiente de permeabilidad esperado $E\{k_{x_B}\} = E\{k_{z_B}\} = 1 \times 10^{-5} \text{ m/s}$.

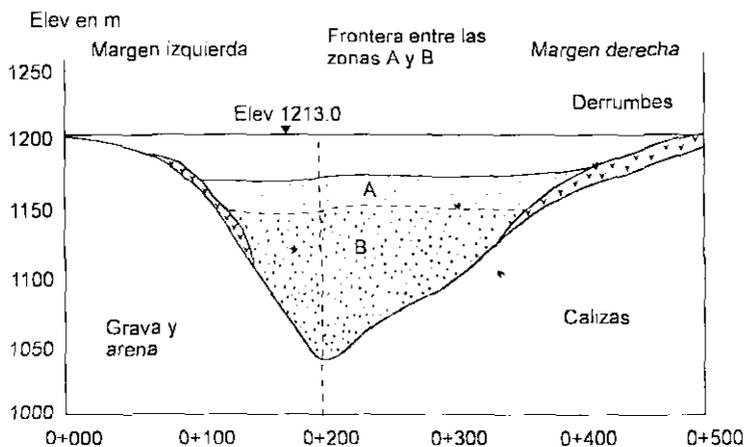


Fig 4.29 Corte geológico por el eje de la presa Las Tórtolas

Para tomar en cuenta la incertidumbre respecto a las permeabilidades en el dominio analizado debida a la dificultad de obtener una estimación fidedigna global de estas propiedades (pero no a la variación espacial de las mismas), se realizó un análisis de incertidumbre considerando que las desviaciones estándar de k son iguales a los valores esperados de la permeabilidad indicados, es decir $\sigma_{k_{x_A}} = \sigma_{k_{z_A}} = 1 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ y $\sigma_{k_{x_B}} = \sigma_{k_{z_B}} = 1 \times 10^{-5} \text{ m/s}$. Se consideró además, que no existe correlación entre las permeabilidades de los *materiales A y B*: $\rho(k_{x_A}, k_{x_B}) = 0$, y que las permeabilidades horizontales y verticales de cada material presentan correlación perfecta: $\rho(k_{x_A}, k_{z_A}) = 1$ y $\rho(k_{x_B}, k_{z_B}) = 1$.

En la resolución de este caso se empleó la misma malla de elementos finitos que en el inciso anterior, conduciendo a la red de flujo esperada que se ilustra en la Fig 4.30.

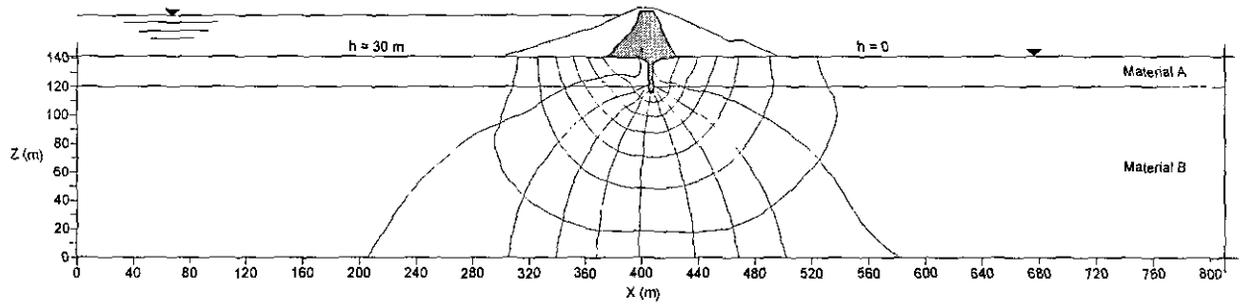


Fig 4.30. Red de flujo esperada en la presa *Las Tórtolas*, cuando se consideran los materiales A y B

En esta presa se establecieron dos secciones de medición; la 0+200 y la 0+300, en ellas se instalaron, piezómetros (Fig 4.31), entre otros, ubicados de tal manera que permitieran hacer comparaciones con la información que proporcionan los métodos convencionales de predicción del escurrimiento de agua (Marsal et al, 1976). Al respecto, en la Tabla 4.9 se proporcionan las mediciones piezométricas, los potenciales obtenidos de los primeros análisis realizados y los calculados con el algoritmo MEFLUSKO (desarrollado en esta tesis). Si se comparan las mediciones en dos secciones transversales 0+200 y 0+300 con los valores calculados, se observan discrepancias que ponen en evidencia la complejidad estratigráfica del depósito aluvial en cuestión y la importancia de los pequeños detalles geológicos, no descubiertos por las exploraciones y las pruebas de campo (Marsal et al, 1976).

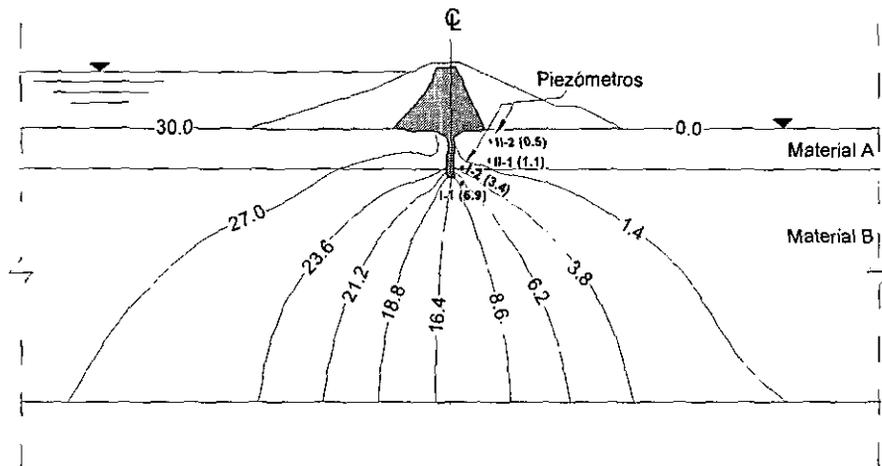


Fig 4.31 Líneas equipotenciales obtenidas con *MEFLUSKO* en la presa *Las Tórtolas*

Tabla 4.9 Comparación de cargas hidráulicas y mediciones piezométricas en Las Tórtolas

PIEZÓMETRO	MEDICIÓN*		CÁLCULOS*		
	SECCIÓN 0+200	SECCIÓN 0+300	MEF (Marsal et al, 1976)	Técnicas de Monte Carlo (Marsal et al, 1976)	MEFLUSKO (López, 1999)
I-1	11.0	10.5	7.1	7.1	6.9
I-2	10.5	9.5	3.6	2.8	3.4
II-1	9.5	7.5	1.5	1.1	1.1
II-2	3.0	2.5	0.42	0.70	0.5

* Mediciones y cálculos expresados en metros

Por otra parte, los resultados del *análisis de incertidumbre* muestran que la *máxima desviación estándar de la carga hidráulica*, $\sigma_{h_{max}} \approx 3.30$ m, se presenta a ambos lados de la pantalla impermeable, justo en la frontera que separa a los *materiales A y B*, como se indica en la Fig 4.32. Esta figura muestra que las desviaciones estándar sobre la carga hidráulica calculadas no permiten explicar las discrepancias encontradas, aún cerca de la pantalla (piezómetros I-1 e I-2). Lo anterior sugiere que la *incertidumbre* supuesta en el análisis sobre los coeficientes de permeabilidad es inferior a la real o que el mecanismo de flujo no es el considerado en el modelo determinista.

Respecto al *gradiente hidráulico*, el máximo valor esperado, $E\{i_{max}\} \approx 3.30$, ocurre en la punta de la pantalla impermeable. Comparando este resultado con el del inciso anterior (suelo homogéneo e isótropo), se observa que conforme aumenta el número de materiales, el valor del gradiente hidráulico esperado se incrementa. Igualmente, la máxima desviación estándar se presenta en la punta de esta pantalla con un valor $\sigma_{i_{max}} \approx 0.90$, como se indica en la Fig 4.33 en la forma de *curvas de isovalores*.

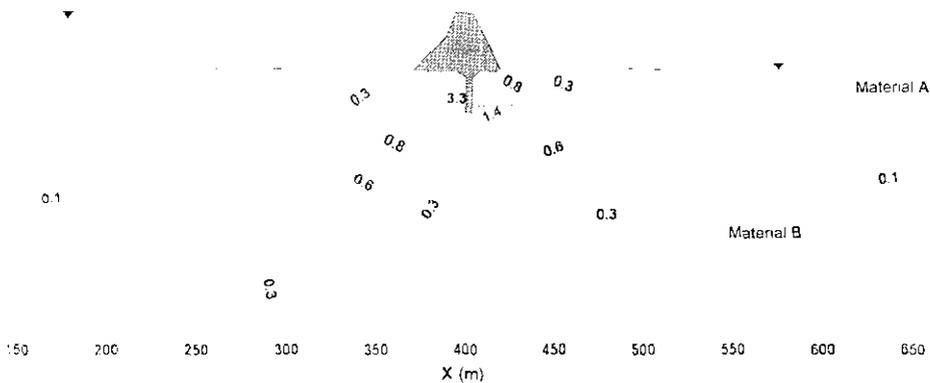


Fig 4.32 Desviación estándar de la carga hidráulica (m), en la presa Las Tórtolas

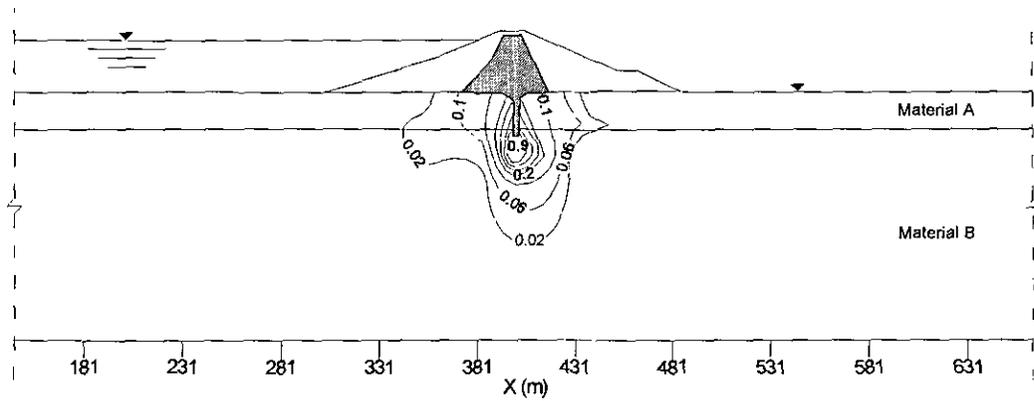


Fig 4.33 Desviación estándar del gradiente hidráulico (adimensional), en la presa Las Tórtolas

En cuanto a la *velocidad de flujo* el valor máximo esperado resulta $E\{V_{max}\} \approx 3.30 \times 10^{-5} \text{ m/s}$, y también se presenta en la punta de la pantalla impermeable. Nuevamente, comparando con el inciso anterior se observa que contrariamente al comportamiento de i , en este caso, conforme aumenta el número de materiales la velocidad esperada tiende a disminuir. De igual forma, la mayor incertidumbre se presenta en esta misma zona (Fig 4.34), con una desviación estándar máxima $\sigma_{V_{max}} \approx 2.80 \times 10^{-5} \text{ m/s}$.

Los análisis realizados indican que el gasto que pasa a través del suelo de cimentación tiene un valor esperado $E\{q\} \approx 0.19 \text{ m}^3/\text{s}$ y presenta una desviación estándar $\sigma_q \approx 0.14 \text{ m}^3/\text{s}$.

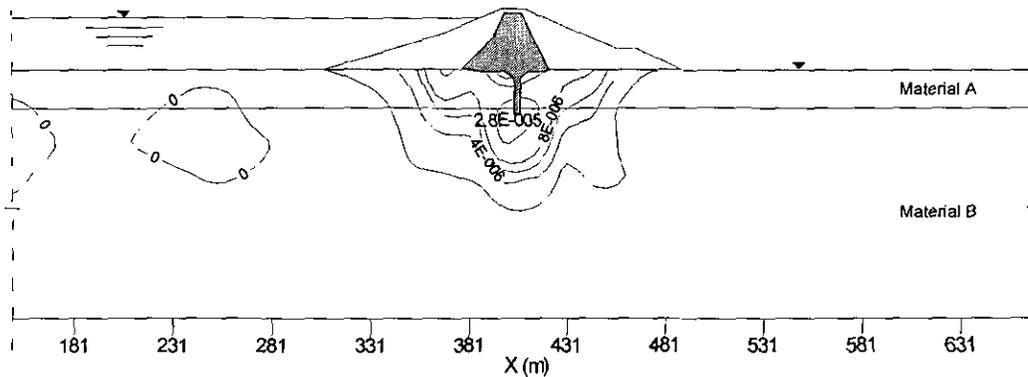


Fig 4.34 Desviación estándar de la velocidad de flujo (m/s), en la presa Las Tórtolas

Una comparación de lo que ocurre con la incertidumbre cuando se varía la correlación entre las permeabilidades de los *materiales A y B* se ilustra en la Tabla 4.10.

Tabla 4.10 Desviaciones estándar máximas para diferentes correlaciones entre las permeabilidades de los materiales A y B de la presa *Las Tórtolas*

INCERTIDUMBRE	$\rho(k_A, k_B) = 0$	$\rho(k_A, k_B) = 0.5$	$\rho(k_A, k_B) = 1$
$\sigma_{h_{max}}$ (m)	3.30	2.32	0
$\sigma_{i_{max}}$ (adimensional)	0.90	0.63	0
$\sigma_{V_{max}}$ (m/s)	2.80×10^{-5}	3.07×10^{-5}	3.30×10^{-5}
σ_q (m ³ /s)	0.14	0.15	0.16

De esta Tabla se deduce que, la incertidumbre tanto en la carga como en el gradiente hidráulico disminuye conforme se incrementa la correlación entre las permeabilidades y, por lo contrario, la incertidumbre en la velocidad de flujo y en el gasto aumenta.

c. Análisis considerando $\log k$ como la variable aleatoria

Para llevar a cabo este estudio, se respetaron las condiciones del inciso anterior, es decir:

- CASO I: Suelo homogéneo e isótropo, con valor esperado del coeficiente de permeabilidad $E\{k_x\} = E\{k_z\} = 1 \times 10^{-4}$ m/s.
- CASO II: Suelo heterogéneo, constituido por dos materiales, A y B, con permeabilidades esperadas $E\{k_{x_A}\} = E\{k_{z_A}\} = 1 \times 10^{-4}$ m/s y $E\{k_{x_B}\} = E\{k_{z_B}\} = 1 \times 10^{-5}$ m/s.

Asimismo, se empleó la malla de 85 elementos finitos y 60 nodos con las características y condiciones de frontera indicadas con anterioridad.

En vista de que todos estos datos son iguales a los considerados cuando se realizó el análisis para la variable aleatoria k , entonces, los resultados esperados para este caso (redes de flujo, gradientes, velocidades y gastos –en ambos suelos–) son exactamente iguales a los obtenidos por el programa *MEFLUSKO* en la parte mencionada.

Para realizar el análisis de incertidumbre, las matrices de covarianzas de k requeridas, se establecen a partir de las densidades de probabilidad mostradas en las Figs 4.35 y 4.36 para los CASOS I y II, respectivamente, en las cuales se considera que, en ambos casos los valores esperados de k varían en más–menos un orden de magnitud; esto es, en el CASO I, la permeabilidad varía en el rango $1 \times 10^{-5} < 1 \times 10^{-4} < 1 \times 10^{-3}$ m/s, pero como se trata del logaritmo decimal ($\log k$), los valores anteriores se convierten en -5, -4 y -3, respectivamente (Fig 4.35). De manera análoga es para el CASO II.

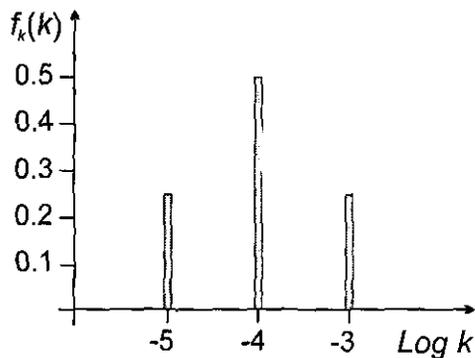


Fig 4.35 Densidad de probabilidad en el CASO I

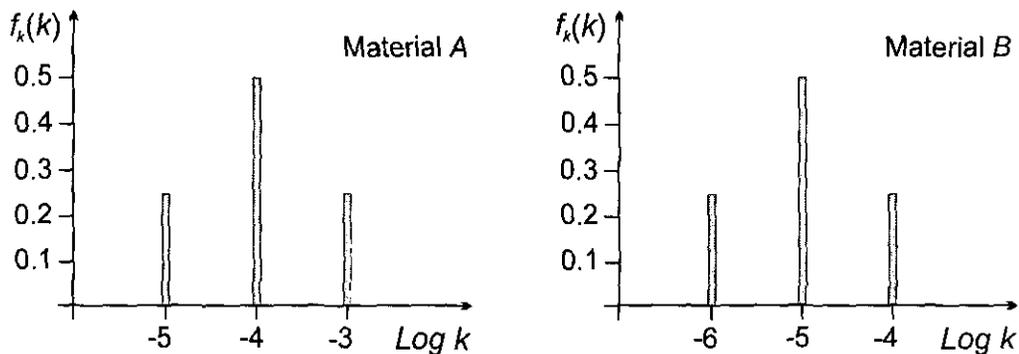


Fig 4.36 Densidad de probabilidad en el CASO II

De las densidades de probabilidad anteriores, se puede obtener la varianza de k a partir de la expresión:

$$\text{var} [\text{Log } k] = \sum (\text{Log } k_i)^2 p_i - (-4)^2$$

es decir que, en el CASO I:

$$\text{var} [\text{Log } k_x] = \text{var} [\text{Log } k_z] = (-5)^2(0.25) + (-4)^2(0.50) + (-3)^2(0.25) - (-4)^2 = 0.5$$

y en el CASO II:

$$\text{Mat. A: } \text{var} [\text{Log } k_x] = \text{var} [\text{Log } k_z] = (-5)^2(0.25) + (-4)^2(0.50) + (-3)^2(0.25) - (-4)^2 = 0.5$$

$$\text{Mat. B: } \text{var} [\text{Log } k_x] = \text{var} [\text{Log } k_z] = (-5)^2(0.25) + (-4)^2(0.50) + (-3)^2(0.25) - (-4)^2 = 0.5$$

Además, se considera que en el CASO I (suelo homogéneo e isótropo), se tiene una correlación perfecta entre las permeabilidades horizontal y vertical: $\rho(k_x, k_z) = 1$; y en el CASO II (suelo heterogéneo) se tiene correlación unitaria entre las permeabilidades de cada material: $\rho(k_{x_A}, k_{z_A}) = 1$ y $\rho(k_{x_B}, k_{z_B}) = 1$, pero correlación nula entre las permeabilidades de ambos materiales, es decir, $\rho(k_{x_A}, k_{x_B}) = 0$. Por tanto, las matrices de covarianza de la permeabilidad resultan:

CASO I:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

CASO II:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Estas matrices fueron introducidas en el algoritmo *SFEMLOGK*, para realizar el *análisis de incertidumbre* de este problema; obteniéndose que, en el CASO I (suelo homogéneo e isótropo), los resultados son similares a los que se determinaron cuando se consideró a k como la variable aleatoria, es decir, incertidumbre nula tanto en la carga como en el gradiente hidráulico, e incertidumbre constante en todo el medio analizado tanto en la velocidad de flujo como en el gasto. Con respecto al CASO II (suelo heterogéneo), los valores máximos de las desviaciones estándar resultaron:

- Para la carga hidráulica: $\sigma_{h_{max}} \approx 5.30 \text{ m}$, que ocurre a ambos lados de la pantalla impermeable en la frontera de los materiales A y B (Fig 4.37).
- Para el gradiente hidráulico: $\sigma_{i_{max}} \approx 1.40$, localizado en la punta de la pantalla impermeable (Fig 4.38).
- Para la velocidad de flujo: $\sigma_{v_{max}} \approx 4.50 \times 10^{-5} \text{ m/s}$, ubicado en la punta de la pantalla impermeable (Fig 4.39).
- Para el gasto que pasa debajo de la pantalla mencionada: $\sigma_q \approx 0.23 \text{ m}^3/\text{s}$, considerando la longitud de la presa $L=480 \text{ m}$.

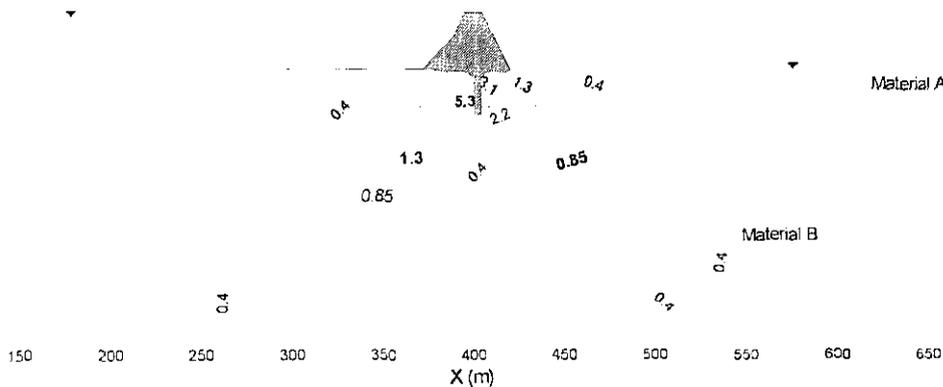


Fig 4.37 Desviación estándar de la carga hidráulica (m), en el análisis con *Log k*

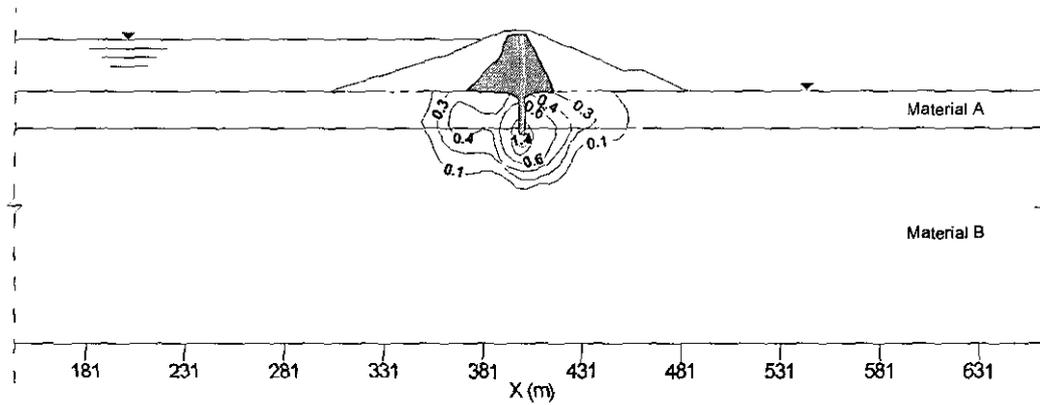


Fig 4.38 Desviación estándar del gradiente hidráulico (*adimensional*), en el análisis con *Log k*

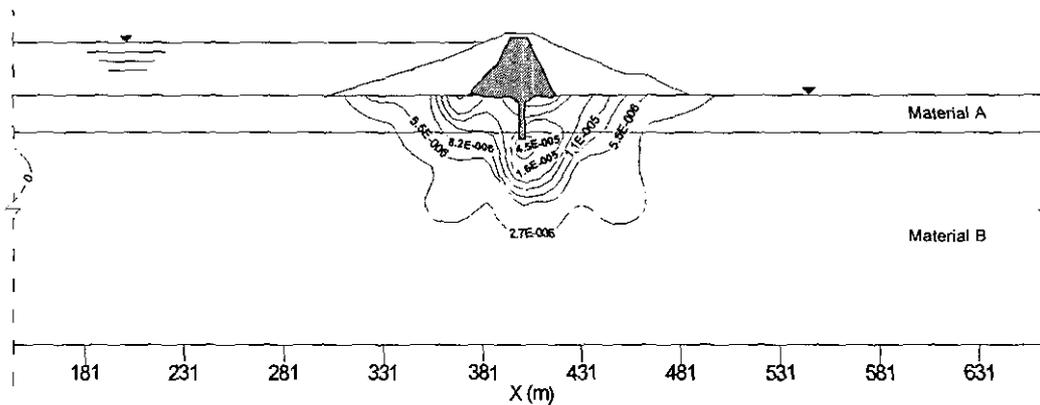


Fig 4.39 Desviación estándar de la velocidad de flujo (*m/s*), en el análisis con *Log k*

Se puede apreciar que la variación de todas estas curvas es similar a la variación de las curvas para el caso en que se consideró a k como la variable aleatoria (Figs 4.32 a 4.34, respectivamente); además, las zonas donde se tiene la incertidumbre máxima, coinciden en uno y otro caso.

5.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se pudo apreciar la utilidad del *Método del Elemento Finito Estocástico* que permite introducir un mayor grado de realismo en el estudio de los problemas de flujo de agua. Sin embargo, las posibilidades que ofrece la aplicación de la teoría de la probabilidad no se limitan a lo expuesto en los incisos anteriores. En este capítulo, se examinan algunos conceptos y técnicas potencialmente útiles para el ingeniero geotecnista y se plantean posibles temas de investigación para el futuro.

5.2 SIMULACIÓN DE CAMPOS ALEATORIOS

En secciones precedentes, ya se vió que las permeabilidades en cada punto del espacio pueden ser muy variables debido a la heterogeneidad, anisotropía y discontinuidad de los suelos. Además, la hipótesis de que no existe correlación espacial entre las permeabilidades de un dominio dado, es raramente válida para el caso de un problema de flujo de agua. Los *campos aleatorios* son modelos útiles para representar estas variaciones espaciales (Alonso, 1979; Auvinet, 1991; Honjo, 1991).

La *Simulación de Monte Carlo* o *Simulación de Campos Aleatorios* (Auvinet, 1994; Auvinet, Bouayed y Ben Cheikh, 1995; Fenton, 1996), consiste en simular diversos campos aleatorios y analizar cada uno para generar un conjunto de respuestas, de las que se puede construir una gráfica de la distribución del conjunto y de ésta obtener la probabilidad buscada. En la actualidad, gracias a las computadoras, este tipo de simulación se ha convertido en una herramienta atractiva. Para su realización, primero debe definirse el modelo de campo aleatorio a emplear en un determinado dominio.

La *simulación incondicional* consiste en definir una o varias realizaciones posibles del campo de interés.

La *simulación condicional* consiste en simular realizaciones que pasan por los datos conocidos pero que son aleatorias en los datos restantes. Son simulaciones de lo que se ha llamado el *campo condicional*.

Los *campos aleatorios* se han empleado en diversas áreas, entre ellas en la geotecnia, en múltiples problemas que tienen que ver con la variabilidad de las propiedades del suelo (Mahadevan y Haldar, 1991); así como, en la solución de problemas de flujo establecido de agua (Griffiths, Fenton y Paice, 1996); en el estudio de la exactitud de los análisis de Elemento Finito Estocástico de problemas de flujo de agua (Alonso y Melloni, 1987); en la consolidación de suelos bajo exceso de presión de poro inicial estocástica (Darrag y Tawil, 1993); en el control de la compactación de terraplenes (Auvinet y Abaziou, 1993); en el análisis del flujo tridimensional en medios porosos heterogéneos y anisótropos (Rubin y Dagan, 1992); en el análisis de los efectos de la distribución aleatoria de las propiedades de infiltración en el comportamiento hidrológico de áreas de captación (Smith y Hebbert, 1979), en la respuesta dinámica de grupos de pilotes (Dobry y Taboada-Urtuzuastegui, 1991), entre otros.

En el ANEXO B se proporciona una información más detallada respecto a los campos aleatorios.

5.3 TEORÍA DE LA PERCOLACIÓN

Propuesta en 1956 por el matemático inglés Hammersley (Gilles de Gennes, 1976), la *Teoría de la Percolación* permite obtener una descripción estadística de aquellos sistemas constituidos por un gran número de elementos que pueden relacionarse entre sí en un medio aleatorio. Dentro de tales sistemas, puede ser posible la comunicación a grandes distancias dependiendo del número de partículas y de los enlaces o conexiones que exista entre ellas. A partir de esta teoría se pueden describir en términos similares la circulación de un fluido a través del suelo, la conducción dentro de ciertos tipos de aleaciones, la viscosidad de materiales polimerizados, la conversación de una red telefónica, etc.

Para el caso de problemas de flujo de agua, la *percolación* es la propagación de un fluido dependiendo de las conexiones que existan en el medio. Es decir, en un *proceso de percolación* el movimiento del fluido no se realiza al azar, sino que está gobernado por el medio (Shante y Kirkpatrick, 1971).

Tener presente el concepto de *percolación* es importante en los problemas de flujo de agua, sobre todo cuando existen zonas con distintas permeabilidades dentro del medio analizado (p. ej. una presa de materiales graduados, detalles geológicos en el dominio estudiado, etc.). El peligro consiste en que si estas zonas se interconectan por medio de vínculos desconocidos pueden constituir un canal a través del cual puede circular el agua con grandes gastos.

Ejemplos de no percolación y percolación se muestran en las Figs 5.1 y 5.2. En estas figuras se observa que, si no se ha evaluado correctamente la condición de percolación, la estimación del gasto por filtración puede resultar totalmente equivocada. Resulta claro que si el campo de permeabilidades es aleatorio, debido al desconocimiento que se tiene de su estructura, es de gran interés estimar la *probabilidad de percolación*, es decir que, el flujo pueda presentarse por algún camino preferencial (atajo) y que prevalezcan condiciones de flujo totalmente diferentes de las existentes en un material homogéneo.

La *Teoría de la Percolación* se ha utilizado para la simulación de fracturas en los análisis hidrogeológicos de masas de roca fracturada (Rouleau y Gale, 1987). Asimismo en combinación con *Simulaciones de Monte Carlo* en enrejados finitos para estudiar la variación de la probabilidad de percolación crítica p_c dentro de campos aleatorios bi o tridimensionales (Silliman, 1990).

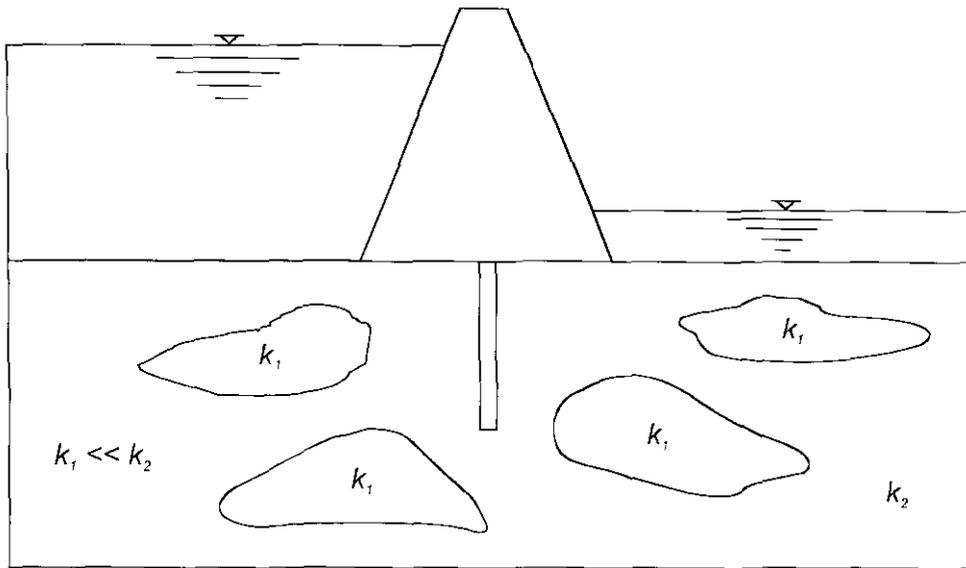


Fig 5.1 Condición de no percolación

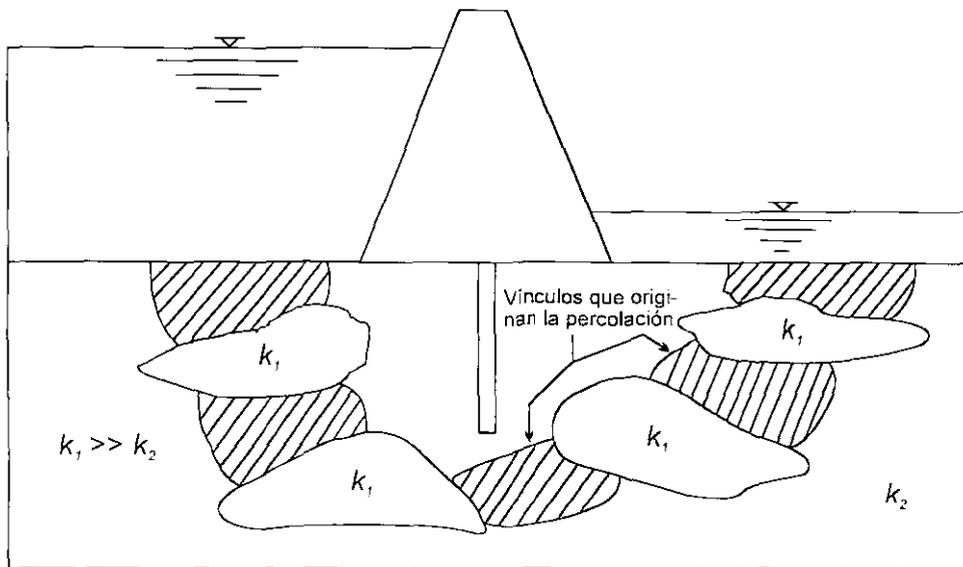


Fig 5.2 Condición de percolación

5.4 ANÁLISIS BAYESIANO

En términos muy sencillos, el *análisis bayesiano* consiste en encontrar la probabilidad condicional de un suceso *A*, dado que un suceso *B* ha ocurrido en un momento anterior. En el caso de los problemas de flujo de agua, este enfoque es muy útil, puesto que permite analizar el problema inverso, es decir, conocer la probabilidad de que un suelo presente cierto coeficiente de permeabilidad *k*, después de que se haya observado cierto gasto *q* en una sección de observación. Con este propósito, es posible emplear la fórmula encontrada por el probabilista *Thomas Bayes*, conocida como *Teorema de Bayes* para la probabilidad de causas (*Mendenhall*, 1982). A primera vista, este teorema no es más que una aplicación de las probabilidades condicionales, sin embargo, ha sido clave en el desarrollo de la *inferencia*

estadística bayesiana en la que se emplea la interpretación subjetiva de la probabilidad (Canavos, 1988). Esta regla se define como^(*):

$$f(k/q) = \frac{f(q/k)f_k(x)}{\int_k f(q/k)f_k(x)dx} \quad (5.1)$$

En la cual, $f_k(x)$ se denomina la función de densidad de probabilidad *a priori* de k , porque representa la distribución de los coeficientes de permeabilidad antes de llevar a cabo el experimento. La especificación de la forma de $f_k(x)$ depende de la convicción del investigador con respecto a los valores de k antes de que la información muestral sea conocida. Esta convicción se puede basar en cualquier tipo de información que se encuentre disponible, incluyendo el juicio subjetivo. Si se desconoce completamente la distribución $f_k(x)$, Bayes sugiere que estas probabilidades se tomen todas con el mismo valor, es decir, suponer que las poblaciones sobre las cuales se define el experimento son igualmente probables y, por lo tanto, asignar las mismas probabilidades a los diversos valores de k . $f(q/k)$ se denomina *función de verosimilitud*, porque representa el grado de concordancia del resultado muestral q , dado el valor del coeficiente de permeabilidad k . $f(k/q)$ se conoce como la *función de densidad de probabilidad a posteriori* de k dado q ; misma que refleja el grado de creencia modificado del investigador con respecto a la variable aleatoria k después de obtener información muestral. Es importante notar que, en un futuro, la función de densidad de probabilidad *a posteriori* puede convertirse en una función de densidad de probabilidad *a priori*, cuando sea necesario llevar a cabo otra revisión con respecto a la variable aleatoria k .

5.5 PLANTEAMIENTO PARA INVESTIGACIONES FUTURAS

A lo largo de este capítulo se expusieron ciertas herramientas probabilistas especialmente útiles en el análisis del flujo de agua a través de suelos. Los posibles temas de investigación que se proponen al respecto son:

- Obtener la incertidumbre en los resultados de análisis típicos de flujo de agua representando la incertidumbre espacial sobre los coeficientes de permeabilidad, k , del suelo por medio de *campos aleatorios*. Es preferible que estos campos sean de tipo *lognormal*, porque tienen un comportamiento estocástico más estable. Asimismo, tomar en cuenta, la *dependencia espacial* de k en los distintos puntos del medio analizado, por medio de la denominada *escala de fluctuación* θ_k ^(**).
- Estudiar mediante simulaciones el *fenómeno de percolación*, es decir, examinar las implicaciones que presenta la interrupción del proceso de percolación (por la presencia de un material impermeable) o la formación de caminos (por la presencia de materiales muy permeables) a través de los cuales circula el agua con facilidad.
- Efectuar *análisis bayesianos* en los problemas de este tipo, para determinar la *función de densidad de probabilidad a posteriori* de k , después de haber sido calculados los gastos q a partir de una distribución *a priori* de k . Este tipo de análisis puede ser de gran utilidad para resolver el problema inverso, es decir estimar la permeabilidad del suelo a partir de observaciones piezométricas o de gasto.

(*) Para una variable aleatoria continua, en este caso, referida al coeficiente de permeabilidad k .

(**) De manera burda se define como la distancia más allá de la cual el campo no está correlacionado.

CONCLUSIONES

6

Se ha mostrado en esta tesis que el *Método de Elementos Finitos (MEF)* es una herramienta útil para la solución de problemas de flujo de agua. El algoritmo *FLOWNETS*, desarrollado como parte de este trabajo, permite obtener cargas hidráulicas, velocidades de flujo y gastos, y proporciona los elementos para trazar las redes de flujo en el medio analizado. Conviene remarcar que cuando un suelo homogéneo e isótropo se analiza con el *MEF* las ventajas de esta técnica no son muy notorias debido a que la solución por este u otros métodos (red de flujo, etc.) es relativamente sencilla, sin embargo, cuando se trata de suelos anisótropos o suelos que constan de diversos materiales (con múltiples condiciones de frontera), las ventajas del *MEF* son muy significativas, ya que las soluciones analíticas (teoría de la sección transformada, etc.) no son aplicables o requieren de una serie de modificaciones que hacen tedioso y complicado el análisis.

Por otra parte, la incertidumbre en los parámetros mecánicos e hidráulicos de los suelos es un hecho en la ingeniería geotécnica. Factores tales como: variación espacial, muestreos limitados, errores de medición, estimaciones subjetivas, métodos de análisis, etc. contribuyen a introducir elementos aleatorios en el trabajo del geotecnista. Los métodos probabilistas, permiten *complementar* los análisis convencionales, proporcionando los medios para cuantificar los grados de incertidumbre de los resultados del análisis de un problema determinado. Estos métodos permiten introducir un grado mayor de realismo en los análisis geotécnicos. *Es preferible tener vagamente razón que equivocarse con precisión.*

En los análisis de flujo de agua, es particularmente necesario tomar en cuenta la naturaleza aleatoria de los coeficientes de permeabilidad del suelo. En esta exposición se mostró que el *Método del Elemento Finito Estocástico (MEFE)* es una herramienta poderosa para lograr este objetivo. Sin embargo, su empleo es delicado ya que requiere que se represente en forma realista la incertidumbre existente sobre las permeabilidades a través de coeficientes de variación y matrices de covarianzas cuya definición ya sea mediante fundamentos subjetivos (experiencia) u objetivos (geoestadística), es una fase que debe realizarse con cuidado y que depende en cierta medida del analista.

Para la aplicación del *MEFE* a la resolución de problemas de flujo de agua, los algoritmos *MEFLUSKO* y *SFEMLOGK*, presentados en esta tesis permiten, además de realizar análisis deterministas, llevar a cabo análisis probabilistas por medio de una aproximación de *Primer*

Orden - Segundos Momentos. Es decir que, introduciendo la incertidumbre en los coeficientes de permeabilidad k , estos algoritmos permiten determinar la incertidumbre en las velocidades, gastos, gradientes y potenciales hidráulicos calculados, el primero considerando como variable aleatoria el coeficiente de permeabilidad k , y el segundo considerando como variable aleatoria el logaritmo de tal coeficiente ($\log k$).

Los ejemplos de aplicación presentados muestran que:

- Los análisis deterministas del flujo de agua pueden complementarse con análisis estocásticos con poco esfuerzo adicional recurriendo a los algoritmos desarrollados en esta tesis.
- En *medios homogéneos e isótropos* con permeabilidad aleatoria, no existe incertidumbre en la carga ni en el *gradiente hidráulico*, lo que era de esperarse puesto que, en este caso, la carga hidráulica no depende del coeficiente de permeabilidad k . El coeficiente de variación de la velocidad de flujo, varía en el mismo sentido que el de la permeabilidad, es decir, $\sigma_k / E\{k\} = \sigma_v / E\{V\}$. En la misma forma, el coeficiente de variación del gasto varía de igual manera que el de k . Lo mismo se aplica a medios *homogéneos anisótropos* con permeabilidad aleatoria pero con relación de anisotropía determinista.
- En *medios heterogéneos*, la incertidumbre sobre la carga hidráulica depende de la incertidumbre sobre la relación entre las diversas permeabilidades. Esta incertidumbre tiende a ser máxima en los puntos del medio más alejados de las fronteras con condiciones impuestas. Lo mismo se aplica a medios *homogéneos anisótropos* con relación de anisotropía aleatoria.
- En todos los medios, la incertidumbre sobre la carga hidráulica, resulta obviamente nula en aquellas zonas donde los valores de h son conocidos, es decir, en los lugares donde tales valores fueron impuestos como condiciones de frontera del problema.
- La incertidumbre sobre la carga hidráulica debe expresarse en términos de desviación estándar y no de coeficiente de variación puesto que el valor esperado de la carga hidráulica depende del nivel de referencia (arbitrario) elegido.
- A una mayor correlación positiva entre los coeficientes de permeabilidad asignados a diferentes subdominios del medio, corresponde generalmente una menor incertidumbre tanto en la carga como en el gradiente hidráulico; por lo contrario, la incertidumbre en la velocidad de flujo y en el gasto tiende a aumentar.
- La incertidumbre sobre los coeficientes de permeabilidad puede plantearse indiferentemente en términos de estas variables o de sus logaritmos. Tomando en cuenta el amplio intervalo en que pueden variar estos coeficientes, el planteamiento en términos de logaritmos es generalmente el más conveniente.

Las modelaciones probabilistas más avanzadas examinadas en esta tesis plantean perspectivas adicionales interesantes, en particular para el estudio del fenómeno de percolación y para la resolución del problema inverso (*análisis bayesiano*). Las investigaciones futuras que se realizarán como continuación del presente trabajo se orientarán en estas direcciones.

BIBLIOGRAFÍA

Alonso, E. E. & Melloni, G., 1987, Accuracy of Stochastic Finite Element Analysis of Seepage Problems, ICAPS5, Vancouver, pp 622-630.

Auvinet, G., 1997, Enfoque variacional aplicado al flujo de agua en suelos, Apuntes del Seminario de Elementos Finitos para Geotecnistas, DEPTI, UNAM.

Auvinet, G., 1999, Apuntes del Seminario de Confiabilidad y Análisis de Riesgos en Geotecnia, DEPTI, UNAM.

Auvinet, G., 1975, Técnicas de Monte Carlo, Cap. 6 del libro Presas de Tierra y Enrocamiento, editado por R. J. Marsal y D. Reséndiz, Editorial LIMUSA, pp 123-131, México.

Auvinet, G., 1994, Modélisation stochastique de la répartition spatiale des propriétés des sols et des ouvrages en terre, Actes des Journées Nationales sur les "Applications des Statistiques et Probabilités en Analyse des Matériaux et des Ouvrages", pp. 159-171, Cachan, Mar. 30-31, France

Auvinet, G., Bouayed, A. & Ben Cheikh, M.N., 1995, Modélisation stochastique par éléments finis en géomécanique, Actes du Douzième Congrès Français de Mécanique, Strasbourg, Sept., Vol 4, pp 204-210, France.

Auvinet, G., Bouayed, A., López, A. & Orlandi, S., 1996, Stochastic Finite Element Method in Geomechanics, Geotechnical Engineering Congress, ASCE, Uncertainty '96, Madison, Wisconsin, USA.

Auvinet, G. & Abaziou, L., 1993, Application of random field theory to control of compaction of earth embankments, 3rd CODATA Conference on Geomathematics and Geostatistics, Enschede, Holland, June 9-11, 1993, published in Sciences de la Terre, N° 32, pp. 449-460, Nancy, France

Auvinet, G., 1976, Apuntes de Probabilidad y Estadística, División de Estudios de Posgrado Facultad de Ingeniería, UNAM.

Auvinet, G. & Esquivel, R., 1986, Impermeabilización de Lagunas Artificiales, Editorial LIMUSA y SMMS, México.

Balas, J., Sládek, J. & Sládek, V., 1989, Stress Analysis by Boundary Element Methods, Studies in Applied Mechanics 23, ELSEVIER.

Bathe & Wilson, 1976, Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice Hall Inc.

Ben Cheikh, M. N., 1994, Modélisation stochastique par éléments finis des écoulements permanents, Mémoire de DEA, Institut National Polytechnique de Lorraine, France.

Benjamin, J. R. & Cornell, C. A., 1970, Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers, Mc Graw-Hill Book Co. Inc., New York.

Berry, P. L. & Reid, D., 1993, Mecánica de suelos, Mc Graw-Hill, México.

- Bittnar, Z. & Sejnoha, J.*, 1996, Numerical Methods in Structural Mechanics, ASCE, Thomas Telford Publications.
- Bourdeau, Ph. L.*, 1991, Stochastic theory of one-dimensional secondary compression, Proceedings of the Tenth European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol 1, pp 189-192.
- Cambou, B.*, 1974, Método del Elemento Finito. Análisis de incertidumbre de Primer Orden, Publicación del Instituto de Ingeniería N° 339, UNAM, México.
- Canavos, G.*, 1988, Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y métodos, Mc Graw-Hill, México.
- Chang, T. P.*, 1993, Dynamic finite element analysis of a beam on random foundation, Computers and Structures, Vol 48, N° 4, pp 583-589.
- Christian, J. T.*, 1983, Flow nets from finite element data, Int. Journal of numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol 4, pp 191-196.
- Darcy, H.*, 1856, Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon, Dalmont, Paris.
- Darrag, A. & Tawil, M.*, 1993, Consolidation of soils under stochastic initial excess pore pressure, Applied Mathematical Modelling, Vol 17, N° 11, pp 609-612.
- Dobry, R. & Taboada-Urtuzuastegui, V. M.*, 1991, Monte Carlo simulations of the dynamic response of pile groups, Proceedings of the Geotechnical Engineering Congress, New York, USA, Vol 1, N° 27, pp 367-378.
- Elsgolts, L.*, 1977, Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional, Edit MIR, Moscú.
- Fenton, G. A.*, 1996, Data Analysis/Geostatistics, Chapter 4 of Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering, edited by G. A. Fenton, ASCE, Uncertainty'96 Conference, Madison, Wisconsin, USA., pp 47-69.
- Finn, W. D. L.*, 1967, Finite Element Analysis of Seepage through dams, Proceedings American Society of Civil Engineers, Vol 93.
- Flores, R.*, 1999, Flujo de agua a través de suelos, Avances en Hidráulica 4, Asociación Mexicana de Hidráulica e Instituto Mexicano de Tecnología del agua, México.
- Gilbert, R. B.*, 1996, Basic Random Variables, Chapter 2 of Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering, edited by G. A. Fenton, ASCE Uncertainty'96 Conference, Madison, Wisconsin, USA., pp 10-34.
- Gilles de Gennes, P.*, 1976, La percolation: le concept unificateur, La Recherche, France, N° 72, pp 919-927.
- Griffiths, D. V., Fenton, G. A. & Paice, G. M.*, 1996, Reliability-based exit gradient desing of water retaining structures, Proceedings of uncertainty 1996, ASCE, Vol 1, pp 518-533.

- Hachich, W. & Vanmarcke, E.*, 1983, Probabilistic updating of pore pressure fields, *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol 109, N° 3, pp 373-387.
- Hisada, T. & Noguchi, H.*, 1989, Development of a nonlinear stochastic finite element method and its application, *Proceedings of ICOSSAR '89, the 5th International Conference on Structural Safety and Reliability, Part II*, New York, USA, pp 1097-1104.
- Hernández R., D. A.*, 1990, Modelo de Hele-Shaw aplicado al estudio del flujo de agua en suelos, Tesis de Licenciatura (dirigida por R. Flores), Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Ishii, K. & Suzuki, M.*, 1987, Stochastic finite element method for slope stability analysis, *Structural Safety*, Vol 4, N° 2, pp 111-129.
- Istok, J.*, 1989, *Groundwater Modeling by the Finite Element Method*, American Geophysical Union, Water Resources Monograph 13.
- Juárez B., E. & Rico R.*, 1974, *Mecánica de suelos. Tomo I Fundamentos de la Mecánica de Suelos*, Edit LIMUSA, México.
- Juárez B., E. & Rico R.*, 1974, *Mecánica de suelos. Tomo III Flujo de agua en suelos*, Edit LIMUSA, México.
- Kashef, A. A. I.*, 1987, *Groundwater Engineering*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc.
- Kazda, I.*, 1990, *Finite Element Techniques in Groundwater Flow Studies with Applications in Hydraulic and Geotechnical Engineering*, ELSEVIER.
- Lambe, T. W. & Whitman, R. V.*, 1972, *Mecánica de suelos*, Edit LIMUSA, México.
- Levi, E.*, 1980, *Teorías y métodos de las matemáticas aplicadas*, Facultad de ingeniería, UNAM.
- Livesley, R. K.*, 1994, *Elementos finitos, introducción para ingenieros*, Edit LIMUSA, México.
- López, N. P. & Auvinet, G.*, 1998, Flujo de agua en suelos con permeabilidad aleatoria, Sesión 7. Innovaciones Tecnológicas de la XIX Reunión Nacional de Mecánica de Suelos, Puebla 1998, Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos A. C., pp 404-411.
- López, N. P.*, 1998, Manual de los algoritmos FILEFLOW, FLOWNETS, MEFLUSKO y SFEMLOGK, Instituto de Ingeniería, UNAM.
- Mahadevan, S. & Haldar, A.*, 1991, Practical random field discretization in stochastic finite element analysis, *Structural Safety*, N° 9, pp 283-304.
- Mantoglou, A. & Gelhar, L.*, 1987, Stochastic modeling of large-scale transient unsaturated flow systems, *Water Resources Research*, Vol 23, N° 1, pp 37-46.
- Marsal, R. J. & Reséndiz, D.*, 1975, *Presas de tierra y enrocamiento*, LIMUSA, México.
- Marsal, R. J., Roldán, D. & Flores, J.*, 1976, Presa Francisco Zarco, Comportamiento de Presas Construidas en México, SRH, CFE, II (UNAM), Contribución al XII Congreso Internacional de Grandes Presas, México.

- Mendenhall, W.*, 1982, *Introducción a la Probabilidad y la Estadística*, Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V., México.
- Miller, I. & Freund, J.*, 1986, *Probabilidad y Estadística para ingenieros*, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México.
- Mood, A. M. & Graybill, F. A.*, 1963, *Introduction to the Theory of Statistics*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc.
- Nakamura, S.*, 1992, *Métodos numéricos aplicados con software*, Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A., México.
- Neuman, S. P. & Witherspoon, P. A.*, 1970, *Finite Element Method of Analyzing Steady Seepage with a Free Surface*, *Water Resources Research*, Vol 6, N° 3, pp 889-897.
- Orlandi, S.*, 1996, *Método del elemento finito estocástico. Análisis no lineal*, Tesis de Maestría (dirigida por *G. Auvinet*), DEPMI, UNAM.
- Panov, D. J.*, 1963, *Formulas for the Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Method of Differences*, FREDERICK UNGAR PUBLISHING CO., New York.
- Parzen, E.*, 1960, *Modern Probability Theory and its Applications*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Phoon, K., Quek, S., Chow, Y. & Lee, S.*, 1990, *Reliability analysis of pile settlement*, *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol 116, N° 11, pp 1717-1735.
- Righetti, G. & Harrop-Williams, K.*, 1988, *Finite element analysis of random soil media*, *Journal of Geotechnical Engineering*, Vol 114, N° 1, pp 59-75.
- Rodríguez, J. F.*, 1996, *Determinación de las pérdidas por filtración en una laguna artificial de evaporación solar de 1400 Ha*, Tesis de Licenciatura (dirigida por *G. Auvinet*), ENEP Acatlán, UNAM.
- Röhnisch, A. & Marotz, G.*, 1965, *On the movement of groundwater through anisotropic soil*, *Proceedings of the Sixth International Conference on Soil Mechanics and foundation Engineering*, Montreal, Canadá, Vol I, pp 104-108.
- Rosidi, D., Kavvas, M. & Shen, C.*, 1993, *Random responses of soil deposits subjected to earthquake loading*, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol 12, N° 4, pp 227-237.
- Rouleau, A. & Gale, J. E.*, 1987, *Stochastic discrete fracture simulation of groundwater flow into an underground excavation in granite*, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, Vol 4, N° 2, pp 99-112.
- Rubin, Y. & Dagan, G.*, 1992, *A note on head and velocity covariances in three-dimensional flow through heterogeneous anisotropic porous media*, *Water Resources Research*, Vol 28, N° 5, pp 1463-1470.

Sellmeijer, J. B., 1981, Piping due to flow towards ditches and holes, Proceedings of Euromech 143 Flow and Transport in Porous Media, edited by A. Verruijt y F. B. Barends, A. A. BALKEMA, pp 69-72.

Shante, V. & Kirkpatrick, S., 1971, An introduction to percolation theory, Advances in Physics, Vol 20, pp 325-357.

Silliman, S. E., 1990, Influence of grid discretization on the percolation probability within discrete random fields, Journal of Hidrology, Vol 3, N° 1, pp 177-191.

Simon, A. L., 1983, Hidráulica básica, Edit LIMUSA, México.

Smith, L. & Freeze, A., 1979, Stochastic analysis of steady state groundwater flow in a bounded domain. One-dimensional simulations, Water Resources Research, Vol 15, N° 3, pp 521-528.

Smith, R. & Hebbert, R., 1979, A Monte Carlo analysis of the hydrologic effects of spatial variability of infiltration, Water Resources Research, Vol 15, N° 2, pp 419-429.

Southwell, R. V., 1940, Relaxation Methods in Engineering Science, Oxford University Press.

Spiegel, M. R., 1964, Theory and Problems of Complex Variables with an Introduction to Conformal Mapping and its Applications, SCHAUM PUBLISHING CO., New York.

Suzuki, M. & Ishii, K., 1994, Parameter identification and probabilistic prediction of settlement of embankment, Structural Safety, Vol 14, N°1-2, pp 47-59.

Terzaghi, K. & Peck, R. B., 1955, Mecánica de suelos en la ingeniería práctica, Edit EL ATENEO.

Tristán, A., 1975, Programa para resolver el flujo establecido en suelos por el método de elementos finitos, Revista de Ingeniería, UNAM, julio-septiembre.

Vanmarcke, E., 1983, Random fields: analysis and synthesis, Cambridge, Massachusetts, London, England.

Whitlow, R., 1994, Fundamentos de mecánica de suelos, Edit CECSA, México.

Yamazaki, F., Shinosuka, M. & Dasgupta, G., 1988, Neumann expansion for stochastic finite element analysis, Journal of Engineering Mechanics, Vol 114, N° 8, pp 1335-1354.

Zangar, C. N., 1953, Theory and problems of water percolation, Engineering Monographs, United States Department of the Interior, BUREAU OF RECLAMATION, Denver, Colorado, N° 8.

Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L., 1994, El método de los elementos finitos, Vol 1, Mc Graw-Hill, México.

Zienkiewicz, O. C., Meyer, P. & Cheung, Y. K., 1966, Solution of Anisotropic Seepage Problems by Finite Elements, Proceedings American Society of Civil Engineers, Vol 92 EMI, pp 111-120.

ANEXO A

ANÁLISIS DEL FLUJO DE AGUA EN SUELOS POR MEDIO DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS UTILIZANDO UN ENFOQUE VARIACIONAL

A.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Conjuntamente con aquellos problemas en los que es necesario determinar los máximos y mínimos de cierta función $Y = g(X)$, con frecuencia surge la necesidad, en los problemas físicos, de hallar los valores máximos o mínimos de un género especial de magnitudes llamadas *funcionales*. Las *funcionales* se definen como magnitudes variables cuyos valores se determinan mediante la elección de una o varias funciones (Elsgolts, 1977). Específicamente una *funcional* es una función de función.

El *enfoque variacional* consiste en sustituir la resolución de una ecuación en un determinado dominio por la obtención del mínimo de una funcional asociada a dicha ecuación y definida en el mismo dominio. Tal enfoque es el que se emplea en esta tesis y se ilustrará a continuación, con la aplicación del *Método de Elementos Finitos (MEF)* al flujo establecido de agua en medios porosos.

A.2 OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN POTENCIAL ϕ

Se supondrá conocida la teoría del flujo establecido de agua, recordando simplemente que la carga hidráulica h en un punto del medio está definida por la expresión de Bernoulli (despreciando el cuadrado de la velocidad):

$$h = z + \frac{p}{\gamma_w} \quad (\text{A.1})$$

donde z es la carga de posición, $\frac{p}{\gamma_w}$ es la carga de presión y γ_w es el peso volumétrico del agua.

Para la aplicación del *MEF* (Auvinet, 1997) el medio analizado se divide en pequeños elementos que se adaptan a su geometría. Se puede por ejemplo sustituir el dominio donde se presenta el flujo por elementos triangulares cuyos vértices son los nodos i, j, m (Fig A.1).

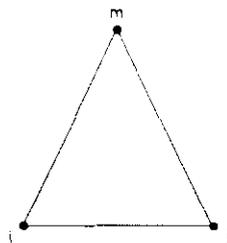


Fig A.1 Elemento finito triangular

Dentro del MEF se acepta como aproximación que la carga hidráulica varía linealmente dentro del triángulo (elemento finito):

$$h = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 z \quad (\text{A.2})$$

Esta expresión debe ser válida en particular para los tres nodos i, j, m del elemento triangular, es decir:

$$\begin{aligned} h_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 z_i \\ h_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 z_j \\ h_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 z_m \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde x_i y z_i son las abscisas y ordenadas del nodo i y de manera análoga para los nodos j y m .

La resolución del sistema de ecuaciones anterior proporciona las expresiones de α_i :

$$\alpha_1 = \frac{\begin{bmatrix} h_i & x_i & z_i \\ h_j & x_j & z_j \\ h_m & x_m & z_m \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_m & z_m \end{bmatrix}} \quad \alpha_2 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & h_i & z_i \\ 1 & h_j & z_j \\ 1 & h_m & z_m \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_m & z_m \end{bmatrix}} \quad \alpha_3 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & x_i & h_i \\ 1 & x_j & h_j \\ 1 & x_m & h_m \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}} \quad (\text{A.4})$$

donde el denominador se llama 2Δ , siendo Δ el área del triángulo:

$$\Delta = \frac{1}{2} (x_i b_i + x_j b_j + x_m b_m) \quad (\text{A.5})$$

por tanto, los α_i resultan:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left\{ h_i [x_j z_m - x_m z_j] + h_j [x_m z_i - x_i z_m] + h_m [x_i z_j - x_j z_i] \right\} / 2\Delta \\ \alpha_2 &= \left\{ h_i [z_j - z_m] + h_j [z_m - z_i] + h_m [z_i - z_j] \right\} / 2\Delta \\ \alpha_3 &= \left\{ h_i [x_m - x_j] + h_j [x_i - x_m] + h_m [x_j - x_i] \right\} / 2\Delta \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

sustituyendo (A.6) en (A.2):

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2\Delta} \left\{ h_i [x_j z_m - x_m z_j] + h_j [x_m z_i - x_i z_m] + h_m [x_i z_j - x_j z_i] \right. \\ &\quad \left. + (h_i [z_j - z_m] + h_j [z_m - z_i] + h_m [z_i - z_j]) x \right. \\ &\quad \left. + (h_i [x_m - x_j] + h_j [x_i - x_m] + h_m [x_j - x_i]) z \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

factorizando:

$$h = \frac{1}{2\Delta} \left\{ h_i \left[(x_j z_m - x_m z_j) + (z_j - z_m)x + (x_m - x_j)z \right] \right. \\ \left. + h_j \left[(x_m z_i - x_i z_m) + (z_m - z_i)x + (x_i - x_m)z \right] \right. \\ \left. + h_m \left[(x_i z_j - x_j z_i) + (z_i - z_j)x + (x_j - x_i)z \right] \right\} \quad (\text{A.8})$$

y considerando:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j z_m - x_m z_j & a_j &= x_m z_i - x_i z_m & a_m &= x_i z_j - x_j z_i \\ b_i &= z_j - z_m & b_j &= z_m - z_i & b_m &= z_i - z_j \\ c_i &= x_m - x_j & c_j &= x_i - x_m & c_m &= x_j - x_i \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

La expresión que define la carga hidráulica resulta finalmente:

$$h = \frac{1}{2\Delta} \left[(a_i + b_i x + c_i y)h_i + (a_j + b_j x + c_j y)h_j + (a_m + b_m x + c_m y)h_m \right] \quad (\text{A.10})$$

Además, si se introducen las *funciones de forma*:

$$\begin{aligned} N_i &= a_i + b_i x + c_i z \\ N_j &= a_j + b_j x + c_j z \\ N_m &= a_m + b_m x + c_m z \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

se puede escribir que la carga hidráulica h , de manera vectorial, es:

$$\{ h \} = \frac{1}{2\Delta} \{ N_i \quad N_j \quad N_m \} \begin{Bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_m \end{Bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

en la cual se ha introducido el vector de cargas hidráulicas de los tres nodos del elemento:

$$\{ h \}^e = \begin{Bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_m \end{Bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Derivando la expresión (A.10) se obtienen los dos componentes del gradiente hidráulico:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} [b_i h_i + b_j h_j + b_m h_m] \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{1}{2\Delta} [c_i h_i + c_j h_j + c_m h_m] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

De manera vectorial el gradiente hidráulico se escribe:

cada elemento del dominio analizado. La estructura de este algoritmo se describe brevemente a continuación:

1. Lectura del archivo de datos generado con *FILEFLOW*^(*)
2. Obtención de la función potencial ϕ .
 - Definición de la *silueta (skyline)* de la matriz $[S]$.
 - Definición del vector de direcciones de los elementos de la diagonal de $[S]$.
 - Obtención de la matriz geométrica $[B]$ y del área Δ del elemento.
 - Definición de los coeficientes $C_x = k_x / 4\Delta$ y $C_z = k_z / 4\Delta$.
 - Integración del vector general $\{A\}$ equivalente a $[S]$.
 - Multiplicación de $\{A\}\{h\}$ teniendo en cuenta las cargas hidráulicas impuestas.
 - Solución del sistema de ecuaciones $\{A\}\{h\} = 0$ por el *Método de Eliminación Gaussiana*.
3. Cálculo de las velocidades, gradientes y gastos.
4. Obtención de la función de corriente ψ .
(Similar a la obtención de ϕ , pero ahora los coeficientes C_x y C_z son $C_x = 1 / 4\Delta k_x$ y $C_z = 1 / 4\Delta k_z$).
5. Representación gráfica de la malla de elementos finitos con los vectores de velocidad de cada elemento.
6. Impresión de los resultados.
7. Almacenamiento en disco de los resultados.
8. Trazo de la red de flujo usando un algoritmo de interpolación.

A continuación se presentan algunos ejemplos de redes de flujo obtenidas con este algoritmo. Tales ejemplos corresponden a casos típicos del flujo de agua a través de la cimentación de estructuras supuestas impermeables y, en todos los casos, el suelo analizado se considera homogéneo e isótropo. Casos de suelos anisótropos y heterogéneos, así como problemas de flujo a través del cuerpo de una presa se tratan en la parte principal de esta tesis.

La red de flujo de la Fig A.2 se realizó con la finalidad de verificar la ortogonalidad de las líneas equipotenciales y de corriente, cuyos valores fueron calculados con el algoritmo mencionado. Se supone que el dominio analizado es un suelo homogéneo e isótropo con $k_x = k_z = 1 \times 10^{-2} \text{ m/s}$ de forma cuadrangular con 25 m de lado, y para representarlo se empleó una malla de 50 elementos finitos y 36 nodos, cuyo archivo de datos se denominó *N\$=CUADRO.DAT*. Se consideró además, una pérdida de carga de $\Delta h = 10 \text{ m}$, y las siguientes condiciones iniciales: para la función potencial $\phi = 35 \text{ m}$ (aguas arriba) y $\phi = 25 \text{ m}$ (aguas abajo), y para la función de corriente $\psi = 0$ (en el contacto suelo - estructura impermeable).

(*) Algoritmo descrito al final del capítulo 3.

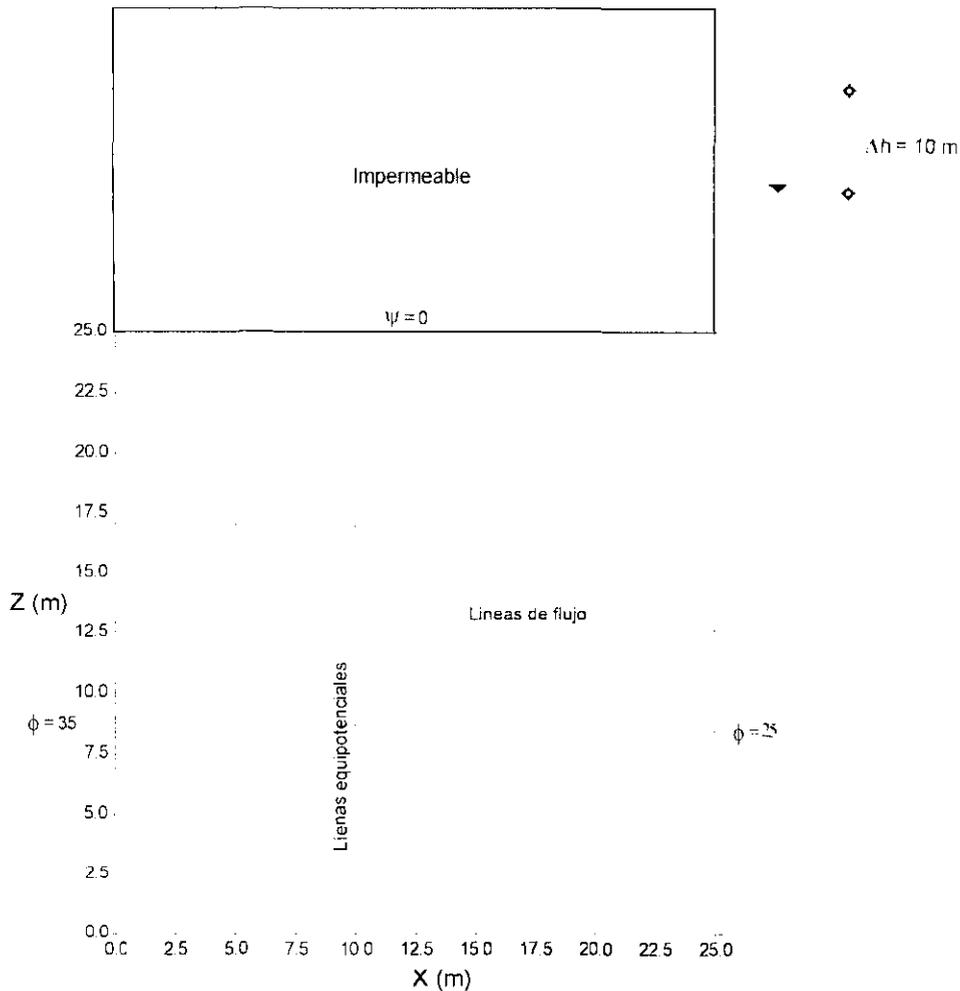


Fig A.2 Red de flujo que verifica la ortogonalidad de las líneas de flujo y equipotenciales obtenidas con el algoritmo *FLOWNETS*

La Fig A.3 muestra un ejemplo elemental constituido por un suelo homogéneo e isótropo, con $k_x = k_z = 1 \text{ m/s}$, de forma trapezoidal y una estructura considerada impermeable. La región de flujo se simuló con una malla de 24 elementos finitos y 20 nodos ($NS=TRAPECIO.DAT$); además, se consideraron una pérdida de carga $\Delta h = 4 \text{ m}$ y las siguientes condiciones iniciales: para la función potencial $\phi = 25 \text{ m}$ (aguas arriba) y $\phi = 21 \text{ m}$ (aguas abajo), y para la función de corriente $\psi = 0$ (en el contacto suelo - estructura impermeable).

En la Fig A.4 se muestra el caso de una tablestaca considerada impermeable. El suelo, homogéneo e isótropo con $k_x = k_z = 1 \times 10^{-4} \text{ m/s}$, se representó con una malla de 68 elementos finitos y 49 nodos ($NS=TABLET2.DAT$). Se consideró una pérdida de carga $\Delta h = 18.75 \text{ m}$ y las siguientes condiciones iniciales: para la función potencial $\phi = 112.5 \text{ m}$ (aguas arriba) y $\phi = 93.75 \text{ m}$ (aguas abajo), y para la función de corriente $\psi = 0$ (en el contacto suelo - tablestaca).

En estos dos últimos ejemplos (Figs A.3 y A.4) se puede apreciar que las condiciones de ortogonalidad entre las líneas de flujo y equipotenciales en algunas zonas no se cumplen, esto se debe a las diversas aproximaciones en las que se basan los cálculos, y al empleo posterior de un algoritmo de interpolación para el trazo de las mismas.

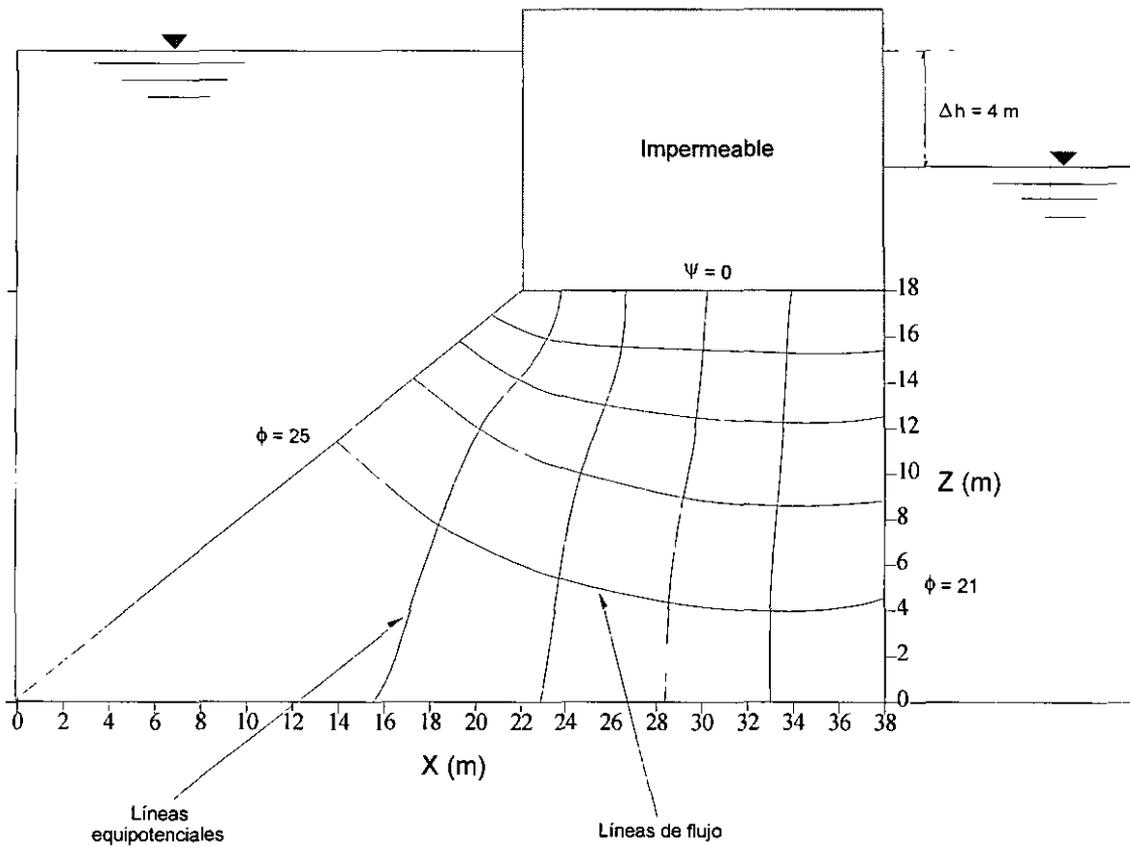


Fig A.3 Red de flujo en un dominio de forma trapezoidal

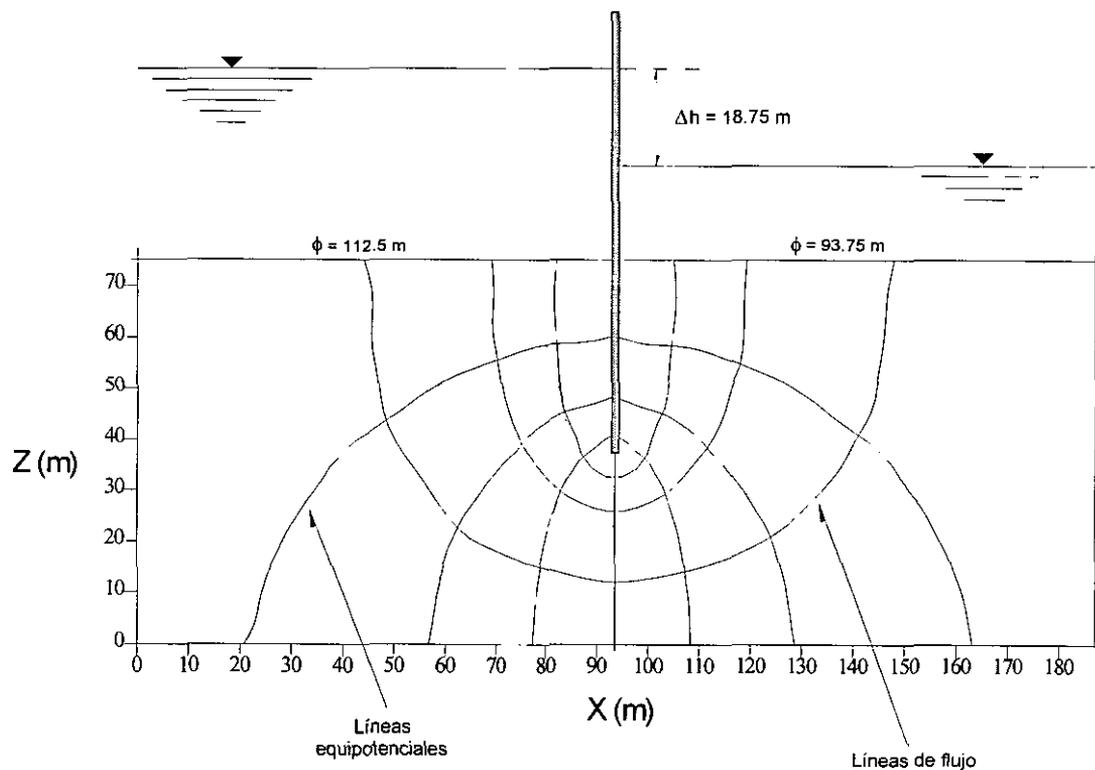


Fig A.4 Red de flujo bajo una tablestaca

ANEXO B

CAMPOS ALEATORIOS

B.1 DEFINICIÓN

Cuando una variable aleatoria es función de uno o varios parámetros (pertenecientes a conjuntos "indicadores") se llama *función aleatoria*. Cuando el parámetro es único y corresponde al tiempo la función aleatoria se llama *proceso estocástico* (Auvinet, 1999):

$$V(e, t) = V(t) \quad \text{donde } t \text{ es el tiempo} \quad (\text{B.1})$$

En Geotecnia, las funciones aleatorias empleadas para describir las variaciones espaciales de las propiedades del suelo dependen generalmente de una o varias de las tres coordenadas del espacio. En este caso, se usa el término de *campo aleatorio* (Auvinet, 1999):

$$V(e, X) = V(X) \quad X, \text{ punto de } R^p, p = 1, 2 \text{ o } 3 \text{ donde } X = x; (x, y) \text{ o } (x, y, z) \quad (\text{B.2})$$

Los parámetros del campo son funciones de las coordenadas del punto considerado:

Esperanza:

$$\mu_{V(X)} = E\{V(X)\} \quad (\text{B.3})$$

Varianza:

$$\sigma_{V(X)}^2 = \text{var}[V(X)] \quad (\text{B.4})$$

Densidad de probabilidad puntual:

$$f_{V(X)}(v, X) \quad (\text{B.5})$$

Densidad de probabilidad conjunta de las variables definidas en diferentes puntos X_1, \dots, X_n :

$$f_{V(X_1), \dots, V(X_n)}(v_1, \dots, v_n; X_1, \dots, X_n) \quad (\text{B.6})$$

Para describir el grado de dependencia lineal existente entre las variables aleatorias definidas en dos puntos diferentes, se introducen las funciones siguientes:

Autocorrelación:

$$R_V(X_1, X_2) = E\{V(X_1)V(X_2)\} \quad (\text{B.7})$$

Autocovarianza:

$$C_V = (X_1, X_2) = \text{cov}[V(X_1), V(X_2)] = E\{[V(X_1) - \mu_{V(X_1)}][V(X_2) - \mu_{V(X_2)}]\} \quad (\text{B.8})$$

Coefficiente de autocorrelación:

$$\rho_V(X_1, X_2) = \frac{C_V(X_1, X_2)}{\sigma_{V(X_1)} \sigma_{V(X_2)}} \quad (\text{B.9})$$

Variograma:

$$2\gamma_V(\tau) = E\{[V(X) - V(X + \tau)]^2\} \quad (\text{B.10})$$

El variograma es el momento de segundo orden del campo aleatorio incremental asociado al campo considerado.

Un campo es estacionario en el *sentido estricto* si sus densidades de probabilidad conjuntas definidas para cualquier grupo de puntos en el espacio son invariantes por traslación del grupo de puntos. Es difícil verificar el cumplimiento de esta condición general en la práctica. Es común referirse a campos estacionarios en el *sentido amplio* cuando presentan una esperanza constante y satisfacen las condiciones siguientes (Auvinet, 1999):

$$C_V(X_1, X_2) = C_V(X_2 - X_1) = C_V(\tau) \quad (\text{B.11})$$

$$\rho_V(X_1, X_2) = \rho_V(\tau) \quad (\text{B.12})$$

Los campos aleatorios, especialmente cuando son unidimensionales, se pueden describir asimismo recurriendo a las técnicas empleadas para el análisis de las señales (Papoulis, 1984). Se definen en particular las funciones siguientes:

Transformada de Fourier:

$$\Phi_V(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(X) e^{-i\omega X} dX \quad (\text{B.13})$$

Espectro de potencia (transformada de Fourier de la función de autocorrelación):

$$S_{VV}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_V(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{B.14})$$

Cuando se definen simultáneamente dos campos aleatorios, es posible introducir su función de covarianza mixta:

$$C_{V_1, V_2}(X_1, X_2) = \text{cov}[V_1(X_1), V_2(X_2)] \quad (\text{B.15})$$

B.2 TÉCNICAS DE ESTIMACIÓN

B.2.1 Kriging

El problema de la estimación del valor esperado y de la varianza del valor local o del promedio

V_{A_2} de una propiedad en un subdominio A_2 de un campo aleatorio, a partir del valor local o medio V_{A_1} obtenido por muestreo en otro subdominio A_1 , es un problema de gran interés práctico.

Una de las técnicas más aceptadas para realizar esta estimación es la conocida como "Kriging" (Journel, 1975). Esta técnica proporciona precisamente un estimador sin sesgo y con mínima varianza (*Best linear unbiased estimate* o *BLUE*) del valor local o medio de una propiedad en un subdominio A_2 a partir de datos obtenidos en otro subdominio A_1 . El Kriging solamente requiere el conocimiento (preciso o estimado) de la estructura de correlación del dominio (*variograma* o *autocovarianza*).

Suponiendo conocidos los valores $V(X_i)$ de la propiedad $V(X)$ en n puntos X_1, X_2, \dots, X_n , es posible estimar el valor de $V(X)$ en cualquier punto X (estimación local), o el promedio V_A de $V(X)$ en cualquier subdominio del campo (estimación global). En este último caso, se requerirá que el estimador de kriging V_A^* cumpla con las condiciones siguientes:

- Linealidad:

$$V_A^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i V(X_i) \quad (B.16)$$

- Ausencia de sesgo:

$$E\{V_A - V_A^*\} = 0 \quad (B.17)$$

- Varianza de estimación mínima:

$$\min \sigma_{V_A}^2 = \text{Var}[V_A - V_A^*] = E\{(V_A - V_A^*)^2\} \quad (B.18)$$

En un campo estacionario, la ec. (B.17) implica: $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

La varianza de la estimación puede escribirse como:

$$E\{(V_A - V_A^*)^2\} = E\{V_A^2\} - 2 E\{V_A V_A^*\} + E\{V_A^{*2}\} \quad (B.19)$$

$$E\{(V_A - V_A^*)^2\} = \text{Var}[V_A] - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{cov}[V(X_i), V_A] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_V(X_i, X_j) \quad (B.20)$$

$$\text{donde} \quad \text{cov}[V(X_i), V_A] = \frac{1}{A} \int_A C_V(X_i, X) dX \quad (B.21)$$

La forma cuadrática de la ec. (B.20) debe ser minimizada bajo la restricción $E\{V_A - V_A^*\} = 0$. Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, se obtiene el siguiente sistema de

ecuaciones lineales:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j C_V(X_i, X_j) - \mu = \text{cov}[V(X_i), V_A] \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{B.22})$$

La varianza de la estimación puede entonces estimarse como:

$$\sigma_{V_A}^2 = E\{(V_A - V_A^*)^2\} = \text{var}[V_A] + \mu - \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{cov}[V(X_i), V_A] \quad (\text{B.23})$$

Las $n+1$ ecuaciones lineales del sistema de kriging tienen $n+1$ incógnitas: los n factores de ponderación λ_j y el multiplicador de Lagrange μ .

En este tipo de estimación se toman en cuenta cuatro factores:

- La estructura de correlación del medio descrita por la autocovarianza $C_V(X_i, X_j)$ (o por el variograma).
- La geometría del dominio de estimación a través de $\text{var}[V_A]$.
- La posición relativa de los puntos de muestreo a través de $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C_V(X_i, X_j)$.
- La posición de estos mismos puntos respecto al dominio de estimación, a través de $\text{cov}[V(X_i), V_A]$.

B.2.2 Estimación condicional

Si la variación espacial de una variable puede modelarse usando un campo aleatorio Gaussiano, resulta fácil estimar el valor esperado y la varianza del valor local o medio V_{A_2} de esta propiedad en un subdominio A_2 , a partir del valor local o medio V_{A_1} obtenido por muestreo en el subdominio A_1 . Los valores condicionales del valor esperado y de la varianza son:

$$E\{V_{A_2} | V_{A_1}\} = E\{V_{A_2}\} + \rho_V \frac{\sigma_{VA_2}}{\sigma_{VA_1}} [V_{A_1} - E\{V_{A_1}\}] \quad (\text{B.24})$$

con:

$$\text{Var}[V_{A_2} | V_{A_1}] = \text{Var}[V_{A_2}] (1 - \rho_V^2) \quad (\text{B.25})$$

donde ρ_V es el coeficiente de correlación entre V_{A_1} y V_{A_2} .

Puede observarse que, en general, el conocimiento del campo en el dominio A_1 conduce a una corrección del valor esperado y a una reducción de la varianza del valor local o medio en el dominio A_2 . En la práctica, y dependiendo de la estructura de correlación del campo y de la posición relativa de A_1 y A_2 , la situación es generalmente intermedia entre los casos extremos siguientes:

- Si V_{A_1} y V_{A_2} no están correlacionados, entonces $\rho_V = 0$ y la información obtenida en A_1 no contribuye a reducir la incertidumbre sobre V_{A_2} .

- Si V_{A_1} y V_{A_2} están totalmente correlacionados, entonces $\rho_V = 1$ y $V_{A_2} = V_{A_1}$.

Lo anterior puede generalizarse a vectores de variables aleatorias representando valores locales o medios en diferentes subdominios (Vanmarcke, 1983). El vector Y_1 con M_1 variables puede ser estimado a partir de la observación del vector Y_2 con M_2 variables. Sean m_1 y m_2 los vectores de los valores esperados de los elementos de Y_1 y Y_2 . La matriz de covarianza de todas las variables puede ser particionada como sigue:

$$B_Y = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^T & B_{22} \end{bmatrix} \quad (B.26)$$

donde $B_{11} = B_{Y_1}$, $B_{22} = B_{Y_2}$ y $B_{12} = B_{Y_1, Y_2}$.

En este caso la predicción puede escribirse:

$$E\{Y_1 | Y_2 = y_2\} = m_1 + B_{12} B_{22}^{-1} [y_2 - m_2] \quad (B.27)$$

$$\text{con } B_{11|2} = B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{12}^T \quad (B.28)$$

donde $B_{11|2}$ es la matriz de covarianza *a posteriori* del vector Y_1 .

B.3 TÉCNICAS DE SIMULACIÓN

Simulación es el proceso por medio del cual se reemplaza el mundo real con base en un conjunto de hipótesis y modelos concebidos en el mundo real (Auvinet, 1999).

A continuación se explica la técnica de generación de campos aleatorios distribuidos normalmente (por ser los más sencillos). Sin embargo, otro tipo de campos pueden obtenerse por medio de una transformación apropiada de un campo distribuido normalmente. Por ejemplo, un *campo aleatorio distribuido lognormalmente* se puede obtener a partir de la siguiente expresión (Fenton, 1996):

$$X(\underline{x}) = \exp \left\{ \mu_{\ln x}(\underline{x}) + \sigma_{\ln x}(\underline{x}) \cdot G(\underline{x}) \right\} \quad (B.29)$$

donde $\mu_{\ln x}$ y $\sigma_{\ln x}$ son la media y la desviación estándar del $\ln x$ en función de \underline{x} , y $G(\underline{x})$ es un campo aleatorio distribuido normalmente con media cero, varianza unitaria y función de correlación $\rho_{\ln x}$.

B.3.1 Simulación incondicional

Este tipo de simulación requiere inicialmente de la generación de una secuencia de *variables aleatorias estándar independientes distribuidas normalmente* (con media cero y varianza unitaria), obtenidas a partir de dos variables aleatorias, U_i y U_{i+1} , distribuidas uniformemente entre 0 y 1 (Fenton, 1996):

$$Z_i = \sqrt{-2 \ln(1 - U_i)} \cos(2\pi U_{i+1})$$

$$Z_{i+1} = \sqrt{-2 \ln(1 - U_i)} \text{sen}(2\pi U_{i+1})$$
(B.30)

La forma más sencilla para generar un campo aleatorio es considerar que el mismo está representado por n puntos $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$, donde, para cada punto, se deben obtener realizaciones de X_1, X_2, \dots, X_n , con la estructura correcta de la media y la covarianza. Los elementos de la matriz de correlación $\underline{\rho}$ asociada a estos puntos son:

$$\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}[X_i, X_j]}{\sigma_x(\underline{x}_i)\sigma_x(\underline{x}_j)}$$
(B.31)

la matriz de correlación puede descomponerse en el producto de una matriz triangular inferior y su traspuesta:

$$\underline{L} \underline{L}^T = \underline{\rho}$$
(B.32)

esta descomposición, que recibe el nombre de *descomposición de Cholesky*, presenta ciertas desventajas: no puede llevarse a cabo cuando algunas de las X_i están perfectamente correlacionadas, es difícil de calcular cuando el número de puntos en el campo es demasiado grande, y tiende a generar errores de redondeo numérico. Sin embargo, ya existen algoritmos estándar para su cálculo (Fenton, 1994).

A partir de la matriz \underline{L} de la ec. (B.32), se puede obtener un *campo aleatorio normal estándar perfectamente correlacionado*, con una combinación lineal de las variables normales estándar independientes Z_j :

$$G_i = \sum_{j=1}^i L_{ij} Z_j; \quad i = 1, 2, \dots, n$$
(B.33)

Finalmente, los valores conocidos de la media y la varianza se pueden introducir para generar realizaciones de X_i , lo cual proporcionará el campo aleatorio:

$$X_i = \mu_x(\underline{x}_i) + \sigma_x(\underline{x}_i) G_i$$
(B.34)

Cuando el campo aleatorio X ya ha sido generado, puede utilizarse como punto de partida para un análisis determinista.

B.3.2 Simulación condicional

Suponiendo que el campo aleatorio $X(\underline{x})$ ha sido medido en los puntos $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_p$ y será simulado en los puntos $\underline{x}_{p+1}, \underline{x}_{p+2}, \dots, \underline{x}_n$. Se desea generar realizaciones de $X(\underline{x})$ que igualen de manera exacta los datos en p puntos y que sean aleatorias en los $n - p$ puntos restantes,

entonces, la *simulación de un campo aleatorio condicional* se lleva a cabo a partir de los siguientes pasos (Fenton, 1996):

1) De los datos conocidos calcular el valor estimado por el método del *Kriging* (Journel, 1975) en los puntos desconocidos $\underline{x}_{p+1}, \dots, \underline{x}_n$. Denominar a este campo $X_k(\underline{x})$. En los puntos conocidos, el campo X_k es igual a los datos. Puesto que se trata de una simulación condicional, la media del campo debe ser establecida con anterioridad.

2) Generar una realización incondicional del campo aleatorio usando la media, la varianza y la estructura de correlación de acuerdo con lo indicado en el inciso anterior; y denominar a este campo $X_u(\underline{x})$.

3) Calcular la estimación por *kriging* del campo en los puntos desconocidos, utilizando $X_u(\underline{x}_1), X_u(\underline{x}_2), \dots, X_u(\underline{x}_p)$ como los datos conocidos; es decir, generar un campo con el *Kriging* de la simulación incondicional. Denominar a este campo $X_s(\underline{x})$.

4) Combinar los tres campos para generar la realización condicional X_c de acuerdo con:

$$X_c(\underline{x}) = X_k(\underline{x}) + [X_u(\underline{x}) - X_s(\underline{x})] \quad (\text{B.35})$$

Entre los puntos conocidos, el término $[X_u(\underline{x}) - X_s(\underline{x})]$ representa una desviación aleatoria que, sumada al *kriging*, sirve para estimar X_k , de tal manera que la media de X_c es X_k con un incremento en la varianza lejos de los puntos conocidos.